

Caractérisation des transferts thermiques conjugués dans un minicanal par inversion de trames thermographiques

Waseem Al Hadad

▶ **To cite this version:**

Waseem Al Hadad. Caractérisation des transferts thermiques conjugués dans un minicanal par inversion de trames thermographiques. Génie des procédés. 2013. hal-01860692

HAL Id: hal-01860692
https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01860692

Submitted on 23 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université de Lorraine

Faculté de *sciences et technologies*

-Nancy-

Mémoire de stage Master MEPP2 *:*

Réalisé au sein du Laboratoire d'Energétique de Mécanique Théorique et Applique LEMTA MARS-JUILLET 2013

Intitulé :

Caractérisation des transferts thermiques conjugués dans un mini-canal par inversion de trames thermographiques

Soutenu le 05/09/2013 par :

AL HADAD Waseem

Directeurs de stage :

Denis Maillet et Yassine ROUIZI

Année universitaire 2012/2013

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique de l'Université de la Lorraine et les intervenants professionnels responsables de la formation de MEPP. Je tiens à remercier tout particulièrement les responsables de Master David Lacroix et Pascal Boulet. Ils ont su m'apporter le soutien nécessaire à mon intégration au sein de la promotion.

Je remercie également Monsieur Denis Maillet, Professeur des Universités-Institut National Polytechnique de Lorraine, pour le briefing de début de stage, la confiance qu'il m'a accordé, ainsi que toutes ses explications théoriques qui m'ont éclairé sur ce sujet ainsi que pour son implication sur les parties analytique et expérimentale de mon travail. Son esprit de recherche et ses commentaires efficaces m'ont été d'une aide précieuse.

Je remercie également Yassine ROUIZI, post doctorant au LEMTA, qui m'a épaulé tout au long de la partie expérimentale. Son soutien, sa gentillesse et tous ses conseils au quotidien qui m'ont permis d'avancer efficacement dans la rédaction de ce rapport.

Je tiens à remercier Franck Demeurie, technicien du laboratoire pour les modifications effectuées sur le banc expérimental.

Mes remerciement vont également à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Nomenclature 1
1. Introduction : 2
2. Le système étudié et sa modalisation : 6
2.1. Modèle analytique: 7
2.2. Validation de modèle : 16
2.3. Calcul de température moyenne de mélange (bulk): 19
3. Description du banc experimental : 22
4. Problème inverse : 26
4.1. Estimation de paramètres : 27
4.1.1. Estimations de paramètre d'un modèle linaire: 27
4.1.2. Estimations de paramètre d'un modèle non-linaire: 28
4.2. Calcul des conditions internes : 30
4.2.1. Décomposition en Valeurs x Singulières Tronquée (TSVD): 31
4.2.2. Décomposition en Valeurs Singulières à Niveaux Infinis (ILSVD): 32
5. Résultats : 33
5.1. Measures: 33
5.2. Résultats de l'inversion : 37
5.2.1. Estimation des grandeurs structurelles : 37
5.2.2. Conditions internes: 40
6. Conclusion : 50
Bibliographie 51
Annexe 54
Annexe (1): 54
Annexe (2): 56
Annexe (3): 58

Liste des figures

Figure 1: Ecoulement 2-D de Poiseuille entre deux plaques planes 6
Figure 2: Division de la couche fluide à plusieurs sous couche 13
Figure 3: Comparaison des profils de températures sur la face chaude externe calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U. 17
Figure 4: Comparaison des profils de températures sur la face froide externe calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U 18
Figure 5: Comparaison des profils de températures sur la face chaude interne calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U..... 18
Figure 6: Comparaison des profils de températures sur la face froide interne calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U 19
Figure 7: Température sur les faces externes et température de bulk à $U = 10 - 5\ m/s$, $L = 2l$, $Nh = 100$ et $Nx = 100$ 20
Figure 8: Source de chaleur sur la face chaude externe et le flux sur la face chaude interne, $U = 10 - 5\ m/s$, $L = 2l$, $Nh = 100$ et $Nx = 100$..... 20
Figure 9: Source de chaleur sur la face froide externe et le flux sur la face froide interne, $U = 10 - 5\ m/s$, $L = 2l$, $Nh = 100$ et $Nx = 100$..... 21
Figure 10: Modélisation de la tri-couche [7]..... 22
Figure 11: Thermostat (Lauda) 22
Figure 12: Système de pousse seringue 23
Figure 13: Face chaude 23
Figure 14: Face froide 24
Figure 15: Système d'alimentions électrique..... 24
Figure 16: Schéma synoptique du dispositif expérimental 25
Figure 17: Problème direct..... 26
Figure 18: Problème inverse 26
Figure 19: Principe de l'estimation des paramètres d'un modèle,[11] 29
Figure 20: Le minimum local et le minimum global (un seul paramètre)..... 29
Figure 21: Champ de température sur la face chaude, $U = 10 - 3\ m/s$ 34
Figure 22: Champ de température sur la face froide, $U = 10 - 3\ m/s$ 34
Figure 23: Profils de température sur les faces externes, $\mathrm{U} = 10 - 3\ \mathrm{m/s}$, $1Pixel/0.2889mm$..... 34
Figure 24: Champ de température sur la face froide, $U = 10 - 4\ m/s$ 35
Figure 25: Champ de température sur la face chaude, $U = 10 - 4\ m/s$ 35
Figure 26: Profils de température sur les faces externes, $\mathrm{U} = 10 - 4\ \mathrm{m/s}$, $1Pixel/0.2801mm$..... 35
Figure 27: Champ de température sur la face chaude, $U = 10 - 5m/s$..... 36
Figure 28: Champ de température sur la face froide, $U = 10 - 5m/s$..... 36
Figure 29: Profils de température sur les faces externes, $\mathrm{U} = 10 - 5\mathrm{m/s}$, $1\mathrm{Pixel}/0.2801\mathrm{mm}$ 36
Figure 30: Distribution de sensibilité réduite à $\mathrm{U} = 10 - 3\mathrm{m/s}$, (COMSOL, $\mathrm{h} = 10\mathrm{W.K} - 1.\mathrm{m} - 2$) 38
Figure 31: Distribution de sensibilité à $\mathrm{U} = 10 - 4\mathrm{m/s}$, (COMSOL, $\mathrm{h} = 10\mathrm{W.K} - 1.\mathrm{m} - 2$) 38
Figure 32: Distribution de sensibilité à $\mathrm{U} = 10 - 5\mathrm{m/s}$, (COMSOL, $\mathrm{h} = 10\mathrm{W.K} - 1.\mathrm{m} - 2$) 39

Figure 33 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par TSVD sur les faces externes à $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s, Nh' = 6, Nx = 226}$ 41
Figure 34 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par ILSVD sur les faces externes à $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s, 2Nh'' = Nx = 226, \alpha = 33}$ 41
Figure 35 : Flux et source de chaleur estimé par TSVD à $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s, Nh' = 6, Nx = 226}$ 42
Figure 36 : Flux et source de chaleur estimé par ILSVD à $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s}$, $\mathbf{2Nh'' = Nx = 226, \alpha = 33}$ 42
Figure 37 : Températures mesurées externes et estimée internes par TSVD à $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s, Nh' = 6, Nx = 226}$ 43
Figure 38 : Températures mesurées externes et estimée internes par ILSVD à $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s}$, $\mathbf{2Nh'' = Nx = 226, \alpha = 33}$ 43
Figure 39 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profil de température reconstruits (estimés) par TSVD sur les faces externes à $\mathbf{U = 10 - 4\ m/s, Nh' = 4, Nx = 230}$ 44
Figure 40 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par ILSVD sur les faces externes à $\mathbf{U = 10 - 4\ m/s, 2Nh'' = Nx = 230, \alpha = 37}$ 44
Figure 41 : Flux et source de chaleur estimé par TSVD à $\boldsymbol{U = 10 - 4\ m/s, Nh' = 4, Nx = 230}$ 45
Figure 42 : Flux et source de chaleur estimé par ILSVD à $\mathbf{U = 10 - 4\ m/s, 2Nh'' = Nx = 230, \alpha = 37}$ 45
Figure 43 : Températures mesurées externes et estimée internes par TSVD à $\mathbf{U = 10 - 4\ m/s, Nh' = 4, Nx = 230}$ 46
Figure 44 : Températures mesurées externes et estimée internes par ILSVD à $\mathbf{U = 10 - 4\ m/s, 2Nh'' = Nx = 230, \alpha = 37}$ 46
Figure 45 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par TSVD sur les faces externes à $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s, Nh' = 5,\ Nx = 227}$ 47
Figure 46 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température estimée par ILSVD sur les faces externes à $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s, 2Nh'' = Nx = 227, \alpha = 37}$ 47
Figure 47 : Flux et source de chaleur estimé par TSVD à $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s, Nh' = 5,\ Nx = 227}$ 48
Figure 48 : Flux et source de chaleur estimé par ILSVD à $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s, 2Nh'' = Nx = 227, \alpha = 37}$ 48
Figure 49 : Températures mesurées externes et estimée internes par TSVD à $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s, Nh' = 5, Nx = 227}$ 49
Figure 50 : Températures mesurées externes et estimée internes par ILSVD à $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s, 2Nh'' = Nx = 227, \alpha = 37}$ 49

Liste des tableaux

Tableau 1: Paramètres de simulation **16**
Tableau 2: Dimensions de deux milieux **16**
Tableau 3: Vitesse moyen et les nombres sans dimension correspondant **16**
Tableau 4 : Vitesse moyenne et nombres sans dimension correspondants **33**
Tableau 5 : Paramètres de manipulation pour $\mathbf{U = 10 - 3\ m/s}$ **33**
Tableau 6 : Paramètres de manipulation pour $\boldsymbol{U = 10 - 4\ m/s}$ **35**
Tableau 7 : Paramètres de manipulation pour $\mathbf{U = 10 - 5\ m/s}$ **36**

Nomenclature

a	Diffusivité thermique $(m^2.s^{-1})$
c	Capacité thermique en $(J.kg^{-1}.K^{-1})$
e	Epaisseur en m
F	Fluide
F_{kn}	Matrice de transfère en une couche de fluide
H	Matrice de transfert convectif
h	Coefficient de transfert convectif $(W.m^{-2}.K^{-1})$
$J(x)$	L'écart quadratique
K	Nombre de couche de fluide
K_n	Nombre de Knudsen
L	Longueur virtuelle en m
l	Longueur du canal en m
M	Nombre de transfert axial
N	Nombre de partie en x
P_e	Nombre de Pèclet
q	Source surfacique en $(W.m^{-2})$
R_e	Nombre de Reynolds
S	Solide
S_n	Matrice de transfère en solide
$\underline{\underline{S}}$	matrice de sensibilité
T	Température en K
U	vitesse moyenne en $(m.s^{-1})$
$\boldsymbol{U}$	Vecteur-colonne des entrées
$u(y)$	Profile de vitesse en $(m.s^{-1})$
$X(x)$	Fonction propre
$\boldsymbol{X_0}$	Vecteur de l'état initial
$\boldsymbol{y}$	Vecteur (signal) mesuré
$\boldsymbol{y_{mo}}$	Vecteur des sorties théorique du modèle

Lettres grecques :

α_n	Valeurs propres
β	Vecteur de paramètres
ε	Vecteur-colonne du bruit de mesure
λ	Longueur d'onde (m)ou conductivité thermique $(W.m^{-1}.K^{-1})$
φ	Densité de flux surfacique en y direction $(\mathrm{W.m^{-2}})$
ρ	Masse volumique $(\mathrm{kg.m^{-3}})$
ϑ	Viscosité cinématique $(\mathrm{m^2.s^{-1}})$

Indices inférieurs :

b	Bulk
c	Froide
f	Fluide
h	Chaude
L	face inferieure (refroidie)
opt	optimal
up	face supérieure (chauffée)

Indices supérieures :

0	initiale
T	Transpose de matrice
$\sim$	Transformée de Fourier
^	Valeur estimé
$*$	Valeur exact

1. Introduction :

Un mini-canal peut être défini comme un canal de diamètre hydraulique de quelques dizaines de micromètres au millimètre. Les dispositifs mini et micro-fluidiques sont récemment utilisés dans plusieurs applications comme les micro-échangeurs et dans les boucles fluides extractrices de chaleur, dans le refroidissement des composantes électronique, en industrie aérospatiale, en instrumentation biomédicale et dans les systèmes de climatisation mobiles, etc...

Les mini-canaux présentent plusieurs avantages en l'occurrence :

- un grand rapport surface-volume qui favorise le transfert de la chaleur.
- un faible encombrement,
- un faible coût de construction,
- des performances d'échange thermique élevées,
- un volume de fluide caloporteur très petit.

Du fait de leur miniaturisation et de la nécessité d'en optimiser la conception, la compréhension du transfert de la chaleur en mini canaux est un sujet très actuel. Il faut souligner que le transfert de chaleur dans les mini et micro-canaux est différent de celui dans les macro-canaux. Cette différence est due à l'influence de la taille du canal (mini, micro ou macro-canal) et par conséquent, certains effets deviennent plus importants à ces échelles. A contrario il n'apparait aucun nouveau phénomène physique, voir Herwing et Hausner [1]ou Guo et al [2]

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un canal et le transfert de chaleur a lieu, plusieurs effets supplémentaires (effets dépendant de la taille) qui étaient négligés en macro-canal, deviennent plus importants en mini-canal à savoir :

- la conduction axiale dans les parois (transfert de chaleur dit « conjugué » dans le système),
- la diffusion axiale dans le fluide (transfert « advecto-diffusif »), apparaissant pour un faible nombre de Péclet[1].

[1] **Nombre de Péclet :** un nombre sans dimension qui représente le rapport entre le transfert de chaleur par convection et le transfert de chaleur par conduction dans le fluide.

- des plus forts gradients de pression qui peuvent occasionner des variation de propriétés thermo-physique (cas de la masse volumique pour ee gaz),
- l'influence de la rugosité de la paroi.

Il faut souligner qu'il y a aussi des autres effets qui ne dépendent pas de la taille du canal, et qui peuvent être négligés selon un critère donné dans toutes les échelles du canal (min et macro-canal). On prend comme exemple : la dissipation visqueuse qui peut être définie comme un échauffement du fluide dû au frottement visqueux (conversion thermodynamique). Plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'effet de dissipation visqueuse devient important. On peut négliger cet effet si nombre de Brinkman (le rapport entre l'énergie cinétique dissipée dans l'écoulement et le flux convectif évacuée par le fluide) est faible.

En application conventionnelle (macro-canaux), l'épaisseur de la paroi du canal est très petite par rapport au diamètre hydraulique du canal. On peut souvent, pour une raison de simplification, négliger le transfert de chaleur par conduction axiale (en direction parallèle à l'écoulement) dans la paroi par rapport au transfert de la chaleur perpendiculaire à l'écoulement.

Par contre, en mini-canaux, l'épaisseur de paroi du canal est de l'ordre de grandeur ou plus grand que le diamètre hydraulique du canal, (la paroi occupe une part non négligeable du volume total). Dans ce cas, le transfert de chaleur par conduction axiale dans la paroi ne peut pas être négligé. Le mécanisme du transfert de chaleur en mini et micro-canaux est connu sous le nom du **transfert conjugué**. Autrement dit, le transfert a un caractère multidimensionnel dans le système fluide/solide. L'utilisation des corrélations développées pour un macro-canal (corrélations de nombre Nusselt) pour caractériser le transfert de chaleur entre un fluide s'écoulant dans un mini-canal et la paroi, conduit souvent à des estimations erronées de coefficients de transfert de chaleur Morini [3], car les corrélations macroscopiques utilisées sont liées à l'hypothèse d'un transfert de chaleur local dans une seule direction normale à la paroi.

La mise en œuvre expérimentale et la mesure directe dans un mini-canal sont délicates surtout en mesure de transfert (mesure de la température à l'interface fluide-solide) car la taille de la section de passage est très petite. C'est la raison pour laquelle on trouve peu d'études qui utilisent la mesure directe à l'interface fluide-solide, voir Mokrani et al [4]. Par ailleurs, plusieurs travaux utilisent une mesure directe sur les faces externes avec remontée aux conditions internes en s'appuyant sur certaines hypothèses voir [5].

Plusieurs travaux expérimentaux s'intéressent à la mesure du nombre de Nusselt (coefficient d'échange convectif) dans un rectangulaire mini-canal. Peng et Wang [6] ont étudié le transfert de la chaleur convectif forcé, entre un mini-canal rectangulaire de section de passage $(600 \times 700\mu m)$ et l'eau qui s'écoule dans ce canal. Dans un régime laminaire, ils ont trouvé que le nombre de Nusselt diminue si le nombre de Reynold augmente (ce comportement est incompatible avec le macro-canal). Les résultats expérimentaux de ce travail sont comparés aux résultats de la corrélation de Sieder-Tate. Peng et Wang ont trouvé que le nombre de Nusselt expérimental est plus petit que le nombre de Nusselt calculé par corrélation de Sieder-Tate.

Wang et Peng [7] ont aussi étudié le transfert de chaleur convectif forcé mais cette fois-ci dans un canal en acier inoxydable rectangulaire pour un régime turbulent. Les fluides utilisés sont de l'eau et méthanol. La corrélation proposée nécessite la modification de la corrélation de Dittus-Boelter, où le coefficient 0.023 est remplacé par 0.00805. Autrement dit, les résultats expérimentaux sont plus petits que les résultats de la corrélation de Dittus-Boelter.

L'effet de transfert de chaleur axial en paroi pour des mini et micro-canaux a été étudié par Maranzana et al [8]. Ils ont proposé un nombre sans dimension (nombre de conduction axiale M), qui représente le rapport entre le transfert par conduction dans une paroi et le transfert advectif dans l'écoulement. L'effet de la conduction axiale peut être négligé si M est inferieur à une valeur seuil qui dépend de la géométrie du canal et des propriétés thermo-physiques du fluide et de la paroi [8]. Cette étude a été limitée au nombre de Péclet $(P_e \gg 1)$, ce qui conduit à négliger le transfert de chaleur par conduction dans un fluide par rapport à l'advection. Dans leur étude, ils ont pris une valeur donnée du coefficient de transfert convectif sur les parois internes (h qui relie le transfert entre la paroi et le fluide circulant dans le canal). Cette approximation peut influencer sur la qualité des résultats obtenus.

