Instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants thermodépendants

Mondher Bouteraa, Chérif Nouar

▶ **To cite this version:**

Mondher Bouteraa, Chérif Nouar. Instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants thermodépendants. 22ème Congrès français de mécanique, Association française de mécanique; Georges Jacquet-Richardet Aug 2015, Lyon, France. hal-01449471

HAL Id: hal-01449471

https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01449471

Submitted on 30 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Instabilité thermo-convective de Rayleigh- Bénard pour des fluides rhéofluidifiants thermodépendants

M. BOUTERAA & C. NOUAR

LEMTA - UMR 7563 CNRS - Université de Lorraine, 2, Avenue de la Forêt de Haye, B 160, 54504 Vandoeuvre-Lès-Nancy, France
mondher.bouteraa@univ-lorraine.fr
cherif.nouar@univ-lorraine.fr

Résumé :

Nous présentons une analyse linéaire et faiblement non linéaire des instabilités thermo-convectives de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants ayant une viscosité dépendante de la température. Notre objectif est d'étudier l'influence de la variation non linéaire de la viscosité avec le taux de cisaillement ainsi que la thermodépendance des paramètres rhéologiques sur la nature de la bifurcation et la compétition entre les différents motifs de convection. Cette étude vient compléter les travaux de Bouteraa et al. [1] où le caractère thermodépendant n'a pas été pris en compte. Dans la présente étude, nous supposons que le modèle rhéologique du fluide peut être décrit par le modèle de Carreau avec une dépendance exponentielle en température.

Abstract :

We present a linear and a weakly non-linear analysis of Rayleigh-Bénard thermo-convective instabilities for shear-thinning fluids with thermo-dependent viscosity. Our objective is to study the influence of the nonlinear variation of the viscosity with the shear rate and the thermo-dependency of the rheological parameters on the nature of the bifurcation and on the competition between different convection patterns. This study complements the work of Bouteraa et al. [1] where the temperature dependence of the viscosity has not been taken into account. In this study, we adopt the Carreau model with an exponential temperature dependence of $\mu(T)$.

Mots clefs : Rayleigh-Bénard, fluide rhéofluidifiant, motifs de convection, thermodépendance.

1 Introduction

Dans un article récent, Bouteraa et al. (2015) [1] ont étudié la convection de Rayleigh-Bénard pour un fluide rhéofluidifiant, i.e. un fluide dont la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. Ils ont montré que la bifurcation était sur-critique lorsque le degré de rhéofluidifaction noté α et défini par l'équation (24) est inférieur à une valeur critique α_c et sous-critique dans le cas contraire (voir aussi la référence [2]). Il a été aussi montré que le caractère rhéofluidifiant favorise le développement d'une convection sous forme de rouleaux et renforce leur stabilité contrairement à ce qui a été prédit dans la littérature (Albaalbaki Khayat (2011) [3]).
Dans cette étude, la variation des paramètres rhéologiques en fonction de la température n'a pas été prise en considération. Cependant, la majorité des fluides complexes rencontrés par exemple en géophysique ou dans l'industrie agro-alimentaire sont généralement fortement thermodépendants. La prise en compte de la thermodépendance introduit une brisure de symétrie par rapport au plan médian séparant les deux

plaques de la cellule de Rayleigh-Bénard. Cette brisure de symétrie se traduit par l'émergence de motifs tridimensionnels [4]. La présente communication se propose alors d'examiner le problème de Rayleigh-Bénard pour un fluide rhéofluidifiant thermodépendant.

2 Description du problème

Considérons un fluide rhéofluidifiant confiné entre deux plaques horizontales infinies, parfaitement conductrices de la chaleur et séparées d'une distance $\hat{d}$. Les plaques supérieure et inférieure sont maintenues à des températures constantes $\hat{T}_0 - \Delta\hat{T}/2$ et $\hat{T}_0 + \Delta\hat{T}/2$. Si la différence de température entre les deux plaques est suffisamment faible, le fluide reste au repos et le transfert thermique s'effectue par conduction. La solution du problème est hydrostatique et le profil vertical de la température est linéaire :

