



**HAL**  
open science

# Asymptotique de valeurs propres de l'opérateur Poincaré-Neumann associé à deux inclusions proches

Chun-Hsiang Tsou

► **To cite this version:**

Chun-Hsiang Tsou. Asymptotique de valeurs propres de l'opérateur Poincaré-Neumann associé à deux inclusions proches. Mathématiques [math]. 2014. hal-01841089

**HAL Id: hal-01841089**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01841089v1>**

Submitted on 17 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN

MÉMOIRE DU MASTER DE MATHÉMATIQUES  
FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES (MFA)

---

**Asymptotique de valeurs  
propres de l'opérateur  
Poincaré-Neumann associé à  
deux inclusions proches**

---

*Auteur :*  
Chun-Hsiang TSOU

*Tuteur du stage :*  
Éric BONNETIER  
Antoine HENROT  
Faouzi TRIKI

Soutenu le 30 juin 2014

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	L'opérateur de Neumann-Poincaré . . . . .	4
1.1.1	Spectre de l'opérateur Neumann-Poincaré . . . . .	6
1.2	Le problème variationnel de Poincaré . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Calcul de valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré</b>	<b>12</b>
2.1	Approche Variationnelle . . . . .	12
2.1.1	Cas en deux dimensions . . . . .	13
2.1.2	Cas de deux disques . . . . .	14
2.1.3	Point de contact d'ordre $m > 2$ . . . . .	18
2.1.4	Cas en dimension trois . . . . .	22
2.2	Approche équations intégrales . . . . .	24
2.2.1	Cas en deux dimensions . . . . .	25
2.2.2	Approche (1) . . . . .	25
2.2.3	Approche (2) . . . . .	27
2.2.4	Résultats : Cas de deux disques . . . . .	28
2.2.5	Point de contact d'ordre $m > 2$ . . . . .	29
2.2.6	Illustration numérique de la méthode (2) . . . . .	30
2.2.7	Cas en dimension trois . . . . .	32
2.2.8	Préliminaire . . . . .	33
2.2.9	Méthode de collocation sur une surface régulière . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>

# Chapitre 1

## Introduction

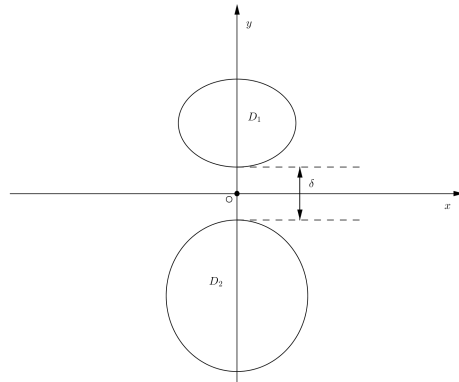


FIGURE 1.1 – Les deux inclusions  $D_1$  et  $D_2$

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux domaines distincts et strictement convexes de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  à une distance  $\delta$ . Ils sont donnés par :

$$D_1 = D_1^0 + \frac{\delta}{2}\hat{u} \qquad D_2 = D_2^0 - \frac{\delta}{2}\hat{u}$$

où  $\hat{u}$  désigne un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  (en pratique,  $\hat{u} = e_y$  en  $\mathbb{R}^2$  ; et  $\hat{u} = e_z$  en  $\mathbb{R}^3$ ). Nous supposons que  $D_1^0$  et  $D_2^0$  sont deux domaines réguliers qui vérifient :

- $D_1^0$  est entièrement dans le demi-espace  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  (ou  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ ) ; respectivement,  $D_2^0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$  (ou  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-$ )
- les deux domaines sont strictement convexes et  $D_1^0 \cap D_2^0 = \{O\}$ , où  $O$  est l'origine du repère.

- les frontières  $\partial D_i^0$  sont de classe  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  avec  $\alpha \in ]0, 1]$
- au voisinage du point  $O$ , les frontières  $\partial D_1^0$  et  $\partial D_2^0$  sont paramétrées respectivement par les courbes  $(x, \psi_1(x))$  et  $(x, -\psi_2(x))$
- la fonction  $\psi_1 + \psi_2$  est équivalente à  $C|x|^m$  quand  $x \rightarrow 0$ , avec  $m \geq 2$  et  $C$  est une constante strictement positive.

Soit  $H$  une fonction harmonique, et  $u$  le potentiel électrique solution de l'équation de conduction :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ u(x) - H(x) \rightarrow 0 & \text{quand } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.1)$$

avec la conductivité  $a(x) = k > 0$  à l'intérieur du domaine  $D = D_1 \cup D_2$  et  $a(x) = 1$  à l'extérieur. La fonction  $u$  peut s'écrire en fonction du potentiel de simple couche (introduit plus tard) :

$$u(x) = S_1[\varphi_1](x) + S_2[\varphi_2](x) + H(x) \quad (1.2)$$

avec  $(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi$  vérifie l'équation intégrale :

$$(\lambda I - \mathcal{K}^*) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\nu H_{\partial D_1} \\ \partial_\nu H_{\partial D_2} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

où  $\lambda = \frac{k+1}{2(k-1)} \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $\nu$  le vecteur normal dirigé vers l'extérieur et  $\mathcal{K}^*$  l'opérateur de Neumann-Poincaré.

Pour un contraste fixé  $|\lambda| > \frac{1}{2}$ , le gradient du potentiel  $\nabla u$  est localement borné et la borne est *indépendante de  $\delta$*  [1].

Mais quand le contraste dégénère  $|\lambda| = \frac{1}{2}$  le gradient  $\nabla u$  peut tendre vers l'infini quand les inclusions sont en contact [5],[7].

Dans cette mémoire, nous cherchons à étudier numériquement le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré  $\mathcal{K}^*$  quand la distance entre les inclusions  $\delta$  tend vers zéro. Ce comportement asymptotique des valeurs propres et des vecteurs propres peut aider à comprendre le blow-up du gradient [6]. Nous allons utiliser deux méthodes numériques :

- I/ Une méthode variationnelle basée sur le problème spectral de Poincaré.
- II/ Une méthode intégrale basée sur l'étude du spectre de l'opérateur intégral de Neumann-Poincaré.

## 1.1 L'opérateur de Neumann-Poincaré

Nous présentons ici quelques résultats généraux sur l'opérateur de Neumann-Poincaré. Soit  $D$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 2$ , et de frontière régulière. Dans la suite, on désignera par  $\nu(x)$  le vecteur normale extérieur en un point  $x \in \partial D$ .

**Lemme 1.** *La solution fondamentale du Laplacien est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x| & d = 2 \\ \frac{1}{(2-d)\omega_d} |x|^{2-d} & d \geq 3 \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\omega_d$  désigne l'aire de la sphere unité de  $\mathbb{R}^d$ .

Pour la preuve de ce Lemme, voir la référence [9].

**Définition 1.** *Soit  $D$  un domaine borné, avec une frontière  $\partial D$  régulière (au moins lipschitzienne) dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $\varphi \in L^2(\partial D)$  ( $\varphi$  est appelé la densité), on définit :*

$$S_{\partial D}[\varphi](x) = \int_{\partial D} \Gamma(x-y)\varphi(y)d\sigma(y) \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (1.5)$$

$$K_{\partial D}[\varphi](x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial D} \frac{\langle y-x, \nu_y \rangle}{|x-y|^d} \varphi(y)d\sigma(y) \quad x \in \partial D \quad (1.6)$$

$$K_{\partial D}^*[\varphi](x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial D} \frac{\langle x-y, \nu_x \rangle}{|x-y|^d} \varphi(y)d\sigma(y) \quad x \in \partial D \quad (1.7)$$

$$\mathcal{D}_{\partial D}[\varphi](x) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \Gamma(x-y)\varphi(y)d\sigma(y) \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial D \quad (1.8)$$

L'opérateur  $S_{\partial D}$  est appelé le potentiel de simple couche ;  $\mathcal{D}_{\partial D}$  est appelé le potentiel de double couche. L'opérateur  $K_{\partial D}^*$  est appelé l'opérateur de Neumann-Poincaré associé au domaine  $D$ .  $K_{\partial D}$  est le  $L^2$ -adjoint de  $K_{\partial D}^*$ .

Nous énonçons les relations de saut suivantes [9] :

**Théorème 1.** *Soit  $D$  un domaine borné, lipschitzien en  $\mathbb{R}^d$ . Pour toute densité  $\varphi \in L^2(\partial D)$ , nous avons :*

$$S_{\partial D}[\varphi]|_+(x) = S_{\partial D}[\varphi]|_-(x) \quad \forall x \in \partial D \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} S_{\partial D}[\varphi]|_+(x) = \frac{\partial}{\partial T} S_{\partial D}[\varphi]|_-(x) \quad \forall x \in \partial D \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} S_{\partial D}[\varphi]|_{\pm}(x) = (\pm \frac{1}{2}I + K_{\partial D}^*)[\varphi](x) \quad \forall x \in \partial D \quad (1.11)$$

$$\mathcal{D}_{\partial D}[\varphi]|_{\pm}(x) = (\mp \frac{1}{2}I + K_{\partial D})[\varphi](x) \quad \forall x \in \partial D \quad (1.12)$$

En plus, si la frontière  $\partial D$  est régulière de  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ , l'opérateur  $K_{\partial D}^*$  vérifie les propriétés suivantes [10] :

- i  $K_{\partial D}^*$  est compact sur  $L^2(\partial D)$
- ii Le spectre de  $K_{\partial D}^*$  inclut dans  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
- iii  $\frac{1}{2}I + K_{\partial D}^*$  est inversible sur  $L^2(\partial D)$ ; et  $-\frac{1}{2}I + K_{\partial D}^*$  est inversible sur  $L_0^2(\partial D)$

ici,  $L_0^2(\partial D)$  désigne l'ensemble des fonctions de  $L^2(\partial D)$  de moyenne nulle :

$$L_0^2(\partial D) = \{g \in L^2(\partial D) \mid \int_{\partial D} g d\sigma = 0\}$$

Nous notons par  $\kappa(x, y)$  le noyau de l'opérateur  $K_{\partial D}^*$  :  $\kappa(x, y) = \frac{\langle x - y, \nu_x \rangle}{|x - y|^d}$   
 Dans notre étude,  $D$  est formé de deux domaines disjoints  $D_1$  et  $D_2$ , la densité  $\varphi$  sur  $\partial D$  peut donc s'écrire sous la forme  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  avec  $\varphi_i \in L^2(\partial D_i)$ .

Alors l'opérateur de potentiel simple couche s'écrit [6] :

$$u = S[\varphi] = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

où  $S_1, S_2$  sont respectivement les opérateurs de potentiel simple couche correspondants aux surfaces  $\partial D_1$  et  $\partial D_2$ . L'opérateur  $\mathcal{K}^*$  de Neumann-Poincaré est de la forme [4]

$$\mathcal{K}^*[\varphi] = \begin{pmatrix} K_1^* & L_1 \\ L_2 & K_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

où  $K_1^* = K_{\partial D_1}^*$ ,  $K_2^* = K_{\partial D_2}^*$ , et les termes extra-diagonaux :

$$L_1[\varphi_2](x) = \frac{\partial}{\partial \nu_1} S_2[\varphi_2](x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial D_2} \frac{\langle x - y, \nu_x \rangle}{|x - y|^d} \varphi_2(y) d\sigma(y) \quad x \in \partial D_1$$

$$L_2[\varphi_1](x) = \frac{\partial}{\partial \nu_2} S_1[\varphi_1](x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial D_1} \frac{\langle x - y, \nu_x \rangle}{|x - y|^d} \varphi_1(y) d\sigma(y) \quad x \in \partial D_2$$

Ainsi son  $L^2$ -adjoint  $\mathcal{K}$  :

$$\mathcal{K}[\varphi] = \begin{pmatrix} K_1 & L_2^* \\ L_1^* & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons ici que  $\mathcal{K}^*$  n'est pas en générale auto-adjoint dans l'espace usuelle  $L^2(\partial D) \simeq L^2(\partial D_1) \times L^2(\partial D_2)$ . Or, d'après l'identité de Calderón,  $\mathcal{K}^*$  et  $S$  vérifient :

$$S\mathcal{K}^* = \mathcal{K}S \quad (1.15)$$



Nous pourrions définir un nouveau produit scalaire sur  $L^2(\partial D_1) \times L^2(\partial D_2)$  :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_S := \langle -S[\varphi], \psi \rangle_{L^2} := - \int_{\partial D_1} S_1[\varphi_1] \psi_1 - \int_{\partial D_2} S_2[\varphi_2] \psi_2 \quad (1.16)$$

Alors,  $\mathcal{K}^*$  est auto-adjoint pour ce produit scalaire.

