

Modélisation et inversion de l'évolution transitoire de la température de surface externe dans un mini- canal extracteur de chaleur plan

Waseem Al Hadad, Yassine Rouizi, Yves Jannot, Benjamin Rémy, Denis Maillet

▶ **To cite this version:**

Waseem Al Hadad, Yassine Rouizi, Yves Jannot, Benjamin Rémy, Denis Maillet. Modélisation et inversion de l'évolution transitoire de la température de surface externe dans un mini- canal extracteur de chaleur plan. Congrès Français de Thermique SFT 2014, Société Française Thermique, Jun 2014, Lyon, France. hal-01447041

HAL Id: hal-01447041
https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01447041

Submitted on 26 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation et inversion de l'évolution transitoire de la température de surface externe dans un mini-canal extracteur de chaleur plan.

Waseem Al Hadad[1*], Yassine Rouizi[1,2], Yves Jannot [1], Benjamin Rémy[1], Denis Maillet[1]

[1]Université de Lorraine et CNRS, LEMTA, 2 avenue de la Forêt de Haye - TSA 60604
54518 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex
[2]maintenant au LMEE, Université d'Evry, 40 rue du Pelvoux, CE 1455 Courcouronnes, 91020, Evry
[*](auteur correspondant : waseem.al-hadad@univ-lorraine.fr)

Résumé - Un modèle semi-analytique permettant de simuler le transfert de chaleur dans un mini canal plan d'épaisseur e_f soumis à une source de chaleur surfacique variant en fonction du temps sur la face avant, a été présenté. Le modèle développé prend en considération la conduction diffusion-advection dans le fluide et la conduction axiale dans le solide. Une méthode de régularisation basée sur la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) d'une matrice a été présentée. Elle repose sur le remplacement des valeurs singulières par des Niveaux Infinis (TSVD). Elle a été comparée à la régularisation rectangulaire par sous-paramétrage et a permis la déconvolution de chaque harmonique au cours du temps sur un cas test de simulation à faible nombre de Péclet. Les résultats montrent que l'estimation de la température de mélange, de la température sur les faces internes et sur la face arrière, à partir de l'évolution temporelle du profil bruité de température sur la face avant, est possible.

Mots clés : Mini-canal, problème inverse, convection inverse, thermographie infrarouge, produit de convolution.

Nomenclature

a diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
e épaisseur, m
h coefficient d'échange convectif, $W.m^{-2}.K^{-1}$
L longueur virtuelle, m
q source de chaleur surfacique, $W.m^{-2}$
T température, K
U vitesse moyenne, $m.s^{-1}$
u profil de vitesse, $m.s^{-1}$
$\tilde{\boldsymbol{z}}$ transformée de Fourier de vecteur $\boldsymbol{z}$
$\bar{\boldsymbol{z}}$ transformée de Laplace de vecteur $\boldsymbol{z}$
$\hat{\boldsymbol{z}}$ estimateur du vecteur $\boldsymbol{z}$

Symboles grecs
α_n valeurs propres
λ conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
φ densité de flux, $W.m^{-2}$
ρ masse volumique, kg. m^3

Indices et exposants
c froide
b bulk
h chaude
wc froide interne
wh chaude interne

1. Introduction

Les échangeurs de chaleur compacts et les dissipateurs sont de plus en plus utilisés pour dissiper la chaleur produite par exemple par des dispositifs électroniques. Plus généralement, ils peuvent servir à récupérer la chaleur fatale, c'est-à-dire la chaleur résiduelle à bas niveau de température rejetée dans l'environnement par différents procédés industriels. Les diamètres hydrauliques des canaux de ces dispositifs sont millimétriques et la fraction volumique de fluide est plus faible que celle rencontrée dans des échangeurs de chaleur macroscopiques. Leur conception nécessite donc de prendre en compte la conduction de chaleur parallèle à l'écoulement au sein des parois solides (transfert de chaleur conjugué). En effet, le vecteur densité de flux de chaleur local n'est plus normal à l'interface solide/fluide et l'utilisation des corrélations classiques permettant le calcul du nombre de Nusselt est discutable [1] [2] et ce, particulièrement en régime transitoire. La caractérisation expérimentale des transferts thermiques à l'aide de capteurs internes est de plus délicate car l'implantation de ces derniers

peut compromettre l'intégrité structurelle de tout le système : les méthodes non-intrusives sont donc adaptées pour traiter ce genre de problème.

Pour mettre expérimentalement en pratique ce type de caractérisation, un mini-canal plan composé de deux parois parallèles en polycarbonate, séparées par un écoulement d'eau de profil de vitesse établi (écoulement de Poiseuille), a été construit [3]. L'une des deux faces externe (face avant) est chauffée par une résistance électrique. Le champ de température transitoire sur cette face (face avant) peut être mesuré par une caméra infrarouge. Le transfert de chaleur est modélisé par la méthode quadripolaire [4] en prenant en compte la diffusion axiale (direction parallèle à l'écoulement) à la fois dans le fluide et dans le solide [5].