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} = \hat{\rho}_0 \left[1 - \hat{\beta}\left(\hat{T} - \hat{T}_0\right)\right] \quad \text{et} \quad \hat{T}_{cond} = \hat{T}_0 + \frac{\Delta\hat{T}}{2}\left[1 - \frac{2\hat{z}}{\hat{d}}\right] \tag{1}$$

où $\hat{\rho}_0$ est la masse volumique de fluide à la température de référence $\hat{T}_0$, $\hat{\beta}$ le coefficient de dilatation thermique et $\hat{z}$ la coordonnée verticale dont l'origine est située sur la plaque inférieure. Lorsque la différence de température dépasse une valeur critique, la convection se déclenche avec l'émergence de motifs qui peuvent se présenter sous forme de rouleaux, carrés ou hexagones. Le choix du motif de convection est dicté par les non linéarités du problème.

3 Équations gouvernant le problème

En utilisant les échelles caractéristiques $\hat{d}^2/\hat{\kappa}$, $\hat{d}$, $\hat{\kappa}/\hat{d}$ et $\Delta\hat{T}$, respectivement de temps, de distance, de vitesse et de température et en adoptant l'approximation de Boussinesq qui considère que la variation de la masse volumique avec la température peut être négligée dans les équations de conservation excepté dans le terme de poussée d'Archimède, les équations aux perturbations sous forme adimensionnelle sont données par :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{Pr}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla} p + Ra\,\theta\,\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{\nabla}^2\theta. \tag{4}$$

où $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ est le vecteur vitesse, $p(\boldsymbol{x}, t)$ est la perturbation de la pression, $\theta(\boldsymbol{x}, t)$ est la perturbation de la température et $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y} + z\boldsymbol{e_z}$ est le vecteur position. Le problème fait intervenir deux paramètres adimensionnels, le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Prandtl Pr, définis par :

$$Ra = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \Delta\hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\kappa}\,\hat{\mu}_0} \quad ; \quad Pr = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0\,\hat{\kappa}}, \tag{5}$$

$\hat{g}$ est l'accélération de la pesanteur, $\hat{\kappa}$ la diffusivité thermique et $\hat{\mu}_0$ la viscosité du fluide à cisaillement nul et à la température $\hat{T}_0$. Généralement, pour les fluides non-Newtoniens purement visqueux, le temps de diffusion visqueuse est beaucoup plus court que celui de diffusion thermique ($Pr >> 1$). Pour ce qui est du comportement rhéologique, le modèle de Carreau-Bird avec une dépendance exponentielle en température est adopté :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mu}\left(\hat{\Gamma}\right)\hat{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} \qquad \text{avec} \qquad \hat{\mu}\left(\hat{\Gamma}\right) = exp(-\hat{k}\,(\hat{T} - \hat{T}_0))(1 + \hat{\lambda}^2\hat{\Gamma})^{\frac{n_c - 1}{2}} \tag{6}$$

Où $\hat{k}$ est un coefficient de thermodépendance, $0 < n_c < 1$ est l'indice de rhéofluidification et $\hat{\lambda}$ un temps caractéristique du fluide. Sous forme adimensionnelle, l'équation précédente s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\left(\Gamma\right)\dot{\boldsymbol{\gamma}} \qquad \text{avec} \qquad \mu\left(\Gamma\right) = \mu_b(z)\, exp(-\xi\theta)(1 + \lambda^2\Gamma)^{\frac{n_c - 1}{2}} \tag{7}$$

Où $\xi = \hat{k}\Delta\hat{T}$ et μ_b le profil de viscosité en régime conductif :

$$\mu_b(z) = exp(-\xi(\frac{1}{2} - z)) \tag{8}$$

Le rapport de viscosité entre les parois supérieure et inférieure est donné par :

$$r = \frac{\mu_b(z=1)}{\mu_b(z=0)} = exp(\xi) \tag{9}$$

Dans les équations précédentes, Γ est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$.

