



HAL
open science

Instabilité thermoconvective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants

Aurélie Kalck

► **To cite this version:**

Aurélie Kalck. Instabilité thermoconvective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants. Génie des procédés. 2012. hal-01869144

HAL Id: hal-01869144

<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01869144v1>

Submitted on 6 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Mémoire de stage pour le Master 2 MEPP
"Mécanique, Énergétique, Procédés, Produits"
spécialité "Mécanique et Énergétique"

Aurélie KALCK

Instabilité thermoconvective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants

4 septembre 2012

Directeur de stage :
Chérif NOUAR, DR CNRS LEMTA

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
Université de Lorraine - LEMTA - CNRS UMR 7563

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Nomenclature | 2 |
| 1 Introduction | 5 |
| 2 Formulation mathématique | 10 |
| 2.1 Équations gouvernant le problème | 10 |
| 2.1.1 Équations sous forme dimensionnelle | 10 |
| 2.1.2 Équations sous forme adimensionnelle | 13 |
| 2.2 État de base | 16 |
| 2.3 Équations aux perturbations | 16 |
| 2.4 Procédure de résolution | 22 |
| 2.5 Résolution numérique | 25 |
| 3 Résultats et discussion | 28 |
| 3.1 Théorie linéaire | 29 |
| 3.1.1 Problème direct | 29 |
| 3.1.2 Problème adjoint | 37 |
| 3.2 Analyse faiblement non linéaire | 38 |
| 3.2.1 Premier harmonique | 38 |
| 3.2.2 Correction de l'état de base | 41 |
| 3.2.3 Premier coefficient de Landau : nature de la bifurcation | 41 |
| 3.2.4 Modification de la viscosité par le mouvement de convection | 47 |
| 3.2.5 Calcul du nombre de Nusselt | 49 |
| 3.3 Analyse non linéaire | 52 |
| 3.3.1 Diagramme de bifurcation | 52 |
| 3.3.2 Nombre de Nusselt | 55 |
| 3.3.3 Étude du champ de viscosité | 57 |
| 4 Conclusion | 59 |
| A Principe d'échange des stabilités | 61 |
| Bibliographie | 66 |

Nomenclature

Alphabet latin

| | |
|--|---|
| A | amplitude complexe |
| C_p | capacité calorifique à pression constante, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ |
| d | distance entre les deux plaques, m |
| $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ | vecteurs unitaires resp. selon l'axe x, y, z |
| g | accélération de la pesanteur, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ |
| g_i | $i^{\text{ème}}$ coefficient de Landau |
| h | coefficient de transfert convectif, $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ |
| k | vecteur d'onde |
| n_c | indice de rhéofluidification |
| \mathcal{N}_I | termes d'inertie |
| \mathcal{N}_v | termes visqueux |
| Nu | nombre de Nusselt |
| p | pression, Pa |
| L_G | longueur de glissement |
| Pr | nombre de Prandtl |
| Ra | nombre de Rayleigh |
| t | temps, s |
| T | température, K |
| $\mathbf{U} = (U, V, W)$ | champ de vitesse, $\ \vec{U}\ $ en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ |

Alphabet grec

| | |
|----------------|--|
| α | coefficient de dilatation thermique isobare, K^{-1} |
| $\dot{\gamma}$ | deuxième invariant du tenseur des taux de déformation |
| ΔT | différence de température entre les deux plaques, $\Delta T = T_1 - T_2$ |
| ϵ | écart relatif au seuil d'instabilité |
| Θ | écart de température au profil conductif adimensionné |

| | |
|-----------|---|
| κ | diffusivité thermique à volume constant, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ |
| λ | conductivité thermique, $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ |
| μ | viscosité dynamique, $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ |
| ν | viscosité cinématique, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ |
| Π | pression généralisée, Pa |
| ρ | masse volumique, kg/m^3 |
| σ | coefficient d'amplification temporelle |
| τ | tenseur des contraintes visqueuses |
| Ψ | fonction de courant |

Indices

| | |
|--------|---|
| b | état de base |
| T_1 | température de la plaque inférieure, K |
| T_2 | température de la plaque supérieure, K |
| c | conditions critiques |
| $cond$ | conduction |
| i | partie imaginaire d'une grandeur complexe |
| N | cas Newtonien |
| NN | cas non Newtonien |
| r | état de référence |
| r | partie réelle d'une grandeur complexe |

Exposants

| | |
|-----|-------------------|
| $*$ | complexe conjugué |
| T | transposée |

Opérateurs

| | |
|---------------|-----------|
| Δ | Laplacien |
| ∇ | gradient |
| \mathcal{J} | Jacobien |

$$\langle \rangle = \int_{-1}^1 f dz$$

intégrale entre $z = 1$ et $z = -1$

$$\frac{D}{Dt}$$

dérivée particulaire

$\hat{}$ indique une grandeur dimensionnelle.

Les lettres minuscules désignent les perturbations de l'état de base.

Les caractères gras indiquent des vecteurs ou tenseurs.

Chapitre 1

Introduction

La convection de Rayleigh-Bénard induite par une instabilité d'origine thermique apparaît dans de nombreux phénomènes naturels comme en géologie, dans l'océan avec les courants océaniques ou encore dans l'atmosphère. Les mécanismes de convection dans le manteau terrestre (fig. 1.1) sont très étudiés par les géophysiciens car ils pourraient être à l'origine du déplacement des plaques tectoniques. En effet, bien que le manteau soit constitué de roches solides, la température et la pression élevées régnant à l'intérieur de la Terre font qu'elles adoptent un comportement visqueux. Le nombre de Rayleigh du manteau terrestre est d'ailleurs extrêmement élevé puisqu'il est égal à 100 millions.

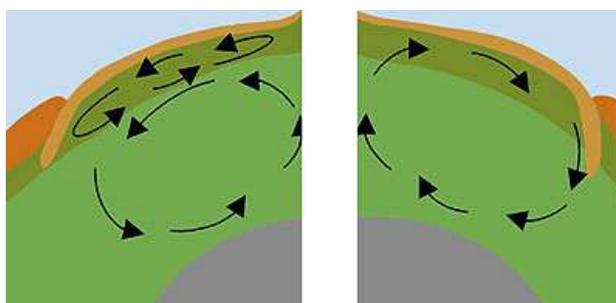


FIGURE 1.1: Représentation schématique de deux modèles de répartition des cellules de convection dans le manteau terrestre [9] (à g. : vue des tectoniciens, à d. : vue des géochimistes). La vitesse du mouvement convectif dans le manteau est de l'ordre de 1 cm/an.

Dans l'atmosphère, la convection est souvent provoquée par le chauffage de l'air au niveau du sol par le Soleil. Ainsi, c'est toute la circulation atmosphérique de la Terre qui est régulée par ce phénomène (fig. 1.2). L'air très chaud de l'équateur monte et se dirige vers les latitudes plus hautes en se refroidissant avant de redescendre vers le sol. À une échelle plus proche de nous, les cellules de convection sont aussi à l'origine de nombreuses manifestations météorologiques parfois violentes comme les orages, les tornades ou les pluies de mousson ou plus inoffensives comme les brises thermiques (fig. 1.3).

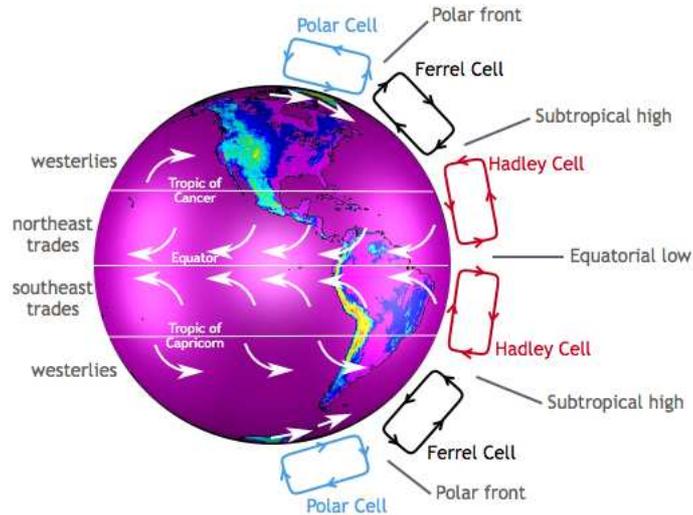


FIGURE 1.2: Circulation atmosphérique générale sous forme de cellules de convection [8] aussi connues sous le nom de cellules de Hadley (entre 0 et 30° N et S), de Ferrel (entre 30° et 60° N et S) et polaires (entre 60° N et S et les pôles).

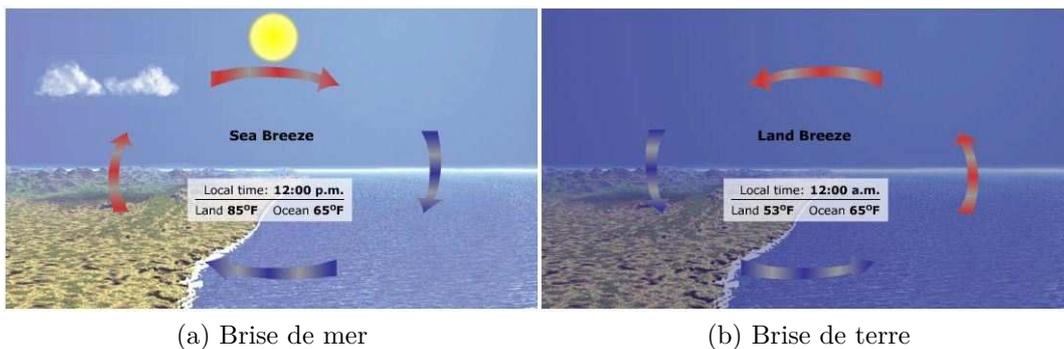


FIGURE 1.3: Brises thermiques [8] . (a) Brise de mer : en journée, le sol est chauffé par le Soleil et devient plus chaud que l'eau, l'air présent s'élève et crée une zone de basse pression attirant l'air marin . (b) Brise de terre : la nuit, l'eau se refroidit moins vite que le sol, c'est alors le phénomène inverse qui se produit.

Afin de décrire la convection de Rayleigh-Bénard, considérons un fluide situé entre deux plaques horizontales éloignées d'une distance \hat{d} . La plaque inférieure est à la température \hat{T}_1 plus grande que la température \hat{T}_2 de la plaque supérieure. Lorsque la couche de fluide est au repos, le gradient de température entre les deux plaques est constant, on est en présence d'un régime de conduction pure. Cependant, en raison de la décroissance de la densité du fluide avec la température, on observe une stratification en densité instable dans le champ de gravité : le fluide lourd se situe au-dessus du fluide léger.

Pour comprendre cette instabilité, imaginons qu'une particule fluide à la température initiale \hat{T} subit une perturbation de température et passe à la température $\hat{T} + \delta\hat{T}$ (fig. 1.4). On suppose que $\delta\hat{T} > 0$ (on effectue un raisonnement similaire si $\delta\hat{T} < 0$). Étant plus chaude que son environnement, cette particule a une densité plus faible et la poussée d'Archimède va la faire monter. Comme le fluide est chauffé par le bas, la particule fluide va rencontrer un fluide de plus en plus dense au cours de son ascension, ce qui va amplifier le mouvement. Néanmoins, deux phénomènes dissipatifs tendent à maintenir le fluide dans l'état de repos : le frottement dû à la viscosité qui a tendance à ralentir le mouvement du fluide et la conduction qui tend à réduire le contraste thermique. Le déclenchement de l'instabilité donc de la convection ne peut se produire que si le phénomène moteur (poussée d'Archimède) devient plus important que les phénomènes résistants (frottements visqueux et dissipation thermique). Le rapport entre la poussée d'Archimède et les deux effets dissipatif est donné par le nombre adimensionnel de Rayleigh :

$$\begin{aligned} Ra &= \frac{\text{poussée d'Archimède}}{\text{force visqueuse} \times \text{diffusion thermique}} \\ &= \frac{\hat{g} \hat{\alpha} \Delta\hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\nu} \hat{\kappa}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

où \hat{g} est l'accélération de la pesanteur, $\hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{T}}$ est le coefficient de dilatation thermique, $\hat{\nu}$ la viscosité cinématique et $\hat{\kappa}$ la diffusivité thermique. Bénard [4] a été le premier à observer expérimentalement ces instabilités. Moyennant une analyse linéaire de stabilité et en utilisant des conditions de glissement aux parois, Rayleigh [24] a montré que les mouvements de convection apparaissent dans la couche fluide lorsque le nombre de Rayleigh devient supérieur à une valeur critique $Ra_c = 27 \pi^4 / 4$. En situation d'adhérence, le calcul du nombre de Rayleigh critique a été effectué la première fois par Pellew et Southwell [21] : les auteurs trouvent $Ra_c = 1707.778$ et un nombre d'onde $k_c = 3.11$.

Lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté au delà de sa valeur critique, une convection stationnaire s'organise sous forme de rouleaux, de carrés ou d'hexagones. Schlüter *et al.* [26] et Busse [5] ont montré qu'au voisinage des conditions critiques, la structure en rouleaux est la solution la plus stable. Lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh au-delà d'une deuxième valeur critique (≈ 22600), les expériences montrent que l'on passe d'un état stationnaire bidimensionnel vers un autre état stationnaire

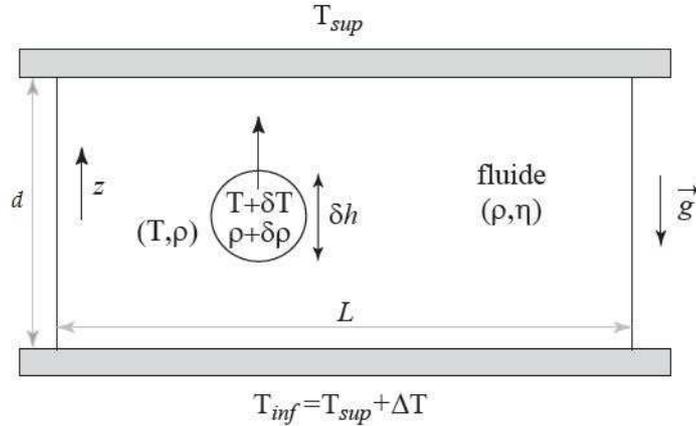


FIGURE 1.4: Schéma du mécanisme de convection de Rayleigh-Bénard pour une couche de fluide d'épaisseur d située entre deux plaques (d'après [32]).

tridimensionnel. Pour des valeurs de Ra beaucoup plus élevées, le système devient chaotique et finalement turbulent. Busse et Clever [6] ont étudié la stabilité des rouleaux de convection en fonction du nombre de Prandtl et du nombre d'onde. La condition de stabilité des rouleaux de convection est donnée par un domaine appelé "ballon de Busse".

L'étude effectuée ici s'intéresse aux instabilités thermonconvectives du type Rayleigh-Bénard dans des fluides rhéofluidifiants, c'est-à-dire des fluides dont la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. Contrairement au cas Newtonien, très peu de travaux ont été consacrés aux instabilités thermoconvectives du type Rayleigh-Bénard pour des fluides non-Newtoniens. Tien *et al.* [30] ont été les premiers à étudier les instabilités du type Rayleigh-Bénard pour un fluide rhéofluidifiant décrit par le modèle en loi puissance ($\tau = K\dot{\gamma}^{n_p-1}\dot{\gamma}$ avec $n_p < 1$). Le nombre de Rayleigh critique est déterminé par une approche du type énergétique. Les résultats obtenus par les auteurs indiquent que le nombre de Rayleigh critique Ra_c diminue lorsque le caractère rhéofluidifiant devient plus marqué. Cette évolution a été confirmée expérimentalement par les mêmes auteurs. Les fluides utilisés sont des solutions aqueuses de CarboxyMéthylCellulose (CMC). Ozoe et Churchill [19] ont étudié le problème de Rayleigh-Bénard pour un fluide en loi puissance par une approche numérique en utilisant une méthode aux différences finies. Le nombre de Rayleigh critique est obtenu par extrapolation de la courbe du nombre de Nusselt en fonction de Ra . Les auteurs constatent aussi que Ra_c décroît lorsque n_p diminue, cependant les valeurs de Ra_c obtenues sont beaucoup plus élevées que celles déterminées expérimentalement par Tien *et al.* [30]. Inaba *et al.* [14] ont montré numériquement et expérimentalement que le caractère rhéofluidifiant intensifiait le mouvement de convection. Le fluide utilisé est une micro-émulsion dont la rhéologie est décrite par le modèle en loi puissance. Khayat [15] a considéré le problème de Rayleigh Bénard pour des fluides rhéofluidifiants décrits par le modèle de Carreau. Moyennant un modèle réduit, l'auteur obtient un système de Lorentz généralisé pour des fluides rhéofluidifiants. Il montre que

la rhéofluidification peut induire un écoulement chaotique. Albaalbaki et Khayat [1] ont examiné théoriquement l'influence de la rhéofluidification sur la structure des motifs observés dans des conditions critiques. Les auteurs montrent en particulier que dans le cas d'une forte rhéofluidification, le motif le plus stable serait hexagonal. Plusieurs chercheurs en géophysique se sont naturellement intéressés au problème de Rayleigh-Bénard pour des fluides non-Newtoniens. Le manteau terrestre est solide, mais à l'échelle des temps géologiques, il peut être considéré comme un fluide très visqueux. La dépendance de celle-ci vis à vis du cisaillement est décrite par un modèle en loi puissance. Les mouvements de convection (du type Rayleigh-Bénard) qui s'y développent à grande échelle seraient responsables de la tectonique des plaques. Une approche du problème de convection dans le manteau terrestre a été effectuée par Parmentier [20]. L'auteur considère un fluide rhéofluidifiant en loi puissance avec une consistance très élevée et qui dépend fortement de la température. Il met en évidence numériquement des modifications significatives dans l'organisation de l'écoulement lorsque le fluide est fortement rhéofluidifiant.

La présente étude a pour objectif de revisiter l'effet du caractère rhéofluidifiant d'un fluide non-Newtonien sur les structures qui se développent en thermoconvection de Rayleigh-Bénard. Une analyse faiblement non linéaire est utilisée. Dans cette étude, nous avons tenu compte d'un éventuel glissement du fluide à la paroi. En fait, le glissement aux parois est le plus souvent indétectable pour des liquides composés de petites molécules comme l'eau, mais peut devenir important pour des fluides complexes tels que les solutions de macromolécules. Le glissement aux parois est souvent introduit dans les modèles théoriques au travers de la condition de Navier, qui stipule que la vitesse de glissement est proportionnelle au cisaillement pariétal, le facteur de proportionnalité étant nommé longueur de glissement.

Le rapport est structuré de la manière suivante : le chapitre 2 est consacré à l'établissement des équations aux perturbations, l'approche faiblement non linéaire mise en oeuvre ainsi qu'à la méthode de résolution numérique. Les équations seront présentées pour un fluide visqueux non-Newtonien de manière générale. Les applications numériques ont été réalisées en adoptant le modèle de Carreau-Bird (éq. 2.6). L'étude numérique a été effectuée grâce à Matlab. L'évaluation de certaines expressions complexes a été faite en utilisant les calculs formels grâce à Mathematica. Le chapitre 3 est consacré à la présentation des résultats, il se compose de trois parties. Dans la première partie, le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde critiques sont déterminés en fonction de la longueur de glissement et sont comparés aux données existantes dans la littérature. Dans la deuxième partie, le premier coefficient de Landau est calculé. La nature de la bifurcation est alors déterminée en fonction du caractère rhéofluidifiant et de la longueur de glissement. Le nombre de Nusselt au voisinage proche des conditions critiques est calculé et comparé à la littérature existante. Dans la troisième partie, les calculs ont été poursuivis jusqu'à l'ordre 9 dans l'équation d'amplitude, permettant une description de la thermoconvection plus ou moins loin des conditions critiques. Le dernier chapitre est une conclusion où on rappelle l'essentiel des résultats obtenus. On propose aussi des perspectives pour la poursuite de cette étude.

Chapitre 2

Formulation mathématique

Ce chapitre, comportant cinq paragraphes, décrit la mise en équation du problème de Rayleigh-Bénard en situation bidimensionnelle pour un fluide non-Newtonien incompressible ainsi que la méthode de résolution choisie pour le résoudre.

