



**HAL**  
open science

## Calcul stochastique pour des processus non adaptés

Redouane Raki

► **To cite this version:**

Redouane Raki. Calcul stochastique pour des processus non adaptés. Génie des procédés. 1994.  
hal-01898129

**HAL Id: hal-01898129**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-01898129v1>**

Submitted on 18 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Nom : RAKI

Prénom : Radouane

Date : 28 Juin 1994

Mémoire du DEA, Option Probabilités

Université Nancy

Titre du sujet :

CALCUL STOCHASTIQUE POUR DES PROCESSUS NON  
ADAPTES

Responsable d'étude : Pr. VALLOIS

## PLAN DE MEMOIRE

<b>Introduction.....</b>	<b>4</b>
<b>Un point sur le développement en chaos de Wiener .....</b>	<b>5</b>
<b>I.L'opérateur dérivation sur l'espace de Wiener .....</b>	<b>8</b>
<b>II.L'intégrale de Skorohod.....</b>	<b>16</b>
<b>III.Relation entre les intégrales de Skorohod et de Stratonovich...25</b>	
<b>IV.L'intégrale de Skorohod comme processus Stochastique.....</b>	<b>31</b>
<b>V.Références.....</b>	<b>42</b>

# Introduction

---

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de  $\mathcal{F}$ .

$B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$  Un mouvement Brownien standard réel la théorie d'Itô permet de définir l'intégrale stochastique pour un processus  $u = (u_t)_{0 \leq t \leq 1}$  mesurable vérifiant :

$\int_0^1 u_t^2 dt < \infty$  p.s et  $u$  adapté à la filtration de  $B$  le problème – à présent- est de définir une intégrale stochastique pour des processus non adaptés ;

Plusieurs méthodes ont été développées dans ce sens ; Citons-en quelques-unes :

1. "Le grossissement de filtration " qui consiste à introduire une nouvelle filtration  $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq 1}$  de sorte que  $u_t$  soit  $\mathcal{G}_t$ -mesurable  $\forall t$ , et  $B$  une  $\mathcal{G}$ - semi martingale - voir pour cela, [Je] comme référence-

2. Le développement de  $u_t$  en chaos de Wiener, a été la base de l'introduction des intégrales stochastiques des processus non adaptés, et cette approche constitue la théorie de Skorohod. Références : [Sk], [Be].

3. Si  $\{e_i\}_{i \geq 0}$  est une base orthonormée complète de  $L^2[0,1]$ , l'approche d'Ogawa consiste à définir  $\int_0^1 u_t dB_t$  comme la somme de séries  $\sum_{i \geq 1} \langle u, e_i \rangle \int_0^1 e_i(t) dB_t$ . Ce qui illustre donc une séparation des variables.

Références : [Ma], [oga].

## Représentation intégrale des martingales et développement en séries orthogonales

---

$B = (B_t)_{t \geq 0}$  désigne un mouvement Brownien standard sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  : un espace de probabilité complet.  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  désigne la filtration Brownienne.

### Théorème : (Rappel)

---

Soit  $F$  une variable aléatoire de carré intégrable, il existe alors un unique processus  $u$  adapté et élément de  $L^2(T \times \Omega)$ , où  $T = [0, t_0]$  u  $\mathbb{R}_+$ , tel que :

$$F = E(F) + \int_T u_t dB_t$$

Si pour  $s$  fixé,  $u(s)$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_s$ - mesurable et donc :

$$u(s) = E[u(s)] + \int_0^s u_2(t_1, s) B(dt_1)$$

Et posant  $f_1(t_1) = E[u(t_1)]$ , alors

$$F = E(F) + \int_0^{t_0} f_1(t_1) B(dt_1) + \int_0^{t_0} \int_0^{t_2} u_2(t_1, t_2) B(dt_1) B(dt_2)$$

Par itération, on obtient :

$$F = E(F) + \sum_{m=1}^n \int_0^{t_0} \int_0^{t_m} \dots \int_0^{t_2} E(u_m(t_1, \dots, t_m)) B(dt_1) \dots B(dt_m) \\ + \int_0^{t_0} \int_0^{t_{n+1}} \dots \int_0^{t_2} u_{n+1}(t_1 \dots t_{n+1}) B(dt_1) \dots B(dt_{n+1})$$

Posons  $f_n = E(u_n)$  ;

Alors  $f_n(t_1, \dots, t_n)$  est une fonction déterministe définie sur les points  $(t_1, \dots, t_n)$  tels que  $t_1 < \dots < t_n$ .

En outre,  $f_n$  est de carré intégrable sur  $T^n$ .

Pour de telles fonctions- choisies mesurables- on introduit l'intégrale stochastique multiple par :

$$I_n(f_n) = n! \int_0^{t_0} \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f_n(t_1 \dots t_n) B(dt_1) \dots B(dt_n)$$

Si  $f_n$  est symétrique,  $I_n(f_n)$  a la même expression, ainsi prendrait-on- pour commodité- des fonctions symétriques.

Les propriétés principales de l'intégrale stochastique multiple sont les suivantes :

$$E(I_n(f_n)I_m(f_m)) = 0 \quad \text{pour } n \neq m$$

$$\begin{aligned} E(I_n(f_n)^2) &= (n!)^2 \int_0^{t_0} \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f_n(t_1 \dots t_n)^2 dt_1 \dots dt_n \\ &= (n!)^2 \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \end{aligned}$$

**Théorème :**

Toute variable aléatoire  $F$  de carré intégrable, peut-être développée en séries d'intégrales multiples.

Soit :

$$F = E(F) + \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m)$$

Références : [Me], [Ma], [Nu]



# I. L'opérateur dérivation sur l'espace de Wiener

---

## Cadre théorique :

$T = [0, t_0]$  ou  $\mathbb{R}_+$  : intervalle des temps.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  désignera l'espace canonique de probabilité associé au mouvement Brownien standard sur  $T$ , ie :

$\Omega = \xi^0(T) = \text{Espace des fonctions continues sur } T.$

$P = \text{la mesure de Wiener sur } \Omega.$

$\mathcal{F} = \text{la tribu Borélienne sur } \Omega, \text{ complète.}$

Une variable aléatoire définie sur le t espace de probabilité sera appelée une fonctionnelle Brownienne :  $F(\omega)$

Et on veut introduire la dérivée de  $F$  par rapport à  $\omega$ .