L'intérêt de ce modèle, qui a été ici généralisé au cas d'un régime thermique transitoire, est de ne pas être basé sur la notion de coefficient de transfert convectif local sur les parois internes. Le modèle quadripolaire 2D utilisé fournit des solutions explicites pour la température et la densité de flux à chaque point interne au système. Le premier problème inverse rencontré ici consiste à estimer le spectre de Fourier du profil de température enregistré à chaque instant sur la face avant après le début du chauffage. Une seconde inversion, nécessaire au retour dans l'espace temporel des températures et flux dans l'ensemble du système, s'effectue ensuite par déconvolution.

L'estimation du vecteur de spectre est réalisée par inversion de la matrice qui relie le vecteur de la distribution spatiale de la température à son vecteur spectre correspondant aux différentes fréquences spatiales. Deux techniques de régularisation différentes sont ici mises en œuvre et comparées sur des signaux synthétiques bruités simulant les mesures et obtenues par un code aux éléments finis (COMSOL) : une inversion rectangulaire (moins d'inconnues que de mesures) et la décomposition par SVD tronquée (TSVD) [5,6]. Cette dernière technique d'inversion régularisée est ensuite utilisée ici pour reconstituer les évolutions temporelles de température, flux et source en tout point.

2. Le système étudié et sa modalisation transitoire

2.1. Le système étudié

On considère un écoulement de fluide laminaire dans un canal de longueur $2l$, de largeur w, d'épaisseur e_f, limité par deux plaques parallèles en polycarbonate d'épaisseurs e_1 et e_2 (Figure 1). Cet écoulement est dynamiquement établi sur toute la longueur du canal et le profil de vitesse est parabolique (Poiseuille). Les deux couches solides (parois) sont caractérisées par leur conductivité thermique λ_i, leur chaleur volumique ρc_i et leur diffusivité thermique $a_i = \lambda_i / \rho c_i$. La couche de fluide est caractérisée par sa conductivité thermique λ_f, sa chaleur volumique ρc_f, et sa diffusivité thermique $a_f = \lambda_f / \rho_f c_f$.

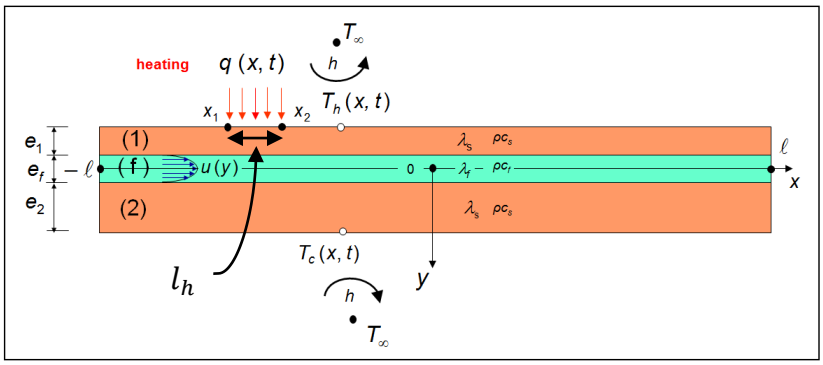


Figure 1 : *Ecoulement 2D de Poiseuille entre deux plaques planes, avec chauffage en face avant*

Une source de chaleur surfacique localement uniforme $q(x,t)$ est imposée sur la face avant sur la distance l_h (entre x_1 et x_2). Les faces avant et arrière échangent de la chaleur avec

l'environnement à la température T_∞. Cet échange est caractérisé par un coefficient d'échange h uniforme (convection naturelle et rayonnement linéarisé).

2.2. Modèle analytique

Les équations du problème en régime transitoire en 2D (pour une profondeur w dans la 3ème dimension suffisamment grande devant la longueur l) dans les trois couches sont :

- Couche solide ($i = 1,2$) et couche fluide :

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = \frac{1}{a_i}\frac{\partial T_i}{\partial t} \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2}\right) - \frac{u(y)}{a_f}\frac{\partial T_f}{\partial x} = \frac{1}{a_f}\frac{\partial T_f}{\partial t} \qquad (1a, b)$$

- Conditions aux limites axiales : nous imposons ici, pour des raisons expérimentales pratiques [3] ces conditions sur une longueur virtuelle $2L$ supérieure à la longueur $2l$ représentée en figure 1, pour que l'on retrouve l'équilibre thermique loin de la zone chauffée:

$$T_i(x = \pm L, y, t) = T_f(x = \pm L, y, t) = T_\infty \quad \text{avec } K_V = L/l > 1 \qquad (2)$$

- Conditions aux limites transverses:

$$\varphi_h\left(x, y = -\frac{e_f}{2} - e_1, t\right) = -\lambda_s \frac{\partial T_1}{\partial y} = -h(T_1 - T_\infty) + q(x,t) \qquad (3)$$

$$\varphi_c\left(x, y = \frac{e_f}{2} + e_2, t\right) = -\lambda_s \frac{\partial T_2}{\partial y} = h(T_2 - T_\infty) \qquad (4)$$