Perry et al [9] se sont intéressés à l'étude du transfert de chaleur dans un canal plan, traversé par un fluide à profil de vitesse établi qui est discrétisé en couches. Ils ont réussi à développer un modèle semi-analytique qui prend en considération le transfert conjugué en solide et (conduction-advection) en fluide. Le modèle développé ici est valable pour toutes les gammes de nombre de Pèclet. Le grand avantage de ce modèle repose sur la non utilisation des notions de coefficient convectif sur les parois internes.

Récemment, Rouizi et al [10] ont étudié aussi le transfert de chaleur dans un canal rectangulaire. Ils ont réussi à déterminer expérimentalement les conditions internes (les profils de température débitante du fluide) en utilisant le modèle développé par Perry et al [9] et une méthode de conduction inverse [11]. Mais cette étude se limite dans le cas de faibles nombre de Péclet.

Nous proposons ici une technique non-intrusive de ce type pour traiter ce genre de problème. Cette technique permet d'estimer les conditions internes à partir de la mesure du champ de température sur les surfaces externes en utilisant une camera infrarouge et à l'aide d'un modèle semi-analytique développé en amont. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du transfert de chaleur dans un mini-canal plan pour une large gamme de vitesses débitantes (d'une faible vitesse jusqu'à une grande vitesse) en utilisant la technique précédemment mentionnée et en prenant en considération l'effet de la conduction axiale dans le fluide et dans la paroi. Dans cette étude, l'effet de la dissipation visqueuse est négligeable (le nombre de Brinkman est très faible). De la même manière on ne rencontre pas les effets d'écoulement et de transfert correspondant aux nano-canaux :

- l'effet électrostatique est négligeable (le fluide utilisé est l'eau désionisée).
- l'effet de double couche[2] est négligé (le diamètre hydraulique du canal étudiée est supérieur à $1\mu m$).
- la loi de Fourier reste valable (le nombre de Knuden reste très inferieurs à l'unité).

Enfin, l'effet de convection naturelle dans le canal étudié est négligé devant la convection forcée (le nombre de Richardson est très petit).

[2] **Double couche** : lorsqu'un solide mis en contact avec un liquide, le solide acquiert une certaine charge électrique localisée sur sa surface par dissociation ou adsorption électronique. La charge immobile sur la surface attire un nombre d'ions positifs en excès du liquide pour protéger la charge de surface afin de rendre neutre le système.

2. Le système étudié et sa modalisation :

On s'intéresse à la modélisation du transfert de chaleur dans un mini canal plan de longueur $2l$. Le mini canal considéré ici est constitué de trois couches (deux parois parallèles séparées par un canal), voir la Figure 1.

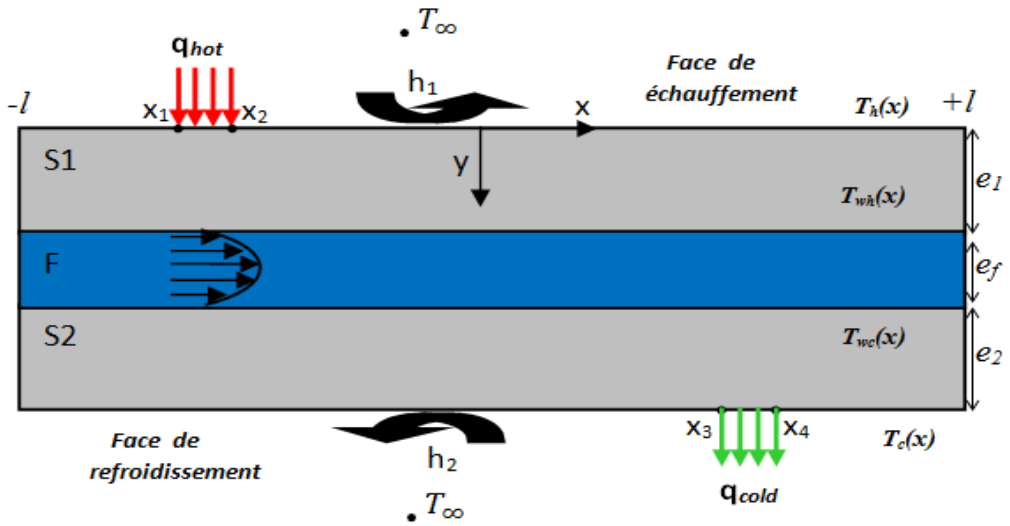


Figure 1: Ecoulement 2-D de Poiseuille entre deux plaques planes

Les deux couches solides (parois) sont caractérisées par leurs épaisseurs e_1 et e_2 , et leur conductivité thermique λ_1 et λ_2. La couche de fluide est caractérisée par son épaisseur e_f, et sa masse volumique ρ_f, sa chaleur massique c_f et sa diffusivité thermique $a_f = \frac{\lambda_f}{\rho_f c_f}$. L'écoulement est considéré dynamiquement établi sur tout le canal et le profil de vitesse est celui de Poiseuille (parabole).

Deux sources de chaleur surfaciques localement uniformes (q_{hot} et q_{cold}) sont imposées sur les faces latérales qui échangent de la chaleur avec l'environnement ambiant à température T_∞. Cet échange est caractérisé par un coefficient d'échange h supposé uniforme (on parle ici de coefficient d'échange convectif naturel-radiatif moyen). La température et le flux sont égaux sur chaque côté de l'interface fluide-solide.

Les conditions aux limites dans la direction axiale (direction de l'écoulement) ne sont pas connues au niveau des deux couches de solide, tandis qu'elles sont connues au niveau du fluide (le fluide entre et sort du canal à température égale à température l'ambiante T_∞). Pour connaitre les conditions limites dans le solide, le canal est supposé,

dans un premier temps de longueur infinie (en pratique $L \geq l$). A l'aide de cette hypothèse, on peut identifier les conditions aux limites à extrémité ($T_s|_{\pm L} = T_\infty$), autrement dit, le canal est suffisamment long de telle façon que toute la chaleur sera dissipée aux niveaux des faces latérales. Après avoir calculé les températures sur tout le domaine ($x = \pm L$), on récupère seulement les valeurs de températures dans l'intervalle ($x = \pm l$).

2.1.Modèle analytique:

La méthode utilisée dans cette modélisation est la méthode des quadripôles thermique. D'un point de vue mathématique, cette méthode de quadripôle est très classique pour chercher une solution explicite exacte d'une équation différentielle à dérivée partielle linéaire dans des géométries simples. Cette méthode permet la mise en œuvre des solutions semi-analytiques couramment utilisées dans le domaine thermique [12].

Les problèmes de transfert thermique permanent ou transitoire peuvent être traités dans une ou plusieurs dimensions par cette méthode ; ceci évite ainsi les problèmes de maillage du domaine et les coûts de calcul souvent lourds inhérents aux méthodes numériques. Cette méthode s'appuie sur des outils classiques de transformée de Laplace (en régime transitoire) ou transformée de Fourier (en problème $2D$ ou $3D$). En effet dans ces espaces (de Laplace ou de Fourier), il est possible de manipuler directement les champs de températures car on peut faire disparaitre des dérivées partielles de l'équation de la chaleur et souvent rendre explicites les solutions. L'idée générale est basée sur la représentation du transfert étudié par une matrice qui relie linéairement le vecteur de la transformée intégrale (Laplace ou Fourier) de la température et du flux d'entrée avec à la température au flux de sortie.

La Figure 1 représente en (2D) un écoulement stationnaire laminaire incompressible dynamiquement établi qui entre dans un mini-canal à T_∞, et sort à la même température T_∞ après chauffage et refroidissement à deux positions différentes. Les propriétés thermo-physiques du fluide sont considérées constantes sur tout le canal. Les équations qui décrivent le transfert de la chaleur dans chaque milieu et les conditions aux limites correspondantes peuvent être écrites:

- **Couche solide**:

$$\frac{\partial^2 T_{Si}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{Si}}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Avec $i = 1\ et\ 2$

à $(y = 0)$ $$\varphi_h = -\lambda_{S_1} \frac{\partial T_{S_1}}{\partial y} = -h\left(T_{S_1}(x) - T_\infty\right) + q_h(x) \qquad (2)$$

à $\left(y = e_1 + e_f + e_2\right)$ $$\varphi_c = -\lambda_{S_2} \frac{\partial T_{S_2}}{\partial y} = +h\left(T_{S_2}(x) - T_\infty\right) - q_c(x) \qquad (3)$$

$\varphi_h\ et\ \varphi_c$ sont les densités de flux dans la direction y, $q_h(x)\ et\ q_c(x)$ sont les densités des sources de la chaleur sur les faces latérales (face de chauffage et de refroidissent respectivement). $q_h(x)\ et\ q_c(x)$ peuvent être représentées ici par une fonction discontinue (fonction H Heaviside), telles que :

$$q_h(x) = q_{hot}[H(x - x_1) - H(x - x_2)]$$

$$q_c(x) = q_{cold}[H(x - x_4) - H(x - x_3)]$$

à $(x = \pm L)$ $$T_{S_1} = T_{S_2} = T_\infty \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial T_{S_1}}{\partial x} = \frac{\partial T_{S_2}}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

- **Couche Fluide:**

$$\left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2}\right) - \frac{u(y)}{a_f}\frac{\partial T_f}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

$$T_f\big|_{\pm L} = T_\infty \qquad (6)$$

Les conditions aux limites aux les interfaces solides-fluide,

$$T_f\big|_{e1} = T_{S_1}\big|_{e1}\ , \qquad -\lambda_{S_1} \frac{\partial T_{S_1}}{\partial y}\Big|_{e1} = -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y}\Big|_{e1} \qquad (7)$$

$$T_f\big|_{e1+e_f} = T_{S_2}\big|_{e1+ef}\ , \qquad -\lambda_{S_2} \frac{\partial T_{S_2}}{\partial y}\Big|_{e1+e_f} = -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y}\Big|_{e1+e_f} \qquad (8)$$

Pour passer d'une équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire, on utilise la transformée de Fourier, équation équation(9), après avoir procédé au changement de variable $\theta = T - T_\infty$ (on prend ici la température ambiante T_∞ comme référence pour une raison de simplification).

$$\tilde{\theta}(\alpha_n, y) = F(\theta) = \int_{-L}^{+L} \theta(x, y) X(x) dx \tag{9}$$

Il faut tout d'abord trouver la fonction propre $X(x)$ et les valeurs propres α_n qui dépendent des conditions aux limites dans la direction dans laquelle on a fait la transformation.

Pour éviter toute confusion, nous allons traiter chaque milieu individuellement (solide, ensuite fluide) et on finira cette étape de modélisation par faire le couplage entre les deux milieux.

Modèle solide :

La fonction propre $X(x)$ et les valeurs propres α_n pour le solide (parois) peuvent être déterminées en utilisant la méthode de séparation des variables (voir Annexe 1), on trouve :

Fonction propre $$X(x) = sin(\alpha_n x) \tag{10}$$

Les valeurs propres discrètes $$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \tag{11}$$

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation de la chaleur pour solide ;

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2}\right) + F\left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2}\right) = \int_{-L}^{+L} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} sin(\alpha_n x) dx = \left[\frac{\partial \theta_s}{\partial x} sin(\alpha_n x)\right]_{-L}^{+L} - [\theta_s \alpha_n cos(\alpha_n x)]_{-L}^{+L} - \alpha_n^2 \tilde{\theta}_{s_n}$$

En appliquant les conditions aux limites à $(x = \pm L)$ pour le solide,

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2}\right) = -\alpha_n^2 \tilde{\theta}_{s_n}$$

La transformée de Fourier de la deuxième partie de l'équation (1)

$$F\left(\frac{\partial^2\theta_s}{\partial y^2}\right) = \int_{-L}^{+L} \frac{\partial^2\theta_s}{\partial y^2} sin(\alpha_n x)\, dx = \frac{\partial^2\tilde{\theta}_{s_n}}{\partial y^2}$$

Donc l'équation (1) devient

$$\frac{d^2\tilde{\theta}_{s_n}}{dy^2} - \alpha_n^2\tilde{\theta}_{s_n} = 0 \tag{12}$$

On vient d'obtenir une équation différentielle ordinaire homogène, la solution générale de cette équation peut être écrite sous la forme,

$$\tilde{\theta}_{s_n} = K_1 \sinh(\alpha_n y) + K_2 \cosh(\alpha_n y) \tag{13}$$

La transformée de Fourier du flux dans la direction y,

$$\tilde{\varphi}_{s_n} = -\lambda_s \frac{\partial\tilde{\theta}_{s_n}}{\partial y} = -\lambda_s\{K_1 \cosh(\alpha_n y) + K_2 \sinh(\alpha_n y)\}\alpha_n \tag{14}$$

Pour trouver les constantes K_1 et K_2 , on utilise les conditions aux limites à $(y = 0)$:

$$\text{à } (y = 0) \qquad \tilde{\theta}_{s_n} = \tilde{\theta}_{up.s_n} \quad et \quad \tilde{\varphi}_{s_n} = \tilde{\varphi}_{up.s_n}$$

$$K_1 = -\frac{\tilde{\varphi}_{up.s_n}}{\lambda_s\alpha_n} \qquad et \qquad K_2 = \tilde{\theta}_{up.s_n}$$

On utilise aussi les conditions aux limites à $(y = e_1)$, pour faire le lien entre la transformée de Fourier de la température et du flux de « upper » et « lower » faces de la paroi.

$$\text{à } (y = e_1) \qquad \tilde{\theta}_{s_n} = \tilde{\theta}_{L.s_n} \quad et \quad \tilde{\varphi}_{s_n} = \tilde{\varphi}_{L.s_n}$$

A partir des équations (13) et (14), on obtient

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{up.s_n} = \cosh(\alpha_n e_1)\,\tilde{\theta}_{L.s_n} + \dfrac{1}{\lambda_s\alpha_n}\sinh(\alpha_n e_1)\tilde{\varphi}_{L.s_n} \\ \tilde{\varphi}_{up.s_n} = \lambda_s\alpha_n \sinh(\alpha_n e_1)\tilde{\theta}_{L.s_n} + \cosh(\alpha_n e_1)\,\tilde{\varphi}_{L.s_n} \end{cases} \tag{15}$$

Le système des équations (15) peut être représenté par une boîte munie de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie, dite quadripôle. Et sa représentation matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \widetilde{\varphi} \end{bmatrix}_{up.s_n} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_{L.s_n} \tag{16}$$

La matrice $S_n = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ représente la matrice de transfert dans le milieu solide qui relie la transformée de Fourier à la température et de la densité de flux entrant et sortant du milieu, tel que :

$$A = \cosh(\alpha_n e_1)\,,\ \ B = \frac{1}{\lambda_s \alpha_n}\sinh(\alpha_n e_1)\ \ et\ \ C = \lambda_s \alpha_n \sinh(\alpha_n e_1)$$

Modèle fluide :

On s'intéresse maintenant à l'équation de la chaleur dans le fluide, on suit la même démarche que dans le milieu solide sauf qu'il n'y a pas de fonction propre mais nous utilisons la notion de périodicité.

Pour obtenir le spectre de température, on utilise la transformée de la forme :

$$\tilde{\theta}(\alpha_n, y) = F(\theta) = \int_{-L}^{+L} \theta(x, y) e^{-i\alpha_n x}\, dx \tag{17}$$

Avec

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \tag{18}$$

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (5), on obtient :

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2}\right) + F\left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2}\right) - F\left(\frac{u(y)}{a_f}\frac{\partial \theta_f}{\partial x}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2}\right) = \int_{-L}^{+L} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} e^{-i\alpha_n x} dx = \left[\frac{\partial \theta_f}{\partial x} e^{-i\alpha_n x}\right]_{-L}^{+L} + i\alpha_n \left[\theta_f e^{-i\alpha_n x}\right]_{-L}^{+L} - \alpha_n^2 \tilde{\theta}_{f_n}$$

En appliquant les conditions aux limites à $(x = \pm L)$ pour le fluide,

$$\theta_f\big|_{-L} = 0 \qquad \frac{\partial \theta_f}{\partial x}\bigg|_{-L} = 0$$

$$\theta_f\big|_{+L} = 0, \qquad \frac{\partial \theta_f}{\partial x}\bigg|_{+L} = 0$$

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2}\right) = \int_{-L}^{+L} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} e^{-i\alpha_n x} dx = -\alpha_n^2 \tilde{\theta}_{f_n}$$

La transformée de Fourier de la deuxième partie,

$$F\left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2}\right) = \int_{-L}^{+L} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2} e^{-i\alpha_n x} dx = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{fn}}{\partial y^2}$$

La transformée de Fourier de la troisième partie de l'équation (5),

$$F\left(\frac{u(y)}{a_f}\frac{\partial \theta_f}{\partial x}\right) = \frac{u(y)}{a_f}\left\{e^{-i\alpha_n x}\left[\theta_f\right]_{-L}^{+L} + i\alpha_n \tilde{\theta}_{fn}\right\}$$

En appliquant les conditions aux limites à $(x = \pm L)$ pour le fluide ;

$$F\left(\frac{u(y)}{a_f}\frac{\partial \theta_f}{\partial x}\right) = \frac{u(y)}{a_f} i\alpha_n \tilde{\theta}_{fn}$$

L'équation (5) dans l'espace de Fourier devient,

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{fn}}{dy^2} - \left(\alpha_n^2 + i\alpha_n \frac{u(y)}{a_f}\right)\tilde{\theta}_{fn} = 0 \tag{19}$$

Pour le champ de vitesse, il est également possible de résoudre les équations de Navier-Stokes. Comme on travaille dans un régime stationnaire, incompressible et établi, la solution exacte de l'équation de Navier-Stokes dans les paramètres du problème, peut être écrite comme:

$$u(y) = 6U\left\{\frac{y'}{e_f} - \left(\frac{y'}{e_f}\right)^2\right\} \tag{20}$$

avec $= \frac{débit}{section\ de\ passage}$, la vitesse moyenne débitante et $y' = y - e_1$.

Pour résoudre l'équation (19), il faut que la vitesse soit indépendante de y, c'est la raison pour laquelle on divise la couche de fluide e_f à plusieurs sous-couche d'épaisseur $e_k = y_{k+1} - y_k = \frac{e_f}{N_k}$, comme dans la Figure 2.

Dans chaque sous-couche, la vitesse du fluide u_k peut être considérée comme constante. Par contre elle sera différente d'une sous-couche à l'autre.

