



HAL
open science

Géométrie spinorielle et surfaces de \mathbb{R}^3

Christophe Desmonts

► **To cite this version:**

Christophe Desmonts. Géométrie spinorielle et surfaces de \mathbb{R}^3 . Mathématiques [math]. 2012. hal-01871069

HAL Id: hal-01871069

<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01871069>

Submitted on 10 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Mémoire de Master

Géométrie spinorielle et surfaces de \mathbb{R}^3

Christophe Desmonts

Sujet proposé et encadré par M. Oussama HIJAZI, Professeur à l'Institut
Elie Cartan de Nancy (IECN)

Septembre 2012

Table des matières

Introduction	4
1 Notion de fibré	6
1.1 Fibré	6
1.2 Fibré vectoriel	8
1.3 Fibré principal	10
1.4 Fibré associé	13
2 Connexions et dérivées covariantes	17
2.1 Connexion sur un fibré principal	17
2.2 Dérivée covariante sur un fibré vectoriel	21
2.3 Lien entre connexion et dérivée covariante	22
2.4 La courbure	26
3 Groupes pinoriel et spinoriel	32
3.1 Algèbre de Clifford	32
3.2 Groupe pinoriel et groupe spinoriel	36
3.3 Cas de l'espace euclidien \mathbb{R}^n	38
4 Classification et représentations des algèbres de Clifford réelles et complexes	44
4.1 Classification	44
4.2 Représentations	47
5 Structures spinorielles et l'opérateur de Dirac	59
5.1 Fibré des spineurs et connexions	59
5.2 L'opérateur de Dirac	66
5.3 La formule de Schrödinger-Lichnerowicz	71
6 Géométrie spinorielle des sous-variétés de \mathbb{R}^3	76
6.1 Structure spinorielle sous-jacente d'une hypersurface	76
6.2 L'opérateur de Dirac d'une hypersurface	82
6.3 L'équation de Dirac sur M	85
6.4 Immersions des variétés spinorielles de dimension 2 dans \mathbb{R}^3	90
Annexes	102
A Groupes de Lie, algèbres de Lie	104
A.1 Groupes de Lie	104
A.2 Algèbres de Lie	104
A.3 Cas d'un groupe de matrice	105

B	Revêtements	107
B.1	Revêtements d'espaces topologiques	107
B.2	Revêtements de groupes de Lie	109
B.3	Relèvement d'applications	110
	Bibliographie	113

Introduction

Ce mémoire constitue le rapport du stage que j'ai effectué au second semestre de ma deuxième année de Master Mathématiques Fondamentales et Appliquées à l'Université de Lorraine, Nancy. Son sujet m'a été proposé par Oussama HIJAZI pour préparer le doctorat que je débute en septembre 2012 à l'Institut Elie Cartan de Nancy, sous sa direction et celle conjointe de Benoît DANIEL. Ce document contient l'ensemble des éléments de géométrie différentielle et d'algèbre nécessaires à l'introduction de la notion de variété spinorielle et de l'opérateur de Dirac. Ces outils spinoriels servent par la suite à donner des propriétés géométriques de certaines variétés.

Dans le premier chapitre, nous nous appuyons sur [N] pour étudier les différentes notions de fibré à travers beaucoup d'exemples, et pour voir comment associer un fibré vectoriel à un fibré principal et réciproquement. Nous utilisons ensuite ces structures et les références [N] et [Hij] pour y définir les concepts de connexion et de dérivée covariante, que nous mettons là encore en correspondance. Nous terminons le deuxième chapitre par le cas de la courbure associée à une connexion sur un fibré principal.

Nous faisons ensuite une parenthèse algébrique pendant laquelle nous étudions l'algèbre de Clifford d'un espace quadratique au travers de l'étude de [LM] et [Hij]. Dans le troisième chapitre, nous en donnons les propriétés de base et introduisons les notions de groupe spinoriel et de représentation adjointe. Dans le quatrième chapitre, nous traitons le cas particulier des algèbres de Clifford sur \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, et de \mathbb{C}^n muni de la forme $g_{\mathbb{C}}(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, les résultats étant majoritairement issus des 2 références précédentes et de [Rau].

Si tous les résultats de ce dernier chapitre ne sont pas directement utilisés par la suite, ils permettent d'introduire la notion de représentation spinorielle, qui est capitale pour définir le fibré des spineurs d'une variété spinorielle. A la manière de [Hij] et [Rau], on définit alors la multiplication de Clifford, qui est une action de l'ensemble des formes différentielles sur une variété M sur l'ensemble des sections du fibré des spineurs ΣM (encore appelées simplement champs de spineurs). Par un jeu de commutativité et de fibrés associés, la connexion de Levi-Civita riemannienne sur une variété spinorielle M donne naissance à une unique connexion sur le fibré des spineurs ΣM , compatible avec la métrique et avec la multiplication de Clifford : c'est la connexion de Levi-Civita spinorielle. Elle permet à son tour d'introduire l'opérateur de Dirac, qui agit sur les champs de spineurs. Cet opérateur d'ordre 1, pouvant être vu comme la racine carrée du Laplacien, permet d'énoncer la formule de Schrödinger-Lichnerowicz, de laquelle nous déduisons la première application géométrique de la théorie des spineurs : le théorème de Lichnerowicz, qui affirme que l'opérateur de Dirac associé à une métrique d'une variété riemannienne orientée spinorielle compacte à courbure scalaire strictement positive a un noyau trivial.

Le dernier chapitre de ce mémoire est une étude de l'article [Fri1] de Thomas Friedrich sur la géométrie spinorielle des sous-variétés de \mathbb{R}^3 , souvent avec l'aide de [Mor]. Plus précisément, étant donnée une variété riemannienne spinorielle orientable M^2 de dimension 2, cette section propose la démonstration d'un théorème faisant le lien entre l'existence de spineurs sur M^2 solution de l'équation de Dirac $\mathcal{D}\psi = H\psi$ (où $H : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse) et l'existence d'une immersion isométrique de M^2 dans \mathbb{R}^3 . On donnera également une formule pour cette immersion, qui fournit une généralisation de la représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales.

Enfin, deux annexes concluent ce rapport en donnant les connaissances de base sur les notions de groupe et d'algèbre de Lie d'une part, de revêtement d'un groupe topologique et de relèvement d'une application d'autre part. En effet, elles sont très présentes dans le sujet traité; je me suis néanmoins limité tant que possible aux résultats les plus utiles au traitement du problème initial.

De façon générale, j'ai essayé de n'introduire que les éléments nécessaires à l'étude de mon sujet, en démontrant systématiquement les résultats étant au cœur de celui-ci, et en renvoyant à la bibliographie pour les résultats périphériques. J'ai voulu également donner le plus d'exemples et d'explications possibles pour que ce mémoire puisse profiter à des lecteurs qui, comme moi, découvrirait la géométrie spinorielle.

Dans tout ce mémoire, les variétés différentielles considérées seront connexes. Nous désignerons par f' la différentielle d'une application différentiable définie entre deux variétés différentielles. En l'absence de précision, toutes les applications seront supposées de classe C^∞ . Pour un champ de vecteur X défini sur une variété M et une application différentiable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note $X(f)$ l'application de M dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} définie par

$$X(f)(m \in M) = f'(m)(X(m)).$$

Je remercie ici Oussama HIJAZI pour avoir accepté d'encadrer ce stage, ainsi que pour sa disponibilité et sa gentillesse. J'ai essayé de mener ce travail de la façon la plus autonome possible, mais la clarté, la qualité et la vitesse de ses réponses m'ont souvent permis d'avancer dans les moments les plus difficiles.

1 Notion de fibré

Pour l'essentiel de cette section, on pourra consulter également [N].

1.1 Fibré

Définition 1.1.1 Un fibré (différentiel) est un 5-uplet (E, π, M, F, G) dont les éléments sont les suivants :

- Une variété différentielle E appelée **espace total** ;
- Une variété différentielle M appelée **espace de base** ;
- Une variété différentielle F appelée **fibre** ;
- Une surjection $\pi : E \rightarrow M$ appelée **projection** telle que pour tout $m \in M$, l'image réciproque $F_m = \pi^{-1}(m)$ soit en bijection avec F ; on appelle F_m la **fibre en m** ;
- Un groupe de Lie G appelé **groupe de structure**, agissant à gauche sur F :

$$\begin{aligned} G \times F &\longrightarrow F \\ (a, f) &\longmapsto a \cdot f \end{aligned}$$

- Un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M et une famille $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de difféomorphismes de $U_i \times F$ dans $\pi^{-1}(U_i)$ vérifiant :

$$\pi(\phi_i(m, f)) = m \quad (m \in U_i).$$

Les applications ϕ_i sont appelées **trivialisations locales** ;

- Comme pour tout m fixé, l'application $\phi_i(m, \cdot) := \phi_{i,m} : F \rightarrow F_m$ (pour $m \in U_i$) est un difféomorphisme, on peut considérer, si $m \in U_i \cap U_j$, l'application

$$t_{ij}(m) = \phi_{i,m}^{-1} \phi_{j,m} : F \longrightarrow F.$$

On impose que ces applications soient dans G (au sens de l'action de G sur F définie précédemment).

Les trivialisations locales sur des ouverts se chevauchant sont donc liées sur leur intersection par la relation :

$$\phi_j(m, f) = \phi_i(m, t_{ij}(m) \cdot f)$$

pour tous $m \in U_i \cap U_j$ et $f \in F$.

Les fonctions $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ sont appelées **fonctions de transition**. On leur impose de plus de vérifier les 3 relations suivantes pour tout i, j et k dans \mathbb{N} :

- (1) $t_{ii}(m) = id_F \quad (m \in U_i)$
- (2) $t_{ij}(m) = t_{ji}(m)^{-1} \quad (m \in U_i \cap U_j)$
- (3) $t_{ij}(m)t_{jk}(m) = t_{ik}(m) \quad (m \in U_i \cap U_j \cap U_k).$

Remarquons que ces 3 propriétés ne sont a priori pas vérifiées d'office.

En pratique, on notera seulement $E \xrightarrow{\pi} M$ pour désigner le fibré (E, π, M, F, G) .

Remarque 1.1.1 : – Cette définition n'est pas intrinsèque et dépend du choix du recouvrement ouvert et des trivialisations locales. En fait, on peut définir une notion de fibré intrinsèque en utilisant une relation d'équivalence sur les fibrés définis précédemment, et en considérant les classes d'équivalence, mais ce n'est pas notre propos.

- On a $\dim E = \dim M + \dim F$.
- Visuellement, l'espace total E est localement trivial, c'est à dire localement difféomorphe à un produit direct $M \times F$. Par contre, ce n'est pas forcément le cas globalement. Si ça l'est, le fibré est dit **trivial**; ceci équivaut à la possibilité de prendre toutes les fonctions de transition égales à l'identité.

Exemple 1.1.1 On se donne un fibré $E \xrightarrow{\pi} S^1$ avec pour fibre $F = [-1, 1]$, et le recouvrement de S^1 par les ouverts $U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]0, 2\pi[\}$ et $U_2 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi[\}$. On a $U_1 \cap U_2 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]0, \pi[\} \cup \{e^{i\theta}, \theta \in]\pi, 2\pi[\} = A \cup B$. Les trivialisations sont supposées être définies sur A par

$$\phi_1^{-1}(e^{i\theta}) = (\theta, t) \quad \text{et} \quad \phi_2^{-1}(e^{i\theta}) = (\theta, t) \quad (t \in [-1, 1]).$$

Il y a alors deux possibilités évidentes pour ces trivialisations sur B :

- $\phi_1^{-1}(e^{i\theta}) = (\theta, t)$ et $\phi_2^{-1}(e^{i\theta}) = (\theta, t)$.

Les fonctions de transition sont triviales, le fibré l'est donc aussi : E est difféomorphe au cylindre $S^1 \times [-1, 1]$. Le groupe de structure peut donc être pris égal au groupe à un élément.

- $\phi_1^{-1}(e^{i\theta}) = (\theta, t)$ et $\phi_2^{-1}(e^{i\theta}) = (\theta, -t)$.

Pour $e^{i\theta} \in A$, $t_{12}(e^{i\theta}) = id_F$ et pour $e^{i\theta} \in B$, $t_{12}(e^{i\theta}) = -id_F$. Le groupe de structure peut donc être pris égal à \mathbb{Z}_2 , groupe à deux éléments. On obtient ainsi pour E le ruban de Möbius.

Remarquons qu'en toute rigueur, \mathbb{Z}_2 est un groupe discret, donc pas un groupe de Lie.

Exemple 1.1.2 Le fibré tangent $TM = \cup_{m \in M} \{m\} \times T_m M$ d'une variété différentielle M de dimension n est un fibré de fibre \mathbb{R}^n de groupe de structure $GL_n(\mathbb{R})$: soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas de M et soit $\pi : (m, v) \in TM \mapsto m \in M$, qui est clairement surjective et différentiable. On définit alors les trivialisations locales ϕ_i par :

$$\begin{aligned} \phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n \\ (m, v) &\longmapsto (m, \varphi'_i(m)(v)). \end{aligned}$$

1.2 Fibré vectoriel

Dans tout ce rapport, l'entier n désignera la dimension de la variété de base M .

Définition 1.2.1 Un fibré vectoriel est un fibré dont la fibre F est un espace vectoriel. Les fonctions de transition sont alors forcément des éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ (ou de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ si F est un espace vectoriel sur \mathbb{C}).

Exemple 1.2.1 Le fibré tangent TM d'une variété différentielle M de dimension n est un fibré vectoriel de fibre \mathbb{R}^n . Soit $u \in TM$ tel que $\pi(u) = m \in U_i \cap U_j$, où π est la fibration donnée dans l'exemple 1.1.2. On note x^μ (respectivement y^μ) les coordonnées issues de la carte φ_i (respectivement φ_j). On a des trivialisations locales données par (cf exemple 1.1.2 toujours)

$$\phi_i^{-1}(u) = \left(m, \sum V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \quad \phi_j^{-1}(u) = \left(m, \sum \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right).$$

Les fonctions de transition sont donc bien données par les matrices de changement de base :

$$t_{ij}(m) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\mu}(m) \right) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exemple 1.2.2 Le fibré tangent TS^2 de la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Un atlas de S^2 est donné par (U_N, ϕ_N) et (U_S, ϕ_S) , où $U_N = S^2 \setminus \{\text{Pôle Nord}\}$ et $U_S = S^2 \setminus \{\text{Pôle Sud}\}$ et φ_N, φ_S sont les projections stéréographiques correspondantes. On note (X, Y) les coordonnées de la projection du point $m(x, y, z) \in U_N$ par ϕ_N et (U, V) les coordonnées de la projection du point $m(x, y, z) \in U_S$ par ϕ_S .

Pour $m \in U_S \cap U_N$, on montre que l'on a

$$U = \frac{X}{X^2 + Y^2} \quad V = \frac{-Y}{X^2 + Y^2}.$$

Soit $u \in TS^2$ tel que $\pi(u) = m \in U_S \cap U_N$. On note ϕ_N et ϕ_S les trivialisations locales, notées ainsi :

$$\phi_N^{-1}(u) = (m, V_N) \quad \phi_S^{-1}(u) = (m, V_S).$$

Alors

$$t_{SN}(p) = \frac{\partial(U, V)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

où $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$.

Exemple 1.2.3 Soit M une sous-variété de dimension n de \mathbb{R}^{n+k} . Pour $m \in M$, on note $N_m M = T_m M^\perp \simeq \mathbb{R}^k$, et on considère le **fibré normal**

$$NM = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times N_m M.$$

C'est un fibré vectoriel de fibre \mathbb{R}^k . Par exemple, visuellement, le fibré normal de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est un "hérisson".

La notion de section existe pour tout fibré; néanmoins, dans le cas d'un fibré vectoriel, l'ensemble des sections est un espace vectoriel. Rappelons la définition :

Définition 1.2.2 Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré quelconque. Une **section** de E est une application (lisse) $\sigma : M \rightarrow E$ vérifiant $\pi \circ \sigma(m) = m$ pour tout $m \in M$.

On définit également la notion de **section locale** sur un ouvert U de M de la même façon.

On note $\Gamma(M, E)$ (respectivement $\Gamma_U(M, E)$) l'ensemble des sections (respectivement des sections locales sur $U \subset M$) de E .

Exemple 1.2.4 Un champ de vecteurs sur une variété est une section de son fibré tangent.

Si $E \xrightarrow{\pi} M$ est un fibré vectoriel, $\Gamma(M, E)$ a donc une structure d'espace vectoriel, de même dimension que la fibre de E . En effet, pour deux sections σ et $\tilde{\sigma}$ de E et un réel λ , on définit ponctuellement la section $\sigma + \lambda\tilde{\sigma}$ ainsi : pour $m \in M$, comme $\sigma(m)$ et $\tilde{\sigma}(m)$ appartiennent à $\pi^{-1}(m) = F_m$, qui est diffeomorphe à l'espace vectoriel F , on peut définir :

$$(\sigma + \lambda\tilde{\sigma})(m) = \sigma(m) + \lambda\tilde{\sigma}(m).$$

On définit bien ainsi une section de E . La multiplication par une fonction de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ est alors définie ponctuellement par

$$(f\sigma)(m) = f(m)\sigma(m).$$

On obtient là encore une section de E .

Enfin, remarquons que tout fibré vectoriel admet une section globale, en l'occurrence la section nulle σ_0 définie par $\phi_i^{-1}(\sigma_0(m)) = (m, 0)$ indépendamment de la trivialisations.

Exemple 1.2.5 Soient (E_1, π_1, M) et (E_2, π_2, M) deux fibrés vectoriels au dessus d'une même variété M , de fibres respectives F_1 et F_2 . On définit $E_1 \otimes E_2$ par

$$E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \underbrace{(\pi_1^{-1}(m))}_{\simeq F_1} \otimes \underbrace{(\pi_2^{-1}(m))}_{\simeq F_2}.$$

Alors $E_1 \otimes E_2$ est un fibré vectoriel au dessus de M , de fibre $F_1 \otimes F_2$, et la projection π est claire vue la définition.

Remarquons également que si $\sigma_1 \in \Gamma(M, E_1)$ et $\sigma_2 \in \Gamma(M, E_2)$ sont des sections, alors $\sigma_1 \otimes \sigma_2 : m \in M \mapsto \sigma_1(m) \otimes \sigma_2(m)$ est une section de $E_1 \otimes E_2$.

On peut ainsi définir par récurrence le fibré des tenseurs de variance v par

$$\bigotimes^{(v)} TM = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \bigotimes^{(v)} T_m M.$$

Un tenseur de M est une section du fibré des tenseurs de M .

Définition 1.2.3 Soient (E_1, π_1) et (E_2, π_2) deux fibrés vectoriels sur une même variété de base M . Un morphisme de fibrés vectoriels de E_1 dans E_2 est une application $F : E_1 \rightarrow E_2$ telle que $\pi_2 \circ F = \pi_1$ et que pour tout $m \in M$, F soit une application linéaire de $\pi_1^{-1}(m)$ dans $\pi_2^{-1}(m)$.

Un isomorphisme de fibrés vectoriels est un morphisme bijectif.

1.3 Fibré principal

Définition 1.3.1 Un fibré principal est un fibré dont la fibre F est munie de la structure de groupe du groupe de structure G . Un fibré principal $P \xrightarrow{\pi} M$ est noté $P(M, G)$.

On va définir à présent une action à droite de G sur P , ou plus précisément sur l'ensemble $\pi^{-1}(m) = F_m$ pour tout $m \in M$.

Remarquons qu'on a toujours une action de G sur F à gauche par définition d'un fibré ; à présent, on a également une action à droite, donnée par la multiplication de groupe \star de G . Soit une trivialisatation locale $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ donnée par $\phi_i^{-1}(u) = (m, a_i)$ pour $u \in \pi^{-1}(U_i)$ et $m = \pi(u)$. On définit alors l'action par :

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(m) \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(m) \\ (u, a) &\longmapsto ua = \phi_i(m, a_i \star a). \end{aligned}$$

Ceci est bien défini, c'est à dire indépendant du choix de la trivialisatation locale : en effet, si $m \in U_i \cap U_j$,

$$ua = \phi_j(m, a_j \star a) = \phi_j(m, t_{ij}(m) \cdot (a_i \star a)) = \phi_i(m, a_i \star a)$$

puisque $t_{ij}(m) \cdot a_i = a_j$ et que les actions à droite et à gauche de G sur F commutent.

Remarquons ensuite que cette action est **transitive**, puisque c'est le cas de l'action à droite de G sur F (multiplication de groupe), et que F_m est difféomorphe à F , lui même isomorphe à G . Ainsi, pour tout $u \in \pi^{-1}(m)$, $\{ua, a \in G\} = \pi^{-1}(m)$.

Elle est également **libre** : si $ua = u$ pour un $u \in \pi^{-1}(m)$ et un $a \in G$, on a

$$ua = \phi_i(m, a_i \star a) = \phi_i(m, a_i)a = u = \phi_i(m, a_i).$$

Puisque ϕ_i est bijective, $a_i \star a = a_i$, c'est à dire $a = e_G$.

Ceci se résume ainsi : $\forall u_1, u_2 \in \pi^{-1}(m), \exists! a \in G$ tel que $u_1 = u_2 a$.

Dans la suite, on omettra systématiquement les symboles \cdot et \star pour les actions à gauche et à droite de G sur F .

On va maintenant définir une famille de trivialisations $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à partir d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M et d'une famille de sections $\sigma_i \in \Gamma_{U_i}(M, E)$. On définit ϕ_i ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times G \\ u \in \pi^{-1}(m) &\longmapsto (m, a_u) \end{aligned}$$

où a_u est tel que $u = \sigma_i(m)a_u$.

a_u existe et est uniquement déterminé puisque l'action de G sur $\pi^{-1}(m)$ est libre et transitive et que u et $\sigma_i(m)$ appartiennent à $\pi^{-1}(m)$.

Ces trivialisations locales sont appelées **trivialisations locales canoniques**. Remarquons que pour tout $m \in M, g \in G$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_i(m) &= \phi_i(m, e_G) \\ \phi_i(m, a) &= \phi_i(m, e)a = \sigma_i(m)a. \end{aligned}$$

Enfin, si $m \in U_i \cap U_j$, les sections σ_i et σ_j sont reliées via les fonctions de transition des trivialisations précédemment définies :

$$\sigma_i(m) = \phi_i(m, e) = \phi_j(m, t_{ji}(m)e) = \phi_j(m, t_{ji}(m)) = \phi_j(m, e)t_{ji}(m) = \sigma_j(m)t_{ji}(m).$$

Exemple 1.3.1 Soit P un fibré principal de fibre $U(1) = S^1$ d'espace de base S^2 . On pose U_N l'hémisphère nord de S^2 et U_S l'hémisphère sud, soit

$$\begin{aligned} U_N &= \{(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \text{ tels que } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon, 0 \leq \theta < 2\pi\} \\ U_S &= \{(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \text{ tels que } \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on peut considérer que $U_N \cap U_S$ est constitué de l'équateur. Etant donné des trivialisations locales ϕ_N et ϕ_S sur U_N et U_S respectivement, on peut les écrire sous la forme

$$\phi_N^{-1}(u) = (m, e^{i\alpha_N}) \text{ et } \phi_S^{-1}(u) = (m, e^{i\alpha_S}),$$

avec $m = \pi(u)$.

Les fonctions de transition évaluées en un point m doivent appartenir à $U(1)$, c'est à dire

$$\forall m \in M, \exists \mu_m \in \mathbb{R} \mid t_{NS}(m) = e^{i\mu_m}.$$

Le choix $\mu_m = k\varphi(m)$, où $\varphi(m)$ est la longitude de m et $k \in \mathbb{Z}$, convient. Choisir $k \in \mathbb{Z}$ est nécessaire pour que T_{NS} soit bien définie quand on fait un tour d'équateur.

On obtient ainsi une suite de fibrés principaux; si $k = 0$, on a le fibré trivial $P = S^2 \times S^1$.

Exemple 1.3.2 Montrons que S^3 un fibré $U(1)$ -principal au dessus de S^2 . On peut voir la sphère S^3 comme la sphère unité de \mathbb{R}^4

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

ou comme la sphère unité de \mathbb{C}^2

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

On considère l'application de *Hopf*

$$\begin{aligned} \pi : S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto \begin{pmatrix} 2(x_1x_3 + x_2x_4) \\ 2(x_2x_3 - x_1x_4) \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier qu'elle est bien à valeurs dans S^2 , et surjective. On considère à présent les projections stéréographiques de S^2 . La projection par rapport au pôle nord P_N d'un point $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ autre que ce pôle est (notations complexes)

$$P_N(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3} = \frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \frac{z_1}{z_2},$$

avec $z_1 = x_1 + ix_2$ et $z_2 = x_3 + ix_4$. De même, la projection par rapport au pôle sud P_S conduit à

$$P_S(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{z_2}{z_1}.$$

On note U_S et U_N les hémisphères sud et nord de S^2 comme à l'exemple 1.3.1. On définit alors les trivialisations locales

$$\begin{aligned} \phi_S^{-1} : \pi^{-1}(U_S) &\longrightarrow U_S \times U(1) & \phi_N^{-1} : \pi^{-1}(U_N) &\longrightarrow U_N \times U(1) \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \left(P_N^{-1} \left(\frac{z_1}{z_2} \right), \frac{z_2}{|z_2|} \right), & (z_1, z_2) &\longmapsto \left(P_S^{-1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right), \frac{z_1}{|z_1|} \right). \end{aligned}$$

Ce sont bien des trivialisations (ou plus précisément leurs inverses en sont) d'après le calcul précédent qui montrait que $\pi(z_1, z_2) = P_N^{-1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, et elles sont bien définies sur leurs domaines de définition : en effet, $z_2 = 0$ implique $x_3 = x_4 = 0$, soit $\xi_1 = \xi_2 = 0$ et $u =$ pôle nord. De même pour le pôle sud.

Sur $U_S \cap U_N$, qui est essentiellement l'équateur, on a $\xi_3 = 0$, donc $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où sur $U_S \cap U_N$:

$$\phi_S^{-1}(z_1, z_2) = \left(P_N^{-1} \left(\frac{z_1}{z_2} \right), \sqrt{2}z_2 \right), \quad \phi_N^{-1}(z_1, z_2) = \left(P_S^{-1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right), \sqrt{2}z_1 \right).$$

D'où les trivialisations locales pour $m \in U_S \cap U_N$:

$$\phi_S(m, f) = \left(\frac{f}{\sqrt{2}} P_N(m), \frac{f}{\sqrt{2}} \right), \quad \phi_N(m, f) = \left(\frac{f}{\sqrt{2}} P_S(m), \frac{f}{\sqrt{2}} \right).$$

Sur l'équateur, $P_N(m) = P_S(m)$, donc les fonctions de transition y sont donc données par

$$t_{NS}(\xi) = \frac{\sqrt{2}z_1}{\sqrt{2}z_2} = \xi_1 + i\xi_2 \in U(1).$$

1.4 Fibré associé

Dans cette section, nous voyons comment construire un **fibré associé** à un fibré principal $P(M, G)$.

On suppose que G agit à gauche sur une variété F ; on définit une action de G sur $P \times F$ par

$$\begin{aligned} G \times (P \times F) &\longrightarrow P \times F \\ (a, (u, f)) &\longmapsto (ua, a^{-1}f). \end{aligned}$$

On définit alors le fibré associé (E, π_E, M, F, G, P) , où E est l'espace quotient $(P \times F)/G$. On note $[u, f]$ un élément de ce quotient, où $(u, f) \in P \times F$ est un représentant de la classe d'équivalence $[u, f]$. La projection π_E est donnée par $\pi_E([u, f]) = \pi(u)$, bien définie puisque G agit sur $\pi^{-1}(m)$ pour tout $m \in M$. On définit des trivialisations locales par

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1} : \pi_E^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times F \\ [u, f] &\longmapsto (\pi(u), a_u^i f), \end{aligned}$$

où l'élément $a_u^i \in G$ est défini comme vérifiant $\phi_i^{-1}(u) = (\pi(u), a_u^i) \in U_i \times G$, où les ϕ_i sont les trivialisations locales à partir desquelles est définie l'action de G sur P .

Il faut vérifier que la définition des ψ_i est indépendante du choix du représentant ; soit donc (u', f') un autre représentant de $[u, f]$: il existe $a_1 \in G$ tel que $u' = ua_1$ et $f' = a_1^{-1}f$.

Alors par définition de l'action de G sur P , $\phi_i^{-1}(u') = \phi_i^{-1}(ua_1) = (\pi(u), a_u^i a_1)$, et puisque $\pi(ua_1) = \pi(u)$, on a $\phi_i^{-1}(u') = (\pi(u'), a_u^i a_1)$, donc $a_{u'}^i = a_u^i a_1$ et

$$(\pi(u'), a_u^i f') = (\pi(u), a_u^i a_1 a_1^{-1} f) = (\pi(u), a_u^i f).$$

La définition est donc cohérente, et on a bien des trivialisations locales.

Le calcul des fonctions de transition est immédiat par définition de a_u^i : si $m = \pi(u)$ appartient à $U_i \cap U_j$, on pose

$$\psi_i^{-1}([u, f]) = (m, a_u^i f) \quad \text{et} \quad \psi_j^{-1}([u, f]) = (m, a_u^j f).$$

Alors $a_u^j = t_{ij}(m)a_u^i$, et les fonctions de transition sont les t_{ij} .

Dans le cas particulier où F est un espace vectoriel V de dimension finie k , on peut considérer une représentation de groupe

$$\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V).$$

Le **fibré vectoriel associé** $P \times_\rho V$ est alors le fibré d'espace total l'espace E égal à $P \times V$ où sont identifiés les points (u, v) et $(ua, \rho(a)^{-1}v)$, avec $a \in G$, $u \in P$ et $v \in V$. La construction précédente s'adapte facilement à ce cas de figure.

- Remarque 1.4.1 :**
1. Les fonctions de transition valent alors $\rho(t_{ij})$, où les t_{ij} sont les fonctions de transition associées au fibré P sur M . En toute rigueur, le groupe structural du fibré associé E est ainsi un sous-groupe de $\text{GL}(V)$ isomorphe à G .
 2. Avec les notations précédentes, la fibre du fibré associé est F , la dimension de $(P \times F)/G$ (respectivement de $P \times_\rho V$) est donc $\dim M + \dim F$ (respectivement $\dim M + \dim V$).

Exemple 1.4.1 Si $P = M \times G$ est le fibré G -principal trivial, on a $(M \times G) \times_\rho \Sigma \simeq M \times \Sigma$ pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(\Sigma)$.

Réciproquement, à tout fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ est associé un fibré principal noté GLE , de fibre $\text{GL}(\mathbb{K}^N)$ (où \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} selon si la fibre de E est \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^N).

Nous allons prouver un fait plus général : étant donné une variété de base M , un recouvrement $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, un groupe G , des fonctions de transition t_{ij} (c'est à dire des fonctions telles que $t_{ij}(m) \in G$ pour tout $m \in M$ et vérifiant les 3 équations (1), (2) et (3)) et une fibre F (quelconque), il existe un unique fibré (P, π, M, F, G) ayant ces fonctions de transition.

Il faut donc trouver des uniques π , P et ϕ_i (trivialisations) qui conviennent.

On pose

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \times F$$

et on définit la relation d'équivalence suivante sur X :

$$(m, f) \in U_i \times F \sim (m', f') \in U_j \times F \iff m = m' \text{ et } f' = t_{ij}(m)f.$$

On pose alors

$$P = X / \sim$$

ainsi que

$$\pi : P \longrightarrow M, [m, f] \longmapsto m$$

et

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \times F &\longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (m, f) &\longmapsto [m, f]. \end{aligned}$$

On vérifie alors sans peine que ces éléments conviennent, et que le fibré obtenu est unique (à difféomorphisme près).

Dans le cas qui nous intéressait au départ, il faut vérifier en plus qu'on obtient un fibré G -principal (avec $G \subset \text{GL}(\mathbb{K}^N)$) lorsque l'on prend $F = G$ et les fonctions de transition du fibré vectoriel de départ E (incluses dans G) comme fonctions de transition.

Remarque 1.4.2 : Si E est un fibré vectoriel de fibre \mathbb{K}^N , on considère le fibré principal associé GLE précédemment construit. Par l'action naturelle de $\text{GL}(\mathbb{K}^N)$ sur \mathbb{K}^N , on peut associer un fibré vectoriel de fibre \mathbb{K}^N à GLE . Alors ce fibré vectoriel est difféomorphe à E .

Exemple 1.4.2 On définit le fibré GLM par

$$\text{GLM} = \cup_{m \in M} \{m\} \times L_m M,$$

où $L_m M$ est l'ensemble des bases de l'espace tangent $T_m M$. On définit la projection $\pi_{\text{GL}} : \text{GLM} \longrightarrow M$ par $\pi_{\text{GL}}(m, \mathcal{B}) = m$. Soit U_i un ouvert de M , et $(\partial/\partial x^\mu)$ une base de $T_m M$ sur U_i . Une base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ de $T_m M$ s'écrit

$$X_\alpha = \sum_{\mu=1}^n X_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

avec $(X_\alpha^\mu)_{\alpha, \mu} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. On définit les trivialisations locales ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times \text{GL}(n, \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto (m, (X_\alpha^\mu)_{\alpha, \mu}). \end{aligned}$$

L'action de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ sur les bases est claire, et elle est transitive et libre. Enfin, les fonctions de transition correspondent aux matrices de changement de bases d'une carte à l'autre. En particulier, ce sont les mêmes fonctions de transition que celles du fibré tangent ; GLM est donc le fibré principal associé au fibré vectoriel TM .

