



**HAL**  
open science

# Etude de la fragmentation d'une goutte de métal liquide dans l'eau

Ahmad Hajjar

► **To cite this version:**

Ahmad Hajjar. Etude de la fragmentation d'une goutte de métal liquide dans l'eau. Génie des procédés. 2014. hal-01835254

**HAL Id: hal-01835254**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01835254>**

Submitted on 11 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Mémoire de stage du Master 2 MEPP  
' Mécanique, Energie, Procédés et produits'  
Spécialité ' Mécanique et Energétique'

Par :

**Ahmad HAJJAR**

## **Etude de la fragmentation d'une goutte de métal liquide dans l'eau**

3 Septembre 2014

Encadrants de stage:

Nicolas RIMBERT      MCF, Université de Lorraine

Michel GRADECK      Professeur, université de Lorraine

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée  
Université de Lorraine - LEMTA - CNRS UMR 7563



## Table de matières

Introduction .....	1
Projet Interaction Corium-eau et rôle du LEMTA .....	1
Contexte et objectifs du stage : .....	2
Plan du rapport : .....	3
1. Etude bibliographique et modélisation de la pulvérisation de gouttes :.....	5
1.1. Atomisation secondaire .....	5
1.2. Nombres sans dimensions .....	5
1.2.1. Le nombre de Weber $We$ :.....	5
1.2.2. Le nombre d'Ohnesorge: .....	6
1.3. Critères de l'observation de cassure :.....	6
1.4. Régimes de déformation et de fragmentation : .....	6
1.5. Transition entre les Régimes de fragmentation : .....	8
1.6. Modélisation de la déformation et la fragmentation d'une goutte : .....	9
1.6.1. Modèle TAB.....	9
1.6.2. Modèle DDB : .....	10
1.6.3. Modèle proposé :.....	13
2. Modèle de déformation et de fragmentation de gouttes : .....	16
2.1. Développement du modèle : .....	16
2.1.1. Champ de vitesse à l'intérieur de la goutte: .....	17
2.1.2. Terme de dissipation visqueuse:.....	18
2.1.3. Terme de L'énergie cinétique: .....	18
2.1.4. Terme de la pression :.....	19
2.1.5. Terme de l'énergie de la surface: .....	27
2.1.6. Equation finale : .....	28
2.1.7. Adimensionnement de l'équation: un oscillateur .....	28
2.2. Discussion de résultats :.....	29
2.2.1. Etat d'équilibre :.....	29
2.2.2. Conditions d'oscillation de la goutte : .....	30
2.2.3. Couplage avec l'équation de quantité de mouvement : Goutte décélérée .....	32
2.2.4. Couplage avec l'équation de quantité de mouvement : Goutte accélérée.....	35
3. Mesure de propriétés du métal de Field: .....	38
3.1. Propriétés thermophysiques .....	38

3.2. Viscosité .....	38
3.3. Mouillabilité .....	39
3.4. Tension de surface .....	41
4- Conception et réalisation d'un générateur de gouttes .....	44
4.1. Générateur pneumatique de gouttes .....	45
4.1.1. Principe du générateur pneumatique : .....	45
4.1.2. Description détaillée du générateur pneumatique .....	46
4.1.3 - Avantages du système : .....	48
4.2. Modifications sur le système de principe : .....	48
4.3. Dimensionnement du générateur .....	50
4.4. Réalisation du générateur de gouttes : .....	50
4.5. Composantes du dispositif expérimental .....	52
4.5.1. Système pneumatique .....	52
4.5.2. Système de chauffage .....	53
4.6. Expériences et résultats .....	53
4.7. Conclusion .....	56
Annexe A .....	57
Annexe B .....	62

# Nomenclature

## Alphabet latin

$a$	Grand semi-axe du sphéroïde, m
$b$	petit semi-axe du sphéroïde, m
$c$	Coefficient d'amortissement dans l'oscillateur, N/(m/s)
$C_p$	Capacité calorifique à pression constante, J/Kg.K
$D$	Diamètre de la goutte, m
$e$	Excentricité, m
$E$	Energie, J
$F$	Force, N
$k$	Constante de raideur de ressort, N/m
$K$	Rapport de densités goutte/fluide
$L_f$	Chaleur latente de fusion, KJ/Kg
$m$	Masse, Kg
$N$	Rapport de viscosités goutte/fluide
$P$	Pression, Pa
$R$	Rayon de la goutte, m
$t$	Temps, s
$T$	Température, K
$u$	Vitesse de la goutte, m/s
$U$	Vitesse de la goutte à l'infini, m/s
$v$	Volume, m <sup>3</sup>
$W$	Travail externe, J
$\gamma$	Paramètre de déformation de la goutte, m

## Alphabet grec

$\varepsilon$	Paramètre de linéarisation
$\lambda$	Conductivité thermique, W/m.K
$\mu$	Viscosité dynamique, Pa.s
$\nu$	Viscosité cinématique, m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Masse volumique, Kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	Tension de surface, N/m
$\phi$	Fonction de dissipation, W/m <sup>3</sup>
$\Phi$	Dissipation visqueuse, W
$\psi$	Fonction de courant

## Indices

C	Cinétique
G	Gaz ou le fluide où tombe la goutte
L	Liquide de la goutte

S  
o

Terme de surface  
Etat à l'infini

## Introduction

Le présent stage: « Fragmentation d'une goutte de métal liquide dans l'eau » est fait au sein du laboratoire d'énergétique et mécanique théorique et appliquée LEMTA dans le cadre du projet "Interaction Corium-eau" (I.C.E).

## Projet Interaction Corium-eau et rôle du LEMTA

ICE est un projet coordonné par l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire IRSN. Il vise à améliorer les connaissances sur les phénomènes pouvant survenir lors d'une coulée de matière en fusion (Corium) dans de l'eau, en cas d'accident de fusion du cœur d'un réacteur nucléaire : L'un des risques importants lors d'un accident de fusion du cœur est l'interaction explosive entre le Corium (mélange de combustible et de matériaux de structure en fusion) et l'eau présente, pouvant survenir lors d'un accident de fusion du cœur tel que survenu en 2011 dans trois réacteurs de la centrale de Fukushima. Une telle interaction, dite explosion de vapeur, est similaire à une détonation et l'énergie dégagée pourrait être suffisante pour dégrader l'enclume de confinement.

Ce type d'interaction est difficilement maîtrisable, mais la compréhension et la caractérisation des phénomènes en jeu sont essentielles pour une bonne gestion des phases ultimes d'un accident. Le but du projet ICE est donc de mieux comprendre l'ensemble de ces phénomènes pour pouvoir identifier des moyens d'en limiter les conséquences.

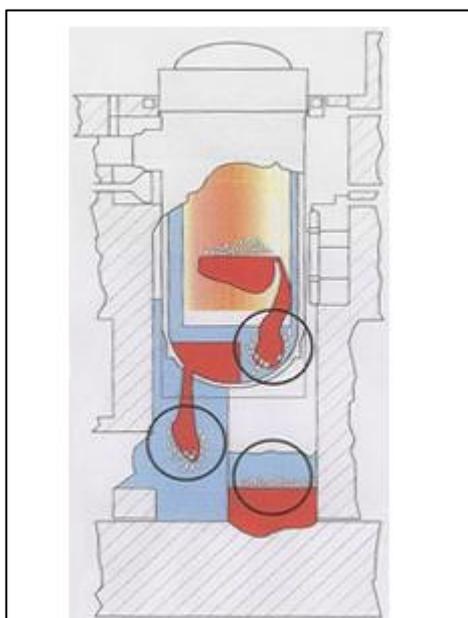


Fig.1 - combustible fondu avec l'eau

Source : irsn.fr [1]

Le déroulement des phénomènes physiques qui conduisent à une explosion de vapeur est connu : dès son entrée dans l'eau, le jet de Corium se fragmente en gouttelettes et produit

une vaporisation intense de l'eau ; celle-ci engendre une onde de choc qui fragmente plus finement le Corium augmentant encore la surface de contact avec l'eau : la vaporisation de l'eau induit une compression locale qui participe à une montée en pression globale. Dans sa phase ultime, le phénomène s'apparente à une détonation chimique. Le front de détonation pulvérise le Corium, cette fragmentation contribuant elle-même à l'onde de choc. La surpressurisation est ensuite suivie d'une importante détente engendrant une très grande vaporisation. C'est en général cette phase de détente qui est la plus destructrice pour les structures. Le phénomène se propage de proche en proche, développant un processus explosif, produisant une grande quantité de vapeur. Le déclenchement de l'explosion n'est cependant pas systématique, il dépend beaucoup des conditions de mise en contact des fluides et de leurs propriétés physiques : dans le mélange initial (ou pré-mélange), le Corium doit rester liquide pour pouvoir se fragmenter et suffisamment dispersé mais sans provoquer une vaporisation trop intense pour qu'il reste de l'eau autour des gouttes.

Le projet ICE a donc pour objectifs d'améliorer la modélisation de la fragmentation et la dispersion des jets de combustible dans l'eau pendant la phase dite de pré-mélange ; de caractériser la solidification du Corium, phénomène limitant la fragmentation et donc l'explosion, et d'améliorer et valider la modélisation du phénomène d'explosion car il existe toujours une incertitude sur les processus contrôlant la formation de l'onde de choc.

Le Laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée LEMTA de l'Université de Lorraine, un des partenaires du projet ICE, est en charge de l'étude expérimentale et de l'amélioration de la modélisation de la fragmentation des jets de Corium dans l'eau.

Le but des expérimentations analytiques est de quantifier la vitesse de refroidissement d'un jet de métal liquide dans l'eau.

### **Contexte et objectifs du stage :**

Il s'agit de mettre au point une expérience simplifiée concernant une goutte de métal liquide isolée.

L'objectif principal de ce stage consiste en la réalisation d'un dispositif de goutte à goutte pour du métal liquide pouvant être utilisé pour étudier la fragmentation de la goutte en mesurant la taille et la vitesse de gouttelettes formées.

L'orientation est vers la conception d'un dispositif de délivrance pneumatique d'une goutte calibrée à la demande. Le métal retenu est le métal de Field dont le point de fusion se situe à 62°C ; ce qui impliquera de contrôler la température du réservoir de métal.

Ensuite, des expériences seront menées afin de caractériser la fragmentation et la solidification de la goutte produite et tombant dans l'eau froide ( $T < 62^\circ\text{C}$ ). Afin de faire cette modélisation pilotée par l'hydrodynamique et les transferts de chaleur associés, il sera nécessaire de caractériser les propriétés physiques (densité, viscosité, Tension surfacique, etc...) du métal de Field. Cela constitue la première étape du stage.

Le métal de Field, utilisé dans cette étude expérimentale, est un alliage fusible qui devient liquide à 62°C. C'est un alliage eutectique de Bismuth Bi (32.5%), d'Indium In (51%) et d'étain Sn (16.5%).

Parallèlement au travail expérimental réalisé, un travail de modélisation de la fragmentation de gouttes a été mené : Après une étude bibliographique sur le processus de l'atomisation secondaire, plusieurs résultats expérimentaux sont montrés. En addition à ces résultats, des modèles analytiques sont encore étudiés, et dans une tentative à corriger les défauts présents dans ces modèles, un nouveau modèle est proposé.

### **Plan du rapport :**

Ce rapport est composé de deux parties :

La première partie est théorique : Dans le chapitre 1, une étude bibliographique sur le processus de l'atomisation secondaire est menée où les principaux travaux expérimentaux sont montrés. Après, de différents modèles analytiques présents dans la littérature sur la déformation et la fragmentation de gouttes sont exposés et étudiés. Dans le chapitre 2, un nouveau modèle analytique est présenté. Le développement de ce modèle à partir de l'équation d'énergie de la goutte est détaillé, puis les résultats issus de ce modèle sont comparés par les résultats expérimentaux pour vérifier l'efficacité du modèle.

La deuxième partie est expérimentale Les différents tests réalisés pour mesurer les propriétés physiques (Thermiques, rhéologiques, de surface...) du métal de Field sont montrés dans le chapitre 3. Ces propriétés sont nécessaires pour la conception du générateur de gouttes qui est présenté dans le chap.4. Dans ce chapitre, le principe d'un générateur pneumatique de gouttes sur demande est expliqué. Des modifications sont appliquées pour pouvoir obtenir de gouttes plus larges. La réalisation de ce générateur à partir de son design est ensuite montrée ainsi que les différentes composantes du dispositif expérimental utilisé pour mener les expériences. Enfin, en utilisant ce générateur, de différentes expériences avec le glycérol et le métal de Field sont présentés.

# Chap. 1

## Etude Bibliographique

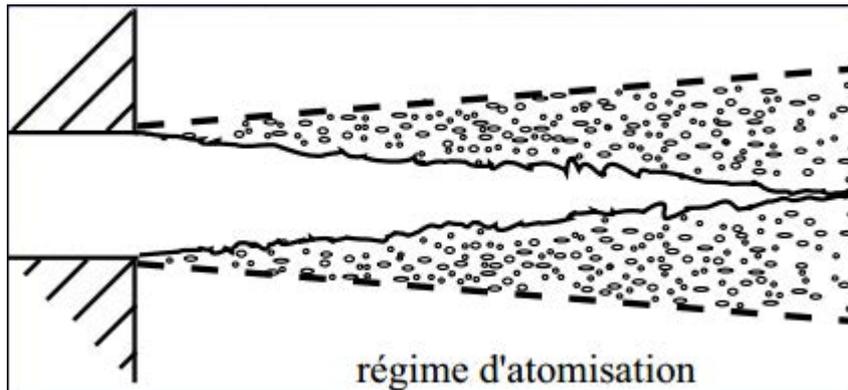


## 1. Etude bibliographique et modélisation de la pulvérisation de gouttes :

### 1.1. Atomisation secondaire

La pulvérisation d'une goutte de liquide éjecté dans un autre fluide dépend principalement de conditions expérimentales où cette goutte est placée.

Il sera donc nécessaire de connaître l'effet des propriétés physiques de deux liquides et les paramètres de la goutte (taille, vitesse...) pour avoir des conditions qui permettent une fragmentation de la goutte.



On distingue deux processus élémentaires du régime d'atomisation d'un jet liquide dans un fluide :

- L'atomisation primaire : c'est la déstabilisation de l'interface liquide-fluide, générant des fragments de "grandes dimensions" et de formes variées (ligaments, gouttes déformées...)
- L'atomisation secondaire : c'est la cassure de parcelles liquides issues de l'atomisation primaire pour former de fines gouttelettes du liquide.

Comme l'étude présente est à propos de la fragmentation d'une goutte liquide, c'est donc l'atomisation secondaire, le processus qui sera étudié.

### 1.2. Nombres sans dimensions

#### 1.2.1. Le nombre de Weber $We$ :

Quand une goutte existe dans un fluide, la force de cisaillement de la vitesse relative du fluide est balancée par la tension superficielle (interfaciale) qui existe sur l'interface goutte-surface.

Pour bien étudier l'effet de cette tension de surface, il faut comprendre son principe :

Du point de vue mécanique, lorsque deux phases sont en présence, tout se passe comme si elles étaient séparées par une membrane sans épaisseur uniformément tendue. Cette

membrane fictive, qui remplace mécaniquement l'interface (phase volumique de faible épaisseur) est appelée "surface de tension".

La tension superficielle est une propriété caractéristique qui concerne essentiellement les liquides.

L'unité de mesure de la tension superficielle est le newton par mètre ( $\text{N.m}^{-1}$ ) qui est équivalent aux joules par mètre carré ( $\text{J.m}^{-2}$ ) qui est l'unité d'énergie de surface.

Le nombre de Weber  $We$  est un nombre sans dimension qui correspond au rapport des forces d'inertie et de tension superficielle.

$$We = \frac{\rho_g U^2 D}{\sigma}$$

### 1.2.2. Le nombre d'Ohnesorge:

Un autre nombre sans dimension qui prend en compte la viscosité de la goutte est le nombre d'Ohnesorge. Il correspond au rapport des forces visqueuses avec la tension superficielle et les forces d'inertie :

$$Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l D \sigma}}$$

### 1.3. Critères de l'observation de cassure :

En fonction du rapport des intensités de forces d'inertie et de tension superficielle, et donc de  $We$ , une goutte peut être seulement déformée ou fractionnée. La transition entre ces deux évolutions permet de définir un nombre de Weber critique  $We_c$  qui permet de déterminer si une goutte peut se fragmenter, selon les conditions expérimentales présentes.

De nombreuses études ont été lancées pour bien déterminer cette valeur critique. Elles ont conduit à une corrélation qui relie  $We_c$  au nombre d'Ohnesorge (Pilch et Erdman [1])

$$We_c = 12 (1 + 1,077 \cdot Oh^{1.6})$$

Dans le cas où  $Oh < 0.1$  (Faible viscosité), le nombre de Weber critique  $We_c$  devient indépendant de  $Oh$ , qui est  $We_c = 12$ , valeur souvent présente dans la littérature.

### 1.4. Régimes de déformation et de fragmentation :

Quand les conditions expérimentales permettent d'obtenir un nombre de Weber  $We > We_c$  la goutte se fragmente. Cette fragmentation peut se produire sous différentes formes en fonction des paramètres agissant sur la goutte et des propriétés du fluide en jeu.

De nombreuses études ont été lancées pour la détermination de ces modes. Schraiber *et al.*[2]ont pu résumer les classifications en huit modes d'atomisation, observées en augmentant successivement la force de cisaillement appliquée par le fluide sur la goutte et par suite le nombre de Weber:

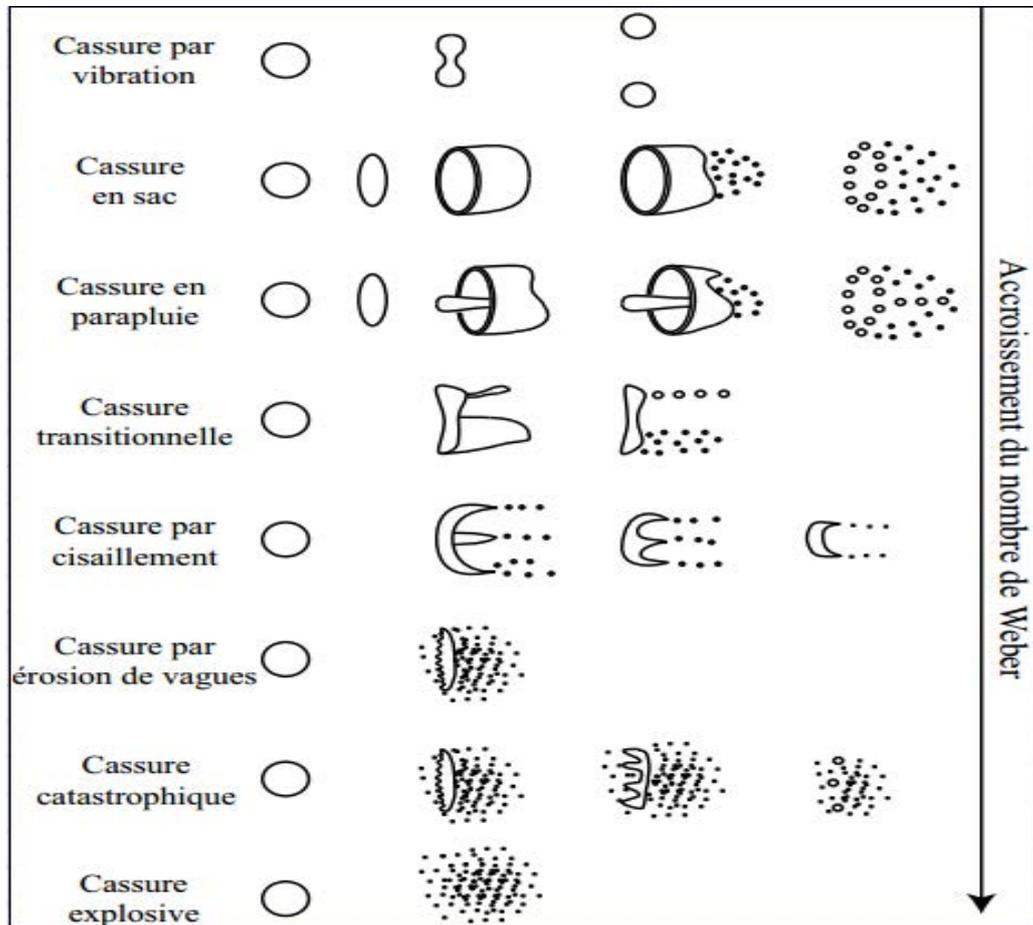


Figure1.1 - Représentation schématique de régimes de cassure d'une goutte

(Shraiber *et al.* 1996) [2]

- 1) Cassure par vibration (Vibration Breakup) : la goutte oscille suivant sa fréquence propre, puis se finit en se divisant en plusieurs fragments, 2 ou 4 le plus souvent, et parfois 8.
- 2) Cassure en sac (Bag Breakup) : la goutte est aplatie et prend la forme d'un ellipsoïde. Sa partie centrale est étirée pour former un sac attaché à une couronne. La fragmentation commence par la fragmentation du sac pour produire de petites gouttes, puis il y a intégration de la goutte pour générer de gouttelettes de dimensions inférieures à celles de la goutte.
- 3) Cassure en parapluie (Bag and stamen Breakup) : Simultanément à la formation d'un sac comme le cas précédent, un ligament central dirigé contrairement à l'écoulement se forme. Le sac se fragmente le premier, suivi par la couronne et le ligament.

- 4) Cassure transitionnelle : Formation d'un sac de très petites dimensions ainsi que de ligaments périphériques à la couronne. La fragmentation de ligaments génère des gouttes de dimensions plus importantes que celles des gouttes générées par la fragmentation du sac. Ce régime est caractérisé par une déformation importante de la goutte.
- 5) Cassure par cisaillement (*Shear Breakup* ou *sheet stripping*) : la goutte ne présente plus de formation de sac mais seulement la formation de ligaments, puis s'épluche par petits fragments.
- 6) Cassure par érosion de vagues (*wave crest stripping*) : de petites vagues de grande amplitude se forment à l'arrière de la goutte, et l'épluchent progressivement.
- 7) Cassure Catastrophique (*catastrophic breakup*) : des vagues plus importantes que le régime précédent se forment à la surface de gouttes pour former de grands fragments, qui se fractionnent à leur tour.
- 8) Cassure explosive (*explosive Breakup*) : Ce régime, qui apparaît fréquemment dans l'étude de fragmentation d'une goutte par onde de choc, est caractérisé par une intégration quasi-instantanée de la goutte en un brouillard de fines gouttelettes.

### 1.5. Transition entre les Régimes de fragmentation :

La détermination des transitions entre ces différents modes de cassure a fait l'objet de nombreuses études. C'est ainsi que Krzeczowski [3] reprend et complète une étude antérieure concernant la cassure d'une goutte par un écoulement gazeux et détermine, dans une carte ( $1/La = Oh^2 ; We$ ), les transitions entre les régimes « bag and stamen », « transitionnel » et « par cisaillement ».