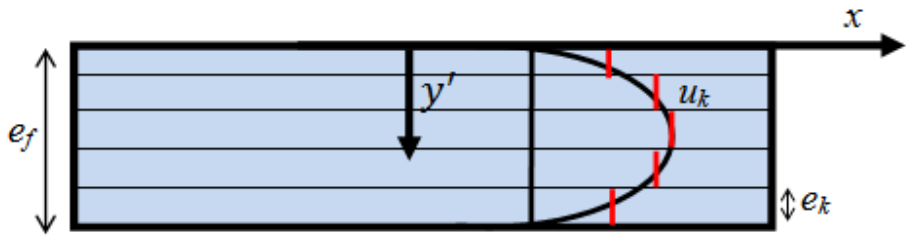


Figure 2: Division de la couche fluide à plusieurs sous couche

La vitesse moyenne dans chaque sous-couche peut être décrite par :

$$u_k = \frac{6U}{e_k}\left\{\frac{y'^2_{k+1} - y'^2_k}{2e_f} - \frac{y'^3_{k+1} - y'^3_k}{3e_f^2}\right\} \tag{21}$$

Finalement, l'équation (19) devient ;

$$\frac{d^2\tilde{\theta}_{fn}}{dy^2} - \gamma_n^2\tilde{\theta}_{fn} = 0 \tag{22}$$

Avec $\gamma_n^2 = \left(\alpha_n^2 + i\alpha_n \frac{u_k}{a_f}\right)$

On vient d'obtenir une équation différentielle ordinaire homogène, la solution de cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{\theta}_{f_n} = K_1 \sinh(\gamma_n y) + K_2 \cosh(\gamma_n y) \tag{23}$$

La transformée de Fourier du flux dans la direction y est donc :

$$\tilde{\varphi}_{f_n} = -\lambda_f\{K_1 \cosh(\gamma_n y) + K_2 \sinh(\gamma_n y)\}\gamma_n \tag{24}$$

Pour trouver les constantes K_1 et K_2 , on utilise les conditions aux limite à $(y = 0)$ et à $(y = e_k)$, on obtient ;

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{up.f_n} = \cosh(\gamma_n e_k)\, \tilde{\theta}_{L.f_n} + \dfrac{1}{\lambda_f \gamma_n} \sinh(\gamma_n e_k) \tilde{\varphi}_{L.f_n} \\ \tilde{\varphi}_{up.f_n} = \lambda_f \gamma_n \sinh(\gamma_n e_k) \tilde{\theta}_{L.f_n} + \cosh(\gamma_n e_k)\, \tilde{\varphi}_{L.f_n} \end{cases} \tag{25}$$

La solution générale peut être écrite sous la forme de matrice quadripôle ;

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_{up.f_n} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_{L.f_n} \tag{26}$$

La matrice $F_{kn} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$ représente la matrice de transfert dans chaque sous-couche en milieu fluide tel que :

$$A = \cosh(\gamma_n e_k)\,, \quad B = \frac{1}{\lambda_f \gamma_n} \sinh(\gamma_n e_k)\, et \;\; C = \lambda_f \gamma_n \sinh(\gamma_n e_k)\,.$$

Il faut retenir que la forme quadripolaire (26) est valable pour une seule couche. La forme générale de quadripôle d'une couche de fluide e_f se compose de plusieurs sous-couches d'épaisseurs e_k, la forme peut être écrit comme;

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_{up.f_n} = \prod_{k=1}^{K} F_{kn} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_{L.f_n} \tag{27}$$

Couplage Modèle fluide-solide :

Maintenant, il ne nous reste que à trouver la matrice de quadripolaire globale pour notre système représenté dans la Figure 1. Étant donné qu'à l'interface solide-fluide, les profils de température et de flux sont égaux sur chaque face, et aussi, du fait qu'on travaille dans les mêmes bases, les vecteurs de spectre de température et de flux sont donc égaux sur chaque face.

La relation entre la transformée de Fourier de température et les densités de source de chaleur sur les faces latérales (face de chauffage et la face de refroidissement), peut être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}_h = H_1 S_{1n}\left(\prod_{k=1}^{K} F_{kn}\right) S_{2n} H_2 \begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}_c \tag{29}$$

$H_1\ et\ H_2$ représentent les matrices de transferts radiait-convectives sur les faces latérales.

avec

$$H_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ h_1 & 1\end{bmatrix} \quad et \quad H_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ h_2 & 1\end{bmatrix}$$

A l'aide du modèle quadripolaire (29), et en connaissant le vecteur d'entrée (excitation) et le vecteur de paramètres, on peut remonter au spectre de température sur les faces latérales.

Ensuite, les spectres de température sur les faces internes sont calculés à l'aide des équations suivantes :

Face chaude interne :

$$\begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}_{wh} = (H_1 S_{1n})^{-1} \begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}_h \tag{30}$$

Face froide interne :

$$\begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}_{wc} = \left(H_1 S_{1n}\left(\prod_{k=1}^{K} F_{kn}\right)\right)^{-1} \begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}_h \tag{31}$$

A partir des spectres de température obtenues, les profiles de température correspondantes peuvent être calculées par la transformée de Fourier inverse équation(32).

$$\theta(x,y) = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}(\alpha_n, y) e^{i\alpha_n x} \approx \frac{1}{2L}\sum_{n=-N_h+1}^{N_h} \tilde{\theta}(\alpha_n, y) e^{i\alpha_n x} \tag{32}$$

2.2.Validation de modèle :

Deux types de simulation ont été faites pour obtenir les profils de température sur les faces externes (latérales) et sur les faces internes. La première simulation a été faite par logiciel commercial COMSOL qui est basé sur les éléments finies [13]. Après une étude de sensibilité de maillage, le type de maillage qui a été choisi dans cette simulation, est maillage triangulaire avec 3736 éléments pour chaque couche de solide et 934 éléments pour la couche de fluide. La deuxième a été effectuée par le modèle de quadripôle (29) à nombre de sous-couche fixé ($K = 5$) et $N_x = 100$.

Les simulations ont été faites à différentes vitesses moyennes $U = 10^{-3}, 10^{-4}\ et\ 10^{-5}\ m/s,$ et $h_1 = h_2 = h$. Les propriétés thermo-physiques et les dimensions de deux milieux sont résumées en Tableau 1 et en Tableau 2 respectivement.

h $\left(\frac{W}{m^2.K}\right)$	q_{hot} $\left(\frac{W}{m^2}\right)$	q_{cold} $\left(\frac{W}{m^2}\right)$	T_∞ (K)	λ_s $\left(\frac{W}{m.K}\right)$	λ_f $\left(\frac{W}{m.K}\right)$	ρc_f $\left(\frac{kJ}{m^3.K}\right)$	ϑ_f $\left(\frac{m^2}{s}\right)$
10	300	300	20	0.215	0.63	4.18×10^3	1×10^{-6}

Tableau 1: Paramètres de simulation

x_1 (m)	x_2 (m)	x_3 (m)	x_4 (m)	l (m)	e_f (m)	e_1 (m)	e_2 (m)
-3.25×10^{-2}	-2.05×10^{-2}	2.05×10^{-2}	-3.25×10^{-2}	6×10^{-2}	1×10^{-3}	2×10^{-3}	2×10^{-3}

Tableau 2: Dimensions de deux milieux

Le nombre de Reynold R_e et le nombre de Péclet P_e correspondant à chaque vitesse de simulation sont résumés en Tableau 3.

$U\ (m/s)$	R_e	P_e
10^{-3}	2	13
10^{-4}	0.2	1.3
10^{-5}	0.02	0.13

Tableau 3: Vitesse moyen et les nombres sans dimension correspondant

avec :

$$R_e = \frac{2U\ e_f}{\vartheta_f} \qquad et \qquad P_e = \frac{2U\ e_f}{\alpha_f} = \frac{2U\ e_f}{\alpha_f}$$

Pour calculer les spectres de source de chaleur, on utilise la transformée de Fourier :

$$\tilde{q}_h = \int_{x_1}^{x_2} q_{hot} sin(\alpha_n x) dx \qquad (33a)$$

$$\tilde{q}_c = \int_{x_3}^{x_4} q_{cold} sin(\alpha_n x) dx \qquad (33b)$$

Les profils de température sur la face chauffée externe (T_h), la face refroidie externe (T_c), la face chauffée interne (T_{wh}), et la face refroidie interne (T_{wc}), sont tracés dans les figures 3, 4, 5 et 6 respectivement. Le rapport $\frac{L}{l}$ et nombre d'harmonique correspondant sont donnés pour chaque courbe.

De ces courbes, on constate que, pour un écoulement à faible vitesse moyenne (faible nombre de Péclet), l'effet de conduction axiale (solide et fluide) tend à symétriser localement le profil autour de centre de chaque source. Par contre à grand Péclet cette symétrie disparait et l'effet d'advection dans le fluide est prédominant. On note aussi qu'il y a une très bonne corrélation entre les profils de température simulés par notre modèle (quadripôle) avec celui simulé par logiciel commerciale COMSOL.

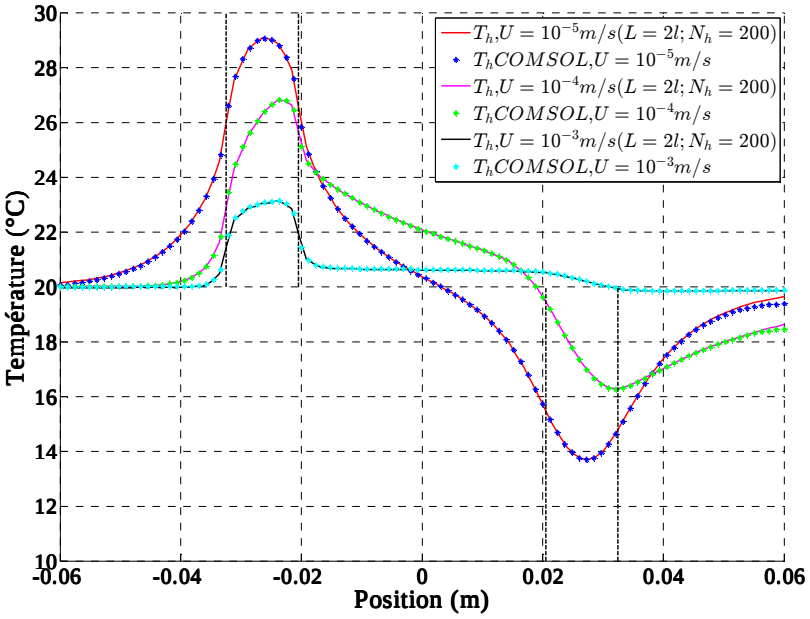


Figure 3: Comparaison des profils de températures sur la face chaude externe calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U.

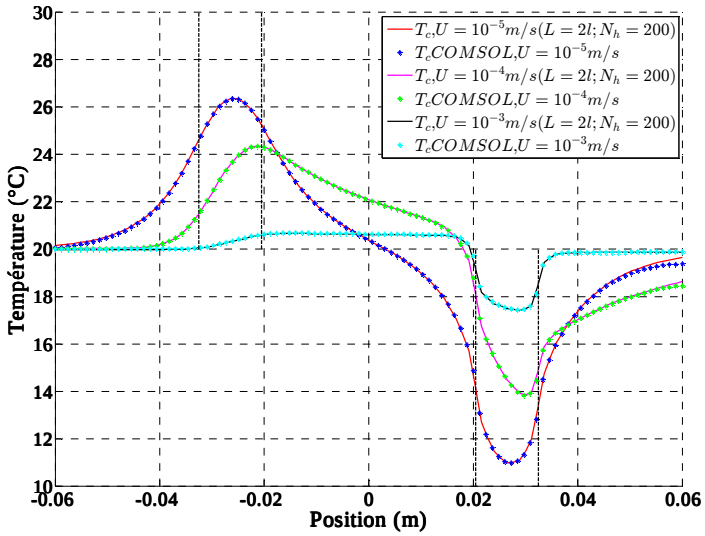


Figure 4: Comparaison des profils de températures sur la face froide externe calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U

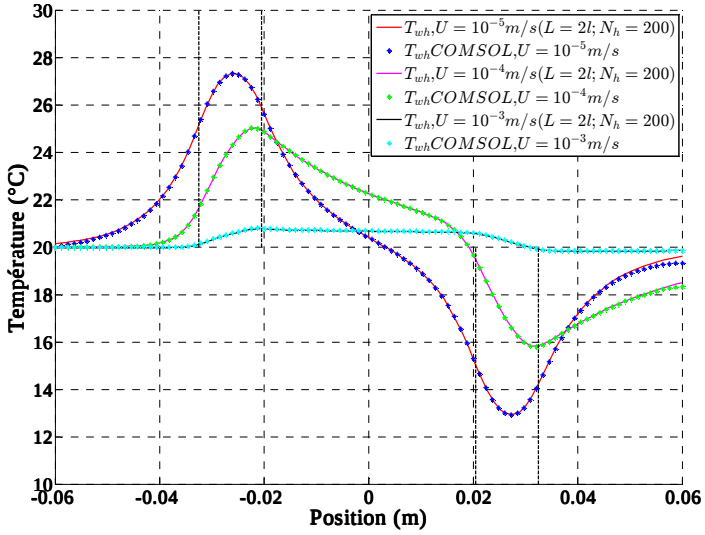


Figure 5: Comparaison des profils de températures sur la face chaude interne calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U

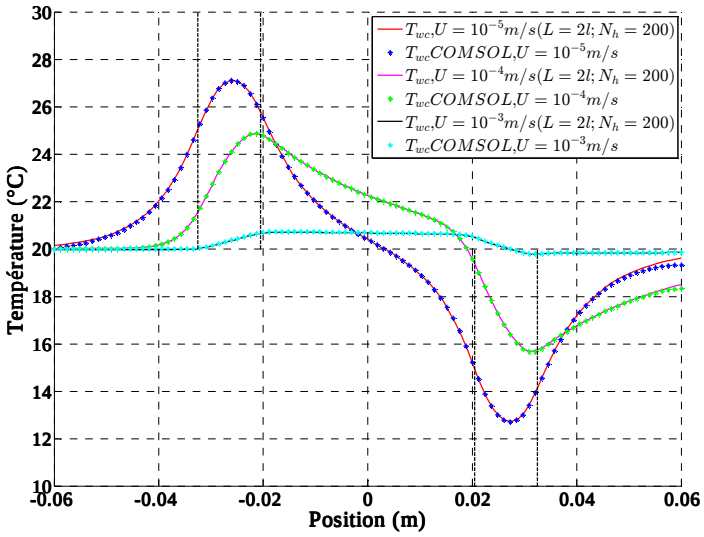


Figure 6: Comparaison des profils de températures sur la face froide interne calculés par le modèle analytique (quadripôle) et le code commercial (COMSOL) à différentes vitesses moyennes U

2.3.Calcul de température moyenne de mélange (bulk):

On peut dire maintenant que notre modèle est bien adapté à la problématique étudiée, et on peut aller plus loin. Comme il est déjà mentionné, l'un des objectifs de ce travail consiste de calculer température moyenne de mélange sans de coefficient d'échange convectif (h) à l'interface paroi/écoulement. Cette température de mélange est définie en $2D$ par la relation :

$$\theta_b(x) = \frac{1}{Ue_f}\int_0^{e_f} u(y)\theta(x,y)dy \tag{34}$$

En modèle de quadripôle, on sait que la vitesse dans chaque sous-couche est uniforme en y tandis que la température varie à une position x donnée. On note la température à chaque interface de la couche par (θ_{e_k} et $\theta_{e_{k-1}}$), la température de mélange s'écrit :

$$\theta_b(x) = \frac{1}{Ue_f}\sum_{k=1}^{K}\int_{e_{k-1}}^{e_k} u(y)\bar{\theta}_k(x)dy \qquad \text{avec} \qquad \bar{\theta}_k(x) = \frac{1}{2}\left(\theta(x,e_k) + \theta(x,e_{k-1})\right)$$

Donc la température de mélange peut être calculée sous la forme d'une somme finie:

$$\theta_b(x) = \frac{1}{Ue_f}\sum_{k=1}^{K} u_k\bar{\theta}_k(x) \tag{35}$$

La distribution de la température sur les faces latérales externes (les températures sur les faces chaude et froide) et la température de mélange correspondant à vitesse moyenne 10^{-5} m/s sont présentées sur la Figure 7.

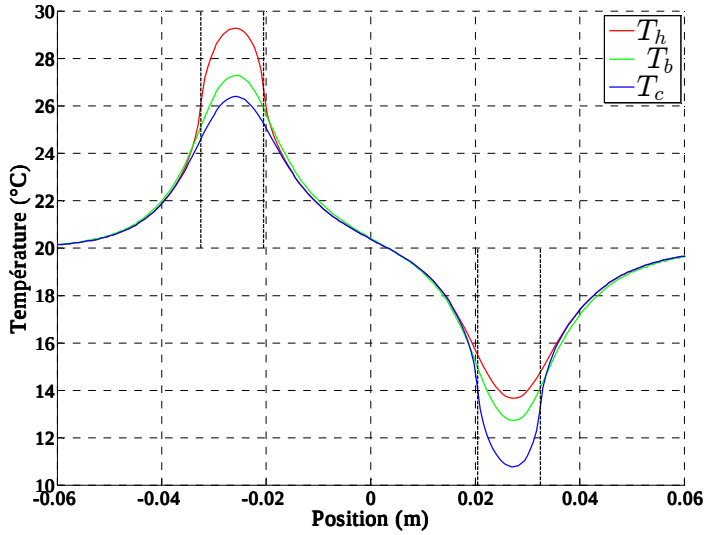


Figure 7: Température sur les faces externes et température de bulk à $U = 10^{-5}\ m/s$, $L = 2l$, $N_h = 100$ et $N_x = 100$

On peut simuler aussi par ce modèle la densité de flux sur les faces internes. On simule seulement ici le cas correspondant à un faible nombre de Péclet. Le flux sur la face chaude et sur la face froide interne, est représenté respectivement sur les figures 8 et 9.