Soit :

$\xi_p^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \xi^\infty, \text{ aux dérivées à croissance polynomiale.}$

$S$ : la classe des variables aléatoires  $F$  de la forme  $F = f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$   
où  $f \in \mathcal{C}\xi_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $(t_1, \dots, t_n) \in T$ .

Il est facile de voir que  $S$  est un sous-espace dense dans  $L^2(\Omega)$ .

## Définition

---

La dérivée d'une fonctionnelle  $F \in S$  de la forme

$F = f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  est le processus stochastique  $(D_t F)_{t \geq 0}$  donné par :

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial n_i} (B_{t_1} \dots B_{t_n}) \mathbb{1}(t)_{[0, t_i]} \quad (1.1)$$

Exemple :

$$D_t B_s = \mathbb{1}(t)_{[0, s]}$$

Remarque :

A première vue, il n'est pas clair que  $DF$  est une dérivée de  $F$ , et pour l'interpréter comme dérivée directionnelle, on considère l'espace d'Hilbert  $H = L^2(T)$  pour  $h \in H$  ;

Le produit scalaire  $\langle DF, h \rangle_H = \int_T D_t F h(t) dt$  coïncide avec la dérivée directionnelle de  $F$  dans la direction de  $\int_0^{\cdot} h(s) ds$  ; ie:

$$\begin{aligned} \langle DF, h \rangle_H &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial n_i} (B_{t_1} \dots B_{t_n}) \int_0^{t_i} h(s) ds \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} F(\omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} h(s) ds) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L^2 \left( \frac{F(\omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} h_s ds) - F(\omega)}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Analogie avec le cas  $\mathbb{R}^n$ .

$$df \cdot h = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial n_i} h_i$$

L'opérateur D est ainsi définie sur un sous-espace dense de  $L^2(\Omega)$  et à valeurs dans  $L^2(T \times \Omega)$

Question : D est-il un opérateur clos ?

Lemme : Soient  $F, G \in S$  et  $h \in L^2(T)$

Alors on a :

$$E(G \langle DF, h \rangle) = E(-F \langle DG, h \rangle + FG \int_T h_t dB_t) \quad (1.2)$$

Preuve :

Pour  $\varepsilon > 0$ , on a par la formule de GIRSANOV.

$$\begin{aligned} & E\left[G(\omega)\left(F\left(\omega + \varepsilon \int_0^\cdot h(s)ds\right) - F(\omega)\right)\right] \\ &= E\left[F(\omega)G\left(\omega - \varepsilon \int_0^\cdot h(s)ds\right) - G(\omega)\right] + F(\omega)G\left(\omega - \varepsilon \int_0^\cdot h(s)ds\right) \\ & \quad \left(\exp\left[\varepsilon \int_0^1 h dB - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 h^2(s)ds\right] - 1\right) \end{aligned}$$

En divisant par  $\varepsilon$  et faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient le résultat

Le lemme est connu sous le nom de la formule d'intégration par parties.

## Conséquence

Si  $(F_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $S$  qui converge vers zéro dans  $L^2(\Omega)$  et telle que  $(DF_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\eta$  dans  $L^2(T \times \Omega)$  ;

Alors  $\eta \equiv 0$

Ce qui traduit que  $D$  est bien un opérateur clos.

On notera  $\mathbb{D}^{1,2}$  le domaine de  $D$ .

## Remarque

$\mathbb{D}^{1,2}$  est égale à l'adhérence de  $S$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,2}$  avec,  
 $\|F\|_{1,2} = \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|DF\|_{L^2(T \times \Omega)}$

---

## Quelques propriétés de l'opérateur D

---

### Proposition :

---

Soit

$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$  une variable aléatoire de carré intégrable, alors :

$$F \in D^{1,2} \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} m m! \|f_m\|_{L^2([0,1]^m)}^2 < \infty \quad (1.3)$$

Ainsi

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(f_m(\cdot, t)) \quad (1.4)$$

Et  $E \int_0^1 (D_t F)^2 dt$  coïncide avec la somme des séries de (1.3)

### Preuve :

Supposons que :

$$F = I_m(f_m), \quad T = [0,1]$$

Alors pour tout  $h$

$$\langle DF, h \rangle_H = \frac{d}{d\varepsilon} \{I_m(f_m)(\omega + \varepsilon \int_0^1 h(s) ds)\} \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \int_{[0,1]^m} f_m(t_1, \dots, t_m) (dB_{t_1} + \varepsilon h(t_1)dt_1) \dots (dB_{t_m} \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon h(t_m)dt_m) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= m \int_{[0,1]^m} f_m(t_1, \dots, t_m) dB_{t_1} \dots dB_{t_{m-1}} h(t_m) dt_m \\
&= \int_0^1 m I_{m-1}(f_m(\cdot, t)) h(t) dt .
\end{aligned}$$

Donc :  $D_t F = m I_{m-1}(f_m(\cdot, t))$ .

### Proposition :

---

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\xi^1$  à dérivées partielles bornées

Supposons

$$F = (F_1 \dots F_n) \text{ où } (F_i)_{i=1}^n \in \mathbb{D}^{1,2}$$

Alors :  $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$

Et

$$D[\varphi(F)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF_i$$

Preuve :

Immédiate, en approchant  $F$  par des éléments de l'ensemble  $S$ .

Dérivée d'une espérance conditionnelle :

Soit  $A$  un Borélien de  $T$

$\tilde{\mathcal{F}}_A$  = la tribu engendrée par les variables aléatoires

$W(B) = \int_T 1_A(t) dB_t$  où  $B \subset A$  et borné

On verra que si  $F \in D^{1,2}$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_A$ -mesurable

Alors  $D_t F = 0$  p. p sur  $A \times \Omega$

Ce qui rejoint le cas particulier des processus adaptés.

