



# Contrôle en temps optimal

Chi-Ting Wu

## ► To cite this version:

| Chi-Ting Wu. Contrôle en temps optimal. Mathématiques [math]. 2012. hal-02094862

**HAL Id: hal-02094862**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-02094862>**

Submitted on 10 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ DE LORRAINE  
UNIVERSITÉ NANCY 1 - HENRI POINCARÉ  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

---

Mémoire Master 2

Options : MFA Recherche

# Contrôle en temps optimal

*Chi-Ting WU*

---

Soutenue le 20 septembre 2012

*Encadré par Marius Tucsnak et Julie Valein*



## Résumé

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude du **problème de contrôle en temps optimal**. Ce problème est fortement lié aux différentes notions de contrôlabilité, du **principe du maximum de Pontriaguine** et de **la propriété de bang-bang**. Numériquement, on peut trouver le temps minimal en utilisant des méthodes directes ou des méthodes indirectes basées sur le principe du maximum. Du point de vue théorique, il est difficile de trouver une formule pour le temps minimal. Mais on peut au moins déterminer le module de continuité de la fonction temps minimal par l'étude du taux d'explosion du coût du contrôle.

**Ce travail consiste une synthèse des articles et il n'est pas original.**

**Mots clés :** contrôle en temps optimal, contrôlabilité, observabilité, principe du maximum de Pontriaguine, propriété de bang-bang, contrôle en norme optimale, taux d'explosion du coût du contrôle, méthode directe, méthode de tir.

---

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements à M. Marius Tucsnak et à Mlle. Julie Valein, mes encadrants de ce mémoire. Leurs conseils et leurs rigueurs mathématiques m'ont appris beaucoup et m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je remercie également M. Jean-François Scheid pour la discussion concernant la partie numérique.

Je remercie mes collègues Geoffrey Beck, Tiphaine Obara, Jérôme Loheac, Laetitia Giraldi, Sten Madec, Arvid Perego, Souhail Boukherouaa, Geoffrey Nichill avec qui j'ai pu passer de bons moments tout le long du stage.



## Table des matières

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Résumé</b>                                                              | <b>3</b>  |
| <b>Remerciements</b>                                                       | <b>3</b>  |
| <b>1 Introduction</b>                                                      | <b>9</b>  |
| <b>2 Contrôle en temps optimal en dimension finie</b>                      | <b>11</b> |
| 2.1 Existence                                                              | 12        |
| 2.2 Principe du maximum et la propriété de bang-bang                       | 13        |
| 2.3 Unicité                                                                | 18        |
| <b>3 Préliminaires : Notions de contrôlabilité et d'observabilité</b>      | <b>21</b> |
| 3.1 Définitions                                                            | 21        |
| 3.2 Dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité                     | 22        |
| 3.3 Coût du contrôle                                                       | 26        |
| 3.4 Exemples                                                               | 35        |
| 3.4.1 Les équations de type Schrödinger                                    | 35        |
| 3.4.2 L'équation de la chaleur                                             | 38        |
| <b>4 Contrôle en temps optimal en dimension infinie</b>                    | <b>39</b> |
| 4.1 Introduction                                                           | 39        |
| 4.2 Existence                                                              | 40        |
| 4.3 Principe du maximum et la contrôlabilité exacte                        | 41        |
| 4.3.1 Résultat principal                                                   | 41        |
| 4.3.2 Application aux équations de type Schrödinger                        | 45        |
| 4.4 Propriété de bang-bang et un type de $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro | 48        |
| 4.4.1 Résultat principal                                                   | 49        |
| 4.4.2 Technique de Lebeau-Robbiano                                         | 51        |
| 4.4.3 Application à l'équation de la chaleur                               | 56        |
| <b>5 Fonction temps minimal et fonction norme minimale</b>                 | <b>59</b> |
| 5.1 Définitions                                                            | 59        |
| 5.2 Quelques propriétés                                                    | 60        |
| 5.3 Le module de continuité de $T_\infty$                                  | 65        |
| 5.4 Le taux d'explosion de la fonction norme minimale                      | 69        |

|                   |                                                         |           |
|-------------------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>6</b>          | <b>Méthodes numériques</b>                              | <b>73</b> |
| 6.1               | Présentation des méthodes                               | 73        |
| 6.1.1             | Méthodes directes : la discrétisation totale            | 73        |
| 6.1.2             | Méthodes indirectes : la méthode de tir simple          | 74        |
| 6.2               | Dimension finie                                         | 75        |
| 6.3               | Dimension infinie                                       | 76        |
| <b>Conclusion</b> |                                                         | <b>79</b> |
| <b>Appendices</b> |                                                         | <b>81</b> |
| A                 | Annexe 1- Programmation en matlab                       | 81        |
| A.1               | Méthode directe - Dimension finie                       | 81        |
| A.2               | Méthode de tir - Dimension finie                        | 82        |
| A.3               | Méthode directe - Dimension infinie                     | 83        |
| B                 | Annexe 2- Simulation numérique                          | 84        |
| B.1               | Méthode directe -dimension finie                        | 84        |
| B.2               | Méthode de tir -dimension finie                         | 86        |
| B.3               | Méthode directe - l'équation de la chaleur sur $[0, 1]$ | 87        |



## Notations

$\forall$  : pour tout.

$\exists$  : il existe.

| ou t.q. : tel que.

p.p. : presque partout.

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$  : ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{N}$  : ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$  : ensemble des entiers relatifs.

$\operatorname{Re} z$  : partie réelle d'un nombre complexe  $z$ .

$\operatorname{Im} z$  : partie imaginaire d'un nombre complexe  $z$ .

$\operatorname{Ran}$  : l'image d'un opérateur.

$\operatorname{Ker}$  : le noyau d'un opérateur.

$\inf$  : l'infimum.

$\sup$  : le supremum.

$\min$  : le minimum.

$\max$  : le maximum.

$\lim$  : la limite.

$\operatorname{Vect}$  : espace vectoriel engendré par.

$\operatorname{int} X$  : l'intérieur d'un ensemble  $X$ .

$\partial X$  : la frontière d'un ensemble  $X$ .

$\bar{X}$  : l'adhérence d'un ensemble  $X$ .

$X'$  : le dual d'un espace  $X$ .

$X^\perp$  : l'orthogonal de  $X$ .

$A^*$  : l'adjoint d'un opérateur  $A$ .

$\sigma(A)$  : le spectre d'un opérateur  $A$ .

$\mu(e)$  : la mesure de Lebesgue d'un ensemble  $e$ .

$M_{n \times m}(\mathbb{K})$  : ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

$M_n(\mathbb{K})$  : ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

$||$  : valeur absolue ou module.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  : le produit scalaire dans la dualité  $X', X$ .

$\| \cdot \|_X$  : norme associée à un espace de Banach.

$\mathcal{L}(E, F)$  : ensemble des opérateurs linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

$C^p(\Omega, \mathbb{K})$  : ensemble des applications mesurables de  $\Omega$  dans  $X$  de classe  $C^p$ .

$L^p(\Omega; \mathbb{K})$  : ensemble des applications mesurables de  $\Omega$  dans  $X$  de puissance  $p$  intégrables.

$L^\infty(\Omega; \mathbb{K})$  : ensemble des applications mesurables bornées de  $\Omega$  dans  $X$ .

$L^p(\Omega) : L^p(\Omega; \mathbb{C})$ .

$H^k(\Omega)$  : ensemble des applications mesurables t.q. les dérivées d'ordre plus petite que  $k$  sont dans  $L^2(\Omega)$ .

$H_0^1(\Omega)$  : ensemble des applications  $f \in H^1(\Omega)$  t.q.  $f$  s'annule sur  $\partial\Omega$ .

$z(t, z_0, u) = S(t)z_0 + \Phi_t u$  : la trajectoire de la solution engendrée par le contrôle  $u$ .

**Les opérateurs :** $\nabla$  : gradient. $\Delta$  : laplacien. $\chi_e$  : la fonction indicatrice d'un ensemble  $e$ . $S(t)$  : le semigroupe fortement continu engendré par l'opérateur  $A$ . $\Phi_t u$  : voir (2.3). $\Phi_{t,e} u$  : voir (3.3). $\Psi_t$  : l'opérateur d'observation en temps  $t > 0$ , voir (3.4). $\Psi_{t,e}$  : l'opérateur d'observation en temps  $t > 0$  sur  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive, voir (3.5). $\Psi_t^d$  : l'opérateur d'observation pour le couple  $(A^*, B^*)$  en temps  $t > 0$ , voir (3.8). $\Psi_{t,e}^d$  : voir (3.9). $\mathcal{R}_t$  : l'opérateur de réflexion sur  $L^2([0, t]; U)$ , voir (3.9). $R_t$  : le Gramien de contrôlabilité, voir le lemme 3.13. $T_\infty$  : la fonction temps minimal, voir (5.4). $\mathcal{E}_\infty^*$  : la fonction  $L^\infty$ -norme minimale, voir (5.7). $\mathcal{E}_p^*$  : la fonction  $L^p$ -norme minimale, voir (5.8). $C_t, C_{t,e}$  : coût du contrôle, voir section III.3.**Les ensembles admissibles pour le contrôle :** $\mathcal{L}_K(t)$  : voir (2.2). $\mathcal{L}_1(t)$  : voir (3.24). $A_{t,e,z_0}$  : voir (3.30). $A_{t,z_0}$  : voir (5.5). $A_{t,z_0,p}, p \in ]1, +\infty[$  : voir (5.6).**Les ensembles accessibles :** $R_K^\infty(t)$  : voir (2.5). $R^\infty(t)$  : voir (3.25). $B_1^\infty(t)$  : voir (3.26).**Les ensembles contrôlables à zéro :** $\mathcal{R}_0^\infty(t)$  : voir (5.2). $\mathcal{R}_0^\infty$  : voir (5.3).

## I Introduction

L'objectif d'un **problème de contrôle** est d'amener le système d'un état initial le plus près possible d'un état final en respectant certaines contraintes. On dit qu'un système est **contrôlable** si on est capable de l'amener d'un point initial arbitraire vers un point final souhaité.

Dans un **problème de contrôle optimal** on souhaite atteindre l'objectif ci-dessus en minimisant (ou maximisant) un critère d'optimisation. Historiquement, le problème de contrôle optimal est apparu à la continuation de la recherche du calcul des variations aux XVI- XVII siècles. Il est fortement lié à la mécanique classique (principe de Fermat, problème de la brachistochrone, équations d'Euler-Lagrange etc). On se réfère au livre de H. Herman Goldstine [15] pour le développement de la théorie du calcul des variations.

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50 avec le **principe du maximum de Pontriaguine**, découvert par L.S. Pontryagin en 1956 [28], qui donne une condition nécessaire d'optimalité (voir par exemple l'article de R.V. Gamkrelidze [14] pour la découverte de ce principe). Cette théorie est développée plus tard dans différentes branches mathématiques : le problème de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles, la théorie de contrôle stochastique, la théorie des jeux... De nos jours, la théorie de contrôle optimal a de nombreuses applications : les guidages aérospatiaux et aéronautiques, automobile, robotique, réseaux informatiques, bioréacteurs, contrôles des procédés chimiques, etc.

Dans un **problème de contrôle en temps optimal**, on cherche le temps minimal pour qu'un contrôle admissible amène un système dynamique d'un point initial arbitraire au point final prescrit. Ce problème est classique en dimension finie et il est connu qu'un contrôle en temps optimal possède des propriétés intéressantes : le **principe du maximum de Pontriaguine** et la propriété de **bang-bang**. Ces résultats ont été découverts dans l'article de R. Bellman, I. Glicksberg et O. Gross [3].

L'extension en dimension infinie est premièrement apparue dans l'article de H.O. Fattorini [10] et est beaucoup développée dans le livre de J.L. Lions [23] et le livre de H.O. Fattorini [11].

Notre but dans ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle en temps optimal et de donner des conditions pour lesquelles le principe du maximum et la propriété de type bang-bang sont satisfaits.

On énonce le problème sous une forme générale pour les systèmes linéaires :

Soient  $X, U$  deux espaces de Hilbert,  $A \in \mathcal{L}(X)$  et  $B \in \mathcal{L}(U, X)$ .

On considère l'équation suivante :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z_0 \in X, \quad (1.1)$$

où  $u \in L^\infty([0, T]; U)$  et  $\|u(t)\|_{L^\infty([0, T]; U)} \leq 1$  pour  $t \in [0, T]$  p.p..

**Définition 1.1.**

On dit qu'un élément  $z^f \in X$  est **accessible** si il existe  $\tau > 0$  et

$$u \in L^\infty([0, \tau]; U) \text{ avec } \|u(t)\|_{L^\infty([0, \tau]; U)} \leq 1 \text{ pour } t \in [0, \tau] \text{ p.p..} \quad (1.2)$$

t.q. la solution de (1.1) satisfasse

$$z(\tau) = z^f. \quad (1.3)$$

L'objectif est de trouver le contrôle  $u^*$  qui vérifie (1.2) et (1.3) avec le temps final  $\tau^*$  le plus petit possible.

Le présent travail est divisé en cinq parties, organisées de la manière suivante :

En section II, on présente des résultats en dimension finie, en se référant au livre de E.D. Sontag [30] et au livre de H.O. Fattorini [11].

Dans la section III, on présente les notions préliminaires sur la contrôlabilité et l'observabilité. On voit la dualité entre elles et aussi la notion du coût de contrôle.

Dans la section IV, on présente des résultats en dimension infinie par deux pistes différentes. Premièrement, en suivant les mêmes idées qu'en dimension finie, on peut obtenir la propriété de bang-bang pour le contrôle en temps optimal en passant par le principe du maximum. La condition pour qu'un contrôle en temps optimal satisfasse le principe du maximum est la **contrôlabilité exacte** du système. on se réfère à l'article de J. Lohéac et de M. Tucsnak [24] pour les résultats de cette partie.

Deuxièmement, on sait que pour certaines équations, comme pour l'équation de la chaleur, la contrôlabilité exacte n'est pas vérifiée. C'est pour cette raison qu'on étudie d'autres conditions pour qu'un contrôle en temps optimal satisfasse la propriété de bang-bang sans passer par le principe du maximum. On voit qu'en supposant un type de  **$L^\infty$ -contrôlabilité à zéro**, on peut établir la propriété de bang-bang. on se réfère à l'article de M. Tucsnak, S. Micu et de I. Roventa [25] et à l'article de G. Wang [37] pour cette partie. On voit aussi les applications aux équations de type Schrödinger et à l'équation de la chaleur.