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T \qquad ; \qquad \Gamma = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij} \tag{10}$$

Dans l'équation (6), il a été supposé implicitement que la viscosité à cisaillement infini $\hat{\mu}_\infty$ est beaucoup plus faible par rapport à celle à cisaillement nul. Le rapport $\hat{\mu}_\infty/\hat{\mu}_0$ a été négligé. Cette hypothèse est largement adoptée dans la littérature et ne modifie en rien les conclusions de cette étude. L'existence d'une perturbation en vitesse induit une perturbation en cisaillement qui elle-même se traduit par une perturbation en viscosité. Celle-ci est écrite à l'aide d'un développement de Taylor autour de l'état de base :

$$\mu = \mu_b(1 - \xi\theta + ...)[1 + (\frac{n_c - 1}{2})\lambda^2\Gamma + ...] \tag{11}$$

Pour les conditions limites sur les parois, nous avons tenu compte de la présence d'un éventuel glissement. Pour cela, nous avons adopté la loi de Navier qui stipule que la vitesse horizontale est proportionnelle à la contrainte tangentielle via un coefficient empirique P_G qu'on appelle paramètre de glissement. $P_G = 0$ correspond à une situation d'adhérence et $P_G > 1000$ correspond à une situation de glissement parfait. La composante verticale de la vitesse étant nulle aux parois :

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e_z} = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{e_x}\cdot\boldsymbol{u} = P_G\,\boldsymbol{e_x}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} \quad ; \quad \boldsymbol{e_y}.\boldsymbol{u} = P_G\,\boldsymbol{e_y}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{à} \quad z = 0, 1. \tag{12}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante. Pour la température, les plaques sont isothermes :

$$\theta = 0 \qquad \text{à} \qquad z = 0, 1. \tag{13}$$

Finalement, les équations aux perturbations (2)-(4) sont réécrites en termes de la composante verticale de la vorticité ζ, de la composante verticale de la vitesse w et de θ. Pour cela, on a appliqué le rotationnel à l'équation (3), ensuite deux fois le rotationnel à l'équation (3). Les équations obtenues sont projetées sur $\boldsymbol{e_z}$.

4 Analyse linéaire de stabilité

Dans l'approche linéaire, les perturbations sont supposées infinitésimales et les termes non linéaires peuvent être négligés dans les équations aux perturbations. À ce niveau, le caractère non-Newtonien ne joue aucun rôle. De manière classique, nous cherchons des solutions sous forme de modes normaux :

$$\begin{bmatrix} w(x,y,z,t) \\ \theta(x,y,z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(z) \\ G_{11}(z) \end{bmatrix} f(x,y)\exp(st) \tag{14}$$

où s est la valeur propre, $s = s_r + is_i$, et $f(x,y)$ une fonction de forme qui satisfait l'équation de Helmoltz : $\Delta_H^2 f = -k^2 f$. Dans cette équation, k représente le module du vecteur d'onde horizontal $\boldsymbol{k}$