Dans le premier paragraphe, on donne les équations générales gouvernant le problème sous forme dimensionnelle puis adimensionnelle en indiquant les paramètres sans dimension utilisés. Le deuxième paragraphe décrit rapidement l'écoulement de base caractérisé par un fluide au repos et un profil de température conductif. L'obtention des équations aux perturbations est expliquée dans le troisième paragraphe. Enfin, les deux derniers paragraphes traitent de la méthode de résolution utilisée : dans le quatrième paragraphe, on expose les étapes suivies pour calculer la fonction de courant, la température et le premier coefficient de Landau alors que le cinquième paragraphe aborde le côté numérique de la résolution.

2.1 Équations gouvernant le problème

2.1.1 Équations sous forme dimensionnelle

Le problème de la convection de Rayleigh-Bénard entre deux plaques est gouverné par les équations de continuité, du mouvement et de l'énergie pour un fluide incompressible rappelées ci-dessous :

– Équation de continuité :

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{U} = 0 \quad . \quad (2.1)$$

– Équation du mouvement :

$$\hat{\rho} \frac{D\hat{\mathbf{U}}}{D\hat{t}} = -\hat{\nabla}\hat{p} - \hat{\rho}\hat{g}\mathbf{e}_z + \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad . \quad (2.2)$$

– Équation de l'énergie :

$$\hat{\rho}\hat{C}_p \frac{D\hat{T}}{D\hat{t}} = \hat{\lambda}\hat{\Delta}\hat{T} \quad . \quad (2.3)$$

Dans les équations précédentes, $\hat{\mathbf{U}} = \hat{U}\mathbf{e}_x + \hat{V}\mathbf{e}_y + \hat{W}\mathbf{e}_z$ est le champ des vitesses, \hat{T} la température, $\hat{\rho}$ la masse volumique, \hat{p} la pression, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mu\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ le déviateur du tenseur des contraintes, $\hat{\lambda}$ la conductivité thermique et \hat{C}_p la capacité calorifique à pression constante. La gravité est notée \hat{g} et le vecteur unitaire selon l'axe z est noté \mathbf{e}_z . L'opérateur $\frac{D}{D\hat{t}}$ est la dérivée particulaire telle que pour une grandeur A scalaire ou vectorielle, on a :

$$\frac{D\hat{A}}{D\hat{t}} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial\hat{t}} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{A} \quad . \quad (2.4)$$

La capacité calorifique \hat{C}_p et la conductivité thermique $\hat{\lambda}$ sont supposées constantes. L'échauffement dû à la dissipation visqueuse est négligé.

Au système d'équations (2.1)-(2.3) s'ajoute l'hypothèse de Boussinesq¹. Celle-ci considère que la variation de la masse volumique avec la température peut être négligée dans les équations de conservation excepté dans le terme de la poussée d'Archimède. La variation de $\hat{\rho}(\hat{T})$ est supposée linéaire et s'écrit :

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_r \left(1 - \hat{\alpha} (\hat{T} - \hat{T}_r) \right) \quad , \quad (2.5)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique, $\hat{\rho}_r$ la masse volumique à la température de référence \hat{T}_r généralement prise comme la moyenne arithmétique des températures des

1. L'approximation de Boussinesq est valide dans la mesure où le coefficient de dilatation thermique α du fluide considéré est petit. Dans ce cas, la variation de la densité du fluide avec la température est suffisamment faible pour être négligée.

deux plaques.

Enfin, pour décrire le caractère non-Newtonien du fluide, on utilise le modèle rhéologique de Carreau-Bird [3] :

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty} = \left(1 + \hat{\Lambda}^2 \hat{\gamma}^2\right)^{\frac{n_c-1}{2}} . \quad (2.6)$$

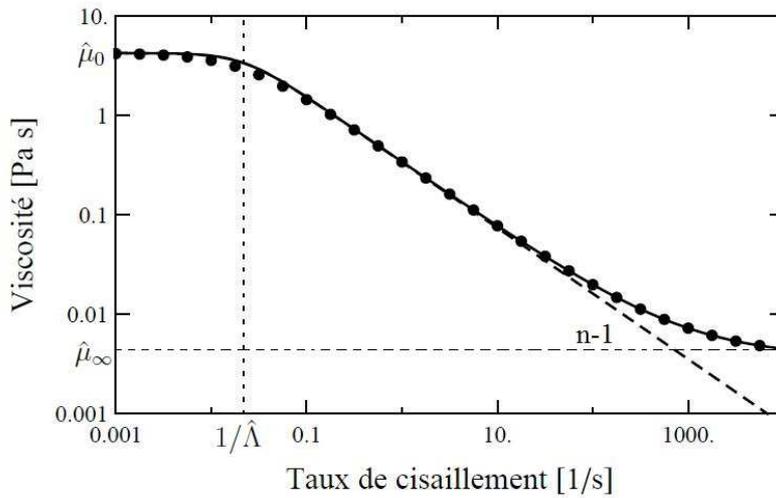


FIGURE 2.1: (tirée de [25]) Représentation log-log de la viscosité en fonction du cisaillement pour une solution aqueuse à 0.125% en polyacrylamide. Les points correspondent au modèle de Carreau-Yasuda, le trait continu au modèle de Carreau-Bird avec $n_c = 0.66$, $\hat{\Lambda} = 45.8$ s, $\hat{\mu}_0 = 4.22$ Pa s et $\hat{\mu}_\infty = 0.00372$ Pa s. Les pointillés correspondent aussi au modèle de Carreau-Bird mais cette fois avec $\hat{\mu}_\infty = 0$.

$\hat{\mu}_0$ et $\hat{\mu}_\infty$ représentent respectivement la viscosité du fluide à cisaillement nul et à cisaillement infini, $0 < n_c \leq 1$ est l'indice de rhéofluidification et $\hat{\gamma}$ le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation :

$$\hat{\gamma}^2 = \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \hat{\gamma}_{i,j} = \hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i} . \quad (2.7)$$

Le paramètre $\hat{\Lambda}$ est un temps caractéristique du fluide, $1/\hat{\Lambda}$ correspond au cisaillement critique à partir duquel commence la rhéofluidification. Quand le cisaillement est inférieur à $1/\hat{\Lambda}$, on est au niveau du plateau Newtonien.

Un exemple de rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant est donné sur la figure (2.1).

Les données représentées sont celles d'une solution aqueuse de polyacrylamide de concentration 0.125%. La pente de la courbe est égale à $n_c - 1$. On remarque que plus $\hat{\Lambda}$ est grand, plus le cisaillement nécessaire au démarrage de la rhéofluidification est faible et donc, plus la viscosité diminue rapidement avec l'augmentation du cisaillement.

Conditions aux limites : il faut aussi définir les conditions aux limites sur la vitesse et la température au niveau des deux plaques. Pour la température, on a :

$$\hat{T}(\hat{z} = 0) = \hat{T}_1 \quad \text{et} \quad \hat{T}(\hat{z} = \hat{d}) = \hat{T}_2 \quad (2.8)$$

Pour la vitesse, on écrit que les particules fluides ne traversent pas la paroi et, pour la composante axiale, on adopte la condition de Navier :

$$\begin{aligned} - \text{ en } \hat{z} = 0 : \quad \hat{U} &= L_G \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} \right|_{\hat{z}=0}, \quad \hat{W} = 0 \quad ; \\ - \text{ en } \hat{z} = \hat{d} : \quad \hat{U} &= -L_G \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} \right|_{\hat{z}=\hat{d}}, \quad \hat{W} = 0 \quad ; \end{aligned} \quad (2.9)$$

où L_G est la longueur de glissement. Ses valeurs extrêmes correspondent aux deux cas limites suivants :

- glissement parfait ou sans frottement quand L_G tend vers $+\infty$, alors $\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}} = 0$ en $\hat{z} = 0$ et $\hat{z} = \hat{d}$,
- adhérence quand L_G tend vers 0, alors $\hat{U} = 0$ en $\hat{z} = 0$ et $\hat{z} = \hat{d}$.

On se place dans le cas bidimensionnel donc $\hat{V} = 0$.

2.1.2 Équations sous forme adimensionnelle

Les équations (2.1) à (2.3) avec les conditions aux limites (2.8)-(2.9) sont mises sous forme adimensionnelle en utilisant les échelles caractéristiques suivantes :

- la distance \hat{d} entre les deux plaques comme échelle de longueur ;
- le temps de diffusion thermique $\hat{d}^2/\hat{\kappa}$ comme échelle de temps. Le choix de ce temps caractéristique est pertinent pour des fluides dont le temps de diffusion thermique est plus élevé que le temps de diffusion visqueuse donc pour des fluides dont le nombre de Prandtl est supérieur à 1 ;
- la vitesse de diffusion thermique $\hat{d}/(\hat{d}^2/\hat{\kappa})$ comme échelle de vitesse ;
- l'écart de température $(\hat{T}_1 - \hat{T}_2)$ comme échelle de température ;
- $\hat{\rho}_r \hat{\kappa}^2/\hat{d}^2$ comme échelle de pression.

Dans ces expressions $\hat{\kappa}$ est la diffusivité thermique.

On obtient alors les équations adimensionnées suivantes :

– Équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad . \quad (2.10)$$

– Équation du mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla \Pi + Ra Pr \Theta \mathbf{e}_z + Pr \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad . \quad (2.11)$$

– Équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta = W + \Delta \Theta \quad , \quad (2.12)$$

où on a posé Π la pression généralisée :

$$\Pi = p + g z - \alpha g z [T_1 - T_r - 1/2 (T_1 - T_2) z] \quad (2.13)$$

et

$$\Theta = \frac{\hat{T} - \hat{T}_{cond}}{\hat{T}_1 - \hat{T}_2} \quad , \quad (2.14)$$

avec T_{cond} est le profil de température conductif donné par l'équation 2.22.

Conditions aux limites : de la même manière, les conditions aux limites (2.8)-(2.9) se réécrivent :

– pour la température :

$$T(z = 0) = \Theta_1 \quad \text{et} \quad T(z = 1) = \Theta_2 \quad ; \quad (2.15)$$

– pour la vitesse :

$$U = L_G \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \text{et} \quad W = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad , \quad (2.16)$$

$$U = -L_G \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=1} \quad \text{et} \quad W = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad , \quad (2.17)$$

Le problème fait intervenir deux paramètres adimensionnels : le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Rayleigh Ra . Le nombre de Prandtl permet de caractériser les propriétés thermiques du fluide. C'est le rapport du temps caractéristique de diffusion thermique $\tau_\kappa = \frac{d^2}{\kappa}$ sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse $\tau_\nu = \frac{d^2}{\nu}$:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad . \quad (2.18)$$

Le nombre de Rayleigh caractérise le transfert de chaleur à l'intérieur d'un fluide. C'est le rapport entre les effets destabilisants (force d'Archimède) qui provoquent la mise en mouvement du fluide et les effets stabilisants (force visqueuse et diffusion thermique) :

$$Ra = \frac{\hat{\alpha} \hat{g} (\hat{T}_1 - \hat{T}_2) \hat{d}^3}{\hat{\nu} \hat{\kappa}} = Gr.Pr \quad . \quad (2.19)$$

On remarque que le nombre de Prandtl intervient dans le calcul du nombre de Rayleigh. Gr est le nombre de Grashof, rapport de la poussée d'Archimède sur la diffusion thermique :

$$Gr = \frac{\hat{\alpha} \hat{g} (\hat{T}_1 - \hat{T}_2) \hat{d}^3}{\hat{\nu}^2} \quad . \quad (2.20)$$

$\hat{\nu}$ est la viscosité cinématique du fluide et $\hat{\kappa}$ sa diffusivité thermique à volume constant.

Enfin, la loi de Carreau-Bird (éq. 2.6) adimensionnée s'écrit :

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_0} = \left[1 + \Lambda^2 \Gamma\right]^{\frac{n_c-1}{2}} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{d}^2/\hat{\kappa}} \quad \text{et} \quad \Gamma = \dot{\gamma}^2 \quad . \quad (2.21)$$

Dans cette équation, on a supposé que $\mu_\infty \ll \mu_0$ et peut être négligée. Cette hypothèse est largement admise dans la littérature.

Le problème est donc gouverné par deux paramètres rhéologiques : n_c et Λ , le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Rayleigh Ra et la longueur de glissement adimensionnelle L_G .

2.2 État de base

L'état de base correspond à un fluide au repos dont la température suit la loi de Fourier :

$$\hat{T}_{cond}(z) = \hat{T}_1 - \frac{\hat{T}_1 - \hat{T}_2}{\hat{d}} \hat{z} \quad . \quad (2.22)$$

De plus, sous forme adimensionnelle, l'état de base est défini par :

$$\mathbf{U}_b = 0 \quad ; \quad \Theta_b = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_b = p_b + g z - \alpha g z [T_1 - T_r - 1/2 (T_1 - T_2) z] \quad . \quad (2.23)$$

2.3 Équations aux perturbations

On considère le problème comme étant bidimensionnel, alors la composante de vitesse V selon \mathbf{e}_y est nulle et le déviateur du tenseur des contraintes se réduit à :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Supposons qu'une perturbation apparaît en un point du fluide. Les fluctuations de température θ et de pression π sont définies par

$$\Theta = \Theta_b + \theta \quad \text{et} \quad \Pi = \Pi_b + \pi \quad . \quad (2.24)$$

Les fluctuations de la vitesse correspondent à la vitesse elle-même puisque l'état de base est l'état de repos :

$$U = u \quad W = w \quad . \quad (2.25)$$

Les lettres minuscules u , w , θ et π représentent les termes de perturbation. Les lettres indicées par b représentent l'état de base.

Pour le problème 2D, les équations aux perturbations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial (\Pi_b + \pi)}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad , \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial (\Pi_b + \pi)}{\partial z} + Ra Pr \theta + Pr \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad , \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = w + \Delta \Theta \quad . \quad (2.29)$$

Considérant l'équation de continuité, on définit une fonction de courant ψ telle que :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad (2.30)$$

En supprimant le terme de pression, on obtient finalement les deux équations ci-dessous qui décrivent le problème général aux perturbations :

– Équation de vorticité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \mathcal{J}(\psi, \Delta \psi) &= Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial x} + Pr \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\tau_{zz}(\psi) - \tau_{xx}(\psi)) \\ &+ Pr \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{xz}(\psi) \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

– Équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathcal{J}(\psi, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta \quad . \quad (2.32)$$

$\mathcal{J}(f, g)$ est le Jacobien défini par $\mathcal{J}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}$ et Δ est le laplacien :
 $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Les conditions aux limites à chaque paroi sont :

$$\begin{aligned} - \text{ en } z = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad ; \\ - \text{ en } z = 1 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

L'existence d'une perturbation en vitesse induit une perturbation en cisaillement qui elle-même se traduit par une perturbation en viscosité. Cette dernière est décrite grâce à un développement limité de Taylor de la viscosité autour de l'état de base $\mu_b = 1$:

$$\mu(\psi) = \mu_b + \mu_1(\psi) + \mu_2(\psi, \psi) + \mu_3(\psi, \psi, \psi) + \dots \quad , \quad (2.34)$$

où

$$\begin{aligned} \mu_b &= 1 \quad , \\ \mu_1(\psi) &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_b \dot{\gamma}_{ij}(\psi) \quad , \\ \mu_2(\psi, \psi) &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij} \partial \dot{\gamma}_{kl}} \right|_b \dot{\gamma}_{ij}(\psi) \dot{\gamma}_{kl}(\psi) \quad , \\ \mu_3(\psi, \psi, \psi) &= \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij} \partial \dot{\gamma}_{kl} \partial \dot{\gamma}_{pq}} \right|_b \dot{\gamma}_{ij}(\psi) \dot{\gamma}_{kl}(\psi) \dot{\gamma}_{pq}(\psi) \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, les composantes du déviateur du tenseur des contraintes associé à la perturbation s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\psi) &= \tau_{ij}(\Psi_b) + \tau_{1,ij}(\psi) + \tau_{2,ij}(\psi, \psi) + \tau_{3,ij}(\psi, \psi, \psi) + \dots \\ &= 0 + [\mu_1(\psi) \dot{\gamma}_{ij}(\psi)] + [\mu_2(\psi, \psi) \dot{\gamma}_{ij}(\psi)] + [\mu_3(\psi, \psi, \psi) \dot{\gamma}_{ij}(\psi)] + \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.35)$$

En posant $\Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij}(\psi) \dot{\gamma}_{ij}(\psi)$ et en tenant compte du fait que l'état de base correspond à un fluide au repos, les expressions de μ_1 , μ_2 et μ_3 peuvent être simplifiées :

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{1}{(k/2)!} \left[\frac{\partial^{k/2} \mu}{\partial \Gamma^{k/2}} \right]_b \Gamma^{k/2} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases} \quad (2.36)$$

On suppose que le problème présente une périodicité selon l'axe x . On peut alors définir un vecteur d'onde k (fig 2.2).

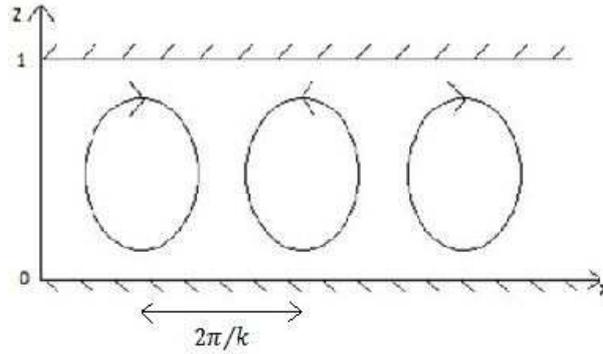


FIGURE 2.2: Périodicité dans la direction x

L'interaction du mode fondamental avec lui-même et son conjugué dans les termes non linéaires contenus dans les équations (2.31) et (2.32) fait apparaître des termes d'ordre supérieur. Cela nous conduit à développer ψ et θ sous la forme de séries de Fourier :

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n(z, t) e^{i n (k x + \sigma t)} \quad (2.37)$$

$$\theta(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_n(z, t) e^{i n (k x + \sigma t)} \quad (2.38)$$

avec $\psi_{-n}(z, t) = \psi_n^*(z, t)$ et $\theta_{-n}(z, t) = \theta_n^*(z, t)$ où le symbole $*$ indique le complexe conjugué du terme qui lui est associé.

En remplaçant dans les équations (2.31) et (2.32), on obtient un système de la forme :

$$\mathcal{L}_{1n} \psi_n + \mathcal{L}_{2n} \theta_n = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} [\mathcal{N}_I (\psi_\ell, \Delta \psi_{n-\ell}) + \mathcal{N}_v (\psi_\ell | \psi_{n-\ell})] \quad (2.39)$$

$$\mathcal{L}_{3n} \psi_n + \mathcal{L}_{4n} \theta_n = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}_I (\psi_\ell, \theta_{n-\ell}) \quad (2.40)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1n} &= Pr \mathcal{S}_n^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} - i n \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \mathcal{S}_n \quad , \\ \mathcal{L}_{2n} &= i k n Ra Pr \quad , \\ \mathcal{L}_{3n} &= i k n \quad , \\ \mathcal{L}_{4n} &= \mathcal{S}_n - \left(\frac{\partial}{\partial t} - i n \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \\ \mathcal{N}_I (f, g) &= \mathcal{J}(f, g) \quad , \\ \mathcal{N}_v &= \left[4 i k n \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \left(n^2 k^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 \psi \right] \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \right) \quad , \\ \mathcal{S}_n &= \frac{d^2}{dz^2} - n^2 k^2 \quad . \end{aligned}$$

Les conditions limites se réécrivent alors :

$$\text{en } z = 0 : \quad \psi = 0, \quad \psi = -L_G \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \theta = 0, \quad (2.41)$$

$$\text{en } z = 1 : \quad \psi = 0, \quad \psi = L_G \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \theta = 0. \quad (2.42)$$

On recherche une solution du système (2.39) sous la forme d'un développement en série entière de l'amplitude $A(t)$. Pour le mode 1, on écrit :

$$\psi_1(z, t) = A(t) \Phi_1(z, t) \quad (2.43)$$

$$\theta_1(z, t) = A(t) \vartheta_1(z, t) \quad (2.44)$$

et on normalise par rapport à la valeur de la température au centre :

$$\vartheta_1(z_0, t) = 1 \quad , \quad (2.45)$$

où z_0 est le centre.