En section V, on présente le lien entre le **module de continuité de la fonction temps minimal** et le **taux d'explosion de la fonction norme minimale**. Ceci nous donne une piste pour étudier le comportement de la fonction temps minimal autour de zéro à l'aide du taux d'explosion du coût du contrôle en zéro. On se réfère à l'article de F. Gozzi et de P. Loreti [16] pour les résultats obtenus dans cette section.

La dernière section est consacrée à présenter deux méthodes numériques pour la résolution du problème de contrôle en temps optimal : **les méthodes directes** et **les méthodes indirectes**. On utilise le logiciel matlab pour simuler la solution de quelques exemples simples. On se réfère au livre de E. Trélat [34] pour la présentation de deux méthodes et sa mise en oeuvre.

## II Contrôle en temps optimal en dimension finie

On considère la même équation que celle décrite dans l'introduction avec  $X = \mathbb{R}^n$  et  $U = \mathbb{R}^m$  :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

où  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  et  $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ .

On suppose que  $u(t) \in K$ , pour presque tout  $t \in [0, T]$ , où  $K$  est un voisinage compact convexe de 0 dans  $\mathbb{R}^m$ .

On note également  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^n$  (et de  $\mathbb{R}^m$ ).

Pour simplifier l'écriture, on note  $\mathcal{L}_K(t)$  l'ensemble admissible des contrôles :

$$\mathcal{L}_K(t) = \{u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m) ; \text{Ran } u \in K\}. \quad (2.2)$$

On sait que la solution  $z$  de (2.1) s'écrit sous la forme :

$$z(t) = S(t)z_0 + \Phi_t u, \quad t \in [0, T] \quad (2.3)$$

avec  $\Phi_t u = \int_0^t S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma$ , où  $S(t) = e^{tA}$ .

On note  $z(t, z_0, u) = S(t)z_0 + \Phi_t u$  la **trajectoire** de la solution engendrée par  $u$ .

On définit aussi deux ensembles accessibles à partir du point 0 :

$$R^\infty(t) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \Phi_t u, u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)\}, \quad (2.4)$$

$$R_K^\infty(t) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \Phi_t u, u \in \mathcal{L}_K(t)\}. \quad (2.5)$$

On énonce ensuite un théorème qui donne des propriétés sur l'ensemble des éléments accessibles :

**Proposition 2.1.**  $R_K^\infty(t)$  est un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.*

La convexité est claire car  $K$  est convexe et  $\Phi_t$  est une fonction linéaire.

Pour la compacité, prenons une suite  $(z_k)_k$  de  $R_K^\infty(t)$ . On sait qu'il existe une suite  $(u_k)_k$  de  $\mathcal{L}_K(t)$  t.q. pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $z_k = \Phi_t u_k$ .

Comme  $K$  est compact, on sait que la suite  $(u_k)_k$  est bornée dans  $L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)$ . Donc on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)$  vers  $u \in \mathcal{L}_K(t)$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$  on définit  $\chi(\sigma) = B^*S(t - \sigma)^*z \in L^1([0, t]; \mathbb{R}^m)$  t.q. :

$$\begin{aligned} \langle z, z_k \rangle &= \langle z, \int_0^t S(t - \sigma)Bu_k(\sigma)d\sigma \rangle = \int_0^t \langle \chi(\sigma), u_k(\sigma) \rangle d\sigma \\ &\longrightarrow \int_0^t \langle \chi(\sigma), u(\sigma) \rangle d\sigma = \langle z, \int_0^t S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma \rangle. \end{aligned}$$

Si on pose  $z^* = \Phi_t u$ , on obtient alors  $z_k \rightarrow z^* \in R_K^\infty(t)$ . D'où la compacité.  $\square$

On définit par la suite le problème de contrôle en temps optimal :

### Définition 2.2.

Soit  $z_0, z^f \in \mathbb{R}^n$ , avec  $z^f$  accessible (définition 1.1). On dit qu'un contrôle  $u^* \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$  avec  $z^f = S(\tau^*)z_0 + \Phi_{\tau^*}u^*$  est **optimal en temps**, si

pour tout  $u \in \mathcal{L}_K(t)$  t.q. la solution de l'équation (2.1) vérifie  $z(t) = z^f$ , on a  $t \geq \tau^*$ .

La partie suivante traite l'existence d'un contrôle en temps optimal.

## 1 Existence

### Théorème 2.3 (Existence).

Si  $z^f$  est accessible, alors il **existe** un contrôle en temps optimal.

*Démonstration.*

Prenons  $\tau^* = \inf \{t > 0 \mid z^f - S(t)z_0 \in R_K^\infty(t)\}$ .

On sait qu'il existe une suite minimisante  $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+, t_n \searrow \tau^*$  et une suite  $(u_n)_n \subset \mathcal{L}_K(t_n)$  t.q. :  $\forall n \in \mathbb{N}, z^f = z(t_n, z_0, u_n)$ .

Ensuite, on prend  $s > t_1 > 0$  et on étend  $(u_n)_n$  sur l'intervalle  $[0, s]$  en posant  $u_n(\sigma) = 0$  ( $\sigma \in [t_n, s]$ ). Comme  $(u_n)_n$  est une suite bornée de  $\mathcal{L}_K(s)$  et  $K$  est compact, on peut extraire une sous-suite  $(u_n)_n$  qui converge faiblement dans  $L^\infty([0, s]; \mathbb{R}^m)$  vers un élément  $u^* \in \mathcal{L}_K(s)$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , on définit ensuite les fonctions :

$$\chi_n(\sigma) = \begin{cases} B^*S(t_n - \sigma)^*z & \text{si } 0 < \sigma \leq t_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi(\sigma) = \begin{cases} B^*S(\tau^* - \sigma)^*z & \text{si } 0 < \sigma \leq \tau^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait  $\chi_n(\cdot) \rightarrow \chi(\cdot)$  dans  $L^1([0, s]; \mathbb{R}^m)$ .

Donc, on obtient pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \langle z, z^f - S(t_n)z_0 \rangle &= \langle z, \int_0^{t_n} S(t_n - \sigma)Bu_n(\sigma)d\sigma \rangle \\ &= \int_0^{t_n} \langle B^*S(t_n - \sigma)^*z, u_n(\sigma) \rangle d\sigma = \int_0^s \langle \chi_n(\sigma), u_n(\sigma) \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Prenons la limite  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle z, z^f - S(\tau^*)z_0 \rangle &= \int_0^s \langle \chi(\sigma), u^*(\sigma) \rangle d\sigma = \int_0^{\tau^*} \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*z, u^*(\sigma) \rangle d\sigma \\ &= \langle z, \int_0^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)Bu^*(\sigma)d\sigma \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Cela implique que  $z^f - S(\tau^*)z_0 = \Phi_{\tau^*}u^*, u^* \in \mathcal{L}_K(s) \subset \mathcal{L}_K(\tau^*)$ .

D'où l'existence d'un contrôle en temps optimal. □

## 2 Principe du maximum et la propriété de bang-bang

On énonce d'abord le principe du maximum de Pontriaguine :

**Définition 2.4** (Principe du maximum).

On dit qu'un contrôle  $u^* \in \mathcal{L}_K(t)$  vérifie **le principe du maximum** si il existe  $\eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0$  t.q. :

$$\langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \max_{u \in K} \langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u \rangle \text{ pour } \sigma \in [0, t] \text{ p.p.} . \quad (2.6)$$

Par la suite, on verra qu'un contrôle en temps optimal satisfait le principe du maximum, autrement dit, c'est une condition nécessaire de l'optimalité en temps. De plus, en ajoutant une condition supplémentaire, il possède la propriété de bang-bang. On verra qu'en supposant des conditions sur le point initial ou le point final, le principe du maximum devient une condition suffisante d'optimalité en temps.

On commence par énoncer deux lemmes utiles pour le théorème principal.

**Lemme 2.5.** *On a des équivalences entre les trois assertions suivantes :*

- (a)  $\forall t > 0, \text{int } R_K^\infty(t) \neq \emptyset$
  - (b)  $\forall t > 0, R^\infty(t) = \mathbb{R}^n$
  - (c)  $(\forall \sigma > 0, B^*S(\sigma)^*\eta = 0) \Rightarrow \eta = 0.$
- (2.7)

*Démonstration.*

\* (b)  $\iff$  (c)

On fait une preuve par contraposition.

Prenons  $t > 0$ , supposons qu'il existe  $\eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0$  t.q. pour tout  $y \in R^\infty(t), \langle \eta, y \rangle = 0$ . Ceci équivaut à :

$$\forall u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m), 0 = \langle \eta, \int_0^t S(t-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma \rangle = \int_0^t \langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u(\sigma) \rangle d\sigma,$$

qui est équivalent à :

$$B^*S(t-\sigma)^*\eta = 0 \iff B^*S(\sigma)^*\eta = 0 \quad (0 \leq \sigma \leq t).$$

Comme  $\eta \mapsto B^*S(\sigma)^*\eta$  est analytique, on sait donc que cette propriété est indépendante de  $t$ . Autrement dit, on a montré que :

$$\forall t > 0, R^\infty(t) \neq \mathbb{R}^n \iff \exists \eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0, B^*S(\sigma)^*\eta = 0.$$

D'où l'équivalence.

\* (a)  $\iff$  (b)

On montre d'abord que (a) entraîne (b). En effet, si (a) est vrai, comme  $0 \in \text{int } R_K^\infty(t)$  il existe une boule contenue dans  $R_K^\infty(t)$ , i.e.,

$$\exists r > 0, B(0, r) \subset R_K^\infty(t).$$

Or, pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $k > 0$  t.q.  $\frac{z}{k} \in B(0, r)$ . Donc,  $z = \Phi_t(ku)$ , avec  $u \in \mathcal{L}_K(t)$ . Comme  $ku \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)$ , on a  $z \in R^\infty(t)$ . D'où (a) implique (b).

Réciproquement, si (b) est vrai, prenons  $z \in \mathbb{R}^n$  et  $\rho > 0$  quelconques. On a :

$$\forall \tilde{z} \in B(z, \rho) \subset \mathbb{R}^n, \exists u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m), \tilde{z} = \Phi_t u.$$

Comme  $K$  est un voisinage de 0, il existe  $r > 0$  t.q.  $B(0, r) \subset K$ . Il nous suffit de montrer que  $\text{int } R_{B(0, r)}^\infty(t) \neq \emptyset$  pour conclure.

Si on pose

$$M := \inf \left\{ M > 0 \mid \forall \tilde{z} \in B(z, \rho), \forall u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m) \text{ t.q. } \tilde{z} = \Phi_t u, \text{ on a } \left\| \frac{u(\cdot)}{M} \right\| \leq r \right\},$$

alors, on obtient  $B(\frac{z}{M}, \frac{\rho}{M}) \subset R_{B(0, r)}^\infty(t)$ . Donc,  $\text{int } R_{B(0, r)}^\infty(t) \neq \emptyset$ . On en déduit que (a) implique (b).

□

### Remarque 2.6.

Si  $(A, B)$  est exactement contrôlable (voir Def 3.1), alors on a évidemment (2.7).

### Lemme 2.7.

Supposons que (2.7) est vraie. Alors, on peut définir une norme dans  $R^\infty(t) = \mathbb{R}^n$  par

$$\|z\|_{R^\infty(t)} = \inf \left\{ \|u\|_{L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)} \mid z = \Phi_t u, u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m) \right\}. \quad (2.8)$$

Cette norme est équivalente à toutes les normes de  $\mathbb{R}^n$ .

De plus, si on définit pour tout  $t > 0$  une constante  $C_t > 0$  par

$$C_t = \sup_{z \neq 0, z \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|z\|_{R^\infty(t)}}{\|z\|_X} \right\}, \quad (2.9)$$

alors  $t \mapsto C_t$  est **décroissante**.

*Démonstration.*

La première partie est claire et on montre juste la décroissance de  $t \mapsto C_t$ .

Soit  $z \in \mathbb{R}^n$ . Alors d'après la définition de  $C_t$ , il existe  $u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)$  t.q.  $z = \Phi_t u$  et  $\|u\|_{L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)} \leq \|z\|_X C_t$ .

Prenons  $t' > t > 0$ . On remarque que :

$$\int_0^t S(t - \sigma) B u(\sigma) d\sigma = \int_{t'-t}^{t'} S(t' - \sigma) B u(\sigma - (t' - t)) d\sigma.$$



Donc, si on définit  $\tilde{u}(\sigma) = \chi_{[t'-t, t']}(u(\sigma - (t' - t)))$ , on a

$$\Phi_{t'} \tilde{u} = z \text{ et } \|\tilde{u}\|_{L^\infty([0, t']; \mathbb{R}^m)} = \|u\|_{L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)}.$$

Or,  $\|z\|_X C_t \geq \|u\|_{L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)} = \|\tilde{u}\|_{L^\infty([0, t']; \mathbb{R}^m)} \geq \|z\|_{R^\infty(t')}.$

Passons au suprémum en  $z$  sur  $X$ . On en déduit que  $C_t \geq C_{t'}$ .  $\square$

On a aussi besoin d'un théorème de séparation qui est une conséquence du théorème de Hahn-Banach [5].

### Définition 2.8.

Soit  $C$  un sous ensemble, convexe et non vide d'un espace de Hilbert  $X$ .

On dit que  $\tilde{x} \in C$  est un **point d'appui** de  $C$  si il existe  $f \in X'$  t.q. :

$$\sup\{f(x), x \in C\} = f(\tilde{x}).$$

### Théorème 2.9.

Soit  $C$  un sous ensemble convexe d'un espace de Hilbert  $X$ .

Si  $\text{int } C \neq \emptyset$ , alors pour tout  $x \in \partial C$ ,  $x$  est un point d'appui de  $C$ .

*Démonstration.*

Voir par exemple le théorème 1.13 du livre de V. Barbu et T. Precupanu [1].  $\square$

On peut maintenant énoncer le théorème le plus important de cette section qui montre que le principe du maximum est une condition nécessaire d'optimalité en temps.