Résultat technique :

Soit  $F$  une variable aléatoire de carré intégrable ;

$$F = \sum_{m=0}^n I_m(f_m)$$

Et  $A$  un Borélien de  $T$

Alors

$$E(F/\mathcal{F}_A) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m 1_A^{\otimes m}) \quad (1.5)$$

Preuve :

Il suffit de supposer que  $F = I_m(f_m)$  où les  $f_m$  sont les symétrisations des produits tensoriels de la forme :

$1_{B_1} \otimes 1_{B_2} \otimes \dots \otimes 1_{B_m}$  où  $B_1 \dots B_m$  sont des intervalles bornés et disjoints. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{F}{\mathcal{F}_A}\right) &= E\left(\frac{B(B_1)B(B_2) \dots B(B_m)}{\mathcal{F}_A}\right) \\ &= B(B_1 \cap A) \dots B(B_m \cap A) \\ &= I_m\left(1_{(B_1 \cap A) \times \dots \times (B_m \cap A)}\right) \end{aligned}$$

B étant toujours le mouvement Brownien réel standard.

Proposition :

---

Soit  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  et  $A \subset \mathbb{R}_+$

Alors  $E\left(\frac{F}{\mathcal{F}_A}\right) \in D^{1,2}$  et  $D_t\left(E\left(\frac{F}{\mathcal{F}_A}\right)\right) = E\left(\frac{D_t F}{\mathcal{F}_A}\right) \mathbb{1}_A(t)$

p. s. dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ .



## Preuve :

C'est une conséquence immédiate des formules (1.4) et (1.5).

Si  $F \in D^{1,2}$  et  $F$  est  $\mathcal{F}_{A^c}$ -mesurable

Alors  $D_t F = 0$  p. s dans  $A \times \Omega$ .

## Commentaires :

La dérivation dans l'espace de Wiener a été étudiée par plusieurs auteurs : Kree [k] ; Malliavin [Ma] ; Shigekawa [Shi] ; Watanabe [Wa] ; [Boa,Hiy] .

Sugita [sug] a montré le résultat suivant:

Une variable aléatoire de carré intégrable  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  si et seulement si, elle vérifie :

- i. Pour tout  $h \in H$ , il y a une version du processus  $\{F(\omega + t \int_0^\cdot h_s ds), t \in \mathbb{R}\}$  avec des trajectoires continues.
- ii. Il existe une fonction  $DF \in L^2(T \times \Omega)$  telle que

$$\frac{1}{t} \left( F(\omega + t \int_0^\cdot h_s ds) - F(\omega) \right) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\text{probabilité}} \langle DF, h \rangle_H$$

Pour tout  $h \in H$ .

## II. Intégrale de SKOROHOD

---

### Définition :

---

Soit  $\delta$  l'adjoint de l'opérateur  $D$ ,  $\delta$  est un opérateur clos de  $L^2(T \times \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  tel que :

i. Le domaine de  $\delta$ , noté  $\mathcal{Dm} \delta$  est la classe des processus

$$u \in L^2(T \times \Omega) ;$$

$$\left| E \int_T D_t F u_t dt \right| \leq c \|F\|_2 \quad \forall F \in S \quad (2.1)$$

ii. Si  $u \in \mathcal{Dm} \delta$ , alors  $\delta(u)$  est l'élément de  $L^2(\Omega)$

Caractérisé par

$$E(F \delta(u)) = E \int_T D_t F u_t dt \quad \forall F \in S \quad (2.2)$$

### L'opérateur $\delta$ est appelé :

L'intégrale stochastique de Sokorohod du processus  $u$ , il transforme des processus de carré intégrable en variable aléatoire.

$$\text{Soit } \delta(u) = \int_T u_t dB_t$$

Par ailleurs, le fait que le domaine de l'opérateur  $D$  soit dense dans  $L^2(\Omega)$ , entraîne que l'opérateur adjoint  $\delta$  est clos.

### Lemme :

Soit  $u$  un processus mesurable tel que  $E \int_T u(t)^2 dt < \infty$ , il existe alors une famille de fonction  $\{f_m(t_1, \dots, t_m, t)\}_{m \geq 1}$  déterministes, mesurables et de carrés intégrables, telle que  $f_m$  est symétrique par rapport aux  $m$  premières variables

Et

$$u_t = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(\cdot, t)) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.3)$$

Références [Ma], [Sko].

### Proposition :

---

Soit  $u \in L^2(T \times \Omega)$  un processus de carré intégrable qui se développe selon (2.3)

$$\text{Alors } u \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m) \text{ converge dans } L^2(\Omega) \quad (2.4)$$

Où  $\tilde{f}_m$  est la symétrisée de  $f_m$ , ie :

$$\tilde{f}_m(t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{m+1} \left[ f_m(t_1, \dots, t_m) + \sum_{i=1}^m f_m(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_m, t_1) \right]$$

Preuve :

Supposons :  $G = I_n(g)$  est une intégrale stochastique multiple d'ordre  $n$  ; alors on a :

$$\begin{aligned}
 E \int_T u_t D_t G dt &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_T E [I_m(f_m(\cdot, t)) n I_{n-1}(g(\cdot, t))] dt \\
 &= \int_T E [t_{n-1} (f_{n-1}(\cdot, t) n I_{n-1}(g(\cdot, t)))] dt \\
 &= n(n-1)! \int_T \langle f_{n-1}(\cdot, t), g(\cdot, t) \rangle_{L^2(T^{x-1})} dt \\
 &= n! \langle f_{n-1}, g \rangle_{L^2(T^x)} \\
 &= n! \langle \tilde{f}_{n-1}, g \rangle_{L^2(T^x)} \\
 &= E [I_n(\tilde{f}_{n-1}) I_n(g)]
 \end{aligned}$$

Pour  $u \in \mathcal{D} \cap \delta$ , ceci se traduit par :

$$E[\delta(u)G] = E[I_n(\tilde{f}_{n-1})G] \quad \forall G = I_n(g)$$

Donc  $I_n(\tilde{f}_{n-1})$  coïncide avec la projection de  $\delta(u)$  sur le  $n^{\text{ième}}$  chaos de Wiener, par conséquent, la série (2.4) converge dans  $L^2(\Omega)$  vers  $\delta(u)$ .