### 1.1.1 Spectre de l'opérateur Neumann-Poincaré

Nous donnons ici le spectre des opérateurs de Neumann-Poincaré associée aux domaines de géométries particulières [10] :

1. Si  $D$  est un disque de  $\mathbb{R}^2$ , alors les valeurs propres de  $K_{\partial D}^*$  sur  $L^2(\partial D)$  sont 0 de multiplicité infinie et  $\frac{1}{2}$  de multiplicité 1. ( $\{0\}$  uniquement pour le produit scalaire  $\langle, \rangle_S$ )
2. Si  $D$  est une boule de  $\mathbb{R}^3$ , alors les valeurs propres de  $K_{\partial D}^*$  sur  $L^2(\partial D)$  sont :

$$\frac{1}{2(2n+1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

les vecteurs propres pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  sont les harmoniques sphériques  $Y^n$  d'ordre  $n$ .

3. Si  $D$  est une ellipse de taille  $(a, b)$  avec  $a > b$ , alors les valeurs propres de  $K_{\partial D}^*$  sur  $L^2(\partial D)$  sont :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^n \quad n \in \mathbb{N},$$

En dimension deux, nous notons  $\lambda_n^{\delta, \pm}$  les valeurs propres de  $\mathcal{K}^*$ . Ces valeurs propres sont comprises entre  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , et elles vérifient la relation de symétrie [4] :

$$\lambda_n^{\delta, +} = -\lambda_n^{\delta, -} \quad (1.17)$$

Ainsi, le comportement asymptotique quand  $\delta \rightarrow 0$  des valeurs propres de  $\mathcal{K}^*$  est décrit par le théorème suivant : ([4] Théorème 1)

**Théorème 2.** *Pour  $n \geq 1$ , les valeurs propres de l'opérateur  $T_\delta$  ont le comportement asymptotique suivant, quand  $\delta \rightarrow 0$  :*

$$\begin{cases} \lambda_n^{\delta, +} \sim \frac{1}{2} - c_n^+ \delta^{1-\frac{1}{m}} + o(\delta^{1-\frac{1}{m}}) \\ \lambda_n^{\delta, -} \sim -\frac{1}{2} + c_n^- \delta^{1-\frac{1}{m}} + o(\delta^{1-\frac{1}{m}}) \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $c_n^\pm$  est une suite croissante strictement positive, indépendante de  $\delta$  et vérifie  $c_n^\pm \sim n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$

En plus, si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux disques identiques de  $\mathbb{R}^2$ , nous avons les valeurs propres explicites de  $\mathcal{K}^*$ , calculées par la transformation conforme [6] :

**Théorème 3.** *Nous posons :*

$$a = \sqrt{\delta(\delta + 2)} \quad \rho = \frac{a - \delta}{a + \delta}$$

Alors, les valeurs propres de  $\mathcal{K}^*$  sont données par :

$$\lambda_n^{\delta,+} = \frac{\rho^{2n}}{2} \in ]0, \frac{1}{2}[, \quad \lambda_n^{\delta,-} = -\frac{\rho^{2n}}{2} \in ]-\frac{1}{2}, 0[ \quad n > 0 \quad (1.19)$$

Dans la suite nous introduisons un opérateur variationnel spectral dont les valeurs propres sont une translation des valeurs propres de l'opérateur Poincaré-Neumann.

## 1.2 Le problème variationnel de Poincaré

Nous définissons l'espace de Sobolev suivant [4] :

**Définition 2.**

$$\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2) := \left\{ u \mid \frac{u(X)}{(1 + |X|^2)^{\frac{1}{2}} \log(2 + |X|^2)} \in L^2(\mathbb{R}^2), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\}$$

Notant  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble de  $\mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  de fonctions qui tendent vers 0 quand  $|X| \rightarrow \infty$ . Par l'inégalité de Hardy, l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{W}} := \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$

forme un espace d'Hilbert.

**Définition 3.** *Pour tout  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , d'après le théorème de Riesz, il existe une fonction unique  $T_\delta u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla T_\delta u(X) \nabla v(X) dX = \int_D \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$

L'opérateur  $T_\delta : \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  est borné et auto-adjoint. Il vérifie  $\|T_\delta\| \leq 1$ . Nous nous intéressons au spectre de  $T_\delta$  :

Trouver  $w \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  non trivial et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \quad \beta \int_{\mathbb{R}^2} \nabla w(X) \nabla v(X) dX = \int_D \nabla w(X) \nabla v(X) dX$$

D'après les résultats de [4], les valeurs propres de l'opérateur  $T_\delta$  sont dans  $[0, 1]$ , et  $\frac{1}{2}$  est l'unique point d'accumulation. Nous notons

$$0 = \beta_0^{\delta,+} < \beta_1^{\delta,+} < \dots < \beta_n^{\delta,+} < \frac{1}{2}$$

et

$$1 = \beta_0^{\delta,-} > \beta_1^{\delta,-} > \dots > \beta_n^{\delta,-} > \frac{1}{2}$$

La relation entre ces  $\beta_n^{\delta,\pm}$  et les valeurs propres  $\lambda_n^{\delta,\pm}$  de  $\mathcal{K}^*$  est donnée dans [4] :

$$\beta_n^{\delta,\pm} = \frac{1}{2} - \lambda_n^{\delta,\pm}$$

Donc, la relation de symétrie (1.17) pour  $\beta_n^{\delta,\pm}$  devient :

$$\beta_n^{\delta,+} = 1 - \beta_n^{\delta,-} \quad (1.20)$$

Nous désignons par  $\mathfrak{H}$  l'espace des fonctions harmoniques. Notant  $\mathfrak{H}_S := \mathfrak{H} \cap \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  l'espace des fonctions de  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  qui sont aussi harmoniques et  $w_n^{\delta,\pm}$  les vecteurs propres, les valeurs propres  $\beta_n^{\delta,+}$  sont données par la formule de min-max [4] :

$$\begin{aligned} \beta_n^{\delta,+} &= \max_{u \in \mathfrak{H}_S, \perp w_0^{\delta,+}, w_1^{\delta,+}, \dots, w_n^{\delta,+}} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(X)|^2 dX} \\ &= \min_{\substack{F_n \subset \mathfrak{H}_S \\ \dim F_n = n+1}} \max_{u \in F_n} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(X)|^2 dX} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ainsi pour les  $\beta_n^{\delta,-}$  :

$$\begin{aligned} \beta_n^{\delta,-} &= \min_{u \in \mathfrak{H}_S, \perp w_0^{\delta,-}, w_1^{\delta,-}, \dots, w_n^{\delta,-}} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(X)|^2 dX} \\ &= \max_{\substack{F_n \subset \mathfrak{H}_S \\ \dim F_n = n+1}} \min_{u \in F_n} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(X)|^2 dX} \end{aligned} \quad (1.22)$$

L'évolution des valeurs propres  $\beta_n^{\delta,\pm}$  de l'opérateur  $T_\delta$  quand  $\delta$  tend vers 0 sont données par le théorème suivant [4] :

**Théorème 4** (Comportement des valeurs propres quand  $\delta \rightarrow 0$ ). *Pour  $n \geq 1$ , les valeurs propres de l'opérateur  $T_\delta$  ont le comportement asymptotique suivant, quand  $\delta \rightarrow 0$  :*

$$\begin{cases} \beta_n^{\delta,+} = c_n \delta^{1-\frac{1}{m}} + o(\delta^{1-\frac{1}{m}}) \\ \beta_n^{\delta,-} = 1 - c_n \delta^{1-\frac{1}{m}} + o(\delta^{1-\frac{1}{m}}) \end{cases}$$

avec les  $c_n$  sont des constantes strictement positives et indépendant de  $\delta$ .

Pour calculer numériquement les valeurs propres, nous réduisons le problème spectral dans un domaine  $\Omega$  assez régulier et contenant les deux inclusions  $D_1$  et  $D_2$ .

Définissons alors l'opérateur tronqué :

**Définition 4.** *Pour tout  $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , d'après le théorème de Riesz, il existe une fonction unique  $B_\delta u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  :*

$$\int_{\Omega} \nabla B_\delta u(X) \nabla v(X) dX = \int_D \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$

Notant  $\tilde{w}_n^{\delta,\pm}$  les vecteurs propres, les valeurs propres  $b_n^{\delta,\pm}$  de  $B_\delta$  sont données par la formule de min-max :

$$\begin{aligned} b_n^{\delta,+} &= \max_{u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \perp \tilde{w}_0^{\delta,+}, \tilde{w}_1^{\delta,+}, \dots, \tilde{w}_{n-1}^{\delta,+}} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\Omega} |\nabla u(X)|^2 dX} \\ &= \min_{\substack{V_n \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \dim V_n = n+1}} \max_{u \in V_n} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\Omega} |\nabla u(X)|^2 dX} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ainsi pour les  $b_n^{\delta,-}$  :

$$\begin{aligned} b_n^{\delta,-} &= \min_{u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \perp \tilde{w}_0^{\delta,-}, \tilde{w}_1^{\delta,-}, \dots, \tilde{w}_{n-1}^{\delta,-}} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\Omega} |\nabla u(X)|^2 dX} \\ &= \max_{\substack{V_n \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega) \\ \dim V_n = n+1}} \min_{u \in V_n} \frac{\int_D |\nabla u(X)|^2 dX}{\int_{\Omega} |\nabla u(X)|^2 dX} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nous montrons ensuite que les valeurs propres de  $B_\delta$  et  $T_\delta$  ont le même comportement asymptotique quand  $\delta \rightarrow 0$ .

**Théorème 5.** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  et de  $n$  tels que pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons :*

$$\frac{1}{C} b_n^{\delta, \pm} \leq \beta_n^{\delta, \pm} \leq C b_n^{\delta, \pm} \quad (1.25)$$

Nous ne perdons pas de généralité en supposant  $\Omega$  désigne la boule  $B_R$  ouvert centré de rayon  $R > 0$  telle qu'elle contient les deux domaines :  $D_1 \cup D_2 \subset B_R$  et que  $D_1$  et  $D_2$  restent deux ouverts relatifs par rapport à  $B_R$ .

*Démonstration.* Soient  $f \in H^{1/2}(\partial D)$ ,  $u_f \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  et  $v_f \in H_0^1(B_R)$ . Nous supposons que  $u_f$  et  $v_f$  sont harmoniques respectivement sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  et sur  $B_R \setminus D$ , et sont harmoniques à l'intérieur de  $D$ , vérifient en plus  $u_f = v_f = f$  sur  $\partial D$ .

