HAL
open science

Modélisation des pertes énergétiques par défaut d'étanchéité dans un moteur de Stirling

Mohamed Tahar Mabrouk, Michel Feidt, Abdelhamid Kheiri

To cite this version:

Mohamed Tahar Mabrouk, Michel Feidt, Abdelhamid Kheiri. Modélisation des pertes énergétiques par défaut d'étanchéité dans un moteur de Stirling. Congrès Français de Thermique SFT 2014, Société Française Thermique, Jun 2014, Lyon, France. hal-01447037

HAL Id: hal-01447037

https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01447037

Submitted on 26 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation des pertes énergétiques par défaut d'étanchéité dans un moteur de Stirling

Mohamed Tahar MABROUK[1*], **Michel FEIDT**[1], **Abdelhamid KHEIRI**[1]

[1]Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
2, Avenue de la Forêt de Haye
54518 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex
*(auteur correspondant : mohamed-tahar.mabrouk@univ-lorraine.fr)

Résumé - L'étanchéité est l'un des problèmes majeurs à résoudre lors de la conception des moteurs Stirling. En effet, l'élimination des pertes de gaz entre la chambre de compression et de détente et entre la chambre de compression et le carter du moteur, synonymes de pertes énergétiques, est d'une importance capitale surtout si l'on travaille à de hautes pressions ou avec des gaz légers comme l'hélium ou l'hydrogène. L'utilisation des dispositifs classiques d'étanchéité augmente considérablement les dégradations d'exergie par frottements et diminue la fiabilité à cause des phénomènes d'usure. Pour ces raisons, le recours à des dispositifs sans contact permettant la diminution de ces pertes est d'actualité.
Dans ce travail, nous proposons un modèle dynamique analytique des pertes par fuites de gaz au niveau du « déplaceur » ainsi qu'au niveau piston moteur. Ces fuites sont modélisées en considérant des écoulements pulsés en espaces annulaires. Nous développons des expressions de ces pertes en fonction des grandeurs physiques mises en jeux. Cette démarche est très utile à la modélisation du moteur en vue de l'optimisation de ses rendements, et permet de faire de meilleurs compromis au niveau de sa conception.

Nomenclature

L	longueur, m
N	Vitesse de rotation du moteur, tr/s
p	pression, Pa
R	rayon, m
	const. spéc. des gaz parfaits, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
r	coordonnée radiale, m
T	température, K
t	temps, s
$\Re$	partie réelle d'un nombre complexe
u	vitesse, $m.s^{-1}$
$\dot{W}$	puissance, W
z	coordonnée axiale, m
$\Im$	partie imaginaire d'un nombre complexe

Symboles grecs

β	constante définie dans le texte, m^{-1}
δ	variation infinitésimale
μ	viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
ϕ	angle du vilebrequin, $degré$
ω	pulsation, $rad.s^{-1}$

Indices et exposants

C	compression
c	cylindre
Ca	carter
d	déplaceur
E	détente
f	fuite
n	ordre n de la série de Fourier
p	piston
t	total
z	gradient axial
0	ordre zéro de la série de Fourier
$*$	nombre complexe

1. Introduction

Le cycle de Stirling est une invention ancienne qui date du $\mathbf{19}^{ème}$ siècle. Depuis, cette technologie peine à se faire une place dans l'industrie et son utilisation reste restreinte à des applications de pointe telle que la production d'électricité en aérospatial ou la cryogénie. Mais, avec

l'intérêt grandissant pour la cogénération, le moteur Stirling devient de plus en plus intéressant surtout pour des gammes de puissance inférieure à $100\ kW_{el}$ où d'autres technologies telle que le cycle ORC présentent des performances moindres [1].