Remarque 1.4.3 : D'après la remarque 1.4.2 et l'exemple 1.4.2, on peut voir le fibré tangent à une variété différentielle comme un fibré vectoriel associé à GLM , c'est à dire que l'on a $TM \stackrel{\text{difféo.}}{\cong} GLM \times_{\varrho} \mathbb{R}^n$, où ϱ est la représentation qui à une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ associe l'endomorphisme qu'elle représente dans la base canonique.

De même, on peut définir le fibré SOM par

$$SOM = \cup_{m \in M} \{m\} \times \{\text{bases positives de } T_m M\},$$

et montrer que $TM \stackrel{\text{difféo.}}{\cong} SOM \times_{\varrho} \mathbb{R}^n$.

2 Connexions et dérivées covariantes

Cette section s'appuie sur le contenu des références [Hij] et [N] de la bibliographie.

2.1 Connexion sur un fibré principal

Dans toute cette partie, $P(M, G)$ est un fibré G -principal, u est un élément de P , et la fibre en $m = \pi(u) \in M$ est G_m . Rappelons que n désigne la dimension de la variété de base M .

Définition 2.1.1 Soient $a \in G$, $u \in P$; on définit la **translation à droite** $R_a : P \rightarrow P$ de a par u par

$$R_a u = ua.$$

Définition 2.1.2 L'**action adjonction** de G sur G est l'application

$$\begin{aligned} ad : G &\longrightarrow G^G \\ a &\longmapsto ad_a : b \in G \longmapsto aba^{-1}. \end{aligned}$$

La différentielle de ad_a en e fournit un automorphisme Ad_a de $T_e G \simeq \mathfrak{g}$ (algèbre de Lie de G ; cf annexe A) défini par $A \in \mathfrak{g} \longmapsto aAa^{-1}$.

En effet, si $\gamma(t)$ est une courbe dans G telle que $\gamma(0) = e$ et $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} ad_a(\gamma(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} a\gamma(t)a^{-1} \right|_{t=0} \stackrel{1}{=} aXa^{-1} \\ &= Ad_a(X) \end{aligned}$$

On obtient de même que la différentielle en u de R_a appliquée au vecteur $X \in T_u P$ est $R'_a(u)X = Xa$.

Définition 2.1.3 Le **sous-espace vertical** en $u \in P$, noté $V_u P$, est le sous-espace vectoriel de $T_u P$ constituant l'espace tangent à G_m en u .

Construisons explicitement $V_u P$: soit A un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . On définit une courbe dans P passant par u en $t = 0$ par la formule :

$$R_{\exp(tA)} u = u \exp(tA).$$

1. Par définition, aX est le vecteur de \mathfrak{g} tel que si γ est une courbe dans G admettant X comme vecteur tangent au point e , la courbe $a\gamma$ admette aX comme vecteur tangent en e ; de même pour la multiplication à droite.

Comme $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = m$ (par définition de l'action de G sur les fibres de P), on a même une courbe dans G_m .

On définit alors $A^\sharp \in T_u P$ par

$$A^\sharp = \left. \frac{d}{dt}(u \exp(tA)) \right|_{t=0}.$$

En particulier, pour toute $f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$,

$$A^\sharp(f)(u) = \left. \frac{d}{dt}f(u \exp(tA)) \right|_{t=0}.$$

Alors A^\sharp est tangent à G_m en u , et appartient donc à $V_u P$. On construit ainsi point par point un champ de vecteurs A^\sharp sur P , appelé **champ de vecteur fondamental** engendré par A .

On vérifie facilement que pour tout $u \in P$, l'application $\sharp : \mathfrak{g} \longrightarrow V_u P$, $A \longmapsto A^\sharp$ est un isomorphisme.

Définition 2.1.4 Le **sous-espace horizontal** $H_u P$ est un supplémentaire de $V_u P$ dans $T_u P$. Noter qu'il n'est donc pas défini de manière unique en général.

Remarque 2.1.1 : 1. Pour $X \in V_u P$, $\pi'(u)(X) = 0$.

En effet, soit $u \in P$; comme $X \in V_u P$, il existe un unique $A \in \mathfrak{g}$ tel que $X = A^\sharp$.

Alors

$$\pi'(u)(X) = \pi'(u) \left(\left. \frac{d}{dt}(u \exp(tA)) \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d}{dt} \pi(u \exp(tA)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(u) \right|_{t=0} = 0.$$

2. On a même que $V_u P = \ker \pi'(u)$. En effet, on a localement au voisinage de u que $\pi \circ \phi = \pi_1$, où ϕ est une trivialisatation locale et π_1 est la projection $M \times G \longrightarrow M$. Comme ϕ est par définition un difféomorphisme, elle induit un isomorphisme entre $T_{\pi(u)} M \times T_e G \simeq T_{\pi(u)} M \times V_u P$ et $T_u P$. Le résultat en découle en passant aux différentielles en $\phi^{-1}(u)$.
3. Montrons que pour tout $u \in P$, et pour tout $A, B \in \mathfrak{g}$, $[A^\sharp, B^\sharp](u) = [A, B]^\sharp(u)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\sigma_t(u) = R_{\exp(tA)}(u) = u \exp(tA).$$

Alors σ coïncide avec le flot φ^{A^\sharp} du champ A^\sharp puisque

$$\left. \frac{d}{dt}(\sigma_t(u)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(u \exp(tA)) \right|_{t=0} = A^\sharp(u).$$

Ainsi, en utilisant la formule

$$[A^\sharp, B^\sharp](u) = \frac{d}{dt} \varphi_t^{A^\sharp} (B^\sharp)(u) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} ((\varphi_t^{A^\sharp})^{-1})'(u) (B^\sharp(\varphi_t^{A^\sharp}(u))) \Big|_{t=0},$$

on obtient

$$\begin{aligned} [A^\sharp, B^\sharp](u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma'_t(u \exp(-tA)) \cdot B^\sharp(u \exp(-tA)) - B^\sharp(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R'_{\exp(tA)}(u \exp(-tA)) \cdot B^\sharp(u \exp(-tA)) - B^\sharp(u)}{t}. \end{aligned}$$

On pose $\tau_u(a) = R_a(u) = ua$ pour $u \in P$, $a \in G$; remarquons que pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$X^\sharp(u) = \frac{d}{dt} (u \exp(tX)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \tau_u(\exp(tX)) \Big|_{t=0} = \tau'_u(e)(X),$$

et de plus

$$\begin{aligned} R'_{\exp(tA)}(u \exp(-tA)) \cdot B^\sharp(u \exp(-tA)) &= B^\sharp(u \exp(-tA)) \cdot \exp(tA) \\ &= \frac{d}{ds} (u \exp(-tA) \exp(sB)) \Big|_{s=0} \exp(tA) \\ &= \frac{d}{ds} (u \exp(-tA) \exp(sB) \exp(tA)) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} (\tau_u(\text{ad}_{\exp(-tA)}(\exp(sB)))) \Big|_{s=0} \\ &= \tau'_u(e) \text{Ad}_{\exp(-tA)}(B). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} [A^\sharp, B^\sharp](u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau'_u(e) \text{Ad}_{\exp(-tA)}(B) - \tau'_u(e)(B)}{t} \\ &= \tau'_u(e) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Ad}_{\exp(-tA)}(B) - B}{t} \right) \\ &\stackrel{2}{=} \tau'_u(e) ([A, B]) \\ &= [A, B]^\sharp(u). \end{aligned}$$

Définition 2.1.5 Une **connexion** sur le fibré G -principal $P(M, G)$ est la donnée d'une famille $(H_u P)_{u \in P}$ de sous-espaces vectoriels de $T_u P$ de dimension n tels que pour tout $u \in P$,

- (i) $T_u P = H_u P \oplus V_u P$;
- (ii) $H_{ua} = R'_a(u)(H_u P)$ pour tout $a \in G$.

2. Pour cette égalité, j'ai utilisé que G était un groupe de matrices, afin qu'on ait $G \subset \mathfrak{g}$ et qu'alors $\exp(-tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!}$, d'où le calcul de la limite. D'après [Rod], cela reste vrai pour tout groupe G .

Remarque 2.1.2 : 1. La propriété (ii) établit que la connaissance d'un espace horizontal en un point entraîne la connaissance de tous les espaces horizontaux sur la fibre de ce point.

2. D'après le second point de la remarque 2.1.1, pour tout $u \in P$, $\pi'(u)|_{H_u} : H_u \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ est un isomorphisme.

Définition 2.1.6 Une **1-forme de connexion** ω est une 1-forme à valeurs dans \mathfrak{g} (c'est à dire $\omega : u \in P \longmapsto \omega(u) \in \mathcal{L}(T_uP, \mathfrak{g})$) telle que pour tout $u \in P$, $\omega(u)$ soit une projection de T_uP sur $V_uP \simeq \mathfrak{g}$:

$$\omega(u) : T_uP = V_uP \oplus H_uP \xrightarrow{\text{proj.}} V_uP \xrightarrow{\#^{-1}} \mathfrak{g},$$

et qui vérifie les deux propriétés ci-dessous :

- (i) $\omega(u)(A^\#) = A \in \mathfrak{g}$ ($u \in P, A^\# \in T_uP$);
- (ii) $R_a^*\omega(u)(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \omega(ua)(R'_a(u) \cdot X) = Ad_{a^{-1}}\omega = a^{-1}\omega_u(X)a$ ($u \in P, a \in G, X \in T_uP$).

Dorénavant, nous noterons ω_u au lieu de $\omega(u)$ pour éviter un excès de parenthèses.

En posant, pour tout $u \in P$,

$$H_uP = \ker \omega_u = \{X \in T_uP \text{ tels que } \omega_u(X) = 0\},$$

la proposition à venir montre qu'on obtient une famille d'espaces horizontaux.

Proposition 1

$$R'_a(u)(H_uP) = H_{ua}P.$$

Démonstration. Déjà, pour $X \in H_uP$, $\omega_{ua}(R'_a(u)(X)) = R_a^*\omega_{ua}(X) = a^{-1}\omega_u(X)a = 0$ puisque $\omega_u(X) = 0$. Donc $R'_a(u)(H_uP) \subset H_{ua}P$.

On conclut en constatant que tous les espaces horizontaux ont même dimension, en l'occurrence $\dim M$, puisque les ω_u sont des projections de T_uP sur V_uP , donc leurs noyaux ont tous la même dimension $\dim P - \dim G = \dim M$, d'où le résultat. □

Nous avons donc montré que la donnée d'une connexion est équivalente à la donnée d'une 1-forme de connexion, les espaces horizontaux étant alors les noyaux des ω_u . La 1-forme de connexion ainsi définie est appelée **connexion de Ehresmann**.

2.2 Dérivée covariante sur un fibré vectoriel

Définition 2.2.1 (E, π, M) un fibré vectoriel. Une **dérivée covariante** est une application linéaire

$$\nabla : \Gamma(M, E) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes E)$$

vérifiant la *règle de Leibniz* : $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall \psi \in \Gamma(M, E)$,

$$\nabla(f\psi) = f' \otimes \psi + f\nabla\psi.$$

Remarquons que $T^*M \otimes E$ est bien un fibré vectoriel sur M d'après l'exemple 1.2.5.

Remarque 2.2.1 : Pour $m \in M$, on peut également voir $(\nabla\psi)(m)$ comme un élément de $\mathcal{L}(T_m M, \pi^{-1}(m))$. On retrouvera ce point de vue dans la preuve de la proposition 4.

Etant donné $X \in \Gamma(M, TM)$, on peut également définir

$$\begin{aligned} \nabla_X : \Gamma(M, E) &\longrightarrow \Gamma(M, E) \\ \psi &\longmapsto \nabla_X \psi : m \longmapsto (\nabla\psi)(m)(X(m), \cdot). \end{aligned}$$

L'élément $\nabla_X \psi(m)$ appartient ainsi en toute rigueur au bidual $\pi^{-1}(m)^{**}$, que l'on identifie à $\pi^{-1}(m) \subset E$.

L'application ∇_X est linéaire et vérifie également la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} \nabla_X(f\psi)(m) &= (\nabla(f\psi))(m)(X(m), \cdot) \\ &= f'(m)(X(m)) \times \psi(m) + f(m)(\nabla\psi)(m)(X(m), \cdot) \\ &= (f'(X) \otimes \psi + f\nabla_X\psi)(m) \end{aligned}$$

pour toutes $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ et $\psi \in \Gamma(M, E)$.

De plus, si Y est un autre champ de vecteurs sur M , on a, pour toutes $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\nabla_{fX+gY}\psi = f\nabla_X\psi + g\nabla_Y\psi.$$

Réciproquement, si pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$ est donnée une application ∇_X vérifiant la règle de Leibniz et la relation précédente, on définit une connexion ∇ par

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(M, E) &\longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes E) \\ \psi &\longmapsto \nabla\psi : m \longmapsto \begin{cases} (\nabla\psi)(m) : T_m M \times E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, \mu) \longmapsto \mu(\nabla_v \psi(m)). \end{cases} \end{aligned}$$

La donnée de ∇ ou de ∇_X pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$ est donc équivalente.

2.3 Lien entre connexion et dérivée covariante

Nous allons maintenant étudier une correspondance entre les connexions sur un fibré principal $P(M, G)$ et les dérivées covariantes sur le fibré vectoriel associé E .

2.3.1 D'une connexion à une dérivée covariante, première version

On suppose que G agit à gauche sur un espace vectoriel Σ (cf paragraphe 1.4), on se donne une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(\Sigma)$, et on note $E = P \times_{\rho} \Sigma$ le fibré vectoriel associé à $P(M, G)$. On suppose également que $P(M, G)$ est muni d'une connexion ω .

Soit $\psi \in \Gamma(M, E)$ une section de E ; vue la définition de la projection $\pi_E : E \rightarrow M$, une telle section est localement de la forme $m \in M \mapsto [\sigma(m), s(m)]$ sur un ouvert U de M , où $\sigma \in \Gamma_U(M, P)$ et $s : U \rightarrow \Sigma$ est une fonction.

Comme

$$TU \xrightarrow{\sigma'} TP \xrightarrow{\omega} \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho'(e)} \mathfrak{gl}(\Sigma) = \text{End}(\Sigma),$$

(puisque $\mathfrak{gl}(\Sigma) = \text{End}(\Sigma)$, cf Annexe A, exemple A.3.1), on définit une dérivée covariante sur E par

$$\nabla_X \psi = [\sigma, X(s) + \rho'(e) \circ \omega \circ \sigma'(X)(s)] \quad (X \in \Gamma_U(M, TM),$$

où $X(s)$ désigne l'action de X sur les fonctions composantes de s . On vérifie facilement qu'elle vérifie la règle de Leibniz et la $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linéarité par rapport aux champs de vecteurs, et qu'elle est donc bien une dérivée covariante.

2.3.2 D'une connexion à une dérivée covariante, seconde version

Nous allons voir maintenant une autre façon d'associer une dérivée covariante sur le fibré associé à un fibré principal, une connexion sur ce fibré étant donnée. Nous gardons les notations du paragraphe 2.3.1.

Définition 2.3.1 Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe dans M . Une courbe $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ est dite **relèvement horizontal** de γ si $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et que pour tout $t \in [0, 1]$, le vecteur tangent à $\tilde{\gamma}(t)$ appartient à $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$.

Théorème 1 Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe dans M et $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Il existe un unique relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = u_0$.

Démonstration. Conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires. □

Corollaire 2.3.1 Soient $\tilde{\gamma}$ et $\hat{\gamma}$ deux relèvements horizontaux d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tels que $\hat{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)a$ pour un $a \in G$. Alors $\hat{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t)a$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration. Soit $\tilde{\gamma}$ un relèvement horizontal de γ . Alors $\tilde{\gamma}_a : t \mapsto \tilde{\gamma}(t)a$ est également un relèvement horizontal de γ d'après la proposition 1. D'après le théorème précédent, $\hat{\gamma}$ est l'unique relèvement horizontal ayant pour condition initiale $\tilde{\gamma}(0)a$, d'où le résultat. \square

Exemple 2.3.1 On considère le fibré \mathbb{R} -principal trivial $P(M, \mathbb{R})$ sur $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On note $\phi : ((x, y), a) \mapsto u \in P$ une trivialisatation locale. On pose

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + da.$$

On peut facilement vérifier que ω est une 1-forme de connexion :

- Soit A un élément de l'algèbre de Lie de \mathbb{R} , c'est à dire $A \in \mathbb{R}$; alors par définition de l'action à droite de G sur les fibres de P , si $u = \phi((x, y), a) \in P$, on a

$$u \exp(tA) = \phi((x, y), a + \exp(tA)),$$

d'où

$$A^\sharp = \left. \frac{d}{dt}(u \exp(tA)) \right|_{t=0} = A \frac{\partial}{\partial a},$$

et

$$\omega_u(A^\sharp(u)) = 0 + \left. \frac{d}{dt}(a + \exp(tA)) \right|_{t=0} = A.$$

- $R_a \omega(u)(X) = \omega_{ua}(R'_a(u)(X)) = \omega_{ua}(X) = \omega_u(X) = a^{-1} \omega_u(X) a$.

En effet, R_a est une translation donc sa différentielle en tout point est l'identité, et $\omega_{ua} = \omega_u$, et \mathbb{R} est abélien.

Soit le cercle unité dans $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ décrit par $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Construisons le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ de γ passant par $((1, 0), 0)$: soit

$$X = \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{da}{dt} \frac{\partial}{\partial a}$$

le vecteur tangent à $\tilde{\gamma}(t)$. Il est horizontal si et seulement si $\omega_{\tilde{\gamma}(t)}(X) = 0$, soit

$$\frac{dx}{dt} \frac{y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} - \frac{dy}{dt} \frac{x(t)}{x^2(t) + y^2(t)} + \frac{da}{dt} = \underbrace{-2\pi}_{\text{car } \pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma} + \frac{da}{dt} = 0.$$

D'où $a = 2\pi t + \text{constante}$, et $\tilde{\gamma}(t) = ((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), 2\pi t)$: c'est une hélice au dessus du cercle unité.

Définition 2.3.2 Soit E le fibré associé à P et $\psi = [\sigma, s] \in \Gamma(M, E)$ une section de E , et X un champ de vecteurs sur M . On construit point par point la section $\nabla_X \psi$ ainsi : pour $m \in M$ fixé, on considère une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = X(m)$. Soit également $\tilde{\gamma}$ un relèvement horizontal de γ , d'origine $u_0 \in \pi^{-1}(m)$. On a $\psi(\gamma(t)) = [\sigma(\gamma(t)), s(\gamma(t))]$ et $\pi \circ \sigma(\gamma(t)) = \gamma(t)$ donc $\sigma(\gamma(t)) \in \pi^{-1}(\gamma(t)) \ni \tilde{\gamma}(t)$ donc pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $a(t) \in G$ tel que $\sigma(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}(t)a(t)$.

Par définition de la relation d'équivalence sur E , on a donc

$$\begin{aligned} \psi(\gamma(t)) &= [\sigma(\gamma(t)), s(\gamma(t))] = [\tilde{\gamma}(t)a(t), s(\gamma(t))] \\ &= [\tilde{\gamma}(t), \rho(a(t))s(\gamma(t))]. \end{aligned}$$

Alors par définition,

$$(\nabla_X \psi)(m) = \left[\tilde{\gamma}(0), \left. \frac{d}{dt} \rho(a(t))s(\gamma(t)) \right|_{t=0} \right].$$

Remarque 2.3.1 : 1. Il y a beaucoup de choses à vérifier dans cette définition, en particulier qu'elle ne dépend pas du choix du chemin γ (mais cela est clair), ni du choix du relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$: soit donc $\hat{\gamma}$ un autre relèvement horizontal de γ , de condition initiale $\hat{\gamma}(0) = v_0$. Il existe $a_0 \in G$ tel que $u_0 = v_0 a_0$ puisque u_0 et v_0 sont dans la même fibre $\pi^{-1}(m)$.

D'après le corollaire 2.3.1, $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)a_0$ pour tout t , d'où

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\gamma}(0), \left. \frac{d}{dt} \rho(a(t))s(\gamma(t)) \right|_{t=0} \right] &= \left[\hat{\gamma}(0)a_0^{-1}, \left. \frac{d}{dt} \rho(a(t))s(\gamma(t)) \right|_{t=0} \right] \\ &= \left[\hat{\gamma}(0), \rho(a_0^{-1}) \left. \frac{d}{dt} \rho(a(t))s(\gamma(t)) \right|_{t=0} \right] \\ &= \left[\hat{\gamma}(0), \left. \frac{d}{dt} \rho(a(t)a_0^{-1})s(\gamma(t)) \right|_{t=0} \right]. \end{aligned}$$

Il faudrait de plus vérifier que la définition définit bien une dérivée covariante.

2. Par le calcul, on obtient que cette définition est équivalente à la définition de la section 2.3.1 (où l'on avait pris en fait le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \sigma(m)$).

Cette deuxième définition ne fait pas apparaître explicitement la connexion ω , mais elle est "cachée" dans la notion de relèvement horizontal, qui demande que soient définis les espaces horizontaux. On retrouve ω en développant le calcul : cf [N], pages 348-349.

2.3.3 D'une dérivée covariante à une connexion

Réciproquement, étant donné un fibré vectoriel (E, π, M) sur un corps \mathbb{K} , de fibre \mathbb{K}^N , et une dérivée covariante ∇ , on peut définir une 1-forme de connexion ω sur GLE , fibré $GL(\mathbb{K}^N)$ -principal associé : on a déjà vu que l'ensemble des sections de E formait un espace

vectoriel de dimension N : on peut donc considérer N sections locales de E linéairement indépendantes

$$s = (\psi_1, \dots, \psi_N) : U \longrightarrow \text{GLE} \quad (U \subset M).$$

On définit alors N^2 1-formes $\omega_{\beta\alpha}$ par

$$\nabla_X \psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \omega_{\beta\alpha}(X) \psi_\beta$$

pour tout $X \in \Gamma_U(M, TM)$.

On utilise maintenant le théorème suivant pour conclure.

Théorème 2 *Soit $P(M, G)$ un fibré G -principal. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de M , et σ_i une section locale définie sur U_i pour tout i . Soient des 1-formes \mathcal{A}_i sur chaque U_i à valeurs dans \mathfrak{g} vérifiant, pour tout $i \neq j$, $m \in U_i \cap U_j$ et $X \in T_m M$:*

$$\mathcal{A}_j(m)(X) = t_{ij}^{-1}(m) \mathcal{A}_i(m)(X) t_{ij}(m) + t_{ij}^{-1}(m) dt_{ij}(m)(X),$$

où les t_{ij} sont les fonctions de transition du fibré.

Alors il existe une unique 1-forme de connexion ω sur P telle que $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ pour tout i .

On applique alors ce théorème à $\text{GLE}(M, \text{GL}(\mathbb{K}^N))$ et à la 1-forme $\mathcal{A} = (\omega_{\beta\alpha})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$ à valeurs dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl} = \text{End}(\mathbb{K}^N)$ sur U , ce qui prouve l'existence et l'unicité de la 1-forme de connexion ω sur GLE .

Remarque 2.3.2 : A priori, la 1-forme de connexion donnée par le théorème dépend du choix du recouvrement ouvert et des sections σ_i . Dans notre cas, on peut vérifier que pour toute section locale $\sigma \in \Gamma_U(M, \text{GLE})$, on a $\sigma^* \omega = (\omega_{\beta\alpha})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$; en effet, le changement de section va agir sous forme d'un changement de base sur $(\omega_{\beta\alpha})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$, et la matrice changera mais pas l'endomorphisme de $\text{End}(\mathbb{K}^N)$.

Démonstration du théorème 2. La démonstration étant assez longue et technique, je renvoie à [N], pages 332 à 335.

□

Remarque 2.3.3 : 1. D'après la remarque 1.4.3, si on a une dérivée covariante sur le fibré tangent TM d'une variété M , on obtient donc une unique 1-forme de connexion sur GLM . De la même façon, si (M, g) est une variété riemannienne, la donnée d'une dérivée covariante sur TM conduit à une 1-forme de connexion sur le fibré $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ -principal SOM . Nous reviendrons à cela dans la partie 5.1.

2. Si le fibré vectoriel E est une variété différentielle munie d'une métrique g et d'une dérivée covariante ∇ compatible avec la métrique, c'est à dire telle que $\forall \psi, \varphi \in \Gamma(M, E)$ et $X \in \Gamma(M, TM)$, on ait

$$X(g(\psi, \varphi)) = g(\nabla_X \psi, \varphi) + g(\psi, \nabla_X \varphi),$$

alors pour toute base orthonormée $s = (\psi_1, \dots, \psi_N) : U \rightarrow \text{SO}E$, pour tout $m \in M$, la matrice de $(\omega_{\beta\alpha}(m))_{\alpha, \beta}$ dans cette base est antisymétrique (c'est donc un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_N \simeq \Omega^2(\mathbb{R}^N)$ de $\text{SO}_N(\mathbb{R})$: cf annexe A, exemple A.3.1).

En effet, soit $X \in \Gamma(M, TM)$; pour tout $\beta, \alpha \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \omega_{\beta\alpha}(X) &= g(\sum_{\gamma} \omega_{\gamma\alpha}(X) \psi_{\gamma}, \psi_{\beta}) \\ &= g(\nabla_X \psi_{\alpha}, \psi_{\beta}) \\ &= -g(\psi_{\alpha}, \nabla_X \psi_{\beta}) \\ &= -\omega_{\alpha\beta}(X). \end{aligned}$$

2.4 La courbure

M une variété différentielle. On note $\Omega^k(M) = \{\eta : \underbrace{TM \wedge \dots \wedge TM}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}\}$ l'ensemble des k -formes différentielles sur M . On généralise cette définition aux k -formes η à valeurs dans un espace vectoriel V de dimension finie p , ce que nous notons $\eta \in \Omega^k(M) \otimes V$. Une telle application η s'écrit

$$\eta = \sum_{\alpha=1}^p \eta^{\alpha} \otimes e_{\alpha},$$

où $(e_{\alpha})_{1 \leq \alpha \leq p}$ est une base de V et avec $\eta^{\alpha} \in \Omega^k(M)$ pour tout α .

On note $\Omega^*(M) \otimes V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M) \otimes V = \bigoplus_{k=0}^p \Omega^k(M) \otimes V$. Cet ensemble est muni d'une structure de fibré vectoriel sur M telle que ses sections soient les formes différentielles sur M .

On suppose connue la notion de **dérivée extérieure**, que l'on notera d (et qui à un élément de $\Omega^r(M)$ associe un élément de $\Omega^{r+1}(M)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$).

Définition 2.4.1 Soit $P(M, G)$ un fibré G -principal muni d'une 1-forme de connexion ω , et $\eta \in \Omega^k(P) \otimes V$. La **dérivée covariante** de η est l'élément $D\eta$ de $\Omega^{k+1}(P) \otimes V$ défini par

$$D\eta(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\eta(X_1^H, \dots, X_{k+1}^H) \quad (X \in \Gamma(P, TP)),$$

où $d\eta = \sum d\eta^{\alpha} \otimes e_{\alpha}$ et X^H est la composante selon $H_u P$ du vecteur $X \in T_u P$.

Remarque 2.4.1 : On vérifie facilement que l'appellation est justifiée, et qu'on a bien une dérivée covariante au sens de la définition 2.2.1.

Définition 2.4.2 Soit $P(M, G)$ un fibré G -principal muni d'une 1-forme de connexion ω . La **2-forme de courbure** Ω est la dérivée covariante de ω :

$$\Omega = D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}.$$

Proposition 2 La 2-forme de courbure vérifie, pour tout $a \in G$,

$$R_a^* \Omega = a^{-1} \Omega a.$$

Démonstration. Par définition, pour $u \in P$ et $X, Y \in T_u P$, on a

$$(R_a^* \Omega)_u(X, Y) = \Omega_{ua}(R'_a(u)(X), R'_a(u)(Y)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (R_a^* \Omega)_u(X, Y) &= d\omega_{ua}((R'_a(u)(X))^H, (R'_a(u)(Y))^H) \\ &= d\omega_{ua}(R'_a(u)(X^H), R'_a(u)(Y^H)) && \text{(propriété 1)} \\ &= d(R_a^* \omega)_u(X^H, Y^H) \\ &= d(a^{-1} \omega a)_u(X^H, Y^H) && \text{(définition 2.1.6)} \\ &= a^{-1} d\omega_u(X^H, Y^H) a \\ &= a^{-1} \Omega_u(X, Y) a. \end{aligned}$$

□

On définit le produit extérieur \wedge , associatif, multilinéaire et alterné sur $\Omega^*(M) \otimes V$ par

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{sign}(\sigma) dx^{\mu_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{\sigma(r)}}.$$

En particulier, si R et S sont deux formes différentielles de degré r et s respectivement, $R \wedge S$ est de degré $r + s$ et on a

$$R \wedge S = (-1)^{rs} S \wedge R.$$

Remarquons que $R \wedge R \neq 0$ en général; par contre c'est vrai si R est d'ordre 1.

On va maintenant définir le commutateur de deux formes différentielles à valeurs dans \mathfrak{g} . Soit donc (T_α) une base de \mathfrak{g} et

$$\eta = \sum_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}} \eta^\alpha \otimes T_\alpha \in \Omega^q(M) \otimes \mathfrak{g}, \quad \xi = \sum_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{g}} \xi^\alpha \otimes T_\alpha \in \Omega^p(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

On pose

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= \xi \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \xi \\
&= \sum_{\alpha, \beta} T_\alpha \cdot T_\beta \xi^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta \cdot T_\alpha \eta^\beta \wedge \xi^\alpha \\
&= \sum_{\alpha, \beta} [T_\alpha, T_\beta] \otimes \xi^\alpha \wedge \eta^\beta.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\xi = \eta$, on a

$$[\xi, \xi] = 2\xi \wedge \xi.$$

On obtient ainsi une $(p + q)$ -forme à valeurs dans \mathfrak{g} .

Lemme 1 *Soit $u \in P$ et $X, Y \in V_u P$; alors $[X, Y] \in H_u P$.*

Démonstration. Si γ est une courbe dans G engendrant le champ de vecteurs Y ($V_u P \simeq \mathfrak{g}$), et $u \in P$, on a (d'après une formule déjà mentionnée à la remarque 2.1.1)

$$[Y, X](u) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \left(R'_{\gamma(t)}(u\gamma(t)^{-1})X(u\gamma(t)^{-1}) - X(u) \right).$$

D'après la proposition 1,

$$R'_{\gamma(t)}(u\gamma(t)^{-1})X(u\gamma(t)^{-1}) \in H_{u\gamma(t)^{-1}\gamma(t)} = H_u P,$$

donc $[Y, X] \in H_u P$.

□

Ce lemme permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3 *Soient $X, Y \in T_u P$. Alors Ω et ω vérifient l'équation de structure de Cartan*

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)].$$

Cette relation s'écrit encore

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Démonstration. Montrons déjà que la deuxième formule égale bien la première : soient $X, Y \in T_u P$,

$$\begin{aligned}
[\omega, \omega](X, Y) &= \sum_{\alpha, \beta} [T_\alpha, T_\beta] \omega^\alpha \wedge \omega^\beta(X, Y) \\
&= \sum_{\alpha, \beta} [T_\alpha, T_\beta] [\omega^\alpha(X) \omega^\beta(Y) - \omega^\beta(X) \omega^\alpha(Y)] \\
&= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)].
\end{aligned}$$

Donc

$$\Omega(X, Y) = \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \right) (X, Y) = (d\omega + \omega \wedge \omega)(X, Y).$$

Prouvons à présent la première formule. On distingue trois cas de figure :

- $X, Y \in H_u P$; par définition, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, et $\Omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H) = d\omega(X, Y)$.
- $X \in H_u P, Y \in V_u P$; alors $Y^H = 0$ donc $\Omega(X, Y) = 0$. On a également $\omega(X) = 0$, donc il faut montrer que $d\omega(X, Y) = 0$. Or la dérivée extérieure d'une 1-forme est donnée par

$$d\omega_u(X, Y) = X(\omega_u(Y)) - Y(\omega_u(X)) - \omega_u([X, Y]),$$

soit ici

$$d\omega_u(X, Y) = X(\omega_u(Y)) - \omega_u([X, Y]),$$

où $X(\omega_u(Y))$ correspond bien sûr à l'action de X sur les composantes réelles du vecteur $\omega_u(Y) \in \mathfrak{g}$. L'application $u \in P \mapsto \omega_u(Y)$ est en réalité $u \in P \mapsto \omega_u(\tilde{Y}(u))$, où \tilde{Y} est le champ constant à valeurs dans $VP = \cup_{u \in P} \{u\} \times V_u P \simeq \mathfrak{g}$ qui vaut Y .

Comme $Y \in V_u P$, il existe (un unique) $V \in \mathfrak{g}$ tel que $Y = V^\sharp$, et alors d'après la définition 2.1.6, $\omega_u(\tilde{Y}(u)) = V$ est constant, donc $X(\omega_u(Y)) = 0$.

Enfin, d'après le lemme, $[X, Y] \in H_u P$ donc $\omega([X, Y]) = 0$.