Comme précédemment, la présence de termes non linéaires nous conduit à écrire

$$\psi_n(z, t) = A^n(t) \Phi_n(z, t) \quad , \quad (2.46)$$

$$\theta_n(z, t) = A^n(t) \vartheta_n(z, t) \quad . \quad (2.47)$$

La variation temporelle de l'amplitude A est exprimée grâce à l'équation de Landau :

$$\frac{dA}{dt} = A g(A) \quad \text{où} \quad g(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} g_j |A|^{2j} \quad . \quad (2.48)$$

Enfin, on développe Φ_n et ϑ_n de la manière suivante :

$$\Phi_n(z, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} F_{n,2m+n}(z) |A|^{2m} \quad (2.49)$$

$$\vartheta_n(z, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} G_{n,2m+n}(z) |A|^{2m} \quad (2.50)$$

On a donc finalement :

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{n,2m+n}(z) A^n(t) |A|^{2m} e^{i n (k x + \sigma t)} \quad , \quad (2.51)$$

$$\theta(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{n,2m+n}(z) A^n(t) |A|^{2m} e^{i n (k x + \sigma t)} \quad . \quad (2.52)$$

En remplaçant dans les équations précédentes, on obtient le système suivant :

$$\mathcal{L}_{1n} F_{n,2m+n} + \mathcal{L}_{2n} G_{n,2m+n} = \mathcal{N}_I(\psi, \psi) + \mathcal{N}_v(\psi|\psi) + \sum_{i=1}^m (2(m-i) + n) g_i \mathcal{S}_n F_{n,m-i} \quad (2.53)$$

$$\mathcal{L}_{3n} F_{n,2m+n} + \mathcal{L}_{4n} G_{n,2m+n} = \mathcal{N}_I(\psi, \theta) + \sum_{i=1}^m (2(m-i) + n) g_i G_{n,m-i} \quad (2.54)$$

avec

$$\mathcal{L}_{1n} = Pr \mathcal{S}_n^2 - (2m+n) \sigma \mathcal{S}_n \quad , \quad (2.55)$$

$$\mathcal{L}_{2n} = i k n Ra Pr \quad , \quad (2.56)$$

$$\mathcal{L}_{3n} = i k n \quad , \quad (2.57)$$

$$\mathcal{L}_{4n} = \mathcal{S}_n - (2m+n) \sigma \quad , \quad (2.58)$$

$$\mathcal{N}_I(f, g) = \mathcal{J}(f, g) \quad , \quad (2.59)$$

$$\mathcal{N}_v = \left[4 i k n \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \left(n^2 k^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 \psi \right] \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \right) \quad (2.60)$$

$$\mathcal{S}_n = \frac{d^2}{dz^2} - n^2 k^2 \quad . \quad (2.61)$$

2.4 Procédure de résolution

L'ensemble des équations différentielles du problème est résolu de manière séquentielle en commençant par $n = 1, m = 0$.

- (i) Le cas $n = 1, m = 0$ correspond à l'analyse linéaire de stabilité qui permet de tracer la courbe de stabilité marginale, de déterminer les conditions critiques de stabilité et de calculer les fonctions propres solutions du problème.
- (ii) Le cas $n = 0, m = 1$ fournit une première correction du profil conductif de température entre les deux plaques qui caractérise l'état de base.
- (iii) Le cas $n = 2, m = 0$ permet de calculer le premier harmonique du mode fondamental.

(iv) Le cas $n = 1$, $m = 1$ correspond à la première modification du mode fondamental et permet de calculer le premier coefficient de Landau g_1 qui déterminera la nature de la bifurcation. Pour clarifier la démarche suivie ([13], [11], [29]) dans le calcul du coefficient de Landau, on réécrit les équations différentielles associées à ce cas :

$$\mathcal{L}_1 \begin{bmatrix} F_{13} \\ G_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \mathcal{S}_1 F_{11} + \mathcal{N}_I(\psi, \Delta\psi) + \mathcal{N}_v(\psi|\psi) \\ g_1 G_{11} + \mathcal{N}_I(\psi, \theta) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

avec \mathcal{L}_1 la matrice $\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{21} \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{41} \end{bmatrix}$

Deux situations sont à distinguer :

- La première est celle où $Ra = Ra_c$: le point considéré est sur la courbe de stabilité marginale. Dans ce cas, $\sigma = 0$ et le système d'équations différentielles précédent se réduit à

$$\mathcal{M} \cdot \mathbf{q} = \boldsymbol{\chi} \quad (2.63)$$

où $\boldsymbol{\chi}$ est la partie non homogène du système et $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta})^T$. On remarque qu'un système similaire est obtenu pour les cas $n = 0$, $m = 1$ et $n = 2$, $m = 2$ où la matrice \mathbf{M} associée à l'opérateur \mathcal{M} est inversible. En revanche, pour le cas traité ici ($n = 1$, $m = 1$), la matrice \mathbf{M} associée à \mathcal{M} est la même que pour le problème linéaire ($n = 1$, $m = 0$), elle est donc singulière. Dans ce cas, soit le problème n'a pas de solution soit une solution existe et elle doit satisfaire le critère de solvabilité de Fredholm . Ce critère impose que le terme non homogène $\boldsymbol{\chi}$ soit orthogonal au noyau de l'opérateur du problème homogène adjoint. Pour cela, on définit le produit scalaire entre deux fonctions f et g par

$$(f, g) = \int_0^1 f g dz \quad . \quad (2.64)$$

Le problème homogène adjoint associé au problème direct s'écrit :

$$\mathcal{M}^+ \cdot \mathbf{q}^+ = \mathbf{0} \quad , \quad (2.65)$$

où \mathcal{M}^+ est l'opérateur adjoint de \mathcal{M} et $\mathbf{q}^+ = (\boldsymbol{\psi}^+, \boldsymbol{\theta}^+)^T$ est la solution non triviale du problème homogène adjoint. Quant à la condition de solvabilité, elle est donnée par :

$$(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{q}^+) = 0 \quad . \quad (2.66)$$

Elle nous permet de calculer le premier coefficient de Landau qui est contenu

dans le terme χ :

$$g_1 = - \frac{\langle [\mathcal{N}_I(\psi, \Delta\psi) + \mathcal{N}_v(\psi|\psi)] F_{11}^+ + \mathcal{N}_I(\psi, \theta) G_{11}^+ \rangle}{\langle \mathcal{S}_1 \cdot F_{11} F_{11}^+ + G_{11} \cdot G_{11}^+ \rangle}, \quad (2.67)$$

avec $\langle f \rangle = \int_{-1}^1 f dz$. Le calcul de F_{13} et G_{13} est effectué grâce au système (2.63). Cependant, la solution de ce problème n'est pas unique : $F_{13} + \beta F_{11}$ et $G_{13} + \beta G_{11}$ où β est une constante sont aussi solutions. Pour lever ce problème d'indétermination, on impose une condition limite supplémentaire :

$$F_{13}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad G_{13}(z_0) = 0, \quad (2.68)$$

z_0 étant l'ordonnée du centre du problème. Cette condition limite a été choisie accidentellement par Watson [33] avant d'être justifiée par Sen et Venkateswarlu [29] : les fonctions F_{1i} et G_{1i} étant des modifications des fonctions propres F_{11} et G_{11} , il paraît évident que leur expression ne dépende pas de F_{11} et G_{11} . De plus, le mode fondamental pour la température s'écrit

$$G = G_{11} A + G_{13} |A|^2 A + \dots \quad (2.69)$$

et comme l'amplitude est définie comme le maximum de G_{11} , on comprend le choix de la condition limite (2.68).

- La deuxième situation est celle où $Ra > Ra_c$: le point considéré se situe dans la partie instable du diagramme de stabilité marginale. Cette fois, $\sigma \neq 0$, le système (2.62) est solvable sans condition. Pour le résoudre, nous suivons la même méthode que Sen et Venkateswarlu [29]. On commence par réécrire le système (2.62) sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}_1 \begin{bmatrix} F_{13} \\ G_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sigma \mathcal{S}_1 F_{13} + g_1 \mathcal{S}_1 F_{11} + \mathcal{N}_I(\psi, \Delta\psi) + \mathcal{N}_v(\psi|\psi) \\ 3 \sigma G_{13} + g_1 G_{11} + \mathcal{N}_I(\psi, \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Si on applique la condition de solvabilité à cette dernière équation (2.70), on trouve :

$$g_1 = - \frac{\langle [\mathcal{N}_I(\psi, \Delta\psi) + \mathcal{N}_v(\psi|\psi) + 3 \sigma \mathcal{S}_1 F_{13}] F_{11}^+ + [\mathcal{N}_I(\psi, \theta) + 3 \sigma G_{13}] G_{11}^+ \rangle}{\langle \mathcal{S}_1 F_{11} \cdot F_{11}^+ + G_{11} \cdot G_{11}^+ \rangle}, \quad (2.71)$$

Il faut donc résoudre le système composé de (2.62) et (2.71) par itérations successives. La première itération permet le calcul de g_1 en prenant F_{13} et G_{13} nuls. On obtient ainsi une première estimation de F_{13} et G_{13} en remplaçant g_1 dans (2.62) par la valeur trouvée. On retrouve alors la solution obtenue dans le cas précédent. Les itérations continuent jusqu'à obtenir une convergence des solutions, l'itération i étant calculée en introduisant les estimations de g_1 et des fonctions F_{13} et G_{13} obtenues à l'itération $i - 1$.

Remarque : Étant donné que μ_1 est nul (éq. 2.36), les termes non linéaires liés à la viscosité (2.60) n'interviennent qu'à partir du calcul du premier coefficient de Landau.

2.5 Résolution numérique

La résolution numérique du problème se fait en cherchant des solutions approchées de ψ et θ par une série tronquée de polynômes de Chebyshev :

$$\psi = \sum_{j=0}^N a_j T_j(z) \quad \text{et} \quad \theta = \sum_{j=0}^N b_j T_j(z) \quad (2.72)$$

où $T_j(z) = \cos(j \arccos(z))$.

Les points de collocation sont les points de Gauss-Lobatto, racines du polynôme de Chebyshev T_N :

$$z_m = \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) \quad (2.73)$$

On définit plusieurs vecteurs :

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi(z_0) \\ \vdots \\ \psi(z_N) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta(z_0) \\ \vdots \\ \theta(z_N) \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

et des matrices :

$$\mathbf{D0} = \begin{bmatrix} T_0(z_0) & \dots & T_N(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_N(z_0) & \dots & T_N(z_N) \end{bmatrix} \quad \mathbf{D1} = \begin{bmatrix} T'_0(z_0) & \dots & T'_N(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T'_N(z_0) & \dots & T'_N(z_N) \end{bmatrix}$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées.

Alors

$$\psi = \mathbf{D0} \cdot \mathbf{a} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \mathbf{D1} \cdot \mathbf{a} \quad \dots$$

et

$$\theta = \mathbf{D0} \cdot \mathbf{b} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \mathbf{D1} \cdot \mathbf{b} \quad \dots$$

On obtient finalement un problème aux valeurs propres généralisées du type :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} \quad . \quad (2.74)$$

Avec

$$\mathbf{X} = (a_0 \dots a_N \ b_0 \dots b_N)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Pr (\mathbf{D4} - 2 k^2 \mathbf{D2} + k^4 \mathbf{D0}) & i k Ra Pr \mathbf{D0} \\ i k \mathbf{D0} & -k^2 \mathbf{D0} + \mathbf{D2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -k^2 \mathbf{D0} + \mathbf{D2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D0} \end{bmatrix}$$

Un point important à prendre en compte est le domaine de définition des fonctions de Chebyshev. En effet, jusque maintenant nous avons travaillé avec $z \in [0; 1]$ or les polynômes de Chebyshev sont définis sur $[-1; 1]$. Il est donc nécessaire d'effectuer un changement de variable en posant

$$z_T = 2z - 1 \quad . \quad (2.75)$$

Cela implique l'apparition d'un facteur noté "scal" devant les matrices dérivées $\mathbf{D1}$, $\mathbf{D2}$,

La condition de solvabilité (2.64) permettant de connaître les coefficients de Landau nécessite le calcul d'une intégrale. Pour cela, on utilise la quadrature de Clenshaw-Curtis[31] : pour calculer $I = \int_1^{-1} f(x) dx$, on écrit $f(x)$ sous la forme d'un polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal au nombre de troncature N tel que $p(x_j) = f_j$ pour $j \in [0, N]$. Il reste alors à calculer :

$$I_N = \int_1^{-1} p(x) dx \quad \text{avec} \quad p(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) \quad . \quad (2.76)$$

Chapitre 3

Résultats et discussion

Ce chapitre s'organise en trois parties. La première est dédiée aux résultats de l'analyse linéaire de stabilité. On y déterminera les courbes de stabilité marginale en conditions d'adhérence et de glissement sans frottement ainsi que les conditions critiques en fonction de la longueur de glissement. Il y sera montré que les résultats obtenus sont en accord avec la littérature ([16],[34]) et en particulier, que le glissement a un effet déstabilisant et conduit à des structures convectives de plus grande taille. Dans la deuxième partie, en considérant le cas d'une convection bidimensionnelle, nous étudions le comportement asymptotique de la solution au voisinage des conditions critiques. Nous nous intéresserons au calcul du premier coefficient de Landau permettant de déduire la nature de la bifurcation. On remarquera que le comportement rhéofluidifiant favorise le développement d'une bifurcation sous-critique et on proposera une interprétation énergétique. Dans la troisième et dernière partie, nous nous plaçons d'abord dans le cas d'une bifurcation surcritique où nous analysons le champ de viscosité et son influence sur la structure de l'écoulement pour Ra nettement plus grand que Ra_c . Puis, pour une bifurcation sous-critique, nous recherchons l'amplitude critique de la perturbation à partir de laquelle le système devient instable et montrons que cette amplitude diminue quand le caractère rhéofluidifiant augmente.

3.1 Théorie linéaire

3.1.1 Problème direct

Dans le cas linéaire, on suppose que les perturbations sont infinitésimales. On peut donc négliger les termes de perturbations quadratiques et d'ordres supérieurs dans les équations (2.31) et (2.32) qui deviennent :

– Équation de vorticité linéarisée :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\psi) = Ra Pr \frac{\partial\theta}{\partial x} + Pr \Delta(\psi) \quad . \quad (3.1)$$

– Équation de l'énergie linéarisée :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \Delta\theta \quad . \quad (3.2)$$

Comme indiqué dans le chapitre 2, nous cherchons des solutions de la forme :

$$\psi(x, z, t) = F_{11} A e^{i(kx + \sigma t)} + c.c \quad , \quad (3.3)$$

$$\theta(x, z, t) = G_{11} A e^{i(kx + \sigma t)} + c.c \quad , \quad (3.4)$$

c.c indiquant le complexe conjugué du terme le précédent.

En remplaçant dans les équations (3.1) et (3.2) ou encore en écrivant le système (2.53-2.54) avec $n = 1$ et $m = 0$, on obtient les deux équations ci-dessous :

$$Pr \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 F_{11} + i k Ra Pr G_{11} = \sigma \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) F_{11} \quad , \quad (3.5)$$

$$i k F_{11} + \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) G_{11} = \sigma G_{11} \quad , \quad (3.6)$$

accompagnées des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} - \text{ en } z = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = L_G \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad , \\ - \text{ en } z = 1 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -L_G \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour résoudre le problème aux valeurs propres généralisé (éq. 3.5-3.6) on utilise la fonction *eig* de Matlab qui donne tout le spectre des valeurs propres. La figure (3.1) montre un exemple de spectre obtenu pour $k = 3.117$, $Ra = 1707.762$ et $L_G = 0$. On peut noter que les valeurs propres sont réelles, ce qui est en accord avec le principe d'échange de stabilité (Annexe A) : au seuil de l'instabilité, on passe d'un écoulement stationnaire à un autre écoulement stationnaire. Le tableau (3.1) permet d'illustrer la convergence des résultats en fonction du nombre N de polynômes de Chebyshev. La convergence est pratiquement assurée à partir de $N = 10$. Les résultats présentés dans ce rapport ont été obtenus en utilisant $N = 20$.

| N | Ra_c | k_c | σ_i | σ_r |
|----|----------|-------|----------------------|------------------------|
| 5 | 1735.673 | 3.117 | $4.76 \cdot 10^{-6}$ | $-1.20 \cdot 10^{-11}$ |
| 10 | 1707.757 | 3.117 | $2.68 \cdot 10^{-6}$ | $-9.07 \cdot 10^{-11}$ |
| 15 | 1707.762 | 3.117 | $1.23 \cdot 10^{-6}$ | $-7.11 \cdot 10^{-10}$ |
| 20 | 1707.762 | 3.117 | $1.33 \cdot 10^{-6}$ | $-2.97 \cdot 10^{-7}$ |

TABLE 3.1: Conditions critiques et valeurs propres associées pour différentes valeurs de N en conditions d'adhérence aux parois avec $Pr = 10$.

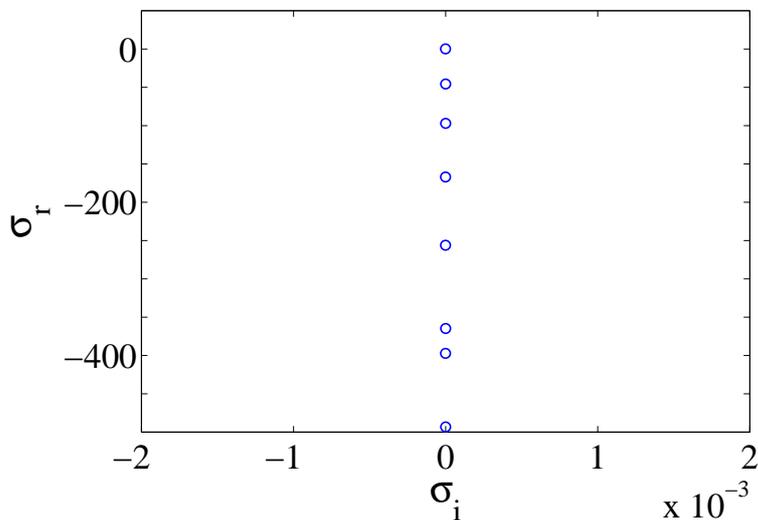


FIGURE 3.1: Spectre des valeurs propres dans le plan (σ_i, σ_r) dans les conditions critiques et en situation d'adhérence ($L_G = 0$) pour $Pr = 10$.

Influence du glissement aux parois sur les conditions critiques

La figure (3.2) représente la variation du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre d'onde k dans le cas de conditions limites aux parois d'adhérence et de glissement sans frottement. On retrouve ici les valeurs critiques (k_c, Ra_c) de la littérature ([7], [10]), à savoir :

– glissement sans frottement :

$$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \quad Ra_c = \frac{27 \pi^4}{4} \quad ; \quad (3.8)$$

– adhérence :

$$k_c = 3.117; \quad Ra_c = 1707.76 \quad . \quad (3.9)$$

Remarque : Dans le cas d'un glissement sans frottement, les conditions critiques peuvent être déterminées analytiquement. Les détails du calculs sont exposés dans Drazin et Reid ([10] page 50) Ces valeurs critiques sont indépendantes du nombre de Prandtl. Si le nombre de Rayleigh est supérieur à ces valeurs, il existe au moins un mode qui va passer dans le demi-plan instable et la convection apparaît. Dans le cas contraire, pour tout nombre d'onde k , tous les modes seront amortis et le système sera stable. L'augmentation du nombre de Rayleigh critique le long de la courbe de stabilité marginale et aux grands nombres d'onde met en évidence l'efficacité des petites structures dans les mécanismes de stabilité.

On remarque que pour un nombre d'onde donné, le nombre de Rayleigh associé est plus élevé en conditions d'adhérence qu'en conditions de glissement sans frottement. Ceci est encore observé sur les figures (3.3) et (3.4) représentant la variation de Ra_c et k_c en fonction de la longueur de glissement.