Conséquence immédiate :

$$E(\delta(u)^2) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! \|\tilde{f}_m\|_{L^2(T^{m+1})}^2$$

I.

## II. Propriétés de l'intégrale de SKOROHOD

---

Nous allons montrer -à présent- que l'intégrale de SKOROHOD, admet des propriétés similaires à l'intégrale d'Itô pour les processus adaptés.

- i.  $E(\delta(u)) = 0$  si  $u \in \mathcal{D}m \text{q} S$ .
- ii.  $\delta$  est un opérateur linéaire dans  $\mathcal{D}m \delta$ .
- iii. Intégration des processus élémentaires de  $S$  :

Soit

$$S_H = \left\{ u(t) = \sum_{j=1}^n F_j h_j(t); F_j \in S \text{ et } h_j \in H \right\}$$

De la formule d'intégration par parties, on déduit :

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^n F_j \int_T h_j(t) dB_t - \sum_{j=1}^n \int_T D_t F_j h_j(t) dt.$$

**Preuve :**

Prenons  $u = Fh$  et  $T = [0,1]$  et  $G \in S$ .

$$\begin{aligned} E[G\delta(u)] &= \int_T E(FhD_t G) dt \\ &= \int_0^1 E[h(D_t(FG) - GD_t F)] dt \end{aligned}$$

Car  $D_t(GF) = FD_t G + GD_t F$

$$\begin{aligned} &= E \left[ \int_0^1 hD_t(FG) dt - G \int_0^1 hD_t F dt \right] \\ &= E \left[ \left( F\delta(h) - \int_0^1 h(t)D_t F \right) G \right] \end{aligned}$$

Pour établir d'autres propriétés de l'intégrale de Skorohod, nous allons introduire une nouvelle classe du processus contenue dans  $\mathcal{D}^{1,2}$ .

### Définition

---

$\mathbb{L}^{1,2}$  = la classe des processus  $u \in L^2(T \times \Omega)$ ,  $u(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$  et il existe une version mesurable  $D_s u_t$  vérifiant

$$E \int_T \int_T (D_s u_t)^2 ds dt < \infty \quad (2.8)$$

Ce qui revient à dire, en termes de développement chaotique :

$$\sum_{m=1}^{\infty} m m! \|f_m\|_{L^2(T^{m+1})}^2 < \infty$$

Pour

$$u_t = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(\cdot, t)).$$

$\mathbb{L}^{1,2}$  est un espace d'Hilbert avec la norme

$$\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_{L^2(T \times \Omega)}^2 + \|Du\|_{L^2(T \times \Omega)}^2 \quad (2.9)$$

A présent, nous allons voir la covariance entre deux intégrales de Skorohod.

Par souci de simplification des notations :

Le mouvement Brownien standard sera noté dorénavant  $w = (w_t)_{t \geq 0}$ .

### Proposition :

---

Soient  $u$  et  $v$  deux processus dans  $\mathbb{L}^{1,2}$

$$\text{Alors, } E(\delta(u)\delta(v)) = \int_T E(u_t v_t) dt + \int_{T \times T} E(D_s u_t D_t v_s) ds dt \quad (2.10)$$

### Conséquence :

Si  $u$  et  $v$  sont des processus adaptés, le second terme à droite est nul et l'on retrouve donc la propriété d'isométrie usuelle de l'intégrale d'Itô.

### Preuve :

On peut supposer  $u=v$  et par une polarisation on se ramène au cas général, supposons que  $u$  ait un développement chaotique de Wiener de la forme :

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m(\cdot, t))$$

$$\text{Ainsi : } E(\delta(u)^2) = \int_T E(u(t))^2 dt$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)! \int_{T^{m+1}} \left[ \frac{1}{m+1} \left( f_m(t_1, \dots, t_m, t) + \sum_{j=1}^m f_m(t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_m, t_j) \right) \right]^2 dt_1 \dots dt_m dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_T E(u(t))^2 dt + \sum_{m=1} \frac{m!}{m+1} \left[ (m+1) \int_{T^{m+1}} f_m(t_1, \dots, t_m, t) dt_1 \dots dt_m dt \right. \\
&\quad \left. + m(m+1) \int_{T^{m+1}} f_m(t_1, \dots, t_{m-1}, s, t) f_m(t_1, \dots, t_{m-1}, s, t) dt_1 \dots dt_{m-1} ds dt \right] \\
&= \int_T E(u_t^2) dt + \int_T \int_T E(D_s u_t D_t u_s) ds dt .
\end{aligned}$$

### Relation de commutation entre D et $\delta$ :

Soit  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$  tel que  $\{D_t u_s\}_{s \geq 0}$

Soit Skorohod intégrable pour presque tout  $t$ , et il y ait une version du processus  $\{\int_T (D_t u_s) d\omega_s, t \geq 0\} \in L^2(T \times \Omega)$ ,

Alors  $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$  et on a :

$$D_s(\delta(u)) = \int_T (D_t u_s) d\omega_s + u_t \quad (2.11)$$

### Preuve

Soit  $v \in \mathbb{L}^{1,2}$  un processus arbitraire, on a :

$$\begin{aligned}
E(\delta(u)\delta(v)) &= \int_T E(u_t v_t) dt + \int_T \int_T E(D_t u_s D_s v_t) ds dt \\
&= E\left(\int_T u_t v_t dt + \int_T \left(\int_T D_t u_s d\omega_s\right) v_s dt\right) \\
&= \left(\int_T v_t \left(u_t + \int_T D_t u_s d\omega_s\right) dt\right)
\end{aligned}$$

Le résultat en découle car  $\delta = D^*$  et  $\mathbb{L}^{1,2}$  est dense dans  $L^2(T \times \Omega)$ .