- $X, Y \in V_u P$; alors $\Omega(X, Y) = 0$ et $X(\omega(Y)) = Y(\omega(X)) = 0$ comme précédemment, d'où

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]).$$

D'après le deuxième point de la remarque 2.1.1, $[X, Y] \in V_u P$: il existe $A \in \mathfrak{g}$ tel que $\omega(X, Y) = A$ et $A^\sharp = [X, Y]$. Si de plus $B^\sharp = X$ et $C^\sharp = Y$, on a

$$[\omega(X), \omega(Y)] = [B, C] = A$$

puisque $[B, C]^\sharp = [B^\sharp, C^\sharp] = [X, Y] = A^\sharp$. Donc $[\omega(X), \omega(Y)] = \omega([X, Y])$ et

$$0 = d\omega(X, Y) + \omega([X, Y]) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)].$$

Par linéarité et antisymétrie de Ω , l'étude de ces 3 cas suffit à prouver le théorème. \square

Définition 2.4.3 Soit (E, π, M) un fibré vectoriel muni d'une dérivée covariante ∇ compatible avec la métrique. On définit le **tenseur de courbure** par

$$\mathcal{R} : \Gamma(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, T^*M \otimes E) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \Gamma(M, \Omega^2(T^*M) \otimes E),$$

où

$$\tilde{\nabla}(\alpha \otimes \psi) = d\alpha \otimes \psi - \alpha \wedge \nabla\psi.$$

Proposition 3 Soit (E, π, M) et ∇ comme précédemment. On se donne une section locale $\sigma = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Gamma_U(M, SOE)$, et on note $(\omega_{\beta\alpha})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$ la connexion définie dans la section 2.3.3. Alors on a

$$\mathcal{R}\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \Omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta$$

pour tout $\alpha \in \{1, \dots, N\}$, où Ω est la 2-forme de courbure associée à ω .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(\nabla(\psi_\alpha)) &= \tilde{\nabla}\left(\sum_{\beta} \omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta\right) = \sum_{\beta} \tilde{\nabla}(\omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta) \\ &= \sum_{\beta} \left(d\omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta - \omega_{\beta\alpha} \wedge \left(\sum_{\gamma} \omega_{\gamma\beta} \otimes \psi_\gamma \right) \right) \\ &= \sum_{\beta} (d\omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta) - \sum_{\gamma} \sum_{\beta} \omega_{\beta\alpha} \wedge \omega_{\gamma\beta} \otimes \psi_\gamma && \text{(Fubini)} \\ &= \sum_{\beta} (d\omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta) - \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma} \otimes \psi_\beta && \text{(Changement d'indices)} \\ &= \sum_{\beta} \left(d\omega_{\beta\alpha} - \sum_{\gamma} \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma} \right) \otimes \psi_\beta \\ &= \sum_{\beta} \left(d\omega_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma} \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma\alpha} \right) \otimes \psi_\beta \\ &= \sum_{\beta} \Omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta. \end{aligned}$$

□

Proposition 4 On a la relation usuelle

$$\mathcal{R}_{X,Y} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \quad (X, Y \in \Gamma(M, TM)).$$

Remarque 2.4.2 : Pour tous $m \in M$, $\psi \in \Gamma(M, E)$ et $X, Y \in T_m M$,

$$(\mathcal{R}_{X,Y}\psi)(m) = (\mathcal{R}\psi)(m)(X, Y, \cdot) \in \pi^{-1}(m)^{**} \simeq \pi^{-1}(m).$$

Démonstration. Soient $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ et $\psi \in \Gamma_U(M, E)$ une section locale. Avec les ψ_β comme dans la démonstration précédente, il existe des $\alpha_i \in \Gamma_U(M, T^*M)$, $i = 1, \dots, n$ telles que

$$\nabla\psi = \sum_{i,\beta} \alpha_i \otimes \psi_\beta.$$

Alors, pour tout $m \in M$ et toute section locale $\psi \in \Gamma_U(M, E)$, en considérant $(\mathcal{R}\psi)(m)$ comme un élément de $\Omega^2(T_m M, \pi^{-1}(m))$ (applications bilinéaires antisymétriques définies sur $(T_m M)^2$ à valeurs dans $\pi^{-1}(m)$), on a

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(\nabla\psi)(X, Y) &= \sum_{i,\beta} (d\alpha_i \otimes \psi_\beta)(X, Y) - (\alpha_i \wedge \nabla\psi_\beta)(X, Y) \\ &= \sum_{i,\beta} (X(\alpha_i(Y)) - Y(\alpha_i(X)) - \alpha_i([X, Y]))\psi_\beta - \alpha_i(X)\nabla_Y\psi_\beta + \alpha_i(Y)\nabla_X\psi_\beta \\ &= \sum_{i,\beta} \nabla_X(\alpha_i(Y)\psi_\beta) - \nabla_Y(\alpha_i(X)\psi_\beta) - \alpha_i([X, Y])\psi_\beta \\ &= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\psi. \end{aligned}$$

□

3 Groupes pinoriel et spinoriel

Dans toute cette partie, V désignera un espace vectoriel de dimension n sur un corps \mathbb{K} , et q une forme quadratique sur V . On notera indifféremment la forme quadratique q et la forme bilinéaire symétrique associée. C'est volontairement qu'est choisie la même lettre n que pour la dimension de la variété M dans les parties précédentes vue l'utilisation qui sera faite plus tard de cette section. De plus, il n'y aura aucune ambiguïté dans cette section ni dans la suivante puisqu'il ne sera question que d'algèbre, et qu'on ne parlera pas du tout de variété différentielle.

On pourra également consulter [Hij] et [LM] pour l'essentiel de cette section.

3.1 Algèbre de Clifford

Définition 3.1.1 L'algèbre de Clifford $Cl(V, q)$ associée à l'espace vectoriel V et à la forme quadratique q est l'algèbre associative unitaire

$$Cl(V, q) = T(V)/I(V, q),$$

où $T(V)$ est l'algèbre des tenseurs sur V , et $I(V, q)$ l'idéal de $T(V)$ engendré par les tenseurs de la forme $v \otimes v + q(v)\mathbf{1}$ pour $v \in V$.

Théorème 4 (*Propriété universelle*) Soit A une algèbre associative unitaire et $f : V \rightarrow A$ une application linéaire vérifiant

$$f(v)^2 = -q(v)\mathbf{1}$$

pour tout $v \in V$. Alors f s'étend uniquement en un morphisme de \mathbb{K} -algèbres

$$\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow A.$$

De plus, $Cl(V, q)$ est l'unique \mathbb{K} -algèbre associative ayant cette propriété.

Remarque 3.1.1 : 1. D'après cette propriété, l'algèbre de Clifford de V est également l'algèbre engendrée par V et la relation $v^2 = -q(v)\mathbf{1}$, qui définit le produit interne de l'algèbre.

Si la caractéristique de \mathbb{K} est différente de 2, c'est également l'algèbre engendrée par V et la relation $x \cdot y + y \cdot x = -2q(x, y)\mathbf{1}$ pour tous $x, y \in V$.

2. La dimension de l'espace vectoriel sous-jacent de $Cl(V, q)$ est 2^n , et si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de V , une base de $Cl(V, q)$ est donnée par la famille

$$\{e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 0 \leq k \leq n\}.$$

3. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels entre l'espace Ω^*V des formes différentielles sur V et $Cl(V, q)$, donné indépendamment du choix de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V par

$$\begin{aligned} \Theta : \Omega^*V &\longrightarrow Cl(V, q) \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} &\longmapsto e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.1 On se place sur $V = \mathbb{R}^n$ et on prend pour q le produit scalaire canonique et on note $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique. On note également Cl_n l'algèbre de Clifford associée.

- Pour $n = 1$, $e_1^2 = -1$ d'après la relation définissant le produit sur l'algèbre de Clifford. Comme on a vu qu'une base de l'algèbre de Clifford est donnée par $\{1, e_1\}$, on en déduit que

$$Cl_1 \stackrel{\text{algèbre}}{\simeq} \mathbb{C}.$$

- Pour $n = 2$, de même $e_1^2 = e_2^2 = (e_1 \cdot e_2)^2 = -1$, et $e_1 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_1$; une base de Cl_2 étant donnée par $\{1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2\}$, on a

$$Cl_2 \stackrel{\text{algèbre}}{\simeq} \mathbb{H},$$

où \mathbb{H} est l'algèbre des quaternions, avec $i = e_1 \cdot e_2$, $j = e_1$, $k = e_2$.

- Pour $n = 3$, une base de Cl_3 est $\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_3, e_3 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2 \cdot e_3\}$. On peut de même identifier ces vecteurs avec des éléments du corps des quaternions :

$$(1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_3, e_3 \cdot e_1) \simeq (1, i, j, k)$$

et

$$(e_1, e_2, e_3, e_1 \cdot e_2 \cdot e_3) \simeq (i, j, k, -1).$$

D'où

$$Cl_3 \stackrel{\text{algèbre}}{\simeq} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

On peut faire le lien entre le produit extérieur dans l'algèbre extérieure et la multiplication de l'algèbre de Clifford par la proposition suivante :

Proposition 5 Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$v \cdot \Theta(\varphi) = \Theta\left(\Theta^{-1}(v) \wedge \varphi - \Theta^{-1}(v) \lrcorner \varphi\right)$$

et

$$\Theta(\varphi) \cdot v = \Theta\left((-1)^p(\Theta^{-1}(v) \wedge \varphi + \Theta^{-1}(v) \lrcorner \varphi)\right).$$

Pour plus de clarté, on identifiera à présent les éléments de $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ et leurs images par l'isomorphisme Θ .

Démonstration. Rappelons d'abord la notion de *produit intérieur* \lrcorner : si $\varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, on définit $v \lrcorner \varphi \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ par

$$(v \lrcorner \varphi)(u_1, \dots, u_{p-1}) = \varphi(v, u_1, \dots, u_{p-1}).$$

Puisque les assertions sont linéaires en v et en φ , il suffit de les prouver pour $v = e_j$ et $\varphi = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$.

- S'il existe i_k tel que $j = i_k$, on a $v \wedge \varphi = 0$ et pour tout $(u_1, \dots, u_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$,

$$\begin{aligned} (v \lrcorner \varphi)(u_1, \dots, u_{p-1}) &= e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(e_j, u_1, \dots, u_{p-1}) \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(u_1, \dots, u_{k-1}, e_j, u_k, \dots, u_{p-1}) \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, \dots, u_{p-1}). \end{aligned}$$

Donc $v \lrcorner \varphi = (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, d'où

$$\begin{aligned} v \lrcorner \varphi &\simeq (-1)^{k-1} e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_{k-1}} \cdot e_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot e_{i_p} \\ &= (-1)^k e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_{k-1}} \cdot \underbrace{e_{i_k} \cdot e_{i_k}}_{=-1} \cdot e_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot e_{i_p} \\ &= (-1)^{2k-1} e_{i_k} e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_p} \\ &= -v \cdot \varphi \\ &= (-1)^p \varphi \cdot v. \end{aligned}$$

- Si $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, $v \lrcorner \varphi = 0$ et

$$\begin{aligned} v \wedge \varphi &= e_j \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \\ &\simeq e_j \cdot e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_p} \\ &= v \cdot \varphi \\ &= (-1)^p \varphi \cdot v. \end{aligned}$$

□

Le théorème de propriété universelle admet le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 *Si u est une isométrie vectorielle entre les 2 espaces (V, q) et (W, g) , elle s'étend uniquement en un morphisme de \mathbb{K} -algèbres*

$$\bar{u} : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(W, g).$$

En particulier, l'isométrie $-Id$ de (V, q) se prolonge en l'application

$$\begin{aligned}\alpha : Cl(V, q) &\longrightarrow Cl(V, q) \\ e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} &\longmapsto (-1)^k e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}.\end{aligned}$$

Posant $Cl^i(V, q) = \{\varphi \in Cl(V, q) \mid \alpha(\varphi) = (-1)^i \varphi\}$ pour $i, j \in \{1, 2\}$, on obtient une décomposition en somme directe

$$Cl(V, q) = Cl^0(V, q) \oplus Cl^1(V, q),$$

avec de plus $Cl^i(V, q) \cdot Cl^j(V, q) \subset Cl^{i+j}(V, q)$ pour $i, j \in \mathbb{Z}_2$. La décomposition en somme directe d'espaces propres est claire puisque α est une involution, donc diagonalisable (si \mathbb{K} est de caractéristique différente de 2). Ceci muni l'algèbre de Clifford $Cl(V, q)$ d'une structure d'**algèbre graduée**.

Le sous-espace $Cl^0(V, q)$ est appelé la **partie paire**, et $Cl^1(V, q)$ est appelé **partie impaire**. Notons que $Cl^0(V, q)$ est une sous-algèbre de $Cl(V, q)$, mais $Cl^1(V, q)$ est seulement un sous-espace vectoriel. Ces deux espaces vectoriels sont isomorphes : étant choisi $\varphi \in Cl^1(V, q)$ inversible (par exemple $\varphi = e_1$ où e_1 est un vecteur unitaire de V), l'application

$$\begin{aligned}f_\varphi : Cl^0(V, q) &\longrightarrow Cl^1(V, q) \\ v &\longmapsto \varphi \cdot v\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 6 *On note $\|\cdot\|$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Alors $Cl_n = Cl(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $Cl_{n+1}^0 = Cl(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|)^0$ sont isomorphes (isomorphisme d'algèbres).*

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , et $\{e_1, \dots, e_n\}$ celle de \mathbb{R}^n (après plongement). On définit une application linéaire f par

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow Cl_{n+1}^0 \\ e_i &\longmapsto e_i \cdot e_{n+1}.\end{aligned}$$

On a $f(e_i)^2 = -1$ pour tout i donc par la propriété universelle, f se prolonge en un morphisme d'algèbres \tilde{f} de Cl_n dans Cl_{n+1}^0 . L'application \tilde{f} est injective ; en effet, si on regarde les images des vecteurs de base de Cl_n par \tilde{f} , on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{f}(e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_{2k}}) = \pm e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_{2k}} \\ \tilde{f}(e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_{2k+1}}) = \pm e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_{2k+1}} \cdot e_{n+1}. \end{cases}$$

(avec $i_j \in \{1, \dots, n\} \forall j$). Ces images constituent clairement une famille libre, d'où l'injectivité. Comme les deux espaces ont la même dimension 2^n , \tilde{f} est un isomorphisme. □

Définissons enfin la transposition ; sur l'espace $T(V)$ des tenseurs sur V , la transposition $()^t$ est l'application linéaire sur $T(V)$ définie à partir de $(x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_k})^t = x_{i_k} \otimes \dots \otimes x_{i_1}$. L'image par $()^t$ de $I(V, q)$ est incluse dans $I(V, q)$ donc on peut définir la transposition sur le quotient par $(x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k})^t = x_{i_k} \cdot \dots \cdot x_{i_1}$.

3.2 Groupe pinoriel et groupe spinoriel

On note $Cl^\times(V, q)$ le groupe multiplicatif des éléments inversible de l'algèbre $Cl(V, q)$:

$$Cl^\times(V, q) = \{\varphi \in Cl(V, q) \mid \exists \varphi^{-1} \in Cl(V, q) \text{ tel que } \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = 1\}.$$

Ce groupe contient en particulier les éléments v de V tels que $q(v) \neq 0$: si $v^2 = -q(v) = \lambda \neq 0$, $v^{-1} = \frac{-v}{\lambda}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , c'est un groupe de Lie de dimension 2^n . De plus, un résultat concernant les algèbres de Lie nous dit que si A est une algèbre associative unitaire sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors le groupe des éléments inversibles A^\times de A est muni d'une structure de groupe de Lie et que son algèbre de Lie \mathfrak{a}^\times est isomorphe à A . Dans le cas des algèbres de Clifford réelles, on a donc que \mathfrak{cl}^\times est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est Cl_n munie du crochet de Lie $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \varphi_2 \cdot \varphi_1$.

Définition 3.2.1 La **représentation adjointe** est le morphisme

$$\begin{aligned} Ad : Cl^\times(V, q) &\longrightarrow GL(Cl(V, q)) \\ x &\longmapsto Ad_x : \varphi \longmapsto x \cdot \varphi \cdot x^{-1}. \end{aligned}$$

Remarquons l'analogie avec la définition 2.1.2.

Etudions sa différentielle en 1 : si γ est un chemin dans $Cl^\times(V, q)$ tel que $\gamma(0) = 1$ et $\gamma'(0) = \varphi_0 \in \mathfrak{cl}^\times(V, q)$,

$$\begin{aligned} Ad'(1) : \mathfrak{cl}^\times(V, q) &\longrightarrow \mathfrak{gl} = \mathcal{L}(Cl(V, q)) \\ y &\longmapsto (Ad')(1)(\varphi_0) : \varphi \in Cl(V, q) \longmapsto [\varphi_0, \varphi]. \end{aligned}$$

En effet, $Ad'(1)(\varphi_0)(\varphi)$ est le vecteur tangent en 0 à $Ad(\gamma(t))(\varphi) = \gamma(t) \cdot \varphi \cdot \gamma(t)^{-1}$, soit

$$\begin{aligned} Ad'(1)(\varphi_0)(\varphi) &\stackrel{3}{=} \gamma'(0) \cdot \varphi \cdot \gamma(0) + \gamma(0) \cdot \varphi \cdot (\gamma^{-1})'(0) \\ &= \varphi_0 \cdot \varphi - \varphi \cdot \varphi_0 = [\varphi_0, \varphi]. \end{aligned}$$

3. Le produit d'un élément de \mathfrak{g} par un élément de G est défini comme dans la définition 2.1.2, donc ici de même pour le produit d'un élément de $\mathfrak{cl}^\times(V, q)$ par un élément de $Cl(V, q)$.

Jusqu'à la fin de cette section (et même du rapport), la caractéristique du corps de base sera toujours supposée être différente de 2.

On va s'intéresser maintenant aux éléments de $Cl^\times(V, q)$ dont l'image par Ad envoie V sur V . L'ensemble de ces éléments est appelé **groupe de Clifford**.

Proposition 7 *Si $v \in V \subset Cl(V, q)$ est tel que $q(v) \neq 0$, alors l'image de V par Ad est exactement V ; plus précisément, dans ce cas, $-Ad_v|_V$ est la réflexion orthogonale par rapport à v^\perp :*

$$-Ad_v(w) = w - 2\frac{q(w, v)}{q(v)}v \quad (w \in V).$$

Démonstration. $v^{-1} = \frac{v}{q(v)}$ donc pour tout $w \in V$,

$$\begin{aligned} -q(v)Ad_v(w) &= -q(v)v \cdot w \cdot v^{-1} = v \cdot w \cdot v \\ &= -v^2w - 2q(v, w)v = q(v)w - 2q(v, w)v. \end{aligned}$$

□

Cette propriété montre donc que $\{v \in V \mid q(v) \neq 0\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments φ de $Cl(V, q)$ tels que $Ad_\varphi(V) = V$. Ceci nous invite à considérer le sous-groupe $P(V, q)$ de $Cl^\times(V, q)$ engendré par les éléments v de V vérifiant $q(v) \neq 0$.

Proposition 8 *On a un morphisme surjectif*

$$Ad|_{P(V, q)} : P(V, q) \longrightarrow O(V, q),$$

$$\text{où } O(V, q) = \{F \in GL(V) \mid \forall v \in V, q(F(v)) = q(v)\}.$$

Démonstration. Conséquence du théorème de Cartan-Dieudonné.

□

Définition 3.2.2 Le **groupe pinoriel** $\text{Pin}(V, q)$ est le sous-groupe de $P(V, q)$ engendré par les éléments v de V vérifiant $q(v) = \pm 1$:

$$\text{Pin}(V, q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_r \mid r \geq 1 \text{ et } \forall i, v_i \in P(V, q) \text{ et } q(v_i) = \pm 1\}.$$

Le **groupe spinoriel** $\text{Spin}(V, q)$ est défini par

$$\begin{aligned} \text{Spin}(V, q) &= \text{Pin}(V, q) \cap Cl^0(V, q) \\ &= \{v_1 \cdot \dots \cdot v_r \mid v_i \in P(V, q) \text{ et } r \text{ pair}\}. \end{aligned}$$

Proposition 9 *Les morphismes suivants sont surjectifs :*

$$\begin{aligned} Ad|_{\text{Pin}(V,q)} : \text{Pin}(V,q) &\longrightarrow \text{O}(V,q), \\ Ad|_{\text{Spin}(V,q)} : \text{Spin}(V,q) &\longrightarrow \text{SO}(V,q), \end{aligned}$$

où $\text{SO}(V,q) = \{F \in \text{O}(V,q) \mid \det F = 1\}$.

Démonstration. Conséquence des théorèmes de réduction des endomorphismes orthogonaux sur un espace quadratique. □

3.3 Cas de l'espace euclidien \mathbb{R}^n

On s'intéresse dans cette section au cas de \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique (\cdot, \cdot) .

3.3.1 Propriétés de Spin_n

On note Pin_n et Spin_n les groupes pinoriel et spinoriel associés ; alors

$$\text{Pin}_n = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_r \mid r \geq 1 \text{ et } \forall i, v_i \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|v_i\| = 1\}.$$

$$\text{Spin}_n = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} \mid \forall i, v_i \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|v_i\| = 1\}.$$

Remarque 3.3.1 : L'inverse d'un élément $a = v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} \in \text{Spin}_n$ est a^t .

Proposition 10 1. Si $n \geq 2$, Spin_n est connexe par arcs.

2. Si $n \geq 3$, Spin_n est simplement connexe.

Démonstration. 1. Soient $a = v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} \neq b = w_1 \cdot \dots \cdot w_{2l} \in \text{Spin}_n$, avec $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq l$, et $(x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2l}) \in (S^{n-1})^{2(k+l)}$.

Comme $n \geq 2$, la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n est connexe par arcs : soient donc

$$c_i : [0, 1] \longrightarrow \text{Spin}_n, \quad i = 1, \dots, 2l$$

des chemins dans S^{n-1} joignant respectivement v_i à w_i dans S^{n-1} .

Pour $j \in \{2l + 1, \dots, 2k\}$, on utilise de nouveau la connexité par arcs de S^{n-1} pour considérer les chemins

$$d_j : [0, 1] \longrightarrow \text{Spin}_n, \quad j = 2l + 1, \dots, 2k$$

tels que d_{2p+1} joigne v_{2p+1} à v_1 et d_{2p} joigne v_{2p} à $-v_1$ dans S^{n-1} .

On obtient ainsi par produit un chemin joignant $v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k}$ à $w_1 \cdot \dots \cdot w_{2l} \cdot v_1 \cdot (-v_1) \cdot \dots \cdot v_1 \cdot (-v_1)$ dans Spin_n , c'est à dire joignant a à b dans Spin_n .

2. On admet la simple connexité de Spin_n pour $n \geq 3$.

□

Remarque 3.3.2 : Le premier résultat de la proposition subsiste pour une forme quadratique de signature différente de $(1, 1)$ sur un espace quadratique quelconque (de dimension supérieure ou égale à 2).

Le résultat fondamental de cette partie est le suivant, qui permet d'identifier Spin_n au revêtement universel de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ (cf annexe B pour des rappels sur la notion de revêtement).

Théorème 5 *On a la suite exacte suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_n \xrightarrow{Ad} \text{SO}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow 1.$$

Ainsi, si $n \geq 2$, Ad est un revêtement (topologique) non trivial à deux feuillets de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $n \geq 3$, c'est son revêtement universel.

Remarque 3.3.3 : Ce résultat se généralise au cas d'une forme quadratique non dégénérée de signature (r, s) sur un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2, excepté pour le cas de la signature $(1, 1)$ sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration du théorème 5. Tout élément $a \in \text{Spin}_n \subset Cl_n^0$ peut s'écrire $a = a_0 + e_1 \cdot a_1$, où $a_0 \in Cl_n^0$ et $a_1 \in Cl_n^1$ sont des combinaisons linéaires de produits d'éléments e_j ne contenant pas e_1 . Puisque les produits apparaissant dans l'écriture de a_0 sont des produits de nombres pairs de e_j , $e_1 \cdot a_0 = a_0 \cdot e_1$.

De même, puisque les produits apparaissant dans l'écriture de a_1 sont des produits de nombres impairs de e_j , $e_1 \cdot a_1 \cdot e_1 = -e_1 \cdot e_1 \cdot a_1 = a_1$.

Supposons de plus que $a \in \ker Ad$: en particulier, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $a \cdot v \cdot a^{-1} = v$. Le choix $v = e_1$ amène à

$$(a_0 + e_1 \cdot a_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot (a_0 + e_1).$$

Soit encore

$$a_0 \cdot e_1 + a_1 = e_1 \cdot a_0 - a_1.$$

Donc $a_1 = 0$, soit $a = a_0$, c'est à dire que a ne contient pas e_1 . En procédant de même pour tous les e_i , on obtient $\ker Ad|_{\text{Spin}_n} \subset \{-1, 1\}$, et l'inclusion réciproque est triviale; donc $\ker Ad|_{\text{Spin}_n} = \{-1, 1\}$, et on a bien une suite exacte.

Le morphisme $Ad|_{\text{Spin}_n}$ fournit clairement un revêtement à 2 feuillets de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ d'après ce qui précède. Pour montrer qu'il est non trivial, il faut montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre Spin_n et le revêtement trivial $\text{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$. Le revêtement trivial est donné par

$$\begin{aligned} p : \text{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R}) \\ (F, k) &\longmapsto F. \end{aligned}$$

Les antécédents de Id sont donc $(Id, 1)$ et $(Id, -1)$, qui sont dans deux composantes connexes distinctes de $\text{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$.

Les antécédents de Id par le revêtement $Ad : \text{Spin}_n \longrightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R})$ sont -1 et 1 ; si on prouve qu'ils sont dans la même composante connexe, il ne pourra pas exister d'homéomorphisme de revêtements entre Spin_n et $\text{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$.

On choisit e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires orthogonaux de \mathbb{R}^n (possible car $n \geq 2$) et on considère la courbe :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \frac{\pi}{2}] &\longrightarrow \text{Spin}_n \\ t &\longmapsto (e_1 \sin t + e_2 \cos t) \cdot (e_1 \sin t - e_2 \cos t). \end{aligned}$$

C'est bien un chemin continu dans Spin_n joignant $\gamma(0) = 1$ à $\gamma(\frac{\pi}{2}) = -1$.

D'après la proposition 10, Spin_n est simplement connexe si $n \geq 3$, donc d'après le théorème 18 de l'annexe (avec $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs), Spin_n est le revêtement universel (topologique) de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$. □

Corollaire 3.3.1 Spin_n est compact.

En effet, c'est une conséquence directe de la cinquième assertion de la proposition 48 de l'annexe B, puisque $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact et que les fibres ont deux éléments.

Remarque 3.3.4 : Le groupe Cl_n^\times des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford Cl_n est un groupe de Lie (déjà vu); Spin_n en est un sous-groupe, fermé car compact, donc c'est un groupe de Lie (cf théorème 15 de l'annexe A). En particulier, on peut regarder si, mieux qu'un revêtement topologique, Spin_n est un revêtement de groupe de Lie de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$. C'est effectivement le cas, la démonstration est absolument analogue à la précédente en utilisant le théorème 20 de l'annexe. D'après la proposition 50 de l'annexe, les algèbres de Lie \mathfrak{spin}_n et \mathfrak{so}_n sont isomorphes, donc Spin_n est de même dimension que \mathfrak{so}_n , à savoir $\frac{n(n-1)}{2}$.

3.3.2 Spin_n en petite dimension

- $\text{Spin}_1 = \{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$. En particulier, le revêtement de $\text{SO}_1(\mathbb{R}) = \{1\}$ par Spin_1 a encore deux feuillets, mais est évidemment trivial.

- $\text{Spin}_2 \simeq S^1$ (isomorphisme de groupes de Lie) ; d'après l'exemple 3.1.1 et la proposition 6, $Cl_2^0 \simeq Cl_1 \simeq \mathbb{C}$ (isomorphismes d'algèbres). Spin_2 est donc un sous-groupe de Lie connexe de \mathbb{C} .

Pour poursuivre, nous allons présenter le groupe Spin_n à partir d'une condition de normalisation. On définit $N : Cl_2^0 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \cdot \mathbf{1} \simeq \mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{aligned} N(\varphi = \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 e_1 \cdot e_2) &= \varphi \cdot \varphi^t \\ &= (\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 e_1 \cdot e_2) \cdot (\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 e_2 \cdot e_1) \\ &= (\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 e_1 \cdot e_2) \cdot (\lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 e_1 \cdot e_2). \end{aligned}$$

où λ_1 et λ_2 sont des réels.

L'application N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \cdot \mathbf{1}$ car pour tout $\varphi \in Cl_2^0$, $N(\varphi) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \mathbf{1}$. En particulier, N est un morphisme de groupes puisque pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in Cl_2^0$,

$$\begin{aligned} N(\varphi_1 \cdot \varphi_2) &= \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot (\varphi_1 \varphi_2)^t = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_2^t \cdot \varphi_1^t = \varphi_1 \cdot \underbrace{N(\varphi_2)}_{=\mu \mathbf{1}} \cdot \varphi_1^t \\ &= \varphi_1 \cdot \varphi_1^t N(\varphi_2) = N(\varphi_1) N(\varphi_2). \end{aligned}$$

Montrons que

$$\text{Spin}_2 = \ker N = \{\varphi \in Cl_2^0 \mid N(\varphi) = 1\}.$$

Si $\varphi \in \text{Spin}_2$, $N(\varphi) = \varphi \cdot \varphi^t = \varphi \cdot \varphi^{-1} = 1$ d'après la remarque 3.3.1. Réciproquement, si $z = \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 e_1 \cdot e_2 \in \ker N$, on a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ et

$$\varphi = \underbrace{e_1}_{\in S^1} \cdot \underbrace{(-\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)}_{\in S^1} \in \text{Spin}_2.$$

Donc $\text{Spin}_2 = \ker N$, soit

$$\text{Spin}_2 \simeq S^1.$$

Remarquons que S^1 n'est pas simplement connexe (son revêtement universel est \mathbb{R} , voir l'exemple B.1.1 de l'annexe B), le théorème 5 est donc en défaut pour $n = 2$.

- $\text{Spin}_3 \simeq S^3$ (isomorphisme de groupes de Lie), où S^3 est la sphère unité de l'algèbre \mathbb{H} des quaternions ; toujours d'après l'exemple 3.1.1, on sait que $Cl_3^0 \simeq Cl_2 \simeq \mathbb{H}$. Rappelons un résultat sur les quaternions ; notant \mathbb{H}_0 le sous-espace de \mathbb{H} des quaternions purs, c'est à dire $\mathbb{H}_0 = \{xi + yj + zk, x, y, z \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^3$, on a un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Delta : S^3 &\longrightarrow \text{SO}(\mathbb{H}_0) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto s_u : x \in \mathbb{H}_0 \longmapsto u \cdot x \cdot u^{-1}. \end{aligned}$$

Ce morphisme est surjectif, de noyau $\mathbb{R} \cap S^3 = \{-1, 1\}$. Il constitue un revêtement à 2 feuillets de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, qui est universel puisque la sphère unité de \mathbb{H} est simplement connexe. Donc $\mathrm{Spin}_3 \simeq S^3$ par unicité.

- $\mathrm{Spin}_4 \simeq S^3 \times S^3$ (isomorphisme de groupes de Lie) : le raisonnement est absolument identique au cas $n = 3$ en considérant le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Delta : S^3 \times S^3 &\longrightarrow GL(\mathbb{H}) \\ (x, y) &\longmapsto s_{(x,y)} : u \in \mathbb{H} \longmapsto x \cdot u \cdot y^{-1}. \end{aligned}$$

Ce morphisme a pour noyau $\{-1, 1\}$ et pour image $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$: il constitue donc un revêtement de $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, et par simple connexité et unicité, $\mathrm{Spin}_4 \simeq S^3 \times S^3$.

Pour terminer, nous allons déterminer l'algèbre de Lie du groupe spinoriel Spin_n .

Théorème 6 *L'application $(\mathrm{Ad}|_{\mathrm{Spin}_n})'(1) : \mathfrak{spin}_n \longrightarrow \mathfrak{so}_n(\simeq \Omega^2(\mathbb{R}^n))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels vérifiant*

$$\left(\mathrm{Ad}|_{\mathrm{Spin}_n}\right)'(1)(e_i \cdot e_j)(v) = 2(e_i \wedge e_j)(v) = 2(e_i, v)e_j - 2(e_j, v)e_i$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ désignant toujours la base canonique de \mathbb{R}^n .

Démonstration. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On considère le chemin dans Spin_n

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathrm{Spin}_n \\ t &\longmapsto \left(e_i \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e_j \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cdot \left(-e_i \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e_j \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Alors $\gamma(0) = 1$ et $\left.\frac{d}{dt}\gamma(t)\right|_{t=0} = e_i \cdot e_j$. Comme $\mathfrak{spin}_n \simeq T_1\mathrm{Spin}_n$, les éléments $e_i \cdot e_j$ appartiennent tous à \mathfrak{spin}_n pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

On a, pour $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Ad}|_{\mathrm{Spin}_n}\right)'(1)(e_i \cdot e_j)(v) &= [e_i \cdot e_j, v] && \text{(cf définition 3.2.1)} \\ &= e_i \cdot e_j \cdot v - v \cdot e_i \cdot e_j \\ &= e_i \cdot e_j \cdot v - (-e_i \cdot v - 2(e_i, v))e_j \\ &= e_i \cdot e_j \cdot v + e_i \cdot (-e_j \cdot v - 2(v, e_j)) + 2(e_i, v)e_j \\ &= 2(e_i, v)e_j - 2(e_j, v)e_i. \end{aligned}$$

Voyant \mathfrak{so}_n comme $\Omega^2(\mathbb{R}^n)$, pour $v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$(e_i \wedge e_j)(v, w) = e_i(v)e_j(w) - e_j(v)e_i(w) = (v, e_i)(w, e_j) - (v, e_j)(w, e_i).$$

D'où

$$(e_i \wedge e_j)(v) = (e_i, v)e_j - (e_j, v)e_i.$$

Donc $(Ad|_{\text{Spin}_n})'(1)$ est surjective puisqu'elle est linéaire et que $\Omega^2(\mathbb{R}^n)$ est engendré par les formes $e_i \wedge e_j$. Les dimensions de \mathfrak{spin}_n et $\Omega^2(\mathbb{R}^n)$ étant égales à $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ toutes les deux, $(Ad|_{\text{Spin}_n})'(1)$ est un isomorphisme.