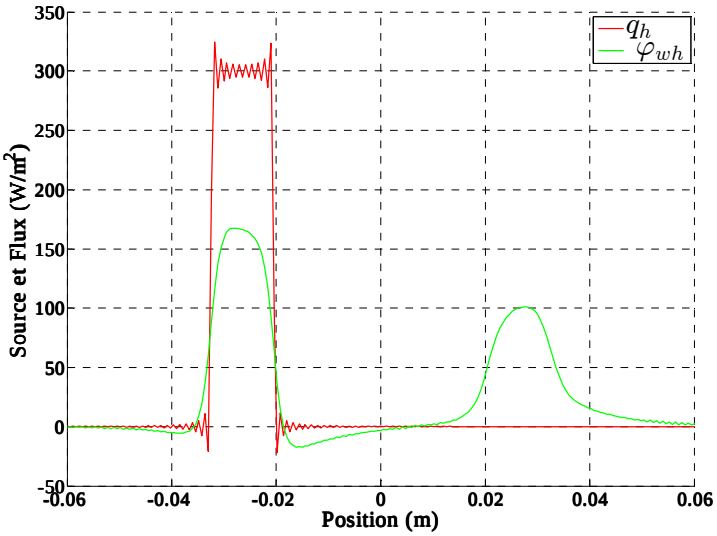


Figure 8: Source de chaleur sur la face chaude externe et le flux sur la face chaude interne, $U = 10^{-5}\ m/s$, $L = 2l$, $N_h = 100$ et $N_x = 100$

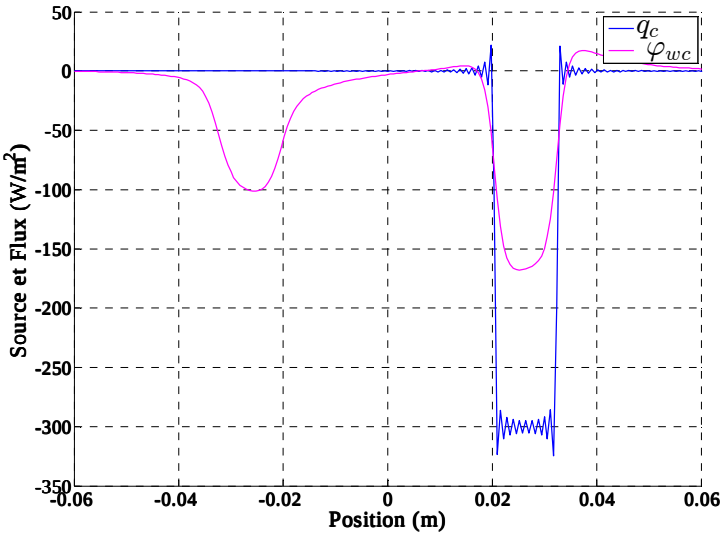


Figure 9: Source de chaleur sur la face froide externe et le flux sur la face froide interne, $U = 10^{-5}\ m/s$, $L = 2l$, $N_h = 100$ et $N_x = 100$

3. Description du banc experimental :

Le banc est constitué de deux plaques en polycarbonate ($\lambda_s = 0.215\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ et son émissivité $\varepsilon_{\Delta\lambda} = 0.95$) qui forment la partie centrale d'un canal (tri-couche) de 5mm d'épaisseur totale ($e_s = 2mm$ pour les parois, $e_f = 1mm$ pour le fluide), de largeur $W = 50mm$ et de longueur $L_{canal} = 60mm$.

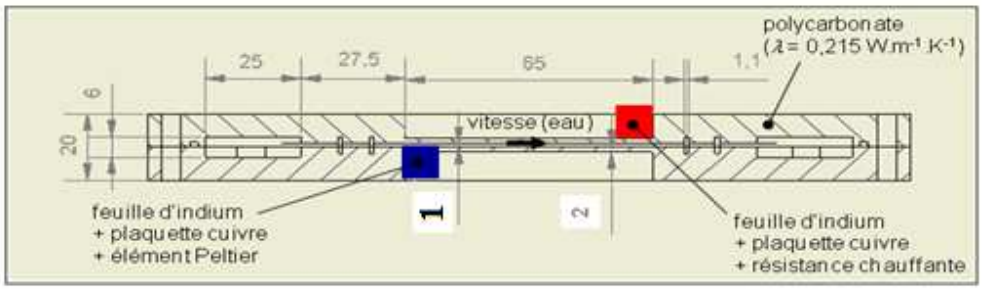


Figure 10: Modélisation de la tri-couche [7]

Le fluide étudié est l'eau ($\lambda_s = 0.63\ W.m^{-1}.K^{-1}$,$\rho c_f = 4186\ 10^3 J.m^3.K^{-1}$ à $T_\infty = 20$°C) circulant en circuit fermé. L'eau passe d'abord par un thermostat (Lauda) qui permet d'imposer une température constante ($T = T_\infty$) à l'entrée du canal. Le thermostat est représenté sur Figure 11,



Figure 11: Thermostat (Lauda)

Le fluide entre à travers le système par un distributeur à 4 entrées dans une chambre de tranquillisation. Le débit est imposé et mesuré par un système de pousse seringue réglable (cf (Figure 12)).

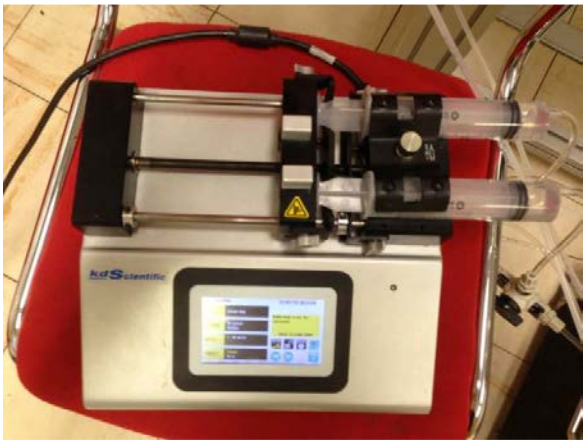


Figure 12: Système de pousse seringue

L'élément chauffant sur la face chaude (de surface de contact 0.012×0.05) est constitué d'une résistance chauffante, d'un bloc de cuivre et d'une feuille d'indium qui permet de réduire la résistance de contact. La résistance chauffante va permettre de piloter la température mesurée du bloc de cuivre T_{hot}. La température imposée peut être mesurée par thermocouple de type K placé à l'intérieur du bloc de cuivre. (cf (Figure 13)).

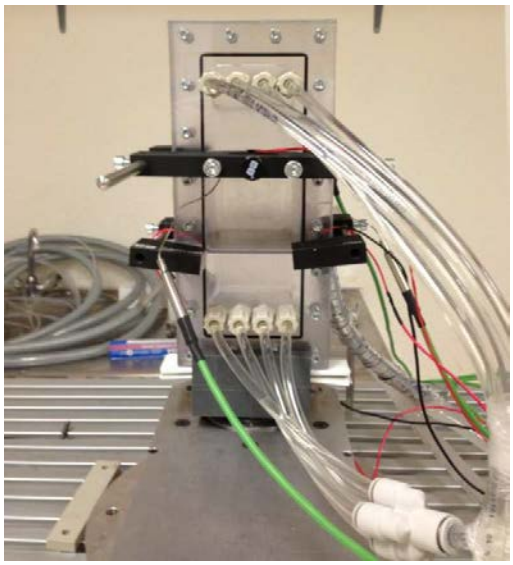


Figure 13: Face chaude

De l’autre coté sur la deuxième face externe (voir Figure 14), l’élément refroidissant T_{cold} est composé aussi d’une feuille d’indium, d’un bloc de cuivre couplé cette fois-ci à un module Peltier (de surface de contact 0.012×0.05) et d'une boite à eau qui maintient la température de la face extérieure du module constante. Les températures internes du fluide en entrée et en sortie du canal sont mesurées aussi par des thermocouples de type K.

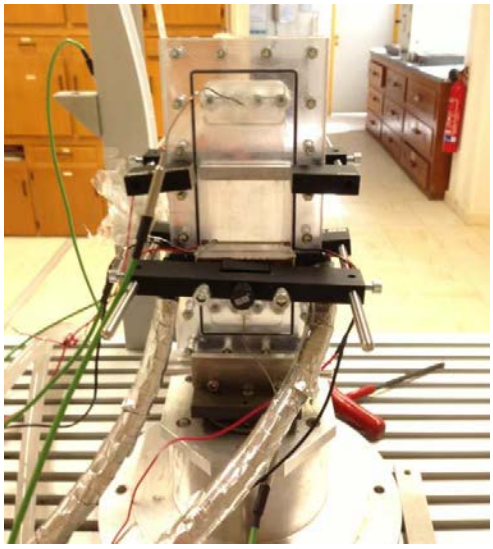


Figure 14: Face froide

Un système d’alimention électrique (cf (Figure 15)) est utilisé pour fournir la résistance chauffante et le module Peltier par la puissance électrique.

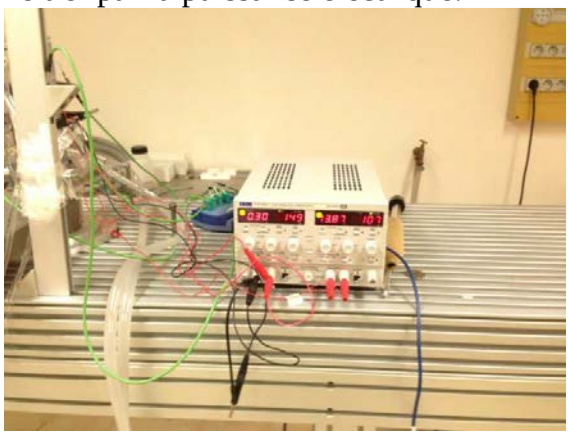


Figure 15: Système d’alimentions électrique

Une caméra infrarouge mesure l'évolution de la température sur les deux faces extérieures à l'aide d'un système pivotant. La camera utilisée ici JADE MWIR fonctionne dans la bande de longueur d'onde moyenne de l'infrarouge c'est-a-dire de 3 à 5 μm.

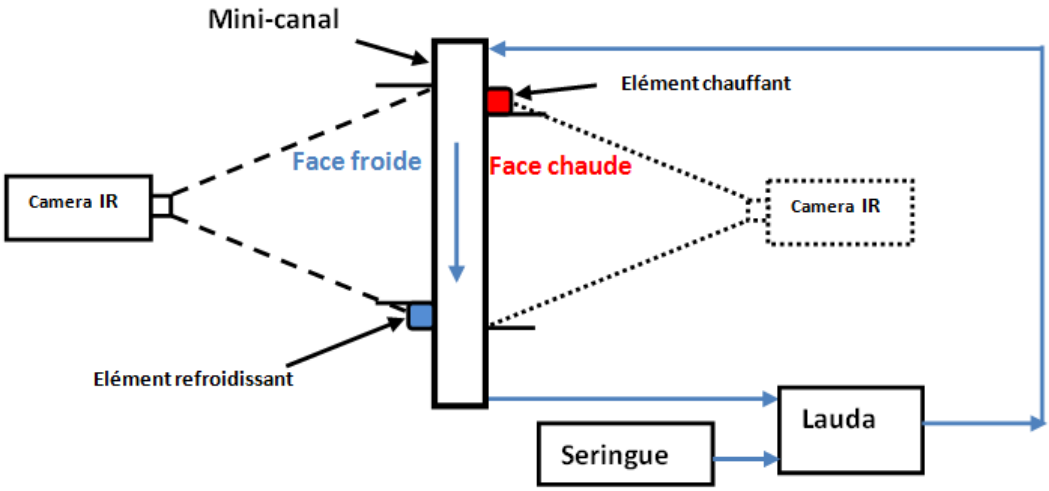


Figure 16: Schéma synoptique du dispositif expérimental

Da façon générale, la caméra infrarouge permet de mesurer la température d'une surface et ses variations temporelles et spatiales par la mesure de son rayonnement émis. Les détecteurs de rayonnement ici ne sont sensibles qu'à un certain intervalle spectral, généralement dans l'infrarouge. Autrement dit, ces appareils mesurent des rayonnements émis par tout corps dont la température est supérieure à 0 K: ces rayonnements ont des longueurs d'onde qui se situent dans l'infrarouge. Ensuit le rayonnement détecté (les photons incidents) est converti en signal électrique. Les fonctions de transfert photons/volts et volts/niveaux numériques sont des fonctions linéaires croissantes. La conversion des niveaux numériques renvoyés par la caméra en température peut se faire grâce à une fonction de transfert non linéaire. Le rôle de l'étalonnage est de définir cette fonction de transfert expérimentale (Annexe (2):).

4. Problème inverse :

Dans la section 2, on a vu que le modèle développé (quadripôle) est capable de prédire le comportement du problème étudié. La sortie de ce modèle dépend d'un certain nombre de grandeurs de structure qu'on range dans un vecteur $\boldsymbol{\beta}$ (qui regroupe les paramètres de l'équation d'état et les paramètres de l'équation de sortie). Elle dépend également de la grandeur d'entrée $\boldsymbol{U}$ (excitation). Ces grandeurs peuvent être regroupées dans un seul vecteur-paramètre, noté **x,** qui peut être écrit sous la forme: $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{U})$**,** pour un état initial nul. De façon générale, la réponse théorique de la modèle peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{y_{mo}} = \eta(t, \mathbf{x}) \tag{36}$$

Avec $\boldsymbol{y_{mo}}$ sortie du modèle ou variable dépendante (variable expliquée), η fonction ou structure du modèle, t variable indépendante ou variable explicative (ici variables spécial).

Comme on a vu précédemment, connaissant l'excitation $\boldsymbol{U}$ et le vecteur $\boldsymbol{\beta}$, on peut calculer la valeur de la variable dépendante. C'est ce que on l'appelle « problème direct », qui est représenté sur Figure 17.



Figure 17: Problème direct

Dans cette section, nous allons prendre le sens inverse (voir Figure 18): à partir de l'observation expérimentale des variables dépendantes ou variables expliquées et en utilisant le modèle quadripolaire développé précédemment, nous allons montrer comment peut-on remonter aux causes et aux grandeurs d'influences. Tout d'abord, on démarre par la partie expérimentale, ensuite, pour calculer les conditions internes (à l'aide de modèle quadripôle) il faut passer par l'estimation des paramètres qui exige d'étudier la sensibilité de sortie du modèle par rapport à la grandeur que l'on veut estimer.



Figure 18: Problème inverse

4.1.Estimation de paramètres :

L'estimation de paramètres consiste à obtenir des valeurs approchées des paramètres recherchés à partir des données expérimentales grâce à une instrumentation adaptée. Il faut souligner que la performance d'un modèle dépend de la performance et de la méthode utilisé pour estimer les paramètres.

Une classification importante des problèmes directs se rapporte à leur éventuelle linéarité. Si l'on appelle $\boldsymbol{X}(t)$ l'état du système, $\boldsymbol{X_0}$ l'état initial, $\boldsymbol{\beta}$ les paramètres du système et de l'instrumentation, $\boldsymbol{U}$ le vecteur des entrées et $\boldsymbol{y_{mo}}$ celui des sorties, on dit que le système est linéaire par rapport à ses paramètres, si

$$\boldsymbol{y_{mo}}(t; \alpha_1\boldsymbol{\beta_1} + \alpha_2\boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{X_0}) = \alpha_1\boldsymbol{y_{mo}}(t; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{X_0}) + \alpha_2\boldsymbol{y_{mo}}(t; \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{X_0}) \quad (37a)$$

Linéarité par rapport aux entrées, si

$$\boldsymbol{y_{mo}}(t; \boldsymbol{\beta}, \alpha_1\boldsymbol{U_1} + \alpha_2\boldsymbol{U_2}, \boldsymbol{X_0}) = \alpha_1\boldsymbol{y_{mo}}(t, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{X_0}) + \alpha_2\boldsymbol{y_{mo}}(t, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{U_2}, \boldsymbol{X_0}) \quad (37b)$$

Où α_1 et α_2 sont deux réels quelconques.

4.1.1. Estimations de paramètre d'un modèle linaire:

Lorsque l'on dispose de m mesures rangées dans un vecteur y, l'écriture vectorielle de la grandeur de mesure peut être écrite sous la forme:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_{mo}}(x^*) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (38)$$

Où x^* est la valeur exacte mais inconnue du vecteur paramètre $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ est l'erreur de mesure.

Pour un modèle linéaire l'équation (38) peut être écrite comme

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}x^* + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (39)$$

Avec $\boldsymbol{S}$ est la matrice de sensibilité

L'estimation paramétrique ici consiste à estimer les n paramètres du vecteur x à partir de m mesures. Comme il existe une erreur de mesure $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur y, donc il s'agit d'estimation $\hat{x}$ de vecteur x et le vecteur estimé $\hat{x}$ sera différent de x^*.

L'estimateur des moindres carrée ordinaires $\hat{x}_{MCO}$ est le vecteur x_{opt} qui minimise la quantité $J_{MCO}(x)$ qui représente la différance entre les mesures expérimentale et la sortie du modèle calculé par vecteur x quelconque.

$$J_{MCO}(x) = \|y - \boldsymbol{S}x\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left[y_i - \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{S}_j(t_i)x_j\right]^2 = (y - \boldsymbol{S}x)^T(y - \boldsymbol{S}x) \qquad (40)$$

Le minimum de $J_{MCO}(x)$ par rapport x, peut être écrit comme :

$$\nabla_x J_{MCO}(x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S}^T(y - \boldsymbol{S}\hat{x}_{MCO}) = 0$$

La forme finale de cette estimation peut être écrite comme :

$$\hat{x}_{MCO} = (\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}^T y \qquad (41)$$

Si la matrice de sensibilité $\boldsymbol{S}$ est carrée (le nombre de mesures m est égal au nombre de paramètre n), dans ce cas l'équation précédente devient :

$$\hat{x}_{MCO} = \boldsymbol{S}^{-1}y \qquad (42)$$

4.1.2. Estimations de paramètre d'un modèle non-linaire:

L'équation (38) est valable pour un modèle linéaire ou non. Le critère J_{MCO} représente l'écart quadratique entre les sorties du modèle $\boldsymbol{y_{mo}}(x)$ et les sorties mesurées $\boldsymbol{y}$; peut s'écrire comme :

$$J_{MCO}(x) = \|y - y_{mo}(x)\|^2 = \big(y - y_{mo}(x)\big)^T\big(y - y_{mo}(x)\big) \qquad (43)$$

Dans le cas d'un modèle linéaire (section 4.1.1), la fonctionnelle J_{MCO} est quadratique (et donc concave). Dans le cas présent, la fonctionnelle n'est plus quadratique, il faut mettre en œuvre une méthode itérative (méthode de descente). La Figure 19 montre le principe de l'estimation des paramètres d'un modèle.