Montrons qu'il existe  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  et de  $n$  tel que pour tout  $f \in H^{1/2}(\partial D) \setminus \{0\}$ , nous avons :

$$\frac{1}{C} \frac{\int_D |\nabla v_f|^2}{\int_{B_R} |\nabla v_f|^2} \leq \frac{\int_D |\nabla u_f|^2}{\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_f|^2} \leq C \frac{\int_D |\nabla v_f|^2}{\int_{B_R} |\nabla v_f|^2} \quad (1.26)$$

L'argument principale de ce théorème provient du principe de min-max pour les opérateurs  $T_\delta$  et  $B_\delta$ .

Pour démontrer (1.26), nous remarquons d'abord que les fonctions  $u_f$  et  $v_f$  coïncident sur  $\partial D$  et sont harmoniques à l'intérieur de  $D$ , donc :

$$\int_D |\nabla u_f|^2 = \int_D |\nabla v_f|^2 \quad (1.27)$$

Nous prolongeons la fonctions  $v_f$  par 0 en dehors de  $B_R$ , elle devient alors une fonctions de  $\mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ . Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla u_f|^2 \leq \min_{\substack{w \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \\ w \equiv f \text{ sur } \partial D}} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla w|^2 \leq \int_{B_R} |\nabla v_f|^2 \quad (1.28)$$

avec (1.27), nous avons l'inégalité à droite de (1.26).

Pour démontrer l'autre inégalité, nous notons  $\chi$  la fonction de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  vérifiant :  $\chi \equiv 1$  dans  $B_{R'}$  pour  $R' < R$  tel que  $D \subset B_{R'}$  et  $\chi \equiv 0$  à l'extérieure de  $B_R$ . Nous supposons aussi que  $\|\chi\|_{W^{1,\infty}} \leq 1$ . La fonction  $\tilde{u}_f = \chi u_f$  est donc une fonction de  $H_0^1(B_R)$ , et il existe donc une constante  $C$ , qui dépend uniquement de  $R$  telle que :

$$\int_{B_R \setminus \bar{D}} |\nabla \tilde{u}_f|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\nabla u_f|^2$$

Comme  $\tilde{u}_f = u_f = v_f$  sur  $\partial D$ , d'après le principe de Dirichlet, nous avons :

$$\int_{B_R \setminus \bar{D}} |\nabla v_f|^2 \leq \int_{B_R \setminus \bar{D}} |\nabla \tilde{u}_f|^2$$

Combinant avec (1.27), nous complétons la preuve des inégalités (1.26).  $\square$

# Chapitre 2

## Calcul de valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré

### 2.1 Approche Variationnelle

Dans cette partie, Nous étudions numériquement le comportement de la première valeur propre  $\beta_1$  de l'opérateur  $T_\delta$  quand la distance  $\delta$  entre les inclusions tend vers 0. En général, il est impossible de calculer analytiquement le spectre de l'opérateur  $T_\delta : \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{W}^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ . Nous allons donc travailler avec un espace fonctionnel formé de fonctions définies dans un domaine borné  $\Omega$ . En considérant la limite  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0$ , le choix naturel de cet espace est  $\mathcal{H}_0^1(B_R)$ . Or, comme les solutions sont toutes harmoniques, Nous cherchons alors les fonctions propres dans l'espace  $\mathcal{H}_0^1(B_R) \cap \mathfrak{H}$ . D'après le chapitre précédent, les valeurs propres  $\beta_n$  sont bornées inférieurement et supérieurement par les valeurs propres  $b_n$ . Nous travaillons donc dans cet espace.

Le problème spectrale considéré est donné par :

Trouver  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathcal{H}_0^1(B_R) \cap \mathfrak{H}$  non identiquement nulle sur  $B_R$  telle que :

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(B_R) \cap \mathfrak{H}, \quad \int_D \nabla u(X) \nabla v(X) dX = \beta \int_{B_R} \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$

### 2.1.1 Cas en deux dimensions

En simulations numériques, on remplace l'espace  $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \mathfrak{H}$  par l'espace de dimension finie  $V_n^\delta$ . La définition de cet espace  $V_n^\delta$  est donnée ainsi :

**Définition 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on considère les polynômes harmoniques :

$$p_n^\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad q_n^\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \Re((x + i(y \pm y_0))^n) \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \Im((x + i(y \pm y_0))^n)$$

où  $(x_0, \pm y_0)$  sont les centres des disques, dans le cas de deux disques,  $x_0 = 0$ ,

$y_0 = 2 + \frac{\delta}{2}$ ; dans le cas d'autre géométrie,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1 + \frac{\delta}{2}$

Pour  $i \in [0; 4n + 1]$ , les fonctions de bases  $w_i$  de l'espace fonctionnelle  $V_n^\delta$  sont définies ainsi :

- les fonctions  $w_i$  sont harmoniques sur  $\Omega$
- $w_i = 0$  sur  $\partial\Omega$
- si  $i = 4j - 2, j \in [1; n]$   $w_i = 0$  sur  $\partial D_2$  et  $w_i = p_j^-$  sur  $\partial D_1$
- si  $i = 4j - 1, j \in [1; n]$   $w_i = 0$  sur  $\partial D_1$  et  $w_i = p_j^+$  sur  $\partial D_2$
- si  $i = 4j, j \in [1; n]$   $w_i = 0$  sur  $\partial D_2$  et  $w_i = q_j^-$  sur  $\partial D_1$
- si  $i = 4j + 1, j \in [1; n]$   $w_i = 0$  sur  $\partial D_1$  et  $w_i = q_j^+$  sur  $\partial D_2$
- $w_0 = 0$  sur  $\partial D_2$  et  $w_0 = 1$  sur  $\partial D_1$
- $w_1 = 1$  sur  $\partial D_2$  et  $w_1 = 0$  sur  $\partial D_1$

**Remarque 1.** La dimension de l'espace  $V_n^\delta$  est :

$$\dim(V_n^\delta) = 4n + 2$$

Les fonctions harmoniques  $w_i$  sont calculées par la résolution numérique d'un EDP en utilisant la méthode d'éléments finis. On a donc construit un espace fonctionnelle de dimension finie et contenu dans  $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \mathfrak{H}$ .

On introduit les matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{4n+2}(\mathbb{R})$  pour exprimer respectivement les quantités  $\int_D \nabla u(X) \nabla v(X) dX$  et  $\int_\Omega \nabla u(X) \nabla v(X) dX$  :

$$- \forall i, j \in [0, 4n + 1] \quad A_{i,j} = \int_D \nabla w_i(X) \nabla w_j(X) dX$$

$$- \forall i, j \in [0, 4n + 1] \quad B_{i,j} = \int_\Omega \nabla w_i(X) \nabla w_j(X) dX$$

A l'aide des matrices  $A$  et  $B$ , on peut facilement exprimer les quantités intégraux :

Pour tout  $u, v \in V_n^\delta$  (on note aussi  $u, v$  ses vecteurs de décompositions dans la base  $(w_i)_{i \in [0; 4n+1]}$  dans les expressions algébriques qui suivent), on a les identifications :

$$\langle Au, v \rangle = \int_D \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$

$$\langle Bu, v \rangle = \int_\Omega \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$



Le problème spectrale est donc transformé en un problème algébrique :  
 Trouver  $u \in \mathbb{R}^{4n+2}$  non nul et  $\beta$  tels que pour tout  $v \in \mathbb{R}^{4n+2}$ , on a :

$$\langle Au, v \rangle = \beta \langle Bu, v \rangle$$

C'est à dire, on va chercher les valeurs propres de la matrice  $M = B^{-1}A$ .

**Remarque 2.** *La matrice  $B$  ainsi définie est inversible, car les fonctions  $p_n^\pm, q_n^\pm$  sont linéairement indépendantes. Donc les solutions  $w_i$  sont aussi linéairement indépendants.*

## 2.1.2 Cas de deux disques

### Généralités

On commence par le cas où les domaines  $D_1$  et  $D_2$  sont deux disques identiques. Plus précisément, on dispose :

- $\Omega$  comme une disque centré, et de rayon  $R = 10$
- $\delta \in \mathbb{R}_+$ , ici, on a testé pour  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^7}$
- $D_1$  est la disque de rayon  $r = 2$  et de centre est  $(0, r + \frac{\delta}{2})$ .
- $D_2$  est la disque de rayon  $r = 2$  et de centre est  $(0, -r - \frac{\delta}{2})$ .
- $D = D_1 \cup D_2$

Un programme de FreeFem++ est encodé pour calculer les matrices  $A$  et  $B$  (cf annexe).

### Maillages

Quand  $\delta$  tend vers 0, l'espace entre les deux disques est réduit et le point d'origine devient un point singulier. La difficulté est de comment constituer un maillage adaptable pour  $\delta$  de plus en plus petit. Évidemment, on peut raffiner le maillage de manière homogène sur les deux disques. Cette méthode, cependant, est très couteuse quand le maillage devient extrêmement fin. En effet, quand  $\delta$  devient petit, seule la partie au voisinage du point de contact est importante. Il faut donc mailler chaque disque différemment. Pour régler ce problème, on sépare chaque cercle en deux arcs : un petit arc se positionne près du point de contact et l'autre grand arc est en contre sens (cf. la Figure 2.1, petit arc  $\widehat{M_1M_2}$  et  $\widehat{N_1N_2}$  ainsi que ses complémentaires  $\widehat{M_2M_1}$  et  $\widehat{N_2N_1}$ ). La longueur du petit arc (i.e. l'angle  $\theta$ ) est telle que : la largeur entre deux points correspondent sur les disques respectivement (i.e. la longueur du segment  $\overline{M_1N_1}$  ou  $\overline{M_2N_2}$ ) soit égale à  $k\delta$ . Donc, l'angle  $\theta$  vérifie :

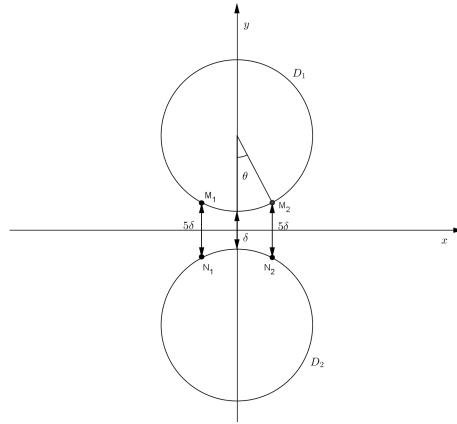
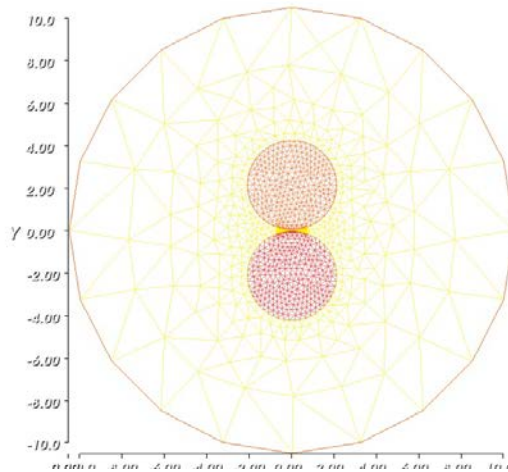


FIGURE 2.1 –

$\theta = \arccos\left(1 - \frac{(k-1)\delta}{2r}\right)$ . (Dans les calculs numériques nous avons  $k = 5$ )

Nous mettons deux conditions sur les deux arcs : sur le petit arc,  $\delta$  soit 4 fois de la largeur du maillage et sur le grand arc, la largeur du maillage est fixée comme s'il y ait 60 points sur un cercle. Les figures suivantes montrent un exemple de maillage pour  $\delta = \frac{1}{16}$ .