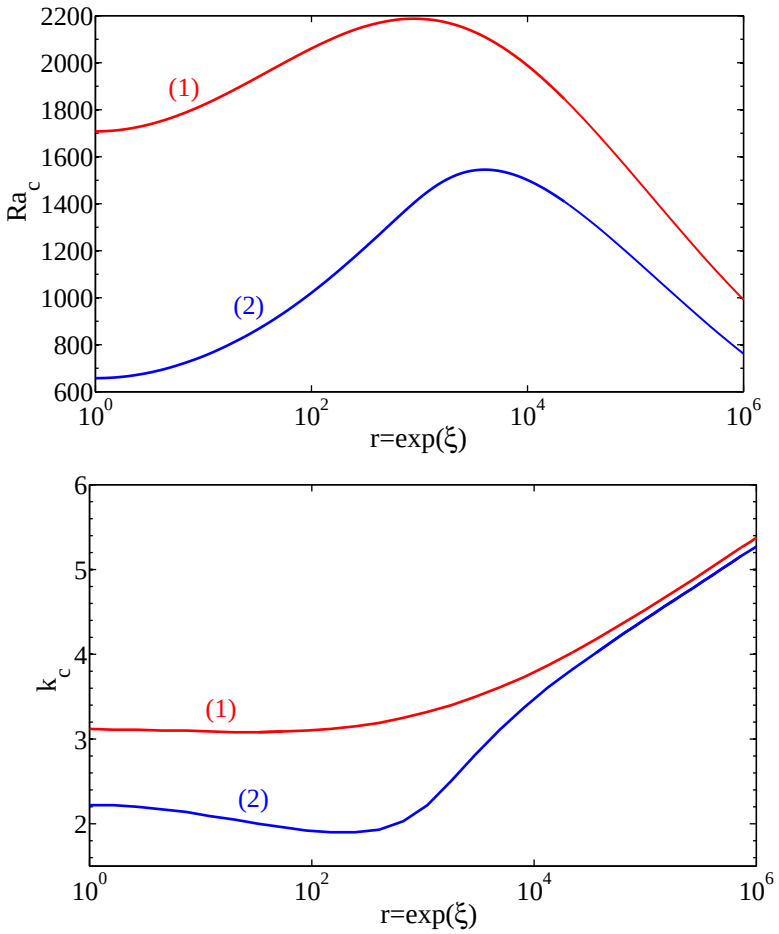


FIGURE 1 – Nombre de Rayleigh critique (Ra_c) et nombre d'onde critique (k_c) en fonction de r en situation d'adhérence (1) et en situation de glissement parfait(2).

et Δ_H le laplacien restreint au plan horizontal. En substituant l'expression (13) dans les équations aux perturbations linéarisées, on aboutit au système d'équations différentielles suivant :

$$s\,Pr^{-1}(D^2-k^2)F_{11} = -k^2 RaG_{11} + \mu_b[(D^2-k^2)+2\xi(D^3-k^2D) \\ +\xi^2(D^2+k^2)]F_{11}, \tag{15}$$

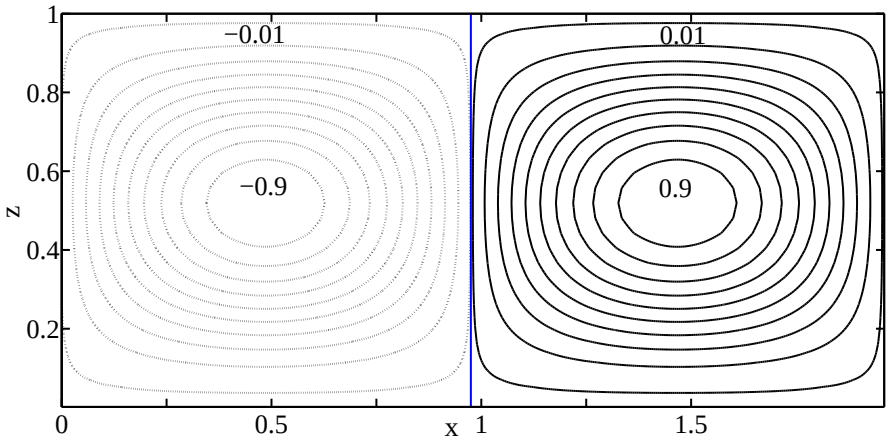
$$s\,G_{11} = F_{11} + (D^2-k^2)G_{11}, \tag{16}$$

D désigne la dérivée par rapport à z. Les conditions aux limites associées sont :

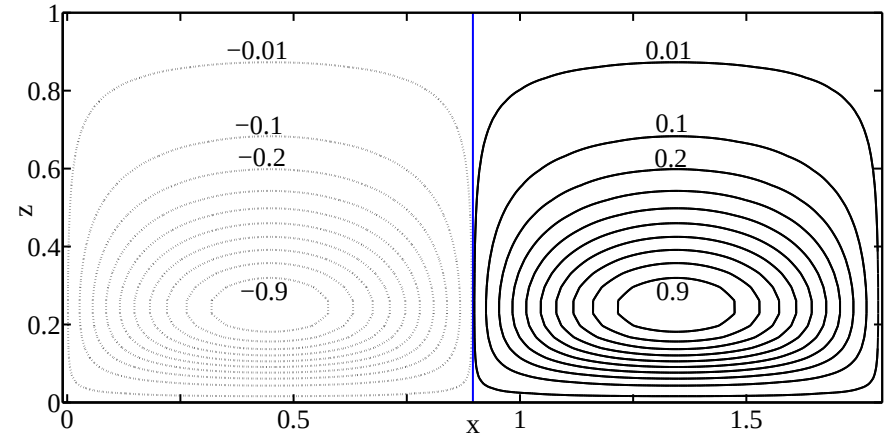
$$w = 0 \quad ; \quad Dw - P_G D^2 w = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, \tag{17}$$

$$w = 0 \quad ; \quad Dw + P_G D^2 w = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 1, \tag{18}$$