- Conditions à l'interface solide/fluide et condition initiale:

$$T_f\big|_{x,\left(y=\mp\frac{e_f}{2}\right),t} = T_i\big|_{x,\left(y=\mp\frac{e_f}{2}\right),t} \quad et \quad -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y}\Big|_{x,\left(y=\mp\frac{e_f}{2}\right),t} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\Big|_{x,\left(y=\mp\frac{e_f}{2}\right),t} \qquad (5)$$

$$T|_{x,y,t=0} = T_0 \qquad (6)$$

On suppose ici $T_0 = T_\infty$ et on divise la couche de fluide d'épaisseur e_f en plusieurs sous-couche d'épaisseurs $e_k = y_{k+1} - y_k = e_f/K$, où K est nombre de sous-couches. La vitesse dans chaque sous-couche u_k peut être considérée comme uniforme [8] (Figure 2).

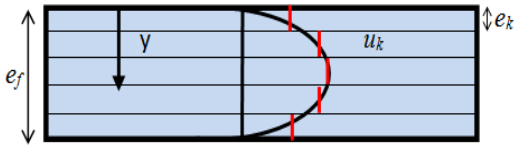


Figure *2 : Discrétisation de la couche fluide à K sous couche*

Vitesse exacte et paramétrée dans chaque sous-couche :

$$u(y) = 6U\left\{\frac{y}{e_f} - \left(\frac{y}{e_f}\right)^2\right\} \qquad (7)$$

$$u_k = \frac{6U}{e_k}\left\{\frac{y_{k+1}^2 - y_k^2}{2e_f} - \frac{y_{k+1}^3 - y_k^3}{3e_f^2}\right\} \qquad (8)$$

Les transformées de Laplace et de Fourier dans la direction axiale sur $[-L; +L]$ s'écrivent :

$$\bar{\theta}(x, y, P) = \int_0^\infty \theta(x, y, t) e^{-Pt}\, dt \; ; \; \tilde{\theta}_n(y, t) = \int_{-L}^{+L} \theta(x, y, t) e^{-i\alpha_n x}\, dx \qquad (9a, b)$$

où $\theta = T(x, y, t) - T_0$, est l'échauffement dû à la source surfacique de chaleur $q(x, t)$, et $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ les valeurs propres dans la direction x du problème diffusif correspondant. En

appliquant les transformations de Fourier et de Laplace aux équations (1a,b), et en prenant en compte les conditions aux limites axiales et la condition initiale, on obtient :

$$\frac{d^2\tilde{\bar{\theta}}_n}{dy^2} - \beta_n^2\tilde{\bar{\theta}}_n = 0;\ \frac{d^2\tilde{\bar{\theta}}_n}{dy^2} - \gamma_{nk}^2\tilde{\bar{\theta}}_n = 0\ avec\ \beta_n^2 = \left(\alpha_n^2 + \frac{P}{a_s}\right)\ et\ \gamma_{nk}^2 = \left(\alpha_n^2 + i\alpha_n\frac{u_k}{a_f} + \frac{P}{a_f}\right) (10a,b)$$

En utilisant la transformée de la densité de flux $\tilde{\bar{\varphi}}_n(y,P) = -\lambda_\omega \frac{d\tilde{\bar{\theta}}_n}{dy}$, $(\omega = s\ ou\ f)$, et les conditions aux limites transversales, on obtient :

$$\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^h\\ \tilde{\bar{q}}_n\end{bmatrix} = H_1 S_n \left(\prod_{k=1}^{K} F_{kn}\right) S_n H_2 \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_n^h & B_n^h\\ C_n^h & D_n^h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} \quad (11)$$

Avec
$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ h_1 & 1\end{bmatrix};\ \ S_n = \begin{bmatrix}A_n & B_n\\ C_n & A_n\end{bmatrix};\ \ F_{kn} = \begin{bmatrix}A_{kn} & B_{kn}\\ C_{kn} & A_{kn}\end{bmatrix} \quad (12)$$
$$\theta^h = \theta\left(x, -e_s - \frac{e_f}{2}, t\right)\ \ et\ \ \theta^c = \theta\left(x, e_s + \frac{e_f}{2}, t\right)$$

$$A_n = cosh(\beta_n e_s);\quad B_n = sinh(\beta_n e_s)/\lambda_s\beta_n;\quad C_n = \lambda_s\beta_n\, sinh(\beta_n e_s)$$
$$A_{kn} = cosh(\gamma_{kn} e_k);\ B_{kn} = sinh(\gamma_{kn} e_k)/\lambda_f\gamma_{kn};\ \ C_{kn} = \lambda_f\gamma_{kn}\, sinh(\gamma_{kn} e_k) \quad (13)$$