FIGURE 2.2 – maillage pour  $\delta = \frac{1}{16}$

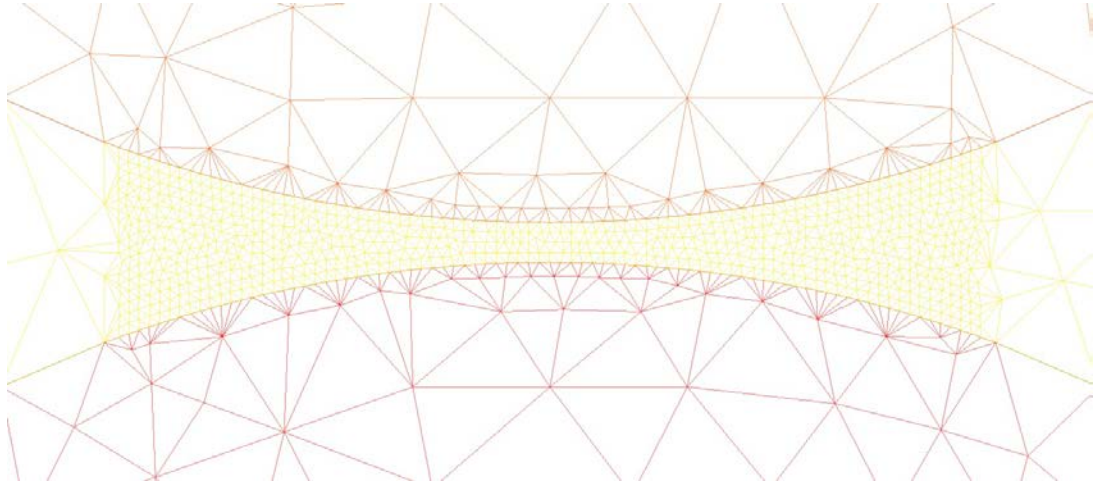


FIGURE 2.3 – Le maillage autour du point de contact

**Résultats** Puisque les inclusions sont des disques, nous avons :

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} C|x|^2$$

Donc, en traçant le graphe de  $\delta \rightarrow \log(\delta) - \log(\beta_n^{\delta,+})$  ou le graphe de  $\delta \rightarrow \log(\delta) - \log(1 - \beta_n^{\delta,-})$ , la courbe théorique sera une droite avec une pente  $\frac{1}{2}$ . Pour chaque valeur de la distance  $\delta$ , nous calculons les matrices  $A$  et  $B$  par le programme codé en FreeFem++. Or, comme le logiciel FreeFem++ n'est pas destiné à calculer les opérations algébriques, nous utilisons Scilab pour calculer le spectre de la matrice  $M = B^{-1}A$ . Les résultats que nous avons obtenus sont des valeurs comprises entre 0 et 1. Voici un exemple des valeurs propres trouvées pour  $\delta = \frac{1}{8}$  :(triée dans l'ordre décroissant)

```

0.8149939
0.8117809
0.7404554
.
.
.
0.5327617
0.5223745
0.5182635
.
.
.
0.2403608

```

0.2386555  
 0.0536951  
 0.0145724

D'abord, nous pouvons observer la première valeur propre proche de 0, qui correspond effectivement à la valeur théorique 0. Ensuite, les dernières valeurs trouvées sont toutes proches de  $\frac{1}{2}$ , ce qui est conforme à la théorie [4] ( $\frac{1}{2}$  est l'unique point d'accumulation du spectre de l'opérateur  $T_\delta$ ). Nous retrouvons aussi les valeurs propres dans  $]\frac{1}{2}, 1]$ . Nous considérons ici la plus grande valeur trouvée correspondante à la valeur propre  $\beta_1^{\delta,-}$ , nous traçons donc le graphe  $\delta \rightarrow \log(\delta) - \log(1 - \beta_1^{\delta,-})$ .

La figure 2.4 représente l'évolution de la quantité  $\log(1 - \beta_1^{\delta,-})$  par rapport du log de la distance  $\log(\delta)$ . A l'aide du calcul de la régression linéaire aux derniers six points, nous obtenons une droite d'équation :

$$y = -0.8575362 + 0.4045268x$$

Ce résultat est conforme à la théorie [4].

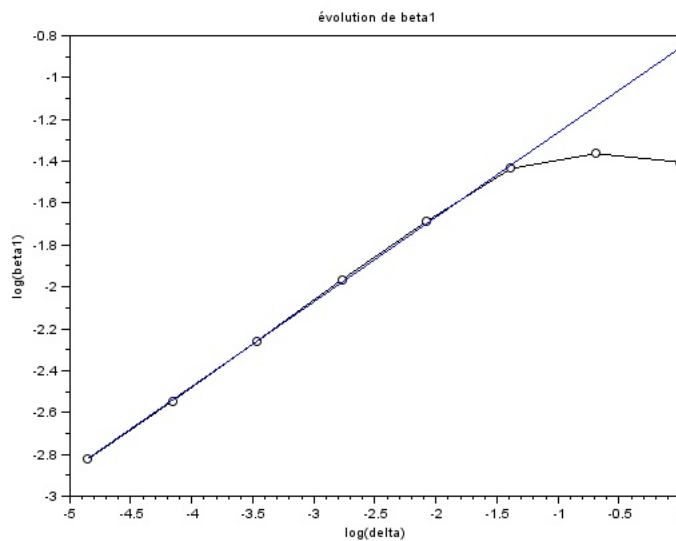


FIGURE 2.4 – évolution de la valeur propre  $\beta_1$

**Influence de la dimension de l'espace fonctionnelle  $V_n$**  Il est connu que, plus la dimension de l'espace  $V_n$  est grande, plus les résultats numériques s'approchent des résultats théoriques. Nous avons étudié plusieurs cas

pour différentes valeurs de  $n$ . Ces résultats montrent que la pente de la droite augmente et tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $n$  augmente.

Le tableau suivant présente les équations de la droite obtenues pour différentes valeurs de  $n$  en utilisant le calcul de régression linéaire :

Valeur de $n$	équation de la droite
$n = 9$	$y = -1.09526 + 0.2486835x$
$n = 19$	$y = -0.9099896 + 0.3700286x$
$n = 29$	$y = -0.8575362 + 0.4045268x$
$n = 39$	$y = -0.7934156 + 0.4307516x$

Nous présentons ainsi le graphe : Figure 2.5

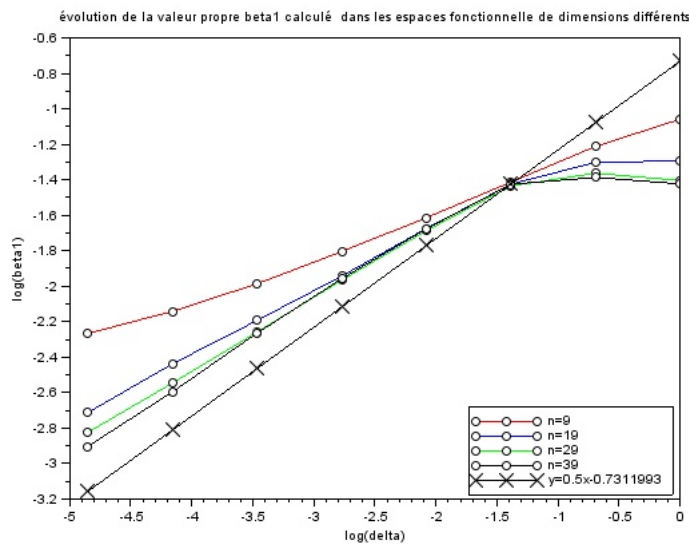


FIGURE 2.5 – Les résultats trouvés pour des différentes valeurs de  $n$  (dimension de l'espace fonctionnel où on cherche les solutions)

### 2.1.3 Point de contact d'ordre $m > 2$

Nous étudions ici les cas de courbes  $\psi_1(x) + \psi_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} |x|^m$  avec valeurs différentes de  $m$ . Pour chaque valeur  $m$ , nous construisons les domaines  $D_1$  et  $D_2$  satisfaisants la condition  $\psi_1(x) + \psi_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} |x|^m$ .

Nous proposons donc des fonctions

$$\begin{aligned} f_m &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|^m + \delta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_m &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -|x|^m - \delta \end{aligned}$$

pour  $-1 \leq x \leq 1$ .

Puis nous les complétons par des demi-disques : les domaines  $D_1$  et  $D_2$  sont ainsi définis par : (cf. Figure 2.6)

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, |x|^m + \delta \leq y \leq 1 + \delta\} \\ &\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y - 1 - \delta)^2 \leq 1, y \geq 1 + \delta\} \end{aligned}$$

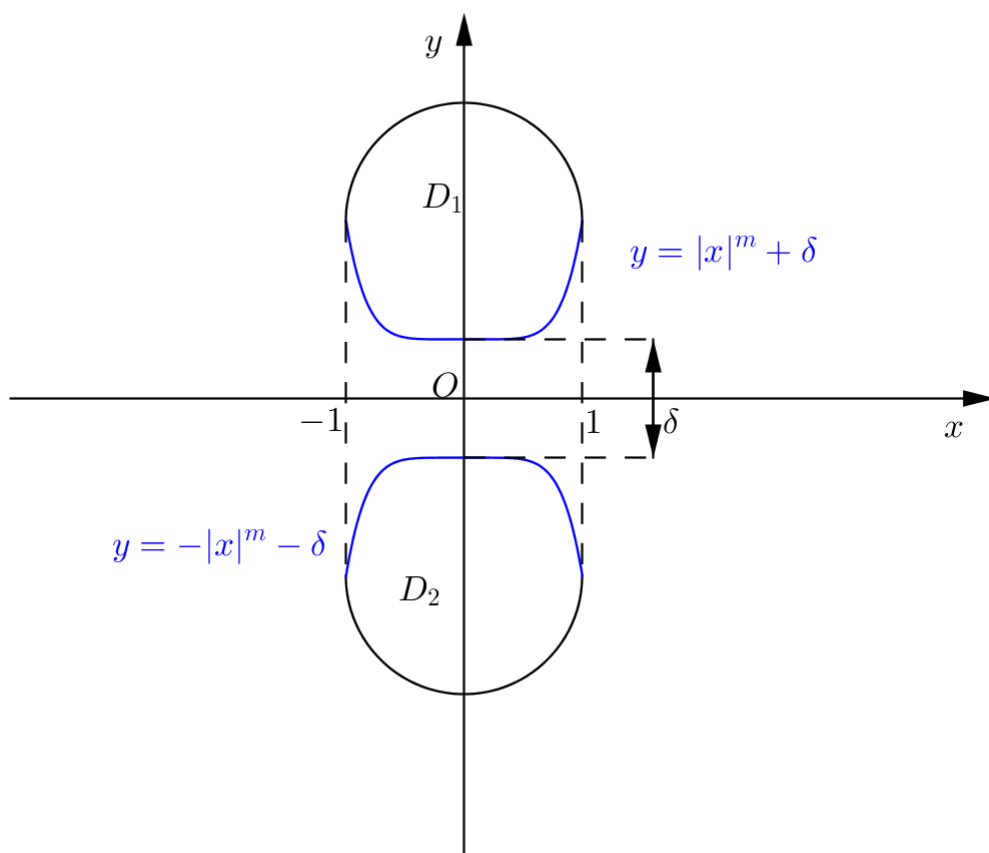
et

$$\begin{aligned} D_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, -|x|^m - \delta \geq y \geq -1 - \delta\} \\ &\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y + 1 + \delta)^2 \leq 1, y \leq -1 - \delta\} \end{aligned}$$

En appliquant le même principe de maillage et de construction des fonctions de base, nous avons codé un programme de FreeFem++ pour calculer les matrices  $A$  et  $B$  (cf. Annexe). Pour bien illustrer le théorème indiquant le comportement asymptotique des valeurs propres, nous avons testé les cas  $m = 6$  et  $m = 9$ . Les valeurs théoriques des pentes de la droite  $\log(\delta) - \log(\beta_1)$  sont respectivement  $\frac{5}{6}$  et  $\frac{8}{9}$ .