Les figures (3.3) et (3.4) sont conformes aux résultats de Webber [34] et Kuo et Chen [16] : Ra_c et k_c diminuent quand la longueur de glissement augmente avec une forte sensibilité autour de $L_G = O(0.1)$. Le nombre de Rayleigh critique varie de 1707.76 pour $L_G = 0$ à 657.5 pour L_G très grand. Pour les mêmes valeurs de L_G , le nombre d'onde critique diminue de 3.117 à 2.2. En fait, la valeur critique du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde ne varie pas significativement à partir de $L_G = 100$. Ces variations montrent que la présence de conditions aux limites de glissement ont un caractère déstabilisant, facilitant l'apparition d'un échange convectif. Dans la suite de ce document, les conditions de glissement sans frottement sont obtenues pour une longueur de glissement adimensionnelle $L_G = 100$.

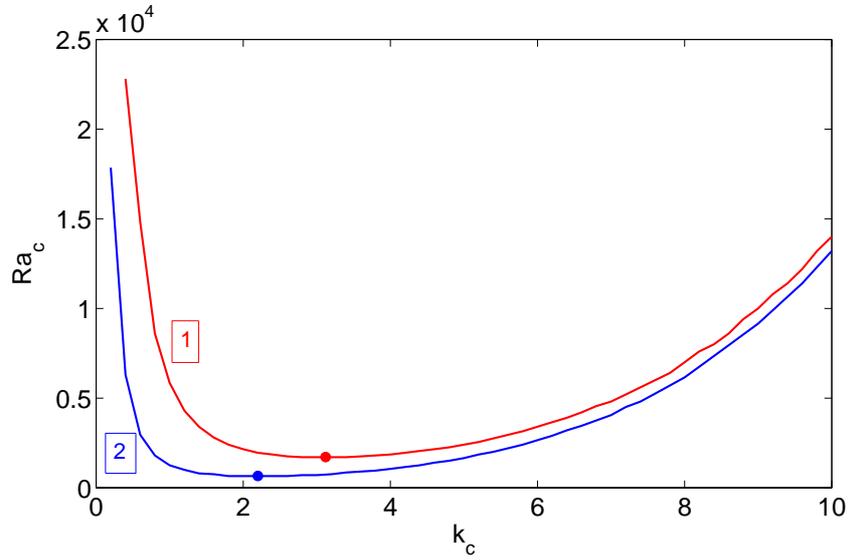


FIGURE 3.2: Courbes de stabilité marginale pour des conditions d'adhérence (1) et de glissement sans frottement (2) pour $Pr = 10$.

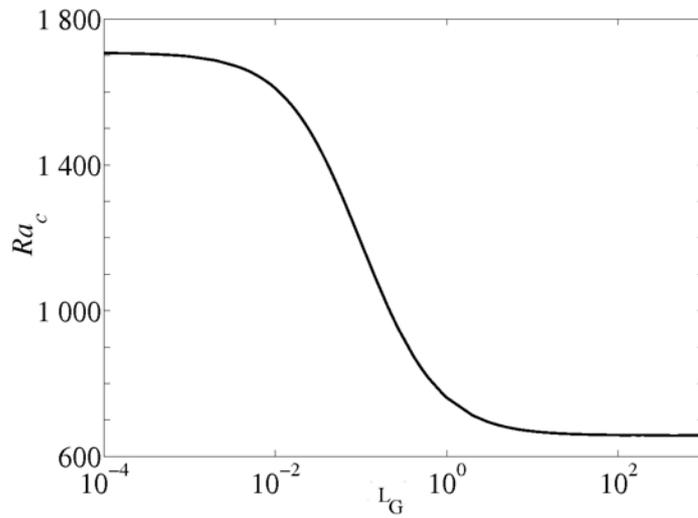


FIGURE 3.3: Variation du nombre de Rayleigh critique en fonction de la longueur de glissement pour $Pr = 10$.

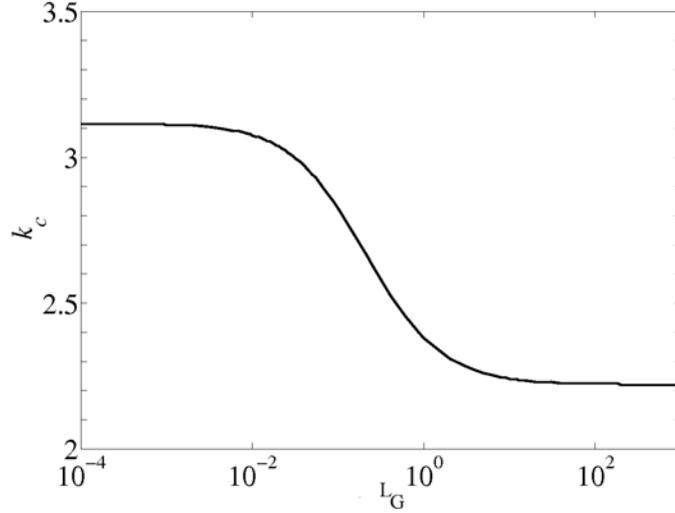


FIGURE 3.4: Variation du nombre d'onde critique en fonction de la longueur de glissement pour $Pr = 10$.

Fonctions propres et structure des rouleaux de convection

La figure (3.5a) représente l'évolution de F_{11} (composante verticale de la vitesse) entre les deux plaques : F_{11} est nulle aux parois et maximale au centre. On observe qu'en conditions d'adhérence, la fonction propre F_{11} est sous forme de cloche. Quand la longueur de glissement augmente, la forme de F_{11} change jusqu'à varier proportionnellement à $\sin(\pi z)$ lorsqu'on tend vers le glissement parfait. Webber [34] observe le même type d'évolution en traçant la fonction propre normalisée de la vitesse. En revanche, la fonction propre de la température (fig. 3.5b) conserve la même allure et des valeurs semblables quelles que soient les conditions limites appliquées aux parois.

Il est important de noter que les fonctions propres ont été normalisées. Plusieurs normalisations sont possibles, celle que nous avons choisie consiste à imposer une température réelle et maximale au centre (éq. 2.45) :

$$G_{11}(z = 1/2) = 1 \quad . \quad (3.10)$$

On peut observer la structure de l'écoulement sur la figure (3.6) représentant les lignes de courant et les isothermes dans les conditions critiques à $Pr = 10$ et en conditions d'adhérence et de glissement parfait. En comparant les figures (3.6a) et (3.6b), on observe que les cellules de convection sont plus allongées dans le cas de conditions limites de type glissement parfait que dans le cas d'une adhérence aux parois. Plus généralement, la largeur des cellules augmente avec la longueur de glissement. Cela s'explique par le fait que le

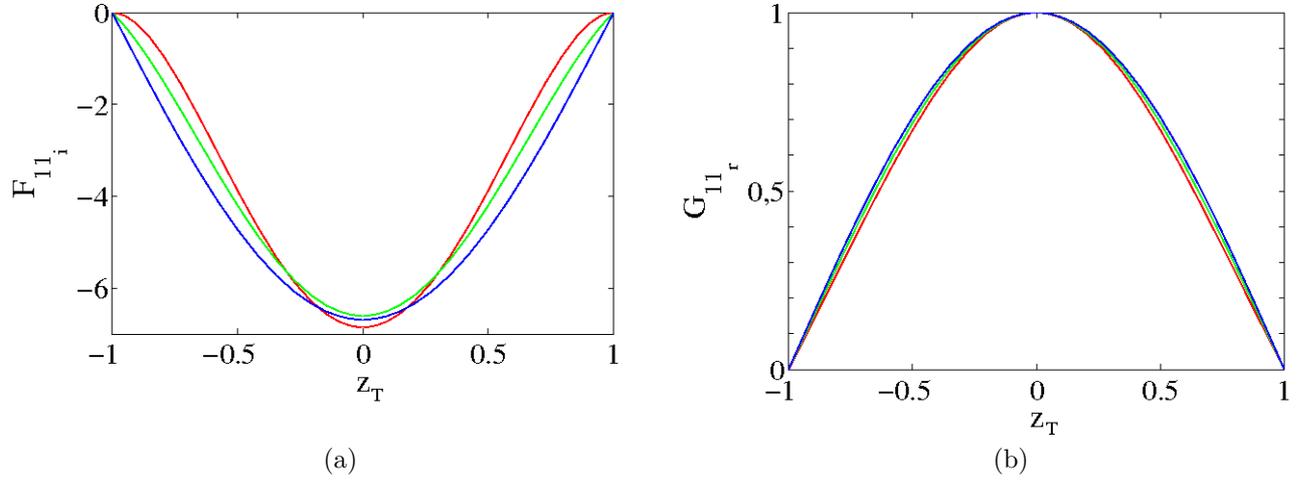


FIGURE 3.5: Fonctions propres F_{11} (a) et G_{11} (b) normalisées pour $L_G = 0$ (rouge), $L_G = 0.1$ (vert) et $L_G = 10^4$ (bleu) avec $Pr = 10$.

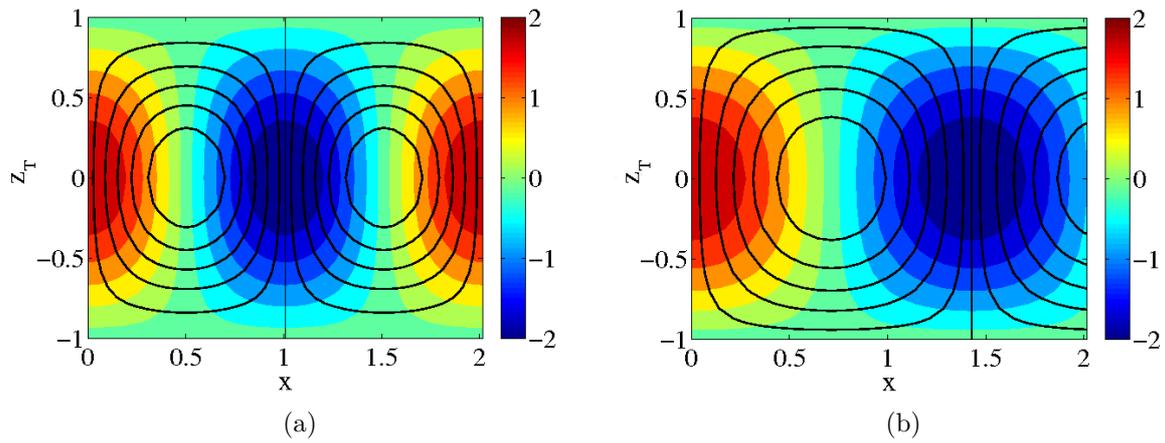


FIGURE 3.6: Représentation graphique des isothermes (en couleurs) et des lignes de courant (en traits continus) dans les conditions critiques pour $Pr = 10$ dans les deux cas limites : adhérence (a) et glissement parfait (b).

nombre d'onde critique diminue quand la longueur de glissement devient plus grande (fig. 3.4). On remarque qu'en situation de glissement, les lignes de courant sont plus proches de la paroi. On rappelle qu'au seuil de l'instabilité, le caractère non-Newtonien n'intervient pas.

Temps caractéristique de l'instabilité

Il est intéressant d'étudier l'évolution du coefficient d'amplification temporelle σ au voisinage du seuil d'instabilité. Pour cela, on note ϵ l'écart relatif au seuil d'instabilité défini par :

$$\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} . \quad (3.11)$$

Au voisinage du seuil d'instabilité, le coefficient d'amplification temporelle σ s'écrit :

$$\sigma(Ra, k_c) = \frac{\epsilon}{\tau} + O(\epsilon^2) , \quad (3.12)$$

où τ est un temps caractéristique de l'instabilité.

On suppose que les fonctions propres sont continues au voisinage de Ra_c :

$$F_{11}(Ra, k_c) = F_{11c}(Ra_c, k_c) + O(\epsilon) , \quad (3.13)$$

$$G_{11}(Ra, k_c) = G_{11c}(Ra_c, k_c) + O(\epsilon) . \quad (3.14)$$

En remplaçant F_{11} et G_{11} par ces expressions dans les équations (3.5) et (3.6) et en considérant uniquement les termes en $O(\epsilon)$, on montre que :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{i k_c Ra_c Pr \langle G_{11c} F_{11c}^+ \rangle}{\langle (D^2 - k^2) F_{11c} F_{11c}^+ + G_{11c} G_{11c}^+ \rangle} . \quad (3.15)$$

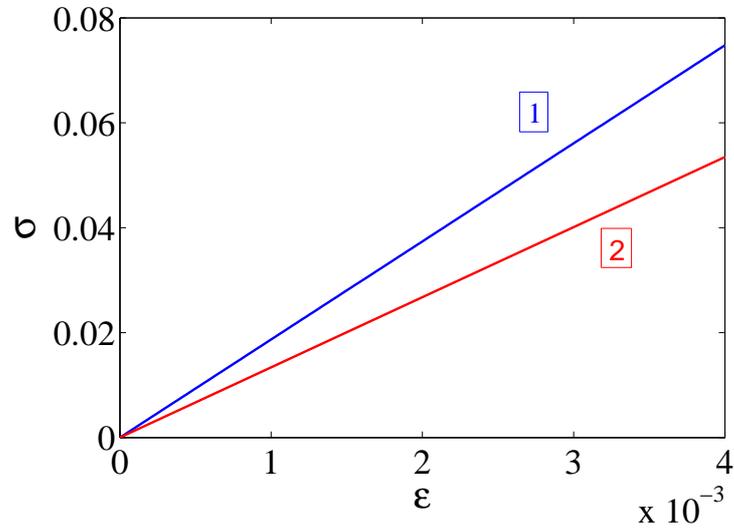


FIGURE 3.7: Variation du taux de croissance de la perturbation en fonction de ϵ en conditions d'adhérence (en bleu) et en glissement sans frottement (en rouge) pour $Pr = 10$.

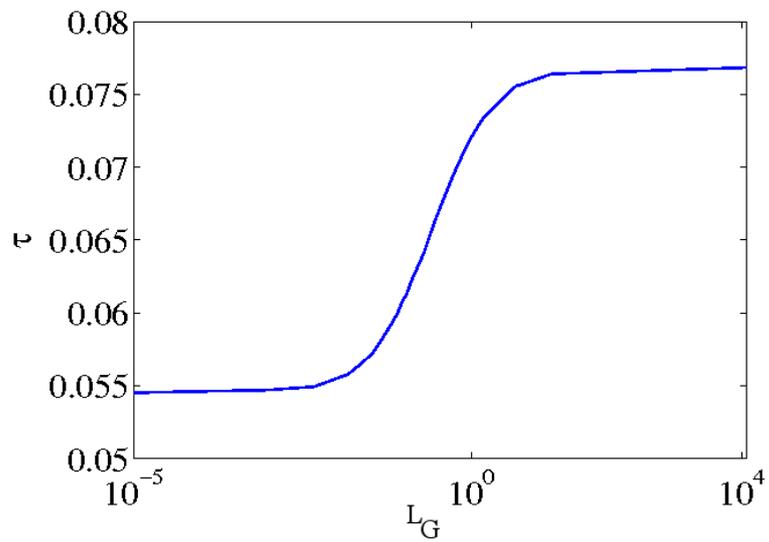


FIGURE 3.8: Évolution du temps caractéristique de l'amplitude de la perturbation en fonction de la longueur de glissement pour $Pr = 10$.

En utilisant la condition de normalisation

$$\langle (D^2 - k^2) F_{11c} F_{11c}^+ + G_{11c} G_{11c}^+ \rangle = 1 \quad (3.16)$$

il est montré ([17], [22], [27], [28], [18]) que :

– glissement parfait :

$$\tau = \frac{2}{3\pi^2} \frac{1 + Pr}{Pr} \quad , \quad (3.17)$$

– adhérence :

$$\tau = \frac{1 + 1.9544 Pr}{38.4429 Pr} \quad . \quad (3.18)$$

Ces expressions sont en très bon accord avec le calcul numérique de σ au voisinage du seuil de l'instabilité (fig. 3.7).

La figure (3.7) montre l'évolution de σ en situation d'adhérence et de glissement sans frottement pour $Pr = 10$. On observe qu'au voisinage du seuil d'instabilité, conformément au développement limité (3.12), σ varie linéairement avec ϵ . La pente de la droite $\sigma = f(\epsilon)$ est égale à $1/\tau$. L'augmentation de σ avec ϵ montre bien que plus le nombre de Rayleigh augmente, plus le système devient instable. On remarque également que la variation de σ par rapport à ϵ diminue lorsqu'on tend vers un glissement parfait aux parois (fig. 3.8).

3.1.2 Problème adjoint

En utilisant le produit scalaire défini par l'équation (2.64), on écrit le problème adjoint associé au problème direct (3.5-3.6) :

$$Pr \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 F_{11}^+ + i k G_{11}^+ = \sigma \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) F_{11}^+ \quad , \quad (3.19)$$

$$i k Ra Pr F_{11}^+ + \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) G_{11}^+ = \sigma G_{11}^+ \quad , \quad (3.20)$$

accompagné des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} - \text{ en } z = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad ; \\ - \text{ en } z = 1 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ce problème peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{X}^+ = \sigma \mathcal{B}^+ \cdot \mathbf{X}^+ \quad . \quad (3.22)$$

où \mathcal{A}^+ et \mathcal{B}^+ sont les opérateurs adjoints de \mathcal{A} et \mathcal{B} (éq. 2.74) vérifiant

$$(\mathbf{X}^+, \mathcal{A} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{X}, \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{X}^+) \quad (3.23)$$

$$(\mathbf{X}^+, \mathcal{B} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{X}, \mathcal{B}^+ \cdot \mathbf{X}^+) \quad (3.24)$$

Les valeurs propres σ solutions du problème adjoint sont les mêmes que pour le problème linéaire initial.

Les fonctions propres solutions du problème adjoint sont normalisées de telle façon que le dénominateur de l'équation (2.67) intervenant dans le calcul du premier coefficient de Landau soit égal à 1. À titre d'exemple, on représente les fonctions F_{11}^+ et G_{11}^+ (fig.3.9).

3.2 Analyse faiblement non linéaire

3.2.1 Premier harmonique

Le premier harmonique du fondamental est obtenu en résolvant les équations (2.53-2.54) avec $n = 2$ et $m = 0$:

$$\mathcal{L}_{12} F_{22} + \mathcal{L}_{22} G_{22} = \mathcal{N}_I(\psi, \psi) + \mathcal{N}_v(\psi|\psi) \quad , \quad (3.25)$$

$$\mathcal{L}_{32} F_{22} + \mathcal{L}_{42} G_{22} = \mathcal{N}_I(\psi, \theta) \quad , \quad (3.26)$$

et

$$\begin{aligned} - \text{ en } z = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad ; \\ - \text{ en } z = 1 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les représentations graphiques du premier harmonique du fondamental sont données sur la figure (3.10). On remarque que lorsque la longueur de glissement augmente, les valeurs de F_{22} et G_{22} diminuent. Il est d'ailleurs intéressant de noter que dans le cas d'un glissement parfait, le premier harmonique est inexistant.

La figure (3.11) représente les lignes de courants et les isothermes pour le premier harmonique dans le cas de conditions aux limites d'adhérence.