Des études sur la fragmentation d'une goutte par une onde de choc (Hsiang et Faeth, 1992, 1995 [4]), conduisent au même type de représentation (Fig.). Pour les liquides à forte viscosité ( $Oh > 0,1$ ), les transitions sont décalées vers les valeurs plus élevées du nombre de Weber.

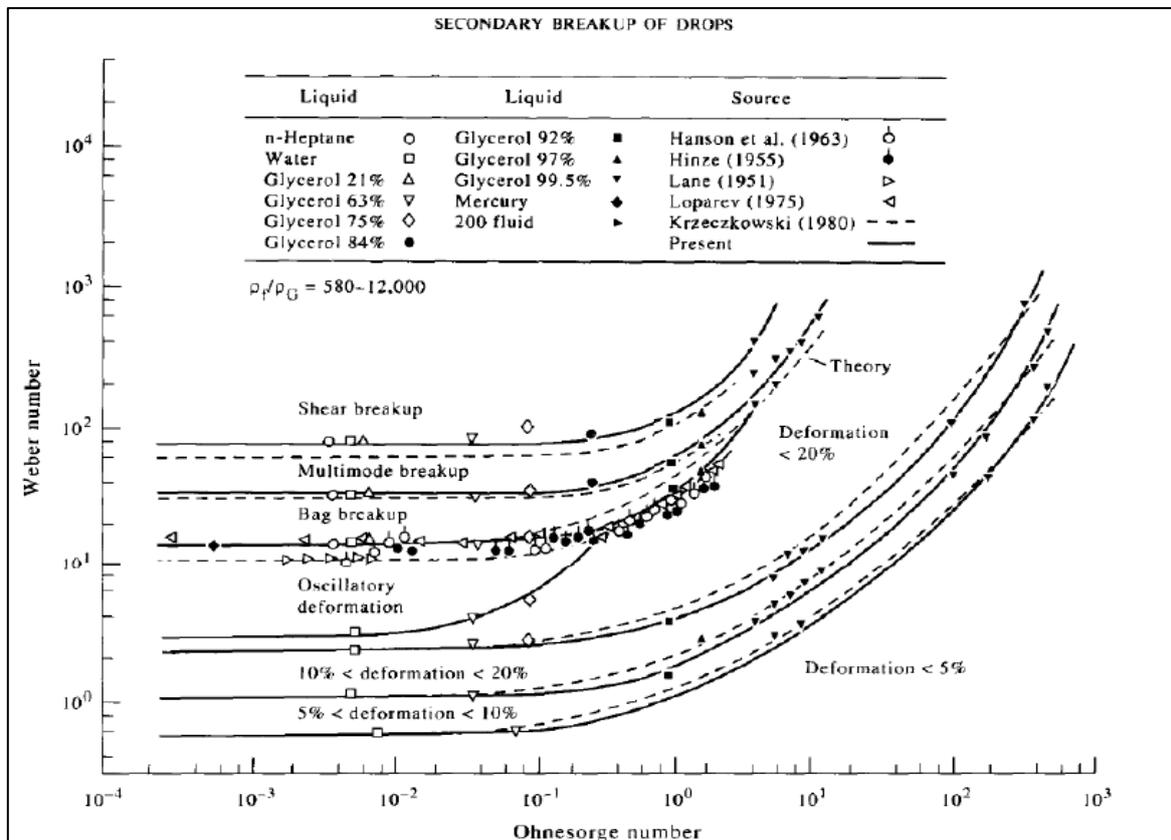


Figure 2.2. Classification de l'atomisation secondaire par Hsiang et Faeth

## 1.6. Modélisation de la déformation et la fragmentation d'une goutte :

Plusieurs études ont été lancées pour étudier la déformation et la fragmentation d'une goutte liquide mise dans un écoulement gazeux, pour donner un modèle analytique pouvant expliquer le comportement des gouttes qui apparaît dans les différents travaux expérimentaux précédents.

Des corrélations de données expérimentales pour des configurations spécifiques (tube de choc, tour de chute, tunnel de vent...) sont disponibles et efficaces et ont été bien utilisées dans le passé.

En addition à ces corrélations, différents modèles analytiques ou semi-analytiques ont été développés :

### 1.6.1. Modèle TAB

Plusieurs modèles sont basés sur « l'analogie de fragmentation de Taylor » ou « Taylor-analogy-breakup » plus connu par l'abréviation TAB: Taylor a trouvé une analogie entre la goutte déformée et un système masse-ressort. La tension du ressort est analogue à la tension de surface de la goutte. La force externe appliquée à la masse est analogue à la

force aérodynamique du gaz. Les modèles précédents sont basés sur cette analogie ont ajouté les forces d'amortissement qui sont dues à la viscosité du liquide.

L'équation d'un oscillateur harmonique forcé et amorti, composé d'une masse  $m$  se déplaçant suivant un axe  $x$ , sur laquelle une force  $F$  est appliquée, et d'un ressort de constante  $k$  et d'un amortisseur de constante  $c$  est formulée par :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F \quad (1.1)$$

Selon l'approche utilisée pour déterminer les valeurs de  $m, c, k$  et  $F$ , deux types de modèles basés sur cette analogie existent : les modèles qui utilisent une approche empirique, comme le modèle qui a été introduit par O'Rourke et Amsden [5], et des modèles qui utilisent une approche analytique approximative. L'équation du modèle TAB peut être écrite comme :

$$K \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{5N}{Re} \frac{dx}{dt} + \frac{8}{We} x = \frac{2}{3} \quad (1.2)$$

Où  $K$  représente le rapport entre les masses volumiques du liquide et du gaz  $\rho_l/\rho_g$  le  $N$  représente le rapport entre les viscosités dynamiques entre le liquide et le gaz, et  $Re$  est le nombre de Reynolds du gaz. Dans cette équation,  $x$  représente le déplacement de l'équateur de la goutte de sa position initiale. Cela apparaît incorrect, car dans un système masse-ressort, les forces agissent sur le centre de la masse, et par suite  $x$  doit être le déplacement du centre de masse au lieu de l'équateur.

Ce défaut dans le modèle TAB a été corrigé dans le modèle de l'oscillation de la goutte développé par Clark [6], qui est linéaire et qui, par conséquent, ne permet pas de modéliser les grandes déformations où les effets non linéaires sont bien manifestés.

### 1.6.2. Modèle DDB :

Un modèle plus intéressant que le modèle TAB est le modèle « Déformation et fragmentation d'une goutte » ou « Drop deformation and breakup » ou DDB développé par Ibrahim *et al.* [7] qui dérive une équation non-linéaire à partir de l'équation d'énergie d'une goutte oscillante sphéroïdale.

Dans ce qui suit, le modèle DDB est étudié et expliqué en détails, puis discuté. Et après, dans une tentative de corriger ses défauts, un nouveau modèle est proposé.

Dans le modèle DDB, la goutte est assumée se déformer d'une forme initialement sphérique de rayon  $R$  en un sphéroïde aplati de section elliptique de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$ .

Un sphéroïde aplati (*oblate spheroid*) est la figure obtenue par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe.

Considérons un sphéroïde aplati généré par la rotation d'une ellipse de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$  autour de son petit axe (Fig.1)

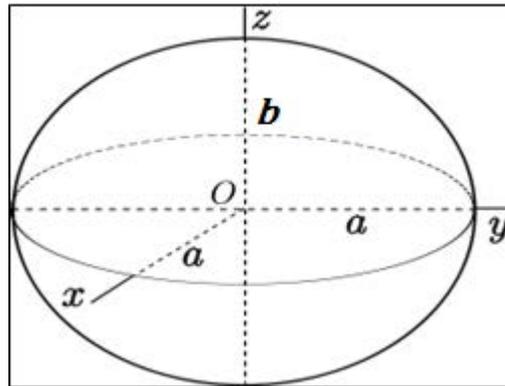


Figure 3.3. Sphéroïde dans un repère cartésien

En coordonnées cartésiennes, l'équation du sphéroïde est donnée par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

Le volume d'un sphéroïde aplati est  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ . Comme la goutte est considérée déformée à partir d'une goutte sphérique, alors la conservation de volume donne  $a^2 b = R^3$ , où  $R$  est le rayon initial de la sphère.

La dynamique de la goutte est formulée en fonction du mouvement du centre de masse de la semi-goutte, dont la distance  $y$  à l'équateur de la goutte représente le seul paramètre de déformation (Fig.1).

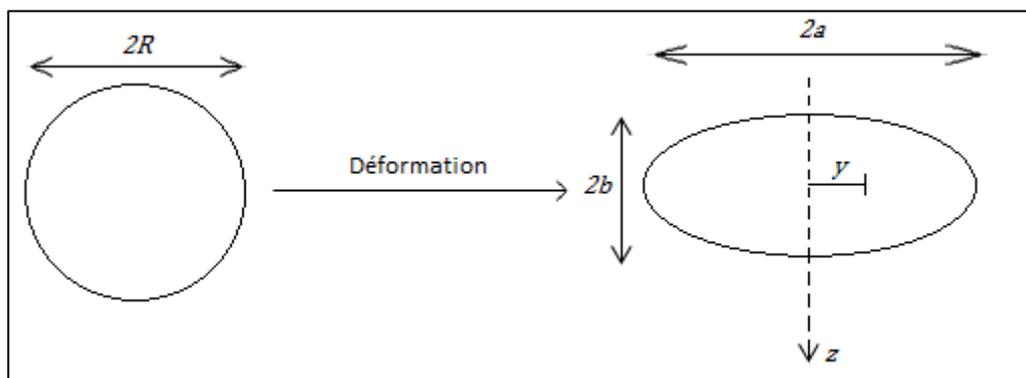


Figure 4.4. Déformation de la goutte sphérique

L'équation de l'énergie de la semi-goutte peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{dW}{dt} \quad (1.3)$$

Où  $E$  est l'énergie interne et  $W$  le travail accompli sur la semi-goutte.

### Energie interne :

L'énergie interne de la semi-goutte vient de son énergie cinétique et de son énergie de surface :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_l u \left( \frac{du}{dt} \right) + \frac{1}{2} \sigma \frac{dS}{dt} \quad (1.4)$$

Avec  $u = \frac{dy}{dt}$  et  $S$  est la surface de la goutte.

Pour calculer le terme de l'énergie de surface, la surface d'un sphéroïde aplati est approchée par :

$$A_s = 2\pi(a^2 + b^2) \quad (1.5)$$

Comme le volume de la goutte déformée est conservé, alors  $\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi R^3$ , ou  $b = \frac{R^3}{a^2}$ . En utilisant  $a = \frac{4}{3}\pi y$ , et prenant  $c = \frac{3\pi}{4}$  :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{9\pi^3}{4} y \left[ 1 - 2 \left( \frac{cy}{R} \right)^{-6} \right] \frac{dy}{dt} \quad (1.6)$$

### Travail :

D'autre part, le travail est fait par la pression et les forces visqueuses, ce qui donne :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2} p A_p \left( \frac{dy}{dt} \right) + \Phi \quad (1.7)$$

Où  $p$  est la pression,  $A_p$  est la projection de la section de la goutte  $A_p = \pi R^2$ , et  $\Phi$  est la dissipation visqueuse.

Le terme de la pression dans l'équation (6) contient  $\frac{dy}{dt}$  car toutes les forces sont supposées agir sur le centre de la semi-goutte.

La pression causant la déformation de la goutte est la pression stagnante du gaz,  $\frac{1}{2} \rho_g U^2$ :

$$\frac{1}{2} p A_p \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\pi}{4} R^2 \rho_g U^2 \left( \frac{dy}{dt} \right) \quad (1.8)$$

La dissipation visqueuse due à l'écoulement est donnée par :

$$\Phi = \frac{8}{3}\pi R^3 \mu_l \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Où  $z$  est l'axe principal qui est dans la direction de déplacement du centre de la semi-goutte. Pour une semi-goutte elliptique, la vitesse de son centre dans la direction de  $z$  est  $v = \frac{\partial v}{\partial z} y$ , et comme  $v = \frac{dy}{dt}$ , alors  $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v}{y} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt}\right)$ .

Par suite, la dissipation visqueuse de la semi-goutte est :

$$\Phi = \frac{8}{3}\pi R^3 \mu_l \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (1.9)$$

### Modèle :

En utilisant les équations (1), (2), (4), (5), (6), et (7) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_l \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma \frac{9\pi^3}{4} y \left[1 - 2\left(\frac{cy}{R}\right)^{-6}\right] \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{8}{3}\pi R^3 \mu_l \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}\right)^2 \\ = \frac{\pi}{4} R^2 \rho_g U^2 \left(\frac{dy}{dt}\right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

En définissant les termes sans dimensions,  $y^* = \frac{y}{R}$ , et  $t^* = t \left(\frac{U}{R}\right)$ , alors l'équation (10) peut être réécrite (après élimination de l'étoile) en fonction de ces quantités adimensionnelles sous la forme :

$$K \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{4N}{Re} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} + \frac{27\pi^2}{16We} y [1 - 2(cy)^{-6}] = \frac{3}{8} \quad (1.11)$$

### Discussion du modèle DDB :

Le modèle DDB part de l'équation d'énergie de la semi-goutte. Quatre termes sont déterminés :

Le terme de l'énergie cinétique, le terme de l'énergie de surface, le terme de la pression et le terme de la dissipation visqueuse. Le défaut principal de ce modèle est présent dans le calcul de la pression autour de la goutte : La pression est supposée constante autour de la goutte, tandis qu'en réalité c'est la non homogénéité dans la distribution de la pression est une cause principale dans la distorsion de la goutte.

### **1.6.3. Modèle proposé :**

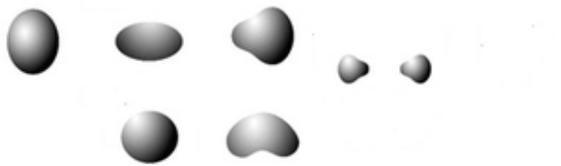
Une manière plus intéressante sera alors de trouver chacun des termes de l'équation de l'énergie directement sur une goutte sphéroïdale se déformant, surtout le terme de la pression. Cela sûrement exige trouver la distribution de pression autour d'une goutte

sphéroïdale. D'ici, un nouveau modèle est développé, et qui part de la même équation principale.

Dans le chapitre suivant, ce modèle est présenté.

# Chap.2

## Modèle de déformation et de fragmentation de gouttes



## 2. Modèle de déformation et de fragmentation de gouttes :

### 2.1. Développement du modèle :

Dans ce modèle, la goutte est encore assumée se déformer d'une sphère de rayon initial  $R$  en un sphéroïde de semi grand axe  $a$  et de semi petit axe  $b$ . Ce sphéroïde peut être soit aplati (ou « oblate » quand deux semi-axes sont égaux à  $a$ ) soit allongé (ou « prolata » quand un seul semi-axe est égal à  $b$ ). Au cas d'oscillation, la goutte est supposée changer alternativement entre ces deux formes.

La relation entre  $a$  et  $b$  venant de la conservation du volume de la goutte permet de dire qu'il n'y a qu'un seul paramètre de déformation  $a$  ou  $b$ , et donc tous les termes de l'équation seront exprimés en fonction de ce paramètre.

En prenant les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sans dimension définis par  $\alpha = a/R$  ( $\alpha > 1$ ) et  $\beta = b/R$  ( $0 < \beta < 1$ ), le paramètre de déformation sera noté  $y$  avec  $y = \alpha$  dans le cas d'un sphéroïde aplati et  $y = \beta$  dans le cas d'un sphéroïde allongé.

Les termes de l'équation seront exprimés en fonction de  $y$ ,  $\frac{dy}{dt}$ , et  $\frac{d^2y}{dt^2}$ .

Considérons un sphéroïde aplati généré par la rotation d'une ellipse de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$  autour de son petit axe, et placé dans un champ uniforme de vitesse  $U$  dans la direction positive de l'axe  $z$  (Fig.2.1).

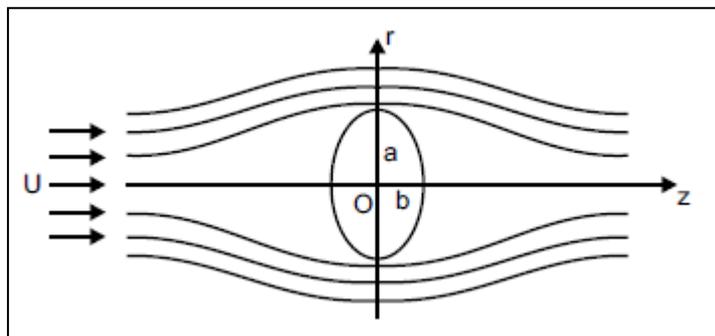


Figure 2.1. Ecoulement au-delà d'un sphéroïde

En trois dimensions, Le cas le plus simple est celui dans lequel le mouvement est le même dans chaque plan à travers une ligne appelée l'axe. Un tel mouvement se produit, par exemple, quand un solide de révolution se déplace dans la direction de son axe de révolution dans un autre fluide initialement au repos.

Ce type de mouvement, dit axisymétrique, présente des analogies avec le mouvement en deux dimensions.

L'écoulement axisymétrique est convenablement formulé en coordonnées cylindriques polaires  $(r, \theta, z)$ , où l'axe  $z$  présente l'axe de symétrie.

### 2.1.1. Champ de vitesse à l'intérieur de la goutte:

Déterminer l'écoulement à l'intérieur de la goutte est nécessaire pour trouver les termes de l'énergie cinétique et de la dissipation visqueuse dans l'équation.

Pour un point  $M(r, z, \theta)$  se trouvant dans le sphéroïde, on a :

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = r_0^2$$

Avec  $r_0 \leq 1$ . En utilisant les termes adimensionnels  $\alpha$  et  $\beta$ , l'équation s'écrit :

$$\frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = \frac{r_0^2}{R^2}$$

Et alors :

$$r = \alpha \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} - \frac{z^2}{\beta^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dr}{d\alpha} = \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} - \frac{z^2}{\beta^2}} = \frac{r}{\alpha}$$

$$z = \beta \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} - \frac{r^2}{\alpha^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{d\beta} = \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} - \frac{r^2}{\alpha^2}} = \frac{z}{\beta}$$

Or :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \frac{dr}{d\alpha} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} r \quad (2.1)$$

$$v_z = \dot{\beta} \frac{dz}{d\beta} = \frac{\dot{\beta}}{\beta} z \quad (12)$$

Et par la suite :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\dot{\beta}}{\beta}$$

Comme  $\alpha^2 \beta = 1$ , alors

$$2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} = 0 \quad \text{et enfin:}$$

$$v_r = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} r \quad (2.3)$$

$$v_z = -2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} z \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Terme de dissipation visqueuse:

Le terme de dissipation visqueuse est donné par :

$$\Phi = \int \phi dV$$

Où  $\phi$  représente la fonction de dissipation et qui est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{aligned} \phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot v)^2 \right] + \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right]^2 \\ + \mu \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \mu \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où  $\vec{v}(v_r, v_\theta, v_z)$  représente la vitesse à l'intérieur de la goutte.

En écoulement incompressible, la divergence de la vitesse est nulle d'après l'équation de continuité. D'autre part, comme la vitesse est présentée exclusivement par ses composantes suivant  $r$  et  $z$ , et comme l'écoulement est axisymétrique, alors les termes en  $\theta$  disparaissent, d'où :

$$\phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right]^2 \quad (2.6)$$

La fonction de dissipation devient alors :

$$\phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + \left( -2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 \right] = 12\mu \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 \quad (2.7)$$

Enfin, le terme de dissipation visqueuse est calculé :

$$\Phi = \int \phi dV = \int 12\mu \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 dV = 12\mu \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 \frac{4}{3} \pi R^3 = 16\mu \pi R^3 \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 \quad (2.8)$$

### 2.1.3. Terme de L'énergie cinétique:

L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_l \int v^2 dV \quad (2.9)$$

Avec:

$$v^2 = v_r^2 + v_z^2 = \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}r\right)^2 + \left(-2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}z\right)^2 = (r^2 + 4z^2)\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2$$

Par suite:

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_l\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 \cdot 4 \int_0^\alpha \int_0^{R/\alpha^2} (r^2 + 4z^2) \cdot 2\pi r \cdot dr dz \quad (2.10)$$

Ce terme peut être écrit sous la forme  $E_c = \frac{1}{2}\rho_l K_c(\alpha) \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2$ .

Alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\rho_l K_c(\alpha) \frac{d}{dt} \left[ \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 \right] \quad (2.11)$$

En utilisant le logiciel *Mathematica*,  $K_c(\alpha)$  (Voir Annexe A) peut être approximée par le polynôme :

$$K_c(\alpha) = 22.17 - 36.58\alpha + 25.93\alpha^2 - 8.23\alpha^3 + 1.51\alpha^4 - 0.14\alpha^5 + 0.0054\alpha^6 \quad (2.12)$$

Ce qui est valable pour  $\alpha \in [1; 2.3]$

De même, pour le cas d'une déformation en sphéroïde allongé (Annexe B), on obtient :

$$K_c(\beta) = 1054.35 - 4731.76\beta + 8174.59\beta^2 - 6361.59\beta^3 + 1869.74\beta^4 \quad (2.13)$$

Et c'est valable pour  $0.5 < \beta < 1$ .

#### 2.1.4. Terme de la pression :

Le travail exercé par la pression sur la goutte est donnée par la formule :

$$W_p = \int P \cdot \vec{v}_l \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (2.14)$$

Où  $P$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{n}$  représentent successivement la pression sur la surface de la goutte, la vitesse de déformation de la goutte, et le vecteur unitaire normal à la surface.

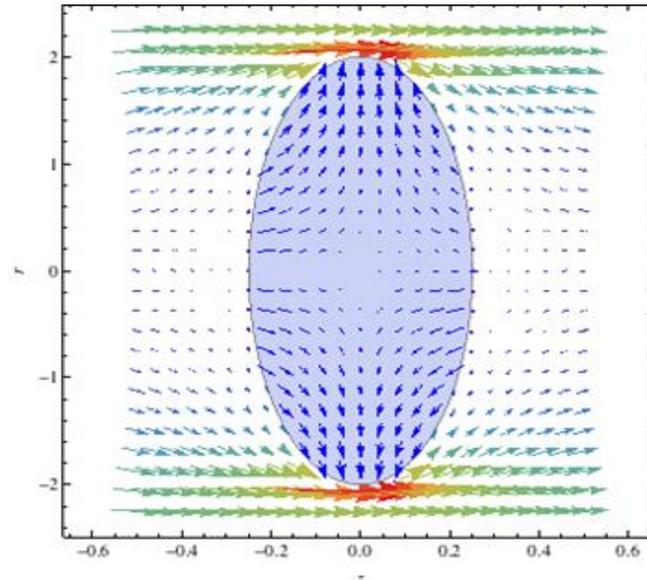


Figure 2.2. Écoulement potentiel autour d'un sphéroïde aplati, et écoulement interne

En utilisant l'équation de Bernoulli :

$$P + \frac{1}{2} \rho_g u^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho_g U^2 \quad (2.15)$$

Donc

$$W_p = \int \left( P_0 + \frac{1}{2} \rho_g U^2 - \frac{1}{2} \rho_g u^2 \right) \cdot \vec{V}_l \cdot \vec{n} \cdot dS = \int \left( -\frac{1}{2} \rho_g u^2 \right) \cdot \vec{V}_l \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (2.16)$$

Où  $P_0$  représente la pression du fluide à l'infini.