L'équation (11) montre qu'il suffit de connaître la transformée de Fourier et de Laplace d'une grandeur sur une des faces externes (indices *h* avant et *c* arrière) pour calculer toutes les autres grandeurs, et en particulier celles des faces internes et des interfaces des sous-couches fluide :

$$Face\ chaude\ interne\ (wh):\quad \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^{wh}\\ \tilde{\bar{\varphi}}_n^{wh}\end{bmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{K} F_{kn}\right) S_n H_2 \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_n^{wh} & B_n^{wh}\\ C_n^{wh} & D_n^{wh}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} \quad (14)$$

$$Face\ froide\ interne\ (wc):\quad \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^{wc}\\ \tilde{\bar{\varphi}}_n^{wc}\end{bmatrix} = S_n H_2 \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_n^{wc} & B_n^{wc}\\ C_n^{wc} & D_n^{wc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} \quad (15)$$

$$sous-couche\ (k):\quad \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^k\\ \tilde{\bar{\varphi}}_n^k\end{bmatrix} = \left(\prod_{k'=k+1}^{K} F_{kn}\right) S_n H_2 \begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_n^k & B_n^k\\ C_n^k & D_n^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\theta}}_n^c\\ 0\end{bmatrix} \quad (16)$$

Pour obtenir les profils de température, on applique l'inversion numérique de la transformation de Laplace de chaque mode à l'aide de la méthode de Stehfest [4,9], puis une transformation inverse de Fourier à chaque instant sur l'intervalle $[-L;+L]$ pour N_h harmoniques, avec $N_h = 2n_h^+$, où n_h^+ est le nombre d'harmoniques positifs:

$$\theta(x,y,t) = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_n(y,t)e^{i\alpha_n x} \approx \frac{1}{2L}\sum_{n=-n_h^+ +1}^{n_h^+} \tilde{\theta}_n(y,t)e^{i\alpha_n x} \quad (17)$$

3. Inversion transitoire pour une mesure de la température en face avant

On présente ici comment on peut utiliser la modèle quadripolaire (11) pour remonter aux conditions internes à partir d'un profil de température sur la face avant (par exemple mesuré expérimentalement).

3.1 Estimation de spectre de Fourier sur la face avant à chaque instant

L'équation (17), qui représente la transformation inverse de Fourier sur l'intervalle $[-L;+L]$, constitue le modèle qui relie l'échauffement sur la face avant θ_h , en chacun des N_x points de mesure x_j de l'intervalle$[-l;+l]$ et à chaque instant de t_k , au spectre de Fourier correspondant:

$$\theta_h(x_j,t_k) \approx \frac{1}{2L}\sum_{n=-n_h^+ +1}^{n_h^+} \tilde{\theta}_n^h(t_k) e^{i\alpha_n x_j} \quad (18)$$

L'équation (18) est écrite sous forme matricielle $\boldsymbol{\theta}_h(t_k) \approx \boldsymbol{G}\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_h(t_k)$, où $\boldsymbol{\theta}_h$ est le vecteur des températures exactes sur la face avant, de taille $(N_x \times 1)$, $\boldsymbol{G}$ est une matrice de transformation inverse de taille $(N_x \times N_h)$ et $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_h$ est le vecteur spectre de taille $(N_h \times 1)$.

L'estimation du spectre $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_h$ peut être effectuée par la minimisation de la somme des moindres carrés à partir des mesures (forcément bruitées) et notées $\boldsymbol{\theta}_h^{exp}(t_k)$:

$$J(x) = \left\| \boldsymbol{\theta}_h^{exp}(t_k) - \boldsymbol{G}\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_h(t_k) \right\|^2, \text{ avec } \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_h(t_k) = (\boldsymbol{G}^*\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^*\boldsymbol{\theta}_h^{exp}(t_k) = \boldsymbol{G}^+\boldsymbol{\theta}_h^{exp}(t_k) \quad (19)$$

où $\boldsymbol{G}^*$ est la transposée de la matrice des coefficients conjugués de $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}^+$ la pseudo-inverse de $\boldsymbol{G}$. Dans ce travail, on traite le cas où $N_x = N_h$ ($\boldsymbol{G}$ est une matrice carrée). L'estimation (19) du spectre s'écrit aussi à l'aide de la SVD de $\boldsymbol{G}$:

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_{\boldsymbol{h}}(t_k) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{\theta}_h^{exp}(t_k) \quad avec \;\; \boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^* \quad (20)$$

où $\boldsymbol{U}$ est la matrice des vecteurs singuliers à gauche, $\boldsymbol{W}$ la matrice des valeurs singulières (matrice diagonale avec $w_1 \geq w_2 \geq \cdots w_{N_x-1} \geq w_{N_x}$), et $\boldsymbol{V}$ celle des vecteurs singuliers à droite. L'application directe de l'équation (20) ne fournit pas une bonne estimation $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_h$ du spectre (explosion de l'inversion du fait du très mauvais conditionnement de $\boldsymbol{G}$ si $L > l$). Ceci conduit à une très mauvaise reconstruction $\boldsymbol{\theta}_h^{rec}(t_k) = \boldsymbol{G}\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_h(t_k)$ du profil. Une régularisation de cette inversion est donc obligatoire. L'estimation rectangulaire [5, 6] présente l'inconvénient de réduire considérablement le nombre d'harmoniques, ce qui conduit à une perte de précision. On présente ici une autre méthode qui est basée sur SVD de la matrice $\boldsymbol{G}$. Cette méthode consiste à ne garder que les α_x premières valeurs singulières de la matrice $\boldsymbol{W}$, en affectant un niveau infini aux plus petites (TSVD [7]), ce qui régularise l'inversion (20) :