### Théorème 2.10 (Principe du maximum, condition nécessaire).

Si  $u^* \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$  est un contrôle optimal en temps  $\tau^*$ , alors  $u^*$  vérifie **le principe du maximum (2.6)**.

*Démonstration.*

Il suffit de montrer le résultat en supposant que la propriété (2.7) est vraie. En effet, si (2.7) n'est pas satisfaite, il existe  $\eta \neq 0$ , t.q.  $B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta = 0$ . Donc, il n'y a rien à montrer car avec ce  $\eta$ , tout contrôle (optimal ou non) satisfait (2.6).

Supposons que (2.7) est vraie. On va montrer d'abord que  $z^f - S(\tau^*)z_0$  **est sur le bord de  $R_K^\infty(\tau^*)$** .

Par l'absurde, si  $z^f - S(\tau^*)z_0$  n'est pas sur le bord, alors il existe  $\rho > 0$ , t.q.  $B(z^f - S(\tau^*)z_0, \rho) \subset R_K^\infty(\tau^*)$ . Comme  $0 \in R_K^\infty(\tau^*)$ , il existe donc  $r < 1$  t.q.  $\frac{1}{r}(z^f - S(\tau^*)z_0) \in R_K^\infty(\tau^*)$ . Cela est équivalent à dire qu'il existe  $\hat{u} \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$  t.q.  $z^f - S(\tau^*)z_0 = \Phi_{\tau^*}(r\hat{u})$ .

On pose  $\tilde{u} = r\hat{u}$ . Alors  $\|\tilde{u}\| = r\|\hat{u}\| < \|\hat{u}\|$  et  $z^f - S(\tau^*)z_0 = \Phi_{\tau^*}(\tilde{u})$ . De plus, comme  $K$  est convexe et 0 appartient à  $K$ , on a  $\tilde{u} \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$ .

Soit  $0 < t < \tau^*$ . On a :

$$\begin{aligned}
 z^f - S(t)z_0 &= S(\tau^*)z_0 - S(t)z_0 + \int_0^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma \\
 &= \int_0^t S(t - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma + S(\tau^*)z_0 - S(t)z_0 + \int_t^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma \\
 &\quad + \int_0^t (S(\tau^* - \sigma) - S(t - \sigma))B\tilde{u}(\sigma)d\sigma \\
 &= \int_0^t S(t - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma + \varphi(t, \tau^*),
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \varphi(t, \tau^*) := S(\tau^*)z_0 - S(t)z_0 + \int_t^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma + \int_0^t (S(\tau^* - \sigma) - S(t - \sigma))B\tilde{u}(\sigma)d\sigma.$$

C'est facile de voir que  $\lim_{t \rightarrow \tau^*} \varphi(t, \tau^*) = 0$ .

Comme la fonction  $t \mapsto C_t$  est décroissante d'après le lemme 2.7, pour tout  $\epsilon > 0$  on peut trouver  $t < \tau^*$  et un contrôle  $v \in \mathcal{L}_K(t)$  t.q.  $\Phi_t v = \varphi(t, \tau^*)$  et  $\|v\|_{L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)} \leq C_t \|\varphi(t, \tau^*)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|\hat{u}\|_{L^\infty([0, \tau^*]; \mathbb{R}^m)}$ .

On sait que  $\text{Ran } \tilde{u} \subset \text{int } K$ , car  $0 \in K$ ,  $\text{Ran } \hat{u} \subset K$  et  $\tilde{u} = r\hat{u}$  avec  $0 < r < 1$ . L'objectif est de prendre  $\epsilon$  pour que  $\tilde{u} + v$  soit bien dans l'ensemble admissible,  $\mathcal{L}_K(t)$ . Il suffit de prendre un  $\epsilon$  suffisamment petit t.q. :

$$B(\tilde{u}, \epsilon \|\hat{u}\|_{L^\infty([0, \tau^*]; \mathbb{R}^m)}) \subset K \text{ où } B(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists \sigma, \|x - u(\sigma)\|_{\mathbb{R}^m} \leq r\}.$$

On a enfin que  $z^f - S(t)z_0 = \Phi_t(\tilde{u} + v)$  avec  $\tilde{u} + v \in \mathcal{L}_K(t)$ . Cela est contradictoire avec le fait que  $u^*$  est le contrôle optimal en temps  $\tau^*$ . Donc, on a montré que  $z^f - S(\tau^*)z_0 \in \partial R_K^\infty(\tau^*)$ .

**On montre par la suite que  $u^*$  satisfait le principe du maximum.**

En utilisant le théorème 2.9, comme  $\text{int } R_K^\infty(\tau^*) \neq \emptyset$  (lemme 2.5) et  $z^f - S(\tau^*)z_0 \in \partial R_K^\infty(\tau^*)$ , on sait que  $z^f - S(\tau^*)z_0$  est un point d'appui de  $R_K^\infty(\tau^*)$ . Par le théorème de représentation de Riesz, ceci équivaut à :

$$\begin{aligned}
 &\exists \eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0, \langle \eta, z \rangle \leq \langle \eta, z^f - S(\tau^*)z_0 \rangle \quad (z \in R_K^\infty(\tau^*)) \\
 \iff &\langle \eta, \Phi_{\tau^*} u \rangle \leq \langle \eta, \Phi_{\tau^*} u^* \rangle, \quad \forall u \in L_K(\tau^*) \\
 \iff &\int_0^{\tau^*} \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u(\sigma) \rangle d\sigma \leq \int_0^{\tau^*} \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u^*(\sigma) \rangle d\sigma \quad (u \in L_K(\tau^*)).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

La dernière inégalité (2.10) est équivalente au principe du maximum (2.6). Pour voir cela, il suffit de prendre :

$$\forall \sigma \in [0, \tau^*], v(\sigma) = \operatorname{argmax}_{u \in K} \{ \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u \rangle \},$$

où  $\operatorname{argmax}_{u \in K} \{f(u)\}$  est un élément de  $K$  réalisant le maximum de  $f$ .

En prenant ce  $v$ , on obtient clairement que

$$\langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \max_{u \in K} \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u \rangle \text{ pour } \sigma \in [0, \tau^*] \text{ p.p. .}$$

D'où le résultat.  $\square$

On énonce ensuite le théorème concernant la propriété de bang-bang :

**Corollaire 2.11** (Propriété de bang-bang).

*Si on a (2.7) et si  $u^*$  est un contrôle optimal en temps  $\tau^*$ , alors*

$$u^*(t) \in \partial K \text{ pour } t \in [0, \tau^*] \text{ p.p..} \quad (2.11)$$

*Démonstration.*

On remarque que le lemme 2.7 nous assure que  $B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta \neq 0$  si  $\eta \neq 0$ .

D'après le théorème 2.10, on sait qu'il existe  $\eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0$  t.q.  $u^*$  vérifie (2.6).

Nous pouvons définir pour tout  $\sigma \in [0, \tau^*]$

$$\tilde{u}(\sigma) = \frac{B^*S(t - \sigma)^*\eta}{\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\|} \text{ et } \rho(\sigma) = \max_{\rho \in \mathbb{R}^+} \{\rho \mid \rho \tilde{u}(\sigma) \in K\}. \quad (2.12)$$

Il est clair que  $\rho(\sigma)\tilde{u}(\sigma) \in \partial K$ .

De plus, comme  $u^*$  vérifie (2.6), on obtient que pour tout  $\sigma \in [0, \tau^*]$  :

$$\langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle \geq \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, \rho(\sigma)\tilde{u}(\sigma) \rangle = \rho(\sigma)\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\|. \quad (2.13)$$

Pour  $\sigma$  fixé, on peut projeter  $u^*(\sigma)$  selon la direction  $\tilde{u}(\sigma)$ . Alors,

$$u^*(\sigma) = r\tilde{u}(\sigma) + v \text{ avec } \langle \tilde{u}(\sigma), v \rangle = 0 \text{ et } r \leq \rho(\sigma). \quad (2.14)$$

Par (2.13) et (2.14), on a :

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\| &\leq \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, r\tilde{u}(\sigma) \rangle \\ &= r\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\| \leq \rho(\sigma)\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\|. \end{aligned}$$

Donc  $u^*(\sigma) = \rho(\sigma)\tilde{u}(\sigma) \in \partial K$ , pour  $\sigma \in [0, \tau^*]$  p.p..  $\square$

**Remarque 2.12.**

*Dans la démonstration du théorème 2.11, on voit que si  $u$  satisfait le principe du maximum (2.6) et si la propriété (2.7) est vraie, alors  $u$  possède la propriété de type bang-bang (2.11). Cela pour être étendu en dimension infinie si on suppose un type de contrôlabilité approchée (voir théorème 4.9).*

On donne dans le théorème suivant une condition suffisante pour qu'un contrôle  $u^*$  soit optimal en temps.

**Théorème 2.13** (Principe du maximum, condition suffisante).

*Supposons qu'on a la propriété (2.7). Si un contrôle  $u^* \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$  vérifie le principe du maximum (2.6) et si on a  $z_0 = 0$  ou  $z^f = 0$ , alors  $u^*$  est un contrôle en temps optimal.*

*Démonstration.*

Supposons qu'on a  $z^f = 0$ .

Si  $u^*$  n'est pas optimal en temps, il existe  $t < \tau^*$  et un contrôle  $\tilde{u} \in \mathcal{L}_K(t)$  t.q.  $0 - S(t)z_0 = \Phi_t \tilde{u}$ .

Posons  $u(\sigma) = \chi_{[0,t]}(\sigma)\tilde{u}(\sigma)$  pour  $\sigma \in [0, \tau^*]$ .

On sait que  $u$  entraîne  $z_0$  à 0 en temps  $\tau^*$ .

Comme on a vu dans la démonstration du théorème 2.10 que  $u^*$  satisfait le principe du maximum est équivalent à

$$\exists \eta \neq 0, \quad \langle \eta, z \rangle \leq \langle \eta, z^f - S(\tau^*)z_0 \rangle \quad (z \in R_K^\infty(\tau^*)),$$

cela implique que  $z^f - S(\tau^*)z_0 = -S(\tau^*)z_0 \in \partial R_K^\infty(\tau^*)$ .

De plus, on sait que  $-S(\tau^*)z_0 = \Phi_{\tau^*} u$ .

Donc  $u$  vérifie aussi le principe du maximum.

On a vu dans la remarque 2.12 que  $u$  doit posséder la propriété de bang-bang. Autrement dit,  $u(\sigma) \in \partial K$  pour  $\sigma$  p.p.. Or  $u$  s'annule sur l'intervalle  $[t, \tau^*]$ , et  $0 \in \text{int } K$ . Contradiction.

Si on a  $z_0 = 0$ , il suffit d'inverser le système et d'utiliser un argument similaire en posant  $v(\sigma) = \chi_{[\tau^*-t, \tau^*]}(\sigma)\tilde{u}(\sigma - (\tau^* - t))$  ( $\sigma \in [0, \tau^*]$ ).

On vérifie de nouveau que  $v$  vérifie le principe du maximum, donc il possède la propriété de bang-bang. Cela entraîne la contradiction comme  $v$  s'annule sur  $[0, \tau^* - t]$ .  $\square$

### 3 Unicité

On commence par définir la notion de convexité stricte.

**Définition 2.14.**

*On dit qu'un ensemble  $C$  est strictement convexe si*

$$\forall x, y \in C, x \neq y \Rightarrow \forall t \in ]0, 1[, tx + (1 - t)y \in \text{int } C.$$

**Proposition 2.15.**

*Si  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  est strictement convexe et si la propriété (2.7) est vraie, alors le contrôle en temps optimal est unique.*

*Démonstration.*

Supposons  $u, v$  deux contrôles optimaux en temps  $t$ .

D'après le théorème 2.11,  $u, v$  possèdent la propriété de bang-bang, i.e.  $u(\sigma), v(\sigma) \in \partial K$  pour  $\sigma \in [0, t]$  p.p.. Si  $u \neq v$ , alors il existe  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive, t.q.  $u(\sigma) \neq v(\sigma)$ , pour tout  $\sigma \in e$ .

On pose  $w = \frac{u+v}{2}$ . C'est aussi un contrôle en temps optimal.

Or par la convexité stricte de  $K$ , pour tout  $\sigma \in e$ ,  $w(\sigma)$  est à l'intérieur de  $K$ , ce qui est contradictoire avec la propriété de bang-bang. D'où l'unicité.  $\square$

On énonce finalement une propriété d'optimalité :

**Proposition 2.16** (Principe d'optimalité).

*Supposons que  $u^*$  est un contrôle optimal en temps  $\tau^*$ .*

*Pour  $t \in [0, \tau^*]$ , on considère le problème de contrôle en temps optimal avec le même point initial  $z_0$  et  $z^f = z(t, z_0, u^*)$ .*

*Alors,  $u^*$  est aussi le contrôle optimal en temps  $t$ , qui entraîne  $z_0$  à  $z(t, z_0, u^*)$ .*

*Démonstration.*

Supposons que  $u^*$  n'est pas le contrôle optimal en temps  $t < \tau^*$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\delta > 0$  et un contrôle  $v \in \mathcal{L}_K(t - \delta)$  t.q.

$$z(t, z_0, u^*) = z(t - \delta, z_0, v).$$

$$\text{Posons } \tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} v(\sigma) & 0 \leq \sigma \leq t - \delta \\ u^*(\sigma + \delta) & t - \delta < \sigma \leq \tau^* - \delta. \end{cases}$$

Alors, on a :

$$z^f = z(\tau^*, z_0, u^*) = z(\tau^* - \delta, z_0, \tilde{u}).$$

Donc,  $u^*$  n'est pas le contrôle optimal en temps  $\tau^*$ . Contradiction.  $\square$



### III Préliminaires : Notions de contrôlabilité et d'observabilité

On considère le système linéaire suivant en dimension infinie.

Soient  $X$  et  $U$  deux espaces de Hilbert. On identifie  $U$  et  $U'$  (respectivement  $X$  et  $X'$ ) dans toute la suite, où  $U'$  est le dual de  $U$ .

On considère le système :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z_0 \in X, \quad (3.1)$$

où  $A : D(A) \rightarrow X$  est un opérateur qui engendre un semigroupe  $S(t)$  fortement continu,  $B$  est un opérateur dans  $\mathcal{L}(U, X)$  et  $u \in L^2([0, T]; U)$ .