Trouver ce travail exige donc déterminer chacun de ces termes :

a- *Vecteur vitesse dans la goutte :*

La vitesse dans la goutte est déjà déterminée en coordonnées cylindriques :

$$v_r = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} r \quad \text{et} \quad v_z = -2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} z$$

b- *Vecteur normal à la surface :*

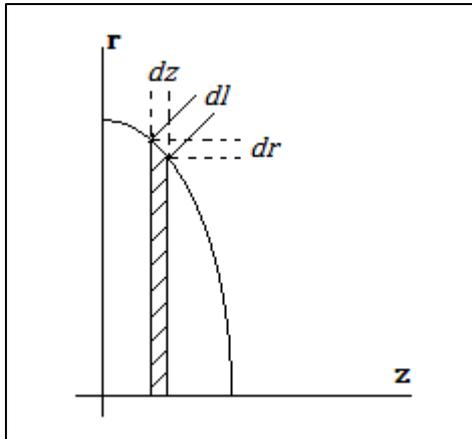
Soit :

$$F(a, r, z) = \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1$$

Le vecteur normal à la surface est donné par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}F}{\|\vec{\nabla}F\|}$$

c- Variation élémentaire de la surface  $dS$  :



D'après la figure,  $dS = 2\pi r dl$ , avec :

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 = dr^2 \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right)$$

Alors :

$$dS = 2\pi r \cdot dr \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

d- Vitesse du fluide autour de la goutte :

Le champ de vitesse autour d'une goutte de forme sphéroïdale n'est pas très simple à trouver : Il faut trouver la fonction de courant de l'écoulement, puis la dériver pour trouver les composantes de la vitesse. Pour cela, il faut commencer dès le début par rappeler comment trouver la fonction de courant en mouvement tridimensionnel axisymétrique (nommée fonction de Stokes), puis l'appliquer pour un écoulement potentiel d'un fluide autour d'un sphéroïde fixe [8,9] :

Comme le mouvement est axisymétrique, une fonction de courant peut être définie, et quand le mouvement est irrotationnel, un potentiel de vitesse existe toujours.

- Fonction de courant de Stokes :

C'est la fonction utilisée pour décrire les lignes de courant et la vitesse de l'écoulement pour un écoulement tridimensionnel axisymétrique. Par analogie au 2D : Une surface où la fonction de courant est constante entoure un tube de courant qui est tangent partout aux vecteurs de la vitesse. Le flux volumique dans ce tube est constant, et toutes les lignes de courant sont situées sur sa surface :

Soit  $A$  un point fixe sur l'axe de symétrie et  $P$  un point arbitraire (Fig.2.3). Les courbes  $AQ_1P$  et  $AQ_2P$  joignent ces deux points, et se trouvent dans le même plan à travers l'axe (nommé plan méridien). Tourner ces deux courbes autour de cet axe de symétrie permet de former une surface fermée dans laquelle le fluide s'écoule autant de droite à gauche à travers  $AQ_2P$  qu'il s'écoule dans le même temps à travers  $AQ_1P$ , en supposant qu'il n'y a pas de liquide qui n'est ni créé ni détruit entre les surfaces.

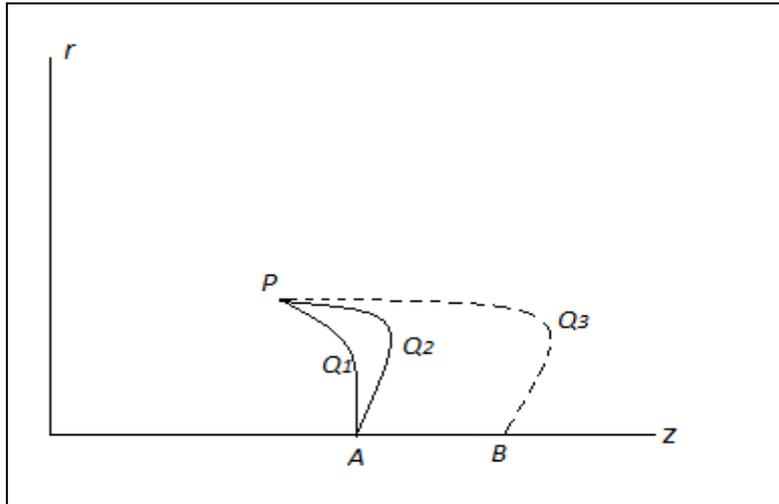


Figure 2.3. Courbes dans le plan méridien

Le terme flux représente le débit de l'écoulement, qui est considéré être toujours dans le même sens, ici de droite à gauche.

Le terme 'de droite à gauche' est relatif à un observateur qui procède le long de la courbe du point fixe  $A$  dans la direction dans laquelle l'arc de la courbe mesuré de  $A$  augmente.

Si le flux entre les deux surfaces est noté  $2\pi\psi$ , alors la fonction  $\psi$  est dite fonction de courant de Stokes. Si la courbe  $AQ_1P$  est laissée fixe, et la courbe  $AQ_2P$  est remplacée par une autre courbe reliant  $A$  à  $P$ , alors la valeur de  $\psi$  reste inaltérée. La fonction de courant dépend alors de la position de  $P$ , et préalablement de la position de  $A$ . Si une autre courbe  $BQ_3P$  est dessinée d'un autre point  $B$  fixe sur l'axe de symétrie, le flux à travers  $BQ_3P$  est le même que celui à travers  $AQ_1P$ , car à cause de la symétrie, il n'y a pas d'écoulement à travers  $AB$ . Cela signifie que la valeur de  $\psi$  ne dépend pas de la position fixe choisie, tant que ce point se trouve sur l'axe de symétrie. La valeur de la fonction de courant dépend donc seulement de la position du point  $P$  et est nulle si ce point se situe sur l'axe.

- Dérivation de la vitesse à partir de la fonction de courant :

Si  $\psi_P$  et  $\psi_{P'}$  représentent les valeurs de la fonction de courant en  $P$  et  $P'$ , le flux de droite à gauche à travers la surface générée par la révolution autour de l'axe de symétrie de n'importe quelle ligne reliant  $P$  et  $P'$ , est égal à  $2\pi (\psi_P - \psi_{P'})$ .

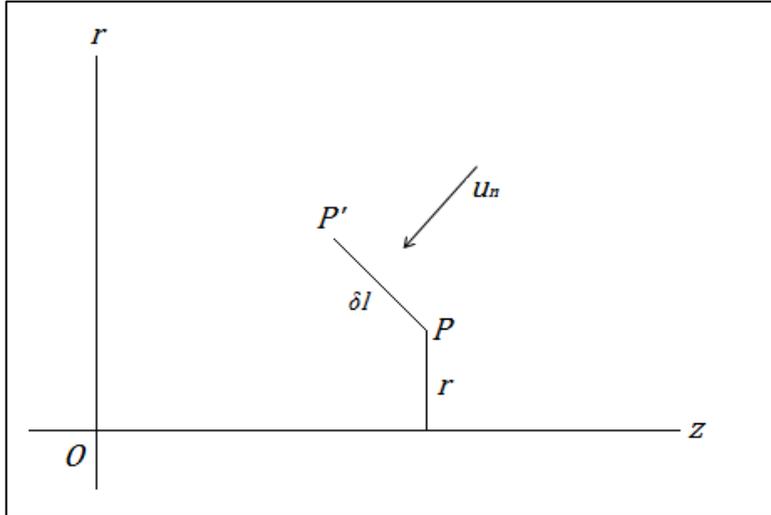


Figure 2.4. Vitesse normale à  $PP'$

En prenant  $P'$  à une distance infinitésimale  $\delta l$  de  $P$ , et  $u_n$  la vitesse de droite à gauche à travers  $PP'$  (Fig.2.4) alors :

$$2\pi r \delta l u_n = 2\pi(\psi_P - \psi_{P'})$$

$$u_n = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial l}$$

Comme application particulière de ce résultat, en prenant  $dl$  égal à  $dr$  et  $dz$  (Fig.2.5) le résultat sera :

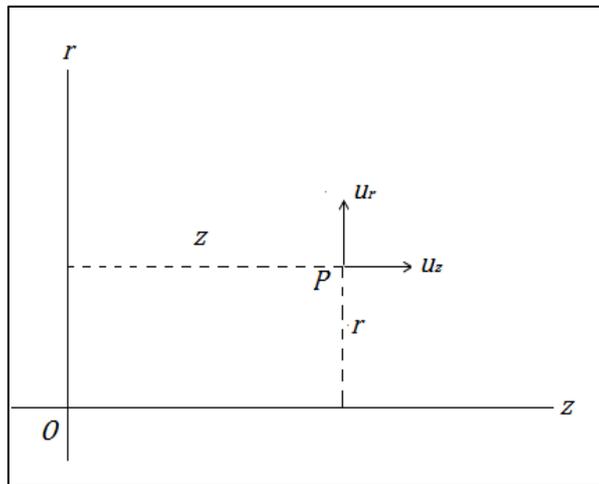


Figure 2.5. Cas particuliers de la vitesse normale

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.17)$$

$$u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.18)$$

Ce qui donne les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

Les lignes de courant sont données par l'équation  $\psi = \text{constante}$ , comme à travers une ligne il n'y a pas d'écoulement.

- Equation satisfaite par la fonction de courant pour un mouvement irrotationnel :

Pour un écoulement symétrique autour de l'axe  $z$ , la vorticité est donnée par :

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.19)$$

Donc pour un mouvement irrotationnel :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.20)$$

Une transformation conforme de la forme  $z + ir = f(\xi + ir) = f(\zeta)$  transforme l'équation précédente en :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2.2113)$$

- Application pour un écoulement uniforme :

Pour un écoulement uniforme  $U$ , parallèle à  $Oz$ , et en prenant le flux de droite à gauche à travers un cercle de rayon  $r$  dont le centre appartient à  $Oz$  et le plan est perpendiculaire à  $Oz$ , on a :  $2\pi\psi = -\pi r^2 U$  Et alors

$$\psi = -\frac{1}{2} U r^2 \quad (2.22)$$

(Ce résultat peut être obtenu en intégrant l'équation :  $-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = U$ )

- Fonction de courant d'un écoulement au-delà d'un sphéroïde :

Le sphéroïde est défini dans ce plan par la transformation :

$$z + ir = c \sinh \zeta = c \sinh(\xi + i\eta) = c \sinh \xi \cos \eta + ic \cosh \xi \sin \eta$$

Avec  $c^2 = a^2 - b^2$

Ce qui donne en comparant les parties réelles et imaginaires :

$$z = c \sinh \xi \cos \eta \quad \text{et} \quad r = c \cosh \xi \sin \eta.$$

Par suite, la courbe définie par  $\xi = \xi_0$  est une ellipse dans le plan  $r-z$  ayant comme grand semi-axe  $a = c \cosh \xi_0$  et de petit semi-axe  $b = c \sinh \xi_0$ , et alors  $\xi = \xi_0$  est un sphéroïde aplati.

La fonction de courant  $\psi$  satisfait l'équation(2) :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\cosh \xi \sin \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\cosh \xi \sin \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Quand le sphéroïde se déplace avec une vitesse  $U$  dans un fluide qui est en repos à l'infini, les conditions qui doivent être satisfaites par  $\psi$  sont :

$$\psi = -\frac{1}{2} U c^2 \cosh^2 \xi_0 \sin^2 \eta \quad \text{à la surface} \quad (i)$$

$$\psi = 0 \quad \text{à l'infini} \quad (ii)$$

La condition (i) permet la supposition d'une solution sous la forme :  $\psi = f(\xi) \sin^2 \eta$

La substitution de cette solution dans (4) donne successivement :

$$f''(\xi) \cosh \xi - f'(\xi) \sinh \xi - 2f(\xi) \cosh \xi = 0,$$

$$f'(\xi) \cosh \xi - 2f(\xi) \sinh \xi = B,$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{f(\xi)}{\cosh^2 \xi} \right) = \frac{B}{\cosh^3 \xi},$$

$$f(\xi) = B \cosh^2 \xi \int \frac{d\xi}{\cosh^3 \xi} + C \cosh^2 \xi,$$

Avec  $B$  et  $C$  sont deux constantes.

La condition (ii) montre clairement que  $C = 0$ .

Or :

$$\int \frac{d\xi}{\cosh^3 \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} - \cot^{-1} \sinh \xi \right) + D,$$

On prend  $D = 0$ , comme les autres termes tendent vers zéro lorsque  $\xi \rightarrow \infty$ .

$$\text{Alors :} \quad f(\xi) = \frac{1}{2} B \cosh^2 \xi \left( \frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} - \cot^{-1} \sinh \xi \right) \quad (2.24)$$

Pour vérifier que  $f \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow \infty$ , on a, pour des larges valeurs de  $\xi$ ,

$$\sinh\xi - \cosh^2\xi \cot^{-1}\sinh\xi = \sinh\xi - \frac{\cosh^2\xi}{\sinh\xi} = -\frac{1}{\sinh\xi},$$

Qui tend clairement vers 0, et alors la condition (ii) est satisfaite.

Pour déterminer  $B$ , la condition (i) donne :

$$B \cosh^2\xi \left( \frac{\sinh\xi}{\cosh^2\xi} - \cot^{-1}\sinh\xi \right) = U c^2 \cosh^2\xi_0 \sin^2\eta$$

$$\text{Avec : } a = c \cosh\xi_0, b = a\sqrt{1-e^2} = c \sinh\xi_0,$$

$$\text{Et alors : } B = (-U c^2)/(e\sqrt{1-e^2} - \sin^{-1}e)$$

Finalement :

$$\psi = \frac{-\frac{1}{2} U c^2 (\sinh\xi - \cosh^2\xi \cot^{-1}\sinh\xi)}{e\sqrt{1-e^2} - \sin^{-1}e} \sin^2\eta \quad (2.25)$$

C'est la fonction de courant d'un sphéroïde oblate se déplaçant dans le sens positif de l'axe  $z$ , avec une vitesse  $U$ .

En plus, d'après l'équation (2.22) la fonction de courant pour un écoulement uniforme de vitesse  $U$  et qui est dans le sens positif de l'axe  $z$  est donnée par :  $\psi = -\frac{1}{2} U r^2$

Enfin, la fonction de courant d'un écoulement de vitesse  $U$  au-delà d'un sphéroïde aplati fixe, dans le sens positif de  $z$  est :

$$\psi = -\frac{1}{2} U r^2 + \frac{\frac{1}{2} U c^2 (\sinh\xi - \cosh^2\xi \cot^{-1}\sinh\xi)}{e\sqrt{1-e^2} - \sin^{-1}e} \sin^2\eta \quad (2.26)$$

En utilisant les équations (2.17) et (2.18), les composantes du vecteur de la vitesse en chaque point peuvent être calculées.

#### e- Détermination du terme de la pression

Après la détermination de tous les termes précédents, le terme de la pression peut alors être calculé (d'après l'équation 2.16):

$$W_p = 2 \int_0^a \frac{1}{2} \rho_g \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right] \cdot \vec{V}_l \cdot \vec{n} \cdot 2\pi r \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2} \cdot dr \quad (2.27)$$

Ce terme peut être écrit sous la forme  $W_p = \rho_g \cdot U^2 \cdot R^2 \cdot K_p(\alpha) \cdot \dot{\alpha}$

En utilisant le logiciel *Mathematica*,  $K_p(\alpha)$  (voir Annexe A) est approximée par :

$$K_p(\alpha) = -0.599 + 0.535\alpha - 0.178\alpha^2 + 4.026\alpha^3 - 0.00137\alpha^4 \quad (2.29)$$

Ce qui est valable pour  $\alpha \in [1; 2.3]$

Dans le cas d'un sphéroïde allongé, la fonction de courant est donnée par :

$$\psi = \frac{\frac{1}{2}Ub^2(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a^2 - b^2} + b^2 \operatorname{Ln}\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)} \left( \cosh\xi + \sinh^2\xi \operatorname{Ln}\left(\tanh\left(\frac{1}{2}\xi\right)\right) \right) \operatorname{Sin}^2(\eta) - \frac{1}{2}Ur^2$$

Et la transformation conforme est donnée par :  $z + ir = c \cosh\zeta = c \cosh(\xi + i\eta)$

En suivant la même démarche que celle pour un sphéroïde aplati (Annexe B), on trouve :

$$K_p(\beta) = -1.763 + 7.865\beta - 9.856\beta^2 \quad (2.30)$$

pour  $0 < \beta < 1$ .

#### 2.1.5. Terme de l'énergie de la surface:

L'énergie de la surface est donnée par  $E_s = \sigma \cdot S$

$$\frac{dE_s}{dt} = \sigma \frac{dS}{dt} = \sigma \frac{dS}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \sigma \frac{1}{S_0} \cdot \frac{dS}{d\alpha} \cdot S_0 \cdot \alpha \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right) = \sigma \cdot K_s(\alpha) \cdot \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right) \quad (2.31)$$

Avec  $S$  est la surface du sphéroïde, et est donnée par :

$$S = 2\pi a^2 + \pi \frac{b^2}{e} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+e}{1-e}\right) = \pi R^2 \left[ 2\alpha^2 + \frac{\beta^2}{e} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \right] \quad (2.32)$$

Avec  $e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$ , et  $S_0 = 4\pi R^2$  est la surface initiale de la goutte sphérique.

Le taux de variation de la surface peut être calculé à partir de la formule exacte de  $S$ .

Pour la gamme de déformation considérée ( $\alpha \in [1; 2.3]$ ) et en utilisant le logiciel *Mathematica*, le polynôme suivant peut être utilisé comme une approximation efficace :

$$K_s(\alpha) = (-39.68 + 41.52\alpha - 5.24\alpha^2 + 3.81\alpha^3 - 0.404\alpha^4 + 0.017\alpha^5) \quad (2.314)$$

pour  $\alpha \in [1; 2.3]$

Alors

$$\frac{dE_s}{dt} = \sigma \cdot R^2 \cdot K_s(\alpha) \cdot \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (2.315)$$

Dans le cas d'un sphéroïde allongé :

$$S = 2\pi b^2 + 2\pi b \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (2.316)$$

En suivant la même démarche, on trouve l'approximation polynomiale :

$$K_s(\beta) = (-51.92 + 97.17\beta - 80.77\beta^2 + 35.54\beta^3) \quad (2.317)$$

pour  $0 < \beta < 1$ .

### 2.1.6. Equation finale :

En utilisant tous les termes calculés avant, et en utilisant le paramètre de déformation  $y$ , l'équation de l'énergie de la goutte est donnée par:

$$\frac{1}{2}\rho_l R^5 K_c(y) \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 \right] + \sigma R^2 K_s(y) \frac{\dot{y}}{y} + 16\mu\pi R^3 \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 = \rho_g \cdot U^2 \cdot R^3 \cdot K_p(\alpha y) \cdot \frac{\dot{y}}{y} \quad (2.18)$$

### 2.1.7. Adimensionnement de l'équation: un oscillateur

En utilisant les nombres sans dimensions :

$$K = \frac{\rho_g}{\rho_l}$$

$$Re = \frac{\sqrt{\rho_g \rho_l} U 2R}{\mu_l} = \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} \frac{U 2R \rho_l}{\mu_l} = \frac{Re_l}{\sqrt{K}}$$

$$We_g = \frac{\rho_g U^2 2R}{\sigma}$$

$$Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l \sigma 2R}} = \frac{\sqrt{We_g}}{Re}$$

Et en introduisant le temps sans dimension :

$$\tau = \sqrt{\frac{\rho_g 2R}{\rho_l U}}$$

L'équation 2.37 peut être alors adimensionnée en utilisant  $y$  et  $t^* = t/\tau$ , pour trouver l'équation d'oscillateur suivante :

$$\frac{d}{dt^*} \left( \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 K_c(y) \right) + \frac{128\pi}{Re} \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 + \frac{16}{We_g} K_s(y) \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) = 8K_p(y) \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) \quad (2.319)$$

## 2.2. Discussion de résultats :

### 2.2.1. Etat d'équilibre :

A l'équilibre, les termes de l'énergie cinétique et de la dissipation visqueuse deviennent négligeables, et alors :

$$\frac{16}{We_g} K_s(y) \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) = 8K_p(y) \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) \quad (2.320)$$

$$We_g = \frac{2K_s(y)}{K_p(y)} \quad (21)$$

Ce résultat peut être vérifié par des résultats expérimentaux [4] déjà présentés dans l'étude bibliographique. Dans la figure 1.2 (Voir chapitre 1), la fragmentation aérodynamique de gouttes induite par des ondes de choc est présentée. D'après cette figure, les nombres de Weber qui correspondent à l'état d'équilibre pour de différentes déformations peuvent être déterminés. En faisant une comparaison entre ces valeurs et les résultats de l'équation, on trouve :

Deformation	5% ( $y=1.05$ )	10% ( $y=1.10$ )	20% ( $y = 1.20$ )
We (Equation)	0.89	1.60	2.54
We (Résultats expérimentaux [4])	0.54	1.07	2.35

**Tableau 2.1. Comparaison de valeurs du nombre de Weber issues du modèle avec celles de travaux expérimentaux**

Les valeurs trouvées d'après le modèle sont légèrement supérieures aux valeurs issues du travail expérimental, mais présentent le même ordre de grandeur. La différence entre les valeurs vient du fait que dans le cas d'une onde de choc, l'écoulement est compressible, tandis que la principale hypothèse utilisée pour développer le modèle était l'incompressibilité de l'écoulement permettant d'assumer un écoulement supérieur. Et comme le terme de pression pour un écoulement compressible est plus important, alors le nombre de Weber correspondant est plus faible.