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_{h\,\alpha_x}(t_k) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}_{\alpha_x}^{-1}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{\theta}_h^{exp}(t_k) \quad avec \;\; \boldsymbol{W}_{\alpha_x}^{-1} = diag(w_1^{-1}, w_2^{-1}, \ldots, w_{\alpha_x}^{-1}, 0 \ldots 0) \quad (21)$$

L'avantage de cette technique est de conserver la taille initiale de la matrice $\boldsymbol{G}$, mais avec α_x degrés de liberté ($\alpha_x < N_x$), ce qui permet de récupérer plus d'informations (ici d'harmoniques) sur le profil expérimental que l'inversion par TSVD.

3.2 Estimation de spectre de température sur les interfaces internes et la face arrière à partir des spectres sur la face avant

Une fois que le vecteur spectre de température sur la face avant $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_{h\,\alpha_x}(t_k)$ de taille $N_h \times 1$ a été estimé à chaque instant $t_k = k\Delta t$ avec ($k = 1$ à N_t), on réassemble chacune des N_h harmoniques à tous les N_t instants de mesure (ou de simulation bruitée) en un vecteur colonne $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_n^h$ de taille $N_t \times 1$. Comme le système (1-6) est linéaire à coefficients invariants en temps, sa solution fait apparaitre des produits dans l'espace de Laplace en tout point. Ceux-ci génèrent des produits de convolution en temps, et on a en particulier pour l'équation (11) :

$$\tilde{\tilde{\theta}}_n^c = \frac{1}{A_n^h}\tilde{\tilde{\theta}}_n^h \Rightarrow \tilde{\theta}_n^c(t) = F_n^c(t) * \tilde{\theta}_n^h(t) = \int_0^t F_n^c(t-t')\,\tilde{\theta}_n^h(t')\,dt' \quad (22a,b)$$

Où $F_n^c(t) = L^{-1}(1/A_n^h)$. L'intégrale de convolution (22b) peut être écrite pour chaque harmonique sous une forme matricielle :

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_n^c = \boldsymbol{M}(F_n^c) * \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_n^h \quad \Rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_c(t_k) = \boldsymbol{G}\,\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_c(t_k) \quad (23a,b)$$

où $\boldsymbol{M}(.)$ est une matrice carrée de taille $N_t \times N_t$ (matrice de Toeplitz) :

$$\boldsymbol{M}(\mathrm{z}) = \Delta t \begin{bmatrix} \mathrm{z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{z}_2 & \mathrm{z}_1 & \ddots & \vdots \\ \mathrm{z}_3 & \mathrm{z}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{z}_{\mathrm{N_t}} & \mathrm{z}_{\mathrm{N_t}-1} & \cdots & \mathrm{z}_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \mathrm{z}_1 = \mathrm{z}(\mathrm{t}_1) \\ \mathrm{z}_2 = \mathrm{z}(\mathrm{t}_2) \\ \mathrm{z}_3 = \mathrm{z}(\mathrm{t}_3) \\ \vdots \\ \mathrm{z}_4 = \mathrm{z}(\mathrm{t}_\mathrm{f}) \end{bmatrix} \tag{23c}$$

L'estimation de chaque harmonique sur la face arrière, pour l'ensemble de tous les temps, correspond à une solution du problème direct (23a) (problème de convolution bien posé). Ce n'est pas le cas pour l'estimation des harmoniques sur la face chaude interne (wh), voir (14) :

$$\tilde{\theta}_n^c(t) = F_n^{wh}(t) * \tilde{\theta}_n^{wh}(t) \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n^c = \boldsymbol{M}(F_n^{wh})\, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{wh} \quad \text{avec} \quad F_n^{wh}(t) = L^{-1}\left(1/A_n^{wh}\right) \tag{24a}$$