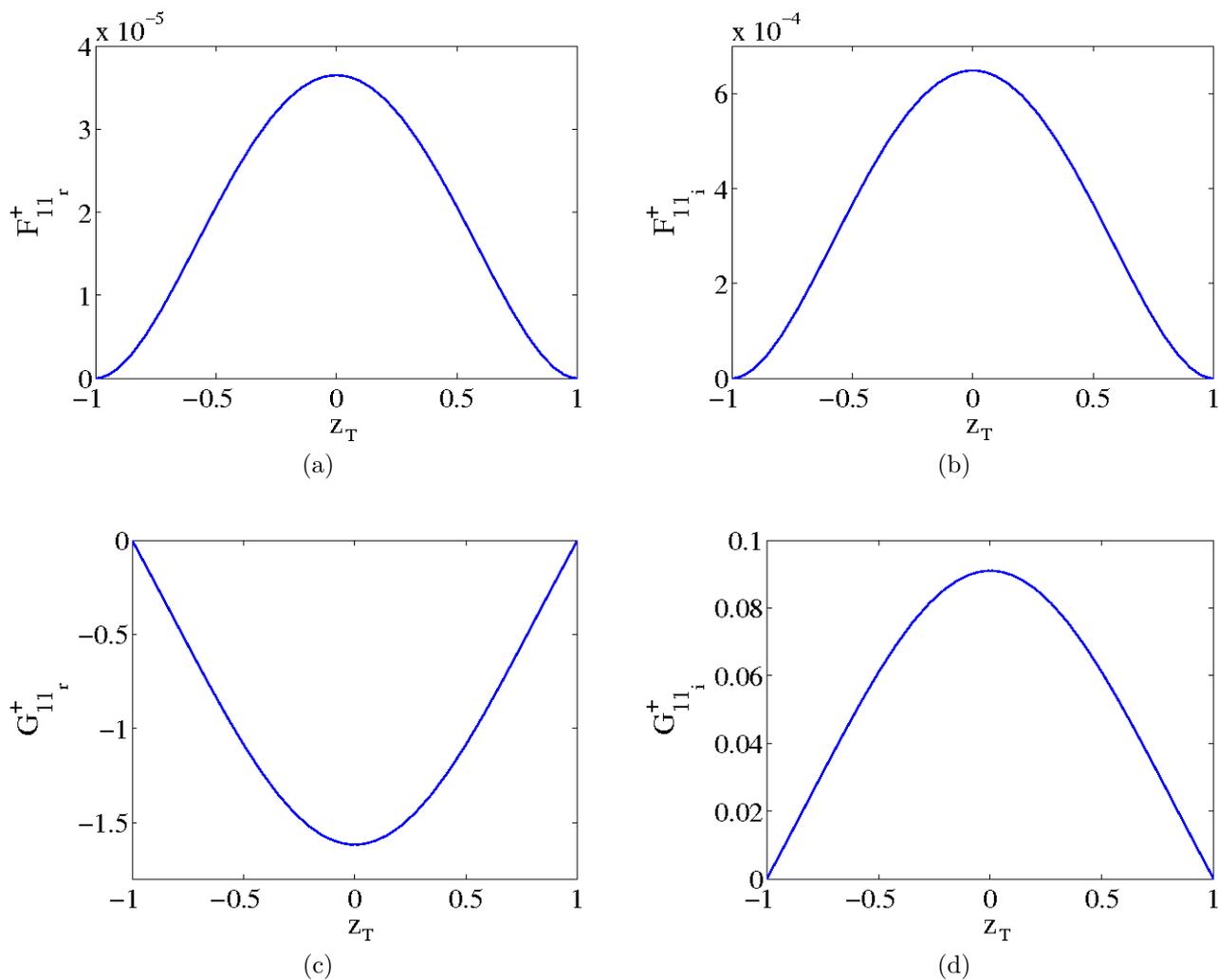


FIGURE 3.9: Représentation des fonctions F_{11}^+ et G_{11}^+ en conditions d'adhérence pour $Pr = 10$.

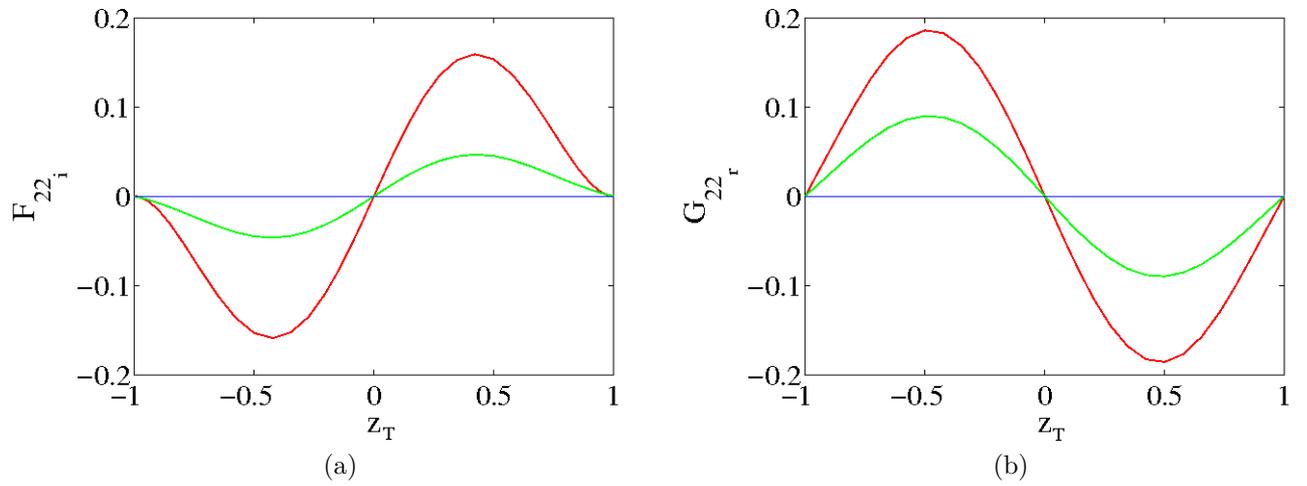


FIGURE 3.10: Représentation de la fonction de courant (a) et de la température (b) pour le premier harmonique pour $L_G = 0$ (en rouge), $L_G = 0.1$ (en vert) et $L_G = 10^4$ (en bleu) avec $Pr = 10$.

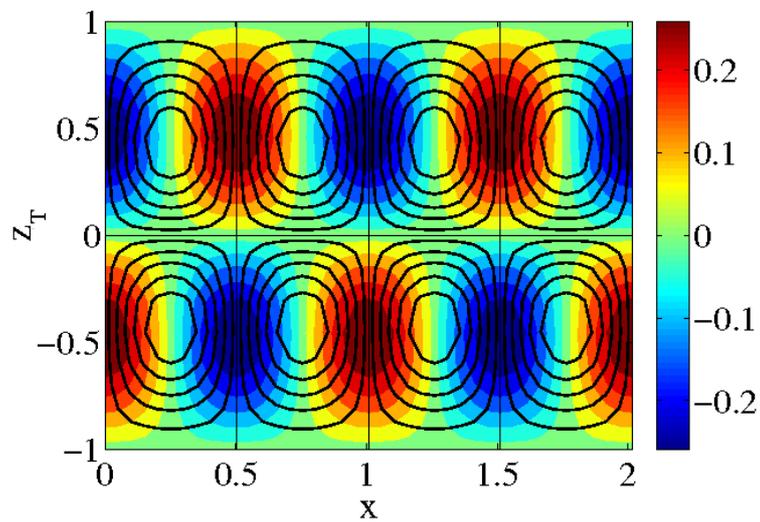


FIGURE 3.11: Représentation graphique des isothermes (en couleurs) et des lignes de courant (en traits continus) pour le premier harmonique et pour $Pr = 10$ dans les conditions aux limites d'adhérence.

3.2.2 Correction de l'état de base

La correction de l'état de base est obtenue par résolution des équations (2.53) et (2.54) avec $n = 0$ et $m = 1$ soit :

$$\mathcal{L}_{10} F_{02} + \mathcal{L}_{20} G_{02} = \mathcal{N}_I(\psi, \psi) \quad , \quad (3.28)$$

$$\mathcal{L}_{30} F_{02} + \mathcal{L}_{40} G_{02} = \mathcal{N}_I(\psi, \theta) \quad , \quad (3.29)$$

et

$$\begin{aligned} - \text{ en } z = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad ; \\ - \text{ en } z = 1 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -L_G \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le mode zéro en vitesse est nul, ce qui est conforme à l'état de base où il n'y a pas d'écoulement. Pour la température (fig. 3.12), on observe que les valeurs de G_{02} sont négatives au voisinage de la paroi inférieure chaude et positives au voisinage de la paroi supérieure froide. Ceci est une conséquence des mouvements de convection des cellules de Rayleigh-Bénard : le fluide froid est convecté vers la paroi chaude et vice-versa pour le fluide chaud. Ce phénomène de convection a tendance à saturer l'instabilité. Autrement dit, le gradient de température entre les deux parois se réduit, ce qui implique une diminution des mouvements de convection et donc du phénomène d'instabilité. On remarque que le glissement a tendance à réduire les phénomènes de convection.

3.2.3 Premier coefficient de Landau : nature de la bifurcation

La nature de la bifurcation est déterminée par le signe de la partie réelle du premier coefficient de Landau g_1 aux conditions critiques (2.67). Si $\mathcal{R}e(g_1)$ est positif, la bifurcation est dite sous-critique. Au contraire, si $\mathcal{R}e(g_1)$ est négatif, elle est dite surcritique.

Finalement, le premier coefficient de Landau est obtenu par :

$$g_1 = g_{1N} + g_{1NN} = g_{1N} + \alpha \tilde{g}_{1NN} \quad \text{avec } \alpha = \frac{1 - n_c}{2} \Lambda^2 \quad , \quad (3.31)$$

avec g_{1N} la partie du premier coefficient de Landau provenant des termes newtoniens et

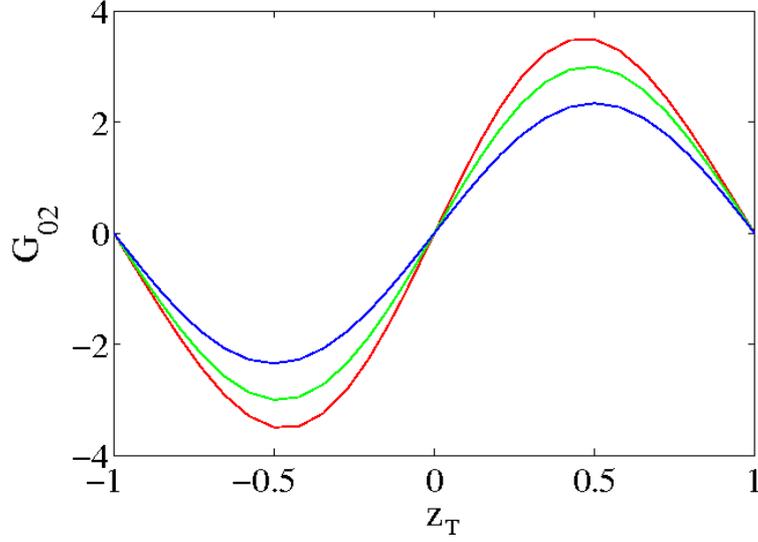


FIGURE 3.12: Représentation du mode zéro en température pour $L_G = 0$ (en rouge), $L_G = 0.1$ (en vert) et pour $L_G = 10^4$ (en bleu) avec $Pr = 10$.

$g_{1_{NN}}$ celle provenant des termes non-newtoniens. On a :

$$g_{1_N} = - \frac{\langle \mathcal{N}_I(\psi, \Delta\psi) F_{11}^+ + \mathcal{N}_I(\psi, \theta) G_{11}^+ \rangle}{\langle \mathcal{S}_1 F_{11} F_{11}^+ + G_{11} G_{11}^+ \rangle} , \quad (3.32)$$

$$\tilde{g}_{1_{NN}} = - \frac{\langle \mathcal{N}_v(\psi|\psi) F_{11}^+ \rangle}{\langle \mathcal{S}_1 F_{11} F_{11}^+ + G_{11} G_{11}^+ \rangle} . \quad (3.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_I(\psi, \Delta\Psi) &= i k \left[2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \frac{dF_{11}^*}{dz} - F_{11}^* \left(\frac{d^2}{dz^2} - 4k^2 \right) \frac{dF_{22}}{dz} \right. \\ &\quad \left. + \frac{dF_{22}}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) F_{11}^* - 2 \frac{dF_{11}^*}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} - 4k^2 \right) F_{22} \right] , \\ \mathcal{N}_I(\psi, \theta) &= i k \left[2 F_{22} \frac{dG_{11}^*}{dz} - F_{11}^* \frac{dG_{22}}{dz} + \frac{dF_{22}}{dz} G_{11}^* - 2 \frac{dF_{11}^*}{dz} G_{22} + F_{11} \frac{dG_{02}}{dz} \right] . \end{aligned}$$

La figure (3.13) montre que la partie non-newtonienne du premier coefficient de Landau diminue quand la longueur de glissement augmente. Le caractère non-newtonien du fluide joue donc un rôle plus important dans le cas de conditions aux limites d'adhérence que dans le cas d'un glissement sans frottement. Cette figure permet également d'observer que les termes non-newtoniens favorisent l'apparition d'une bifurcation sous-critique.

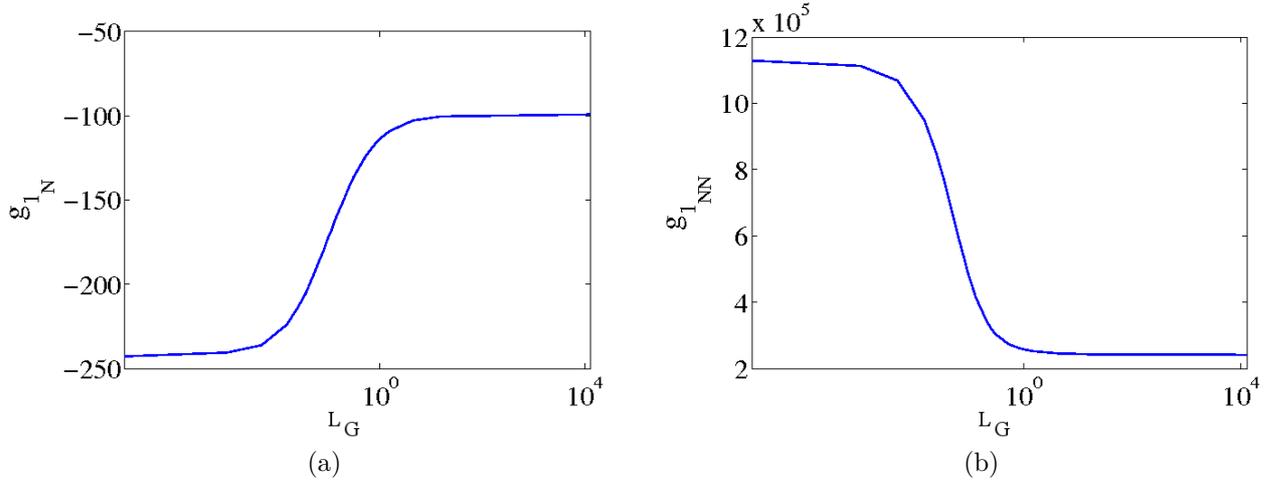


FIGURE 3.13: Évolution de la valeur du premier coefficient de Landau en fonction de la longueur de glissement, contribution des termes newtoniens (a) et non-newtoniens (b).

L'analyse de l'équation (3.31) et des courbes de la figure (3.13) indique qu'il existe une valeur critique du paramètre α pour lequel $g_1 = 0$: si $\alpha < \alpha_c$ la bifurcation est dite surcritique, si $\alpha > \alpha_c$ la bifurcation est dite sous-critique (fig. 3.15 et 3.14).

On observe sur la figure (3.14) que dans le cas d'un glissement parfait aux parois, $\alpha_c \approx 4.10^{-4}$ quel que soit le nombre de Prandtl. Si on se place en conditions d'adhérence aux parois, on remarque que α_c n'est pas constant : sa valeur diminue très fortement jusque $Pr = 0.2$ puis tend à se stabiliser à environ 2.10^{-4} quand le nombre de Prandtl tend vers 1. Ces résultats sont en accord avec ceux trouvés par Harchambois [12] et Balmforth et Rust [2]. Par contre, ils sont en désaccord avec ceux de Albaalbaki et Khayat [1] qui pour des conditions de glissement sans frottement obtiennent α_c indépendant du nombre de Prandtl et tendant vers 14.10^{-4} .

α_c varie donc en fonction du nombre de Prandtl et de la longueur de glissement. Cette dernière variation est représentée sur la figure (3.15). De la même manière que les autres figures représentant une variation selon L_G , on voit une variation plus sensible de α_c autour de $L_G = O(0.1)$ avec un maximum à $L_G = 0.5$.

Les figures (3.16-3.17) permettent de connaître la contribution respective des termes $J_1 = \mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) F_{11}^+$ et $J_2 = \mathcal{J}(\psi, \theta) G_{11}^+$ dans le calcul du premier coefficient de Landau pour des conditions d'adhérence et de glissement sans frottement avec $Pr = 10$. Dans les deux cas de conditions limites aux parois, on observe que c'est le terme J_2 , provenant de l'interaction entre F_{11} , G_{11} , F_{22} et G_{22} qui est le plus important.

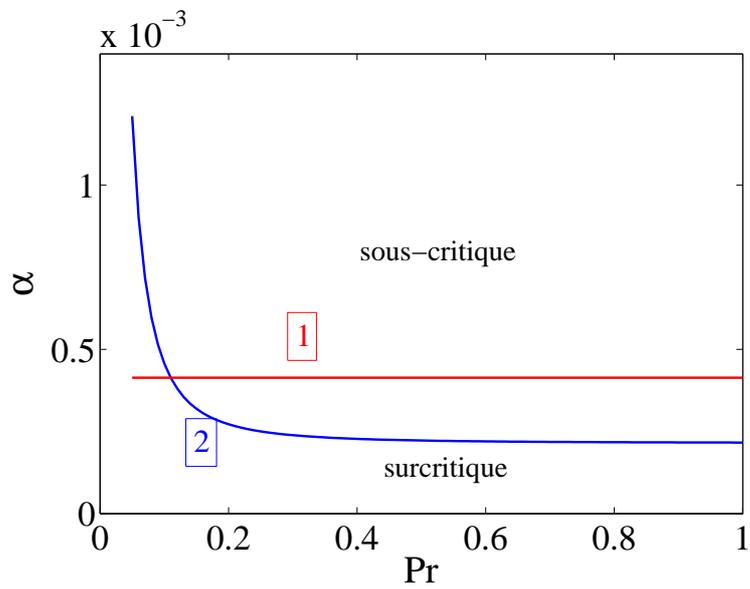


FIGURE 3.14: Variation de la valeur critique du paramètre α en fonction du nombre de Prandtl pour des conditions limites aux parois de glissement parfait (1) et d'adhérence (2).

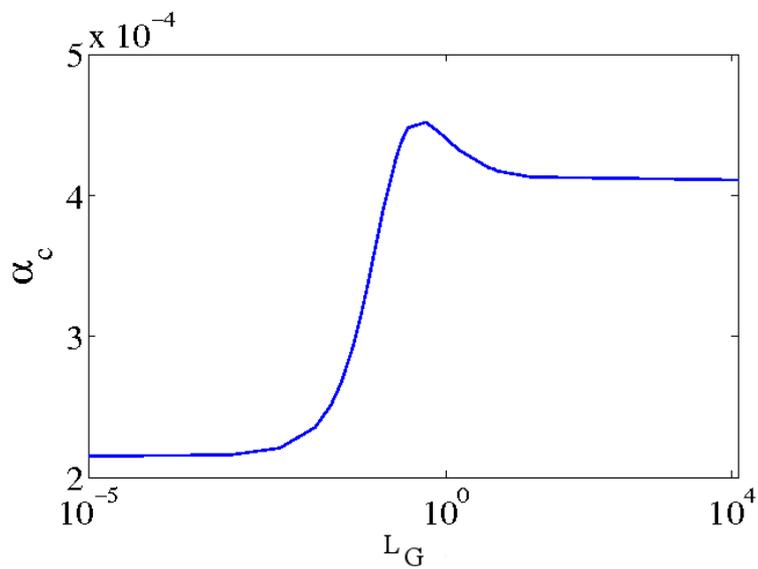


FIGURE 3.15: Variation de la valeur critique du paramètre α selon la longueur de glissement pour $Pr = 10$.