Le moteur Stirling est souvent conçu pour un fonctionnement en continu (production d'électricité) ce qui pousse le concepteur à chercher des solutions qui augmentent à la fois son rendement et sa fiabilité. En effet, pour ces applications, l'industrie cherche des technologies qui offrent une longue durée de vie et une nécessité de maintenance minime. Dans ce cadre, l'utilisation de dispositifs d'étanchéité sans contact est d'actualité. Ce type de dispositif cause des pertes de matière dans le moteur. En effet, le gaz de travail fuit de la chambre de compression à la chambre de détente à travers le jeu cylindre-déplaceur. Par ailleurs, il existe une fuite de matière plus importante entre la chambre de compression et le carter du moteur à travers le jeu cylindre-piston.

Plusieurs auteurs ont proposé des modélisations de ces pertes tel que Urieli [2] qui a utilisé un modèle statique simplifié (écoulement de Couette plan). Hirata [3] a modélisé l'écoulement de fuite comme un écoulement dans une tuyère dont le diamètre équivalent est déterminé expérimentalement. Huang [4] a déterminé le débit de fuite en considérant un écoulement compressible mais son modèle était statique. Donc, il n'est pas approprié pour de hautes vitesses de rotation.

Dans ce travail, nous présentons un modèle dynamique de pertes de matière par fuites purement analytique qui est valable dans le cas de faibles perturbations et nous discutons l'effet des pertes de matière sur les performances du moteur Stirling considéré.

2. Description du problème

Dans la figure 1 nous présentons, pour illustration, le schéma d'un moteur Stirling de type β. On y distingue deux pistons : un "déplaceur" et un piston moteur.

La pression au niveau du carter du moteur est considérée constante tandis que les pressions des chambres de compression et de détente varient selon la variation de leurs volumes et températures respectives. La différence entre la pression de compression et la pression de détente est due aux pertes de charge subies par le gaz de travail lors de son passage par les échangeurs et le régénérateur.

La géométrie du jeu entre le piston (déplaceur ou piston moteur) et le cylindre est présentée dans la figure 2. Il s'agit de deux tubes coaxiaux où le tube interne (le déplaceur ou le piston) est en déplacement linéaire et cyclique par rapport au cylindre et le gaz de travail fuit à travers l'espace annulaire entre les deux cylindres.

3. Modélisation des fuites de matière

Pour modéliser les pertes de matière à travers le jeu, nous calculons la vitesse instantanée dans l'espace annulaire entre le piston et la chemise du cylindre. L'écoulement dans cet espace est un écoulement pulsé avec une des deux parois en mouvement. Afin d'établir un premier ordre de grandeur du nombre de Reynolds de cet écoulement, nous considérons l'hélium comme gaz de travail, sa pression moyenne est de l'ordre de 40 bars ($\mu = 32.9\ 10^{-6}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$, $\rho = 4.4\ kg.s^{-1}$) et nous considérons un jeu radial de $0.03\ mm$ et une vitesse moyenne du fluide de l'ordre de $50\ m.s^{-1}$. Le nombre de Reynolds dans ce cas est de l'ordre de 200 ce qui correspond à un écoulement laminaire.

La résolution des équations de Navier Stokes permettra de déterminer le champ de vitesse du fluide qui circule dans l'espace annulaire.

3.1. Hypothèses

Nous écrivons les équations de Navier Stokes à résoudre en prenant les hypothèses suivantes :

- Le régime de l'écoulement est laminaire.
- L'écoulement est établi sur toute la longueur du déplaceur.
- Le gradient de pression est uniforme selon l'axe z du cylindre. Il est égal à $\frac{P_C - P_E}{L_d}$ pour le déplaceur et $\frac{P_C - P_{Ca}}{L_p}$ pour le piston.
- La variation de la pression reste petite devant sa valeur moyenne ce qui est souvent le cas pour les moteurs Stirling.