Une autre méthode pour vérifier les résultats issus du modèle est de les comparer avec d'autres résultats expérimentaux. Dans le même travail [4], des résultats pour une goutte liquide tombant dans un autre liquide sont encore présentés. Pour des faibles nombre de Weber, on peut extraire le graphe suivant :

$$\left(\frac{d_{\max}}{d_{\min}}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

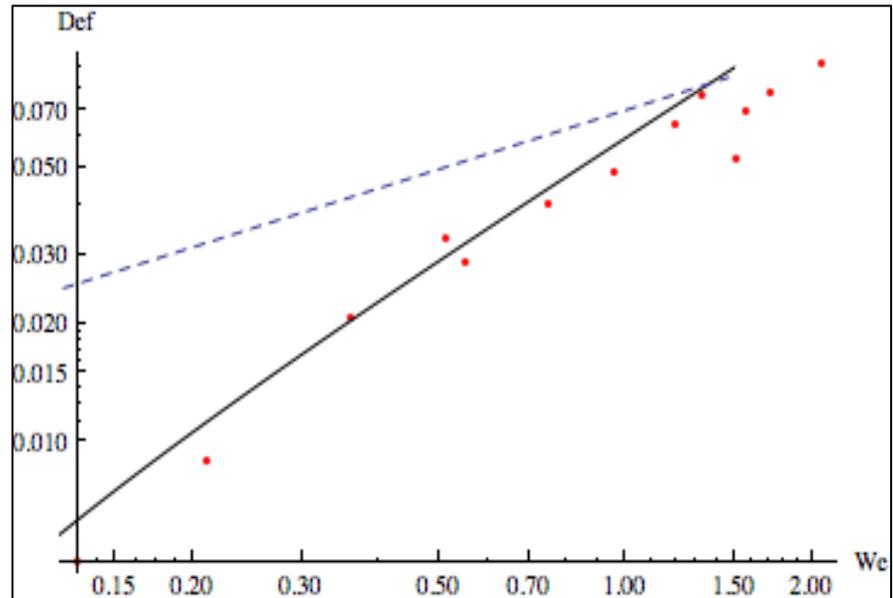


Figure 5.6. Comparaison de la déformation de la goutte dans un système liquide-liquide [4] avec les résultats de l'équation 2.40

Dans cette figure, les points rouges représentent les résultats expérimentaux, la ligne continue représente le résultat de l'équation, et la ligne pointillée représente une corrélation proposée par [4] :

$$\frac{d_{\max}}{d_{\min}} = (1 + 0.07We^{0.5})^3$$

D'après la figure 2.6, il apparaît clairement que le modèle est en bon accord avec les résultats expérimentaux, tandis que la corrélation proposée ne permet pas de décrire la déformation pour les faibles nombre de Weber. Cet écart semble bien être maîtrisé par le modèle proposé.

### 2.2.2. Conditions d'oscillation de la goutte :

Pour pouvoir étudier les conditions qui permettent l'oscillation de la goutte déformée, l'équation 2.38 de l'oscillateur est linéarisée autour de  $y = 1$ .

En supposant  $\varepsilon = y - 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , et que :  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon\dot{\varepsilon}$  et  $\dot{\varepsilon}^2$  sont négligeables devant  $\varepsilon$ , on trouve :

$$K_c(\varepsilon) = 4.6744 - 4.044\varepsilon$$

$$K_s(\varepsilon) = -0.24 + 40.69\varepsilon$$

$$K_p(\varepsilon) = 3.7826 + 12.25\varepsilon$$

Prenant :  $A = 40.69$  et  $B = 12.25$  . En remplaçant dans l'équation, avec  $\dot{\varepsilon} = \dot{y}$  :

$$K_c(1)\ddot{\varepsilon} + \frac{64\pi}{Re} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{8}{We}A - 4B\right)\varepsilon = 0 \quad (2.41)$$

Pour la goutte oscille, il faut que le discriminant  $\Delta$  soit négatif :

$$\Delta = \left(\frac{64\pi}{Re}\right)^2 - 4K_c(1)\left(\frac{8}{We}A - 4B\right) < 0$$

Par suite :

$$(64\pi Oh)^2 - 4K_c(1)(8A - 4BWe) < 0$$

D'après cette relation, il existe un domaine d'oscillation défini par la présence d'un nombre de Weber critique (pour  $Oh = 0$ ) et d'un nombre d'Ohnesorge critique (pour  $We = 0$ ) :

$$\frac{8}{We_c}A - 4B = 0 \Rightarrow We_c = \frac{2A}{B}$$

$$Oh_c = \frac{\sqrt{32K_c(1)A}}{64\pi}$$

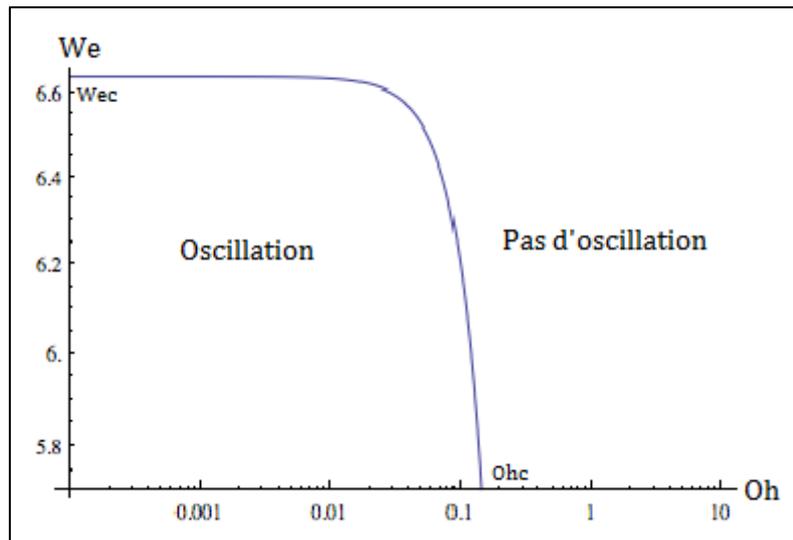


Figure 2.7. Domaine de l'oscillation de la goutte

Ce résultat est différent de résultats expérimentaux (Figure 1.2), comme dans ces derniers, le nombre de Weber critique augmente avec le nombre d'Ohnesorge, et la zone d'oscillation se trouve au-dessus du domaine d'oscillation. Mais, ce résultat montre bien l'effet amortisseur qui apparaît pour des importantes valeurs de  $Oh$ .

Pour qu'il y ait un compromis entre ces deux résultats, il faut que le terme de pression soit de signe négatif.

En fait, cette différence peut être expliquée : la zone où les oscillations sont observées se trouve pour un nombre de Reynolds légèrement supérieur à 100. Cela signifie qu'une bulle de recirculation peut apparaître derrière la goutte et un vortex annulaire est susceptible de

se former. Donc un autre phénomène physique est la cause de la plage de déformation observée : C'est le couplage entre l'oscillateur de la goutte et l'oscillateur du vortex. Ce couplage n'est pas pris en compte dans la modélisation présentée. Cette modélisation ne permet pas alors d'étudier la fragmentation de la goutte ( $We$  élevés) sans appliquer des modifications.

La modification la plus importante est de prendre en compte le fait que pendant la déformation de la goutte, sa quantité de mouvement diminue en se transférant au milieu environnant. Pour cela, un coefficient de traînée empirique est introduit pour assurer le couplage entre les deux équations.

### 2.2.3. Couplage avec l'équation de quantité de mouvement : Goutte décélérée

Dans cette partie, la modélisation s'applique pour la fragmentation d'une goutte, soit dans une expérience de tube à choc où la goutte décélère fortement, soit suite à une exposition soudaine à un écoulement de gaz où le rapport de densités  $k$  est très élevé. Donc la masse ajoutée n'est pas prise en compte.

D'autre part, dans ces cas, les forces de traînée sont très importantes devant les forces gravitationnelles, donc ces dernières seront négligées.

Suivant ces hypothèses, pour une goutte de masse  $m = \frac{4}{3}\rho_l\pi R^3$  se déplaçant avec une vitesse  $u$ , et de coefficient de traînée  $C_d$ , le principe fondamental de la dynamique se formule par l'équation :

$$m \cdot \frac{du}{dt} = -\rho_g \cdot S \cdot C_d \cdot u^2 \quad (2.42)$$

Avec  $S = \pi a^2 = \pi \alpha^2 R^2 = \pi y^2 R^2$ , Alors :

$$\frac{4}{3}\rho_l\pi R^3 \cdot \frac{du}{dt} = -\rho_g \cdot \pi y^2 R^2 \cdot C_d \cdot u^2 \quad (2.43)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{3\rho_g}{4\rho_l} \cdot C_d \cdot \frac{y^2}{R} \cdot u^2 \quad (22)$$

En utilisant la vitesse sans dimension  $u^* = u/U_0$  et le temps  $t^*$ , l'équation 2.42 s'écrit :

$$\frac{du^*}{dt^*} = -\frac{3}{2\sqrt{K}} \cdot C_d \cdot y^2 \cdot u^{*2} \quad (2.45)$$

Le coefficient  $C_d$  n'est pas constant. Il varie avec la déformation de la goutte, mais il peut être calculé en fonction de la déformation et le nombre de Reynolds selon l'équation :

$$C_d(y, Re) = \frac{24}{Re} (1 + 0.1935 Re^{0.6305}) \text{Min}\left[\frac{3y^3 + 4}{7}, 4\right] \quad (2.46)$$

Cette équation doit être couplée avec l'équation 2.38 qui, dans le cas d'une vitesse qui varie avec le temps, s'écrit :

$$\frac{d}{dt^*} \left( \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 Kc(y) \right) + \frac{128\pi}{Re} \frac{1}{u^*} \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 + \frac{16}{We_g} \frac{1}{u^{*2}} K_s(y) \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) = 8K_p(y) \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) \quad (2.47)$$

La simulation du système formé par les 3 équations 2.45, 2.46 et 2.47 montre que la déformation de la goutte dans le modèle est plus rapide que celle dans les résultats expérimentaux. Par exemple, dans le présent modèle,  $y = 2$  est atteinte pendant une durée  $0.7\tau$  tandis que dans des travaux expérimentaux [4,7] la durée qui correspond à la même déformation est égale à  $2\tau$ . Une autre différence de résultats expérimentaux apparaît dans le fait que dans le modèle proposé, la courbe de la variation du rayon de la goutte est plus convexe que dans les travaux expérimentaux [10], où ce rayon varie de façon linéaire(Fig.2.8)

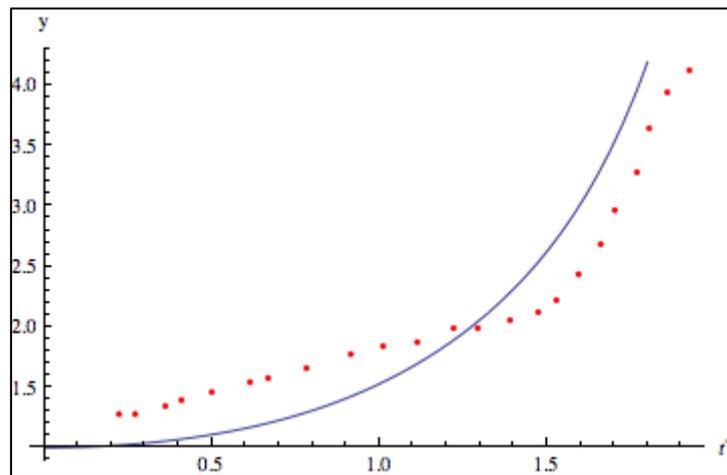


Figure 2.8. Variation de  $y$  avec le temps pour une goutte de l'eau dans l'air [10],  $U = 14$  m/s  $We = 11.3$ ,  $Oh=0.002$ ,  $K= 769$ .  $R_0= 1.6$  mm. la ligne continue représente le résultat de l'équation 2.47, les points rouges sont data de [10]

Par suite, des modifications doivent être appliquées au modèle pour qu'il soit efficace dans la modélisation dynamique d'une goutte fortement décélérée. Il y a deux effets à prendre en compte, qui apparaissent pour des  $We$  élevés :

Le premier est la présence d'une bulle de recirculation derrière la goutte. Cette bulle contribue faiblement à l'élongation de la goutte, alors l'intégrale de l'équation 2.16 doit être appliquée seulement à la moitié de la goutte, et par suite, le terme de pression doit être multiplié par un demi.

Le second est la recirculation qui se produit à l'intérieur de la goutte. Pour prendre en compte cette recirculation dans le modèle et à titre de simplicité, le terme de l'énergie cinétique est multiplié par deux.

L'introduction de ces deux paramètres d'ajustement permet au modèle d'être en bon compromis avec les résultats expérimentaux. Ce compromis apparait en comparant le modèle avec les résultats expérimentaux de Krzeczowsky [3] (Figures 2.9 et 2.10)

La modification des autres termes dans le modèle (Termes de l'énergie de surface et de la dissipation visqueuse) aurait une faible influence, car pour des  $We$  élevés, ce sont les termes de la pression et de l'énergie cinétique qui dominent.

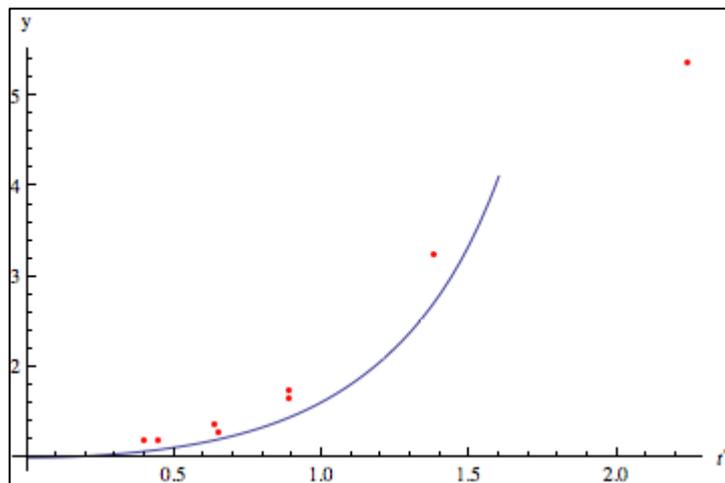


Figure 2.9. Air-eau  $U = 13.5$  m/s  $We = 18.4$ ,  $Oh=0.0014$ ,  $K= 770$ .  $R= 2.8$  mm  
Comparaison avec data de [3]

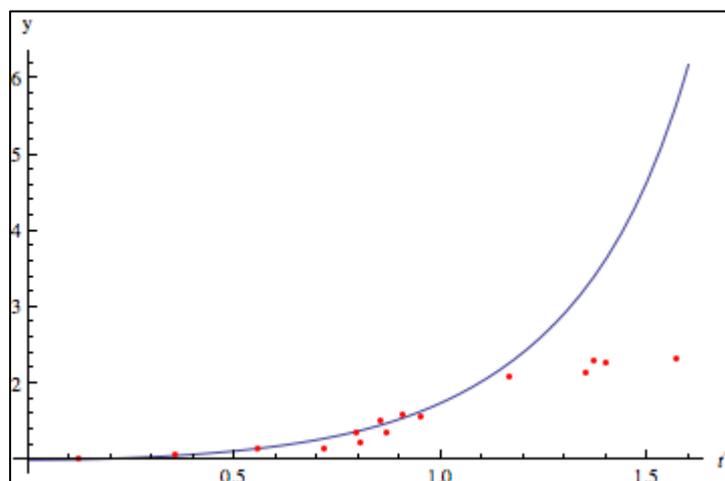


Figure 2.10. Air-eau  $U = 32$  m/s  $We = 103.5$ ,  $Oh=0.0014$ ,  $K= 770$ .  $R_0= 2.8$  mm  
Comparaison avec data de [3]

### 2.2.4. Couplage avec l'équation de quantité de mouvement : Goutte accélérée

Une goutte qui tombe dans un autre liquide est ici étudiée. Le cas d'une goutte de métal liquide qui tombe dans l'eau est alors montré.

Dans ce cas, les effets des forces gravitationnelles et de la masse ajoutée ne sont plus négligés car le rapport de densités  $K$  n'est plus important.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\rho_l \cdot \frac{du}{dt} = -\rho_g \cdot \pi \cdot y^2 R^2 \cdot C_d \cdot u^2 + (\rho_l - \rho_g) \frac{4}{3} \pi R^3 g \quad (2.48)$$

La vitesse limite de chute  $U_l$  d'une goutte non déformée ( $y = 1$ ) est calculée pour une accélération nulle :

$$U_l = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g(K-1)R}{C_d}} \quad (2.49)$$

En introduisant le nombre d'Eötvös, défini comme le rapport entre les effets gravitationnels et la tension superficielle :

$$Eo = \frac{(\rho_l - \rho_g) \cdot g \cdot 2R}{\sigma}$$

Et en normalisant  $u$  par  $U_l$  au lieu de  $U_0$ , on trouve :

$$\frac{du^*}{dt^*} = -\frac{3}{2\sqrt{K}} \cdot C_d \cdot y^2 \cdot u^{*2} + \frac{K^{3/2}}{K-1} \frac{Eo}{We_g} \quad (2.50)$$

Reste à introduire la masse ajoutée induite par le mouvement d'un sphéroïde aplati. C'est la masse du liquide que la goutte déplace en tombant.

Soit  $m'$  la masse du liquide que la goutte sphéroïdale de masse  $m$  aura pu déplacer, alors :

$$m' = \frac{4}{3} \rho_g \pi a^2 b \quad (2.50)$$

En calculant l'énergie cinétique du liquide déplacé  $T_g$  [8], on trouve :

$$T_g = \frac{1}{2} \frac{a}{b} \delta m' u^2 \quad \text{avec } \delta = \frac{1}{K} \frac{e - (\sin^{-1} e) \sqrt{1 - e^2}}{\sin^{-1} e - e \sqrt{1 - e^2}} \quad (2.51)$$

Alors l'énergie cinétique totale est trouvée :

$$\begin{aligned}
T_t &= \frac{1}{2} \left( m + \frac{a}{b} \delta m' \right) u^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \rho_l \pi a^2 b + \frac{a}{b} \delta \frac{4}{3} \rho_g \pi a^2 b \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} \rho_l \pi a^2 b \left( 1 + \frac{a}{b} \delta \frac{1}{K} \right) \right] u^2
\end{aligned} \tag{2.52}$$

En fin, et en tenant compte que  $a^2 b = R^3$ , l'équation 2.50 devient :

$$\left( 1 + y^3 \frac{1}{K} \frac{e - (\sin^{-1} e) \sqrt{1 - e^2}}{\sin^{-1} e - e \sqrt{1 - e^2}} \right) \frac{du^*}{dt^*} = -\frac{3}{2\sqrt{K}} \cdot C_d \cdot y^2 \cdot u^{*2} + \frac{K^{3/2}}{K - 1} \frac{Eo}{We_g} \tag{2.53}$$

La figure 2.11 représente le comportement d'une goutte de métal liquide tombant dans l'eau.

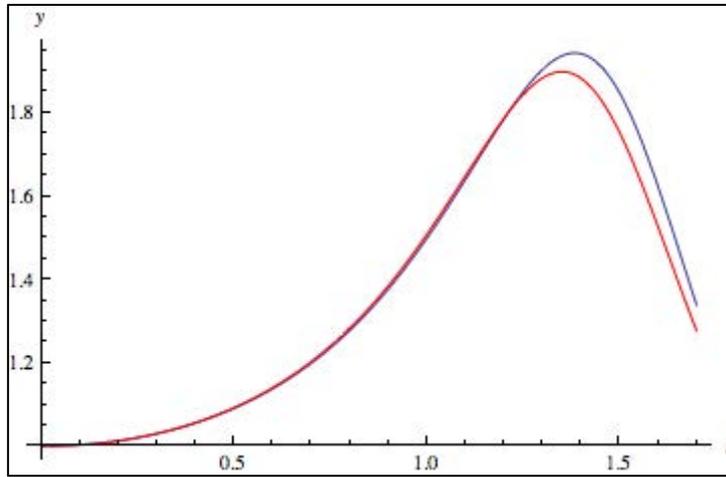


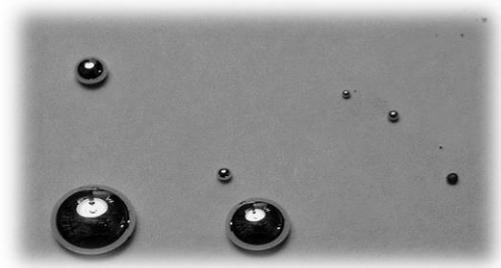
Figure 2.11. Simulation pour un système métal liquide-liquide  $U=1.05$  m/s  $We = 26.88$ ,  $Oh=0.00014$ ,  $K= 8$ .  $R_0 = 6$ mm. ligne en bleu est eq. (2.50). ligne en rouge est eq. (2.53).

La courbe en bas représente la déformation lorsque la masse ajoutée est prise en compte. Il est clair que l'effet de cette masse n'est pas très important.

D'autre part, l'augmentation du diamètre initial de la goutte augmente la déformation maximale, alors il est attendu que la fragmentation de gouttes centimétriques soit en régime de sac.

# Chap.3

## Mesure de propriétés du métal de Field



### 3. Mesure de propriétés du métal de Field:

Le métal utilisé dans l'étude expérimentale est le métal de Field. C'est un alliage fusible qui devient liquide à 62°C. C'est un alliage eutectique de Bismuth Bi (32.5%), Indium In (51%) et étain Sn (16.5%) (Fig. 3.1).

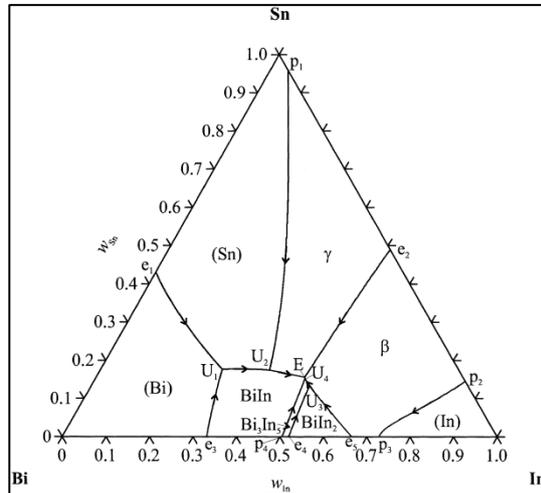


Figure 3.1. Diagramme eutectique Bi-In-Sn

La densité de ce métal est :  $\rho = 7994 \text{ Kg/m}^3$ .

Les propriétés physiques du métal de Field à l'état liquide doivent être déterminées, pour bien concevoir le système de génération de gouttes, et pour bien modéliser la fragmentation et la solidification de ces gouttes en tombant dans l'eau.

Les propriétés qui entrent en jeu sont les propriétés thermophysiques, la tension de surface, la mouillabilité (angle de contact) et la viscosité.

#### 3.1. Propriétés thermophysiques

Les propriétés thermophysiques du métal de Field sont mesurées en utilisant un microcalorimètre (SETARAM  $\mu$ DSC3). Les résultats montrent que le métal présente les propriétés suivantes :

- Conductivité thermique  $\lambda = 16 \text{ W/m.K}$
- mass heat capacity  $C_p = 300 \text{ J/Kg.K}$
- Chaleur latente de fusion  $L_f = 26500 \text{ J/Kg}$

#### 3.2. Viscosité

Contrairement à l'idée générale disant que les métaux liquides présentent un comportement rhéologique, plusieurs travaux expérimentaux [11] ont montré un

comportement complexe. Cela doit être pris en compte lors de la mesure de la viscosité du métal de Field.

Pour mesurer cette viscosité, différents tests ont été réalisés, une première fois par un viscosimètre de type plan-cône, et une deuxième fois par un viscosimètre de type Couette, et les mesures sont faites à 70 et 80°C.