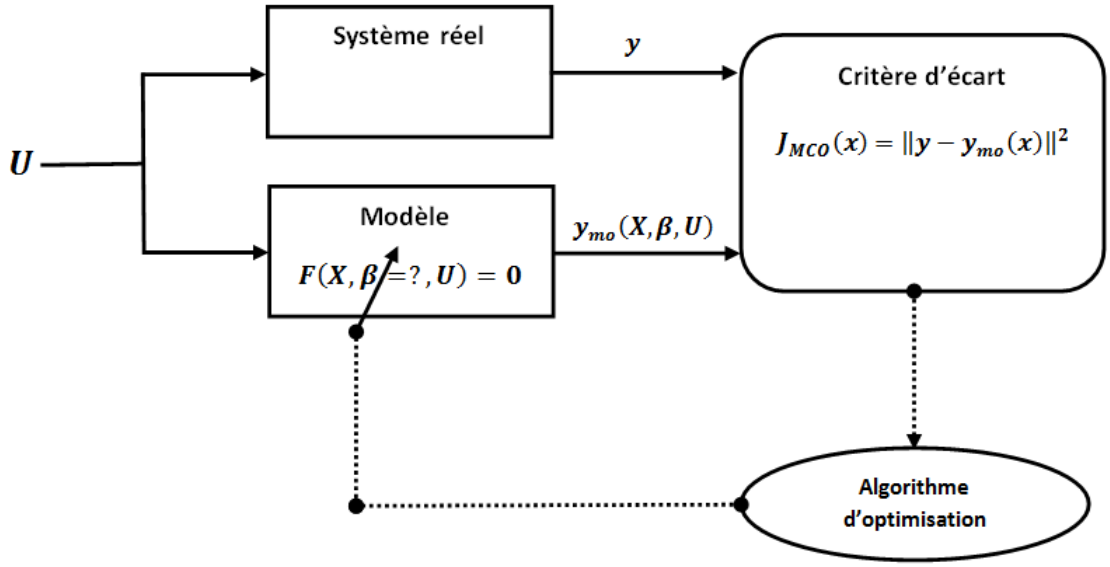


Figure 19: Principe de l'estimation des paramètres d'un modèle,[11]

L'algorithme d'optimisation d'une méthode de descente repose sur la recherche du vecteur paramètre optimal x_{opt} qui correspond au minimum de l'écart quadratique $J(x)$.

De façon générale, le principe consiste à s'approcher du minimum d'une minière itérative, associée à une stratégie. Dans la recherche d'un minimum, on peut être confronté au problème du minimum local représenté sur la Figure 20.

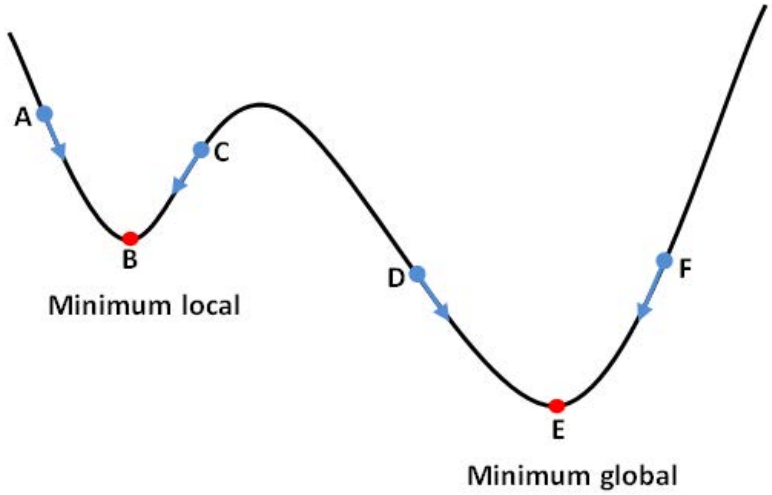


Figure 20: Le minimum local et le minimum global (un seul paramètre)

On voit ici qu'une initialisation x^0 faite en $A\ ou\ C$ mènera vers un minimum local B alors qu'une initialisation en $D\ ou\ F$ va conduire vers le minimum réel E. Pour assurer qu'on tombe sur le minimum cherché, il faut initialiser x^0 avec des valeurs physiquement plausibles et faire plusieurs essais avec des vecteurs x^0différents.

4.2.Calcul des conditions internes :

Pour atteindre l'objectif principal de ce travail (estimation des conditions internes à partir de mesures expérimentales sur les faces externes), nous avons besoin d'estimer le spectre de la température à partir des mesures expérimentales.

L'équation du retour de Fourier (inversion du spectre de Fourier) (cf équation 32) peut être écrite sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta(x_1) \\ \vdots \\ \theta(x_{N_x}) \end{bmatrix}_{h\ ou\ c} \approx \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} exp^{i\alpha_{-N_h+1}x_1} & \cdots & exp^{i\alpha_{N_h}x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ exp^{i\alpha_{-N_h+1}x_{N_x}} & \cdots & exp^{i\alpha_{N_h}x_{N_x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{-N_h+1} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{N_h} \end{bmatrix}_{h\ ou\ c}$$

Autrement

$$\boldsymbol{\theta_{h\ ou\ c}} \approx \boldsymbol{G\tilde{\theta}_{h\ ou\ c}} \approx (\boldsymbol{UWV^T})\boldsymbol{\tilde{\theta}_{h\ ou\ c}} \tag{44}$$

Où $\boldsymbol{\theta}$ est vecteur des températures mesurées expérimentalement sur les faces externes (chaude et froide) de dimension (N_x) , $\boldsymbol{G}$ est une matrice de transformation de dimension $(N_x, 2N_h)$ et $\boldsymbol{\tilde{\theta}}$ est le vecteur spectre de dimension $(2N_h)$.

L'estimation du spectre $\boldsymbol{\tilde{\theta}_{h\ ou\ c}}$ peut être effectuée par la minimisation de l'écart quadratique

$$J(x) = \left\| \boldsymbol{\theta_{h\ ou\ c}} - \boldsymbol{G\tilde{\theta}_{h\ ou\ c}} \right\|^2 \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\hat{\tilde{\theta}}_{h\ ou\ c}} = (\boldsymbol{G^*G})^{-1}\boldsymbol{G^*\theta_{h\ ou\ c}} \tag{46}$$

Où $\boldsymbol{G^*}$ désigne l'adjoint (transposée de la matrice des coefficients conjugués) de la matrice $\boldsymbol{G}$

L'inversion d'une matrice mal-conditionnée avec la présence d'un bruit de mesure sur $\boldsymbol{\theta_{h\,ou\,c}}$ conduit à une estimation erronée du spectre de la température. Il faut régulariser la matrice $(\boldsymbol{G^{*}G})$ pour la rendre bien-conditionnée. Parmi les méthodes de régularisation existantes, dont certaines s'avèrent plus ou moins adaptées à certains types de problèmes inverses, deux méthodes basées sur la régularisation SVD sont proposés: la première TSVD (Truncated Singular Value Decomposition), et la deuxième ILSVD (Infinite Levels Singular Value Decoposition) [14].

SVD de la matrice $\boldsymbol{G_{m\times n}}$ consiste à écrire cette matrice sous la forme d'un produit matricielle de trois matrices $(\boldsymbol{G = UWV^{T}})$: $\boldsymbol{U_{m\times m}}$ vecteur singulière à gauche, $\boldsymbol{W}$ matrice de valeurs singulière, $\boldsymbol{V^{T}_{n\times n}}$ vecteur singulière à droit.

Ces deux techniques de (TSVD et ILSVD) permettent d'estimer le vecteur de spectre de température sur les deux faces externes à partir du vecteur de la température expérimentale. A l'aide de cette estimation et en utilisant le modèle quadripolaire nous allons calculer les conditions internes (températures et flux sur les faces internes avant d'accéder à la température de mélange).

4.2.1. Décomposition en Valeurs x Singulières Tronquée (TSVD):

Dans cette méthode, on estime le spectre de température $\boldsymbol{\widetilde{\theta}_{h\,ou\,c}}$ en utilisant la matrice $\boldsymbol{G'}$ **:**

$$\boldsymbol{\theta_{h\,ou\,c} \approx G'\,\widetilde{\theta}_{h\,ou\,c}}$$

Où la matrice $\boldsymbol{G'}$ est la même structure de $\boldsymbol{G}$ sauf qu'elle est calculée par un nombre d'harmoniques plus petits $\left(N_h' < \frac{N_x}{2}\right)$. Comme $\boldsymbol{G'}$ n'est pas une matrice carrée, le vecteur estimé du spectre de température peut être écrit sous la forme:

$$\boldsymbol{\widetilde{\theta}_{h\,ou\,c} = (G^{*\prime}\,G')^{-1}\,G^{*\prime}\theta_{h\,ou\,c}} \qquad (47)$$

Cela correspond à (la décomposition en valeurs singulières tronquée) de la matrice originale $\boldsymbol{G}$. Où $\boldsymbol{G^{*\prime}}$ désigne l'adjoint de la matrice $\boldsymbol{G'}$.

Cette estimation est le résultat de la minimisation du critère quadratique $J(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \left\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{G}'\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right\|^2$. Cette minimisation se fait en incrémentant le nombre d'harmoniques N_h' jusqu'à atteindre un critère d'arrêt défini par :

- Le résidu quadratique moyen $r = \sqrt{\frac{J(\tilde{\theta})}{N_x}}$ inférieur à (l'écart type du bruit de mesure)[3].
- L'évolution de r entre deux harmoniques successives inférieure à 1%.

4.2.2. Décomposition en Valeurs Singulières à Niveaux Infinis (ILSVD):

Cette technique d'estimation du vecteur $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{h\,ou\,c}}$ est le résultat de la minimisation du critère quadratique:

$$J(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \left\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{G}^{"}\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right\|^2.$$

Où la matrice $\boldsymbol{G}^{"}$ est la même structure de G sauf qu'elle est calculé par un nombre d'harmonique $\left(N_h^{"} = \frac{N_x}{2}\right)$. L'avantage de cette technique est on aura degré de liberté plus que la technique précédente.

La solution donc est donnée par :

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{h\,ou\,c}} = (\boldsymbol{G}^{"})^{-1}\,\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{h\,ou\,c}} = \left(\boldsymbol{U}^{"}\,\boldsymbol{S}^{"}\,\boldsymbol{V}^{"\boldsymbol{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{h\,ou\,c}} = \boldsymbol{V}^{"}(\boldsymbol{S}^{"})^{-1}(\boldsymbol{U}^{"})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{h\,ou\,c}} \qquad (48)$$

Les dernières valeurs singulière de matrice $(\boldsymbol{G}^{"})^{-1}$ (les dernières éléments diagonales de $(\boldsymbol{S}^{"})^{-1}$) sont trop petits (ne sont pas zéro) à cause de la présence bruit de mesure sur $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{h\,ou\,c}}$ cela conduisent à exploser la solution de l'inversion. Pour s'affranchir à ce problème, seulement les $\boldsymbol{\alpha}$ premières valeurs propres sont gardées de la matrice $\boldsymbol{S}^{-1}$.

$$\textbf{Pour}\begin{cases} \boldsymbol{i \le \alpha} & \boldsymbol{t_{ii} = \frac{1}{S_{ii}}} \\ \boldsymbol{i > \alpha} & \boldsymbol{t_{ii} = 0} \end{cases}$$

Cette minimisation est faite en incrémentant le nombre α jusqu'à atteindre un résidu quadratique moyen le plus petit possible. L'avantage de cette technique, on aura ici dégrée de liberté plus que la technique précédente (TSVD).

[3] Calcul de l'écart type du bruit de mesure est représenté dans Annexe (3):

5. Résultats :

5.1. Measures:

Dans cette section, nous allons présenter les résultats expérimentaux issus des mesures thermographiques du profil de températures sur les faces externes (latérales) du mini-canal à différentes vitesses moyennes d'écoulement descendant ($U = 10^{-3}, 10^{-4}\ et\ 10^{-5}\ m/s$). Le nombre de Reynolds et le nombre de Péclet correspondants sont résumés dans tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{U}$ (m/s)	$\boldsymbol{R_e}$	$\boldsymbol{P_e}$
10^{-3}	1.96	13
10^{-4}	1.96×10^{-1}	1.3
10^{-5}	1.96×10^{-2}	0.13

Tableau 4 : Vitesse moyenne et nombres sans dimension correspondants

Le liquide utilisé dans ces expériences, est de l'eau qui entre dans le canal à une température imposée et tel que $T_{in} = T_\infty$. Durant ces expériences, l'excitation sur les faces externes était faite à une température imposée (T_{hot}, T_{cold}) au lieu du flux imposé. Les deux températures (T_{hot}, T_{cold}) sont choisies tel que $\frac{T_{hot}+T_{cold}}{2} \approx T_\infty$. A partir de ce choix, la température moyenne du système $\frac{T_{in}+T_{out}}{2}$ sera très proche de T_∞, ce qui permet d'éviter les effets non linéaires (thermo dépendance de la viscosité cinématique ϑ_f)

- $\mathrm{U} = 10^{-3}\ \mathrm{m/s}$:

On présente sur les figures 21 et 22 les résultats des mesures thermographiques des champs de température sur les deux faces externes (chaude et froide respectivement) du mini-canal , pour une vitesse moyenne $\mathrm{U} = 10^{-3}\ \mathrm{m/s}$, ce qui est correspond à un fort nombre de Péclet. Une partie du champ observé est cachée par le dispositif expérimental. Cette partie correspond à l'endroit où les températures sont mesurés à l'aide d'un thermocouple. La figure 23 représente les profils de température sur les faces externes froide et chaude observés par la caméra infrarouge et le thermocouple (dans les deux blocs de cuivre).

U (m/s)	T_∞ (°C)	T_{in} (°C)	T_{hot} (°C)	T_{cold} (°C)	T_{out} (°C)
10^{-3}	23.2	23.3	29.7	18.6	23.3

Tableau 5 : Paramètres de manipulation pour $\mathrm{U} = 10^{-3}\ \mathrm{m/s}$

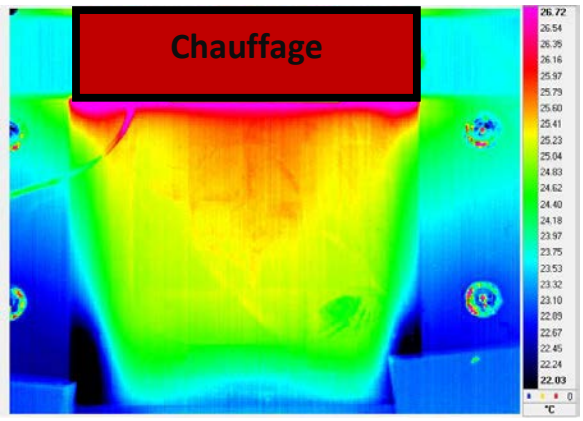


Figure 21: Champ de température sur la face chaude,

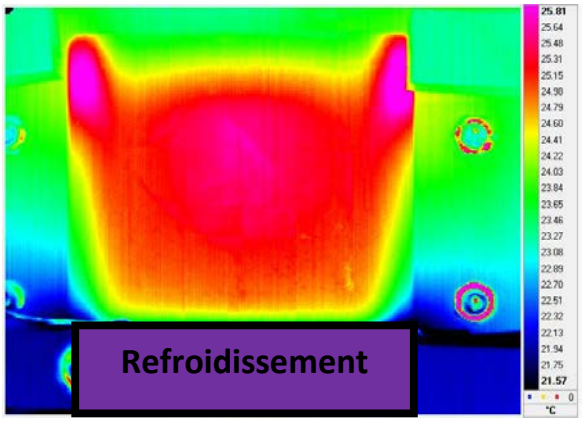


Figure 22: Champ de température sur la face froide,

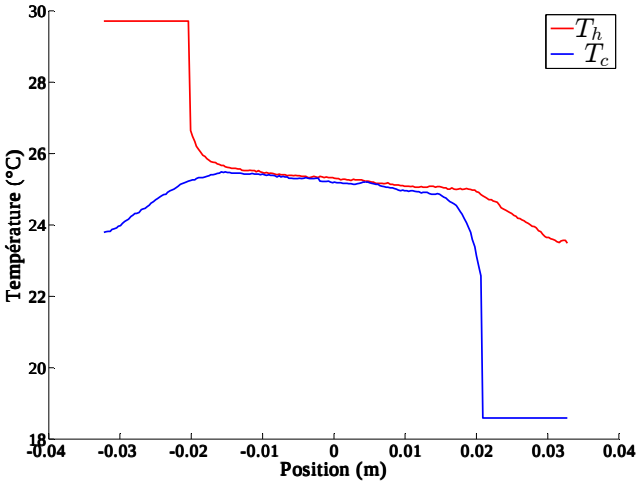


Figure 23: Profils de température sur les faces externes, ,

Après la position de chauffage et avant la positon de refroidissement (l'intervalle), on constate que le profil de température sur la face chaude est identique au profil sur la face froide, ce comportement a été vérifié par une simulation sur Comsol. En pratique, nous travaillons avec une fréquence de tram de , et nous moyennons trams pour produire une image thermique (voir figures 21, 22, 24, 25, 27 et28). Ensuite 5 lignes verticales adjacentes (colonnes de pixels) sont sélectionnées et moyennées pour obtenir des profils de température , figure 23, 26 et 29.

- :

De la même manière que présentée précédemment, on représente les résultats obtenus pour un nombre de Péclet intermédiaire. Le champ de température sur la face froide et sur la face chaude est représenté respectivement sur les figures 24 et 25 et les profils de température correspondant sont représentés sur la figure 26.