Compte tenue de ces hypothèses, la vitesse du gaz est parallèle à l'axe du cylindre et ne dépend que du rayon r et du temps. Cette vitesse vérifie l'équation de Navier-Stokes donnée par Xiao [5] :

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) \tag{1}$$

3.2. Résolution

Le gradient axial de la pression dans l'espace annulaire et la vitesse de déplacement du piston sont deux grandeurs périodiques. Par conséquent, nous pouvons les décomposer en séries de Fourier [6] :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = p_{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{zc,n}\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{zs,n}\sin(n\omega t) \tag{2}$$

$$u_p = u_{p0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{pc,n}\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{ps,n}\sin(n\omega t) \tag{3}$$

Ce qui s'écrit également sous forme complexe :

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = p_{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{z,n} e^{in\omega t} \qquad \text{avec } \tilde{p}_{z,n} = \tilde{p}_{zc,n} - i\tilde{p}_{zs,n} \tag{4}$$

$$u_p^* = u_{p0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_{p,n} e^{in\omega t} \qquad \text{avec } \tilde{u}_{p,n} = \tilde{u}_{pc,n} - i\tilde{u}_{ps,n} \tag{5}$$

Dans un moteur Stirling, la vitesse moyenne du piston u_{p0} est nulle.
La solution complexe de l'équation (1) s'écrit de la même manière :

$$u^*(r,t) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(r) e^{in\omega t} \qquad \text{avec } \tilde{u}_n(r) = \tilde{u}_{c,n}(r) - i\tilde{u}_{s,n}(r) \tag{6}$$

En reformulant l'équation (1) sous forme complexe compte tenu de (4) et (6) et en regroupant les termes du même ordre, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r} = \frac{p_{z_0}}{\rho\nu} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial r} - \frac{in\omega}{\nu}\tilde{u}_n = \frac{\tilde{p}_{z,n}}{\rho\nu} \tag{8}$$

Les solutions de ces équations sont [6] :

$$u_0 = \frac{p_{z_0}}{\rho\nu}\frac{r^2}{4} + A\ln r + B \tag{9}$$

$$\tilde{u}_n = -\frac{\tilde{p_{z,n}}}{i\rho n\omega} + C_n I_0\left(\sqrt{\frac{in\omega}{\nu}}r\right) + D_n J_0\left(\sqrt{\frac{in\omega}{\nu}}r\right) \tag{10}$$

I_0 et J_0 sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées d'ordre zéro de première et de deuxième espèce.
Nos déterminons les constantes A, B, C_n et D_n grâce aux conditions aux limites :

$$\text{pour } r = R_p \qquad u_0(R_p) = 0 \text{ et } \tilde{u}_n(R_p) = \tilde{u}_{p,n} \tag{11}$$

$$\text{pour } r = R_c \qquad u_0(R_c) = 0 \text{ et } \tilde{u}_n(R_c) = 0 \tag{12}$$

Les différentes constantes sont alors :

$$A = \frac{p_{z_0}\left(R_c^2 - R_p^2\right)}{4\rho\nu\ln\left(\frac{R_p}{R_c}\right)} \tag{13}$$

$$B = \frac{p_{z_0}}{4\rho\nu}\frac{ln(R_p)R_c^2 - ln(R_c)R_p^2}{ln\left(\frac{R_c}{R_p}\right)} \tag{14}$$

$$C_n = \frac{\frac{\tilde{p}_{z,n}}{i\rho n\omega}\left[J_0(\beta_n R_c) - J_0(\beta_n R_p)\right] + \tilde{u}_{p,n}J_0(\beta_n R_c)}{I_0(\beta_n R_p)J_0(\beta_n R_c) - J_0(\beta_n R_p)I_0(\beta_n R_c)} \tag{15}$$

$$D_n = \frac{\frac{\tilde{p}_{z,n}}{i\rho n\omega}\left[I_0(\beta_n R_p) - I_0(\beta_n R_c)\right]}{I_0(\beta_n R_p)J_0(\beta_n R_c) - J_0(\beta_n R_p)I_0(\beta_n R_c)} \tag{16}$$

$$+ \frac{\tilde{u}_{p,n}}{J_0(\beta_n R_p) - J_0(\beta_n R_c)}\left[1 - \frac{J_0(\beta_n R_c)\left[I_0(\beta_n R_p) - I_0(\beta_n R_c)\right]}{I_0(\beta_n R_p)J_0(\beta_n R_c) - J_0(\beta_n R_p)I_0(\beta_n R_c)}\right] \tag{17}$$