□

4 Classification et représentations des algèbres de Clifford réelles et complexes

Cette section n'étant pas au coeur du sujet, mais les résultats étant importants, on ne donnera pas toutes les démonstrations. On pourra consulter également [LM], [Hij] et [Rau].

4.1 Classification

4.1.1 Algèbres de Clifford réelles

Dans cette partie, nous considérons les algèbres de Clifford Cl_n sur \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Théorème 7 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Cl_{n+8} \stackrel{\text{algèbre}}{\simeq} Cl_n \otimes Cl_8$.*

Remarque 4.1.1 : D'après ce théorème, la connaissance des 8 premières algèbres de Clifford permet de toutes les connaître. D'après l'exemple 3.1.1,

$$Cl_1 \simeq \mathbb{C}, \quad Cl_2 \simeq \mathbb{H}, \quad Cl_3 \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

On obtient également que

$$\begin{aligned} Cl_4 &\simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{H}) & Cl_5 &\simeq \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \\ Cl_6 &\simeq \mathcal{M}_8(\mathbb{R}) & Cl_7 &\simeq \mathcal{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_8(\mathbb{R}) \\ Cl_8 &\simeq \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées de taille $k \times k$ dont les coefficients sont dans le corps \mathbb{K} .

Démonstration du théorème 7. La démonstration étant longue et demandant des résultats intermédiaires, je renvoie à [Rau].

□

4.1.2 Algèbres de Clifford complexes

Dans cette partie, nous considérons les algèbres de Clifford Cl_n sur \mathbb{C}^n muni de la forme quadratique

$$g_{\mathbb{C}} : x, y \in \mathbb{C}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Remarquons que c'est bien une forme bilinéaire symétrique, et non une forme hermitienne.

Proposition 11 $\mathbb{C}l_n$ est isomorphe à l'algèbre complexifiée de l'algèbre de Clifford réelle Cl_n :

$$\mathbb{C}l_n \stackrel{\text{algèbre}}{\cong} Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Remarque 4.1.2 : Par définition, si A est une algèbre réelle, l'algèbre complexifiée de A est l'algèbre $A \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, dont le produit interne est donné par

$$(a_1 \otimes z)(a_2 \otimes w) = (a_1 a_2) \otimes (zw) \quad (a_1, a_2 \in A, z, w \in \mathbb{C}).$$

Démonstration. Comme $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n \subset Cl_n$, on peut définir l'injection canonique $i : \mathbb{R}^n \rightarrow Cl_n$. Par définition de l'algèbre $\mathbb{C}l_n$, i vérifie les conditions du théorème 4 de propriété universelle, donc s'étend en un morphisme d'algèbres $\tilde{i} : Cl_n \rightarrow \mathbb{C}l_n$.

On définit alors le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} i^{\mathbb{C}} : Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}l_n \\ a \otimes z &\longmapsto \tilde{i}(a)z. \end{aligned}$$

Pour montrer qu'il est bijectif, on cherche son inverse. Soit donc l'application \mathbb{C} -linéaire

$$\begin{aligned} j : \mathbb{C}^n &\longrightarrow Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \Re(v) \otimes 1 + \Im(v) \otimes i. \end{aligned}$$

Alors pour tout $v \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} j(v) \cdot j(v) &= (\Re(v) \otimes 1 + \Im(v) \otimes i) \cdot (\Re(v) \otimes 1 + \Im(v) \otimes i) \\ &= \Re(v)^2 \otimes 1 - \Im(v)^2 \otimes 1 + (\Re(v)\Im(v) + \Im(v)\Re(v)) \otimes i \\ &= -g_{\mathbb{C}}(\Re(v)) \otimes 1 + g_{\mathbb{C}}(\Im(v)) \otimes 1 - 2g_{\mathbb{C}}(\Re(v), \Im(v)) \otimes i \\ &= -g_{\mathbb{C}}(v). \end{aligned}$$

D'après le théorème 4 de propriété universelle, j se prolonge en un morphisme d'algèbres $j^{\mathbb{C}}$ de Cl_n dans $Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Et alors si e_l est un vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n ,

$$\begin{aligned} i^{\mathbb{C}} \circ j^{\mathbb{C}}(e_l) &= i^{\mathbb{C}}(\Re(e_l) \otimes 1 + \Im(e_l) \otimes i) \\ &= \tilde{i}(\Re(e_l)) \cdot 1 + \tilde{i}(\Im(e_l)) \cdot i \\ &= \Re(e_l) \cdot 1 + \Im(e_l) \cdot i \\ &= e_l. \end{aligned}$$

Puisque $i^{\mathbb{C}}$ et $j^{\mathbb{C}}$ sont des morphismes d'algèbres et que les $e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$ constituent une base de Cl_n (où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{C}^n), ceci prouve que $j^{\mathbb{C}}$ est l'inverse à droite de $i^{\mathbb{C}}$. On procède de même pour montrer que c'est l'inverse à gauche. □

Théorème 8 (i) On a un morphisme canonique d'algèbres entre $\mathcal{C}l_{n+2}$ et $\mathcal{C}l_n \otimes \mathcal{C}l_2$.

(ii) On a des isomorphismes d'algèbres entre les algèbres suivantes :

$$\mathcal{C}l_{2m} \stackrel{\text{algèbre}}{\simeq} \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}l_{2m+1} \stackrel{\text{algèbre}}{\simeq} \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}).$$

Démonstration. (i) On considère $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ la base canonique de \mathbb{C}^{n+2} et on identifie \mathbb{C}^n (respectivement \mathbb{C}^2) à l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \dots, e_n\}$ (respectivement par $\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$). On pose alors

$$f : \mathbb{C}^{n+2} \longrightarrow \mathcal{C}l_n \otimes \mathcal{C}l_2$$

$$e_k \longmapsto \begin{cases} e_k \otimes ie_{n+1} \cdot e_{n+2} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 1 \otimes e_k & \text{si } k \in \{n+1, n+2\}. \end{cases}$$

On vérifie facilement par un calcul sur les vecteurs de base que f vérifie les hypothèses de la propriété universelle du théorème 4, et se prolonge donc en une application \tilde{f} définie sur $\mathcal{C}l_{n+2}$.

Il est clair que \tilde{f} est surjective ; en effet, tous les éléments de la base

$$\mathcal{B} = \{e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \otimes i^j \mu, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i_k \leq n, j \in \{0, 1\}, \mu \in \{e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+1} \cdot e_{n+2}\}\}$$

de $\mathcal{C}l_n \otimes \mathcal{C}l_2$ sont atteints ; par exemple,

$$\begin{aligned} e_k \otimes ie_{n+2} &= (-1 \otimes e_{n+1}) \cdot (e_k \otimes ie_{n+1} \cdot e_{n+2}) \\ &= \tilde{f}(-e_{n+1}) \cdot \tilde{f}(e_k) \\ &= \tilde{f}(-e_{n+1} \cdot e_k). \end{aligned}$$

Les deux algèbres étant de même dimension 2^{n+2} sur \mathbb{C} , on en déduit que \tilde{f} est un isomorphisme d'algèbres.

(ii) Il suffit de montrer les isomorphismes pour $\mathcal{C}l_1$ et $\mathcal{C}l_2$; en effet, si $n = 2m$ par exemple, le point (i) implique que

$$\mathcal{C}l_{2m} \simeq \underbrace{\mathcal{C}l_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}l_2}_{m \text{ fois}} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}).$$

Et de même pour le cas $m = 2n + 1$.

- Pour $n = 1$, $\mathcal{C}l_1 \simeq \mathcal{C}l_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$.
- Pour $n = 2$, $\mathcal{C}l_2 \simeq \mathcal{C}l_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Il faut donc montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Considérons l'application \mathbb{R} -bilinéaire

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \\ (q, z) &\longmapsto \phi_{q,z} : x \in \mathbb{H} \longmapsto \bar{q} \cdot x \cdot z. \end{aligned}$$

On utilise à présent la propriété universelle du produit tensoriel suivante :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} . Si $\chi : E \times F \rightarrow G$ est une application bilinéaire, alors χ se factorise de manière unique en une application linéaire $\tilde{\chi}$ de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ dans G .

En particulier, pour tout représentant $a \otimes b$ de $(a, b) \in E \times F$ dans $E \otimes_{\mathbb{K}} F$, on a $\tilde{\chi}(a \otimes b) = \chi(a, b)$.

On obtient ainsi une application \mathbb{R} -linéaire $\tilde{\phi} : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$. On a de plus que pour tous $(q \otimes z), (q' \otimes z') \in \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}((q \otimes z) \cdot (q' \otimes z'))(x) &= \tilde{\phi}((qq') \otimes (zz'))(x) \\ &= \overline{(qq')} x z z' \\ &= \overline{q q'} x z z' && \text{(commutativité de } \mathbb{C} \text{)} \\ &= \tilde{\phi}(q \otimes z) \circ \tilde{\phi}(q' \otimes z')(x). \end{aligned}$$

On a donc même un morphisme de \mathbb{R} -algèbres. Montrons qu'il est injectif.

Soit $q \otimes z \in \ker(\tilde{\phi}) : \tilde{\phi}(q \otimes z)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{H}$. Choissant $x = q$, on a $\overline{q} q z = N(q) z = 0$, d'où $z = 0$ ou $N(q) = 0$, c'est à dire $q = 0$. Dans tous les cas, $q \otimes z = 0$ et $\tilde{\phi}$ est injectif.

Comme $\dim(\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})) = \dim(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 8$, c'est un isomorphisme, et on a donc $\text{Cl}_2 \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$. Enfin, \mathbb{H} est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2 puisque tout quaternion $a+bi+cj+dk$ s'écrit également $(a+ib)+(c+id)j$, donc $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. \square

4.2 Représentations

4.2.1 Notion de représentation d'une algèbre

Définition 4.2.1 Soit $k \subset \mathbb{K}$ deux corps. Une \mathbb{K} -**représentation** d'une algèbre A sur un k -espace vectoriel V est la donnée d'un k -morphisme d'algèbres $\rho : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$, où W est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. L'espace W est appelé un A -**module** sur \mathbb{K} .

Définition 4.2.2 Une \mathbb{K} -représentation est dite **réductible** si W peut s'écrire comme la somme directe non triviale de sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 et telle que pour tout $a \in A$, on ait $\rho(a)(W_j) \subset W_j$ pour $j = 1, 2$. On écrit alors $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, où $\rho_j(a) = \rho(a)|_{W_j}$.

Une \mathbb{K} -représentation est dite irréductible si elle n'est pas réductible.

Proposition 12 Toute \mathbb{K} -représentation ρ d'une algèbre A se décompose en somme directe de représentations irréductibles $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n$.

Définition 4.2.3 Deux \mathbb{K} -représentations $\rho_j : A \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W_j)$, $j = 1, 2$, sont équivalentes s'il existe un isomorphisme \mathbb{K} -linéaire $F : W_1 \longrightarrow W_2$ tel que $\forall a \in A, F \circ \rho_1(a) \circ F^{-1} = \rho_2(a)$.

Théorème 9 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . La représentation naturelle ρ de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur \mathbb{K}^n est, à équivalence près, la seule représentation irréductible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De ce fait, la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a exactement deux classes de représentations irréductibles données par $\rho_1(\varphi_1, \varphi_2) = \rho(\varphi_1)$ et $\rho_2(\varphi_1, \varphi_2) = \rho(\varphi_2)$.

Démonstration. Conséquence du fait qu'une algèbre simple a une unique représentation irréductible, à équivalence près. On rappelle qu'une algèbre (unitaire associative) sur un corps commutatif est dite simple si son anneau sous-jacent est simple, c'est-à-dire s'il n'admet pas d'idéal bilatère autre que $\{0\}$ et lui-même, et si de plus il n'est pas réduit à $\{0\}$. Voir [Lang] pour la preuve. □

4.2.2 Algèbres de Clifford réelles

Dans cette partie, nous considérons de nouveau des algèbres de Clifford Cl_n sur \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Par distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe, le théorème 7 et la remarque 4.1.1 nous permettent de montrer par récurrence que les algèbres de Clifford de la forme Cl_{4k+3} sont isomorphes à une somme directe du type $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. En effet, on a un isomorphisme d'algèbre entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$, qui découle directement de la propriété universelle du produit tensoriel appliquée à l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) \\ (M, a + bi + cj + dk) &\longmapsto aM + bMi + cMj + dMk. \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ est lui-même isomorphe à $\mathcal{M}_{4n}(\mathbb{R})$ puisque \mathbb{H} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4. Ainsi, on a par exemple

$$\begin{aligned} Cl_{11} &\simeq Cl_8 \otimes Cl_3 \simeq \mathcal{M}_{16}(\mathbb{R}) \otimes (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \\ &\simeq (\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H}) \oplus (\mathcal{M}_{16}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H}) \\ &\simeq \mathcal{M}_{64}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_{64}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Les autres algèbres de Clifford Cl_n avec $n \not\equiv 3[4]$ sont de même isomorphes à un $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. D'après le théorème 9, il y a donc :

- 2 classes de représentations irréductibles pour les algèbres de Clifford Cl_n avec $n \equiv 3[4]$;
- 1 classe de représentations irréductibles pour les algèbres de Clifford Cl_n avec $n \not\equiv 3[4]$.

On introduit maintenant un élément de volume qui va permettre d'étudier les équivalences des représentations précédemment introduites.

Définition 4.2.4 Etant donnée une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , on définit l'élément de volume ω par

$$\omega = e_1 \cdot \dots \cdot e_n.$$

Remarque 4.2.1 : Cette définition est indépendante du choix de la base orthonormée directe $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$; si $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une autre base orthonormée directe de \mathbb{R}^n , et que h est l'endomorphisme de changement de base de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , alors $e'_1 \cdot \dots \cdot e'_n = \det(h)e_1 \cdot \dots \cdot e_n = e_1 \cdot \dots \cdot e_n$. Par contre, ω change de signe si on change l'orientation de la base; l'appellation "élément de volume" est donc cohérente.

Proposition 13 (1) On a $\omega^2 = 1$ si $n \equiv 0$ ou 3 [4] et $\omega^2 = -1$ si $n \equiv 1$ ou 2 [4];

(2) On a $v \cdot \omega = (-1)^{n-1} \omega \cdot v$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. En particulier, si n est impair, ω est central.

Lemme 2 On suppose que $n \equiv 0$ ou 3 [4] et on pose

$$\pi^+ = \frac{1}{2}(1 + \omega) \quad \text{et} \quad \pi^- = \frac{1}{2}(1 - \omega).$$

Alors on a :

(1) $\pi^+ + \pi^- = 1$;

(2) $(\pi^+)^2 = \pi^+$ et $(\pi^-)^2 = \pi^-$;

(3) $\pi^+ \pi^- = \pi^- \pi^+ = 0$.

Proposition 14 On suppose que $n \equiv 3$ [4]. Alors si on pose

$$Cl_n^+ = \pi^+ \cdot Cl_n \quad \text{et} \quad Cl_n^- = \pi^- \cdot Cl_n,$$

on a une décomposition de Cl_n en somme directe de sous-algèbres isomorphes :

$$Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^-.$$

De plus, $\alpha(Cl_n^\pm) = Cl_n^\mp$ (α est toujours l'application définie au corollaire 3.1.1).

Démonstration. On a $n \equiv 3$ [4] donc n est impair donc ω est central donc π^+ et π^- sont centraux. De plus, pour tout $\varphi \in Cl_n$, $\varphi = 1\varphi = (\pi^+ + \pi^-) \cdot \varphi = \pi^+ \cdot \varphi + \pi^- \cdot \varphi$, et la somme est directe d'après la deuxième assertion du lemme précédent.

Enfin, toujours car n est impair, $\alpha(\omega) = -\omega$ donc $\alpha(\pi^\pm) = \pi^\mp$ donc $\alpha(Cl_n^\pm) = Cl_n^\mp$. Comme α est un isomorphisme, les deux sous-algèbres sont isomorphes. □

Proposition 15 *On suppose que $n \equiv 3 [4]$. Soit $\rho : Cl_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$ une représentation irréductible. Alors $\rho(\omega) = Id$ ou $\rho(\omega) = -Id$.*

De plus, les deux possibilités se réalisent et donnent des représentations non-équivalentes.

Démonstration. $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = \rho(1) = Id$, donc $\rho(\omega)$ est une involution, donc diagonalisable (la caractéristique de \mathbb{R} étant nulle) : $W = W^+ \oplus W^-$, où W^+ et W^- sont les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 de $\rho(\omega)$. Montrons qu'ils sont Cl_n -invariants. Soit $\varphi \in Cl_n$ et $v \in W^+$ (et de même pour W^-). Alors $\rho(\omega)(v) = v$ et comme ω est central,

$$\begin{aligned} \rho(\varphi)(v) &= \rho(\varphi)(\rho(\omega)(v)) \\ &= \rho(\varphi \cdot \omega)(v) \\ &= \rho(\omega \cdot \varphi)(v) \\ &= \rho(\omega)(\rho(\varphi)(v)). \end{aligned}$$

W^+ est donc un sous- Cl_n -module de W , et comme W est irréductible, $W = W^+$ ou $W = W^-$, ce qui prouve la première assertion.

Il est alors clair que les représentations ρ_+ et ρ_- définies à valeurs dans $\text{End}_{\mathbb{R}}(W)$ et $\text{End}_{\mathbb{R}}(W')$ respectivement à partir de $\rho_{\pm}(\omega) = \pm Id$ ne sont pas équivalentes; en effet si $F : W \longrightarrow W'$ est un isomorphisme, $F \circ \rho_+(\omega) \circ F^{-1} = Id \neq \rho_-(\omega)$.

On admet que les 2 possibilités se réalisent.

□

Proposition 16 *On suppose que $n \equiv 0 [4]$. Soit V un Cl_n -module (cf définition 4.2.1). Alors V se décompose en somme directe de sous-espaces vectoriels $V = V^+ \oplus V^-$, où les espaces V^+ et V^- sont les espaces propres pour l'application linéaire de multiplication par ω , c'est à dire*

$$V^+ = \pi^+ \cdot V \quad \text{et} \quad V^- = \pi^- \cdot V.$$

De plus, pour tout $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la multiplication par e donne un isomorphisme de V^+ sur V^- .

Remarque 4.2.2 : 1. Cette proposition ne dit **pas** que les sous-espaces V^+ et V^- sont Cl_n -invariants, ce qui conduirait manifestement à une absurdité en itérant le processus. Il dit juste que tout Cl_n -module peut s'écrire comme somme directe de sous-espaces propres pour la multiplication par ω .

2. On appelle "multiplication par ω " l'application $\rho(\omega)$, où $\rho : Cl_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ est la représentation considérée, et de même la multiplication par e . Le terme $\pi^{\pm} \cdot V$ désigne également $\rho(\pi^{\pm})(V)$.

Démonstration. La décomposition en somme directe d'espaces propres est claire puisque la multiplication par ω est une involution, donc diagonalisable. Puisque $\omega \cdot \pi^\pm = \pm \pi^\pm$, les espaces V^+ et V^- ont bien la forme annoncée dans l'énoncé de la proposition, et enfin le fait que la multiplication par e soit un isomorphisme provient du fait que $e \cdot \pi^+ = \pi^- \cdot e$, $e \cdot \pi^- = \pi^+ \cdot e$ et $e \cdot e = -\|e\| \mathbf{1}$.

□

Proposition 17 *On suppose que $n \equiv 0$ [4]. Soit $\rho : Cl_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$ une représentation irréductible, avec $W = W^+ \oplus W^-$ d'après la proposition précédente. Alors W^+ et W^- sont Cl_n^0 -invariants. Via l'isomorphisme entre Cl_n^0 et Cl_{n-1} (cf proposition 6), ces espaces correspondent aux deux classes de représentations irréductibles de Cl_{n-1} .*

Démonstration. Soit $\varphi \in Cl_n^0$, et $v \in W^+$ (et de même pour W^-) : $\rho(\varphi)(v) = v$. D'après la proposition 13, ω (à défaut d'être central puisque n est pair) commute avec tous les éléments de Cl_n^0 , et la preuve donnée pour la proposition 15 reste valable pour des éléments de Cl_n^0 .

L'isomorphisme $\tilde{f} : Cl_{n-1} \longrightarrow Cl_n^0$ donné dans la démonstration de la proposition 6 envoie l'élément de volume $\omega' = e_1 \cdot \dots \cdot e_{n-1}$ de Cl_{n-1} (après plongement de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R}^n) sur $\omega \in Cl_n^0$ (vérification calculatoire simple). On en déduit l'existence d'une représentation

$$\rho' = \rho|_{Cl_n^0} \circ \tilde{f} : Cl_{n-1} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W).$$

La décomposition $W = W^+ \oplus W^-$ étant Cl_n^0 -invariante, et comme $\rho'(\omega') = \rho(\omega) = Id$ sur W^+ et $-Id$ sur W^- , on déduit de la proposition 15 (puisque alors $n-1 \equiv 3$ [4]) que $\rho'|_{W^+}$ et $\rho'|_{W^-}$ sont bien des représentants des deux classes de représentations irréductibles de Cl_{n-1} .

□

Définition 4.2.5 La **représentation spinorielle réelle** de Spin_n est le morphisme (de groupes)

$$\Delta_n : \text{Spin}_n \longrightarrow \text{GL}(S)$$

donné par le choix d'une représentation réelle irréductible de $Cl_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S)$ restreinte à $\text{Spin}_n \subset Cl_n^0$.

Remarque 4.2.3 : La notion de représentation de groupe est en tout point similaire à celle de représentation d'algèbre. Voir [Pey].

Théorème 10 Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, la définition de Δ_n est indépendante du choix de la représentation irréductible de Cl_n (ça l'est aussi évidemment pour $n \not\equiv 3 \pmod{4}$ puisqu'alors Cl_n n'a qu'une classe de représentations irréductibles). De plus,

- Pour $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, la représentation (de groupe) Δ_n est irréductible, sauf si $n \equiv 1$ ou $2 \pmod{8}$ où elle est somme directe de deux représentations irréductibles équivalentes.
- Pour $n = 4m$, on a une décomposition

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^+ \oplus \Delta_{4m}^-,$$

où Δ_{4m}^+ et Δ_{4m}^- sont deux représentations (de groupe) irréductibles et non-équivalentes de $Spin_{4m}$.

Démonstration. Elle est essentiellement un résumé des résultats de cette section ; voir [LM], page 36.

□

4.2.3 Algèbres de Clifford complexes

Nous revenons aux algèbres de Clifford Cl_n sur \mathbb{C}^n muni de la forme quadratique

$$g_{\mathbb{C}} : x, y \in \mathbb{C}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Les résultats de cette section étant très similaires à ceux de la partie précédente, je les donne sans démonstration.

Comme dans la partie précédente, on obtient que les algèbres de Clifford Cl_n ont :

- 2 classes de représentations irréductibles si n est impair ;
- 1 classe de représentations irréductibles si n est pair.

Définition 4.2.6 Etant donnée une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , on définit l'élément de volume $\omega_{\mathbb{C}}$ par

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdot \dots \cdot e_n,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

Remarque 4.2.4 : Cette définition est évidemment encore indépendante du choix de la base orthonormée directe.

Proposition 18 (1) On a $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$ pour tout n ;

(2) On a $v \cdot \omega_{\mathbb{C}} = (-1)^{n-1} \omega_{\mathbb{C}} \cdot v$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} 1 \subset Cl_n$.

Lemme 3 *On pose*

$$\pi^+ = \frac{1}{2}(1 + \omega_{\mathbb{C}}) \quad \text{et} \quad \pi^- = \frac{1}{2}(1 - \omega_{\mathbb{C}}).$$

Alors on a :

- (1) $\pi^+ + \pi^- = 1$;
- (2) $(\pi^+)^2 = \pi^+$ et $(\pi^-)^2 = \pi^-$;
- (3) $\pi^+\pi^- = \pi^-\pi^+ = 0$.

Proposition 19 *On suppose que n est impair. Soit $\rho : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ une représentation irréductible. Alors $\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = \text{Id}$ ou $\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = -\text{Id}$.*

De plus, les deux possibilités se réalisent et donnent des représentations non-équivalentes.

Proposition 20 *On suppose que n est pair. Soit V un $\mathbb{C}l_n$ -module. Alors V se décompose en somme directe de sous-espaces vectoriels $V = V^+ \oplus V^-$, où les espaces V^+ et V^- sont les espaces propres pour l'application linéaire de multiplication par $\omega_{\mathbb{C}}$, c'est à dire*

$$V^+ = \pi^+ \cdot V \quad \text{et} \quad V^- = \pi^- \cdot V.$$

De plus, pour tout $e \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, la multiplication par e donne un isomorphisme de V^+ sur V^- .

Lemme 4 $\mathbb{C}l_n$ et $\mathbb{C}l_{n+1}^0 = Cl(\mathbb{C}^{n+1}, g_{\mathbb{C}})^0$ sont isomorphes (isomorphisme d'algèbres).

Démonstration. La démonstration est exactement la même que celle de la proposition 6. □

Proposition 21 *On suppose que n est pair. Soit $\rho : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ une représentation irréductible, avec $W = W^+ \oplus W^-$ d'après la proposition précédente. Alors W^+ et W^- sont $\mathbb{C}l_n^0$ -invariants. Via l'isomorphisme entre $\mathbb{C}l_n^0$ et $\mathbb{C}l_{n-1}$, ces espaces correspondent aux deux représentations irréductibles de $\mathbb{C}l_{n-1}$.*

Définition 4.2.7 La **représentation spinorielle complexe** de Spin_n est le morphisme (de groupes)

$$\Delta_n^{\mathbb{C}} : \text{Spin}_n \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(S)$$

donné par le choix d'une représentation complexe irréductible de $\mathbb{C}l_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$ restreinte à $\text{Spin}_n \simeq \text{Spin}_n \otimes_{\mathbb{R}} 1 \subset \mathbb{C}l_n^0$.

Théorème 11 *Si n est impair, cette définition de $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ est indépendante du choix de la représentation irréductible de $\mathbb{C}l_n$, et elle donne de plus une représentation (de groupes) irréductible.*

Si $n = 2m$ est pair, la définition de $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ est toujours indépendante du choix de la représentation irréductible de $\mathbb{C}l_n$ puisqu'alors $\mathbb{C}l_n$ n'a qu'une classe de représentations irréductibles. De plus, on a une décomposition

$$\Delta_{2m}^{\mathbb{C}} = \Delta_{2m}^{\mathbb{C}+} \oplus \Delta_{2m}^{\mathbb{C}-},$$

où $\Delta_{2m}^{\mathbb{C}+}$ et $\Delta_{2m}^{\mathbb{C}-}$ sont deux représentations complexes irréductibles et non-équivalentes de Spin_{2m} dont les Spin_n -modules sont donnés respectivement par $S^+ = \pi^+ \cdot S$ et $S^- = \pi^- \cdot S$ et sont isomorphes via $\sigma \in S^{\pm} \mapsto v \cdot \sigma \in S^{\mp}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Supposons n pair. On va chercher plus précisément un $\mathbb{C}l_n$ -module $S = \Sigma_n$ tel qu'on obtienne une représentation complexe irréductible comme dans la définition 4.2.7. Mieux; nous allons exhiber un isomorphisme ρ de $\mathbb{C}l_n$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$; ρ sera alors nécessairement irréductible (seule la surjectivité est importante) car si $\Sigma_n = V \oplus W$ avec $\rho(\varphi)(V) \subset V$ pour tout $\varphi \in \mathbb{C}l_n$, cela veut dire que $f(V) \subset V$ pour tout $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$, donc que $V = \{0\}$ ou $V = \Sigma_n$ (immédiat en raisonnant sur une base de V).

Soit donc $n = 2m$ pair et soit $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ la base canonique de \mathbb{R}^{2m} . On considère la famille $(z_j, \bar{z}_j)_{j=1, \dots, m}$ définie par

$$z_j = \frac{1}{2}(e_j \otimes 1 - e_{j+m} \otimes i) \quad \text{et} \quad \bar{z}_j = \frac{1}{2}(e_j \otimes 1 + e_{j+m} \otimes i).$$

On voit immédiatement que c'est une base de $\mathbb{R}^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^{2m}$. De plus, pour tous $j, k \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(z_j, z_k) &= g_{\mathbb{C}}(\bar{z}_j, \bar{z}_k) = 0 \\ g_{\mathbb{C}}(\bar{z}_j, z_k) &= g_{\mathbb{C}}(z_j, \bar{z}_k) = \frac{1}{2}\delta_{jk}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $x, y \in \mathbb{C}^{2m} \subset \mathbb{C}l_{2m}$, on a $x \cdot_{\mathbb{C}} y + y \cdot_{\mathbb{C}} x = -2g_{\mathbb{C}}(x, y)$, on a

$$(1) \quad \begin{cases} z_j \cdot_{\mathbb{C}} z_k + z_k \cdot_{\mathbb{C}} z_j = 0 \\ \bar{z}_j \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_k + \bar{z}_k \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_j = 0 \\ z_j \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_k + z_k \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_j = -\delta_{jk} \mathbf{1}. \end{cases}$$

On pose $\bar{\omega} = \bar{z}_1 \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_m$. On remarque que $\bar{z}_k \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} = 0$ pour $1 \leq k \leq m$ d'après ce qui précède. Pour tout r -uplet $L_r = (l_1, \dots, l_r)$ d'éléments croissants $1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq m$, on note $z_{L_r} = z_{l_1} \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} z_{l_r}$.

On définit alors

$$\Sigma_{2m} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{z_{L_r} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \mid 1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq m, 0 \leq r \leq m\}.$$

On peut vérifier que la famille $\{z_{L_r} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}, 1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq m, 0 \leq r \leq m\}$ est libre ; c'est un peu pénible à écrire mais c'est direct. L'espace Σ_{2m} est donc de dimension le cardinal de cette famille, soit

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m.$$

On définit maintenant

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{C}l_{2m} &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}) \\ \varphi &\longmapsto \rho(\varphi) : \varsigma \longmapsto \varphi \cdot_{\mathbb{C}} \varsigma. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que c'est un morphisme d'algèbres **à condition** qu'il soit bien à valeurs dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$. Pour le voir, on remarque que ρ peut également être vue comme l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{C}l_{2m} &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}) \\ \varphi = z_{J_p} \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z_{K_q}} &\longmapsto \rho(\varphi) : \varsigma = z_{L_r} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \longmapsto z_{J_p} \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z_{K_q}} \cdot_{\mathbb{C}} z_{L_r} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}, \end{aligned}$$

où $J_p = (j_1, \dots, j_p)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m$ et $K_q = (k_1, \dots, k_q)$, $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m$.

Ceci définit bien uniquement ρ car :

1. l'ensemble des éléments de la forme $z_{J_p} \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z_{K_q}}$ engendre l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathbb{C}l_{2m} = Cl(\mathbb{R}^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, g_{\mathbb{C}})$. En effet, on voit $\mathbb{C}l_{2m}$ comme $Cl_{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et alors (par exemple) on a

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \dots \cdot e_m \otimes_{\mathbb{R}} i &= (e_1 \cdot \dots \cdot e_m) \otimes_{\mathbb{R}} (i.1\dots 1) \\ &= (e_1 \otimes_{\mathbb{R}} i) \cdot_{\mathbb{C}} (e_2 \otimes_{\mathbb{R}} 1) \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} (e_m \otimes_{\mathbb{R}} 1) \\ &= (\bar{z}_1 - z_1) \cdot_{\mathbb{C}} (z_2 + \bar{z}_2) \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} (z_m + \bar{z}_m). \end{aligned}$$

On met ensuite ce résultat sous la forme voulue en utilisant les relations **(1)**, et on procède de même pour tous les vecteurs de la base

$$\{e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_p} \otimes_{\mathbb{R}} i^j, 1 \leq p \leq 2m, \{i_1, \dots, i_p\} \in \{1, \dots, 2m\}, j = 0, 1\}.$$

2. l'ensemble des éléments de la forme $z_{L_r} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}$ engendre Σ_{2m} par définition.
3. $z_{J_p} \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z_{K_q}} \cdot_{\mathbb{C}} z_{L_r} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}$ est un élément de Σ_{2m} (vérification simple mais fastidieuse : on déplace le terme $\overline{z_{K_q}}$ à gauche du $\bar{\omega}$ grâce aux relations **(1)** et il reste une combinaison linéaire d'éléments de la forme $z_{M_s} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}$).

Montrons que ρ est surjectif.