L'estimation des harmoniques sur la face interne chaude (wh) au cours de temps à partir des harmoniques sur la face arrière (c) est un problème mal-posé. Il faut régulariser la déconvolution, ici par TSVD :

$$\boldsymbol{M}(F_n^{wh}) = \boldsymbol{UWV}^* \;\Rightarrow\; \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_{n\,\alpha_t}^{wh} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}_{\alpha_t}^{-1}\boldsymbol{U}^*\, \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}_n^c \;\Rightarrow\; \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{wh}(t_k) = \boldsymbol{G}\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\theta}}}^{wh}(t_k) \tag{24b}$$

où les inverses des $\alpha_t \leq N_t$ premières valeurs singulières de $\boldsymbol{M}(F_n^{wh})$ sont conservées, les $(N_t - \alpha_t)$ autres valeurs étant mises à l'infini. En suivant la même démarche, les équations (15) et (16) permettent d'estimer respectivement la température sur la face interne froide $\hat{\theta}_{wc}$ et la température $\hat{\theta}_k$ aux interfaces de chaque sous-couche fluide. Après estimation du profil de température sur chaque interface, la température moyenne de mélange θ_b est calculée :

$$\theta_b(x) = \frac{1}{Ue_f}\sum_{k=1}^{K} u_k \bar{\bar{\theta}}_k(x,t) \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\theta}}_k(x) = \frac{1}{2}\left(\theta(x,e_k,t) + \theta(x,e_{k-1},t)\right) \tag{25}$$

4. Résultats d'inversion transitoire sur des mesures synthétiques

L'historique du profil exact de température sur les faces avant (θ_h), internes (θ_{wh} *et* θ_{wc}) et arrière θ_c a été simulée par Comsol à chaque seconde ($t_k = 0$ à 500 s et donc N_t = 500) après le début du chauffage. Les dimensions des deux milieux et les paramètres de simulation sont donnés dans le Tableau 1. On utilise dans cette simulation un maillage triangulaire avec 699 éléments pour chaque couche solide et 754 éléments pour la couche fluide.

$2l$ (mm)	x_1 (mm)	l_h (mm)	e_f (mm)	$e_1 = e_2 = e_s$ (mm)	K	K_V	$N_x = N_h$	U $(m.s^{-1})$	T_∞ (°C)
65	−6	12	1	2	5	2	600	10^{-4}	20

λ_s $(W.m^{-1}.K^{-1})$	ρc_s $(kJ.m^{-3}.K^{-1})$	λ_f $(W.m^{-1}.K^{-1})$	ρc_f $(kJ.m^{-3}.K^{-1})$	q_{max} $(W.m^{-2})$	h $(W.m^{-2}.K^{-1})$
0.215	1440	0.63	4172	400	10

Tableau 1*: Dimensions, propriétés thermo-physiques et paramètres de simulation*

Le profil de température exact sur la face avant est considéré ici comme un profil expérimental (profil bruité) après avoir ajouté un bruit ε caractérisé par un écart type ($\sigma_{bruit} = 0.03$°C) aux N_x points équidistants sur l'intervalle $[-l; +l]$ de la face avant :

$$\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{bruit\acute{e}}} = \boldsymbol{\theta}_h^{exact} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{26}$$

A partir de ce profil bruité « expérimental » et en utilisant la technique d'inversion présentée en section 3, on estime les températures en face arrière et sur les faces internes ainsi que la

température de mélange. Le spectre de température à un instant donné ($t_k = 500s$) sur la face avant est estimé par l'inversion rectangulaire et par TSVD. A partir de ces estimations, on reconstruit le profil. On présente (Figures 3 et 4), les profils expérimentaux reconstruits par des spectres estimés par TSVD et inversion rectangulaire respectivement. On constate sur ces courbes que la régularisation par TSVD fournit la meilleure reconstruction d'estimation de ce profil, car elle permet d'aller beaucoup plus loin en nombre de degrés de liberté (310 au lieu de 16).

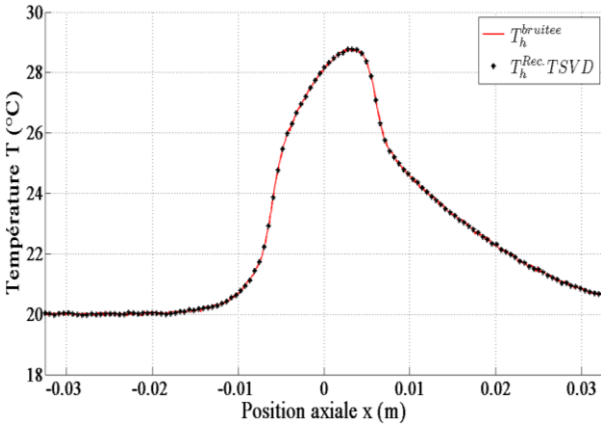


Figure 3: $\boldsymbol{T_h}$ *bruitée et reconstruite par TSVD* ($\alpha_x = 310$) *à 500 s*

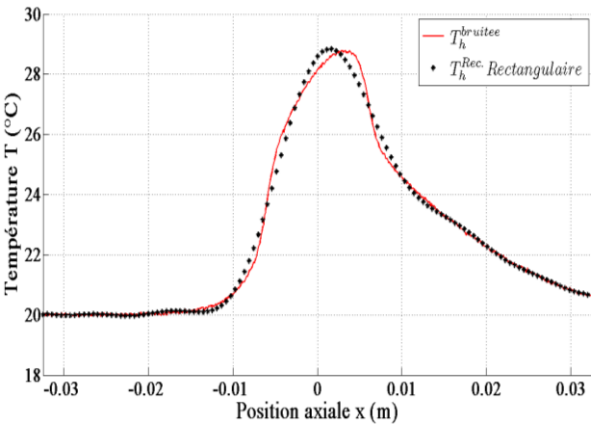


Figure 4: $\boldsymbol{T_h}$ *bruitée et reconstruite par estimation rectangulaire* ($N_h = 16$) *à 500 s*

Dans la suite de ce papier, nous allons montrer les résultats d'inversion en utilisant la seule technique de régularisation TSVD.