avec $\beta_n = \sqrt{\frac{in\omega}{\nu}}$.
Nous remarquons, comme attendu, que (15)-(19) indiquent que la variation de la vitesse du gaz dans l'espace annulaire est la conséquence de deux effets qui interagissent : la variation du gradient de pression et du mouvement du déplaceur. La vitesse du gaz est déduite de la vitesse complexe par :

$$u(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Re\left(\tilde{u}_n\right)cos(n\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty}\Im\left(\tilde{u}_n\right)sin(n\omega t) \tag{18}$$

3.3. Expression du débit de fuite

Une fois la vitesse connue le débit de fuite est calculé avec l'expression :

$$\dot{m}_f(t) = \rho\int_0^{2\pi}\int_{R_p}^{R_c} u(r,t)rdrd\theta \tag{19}$$

$$= 2\pi\rho\int_{R_p}^{R_c} u(r,t)rdr \tag{20}$$

Nous établissons une formulation analytique de cette intégrale sous la forme :

$$\dot{m}_f(t) = \dot{m}_{f,0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Re\left(\tilde{\dot{m}}_{f,n}\right)cos(n\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty}\Im\left(\tilde{\dot{m}}_{f,n}\right)sin(n\omega t) \tag{21}$$

avec :

$$\dot{m}_{f,0} = \pi\rho B\left(R_c^2 - R_p^2\right) + \frac{1}{2}\pi\rho A\left[R_c^2\left(2ln(R_c) - 1\right) - R_p^2\left(2ln(R_p) - 1\right)\right] + \frac{\pi p_{z_0}}{8\nu}\left(Rc^4 - R_p^4\right) \tag{22}$$

$$\tilde{\dot{m}}_{f,n} = -\frac{\tilde{p}_{z,n}}{2i\rho\omega}\left(R_c^2 - R_p^2\right) + \frac{C_n}{\beta_n}\left[R_c I_1(\beta_n R_c) - R_p I_1(\beta_n R_p)\right] - \frac{D_n}{\beta_n}\left[R_c J_1(\beta_n R_c) - R_p J_1(\beta_n R_p)\right] \tag{23}$$

4. Résultats et discussion

Nous prenons le moteur GPU-3 [7] comme cas d'étude pour illustrer la détermination des fuites grâce aux expressions ci-dessus. Ce moteur est un moteur de type β à cinématique rhombique qui a été développé par "General Motors". Quelques spécifications de ce moteur sont regroupées dans le tableau 1.

Paramètre	valeur	Paramètre	valeur
Type du moteur	beta	T_H (K)	977
Gaz du travail	helium	T_C (K)	288
Fréquence (Hz)	41.7	P_{moy} (MPa)	4.13

Tableau 1 : *Quelques spécifications du GPU-3*

Les données d'entrée du modèle (vitesse du piston et pressions instantanées dans le moteur) sont déterminées grâce à un modèle dynamique basé sur l'approche d'Urieli [2]. Les gradients de pression dans les jeux du "déplaceur" et du piston moteur sont, alors, donnés dans la figure 3. Nous traçons également les vitesses instantanées des deux pistons dans la figure 4.

Dans la figure 5, nous présentons le profil radial de la vitesse du gaz dans le jeu cylindre-déplaceur à différents instants du cycle (plusieurs angles du vilebrequin) et pour une épaisseur du jeu de 30 microns. Le profil de vitesse au niveau du piston moteur est présenté dans la figure 6 pour la même épaisseur de jeu. Nous traçons également les débits de fuite calculés pour ces deux endroits (Figures 7 et 8). Nous remarquons que le débit de fuite au niveau du "déplaceur" est beaucoup plus petit que celui du piston moteur. Ceci est tout à fait prévisible vu que le gradient de pression au niveau du "déplaceur" est faible par rapport à celui qui existe au niveau du piston. Cependant, il est très utile de les quantifier car connaître le profil de vitesse et le débit massique du gaz dans le jeu cylindre-déplaceur permet de déterminer les pertes thermiques par effet navette et par pompage d'enthalpie (reconnues sous le vocable "Appendix gap losses") qui, elles, ne sont pas négligeables.