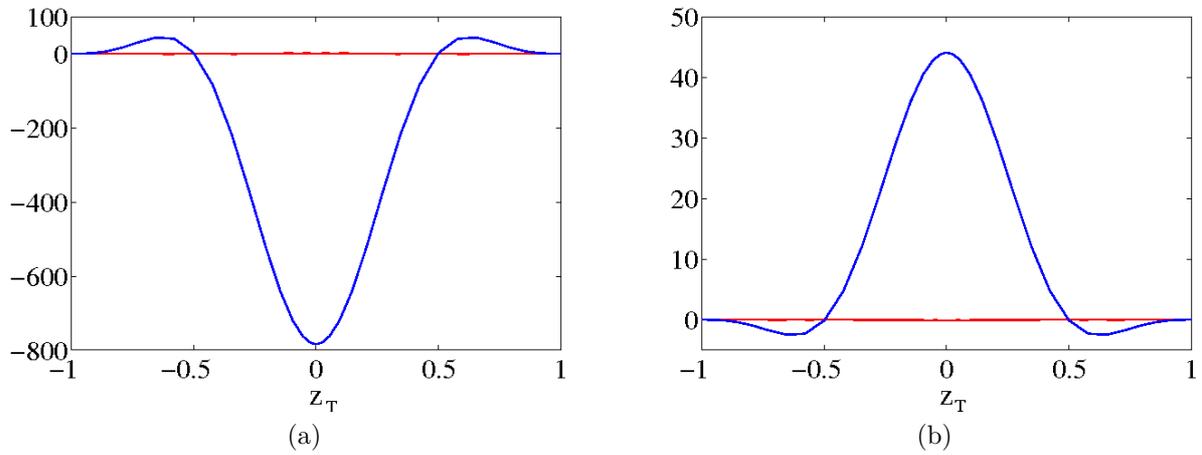


FIGURE 3.16: Comparaison de la contribution des termes non linéaires (J_1 en rouge et J_2 en bleu) dans le calcul du premier coefficient de Landau en conditions d'adhérence et pour $Pr = 10$. (a) : partie réelle, (b) : partie imaginaire.

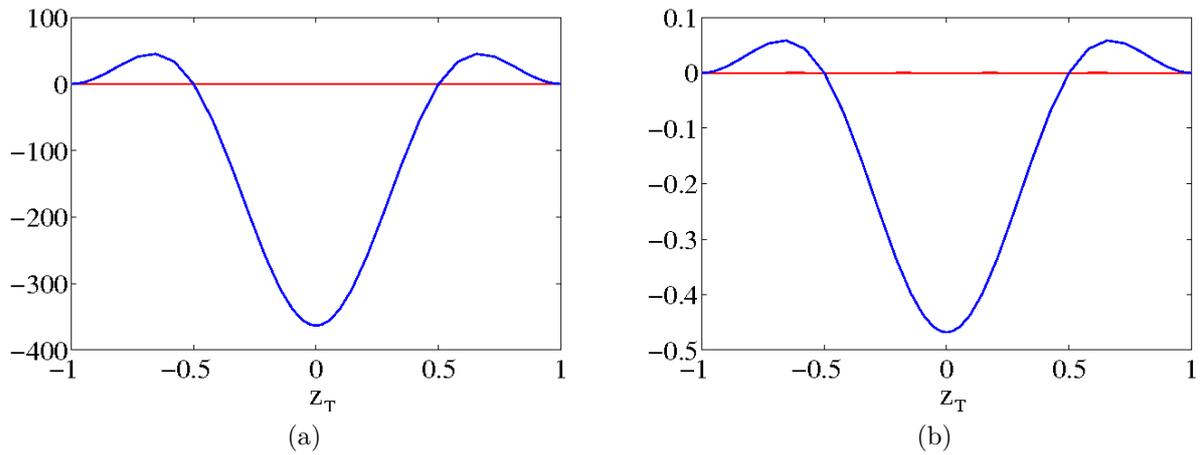


FIGURE 3.17: Comparaison de la contribution des termes non linéaires (J_1 en rouge et J_2 en bleu) dans le calcul du premier coefficient de Landau en conditions de glissement sans frottement et pour $Pr = 10$. (a) : partie réelle, (b) : partie imaginaire.

Remarque

Dans la section précédente, la valeur critique du nombre de Rayleigh ($Ra_c = 1707.8$ en conditions d'adhérence) garantit l'instabilité pour tout $Ra > Ra_c$. Par une approche énergétique, il est possible de calculer une autre valeur critique du nombre de Rayleigh notée Ra_E qui pour tout $Ra < Ra_E$ et quelle que soit la taille de la perturbation, garantit la stabilité du système.

Dans le cas d'un fluide Newtonien, on a $Ra_c = Ra_E$, ce qui implique une bifurcation surcritique. En revanche dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant $Ra_c > Ra_E$, ceci constitue une condition nécessaire (mais non-suffisante) pour que la bifurcation soit sous-critique.

En effet, reprenons les équations (2.27 à 2.29) , on peut écrire :

$$\frac{dE}{dt} = Ra (1 + Pr) \langle w \theta \rangle - \frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mu' \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \rangle - Pr \langle \theta_{,i} \theta_{,i} \rangle \quad (3.34)$$

où μ' désigne la perturbation de la viscosité et ici $\langle . \rangle = \int_0^1 \int_0^X (.) dx dz$. Cette intégration est faite sur un domaine délimité par deux plaques en $z = 0$ et $z = 1$ et par une distance X suivant x . X étant la période de la perturbation supposée périodique selon x .

L'équation (3.34) peut encore s'écrire :

$$\frac{dE}{dt} = Ra \mathcal{F} - \mathcal{D} + \mathcal{D}_{\mu'} \quad , \quad (3.35)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (1 + Pr) \langle w \theta \rangle && \text{terme de production d'énergie ,} \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \rangle + Pr \langle \dot{\gamma}_{,i} \dot{\gamma}_{,i} \rangle && \text{terme de dissipation ,} \\ \mathcal{D}_{\mu'} &= - \frac{1}{2} \langle \mu' \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \rangle && \text{terme de production d'énergie due à la perturbation de la viscosité .} \end{aligned}$$

On définit Ra_E par :

$$\frac{1}{Ra_E} = \max \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{D} - \mathcal{D}_{\mu'}} \right) \quad (3.36)$$

Si le terme $\mathcal{D}_{\mu'}$ est annulé artificiellement, on montre à l'aide d'un calcul variationnel que $Ra_E = Ra_c$. On retrouve alors ici le résultat montré par Webber [34]. Donc, Ra_c s'écrit :

$$\frac{1}{Ra_c} = \max \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{D}} \right) . \quad (3.37)$$

Alors, $Ra_E < Ra_c$ est une condition nécessaire pour qu'une bifurcation sous-critique apparaisse.

3.2.4 Modification de la viscosité par le mouvement de convection

La figure (3.18) représente $\frac{\Gamma_2}{|A|^2}$ en conditions d'adhérence et de glissement sans frottement pour un fluide rhéofluidifiant dont les paramètres rhéologiques respectent $\alpha = \alpha_c/2$. On remarque que la position des zones de forte contrainte par rapport aux cellules de convection est la même en adhérence et en glissement sans frottement : entre les cellules de convection, en haut et en bas.

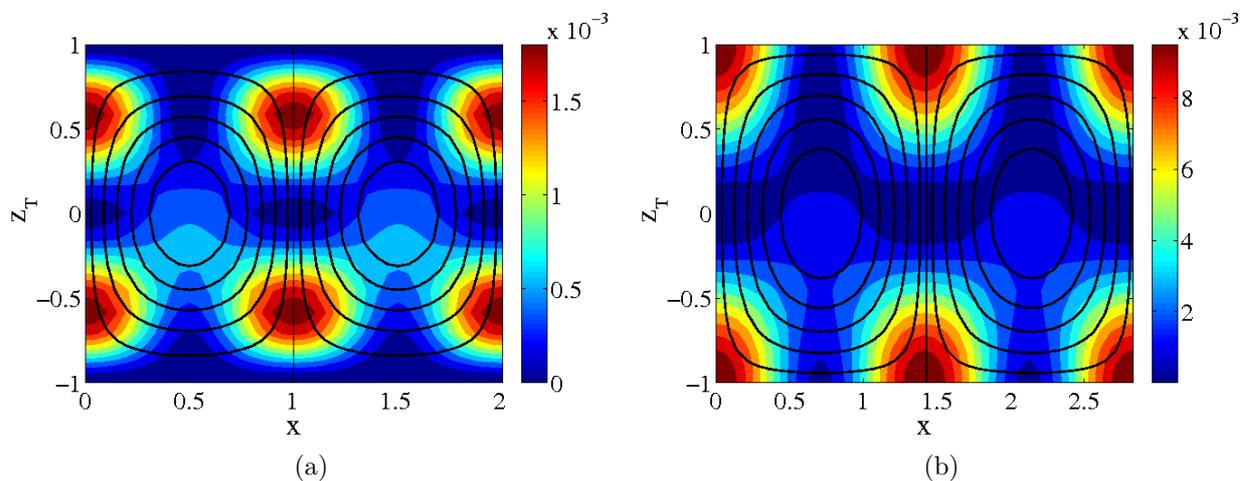


FIGURE 3.18: Représentation du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation en conditions d'adhérence (a) et de glissement parfait (b) pour $Pr = 10$ et $\alpha = \alpha_c/2$. Les traits pleins représentent les cellules de convection.

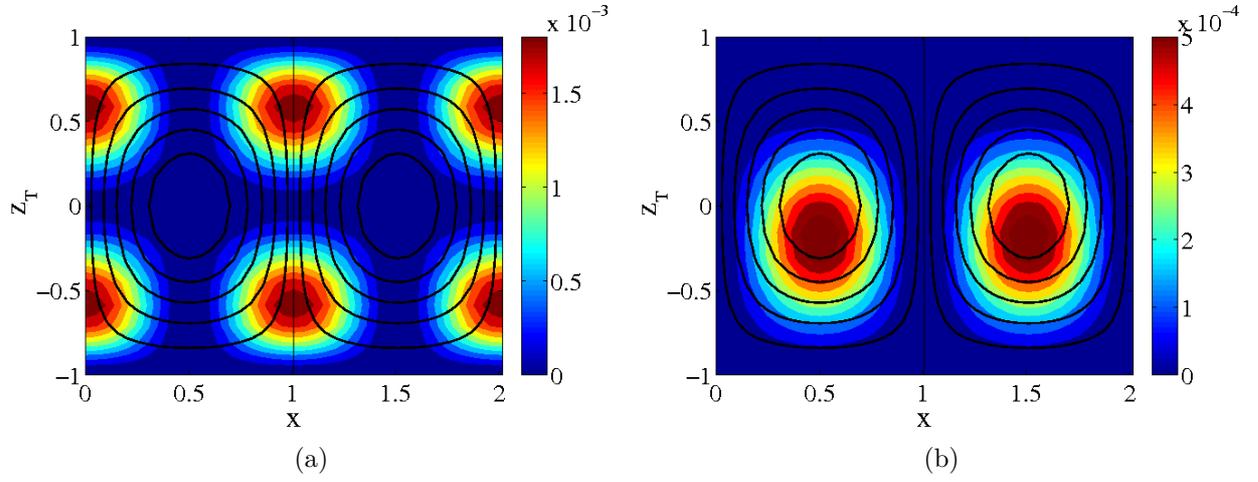


FIGURE 3.19: Comparaison de la contribution des termes de contraintes dans le calcul de $\frac{\Gamma_2}{|A|^2}$ en conditions d'adhérence avec $Pr = 10$ et $\alpha = \alpha_c/2$. Les traits pleins représentent les rouleaux de convection. (a) : représentation de $\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{zz}^2)$, (b) : représentation de $\dot{\gamma}_{xz}^2$.

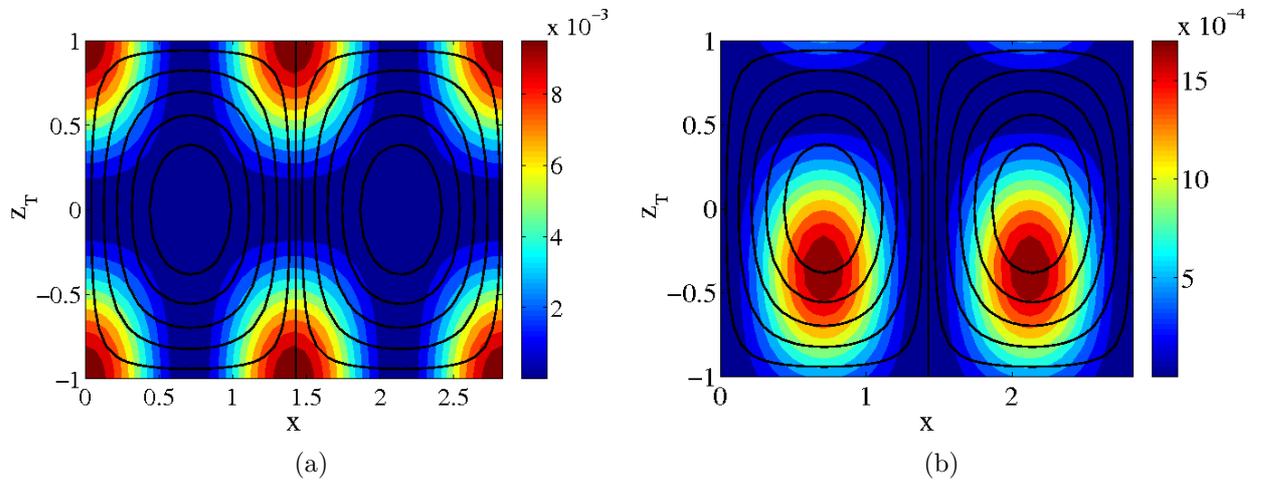


FIGURE 3.20: Comparaison de la contribution des termes de contraintes dans le calcul de $\frac{\Gamma_2}{|A|^2}$ en conditions de glissement sans frottement avec $Pr = 10$ et $\alpha = \alpha_c/2$. Les traits pleins représentent les rouleaux de convection. (a) : représentation de $\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{zz}^2)$, (b) : représentation de $\dot{\gamma}_{xz}^2$.

Sur les figures (3.19-3.20) sont représentés les termes $\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{zz}^2)$ et $\dot{\gamma}_{xz}^2$ entrant dans le calcul du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation. On remarque que les zones de fortes contraintes sur la figure (3.18) correspondent à des zones où le terme $\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{zz}^2)$ est grand. Ce sont donc les termes en $\dot{\gamma}_{xx}$ et $\dot{\gamma}_{zz}$ qui influencent le plus la position de ces zones. Le terme de cisaillement $\dot{\gamma}_{xz}$ modifie la forme des zones de fortes contraintes au niveau de la paroi inférieure par rapport à celles proches de la paroi supérieure.

D'après (2.34), au premier ordre, le champ de viscosité s'écrit :

$$\mu = -\alpha \Gamma_2 \quad . \quad (3.38)$$

Le champ de viscosité est, à une constante près dépendant des propriétés rhéologiques du fluide, l'opposé du deuxième invariant du tenseur des taux de déformations.

3.2.5 Calcul du nombre de Nusselt

L'importance du transfert de chaleur par convection est quantifiée par le nombre adimensionnel de Nusselt noté Nu :

$$Nu = \frac{\text{flux de chaleur total échangé}}{\text{flux de chaleur échangé purement conducteur}} = \frac{\hat{h} \hat{d}}{\hat{\lambda}} \quad , \quad (3.39)$$

où \hat{h} est le coefficient de transfert convectif et $\hat{\lambda}$ la conductivité thermique du fluide.

Dans notre cas, le nombre de Nusselt est obtenu de la manière suivante :

$$Nu = 1 - |A|^2 [DG_{02}]_{z=0} \quad . \quad (3.40)$$

On trouve dans la littérature ([26], [1]) l'expression du nombre de Nusselt en fonction de ϵ :

– adhérence :

$$Nu = 1 + \frac{Ra - Ra_c}{Ra (0.69942 - 0.00472 Pr^{-1} + 0.00832 Pr^{-2})} \quad ; \quad (3.41)$$

– glissement parfait : pour $Pr \rightarrow \infty$,

$$Nu = 1 + 2 \epsilon (1 + \epsilon)^{-1} \quad . \quad (3.42)$$

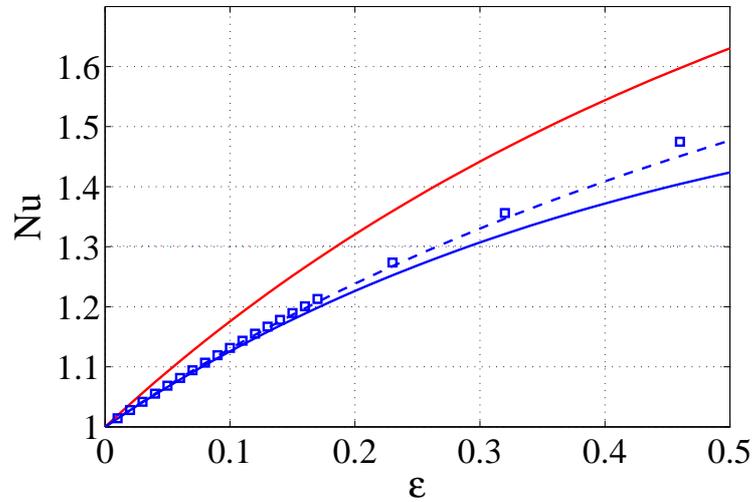


FIGURE 3.21: Évolution du nombre de Nusselt pour un fluide newtonien en fonction de l'écart aux conditions critiques pour $Pr = 10$ en conditions d'adhérence (données en bleu) et de glissement sans frottement (données en rouge). Comparaison avec le calcul non linéaire de Plaut [23] (carrés bleus) et de Schlüter *et al.* [26] (pointillés bleus).

Afin de valider nos calculs, les figures (3.21) et (3.22) représentent la variation du nombre de Nusselt pour un fluide newtonien lorsque l'équation d'amplitude est tronquée à l'ordre 3 en fonction de l'écart aux conditions critiques. Proche des conditions critiques, le nombre de Nusselt évolue linéairement avec ϵ . Les données obtenues sont en très bon accord avec celles de Plaut [23] et Schlüter *et al.* [26] jusque $\epsilon \approx 0.20$ dans le cas où $Pr = 10$. La figure (3.22) montre les résultats que nous obtenons pour $Pr = 100$ dans les deux cas extrêmes de conditions aux limites. Pour les conditions aux limites de glissement sans frottement, nous comparons nos résultats avec ceux calculés à partir de la formule de Albaalbaki et Khayat [1] pour un nombre de Prandtl infini. Pour les conditions aux limites d'adhérence aux parois, nos résultats sont comparés à ceux obtenus grâce à la formule de Schlüter *et al.* [26]. Dans les deux cas, nous observons un très bon accord entre les différents résultats pour $\epsilon < 0.20$.

On remarque que le nombre de Nusselt diminue quand le nombre de Prandtl augmente. On observe également que dans le cas de conditions aux limites de glissement sans frottement, le nombre de Nusselt est plus élevé que dans le cas de conditions d'adhérence. Le glissement parfait aux parois améliore donc le transfert de chaleur par convection. De même, il semble que le caractère rhéofluidifiant du fluide augmente la valeur du nombre de Nusselt (fig. 3.23).

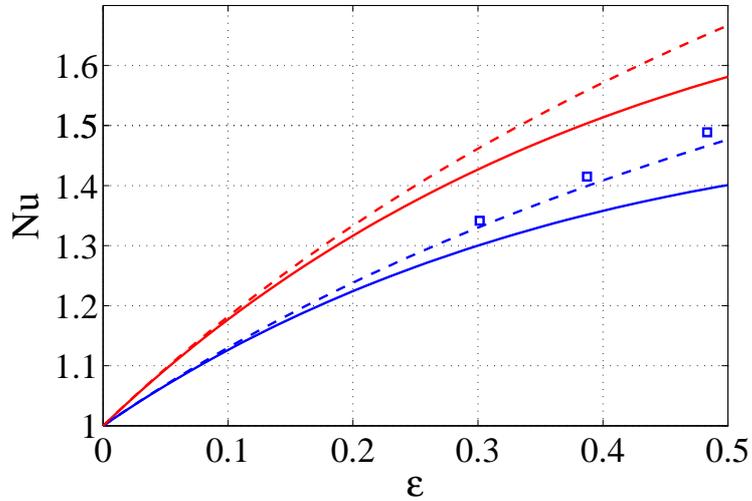


FIGURE 3.22: Évolution du nombre de Nusselt pour un fluide newtonien en fonction de l'écart aux conditions critiques pour $Pr = 100$ en conditions d'adhérence (données en bleu) et de glissement sans frottement (données en rouge). Comparaison avec le calcul non linéaire de Plaut [23] (carrés bleus, $Pr = 12500$) et de Schlüter *et al.* [26] pour les conditions d'adhérence et de Albaalbaki et Khayat [1] ($Pr \rightarrow \infty$) pour le glissement sans frottement (pointillés rouges).