Le système d'équations différentielles (15)-(16) est discrétisé par une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev. Le problème aux valeurs propres généralisé obtenu est résolu sous Matlab. Les valeurs propres sont réelles, $s_i = 0$, en accord avec le principe d'échange de stabilité. Sur la figure 1, nous avons représenté la variation du nombre de Rayleigh critique Ra_c et du nombre d'onde critique k_c en fonction du rapport de viscosité. Ces résultats sont en très bon accord avec ceux de K.Strengel et al. [5]. Pour un rapport de viscosité inférieur à 1000, la thermodépendance a un effet stabilisant et le nombre d'onde varie peu avec r. Pour $r > 1000$, le nombre d'onde augmente fortement avec r, et la thermodépendance a un effet déstabilisant. Dans cette dernière situation $(r > 1000)$, la convection est confinée dans une fine couche de fluide adjacente à la paroi chaude. Les contours de w



(a)



(b)

FIGURE 2 – Contours de w dans le plan (x, z) en situation d'adhérence pour $Pr = 10$ et deux valeurs du rapport de viscosité (a) $r = 1$ et (b) $r = 8$.

représentés sur les figures (2-a) et (2-b) montrent clairement qu'en augmentant le rapport de viscosité r, la dissymétrie par rapport au plan médian devient plus marquée. Cette brisure de symétrie joue un rôle important dans la compétition entre les différents motifs de convection.

5 Analyse faiblement non linéaire

Pour un paramètre de glissement donné, le nombre de Rayleigh critique, déterminé à partir de l'analyse linéaire de stabilité, fait intervenir le nombre d'onde k_c, indépendamment de l'orientation du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Cette dégénérescence est une conséquence de l'isotropie du plan horizontal supposé infini. En outre, toute combinaison linéaire de modes de la forme $C_p\, exp(i\boldsymbol{k_p}\cdot\boldsymbol{x})\,(F_{11}, G11)^t$ avec $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{k_p} = \boldsymbol{k_c}$ et C_p coefficients constants est aussi solution du problème linéaire et a le même seuil d'instabilité. En d'autres termes, il y a une dégénérescence vis à vis des motifs de convection. S'il n'y a pas de direction privilégiée, le plan horizontal sera pavé par des motifs réguliers, lorsque le nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique. Par une analyse de symétrie, il est montré que ces motifs ne peuvent être que des rouleaux, carrés ou hexagones. La configuration qui sera observée est dictée par les termes non linéaires. Au voisinage de Ra_c, une analyse faiblement non linéaire peut être utilisée pour prédire la structure qui serait observée. Pour cela w et θ sont développées en séries de puissance de l'amplitude

A de la perturbation :

$$w(x,y,z,t) = \sum_{p=1}^{N} A_p(t) \exp\left(i\, \boldsymbol{k}_p \cdot \boldsymbol{r}\right) F_{11}(z) + \text{termes correctifs}, \tag{19}$$

$$\theta(x,y,z,t) = \sum_{p=1}^{N} A_p(t) \exp\left(i\, \boldsymbol{k}_p \cdot \boldsymbol{r}\right) G_{11}(z) + \text{termes correctifs}. \tag{20}$$

La configuration $N = 1$ correspond à des motifs de convection sous forme de rouleaux, $N = 2$ à des carrés et $N = 3$ à des hexagones. Les coefficients $A_p(t)$ satisfont l'équation d'amplitude qui s'écrit par exemple dans le cas de carrés sous la forme :

$$\frac{dA_1}{dt} = s\, A_1 - \left[\beta_1 A_1^2 + \gamma_1 A_2^2\right] A_1 + ... \tag{21}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = s\, A_2 - \left[\beta_1 A_2^2 + \gamma_1 A_1^2\right] A_2 + ... \tag{22}$$