On sait que la solution de (3.1) s'écrit :

$$z(t) = S(t)z_0 + \Phi_t u, \quad t \in [0, T]$$

avec  $\Phi_t u = \int_0^t S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma$ ,  $\Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X)$ . (3.2)

Dans la partie suivante, on présente des résultats préliminaires concernant les notions de contrôlabilité et d'observabilité classiques (voir par exemple les chapitres 6 et 11 du livre de G. Weiss et M. Tucsnak [35]). On voit aussi quelques notions particulières dont on a besoin plus tard.

#### 1 Définitions

##### Définition 3.1.

- On dit que le système (3.1) (ou  $(A, B)$ ) est **exactement contrôlable en temps  $t$**  si  $\text{Ran } \Phi_t = X$ .
- On dit que  $(A, B)$  est **approximativement contrôlable en temps  $t$**  si  $\text{Ran } \Phi_t$  est dense dans  $X$ .
- Soit  $e \subset [0, t]$  un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive. On dit que  $(A, B)$  est **approximativement contrôlable en temps  $t$  sur  $e$**  si l'image de la fonction  $\Phi_{t,e} \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X)$  définie par :

$$\Phi_{t,e} = \int_0^t \chi_e(\sigma)S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma \quad (3.3)$$

est dense dans  $X$ , où  $\chi_e$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $e$ .

On présente ensuite les notions d'observabilités :

##### Définition 3.2.

Supposons que  $C \in L(X, U)$ . On définit un **opérateur d'observation en temps  $t$** , noté  $\Psi_t$  par :

$$(\Psi_t z_0)(\sigma) = CS(\sigma)z_0, \quad \forall z_0 \in X, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.4)$$

On sait que  $\Psi_t \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$ .

De plus, on peut aussi définir un **opérateur d'observation en temps  $t$  sur  $e$** , avec  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive noté  $\Psi_{t,e}$ , par :

$$\Psi_{t,e} = \chi_e \Psi_t, \quad \Psi_{t,e} \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U)). \quad (3.5)$$

### Définition 3.3.

- On dit que  $(A, C)$  est **exactement observable en temps  $t$**  si  $\Psi_t$  est borné inférieurement, i.e. :

$$\exists c > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_X \leq c \|\Psi_t x\|_{L^2([0, t]; U)}.$$

- On dit que  $(A, C)$  est **approximativement observable en temps  $t$**  si  $\text{Ker } \Psi_t = \{0\}$ .
- Soit  $t > 0$  et  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive. On dit que  $(A, C)$  est **approximativement observable en temps  $t$  sur  $e$**  si  $\text{Ker } \Psi_{t,e} = \{0\}$ .

On a besoin d'introduire les notions de contrôlabilité à zéro :

### Définition 3.4.

- On dit que  $(A, B)$  est **contrôlable à zéro en temps  $t > 0$**  si  $\text{Ran } S(t) \subset \text{Ran } \Phi_t$ .
- On dit que  $(A, B)$  est  **$L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $t > 0$**  si  $\text{Ran } S(t) \subset \Phi_t(L^\infty([0, t]; U))$ .  
Soit  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive.
- On dit que  $(A, B)$  est **contrôlable à zéro en temps  $t > 0$  sur  $e$**  si  $\text{Ran } S(t) \subset \text{Ran } \Phi_{t,e}$ .
- On dit que  $(A, B)$  est  **$L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $t > 0$  sur  $e$**  si  $\text{Ran } S(t) \subset \Phi_{t,e}(L^\infty([0, t]; U))$ .

### Remarque 3.5.

Si  $(A, B)$  est exactement contrôlable en temps  $t$  alors pour tout  $z^f \in X$ , on sait qu'il existe  $u \in L^2([0, t]; U)$  t.q.  $S(t)z_0 + \Phi_t u = z^f$ . Autrement dit, pour tout point initial arbitraire  $z_0 \in X$ , on peut trouver un contrôle  $u \in L^2([0, t]; U)$  qui entraîne  $z_0$  à  $z^f$  en temps  $t$ .

De même, si  $(A, B)$  est contrôlable à zéro en temps  $t$ , alors pour tout point initial arbitraire  $z_0 \in X$ , on peut trouver un contrôle  $u \in L^2([0, t]; U)$  qui entraîne  $z_0$  à 0 en temps  $t$ .

## 2 Dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité

Avant de présenter la dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité, on a besoin d'introduire le lemme comme suit :



**Lemme 3.6.**

Soient  $X_1, X_2$  et  $X_3$  trois espaces de Banach,  $G : D(G) \subseteq X_2 \rightarrow X_3$  un opérateur linéaire, fermé et de domaine dense et  $F \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$ . Alors, on a les équivalences (i)  $\iff$  (ii), (iii)  $\iff$  (iv) et (v)  $\iff$  (vi), où :

$$(i) \text{ } \text{Ran} F \subset \text{Ran} G,$$

$$(ii) \exists c_1 > 0, \{Fz \mid z \in X_1, \|z\|_{X_1} \leq c_1\} \subset \{Gx \mid x \in D(G), \|x\|_{X_2} \leq 1\}.$$

$$(iii) \exists c_2 > 0, \forall x \in X_3, \|F^*x\|_{X_1} \leq c_2 \|G^*x\|_{X_2}.$$

$$(iv) \exists c_3 > 0, \{Fz \mid z \in X_1, \|z\|_{X_1} \leq c_3\} \subset \overline{\{Gx \mid x \in D(G), \|x\|_{X_2} \leq 1\}}.$$

$$(v) \overline{\text{Ran} F} \subset \overline{\text{Ran} G},$$

$$(vi) \text{Ker } G^* \subset \text{Ker } F^*.$$

Si on a de plus que  $X_2$  est réflexif, alors (i)  $\iff$  (iii).

*Démonstration.*

L'équivalence entre (v) et (vi) vient du simple fait que :

$$(\overline{\text{Ran} F})^\perp = \text{Ker } F^* \text{ et que } (\overline{\text{Ran} G})^\perp = \text{Ker } G^*.$$

Donc, on obtient que :

$$(v) \iff (\overline{\text{Ran} G})^\perp \subset (\overline{\text{Ran} F})^\perp \iff (vi).$$

(i)  $\iff$  (ii) et (iii)  $\iff$  (iv) viennent d'un résultat dans l'article de R. G. Douglas [9], on se réfère au théorème 2.2 de l'article de O. Carja [6] et aux théorèmes 2.1 et 2.2 ch.2, Part IV du livre de J. Zaczek [38] pour la démonstration.

□

**Remarque 3.7.**

Dans le cas où  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont des espaces de Hilbert et  $G \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$ , on a évidemment (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii)  $\iff$  (iv) et (v)  $\iff$  (vi).

**Corollaire 3.8.**

Soient  $Z, Y$  deux espaces de Hilbert et  $L \in \mathcal{L}(Z, Y)$ .

Alors on a les deux équivalences suivantes :

$$L \text{ est surjectif } \iff L^* \text{ est borné inférieurement.} \quad (3.6)$$

$$\text{Ran } L \text{ est dense dans } Y \iff L^* \text{ est injectif.} \quad (3.7)$$

*Démonstration.*

Il suffit d'appliquer le lemme 3.6 en posant  $X_1 = X_3 = Y, X_2 = Z, F = Id_Y$  et  $G = L$  pour conclure ((i)  $\iff$  (iii) et (v)  $\iff$  (vi)). □

On note  $\Psi_t^d$  l'opérateur d'observation pour  $(A^*, B^*)$  en temps  $t > 0$ , et  $\Psi_{t,e}^d = \chi_e \Psi_t^d$ , i.e. :

$$\Psi_t^d(\sigma) = B^* S(\sigma)^*, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.8)$$

$$\Psi_{t,e}^d(\sigma) = \chi_e(\sigma) B^* S(\sigma)^*, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.9)$$

On note aussi  $\mathfrak{A}_t$  l'opérateur de réflexion sur  $L^2([0, t]; U)$  défini par  $\mathfrak{A}_t u(\sigma) = u(t - \sigma)$  pour tout  $\sigma \in [0, t]$ . On remarque que  $\mathfrak{A}_t$  est autoadjoint et unitaire.

On énonce ensuite un théorème concernant la dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité.

### Théorème 3.9.

1.  $(A, B)$  est **exactement contrôlable en temps**  $t > 0$  si et seulement si l'opérateur  $\Phi_t^*$  où  $\Phi_t^* \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$  défini par :

$$(\Phi_t^* z)(\sigma) = \mathfrak{A}_t \Psi_t^d(\sigma) = B^* S(t - \sigma)^* z, \quad \forall z \in X, \quad \forall \sigma \in [0, t] \quad (3.10)$$

est **borné inférieurement**.

2. Soit  $t > 0$  et  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive. On note  $e' := \{t - \sigma \mid \sigma \in e\}$ . Alors, on a  $\Phi_{t,e}^* \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$  et :

$$(\Phi_{t,e}^* z)(\sigma) = \mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d(\sigma) = \chi_e(\sigma) B^* S(t - \sigma)^* z, \quad \forall z \in X, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.11)$$

De plus,  $(A, B)$  est **approximativement contrôlable en temps**  $t$  **sur**  $e$  si et seulement si  $(A^*, B^*)$  est **approximativement observable en temps**  $t$  **sur**  $e'$ .

*Démonstration.*

- \* On montre d'abord (3.11).

En fait, pour tout  $v \in L^2([0, t]; U)$  et tout  $z \in X$  on a :

$$\begin{aligned} \langle z, \Phi_{t,e}^* v \rangle_X &= \langle z, \int_0^t \chi_e(\sigma) S(t - \sigma) B v(\sigma) d\sigma \rangle_X = \int_0^t \langle B^* S(t - \sigma)^* \chi_e(\sigma) z, v(\sigma) \rangle_U d\sigma \\ &= \int_0^t \langle \mathfrak{A}_t B^* S(\sigma)^* \chi_{e'}(\sigma) z, v(\sigma) \rangle_U d\sigma = \langle \mathfrak{A}_t B^* S(\cdot)^* \chi_{e'}(\cdot) z, v(\cdot) \rangle_{L^2([0, t]; U)}. \end{aligned}$$

Donc, on en déduit que  $(\Phi_{t,e}^* z)(\sigma) = (\mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d)(\sigma) z$ .

Si de plus, on prend  $e = [0, t]$  dans (3.11), on obtient (3.10).

- \* On pose  $Z = L^2([0, t]; U)$ ,  $Y = X$  et  $L = \Phi_t$  dans (3.6), et on obtient que  $\Phi_t$  est surjectif si et seulement si  $\Phi_t^*$  est borné inférieurement. D'où la première dualité.

Pour la deuxième dualité, on pose  $Z = L^2([0, t]; U)$ ,  $Y = X$  et  $L = \Phi_{t,e}$ . D'après (3.7), on sait que  $\text{Ran } \Phi_{t,e}$  est dense dans  $X$  si et seulement si  $\mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d$  est injectif. Or, cela équivaut au fait que  $\Psi_{t,e'}^d$  est injectif ou que  $(A^*, B^*)$  est approximativement observable en  $t$  sur  $e'$ . D'où la deuxième dualité.  $\square$

**Remarque 3.10.**

- \* Dans la deuxième assertion du théorème 3.9, en prenant  $e = [0, t]$ , on aura le résultat classique pour la dualité. Autrement dit,  $(A, B)$  est approximativement contrôlable en temps  $t$  si et seulement si  $(A^*, B^*)$  est approximativement observable en temps  $t$ .
- \* Dans la première assertion, on a montré :

$$(A, B) \text{ est exactement contrôlable en temps } t > 0, \\ \iff \exists K_t > 0, \forall z \in X, K_t \|\Phi_t^* z\|_{L^2([0, t]; U)} \geq \|z\|_X. \quad (3.12)$$

On appelle  $C_t$  le **coût du contrôle**, la plus petite constante  $K_t$  pour que (3.12) soit vraie.

- \* Dans toute la suite de la section III, on va voir plusieurs notations pour le coût du contrôle. On choisit de les noter par la façon suivante :
- \* Si c'est pour le problème concernant la norme  $L^\infty([0, t]; U)$ , on rajoute un indice  $+\infty$  au dessus, i.e.  $C_t^\infty$ .
- \* Si c'est pour le problème où on cherche à amener le système à zéro, on rajoute un indice 0 au dessus, i.e.  $C_t^0$ .
- \* Si c'est pour le problème où le support de contrôle est inclus dans  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive, on rajoute un indice  $e$  au dessous, i.e.  $C_{t,e}$ .

Quant aux sections plus tard (section IV), pour simplifier l'écriture, on choisit d'éliminer l'indice 0 (respectivement  $+\infty$ ), si le problème traité est clairement associé à une contrôlabilité à zéro (respectivement à la  $L^\infty$ -norme).

On présente par la suite un théorème concernant la dualité entre la contrôlabilité à zéro et une inégalité d'observabilité.

**Théorème 3.11.**

Soient  $t > 0$ ,  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive et  $e' := \{t - \sigma \mid \sigma \in e\}$ .

Alors, on a l'équivalence entre :

- (i)  $(A, B)$  est **contrôlable à zéro en temps  $t$  sur  $e$** ,
- (ii)  $\exists K_{t,e} > 0, \forall z \in X, K_{t,e} \|\Psi_{t,e'}^d z\|_{L^2([0, t]; U)} \geq \|S(t)^* z\|_X$ .

On appelle les inégalités de type (ii) **inégalité d'observabilité** et appelle  $C_{t,e}^0$  **coût de contrôle**, la plus petite constante  $K_{t,e}$  pour que l'inégalité d'observabilité soit vraie.

*Démonstration.*

Il suffit de prendre  $X_1 = X_3 = X, F = S(t), G = \Phi_{t,e}$  et  $X_2 = L^2([0, t]; U)$  dans le lemme 3.6 pour conclure.  $\square$

**Remarque 3.12.**

\* Prenons  $e = [0, t]$  dans le théorème précédent. On obtient la dualité classique entre la contrôlabilité à zéro et une inégalité d'observabilité, i.e. :

$$(A, B) \text{ est contrôlable à zéro en temps } t > 0, \\ \iff \exists K_t > 0, \forall z \in X, K_t \|\Phi_t^* z\|_{L^2([0, t]; U)} \geq \|S(t)^* z\|_X. \quad (3.13)$$

On note par analogie à la remarque 3.10,  $C_t^0$  la plus petite constante  $K_t$  pour que l'inégalité (3.13) soit vraie et on l'appelle **le coût du contrôle**.