## Intégrale de Skorohod d'un processus multiplié par une v. a.

Soit  $u$  Skorohod intégrale

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$  est tel que  $E(F^2 \int_T u_t^2 dt) < \infty$  alors :

$$\int_T (Fu_t) d\omega_t = F \int_T u_t d\omega_t - \int_T (D_t F) u_t dt . \quad (2.12)$$

Preuve :

Soit  $G \in S$  ;  $G = g(\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n})$ ; nous avons

$$\begin{aligned} E \int_T (D_t G) F u_t dt &= \int_T E(u_t (D_t (FG) - G D_t F)) dt \\ &= E \left( G \left( F \delta(u) - \int_T u_t D_t F dt \right) \right) \end{aligned}$$

## Intégrales stochastiques adaptées comme cas particulier :

Lemme :

soit  $A$  un Borélien borné de  $T$  et  $F$  une v. a de carré intégrale mesurable- $\mathcal{F}_{A^c}$ .

Alors,  $F1_A$  est un processus Stokorohod intégrable, avec,

$$\delta(F1_A) = F\omega(A) \quad (2.13)$$

### Preuve :

Supposons d'abord que  $F \leftarrow \mathbb{D}^{1,2}$ , ainsi

$$\begin{aligned}\delta(F\mathbb{1}_A) &= F\omega(A) - \int_T D_t F \mathbb{1}_A(t) dt \\ &= F\omega(A)\end{aligned}$$

$\delta$  étant un opérateur clos, le résultat est donc étendu par un argument de limite

### Conséquence

Un processus élémentaire adapté est donc Skorohod intégrale i.e

$$E \subset \mathcal{D}\text{om } \delta$$

Et l'intégrale d'Itô coïncide avec celle de Skorohod,

$$\delta\left(\sum_{i=1}^n F_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)\right) = \sum_{i=1}^n F_i (\omega_{t_{i+1}} - \omega_{t_i})$$

Comme  $\delta$  est un opérateur clos ; on obtient

$$L_a^2(T \times \Omega) \subset \mathcal{D}\text{om } \delta \text{ (a : adapté)}$$

L'intégrale d'Itô et celle de Skorohod coïncident donc sur  $L_a^2(T \times \Omega)$ .

### III. Relation entre les intégrales de Skorohod et de STRATONOVICH.

---

Soit  $T = [0,1]$ ,  $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$  une partition de  $T$  et  $|\Pi| = \sup_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) = \text{diamètre de } \Pi$ .

**Lemme :**

Soit  $S_\Pi$  une famille d'éléments d'un espace métrique complet  $\gamma$ , indexé par la classe des partitions de  $T$ .  $d(x, y)$  étant la distance entre  $x$  et  $y$  éléments de  $\gamma$ .

Supposons que pour toute partition  $\Pi_0$  fixée, on ait :

$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} d(S_{\Pi \vee \Pi_0}, S_\Pi) = 0$  où  $\Pi \vee \Pi_0$  est la partition induite par  $\Pi \cup \Pi_0$  : la réunion, alors  $(S_\Pi)$  converge vers  $S$  si et seulement si :

pour toute suite croissante de partitions  $(\Pi(x))_{n \geq 0}$  de  $T$  telle que  $|\Pi(x)| \rightarrow 0$ ,  $S_{\Pi(x)}$  converge vers  $S$ .

Référence : [Ma] ;

Pour tout processus  $u \in L^2([0,1] \times \Omega)$  et toute partition  $\Pi$  de  $[0,1]$ , on introduit les processus :

$$u^\Pi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}^{(t)}$$

$$\tilde{u}^\Pi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E \left( u_s / \mathcal{F}_{[t_i, t_{i+1}]^c} \right) ds \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}^{(t)}$$

Lemme :

Les processus  $u^\pi$  et  $\tilde{u}^\pi$  convergent vers  $u$  dans  $L^2([0,1] \times \Omega)$ .

En plus, si  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ , la convergence est dans  $\mathbb{L}^{1,2}$ .

Argument :

Théorème de convergence des martingales, ie, essayer d'écrire  $u^{\pi^n}$  et  $\tilde{u}^{\pi^n}$  sous forme d'espérances conditionnelles dans l'espace de probabilité  $L^2([0,1] \times \Omega)$ .

Où  $\pi^n$  est une suite croissante de partitions de  $[0,1]$  telle que  $|\pi^n| \rightarrow 0$ .

A présent, on considère les sommes de Riemann associées aux processus  $u^\pi$  et  $\tilde{u}^\pi$  :

$$S^\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s ds (\omega_{i+1} - \omega_i)$$

$$\tilde{S}^\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E \left( u_s / \mathcal{F}_{[t_i, t_{i+1}]^c} \right) ds (\omega_{i+1} - \omega_i)$$

D'après le lemme :

$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ de carré intégrable et } \mathcal{F}_{A^c} \text{-mesurable.} \\ \text{Alors } \delta \left( F \mathbb{1}_A \right) = F \omega(A) \end{array} \right.$

On ne déduit que :  $\tilde{u}^\pi$  est Skorohod intégrable et  $\tilde{S}^\pi = \delta(\tilde{u}^\pi)$ .

Par ailleurs : pour que  $u^\pi$  soit Skorohod intégrable, il faut des conditions supplémentaires ; par exemple si  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$  alors  $u^\pi \in \mathbb{L}^{1,2} \subset \mathcal{D}_m \delta$  et l'on a :

$$\delta(u^\pi) = S^\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s u_t ds dt.$$

**Conclusion :**

- i. Si la famille  $\tilde{S}^\pi$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers une limite alors  $u$  est Skorohod intégrable et la limite est  $\delta(u)$ .
- ii. Réciproquement, si  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$  alors  $\tilde{S}^\pi = \delta(\tilde{u}^\pi)$  et  $\delta(u^\pi)$  convergent tous les deux vers  $\delta(u)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

### Définition :

---

Un processus mesurable  $u$  tel que  $E \int_0^1 u_t^2 dt < \infty$  est Stratonovich intégrable si la famille  $S^\Pi$  converge en probabilité quand  $|\Pi| \rightarrow 0$ , la limite est  $\int_0^1 u_t \circ d\omega_t$ .

### Remarque :

D'après l'expression  $\delta(u^\Pi)$  :

$u \in \mathbb{L}^{1,2} \Leftrightarrow u$  est Stratonovich intégrable.