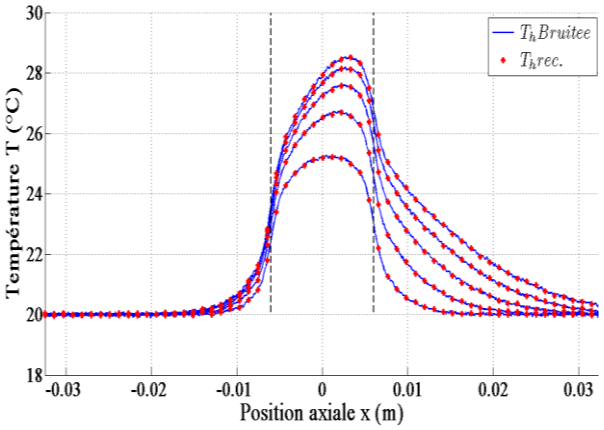


Figure 5 : $\boldsymbol{T_h}$ *exacte et reconstruite* ($\boldsymbol{\alpha_x = 310}$)

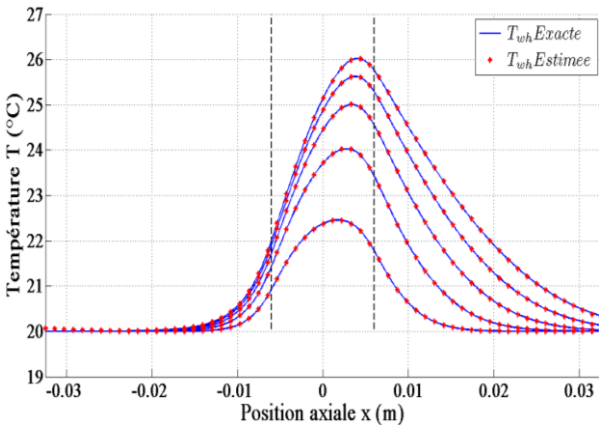


Figure 6 : $\boldsymbol{T_{wh}}$ *exacte et estimée* ($\boldsymbol{\alpha_t = 498}$)

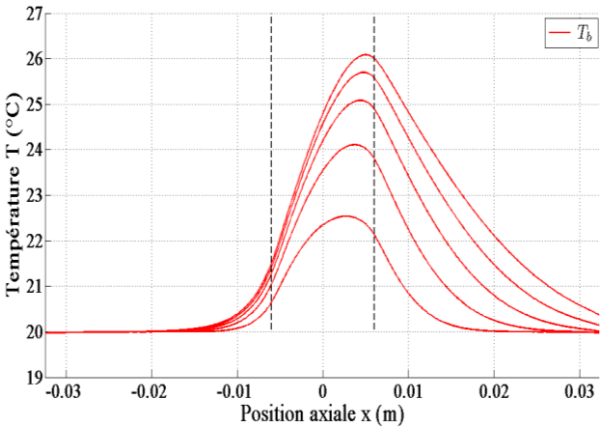


Figure 7 : $\boldsymbol{T_b}$ *estimée* ($\boldsymbol{\alpha_t = 490}$)

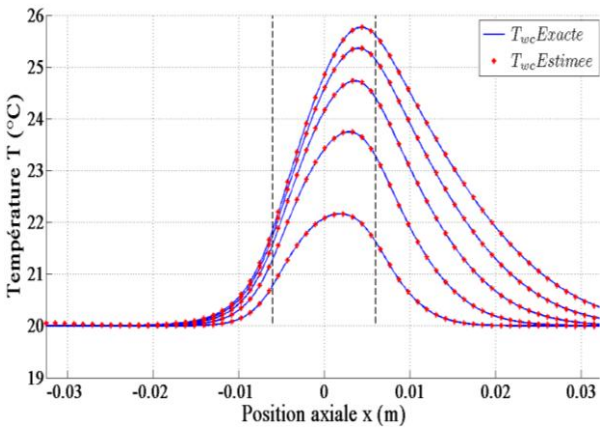


Figure 8 : $\boldsymbol{T_{wc}}$ *exacte et estimée* ($\boldsymbol{\alpha_t = 498}$)