Soit $\varphi = z_j \cdot_{\mathbb{C}} z_1$, $1 \leq j \leq m$. Alors

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi)(z_1 \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}) &= z_j \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_1 \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \\
&= z_j \cdot_{\mathbb{C}} (-z_1 \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_1 - 1) \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \\
&= -z_j \cdot_{\mathbb{C}} z_1 \cdot_{\mathbb{C}} \underbrace{\bar{z}_1 \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}}_{=0} - z_j \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \\
&= -z_j \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}.
\end{aligned}$$

Et pour $2 \leq l \leq m$,

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi)(z_l \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega}) &= z_j \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_l \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \\
&= z_j \cdot_{\mathbb{C}} (-z_l \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_1) \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En itérant ce processus, on montre que l'image par $\rho(\varphi)$ d'un vecteur de base de Σ_{2m} ne contenant pas z_1 dans son écriture est nulle, alors que l'image par $\rho(\varphi)$ d'un vecteur contenant z_1 dans son écriture est le même vecteur où z_1 est remplacé par z_j .

Ainsi, si on note $\omega = z_1 \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} z_m$ et que l'on pose

$$\varphi = z_{j_p} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \cdot_{\mathbb{C}} \omega \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_{k_q} = z_{j_1} \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} z_{j_p} \cdot_{\mathbb{C}} \bar{\omega} \cdot_{\mathbb{C}} \omega \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_{k_1} \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} \bar{z}_{k_q},$$

on a $\rho(\varphi)(z_{k_1} \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} z_{k_q}) = \pm z_{j_1} \cdot_{\mathbb{C}} \dots \cdot_{\mathbb{C}} z_{j_p}$, et l'image par $\rho(\varphi)$ de tout autre vecteur de base de Σ_{2m} est nulle. En combinant les $\rho(\varphi)$, on peut donc reconstruire tout endomorphisme de Σ_{2m} donc ρ est surjectif.

Comme $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_{2m}) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})) = 2^{2m}$, ρ est un isomorphisme d'algèbres.

Le cas n impair en découle immédiatement. En effet, étant donné $\rho : \mathbb{C}l_{2m} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$ précédemment défini, on utilise le théorème 8 pour définir un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}l_{2m+1} \xrightarrow{\text{thm 8}} \mathbb{C}l_{2m} \oplus \mathbb{C}l_{2m} \xrightarrow{(\rho, \rho)} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}).$$

On note $\hat{\rho} : \mathbb{C}l_{2m+1} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$ la projection de cet isomorphisme sur la première composante. Une projection étant surjective, ce morphisme d'algèbre est surjectif, donc $\hat{\rho}$ est une représentation irréductible.

Définition 4.2.8 On note toujours $\rho : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ la représentation irréductible obtenue précédemment. La **multiplication de Clifford** est définie comme suit :

– Si $n = 2m$ est pair, c'est l'application

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} : \mathbb{C}l_{2m} \otimes \Sigma_{2m} &\longrightarrow \Sigma_{2m} \\
\varphi \otimes \tau &\longmapsto \varphi \cdot \tau = \rho(\varphi)(\tau) ;
\end{aligned}$$

– Si $n = 2m + 1$ est impair, c'est l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : \mathbb{C}l_{2m+1} \otimes \Sigma_{2m} &\longrightarrow \Sigma_{2m} \\ \varphi \otimes \tau &\longmapsto \varphi \cdot \tau = \widehat{\rho}(\varphi)(\tau). \end{aligned}$$

En pratique on notera toujours ρ la représentation de $\mathbb{C}l_n$ dans la multiplication de Clifford.

Proposition 22 *Il existe un produit scalaire hermitien (\cdot, \cdot) sur Σ_n tel que pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 et pour tous $\varsigma, \tau \in \Sigma_n$, on ait*

$$(\varsigma, \tau) = (w \cdot \varsigma, w \cdot \tau).$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n et Γ_n le sous-groupe de $\mathbb{C}l_n^\times$ qu'elle engendre. C'est un groupe défini par générateurs et relations de la manière suivante :

$$\Gamma_n = \left\langle e_1, \dots, e_n \mid (-1)^2 = 1, \quad e_i^2 = -1, \quad e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i, \quad i \neq j \right\rangle.$$

Il est fini de cardinal $2 \times \sum \binom{n}{k} = 2^{n+1}$. On se donne un produit hermitien quelconque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur Σ_n (existe toujours sur un \mathbb{C} -espace vectoriel). On définit alors le produit scalaire hermitien en question par

$$(\varsigma, \tau) = \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot \varsigma, \nu \cdot \tau \rangle.$$

Alors pour $e_i \in \Gamma_n$,

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \varsigma, e_i \cdot \tau) &= \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot e_i \cdot \varsigma, \nu \cdot e_i \cdot \tau \rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot \varsigma, \nu \cdot \tau \rangle && \text{(changement de variable)} \\ &= (\varsigma, \tau). \end{aligned}$$

A présent pour un $w \in \mathbb{R}^n$ unitaire, on écrit $w = \sum w_i e_i$, avec $\sum w_i^2 = 1$, et on obtient

$$\begin{aligned} (w \cdot \varsigma, w \cdot \tau) &= \sum_i w_i^2 (e_i \cdot \varsigma, e_i \cdot \tau) + \sum_{i \neq j} w_i w_j (e_i \cdot \varsigma, e_j \cdot \tau) \\ &= \sum_i w_i^2 (\varsigma, \tau) + \sum_{i < j} w_i w_j ((e_i \cdot \varsigma, e_j \cdot \tau) + (e_j \cdot \varsigma, e_i \cdot \tau)) \\ &= (\varsigma, \tau). \end{aligned}$$

En effet, pour $i < j$,

$$\begin{aligned}
 (e_i \cdot \varsigma, e_j \cdot \tau) &= (e_i \cdot e_i \cdot \varsigma, e_i \cdot e_j \cdot \tau) \\
 &= -(\varsigma, e_i \cdot e_j \cdot \tau) \\
 &= -(e_j \cdot \varsigma, e_j \cdot e_i \cdot e_j \cdot \tau) \\
 &= (e_j \cdot \varsigma, e_i \cdot e_j \cdot e_j \cdot \tau) \\
 &= -(e_j \cdot \varsigma, e_i \cdot \tau).
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2.1 *Pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, pour tous $\varsigma, \tau \in \Sigma_n$, on a*

$$(w \cdot \varsigma, \tau) = -(\varsigma, w \cdot \tau).$$

Démonstration. C'est clair pour $w = 0$, et si $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a d'après la proposition précédente

$$(w \cdot \varsigma, \tau) = \left(w \cdot \frac{w}{\|w\|} \cdot \varsigma, \frac{w}{\|w\|} \cdot \tau \right),$$

d'où

$$(w \cdot \varsigma, \tau) = \frac{1}{\|w\|^2} (\underbrace{w \cdot w}_{=-\|w\|^2} \cdot \varsigma, w \cdot \tau) = -(\varsigma, w \cdot \tau).$$

□

5 Structures spinorielles et l'opérateur de Dirac

Dans toute cette section, on notera $\rho : \mathbb{C}l_n \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$, où Σ_n est l'espace vectoriel défini à la fin de la section précédente. On notera également ρ sa restriction à Spin_n (c'est à dire la représentation spinorielle complexe).

On note $N = \dim \Sigma_n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Le fil conducteur de cette section est issu de [Hij] et [Rau].

5.1 Fibré des spineurs et connexions

Définition 5.1.1 On considère une variété riemannienne (M, g) de dimension n . Une **structure spinorielle** sur M est un couple $(\text{Spin}M, \eta)$ où $\text{Spin}M$ est un fibré Spin_n -principal sur M et η un revêtement à deux feuillet du fibré $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ -principal SOM de M (voir la fin de la section 1.4) tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}M \times \text{Spin}_n & \longrightarrow & \text{Spin}M \\
 \downarrow \eta \times \text{Ad} & & \downarrow \eta \\
 \text{SOM} \times \text{SO}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{SOM}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \pi \\
 \searrow \pi \\
 M,
 \end{array}$$

les flèches horizontales représentant les actions des groupes Spin_n et $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ sur les fibrés principaux $\text{Spin}M$ et SOM . En particulier, on a $\eta(\kappa a) = \eta(\kappa) \text{Ad}(a)$ pour tous $\kappa \in \text{Spin}M$ et $a \in \text{Spin}_n$.

Une variété riemannienne ne peut a priori pas toujours être munie d'une structure spinorielle.

On appelle **variété spinorielle** une variété munie d'une structure spinorielle $(\text{Spin}M, \eta)$.

On pourra consulter [LM] pour voir des caractérisations des variétés spinorielles.

Définition 5.1.2 Le **fibré des spineurs complexe** associé à la structure spinorielle $\text{Spin}M$ sur M est le fibré vectoriel complexe

$$\Sigma M = \text{Spin}M \times_{\rho} \Sigma_n.$$

Une section $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ est donnée localement par une classe d'équivalence

$$\psi|_U = [\tilde{\sigma}, s],$$

avec $\tilde{\sigma} \in \Gamma_U(M, \text{Spin}M)$ ($U \subset M$) et $s : U \rightarrow \Sigma_n$ est une fonction.

Remarque 5.1.1 : D'après la remarque 1.4.3, le fibré tangent est diffeomorphe au fibré vectoriel $SOM \times_{\varrho} \mathbb{R}^n$, où ϱ est le morphisme qui à une matrice de $SO_n(\mathbb{R})$ associe son endomorphisme canoniquement associé. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \text{Spin}M \times_{Ad} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \text{SOM} \times_{\varrho} \mathbb{R}^n \\ [\kappa, v] &\longmapsto \overline{(\eta(\kappa), v)} \end{aligned}$$

où la barre horizontale désigne la classe d'un élément (\mathcal{B}, v) de $SOM \times \mathbb{R}^n$ dans $SOM \times_{\varrho} \mathbb{R}^n$.

Cette application est bien définie ; elle est injective (vérification immédiate) et surjective (car η l'est puisque c'est un revêtement de SOM). Elle fournit donc un diffeomorphisme (même un isomorphisme) entre $\text{Spin}M \times_{Ad} \mathbb{R}^n$ et $SOM \times_{\varrho} \mathbb{R}^n$, d'où :

$$TM \simeq \text{Spin}M \times_{Ad} \mathbb{R}^n.$$

Définition 5.1.3 La multiplication de Clifford sur ΣM est l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : \Gamma(M, TM) \otimes \Gamma(M, \Sigma M) &\longrightarrow \Gamma(M, \Sigma M) \\ X \otimes \psi = [\tilde{\sigma}, \chi] \otimes [\tilde{\sigma}, s] &\longmapsto [\tilde{\sigma}, \chi \cdot s] = X \cdot \psi, \end{aligned}$$

où $\chi \cdot s$ est la multiplication de Clifford définie à la définition 4.2.8.

On a utilisé $TM \simeq \text{Spin}M \times_{Ad} \mathbb{R}^n$, diffeomorphisme mentionné à la remarque précédente. Un champ de vecteurs $X \in \Gamma(M, TM)$ s'écrit donc $X = [\tilde{\sigma}, \chi]$, avec $\tilde{\sigma} \in \Gamma(M, \text{Spin}M)$ et $\chi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.

Remarque 5.1.2 : On peut généraliser la multiplication de Clifford aux k -formes, de la même façon qu'à la définition 4.2.8, puisqu'on a vu dans la troisième section que l'algèbre de Clifford d'un espace vectoriel V était isomorphe (en tant qu'espace vectoriel) à l'ensemble Ω^*V des formes différentielles sur V . Ainsi, toute k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$, avec $1 \leq k \leq n$, agit sur le fibré des spineurs par la formule :

$$\omega \cdot \psi = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \cdot \psi,$$

où $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ et $\{e_1, \dots, e_n\} \in \text{SOM}$ est quelconque.

On donne ainsi par exemple du sens à l'expression $(e_1 \cdot e_2) \cdot \psi = e_1 \cdot (e_2 \cdot \psi)$, et caetera.

Définition 5.1.4 On définit un produit hermitien sur ΣM de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \Gamma(M, \Sigma M) \times \Gamma(M, \Sigma M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}) \\ (\psi_1, \psi_2) &\longmapsto (\psi_1, \psi_2) : m \in M \longmapsto (\psi_1(m), \psi_2(m))_{\Sigma_n}, \end{aligned}$$

où $(\cdot, \cdot)_{\Sigma_n}$ est le produit hermitien sur Σ_n défini à la proposition 22.

Plus précisément ; pour $m \in M$ et $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M, \Sigma M)$, $\psi_1(m)$ et $\psi_2(m)$ appartiennent à $\pi_{\Sigma M}^{-1}(m)$ par définition d'une section. Comme $\pi_{\Sigma M}([\kappa, \varsigma]) = \pi_{\text{Spin}M}(\kappa)$ (voir la section 1.4), il existe des éléments $\kappa \in \text{Spin}M$ et $\varsigma, \tau \in \Sigma_n$ tels que $\psi_1(m) = [\kappa, \varsigma]$ et $\psi_2(m) = [\kappa, \tau]$. Alors $(\psi_1(m), \psi_2(m))_{\Sigma_n} = (\varsigma, \tau)_{\Sigma_n}$.

Remarque 5.1.3 : 1. Pour tous $X \in \Gamma(M, TM)$ et $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M, \Sigma M)$, on a

$$(X \cdot \psi_1, \psi_2) + (\psi_1, X \cdot \psi_2) = 0.$$

C'est en effet une conséquence directe du corollaire 4.2.1.

2. Si $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ et $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M, \Sigma M)$, on a

$$\begin{aligned} (X \cdot \psi_1, Y \cdot \psi_2) &= -(Y \cdot X \cdot \psi_1, \psi_2) \\ &= ((X \cdot Y + 2g(X, Y)) \cdot \psi_1, \psi_2) \\ &= -(Y \cdot \psi_1, X \cdot \psi_2) + 2g(X, Y)(\psi_1, \psi_2). \end{aligned}$$

Donc si $\psi_1 = \psi_2$, $\Re(X \cdot \psi_1, Y \cdot \psi_1) = g(X, Y) \|\psi_1\|^2$, \Re désignant la partie réelle.

Rappelons que comme (M, g) est une variété riemannienne, il existe une connexion "privilegiée" sur M , appelée connexion de Levi-Civita. Elle est l'unique dérivée covariante sur le fibré tangent TM symétrique et compatible avec la métrique g , c'est à dire que pour tous X, Y et Z des champs de vecteurs sur M , la dérivée covariante associée ∇ vérifie

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X && \text{(symétrie);} \\ X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) && \text{(compatibilité).} \end{aligned}$$

Comme la connexion de Levi-Civita est une dérivée covariante (attention au vocabulaire) sur TM , il lui est associé une unique 1-forme de connexion sur le fibré SOM , notée ω .

Si $U \subset M$ est un ouvert simplement connexe, toute section locale $\sigma \in \Gamma_U(M, SOM)$ se relève en une section $\tilde{\sigma} \in \Gamma_U(M, \text{Spin}M)$:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spin}M \\ & \nearrow \tilde{\sigma} & \downarrow \eta \\ U \subset M & \xrightarrow{\sigma} & SOM. \end{array}$$

En effet, on applique le corollaire B.3.1 de l'annexe B à $p = \eta$, $E = \text{Spin}M$, $B = SOM$ et $X = U$ puisque U est supposé simplement connexe.

On définit la 1-forme de connexion $\tilde{\omega}$ sur $\text{Spin}M$ comme étant l'unique 1-forme de connexion telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T\text{Spin}M & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \mathfrak{spin}_n \\
 & \nearrow \tilde{\sigma}' & \downarrow \eta' & & \downarrow \left(Ad|_{\text{Spin}_n}\right)'(1) \\
 TU \subset TM & \xrightarrow{\sigma'} & TSOM & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{so}_n,
 \end{array}$$

L'existence et l'unicité de $\tilde{\omega}$ est claire puisque $\left(Ad|_{\text{Spin}_n}\right)'(1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels d'après le théorème 6. On a donc, pour tout $m \in U$:

$$\tilde{\omega}_m = \left(Ad|_{\text{Spin}_n}\right)'(1)^{-1} \circ \omega_m \circ \eta'.$$

On va expliciter la dérivée covariante ∇^S sur ΣM associée à $\tilde{\omega}$. Cette dérivée covariante est appelée **connexion de Levi-Civita spinorielle**, ou juste connexion spinorielle. On fera attention à ne pas confondre la connexion de Levi-Civita riemannienne ∇ et la connexion de Levi-Civita spinorielle ∇^S .

Etant donnée une section $\sigma = (e_1, \dots, e_n) \in \Gamma_U(M, \text{SOM})$ ($U \subset M$), on note

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sigma^* \boldsymbol{\omega} = - \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j \\
 \Omega &= \sigma^* \boldsymbol{\Omega} = - \sum_{i < j} \Omega_{ij} e_i \wedge e_j,
 \end{aligned}$$

où la famille des $e_i \wedge e_j : (y, z) \mapsto e_i(y)e_j(z) - e_i(z)e_j(y)$ constitue une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{so}_n \simeq \Omega^2(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{\Omega}$ est la 2-forme de courbure associée à $\boldsymbol{\omega}$ et où $\sigma^* \boldsymbol{\omega}$ est la tirée en arrière de $\boldsymbol{\omega}$, c'est à dire

$$(\sigma^* \boldsymbol{\omega})_m(X) = \boldsymbol{\omega}_{\sigma(m)}(\sigma'(m)(X)) \quad (m \in M, X \in \Gamma_U(M, TM)).$$

Comme ω est une 1-forme définie sur M à valeurs dans $\mathfrak{so}_n \simeq \Omega^2(\mathbb{R}^n)$, on pourra utiliser la notation $\omega_m(X)e_i$ pour désigner le vecteur de $T_m M$ associé par le théorème de Riesz à la forme linéaire $y \in T_m M \mapsto \omega(e_i, y)$.

Alors pour $X \in \Gamma(M, TM)$,

$$\omega(X)(e_i, \cdot) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \omega_{ij}(X)(e_i \wedge e_j)(e_i, \cdot) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \omega_{ij}(X)e_j(\cdot).$$

Donc

$$\omega(X)e_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \omega_{ij}(X)e_j,$$

vecteur de $T_m M$ (lorsqu'évaluée au point $m \in M$), de composante nulle selon e_i , et donc

$$\begin{aligned} -g(\omega(X)e_i, e_j) &= \omega_{ij}(X) \\ &= -g(\nabla_X e_i, e_j) \end{aligned} \quad (4)$$

... puisque ω est la 1-forme de connexion obtenue à partir de ∇ (voir la section 2.3.3, et en particulier les remarques 2.3.2 et 2.3.3).

Proposition 23 (1) La 1-forme de connexion $\tilde{\omega}$ vérifie, pour $X \in \Gamma(M, TM)$:

$$\tilde{\omega}(\tilde{\sigma}'(X)) \stackrel{\text{def.}}{=} \tilde{\omega} = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X)e_i \cdot e_j.$$

(2) Soit $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ une base orthonormée de Σ_n . On définit une section locale $(\psi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ de $SU(\Sigma M)$ ⁴ par

$$\psi_\alpha = [\tilde{\sigma}, \tau_\alpha] \in \Gamma_U(M, \Sigma M).$$

Alors la dérivée spinorielle de ψ_α est déterminée pour tout α par

$$\nabla_X^S \psi_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha. \quad (5)$$

Démonstration. (1) Pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(X) &= (Ad'(1)^{-1} \circ \omega \circ \eta' \circ \tilde{\sigma}')(X) \\ &= (Ad'(1)^{-1} \circ \omega \circ \sigma')(X) && \text{(cf diagramme précédent)} \\ &= - \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) Ad'(1)^{-1}(e_i \wedge e_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j && \text{(théorème 6).} \end{aligned}$$

4. De la même façon qu'on a construit le fibré SOM, $SU(\Sigma M)$ est un fibré $SU_n(\mathbb{C})$ -principal sur ΣM , où $SU_n(\mathbb{C})$ est le groupe spécial unitaire.

(2) L'application ρ étant linéaire, elle est égale à sa différentielle en tout point, donc

$$\begin{aligned}
\nabla_X^S \psi_\alpha &= [\tilde{\sigma}, X(\tau_\alpha) + \rho'(e)(\tilde{\omega} \circ \tilde{\sigma}'(X))(\tau_\alpha)] \\
&= \left[\tilde{\sigma}, -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) \rho(e_i \cdot e_j)(\tau_\alpha) \right] && (\tau_\alpha \text{ est constant}) \\
&= \left[\tilde{\sigma}, -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j \cdot \tau_\alpha \right] && (\text{multiplication de Clifford}) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j \cdot [\tilde{\sigma}, \tau_\alpha] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i < j} g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha && (\text{d'après (4)}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.1.4 : Soit $\psi = [\tilde{\sigma}, s] \in \Gamma(M, \Sigma M)$ un champ de spineurs **quelconque**. La dérivée spinorielle de ψ est donnée pour tout champ de vecteurs X sur M par

$$\nabla_X^S \psi = X(\psi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi. \quad (6)$$

En effet, la preuve du second point de la proposition précédente s'adapte immédiatement (la différence étant que s n'est plus une fonction constante égale à τ_α).

Proposition 24 *Pour tous $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ et $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma_U(M, \Sigma M)$, on a*

$$X((\psi_1, \psi_2)) = (\nabla_X^S \psi_1, \psi_2) + (\psi_1, \nabla_X^S \psi_2) \quad (7)$$

$$\nabla_X^S (Y \cdot \psi_1) = (\nabla_X Y) \cdot \psi_1 + Y \cdot \nabla_X^S \psi_1, \quad (8)$$

le produit scalaire étant le produit scalaire hermitien sur ΣM introduit à la définition 5.1.4.

Démonstration. On garde (e_1, \dots, e_n) et ψ_α comme précédemment.

1. On a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^S \psi_\alpha, \psi_\beta) &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla_X e_i, e_j) (e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha, \psi_\beta) \\
&\stackrel{\text{def. 5.1.4}}{=} \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla_X e_i, e_j) (\psi_\alpha, e_j \cdot e_i \cdot \psi_\beta) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla_X e_j, e_i) (\psi_\alpha, e_i \cdot e_j \cdot \psi_\beta) \quad (\text{changement d'indices}) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla_X e_i, e_j) (\psi_\alpha, e_i \cdot e_j \cdot \psi_\beta) \quad (\text{compatibilité de } \nabla) \\
&= -(\psi_\alpha, \nabla_X^S \psi_\beta).
\end{aligned}$$

Puisque $(\psi_\alpha, \psi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ est constant, on en déduit (7) pour ψ_α et ψ_β . Le cas général s'ensuit puisque pour toute $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned}
X((f\psi_1, \psi_2)) &= (X(f)) \times (\psi_1, \psi_2) + f \times X((\psi_1, \psi_2)) \\
&= (X(f)) \times (\psi_1, \psi_2) + f \times (\nabla_X^S \psi_1, \psi_2) + f \times (\psi_1, \nabla_X^S \psi_2) \\
&= (\nabla_X^S (f\psi_1), \psi_2) + (f\psi_1, \nabla_X^S \psi_2).
\end{aligned}$$

2. Remarquons que

$$e_i \cdot e_j \cdot e_k = e_i \cdot (-e_k \cdot e_j - 2\delta_{jk}) = e_k \cdot e_i \cdot e_j + 2\delta_{ik}e_j - 2\delta_{jk}e_i.$$

Alors pour $Y = e_k$ et $\psi = \psi_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}
\nabla^S(e_k \cdot \psi_\alpha) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot (e_k \cdot \psi_\alpha) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_k \cdot e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_j g(\nabla e_k, e_j) e_j \cdot \psi_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_i g(\nabla e_i, e_k) e_i \cdot \psi_\alpha \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_k \cdot e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha + \sum_j g(\nabla e_k, e_j) e_j \cdot \psi_\alpha \\
&= e_k \cdot \nabla^S \psi_\alpha + (\nabla e_k) \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

On conclut comme précédemment le cas général de ce cas particulier.

□

La première assertion de cette proposition montre que ∇^S est compatible avec la métrique hermitienne introduite à la définition 5.1.4. On peut donc considérer sa courbure.

Proposition 25 Soit R le tenseur de courbure associé à la connexion de Levi-Civita riemannienne. Alors le tenseur de courbure R^S associé à la connexion de Levi-Civita spinorielle est donné par

$$R_{X,Y}^S \psi = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y} e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi$$

pour tous $\psi \in \Gamma_U(M, \Sigma M)$ et $X, Y \in \Gamma(M, TM)$. Le tenseur R^S est appelée **courbure spinorielle**.

Démonstration. D'après la proposition 4, pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$,

$$R_{X,Y}^S \psi = [\nabla_X^S, \nabla_Y^S] \psi - \nabla_{[X,Y]}^S \psi.$$

On déduit immédiatement le résultat à partir de (6). □

5.2 L'opérateur de Dirac

On considère dans toute cette partie une section $\sigma = (e_1, \dots, e_n) \in \Gamma_U(M, \text{SOM})$, où U est un ouvert de M .

Définition 5.2.1 L'opérateur de Dirac est l'application

$$\mathcal{D} = \mathbf{m} \circ \nabla^S : \Gamma(M, \Sigma M) \longrightarrow \Gamma(M, \Sigma M).$$

Localement,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \Gamma(M, \Sigma M) &\xrightarrow{\nabla^S} \Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M) \xrightarrow{\mathbf{m}} \Gamma(M, \Sigma M) \\ \psi &\longmapsto \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \nabla_{e_i}^S \psi \longmapsto \sum e_i \cdot \nabla_{e_i}^S \psi \end{aligned}$$

d'après les définitions 2.2.1 et 5.1.3.

Lemme 5 Pour $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ et $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$, on a

$$[\mathcal{D}, f] \psi = f' \cdot \psi.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}, f] \psi &= (\mathcal{D}f - f\mathcal{D})\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^S (f\psi) - f\mathcal{D}\psi \\ &= \sum_{i=1}^n f'(e_i) e_i \cdot \psi + f\mathcal{D}\psi - f\mathcal{D}\psi = f' \cdot \psi. \end{aligned}$$

□

Lemme 6 *On suppose que M est une variété compacte sans bord. Alors l'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel du premier ordre autoadjoint par rapport au produit hermitien $(\cdot, \cdot)_{L^2(M)} := \int_M (\cdot, \cdot) \nu_g$, où ν_g désigne l'élément de volume sur M .*

En particulier, les valeurs propres de \mathcal{D} sont réelles.

Démonstration. On se place dans un système de coordonnées normales au point $m \in M$, c'est à dire telles que $(\nabla_{e_i} e_j)(m) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Rappelons qu'il existe toujours un système de coordonnées normales, unique à isométrie linéaire près. On les obtient sur la boule ouverte $B(m, \text{inj}(m))$ ($\text{inj}(m)$ étant le rayon d'injectivité de M en m) en composant \exp_m^{-1} avec des coordonnées cartésiennes sur $T_m M$: cf [Pan].

On a alors, pour $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M, \Sigma M)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}\psi_1, \psi_2) &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^S \psi_1, \psi_2 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\nabla_{e_i}^S \psi_1, e_i \cdot \psi_2 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[e_i \cdot (\psi_1, e_i \cdot \psi_2) - (\psi_1, \nabla_{e_i}^S (e_i \cdot \psi_2)) \right] \end{aligned}$$

d'après la formule (7) de la proposition 24. Appliquée au point m , en utilisant cette fois la propriété (8) de la proposition 24, cette formule devient

$$(\mathcal{D}\psi_1, \psi_2) \Big|_m = \left(- \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\psi_1, e_i \cdot \psi_2) + (\psi_1, \mathcal{D}\psi_2) \right) \Big|_m.$$

Montrons que la somme dans le membre de droite est la divergence d'un certain champ de vecteurs complexe. Pour cela, on définit X_1 et X_2 des éléments de $\Gamma(M, TM)$ par la relation suivante :

$$g(X_1, Y) + ig(X_2, Y) = (\psi_1, Y \cdot \psi_2) \quad (Y \in \Gamma(M, TM)).$$

Les champs de vecteurs X_1 et X_2 sont ainsi uniquement définis par unicité des parties réelles et imaginaires, et car pour tout $m \in M$, l'application $v \in T_m M \mapsto (\psi_1(m), v \cdot \psi_2(m))$ est une forme linéaire sur un espace de dimension finie n , d'où l'existence d'un unique vecteur complexe $X_1 + iX_2$ vérifiant les hypothèses.

Alors

$$\begin{aligned} \text{div} X_1 + i \text{div} X_2 &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^n g(\nabla_{e_k} X_1, e_k) + i \sum_{l=1}^n g(\nabla_{e_l} X_2, e_l) \\ &= \sum_{k=1}^n [e_k \cdot g(X_1, e_k) - g(X_1, \nabla_{e_k} e_k)] + i \sum_{l=1}^n [e_l \cdot g(X_2, e_l) - g(X_2, \nabla_{e_l} e_l)]. \end{aligned}$$

Appliquée en $m \in M$, cette formule donne :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}X_1 + i \operatorname{div}X_2)(m) &= \left(\sum_{k=1}^n e_k \cdot [g(X_1, e_k) + ig(X_2, e_k)] \right) \Big|_m \\ &= \left(\sum_{k=1}^n e_k \cdot (\psi_1, e_k \cdot \psi_2) \right) \Big|_m. \end{aligned}$$

D'où

$$(\mathcal{D}\psi_1, \psi_2) = -\operatorname{div}X_1 - i \operatorname{div}X_2 + (\psi_1, \mathcal{D}\psi_2).$$

Cette expression étant indépendante du choix des coordonnées, on intègre sur M (compacte). Par le théorème de la divergence, avec $\partial M = \emptyset$, on a :

$$\int_M (\mathcal{D}\psi_1, \psi_2) \nu_g = \int_M (\psi_1, \mathcal{D}\psi_2) \nu_g.$$

□

Définition 5.2.2 D'après le théorème 11, on a $\Sigma_{2m} = \Sigma_{2m}^+ \oplus \Sigma_{2m}^-$, où Σ_{2m}^+ et Σ_{2m}^- sont stables par ρ . On définit donc l'ensemble des spineurs positifs (respectivement négatifs) Σ^+M (respectivement Σ^-M) par

$$\begin{aligned} \Sigma^+M &= \{[\kappa, \tau], \kappa \in \operatorname{Spin}M, \tau \in \Sigma_{2m}^+\}; \\ \Sigma^-M &= \{[\kappa, \tau], \kappa \in \operatorname{Spin}M, \tau \in \Sigma_{2m}^-\}. \end{aligned}$$

La stabilité par ρ de Σ_{2m}^+ et Σ_{2m}^- assure l'indépendance du choix des représentants.

Ainsi un champ de spineurs $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ se décompose en $\psi = \psi^+ + \psi^-$, avec

$$\begin{cases} \psi^+ \in \{\psi \in \Gamma(M, \Sigma M) \mid \omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi = \psi\} \\ \psi^- \in \{\psi \in \Gamma(M, \Sigma M) \mid \omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi = -\psi\}. \end{cases}$$

Remarque 5.2.1 : La somme directe est orthogonale. En effet, si $\psi^+ \in \Gamma(M, \Sigma^+M)$ et $\psi^- \in \Gamma(M, \Sigma^-M)$, alors

$$(\psi^+, \psi^-) = (\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^+, \psi^-) = -(\psi^+, \omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^-) = -(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^+, \psi^-),$$

puisque (pour $m = 1$ par exemple)

$$(\psi^+, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi^-) = -i(\psi^+, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^-) = -i(e_2 \cdot e_1 \cdot \psi^+, \psi^-) = (\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^+, \psi^-).$$

Remarque 5.2.2 : Si $Y \in \Gamma(M, TM)$ et $\psi \in \Gamma(M, \Sigma^{\pm}M)$, alors $Y \cdot \psi \in \Gamma(M, \Sigma^{\mp}M)$. En effet, $\omega_{\mathbb{C}} \cdot Y \cdot \psi = -Y \cdot \omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi$ (proposition 18).

Lemme 7 *On suppose que $n = 2m$ est pair. Pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$, on a*

$$\nabla_X^S(\Sigma^\pm M) = \Sigma^\pm M.$$

Démonstration. On considère des coordonnées normales. Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$,

$$\nabla_{e_i}^S(e_j \cdot \psi) = \underbrace{\nabla_{e_i}(e_j)}_{=0} \cdot \psi + e_j \cdot \nabla_{e_i}^S \psi = e_j \cdot \nabla_{e_i}^S \psi.$$

En itérant ce processus, on montre que $\nabla_{e_i}^S(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi) = \omega_{\mathbb{C}} \cdot \nabla_{e_i}^S \psi$ pour tout i , et donc $\nabla_X^S(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi) = \omega_{\mathbb{C}} \cdot \nabla_X^S \psi$, d'où l'assertion. □

Proposition 26 *On suppose que $n = 2m$ est pair.*

1. $\mathcal{D} : \Gamma(M, \Sigma^\pm M) \longrightarrow \Gamma(M, \Sigma^\mp M)$: l'opérateur de Dirac envoie les spineurs positifs sur les spineurs négatifs, et réciproquement.
2. Si λ est valeur propre de \mathcal{D} , alors $-\lambda$ l'est aussi.

Démonstration. 1. On a $\Sigma_n^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}}) \cdot \Sigma_n$ donc comme $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$, Σ_n^+ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de l'endomorphisme de Σ_n de multiplication par $\omega_{\mathbb{C}}$, et Σ_n^- celui associé à la valeur propre -1 . Ainsi, pour $\psi \in \Gamma(M, \Sigma^+ M)$,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}} \cdot \mathcal{D}\psi &= \omega_{\mathbb{C}} \cdot \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^S \psi = - \sum_{i=1}^n e_i \cdot \omega_{\mathbb{C}} \cdot \nabla_{e_i}^S \psi \\ &= - \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^S \underbrace{(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi)}_{=\psi} = -\mathcal{D}\psi, \end{aligned}$$

et de même pour $\psi \in \Gamma(M, \Sigma^- M)$.