Nous remarquons aussi que l'effet du gradient de pression l'emporte sur l'effet de la vitesse du piston au niveau de piston moteur. Pour ce piston, l'effet de la vitesse de rotation du moteur ne devient déterminant que si le gradient de pression est faible et notamment dans le cas des moteurs à faible pression de travail. Nous constatons aussi que la vitesse du gaz au niveau du piston moteur augmente considérablement en augmentant la pression moyenne au sein du moteur et en augmentant l'épaisseur du jeu. Notons cependant que cette vitesse peut atteindre des grandes valeurs (des valeurs beaucoup plus grandes que la vitesse du piston ce qui explique l'allure de la figure 6). Compte tenue des grandes vitesses atteintes par l'écoulement du gaz dans le jeu du piston, un passage à un modèle de fluide compressible est recommandé pour les moteurs à grandes pression de travail. A ce propos, signalons l'existence d'un modèle analytique

stationnaire qui considère un écoulement compressible [4]. Il n'est valable que pour le piston moteur car il ne prend pas en compte l'effet de la vitesse du piston.

Si l'on s'intéresse aux pertes de puissance mécanique du moteur causées par les fuites de matière au niveau du piston, nous notons que cette perte est la conséquence de deux effets : la chute de la pression du gaz de travail et le débit enthalpique de fuite entre la chambre de compression et le carter. La puissance moyenne perdue à cause du défaut d'étanchéité au niveau du piston moteur peut, donc, s'exprimer par :

$$\overline{\dot{W}}_f = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left(\delta P_f.dV_t + \dot{m}_f c_p T\right) dt \tag{24}$$

τ est la période du cycle et δP_f et dV_t sont respectivement la perte de pression et la variation du volume du gaz de travail pendant une durée infinitésimale dt et T est une température égale à T_C si le débit de fuite est négatif et égale à T_{Ca} si le débit de fuite est positif. δP_f est calculée par :

$$\delta P_f = \delta m_C \frac{RT_C}{V_C} = \dot{m}_f \delta t \frac{RT_C}{V_C} \tag{25}$$

Grâce à l'équation (25) nous traçons la puissance perdue par chute de pression d'une part et par débit d'enthalpie d'autre part. Nous traçons, également, la puissance totale de fuite en fonction de l'épaisseur du jeu entre le cylindre et le piston moteur (Figure 9). Nous donnons également le pourcentage de ces pertes de puissance par rapport à la puissance totale du moteur (Figure 10). Nous remarquons que les pertes augmentent considérablement lorsque l'épaisseur du jeu augmente. Par ailleurs, des auteurs affirment que la diminution de cette épaisseur augmente les frottements mécaniques [8]. Dans ce cas, on devrait chercher une épaisseur optimale qui minimise les pertes totales (fuites et frottement).

5. Conclusion

Nous avons présenté un modèle original de pertes par défaut d'étanchéité. Ce modèle permet de quantifier les pertes de matière dans deux endroits différents du moteur : au niveau du jeu cylindre-déplaceur et au niveau du jeu cylindre-piston de travail. Nous avons fait le choix de nous concentrer sur les pertes énergétiques au niveau de ce dernier et nous avons conclu qu'un compromis dans le choix de l'épaisseur du jeu pour minimiser les pertes totales serait à chercher.

Références

[1] F. Vélez, J.J. Segovia, M.C. Martín, G. Antolín, F. Chejne, Ana Quijano, A technical, economical and market review of organic Rankine cycles for the conversion of low-grade heat for power generation, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 16-6 (2012), 1364-0321.