Les résultats ont montré que la viscosité varie considérablement avec la variation de la contrainte ou du taux du cisaillement appliqué, et alors le métal de Field présente un comportement non newtonien.

Les courbes obtenues à l'issue de ces tests sont présentées dans les figures suivantes :

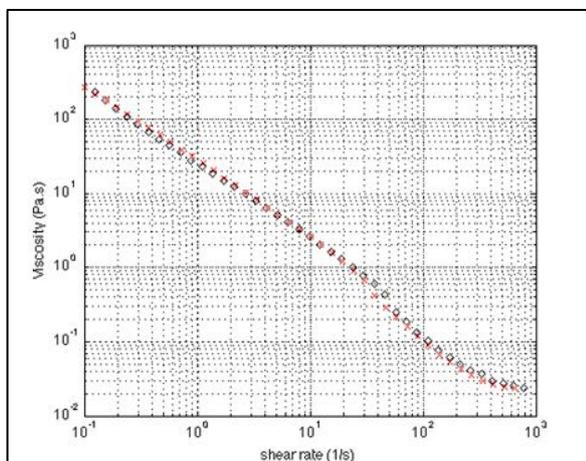


Figure 3.2. Variation de la viscosité en fonction du taux du cisaillement

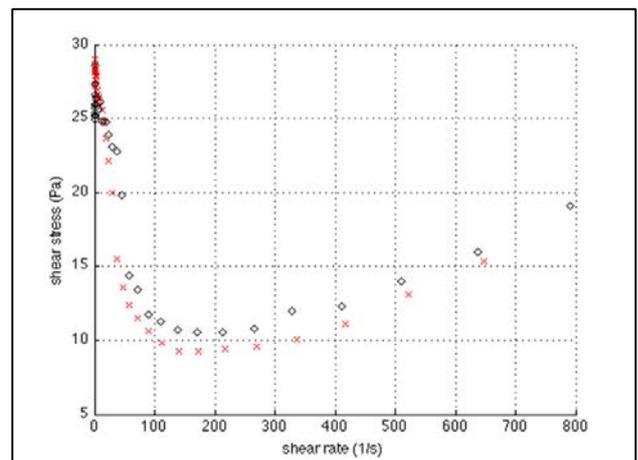


Figure 3.3. Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du taux du cisaillement

En fait, la viscosité atteint des valeurs extrêmement élevées pour un faible cisaillement appliqué, ce qui donne au métal fondu un comportement quasi-solide. Ce comportement disparaît totalement pour des valeurs plus élevées du cisaillement, et la viscosité diminue fortement.

### 3.3. Mouillabilité

La mouillabilité est la capacité d'une goutte liquide à s'étaler sur une surface plane solide, et caractérisée par l'angle de contact  $\theta$  formé avec la ligne triple du système formé par le liquide, le solide, et le gaz.

Un liquide est mouillant si l'angle de contact est inférieur à  $90^\circ$  et il est non mouillant si cet angle est supérieur à  $90^\circ$ .

Il existe de nombreuses techniques expérimentales pour mesurer la mouillabilité. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : Dynamiques (Wilhemly, Nouy, etc.) et statiques (goutte sessile, Arrachement, élévation capillaire, etc.). La méthode utilisée pour

mesurer dans le cas du métal de Field est la méthode de goutte sessile qui mesure l'angle de contact directement.

Cette méthode fait partie de celles utilisées pour les métaux fondus. Elle consiste à utiliser une caméra CCD équipée d'un dispositif optique d'élargissement, connectée à un ordinateur pour suivre l'évolution du profil de la goutte déposée sur un substrat plan et horizontal.

L'angle  $\theta$  mesuré évolue avec le temps avec le temps jusqu'à une certaine valeur. Elle est corrélée avec la diminution en hauteur et l'augmentation en diamètre de la goutte en fonction de temps.

Comme la chambre du métal fondu dans le générateur de gouttes est fabriquée avec l'acier Inox, il est donc évident que le substrat sur lequel se font les mesures est encore en Inox, et l'angle de contact est alors celui du système métal fondu - Acier Inox - air.

L'équipement utilisé dans cette mesure est composé des éléments suivants :

- Un substrat en acier Inox
- Un dispositif thermique composé d'une thermistance et d'un thermocouple pour chauffer le substrat et régler sa température.
- Une Caméra CCD avec lentille optique et dispositif d'élargissement.

Le substrat est chauffé jusqu'à 70, 80 et 90°C. Une très petite partie plus ou moins sphérique du métal est mise sur le substrat, puis commence à fondre tout en chauffant le substrat jusqu'à atteindre sa forme finale comme une goutte liquide. La caméra enregistre tout le processus, et les photos prises à la fin de la formation de la goutte montrent l'angle de contact à chercher.

Les photos suivantes présentent des gouttes de diamètres 0.9, 1.2 et 1.5 mm avant et après la fusion du métal :

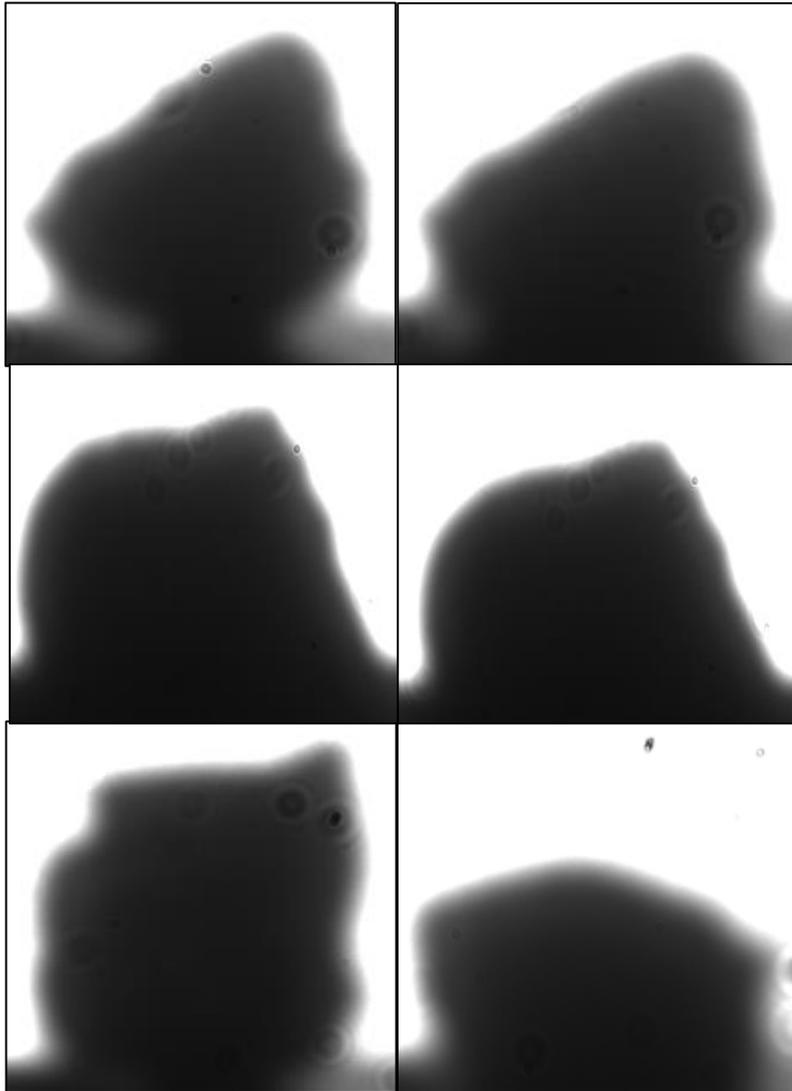


Figure 3.4. Différentes gouttes du métal de Field avant et après leur fusion

A partir de ces photos, il est clair que l'angle de contact du métal de Field dans ces conditions ne peut pas être déterminé. Une même goutte qui apparaît mouillante d'un côté, apparaît non mouillante de l'autre. Cela peut être dû à des impuretés qui peuvent être déjà présentes dans l'alliage. Une autre cause peut être l'oxydation du métal en contact avec l'air car les expériences sont faites dans une atmosphère non protégée, et il y a une grande possibilité pour le dioxygène de l'air de réagir avec le métal.

### 3.4. Tension de surface

A cause de l'oxydation rapide qui est apparue lors du test du mouillage du métal liquide, les tests de la tension de surface n'ont pas été faits. En tout cas, la tension de surfaces peut

être déduite de la forme d'une goutte pendante qui sera produite après la réalisation du générateur de gouttes.

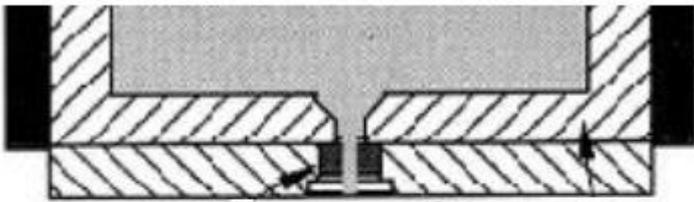
Pour la suite, et à titre de simplicité, les propriétés choisies sont les propriétés du mercure :

Viscosité dynamique :  $\mu = 1.5 \times 10^{-3}$  Pa.s ; (Viscosité cinématique :  $\nu = 0.18 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s)

Tension de surface :  $\sigma = 0.485$  N/m.

# Chap.4

## Conception et réalisation d'un générateur de gouttes



#### 4- Conception et réalisation d'un générateur de gouttes

L'objectif est de réaliser un dispositif de génération goutte à goutte du métal liquide.

Comme la température de fusion du métal de Field est de 62 °C, alors la température du réservoir du métal doit être contrôlée. Cette température n'étant pas très élevée, le chauffage peut être obtenu par un écoulement, autour du réservoir, d'eau chauffée.

Le dispositif doit assurer la délivrance, sur demande, de gouttes du métal liquide, de dimensions variables.

Différents dispositifs ont déjà été conçus dans ce but. Typiquement, de tels dispositifs sont constitués d'une chambre chauffée contenant le métal fondu (Fig.4.1). Une goutte est formée en appliquant au bain du métal, une impulsion de pression, éjectant une petite quantité de métal à travers une buse. Dans le cas présent, le chauffage sera par circulation de l'eau chaude autour de la chambre du métal pour assurer que la température du métal n'excède pas la température d'ébullition de l'eau pour éviter la formation de vapeur autour de la goutte quand celle-ci tombe dans l'eau.

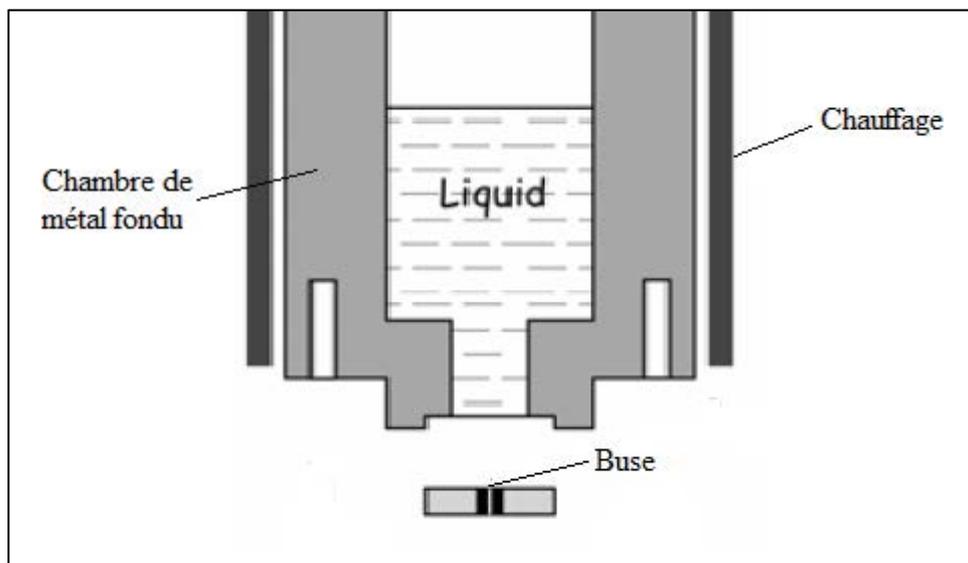


Fig.4.1. chambre d'éjection de métal fondu

Source : Simulent.com

La différence entre ces dispositifs réside dans la technique utilisée pour l'application de l'impulsion de la pression. Différentes techniques ont été utilisées comme les cristaux piézoélectriques, les pistons mécaniques, les ondes acoustiques, les forces magnétohydrodynamiques (MHD), et la pression de gaz (pneumatique).

Le système choisi pour faire les expériences sur le métal de Field est le système pneumatique, car ce dispositif permet de manière reproductible des goutelettes individuelles de taille choisie.

Ce système de génération de gouttes fonctionnant en créant une onde de pression à l'intérieur du générateur en pulsant de l'air ou autres gaz ( par exemple, le diazote ou autres gaz inertes) à travers le système pour générer des gouttes.

Le générateur pneumatique est une méthode pour produire, sur demande, une ou plusieurs gouttes de taille déterminée.

#### **4.1. Générateur pneumatique de gouttes**

##### **4.1.1. Principe du générateur pneumatique :**

La chambre contenant le métal fondu est mise sous pression par un gaz pendant un temps suffisant pour atteindre une pression qui suffit pour forcer au moins une goutte à être éjectée à travers un orifice. Il faut ensuite soulager la pression (décompression) d'une manière assez rapide pour éviter l'éjection de nouvelles gouttes.

De là, un système de génération pneumatique comprend [12] :

- Un boîtier contenant une chambre pour contenir le métal fondu à éjecter, et disposant d'une conduite d'entrée du gaz, et d'un orifice de sortie de gouttes.
- Un moyen de pressurisation connecté à la conduite d'entrée du gaz pour donner une impulsion de pression à la chambre et forcer le liquide à s'injecter.

La pression délivrée à la chambre peut être réglée par un régulateur de pression. Le débit du gaz est contrôlé au moyen d'une électrovanne normalement fermée qui est ouverte pour une période de temps déterminée par un circuit électronique de temporisation.

- Un moyen de décompression pour soulager la pression de la chambre afin de contrôler le nombre de gouttes à produire.

La décompression peut être faite au moyen d'un orifice communiqué à la chambre. La taille de l'orifice est importante : elle doit être assez petite de manière que durant l'application de l'impulsion du gaz, la chambre soit pressurisée avec une pression suffisante pour l'éjection d'une goutte ; et elle doit être assez grande pour que la chambre soit déchargée à travers cet orifice pour éviter une production de nouvelles gouttes.

Par conséquent, le générateur de gouttes pneumatique n'a aucune partie ou pièce mobile qui est en contact avec le métal liquide.

#### 4.1.2. Description détaillée du générateur pneumatique :

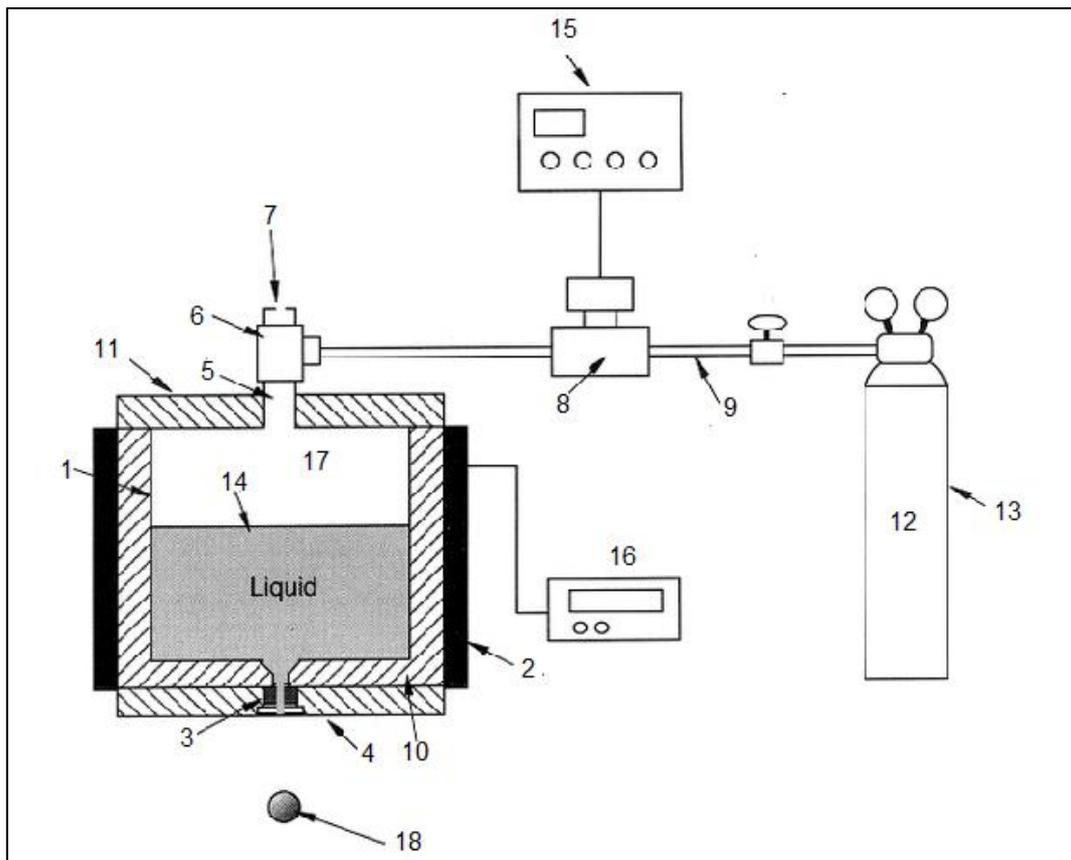


Figure 4.2. Schéma de principe d'un système de génération pneumatique

Source [13]

Le système de production de gouttes (Fig.4.2) utilise un gaz comprimé (12) pour délivrer une impulsion de pression pour un métal fondu (14) contenu dans une chambre (17) faisant partie du générateur de gouttes (10). L'augmentation de pression force une petite quantité de liquide à sortir à travers une buse (3) dans la paroi inférieure de la chambre, et par la suite à produire une goutte du métal fondu (18).

La chambre remplie par le métal fondu consiste d'une cavité (1) cylindrique (en acier inoxydable) chauffée au moyen d'une bande chauffante (2) enroulée autour de la cavité (Fig.4.3), à une température supérieure à la température de fusion du métal par un contrôleur de température (16) ; ou au moyen de la circulation de l'eau chaude autour de la cavité dans le cas d'un métal de faible température de fusion (comme le cas du métal de Field. La chambre est pressurisée par un gaz alimenté à travers de conduites (9) (stainless) à partir d'un cylindre de gaz comprimé (13).

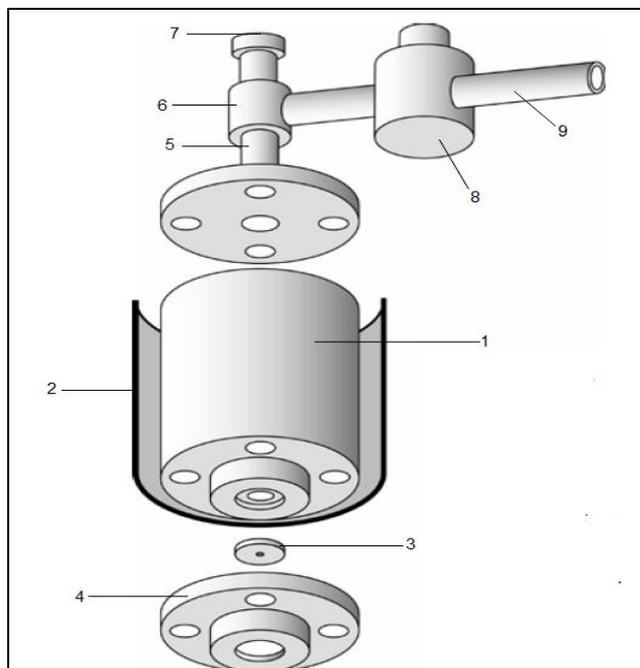


Fig.4.3. Schéma d'un générateur pneumatique de gouttes  
source : Simulent.com

Ce gaz peut être le diazote ou un autre gaz inerte afin qu'il ne réagisse pas avec le métal fondu. Le temps d'ouverture de l'électrovanne normalement fermée (8) qui contrôle le débit de gaz délivré est déterminé par un circuit électrique de temporisation (15).

La cavité (1) comprend un couvercle (11) sur sa partie supérieure pour fermer la chambre (17) pour permettre sa pressurisation (Fig.4.4).

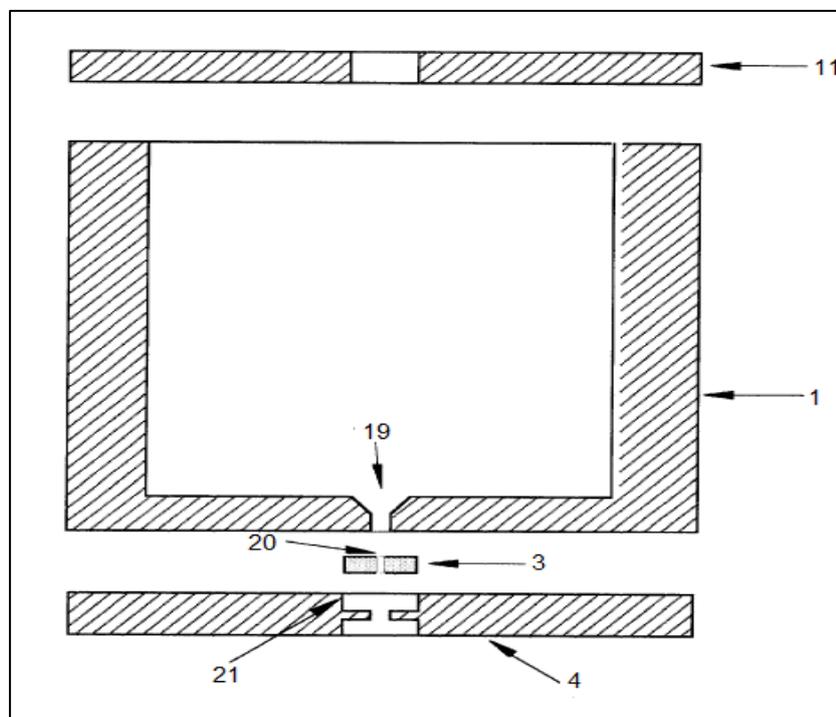


Figure 4.4. Schéma de principe de la chambre du métal fondu

Source[13]

Une T-jonction (6) est utilisée pour connecter la conduite du gaz (9) à un trou fileté foré dans le couvercle de la chambre. La branche ouverte de la T-jonction est couverte par un disque (d'acier), au centre duquel est percé un petit orifice pour permettre l'échappement du gaz pour la décompression.