Où s est le coefficient d'amplification temporelle déterminé à partir de l'analyse linéaire de stabilité. La substitution des expressions (19) et (20) dans les équations aux perturbations conduit à un système d'équations différentielles qui permettent de déterminer de manière séquentielle les termes correctifs. De plus amples détails sur la procédure sont donnés dans [1]-[2]. L'application de l'alternative de Fredholm aux équations aux perturbations écrites à l'ordre cubique en A permet de déterminer les coefficients β_1 et γ_1. On montre que ces coefficients peuvent être écrits sous la forme d'une somme de trois termes. Le premier serait similaire à celui qu'on obtiendrait en Newtonien, le deuxième fait ressortir l'effet de la thermodépendance et le dernier mesure le caractère rhéofluidifiant :

$$\beta_1 = \beta_1^{Newt} + \beta_1^{thermo} - \alpha\beta_1^{nonNewt}; \quad \gamma_1 = \gamma_1^{Newt} + \gamma_1^{thermo} - \alpha\gamma_1^{nonNewt} \tag{23}$$

avec

$$\alpha = \left|\frac{d\mu}{d\Gamma}\right|_{\Gamma=0} = \frac{1-n_c}{2}\lambda^2. \tag{24}$$

Le paramètre α peut être vu comme une "mesure" du degré de rhéofluidification. La bifurcation est sur-critique lorsque $\beta_1 + \gamma_1 > 0$ et sous-critique dans le cas contraire. La valeur critique α_c à partir de laquelle la bifurcation passe de sur-critique à sous-critique est donnée par :

$$\alpha_c = \frac{(\beta_1^{Newt} + \gamma_1^{Newt}) + (\beta_1^{thermo} + \gamma_1^{thermo})}{\beta_1^{nonNewt} + \gamma_1^{nonNewt}} \tag{25}$$

La figure 3 représente dans le plan (α, r) les frontières qui délimitent les domaines de bifurcation sur-critique et sous-critique pour les trois motifs : rouleaux, carrés et hexagones. Il est intéressant de noter que le α_c pour les rouleaux est plus important lorsque le fluide est fortement thermodépendant. Dans le cas des rouleaux, la thermodépendance renforce le développement d'une bifurcation sur-critique. Au contraire, pour l'hexagone la thermodépendance favorise une bifurcation sous-critique. Nous avons ensuite étudié la compétition rouleaux / carrés et rouleaux / hexagones. L'analyse linéaire de stabilité des rouleaux dans un réseau carré montre que les rouleaux sont stables lorsque $s(\gamma_1 - \beta_1)/(\beta_1 + \gamma_1) > 0$. La figure 4 représente pour $Pr = 10$, la variation de $(\gamma_1 - \beta_1)/(\beta_1 + \gamma_1)$ en fonction du rapport de viscosité r pour un fluide Newtonien et pour un fluide rhéofluidifiant avec $\alpha = 10^{-4}$. Dans le cas Newtonien, les carrés sont stables à partir de $r = 2$, là où $s(\gamma_1 - \beta_1)/(\beta_1 + \gamma_1) < 0$. Ce résultat est en accord avec [6] . Dans le cas du fluide rhéofluidifiant, les carrés deviennent stables à partir de $r = 1.91$. La rhéofluidification favorise dans ce cas l'apparition des carrés. Ce résultat semble en contradiction avec les résultats de Bouteraa et al. [1]. Ceci pourrait être attribué à la brisure de symétrie induite par la thermodépendance des paramètres rhéologiques.