2. Soit $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$. On écrit $\psi = \psi^+ + \psi^-$, avec $\psi^\pm \in \Sigma^\pm M$. Alors d'après ce qui précède, $\mathcal{D}\psi = \underbrace{\mathcal{D}\psi^+}_{\in \Sigma^- M} + \underbrace{\mathcal{D}\psi^-}_{\in \Sigma^+ M} = \lambda\psi^+ + \lambda\psi^-$, d'où

par identification : $\mathcal{D}\psi^+ = \lambda\psi^-$ et $\mathcal{D}\psi^- = \lambda\psi^+$.

Posant $\tilde{\psi} = \psi^+ - \psi^-$, on a

$$\mathcal{D}(\tilde{\psi}) = \mathcal{D}\psi^+ - \mathcal{D}\psi^- = \lambda\psi^- - \lambda\psi^+ = -\lambda\tilde{\psi},$$

donc $\tilde{\psi}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $-\lambda$. □

Exemple 5.2.1 Pour $M = \mathbb{R}^n$, on a $\Sigma\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N$. En effet, on a $\text{Spin}M \simeq \text{Spin}_n \times \mathbb{R}^n$ puisque $\text{SOM} \simeq \text{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, et on utilise l'exemple 1.4.1. Le fibré étant trivial, un champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\mathbb{R}^n, \Sigma\mathbb{R}^n)$ est en fait une application $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$, puisque la première composante de l'application à valeurs dans $\Sigma\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N$ doit être l'identité par définition d'une section.

Comme la connexion de Levi-Civita sur \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique est $(X, Y) \mapsto Y'(X)$ (X et Y étant des applications de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), on a

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \partial_i.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \partial_i \right) \left(\sum_{j=1}^n e_j \cdot \partial_j \right) \\ &= \sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j \\ &= - \sum_i \partial_i^2 + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j + \sum_{i > j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j \\ &= - \sum_i \partial_i^2 + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j + \sum_{i < j} e_j \cdot e_i \cdot \partial_j \partial_i \\ &= - \sum_i \partial_i^2 + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \\ &= - \sum_i \partial_i^2. \end{aligned}$$

L'opérateur de Dirac est donc ici la racine carrée du Laplacien.

Dans le cas de la dimension 2, on a $\mathbb{C}l_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\Sigma_2 = \Sigma_2^+ \oplus \Sigma_2^- = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, avec $\Sigma_2^+ = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(e_1 + ie_2)$ et $\Sigma_2^- = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(1 - ie_1 \cdot e_2)$. Ainsi, tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ se décompose sous la forme

$$\psi = (e_1 + ie_2)f + (1 - ie_1 \cdot e_2)g,$$

où f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} . Sur \mathbb{R}^n , toutes les coordonnées sont des coordonnées normales, donc on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi &= (e_1 \cdot \partial_1 + e_2 \cdot \partial_2)((e_1 + ie_2)f + (1 - ie_1 \cdot e_2)g) \\ &= e_1 \cdot (e_1 + ie_2)\partial_1 f + e_2 \cdot (e_1 + ie_2)\partial_2 f + e_1 \cdot (1 - ie_1 \cdot e_2)\partial_1 g + e_2 \cdot (1 - ie_1 \cdot e_2)\partial_2 g \\ &= -(\partial_1 + i\partial_2)f \times (1 - ie_1 \cdot e_2) + (\partial_1 - i\partial_2)g \times (e_1 + ie_2) \\ &= -2\partial_{\bar{z}}f \times (1 - ie_1 \cdot e_2) + 2\partial_z g \times (e_1 + ie_2), \end{aligned}$$

avec $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ et $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$.

On a donc

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ -2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}.$$

dans la base $(e_1 + ie_2, 1 - ie_1 \cdot e_2)$ de Σ_2 ; on peut donc voir l'opérateur de Dirac comme une généralisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann.

5.3 La formule de Schrödinger-Lichnerowicz

Définition 5.3.1 (i) On étend le produit scalaire hermitien (\cdot, \cdot) de la définition 5.1.4 à des sections de $\Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M)$ par

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M) \times \Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}) \\ (\alpha \otimes \psi, \beta \otimes \varphi) &\longmapsto g(\alpha, \beta)(\psi, \varphi), \end{aligned}$$

où $g(\alpha, \beta)$ prend son sens grâce au théorème de Riesz.

Remarquons qu'alors pour $\omega, \eta \in \Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M)$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $T_m M$ ($m \in M$), on a

$$(\omega, \eta) = \sum_{i=1}^n (\omega(e_i), \eta(e_i)).$$

(ii) On note ∇^{S*} l'adjoint (formel) de ∇^S pour le produit hermitien canonique sur $L^2 M$, c'est à dire que

$$\nabla^{S*} : \Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M) \longrightarrow \Gamma(M, \Sigma M)$$

vérifie

$$(\nabla^{S*}\Psi, \varphi)_{L^2(M)} = (\Psi, \nabla^S \varphi)_{L^2(M)} \quad \begin{array}{l} (\Psi \in \Gamma(M, T^*M \otimes \Sigma M)) \\ (\varphi \in \Gamma(M, \Sigma M)). \end{array}$$

Lemme 8 Soit $m \in M$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $T_m M$. Alors pour tout $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$,

$$\nabla^{S*}\nabla^S \psi = \sum_{k=1}^n \nabla_{e_k}^S \nabla_{e_k}^S \psi.$$

Démonstration. Soit $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$. Pour tout $\hat{\psi} \in \Gamma(M, \Sigma M)$, on a

$$\left(\nabla^{S*}\nabla^S \psi, \hat{\psi} \right)_{L^2(M)} = \left(\nabla^S \psi, \nabla^S \hat{\psi} \right)_{L^2(M)} = \sum_{k=1}^n \left(\nabla_{e_k}^S \psi, \nabla_{e_k}^S \hat{\psi} \right)_{L^2(M)}.$$

Comme dans la preuve du lemme 6, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\nabla_{e_k}^S \psi, \nabla_{e_k}^S \widehat{\psi} \right) &= \sum_{k=1}^n e_k \cdot \left(\nabla_{e_k}^S \psi, \widehat{\psi} \right) - \left(\nabla_{e_k}^S \nabla_{e_k}^S \psi, \widehat{\psi} \right) \\ &= \operatorname{div} X_1 + i \operatorname{div} X_2 - \sum_{k=1}^n \left(\nabla_{e_k}^S \nabla_{e_k}^S \psi, \widehat{\psi} \right). \end{aligned}$$

En intégrant, et grâce au théorème de la divergence, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \left(\nabla_{e_k}^S \psi, \nabla_{e_k}^S \widehat{\psi} \right)_{L^2(M)} = - \sum_{k=1}^n \left(\nabla_{e_k}^S \nabla_{e_k}^S \psi, \widehat{\psi} \right)_{L^2(M)}.$$

D'où

$$\left(\nabla^{S*} \nabla^S \psi, \widehat{\psi} \right)_{L^2(M)} = \left(- \sum_{k=1}^n \nabla_{e_k}^S \nabla_{e_k}^S \psi, \widehat{\psi} \right)_{L^2(M)}.$$

Ceci étant valable pour tout $\widehat{\psi} \in \Gamma(M, \Sigma M)$, on a le résultat. □

Proposition 27 Soit $\widetilde{R}^S = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot R_{e_i, e_j}^S : \Gamma(M, \Sigma M) \longrightarrow \Gamma(M, \Sigma M)$, où R^S désigne la courbure spinorielle. Alors le carré de l'opérateur de Dirac est donné par

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^{S*} \nabla^S + \widetilde{R}^S.$$

Démonstration. En prenant de nouveau des coordonnées normales en $m \in M$ (et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $T_m M$), et en utilisant de nouveau la formule (8), on a au point m :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^S \right) \left(\sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j}^S \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i}^S \cdot \nabla_{e_j}^S \\ &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^S \nabla_{e_i}^S + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i}^S \nabla_{e_j}^S \\ &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^S \nabla_{e_i}^S + \sum_{i < j}^n e_i \cdot e_j \cdot (\nabla_{e_i}^S \nabla_{e_j}^S - \nabla_{e_j}^S \nabla_{e_i}^S) \\ &= \nabla^{S*} \nabla^S + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot R_{e_i, e_j}^S \\ &= \nabla^{S*} \nabla^S + \widetilde{R}^S \end{aligned}$$

où on a utilisé que le crochet $[e_i, e_j]$ était nul.

□

Donnons à présent quelques rappels de définition avant d'énoncer et de démontrer la formule de Schrödinger-Lichnerowicz. On ne donne que les définitions et on ne rappelle pas les propriétés élémentaires de symétrie et d'antisymétrie qui découlent des propriétés du tenseur de courbure, supposées connues.

Définition 5.3.2 Le tenseur de Ricci Ric de M est le champ de tenseurs sur M défini, pour $m \in M$ et $x, y \in T_m M$, par

$$\text{Ric}_m(x, y) = \text{Tr}(v \in T_m M \mapsto R_{v,x}y).$$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de $T_m M$, on a donc :

$$\text{Ric}_m(x, y) = \sum_{i=1}^n g(R_{e_i,x}y, e_i).$$

On note parfois $\text{Ric}_m(x) = \text{Ric}_m(x, x)$ pour $x \in T_m M$.

Remarquons enfin que $\text{Ric}_m(x, y) = \text{Ric}_m(y, x)$ pour tous $x, y \in T_m M$.

Définition 5.3.3 Soit $m \in M$. La courbure scalaire de M en m est

$$\begin{aligned} S(m) &= \sum_{i=1}^n \text{Ric}_m(e_i) = \text{Tr}(\text{Ric}_m) \\ &= \sum_{i,j} g(R_{e_i,e_j}e_i, e_j), \end{aligned}$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de $T_m M$.

Remarque 5.3.1 :

1. Le signe du tenseur de Ricci peut varier d'un ouvrage à l'autre : ainsi, on peut lire $\text{Ric}_m(x, y) = \text{Tr}(v \in T_m M \mapsto R_{x,v}y)$ dans [DoCa2] ou [GHL], alors que la définition que nous donnons peut être vue dans [KN] ou [Pau1]. Bien entendu, le signe de la courbure scalaire varie en conséquence. Le choix que nous avons fait conduit à un signe "plus" devant la courbure scalaire dans la formule de Schrödinger-Lichnerowicz à suivre, alors que le choix contraire conduirait à un signe "moins".
2. Dans certains ouvrages (par exemple [DoCa2]), le tenseur de Ricci et la courbure scalaire sont définis avec un coefficient multiplicateur supplémentaire par rapport aux définitions précédentes (en l'occurrence $\frac{1}{n-1}$ et $\frac{1}{n}$ respectivement). Néanmoins, les conventions que nous avons choisies ont l'avantage de ne pas faire apparaître la dimension n dans la formule de Schrödinger-Lichnerowicz que nous allons maintenant donner.

Théorème 12 (Formule de Schrödinger-Lichnerowicz) *Si S désigne la courbure scalaire de M , on a*

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^{S*} \nabla^S + \frac{1}{4} S \text{Id}_{\Gamma(M, \Sigma M)}.$$

Démonstration. D'après la proposition 27, il suffit de montrer que $\widetilde{R}^S = \frac{1}{4} S \text{Id}_{\Gamma(M, \Sigma M)}$.

On a

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^S &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot R_{e_i, e_j}^S \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{k,l} \underbrace{g(R_{e_i, e_j} e_k, e_l)}_{=R_{ijkl}} e_k, e_l \right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_l \left(\sum_{i,j,k} R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k \right) \cdot e_l \\ &= \frac{1}{8} \sum_l \left(\sum_{i \neq j \neq k} R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k + \sum_{\{i=j\} \cup \{i=k\} \cup \{j=k\}} R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k \right) \cdot e_l \\ &= \frac{1}{8} \sum_l \left(\frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k} \underbrace{(R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl})}_{=0 \text{ (Bianchi)}} e_i \cdot e_j \cdot e_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j} g(R_{e_i, e_j} e_i, e_l) e_i \cdot e_j \cdot e_i + \sum_{i,j} g(R_{e_i, e_j} e_j, e_l) e_i \cdot e_j \cdot e_j \right) \cdot e_l \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j,l} (g(R_{e_i, e_j} e_i, e_l) e_j - g(R_{e_i, e_j} e_j, e_l) e_i) \cdot e_l \\ &= \frac{1}{8} \left(\sum_{j,l} -\text{Ric}(e_j, e_l) e_j \cdot e_l - \sum_{i,l} \text{Ric}(e_i, e_l) e_i \cdot e_l \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \text{Ric}(e_i, e_j) e_i \cdot e_j \\ &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{i>j} \text{Ric}(e_i, e_j) e_i \cdot e_j + \sum_{i<j} \text{Ric}(e_i, e_j) e_i \cdot e_j - \sum_i \text{Ric}(e_i, e_i) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{i>j} \text{Ric}(e_i, e_j) e_i \cdot e_j - \sum_{i<j} \text{Ric}(e_j, e_i) e_j \cdot e_i - \sum_i \text{Ric}(e_i) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{i>j} \text{Ric}(e_i, e_j) e_i \cdot e_j - \sum_{i>j} \text{Ric}(e_i, e_j) e_i \cdot e_j - \text{Tr}(\text{Ric}) \right) \\ &= \frac{1}{4} S. \end{aligned}$$

□

Concluons par une application importante de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz.

Théorème 13 Soit (M, g) une variété riemannienne orientée spinorielle compacte de dimension $n \geq 2$, et soit λ une valeur propre (réelle) de l'opérateur de Dirac \mathcal{D} . On pose également $S_0 = \inf_{m \in M} S(m)$, que l'on suppose positif. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}S_0,$$

Si on suppose de plus que $S_0 > 0$, alors

$$\lambda^2 > \frac{1}{4}S_0.$$

Remarque 5.3.2 : Ce théorème affirme en particulier que si M est telle que $S_0 > 0$, alors 0 n'est pas valeur propre de l'opérateur de Dirac, c'est à dire que $\ker \mathcal{D} = \{0\}$.

Démonstration. On a donc pour tout $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$:

$$\int_M (\mathcal{D}^2 \psi, \psi) d\nu_g = \int_M (\nabla^{S^*} \nabla^S \psi, \psi) d\nu_g + \frac{1}{4} \int_M S(\psi, \psi) d\nu_g.$$

Soit λ une valeur propre de \mathcal{D} et ψ un spineur propre de λ . Alors

$$\int_M (\lambda^2 |\psi|^2 - \frac{1}{4} S |\psi|^2) d\nu_g = \int_M |\nabla^S \psi|^2 d\nu_g \geq 0.$$

D'où $\lambda^2 \geq \frac{1}{4}S_0$.

Si $S_0 > 0$, supposons que l'égalité ait lieu : $\lambda^2 = \frac{1}{4}S_0$, c'est à dire que $\int_M |\nabla^S \psi|^2 d\nu_g = 0$. Alors $\nabla^S \psi = 0$, d'où $\mathcal{D}\psi = \mathbf{m} \circ \nabla^S \psi = 0$, c'est à dire $\lambda = 0$, soit $S_0 = 0$: absurde.

□

Remarque 5.3.3 : D'après le difficile théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, si on note \mathcal{D}_\pm la restriction de \mathcal{D} à $\Gamma(M, \Sigma^\pm M)$, la quantité $\dim \mathcal{D}_+ - \dim \mathcal{D}_-$ est un invariant topologique. Ainsi, d'après le théorème précédent, si le noyau de l'opérateur de Dirac est nul, il n'existe aucune métrique riemannienne sur M telle que l'infimum de ses courbures scalaires soit strictement positif.

6 Géométrie spinorielle des sous-variétés de \mathbb{R}^3

Cette section est une étude de l'article [Fri1] de Thomas Friedrich. Certains éléments de preuves sont issus de [Mor]. Le but est de démontrer le théorème suivant concernant les variétés différentielles de dimension 2. Il donne des conditions spinorielles nécessaires et suffisantes pour qu'une telle variété s'immerge isométriquement dans \mathbb{R}^3 :

Théorème 14 (Friedrich) *Soit (M, g) une variété riemannienne orientée de dimension 2 et $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une immersion isométrique du revêtement universel de M dans \mathbb{R}^3 , et H est alors sa courbure moyenne.*
2. *Il existe une solution $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ de longueur constante égale à 1 de l'équation de Dirac $\mathcal{D}\psi = H\psi$.*
3. *Il existe $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$ et E un endomorphisme symétrique de TM tels qu'on ait $\text{Tr}(E) = -H$ et $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$.*

6.1 Structure spinorielle sous-jacente d'une hypersurface

Dans ce paragraphe nous voyons comment une hypersurface orientable M d'une variété riemannienne spinorielle orientée (N, \bar{g}) de dimension $n + 1$ hérite d'une structure spinorielle grâce à celle de N . Déjà, $(M, \bar{g}|_M)$ est une variété riemannienne ; on notera $g = \bar{g}|_M$. Comme M est orientable, on peut choisir un champ de vecteurs normal unitaire global, noté ν , et définir l'application

$$\begin{aligned} \Pi : \text{SOM} &\longrightarrow \text{SON} \\ \{e_1, \dots, e_n\} &\longmapsto \{e_1, \dots, e_n, \nu\}. \end{aligned}$$

Π étant un difféomorphisme sur son image, SOM s'identifie à un sous fibré de la restriction à M de SON , notée $\text{SON}|_M = \cup_{m \in M} \{m\} \times \{\text{bases orthonormées directes de } T_m N\}$.

De la même façon que dans la preuve de la proposition 6, on considère l'isomorphisme d'algèbre Υ de $\mathbb{C}l_n$ sur $\mathbb{C}l_{n+1}^0$ défini pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ par

$$\Upsilon(w) = w \cdot \nu$$

(où ν est ici le dernier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n). En restreignant Υ à Spin_n , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}_n & \xrightarrow{\Upsilon} & \text{Spin}_{n+1} \\ \downarrow \text{Ad}^n & & \downarrow \text{Ad}^{n+1} \\ \text{SO}_n & \xrightarrow{\subset} & \text{SO}_{n+1} \end{array} ,$$

où Ad^i est la représentation adjointe de Spin_i , et l'inclusion de SO_n dans SO_{n+1} est celle qui consiste à fixer le dernier vecteur de base sous l'action de SO_{n+1} sur \mathbb{R}^{n+1} . Pour plus de clarté on notera parfois \widehat{f} ce prolongement d'une fonction $f \in \text{SO}_n$ (donc $\widehat{f} = f$ sur \mathbb{R}^n et $\widehat{f}(\nu) = \nu$), qui est clairement bien dans SO_{n+1} .

On vérifie simplement la commutativité du diagramme : pour tout $a = v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} \in \text{Spin}_n$ et tout $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} Ad_{\Upsilon(a)}^{n+1}(w) &= \Upsilon(a) \cdot w \cdot \Upsilon(a)^{-1} \\ &= v_1 \cdot \nu \cdot \dots \cdot v_{2k} \cdot \nu \cdot w \cdot \nu \cdot v_{2k} \cdot \dots \cdot \nu \cdot v_1 \\ &= v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} \cdot w \cdot v_{2k} \cdot \dots \cdot v_1 \\ &= Ad_a^n(w) = \widehat{Ad}_a^n(w). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} Ad_{\Upsilon(a)}^{n+1}(\nu) &= v_1 \cdot \nu \cdot \dots \cdot v_{2k} \cdot \nu \cdot \nu \cdot \nu \cdot v_{2k} \cdot \dots \cdot \nu \cdot v_1 \\ &= \nu \\ &= \widehat{Ad}_a^n(\nu). \end{aligned}$$

Donc $Ad^{n+1} \circ \Upsilon = \widehat{Ad}^n$ et le diagramme commute.

On note $\text{Spin}N|_M$ la restriction à M de $\text{Spin}N$ et η le revêtement à deux feuillets de SON provenant de la structure spinorielle de N . Lorsqu'il est restreint à $\text{Spin}N|_M$, η est à valeurs dans $\text{SON}|_M$, et on pose

$$\text{Spin}M = \eta^{-1}(\Pi(\text{SOM})),$$

qui est un sous-fibré de $\text{Spin}N|_M$.

Si on note $\pi_{\text{Spin}N} : \text{Spin}N \rightarrow N$ la projection du fibré $\text{Spin}N$ sur N , on pose

$$\pi_{\text{Spin}M} := \pi_{\text{Spin}N}|_{\text{Spin}M}$$

et

$$\eta' = \Pi^{-1} \circ \eta|_{\text{Spin}M}.$$

Avec ces définitions, on obtient que $\text{Spin}M$ est un fibré Spin_n -principal sur M et que $\eta' : \text{Spin}M \rightarrow \text{SOM}$ est un revêtement à deux feuillets. Reste à vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}M \times \text{Spin}_n & \longrightarrow & \text{Spin}M \\ \downarrow \eta' \times Ad^n & & \downarrow \eta' \\ \text{SOM} \times \text{SO}_n & \longrightarrow & \text{SOM} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \pi_{\text{Spin}M} \\ \\ \nearrow \pi_{\text{SOM}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ M, \end{array}$$

sachant que ce diagramme ci commute :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Spin}N \times \text{Spin}_{n+1} & \longrightarrow & \text{Spin}N \\
\downarrow \eta \times \text{Ad}^{n+1} & & \downarrow \eta \\
\text{SON} \times \text{SO}_{n+1} & \longrightarrow & \text{SON}
\end{array}
\begin{array}{c}
\searrow \pi_{\text{Spin}N} \\
\nearrow \pi_{\text{SON}} \\
M.
\end{array}$$

- Partie droite : si $\kappa \in \text{Spin}M$,

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{Spin}M}(\kappa) &= \pi_{\text{Spin}N}|_{\text{Spin}M}(\kappa) \\
&= \pi_{\text{SON}}|_M(\eta(\kappa)) \\
&= \pi_{\text{SOM}}(\Pi^{-1}(\eta(\kappa)))
\end{aligned}$$

car $\eta(\kappa)$ est de la forme $\{e_1, \dots, e_n, \nu\}$ et $\Pi^{-1}(\eta(\kappa)) = \{e_1, \dots, e_n\}$.

- Partie gauche : Déjà, pour tous $\{e_1, \dots, e_n\} \in \text{SOM}$ et $f \in \text{SO}_n$, on a

$$\Pi(\{e_1, \dots, e_n\}f) = \Pi(\{e_1, \dots, e_n\})\widehat{f}.$$

En effet, $\{f(e_1), \dots, f(e_n), \nu\} = \{\widehat{f}(e_1), \dots, \widehat{f}(e_n), \widehat{f}(\nu)\}$.

Alors pour tout $a \in \text{Spin}_n$ et $\kappa \in \text{Spin}M$,

$$\begin{aligned}
\eta'(\kappa a) = \Pi^{-1}(\eta(\kappa a)) &= \Pi^{-1}(\eta(\kappa)\text{Ad}_a^{n+1}) && (\text{Spin}_n \subset \text{Spin}_{n+1}) \\
&= \Pi^{-1}(\eta(\kappa)\text{Ad}_{\Upsilon(a)}^{n+1}) \\
&= \Pi^{-1}(\eta(\kappa))\text{Ad}_a^n \\
&= \eta'(\kappa)\text{Ad}_a^n,
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\text{Ad}_{\Upsilon(a)}^{n+1} = \text{Ad}_a^{n+1}$ pour $a \in \text{Spin}_n$.

$\text{Spin}M$ définit donc bien une structure spinorielle sur M : on peut définir le fibré des spineurs de M , qui est $\Sigma M = \text{Spin}M \times_{\rho_n} \Sigma_n$, avec $\rho_n : \text{Spin}_n \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$ la représentation spinorielle complexe de Spin_n . Ce fibré vectoriel ayant été construit à partir d'une structure spinorielle de N , on aimerait que les restrictions à M de spineurs de N soient des spineurs de M , et que les multiplications de Clifford coïncident.

Soit U un ouvert de N et $\Psi \in \Gamma_U(N, \Sigma N)$. On a $\Psi = [\tilde{\sigma}, s]$, avec $\tilde{\sigma} \in \Gamma_U(N, \text{Spin}N)$ et $s : U \longrightarrow \Sigma_{n+1}$ une fonction, la classe d'équivalence étant prise pour $a \in \text{Spin}_{n+1}$.

Avec les notations précédentes, $\eta(\tilde{\sigma})$ est une section locale de SON , et quitte à changer de représentants pour Ψ , on peut supposer qu'elle a ν comme dernier vecteur de base. En effet, si on change $\tilde{\sigma}$ par $\tilde{\sigma}a$ pour $a \in \text{Spin}_{n+1}$, alors $\eta(\tilde{\sigma})$ devient $\eta(\tilde{\sigma})\text{Ad}_a^{n+1}$, et on choisit a pour que Ad_a^{n+1} soit la bonne isométrie.

Alors

$$\Psi|_M = [\tilde{\sigma}|_{U \cap M}, s|_{U \cap M}],$$

où la classe d'équivalence est prise pour la représentation $\rho_{n+1} \circ \Upsilon$ et sur les éléments de Spin_n (puisque les éléments a de Spin_{n+1} tels que Ad_a^{n+1} préserve ν sont exactement les $\Upsilon(b)$ pour $b \in \text{Spin}_n$).

Définition 6.1.1 Le **fibré des spineurs extrinsèque** \mathbb{S} est la restriction à M du fibré des spineurs complexe de N , c'est à dire $\mathbb{S} = \Sigma N|_M = \text{Spin}M \times_{\rho_{n+1} \circ \Upsilon} \Sigma_{n+1}$. On note également $\mathbb{S}^\pm = \Sigma^\pm N|_M$.

Définition 6.1.2 Soit $X = [\tilde{\sigma}_M, \chi] \in \Gamma(M, TM)$, soit $m \in M$, et soit $\overline{X} = [\tilde{\sigma}_N, \overline{\chi}]$ une extension lisse de X sur un voisinage U de m dans N ; soit également $\psi = [\tilde{\sigma}_M, s] \in \Gamma(M, \mathbb{S})$ tel que $\psi = \Psi|_M$, avec $\Psi = [\tilde{\sigma}_N, \overline{s}] \in \Gamma(N, \Sigma N)$. La multiplication de Clifford de ψ par X est un élément de $\Gamma_{U \cap M}(M, \mathbb{S})$ défini sur M par

$$X \cdot \psi = [\tilde{\sigma}_M, \chi] \cdot [\tilde{\sigma}_M, s] = [\tilde{\sigma}_M, \underbrace{\rho_{n+1}(\alpha(\overline{\chi}))}_{\overline{X} \cdot \nu}(s)] = (\overline{X} \cdot \nu \cdot \Psi)|_M.$$

Cette définition a du sens car la multiplication de Clifford sur N ne fait intervenir que les valeurs ponctuelles de \overline{X} et Ψ au point voulu.

Dans la suite on confondra toujours X et \overline{X} , et on notera plus simplement $X \cdot \nu \cdot \psi$ au lieu de $(\overline{X} \cdot \nu \cdot \Psi)|_M$.

Proposition 28 *Si n est pair, il existe un isomorphisme entre le fibré des spineurs extrinsèque \mathbb{S} et ΣM , qui envoie tout spineur $\psi \in \mathbb{S}$ sur un spineur $\psi^* \in \Sigma M$, qui préserve les décompositions en parties positive et négative, et qui commute avec la multiplication de Clifford : pour tous $\psi \in \mathbb{S}$ et $X \in \Gamma(M, TM)$,*

$$X \cdot \psi^* = (X \cdot \psi)^* = (X \cdot \nu \cdot \psi)^*.$$

Si n est impair, il existe un isomorphisme entre \mathbb{S}^+ et ΣM , qui envoie tout spineur $\psi \in \mathbb{S}^+$ sur un spineur $\psi^ \in \Sigma M$ et qui commute avec la multiplication de Clifford.*

Démonstration. Je renvoie à [Mor], pages 36-37. □

On aimerait que l'isomorphisme précédent soit même une isométrie entre $(\mathbb{S}, (\cdot, \cdot)_{\Sigma N}|_M)$ (respectivement $(\mathbb{S}^+, (\cdot, \cdot)_{\Sigma N}|_M)$) et $(\Sigma M, (\cdot, \cdot)_{\Sigma M})$, c'est à dire que pour tous $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{S}$, et avec $\Psi_1, \Psi_2 \in \Sigma N$ tels que $\Psi_i|_M = \psi_i$ on ait

$$(\Psi_1, \Psi_2)_{\Sigma N}|_M = (\psi_1, \psi_2)_{\Sigma N} = (\psi_1^*, \psi_2^*)_{\Sigma M}.$$

Ceci est vérifié si on définit $(\cdot, \cdot)_{\Sigma M}$ par

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\Sigma M} \stackrel{\text{def.}}{=} (\Psi_1, \Psi_2)_{\Sigma N}|_M = (\Psi_1|_M, \Psi_2|_M)_{\Sigma N}$$

pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma M$, et avec $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{S}$ tels que $\psi_i^* = \varphi_i$, mais il faut encore voir si cette définition vérifie bien la remarque 5.1.3 ; pour $X \in \Gamma(M, TM)$ et $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{S}$, on a

$$\begin{aligned} (X \cdot_M \psi_1^*, \psi_2^*)_{\Sigma M} &= ((X \cdot_N \nu \cdot \psi_1)^*, \psi_2^*)_{\Sigma M} \\ &= (X \cdot_N \nu \cdot \psi_1, \psi_2)_{\Sigma N} \\ &\stackrel{X \perp \nu}{=} -(\psi_1, X \cdot_N \nu \cdot \psi_2)_{\Sigma N} \\ &= -(\psi_1^*, X \cdot_M \psi_2^*)_{\Sigma M}. \end{aligned}$$

On a donc bien une isométrie.

A présent on va voir comment se comportent les connexions de Levi-Civita riemannienne ∇ et spinorielle ∇^S de (M, g) par rapport à celles de (N, \bar{g}) (notées $\bar{\nabla}$ et $\bar{\nabla}^S$).

Dans la suite je ne ferai plus la différence entre un spineur $\psi \in \mathbb{S}$ et son image $\psi^* \in \Sigma M$.

Dans un premier temps, pour pouvoir ‘‘comparer’’ les connexions, il faut donner du sens à $\bar{\nabla}_X Y$ lorsque $X, Y \in \Gamma(M, TM)$.

Proposition 29 *Soient X et Y des champs de vecteurs sur M , et soit $m \in M$. Soient \bar{X} et \bar{Y} des extensions lisses de ces champs sur un voisinage U de m dans N . On pose $\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ sur $U \cap M$. Alors cette définition est indépendante du choix de l’extension.*

Remarque 6.1.1 : On définit ainsi un champ de vecteurs lisse $\bar{\nabla}_X Y$ de M sur N .

Démonstration. On se place dans un système de coordonnées et on pose $\bar{Y} = \sum_i f^i e_i$. Alors

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \sum_i \bar{X}(f^i) e_i + \sum_i f^i \bar{\nabla}_{\bar{X}}(e_i).$$

Or pour $p \in U \cap M$,

$$\bar{X}(f^i)(p) = (f^i)'(p)(\bar{X}(p)) = (f^i)'(p)(X(p)) = X(f^i)(p).$$

De plus, $\bar{\nabla}_{\bar{X}}(e_i)(p)$ ne dépend que de $\bar{X}(p) = X(p)$ (et des valeurs de e_i sur un **voisinage** de p), ce qui prouve l’indépendance du choix de l’extension. □

Proposition 30 (Formule de Gauss riemannienne) *Pour tous $X, Y \in \Gamma(M, TM)$,*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \bar{g}(h(X), Y)\nu,$$

où $h := -\bar{\nabla}\nu$ est le tenseur de Weingarten de M .

- Remarque 6.1.2 :** 1. Même en prenant $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, il n'y a pas de raison a priori que $\overline{\nabla}_X Y$ soit un champ de vecteurs tangent à M . C'est ce qu'on retrouve dans la formule de Gauss : il y a une composante $\nabla_X Y$ tangente à M et une composante $\overline{g}(h(X), Y)\nu$ normale à M .
2. L'application $(X, Y) \in \Gamma(M, TM)^2 \mapsto \overline{g}(h(X), Y)\nu$ est $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -bilinéaire et symétrique, appelée seconde forme fondamentale, notée aussi II .

Démonstration. Je renvoie à [O] pages 99-100. □

Proposition 31 (Formule de Gauss spinorielle) *Pour tous $X \in \Gamma(M, TM)$ et $\Psi \in \Gamma(N, \Sigma N)$,*

$$(\overline{\nabla}_X^S \Psi)|_M = \nabla_X^S(\Psi|_M) + \frac{1}{2}h(X) \cdot_M \Psi|_M.$$

Remarque 6.1.3 : Là encore il faut donner du sens à $\overline{\nabla}_X^S \Psi$; on le définit en fait par la formule

$$\overline{\nabla}_X^S \Psi = \overline{\nabla}_{\overline{X}}^S \Psi,$$

où \overline{X} est une extension locale lisse de X à N . L'indépendance du choix de l'extension se prouve comme pour la connexion riemannienne.