$\Gamma$  où la classe  $\mathbb{L}_c^{1,2}$  des processus  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$  tels qu'il existe une version de  $Du$  vérifiant :

- i. Les trajectoires  $s \rightarrow D_t u_s$  sont continuées de  $[0,1] \rightarrow L^2(\Omega)$ . Uniformément par rapport à  $t$ , et idem sur  $[t, 1]$
- ii.  $\text{ess sup}_{s,t} E(|D_s u_t|^2) < \infty$ .  $\mathbb{L}_{c,loc}^{1,2}$  est l'espace des processus qui sont localement dans  $\mathbb{L}_c^{1,2}$ .

Pour  $u \in \mathbb{L}_c^{1,2}$ , on définit les limites suivantes, dans  $L^2([0,1] \times \Omega)$  :

$$D_t^+ u_t = \lim_{\varepsilon \searrow 0} D_t u_{t+\varepsilon}$$

$$D_t^- u_t = \lim_{\varepsilon \searrow 0} D_t u_{t-\varepsilon}$$

Et l'on pose  $\nabla = D^+ + D^-$

**Théorème :**

Si  $u \in \mathbb{L}_{c,loc}^{1,2}$ , alors,  $u$  est Stratonovich intégrable et

$$\int_0^1 u_t \circ d\omega_t = \int_0^1 u_t d\omega_t + \frac{1}{2} \int_0^1 (\nabla u)_t dt$$

**Preuve :**

Quitter à faire une localisation, on peut supposer  $u \in \mathbb{L}_c^{1,2}$ . Alors d'après l'expression de  $\delta(u^\pi)$  il suffit de montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s u_t ds dt \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^1 (\nabla u)_s ds$$

En probabilité

Pour ce faire, on va montrer que :

$$E \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^{t_{i+1}} (D_s u_t) ds - \frac{1}{2} \int_0^1 D_t^+ u_t dt \right| \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} 0$$

Idem pour  $D^-$ . D'où le résultat.

On majore cette espérance par :

$$\begin{aligned} & E \left( \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^{t_{i+1}} (D_t u_s - D_t^+ u_t) ds \right| \right) \\ & + E \left( \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} D_t^+ u_t dt - \frac{1}{2} \int_0^1 D_t^+ u_t dt \right| \right) \\ & \leq \sup_{t < s, |s-t| \leq |\pi|} E |D_t u_s - D_t^+ u_t| \\ & + E \left| \int_0^1 D_t^+ u_t \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) - \frac{1}{2} \right) dt \right| \end{aligned}$$

Le 1<sup>er</sup> terme tend vers zéro par définition de  $\mathbb{L}_c^{1,2}$ .

Pour le second terme, on sait que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ pour la topologie faible.}$$

Ainsi donc

$$\int_0^1 D_t^+ u_t \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) - \frac{1}{2} \right) dt \xrightarrow{|\Pi| \rightarrow 0} 0$$

Finalement, la convergence dans  $L^2(\Omega)$  découle de l'uniforme intégrabilité, en utilisant la définition de l'espace  $\mathbb{L}_c^{1,2}$ .

**Remarque :**

i. Si les trajetions  $(s, t) \mapsto D_s u_t$  sont continues de  $[0,1]^2 \rightarrow L^2(\Omega)$ , le second terme  $\frac{1}{2} \int_0^1 (\nabla u)_t dt$  est réduit à  $\int_0^1 D_t u_t dt$ .

ii. Si  $u$  est un processus adapté de carré intégrable et en plus, c'est une semi martingale dont la décomposition canonique est  $u_t = u_0 + m_t + v_t$

Alors on sait que  $\int_0^1 u_t \circ d\omega_t$  existe, en plus

$$\int_0^1 u_t \circ d\omega_t = \int_0^1 u_t d\omega_t + \frac{1}{2} \langle u, \omega \rangle_1$$

Où  $\langle u, \omega \rangle_1$  est le processus covariation quadratique de  $u$  et du mouvement Brownien.



Si en plus,  $u \in \mathbb{L}_c^{1,2}$  dans ce cas  $D_t^- u_t = 0$  (adapté)

Et alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_t^+ u_t dt &= \langle u, \omega \rangle_1 \\ &= \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i)) (\omega_{t_{i+1}} - \omega_{t_i}) \end{aligned}$$

## IV. l'intégrale de SKOROHOD comme processus stochastique

---

Supposons que  $u = \{u(t), 0 \leq t \leq 1\}$  est un processus Skorohod intégrable, pour définir l'intégrale de Skorohod indéfinie-la première pathologie rencontrée est qu'en général-les processus de la forme  $u \mathbb{1}_{]s,t]}$  ne sont pas forcément Skorohod intégrable.

$\mathbb{L}^s$  désigne la classe des processus  $u$  tels que  $u \mathbb{1}_{[0,t]}$  soit Skorohod intégrable  $\forall t \in [0,1]$ .

**Remarque :**

$$\mathbb{L}^{1,2} \subset \mathbb{L}^s.$$

On définit le processus  $X$  par :

$$X_t = \delta(u \mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_0^t u_s d\omega_s .$$

**Propriété :**

---

$$\forall s < t \quad E \left( X_t - X_s / \mathcal{F}_{[s,t]^c} \right) = 0.$$

Où  $\mathcal{F}_{[s,t]^c}$  désigne –comme d'habitude- la  $\sigma$ -algèbre engendrée par accroissement du mouvement Brownien dans l'intervalle  $]0, s]$ réuni à l'intervalle  $]t, 1]$ .

## Preuve :

Il suffit de prendre une  $v$ . a  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  et  $\mathcal{F}_{[s,t]^c}$ -mesurable. Ainsi on a :

$$E(F \int_s^t u_r d\omega_r) = E \int_0^1 u_r D_r F \mathbb{1}_{[s,t]}(r) dr = 0$$

Car  $DF=0$

Ce processus  $X$  est continu dans  $L^2$  et s'annule en zéro.

On étudie à présent deux propriétés de ses trajectoires :

- i. Existence d'une version continue.
- ii. Variation quadratique.