	22.5	22.7	25.5	18.2	21.6

Tableau 6 : Paramètres de manipulation pour

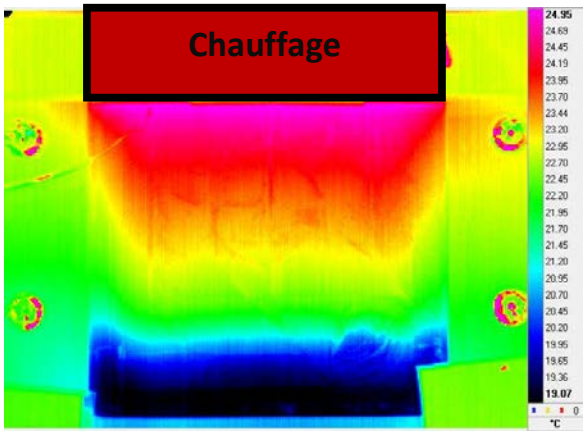


Figure 25: Champ de température sur la face chaude,

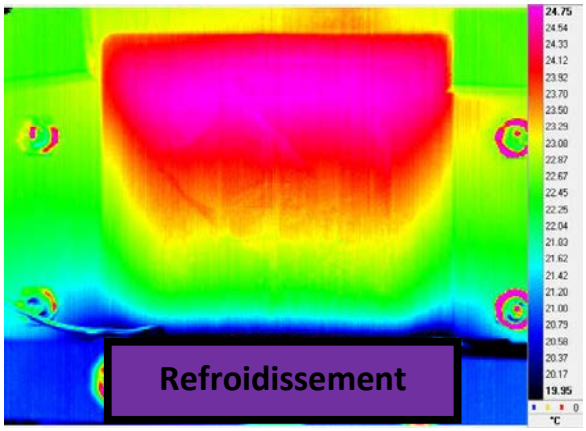


Figure 24: Champ de température sur la face froide,

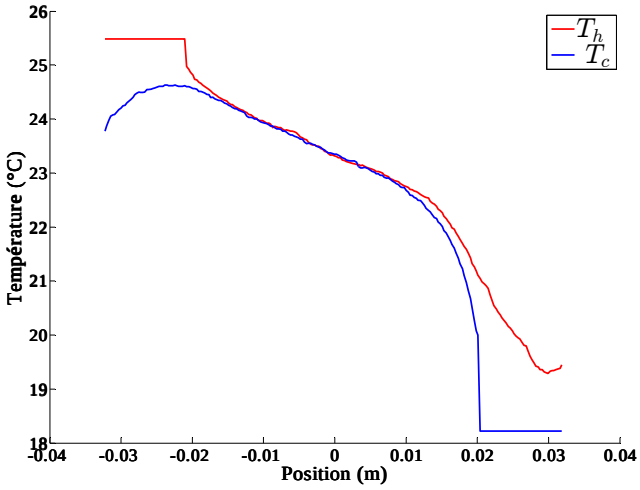


Figure 26: Profils de température sur les faces externes, ,

- :

Les résultats expérimentaux correspondants à faible nombre de Peclét :

	22.5	22.4	24.9	17	21.9

Tableau 7 : Paramètres de manipulation pour

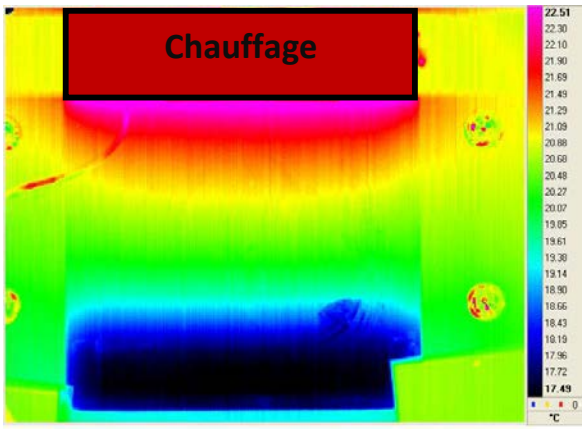


Figure 27: Champ de température sur la face chaude,

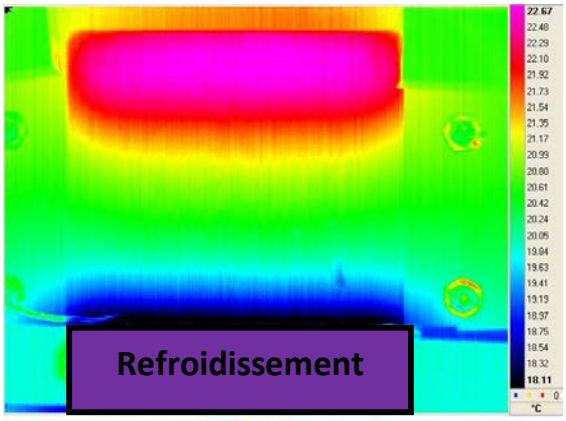


Figure 28: Champ de température sur la face froide,

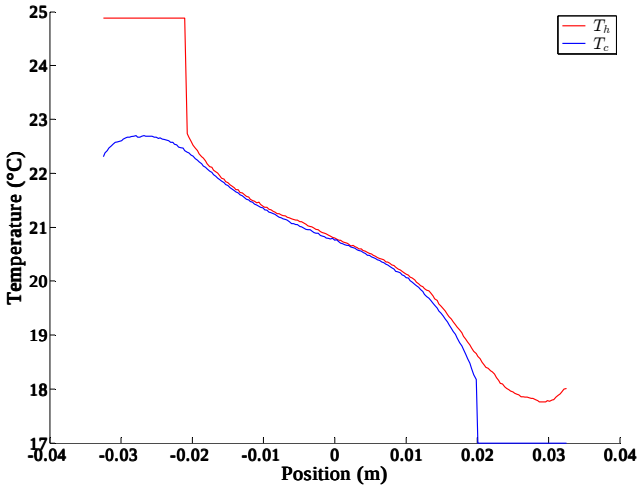


Figure 29: Profils de température sur les faces externes, ,

5.2.Résultats de l'inversion :

Dans cette section, nous allons montrer les résultats de l'estimation des conditions internes à partir des profils de température obtenus expérimentalement.

Tout d'abord, on commence par l'estimation des paramètres structurels que l'on ne peut pas mesurer expérimentalement. On termine l'inversion par la visualisation des résultats de l'estimation des conditions internes obtenus par les deux techniques (TSVD et ILSVD). Dans ces estimations (l'estimation des paramètres structurels et l'estimation des conditions internes), nous allons utiliser la totalité de la profil (sur l'intervalle$[-0.0325\ 0.0325]$). Une partie de ce profil (l'intervalle $[-0.0325\ 0.0205]$ sur la face chaude et l'intervalle $[0.0205\ 0.0325]$ sur la face froide), est mesurée par un thermocouple. Ces intervalles ont été divisés en un nombre de pixels fictifs (N_{xf}) proportionnel à leur longueur pour chaque manipulation. En pratique, on a utilisé un nombre N_x de pixels total entre 226 et 230 dont N_{xf} entre 43 et 41 pixels fictifs.

5.2.1. Estimation des grandeurs structurelles :

On cherche ici estimer le coefficient moyen de transfert convectif naturel h sur les faces latérales externes (face d'échauffement et refroidissement) du mini-canal. Cette estimation consiste à utiliser le profil de température sur la face externe, sur laquelle on cherche à estimer ce coefficient.

Pour évaluer en amont la faisabilité d'une inversion de mesures, il faut passer par l'étude de la sensibilité (sensibilité de la grandeur mesurée par rapport à la grandeur que l'on veut estimer).

Il existe de multiples façons de calculer les coefficients de sensibilité pour un modèle non dérivable (c'est le cas ici). On représente une méthode simple qui consiste à faire une approximation de la dérivée partielle, cette méthode peut être définie sous la forme :

$$S_h \approx h\frac{T(h+\Delta h)-T(h-\Delta h)}{2\Delta h} \tag{49}$$

En pratique, on choisi une valeur de Δh très petite devant h.

Sur 30, 31 et 32 On présente les courbes de sensibilité de la température à différent vitesse moyenne, pour $\Delta h = 10^{-2}\,\frac{W}{m^2.K}$. On constate que à forte vitesse moyenne, la température sur les faces latérales a une faible sensibilité par rapport à h. On constate aussi que cette sensibilité augmente plus que la vitesse moyenne diminue.

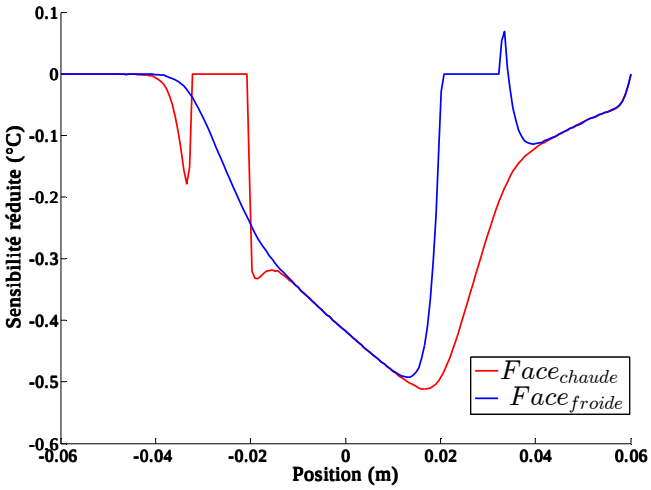


Figure 30: Distribution de sensibilité réduite à $= 10^{-3}\mathrm{m/s}$, (COMSOL, $\mathrm{h} = 10\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$)

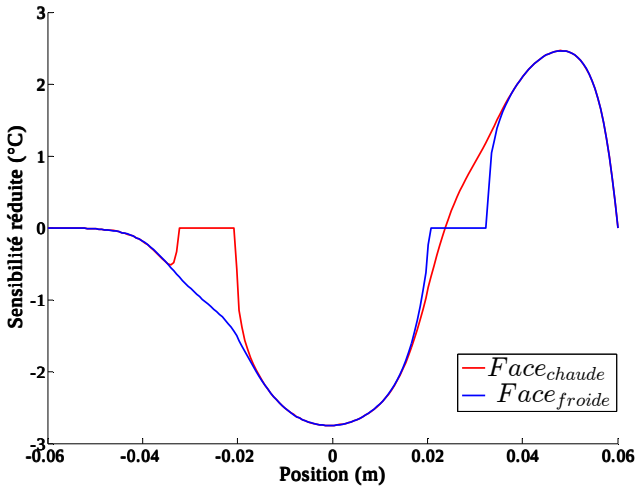


Figure 31: Distribution de sensibilité à $\mathrm{U} = 10^{-4}\mathrm{m/s}$, (COMSOL, $\mathrm{h} = 10\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$)

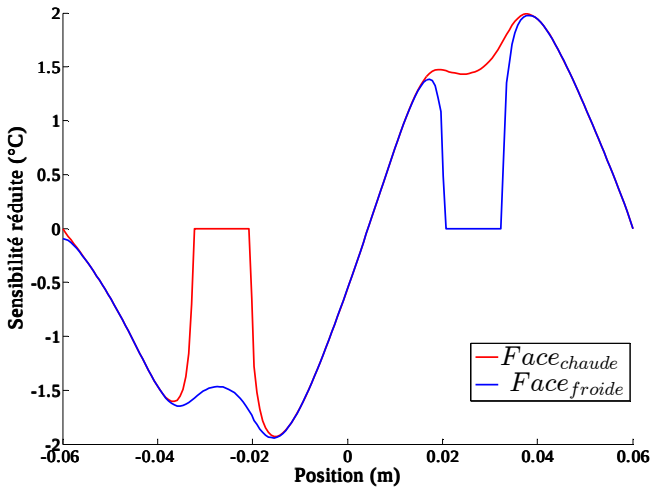


Figure 32: Distribution de sensibilité à $\mathrm{U} = 10^{-5}\mathrm{m/s}$, (COMSOL, $\mathrm{h} = 10\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$)

Donc on peut dire qu'à une vitesse débitante élevée, la sensibilité de la température par rapport à h n'est pas suffisante pour estimer le coefficient de l'échange convectif. C'est la raison pour la quelle, dans ce travail, nous allons estimer h à une faible vitesse moyenne (à 10^{-5} m/s), ensuite, nous allons supposer que $\hat{\mathrm{h}}_{10^{-5}} = \hat{\mathrm{h}}_{10^{-4}} = \hat{\mathrm{h}}_{10^{-3}}$.

En partant du profil de température sur la face chaude (figure 29), l'estimation du coefficient d'échange convectif sur la face chaude h est effectuée par la minimisation du critère quadratique $\boldsymbol{J}$ qui repose sur l'écart entre le profil de température sur la face chaude $T_h(x)$ mesurée et les réponses du modèle au paramètre estimé $\hat{h}$:

$$J = \sum_{i=1}^{m} \left(T_h^{exp}(x_i) - T(x_i; \hat{h}) \right)^2 \qquad (50)$$

Etant donnée que les variables dépendantes ou les sorties du modèle (le vecteur de température), ne dépendent pas linéairement des avec les variables structurelles que l'on cherche à estimer (coefficient d'échange convectif), on travaille sur un modèle non-linéaire par rapport à son paramètre. Dans cette étude, la procédure de minimisation utilise une méthode de programmation non linéaire basée sur «The Trust region algorithm » (MATLAB [15], [16]).

Le coefficient d'échange obtenu après la minimisation à faible vitesse, est $\hat{h} = 8.73 \frac{W}{m^2.K}$ avec un résidu quadratique moyen $\left(r = \sqrt{\frac{J(\tilde{h})}{N_x}}\right)$ de l'ordre 0.32°C.

5.2.2. Conditions internes:

Dans cette section nous allons montrer les résultats de l'estimation des conditions internes obtenues par les deux techniques (TSVD et ILSVD), pour chaque vitesse moyenne individuellement.

- $U = 10^{-3}\ m/s$:

On représente sur la figure (33) et la figure (34), les résultats d'inversion pour un paramétrage donné de la température sur les faces externes. La figure (33) représente les profils de température recalculée à partir des spectres estimés par TSVD avec $N_h' = 6$ (12 harmoniques). En utilisant cette technique, on arrive à reconstruire (recalculer) les profils de température sur les faces externes avec un écart quadratique de l'ordre $(r = 0.44\ ℃)$ pour la face froide et $(r = 0.33\ ℃)$ pour la face chaude. On peut améliorer ces résultats (un écart quadratique plus petit) en augmentant les nombre d'harmoniques. Cette augmentation conduit à une explosion des profils de flux sur les faces internes et par conséquent les profils de températures internes explosent aussi.

Les résultats de paramétrage obtenu par la deuxième technique (ILSVD), sont représentés dans la figure (34). Les résultats obtenu sont significativement meilleurs (l'écart quadratique de l'ordre $(r = 0.23\ ℃)$ pour la face froide et $(r = 0.18\ ℃)$ pour la face chaude). Le nombre d'harmoniques utilisé ici est égal au nombre de mesures$(N_x = 2N_h^{"} =)$, autrement dire, la matrice de transformation $(G^{"})$ est carrée. Dans cette estimation les $\alpha = 33$, premières valeurs singulières de $(G^{"})$ sont gardé et les suivantes sont mises à $+\infty$.

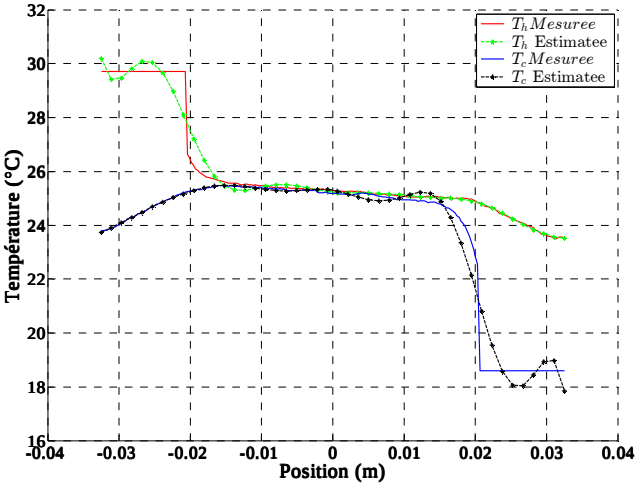


Figure 33 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par TSVD sur les faces externes à $U = 10^{-3}\ m/s$, $N_h' = 6$, $N_x = 226$

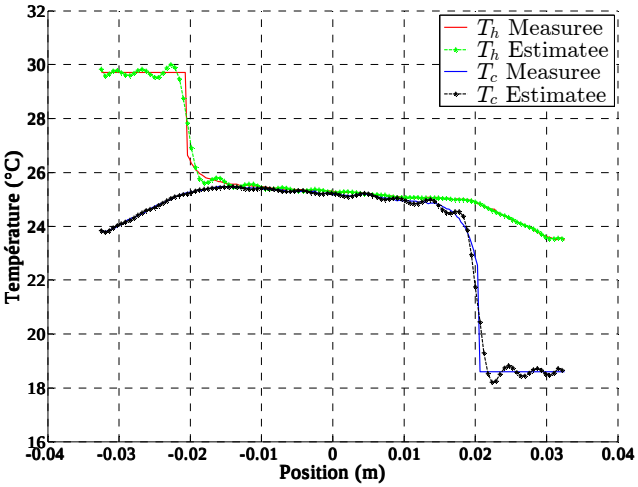


Figure 34 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par ILSVD sur les faces externes à $U = 10^{-3}\ m/s$, $2N_h'' = N_x = 226$, $\alpha = 33$

Les flux sur les faces internes et source de chaleur sur les faces externes obtenues par TSVD et ILSVD, sont représentés dans la figure (35) et dans la figure (36) respectivement. Dans la figure (37) et la figure(38), on représente les profils de température mesurée et estimée par TSVD et ILSVD respectivement.