\* Pour le problème de contrôle dans l'espace  $L^\infty([0, t]; U)$ , comme  $L^\infty([0, t]; U)$  n'est pas un espace de Banach réflexif, on ne peut pas appliquer le lemme 3.6 pour déduire la dualité.

On présente dans la section suivante quelques propriétés de coût du contrôle, puis on voit un résultat similaire au théorème 3.11 qui donne la dualité entre la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro et un type d'inégalité d'observabilité.

**3 Coût du contrôle**

On commence par un lemme concernant le **Gramien de contrôlabilité** :

**Lemme 3.13.**

Définissons  $R_t \in \mathcal{L}(X)$  le **Gramien de contrôlabilité** pour  $(A, B)$  par :

$$R_t z = \Phi_t \Phi_t^* z, \quad \forall z \in X. \quad (3.14)$$

Si  $(A, B)$  est exactement contrôlable, alors  $R_t$  est un opérateur **inversible, autoadjoint et positif**.

De plus, on peut trouver un unique opérateur  $R_t^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(X)$ , autoadjoint et positif et  $R_t^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(X)$  est aussi un opérateur autoadjoint et positif.

*Démonstration.*

On montre d'abord que  $R_t$  est inversible. D'après la contrôlabilité exacte de  $(A, B)$ , on sait que  $\text{Ran } \Phi_t = X$ . D'après (3.6), cela implique que  $\Phi_t^*$  est borné inférieurement. On obtient que :

$$\forall x \in X, C_t^2 \|\Phi_t \Phi_t^* x\|_X \|x\|_X \geq C_t^2 \langle \Phi_t \Phi_t^* x, x \rangle_X = C_t^2 \|\Phi_t^* x\|_{L^2([0, t]; U)}^2 \geq \|x\|_X^2,$$

où  $C_t$  est le coût du contrôle.

Donc  $\Phi_t \Phi_t^* = (\Phi_t \Phi_t^*)^*$  est borné inférieurement. Cela équivaut au fait que  $\Phi_t \Phi_t^*$  est surjectif. De plus, comme  $R_t$  est borné inférieurement, il est injectif. Donc  $R_t$  est inversible.

Par un simple calcul, on a :

$$R_t z = \int_0^t S(s) B B^* S(s)^* z \, ds, \quad \forall z \in X.$$

On montre ensuite que  $R_t$  est un opérateur autoadjoint positif. En effet, on calcule :

$$\begin{aligned}\langle R_t z, y \rangle_X &= \int_0^t \langle S(\sigma) B B^* S(\sigma)^* z, y \rangle_X d\sigma \\ &= \int_0^t \langle z, S(\sigma) B B^* S(\sigma)^* y \rangle_X d\sigma = \langle z, R_t y \rangle_X, \quad \forall z, y \in X. \\ \langle R_t z, z \rangle_X &= \int_0^t \|S(\sigma) B B^* S(\sigma)^* z\|_X^2 d\sigma \geq 0, \quad \forall z \in X.\end{aligned}$$

La dernière assertion est un résultat classique dès que  $R_t$  est un opérateur inversible, autoadjoint et positif.

D'où le résultat.  $\square$

On donne ensuite une proposition qui donne une caractérisation du coût du contrôle :

**Théorème 3.14.**

*Supposons que  $(A, B)$  est exactement contrôlable en tout temps  $t > 0$ .*

*Soit  $z \in X$  fixé. Alors, on peut définir un opérateur  $F(t) \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$  t.q. pour tout  $z \in X$ ,*

$$\tilde{u}_{t,z} := F(t)z \tag{3.15}$$

*est l'unique solution d'un problème de contrôle en norme minimale :*

$$\min \left\{ \|u\|_{L^2([0,t];U)} \mid u \in L^2([0,t];U), \Phi_t u = z \right\}. \tag{3.16}$$

*On sait de plus que  $F(t)z = \Phi_t^* R_t^{-1} z$  où  $R_t$  est le Gramien de contrôlabilité (défini en (3.13) et on a  $C_t = \|F(t)\|_{\mathcal{L}(X, L^2([0,t];U))}$ .*

*Démonstration.*

On commence par remarquer une propriété utile :

\* Soit  $z \in X$ . On a :

$$\begin{aligned}\|\Phi_t^* z\|_{L^2([0,t];U)}^2 &= \int_0^t \|B^* S(t-\sigma)^* z\|_X^2 d\sigma = \left\langle \int_0^t S(t-\sigma) B B^* S(t-\sigma)^* z d\sigma, z \right\rangle_X \\ &= \langle R_t z, z \rangle_X = \|R_t^{\frac{1}{2}} z\|_X^2.\end{aligned} \tag{3.17}$$

**On montre par la suite l'existence et l'unicité de la solution.**

En effet, comme  $L^2([0, t]; U)$  est un espace de Hilbert, d'après le théorème V.2 du livre de Brezis [5], on sait que  $\text{Ker } \Phi_t$  admet un supplémentaire topologique dans  $L^2([0, t]; U)$ . Autrement dit, comme  $X = \text{Ran } \Phi_t$ , il existe un unique  $u \in (\text{Ker } \Phi_t)^\perp$  t.q.  $\Phi_t u = z$ .

En plus, par un simple calcul, on a :

$$\Phi_t \tilde{u}_{t,z} = \Phi_t \Phi_t^* R_t^{-1} z = z.$$

Soit  $u \in L^2([0, t]; U)$  t.q.  $\Phi_t u = z$ . On a  $u = u_1 + u_2$ , une décomposition orthogonale où  $u_1 \in \text{Ker } \Phi_t$  et  $u_2 \in (\text{Ker } \Phi_t)^\perp$ .

D'après le raisonnement ci-dessus, on sait que  $u_2 = \tilde{u}_{t,z}$ .

On a aussi :

$$\|u\|_{L^2([0,t];U)}^2 = \|u_1\|_{L^2([0,t];U)}^2 + \|\tilde{u}_{t,z}\|_{L^2([0,t];U)}^2 \geq \|\tilde{u}_{t,z}\|_{L^2([0,t];U)}^2.$$

D'où l'existence et l'unicité de la solution.

**On montre ensuite que**  $\|F(t)\|_{\mathcal{L}(X, L^2([0,t];U))} = C_t$ .

Pour tout  $z \in X$ , d'après (3.17), on obtient :

$$\|F(t)z\|_{L^2([0,t];U)} = \|\Phi_t^* R_t^{-1} z\|_{L^2([0,t];U)} = \|R_t^{\frac{1}{2}} R_t^{-1} z\|_X = \|R_t^{-\frac{1}{2}} z\|_X. \quad (3.18)$$

Donc, cela implique que :

$$\|F(t)\|_{\mathcal{L}(X, L^2([0,t];U))} = C_t \iff \|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} = C_t, \quad (3.19)$$

où  $C_t$  est la plus petite constante  $K_t$  t.q.

$$K_t \|\Phi_t^* z\|_{L^2([0,t];U)} = K_t \|R_t^{\frac{1}{2}} z\|_X \geq \|z\|_X, \quad \forall z \in X. \quad (3.20)$$

On montre ensuite que  $\|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_t$  et que  $\|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \geq C_t$ .

On calcule, pour tout  $z$  dans  $X$  :

$$\begin{aligned} \|R_t^{-\frac{1}{2}} z\|_X^2 &= \left\langle R_t^{-\frac{1}{2}} z, R_t^{-\frac{1}{2}} z \right\rangle_X = \left\langle z, R_t^{-1} z \right\rangle_X \\ &\leq \|z\|_X \|R_t^{-1} z\|_X \leq \|z\|_X C_t \|R_t^{-\frac{1}{2}} z\|_X \text{ (d'après (3.20))}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $z$  dans  $X$  on a  $\|R_t^{-\frac{1}{2}} z\|_X \leq \|z\|_X C_t$ . Cela implique que  $\|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_t$  en passant au supremum.

De plus, on peut calculer pour tout  $z$  dans  $X$  :

$$\|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \|R_t^{\frac{1}{2}} z\|_X \geq \frac{\|R_t^{-\frac{1}{2}} z\|_X \|R_t^{\frac{1}{2}} z\|_X}{\|z\|_X} \geq \frac{\left\langle R_t^{-\frac{1}{2}} z, R_t^{\frac{1}{2}} z \right\rangle_X}{\|z\|_X} = \|z\|_X.$$

Donc  $\|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \geq C_t$ . D'où  $\|R_t^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} = C_t$  et par suite  $C_t = \|F(t)\|_{\mathcal{L}(X, L^2([0,t];U))}$ .  $\square$

**Remarque 3.15.**

\* Le problème (3.16) est un problème de contrôle en norme optimale pour le système partant d'un point initial 0 arrivant au point final  $z$ .

Dans la section V, on va présenter plus de détails pour un problème similaire de contrôle en norme optimale d'un système qui part du point initial  $z_0$  et arrive au point final 0.

\* Par analogie à la démonstration ci-dessus, on peut montrer que si  $(A, B)$  est contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ , alors on a :

$$C_t^0 = \|F_0(t)\|_{\mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))}, \quad (3.21)$$

où  $F_0$  est en effet l'opérateur donnant l'unique contrôle qui amène un système du point initial  $z_0$  au point final 0 en norme minimale. Plus précisément,  $\tilde{u}_{t, z_0} = F_0(t)z_0$  est l'unique solution du problème :

$$\min \left\{ \|u\|_{L^2([0, t]; U)} \mid u \in L^2([0, t]; U), S(t)z_0 + \Phi_t u = 0 \right\}. \quad (3.22)$$

On remarque que comme le système n'est plus exactement contrôlable, le Grammien de contrôlabilité  $R_t$  n'est pas inversible, autrement dit, on ne peut pas écrire la formule suivante :

$$F_0(t)z_0 = -\Phi_t^* R_t^{-1} (S(t)z_0). \quad (3.23)$$

Cependant, l'écriture ci-dessus n'est pas totalement fausse, il faut avoir  $S(t)z_0 \in \text{Ran } R_t$ . On remarque que par exemple pour  $z_0$  assez proche de zéro, la formule (3.23) est juste. On verra l'usage de cette écriture à la fin de la section V.

\* Dans le cas plus général où  $p \in ]1, +\infty[$ , on peut aussi montrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contrôle en  $L^p$ -norme minimale de type ci-dessus (avec point initial 0 ou point final 0). Il suffit de remarquer que  $L^p([0, T]; U)$  est un espace de Hilbert et d'utiliser le théorème V.2 du livre de Brezis [5].

On présente quelques résultats utiles pour contrôler le système par des contrôles dans  $L^\infty([0, t]; U)$  au lieu de  $L^2([0, t]; U)$ .

**Proposition 3.16.**

Si  $(A, B)$  est exactement contrôlable en  $t > 0$ , alors  $\Phi_t(\mathbf{L}^\infty([0, t]; U)) = \mathbf{X}$ .

*Démonstration.*

Pour tout  $z_0 \in X$ , on peut définir une fonction  $u \in L^2([0, t]; U)$  par :

$$u(\sigma) = \Phi_t^*(\sigma) R_t^{-1} z_0, \quad \forall \sigma \in [0, t].$$

On peut aussi vérifier que :  $\Phi_t u = \Phi_t \Phi_t^* R_t^{-1} z_0 = z_0$ .

Il reste à montrer que  $u \in L^\infty([0, t]; U)$ .

D'après (3.10), on peut écrire  $u$  comme :

$$u(\sigma) = B^*S(t - \sigma)^*R_t^{-1}z_0, \quad \forall \sigma \in [0, t].$$

De plus, on a :

$$\|u(\sigma)\|_U = \|B^*S(t - \sigma)^*R_t^{-1}z_0\|_U \leq \|B^*\|_{\mathcal{L}(X,U)}M_t\|R_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|z_0\|_X, \quad \forall \sigma \in [0, t],$$

où  $M_t := \sup_{\sigma \in [0, t]} \|S(t - \sigma)^*\|_{\mathcal{L}(X)}$ .

D'où le résultat.  $\square$

Pour simplifier l'écriture, on définit un ensemble de contrôles admissibles, que l'on note  $\mathcal{L}_1(t)$  par :

$$\mathcal{L}_1(t) = \left\{ u \in L^\infty([0, t]; U) \mid \|u\|_{L^\infty([0, t]; U)} \leq 1 \right\}. \quad (3.24)$$

On définit deux autres ensembles accessibles à partir du point 0 :

$$R^\infty(t) = \{ z \in X \mid z = \Phi_t u, \ u \in L^\infty([0, t]; U) \}, \quad (3.25)$$

$$B_1^\infty(t) = \{ z \in X \mid z = \Phi_t u, \ u \in \mathcal{L}_1(t) \}. \quad (3.26)$$

**Lemme 3.17.**

*On définit une norme pour l'espace  $R^\infty(t)$  par :*

$$\|z\|_{R^\infty(t)} = \inf \left\{ \|u\|_{L^\infty([0, t]; U)} \mid u \in L^\infty([0, t]; U), \ \Phi_t u = z \right\} \quad (z \in R^\infty(t)). \quad (3.27)$$

*Alors,  $(R^\infty(t), \|\cdot\|_{R^\infty(t)})$  est un espace de Banach.*

*De plus, pour tout  $0 < s < t$ , on a les inclusions continues suivantes :*

$$R^\infty(s) \subset R^\infty(t) \subset X.$$

*Démonstration.*

On admet que  $R^\infty(t)$  est complet. on se réfère au lemme 2.1.1 de [11].

Ensuite, les inclusions sont claires, il suffit de montrer qu'elles sont continues.

Comme  $\Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X)$ , on sait qu'il existe  $M > 0$  t.q. pour tout  $x \in R^\infty(t)$  et pour tout  $u \in L^\infty([0, t]; U)$  avec  $\Phi_t u = x$ , on a  $\|x\|_X \leq M\|u\|_{L^\infty([0, t]; U)}$ .

En prenant l'infimum en  $u$  sur  $L^\infty([0, t]; U)$ , on en déduit que  $\|x\|_X \leq M\|x\|_{R^\infty(t)}$ . Donc l'inclusion  $R^\infty(t) \subset X$  est continue.