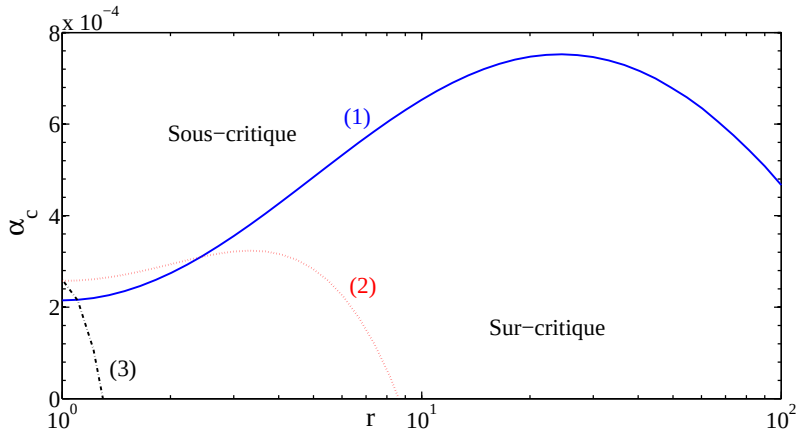


FIGURE 3 – Variation de α_c en fonction de r pour différents motifs de convection :(1) rouleaux ; (2) carrés ; (3) hexagones, pour $Pr = 10$ et en situation d'adhérence.

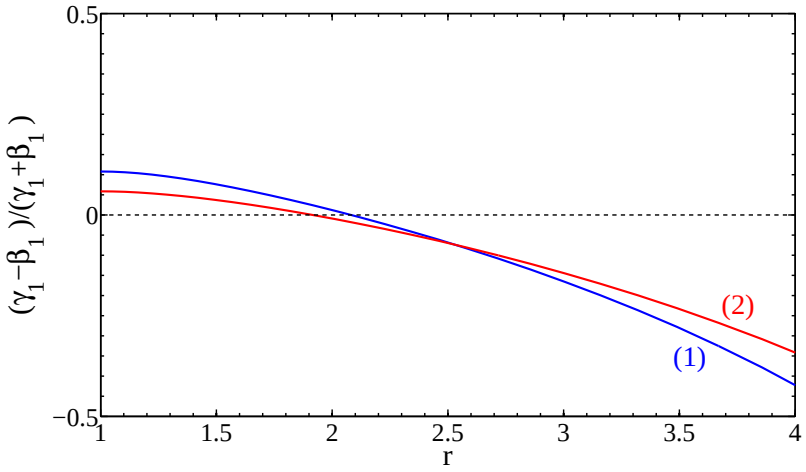


FIGURE 4 – Variation de $(\gamma_1 - \beta_1)/(\beta_1 + \gamma_1)$ en fonction du rapport de viscosité r dans le cas d'un fluide Newtonien (1) et d'un fluide rhéofluidifiant avec $\alpha = 10^{-4}$ (2).

6 Conclusion

Nous avons étudié la convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidiants ayant une viscosité dépendante de la température. Au niveau linéaire, le caractère non-Newtonien ne joue aucun rôle. Les conditions critiques sont identiques à celles obtenues pour une fluide Newtonien. Une analyse faiblement non linéaire a été ensuite effectuée. Elle a permis de déterminer les valeurs des paramètres rhéologiques à partir desquelles la bifurcation passe de sur-critique à sous-critique. Comme dans le cas Newtonien, la thermodépendance favorise une bifurcation sous-critique avec des hexagones. La compétition entre les différents motifs de convection a été étudiée au voisinage immédiat des conditions critiques. Elle montre en particulier qu'à partir d'un rapport modéré de viscosité $(r = 2)$ les carrés sont les structures observées. Cette étude se poursuit en examinant la compétition entre les différents motifs loin des conditions critiques.

Références

[1] M. Bouteraa, C. Nouar, E. Plaut, C. Metivier & A. Kalck. Weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. J. Fluid. Mech. 767 696- 734 (2015) .

[2] N.J. Balmforth et R. C Rust. Weakly nonlinear viscoplastic convection. J. non-Newtonian.Fluid. Mech. 158 36-45 (2009).

[3] B. Albaalbaki et R. Khayat. Pattern selection in the thermal convection of non-Newtonian fluids. J. Fluid. Mech. 668 500-550 (2011).

[4] White, D. B. The planforms and the onset of convection with a temperature dependent-viscosity. J. Fluid Mech. 191, 247–286 (1988).

[5] C. Karl. Stengel, S. Olivier Dean et R. John Booker. Onset of convection in a variable-viscosity fluid. J. Fluid. Mech. 120 411- 431 (1982).

[6] D.R Jenkins. Rolls versus squares in thermal convection of fluids with temperature-dependent viscosity.J. Fluid. Mech. 178 491- 506 (1987).