**Résultats** Les Figures suivantes (Figure 2.7, 2.8) montrent les évolutions des valeurs propres  $\beta_1$  pour les valeurs de  $\delta$  variant de  $\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{2^7}$ . Dans la Figure 2.9, nous présentons la comparaison des évolutions des valeurs propres selon les géométries différentes. Nous observons ici que les pentes des droites tangentes sont croissantes quand  $\delta$  diminue. Nous donnons aussi les équations de la droite asymptotique, qui sont obtenues en reliant les deux derniers points de chaque courbe.

$m$	équation de la droite	Pente théorique	Erreur
$m = 2$	$y = -0.7934156 + 0.4307516x$	$\frac{1}{2} = 0.5$	0.0692484
$m = 6$	$y = -0.1401772 + 0.8003479x$	$\frac{5}{6} \simeq 0.83$	0.03298543
$m = 9$	$y = -0.2357561 + 0.8508496x$	$\frac{8}{9} \simeq 0.89$	0.03803929

FIGURE 2.6 – Les domaines  $D_1$  et  $D_2$  pour une valeur de  $m > 2$

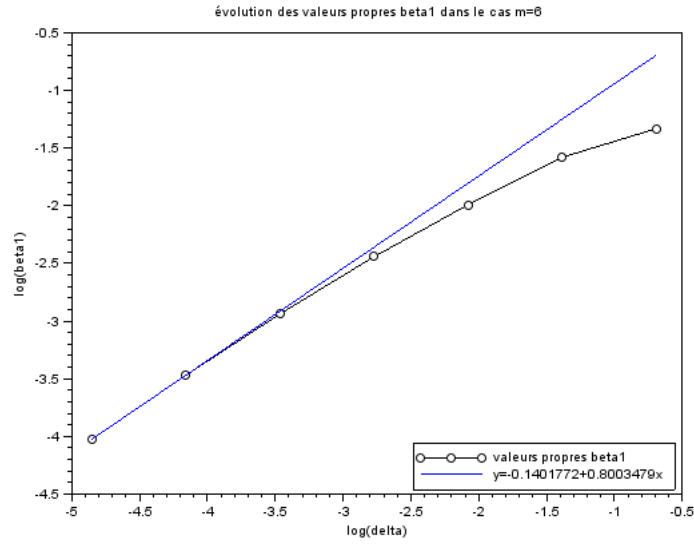


FIGURE 2.7 – cas  $m = 6$

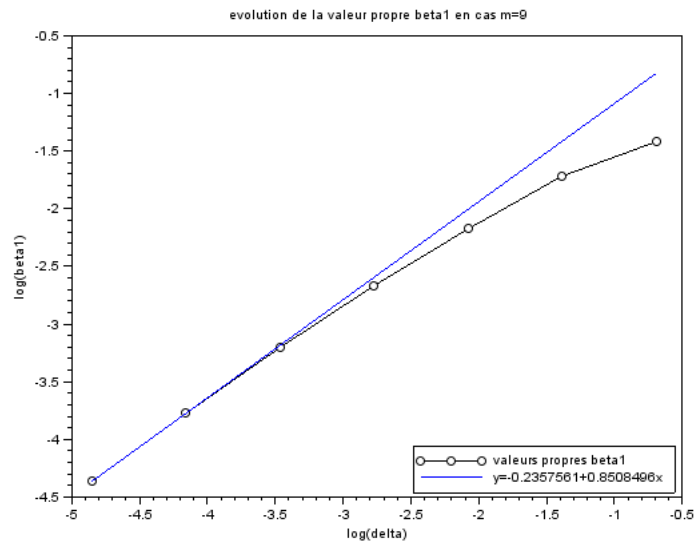


FIGURE 2.8 – cas  $m = 9$



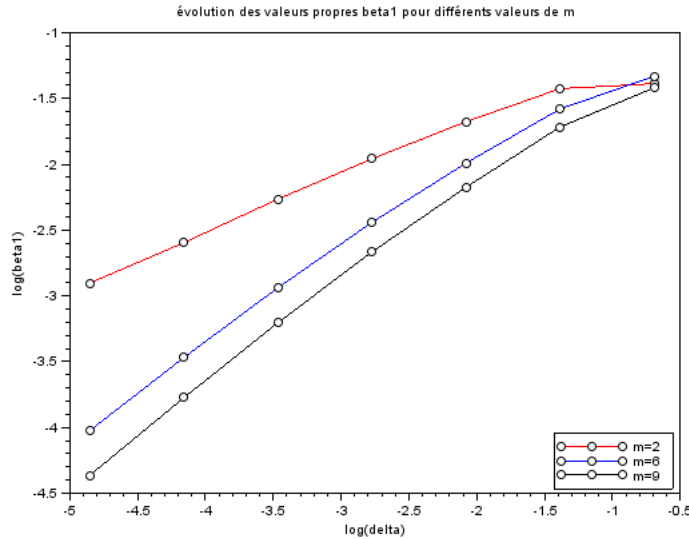


FIGURE 2.9 – Comparaison entre des valeurs différentes de  $m$  ( $m = 2$ ;  $m = 6$ ;  $m = 9$ )

### 2.1.4 Cas en dimension trois

En dimension trois, nous appelons toujours  $T_\delta$  l'opérateur du problème variationnel de Poincaré-Neumann et  $\beta_n^\pm$  ses valeurs propres :

**Définition 6.** Pour tout  $u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^3)$ , d'après le théorème de Riesz, il existe une fonction unique  $T_\delta u \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^3)$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{W}_0^{1,-1}(\mathbb{R}^3)$  :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla T_\delta u(X) \nabla v(X) dX = \int_D \nabla u(X) \nabla v(X) dX$$

Les valeurs propres de l'opérateur  $T_\delta$  sont comprises dans  $[0, 1]$  et  $\frac{1}{2}$  est l'unique point d'accumulation. On note

$$0 = \beta_0^{\delta,+} < \beta_1^{\delta,+} < \dots < \beta_n^{\delta,+} < \frac{1}{2}$$

et

$$1 = \beta_0^{\delta,-} > \beta_1^{\delta,-} > \dots > \beta_n^{\delta,-} > \frac{1}{2}$$

Nous n'avons pas encore la théorie qui décrit l'évolution des valeurs propres  $\beta_n^{\delta,-}$  de l'opérateur  $T_\delta$  quand  $\delta$  tend vers 0 .

Nous effectuons des calculs numériques similaires dans le cas de dimension trois. Nous disposons des hypothèses suivantes :

- $\Omega$  est une boule centré, et de rayon  $R = 10$
- $\delta \in \mathbb{R}_+$ , ici, on a testé pour  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^6}$
- $D_1$  est la boule de rayon  $r = 2$  et de centre  $(0, r + \frac{\delta}{2}, 0)$ .
- $D_2$  est la boule de rayon  $r = 2$  et de centre  $(0, -r - \frac{\delta}{2}, 0)$ .

Nous cherchons les valeurs propres et les fonctions propres harmoniques dans l'espace discrétisé  $V_L^\delta$  de l'espace fonctionnel  $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \mathfrak{H}$ .

**Définition 7.** Soit  $L \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l \leq L$ , et  $0 \leq m \leq l$ , on considère les fonctions harmoniques sphériques  $Y_l^m$  :

Les fonctions  $Y_l^m$  sont les fonctions propres de l'opérateur Neumann-Poincaré associée à une boule de  $\mathbb{R}^3$ .

Les fonctions de base  $w_i$  de l'espace fonctionnelle  $V_L^\delta$  sont définies ainsi :

- $w_i$  sont harmoniques dans  $\Omega$
- $w_i = 0$  sur  $\partial\Omega$
- Ou bien  $w_i = 0$  sur  $\partial D_1$  et  $w_i = \Re(Y_l^m)$  sur  $\partial D_2$  (avec les coefficients  $l, m$  correspondants)
- Ou bien  $w_i = \Re(Y_l^m)$  sur  $\partial D_1$  et  $w_i = 0$  sur  $\partial D_2$  (avec les coefficients  $l, m$  correspondants)
- Ou bien  $w_i = 0$  sur  $\partial D_1$  et  $w_i = \Im(Y_l^m)$  sur  $\partial D_2$  (avec les coefficients  $l, m$  correspondants)
- Ou bien  $w_i = \Im(Y_l^m)$  sur  $\partial D_1$  et  $w_i = 0$  sur  $\partial D_2$  (avec les coefficients  $l, m$  correspondants)

**Remarque 3.** La dimension de l'espace  $V_L^\delta$  est :

$$\dim V_L^\delta = N = 2L^2 + 4L + 2$$

Par l'analogie avec la dimension deux, nous calculons les matrices  $A$  et  $B$  :

$$\begin{aligned} - \forall i, j \in [1, N] \quad A_{i,j} &= \int_D \nabla w_i(X) \nabla w_j(X) dX \\ - \forall i, j \in [1, N] \quad B_{i,j} &= \int_\Omega \nabla w_i(X) \nabla w_j(X) dX \end{aligned}$$

Nous avons utilisé de FreeFem++ pour engendrer les matrices  $A$  et  $B$  (cf. Annexe). Nous pourrions donc obtenir les valeurs propres en calculant le spectre de  $M = B^{-1}A$ . Pour illustrer la dépendance des valeurs propres en fonction de  $\delta$ , nous traçons le graphe  $\delta \rightarrow \frac{1}{|\log(\delta)|} - (1 - \beta_1^\delta)$ . La Figure 2.1.4 donne les calculs avec  $L = 5$  :

D'après ce résultat numérique, nous proposons une loi décrivant le comportement asymptotique pour le cas de deux boules :

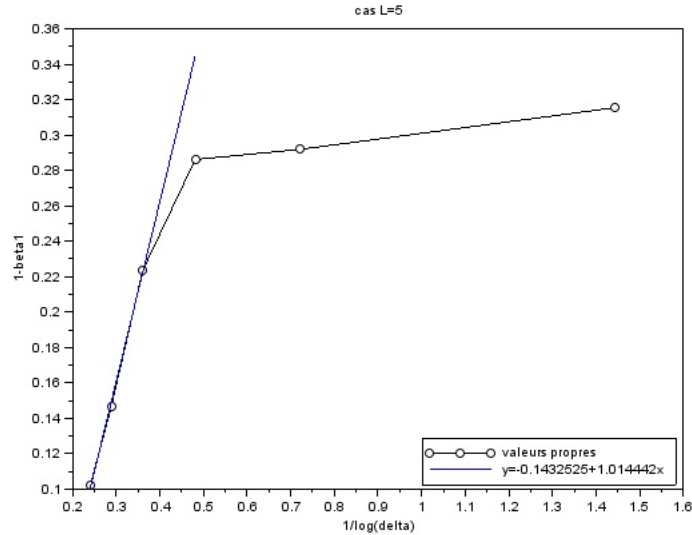


FIGURE 2.10 – L'évolution asymptotique des valeurs propres pour le cas  $L = 5$  en dimension trois

**Conjecture 1** (Comportement asymptotique des valeurs propres en cas de deux boules). *Les valeurs propres  $\beta_n^-$  de l'opérateur  $T_\delta$  ont le comportement asymptotique suivant, quand  $\delta \rightarrow 0$  :*

$$1 - \beta_n^{\delta,-} \sim \frac{1}{|\log(\delta)|}$$

La méthode variationnelle n'est pas assez performante en dimension trois car il faut raffiner de plus en plus et ça demande beaucoup mémoire avec un temps de calcul important. Nous proposons donc une autre méthode numérique.