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ un repère orthonormé direct local de SON. Pour $X \in \Gamma(M, TM)$, on a (localement)

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X^S \Psi &= X(\Psi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n+1} \overline{g}(\overline{\nabla}_X e_i, e_j) e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi \\ \nabla_X^S(\Psi|_M) &= X(\Psi|_M) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot_M e_j \cdot_M \Psi|_M \\ &= X(\Psi|_M) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot_N \nu \cdot_N e_j \cdot_N \nu \cdot_N \Psi|_M \\ &= X(\Psi)|_M + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi|_M. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X^S \Psi &= X(\Psi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{\nabla}_X e_i, e_j) e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi \\
&= X(\Psi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X e_i, e_j) e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{\nabla}_X e_i, \nu) e_i \cdot_N \nu \cdot_N \Psi \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, e_j) \nu \cdot_N e_j \cdot_N \Psi \\
&= X(\Psi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X e_i, e_j) e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X e_i, \nu) e_i \cdot_N \nu \cdot_N \Psi \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, e_i) \nu \cdot_N e_i \cdot_N \Psi.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Gauss riemannienne, et la proposition 28, on obtient

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X^S \Psi)|_M &= X(\Psi)|_M + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(\nabla_X e_i + \bar{g}(h(X), e_i) \nu, e_j) e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi|_M \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, e_i) e_i \cdot_N \nu \cdot_N \Psi|_M + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, e_i) \nu \cdot_N e_i \cdot_N \Psi|_M \\
&= X(\Psi)|_M + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\bar{g}(\nabla_X e_i, e_j)}_{=g(\nabla_X e_i, e_j)} e_i \cdot_N e_j \cdot_N \Psi|_M - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, e_i) e_i \cdot_N \nu \cdot_N \Psi|_M \\
&= (\nabla_X^S \Psi)|_M + \frac{1}{2} h(X) \cdot_N \nu \cdot_N \Psi|_M \\
&= (\nabla_X^S \Psi)|_M + \frac{1}{2} h(X) \cdot_M \Psi|_M.
\end{aligned}$$

□

6.2 L'opérateur de Dirac d'une hypersurface

On se donne une variété riemannienne orientée ambiante (\bar{M}, \bar{g}) de dimension 3, munie d'une structure spinorielle, et on considère une surface $(M, g = \bar{g}|_M)$ immergée isométriquement dans \bar{M} . La variété M est donc munie d'une structure spinorielle selon la construction du paragraphe précédent (et son fibré des spineurs extrinsèque est isomorphe au fibré des spineurs intrinsèque). Le but de ce paragraphe est de montrer que 1. \Rightarrow 2. dans le théorème de Friedrich.

Le fibré des spineurs complexe de M , noté ΣM , se décompose en

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M,$$

avec

$$\Sigma^\pm M = \{\psi \in \Sigma M \mid ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi = \pm\psi\},$$

où $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormale de TM . Comme dans l'algèbre de Clifford de \overline{M} on a $e_1 \cdot e_2 = e_3$, on a encore, en posant $e_1 \cdot e_2 = \vec{N}$,

$$\Sigma^\pm M = \{\psi \in \Sigma M \mid i\vec{N} \cdot \psi = \pm\psi\}.$$

On considère un champ de spineurs Ψ sur \overline{M} . D'après ce qui précède, sa restriction $\Psi|_M = \psi$ est un champ de spineurs sur M , qui se décompose sous la forme $\psi = \psi^+ + \psi^-$, avec

$$\psi^+ = \frac{1}{2}(\psi + i\vec{N} \cdot \psi), \quad \psi^- = \frac{1}{2}(\psi - i\vec{N} \cdot \psi).$$

A présent, on notera $\overline{\nabla}$ et ∇ les connexions spinorielles de \overline{M} et M respectivement, et on ne fera plus de distinction de notation avec les connexions riemanniennes.

D'après les formules de Gauss précédemment énoncées, l'opérateur de Dirac \mathcal{D} de M s'exprime en fonction de $\overline{\nabla}$ par

$$\mathcal{D}\psi = e_1 \cdot \nabla_{e_1}\psi + e_2 \cdot \nabla_{e_2}\psi = e_1 \cdot \overline{\nabla}_{e_1}\psi + e_2 \cdot \overline{\nabla}_{e_2}\psi - H\vec{N} \cdot \psi,$$

où H est la courbure scalaire moyenne de M . En effet, d'après la remarque 6.1.2, l'application $(X, Y) \in \Gamma(M, TM)^2 \mapsto \overline{g}(h(X), Y)\vec{N}$ est symétrique, donc dans une base orthonormée de diagonalisation on obtient

$$e_1 \cdot h(e_1) \cdot \psi + e_2 \cdot h(e_2) \cdot \psi = -(g(e_1, h(e_1)) + g(e_2, h(e_2)))\psi = -\text{Tr}(II) = -2H.$$

Voyons quelques cas particuliers.

On suppose que le champ Ψ sur \overline{M} est un champ de **Killing** réel, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $T \in \Gamma(\overline{M}, T\overline{M})$,

$$\overline{\nabla}_T \Psi = \lambda T \cdot \Psi.$$

Alors on obtient immédiatement

$$\mathcal{D}\psi = -2\lambda\psi - H\vec{N} \cdot \psi.$$

Proposition 32 *Si M est une surface minimale dans \overline{M} ($H = 0$), alors la restriction $\psi = \Psi|_M$ de tout spineur de Killing réel Ψ sur \overline{M} fournit un spineur propre de longueur constante de l'opérateur de Dirac :*

$$\mathcal{D}\psi = -2\lambda\psi.$$

On suppose maintenant de plus que Ψ est parallèle sur \overline{M} , c'est à dire que $\lambda = 0$. En utilisant la décomposition $\psi = \psi^+ + \psi^-$ et la proposition 26, on a le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}\psi^+ &= -iH\psi^- \\ \mathcal{D}\psi^- &= iH\psi^+ \end{cases}$$

On introduit le spineur $\psi^* = \psi^+ - i\psi^-$; alors $\mathcal{D}\psi^* = H\psi^*$.

De façon explicite, le spineur ψ^* est donné par

$$\psi^* = \frac{1}{2}(1-i)\psi + \frac{1}{2}(-1+i)\vec{N} \cdot \psi,$$

et sa norme au carré est (d'après les remarques 5.2.1 et 5.2.2)

$$\|\psi^*\|^2 = \|\psi\|^2.$$

Comme Ψ est parallèle, $\overline{\nabla}\Psi = 0$, donc

$$\nabla_X \psi = -\frac{1}{2}h(X) \cdot_M \psi = \frac{1}{2}\overline{\nabla}_X \vec{N} \cdot_M \vec{N} \cdot_M \psi$$

pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$ d'après la formule de Gauss spinorielle.

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\nabla_X \psi, \psi) &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_X \vec{N} \cdot \vec{N} \cdot \psi, \psi) \\ &= -\frac{1}{2}(\vec{N} \cdot \psi, \overline{\nabla}_X \vec{N} \cdot \psi) \\ &\stackrel{\text{rem. 5.1.3}}{=} -\frac{1}{2}\overline{g}(\vec{N}, \overline{\nabla}_X \vec{N})(\psi, \psi). \end{aligned}$$

Or \vec{N} est de norme constante égale à 1 donc pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$,

$$X \cdot \|\vec{N}\| = 0 = \overline{g}(\vec{N}, \overline{\nabla}_X \vec{N}) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X \vec{N}, \vec{N}).$$

Donc $\overline{g}(\vec{N}, \overline{\nabla}_X \vec{N}) = 0$, et donc $(\nabla_X \psi, \psi) = 0$ pour tout X , c'est à dire que ψ est de longueur constante ; en effet,

$$\psi \text{ est de longueur constante} \iff X(\|\psi\|^2) = 0, \forall X \iff (\nabla_X \psi, \psi) = 0, \forall X.$$

Proposition 33 Soit Ψ un champ de spineurs parallèle défini sur \overline{M} . Si $\psi = \Psi|_M$, le champ de spineurs défini par

$$\psi^* = \frac{1}{2}(1-i)\psi + \frac{1}{2}(-1+i)\vec{N} \cdot \psi$$

est une solution de l'équation de Dirac $\mathcal{D}\psi^* = H\psi^*$ de longueur constante, où H est la courbure moyenne de M .

6.3 L'équation de Dirac sur M

Dans cette section (M, g) est une variété riemannienne orientée de dimension 2 munie d'une structure spinorielle. On considère également une fonction lisse $H : M \rightarrow \mathbb{R}$. Nous allons étudier l'implication 2. \Rightarrow 3. du théorème de Friedrich. Soit donc un champ de spineurs ψ sur M solution de l'équation de Dirac

$$\mathcal{D}\psi = H\psi.$$

Toujours en utilisant la décomposition $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$ du fibré des spineurs complexe de M , on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} \mathcal{D}\psi^+ = H\psi^- \\ \mathcal{D}\psi^- = H\psi^+. \end{cases}$$

On associe à ψ deux formes différentielles sur M définies pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ par

$$F_+(X, Y) = \Re(\nabla_X \psi^+, Y \cdot \psi^-) \quad \text{et} \quad F_-(X, Y) = \Re(\nabla_X \psi^-, Y \cdot \psi^+).$$

Proposition 34 1. F_{\pm} sont des formes bilinéaires symétriques.

2. $\text{Tr}(F_{\pm}) = -H \|\psi^{\mp}\|^2$.

Remarque 6.3.1 : La trace d'une forme quadratique est la trace de la matrice de cette forme dans une base orthonormée pour g . Elle est indépendante du choix de la base orthonormée.

Démonstration. 1. La bilinéarité est évidente. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \Re(\nabla_{e_1} \psi^+, e_2 \cdot \psi^-) &= \Re(e_1 \cdot \nabla_{e_1} \psi^+, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^-) = \Re(H\psi^- - e_2 \cdot \nabla_{e_2} \psi^+, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^-) \\ &= H\Re(\psi^-, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^-) + \Re(\nabla_{e_2} \psi^+, e_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^-) \\ &= 0 + \Re(\nabla_{e_2} \psi^+, e_1 \cdot \psi^-). \end{aligned}$$

D'où la symétrie.

2. Le calcul de la trace de F_{\pm} donne

$$\text{Tr}(F_{\pm}) = \Re(\nabla_{e_1} \psi^{\pm}, e_1 \cdot \psi^{\mp}) + \Re(\nabla_{e_2} \psi^{\pm}, e_2 \cdot \psi^{\mp}) = -\Re(\mathcal{D}\psi^{\pm}, \psi^{\mp}) = -H \|\psi^{\mp}\|^2.$$

□

Proposition 35 Soit ψ un champ de spineurs sur M solution de l'équation $\mathcal{D}\psi = H\psi$ non nulle et de longueur constante. Alors les formes F_{\pm} vérifient

$$\|\psi^+\|^2 F_+ = \|\psi^-\|^2 F_-.$$

Démonstration. Soit $m \in M$. Si ψ^+ ou ψ^- s'annule en m , la relation est claire. Sinon, il existe un voisinage V de m dans M sur lequel ψ^+ et ψ^- ne s'annulent pas.

Le couple de spineurs

$$\left(\frac{e_1 \cdot \psi^-}{\|\psi^-\|}, \frac{e_2 \cdot \psi^-}{\|\psi^-\|} \right)$$

constitue une base orthonormée de $\Gamma_V(M, \Sigma^+M)$ pour le produit scalaire **euclidien** $\Re(\cdot, \cdot)$. En effet on voit immédiatement que ces deux champs sont orthogonaux et normés, et la dimension du \mathbb{R} -espace vectoriel $\Gamma(M, \Sigma M)$ est la dimension réelle de la fibre de ΣM , soit $\dim_{\mathbb{R}} \Sigma_2 = 2 \times 2^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} = 4$, donc la dimension de $\Gamma(M, \Sigma^+M)$ est $\frac{4}{2} = 2$.

Ainsi, pour $X \in \Gamma_V(M, TM)$,

$$\begin{aligned} \nabla_X \psi^+ &= \Re\left(\nabla_X \psi^+, \frac{e_1 \cdot \psi^-}{\|\psi^-\|}\right) \frac{e_1 \cdot \psi^-}{\|\psi^-\|} + \Re\left(\nabla_X \psi^+, \frac{e_2 \cdot \psi^-}{\|\psi^-\|}\right) \frac{e_2 \cdot \psi^-}{\|\psi^-\|} \\ &= \frac{1}{\|\psi^-\|^2} \{F_+(X, e_1)e_1 + F_+(X, e_2)e_2\} \psi^-. \end{aligned}$$

De même,

$$\nabla_X \psi^- = \frac{1}{\|\psi^+\|^2} \{F_-(X, e_1)e_1 + F_-(X, e_2)e_2\} \psi^+.$$

On prend les produits scalaires $\Re(\cdot, \cdot)$ de ces deux équations, respectivement par ψ^+ et ψ^- , puis on somme :

$$\begin{aligned} \Re(\nabla_X \psi^+, \psi^+) + \Re(\nabla_X \psi^-, \psi^-) &= \frac{1}{2} \Re(X(\|\psi^+\|^2 + \|\psi^-\|^2)) \\ &= \frac{1}{2} X(\|\psi\|^2) \\ &= \Re(A(X) \cdot \psi^-, \psi^+), \end{aligned}$$

avec $A : TM \rightarrow TM$ l'endomorphisme défini par

$$A(X) = \left\{ \frac{F_+(X, e_1)}{\|\psi^-\|^2} - \frac{F_-(X, e_1)}{\|\psi^+\|^2} \right\} e_1 + \left\{ \frac{F_+(X, e_2)}{\|\psi^-\|^2} - \frac{F_-(X, e_2)}{\|\psi^+\|^2} \right\} e_2.$$

A est symétrique car F_{\pm} le sont, et sa trace est donnée par

$$\text{Tr} A = \frac{1}{\|\psi^-\|^2} \text{Tr} F_+ - \frac{1}{\|\psi^+\|^2} \text{Tr} F_- = -H + H = 0.$$

Comme ψ est de longueur constante, $X(\|\psi\|^2) = 0$, et donc

$$\Re(A(X) \cdot \psi^-, \psi^+) = 0 \quad (X \in \Gamma(M, TM)).$$

Le rang de A est au plus 1 ; en effet s'il était de rang 2, A serait surjectif, et on aurait donc $\Re(Y \cdot \psi^-, \psi^+) = 0$ pour tout $Y \in \Gamma(M, TM)$. En particulier ψ^+ serait orthogonal aux deux spineurs composant la base orthonormée de Σ^+M présentés plus haut, et on aurait donc $\psi^+ = 0$ ce qui est absurde.

De plus, sa trace est nulle, donc $A \equiv 0$, c'est à dire en identifiant sur les vecteurs de base que

$$\frac{F_+}{\|\psi^-\|^2} = \frac{F_-}{\|\psi^+\|^2}.$$

□

On pose $F = F_+ + F_-$. D'après ce qui précède, lorsque $\psi^+ \neq 0$ ou $\psi^- \neq 0$, on a

$$\frac{F}{\|\psi\|^2} = \frac{F_+ + F_-}{\|\psi^+\|^2 + \|\psi^-\|^2} = \frac{\left(\frac{\|\psi^-\|^2}{\|\psi^+\|^2} + 1\right) F_-}{\|\psi^+\|^2 + \|\psi^-\|^2} = \frac{F_-}{\|\psi^+\|^2}$$

ainsi que

$$\frac{F}{\|\psi\|^2} = \frac{F_+ + F_-}{\|\psi^+\|^2 + \|\psi^-\|^2} = \frac{1 + \left(\frac{\|\psi^+\|^2}{\|\psi^-\|^2}\right) F_+}{\|\psi^+\|^2 + \|\psi^-\|^2} = \frac{F_+}{\|\psi^-\|^2}.$$

On définit alors l'endomorphisme $E : TM \rightarrow TM$ par

$$E := \frac{F}{\|\psi\|^2}.$$

Bien sur il s'agit de l'endomorphisme **associé** à la forme bilinéaire symétrique F , c'est à dire que pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, $g(E(X), Y) = \frac{F(X, Y)}{\|\psi\|^2}$, soit encore

$$E(X) = \frac{1}{\|\psi\|^2} \{F_+(X, e_1)e_1 + F_-(X, e_2)e_2\}$$

pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$.

Proposition 36 *Pour tout $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, on a*

$$F(X, Y) = \Re(\nabla_X \psi, Y \cdot \psi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Re(\nabla_X \psi, Y \cdot \psi) &= \Re(\nabla_X \psi^+ + \nabla_X \psi^-, Y \cdot \psi^+ + Y \cdot \psi^-) \\
&= \underbrace{\Re(\nabla_X \psi^+, Y \cdot \psi^+)}_{=0} + \Re(\nabla_X \psi^+, Y \cdot \psi^-) + \Re(\nabla_X \psi^-, Y \cdot \psi^+) \\
&\quad + \underbrace{\Re(\nabla_X \psi^-, Y \cdot \psi^-)}_{=0} \\
&= F_+(X, Y) + F_-(X, Y) = F(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Proposition 37 *Soit ψ un champ de spineurs non nul sur M et de longueur constante solution de l'équation $\mathcal{D}\psi = H\psi$, et $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. On définit un endomorphisme E de TM par*

$$g(E(X), Y) = \frac{1}{\|\psi\|^2} \Re(\nabla_X \psi, Y \cdot \psi) \quad (X, Y \in \Gamma(M, TM)).$$

Alors E est symétrique et vérifie :

1. $\nabla_X \psi^+ = E(X) \cdot \psi^-$ et $\nabla_X \psi^- = E(X) \cdot \psi^+$;
2. $\text{Tr}(E) = -H$.

On obtient donc que ψ est une solution de $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ sur M , ce qui implique certaines conditions d'intégrabilité :

Proposition 38 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 2 munie d'une structure spinorielle, et soit $E : TM \rightarrow TM$ un endomorphisme symétrique. On suppose qu'il existe une solution non triviale de l'équation $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$.*

Alors les deux équations ci-dessous ont lieu :

1. (Equation de Codazzi) $\nabla_X(E(Y)) - \nabla_Y(E(X)) - E([X, Y]) = 0$.
2. (Equation de Gauss) $\det E = \frac{1}{4}G$, où G est la courbure de Gauss de (M, g) .

Démonstration. On va calculer le tenseur de courbure spinorielle R^S de M . Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M ;

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}^S \psi &= \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X,Y]} \psi \\
&= \nabla_X(E(Y) \cdot \psi) - \nabla_Y(E(X) \cdot \psi) - E([X, Y]) \cdot \psi \\
&= \{\nabla_X(E(Y)) - \nabla_Y(E(X)) - E([X, Y]) + E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y)\} \cdot \psi
\end{aligned}$$

où on a utilisé la proposition 24. On pose $B(X, Y) = \nabla_X(E(Y)) - \nabla_Y(E(X)) - E([X, Y])$.

Comme E est un endomorphisme symétrique, on peut l'écrire (en tout point) sous la forme d'une matrice

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} E(e_2) \cdot E(e_1) - E(e_1) \cdot E(e_2) &= (be_1 + ce_2) \cdot (ae_1 + be_2) - (ae_1 + be_2) \cdot (be_1 + ce_2) \\ &= (-ab + b^2e_1 \cdot e_2 - ace_1 \cdot e_2 - bc) \\ &\quad -(-ab + ace_1 \cdot e_2 - b^2e_1 \cdot e_2 - bc) \\ &= (2b^2 - 2ac)e_1 \cdot e_2 \\ &= -2 \det(E)e_1 \cdot e_2. \end{aligned}$$

Donc pour le moment on a

$$R_{e_1, e_2}^S = \{B(e_1, e_2) - 2 \det(E)e_1 \cdot e_2\},$$

soit encore

$$B(e_1, e_2) = R_{e_1, e_2}^S + 2 \det(E)e_1 \cdot e_2. \quad (9)$$

La proposition 25 nous donne une autre expression pour R^S :

$$R_{e_1, e_2}^S = \frac{1}{4} \sum_{i, j=1}^2 \underbrace{g(R_{e_1, e_2} e_i, e_j)}_{=R_{12ij}} e_i \cdot e_j = \frac{1}{2} R_{1212} e_1 \cdot e_2.$$

On décompose ψ en $\psi = \psi^+ + \psi^-$. Avec $\omega_{\mathbb{C}} = ie_1 \cdot e_2$ et $\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^{\pm} = \pm \psi^{\pm}$, on obtient $e_1 \cdot e_2 \psi^{\pm} = \mp i \psi^{\pm}$, d'où en appliquant l'équation (9) en ψ^- et en ψ^+ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -B(e_1, e_2) \cdot \psi^- &= i \left(\frac{R_{1212}}{2} + 2 \det(E) \right) \cdot \psi^+ \\ B(e_1, e_2) \cdot \psi^+ &= i \left(\frac{R_{1212}}{2} + 2 \det(E) \right) \cdot \psi^- \end{cases}$$

On fait la multiplication de Clifford de la première équation par $B(e_1, e_2)$; comme on a $z \cdot z = -\|z\|^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, et d'après la seconde équation, on obtient

$$\|B(e_1, e_2)\|^2 \psi^- = - \left(2 \det(E) + \frac{R_{1212}}{2} \right)^2 \psi^-.$$

Si ψ^- est constant égal à 0, on peut refaire le calcul en faisant cette fois la multiplication de Clifford de la seconde équation par $B(e_1, e_2)$, ce qui fait apparaître ψ^+ dans l'équation finale, et ψ^+ ne peut pas être toujours nul car ψ est non trivial. Ceci permet d'affirmer que

$$\begin{cases} B(e_1, e_2) = 0 \\ 2 \det(E) + \frac{R_{1212}}{2} = 0, \end{cases}$$

De plus, pour $i = 1, 2$, $B(e_i, e_i) = 0$; en effet, $R_{e_i, e_i} = 0$ et $E(e_i) \cdot E(e_i) - E(e_i) \cdot E(e_i) = 0$, d'où

$$\begin{cases} B(X, Y) = 0 \\ \det E = -\frac{R_{1212}}{4} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{G}{4}. \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \nabla_X(E(Y)) - \nabla_Y(E(X)) - E([X, Y]) = 0 \\ \det E = -\frac{R_{1212}}{4} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{G}{4}. \end{cases}$$

□

Faisons un petit résumé de ce que l'on a vu; on note $\mathcal{K}(M, g, E)$ l'espace des champs de spineurs ψ sur la variété riemannienne spinorielle M de dimension 2 qui sont solution de l'équation $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$, avec E un endomorphisme symétrique du fibré tangent. Si on note $\text{Tr}(E) = -H$, on vient de montrer que tout champ de spineurs de $\ker(\mathcal{D} - H)$ de longueur constante était dans un $\mathcal{K}(M, g, E)$ pour un E bien choisi de trace $-H$.

Réciproquement, on a $\mathcal{K}(M, g, E) \subset \ker(\mathcal{D} - H)$ pour tout endomorphisme symétrique E de trace $-H$; en effet, supposons que $\{e_1, e_2\}$ soit une base orthonormée de diagonalisation de E ; si $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi &= e_1 \cdot (E(e_1) \cdot \psi) + e_2 \cdot (E(e_2) \cdot \psi) \\ &= -\text{Tr}(E)\psi \\ &= H\psi. \end{aligned}$$

6.4 Immersions des variétés spinorielles de dimension 2 dans \mathbb{R}^3

Dans cette section on va prouver que 3. \Rightarrow 1. dans le théorème de Friedrich. En fait, on va faire mieux que cela : on va expliciter une immersion. En effet, l'existence de l'immersion isométrique est directement due aux équations de Gauss-Codazzi de la proposition 38 (sous réserve de simple connexité, d'où le fait qu'on ait une immersion du **revêtement universel** de M dans \mathbb{R}^3 (cf corollaire B.1.1)) : pour cela, on pourra consulter par exemple [DoCa1]. Avant de se lancer dans le coeur du sujet, je fais quelques rappels sur la notion de structure quaternionique. On pourra consulter [Fri2] pour plus de détails.

6.4.1 Structure quaternionique sur $\Gamma(M, \Sigma M)$

On muni Σ_2 d'une structure quaternionique, c'est à dire d'un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire $\alpha : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha^2 = -\text{Id} \\ \alpha(i\tau) = -i\alpha(\tau). \end{cases} \quad (\tau \in \Sigma_2).$$

Il suffit pour cela de considérer (puisque $\Sigma_2 \simeq \mathbb{C}^2$) l'application $\alpha : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}$.

On a même :

$$\alpha(v \cdot \tau) = v \cdot \alpha(\tau) \quad (v \in \mathbb{R}^2, \tau \in \Sigma_2).$$

En effet, d'après le théorème 8, $\mathcal{C}l_2 \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Grâce aux relations sur l'algèbre de Clifford $e_1^2 = e_2^2 = -1$ et $e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_1 = 0$, on obtient que les images de e_1 et e_2 par cet isomorphisme sont respectivement

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Et alors on a bien $\alpha \circ g_1(\tau) = g_1 \circ \alpha(\tau)$ pour tout τ , et de même pour g_2 .

En itérant cette propriété, on voit directement que $\alpha(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \tau) = -\omega_{\mathbb{C}} \cdot \alpha(\tau)$ (attention α n'est pas \mathbb{C} -linéaire), et donc que $\alpha(\Sigma_2^{\pm}) = \Sigma_2^{\mp}$.

On étend naturellement cette structure quaternionique en un morphisme de fibrés vectoriels $\alpha : \Sigma M \rightarrow \Sigma M$, les propriétés restant inchangées, en particulier la commutativité avec la multiplication de Clifford, et $\alpha(\Sigma^{\pm} M) = \Sigma^{\mp} M$.

Je donne maintenant deux propriétés de α qui seront utiles pour la suite.

Proposition 39 *Soit $\psi \in \Gamma(M, \Sigma M)$. Alors on a, pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$:*

$$\nabla_X(\alpha(\psi)) = \alpha(\nabla_X \psi).$$

Démonstration. On applique la propriété 23 :

$$\begin{aligned} \nabla_X(\alpha(\psi)) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \alpha(\psi) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 g(\nabla_X e_i, e_j) \alpha(e_i \cdot e_j \cdot \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi \right) \\
&= \alpha(\nabla_X \psi).
\end{aligned}$$

□

Proposition 40 *Pour tous $\psi_1, \psi_2 \in \Gamma(M, \Sigma M)$, on a*

$$(\psi_1, \alpha(\psi_2)) = -\overline{(\alpha(\psi_1), \psi_2)}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour $(z_1, z_2, y_1, y_2) \in \mathbb{C}^4$,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\overline{y_2} \\ \overline{y_1} \end{pmatrix} = -z_1 \overline{y_2} + z_2 \overline{y_1} = -\overline{z_1 y_2 - z_2 y_1} = - \begin{pmatrix} -\overline{z_2} \\ \overline{z_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 6.4.1 : La construction de α ainsi que ses propriétés (exceptée $\alpha(\Sigma_2^\pm) = \Sigma_2^\mp$, qui n'a du sens qu'en dimension paire) s'adaptent aisément à la dimension 3. En effet, on sait que l'espace Σ_3 reste isomorphe à \mathbb{C}^2 , et la multiplication de Clifford est définie sur \mathbb{R}^3 à partir de

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4.2 Immersion de M dans \mathbb{R}^3

On se donne donc à présent un champ de spineurs ψ sur une surface riemannienne (M, g) vérifiant

$$\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi \quad (X \in \Gamma(M, TM)),$$

avec E un endomorphisme symétrique de TM .

Notons que dans ce cas, d'après le lemme 7 et la remarque 5.2.2, on a aussi le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \nabla_X \psi^+ &= E(X) \cdot \psi^- \\ \nabla_X \psi^- &= E(X) \cdot \psi^+ \end{cases} \quad (X \in \Gamma(M, TM)),$$

avec $\psi = \psi^+ + \psi^- \in \Gamma(M, \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M)$.

A **tout** champ de spineurs ψ on associe les 1-formes différentielles suivantes :

$$\xi^\psi(X) = 2(X \cdot \psi^+, \psi^-), \quad \xi_+^\psi = (X \cdot \psi^+, \alpha(\psi^+)), \quad \xi_-^\psi = (X \cdot \psi^-, \alpha(\psi^-))$$

pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$.

On décompose également ξ^ψ en parties réelle et imaginaire :

$$\xi^\psi = w^\psi + i\mu^\psi.$$

Enfin, on définit

$$\Lambda^\psi = \xi_+^\psi - \xi_-^\psi.$$

Proposition 41 *(M, g) une surface riemannienne spinorielle, $E : TM \rightarrow TM$ un endomorphisme symétrique de trace $-H$, et ψ un champ de spineurs solution de l'équation $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$. Alors*

1. $dw^\psi = 0$;
2. $d\mu^\psi = 2H\{\|\psi^-\|^2 - \|\psi^+\|^2\}dM$, où dM est le plan hyperbolique, c'est à dire la forme différentielle d'ordre 2 dont la matrice en tout point $M \in M$ dans toute base orthonormée de $T_m M$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. $d\Lambda^\psi = 0$.

Démonstration. 1. Pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, on a

$$\begin{aligned} dw^\psi(X, Y) &= X(w^\psi(Y)) - Y(w^\psi(X)) - w^\psi([X, Y]) \\ &= 2X(\Re(Y \cdot \psi^+, \psi^-)) - 2Y(\Re(X \cdot \psi^+, \psi^-)) - 2\Re([X, Y] \cdot \psi^+, \psi^-). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} X(\Re(Y \cdot \psi^+, \psi^-)) &= \Re(\nabla_X(Y \cdot \psi^+), \psi^-) + \Re(Y \cdot \psi^+, \nabla_X \psi^-) \\ &= \Re(\nabla_X Y \cdot \psi^+, \psi^-) + \Re(Y \cdot \underbrace{\nabla_X \psi^+}_{=E(X) \cdot \psi^+}, \psi^-) + \Re(Y \cdot \psi^+, \nabla_X \psi^-) \\ &= \Re(\nabla_X Y \cdot \psi^+, \psi^-) - g(Y, E(X)) \|\psi^-\|^2 + g(Y, E(X)) \|\psi^+\|^2. \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient

$$\begin{aligned}
dw^\psi(X, Y) &= 2\{g(X, E(Y)) - g(Y, E(X))\} \|\psi^-\|^2 \\
&\quad + 2\{g(X, E(Y)) - g(Y, E(X))\} \|\psi^+\|^2 \\
&\quad + 2\Re((\nabla_X Y - \nabla_Y X) \cdot \psi^+, \psi^-) - 2\Re([X, Y] \cdot \psi^+, \psi^-) \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque E est symétrique, et en utilisant les propriétés de la connexion de Levi-Civita riemannienne.

2. Le calcul précédent nous conduit de même à

$$\begin{aligned}
d\mu^\psi(X, Y) &= 2\Im\{(Y \cdot E(X) \cdot \psi^-, \psi^-) + (Y \cdot \psi^+, E(X) \cdot \psi^+)\} \\
&\quad - \Im\{(X \cdot E(Y) \cdot \psi^-, \psi^-) - (X \cdot \psi^+, E(Y) \cdot \psi^+)\} \\
&= 2\Im((Y \cdot E(X) - X \cdot E(Y)) \cdot \psi^-, \psi^-) \\
&\quad + 2\Im((E(Y) \cdot X - E(X) \cdot Y) \cdot \psi^+, \psi^+)
\end{aligned}$$

Dans une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de diagonalisation de E (où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres réelles associées), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l}
d\mu^\psi(e_1, e_1) = d\mu^\psi(e_2, e_2) = 0 \\
d\mu^\psi(e_1, e_2) = 2\Im((\lambda_1 e_2 \cdot e_1 - \lambda_2 e_1 \cdot e_2) \cdot \psi^-, \psi^-) \\
\quad + 2\Im(\lambda_2 e_2 \cdot e_1 - \lambda_1 e_1 \cdot e_2) \cdot \psi^+, \psi^+) \\
= 2\text{Tr}(E)\Im\{(e_2 \cdot e_1 \cdot \psi^-, \psi^-) + (e_2 \cdot e_1 \cdot \psi^+, \psi^+)\} \\
d\mu^\psi(e_2, e_1) = -d\mu^\psi(e_1, e_2).
\end{array} \right.$$

Or

$$\Re(e_2 \cdot e_1 \cdot \psi^\pm, \psi^\pm) = -g(e_2, e_1) \|\psi^\pm\|^2 = 0$$

donc $(e_2 \cdot e_1 \cdot \psi^\pm, \psi^\pm)$ est imaginaire pur, donc sa partie imaginaire est $-i(e_2 \cdot e_1 \cdot \psi^\pm, \psi^\pm)$, d'où

$$\begin{aligned}
d\mu^\psi(e_1, e_2) &= 2H\{(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^-, \psi^-) + (\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^+, \psi^+)\} \\
&= 2H\{\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2\}.
\end{aligned}$$

Donc finalement,

$$d\mu^\psi = 2H\{\|\psi^-\|^2 - \|\psi^+\|^2\} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. D'après les propriétés 39 et 40, on a

$$\begin{aligned}
d\xi_-^\psi(X, Y) &= (Y \cdot E(X) \cdot \psi^+, \alpha(\psi^-)) + (Y \cdot \psi^-, \alpha(E(X) \cdot \psi^+)) \\
&\quad - (X \cdot E(Y) \cdot \psi^+, \alpha(\psi^-)) - (X \cdot \psi^-, \alpha(E(Y) \cdot \psi^+)) \\
&= -\overline{(\alpha(Y \cdot E(X) \cdot \psi^+), \psi^-)} - (E(X) \cdot Y \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) \\
&\quad + \overline{(\alpha(X \cdot E(Y) \cdot \psi^+), \psi^-)} + (E(Y) \cdot X \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) \\
&= -\overline{(Y \cdot E(X) \cdot \alpha(\psi^+), \psi^-)} - (E(X) \cdot Y \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) \\
&\quad + \overline{(X \cdot E(Y) \cdot \alpha(\psi^+), \psi^-)} + (E(Y) \cdot X \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) \\
&= -(E(X) \cdot Y \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) - (E(X) \cdot Y \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) \\
&\quad + (E(Y) \cdot X \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) + (E(Y) \cdot X \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
d\xi_+^\psi(X, Y) &= (Y \cdot E(X) \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) - (E(X) \cdot Y \cdot \psi^+, \alpha(\psi^-)) \\
&\quad - (X \cdot E(Y) \cdot \psi^-, \alpha(\psi^+)) + (E(Y) \cdot X \cdot \psi^+, \alpha(\psi^-)).
\end{aligned}$$

Et on obtient alors

$$d(\xi_-^\psi - \xi_+^\psi)(X, Y) = 0$$

de nouveau par symétrie de E .