La cavité (1) contient une sortie (19) forée dans la partie inférieure de la cavité à partir duquel les gouttes sont éjectées. Une buse (3) est placée à la sortie du passage (19) et maintenue fixe dans un renforcement (21) localisé dans une plaque porteuse (4) fixé à la partie inférieure de la cavité. Le liquide est forcé à travers une fente forée au centre de la buse. Les buses sont cylindriques, ont le même diamètre externe et même hauteur. Elles diffèrent par les diamètres de leurs fentes. Comme la buse est démontable, la taille de gouttes peut être contrôlée tout en changeant la buse. D'autre part, la buse peut être formée directement en perçant une petite fente dans la plaque (4).

#### 4.1.3 - Avantages du système :

Le système pneumatique de production de gouttes présente les avantages suivants :

- Système robuste et facile à utiliser
- Possibilité de production d'une seule goutte sur demande
- Système indifférent aux propriétés du liquide
- Large gamme de tailles de gouttes obtenue
- Facilité de remplir à nouveau le métal pour chaque utilisation

Grace à ces avantages, le système pneumatique de production d'une goutte de métal fondu sur demande est convenable à utiliser.

#### 4.2. Modifications sur le système de principe :

Le générateur doit être bien dimensionné afin que la taille de la goutte soit suffisante pour permettre sa fragmentation en tombant dans l'eau.

Le but est de pouvoir obtenir une fragmentation en sac, ce qui correspond à un nombre de Weber  $We > 25$ . Il faut donc connaître la taille de goutte nécessaire pour obtenir une telle fragmentation car le générateur déjà présenté ne permet de produire que des gouttes millimétriques.

En appliquant l'équation 2.49 pour une goutte de métal de Field tombant dans l'eau, on trouve que la vitesse limite de chute de cette goutte est :

$$U = \sqrt{\frac{123 R}{C_d}}$$

Par suite

$$We > 25 \Rightarrow \frac{\rho U^2 2R}{\sigma} > 25 \Rightarrow \frac{\rho 123R \cdot 2R}{C_d \sigma} > 25 \Rightarrow R > \sqrt{0.00092 C_d}$$

Alors en prenant  $C_d = 4$ , on trouve qu'on a besoin d'une goutte de diamètre supérieur à 12 mm pour avoir une fragmentation en sac. Cela exige donc de modifier le générateur de gouttes pour pouvoir obtenir de gouttes centimétriques.

Pour le faire, il faut que le diamètre de la buse soit encore centimétrique. Pour éviter la fuite à travers un tel diamètre, une quenouille est ajoutée dans la chambre du métal liquide (Fig.4.5), dont le rôle est de fermer partiellement la sortie du métal.

Cette quenouille est une tige dont la tête est un cône qui est de mêmes dimensions que la sortie conique de la plaque inférieure de la chambre du métal liquide.

La position de la quenouille est déterminée par une vis millimétrique qui permet de la déplacer verticalement, afin de contrôler la quantité de métal entre la tête conique du pointeau et la sortie conique de la chambre. Lorsque la vis est complètement serrée, la quenouille est dans sa position la plus basse et la sortie sera totalement fermée. En tournant la vis, la quenouille monte en laissant de l'espace au métal liquide pour passer.

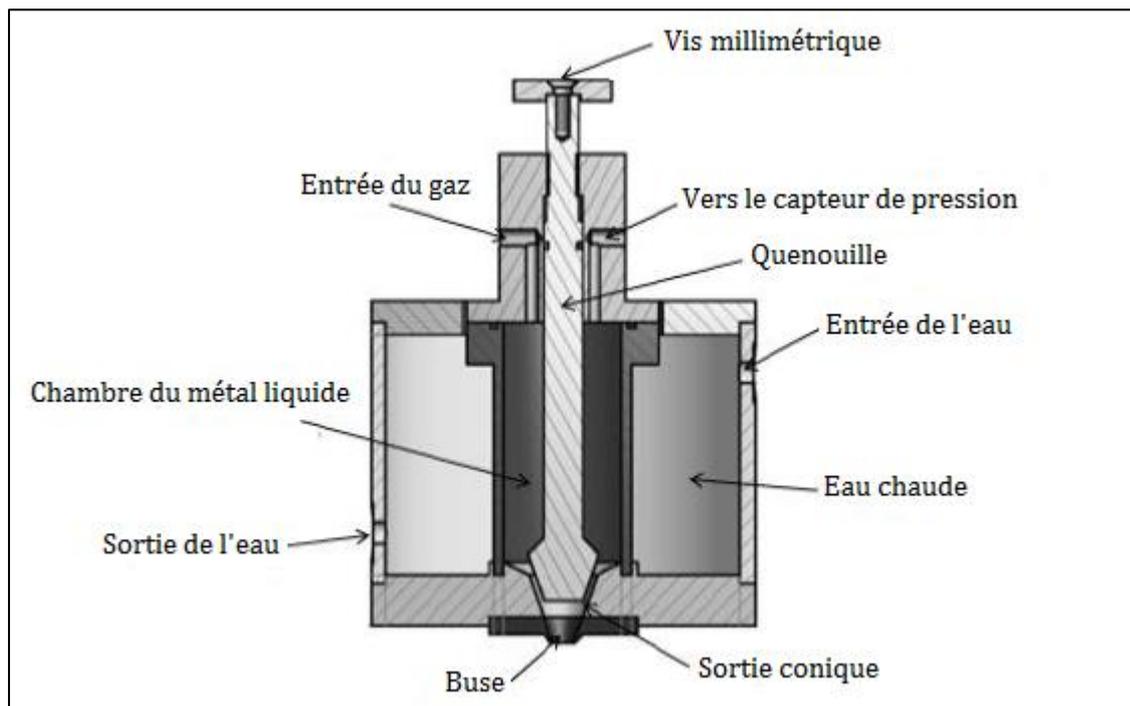


Figure 4.5. Schéma du générateur après modification

### 4.3. Dimensionnement du générateur

Dans chaque expérience, 125 g du métal de Field à utiliser, ce qui correspond à  $15.6 \text{ mm}^3$ .

La chambre cylindrique du métal est alors dimensionnée, et par la suite les dimensions du générateur sont déterminées.

Les dimensions du générateur sont présentées dans le schéma de la figure 4.6.

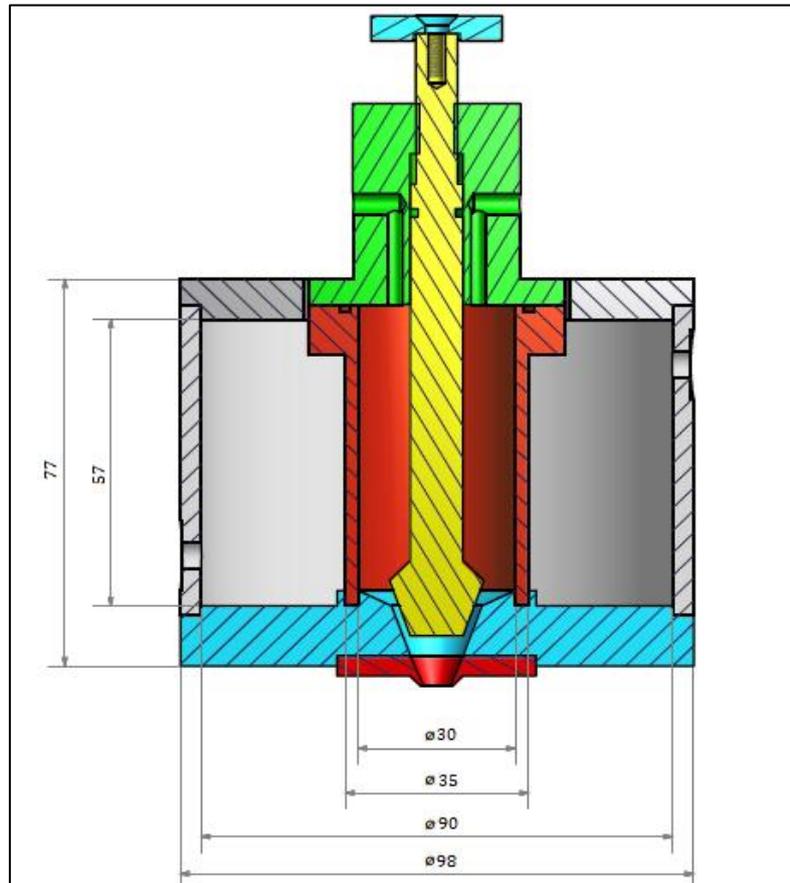


Figure 6.6. Dimensions (en mm) du générateur de gouttes

### 4.4. Réalisation du générateur de gouttes :

Le générateur de gouttes est fabriqué en acier inoxydable (Fig.4.7) : Le couvercle de la cuve de l'eau peut être démonté facilement (Fig.4.8).

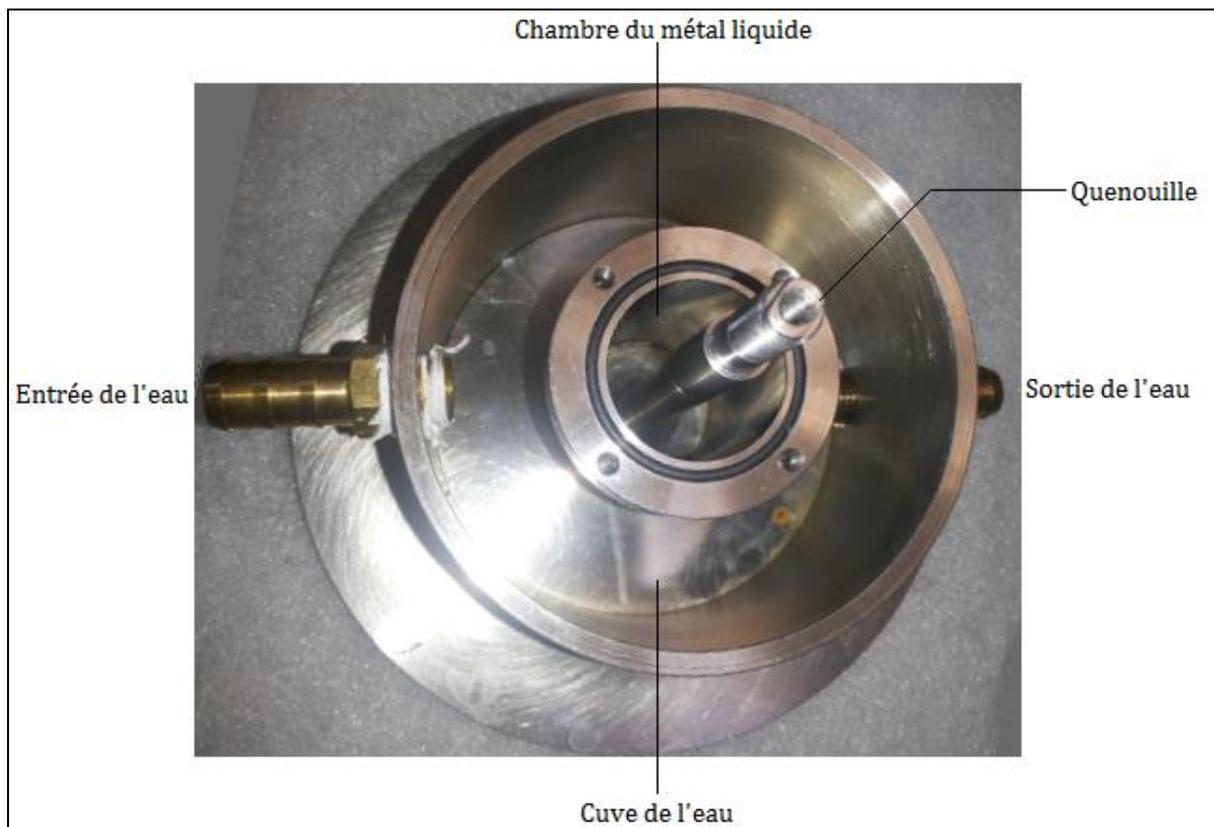


Figure 4.7. Générateur de gouttes de l'intérieur

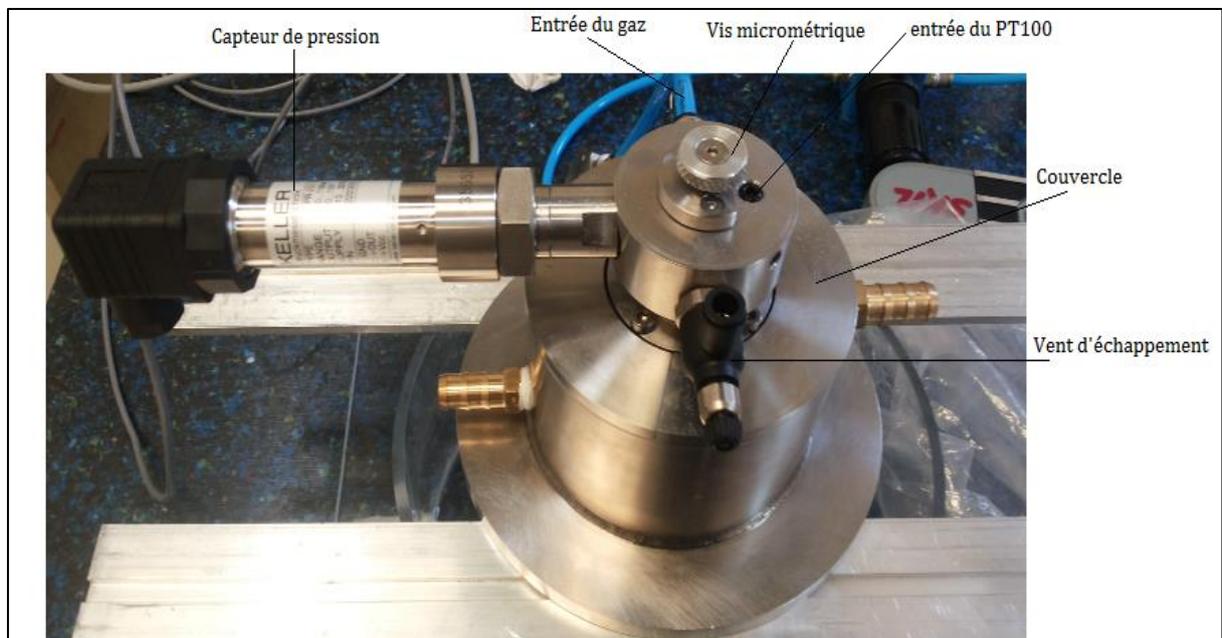


Figure 4.8. Générateur de gouttes de l'extérieur

## 4.5. Composantes du dispositif expérimental

Après la réalisation du générateur de gouttes, les autres composantes du système sont apportées et reliées pour pouvoir débiter les expériences (Fig.4.9)

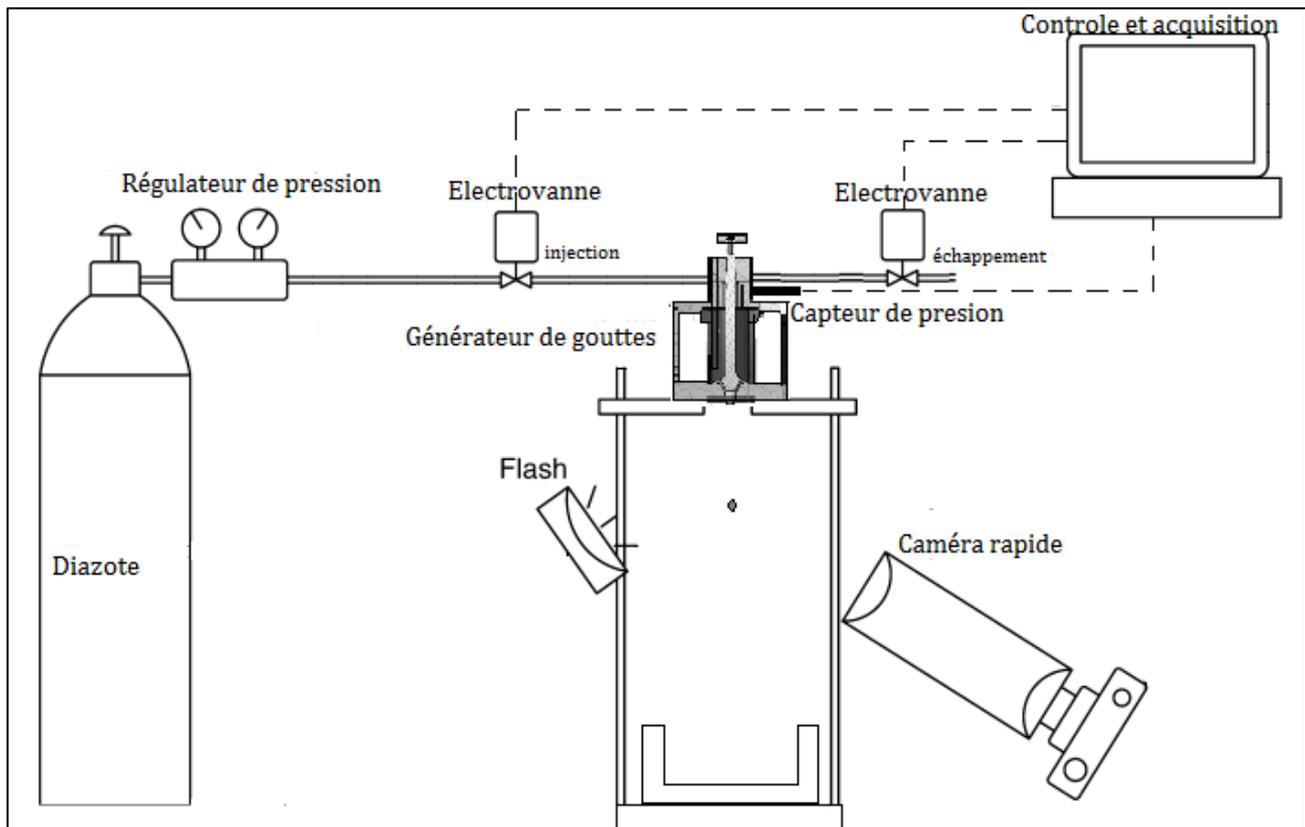


Figure 4.9. Schéma du dispositif expérimental final utilisé dans les expériences

### 4.5.1. Système pneumatique

Les composantes du système pneumatique sont :

- Une bouteille de diazote comprimé
- Un régulateur de la pression du gaz délivré par la bouteille
- Une électrovanne placée entre l'arrivée du gaz de la bouteille et l'entrée du gaz à la chambre du métal
- Une électrovanne placée sur l'ouverture d'échappement
- Un capteur de pression communiqué à la chambre du métal fondu
- Des tuyaux munis de raccords rapides connectant les composantes du système pneumatique au générateur pneumatique

La pression du gaz délivrée par la bouteille est contrôlée par le régulateur de pression.

Les deux électrovannes sont guidées à travers un logiciel développé sous Labview. Il permet de contrôler la durée d'ouverture de chaque vanne ainsi que le temps entre les deux pulsations, et par conséquent le pic de pression dans la chambre et la durée passée par le gaz dans la chambre avant de s'échapper.

Le logiciel permet également d'enregistrer la courbe de variation de la pression à l'intérieur de la chambre du métal à travers le capteur de pression.

#### 4.5.2. Système de chauffage

Le système de chauffage comprend :

- Un bain thermostaté LAUDA
- Un thermomètre à résistance de Platine (Thermistance) PT100
- Des tuyaux souples en caoutchouc pouvant supporter jusqu'à 160 °C

La température de l'eau du LAUDA est contrôlée et affichée sur son afficheur pneumatique. L'eau est ensuite pompée vers la cuve de l'eau du générateur par le moyen de la pompe interne du bain. Afin de régler le débit, une vanne by-pass est placée sur la sortie de l'eau du LAUDA : la quantité d'eau pouvant passer vers le générateur est contrôlée et le reste est retourné vers l'entrée de l'eau dans le bain.

La thermistance PT100 qui est plongée dans le métal liquide, est reliée au bain thermostaté : Le contrôle de la température sur le LAUDA peut être soit interne, pour contrôler directement la température de l'eau, ou externe, par contrôler la température du métal liquide dans la chambre à travers la thermistance.

#### 4.6. Expériences et résultats

Après la réalisation du générateur pneumatique, des expériences sont menées pour aboutir à la production d'une seule goutte sur demande. Les facteurs qui entrent en jeu dans la détermination de nombres de gouttes produites sont :

- La pression du gaz sur la ligne d'alimentation
- Le temps d'activation des électrovannes et la durée entre les deux pulsations
- Le déplacement de la quenouille

Le travail est réalisé pour une buse de diamètre 5 mm.

Avant d'essayer avec le métal de Field, des expériences ont été faites avec du glycérol. Le glycérol a comme viscosité dynamique 1.2 Pa.s à la température ambiante, ce qui est beaucoup plus importante que celle du métal de Field.

La pression d'alimentation en diazote est variée entre 2 et 6 bars.

Le temps d'ouverture de la première électrovanne  $t_{in}$  est varié entre 5 et 30 ms, celui de l'électrovanne d'échappement  $t_{out}$  entre 80 et 300 ms, et la durée entre les deux  $\Delta t$  est variée entre 50 et 500 ms.

La variation de la pression à l'intérieur de la chambre du métal de Field a été visualisé en utilisant le capteur de pression (Fig. 4.10)

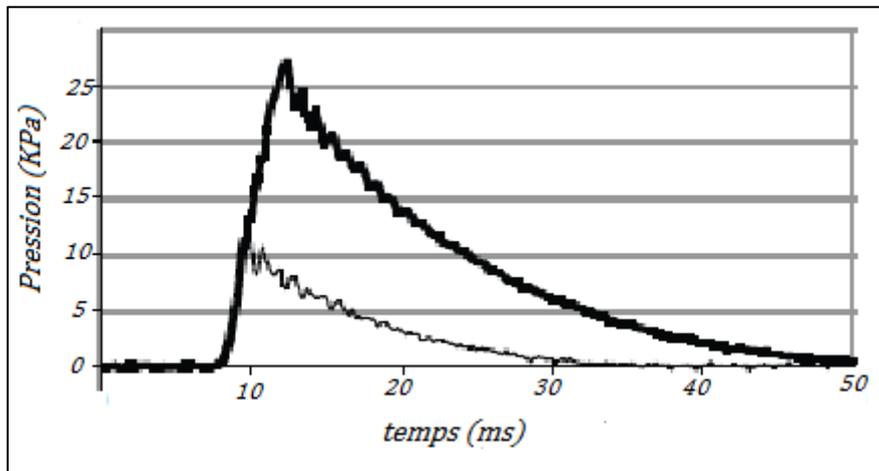


Figure 4.10. Variation de la pression dans le générateur pour le métal de Field à 70 °C pour  $t_{in} = 10$  ms et la pression d'alimentation  $P = 2.5$  bars

La position de la quenouille était difficile à contrôler, alors dans chaque expérience, cette position était estimée selon la rotation de la vis millimétrique.

Le nombre de gouttes produites dans chacune des expériences a été enregistré. Le tableau 4.1 montre la variation de nombre de gouttes du métal de Field à 80 °C produites en fonction des paramètres expérimentaux différents (Pour une position fixe de la quenouille).