## 2.2 Approche équations intégrales

Nous présentons ici les résultats numériques du comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré quand les deux domaines s'approchent.

## 2.2.1 Cas en deux dimensions

### 2.2.2 Approche (1)

Soient  $\partial D_l = \{(x_1^l(t), x_2^l(t)), 0 \leq t < 2\pi\}$  ( $l = 1, 2$ ) deux domaines de  $\mathcal{C}^2$  et de frontières paramétrées par les fonctions  $x_1^l$  et  $x_2^l$ . Nous supposons que  $|x_1^l(t)|^2 + |x_2^l(t)|^2 > 0$  pour tout  $0 \leq t < 2\pi$  et que  $x_1^l(0) = x_1^l(2\pi)$ ,  $x_2^l(0) = x_2^l(2\pi)$ . Nous discrétisons l'intervalle  $[0, 2\pi[$  en  $N \in \mathbb{N}$  points :  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N < 2\pi$ . En appliquant la méthode de collocation, nous projetons l'opérateur  $K^*$  sur l'espace  $L_N = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_N)$  où  $u_i$  désigne la fonction affine périodique qui vaut 1 en  $t_i$  et s'annule sur  $t_j \quad \forall j \neq i$ . Nous obtenons donc la formule d'approximation :

$$K_l^*[\varphi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \kappa(x, y) \varphi(y) d\sigma(y) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \kappa(x, t_n) \varphi(t_n) v_n^l \Delta t_n \quad (2.1)$$

où  $v_n^l = \sqrt{|x_1^l(t_n)|^2 + |x_2^l(t_n)|^2}$  et  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  (si  $n = N$ ,  $\Delta t_N = 2\pi - t_N$ ). Nous notons en plus  $\Delta s^l = \max_n \{v_n^l \Delta t_n\}$

Il suffit donc de calculer le spectre de la matrice  $M_l$  ou  $L_l$  associée à l'opérateur  $K^*$  à l'aide de la formule (2.1). Les coefficients de cette matrice sont alors :

$$M_l = (m_{i,j}^l)_{1 \leq i,j \leq N}, \quad m_{i,j}^l = \tilde{\kappa}(t_i, t_j) v_j \Delta t_j$$

Ici,  $\tilde{\kappa}(t, \tau) = \kappa(x, y)$  avec  $x = (x_1^l(t), x_2^l(t))$  et  $y = (x_1^l(\tau), x_2^l(\tau))$ .

**Lemme 2.** *Pour tout  $x \in \partial D$ , la fonction  $\kappa$  se prolonge par continué en  $(x, x)$  et admet une limite :  $\kappa(x, x) = \frac{1}{2}H(x)$ , où  $H(x)$  est la courbure de la courbe  $\partial D_l$  en point  $x$ .*

*Démonstration.* Nous posons  $x = (x_1^l(t), x_2^l(t)) \in \partial D_l$  et  $y = (x_1^l(\tau), x_2^l(\tau)) \in \partial D_l$ . Comme les fonctions  $x_1^l$  et  $x_2^l$  sont supposées de  $\mathcal{C}^2$ , quand  $\tau \rightarrow t$  nous avons :

$$x_i^l(\tau) = x_i^l(t) + (\tau - t)(x_i^l)'(t) + \frac{1}{2}(\tau - t)^2(x_i^l)''(t) + o((\tau - t)^2)$$

pour  $i = 1, 2$

$$\text{Or, } \nu_x = \frac{((x_2^l)'(t), -(x_1^l)'(t))}{\sqrt{|(x_1^l)'(t)|^2 + |(x_2^l)'(t)|^2}}$$

$$\text{Donc, } \langle x - y, \nu_x \rangle = \frac{1}{2}(\tau - t)^2 \frac{((x_1^l)''(t)(x_2^l)'(t) - (x_2^l)''(t)(x_1^l)'(t))}{\sqrt{|(x_1^l)'(t)|^2 + |(x_2^l)'(t)|^2}} + o((\tau - t)^2)$$

$$\text{Ainsi, } |x - y|^2 = (\tau - t)^2 (|(x_1^l)'(t)|^2 + |(x_2^l)'(t)|^2) + o((\tau - t)^2)$$

D'où :  $\kappa(x, y) = \frac{1}{2} \frac{(x_1^l)''(t)(x_2^l)'(t) - (x_2^l)''(t)(x_1^l)'(t)}{(|(x_1^l)'(t)|^2 + |(x_2^l)'(t)|^2)^{3/2}} + o(1)$  quand  $y \rightarrow x$

i.e.  $\lim_{y \rightarrow x} \kappa(x, y) = \frac{1}{2} H(x)$  □

Donc, en notant  $X_i^l = (x_1^l(t_i), x_2^l(t_i))$  les coefficients de la matrice associée à l'opérateur  $K_l^*$  ou à  $L_l$  sont :

$$\begin{cases} M_l(i, j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle X_i^l - X_j^l, \nu_{X_i^l} \rangle}{|X_i^l - X_j^l|^2} v_j^l \Delta t_j & i \neq j \\ M_l(i, i) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} H(X_i^l) v_i^l \Delta t_i \\ L_1(i, j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle X_i^1 - X_j^2, \nu_{X_i^1} \rangle}{|X_i^1 - X_j^2|^2} v_j^2 \Delta t_j \\ L_2(i, j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle X_i^2 - X_j^1, \nu_{X_i^2} \rangle}{|X_i^2 - X_j^1|^2} v_j^1 \Delta t_j \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous pourrions maintenant déduire que la matrice associée à l'opérateur  $\mathcal{K}^*$  s'écrit  $\begin{pmatrix} M_1 & L_1 \\ L_2 & M_2 \end{pmatrix}$ . Nous présenterons les résultats numériques des valeurs propres de cette matrice ultérieurement.

Notre objectif principal est d'étudier numériquement le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré quand les deux domaines s'approchent. Afin d'avoir une approximation numérique proche des résultats théoriques, il faut que la distance entre les deux domaines soit grande par rapport à la taille de maillage au voisinage du point de contact. Nous avons pu résoudre ce problème en approche variationnelle (chapitre précédent) en utilisant une méthode spécifique de maillage. De même, les coefficients des matrices extra-diagonaux  $L_1, L_2$  établis dans la formule (2.2) ne sont justifiés que sous cette hypothèse. Donc, nous proposons aussi de raffiner la discrétisation selon les valeurs de  $\delta > 0$ . D'après les calculs que nous avons effectués, l'approche équations intégrales est plus efficace que l'approche variationnelle. Malgré cette efficacité, le temps de calcul reste considérable si nous continuons à raffiner le maillage. Nous proposons dans la suite une autre méthode d'approximation pour évaluer les coefficients des matrices  $L_1$  et  $L_2$ . Elle consiste à

- i garder un maillage uniforme indépendant de la valeur de  $\delta$ . Dans ce cas les termes diagonaux reste inchangés pendant l'analyse asymptotique.
- ii utiliser l'analyse asymptotique pour extraire la singularité des points voisins proche du point de contact (les termes extra-diagonaux).

### 2.2.3 Approche (2)

**Théorème 6.** Soit  $x \in \partial D_1$ ,  $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D_2)$  une densité avec  $0 < \alpha < 1$ .

Alors, la dérivé du potentiel du simple couche  $\frac{\partial}{\partial \nu_1} S_2[\varphi](x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_2} \frac{\langle x-y, \nu_x \rangle}{|x-y|^2} \varphi(y) d\sigma(y)$  admet une limite quand  $(x - \tilde{x}) \vec{e} \rightarrow 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \nu_1} S_2[\varphi](x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_2} \frac{\langle \tilde{x}-y, \nu_x \rangle}{|\tilde{x}-y|^2} \varphi(y) d\sigma(y) + \frac{1}{2} \langle \nu_{\tilde{x}}, \nu_x \rangle \varphi(\tilde{x}) \quad (2.3)$$

où  $\tilde{x}$  est la projection du point  $x$  sur la surface  $\partial D_2$

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin de ce Lemme :

**Lemme 3.** Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine de  $C^2$  et de frontière  $\partial D$ . Soit  $\phi$  une fonction continument dérivable sur  $\bar{D}$ . Alors,

$$\int_{\partial D} \langle \nabla \phi, \tau \rangle \tau d\sigma = - \int_{\partial D} \phi H \nu d\sigma \quad (2.4)$$

où  $\tau$  désigne le vecteur tangent unité.

Nous donnons ici une démonstration du Théorème 6 en s'inspirant des résultats de [8].

*Démonstration.* Nous commençons par le cas où la densité  $\varphi = 1$ . Notons  $\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x-y|)$  le noyau de l'opérateur de simple couche en dimension deux, et  $w(x) = \int_{\partial D_2} \Phi(x, y) d\sigma(y)$  le potentiel de simple couche.

En utilisant la relation de symétrie :

$$\nabla_x \Phi(x, y) = -\nabla_y \Phi(x, y)$$

nous avons donc :  $\nabla w = U + V$  où

$$U := - \int_{\partial D_2} \langle \nabla_y \Phi(x, y), \tau_y \rangle \tau_y d\sigma(y)$$

et

$$\begin{aligned} V &:= - \int_{\partial D_2} \langle \nabla_y \Phi(x, y), \nu_y \rangle \nu_y d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial D_2} \nu_y \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) \end{aligned}$$

avec  $\tau_y, \nu_y$  désignent respectivement le vecteur tangent et le vecteur normale en un point  $y$ .

$V$  s'écrit donc comme un potentiel de double couche avec une densité  $\nu_y$ . D'après la relation de saut pour le potentiel de double couche (1.12), nous avons la valeur limite de  $V$  quand le point  $x$  tend vers la surface  $\partial D_2$  :

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &= \left(\frac{1}{2}I - K_{\partial D_2}\right)[\nu_y](\tilde{x}) \\ &= \frac{1}{2}\nu_{\tilde{x}} - \frac{1}{2\pi} \int_{D_2} \frac{\langle \tilde{x} - y, \nu_y \rangle}{|\tilde{x} - y|^2} \nu_y d\sigma(y) \end{aligned}$$

Or, d'après l'identité du Lemme 3, nous avons :

$$U(x) = \int_{\partial D} H(y)\nu(y)\Phi(x, y)d\sigma(y)$$

il s'agit donc d'un potentiel de simple couche avec une densité  $H\nu$ , en utilisant la relation de saut pour le potentiel de simple couche (1.9), nous avons pour  $\tilde{x} \in \partial D_2$ ,

$$U(\tilde{x}) = \int_{\partial D} H(y)\nu(y)\Phi(\tilde{x}, y)d\sigma(y)$$

Nous avons donc démontré (2.3) pour la densité constante  $\varphi = 1$ .

Pour une densité  $\varphi$  quelconque, la démonstration se fait par analogie en posant :

$$\nabla u(x) = \varphi(z)\nabla w(x) + W(x)$$

avec

$$W(x) := \int_{\partial D_2} \nabla_x \Phi(x, y)[\varphi(y) - \varphi(z)]d\sigma(y)$$

□

## 2.2.4 Résultats : Cas de deux disques

**Généralités** Nous commençons par le cas où les domaines  $D_1$  et  $D_2$  sont deux disques identiques. Nous surpassons :

- $\delta \in \mathbb{R}_+$ , nous avons testé pour  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^7}$
- $D_1$  est la disque unité, centré en  $(0, 1 + \frac{\delta}{2})$ .
- $D_2$  est la disque unité, centré en  $(0, -1 - \frac{\delta}{2})$ .

Nous utilisons ici le maillage :  $t_n = \frac{2\pi n}{1000}$ , pour  $n = 0, 1, \dots, 999$ .