[2] I. Urieli, D.M.Berchowitz , *Stirling cycle engine analysis*, Bristol : Hilger (1983).

[3] K. Hirata et al., Performance evaluation for a 100 W Stirling engine, *Proceedings of 8th International Stirling Engine Conference*, 19-28 (1997).

[4] Y. Huang, Leakage calculation through clearances, *Int. Compressor Engineering Conference*,paper 953 (1994).

[5] J.H. Xiao, Thermoacoustic heat transportation and energy transformation Part 1 : Formulation of the problem, *Cryogenics*, 35-1 (1995), 15-19.

[6] S. Uchida, The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 7-5 (1956), 403-422.

[7] L.G. Thieme, R.C. Tew, Jr., *Baseline performance of the GPU-3 Stirling Engine*, Technical report, NASA Lewis Research Center (1978).

[8] W. WANG, X. TAI, Characteristic of a Miniature Linear Compressor, *International Compressor Engineering Conference at Purdue*, July 12-15, 2010.

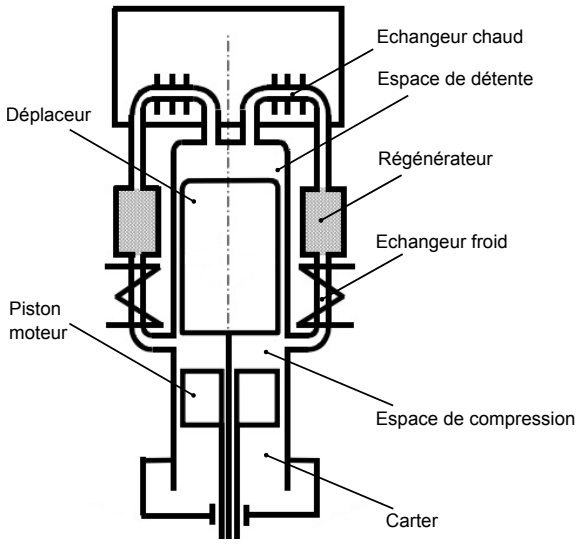

Figure 1 : *Moteur Stirling de type Beta*

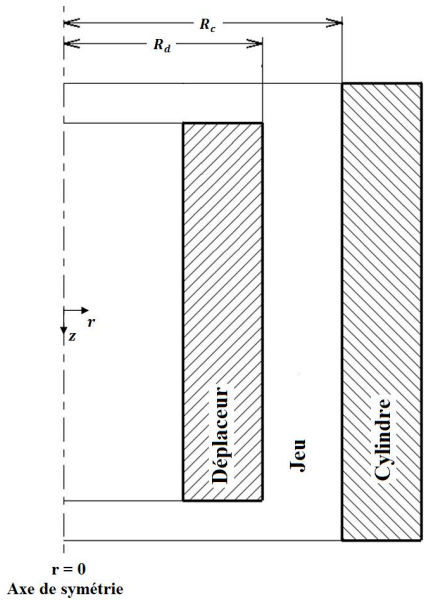

Figure 2 : *Schéma descriptif du problème*

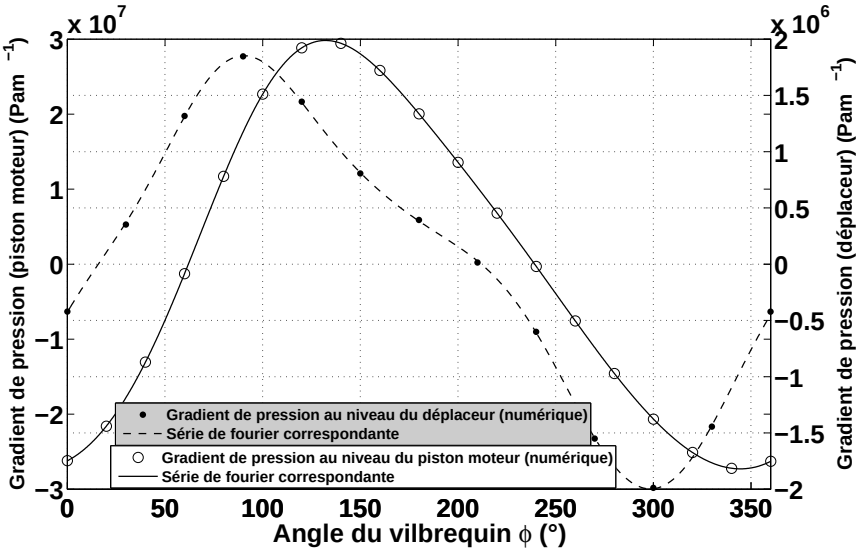

Figure 3 : Gradients de pression au niveau du cylindre et du piston moteur

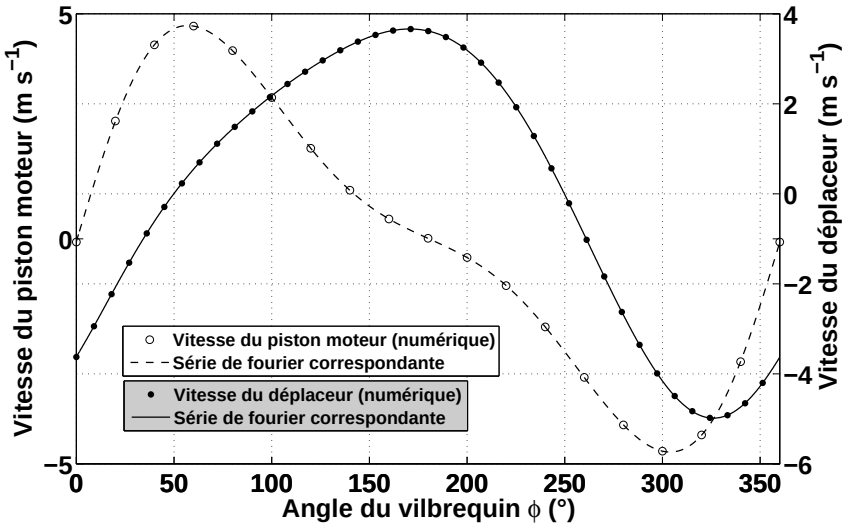

Figure 4 : Vitesses instantanées du déplaceur et du piston moteur