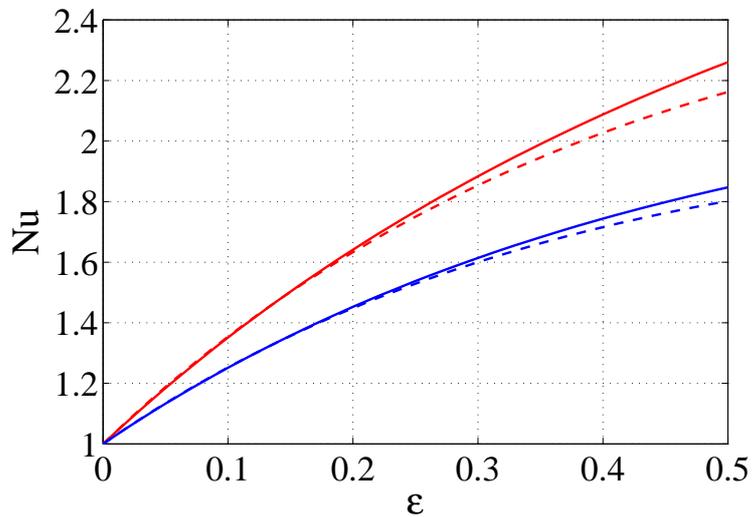


FIGURE 3.23: Évolution du nombre de Nusselt pour un fluide rhéofluidifiant dont $\alpha = \alpha_c/2$ en fonction de l'écart aux conditions critiques pour $Pr = 10$ (ligne continue) et $Pr = 100$ (pointillés) en conditions d'adhérence (données en bleu) et de glissement sans frottement (données en rouge).

3.3 Analyse non linéaire

3.3.1 Diagramme de bifurcation

Remarque : Nous avons eu un problème avec un terme entrant dans le calcul du troisième coefficient de Landau g_3 . Ce problème ne semble pas avoir une origine physique. Nous n'avons donc pas tenu compte de ce terme pour les calculs présentés dans la suite.

Les tableaux (3.2) et (3.3) donnent les valeurs des parties newtonienne et non-newtonienne des différents coefficients de Landau jusque g_4 pour $Pr = 10$. On rappelle que pour tout $i \geq 1$, on a :

$$g_i = g_{i_N} + g_{i_{NN}} \quad . \quad (3.43)$$

On remarque tout d'abord que dans le cas d'un fluide newtonien, les quatre coefficients de Landau sont négatifs, ce qui correspond à une bifurcation surcritique.

De manière générale, on observe que la valeur absolue des différents coefficients de Landau est plus grande dans le cas d'une adhérence aux parois que dans le cas d'un glissement sans frottement.

Les figures (3.24) et (3.25) représentent la variation de l'amplitude des perturbations selon l'écart au seuil de stabilité pour différents niveaux de troncature et pour un fluide dont l'indice de rhéofluidification est égal à 0.5. Conformément aux valeurs des coefficients de Landau, on observe que dans le cas newtonien ($\Lambda = 0$) et dans le cas $\Lambda = 0.01$, on est en présence d'une bifurcation surcritique. En revanche, pour $\Lambda = 0.05$ et $\Lambda = 0.1$, on observe que la bifurcation est sous-critique.

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|----------|---------------------|
| g_1 | $-2.438 \cdot 10^2$ | 0 | $-2.438 \cdot 10^2$ |
| g_2 | $-1.941 \cdot 10^3$ | 0 | $-1.941 \cdot 10^3$ |
| g_3 | $-6.407 \cdot 10^4$ | 0 | $-6.407 \cdot 10^4$ |
| g_4 | $-3.229 \cdot 10^6$ | 0 | $-3.229 \cdot 10^6$ |

(a)

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|
| g_1 | $-2.438 \cdot 10^2$ | $2.835 \cdot 10^1$ | $-2.155 \cdot 10^2$ |
| g_2 | $-1.719 \cdot 10^3$ | $1.209 \cdot 10^2$ | $-1.598 \cdot 10^3$ |
| g_3 | $-5.151 \cdot 10^4$ | $-4.632 \cdot 10^1$ | $-5.156 \cdot 10^4$ |
| g_4 | $-2.353 \cdot 10^6$ | $-3.578 \cdot 10^3$ | $-2.356 \cdot 10^6$ |

(b)

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|--------------------|--------------------|
| g_1 | $-2.438 \cdot 10^2$ | $2.438 \cdot 10^2$ | 0 |
| g_2 | $-3.419 \cdot 10^1$ | $1.131 \cdot 10^4$ | $1.128 \cdot 10^4$ |
| g_3 | $8.840 \cdot 10^4$ | $3.280 \cdot 10^4$ | $1.212 \cdot 10^5$ |
| g_4 | $1.397 \cdot 10^6$ | $8.034 \cdot 10^7$ | $8.174 \cdot 10^7$ |

(c)

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| g_1 | $-2.438 \cdot 10^2$ | $2.835 \cdot 10^3$ | $2.591 \cdot 10^3$ |
| g_2 | $2.023 \cdot 10^4$ | $1.568 \cdot 10^6$ | $1.588 \cdot 10^6$ |
| g_3 | $7.928 \cdot 10^6$ | $5.023 \cdot 10^6$ | $1.295 \cdot 10^7$ |
| g_4 | $-5.217 \cdot 10^9$ | $1.526 \cdot 10^{12}$ | $1.521 \cdot 10^{12}$ |

(d)

TABLE 3.2: Valeurs des parties newtonienne et non newtonienne des coefficients de Landau de l'ordre 3 à l'ordre 9 dans les conditions critiques, pour $n_c = 0.5$ et $Pr = 10$ en conditions limites d'adhérence. (a) $\Lambda = 0$: cas newtonien, (b) $\Lambda = 0.01$: bifurcation surcritique, (c) $\Lambda = \sqrt{\frac{2\alpha_c}{n_c}}$, (d) $\Lambda = 0.1$: bifurcation sous-critique.

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|----------|---------------------|
| g_1 | $-9,954 \cdot 10^1$ | 0 | $-9,954 \cdot 10^1$ |
| g_2 | $-2,729 \cdot 10^2$ | 0 | $-2,729 \cdot 10^2$ |
| g_3 | $-3,753 \cdot 10^3$ | 0 | $-3,753 \cdot 10^3$ |
| g_4 | $-7.383 \cdot 10^4$ | 0 | $-7.383 \cdot 10^4$ |

(a)

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|
| g_1 | $-9.954 \cdot 10^1$ | 6.065 | $-9.348 \cdot 10^1$ |
| g_2 | $-2.553 \cdot 10^2$ | 7.101 | $-2.482 \cdot 10^2$ |
| g_3 | $-3.381 \cdot 10^3$ | -2.978 | $-3.384 \cdot 10^3$ |
| g_4 | $-6.289 \cdot 10^4$ | $-1.657 \cdot 10^2$ | $-6.306 \cdot 10^4$ |

(b)

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|--------------------|--------------------|
| g_1 | $-9.954 \cdot 10^1$ | $9.954 \cdot 10^1$ | 0 |
| g_2 | $1.563 \cdot 10^1$ | $2.364 \cdot 10^3$ | $2.379 \cdot 10^3$ |
| g_3 | $6.897 \cdot 10^3$ | $1.465 \cdot 10^3$ | $8.362 \cdot 10^3$ |
| g_4 | $4.591 \cdot 10^4$ | $2.817 \cdot 10^6$ | $2.863 \cdot 10^6$ |

(c)

| | g_N | g_{NN} | g |
|-------|---------------------|--------------------|--------------------|
| g_1 | $-9.954 \cdot 10^1$ | $6.065 \cdot 10^2$ | $5.069 \cdot 10^2$ |
| g_2 | $1.485 \cdot 10^3$ | $8.869 \cdot 10^4$ | $9.017 \cdot 10^4$ |
| g_3 | $2.116 \cdot 10^5$ | $5.897 \cdot 10^4$ | $2.705 \cdot 10^5$ |
| g_4 | $-2.078 \cdot 10^7$ | $3.958 \cdot 10^9$ | $3.937 \cdot 10^9$ |

(d)

TABLE 3.3: Valeurs des parties newtonienne et non newtonienne des coefficients de Landau de l'ordre 3 à l'ordre 9 dans les conditions critiques, pour $n_c = 0.5$ et $Pr = 10$ en conditions limites de glissement sans frottement. (a) $\Lambda = 0$: cas newtonien, (b) $\Lambda = 0.01$: bifurcation surcritique, (c) $\Lambda = \sqrt{\frac{2\alpha_c}{n_c}}$, (d) $\Lambda = 0.1$: bifurcation sous-critique.

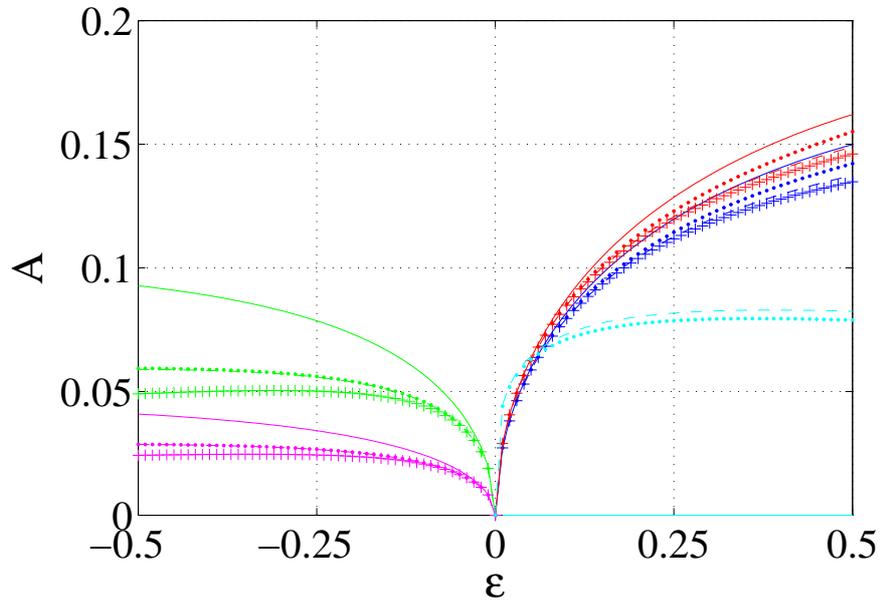


FIGURE 3.24: Diagramme de bifurcation : variation de A en fonction de ϵ pour $Pr = 10$ en conditions d'adhérence aux parois pour $n_c = 0.5$ et différentes valeurs de Λ . En bleu foncé : $\Lambda = 0$ ce qui correspond au cas newtonien, en violet : $\Lambda = 0.1$, en rouge : $\Lambda = 0.01$, en vert : $\Lambda = 0.05$ et en bleu clair : $\Lambda = \sqrt{\frac{2\alpha\epsilon}{n_c}}$.

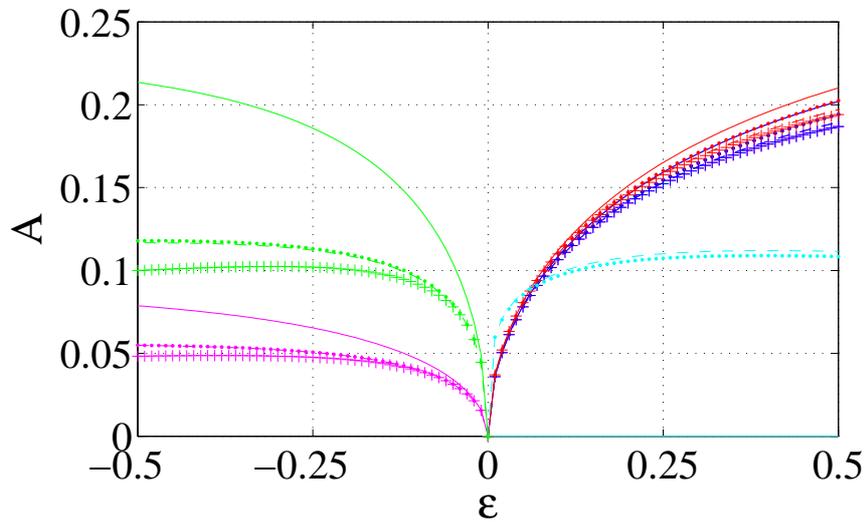


FIGURE 3.25: Diagramme de bifurcation : variation de A en fonction de ϵ pour $Pr = 10$ en conditions de glissement sans frottement aux parois pour $n_c = 0.5$ et différentes valeurs de Λ . En bleu foncé : $\Lambda = 0$ ce qui correspond au cas newtonien, en : $\Lambda = 0.1$, en rouge : $\Lambda = 0.01$, en vert : $\Lambda = 0.05$ et en bleu clair : $\Lambda = \sqrt{\frac{2\alpha\epsilon}{n_c}}$.

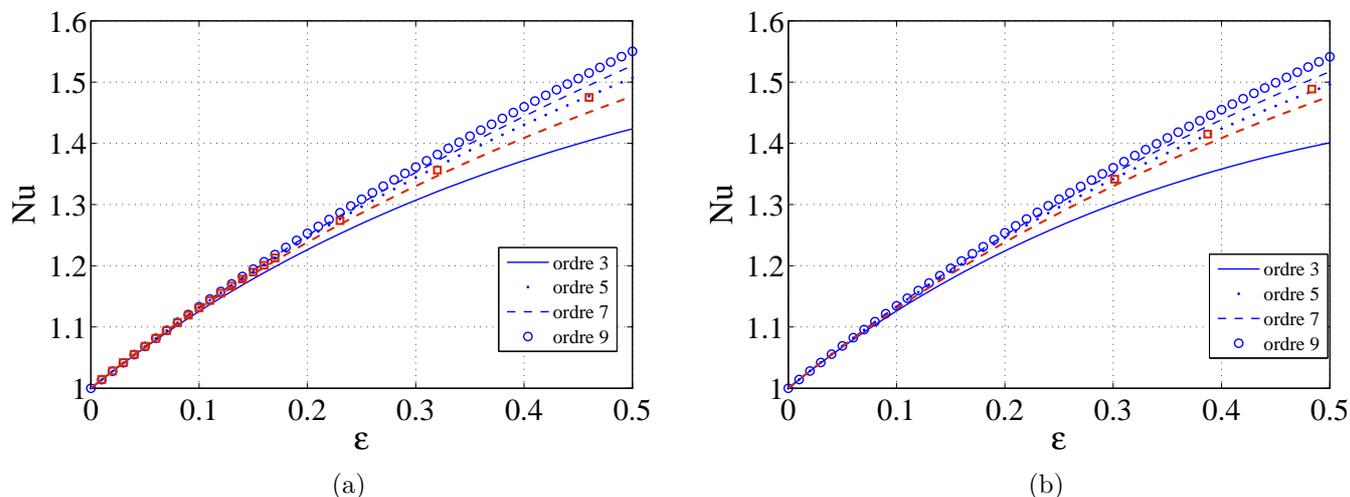


FIGURE 3.26: Évolution du nombre de Nusselt en fonction de l'écart au seuil critique pour un fluide newtonien dans des conditions aux limites d'adhérence aux parois. (a) cas $Pr = 10$, (b) cas $Pr = 100$. Comparaison avec les valeurs de Plaut [23] (carrés marrons) et de Schlüter *et al.* [26] (pointillés marrons).

3.3.2 Nombre de Nusselt

Les figures (3.26) et (3.27) montrent l'évolution du nombre de Nusselt pour un fluide newtonien en fonction de ϵ pour différents niveaux de troncature de l'équation d'amplitude. Les résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par Plaut [23] et par Schlüter *et al.* [26] pour les conditions d'adhérence. Il semble que les calculs donnent de meilleurs résultats pour des nombres de Prandtl grands. En ce qui concerne le glissement sans frottement aux parois, on observe également un bon accord avec les résultats de Albaalbaki et Khayat [1] jusqu'à $\epsilon = 0.3$. On remarque que plus l'ordre de troncature augmente, plus l'écart entre les courbes diminue, ce qui montre bien la convergence des résultats.

La figure (3.28) représente en conditions d'adhérence et de glissement parfait la variation du nombre de Nusselt en fonction de ϵ pour un fluide non-newtonien avec $Pr = 10$ et dans le cas où la bifurcation est surcritique. Les résultats sont obtenus en tronquant l'équation d'amplitude à l'ordre 9. On observe que pour les deux types de conditions aux limites, plus le caractère rhéofluidifiant est important, plus le transfert convectif est important. Pour un même fluide, Nu est plus grand si l'on est en présence de conditions aux limites de glissement sans frottement plutôt que d'adhérence.

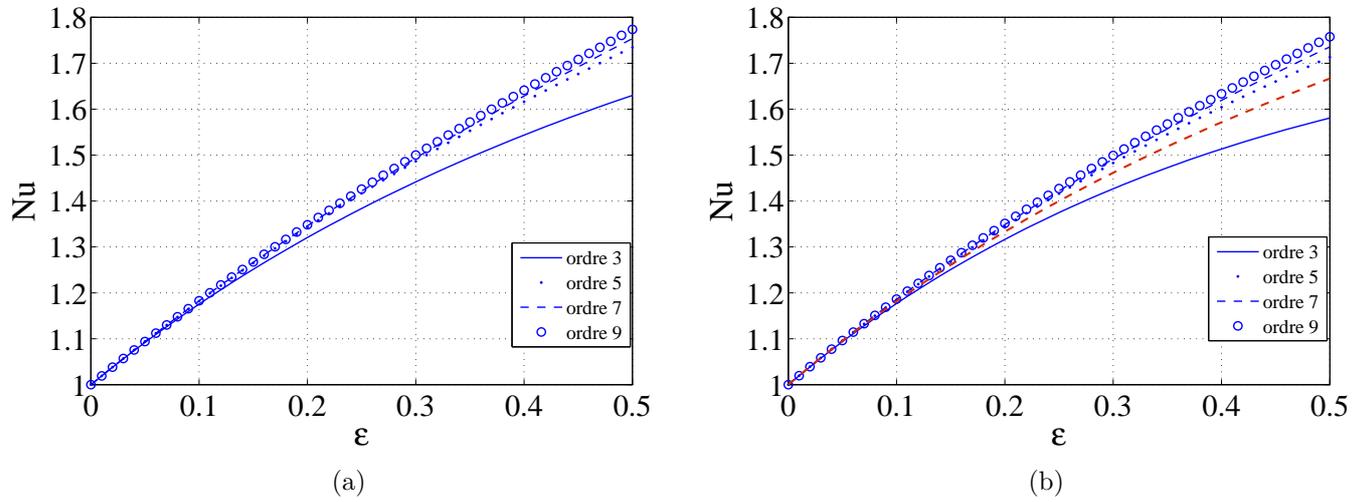


FIGURE 3.27: Évolution du nombre de Nusselt en fonction de l'écart au seuil critique pour un fluide newtonien dans des conditions aux limites de glissement sans frottement. (a) cas $Pr = 10$, (b) cas $Pr = 100$. Comparaison avec les valeurs de Albaalbaki et Khayat [1] ($Pr \rightarrow \infty$) (pointillés marrons).