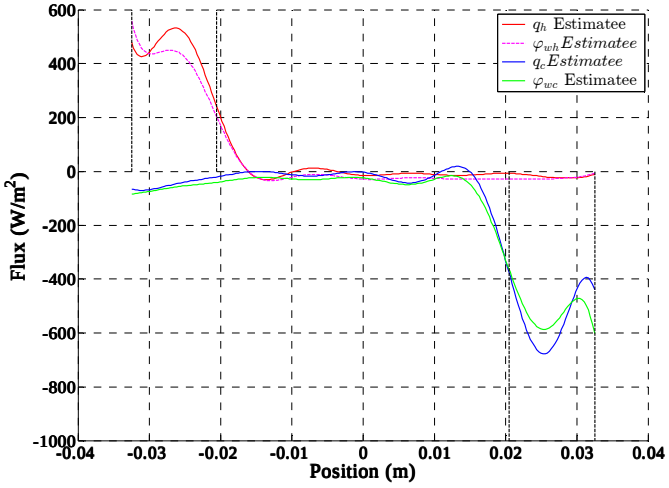


Figure 35 : Flux et source de chaleur estimé par TSVD à $U = 10^{-3}\ m/s$, $N_h' = 6$, $N_x = 226$

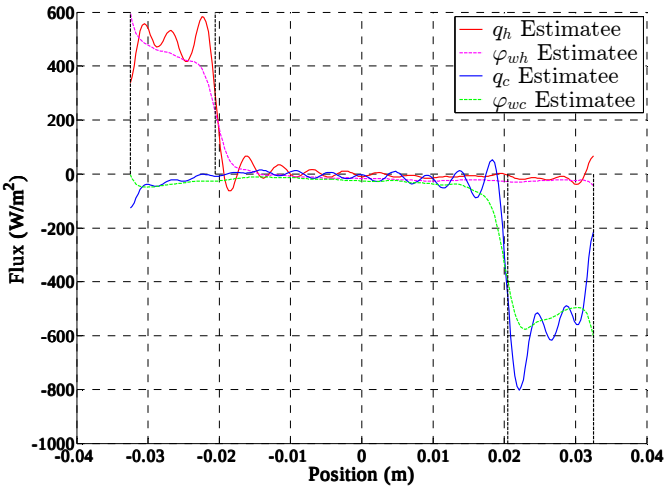


Figure 36 : Flux et source de chaleur estimé par ILSVD à $= 10^{-3}\ m/s$, $2N_h^{"} = N_x = 226$, $\alpha = 33$

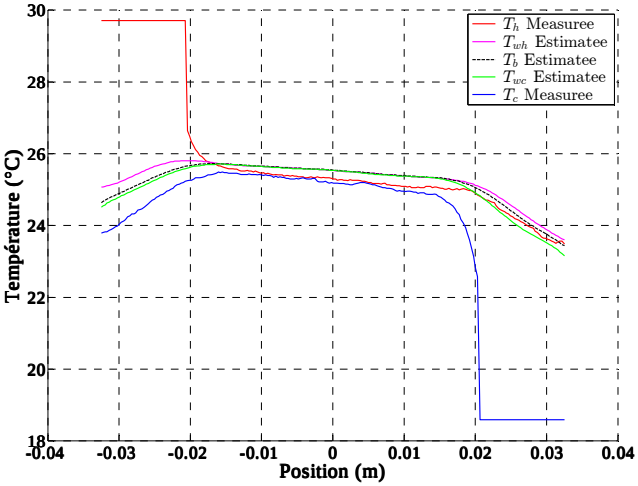


Figure 37 : Températures mesurées externes et estimée internes par TSVD à $U = 10^{-3}$ m/s, $N_h' = 6$, $N_x = 226$

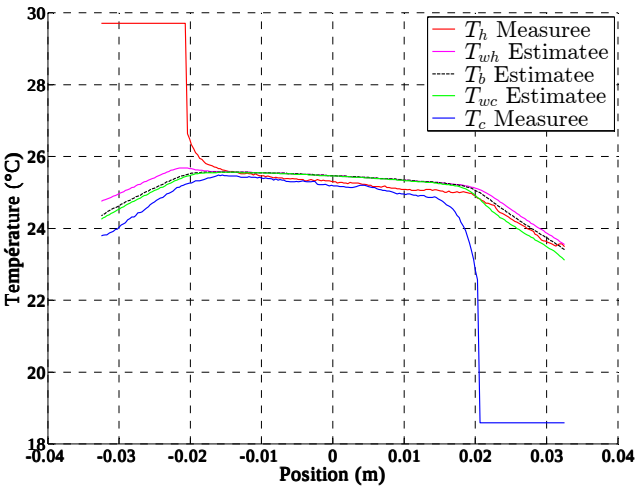


Figure 38 : Températures mesurées externes et estimée internes par ILSVD à $= 10^{-3}$ m/s , $2N_h'' = N_x = 226$, $\alpha = 33$

5.2.2.1. $U = 10^{-4}\ m/s$:

De la même manière que présentée précédemment, on compare le profil de température mesurée sur les faces externes à celui estimé par TSVD sur la figure (39) et par ILSVS sur la figure (40). L'estimation par TSVD a été faite pour $N_h' = 4$ (8 harmoniques), et l'écart quadratique obtenu de l'ordre $(r = 0.3\ ℃)$ pour la face froide et $(r = 0.09\ ℃)$ pour la face chaude. Et l'écart quadratique s'améliore $(r = 0.09\ ℃)$ pour la face froide et $(r = 0.03\ ℃)$ pour la face chaude lorsqu'on utilise la technique de ILSVD avec les 37, premières valeurs singulières de $(G^{"})$ sont gardées.

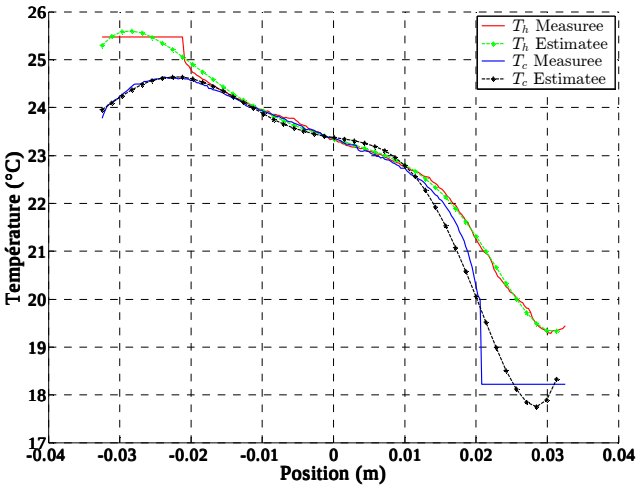


Figure 39 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profil de température reconstruits (estimés) par TSVD sur les faces externes à $\mathrm{U} = 10^{-4}\ \mathrm{m/s}$, $\mathrm{N_h'} = 4$, $\mathrm{N_x} = 230$

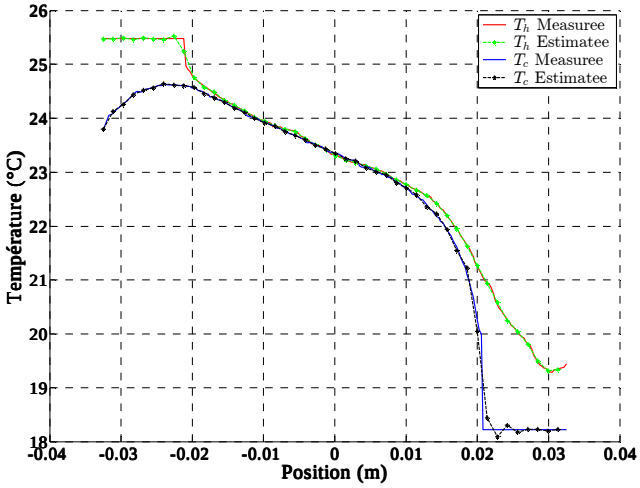


Figure 40 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par ILSVD sur les faces externes à $\mathrm{U} = 10^{-4}\ \mathrm{m/s}$, $2\mathrm{N_h^{"}} = \mathrm{N_x} = 230$, $\alpha = 37$

Le flux estimé et la source de chaleur estimée sont présentés sur les figures (41) et (42). On constate sur la figure (42) que le flux et la source surfacique sont nuls en dehors des zones de l'excitation, ce qui nous permet de dire que l'estimation par ILSVD donne des résultats plus précis.

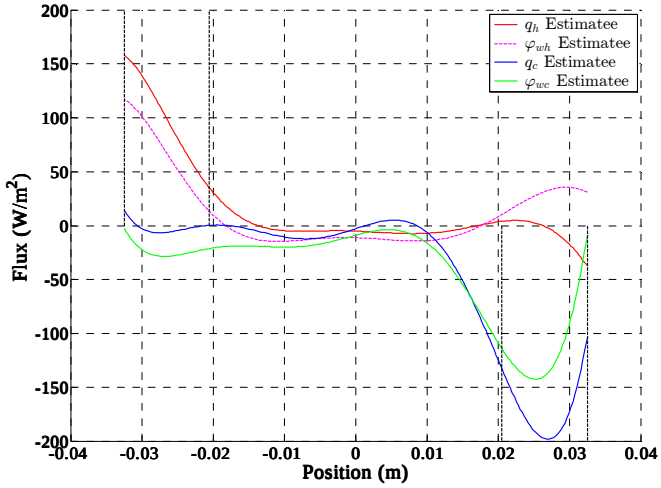


Figure 41 : Flux et source de chaleur estimé par TSVD à $U = 10^{-4}\ m/s$, $N_h' = 4$, $N_x = 230$

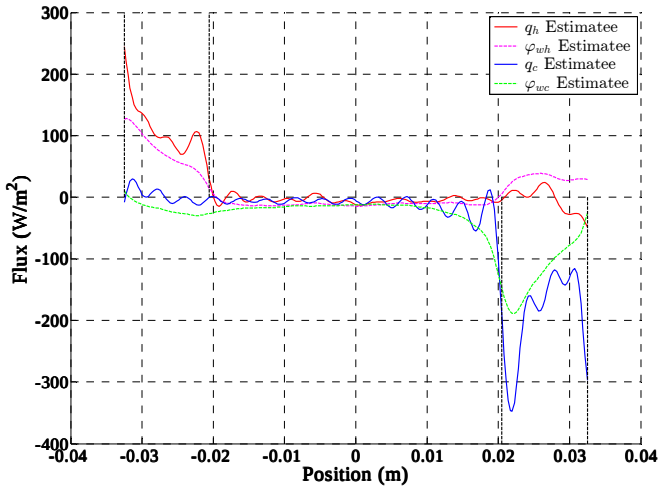


Figure 42 : Flux et source de chaleur estimé par ILSVD à $U = 10^{-4}$ m/s, $2N_h'' = N_x = 230$, $\alpha = 37$

On constate sur les figures (43) et (44) que les profils de températures T_{wh}, T_{wc} et T_b obtenu par les deux techniques sont proches sauf au niveau de l'intervalle [-0.02 0.01]. Dans cette intervalle le comportement des profils T_{wh}, T_{wc} et T_b estimés par ILSVD est linéaire en x mais ce n'est pas le cas dans les profils estimés par TSVD. Le comportement linéaire a été vérifié par une simulation sur code de Comsol.

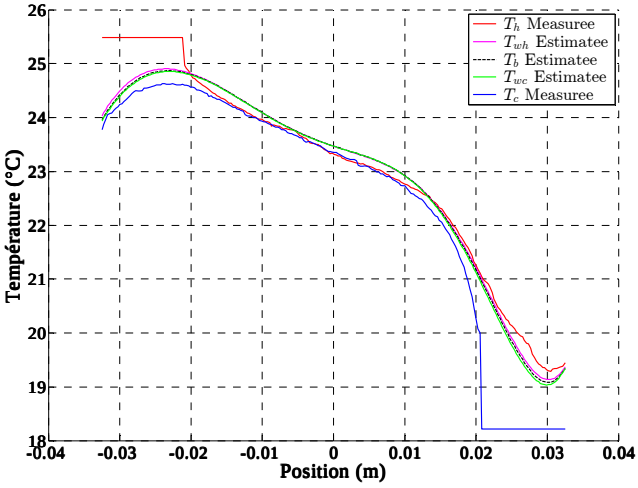


Figure 43 : Températures mesurées externes et estimée internes par TSVD à $U = 10^{-4}$ m/s, $N_h' = 4$, $N_x = 230$

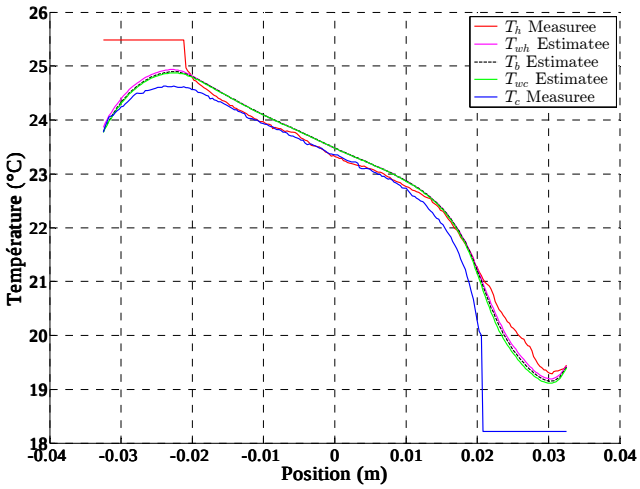


Figure 44 : Températures mesurées externes et estimée internes par ILSVD à $U = 10^{-4}$ m/s, $2N_h'' = N_x = 230$, $\alpha = 37$

5.2.2.2. $U = 10^{-5}\ m/s$:

Dans ce cas qui correspond à un faible nombre de Péclet, le résultat de l'estimation par TSVD, est obtenu avec un écart quadratique ($r = 0.17$ ℃) sur la face froide et ($r = 0.28$ ℃) sur la face chaude, avec $N_h' = 5$. Il est représenté sur la figure 45. Pour l'ILSVD l'écart quadratique devient ($r = 0.06$ ℃) sur la face froide et ($r = 0.11$ ℃) sur la face chaude avec 37 valeurs singulières qui sont gardées (voir figure 46). A partir des figures (45) et 46, et les valeurs de l'écart quadratique motionnées, on

constate que les profils de température sur les faces externes recalculés (estimés) par ILSVD sont plus proche aux profils mesurés.

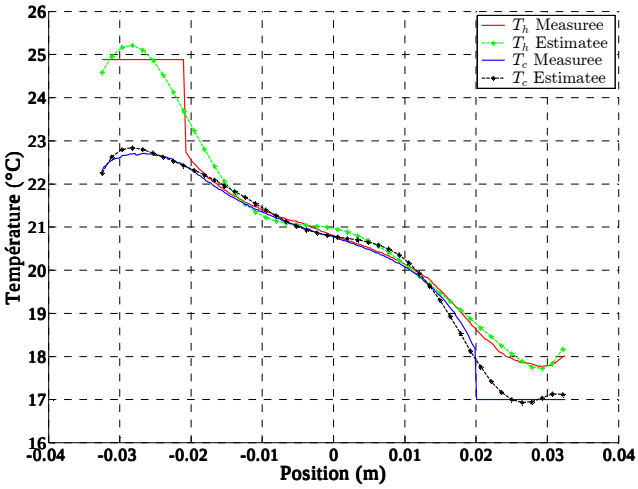


Figure 45 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température reconstruits (estimés) par TSVD sur les faces externes à $U = 10^{-5}\ m/s$, $N_h' = 5$, $N_x = 227$

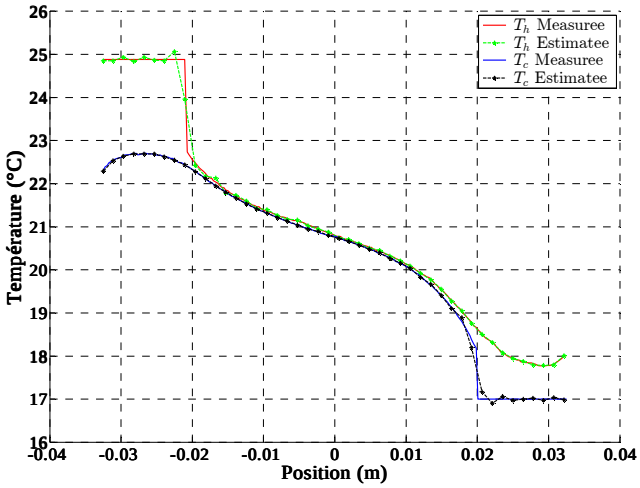


Figure 46 : Les profils de température mesurée expérimentalement et les profils de température estimée par ILSVD sur les faces externes à $U = 10^{-5}\ m/s$, $2N_h'' = N_x = 227$, $\alpha = 37$

Le flux estimé et la source surfacique estimée à faible vitesse débitante $U = 10^{-5}\ m/s$, sont présentés dans la figure (47) et (48).

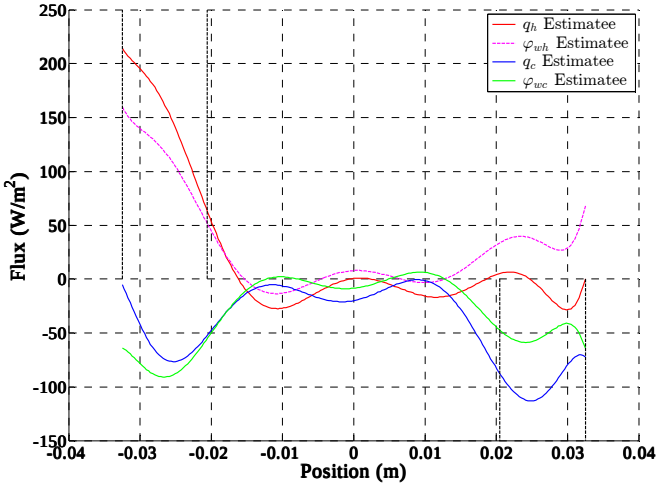


Figure 47 : Flux et source de chaleur estimé par TSVD à $U = 10^{-5}$ m/s, $N_h' = 5$, $N_x = 227$

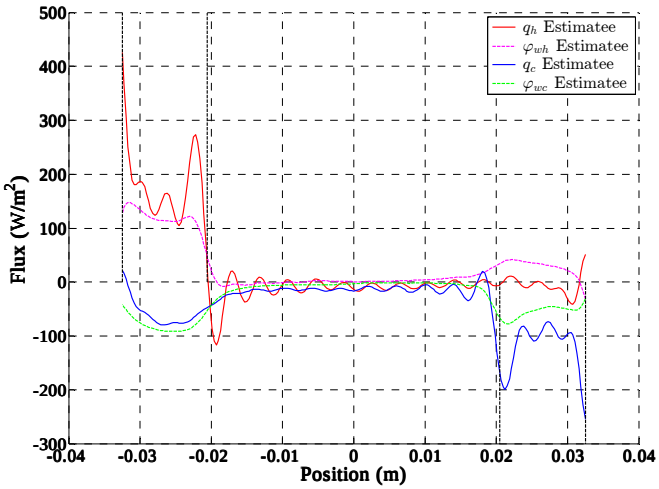


Figure 48 : Flux et source de chaleur estimé par ILSVD à $U = 10^{-5}$ m/s, $2N_h'' = N_x = 227$, $\alpha = 37$

Dans la figure (50), on constate que les profils de température T_h, T_c, T_{wh}, T_{wc} et T_b obtenues par ILSVD sont identique sur l'intervalle [-0.015 0.01]. Ce comportement a été vérifié par une simulation sur code de Comsol.