Soit  $Sk$  la classe des processus de la forme  $X(t) = \int_0^t u_s d\omega_s$  où  $u$  est un processus Skorohod intégrable sur tout intervalle.

Pour l'étude de (i), d'autres pathologies surgissent, en effet, il existe des processus  $u \in SK$  tels que l'intégrale  $X(t)$  n'a pas de version continue, et c'est plutôt raisonnable puisque le processus  $X$  n'est pas une martingale et l'on ne dispose pas d'inégalités maximales pour monter l'Existence d'une version continue.

L'idée est de partir d'un processus  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$  et imposer ensuite quelques conditions techniques pour pouvoir monter l'existence d'une version continue par le biais du critère de continuité de Kolmogorov et les  $L^p$  inégalités de Meyer.

## 1. $L^p$ Estimation pour l'intégrale de Skorohod.

### Proposition :

---

Soit  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$  et  $p \geq 2$ , alors :

$$\|s(u)\|_p = C_p \left( \left( \int_0^1 (Eu_t)^2 dt \right)^{1/2} + \left\| \left( \int_0^1 \int_0^1 (D_s u_t)^2 ds dt \right)^{1/2} \right\|_p \right)$$

Ref. [Ma]

## 2. Continuité et variation quadratique de l'intégrale Skorohod

### Proposition :

Soit  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$

Supposons que pour  $p > 2$  on ait :

$$E \int_0^1 \left( \int_0^1 (D_s u_t)^2 ds \right)^p dt < \infty, \text{ alors le processus}$$

$\left\{ \int_0^t u_s d\omega_s, 0 \leq t \leq 1 \right\}$  admet une version continue.

### Preuve :

Supposons  $E(u_t) = 0 \quad \forall t$ , puisque le processus Gaussien  $\int_0^t E(u_s) d\omega_s$  a toujours une version continue.

Par la proposition précédente et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} E \left( \left| \int_s^t u_r d\omega_r \right|^{2p} \right) &\leq C_p E \left( \left| \int_s^t \int_0^1 (D_\alpha u_r)^2 d\alpha dr \right|^p \right) \\ &\leq (t - s)^{p-1} E \int_0^1 \left( \int_0^1 (D_\alpha u_r)^2 d\alpha \right)^p dr \end{aligned}$$

Juste avant d'attaquer la variation quadratique de notre processus, nous avons un lemme qui sera utile pour ce faire.

**Lemme :**

Soit  $Y$  un processus mesurable élément de  $L^p([0,1] \times \Omega)$  pour  $p > 2$ .

Soit  $\Pi^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < b_{k(n)}^n = 1\}$  une suite de partitions de  $[0,1]$  telle que  $|\Pi^n| \rightarrow 0$ , alors

$\sum_{i=0}^{x(n)-1} \frac{1}{(t_{i+1}^n - t_i^n)^2} \left( \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} Y_s ds \right)^2 (W_{i+1}^n - W_i^n)^2$  converge dans  $L^1(\Omega)$  vers  $\int_0^1 Y_s^2 ds$ .

Ref : [Ma], [Sko].

## Théorème :

---

Soit  $u \in \mathbb{L}_{loc}^{1,2}$ , alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s dW_s \right)^2 \xrightarrow{|\Pi \rightarrow 0|} \int_0^1 u_s^2 ds$$

Probabilité

En plus si  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ , la convergence est dans  $L^1(\Omega)$ .

**Preuve :**

Comme d'habitude, quitté à faire une localisation, on supposera  $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ .

En fait, on établira le résultat uniquement pour

$u \in \mathbb{L}^{1,2} \cap L^+([0,1] \times \Omega)$  qui est dense dans  $\mathbb{L}^{1,2}$ , ensuite on considère de nouveau le processus

$$u^\Pi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

Qui converge en norme dans  $\mathbb{L}^{1,2}$  vers  $u$ , quand  $|\Pi \rightarrow 0|$ .

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} E \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s dW_s \right)^2 - \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s^\Pi d_s \right)^2 \right] \\ \leq \|u - u^\Pi\|_{\mathbb{L}^{1,2}} \|u + u^\Pi\|_{\mathbb{L}^{1,2}} \xrightarrow{|\Pi| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Reste donc à considérer le terme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^\pi(s) dw_s \right)^2 ;$$

Soit donc

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^\pi(s) dw_s \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \delta \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_r dr \right) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}[} (t) \right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_r dr \right) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s u_r ds dr \right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \end{aligned}$$

Où

$$a_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_r dr \right) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})$$

$$b_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s u_r ds dr$$

On a utilisé :

$$\int (Fu_t) dw_t = F \int u_t dw_t - \int (D_t F) u_t dt.$$

D'une part :

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (D_s u_r)^2 ds dr \xrightarrow[|\mathbb{T}| \rightarrow 0]{L^1(\Omega)} 0$$

Et

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)^2} \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_r dr \right)^2 (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2$$

Qui converge vers  $\int_0^1 u_s^2 ds$  dans  $L^1(\Omega)$  et d'après le lemme.

Finalement :

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{L^1(\Omega)} 0$$



### 3. La formule d'Itô :

#### Théorème :

---

Soit un processus de la forme :

$$X_t = \int_0^t u_s dw_s + \int_0^t v_s ds$$

Où

$$\begin{cases} u \in \mathbb{L}_{loc}^{2,4} \\ v \in \mathbb{L}_{loc}^{1,4} \end{cases}$$

On suppose que X admet une version continue

Soit  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois continûment différentiable, alors, on a :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) (\nabla X)_s u_s ds$$

Où  $\nabla = D^+ + D^-$

#### Remarque :

L'espérance  $\nabla$  est bien défini pour X, en effet :

$$D_s X_t = u_s \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} + \int_0^t D_s v_r dr + \int_0^t D_s u_r dw_r$$

D'où :

$$(\nabla X)_t = u_t + 2 \int_0^t D_t v_r dr + 2 \int_0^t D_t u_r dw_r$$

Par ailleurs, si les processus u et v sont adaptés  $(\nabla X)_t$  est réduit à  $\frac{1}{2} u_t$ ,

et l'on obtient donc la formule d'Itô classique.