Dans ce cas, nous avons :

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} C|x|^2$$

Donc, en traçant le graphe de  $\delta \rightarrow \log(\delta) - \log\left(\frac{1}{2} - \lambda_n^{\delta,+}\right)$ , la courbe théorique sera une droite avec une pente  $\frac{1}{2}$ .

La Figure 2.11 représente l'évolution de la quantité  $\log\left(\frac{1}{2} - \lambda_1^{\delta,+}\right)$  par rapport du log de la distance  $\log(\delta)$ . Nous traçons la ligne droite qui passe les deux dernières valeurs, nous avons obtenu une droite d'équation :

$$y = -0.341 + 0.447x$$

Ce résultat est conforme avec la théorie [4].

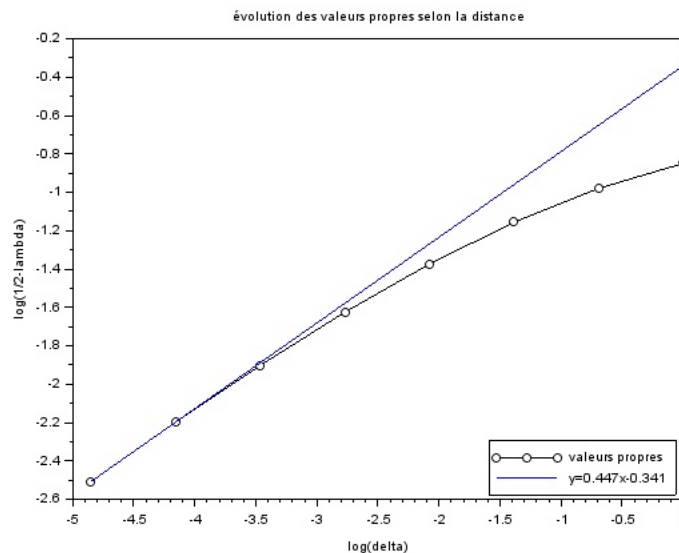


FIGURE 2.11 – évolution de la première valeur propre

### 2.2.5 Point de contact d'ordre $m > 2$

Comme les études par l'approche variationnelle, nous disposons des mêmes domaines d'ordre  $m$  (cf. Figure 2.6). Nous traçons ici les courbes  $\log(\delta) - \log\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)$ . Les Figures suivantes (Figure 2.12,2.13,2.14) illustrent les évolutions des valeurs propres  $\lambda_1^{\delta,+}$  pour des distances  $\delta$  variant de 1 à  $\frac{1}{2^7}$ . Dans la Figure 2.15, nous présentons la comparaison des évolutions des valeurs propres selon des géométries différentes. Nous observons ici que les pentes des droites tangentes sont croissantes et tendent vers la valeur théorique



quand  $\delta$  tend vers zéro. Nous donnons ici les équations de la droite en reliant les deux derniers points de chaque courbe.

$m$	équation de la droite	Pente théorique	Erreur
$m = 2$	$y = -0.341 + 0.447x$	$\frac{1}{2} = 0.5$	0.053
$m = 3$	$y = -0.0676 + 0.606x$	$\frac{2}{3} \approx 0.66$	0.061
$m = 6$	$y = -0.147 + 0.783x$	$\frac{3}{4} \approx 0.83$	0.05
$m = 9$	$y = -0.213 + 0.84x$	$\frac{8}{9} \approx 0.89$	0.048

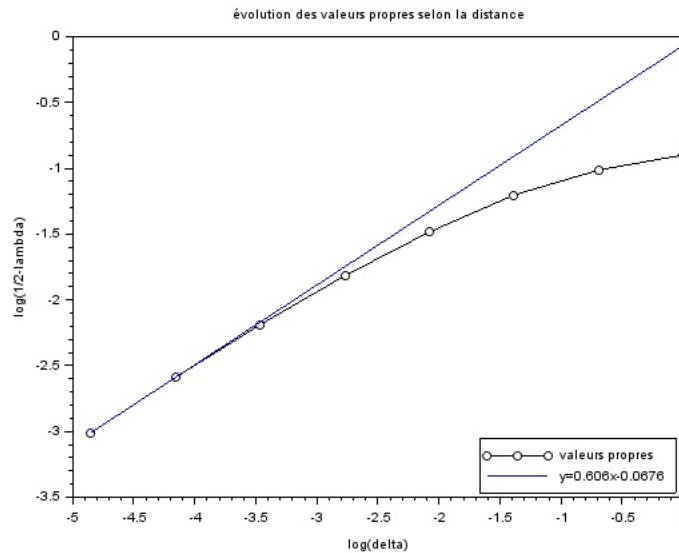


FIGURE 2.12 – cas  $m = 3$

## 2.2.6 Illustration numérique de la méthode (2)

Nous présentons ici les résultats numériques dans le cas où  $\delta$  est très petit, en appliquant la méthode approximative expliquée en (2.3). Nous utilisons ici le maillage :  $t_n = \frac{2\pi n}{100}$ , pour  $n = 0, 1, \dots, 99$ , et les distances choisies :

$$\delta = \frac{1}{2^8}, \frac{1}{2^9}, \dots, \frac{1}{2^{15}}.$$

Nous en déduisons donc une formule légèrement différente que (2.2) dont les

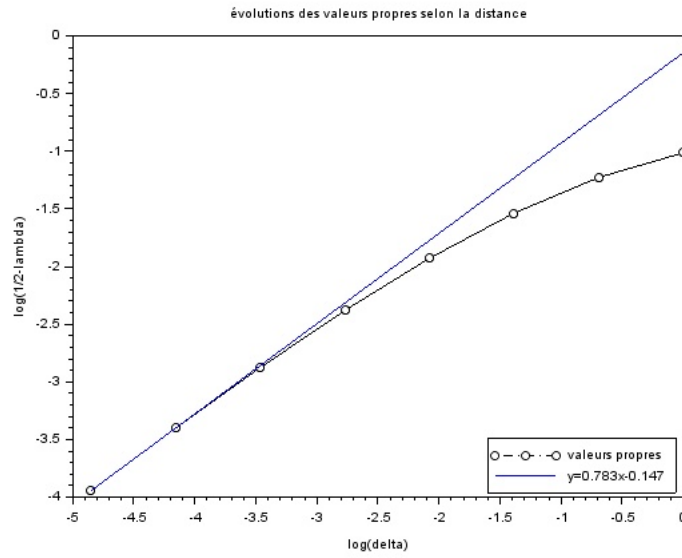


FIGURE 2.13 – cas  $m = 6$

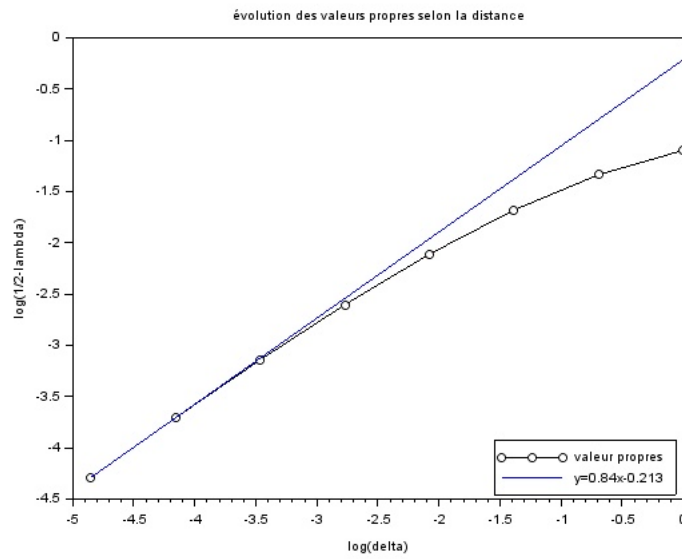


FIGURE 2.14 – cas  $m = 9$

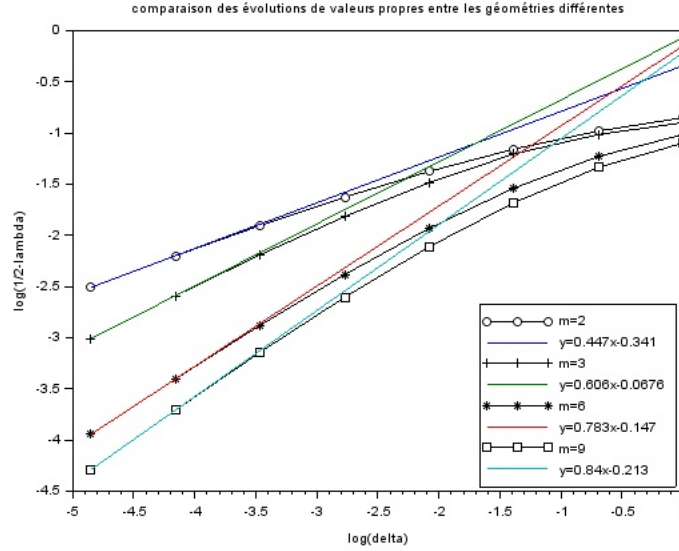


FIGURE 2.15 – Comparaison entre des valeurs différentes de  $m$  ( $m = 2$ ;  $m = 6$ ;  $m = 9$ )

termes extra-diagonaux sont définis par :

$$\begin{cases}
 L_1(i, j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle X_i^1 - X_j^2, \nu_{X_i^1} \rangle}{|X_i^1 - X_j^2|^2} v_j^2 \Delta t_j & \text{si } |X_i^1 - X_j^2| > \Delta s \\
 L_1(i, j) = \frac{1}{2} \langle \nu_{X_i^1}, \nu_{X_j^2} \rangle - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} H(X_j^2) v_j^2 \Delta t_j & \text{si } |X_i^1 - X_j^2| < \Delta s \\
 L_2(i, j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\langle X_j^2 - X_i^1, \nu_{X_j^2} \rangle}{|X_j^2 - X_i^1|^2} v_i^1 \Delta t_i & \text{si } |X_i^1 - X_j^2| > \Delta s \\
 L_2(i, j) = \frac{1}{2} \langle \nu_{X_j^2}, \nu_{X_i^1} \rangle - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} H(X_i^1) v_i^1 \Delta t_i & \text{si } |X_i^1 - X_j^2| < \Delta s
 \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous montrons en Figure 2.16 que le comportement asymptotique calculé par cette méthode reste fiable quand  $\delta$  tend vers zéro. Nous avons obtenu en calculant la régression linéaire une droite d'équation :  $y = -1.55 + 0.509x$

## 2.2.7 Cas en dimension trois

Contrairement à la dimension deux, la méthode de collocation en dimension trois avec raffinement devient rapidement très compliquée. Pour réaliser la simulation numérique, nous proposons l'utilisation d'une méthode basée sur une grille uniforme avec une approximation asymptotique ad-hoc. La

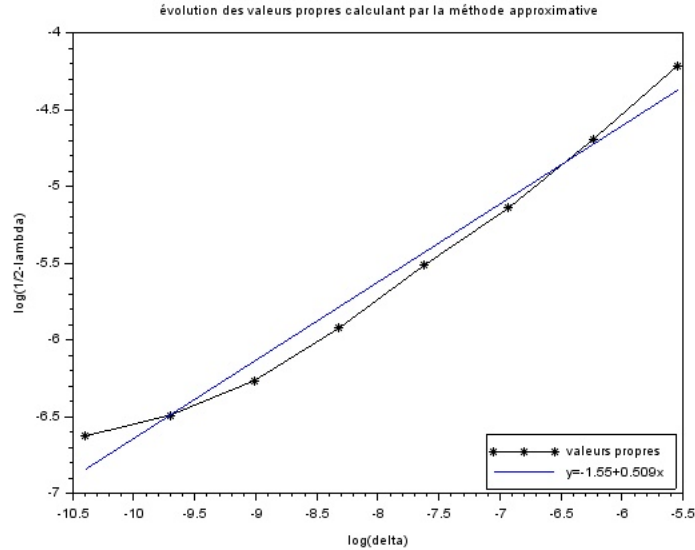


FIGURE 2.16 – évolution des valeurs propres calculées par la méthode approximative

grille uniforme est inspirée d'une méthode utilisée pour une seule inclusion [2].