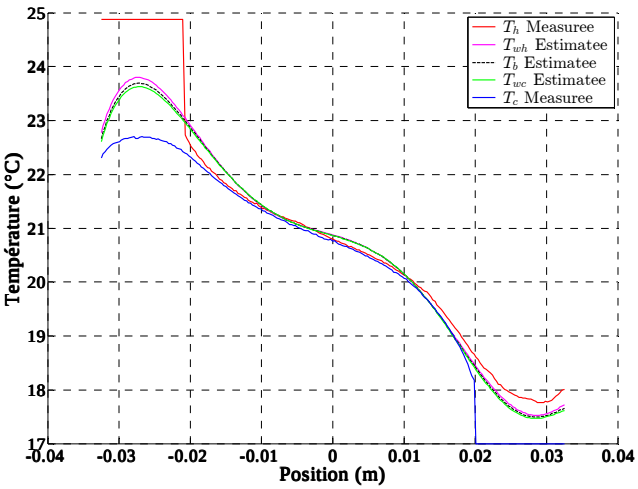


Figure 49 : Températures mesurées externes et estimée internes par TSVD à $U = 10^{-5}\ m/s$, $N_h' = 5$, $N_x = 227$

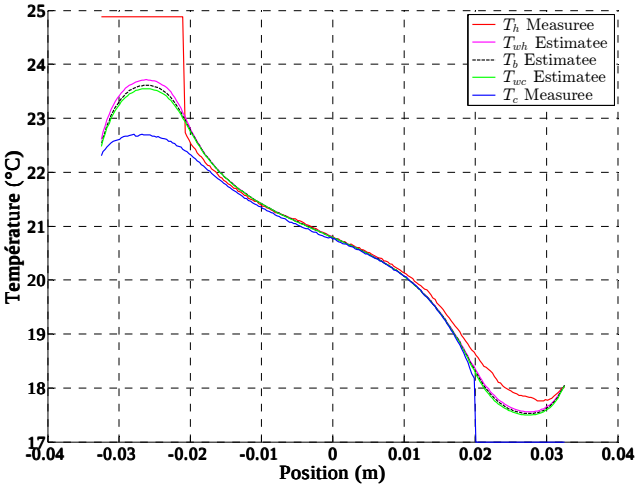


Figure 50 : Températures mesurées externes et estimée internes par ILSVD à $U = 10^{-5}\ m/s$, $2N_h'' = N_x = 227$, $\alpha = 37$

6. Conclusion :

Nous avons vu dans cette étude qu'il est possible de simuler par un modèle semi-analytique, le transfert de chaleur conjugué dans un mini-canal traversé par un fluide incompressible de profil de vitesse établi, sans utiliser les notions de coefficient d'échange convectif. Ce modèle est basée sur la transformée de Fourier de la température et de la densité normale de flux dans la direction de l'écoulement. Pour assurer que le modèle présenté est capable de prédire le comportement du problème étudié, nous avons comparés les résultats de simulation obtenus par ce modèle avec ceux obtenus par logiciel commercial COMSOL qui est basé sur les éléments finies. Nous avons présenté également dans de cette étude, le banc expérimental et les résultats de la mesure à différentes vitesses débitantes en utilisant une camera infrarouge. Nous avons vu qu'il était possible d'estimer les conditions internes (les profils de température sur les faces internes, le profil de température de moyenne de mélange et le profil du flux) à partir des mesures sur les faces externes par deux techniques (TSVD et ILSVD). Nous avons vu que les résultats de l'estimation obtenues par ILSVD sont plus précis que ceux obtenus par TSVD du fait que la technique de ILSVD utilise plus d'harmoniques. Autrement dit, l'utilisation d'un petit nombre d'harmonique conduit à perdre de l'information sur les profils estimés. Les résultats de l'estimation par TSVD montrent que nous pouvons obtenir des résultats d'estimation précis si la différence entre l'excitation sur la face chaude et l'excitation sur la face froide($T_{hot} - T_{cold}$) est petite, mais l'estimation par cette méthode reste toujours moins précise que l'estimation ILSVD.

Perspectives :

Ce travail va être utile pour la modélisation et la caractérisation thermique des mini-échangeurs ou extracteurs de chaleur avec deux cas qui vont être étudiés :

- Le comportement thermique transitoire d'un fluide chaud qui rentre dans le canal dont la température est initialement uniforme (à température ambiante).
- Les échangeurs à courant parallèle (2 ou plusieurs canaux superposés) ainsi que leur homogénéisation.

Bibliographie

[1] H. Herwig et O. Hausner, «Critical view on “new results in micro-fluid mechanics”: an example,» *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 46, p. 935–937, (2003).

[2] Z. Y. Guo et Z. X. Li, «Size effect on microscale single-phase flow and heat transfer,» *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 46, p. 149–159, (2003).

[3] G. L. Morini, «Single-phase convective heat transfer in microchannels: a review of experimental results,» *Int. J. Thermal Sciences,* vol. 43, p. 631–651, (2004).

[4] O. Mokrani, B. Bourouga, C. Castelain et H. Peerhossaini, «Fluid flow and convective heat transfer in flat microchannels,» *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 52, p. 1337–1352, (2009).

[5] Y. Rouizi, D. Maillet et Y. Jannot, «Fluid temperature distribution inside a flat mini-channel:Semi-analytical wall transfer functions and estimation from temperatures of external faces,» *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 64, p. 331–342, (2013) .

[6] X. F. Peng et B. X. Wang, «Forced convection and flow boiling heat transfer for liquid flowing through microchannels,» *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 36, p. 3421–3427, (1993).

[7] B. X. Wang et X. F. Peng, «Experimental investigation on liquid forcedconvection heat transfer through microchannels,» *Int. J. Heat Mass Transfer Suppl.,* vol. 37 (1), p. 73–82, (1994).

[8] G. Maranzana, I. Perry et D. Maillet, «Mini and micro-channels: influence of axial conduction in the wall,» *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 47, pp. 3993-4004, (2004).

[9] I. Perry, Y. Jannot, D. Maillet et B. Fiers, «Effect of velocity distribution on external wall temperature field for a flat microchannel,» *Experimental Heat Transfer,* vol. 23, p. 27–43, (2009).

[10] Y. Rouizi, D. Maillet et Y. Jannot, «Température de mélange dans un mini canal plan : inversion expérimentale d’un modèle à partir de thermographie infrarouge de surface,» chez *SFT Congrès français de Thermique*, (2013).

[11] D. Petit et D. Maillet, *Technique inverses et estimation de paramètres,* Techniques de l’ingénieur.

[12] D. Maillet, S. André, J. C. Batsale, A. Degiovanni et C. Moyne, Thermal Quadrupoles – Solving the Heat Equation through Integral transforms, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, (2000).

[13] *Comsol multiphysics version 3.4, copyright (c) 1994-2007.*

[14] D. Maillet, S. André, B. Rémy et A. Degiovanni, «Regularized parameter estimation through iterative

rescaling (petir): an alternative to levenbergmarquardt's algorithm, Inverse problem,» manuscrit soumis (juin 2013) à une revue.

[15] *MATLAB. version 7.12.0.635 (R2011a). The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2011.*

[16] *Y. Yuan. A review of trust region algorithms for optimization, 2007. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.45.9964.*

Characterization of heat transfer conjugates in mini-cannel using inversion trams thermographic

Abstract: A semi-analytical model allowing the simulation of heat transfer in the mini-channel rectangle subjected to the heat source over the external faces, has been presented. This model takes into account the conduction conjugate-advection in the fluid, on another hand the conduction conjugate in the solid. The model developed is based on the Fourier transformer of the temperature and the flux which have been formed into the matrix (quadruple model). The main advantage of this type of model is that can be able to calculate the bulk temperature without using the notions of the heat transfer coefficient, leading us to avoid the assuming added value of this coefficient. However, the main objective of this work is to estimate the internal conditions based on the experimental measurements as well as the initial model. Notice that the experimental measurements of temperature field at different velocities, has been applied on the external faces by using inferred camera (known as non-intrusive method). Those estimations considered done by two different techniques (TSVS and ILSVD).

Keywords: mini-channel, inverse convection, conduction and advection, infrared thermograph, quadruple method, conjugate heat transfer.

Résumé : Un modèle semi-analytique permettant de simuler le transfert de chaleur dans un mini canal plan d'épaisseur e_f soumis à des sources de chaleur surfaciques sur ses faces externes a été étudié. Nous avons repris d'une part un modèle semi-analytique qui prend en considération la conduction diffusion-advection dans le fluide et la conduction axiale dans le solide. Cette modélisation, qui est capable de prédire parfaitement le comportement du problème étudié, est basée sur la transformée de Fourier de la température et le flux dans la direction de l'écoulement. Dans ce modèle, la transformée de Fourier de la température et du flux entrant-sortant du milieu étudié est représentée sous la forme matricielle par la méthode dite des quadripôles (quadruple method). La température moyenne de mélange peut être calculée uniquement en appliquant ce modèle, en connaissant les excitations externes, tout en omettant l'utilisation des notions de coefficient d'échange convectif interne.

D'autre part, nous avons appliqué les méthodes inverses afin d'obtenir des conditions internes du profil de températures au sein des mini-canaux (utilisés dans les locaux du LEMTA) tout en s'appuyant sur les résultats des essais expérimentaux.

Mots clés : Mini-canal, inversion, conduction, convection, camera infrarouge, méthode de quadripôle, transfert de chaleur conjugué.

Annexe

Annexe (1):

Recherche de la fonction propre et les valeurs propres pour le solide :

Après avoir effectué un changement de variables ($\theta = T - T_\infty$), l'équation qui décrit le transfert de la chaleur dans le solide, peut être écrite comme :

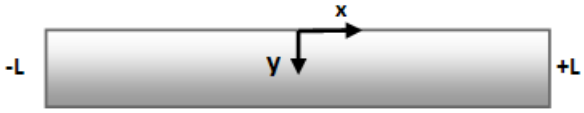


Figure (1) : bloc de solide en deux dimensions

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.a)$$

Les conditions aux limites correspondantes (les conditions aux limites dans la direction où on cherche la fonction propre et les valeurs propres, ici en x direction),

$$\theta_s|_{x=-L} = \theta_s|_{x=+L} = 0$$

D'après le changement de coordonné $(x' = x + L)$, les conditions limites s'écrivent :

$$\theta_s|_{x=-L} = \theta_s|_{x=+L} = 0 \quad \xLeftrightarrow{changement\ coordonné} \quad \theta_s|_{x'=0} = \theta_s|_{x'=2L} = 0 \qquad (1.b)$$

Nous posons la solution de l'équation $(1.a)$comme étant le produit de deux fonctions à variables séparées :

$$\theta_s(x', y) = \psi(x')\Gamma(y) \qquad (2)$$

L'équation $(1.a)$devient

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y^2} \tag{3}$$

Etant donné que ψ dépend de x', Γ dépend de y et les deux termes de l'équation (3) sont égaux, cela implique que les deux termes sont constants $(-\alpha^2)$. L'équation caractéristique dans direction de x', peut être écrit comme ;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \psi\alpha^2 = 0 \tag{4.a}$$

$$\psi|_{x'=0} = \psi|_{x'=2L} = 0 \tag{4.b}$$

On peut chercher la solution de cette équation sous la forme

$$\psi = Acos(\alpha x') + Bsin(\alpha x') \tag{5}$$

En utilisant les conditions aux limites, on trouve :

$$A = 0$$

- Fonction propre :

$$X(x) = sin(\alpha_n x) \tag{6}$$

- Les valeurs propres discrètes :

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \tag{7}$$

Annexe (2):

L'étalonnage d'une camera infrarouge :

Comme il est déjà mentionné, la conversion des valeurs numériques renvoyées par la caméra en température peut se faire grâce à une fonction de transfert non linéaire. Le rôle de l'étalonnage est de définir cette fonction de transfert expérimentale.

L'étalonnage d'une caméra est une opération de métrologie. A ce titre, il ne peut être réalisé qu'à partir d'étalons de température constituant une référence validée. En Infrarouge, l'étalon est un Corps Noir.

La luminance énergétique monochromatique du rayonnement thermique du corps noir en fonction de la température thermodynamique peut être définie par la loi de Planck :

$$L_{\lambda}^{\circ}(T) = C_1 \lambda^{-5} \left(exp\left(\frac{C_2}{\lambda\, T}\right) - 1 \right)^{-1} \quad avec\ C_1 = \frac{hc_{\circ}^2}{\pi}\ et\ C_2 = \frac{hc_{\circ}}{2\pi \boldsymbol{k}} \qquad (1)$$

où $\boldsymbol{k}$ est la constante de Boltzmann $(J.K^{-1})$.

Puisque le domaine de température dans lequel on va travailler ne va dépasser 3000 K, on peut utiliser l'approximation de Wien, valable pour les fréquences basses :

$$L_{\lambda}^{\circ}(T) = C_1 \lambda^{-5} exp\left(-\frac{C_2}{\lambda\, T}\right)$$

Etant donné que le signal est proportionnel à la luminance, donc :

$$DL^0(T) = A\ exp\left(-\frac{B}{T}\right) \qquad (2)$$

De façon générale l'étalonnage consiste à tracer la courbe de réponse de votre caméra face à une série de points de températures de références connues (Corps Noirs) voir figure 1. A partir de cette courbe et de l'équation 2, on estime les valeurs de constantes $\hat{A}\ et\ \hat{B}$ qui minimisent l'écart quadratique entre de réponse de votre caméra et la réponse de l'équation 2.

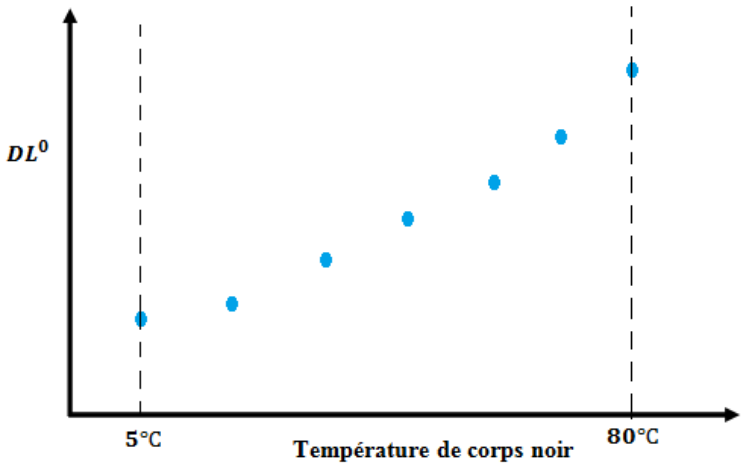


Figure 1 : Exemple pour une dynamique 5°C – 80°C

Pour aller plus loin, on peut utiliser une caméra étalonnée par la méthode d'étalonnage mentionnée précédemment, pour mesurer l'émissivité et réflectivité d'une surface non noir (garis) ou pour mesurer la température d'une surface non noir si son émissivité est connue. Cela peut être effectué en utilisant l'équation thermographique suivante :

$$DL(T) = \varepsilon_{\lambda n} DL^0(T) + \rho_{\lambda\ hémis\ n} DL^0(T_{env}) \quad (3)$$

où $\rho_{\lambda\ hémis\ n}$ le coefficient de réflexion hémisphérique-directionnel (dans la direction n normale à la surface visée), $\varepsilon_{\lambda n}$ l'émissivité monochromatique normale et $DL(T)$ niveaux numériques renvoyés par la caméra visée sur une surface gris.

Pour mesurer l'émissivité et réflectivité d'une surface non noir (garis), la température de cette surface doit être connue (mesurée par un thermocouple par exemple). A partir de l'équation 4, on peut estimer par la méthode de moindre carré les valeurs de $\hat{\varepsilon}_{\lambda n}\ et\ \widehat{K}$:

$$DL(T) = \varepsilon_{\lambda n} DL^0(T) + K \quad (4)$$

où $K = \rho_{\lambda\ hémis\ n} DL^0(T_{env})$ et $DL^0(T) = \widehat{A}\ exp\left(-\frac{\hat{B}}{T}\right)$ avec $\widehat{A}\ et\ \hat{B}$ estimés précédemment

Annexe (3):

Calcul de l'écart type du bruit de mesure :

Pour évaluer l'écart type du bruit de mesure de la camera, la première étape consiste à enregistrer la température d'un surface (polycarbonate) de température constante et uniforme au cours du temps. Ensuite on calcule la moyenne statistique de ce champ de température obtenu comme :

$$\hat{T}^{exact} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} T_{exp_i} \qquad (1)$$

où $\hat{T}^{exact}$ représente la moyenne statistique de la température (supposé ici égale à la température exacte de la surface mesurée), et m nombre de mesure.

L'écart type du bruit de mesure peut être estimé par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(T_{exp_i} - \hat{T}^{exact}\right)^2 \qquad (2)$$

D'après avoir appliqué ces étapes, on obtient :

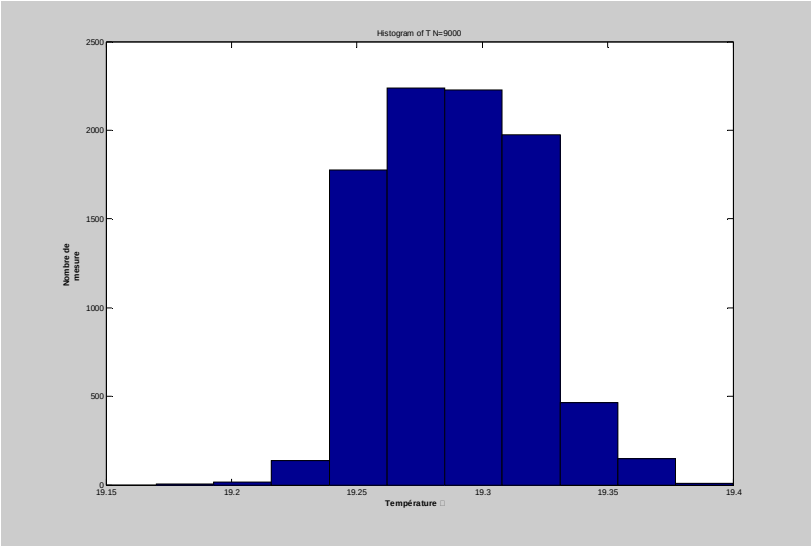


Figure 1 : Histogramme

L'écart type du bruit de mesure= 0.033℃