Pour la continuité de l'inclusion  $R^\infty(s) \subset R^\infty(t)$ , on remarque d'abord que pour tout  $0 < s < t$  et tout  $x \in R^\infty(s)$  avec  $x = \Phi_s u$ ,  $u \in L^\infty([0, s]; U)$ , on a :

$$\int_0^s S(s - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma = \int_{t-s}^t S(t - \sigma)Bu(\sigma - t + s)d\sigma.$$

Donc, en posant  $\tilde{u}(\sigma) = \chi_{[t-s, t]}(\sigma)u(\sigma - t + s)$  ( $\sigma \in [0, t]$ ), on a  $\Phi_t \tilde{u} = x$  avec  $\tilde{u} \in L^\infty([0, t]; U)$  et  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty([0, t]; U)} = \|u\|_{L^\infty([0, s]; U)}$ . Donc, on obtient  $\|x\|_{R^\infty(t)} \leq \|x\|_{R^\infty(s)}$ . D'où la continuité.  $\square$



En supposant que  $(A, B)$  est exactement contrôlable, on a montré dans la proposition 3.16 que  $R^\infty(t) = \Phi_t(L^\infty([0, t]; U)) = X$ .

On peut donc énoncer le lemme suivant :

**Lemme 3.18.**

*Si  $(A, B)$  est exactement contrôlable en temps  $t$ , alors les normes  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_{R^\infty(t)}$  sont équivalentes.*

*De plus, si on définit  $C_t^{+\infty}$  par :*

$$C_t^{+\infty} = \sup_{z \neq 0, z \in X} \left\{ \frac{\|z\|_{R^\infty(t)}}{\|z\|_X} \right\}, \quad (3.28)$$

*alors  $t \mapsto C_{t,+\infty}$  est **décroissante en temps**.*

*Démonstration.*

D'après la proposition 3.16, on sait que  $R^\infty(t) = X$ . Prenons l'application identité,  $Id : (X, \|\cdot\|_{R^\infty(t)}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ . On a montré dans le lemme 3.17 qu'il existe  $M > 0$  t.q.  $\|x\|_X \leq M\|x\|_{R^\infty(t)}$ . Donc on sait que  $Id \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|_{R^\infty(t)}), (X, \|\cdot\|_X))$ . Par une conséquence du théorème de l'application ouverte (voir Corollaire II.6 de [5]), cela implique que  $Id^{-1}$  est continue. D'où l'équivalence entre les deux normes.

Afin de montrer que  $t \mapsto C_t^{+\infty}$  est décroissante, on reprend exactement la même démarche que dans la démonstration du lemme 2.7.  $\square$

**Remarque 3.19.**

\* Si on restreint l'opérateur  $\Phi_t$  sur l'espace  $L^\infty([0, t]; U)$ , la constante  $C_t^{+\infty}$  s'interprète comme le coût du contrôle par le fait que  $C_t^{+\infty}$  est en effet la plus petite constante  $K_t$  t.q. :

$$\forall z \in X, K_t \|\Phi_t^* z\|_{L^1([0, t]; U)} \geq \|z\|_X. \quad (3.29)$$

\* Il est clair qu'on peut montrer que  $t \mapsto C_t$  et  $t \mapsto C_t^0$  sont toutes **décroissants en temps**.

Supposons que  $(A, B)$  est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $t$  sur  $e$ . Alors pour tout  $z_0 \in X$ , on peut définir un ensemble  $A_{t,e,z_0}$  non vide par :

$$A_{t,e,z_0} := \{u \in L^\infty([0, t]; U) \mid S(t)z_0 + \Phi_{t,e}u = 0\}. \quad (3.30)$$

On peut par analogie définir le coût du contrôle comme une constante :

$$C_{t,e}^{+\infty,0} = \sup_{z_0 \neq 0, z_0 \in X} \left\{ \frac{\inf_{u \in A_{t,e,z_0}} \{\|u\|_{L^\infty([0, t]; U)}\}}{\|z_0\|_X} \right\}. \quad (3.31)$$

Il est clair que  $t \mapsto C_{t,e}^{+\infty,0}$  est décroissante.

On donne ensuite la dualité entre la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en temps  $t > 0$  sur  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive et un type d'inégalité d'observabilité.

**Théorème 3.20.**

Soient  $t > 0$ ,  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive et  $e' := \{t - \sigma \mid \sigma \in e\}$ . Alors, on a l'équivalence entre :

- (i)  $(A, B)$  est  $L^\infty$ -**contrôlable à zéro en temps  $t$  sur  $e$**  et le coût du contrôle  $C_{t,e}^{+\infty,0}$  est plus petit qu'une constante  $K_{t,e}$ ,
- (ii)  $\forall z \in X$ ,  $K_{t,e} \|\Psi_{t,e'}^d z\|_{L^1([0,t];U)} \geq \|S(t)^* z\|_X$ .

*Démonstration.*

**On montre d'abord que (ii)  $\Rightarrow$  (i).**

Définissons un sous-espace  $Z$  de  $L^1([0, t]; U)$  par :

$$Z := \left\{ \mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d \phi \mid \phi \in X \right\}.$$

Soit  $z_0 \in X$ . On considère la fonction  $\mathcal{F} : Z \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{F}(\mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d \phi) = -\langle z_0, S(t)^* \phi \rangle_X. \quad (3.32)$$

On montre d'abord que  $\mathcal{F}$  est bien définie. En effet, soient  $\phi \neq \phi'$  et  $\mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d \phi = \mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d \phi'$ . D'après l'inégalité (ii), on obtient que  $S(t)^* \phi = S(t)^* \phi'$ . Donc  $\mathcal{F}$  est bien définie.

De plus, d'après l'inégalité (ii) et (3.32), on obtient :

$$|\mathcal{F}(v)| \leq K_{t,e} \|z_0\|_X \|v\|_{L^1([0,t];U)}, \quad \forall v \in Z.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach (voir le théorème I.1 de [5]), on peut prolonger  $\mathcal{F}$  sur  $L^1([0, t]; U)$  (on note l'extension par  $\tilde{\mathcal{F}}$ ) de manière à ce que :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}(v) = \mathcal{F}(v), & \forall v \in Z, \\ |\tilde{\mathcal{F}}(v)| \leq K_{t,e} \|z_0\|_X \|v\|_{L^1([0,t];U)}, & \forall v \in L^1([0, t]; U). \end{cases}$$

Par le théorème de représentation de Riesz, ceci implique qu'il existe  $u \in L^\infty([0, t]; U)$  t.q. :

$$\begin{cases} \|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \leq K_{t,e} \|z_0\|_X, \\ \langle u, v \rangle_{L^\infty, L^1} = \tilde{\mathcal{F}}(v), & \forall v \in Z. \end{cases}$$

Prenons  $v = \mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d \phi$ . On obtient que pour tout  $\phi \in X$  :

$$-\langle S(t)z_0, \phi \rangle_X = -\langle z_0, S(t)^* \phi \rangle_X = \tilde{\mathcal{F}}(v) = \langle u, \mathfrak{A}_t \Psi_{t,e'}^d \phi \rangle_{L^\infty, L^1} = \langle \Phi_{t,e} u, \phi \rangle_X.$$

Donc  $\Phi_{t,e} u + S(t)z_0 = 0$ , pour tout  $z_0 \in X$ . D'où (i) est vrai.

**Pour la réciproque**, on pose  $z_0 = S(t)^* \varphi \in X$  où  $\varphi \in X$ . Comme le coût du contrôle est plus petit que  $K_{t,e}$ , cela implique qu'il existe  $u \in L^\infty([0, t]; U)$  t.q.  $u \in A_{t,e,z_0}$  et que  $\|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \leq K_{t,e} \|z_0\|_X$ .

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}
\|S(t)^*\varphi\|_X^2 &= \langle z_0, S(t)^*\varphi \rangle_X = \langle S(t)z_0, \varphi \rangle_X \\
&= -\langle \Phi_{t,e}u, \varphi \rangle_X = -\langle u, \mathfrak{H}_t \Psi_{t,e'}^d \varphi \rangle_{L^\infty, L^1} \\
&\leq \|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \|\mathfrak{H}_t \Psi_{t,e'}^d \varphi\|_{L^1([0,t];U)} \leq K_{t,e} \|z_0\|_X \|\Psi_{t,e'}^d \varphi\|_{L^1([0,t];U)}.
\end{aligned}$$

D'où (ii) est vrai.

□

### Remarque 3.21.

- \* Le théorème précédente implique que  $C_{t,e}^{+\infty,0}$  est la plus petite constante qui réalise l'inégalité d'observabilité (ii).
- \* Prenons  $e = [0, t]$  dans le théorème précédent. On obtient la dualité entre la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro et un type d'inégalité d'observabilité :

$$\begin{aligned}
(A, B) \text{ est } L^\infty\text{-contrôlable à zéro en temps } t \\
\text{et le coût du contrôle } C_t^{+\infty,0} \text{ est plus petit qu'une constante } K_t, \\
\iff \forall z \in X, K_t \|\Phi_t^* z\|_{L^1([0,t];U)} \geq \|S(t)^* z\|_X,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

où on définit par analogie :

$$C_t^{+\infty,0} = \sup_{z_0 \neq 0, z_0 \in X} \left\{ \frac{\inf_{u \in A_{t,z_0}} \{ \|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \}}{\|z_0\|_X} \right\}, \tag{3.34}$$

avec  $A_{t,z_0} := \{u \in L^\infty([0,t];U) \mid S(t)z_0 + \Phi_t u = 0\}$ .

- \* Toutes les différentes notions de coût du contrôle ont des propriétés communes suivantes :
- C'est la plus petite constante qui réalise une inégalité d'observabilité.
- C'est la norme d'un opérateur  $\tilde{F} : X \rightarrow L^p([0,t];U)$ ,  $p \in ]1, +\infty]$  où  $\tilde{u} = \tilde{F}z$  est la solution d'un type de problème de contrôle en  $L^\infty$ -norme minimale.
- Ils sont décroissants en temps.

Le comportement de  $C_t^0$  pour un problème de contrôle d'un système contrôlable à zéro est un sujet vivement étudié dans ces dizaines d'années. Il est connu que  $\lim_{t \rightarrow 0} C_t^0 = +\infty$ . On présente par la suite quelques résultats obtenus dans différents articles concernant le taux d'explosion de  $C_t^0$  quand  $t$  tend vers zéro.

- \* En dimension finie (où  $X = \mathbb{R}^n$  et  $U = \mathbb{R}^m$ ), Thomas I. Seidman et Jiongmin Yong ont montré dans l'article [29] :

$$\mathbf{C}_t^0 \sim t^{-(k+1/2)}, \quad t \rightarrow 0, \tag{3.35}$$

où  $k$  est le plus petit nombre entier t.q.  $\text{Ran } [B, AB, \dots, A^k B] = n$ .

- \* Dans le cadre de la section IV.4, on suppose  $A = A^* < 0$ , diagonalisable avec une base orthornormée formée par les vecteurs propres  $(\varphi_k)_k$  de  $A$  où les valeurs propres associées  $(-\lambda_k)_k$  sont t.q. pour tout  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k > 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$  et que la résolvante de  $A$  est compacte. Si on suppose de plus que pour tout  $\zeta > 0$ ,  $(A, B)$  vérifie l'inégalité :

$$\exists d_0, d_1 > 0, \forall \varphi \in V_\zeta, \|\varphi\|_X \leq d_0 e^{d_1 \zeta} \|B^* \varphi\|_U, \quad (3.36)$$

où  $V_\zeta = \text{vect} \left\{ \varphi_k \mid \lambda_k^{\frac{1}{2}} \leq \zeta \right\}$ , on va voir que le système est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive.

Dans ce cas, G. Tenenbaum et M. Tucsnak ont montré dans l'article [33] (théorème 1.2) que :

$$\mathbf{C}_t^0 < t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{c}{t}}, \quad t \rightarrow 0 \quad \text{où } c > 4d_1^2. \quad (3.37)$$

On peut appliquer cette estimation du coût du contrôle à l'équation de la chaleur avec un contrôle interne, décrite dans (3.54)-(3.56).

- \* Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , borné et que  $\partial\Omega$  est de la classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On considère l'équation de Schrödinger avec un contrôle sur le bord :

$$\dot{z}(x, t) = -i\Delta z(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.38)$$

$$z(x, t) = u(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (3.39)$$

$$z(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}, \quad t \geq 0, \quad (3.40)$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.41)$$

où  $z_0 \in L^2(\Omega)$  et  $\Gamma \subset \partial\Omega$  et  $\Gamma$  satisfait la condition d'optique géométrique décrite dans l'article de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [2].

Alors, G. Tenenbaum et M. Tucsnak ont montré dans l'article [32] (proposition 6.1) que :

$$\mathbf{C}_t^0 < e^{\frac{3L_\Gamma^2}{2t}}, \quad t \rightarrow 0, \quad (3.42)$$

où  $L_\Gamma$  est une constante dépendant de  $\Gamma$  (voir [32]).

G. Tenenbaum et M. Tucsnak ont montré aussi dans l'article [32] (proposition 6.3) que pour l'équation de la chaleur avec un contrôle sur le bord, i.e. :

$$\dot{z}(x, t) = \Delta z(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.43)$$

$$z(x, t) = u(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (3.44)$$

$$z(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}, \quad t \geq 0, \quad (3.45)$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.46)$$

on a :

$$\mathbf{C}_t^0 < e^{\frac{3L_\Gamma^2}{4t}}, \quad t \rightarrow 0, \quad (3.47)$$

où  $L_\Gamma$  est une constante dépendant de  $\Gamma$ .

On peut obtenir des estimations plus précises en dimension 1 ou dans le cas où  $\Omega$  est un rectangle. on se réfère à l'article de G. Tenenbaum et de M. Tucsnak [32], et à l'article de L. Miller [26] pour plus de détails.

- \* Dans la plupart du temps en dimension infinie, le coût du contrôle explose exponentiellement quand  $t$  tend vers zéro comme on l'a illustré dans les cas précédents. Il existe quelques cas particuliers où on peut montrer que le coût du contrôle explose avec une vitesse polynomiale.

Par exemple, dans l'article de I. Lasiecka and R. Triggiani [20], où ils considèrent un système hyperbolique non-linéaire, il existe des cas où le coût du contrôle explose polynomialement (Section 4, théorème 4.1.1 cas 2).