P (bars)	$t_{in}$ (ms)	$t_{out}$ (ms)	$\Delta t$ (ms)	nombre de gouttes produites
3	20	150	80	1
4	20	180	70	2
2.5	20	500	20	0
4.5	20	500	80	1
6	20	500	30	1

Tableau 4.1

Le tableau 4.2 montre le réglage nécessaire pour produire une seule goutte de métal de Field à 80 °C.

P (bars)	$t_{in}$ (ms)	$t_{out}$ (ms)	$\Delta t$ (ms)
3	20	150	100
4	20	300	80
4.5	20	500	60
5	20	500	40
6	20	500	30

Tableau 4.2

Dans le cas de la glycérine, changer la température a bien affecté la pression nécessaire pour la production d'une goutte, et cela revient au changement de la viscosité. Le tableau 4.3 montre la variation de cette pression en fonction de la température de glycérine pour  $t_{in} = 10\text{ ms}$ ,  $t_{out} = 100\text{ ms}$ , et  $\Delta t = 300\text{ ms}$ .

T	25	40	50	60	70	80
P	3	1.4	1	0.8	0.6	0.2

Tableau 4.3

La goutte de glycérine formée est sphérique.

Grace à la viscosité élevée du glycérol, un mince film liquide reste attaché à la goutte (Fig.4.11). Ce film se détache et forme une petite gouttelette qui suit la goutte formée.

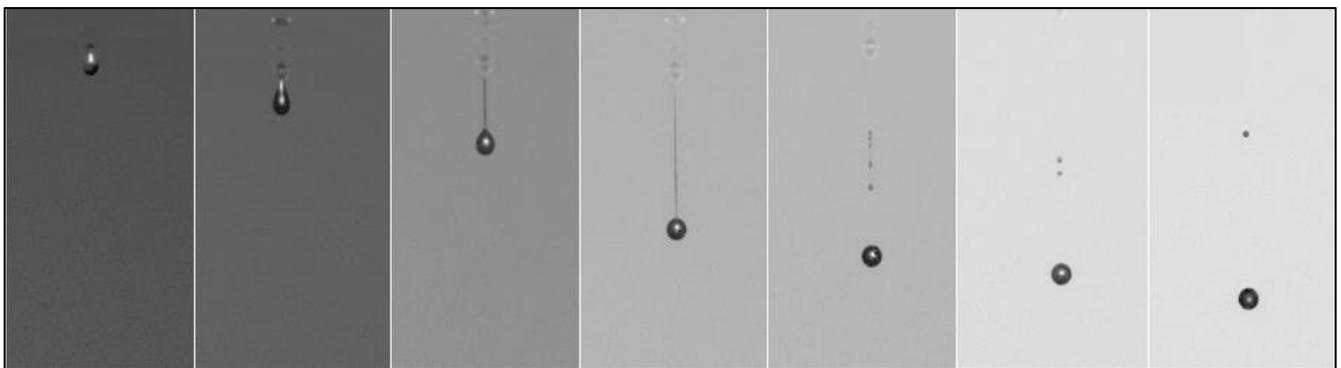


Figure4.11. Formation d'une goutte de Glycérine à 40 °C. La formation d'un film liquide après la goutte apparait

Former une goutte du métal de Field était un peu plus difficile à cause de sa faible viscosité. Aucun film n'est formé et la goutte qui se forme n'est pas toujours sphérique. L'effet de la gravité donne à la goutte la forme d'une larme (Fig.4.12) quand elle se détache. Les gouttes formées n'ont pas toujours la même forme (Fig.4.13). En fait, la forme de la goutte dépend fortement de la façon dont elle s'est formée dans la buse.

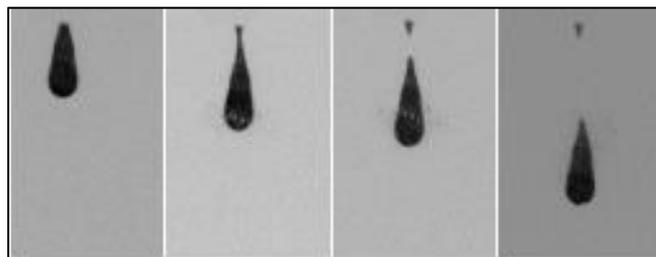


Figure4.12. Formation d'une goutte de métal de Field à 80 °C

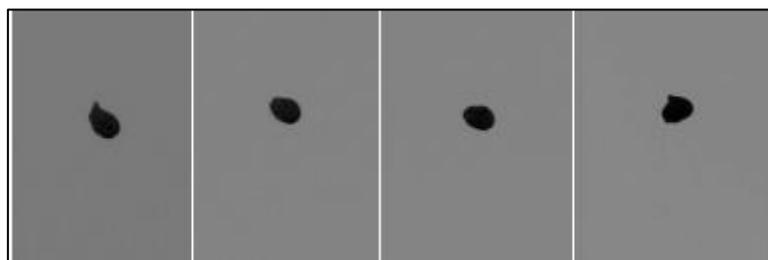


Figure 4.13. Variation de la forme d'une goutte du métal de Field lors de sa tombée

#### 4.7. Conclusion

Les expériences réalisées avec le générateur ont bien vérifié les résultats qui ont été attendus lors de sa conception, et ont bien montré ses avantages :

Les premiers résultats apparaissent encourageants : La production d'une seule goutte sur demande est accomplie. En plus, ces résultats ont montré une bonne reproductibilité.

Contrôler le nombre de gouttes produites n'était pas assez facile à réaliser : La position de la quenouille était difficile à contrôler. Cela peut être corrigé en remplaçant la vis millimétrique en une vis micrométrique qui permettra un positionnement plus exact de la quenouille.

En ce qui concerne les autres facteurs, l'utilisation de deux électrovannes a montré une très bonne efficacité dans le contrôle de la durée de la pulsation de pression du gaz et du temps nécessaire pour son échappement.

De toute façon, un travail expérimental doit être réalisé, après l'application des améliorations nécessaires, pour mieux savoir manipuler les facteurs expérimentaux permettant une seule goutte du métal sur demande.

## Annexe A

### Détermination de termes de l'énergie cinétique et du travail de la pression pour un sphéroïde aplati sous Mathematica

```
print[expr_]:=Print[expr,"=",ToExpression[expr]]
deriv[expr_,var_]:=D[expr,var]//.{Re'[e_]fRe[D[e,var]]/D[e,var],Im'[e_]fIm[D[e,var]]/D[e,v
ar],Arg'[e_]fIm[D[e,var]/e]/D[e,var],Sign'[e_]fSign[D[e,var]/e]/D[e,var],Abs'[e_]f(Re[e]
Re[D[e,var]]+Im[e] Im[D[e,var]])/(Abs[e] D[e,var])}
```

```
R0=1;
V=4/3*Pi*R0^3;
U=1;
print["V"]
print["R0"]
print["U"]
```

```
b[aa_]:=3*V/4/Pi/aa^2
c[aa_]:= (aa^2-b[aa]^2)^(1/2)
e[aa_]:=c[aa]/aa
Xhi0[aa_]:=ArcCosh[aa/c[aa]]
CoordSph[a_,xhi_,eta_]:=c[a]*Sinh[xhi+I*eta];
z[a_,xhi_,eta_]:=Re[CoordSph[a,xhi,eta]];
r[a_,xhi_,eta_]:=Im[CoordSph[a,xhi,eta]];
Xhi[a_,Z_,R_]:=Re[ArcSinh[(Abs[Z]+I*R)/c[a]]];
Eta[a_,Z_,R_]:=Im[ArcSinh[(Z+I*R)/c[a]]];
(*Prefacteur:=(-U/2*a^2*c^2)/(b*c-a^2*ArcCos[b/a])*
Prefacteur:=(U/2*c^2)/(e*(1-e^2)^(1/2)-ArcSin[e])
Prefact[a_]:= (U/2*c[a]^2)/(e[a]*(1-e[a]^2)^(1/2)-ArcSin[e[a]])
Psi[a_,xhi_,eta_]:=Prefact[a]*(Sinh[xhi]-(Cosh[xhi])^2*ArcCot[Sinh[xhi]])*(Sin[eta])^2
Psi2[a_,xhi_,eta_]:= (Prefact[a]*(Sin[eta])^2*(Sinh[xhi]-(Cosh[xhi])^2*ArcCot[Sinh[xhi]]))-
1/2*U*r[a,xhi,eta]^2;
```

```

Psi3[a_,xhi_,eta_]:=1/2*U*r[a,xhi,eta]^2;
PsiR[a_,Z_,R_]:=Psi[a,Xhi[a,Z,R],Eta[a,Z,R]];
Psi2R[a_,Z_,R_]:=Psi2[a,Xhi[a,Z,R],Eta[a,Z,R]]
Psi3R[a_,Z_,R_]:=Psi3[a,Xhi[a,Z,R],Eta[a,Z,R]]
PsiS[a_,Z_,R_]:=1/2*U*R^2*(0-a^3/(Z^2+R^2)^(3/2))
PsiS2[a_,Z_,R_]:=
a^3/2*U/c*(Sin[Eta[a,Z,R]]*Cosh[Xhi[a,Z,R]])^2/((Cosh[Xhi[a,Z,R]]*Sin[Eta[a,Z,R]])^2+(
Sinh[Xhi[a,Z,R]]*Cos[Eta[a,Z,R]])^2)^(3/2)

```

```

DataWork={};
DataEc={};
DataPs={};
a0=1.01;
af=2.3;
p=24;
print["a0"]
print["af"]
print["p"]
Do[
print["n"];
a=a0+(af-a0)*(n-1)/p;
print["a"];
print["b[a]"];

```

```

Uz[a_,Z_,R_]=-1/R*deriv[Psi2R[a,Z,R],R];
Ur[a_,Z_,R_]=1/R*deriv[Psi2R[a,Z,R],Z];
P[a_,Z_,R_]:=1/2*(Uz[a,Z,R]^2+Ur[a,Z,R]^2);

```

```

xc[a_,z_,y_]:=a*Sqrt[1-z^2/b[a]^2-y^2/a^2];
yc[a_,z_,x_]:=a*Sqrt[1-z^2/b[a]^2-x^2/a^2];
zc[a_,x_,y_]:=b[a]*Sqrt[1-x^2/a^2-y^2/a^2];
Dl[a_,r_,y_]=(deriv[zc[a,r,y],r]^2+1)^(1/2);
W[a_,r_,y_,z_]:={Abs[r],0,-2*Abs[z]};
F[a_,r_,y_,z_]:=r^2/a^2+y^2/a^2+z^2/b[a]^2-1;
Gradi[a_,r_,y_,z_]={D[F[a,r,y,z],r],D[F[a,r,y,z],y],D[F[a,r,y,z],z]};
normale[a_,r_,y_,z_]=Gradi[a,r,y,z]/Norm[Gradi[a,r,y,z]];

```

```

Work[a_]=2*Re[NIntegrate[W[a,rr,0,zc[a,rr,0]].normale[a,rr,0,zc[a,rr,0]]*P[a,zc[a,rr,0],rr]^2
*Pi*rr*Dl[a,rr,0],{rr,0,a},MaxRecursion->16]];

```

```

Ec[a_]=4*Re[NIntegrate[Norm[W[a,r,0,z]]^2*Boole[Abs[Xhi[a,z,r]]<=Xhi0[a]]*2*Pi*r,{r,0,
a},{z,0,b[a]},MaxRecursion->16]];

```

```

parabolaWork = Fit[DataWork, {1,y,y^2}, y];
PWork[y_]=parabolaWork
Series[PWork[yy],{yy,1,1}]
Show[ListPlot[DataWork, PlotStyle->Red, AxesLabel->{y,Wp}], Plot[{line, parabolaWork},
{y, a0, af}]]
parabolaEc = Fit[DataEc, {1,y,y^2,y^3,y^4}, y]

```

```

Show[ListPlot[DataEc, PlotStyle→Red, AxesLabel→{y, Ec}], Plot[{line, parabolaEc}, {y, a0,
af}, PlotRange→Full]]
parabolaPs = Fit[DataPs, {1, y, y^2}, y];
PPs[y_] = parabolaPs
Series[PPs[yy], {yy, 1, 1}]
Show[ListPlot[DataPs, PlotStyle→Red, AxesLabel→{y, Ps}], Plot[{line, parabolaPs}, {y, a0,
af}, PlotRange→Full]]

Show[

VectorPlot[{Uz[a, Z, R]*Boole[Abs[Xhi[a, Z, R]]>Xhi0[a]], Ur[a, Z, R]*Boole[Abs[Xhi[a, Z, R]]
>Xhi0[a]]}, {Z, -b[a]-1/4, b[a]+1/4}, {R, -a-1/4, a+1/4}

, FrameLabel→{z, r}, VectorScale→Small, VectorPoints→Fine, VectorColorFunction→"Rainbow"],

RegionPlot[(r/a)^2+(z/b[a])^2<1, {z, -b[a]-1/4, b[a]+1/4}, {r, -a-
1/4, a+1/4}, FrameLabel→{z, r}

,
VectorPlot[
{-W[a, 0, z][[3]], W[a, r, 0, z][[1]]}*Boole[(r>=0)&&(z>=0)&&((r/a)^2+(z/b[a])^2<=1)]+
{-W[a, r, 0, z][[3]], W[a, r, 0, z][[1]]}*Boole[(r>0)&&(z<0)&&((r/a)^2+(z/b[a])^2<=1)]+
{W[a, r, 0, z][[3]], -W[a, r, 0, z][[1]]}*Boole[(r<0)&&(z>0)&&((r/a)^2+(z/b[a])^2<=1)]+
{-W[a, r, 0, z][[3]], -W[a, r, 0, z][[1]]}*Boole[(r<0)&&(z<0)&&((r/a)^2+(z/b[a])^2<=1)],
{z, -b[a]-1/4, b[a]+1/4}, {r, -a-
1/4, a+1/4}, VectorStyle→Blue, VectorScale→Small, VectorPoints→Fine]
]
DataWork_ = {1.01, 3.89391}
DataEc_ = {1.01, 9.85261}
DataPs_ = {1.01, 0.402981}
n_ = 2
a_ = 1.06375
b[a]_ = 0.883733
DataWork_ = {1.01, 3.89391}, {1.06375, 4.6027}
DataEc_ = {1.01, 9.85261}, {1.06375, 9.02093}
DataPs_ = {1.01, 0.402981}, {1.06375, 2.5975}
n_ = 3
a_ = 1.1175
b[a]_ = 0.800765
DataWork_ = {1.01, 3.89391}, {1.06375, 4.6027}, {1.1175, 5.38514}
DataEc_ = {1.01, 9.85261}, {1.06375, 9.02093}, {1.1175, 8.48038}
DataPs_ = {1.01, 0.402981}, {1.06375, 2.5975}, {1.1175, 4.83715}
n_ = 4
a_ = 1.17125
b[a]_ = 0.728955
DataWork_ = {1.01, 3.89391}, {1.06375, 4.6027}, {1.1175, 5.38514}, {1.17125, 6.24461}
DataEc_ = {1.01, 9.85261}, {1.06375, 9.02093}, {1.1175, 8.48038}, {1.17125, 8.15708}
DataPs_ = {1.01, 0.402981}, {1.06375, 2.5975}, {1.1175, 4.83715}, {1.17125, 7.11806}
n_ = 5
a_ = 1.225

```

b[a]\_ = 0.666389

DataWork\_ = {{1.01,3.89391},{1.06375,4.6027},{1.1175,5.38514},{1.17125,6.24461},{1.225,7.1846}}

DataEc\_ = {{1.01,9.85261},{1.06375,9.02093},{1.1175,8.48038},{1.17125,8.15708},{1.225,8.00413}}

DataPs\_ = {{1.01,0.402981},{1.06375,2.5975},{1.1175,4.83715},{1.17125,7.11806},{1.225,9.43695}}

DataEc\_ = {{1.01,9.85261},{1.06375,9.02093},{1.1175,8.48038},{1.17125,8.15708},{1.225,8.00413},{1.27875,7.98585},{1.3325,8.07597},{1.38625,8.25502},{1.44,8.50819},{1.49375,8.8244},{1.5475,9.19497},{1.60125,9.61317},{1.655,10.0738},{1.70875,10.5727},{1.7625,11.1066},{1.81625,11.6728},{1.87,12.2692},{1.92375,12.894}}

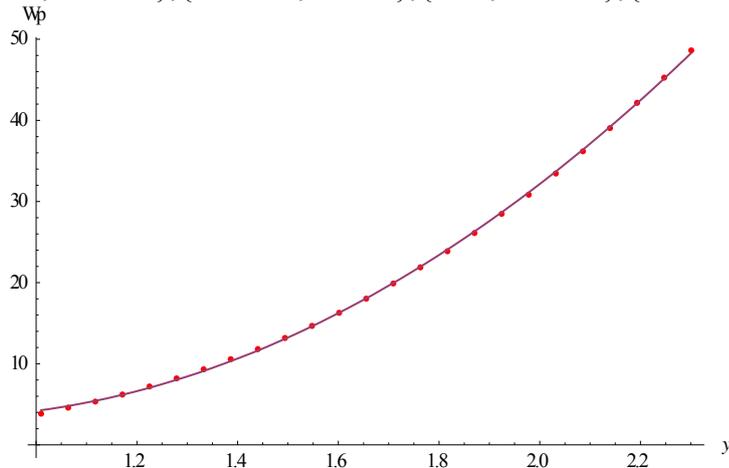
DataPs\_ = {{1.01,0.402981},{1.06375,2.5975},{1.1175,4.83715},{1.17125,7.11806},{1.225,9.43695},{1.27875,11.7914},{1.3325,14.18},{1.38625,16.6022},{1.44,19.0581},{1.49375,21.5487},{1.5475,24.0751},{1.60125,26.6391},{1.655,29.2425},{1.70875,31.8874},{1.7625,34.5758},{1.81625,37.3097},{1.87,40.0912},{1.92375,42.9222}}

n\_ = 19

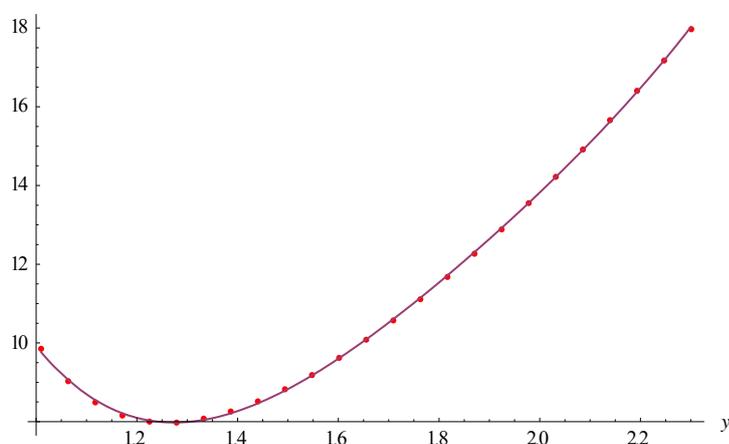
a\_ = 1.9775

b[a]\_ = 0.255721

DataWork\_ = {{1.01,3.89391},{1.06375,4.6027},{1.1175,5.38514},{1.17125,6.24461},{1.225,7.1846},{1.27875,8.20871},{1.3325,9.32061},{1.38625,10.524},{1.44,11.8226},{1.49375,13.2202},{1.5475,14.7205},{1.60125,16.3274},{1.655,18.0446},{1.70875,19.8759},{1.7625,21.8251},{1.81625,23.896},{1.87,26.0924},{1.92375,28.4179},{1.9775,30.8765}}

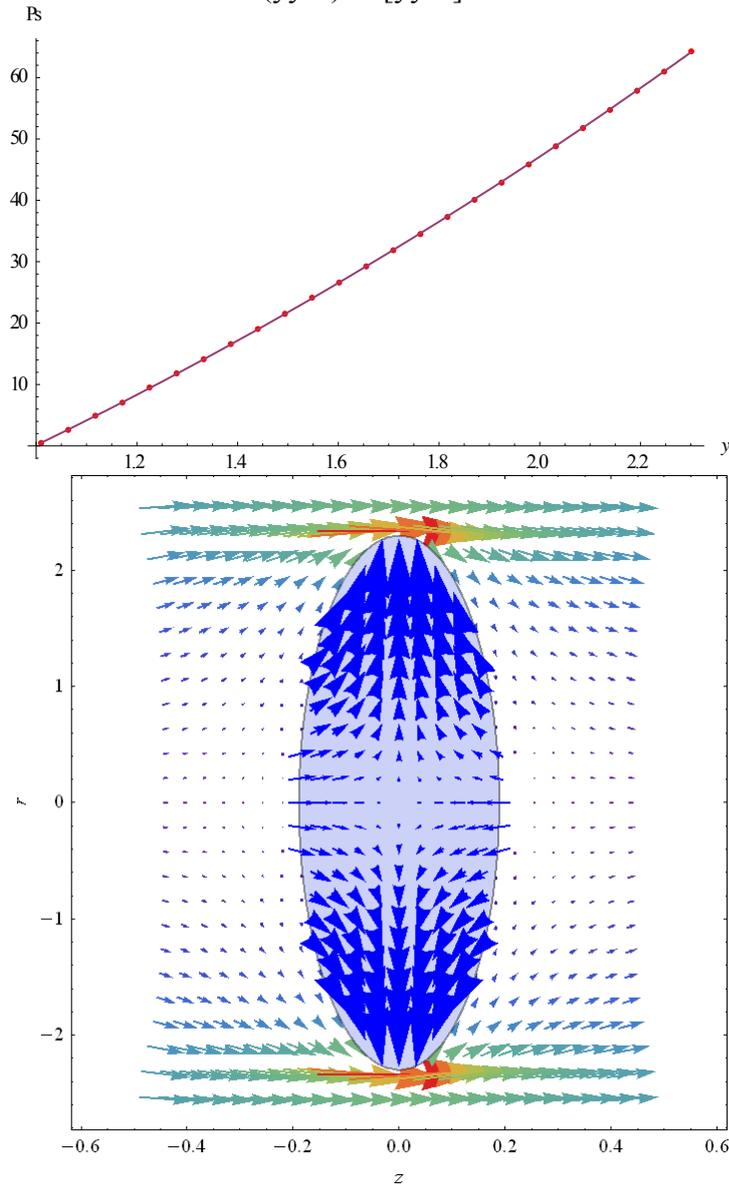


$$97.8655 - 201.064 y + 161.496 y^2 - 55.7732 y^3 + 7.39283 y^4$$



$$-32.0894 + 24.8065 y + 7.39871 y^2$$

$$0.115792+39.6039 (yy-1)+O[yy-1]^2$$



$$Kpo[y_]:=15.552884814050596`_ -31.185849057706754` y+19.752998831515974` y^2$$

$$Kco[y_]:=100.02031691919238`_ -205.8398662956521` y+165.32059157717583` y^2-$$

$$57.079946769121605` y^3+7.55269780929354` y^4$$

Kpo[1]  
 Kco[1]  
 4.12003  
 9.97379

DataWork-DataPs

{ {0.,-4.0954}, {0.,-4.72291}, {0.,-5.36233}, {0.,-6.01373}, {0.,-6.67715}, {0.,-7.35267}, {0.,-8.04034}, {0.,-8.74024}, {0.,-9.45243}, {0.,-10.177}, {0.,-10.9141} }