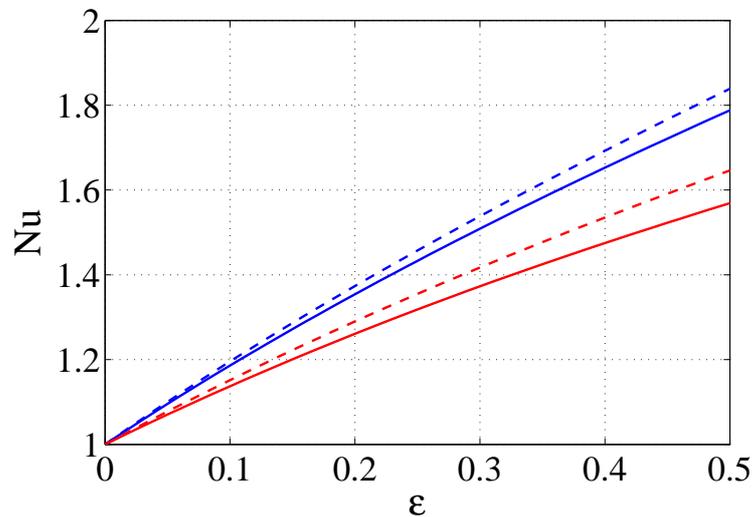


FIGURE 3.28: Variation du nombre de Nusselt pour un fluide non newtonien en fonction de ϵ pour $Pr = 10$ avec des conditions aux limites d'adhérence (en rouge) et de glissement sans frottement (en bleu). L'indice de rhéofluidification est égal à 0.5. Les courbes continues correspondent au cas $\Lambda = 0.005$, les pointillés au cas $\Lambda = 0.01$.

3.3.3 Étude du champ de viscosité

En reprenant l'expression de la viscosité (éq. 2.34), on peut représenter le champ de viscosité provoqué par le caractère rhéofluidifiant (fig. 3.29-3.30). Comme supposé dans le chapitre précédent, les perturbations de viscosité les plus importantes se situent aux mêmes positions que les zones de fortes contraintes (fig. 3.18). On remarque que dans le premier cas, les valeurs absolues entre lesquelles varient le champ de viscosité sont plus petites pour des conditions aux limites d'adhérence que pour un glissement parfait. Dans le deuxième cas, les valeurs sont semblables pour les deux types de conditions aux limites.

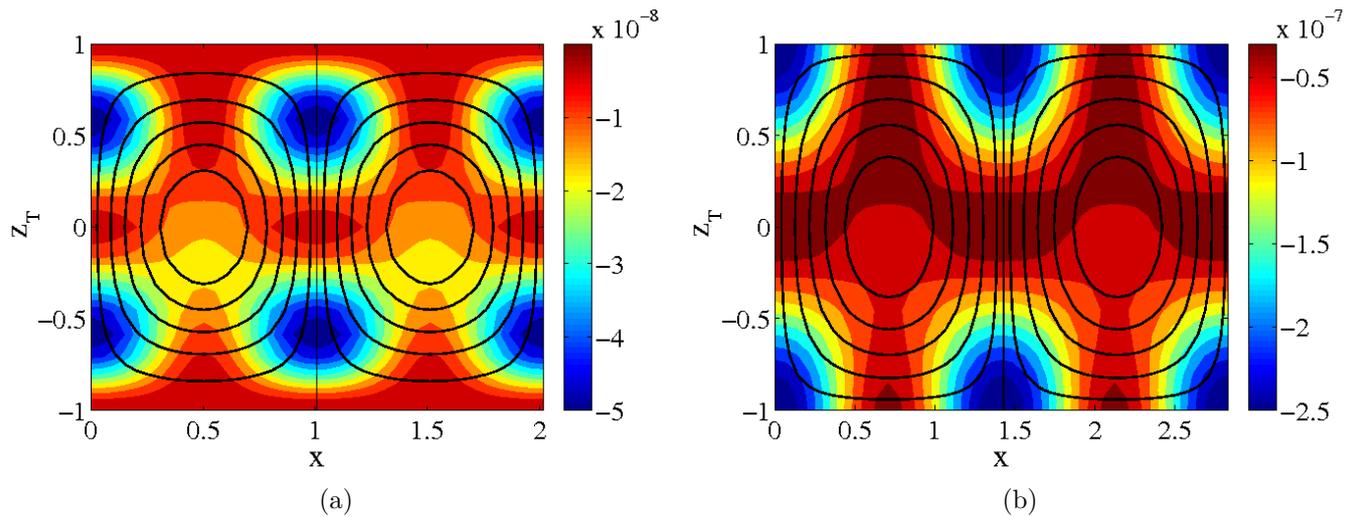


FIGURE 3.29: Champ de viscosité pour un fluide non-newtonien pour lequel $n_c = 0.5$ et $\Lambda = 0.01$ avec $Pr = 10$ et dans les conditions critiques. (a) Conditions d'adhérence, (b) conditions de glissement sans frottement.

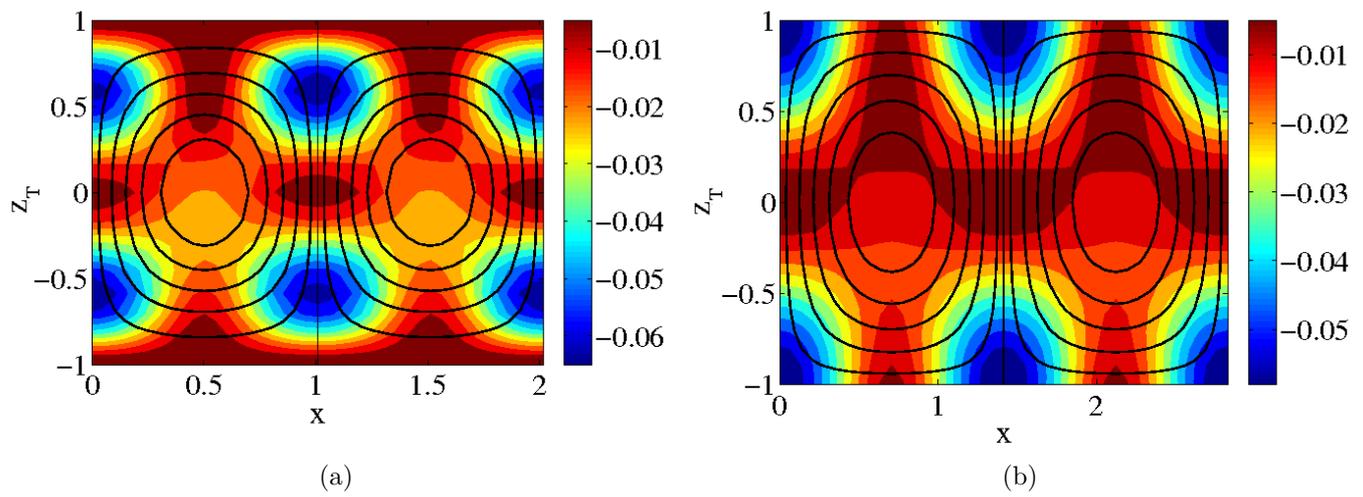


FIGURE 3.30: Champ de viscosité pour un fluide non-newtonien pour lequel $n_c = 0.5$ et $\Lambda = 0.01$ avec $Pr = 10$ et pour $\epsilon = 0.3$. (a) Conditions d'adhérence, (b) conditions de glissement sans frottement.

Chapitre 4

Conclusion

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'instabilité thermoconvective de Rayleigh-Bénard, c'est-à-dire au problème d'une couche de fluide chauffée par le bas. En considérant une convection bidimensionnelle, nous avons d'abord réalisé une étude linéaire avant de s'intéresser aux cas faiblement non-linéaire et non-linéaire. Nous avons retrouvé les valeurs critiques connues du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde à partir desquelles la convection se déclenche. Ces valeurs sont indépendantes du nombre de Prandtl et sont $Ra_c = 1707.8$ et $k_c = 3.12$ dans le cas de conditions aux limites d'adhérence aux parois et $Ra_c = 657.5$ et $k_c = 2.2$ dans le cas d'un glissement sans frottement aux parois. Pour comparer ces deux types de conditions aux limites, nous avons introduit une longueur de glissement L_G nulle si l'on est en présence d'une adhérence aux parois et grande dans le cas d'un glissement aux parois. Nous avons observé que les cellules de convection, qui prennent la forme de rouleaux contrarotatifs sont plus larges pour $L_G = 10^3$ que pour $L_G = 0$. Grâce au tracé de la courbe de stabilité marginale, nous avons montré que le système est plus stable en présence de petites structures. L'étude de la variation des conditions critiques avec la longueur de glissement nous a permis de retrouver les résultats de Webber [34] et Kuo et Chen [16] et d'affirmer que le caractère destabilisant est favorisé par la présence de conditions aux limites de glissement aux parois. Pour représenter la température et la fonction de courant, nous avons utilisé des développements sous la forme de modes propres. Nous avons observé que dans le cas d'un glissement sans frottement les harmoniques sont inexistantes.

Dans cette étude, nous nous intéressions à l'influence des conditions aux limites d'adhérence et de la rhéofluidification. Les diagrammes de bifurcation nous ont permis de voir que le caractère rhéofluidifiant favorise l'apparition d'un régime sous-critique. D'autre part, nous avons aussi observé que le nombre de Nusselt augmente avec la rhéofluidification.

Nous avons remarqué que l'adhérence aux parois entraîne un nombre de Nusselt plus faible. Pour des nombres de Prandtl supérieurs à 0.2, le régime sous-critique apparaît pour un caractère rhéofluidifiant plus faible. En revanche, quelles que soient les conditions limites aux parois, nous avons observé que les zones de fortes contraintes comme celles de fortes perturbations visqueuses se situent aux mêmes positions. L'étude de la variation des différents résultats en fonction de la longueur de glissement a montré une zone de forte

variation autour de $L_G = O(0.5)$.

Il serait intéressant de continuer cette étude en considérant le cas d'une convection tridimensionnelle dans le cas de conditions aux limites d'adhérence aux parois. Les résultats pouvant être comparés à ceux obtenus par Albaalbaki et Khayat [1] dans le cas d'un glissement sans frottement.

Annexe A

Principe d'échange des stabilités

Les équations de départ sont les équations de vorticité et de l'énergie linéarisées ( q. 3.1-3.2), ce qui nous donne encore :

$$\sigma (D^2 - k^2) \psi = i k Ra Pr \theta + Pr (D^2 - k^2)^2 \psi \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma \theta = i k \psi + (D^2 - k^2) \theta \quad , \quad (\text{A.2})$$

où D^2 désigne la dérivée seconde selon z .

On multiplie A.2 par θ^* , complexe conjugué de θ et on intègre entre $z = -1$ et $z = 1$:

$$\int_{-1}^1 \theta^* D^2 \theta dz + \int_{-1}^1 \theta^* (-k^2 - \sigma) \theta dz = -i k \int_{-1}^1 \theta^* \psi dz \quad . \quad (\text{A.3})$$

En effectuant une intégration par parties et en remarquant que θ et par conséquent, θ^* sont nuls aux parois, on obtient :

$$\int_{-1}^1 |D\theta|^2 + (k^2 + \sigma) |\theta|^2 dz = i k \int_{-1}^1 \psi \theta^* dz \quad (\text{A.4})$$

qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\sigma I_0 + I_1 = i k \int_{-1}^1 \psi \theta^* dz \quad , \quad (\text{A.5})$$

avec $I_0 = \int_{-1}^1 |\theta|^2 dz$ et $I_1 = \int_{-1}^1 |D\theta|^2 + k^2 |\theta|^2 dz$.

On procède de la même manière pour l'équation A.1. Après multiplication par ψ^* et intégration entre $z = -1$ et $z = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \psi^* D^4 \psi dz + \int_{-1}^1 \psi^* D^2 \left(-k^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) \psi dz - \int_{-1}^1 \psi^* k^2 D^2 \psi dz + \int_{-1}^1 \psi^* k^2 \left(k^2 + \frac{\sigma}{Pr} \right) \psi dz \\ = - \int_{-1}^1 i k Ra Pr \theta \psi^* dz \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

On intègre par partie les termes nécessaires. On sait qu'aux parois, ψ (donc ψ^*) et $D\psi$ ou $D^2\psi$ (donc $D\psi$ et $D^2\psi^*$) selon les conditions aux limites choisies sont nuls d'où :

$$\int_{-1}^1 |D^2 \psi|^2 + \left(-2 k^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) |D \psi|^2 + k^2 \left(-k^2 - \frac{\sigma}{Pr} \right) |\psi|^2 dz = \int_{-1}^1 i k Ra Pr \psi^* \theta dz \quad , \quad (\text{A.7})$$

qui peut encore s'écrire

$$J_0 + \frac{\sigma}{Pr} J_1 = i k Ra Pr \int_{-1}^1 \psi^* \theta dz \quad , \quad (\text{A.8})$$

avec $J_0 = \int_{-1}^1 |D^2 \psi|^2 - 2 k^2 |D \psi|^2 - k^4 |\psi|^2 dz$ et $J_1 = - \int_{-1}^1 |D \psi|^2 - k^2 |\psi|^2 dz$.

On remarque que I_0, I_1, J_0, J_1 sont réels et positifs. Si on multiplie A.5 par $Ra Pr$ et qu'on lui soustrait A.8, on obtient :

$$\sigma \left(Ra Pr I_0 - \frac{1}{Pr} J_1 \right) + Ra Pr I_1 - J_2 = -2 k Ra Pr \mathcal{I}m \left(\int_{-1}^1 \psi \theta^* dz \right) \quad (\text{A.9})$$

On écrit que $\sigma = \sigma_r + i \sigma_i$. Alors on peut séparer l'équation A.9 en deux parties, réelle et imaginaire :

$$\sigma_r \left(Ra Pr I_0 - \frac{1}{Pr} J_1 \right) = J_2 - Ra Pr I_1 - 2 k Ra Pr \mathcal{I}m \left(\int_{-1}^1 \psi \theta^* dz \right) \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_i \left(Ra Pr I_0 - \frac{1}{Pr} J_1 \right) = 0 \quad . \quad (\text{A.11})$$

Donc, d'après le système d'équations (A.10-A.11), σ est réel.

Bibliographie

- [1] B. Albaalbaki and R. E. Khayat. Pattern selection in the thermal convection of non-Newtonian fluids. *J. Fluid Mech.*, 668 :500–550, 2011.
- [2] N. J. Balmforth and A. C. Rust. Weakly nonlinear viscoplastic convection. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 158 :36–45, 2009.
- [3] R. Bird, R. Armstrong, and O. Hassager. Dynamics of polymeric liquids. Wiley - Interscience, New York, 1987.
- [4] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gén. Sc. Pure Appl.*, 11 :1261–1271, 1309–1328, 1900.
- [5] F. Busse. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. Phys.*, 46 :140–150, 1967.
- [6] F. H. Busse and R. M. Clever. Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate prandtl. *J. Fluid. Mech.*, 91 :319–335, 1979.
- [7] S. Chandrasekhar. Hydrodynamic end hydromagnetic stability. Dover Publications, INC, New York, 1980.
- [8] Colorado State University CMMAP. Learn about clouds, climate, weather and modeling. Disponible sur Internet à l’adresse [http : // www.cmmap.org/learn/](http://www.cmmap.org/learn/), consulté le 02.07.2012.
- [9] CNRS. GéoManips, les mouvements de la Terre. Disponible sur Internet à l’adresse [http : //www.cnrs.fr/cw/dossiers/dosgeol/00_photos_videos/14.htm](http://www.cnrs.fr/cw/dossiers/dosgeol/00_photos_videos/14.htm), consulté le 28.06.2012.
- [10] P. G. Drazin and W. H. Reid. Hydrodynamic stability. Cambridge University Press, 1995.
- [11] S. C. Generalis and K. Fujimura. Range of validity of weakly nonlinear theory in the Rayleigh-Bénard problem. *Journal of the Physical Society of Japan*, 78 :1–11, 2009.
- [12] S. Harchambois. Modélisation de la thermoconvection d’un fluide rhéofluidifiant en géométrie de Rayleigh-Bénard. Rapport de projet de troisième année, Ecole des Mines de Nancy, 2012.
- [13] T. Herbert. On perturbation methods in nonlinear stability theory. *J. Fluid Mech.*, 126 :167–186, 1983.

- [14] H. Inaba, C. Dai, and A. Horibe. Numerical simulation of Rayleigh-Bénard convection in non-newtonian phase-change-material slurries. *Int. J. Therm. Sci.*, 42 :471–480, 2003.
- [15] R. Khayat. Chaos in the thermal convection of weakly shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid. Mech.*, 63 :153–178, 1996.
- [16] L.-S. Kuo and P.-H. Chen. Effects of slip boundary conditions on Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Mechanics*, 25 :205–212, 2009.
- [17] P. Manneville. Dissipative structures and weak turbulence. Academic Press, Boston, 1990.
- [18] C. Navier. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38 :279–303, 1969.
- [19] H. Ozoe and S. W. Churchill. Hydrodynamic stability and natural convection in oswald-de waele and ellis fluids : The development of a numerical solution. *AIChE Journal*, 18 :1196–1207, 1972.
- [20] E. M. Parmentier. A study of thermal convection in non-newtonian fluids. *J. Fluid. Mech*, 84 :1–11, 1978.
- [21] A. Pellew and R. V. Southwell. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc. A*, 176 :312–343, 1940.
- [22] E. Plaut. Modélisation d’instabilités-méthodes non linéaires. Cours de Master 2 recherche mécanique et énergétique, 2007.
- [23] E. Plaut. Communication privée, 2012.
- [24] J. W. S. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag*, 6 :432–546, 1916.
- [25] N. Roland. *Modélisation de la transition vers la turbulence d’écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d’ondes non linéaires*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2010.
- [26] A. Schlüter, D. Lortz, and F. Busse. On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 23 :129–144, 1965.
- [27] S. Schmitt and M. Lücke. Amplitude equation for modulated rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. A*, 44 :4986–5002, 1991.
- [28] L. A. Segel. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 38 :203–224, 1969.
- [29] P. K. Sen and D. Venkateswarlu. On the stability of plane Poiseuille flow to finite-amplitude disturbances considering the higher-order Landau coefficients. *J. Fluid Mech.*, 133 :179–206, 1983.
- [30] C. Tien, H. S. Tsuei, and Z. S. Sun. Thermal instability of a horizontal layer of non-newtonian fluid heated from below. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 12 :1173–1178, 1969.

- [31] L. N. Trefethen. Spectral methods in Matlab. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [32] V. Vidal. *Intéraction des différentes échelles de convection dans le manteau terrestre*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe, Paris, 2004.
- [33] J. Watson. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. part 2. the development of a solution for plane poiseuille flow and for plane couette flow. *J. Fluid Mech.*, 9 :371–389, 1960.
- [34] M. Webber. The destabilizing effect of boundary slip on Bénard convection. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 29 :819–838, 2006.

Instabilité thermoconvective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants.

Résumé : L'étude présentée dans ce rapport porte sur l'instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants purement visqueux, *i.e.* des fluides dont la viscosité décroît non-linéairement lorsque le cisaillement augmente. L'objectif est d'examiner l'influence du caractère rhéofluidifiant sur : (i) la nature de la bifurcation ; (ii) l'intensité de convection et (iii) le champ de viscosité, loin des conditions critiques. Deux types de conditions aux limites à l'interface fluide/paroi sont considérés : adhérence et glissement avec ou sans frottement. Une approche faiblement non-linéaire a été adoptée. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par le modèle de Carreau. Nous montrons que : (i) le glissement conduit à des nombres de Rayleigh critiques plus faibles et des structures convectives plus grandes ; (ii) la rhéofluidification favorise le développement d'une bifurcation sous critique ; (iii) le coefficient de transfert de chaleur augmente lorsque les effets rhéofluidifiants sont plus marqués.

mots-clés : Rayleigh-Bénard, fluides non-newtonien, convection, analyse faiblement non-linéaire.

Rayleigh-Bénard thermoconvective instability for shear-thinning fluids.

Abstract : This study concerns the Rayleigh-Bénard thermoconvective instability for purely viscous shear-thinning fluids, *i.e.* fluids for which the viscosity decreases non linearly with increasing the shear rate. The aim is to examine the shear-thinning effects on : (i) the nature of the bifurcation, (ii) the intensity of convection and (iii) the viscosity field far from the onset. Two types of boundary conditions are considered at the wall-fluid interface : adhesion and slipping with or without friction. A weakly non linear approach is adopted. The rheological behaviour of the fluid is described by Carreau model. We show that : (i) slipping leads to lower critical Rayleigh numbers and larger convective structures ; (ii) shear-thinning favors a subcritical bifurcation ; (iii) the heat transfer coefficient increases with increasing shear-thinning effects.

key-words : Rayleigh-Bénard, non-newtonian fluids, convection, weakly non-linear analysis.