De plus, considérons par exemple l'équation de la chaleur dans un intervalle avec le contrôle dans tout l'intervalle. On peut montrer par un simple calcul que le coût du contrôle explose avec une vitesse polynomiale.

On va voir dans la section V le lien entre le taux d'explosion de coût du contrôle et le module de continuité de la fonction temps minimal.

## 4 Exemples

### (1) Les équations de type Schrödinger

On présente les équations de type Schrödinger avec un contrôle interne. Plus précisément, on considère l'équation :

$$\dot{z}(x, t) = -i\Delta z(x, t) + ia(x)z(x, t) + u(x, t)\chi_O(x), \quad x \in \Omega, t \geq 0, \quad (3.48)$$

$$z(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (3.49)$$

$$z(x, 0) = z_0(x) \in L^2(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (3.50)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert,  $O$  est un ouvert de  $\Omega$  non vide,  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  et  $u$  est un contrôle vérifiant que pour tout  $t > 0$ ,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(O)} \leq 1$ .

On écrit d'abord le système (3.48)-(3.50) sous une forme formelle :

Posons  $X = L^2(\Omega)$ ,  $U = L^2(O)$ . On définit l'opérateur  $A$  par :

$$A = \begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & \rightarrow X \\ \varphi & \mapsto A\varphi = -i\Delta\varphi + ia(x)\varphi \end{cases} \quad (3.51)$$

et l'opérateur  $B \in \mathcal{L}(U, X)$  par  $Bu = \chi_O u$ ,  $u \in L^2(O)$ .

Avec les notations ci-dessus, le système (3.48)-(3.50) s'écrit sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0. \quad (3.52)$$

On rappelle ensuite un résultat connu :

**Proposition 3.22.**

Soit  $X$  un espace de Hilbert de dimension infinie et  $A : D(A) \rightarrow X$  un opérateur autoadjoint avec résolvante compacte. Alors,  $A$  est diagonalisable avec une base orthonormale  $(\varphi_k)_{k \in I}$  de vecteurs propres de  $A$  ( $I \subset \mathbb{Z}$ ) et les valeurs propres associées  $(\lambda_k)_{k \in I}$  vérifient  $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$ .

*Démonstration.*

Voir par exemple la proposition 3.2.12 de [35]. □

Notons  $A = iA_0$ , où  $A_0\varphi = -\Delta\varphi + a(x)\varphi$ .

On commence par donner quelques propriétés de l'opérateur  $A_0$  :

**Proposition 3.23.**

$A_0$  est un opérateur **autoadjoint, diagonalisable et le spectre de  $A_0$  est borné inférieurement**.

*Démonstration.*

\*  $A_0$  est symétrique :

On remarque d'abord que pour tout  $\varphi, \psi \in D(A_0) = D(A)$  on a :

$$\begin{aligned} \langle A_0\varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-\Delta\varphi + a(x)\varphi) \bar{\psi} dx = \int_{\Omega} \nabla\varphi \nabla\bar{\psi} + a(x)\varphi \bar{\psi} dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi (-\Delta\bar{\psi} + a(x)\bar{\psi}) dx = \langle \varphi, A_0\psi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc  $A_0$  est symétrique.

\*  $A_0$  est autoadjoint :

Comme  $A_0$  est symétrique, il suffit de montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  t.q.  $A_0 + \lambda I$  est surjectif pour déduire que  $A_0$  est autoadjoint. Puisque  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $a_0 > 0$  t.q.  $a(x) + \lambda > a_0 \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Prenons ce  $\lambda$  et notons  $a' = a + \lambda$ , on veut montrer que  $A_0 + \lambda I = -\Delta + a'$  est un opérateur surjectif. Autrement dit, on veut montrer que pour tout  $f \in L^2(\Omega)$  il existe  $z \in D(A_0 + \lambda I) = D(A_0)$  t.q.  $(A_0 + \lambda I)z = f$ .

Pour cela, on écrit la forme variationnelle :

$$b(z, \varphi) = l(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

où  $b(z, \varphi) = \langle (A_0 + \lambda I)z, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$  et  $l(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

On sait que :

$$b(z, z) = \langle \nabla z, \nabla z \rangle_{L^2(\Omega)} + a'(x) \langle z, z \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \min \{1, a_0\} \|z\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Donc, la forme bilinéaire  $b$  est coercive et il est clair que  $b$  et  $l$  sont continues. D'après le théorème de Lax-Milgram, on établit l'existence d'un unique  $z \in H_0^1(\Omega)$  t.q.  $(A_0 + \lambda I)z = f$ .

On note  $D(\Omega)$  les fonctions  $C^\infty$  à support compact sur  $\Omega$ . Il est clair que :

$$-\Delta z + a'(x)z = f, \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Puisque  $f \in L^2(\Omega)$ , on a  $z \in H^2(\Omega)$ . Donc,  $z \in D(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  avec  $(A_0 + \lambda I)z = f$ . D'où la surjectivité de  $A_0 + \lambda I$ .

\*  **$A_0$  est diagonalisable avec le spectre borné inférieurement :**

Par le fait que l'injection  $D(A_0) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte, On en déduit que  $A_0^{-1}$  est compact. D'après la proposition 3.22, on sait que  $A_0$  est diagonalisable et que  $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$ .

De plus, pour tout  $\varphi \in D(A_0)$  on a :

$$\langle A_0 \varphi, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(x) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq K_\Omega \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $K_\Omega = \frac{1}{C_\Omega} + a_0 - \lambda$  avec  $a(x) + \lambda > a_0 \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$  et  $C_\Omega$  est la constante d'inégalité de Poincaré.

Donc, le spectre de  $A_0$  est borné inférieurement.

□

On peut aussi écrire les opérateurs adjoints de  $(A, B)$  par :

$$\begin{cases} A^* \varphi &= i\Delta \varphi - i\bar{a}(x)\varphi, \\ B^* x &= x|_O. \end{cases} \quad (3.53)$$

On donne par la suite le premier résultat de la contrôlabilité du système (3.48)-(3.50) :

### **Théorème 3.24.**

*Supposons que l'une des 2 hypothèses suivantes est vérifiée :*

1.  $\Omega$  est borné,  $\partial\Omega$  est de la classe  $C^2$ ,  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  et  $O$  satisfait la condition d'optique géométrique, comme celle décrite dans l'article de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [2].
2.  $\Omega$  est un rectangle,  $a$  est une constante et  $O$  est un ouvert quelconque non vide de  $\Omega$ .

*Alors,  $(A, B)$  est **exactement contrôlable en tout temps**  $t > 0$ .*

*Démonstration.*

En utilisant la remarque 7.4.4 et le théorème 6.7.2 de [35], on remarque d'abord que si on a la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes, alors on aura la contrôlabilité exacte pour l'équation de Schrödinger.

Sous la première hypothèse, la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes est établie dans [2]. Quant à la deuxième hypothèse, la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes est montrée dans l'article de S. Jaffard [18] et dans l'article de

V. Komornik [19]. Donc, on conclut que  $(A, B)$  est exactement contrôlable en tout temps  $t > 0$ .

□

On va construire la contrôlabilité approchée en tout temps  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive plus tard dans la section IV.3.2.

## (2) L'équation de la chaleur

Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un compact connexe,  $\partial\Omega$  est de la classe  $C^\infty$  et que  $O \subset \Omega$  est un ouvert non vide.

On considère le système :

$$\dot{z}(t, x) = \Delta z(t, x) + \chi_O(x)u(t, x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.54)$$

$$z(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (3.55)$$

$$z(0, x) = z_0 \in L^2(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (3.56)$$

où  $u$  est un contrôle vérifiant que pour tout  $t > 0$ ,  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(O)} \leq 1$ .

Posons  $X = L^2(\Omega)$ ,  $U = L^2(O)$ . On définit l'opérateur  $A$  par :

$$A := \begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & \rightarrow X \\ \varphi & \mapsto A\varphi = \Delta\varphi, \end{cases} \quad (3.57)$$

et l'opérateur  $B \in \mathcal{L}(U, X)$  par  $Bu = \chi_O u$ ,  $u \in L^2(O)$ .

Avec les notations ci-dessus le système (3.54)-(3.56) s'écrit sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0.$$

De plus, d'après la proposition 3.23, il est clair que  $A = A^* < 0$ , diagonalisable avec une base orthornormée formée par les vecteurs propres  $(\varphi_k)_k$  de  $A$  où les valeurs propres associées  $(-\lambda_k)_k$  sont t.q. pour tout  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k > 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty$  et que la résolvante de  $A$  est compacte.

Il est connu que l'équation de la chaleur ne possède pas la contrôlabilité exacte (voir par exemple l'article de G. Lebeau et E. Zuazua [22]). On verra dans la section IV.4, que l'on peut établir la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en tout  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive pour le système (3.54)-(3.56) en s'appuyant sur une technique introduite par G. Lebeau et L. Robbiano [21].



## IV Contrôle en temps optimal en dimension infinie

### 1 Introduction

On commence par décrire le système en dimension infinie.

Soient  $X, U$  deux espaces de Hilbert. On identifie  $U$  et  $U'$  (respectivement  $X$  et  $X'$ ) dans toute la suite, où  $U'$  est le dual de  $U$ .

On considère le système suivant :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z_0 \in X, \quad (4.1)$$

où  $A : D(A) \rightarrow X$  est un opérateur qui engendre un semigroupe  $S(t)$  fortement continu,  $B$  est un opérateur dans  $\mathcal{L}(U, X)$  et  $u \in L^\infty([0, T]; U)$ .

On sait que la solution de (4.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} z(t) &= S(t)z_0 + \Phi_t u, \quad t \in [0, T] \\ \text{avec } \Phi_t u &= \int_0^t S(t-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma, \quad \Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X). \end{aligned} \quad (4.2)$$

On rappelle que l'on note  $z(t, z_0, u) = S(t)z_0 + \Phi_t u$  la **trajectoire** de la solution.

On garde les notations pour les ensembles  $\mathcal{L}_K(t)$  (2.2),  $R^\infty(t)$  (3.25) et  $B_1^\infty(t)$  (3.26).

On redéfinit la notion de l'optimalité en temps, comme dans la définition 2.2.

#### Définition 4.1.

On dit qu'un point  $z \in X$  est **accessible** en temps  $t > 0$  si  $z - S(t)z_0 \in B_1^\infty(t)$ .

Soient  $z_0, z^f \in X$ , avec  $z^f$  accessible. On dit qu'un contrôle  $u^* \in \mathcal{L}_1(\tau^*)$  avec  $z^f = S(\tau^*)z_0 + \Phi_{\tau^*}u^*$  est **optimal en temps** si :

$$\forall u \in \mathcal{L}_1(t) \text{ t.q. la solution de l'équation (4.1) vérifie } z(t) = z^f, \text{ on a } t \geq \tau^*.$$

On redéfinit aussi le **principe du maximum** et la **propriété de bang-bang**.

#### Définition 4.2.

On dit qu'un contrôle  $u^*$  vérifie le **principe du maximum** si il existe  $\eta \in X$ ,  $\eta \neq 0$  t.q. :

$$\langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \max_{u \in U, \|u\|_U \leq 1} \langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u \rangle \text{ pour } \sigma \in [0, t] \text{ p.p. .} \quad (4.3)$$

#### Définition 4.3.

On dit qu'un contrôle  $u \in \mathcal{L}_1(t)$  possède la **propriété de bang-bang** si

$$\|u(\sigma)\|_U = 1 \quad \text{pour } \sigma \in [0, t] \text{ p.p. .} \quad (4.4)$$

On établit dans la section suivante l'existence d'un contrôle optimal en temps.

## 2 Existence

### Théorème 4.4 (Existence).

Soient  $z_0, z^f \in X$ , avec  $z^f$  accessible. Alors, le contrôle en temps optimal **existe**.

*Démonstration.*

On note  $\tau^* = \inf \{t > 0 \mid z^f - S(t)z_0 \in B_1^\infty(t)\}$ .

On sait qu'il existe une suite minimisante  $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ ,  $t_n \searrow \tau^*$  et une suite  $(u_n)_n$  de  $\mathcal{L}_1(t_n)$  t.q. :  $\forall n \in \mathbb{N}, z^f = z(t_n, z_0, u_n)$ .

Prenons  $s > t_1$ . On étend  $(u_n)_n$  par 0 sur l'intervalle  $[t_n, s]$ . On remarque d'abord que  $L^\infty([0, s]; U) = (L^1([0, s]; U))'$  et d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (voir le théorème III.15 de [5]), on sait que la boule unité fermée de  $L^\infty([0, s]; U)$  est relativement compacte. Donc, on peut extraire une sous-suite de  $(u_n)_n$  faiblement convergente dans  $L^\infty([0, s]; U)$  vers un élément  $u^* \in \mathcal{L}_1(s)$ .

Puis, pour tout  $z \in X$ , on définit les fonctions  $\chi_n$  et  $\chi$  par :

$$\chi_n(\sigma) = \begin{cases} B^*S(t_n - \sigma)^*z & \text{si } 0 < \sigma \leq t_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi(\sigma) = \begin{cases} B^*S(\tau^* - \sigma)^*z & \text{si } 0 < \sigma \leq \tau^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait que  $\chi_n(\cdot)$  converge vers  $\chi(\cdot)$  dans  $L^1([0, s]; U)$ .

On écrit ensuite pour tout  $z \in X$  :

$$\langle z, z^f - S(t_n)z_0 \rangle_X = \int_0^s \langle \chi_n(\sigma), u_n(\sigma) \rangle_U d\sigma.$$

Prenons la limite  $n$  vers  $+\infty$ . On obtient :

$$\langle z, z^f - S(\tau^*)z_0 \rangle_X = \int_0^s \langle \chi(\sigma), u^*(\sigma) \rangle_U d\sigma = \langle z, \Phi_{\tau^*}u^* \rangle_X, \quad \forall z \in X.$$

Cela implique que  $z^f - S(\tau^*)z_0 = \Phi_{\tau^*}u^*$ .