### Idée de la preuve :

On posera  $U_t = \int_0^t u_s dw_s$  et  $V_t = \int_0^t v_s ds$ .

Comme d'habitude l'argument de base est le développement de Taylor jusqu'à m'ordre 2.

Soit :  $F(X_t) =$

$$F(0) + \sum_{i=0}^{n-1} F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} F''(\bar{X}_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

$$\text{Où } \bar{X}_i = \frac{1}{2}(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})$$

La première étape consiste à montrer que :

$$\sum F''(\bar{X}_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{proba}} \int_0^t F''(X_s) u_s^2 ds$$

La seconde étape :

$$\sum_{i=0}^{n-1} F'(X_{t_i})(V_{t_{i+1}} - V_{t_i}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \int_0^t F'(X_s) v_s ds.$$

La troisième étape :

D'après les propriétés de l'intégrale de Skorohod, on déduit

$$F'(X_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s dw_s = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(X_{t_i}) u_s dw_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s[F'(X_{t_i})] u_s ds$$

Et

$$\begin{aligned} D_s F'(X_{t_i}) &= F''(X_{t_i}) D_s X_{t_i} \\ &= F''(X_{t_i}) \left[ \mathbb{1}_{[0, t_i]} u_s + \int_t^{t_i} D_s u_r dw_r + \int_t^{t_i} D_s v_r dr \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 F'(X_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s dw_s &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} F'(X_{t_i}) u_s dw_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F''(X_{t_i}) \left( \int_0^{t_i} D_s u_r dw_r \right) u_s ds \\
 &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} F''(X_{t_i}) \left( \int_0^{t_i} D_s v_r dr \right) u_s ds \\
 &= c_1 + c_2 + c_3
 \end{aligned}$$

On montre ensuite que :

$$c_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^t F''(X_s) \left( \int_0^s D_s u_r dw_r \right) u_s ds \text{ en proba.}$$

$$c_3 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^t F''(X_s) \left( \int_0^s D_s v_r dr \right) u_s ds \text{ en proba.}$$

$$c_1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^t F'(X_s) u_s dw_s.$$

### Théorème :

---

Soit  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi^2$

Soit  $X_t = \int_0^t u_s odw_s + \int_0^t v_s ds$

Où  $u \in \mathbb{L}_{loc}^s$  et  $v \in \mathbb{L}_{loc}^{1,4}$  .

Supposons que X admette une version continue, alors on a :

$$F(X_t) = F(0) + \int_0^t F'(X_s) u_s ds + \int_0^t [F'(X_s) u_s] odw_s$$

## Preuve :

On sait que  $X$  admet la décomposition :

$$X_t = \int_0^t u_s dw_s + \int_0^t v_s ds + \int_0^t \frac{1}{2} (\nabla u)_s ds.$$

$(X_t)$  vérifier les hypothèses du théorème précédent, d'où

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_s) v_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t F'(X_s) (\nabla u)_s ds \\ &\quad + \int_0^t F'(X_s) u_s dw_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) (\nabla u)_s ds \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^t [F'(X_s) u_s] odw_s = \int_0^t F'(X_s) u_s dw_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla(F'(X_s) u_s) ds$$

$$\text{Et } (\nabla(F'(x)u))_t = F'(X_t) \nabla u_t + F''(X_t) u_t (\nabla X)_t$$

D'où le résultat.

## Commentaires

Les résultats présentés dans ces chapitres sont applicables à l'étude des Equations différentielles Stochastiques où les solutions sont des processus non adaptés. Réf. [Pa].

Comme exemple, il y a les équations différentielles stochastiques du type SKOROHOD dont l'existence et l'unicité de sa solution sont l'œuvre des techniques développées par BUCKDAHN ; Réf. [Buc].

## Théorème :

---

Soit l'E.D.S :  $0 \leq t \leq 1$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

Où  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable

$\sigma$  et  $b$  sont des fonctions déterministes, mesurables définies sur  $[0,1] \times \mathbb{R}$  telles que

$$\begin{cases} \sigma \text{ est } \xi^2 \text{ en } x \\ b \text{ est } \xi^1 \text{ en } x \end{cases}$$

Si en plus

- i.  $\sup_{x,t} [|\sigma'_x(t,x)| + |\sigma''_{xx}(t,x)| + |b'_x(t,x)|] < \infty$
- ii.  $\sup_t [|\sigma(t,0)| + |b(t,0)|] < \infty$

Alors il existe en plus une solution de l'E.D.S dans l'espace  $\mathbb{L}^{2,4} \cap \mathbb{L}^{1,8}$

Réf. [Ma]. [Buc]

## V. Références

---

- [Be]: M.A. Berger; an extension of the Stochastic integral  
Ann. Probab.10 (1982) 435-450.
- [Buc]: R.Buckdahn: Skorohod's integral and linear stochastic differential equations. Preprint  
1843 Humbolt Universittät, Berlin, 1988.
- [Bou,Hir]: N. Bouleau, F.Hirsch: Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet  
et applications aux E.D.S Lecture Notes in Math 1204 (1986) 131-161.
- [Je]: Jeulin,T : Semi-martingales and Grossissement d'une filtration. Lecture Notes in  
Math.833.Springer-Verlag 1980.
- [Nu]: Nualart, D ; Zakai, M : Generalized multiple stochastic integrals and the representation  
of Wiener Functionals. Preprint.
- [IK,Wa]: Ikada, Watanabe: An introduction to Malliavin's calculus. Proc.Tassiguchi Inter.  
Symp. On stoch. Analysis; Katate and Kyoto, 1982,1-52  
Ed. By K. Ito (1984).
- [oga]: Ogawa,S: The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric  
integrals. Japan J. Appl.Math. 2,229-240 (1984)
- [Sko]: Skorohod, A. V: on a generatisation of a stochastic integral. Theory Prob. And  
Appl.XX, 219-233 (1975]
- [Sug]: Sugita, H. Sobalev espaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus. J.Math.  
KyotoUniv. 25-1, 31648, (1985).