PWork[y\_]=parabolaWork

Series[PWork[yy],{yy,1.1,1}]

PPs[y\_]=parabolaPs

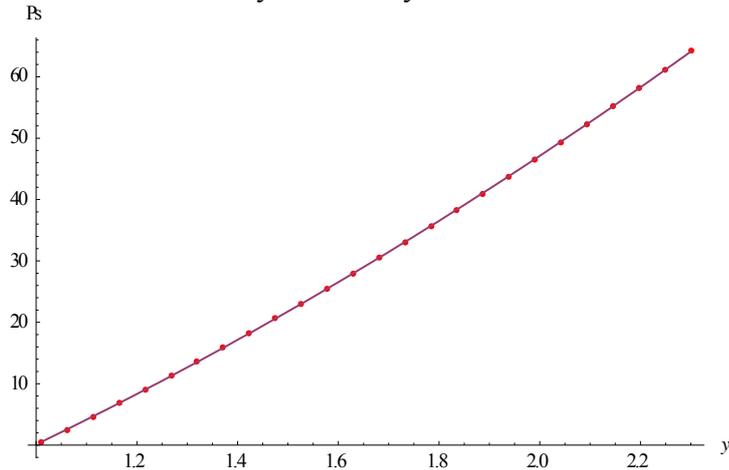
Series[PPs[yy],{yy,1.1,1}]

$$-15.7315+31.2921 y-19.752 y^2$$

```

-5.21012-12.1623 (yy-1.1)+O[yy-1.1]^2
-33.434+24.1027 y+12.1115 y^2-3.5731 y^3+0.774601 y^4
4.11226+41.9018 (yy-1.1)+O[yy-1.1]^2
parabolaPs = Fit[DataPs, {1,y,y^2}, y];
PPs[y_]=parabolaPs
Show[ListPlot[DataPs, PlotStyle→Red,AxesLabel→{y,Ps}], Plot[{line, parabolaPs}, {y, a0,
af},PlotRange→Full]]
PPs[y_]=parabolaPs
Series[PPs[yy],{yy,1,1}]
-32.0899+24.8083 y+7.39785 y^2

```



```

-32.0899+24.8083 y+7.39785 y^2
0.116212+39.604 (yy-1)+O[yy-1]^2

```

## Annexe B

### Détermination de termes de l'énergie cinétique et du travail de la pression pour un sphéroïde allongé sous Mathematica

```

print[expr_]:=Print[expr,"=",ToExpression[expr]]
deriv[expr_,var_]:=D[expr,var]//.{Re'[e_]fRe[D[e,var]]/D[e,var],Im'[e_]fIm[D[e,var]]/D[e,v
ar],Arg'[e_]fIm[D[e,var]/e]/D[e,var],Sign'[e_]fSign[D[e,var]/e]/D[e,var],Abs'[e_]f(Re[e
Re[D[e,var]]+Im[e] Im[D[e,var]])/(Abs[e] D[e,var])}

```

```

A[b_]:= (3*V/4/Pi/b^2)

```

```

CC[b_]:= (A[b]^2-b^2)^(1/2)
EE[b_]:= CC[b]/A[b]
R0=1;
V=4/3*Pi*R0^3;
print["V"]
print["R0"]
Xhi0p[b_]:= 1/2*Log[(A[b]+b)/(A[b]-b)]
U=1;
CoordSphp[b_,xhi_,eta_]:= CC[b]*Cosh[xhi+I*eta];
zp[b_,xhi_,eta_]:= Re[CoordSphp[b,xhi,eta]];
rp[b_,xhi_,eta_]:= Im[CoordSphp[b,xhi,eta]];
Xhip[b_,Z_,R_]:= Re[ArcCosh[(Abs[Z]+I*R)/CC[b]]];
Etap[b_,Z_,R_]:= Im[ArcCosh[(Z+I*R)/CC[b]]];
Prefact[b_]:= (U/2*CC[b]^2*b^2)/(A[b]*CC[b]+b^2*Log[(A[b]-CC[b])/b])
Psi[a_,xhi_,eta_]:= Prefact[a]*(Cosh[xhi]+(Sinh[xhi])^2*ArcCot[Sinh[xhi]]*(Sin[eta])^2)
Psi2p[b_,xhi_,eta_]:= Prefact[b]*(Sin[eta])^2*(Cosh[xhi]+(Sinh[xhi])^2*Log[Tanh[xhi/2]])-
1/2*U*rp[b,xhi,eta]^2
Psi3[a_,xhi_,eta_]:= -1/2*U*r[a,xhi,eta]^2;
PsiR[a_,Z_,R_]:= Psi[a,Xhi[a,Z,R],Eta[a,Z,R]];
Psi2Rp[b_,Z_,R_]:= Psi2p[b,Xhip[b,Z,R],Etap[b,Z,R]]
Psi3R[a_,Z_,R_]:= Psi3[a,Xhi[a,Z,R],Eta[a,Z,R]]
PsiS[a_,Z_,R_]:= 1/2*U*R^2*(0-a^3/(Z^2+R^2)^(3/2))
PsiS2[a_,Z_,R_]:= -
a^3/2*U/c*(Sin[Eta[a,Z,R]]*Cosh[Xhi[a,Z,R]])^2/((Cosh[Xhi[a,Z,R]]*Sin[Eta[a,Z,R]])^2+(
Sinh[Xhi[a,Z,R]]*Cos[Eta[a,Z,R]])^2)^(3/2)
PsiSp[b_,Z_,R_]:= 1/2*U*R^2*(1-b^3/(Z^2+R^2)^(3/2))
PsiS2p[b_,Z_,R_]:= -
A[b]^3/2*U/CC[b]*(Sin[Etap[b,Z,R]]*Cosh[Xhip[b,Z,R]])^2/((Cosh[Xhip[b,Z,R]]*Sin[Etap
[b,Z,R]])^2+(Sinh[Xhip[b,Z,R]]*Cos[Etap[b,Z,R]])^2)^(3/2)

DataWorkp={};
DataEcp={};
b0=.5;
bf=.99;
p=10;
print["b0"]
print["bf"]
print["p"]
Do[
b=bf-(bf-b0)*(n-1)/p;
print["b"];
print["A[b]"];

Uzp[b_,Z_,R_]:= -1/R*deriv[Psi2Rp[b,Z,R],R];
Urp[b_,Z_,R_]:= 1/R*deriv[Psi2Rp[b,Z,R],Z];
Pp[b_,Z_,R_]:= 1/2*(Uzp[b,Z,R]^2+Urp[b,Z,R]^2);
xcp[b_,z_,y_]:= b*Sqrt[1-y^2/b^2-z^2/A[b]^2];
ycp[b_,z_,x_]:= b*Sqrt[1-x^2/b^2-z^2/A[b]^2];
zcp[b_,x_,y_]:= A[b]*Sqrt[1-x^2/b^2-y^2/b^2];
Dlp[b_,r_,y_]:= (deriv[zcp[b,r,y],r]^2+1)^(1/2);

```

```

Wp[b_,r_,y_,z_]:={-Abs[r],0,2*Abs[z]};
Fp[b_,r_,y_,z_]:=r^2/b^2+y^2/b^2+z^2/A[b]^2-1;
Gradip[b_,r_,y_,z_]={D[Fp[b,r,y,z],r],D[Fp[b,r,y,z],y],D[Fp[b,r,y,z],z]}; (*OK*)
normalep[b_,r_,y_,z_]=Gradip[b,r,y,z]/Norm[Gradip[b,r,y,z]];

Workp[b_]:=2*Re[NIntegrate[Wp[b,rr,0,zcp[b,rr,0]].normalep[b,rr,0,zcp[b,rr,0]]*Pp[b,zcp[b,
rr,0],rr]*2*Pi*rr*Dlp[b,rr,0],{rr,0,b},MaxRecursion->16]];

Ecp[b_]:=4*Re[NIntegrate[Norm[Wp[b,r,0,z]]^2*Boole[Abs[Xhip[b,z,r]]<=Xhi0p[b]]*2*Pi
*r,{r,0,b},{z,0,A[b]},MaxRecursion->16]];
Truc={b,Workp[b]};
TrucMuch={b,Ecp[b]};
AppendTo[DataWorkp,Truc];
AppendTo[DataEcp,TrucMuch];
print["DataWorkp"];
print["DataEcp"]
,{n,p+1}]
parabolaWorkp = Fit[DataWorkp, {1,y,y^2}, y]
Show[ListPlot[DataWorkp, PlotStyle->Red], Plot[{line, parabolaWorkp}, {y, b0, bf}]]
parabolaEcp = Fit[DataEcp, {1,y,y^2,y^3,y^4}, y]
Show[ListPlot[DataEcp, PlotStyle->Red], Plot[{line, parabolaEcp}, {y, b0,
bf},PlotRange->Full]]
Show[

VectorPlot[{Uzrp[b,Z,R]*Boole[Abs[Xhip[b,Z,R]]>Xhi0p[b]],Urp[b,Z,R]*Boole[Abs[Xhip[b
,Z,R]]>Xhi0p[b]]},{Z,-A[b]-1/4,A[b]+1/4},{R,-b-1/4,b+1/4}

,FrameLabel->{z,r},VectorScale->Small,VectorPoints->Fine,VectorColorFunction->"Rainb
ow"],
(*

,VectorPlot[{normale[a,r,0,z][[3]],normale[a,r,0,z][[1]]}*Boole[((r/aa)^2+(z/b)^2<1.05)&&(
(r/aa)^2+(z/b)^2>0.95)]*),{z,-b[a]-1/4,b[a]+1/4},{r,-a-
1/4,a+1/4},VectorScale->Small,VectorPoints->Fine,VectorStyle->Black],
*)
RegionPlot[(r/b)^2+(z/A[b])^2<1,{z,-A[b]-1/4,A[b]+1/4},{r,-b-
1/4,b+1/4},FrameLabel->{z,r}],

VectorPlot[{Wp[b,0,z][[3]],Wp[b,r,0,z][[1]]}*Boole[(r>=0)&&(z>=0)&&((r/b)^2+(z/A[b])^2
<=1)]+{-
Wp[b,r,0,z][[3]],Wp[b,r,0,z][[1]]}*Boole[(r>0)&&(z<0)&&((r/b)^2+(z/A[b])^2<=1)]+{Wp[
b,r,0,z][[3]],-Wp[b,r,0,z][[1]]}*Boole[(r<0)&&(z>0)&&((r/b)^2+(z/A[b])^2<=1)]+{-
Wp[b,r,0,z][[3]],-Wp[b,r,0,z][[1]]}*Boole[(r<0)&&(z<0)&&((r/b)^2+(z/A[b])^2<=1)],{z,-
A[b]-1/4,A[b]+1/4},{r,-b-
1/4,b+1/4},VectorStyle->Blue,VectorScale->Small,VectorPoints->Fine]
]
V_=_ (4 pi)/3
R0_=_ 1
b0_=_ 0.5

```

```

bf_ = 0.99
p_ = 10
b_ = 0.99
A[b_] = 1.0203
NIntegrate::slwcon: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the
following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or
WorkingPrecision too small. □
NIntegrate::eincr: The global error of the strategy GlobalAdaptive has increased more than
_2000_ times. The global error is expected to decrease monotonically after a number of
integrand evaluations. Suspect one of the following: the working precision is insufficient for
the specified precision goal; the integrand is highly oscillatory or it is not a (piecewise)
smooth function; or the true value of the integral is 0. Increasing the value of the
GlobalAdaptive option MaxErrorIncreases might lead to a convergent numerical integration.
NIntegrate obtained 2.56363 + 0.™
_and 0.0005418850441368844`_ for the integral and error estimates. □
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832}}
DataEcp_ = {{0.99,10.2545}}
b_ = 0.941
A[b_] = 1.12933
_and 0.0006115253336925903`_ for the integral and error estimates. □
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832},{0.941,-3.08684}}
DataEcp_ = {{0.99,10.2545},{0.941,11.5067}}
b_ = 0.892
A[b_] = 1.25681
_and 0.0007039846402570294`_ for the integral and error estimates. □
General::stop: Further output of NIntegrate::eincr_ will be suppressed during this
calculation. □
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832},{0.941,-3.08684},{0.892,-2.58066}}
DataEcp_ = {{0.99,10.2545},{0.941,11.5067},{0.892,13.2425}}
b_ = 0.843
A[b_] = 1.40716
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832},{0.941,-3.08684},{0.892,-2.58066},{0.843,-2.12767}}
DataEcp_ = {{0.99,10.2545},{0.941,11.5067},{0.892,13.2425},{0.843,15.6394}}
b_ = 0.794
A[b_] = 1.5862
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832},{0.941,-3.08684},{0.892,-2.58066},{0.843,-
2.12767},{0.794,-1.7259}}
DataEcp_ = {{0.99,10.2545},{0.941,11.5067},{0.892,13.2425},{0.843,15.6394},{0.794,18.9
59}}
b_ = 0.745
A[b_] = 1.80172
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832},{0.941,-3.08684},{0.892,-2.58066},{0.843,-
2.12767},{0.794,-1.7259},{0.745,-1.37346}}
DataEcp_ = {{0.99,10.2545},{0.941,11.5067},{0.892,13.2425},{0.843,15.6394},{0.794,18.9
59},{0.745,23.5952}}
b_ = 0.696
A[b_] = 2.06434
DataWorkp_ = {{0.99,-3.64832},{0.941,-3.08684},{0.892,-2.58066},{0.843,-
2.12767},{0.794,-1.7259},{0.745,-1.37346},{0.696,-1.06852}}

```

DataEcp\_ =  $\{\{0.99,10.2545\},\{0.941,11.5067\},\{0.892,13.2425\},\{0.843,15.6394\},\{0.794,18.959\},\{0.745,23.5952\},\{0.696,30.1567\}\}$

b\_ = 0.647

A[b]\_ = 2.38886

DataWorkp\_ =  $\{\{0.99,-3.64832\},\{0.941,-3.08684\},\{0.892,-2.58066\},\{0.843,-2.12767\},\{0.794,-1.7259\},\{0.745,-1.37346\},\{0.696,-1.06852\},\{0.647,-0.809189\}\}$

DataEcp\_ =  $\{\{0.99,10.2545\},\{0.941,11.5067\},\{0.892,13.2425\},\{0.843,15.6394\},\{0.794,18.959\},\{0.745,23.5952\},\{0.696,30.1567\},\{0.647,39.6125\}\}$

b\_ = 0.598

A[b]\_ = 2.79639

DataWorkp\_ =  $\{\{0.99,-3.64832\},\{0.941,-3.08684\},\{0.892,-2.58066\},\{0.843,-2.12767\},\{0.794,-1.7259\},\{0.745,-1.37346\},\{0.696,-1.06852\},\{0.647,-0.809189\},\{0.598,-0.593368\}\}$

DataEcp\_ =  $\{\{0.99,10.2545\},\{0.941,11.5067\},\{0.892,13.2425\},\{0.843,15.6394\},\{0.794,18.959\},\{0.745,23.5952\},\{0.696,30.1567\},\{0.647,39.6125\},\{0.598,53.5567\}\}$

b\_ = 0.549

A[b]\_ = 3.31784

DataWorkp\_ =  $\{\{0.99,-3.64832\},\{0.941,-3.08684\},\{0.892,-2.58066\},\{0.843,-2.12767\},\{0.794,-1.7259\},\{0.745,-1.37346\},\{0.696,-1.06852\},\{0.647,-0.809189\},\{0.598,-0.593368\},\{0.549,-0.418563\}\}$

DataEcp\_ =  $\{\{0.99,10.2545\},\{0.941,11.5067\},\{0.892,13.2425\},\{0.843,15.6394\},\{0.794,18.959\},\{0.745,23.5952\},\{0.696,30.1567\},\{0.647,39.6125\},\{0.598,53.5567\},\{0.549,74.716\}\}$

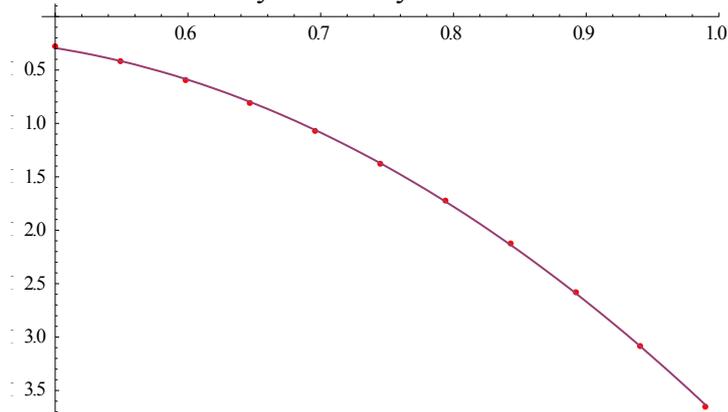
b\_ = 0.5

A[b]\_ = 4.

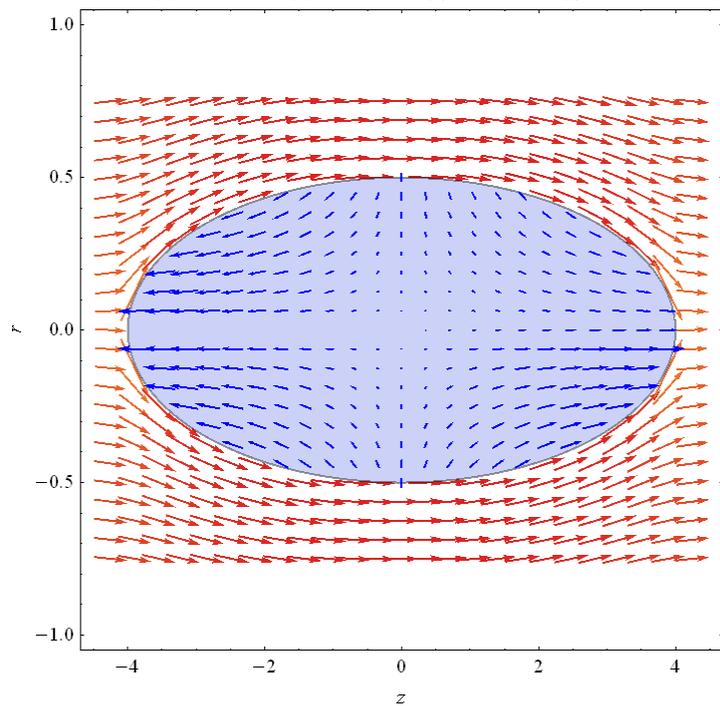
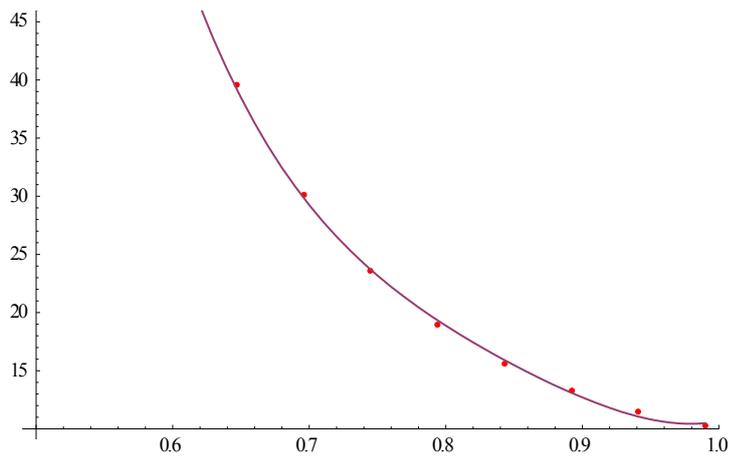
DataWorkp\_ =  $\{\{0.99,-3.64832\},\{0.941,-3.08684\},\{0.892,-2.58066\},\{0.843,-2.12767\},\{0.794,-1.7259\},\{0.745,-1.37346\},\{0.696,-1.06852\},\{0.647,-0.809189\},\{0.598,-0.593368\},\{0.549,-0.418563\},\{0.5,-0.28171\}\}$

DataEcp\_ =  $\{\{0.99,10.2545\},\{0.941,11.5067\},\{0.892,13.2425\},\{0.843,15.6394\},\{0.794,18.959\},\{0.745,23.5952\},\{0.696,30.1567\},\{0.647,39.6125\},\{0.598,53.5567\},\{0.549,74.716\},\{0.5,107.968\}\}$

$-1.76268+7.86461 y-9.85576 y^2$



$2108.72_-9463.54 y+16349.9 y^2-12723.9 y^3+3739.49 y^4$



$$K_{pp}[y_] := -1.7626807227928125 y + 7.864605662356008 y^2 - 9.855762924411234 y^3 + 12723.90669012627 y^4$$

$$K_{cp}[y_] := 2108.7155458621737 y - 9463.535033274691 y^2 + 16349.900492793835 y^3 - 12723.90669012627 y^4$$

## **Etude de la fragmentation d'une goutte de métal liquide dans l'eau**

### **Résumé :**

L'étude présentée dans ce rapport porte sur la modélisation analytique et expérimentale du processus de l'atomisation secondaire.

De la part analytique, un nouveau modèle de la fragmentation de gouttes est développé et étudié. Ce résultat a montré une bonne efficacité comparé aux résultats expérimentaux, surtout pour des faibles nombre de Weber. De modifications sur le modèle sont attendus d'améliorer la modélisation à une large gamme de nombres de Weber et d'Ohnesorge.

De la part expérimentale, un générateur goutte à goutte de métal fondu a été conçu fabriqué. Ce générateur se caractérise par sa capacité à produire de larges gouttes (diamètre d'ordre centimétrique). L'étude de propriétés du métal de Field était essentielle pour terminer la conception du générateur. Ce métal a montré un comportement rhéologique complexe. Après plusieurs expériences utilisant la glycérine et le métal de Field, le générateur de gouttes a montré une bonne reproductibilité quant au nombre de gouttes produites et leur taille.

## **Study of the fragmentation of liquid metal droplet in water**

### **Abstract:**

The study presented in this report concerns theoretical and experimental modelisation of secondary atomization process.

In the analytic part, a new model of fragmentation of droplets has been developed and studied. This model has shown a good accuracy compared to experimental results, especially at low Weber numbers. Though, further modifications are expected to improve modeling at a wide range of Weber and Ohnesorge numbers.

In the experimental part, a molten metal drop-on-demand generator has been successfully designed and manufactured. This generator is characterized by its ability to produce large droplets (diameter up to 1 centimeter). Studying the physical properties of Field metal was essential to finish the previous design. This metal has shown a complex rheological behavior. After many experiments using glycerin and Field metal, the droplet generator has proven a good reproducibility regarding the number of the droplets produced and their size.