## 2.2.8 Préliminaire

Nous utilisons une triangulation sur une surface  $\partial D$  régulière par morceaux. Ici, une surface régulière par morceaux signifie que : pour tout point  $P \in \partial D$ , il existe une paramétrisation de classe  $\mathcal{C}^6$  de  $\mathbb{R}^2$  dans un voisinage de  $P$ . La triangulation est décrite par la division :

$$\partial D = \bigsqcup_{1 \leq k \leq N} \Delta_k$$

La taille du maillage est définie :

$$\delta_N = \max_{1 \leq k \leq N} \text{diam}(\Delta_k)$$

avec

$$\text{diam}(\Delta_k) = \max_{p, q \in \Delta_k} |p - q|$$

Nous notons  $\sigma$  la triangle unité sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\sigma = \{(s, t) | 0 \leq s, t, s + t \leq 1\}$$

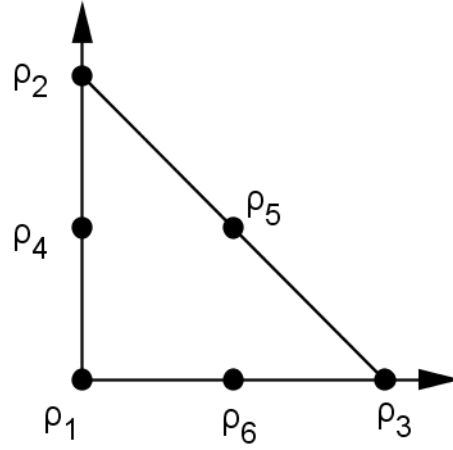


FIGURE 2.17 – La triangle unité

Nous notons  $\rho_1, \dots, \rho_6$  les sommets et les points médians de ce triangle (cf. Figure 2.17). Nous introduisons de mêmes les nœuds sur chaque triangle  $\Delta_k$  :

$$v_{j,k} = m_k(\rho_j) \quad j = 1, \dots, 6$$

où  $m_k$  désigne la paramétrisation dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\Delta_k$ .

Conventionnellement, ces nœuds sont aussi notés :

$$\{v_i \mid 1 \leq i \leq N_v\}$$

avec  $N_v = 6N$  désigne le nombre de nœuds.

Nous définissons ensuite les fonctions de bases d'interpolation dans  $\sigma$ .

**Définition 8.** Posant  $u = 1 - (s + t)$ , nous définissons :

$$l_1(s, t) = u(2u - 1)$$

$$l_2(s, t) = t(2t - 1)$$

$$l_3(s, t) = s(2s - 1)$$

$$l_4(s, t) = 4tu$$

$$l_5(s, t) = 4st$$

$$l_6(s, t) = 4su$$

et sur chaque  $\Delta_k$  :

$$l_{j,k}(m_k(s, t)) = l_j(s, t) \quad 1 \leq j \leq 6, 1 \leq k \leq N$$

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ , la projection de  $f$  en utilisant l'interpolation par  $l_{j,k}$  est alors :

$$\mathcal{P}_N f(q) = \sum_{j=1}^6 f(v_{j,k}) l_{j,k}(q) \quad q \in \Delta_k$$

Nous introduisons la surface approximative  $\tilde{\partial D}$ , composée par les triangles  $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_N$ . Les triangles  $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_N$  sont ainsi définies :

$$\tilde{m}_k(s, t) = \sum_{j=1}^6 m_k(\rho_j) l_j(s, t) \quad (s, t) \in \sigma$$

En fin, nous donnons la méthode d'estimation d'une intégration sur  $\sigma$  :

$$\int_{\sigma} h(s, t) \approx \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 h(\rho_j) \quad (2.6)$$

### 2.2.9 Méthode de collocation sur une surface régulière

La convergence de cette méthode est démontrée dans [2]. Nous présentons les résultats obtenus.

Soit  $\varphi$  une densité, soit  $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ , alors, l'équation (??) discrétisé devient :

$$\begin{aligned} & 2\pi \mathcal{P}_N \varphi(v_i) + \\ & \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^6 \mathcal{P}_N \varphi(v_{j,k}) \int_{\sigma} l_{j,k}(s, t) \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \tilde{m}_k(s, t) \wedge \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}_k(s, t), v_i - \tilde{m}_k(s, t) \right\rangle}{|v_i - \tilde{m}_k(s, t)|^3} d\sigma \quad (2.7) \\ & = f(v_i) \end{aligned}$$

pour tout  $i = 1, \dots, N_v$ .

Dans l'équation (2.7), l'intégrale  $\int_{\sigma} h(s, t) d\sigma$  est évaluée en générale par la formule (2.6).

Quand  $v_i \in \Delta_k$ , l'intégrale

$$\int_{\sigma} l_{j,k}(s, t) \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \tilde{m}_k(s, t) \wedge \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}_k(s, t), v_i - \tilde{m}_k(s, t) \right\rangle}{|v_i - \tilde{m}_k(s, t)|^3} d\sigma$$

possède une singularité, pour traiter cette singularité, nous utilisons un changement de variables proposé dans [3].

Nous supposons que la singularité est au point  $(s, t) = (0, 0)$ , nous effectuons le changement de variables :

$$s = (1 - y)x \quad t = yx \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

Par exemple sur cette intégration :

$$\int_{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{s^2 + t^2}} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{(1 - y)^2 + y^2}}$$

l'intégration à droite n'est plus singulière grâce au changement de variables. Si le point  $v_i \in \Delta_k$  est un point médian d'un arrêt, dans [2], nous proposons de diviser  $\sigma$  en deux triangle (cf. Figure 2.18).

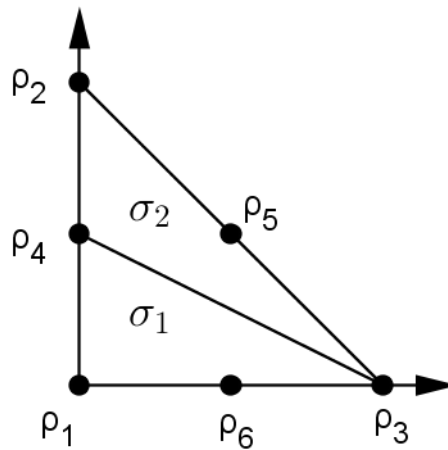


FIGURE 2.18 – Division de  $\sigma$

# Chapitre 3

## Conclusion

Pendant ce stage, nous avons utilisé deux méthodes numériques pour vérifier le comportement asymptotique du spectre d'un opérateur Poincaré-Neumann associée à deux inclusions proches. Nous avons validé les résultats théoriques de [4] en dimension deux. Les erreurs des approximations numériques sont de l'ordre de 10%. Précisément, nous avons utilisé une méthode variationnelle pour calculer les valeurs propres en dimension deux et en dimension trois dans le cas de deux boules. Nous avons aussi utilisé deux approches différentes basées sur les équations intégrales. L'une est l'approche avec raffinement, l'autre utilise une grille fixe avec une formule d'approximation (2.3). Nous avons testé la deuxième proche avec succès en dimension deux. Les erreurs des calculs numériques peuvent être réduites en améliorant la qualité du maillage et en augmentant la dimension de l'espace fonctionnel  $V_n^\delta$ . Précisément, nous avons vérifié le comportement asymptotique de  $\beta_1^{\delta,-} = 1 - c_1 \delta^{1-\frac{1}{m}} + o(\delta^{1-\frac{1}{m}})$  quand  $\delta \rightarrow 0$ . Les autres valeurs propres ont le même comportement asymptotique que  $\beta_1^\delta$  et ne sont pas traités dans notre étude. Elles peuvent être calculées en suivant la même démarche que pour la première valeur propre. Ainsi, l'étude des constantes  $c_n$  reste un sujet intéressant. Nous avons commencé l'étude de la méthode intégrale sans raffinement en dimension trois (basée sur [2]). Il nous reste à implémenter la méthode numériquement. En dimension trois, nous avons aussi une formule d'approximation proche de (2.3), qui est introduite dans [8]. Nous sommes aussi intéressés par la question de choix de base en méthode variationnelle. En effet, nous avons proposé d'utiliser les harmoniques sphériques en dimension trois pour le cas de deux boules, car les harmoniques sphériques sont des fonctions propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré pour une boule. Il nous faut trouver des fonctions de base plus adaptables à la géométrie des inclusions.



# Bibliographie

- [1] Habib Ammari, Éric Bonnetier, Faouzi Triki, and S. Vogelius, Michael. Elliptic estimates in composite media with smooth inclusions : an integral equation approach. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 47(6) :1–50, May 2014.
- [2] K. Atkinson and D. Chien. Piecewise polynomial collocation for boundary integral equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(3) :651–681, 1995.
- [3] Kendall E Atkinson. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Number 4. Cambridge university press, 1997.
- [4] E. Bonnetier and F. Triki. On the spectrum of the poincaré variational problem for two close-to-touching inclusions in 2d. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 209(2) :541–567, août 2013.
- [5] E. Bonnetier and M. Vogelius. An elliptic regularity result for a composite medium with *touching* fibers of circular cross-section. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 31(3) :651–677, 2000.
- [6] Éric Bonnetier and Faouzi Triki. Pointwise bounds on the gradient and the spectrum of the Neumann–Poincaré operator : The case of 2 discs. volume 577 of *Contemporary Mathematics*, pages 81–92. AMS, 2012.
- [7] H. Cheng and L. Greengard. A method of images for the evaluation of electrostatic fields in systems of closely spaced conducting cylinders. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(1) :122–141, 1998.
- [8] D.L. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and applied mathematics. Wiley, 1983.
- [9] H. Kang H. Ammari. *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurement*, chapter 2. Springer, 2004.
- [10] Kang Hyeonbae. Layer potential approaches to interface problems. *Inverse problems and imaging, Panoramas et Synthèse, Société Mathématique de France, to appear*.

**Résumé** Dans cette mémoire, nous cherchons à étudier numériquement le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré  $\mathcal{K}^*$  quand la distance entre les inclusions  $\delta$  tend vers zéro. Ce comportement asymptotique des valeurs propres et des vecteurs propres peut aider à comprendre le blow-up du gradient. Nous allons utiliser deux méthodes numériques :

- I/ Une méthode variationnelle basée sur le problème spectral de Poincaré.
- II/ Une méthode intégrale basée sur l'étude du spectre de l'opérateur intégral Neumann-Poincaré.

**Mots-clés** Équations aux dérivées partielles, Opérateurs Elliptiques, Valeurs propres, Approximation numérique.

**Title** Eigenvalues of the Neumann-Poincaré operator of 2 inclusions with contact of order  $m$  : a numerical study

**Abstract** In a composite medium that contains close-to-touching conducting inclusions, the pointwise values of the gradient of the voltage potential may blow up as the distance  $\delta$  between some inclusions tends to 0 and as the conductivity contrast degenerates. We showed that the blow-up rate of the gradient is related to how the eigenvalues of the associated Neumann-Poincaré operator converge to  $\pm\frac{1}{2}$  as  $\delta$  to 0, and on the regularity of the contact. Here, we consider two connected 2-D inclusions, at a distance  $\delta > 0$  from each other. When  $\delta = 0$ , the contact between the inclusions is of order  $m \geq 2$ . We numerically determine the asymptotic behavior of the eigenvalues to the Neumann-Poincaré operator, in terms of  $\delta$  and  $m$ .