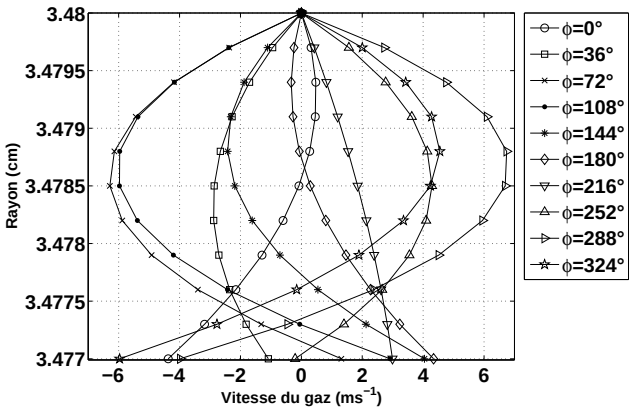

Figure 5 : *Vitesse du gaz dans le jeu cylindre-déplaceur*

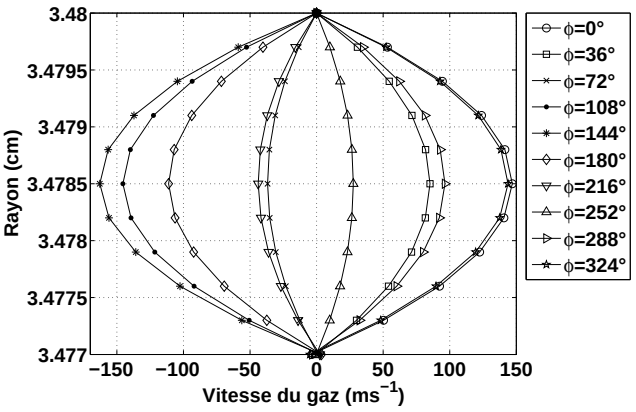

Figure 6 : Vitesse du gaz dans le jeu cylindre-piston moteur

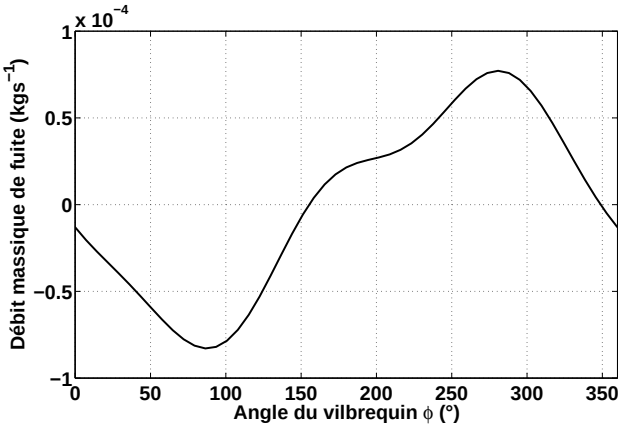

Figure 7 : Débit massique de fuite au niveau du déplaceur

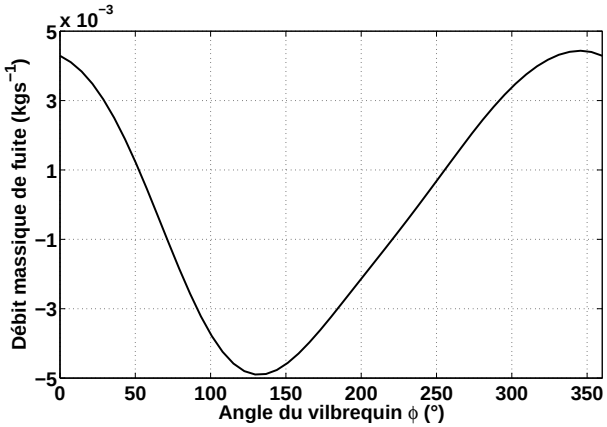

Figure 8 : Débit massique de fuite au niveau du piston moteur

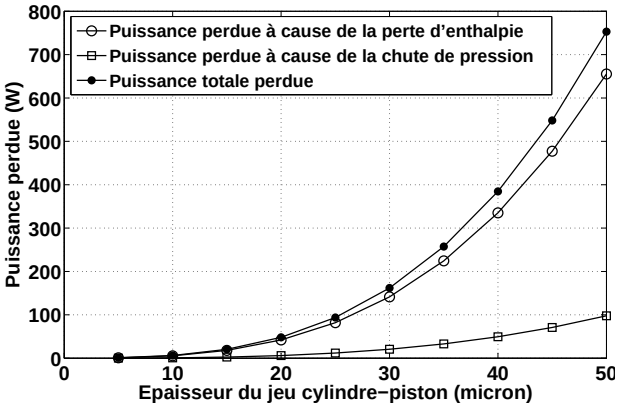

Figure 9 : Evolution de la perte de puissance en fonction de l'épaisseur du jeu

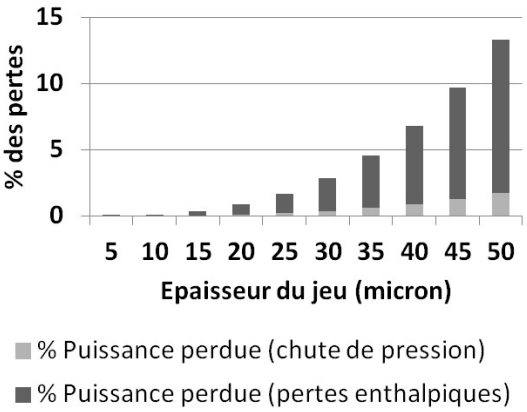

Figure 10 : pourcentage des puissances perdues au niveau du piston moteur