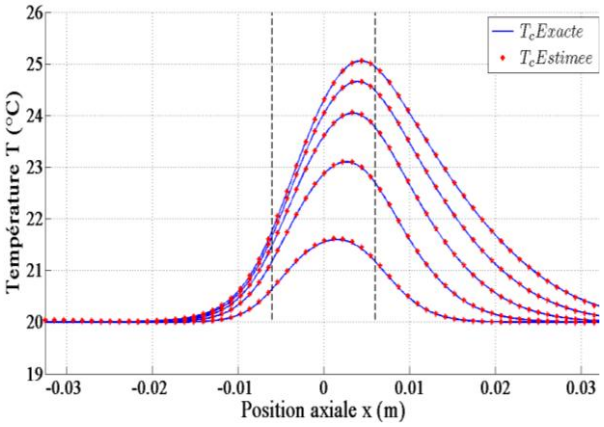


Figure 9 : $\boldsymbol{T_c}$ *exacte et estimée (problème direct)*

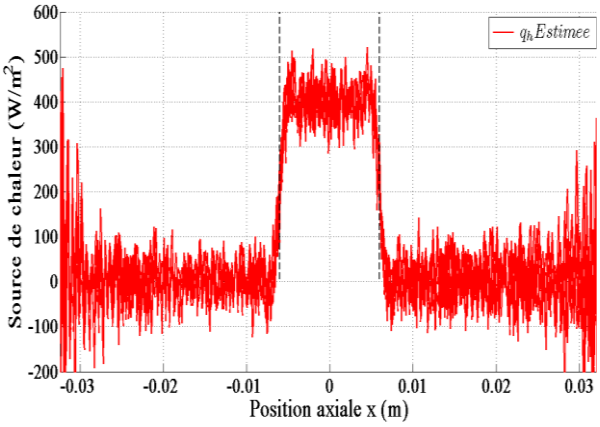


Figure 10 : $\boldsymbol{q_h}$ *exacte estimé* $(\boldsymbol{\alpha_t = 490})$*5 temps*

On présente successivement les températures exacte et reconstruite en face avant (Figure 5), les températures exacte et estimée en face chaude interne (Figure 6), la température de mélange (Figure 7), la température exacte et estimée de la face froide interne (Figure 8) et enfin les températures exacte et estimée en face arrière (Figure 9) ainsi que l'estimation de la source de chaleur (Figure10).

Les profils sont représentés aux instants $(t_k = 80, 160, 240, 320\ et\ 400s)$. Les hyperparamètres de régularison de chaque estimation sont indiqués en légende des figures correspondantes. On constate la très bonne corrélation entre les profils de température simulés par COMSOL (problème direct) et les profils estimés par l'inversion (problème inverse) à l'aide du modèle quadripôlaire. Pour un rapport signal sur bruit $\theta_h^{max}/\sigma = 8.7/0.03$ voisin de 300 au mieux, la figure 10 montre que l'on peut reconstituer assez fidèlement la source (créneau spatial de $400\ W.m^{-2}$ d'intensité) quel que soit l'instant considéré.

4 Conclusion

Nous avons modélisé les transferts thermiques transitoires dans un mini-canal plan en régime transitoire et avons montré que l'estimation de profils internes de température à partir d'une mesure sur une face externe est possible. Les résultats obtenus sont encourageants, ce qui nous permet d'appliquer cette méthode d'inversion sur des mesures réelles [3].

5 Références

[1] G. Morini, Single-phase convective heat transfer in microchannels: A review of experimental results, *Int. J. of Thermal Sciences*, 43, (7) pp. 631–651, (2004).

[2] G. Maranzana, I. Perry, D. Maillet, Mini and micro-channels: influence of axial conduction in the wall, *Int. J. Heat Mass Tranf.*, 47, pp. 3993-4004 (2004).

[3] W. Al Hadad, Y. Rouizi, Y. Jannot, B. Rémy, D. Maillet, Estimation of the heat transferred to a fluid in a minichannel by an inverse technique, *submitted to the 15th International Heat Transfer Conference*, August 10-15, Kyoto, (january 2014).

[4] D. Maillet, S. André, J.C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, Thermal Quadrupoles: Solving the heat equation using integral transforms, *New York: Wiley*, (2000).

[5] Y. Rouizi, D. Maillet, Y. Jannot, Fluid temperature distribution inside a flat minichannel: semi-analytical wall transfer functions instead of *h* coefficient and estimation from temperatures on external faces", *Int. J. Heat Mass Tranf.*, 64, pp. 331–342, (2013).

[6] R.C. Aster, B. Borchers, C.H. Clifford, Parameter Estimation and Inverse Problems, second edition, *Academic Press, Oxford, UK*.(2012).

[7] D. Maillet, S. André, B. Rémy, A. Degiovanni, Regularized parameter estimation through iterative rescaling (PETIR): an alternative to Levenberg-Marquardt's algorithm, *HAL*, 00867608, September 30 ,2013, Available at http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00867608

[8] I. Perry, Y. Jannot, D. Maillet, B. Fiers, Effect of velocity distribution on external wall temperature field for a flat microchannel, *Experimental Heat Transfer*, 23, pp.27-43, (2009).

[9] H. Stehfest, Remarks on algorithm 368 – Numerical inversion of Laplace transforms, *Com. A.C.M*, 21, p. 624, (1970).