□

Rappelons que l'on cherche actuellement une immersion isométrique du revêtement universel de M dans \mathbb{R}^3 . Comme on sait que cette immersion existe, on va supposer que M est simplement connexe, et donc isométriquement immergée dans \mathbb{R}^3 .

Soit Ψ un spineur parallèle sur \mathbb{R}^3 ; en particulier il est de longueur constante. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien sur $\Gamma(\mathbb{R}^3, \Sigma\mathbb{R}^3)$. Soit $\psi = \Psi|_M$, et ψ^* le champ de spineurs déjà introduit défini sur M par

$$\psi^* = \psi^+ - i\psi^- = \frac{1}{2}(1 - i)\Psi|_M + \frac{1}{2}(-1 + i)\vec{N} \cdot \Psi|_M.$$

Alors pour $X \in \Gamma(M, TM)$ on a

$$\begin{aligned}
w^{\psi^*}(X) &= 2\Re(X \cdot \psi^{*+}, \psi^{*-}) \\
&= 2\Re(X \cdot \psi^+, -i\psi^-) \\
&= 2\Re(i(X \cdot \psi^+, \psi^-)) \\
&= -2\Im(X \cdot \psi^+, \psi^-).
\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}
(X \cdot \psi, \psi) &= (X \cdot \psi^+, \psi^-) + (X \cdot \psi^-, \psi^+) \\
&= (X \cdot \psi^+, \psi^-) - (\psi^-, X \cdot \psi^+) \\
&= 2i\Im(X \cdot \psi^+, \psi^-)
\end{aligned}$$

Donc

$$w^{\psi^*}(X) = -\Im(X \cdot \Psi|_M, \Psi|_M).$$

De même,

$$\Lambda^{\psi^*}(X) = (X \cdot \Psi|_M, \alpha(\Psi|_M)).$$

Les 1-formes w^{ψ^*} et Λ^{ψ^*} sont exactes; en effet, on définit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(v) = -\Im\langle v \cdot \Psi, \Psi \rangle, \quad h(v) = \langle v \cdot \Psi, \alpha(\Psi) \rangle. \quad (v \in \mathbb{R}^3).$$

Ici on a défini α sur $\Sigma\mathbb{R}^3$ conformément à ce qui avait été annoncé dans la remarque 6.4.1. Alors on a $d(f|_M) = w^{\psi^*}$ et $d(h|_M) = \Lambda^{\psi^*}$: pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $X \in \Gamma(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}
(df)_v(X(v)) &= f'(v)(X(v)) & (dh)_v(X(v)) &= h'(v)(X(v)) \\
&= f(X(v)) & &= h(X(v)) \\
&= -\Im\langle X \cdot \Psi, \Psi \rangle(v) & &= -\langle X \cdot \Psi, \alpha(\Psi) \rangle(v) \\
&= w_v^{\psi^*}(X(v)) & &= \Lambda_v^{\psi^*}(X(v)),
\end{aligned}$$

où on a utilisé que les applications f et h étaient linéaires. On conclut en utilisant l'isométrie entre $(\mathbb{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle|_M)$ et $(\Sigma M, (\cdot, \cdot)_{\Sigma M})$.

On rappelle que $\dim \Gamma(\mathbb{R}^3, \Sigma\mathbb{R}^3) = \dim \Sigma_3$, donc $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma(\mathbb{R}^3, \Sigma\mathbb{R}^3) = 2 \times 2^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 4$. L'orthogonal $\Delta_3(\Psi)$ du champ de spineurs Ψ dans l'espace vectoriel réel $\Gamma(\mathbb{R}^3, \Sigma\mathbb{R}^3)$ est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 :

$$\Delta_3(\Psi) = \{\Phi \in \Gamma(\mathbb{R}^3, \Sigma\mathbb{R}^3) \mid \Re\langle \Phi, \Psi \rangle = 0\}.$$

On suppose que la norme constante de Ψ vaut 1; alors $(\Psi, \alpha(\Psi))$ forme une base hilbertienne du \mathbb{C} -espace vectoriel $\Gamma(\mathbb{R}^3, \Sigma\mathbb{R}^3)$. En effet,

$$\langle \Psi, \alpha(\Psi) \rangle \stackrel{\text{prop. 40}}{=} -\overline{\langle \alpha(\Psi), \Psi \rangle} = -\overline{\overline{\langle \Psi, \alpha(\Psi) \rangle}} = 0$$

et

$$\|\alpha(\Psi)\|^2 = \langle \alpha(\Psi), \alpha(\Psi) \rangle = -\overline{\langle \alpha(\alpha(\Psi)), \Psi \rangle} = -\overline{\langle -\Psi, \Psi \rangle} = \|\Psi\|^2 = 1.$$

On obtient ainsi immédiatement que l'application $\Phi \mapsto (-\Im \langle \Phi, \Psi \rangle, \langle \Phi, \alpha(\Psi) \rangle)$ est une isométrie de $\Delta_3(\Psi)$ sur $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{R}^3$.

Comme M est inclus dans \mathbb{R}^3 , l'application

$$m \in M \mapsto m \cdot \Psi \in \Delta_3(\Psi)$$

est bien définie et fournit une isométrie $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ en composant avec l'isométrie précédente. Cette application est plus simplement l'application $(f|_M, h|_M)$. On peut également l'écrire sous forme intégrale avec la formule

$$m \in M \mapsto \left(\int_{m_0}^m w^{\psi^*}, \int_{m_0}^m \Re(\Lambda^{\psi^*}), \int_{m_0}^m \Im(\Lambda^{\psi^*}) \right) \in \mathbb{R}^3,$$

où m_0 est un point quelconque de M (simplement connexe). Cette expression est appelée représentation de Weierstrass. Elle généralise la représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales ; en effet, une surface minimale M_{\min} de \mathbb{R}^3 s'immerge localement de façon conforme dans \mathbb{R}^3 par la formule

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : M_{\min} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ m &\longmapsto \Re \left(\int_{m_0}^m \frac{1-g^2}{2} \mu, \int_{m_0}^m i \frac{1+g^2}{2} \mu, \int_{m_0}^m g \mu \right), \end{aligned}$$

où g est une fonction méromorphe et μ une 1-forme holomorphe sur M_{\min} telles que tout zéro d'ordre k de μ corresponde à un pôle d'ordre $2k$ de g . Le couple (g, μ) peut être vu comme un champ de spineurs ψ sur M_{\min} d'après l'exemple 5.2.1, et les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent $\mathcal{D}\psi = 0$.

Terminons par quelques résultats issus de l'étude des 1-formes précédentes. Soit un champ de spineurs ψ sur M solution de $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ pour tout champ de vecteurs X sur M . Cette solution est dite **exacte** si les 1-formes différentielles associées w^ψ et Λ^ψ sont exactes. D'après ce qui précède, il existe toujours des solutions exactes non triviales dans les $\mathcal{K}(M, g, E)$.

On rappelle la définition de la Hessienne d'une fonction $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} : pour $X, Y \in \Gamma(M, TM)$,

$$\text{Hess}(h)(X, Y) = \frac{1}{2} \{g(\nabla_X \overrightarrow{\text{grad}}(h), Y) + g(X, \nabla_Y \overrightarrow{\text{grad}}(h))\}.$$

Proposition 42 *Soit ψ un champ de spineurs sur M étant une solution exacte de l'équation $\nabla_X \psi = E(X) \cdot \psi$ pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$, et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $df = w^\psi$, $dh = \Lambda^\psi$. Alors*

1. $\text{Hess}(f) = 2(\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2)E$.
2. $\left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\|^2 = 4 \|\psi^+\|^2 \|\psi^-\|^2$.
3. $\text{Hess}(h) = -4(\psi^-, \alpha(\psi^+))E$.

$$4. \left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\|^2 = (\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2).$$

Démonstration. 1. Par définition, pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$, $w^\psi(X) = g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), X)$, donc pour tous $X, Y \in \Gamma(M, TM)$,

$$Y(w^\psi(X)) = g(\nabla_Y \overrightarrow{\text{grad}}(f), X) + g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), \nabla_Y X).$$

Ainsi,

$$2\text{Hess}(f)(X, Y) = X(w^\psi(Y)) + Y(w^\psi(X)) \underbrace{-g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), \nabla_X Y) - g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), \nabla_Y X)}_{=-w^\psi(\nabla_X Y, \nabla_Y X)}.$$

Et comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 41,

$$X(w^\psi(Y)) = 2\Re(\nabla_X Y \cdot \psi^+, \psi^-) - 2g(Y, E(X)) \|\psi^-\|^2 + 2g(Y, E(X)) \|\psi^+\|^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} 2\text{Hess}(f)(X, Y) &= 4g(Y, E(X))(\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2) + \underbrace{2\Re((\nabla_X Y + \nabla_Y X) \cdot \psi^+, \psi^-)}_{=w^\psi(\nabla_X Y + \nabla_Y X)} \\ &\quad - w^\psi(\nabla_X Y + \nabla_Y X). \end{aligned}$$

Soit

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = 2(\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2)g(E(X), Y).$$

$$2. \text{ On a } \left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\|^2 = g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), \overrightarrow{\text{grad}}(f)) = w^\psi(\overrightarrow{\text{grad}}(f)).$$

Or $\left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\|$ est également la norme de l'opérateur $X \mapsto g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), X)$. De plus, on a, pour tout $X \in \Gamma(M, TM)$

$$\begin{aligned} g(\overrightarrow{\text{grad}}(f), X) &= w^\psi(X) \\ &= 2\Re(X \cdot \psi^+, \psi^-) \\ &\leq 2\|X \cdot \psi^+\| \|\psi^-\| \\ &= 2\|X\| \|\psi^+\| \|\psi^-\|. \end{aligned}$$

Ainsi, $\left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\| \leq 2\|\psi^+\| \|\psi^-\|$. Pour montrer l'égalité, il faut montrer qu'il existe un $X \in \Gamma(M, TM)$ tel que l'égalité soit réalisée dans $\Re(X \cdot \psi^+, \psi^-) \leq \|X\| \|\psi^+\| \|\psi^-\|$.

On utilise pour cela ce qui a été dit au début de la section 6.4.1 sur les structures quaternioniques. Nous avons montré que

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on voit que

$$\Sigma_2^+ = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ iz_1 \end{pmatrix} \mid z_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

et

$$\Sigma_2^- = \left\{ \begin{pmatrix} iz_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

En posant

$$\psi = [\tilde{\sigma}, s^+ + s^-] \quad \text{et} \quad X = [\tilde{\sigma}, \chi],$$

avec

$$s^+ = \begin{pmatrix} z_1 \\ iz_1 \end{pmatrix}, \quad s^- = \begin{pmatrix} iz_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = ae_1 + be_2,$$

on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\rho(ae_1 + be_2)(s^+) = s^-,$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} ai & bi \\ bi & -ai \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ iz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on prend a et b tels que $a + ib = \frac{z_2}{z_1}$ (si $z_1 = 0$, c'est que $\psi^+ = 0$, et l'égalité est vraie). On a ainsi construit un X vérifiant $X \cdot \psi^+ = \psi^-$, d'où

$$\Re(X \cdot \psi^+, \psi^-) = \|X\| \|\psi^+\| \|\psi^-\|.$$

Et donc $\left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\| = 2 \|\psi^+\| \|\psi^-\|$, soit $\left\| \overrightarrow{\text{grad}}(f) \right\|^2 = 4 \|\psi^+\|^2 \|\psi^-\|^2$.

3. et 4. se prouvent par des méthodes analogues.

□

On a immédiatement que

$$\det(\text{Hess}(f)) = 4(\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2)^2 \det(E) = (\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2)^2 G$$

puisqu'on a vu que $\det(E) = \frac{G}{4}$ à la proposition 38 (équation de Gauss).

Corollaire 6.4.1 *Soit M une variété riemannienne compacte et spinorielle, et soit ψ un élément non trivial de $\mathcal{K}(M, g, E)$. Alors ψ^+ ou ψ^- s'annule en au moins un point m_0 en lequel la courbure de Gauss est positive ou nulle.*

Démonstration. M est compacte donc f précédemment introduite atteint son maximum en un point m_0 de M en lequel

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(m_0) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \det(\text{Hess}(f)(m_0)) \geq 0.$$

D'après la propriété et la remarque précédente, cela prouve que $\psi^+(m_0)$ ou $\psi^-(m_0)$ est nul, et que $G(m_0) \geq 0$. □

On admet le résultat suivant :

Proposition 43 *Pour toute variété riemannienne (M, g) de dimension 2 et toute fonction lisse $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, la 2-forme différentielle*

$$\{2 \det(\text{Hess}(h)) - \|\overrightarrow{\text{grad}}(h)\|^2 G\} dM$$

est exacte, et peut donc s'écrire $d\mu$ pour une certaine 1-forme μ .

On rappelle une version du théorème de Stokes : si M est une variété orientée compacte sans bord de dimension n et que $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, alors

$$\int_M d\alpha = 0.$$

Utilisant la propriété et le théorème précédents dans le cas d'une solution exacte ψ de $\mathcal{K}(M, g, E)$, en supposant M compacte, on obtient

$$\int_M (\|\psi^+\|^2 - \|\psi^-\|^2)^2 G = 2 \int_M \|\psi^+\|^2 \|\psi^-\|^2 G,$$

soit encore :

Proposition 44 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte spinorielle et soit une solution exacte $\psi \in \mathcal{K}(M, g, E)$. Alors*

$$\int_M (\|\psi\|^4 - 6 \|\psi^-\|^2 \|\psi^+\|^2) G = 0.$$

Dans le cas où la solution exacte est le spineur ψ^* défini à partir de la restriction à M d'un spineur parallèle Ψ de \mathbb{R}^3 comme vu précédemment, la formule précédente devient

$$\int_M G = 3 \int_M (i\vec{N} \cdot \Psi, \Psi)^2 G.$$

Appendices

A Groupes de Lie, algèbres de Lie

Pour cette section, on se réfère à [Da], [Mas] et [Pau1].

A.1 Groupes de Lie

Définition A.1.1 Un **groupe de Lie** G est une variété différentielle munie d'une structure de groupe telle que les opérations de produit et d'inversion soient différentiables.

Le théorème suivant, difficile, permet de donner beaucoup d'exemples de groupes de Lie.

Théorème 15 *Un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.*

Exemple A.1.1 1. (\mathbb{R}_+^*, \times) ;

2. (S^1, \times) ;

3. $(O_n(\mathbb{R}), \times)$, $(SL_n(\mathbb{R}), \times)$, $(SO_n(\mathbb{R}), \times)$;

4. $(U_n(\mathbb{C}), \times)$, $(SL_n(\mathbb{C}), \times)$, $(SU_n(\mathbb{C}), \times)$.

A.2 Algèbres de Lie

Dans tout ce paragraphe, G est un groupe de Lie pour la loi “ \cdot ” ; on omettra néanmoins d'écrire “ \cdot ” à chaque fois, et on notera e son élément neutre.

Définition A.2.1 Soient $a, g \in G$; on définit la **translation à gauche** $L_a : G \rightarrow G$ de g par a par

$$L_a g = ag.$$

Par définition d'un groupe de Lie, L_a est un difféomorphisme de G dans G . Sa différentielle en g , notée $L'_a(g)$, est donc un automorphisme de $T_a G$ dans $T_{ga} G$.

Définition A.2.2 Soit X un champ de vecteurs sur G ; X est dit **invariant à gauche** si

$$L'_a(g)(X(g)) = X(ag) \quad (a, g \in G).$$

Proposition 45 *Il existe une correspondance bijective entre les vecteurs de $T_e G$ et l'ensemble \mathfrak{g} des champs de vecteurs invariants à gauche, donnée par*

$$\begin{aligned} T_e G &\longleftrightarrow \mathfrak{g} \\ v &\longmapsto X_v : g \longmapsto L'_g(e)(v) \\ X(e) &\longleftarrow X. \end{aligned}$$

De plus ces applications sont réciproques l'une de l'autre.

En particulier, l'espace \mathfrak{g} est un espace vectoriel de dimension $\dim G$.

Proposition 46 *L'espace \mathfrak{g} est une partie de l'espace vectoriel $\chi(G)$ des champs de vecteurs sur G stables par le crochet de Lie. Ainsi, $(\mathfrak{g}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ est muni d'une structure d'algèbre, appelée **algèbre de Lie** associée au groupe G .*

D'après la proposition 45, l'algèbre de Lie de G peut aussi être vue comme étant $(T_e G, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$.

On notera toujours par des caractères gothiques l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

A.3 Cas d'un groupe de matrice

Le but de cette sous-section est de préciser l'algèbre de Lie de G lorsque G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , sachant que c'est le cas de tous les groupes "classiques". On pourra en particulier déterminer l'algèbre de Lie de $SO_n(\mathbb{R})$. Comme ces considérations ne constituent pas le principal objectif de ce rapport, les résultats sont donnés sans démonstrations : elles sont néanmoins consultables dans [Da].

Définition A.3.1 G un groupe topologique quelconque. Un **sous-groupe à un paramètre** de G est un morphisme de groupes topologiques $\lambda : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$.

Théorème 16 *Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow GL(V)$ un sous-groupe à un paramètre. Alors il existe un unique endomorphisme $x \in \mathcal{L}(V)$ tel que $\lambda(t) = \exp(tx)$ (où l'exponentielle est l'exponentielle usuelle, définie sur un espace de Banach) pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, λ est C^1 et déterminé par sa dérivée $x = \lambda'(0)$.*

Définition A.3.2 Soit V de dimension finie sur \mathbb{K} . Pour $u, v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u, v] = uv - vu$, et on l'appelle crochet de Lie de u et v . En notation matricielle, cela donne $[X, Y] = XY - YX$ pour $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 9 Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right) \right)^k = \exp(X + Y);$
2. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right) \exp\left(\frac{-X}{k}\right) \exp\left(\frac{-Y}{k}\right) \right)^{k^2} = \exp([X, Y])$

Corollaire A.3.1 Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$. L'ensemble

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$$

est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par le crochet de Lie, ce qui le munit d'une structure d'algèbre.

Théorème 17 Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$. L'espace \mathfrak{g} précédemment défini est canonique, c'est à dire ne dépend pas du plongement de G dans un $GL_n(\mathbb{K})$, puisque c'est également l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G . Cette définition coïncide également (à isomorphisme près) avec celle de la partie A.2.

Remarque A.3.1 : Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, \mathfrak{g} n'est pas nécessairement un \mathbb{K} -sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple A.3.1 • D'après cette définition de l'algèbre de Lie, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}_n &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(tM) \in \text{SO}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(tM) \exp(tM)^t = I_n, \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Or comme l'exponentielle vérifie $\exp(M)^t = \exp(M^t)$ (vérification simple par passage à la limite), on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}_n &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(t(M + M^t)) = I_n, \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M + M^t = 0\} \\ &= \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \simeq \Omega^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

• On obtient de même :

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) &= \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \\ \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}. \end{aligned}$$

B Revêtements

B.1 Revêtements d'espaces topologiques

Dans cette section nous définissons les notions de revêtement et de revêtement universel, ainsi que certaines de leurs propriétés, sans démonstration. Les espaces considérés sont toujours supposés **séparés** et **localement connexes par arcs**; en particulier, les notions de connexité et de connexité par arcs coïncident. Ce contexte permet d'appliquer tous les résultats qui suivent à des variétés différentielles, ce qui est le cadre de notre étude. Voir [A], [Paul] et [Pau2]

Définition B.1.1 Soit B un espace topologique. Un **revêtement** de B est la donnée d'un espace topologique E et d'une application continue $p : E \rightarrow B$ tel que pour tout $b \in B$, il existe un ouvert V_b de b dans B , un espace discret non vide F_b et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times F_b$ tels que $\pi_b(\phi(u)) = b$ pour tout $u \in p^{-1}(V_b)$, où π_b est la projection de $B \times F_b$ sur F_b .

B est appelée la **base**, E l'**espace total**, F la **fibres** et ϕ une **trivialisation locale** du revêtement au dessus de V_b .

Proposition 47 Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement d'un espace connexe par arcs B . Soient b et b' deux points de B . Il existe une bijection entre les fibres $p^{-1}(b)$ et $p^{-1}(b')$. En particulier ces fibres ont le même cardinal. S'il est fini, ce cardinal est appelé le **nombre de feuilletés** du revêtement.

Cette propriété nous autorise à écrire simplement F et π , sans préciser le point b .

Exemple B.1.1 – Le revêtement trivial est la projection $B \times F \rightarrow B$, où F est un espace discret. La propriété de trivialité locale est ici globale.

– L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(2i\pi t)$ de \mathbb{R} dans S^1 est un revêtement, de fibre \mathbb{Z} .

Proposition 48 (1) La projection d'un revêtement est une application surjective : en effet, $p^{-1}(b)$ est en bijection avec $b \times F$.

(2) Si E est compact (respectivement connexe, connexe par arcs), alors B est compact (respectivement connexe, connexe par arcs).

(3) Si B est séparé, alors E est séparé.

(4) Si $A \subset B$, alors $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$ est un revêtement.

(5) Si B est compact, alors E est compact si et seulement si les fibres de p sont finies.

(6) Un revêtement est un homéomorphisme local.

Définition B.1.2 Si $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B'$ sont deux revêtements, on appelle **morphisme de revêtements de p dans p'** un couple d'applications continues $H : E \rightarrow E'$ et $h : B \rightarrow B'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

commute.

Un isomorphisme de revêtements est un morphisme de revêtements dans lequel H et h sont des homéomorphismes. Si $E = E'$, $B = B'$ et $h = Id$, on dit que H est un automorphisme. On appelle alors $\text{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes de revêtements.

Proposition 49 *L'ensemble $\text{Aut}(E)$ est un groupe muni de la composition des applications, qui opère sur E et sur les fibres $p^{-1}(b)$.*

Définition B.1.3 Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est **galoisien** si E est connexe par arcs et si le groupe $\text{Aut}(E)$ opère transitivement sur les fibres de E .

Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est **universel** s'il est galoisien et si, pour tout revêtement connexe $q : D \rightarrow B$, il existe un morphisme de revêtements h au dessus de B :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow p & \downarrow q \\ & & B \end{array}$$

Théorème 18 (1) *S'il existe, un revêtement universel est unique à isomorphisme de revêtements près.*

(2) *Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. Si B est localement connexe par arcs et si E est simplement connexe, alors p est universel.*

Définition B.1.4 Un espace B est semi-localement simplement connexe si tout point $b \in B$ possède un voisinage U tel que tout lacet de base b dans U soit homotope dans B au lacet constant.

Remarque B.1.1 : C'est en particulier le cas des variétés différentielles puisqu'alors chaque point de la variété est inclus dans un ouvert difféomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . Elles sont même

localement simplement connexes : si M est une variété différentielle, chaque point $m \in M$ possède un voisinage U tel que tout lacet de base m dans U soit homotope dans U au lacet constant (puisque c'est le cas de \mathbb{R}^n).

Théorème 19 *Soit B un espace connexe localement connexe par arcs. Pour qu'il existe un revêtement simplement connexe de B , il faut et il suffit que B soit semi-localement simplement connexe.*

Corollaire B.1.1 *Toute variété différentielle M admet un revêtement universel \widetilde{M} , et on a $\dim \widetilde{M} = \dim M$.*

Définition B.1.5 Soit G un groupe topologique. Un **groupe de revêtement** de G est un groupe topologique \widetilde{G} qui est un revêtement de G en tant qu'espace topologique et tel que l'application du revêtement $\pi : \widetilde{G} \rightarrow G$ soit un morphisme de groupes.

B.2 Revêtements de groupes de Lie

Définition B.2.1 Soient G et G' deux groupes de Lie ; une application $f : G \rightarrow G'$ est un **morphisme de groupes de Lie** si c'est un morphisme de groupe de classe C^∞ pour les structures différentielles de groupes de Lie de G et G' .

Définition B.2.2 Considérons G et G' deux groupes de Lie, d'éléments neutres respectifs e et e' . Un **revêtement de groupes de Lie** de G' dans G est un morphisme de groupes de Lie de G' dans G , qui est un revêtement (entre les variétés sous-jacentes).

Un (iso)morphisme (de revêtements de groupes de Lie) d'un revêtement de groupes de Lie $p : G' \rightarrow G$ dans un revêtement de groupes de Lie $p' : G'' \rightarrow G$ est un (iso)morphisme de groupes de Lie $\psi : G' \rightarrow G''$ qui est un (iso)morphisme de revêtements (c'est-à-dire tel que $p' \circ \psi = p$).

Proposition 50 *Un morphisme $f : G \rightarrow H$ de groupes de Lie est un revêtement si et seulement si sa différentielle $f' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Théorème 20 *Soit G un groupe de Lie connexe. Il existe un revêtement de groupes de Lie $\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}_G : \widetilde{G} \rightarrow G$, unique à unique isomorphisme (de revêtements de groupes de Lie) près, tel que \widetilde{G} soit simplement connexe.*

De plus, le sous-groupe $\Gamma = \widetilde{\pi}^{-1}(e)$ de \widetilde{G} est distingué, discret, central, et le groupe de Lie G est isomorphe au groupe de Lie quotient Γ/\widetilde{G} .

Si H est un groupe de Lie connexe et $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes de Lie, alors il existe un et un seul morphisme de groupes de Lie $\widetilde{f} : \widetilde{G} \rightarrow \widetilde{H}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{H} \\
\downarrow \tilde{\pi}_G & & \downarrow \tilde{\pi}_H \\
G & \xrightarrow{f} & H
\end{array}$$

commute.

Une application $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$ comme ci-dessus, et par abus \tilde{G} , est appelée un **revêtement universel** (de groupes de Lie) de G .

B.3 Relèvement d'applications

Dans toute cette section, E et B désignent des espaces topologiques et $p : E \rightarrow B$ désigne un revêtement.

On suppose connue la notion de groupe fondamental, ainsi que ses propriétés de base (en particulier sa structure de groupe) : si X est un espace topologique, on note $\pi_1(X, x_0)$ son groupe fondamental au point de base $x_0 \in X$ (ou simplement $\pi_1(X)$ si X est connexe par arcs). Rappelons juste que $\pi_1(X, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopies de lacets de base x_0 dans X ; on note $[c]$ la classe d'homotopie du lacet c de base x_0 .

Proposition 51 Soient X et Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. L'application

$$\begin{aligned}
f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\
[c] &\longmapsto [f \circ c]
\end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

Définition B.3.1 Soit X un espace topologique, et $f : X \rightarrow B$ une fonction continue. Un **relèvement** de f à E est une application continue $F : X \rightarrow E$ telle que $p \circ F = f$.

Proposition 52 Pour tout chemin $c : [0, 1] \rightarrow B$ d'origine b_0 et pour tout $x_0 \in p^{-1}(b_0)$, il existe un unique chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $p \circ \gamma = c$.

Lemme 10 Soit X un espace topologique connexe et localement connexe, et $f, g : X \rightarrow E$ deux fonctions continues telles que $p \circ f = p \circ g$.

S'il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$, alors $f = g$.

Théorème 21 Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow B$ une fonction continue. Soit également $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ et $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.

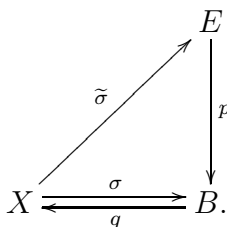
- (1) Si X est connexe et localement connexe par arcs, il existe $F : X \rightarrow E$ relèvement de f tel que $F(x_0) = e_0$ si et seulement si $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.
- (2) Si X est connexe, le relèvement précédent, s'il existe, est unique.

Démonstration. Je donne ici une ébauche de preuve car elle est importante pour le corollaire suivant, qui est le plus utile pour notre travail initial.

Le second point est immédiat grâce au lemme 10. Pour le premier point, on vérifie que le candidat suivant convient : pour $x \in X$, on définit $F(x)$ comme étant l'extrémité du relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine e_0 du chemin $\gamma = f \circ c$, où c est un chemin quelconque de x_0 à x : $F(x) = \tilde{f \circ c}(1)$.

Il faut vérifier que la définition est cohérente (indépendante du choix de c), et que F est bien un relèvement de f . □

Corollaire B.3.1 E, B et p comme précédemment et soient X un espace topologique simplement connexe (en particulier connexe par arcs) et $q : X \rightarrow B$ tels que q soit un revêtement de X , et $\sigma : X \rightarrow B$ une section (continue) de $\Gamma(X, B) : q \circ \sigma = id_X$. Alors σ se relève en une section $\tilde{\sigma} \in \Gamma(X, E)$ (pour le revêtement $q \circ p : E \rightarrow X$) :



Démonstration. Puisque X est supposé simplement connexe, $\sigma_*(\pi_1(X)) = e_{\pi_1(E)}$ et l'hypothèse du théorème 21 est vérifiée. La section σ se relève bien en $\tilde{\sigma}$, reste à vérifier que c'est une section : si $x \in X$,

$$(q \circ p) \circ \tilde{\sigma}(x) = q(p \circ \tilde{\sigma}(x)) = q \circ \sigma(x) = x$$

puisque $p \circ \tilde{\sigma} = id_X$ car $\tilde{\sigma}$ est un relèvement de σ . □

Bibliographie

- [A] Michèle Audin, *Topologie : revêtements et groupe fondamental*, Broché, 2004.
- [Da] Jean-François Dat, *Groupes et Algèbres de Lie*, Cours de Master à l'Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [DoCa1] Manfredo Perdigão Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [DoCa2] Manfredo Perdigão Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [Fri1] Thomas Friedrich, *On the Spinor Representation of Surfaces in Euclidean 3-Space*, Journal of Geometry and Physics 28, 1998.
- [Fri2] Thomas Friedrich, *Dirac Operator in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2000.
- [GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin et Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1987.
- [Gon] Margherita Gonzato, *Algèbres de Clifford*, Projet universitaire semestriel, 2005.
- [Hij] Oussama Hijazi, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, Proceedings of the Summer School on Geometric Methods in Quantum Field Theory, Villa de Leyva, Colombia, July 12-30, (1999), World Scientific 2001.
- [KN] Shoshichi Kobayashi et Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume 1*, Interscience Publishers, 1963.
- [Lang] Serge Lang, *Algebra*, Addison Wesley, Reading, 1965.
- [LM] H. Blaine Lawson Jr., Marie-Louise Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series, 1989.
- [Mas] Thierry Masson, *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*, Cours de DEA de Physique Théorique, 2008.
- [Mor] Bertrand Morel, *Surfaces in S^3 and \mathbb{H}^3 via spinors*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Volume 23, Grenoble, 2005.
- [N] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, 1990.
- [O] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.
- [Pan] Pierre Pansu, *Connexion de Levi-Civita*, Cours de géométrie différentielle en M2 MFA, Université Paris-Sud, 2005.

- [Pau1] Frédéric Paulin, *Leçon de géométrie riemannienne*, Cours de seconde année de Master, Département de Mathématiques d'Orsay, 2011.
- [Pau2] Frédéric Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Cours de première année de Master, ENS Ulm, 2009.
- [Pey] Gabriel Peyre, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Broché, 2004.
- [Rau] Simon Raulot, *Géométrie spinorielle et théorèmes de la masse positive*, Mémoire de DEA, 2003.
- [Rod] Rudy Rodsphon, *Groupes d'holonomie et théorème d'Ambrose-Singer*, Cours de M2, Université Claude Bernard de Lyon 1, 2011.
- [S] Daniel Schaub, *Eléments d'algèbre commutative*, Cours de M1, Université d'Angers, 2003.

Résumé : Ce mémoire présente les notions nécessaires à l'introduction du concept de la géométrie spinorielle, ainsi que des premières utilisations pour l'étude de la géométrie des surfaces de \mathbb{R}^3 . A ce titre, on définit et on donne des propriétés des différents types de fibrés au dessus d'une variété différentielle, ainsi que de nombreux exemples. Les connexions sur les fibrés principaux et les dérivées covariantes sur les fibrés vectoriels sont ensuite mises en correspondances.

Une parenthèse algébrique vient introduire les algèbres de Clifford sur un espace quadratique. Les principales propriétés sont données et démontrées, et les algèbres de Clifford sur \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont ensuite classifiées.

Ces notions permettent alors de définir des structures spinorielles sur une variété. On présente ensuite l'opérateur de Dirac ainsi que la formule de Schrödinger-Lichnerowicz. La dernière partie consiste en l'étude du théorème de Friedrich, qui donne des conditions spinorielles nécessaires et suffisantes pour qu'une variété de dimension 2 s'immerge dans \mathbb{R}^3 .

Mots clés : Fibré principal, fibré vectoriel, connexion, dérivée covariante, algèbre de Clifford, représentation spinorielle, structure spinorielle, connexion de Levi-Civita riemannienne, connexion de Levi-Civita spinorielle, champs de spineurs, multiplication de Clifford, opérateur de Dirac, formule de Schrödinger-Lichnerowicz, sous-variétés de \mathbb{R}^3 .