D'où l'existence d'un contrôle en temps optimal. □

### Remarque 4.5.

*Il existe un résultat d'existence dans un cas plus général (voir le théorème 3.1.2 de [11]).*

*Supposons que  $X, U$  sont des espaces de **Banach**.*

*Si on a*

$$L^\infty([0, t]; U) = (L^1([0, t]; U'))', \tag{4.5}$$

*alors il existe un contrôle en temps optimal.*

*Remarquons que (4.5) est vérifié si  $U$  réflexif ou  $U$  est séparable (voir par exemple le théorème 8 du livre de A.I. Tulcea et C.I. Tulcea [17]).*

*Dans le cas des espaces de Hilbert, la condition (4.5) est automatiquement vérifiée car tout espace de Hilbert est réflexif.*

### 3 Principe du maximum et la contrôlabilité exacte

Dans cette section, en s'inspirant de la dimension finie, on voit qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, le contrôle optimal en temps vérifie le principe du maximum (théorème 4.7). De plus, en supposant un type de contrôlabilité approchée du système, on peut établir la propriété de bang-bang (théorème 4.9). On voit aussi à la fin (section IV.3.2) un moyen d'établir ce type de contrôlabilité approchée pour les équations de type Schrödinger. Ces résultats sont obtenus dans l'article de J. Lohéac et M. Tucsnak [24].

Dans toute la suite de la section IV.3, on note  $C_t$  au lieu de  $C_t^{+\infty}$  pour simplifier l'écriture.

#### (1) Résultat principal

Avant d'énoncer le résultat principal, on commence par un lemme du livre de Fattorini (lemme 2.2.1 de [11]).

##### Lemme 4.6.

*Soit  $U$  un espace de Banach.*

*On dit qu'une fonction  $f$  où  $f(\sigma) \in U'$  pour tout  $\sigma \in [0, t]$  est  $U$  faiblement mesurable si pour tout  $y \in U$ ,  $t \mapsto \langle f(t), y \rangle_{U', U}$  est mesurable.*

*Soit  $f$  une fonction  $U$  faiblement mesurable. Alors, on a :*

$$\sup_{u \in L^\infty([0, t]; U), \|u\|_{L^\infty} \leq 1} \left\{ \int_0^t \langle f(\sigma), u(\sigma) \rangle_{U', U} d\sigma \right\} = \int_0^t \|f(\sigma)\|_{U'} d\sigma,$$

*si  $\int_0^t \|f(\sigma)\|_{U'} d\sigma$  est fini.*

On peut maintenant énoncer le résultat principal qui montre qu'un contrôle optimal en temps doit satisfaire le principe du maximum.

##### Théorème 4.7. (Principe du maximum)

*Supposons que  $(A, B)$  est **exactement contrôlable en tout**  $t > 0$ . Si  $u^*$  est un contrôle optimal en temps  $\tau^*$ , alors  $u^*$  vérifie **le principe du maximum** (4.3).*

*Démonstration.*

La démonstration ressemble à celle en dimension finie (théorème 2.10).

**On montre d'abord que  $z^f - S(\tau^*)z_0 \in \partial B_1^\infty(\tau^*)$ .**

Par l'absurde, si  $z^f - S(\tau^*)z_0 \notin \partial B_1^\infty(\tau^*)$ , alors on sait qu'il existe  $0 < r < 1$  t.q.  $\frac{1}{r}(z^f - S(\tau^*)z_0) \in B_1^\infty(\tau^*)$ . Cela implique qu'il existe  $\tilde{u} \in \mathcal{L}_1(\tau^*)$ ,  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty([0, \tau^*]; U)} \leq r < 1$  t.q.  $z^f = z(z_0, \tau^*, \tilde{u})$ .

Pour tout  $0 < t < \tau^*$ , on écrit :

$$\begin{aligned}
z^f - S(t)z_0 &= S(\tau^*)z_0 - S(t)z_0 + \int_0^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma \\
&= \int_0^t S(t - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma + S(\tau^*)z_0 - S(t)z_0 + \int_t^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_0^t (S(\tau^* - \sigma) - S(t - \sigma))B\tilde{u}(\sigma)d\sigma \\
&= \int_0^t S(t - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma + \varphi(t, \tau^*),
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(t, \tau^*) = S(\tau^*)z_0 - S(t)z_0 + \int_t^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)B\tilde{u}(\sigma)d\sigma + \int_0^t (S(\tau^* - \sigma) - S(t - \sigma))B\tilde{u}(\sigma)d\sigma.$$

Il est clair que  $\varphi(t, \tau^*) \xrightarrow{t \rightarrow \tau^*} 0$  dans  $X$  et on sait que pour tout  $z \in X$  et tout  $t > 0$  il existe un contrôle  $v \in L^\infty([0, t]; U)$  t.q.  $z = \Phi_t v$  et que  $\|v\|_{L^\infty([0, t]; U)} \leq C_t \|z\|_X$ . Comme  $t \mapsto C_t$  est décroissante (lemme 3.18), en prenant  $z = \varphi(t, \tau^*)$ , on peut donc trouver un  $t$  suffisamment proche de  $\tau^*$  et un contrôle  $v \in L^\infty([0, t]; U)$  t.q.  $\Phi_t v = \varphi(t, \tau^*)$  et  $\|v\|_{L^\infty([0, t]; U)} \leq 1 - r$ .

On obtient alors  $z^f = z(z_0, t, \tilde{u} + v)$ . Comme  $\|\tilde{u} + v\|_{L^\infty([0, t]; U)} \leq 1$ ,  $\tilde{u} + v$  est donc un contrôle admissible. Cela est contradictoire avec l'optimalité de  $u^*$  en temps  $\tau^*$ .

On a montré que  $z^f - S(\tau^*)z_0 \in \partial B_1^\infty(\tau^*)$ . On remarque que, par un raisonnement analogue au lemme 2.5, on obtient  $\text{int } B_1^\infty(\tau^*) \neq \emptyset$  car  $R^\infty(\tau^*) = X$ . Puis, en utilisant le théorème 2.9 et le théorème de représentation de Riesz, on déduit qu'il existe  $\eta \in X$ ,  $\eta \neq 0$  t.q. :

$$\begin{aligned}
&\langle \eta, z \rangle_X \leq \langle \eta, z^f - S(\tau^*)z_0 \rangle_X, \quad \forall z \in B_1^\infty(\tau^*) \\
&\iff \langle \eta, \Phi_{\tau^*} u \rangle_X \leq \langle \eta, \Phi_{\tau^*} u^* \rangle_X, \quad \forall u \in \mathcal{L}_1(\tau^*) \\
&\iff \int_0^{\tau^*} \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u(\sigma) \rangle_U d\sigma \leq \int_0^{\tau^*} \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u^*(\sigma) \rangle_U d\sigma, \quad \forall u \in \mathcal{L}_1(\tau^*).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Puisque l'on sait que  $t \mapsto B^* S(\tau^* - t)^* \eta$  est mesurable, d'après le lemme 4.6, on obtient :

$$\sup_{u \in \mathcal{L}_1(\tau^*)} \int_0^{\tau^*} \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u(\sigma) \rangle_U d\sigma = \int_0^{\tau^*} \|B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta\|_U d\sigma.$$

Donc, on peut en déduire avec (4.6) que :

$$\int_0^{\tau^*} \langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u^*(\sigma) \rangle_U d\sigma = \int_0^{\tau^*} \|B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta\|_U d\sigma.$$

Or, il est évident que pour  $\sigma \in [0, \tau^*]$  p.p., on a :

$$\langle B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta, u^*(\sigma) \rangle_U \leq \|B^* S(\tau^* - \sigma)^* \eta\|_U, \quad \text{car } \|u^*\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Cela implique au final que :

$$\begin{aligned} \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle_U &= \|B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta\|_U \\ &= \max_{u \in U, \|u\|_U \leq 1} \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u \rangle \quad \text{pour } \sigma \in [0, \tau^*] \text{ p.p..} \end{aligned}$$

Donc  $u^*$  vérifie le principe du maximum.  $\square$

Avec le théorème précédent, on peut facilement déduire un résultat concernant la propriété de bang-bang.

#### Définition 4.8.

Soit  $(U, \|\cdot\|)$  est un espace normé.

On dit que  $U$  est **strictement convexe** si :

$$\forall x, y \in U, x \neq y, (\|x\| = \|y\| = 1) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1.$$

#### Théorème 4.9. (Propriété de bang-bang)

Supposons que  $(A, B)$  est exactement contrôlable en tout  $t > 0$  et que  $u^*$  est un contrôle optimal en temps  $\tau^*$ .

Si  $(A, B)$  est **approximativement contrôlable en temps  $\tau^*$  sur tout sous-ensemble  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure strictement positive**, alors  $u^*$  possède **la propriété de bang-bang (4.4)**.

Enfin si de plus  $U$  est strictement convexe, alors le contrôle optimal en temps est unique.

*Démonstration.*

Par le théorème 4.7, on sait qu'il existe  $\eta \in X$ ,  $\eta \neq 0$  t.q.  $u^*$  vérifie le principe du maximum (4.3).

De plus, si il existe un ensemble  $e$  de mesure strictement positive t.q.  $B^*S(\tau - \sigma)^*\eta = 0$  pour  $\sigma \in e$ , alors d'après le théorème 3.9,  $(A, B)$  n'est pas approximativement contrôlable en  $\tau^*$  sur  $e'$ . Ceci est une contradiction.

On en déduit que pour  $\sigma \in [0, \tau^*]$  p.p. on a  $B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta \neq 0$ . Cela nous permet de définir une fonction  $n$  par  $\mathbf{n}(\sigma) := \frac{B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta}{\|B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta\|_U}$  pour  $\sigma \in [0, \tau^*]$  p.p..

D'après le principe du maximum, on sait que :

$$\langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle_U = \|B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta\|_U \quad \text{pour } \sigma \in [0, \tau^*] \text{ p.p..}$$

Projectons  $u^*(\sigma)$  sur la direction  $n(\sigma)$ , i.e. :

$$u^*(\sigma) = \rho(\sigma)n(\sigma) + v(\sigma) \quad \text{pour } \sigma \in [0, \tau^*],$$

où  $\langle n(\sigma), v(\sigma) \rangle_U = 0$  et  $\rho(\sigma) \in \mathbb{R}_+$ .

Puisque l'on sait que  $u^* \in \mathcal{L}_1(t)$ , on obtient :

$$\|u^*(\sigma)\|_U^2 = \rho(\sigma)^2 + \|v(\sigma)\|_U^2 \leq 1 \text{ pour } \sigma \in [0, \tau^*] \text{ p.p..}$$

On peut aussi calculer :

$$\|B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta\|_U = \rho(\sigma)\|B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta\|_U \text{ pour } \sigma \in [0, \tau^*] \text{ p.p. .}$$

Donc, on a  $\rho(\sigma) = 1$  et  $v(\sigma) = 0$  pour  $\sigma \in [0, \tau^*]$  p.p..

Ainsi  $u^*$  possède la propriété de bang-bang.

Quant à l'unicité, supposons que  $u, v \in \mathcal{L}_1(\tau^*)$ , où  $u \neq v$  sont deux contrôles optimaux en temps  $\tau^*$ . On a  $\|u(t)\|_U = \|v(t)\|_U = 1$  pour  $t \in [0, \tau^*]$  p.p.. Prenons  $w = \frac{1}{2}(u + v)$ ,  $w \in \mathcal{L}_1(\tau^*)$ . Il est clair que  $w$  est aussi un contrôle optimal en temps, donc  $w$  possède la propriété de bang-bang. Or, par la stricte convexité de  $U$ , on a  $\|w(t)\|_U < 1$  pour  $t$  p.p.. Cela est une contradiction avec la propriété de bang-bang.  $\square$

#### Remarque 4.10.

*Dans cette section, on a vu qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, un contrôle en temps optimal doit satisfaire le principe du maximum. En s'appuyant sur le principe du maximum, si on suppose en plus que :*

$$\forall \eta \in X, \eta \neq 0 \Rightarrow B^*S(t - \sigma)^*\eta \neq 0,$$

*alors le contrôle en temps optimal possède la propriété de bang-bang.*

*Il est possible d'établir la propriété de bang-bang sans passer par le principe du maximum. On donne deux exemples ici :*

\* Dans [11], Fattorini considère un système **de contrôle total**, c'est-à-dire,  $B = Id$ .

*Dans ce cas, on peut montrer qu'un contrôle en temps optimal possède toujours la propriété de bang-bang sans la condition de contrôlabilité exacte. Quant au principe du maximum, il faut toujours supposer la contrôlabilité exacte du système.*

*En plus, dans ce cas, en ajoutant une condition supplémentaire  $\|Az_0\| < 1$  ou  $\|Az^f\| < 1$ , le principe du maximum devient une condition suffisante pour l'optimalité en temps.*

\* On sait qu'il existe des équations, par exemple, l'équation de type de la chaleur (3.54)-(3.56), qui ne possèdent pas la contrôlabilité exacte.

*On va voir dans la section IV.4 qu'en supposant un type de  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro le contrôle en temps optimal possède la propriété de bang-bang. Cependant, sous cette condition, le principe du maximum n'est pas clair. On va expliciter ce cas dans la suite.*

## (2) Application aux équations de type Schrödinger

On rappelle l'équation de Schrödinger décrite dans (3.48)-(3.50) :

$$\dot{z}(x, t) = -i\Delta z(x, t) + ia(x)z(x, t) + u(x, t)\chi_O(x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (4.7)$$

$$z(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

$$z(x, 0) = z_0(x) \in L^2(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (4.9)$$

On rappelle aussi que l'on peut écrire (4.7)-(4.9) sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0, \quad (4.10)$$

où les opérateurs  $A, B$  et  $A^*, B^*$  sont décrits dans (3.51) et (3.53).

Notre but est d'appliquer le théorème 4.7 et le théorème 4.9 au système (4.7)-(4.9). On a déjà vu qu'il est exactement contrôlable dans le théorème 3.24. On présente par la suite quelques résultats utiles afin d'établir la contrôlabilité approchée en tout  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive du système (4.7)-(4.9).

On admet d'abord un lemme utile qui est une version simplifiée du théorème de la représentation unique de Privalov.

### Lemme 4.11.

Soit  $z \mapsto u(z)$  une fonction analytique sur  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Si  $u$  est continue sur  $\bar{D}$  et admet la limite nulle sur un ensemble  $e \subset \partial D$  de mesure strictement positive, alors  $u = 0$  dans  $\bar{D}$ .

*Démonstration.*

Voir par exemple le chapitre XIV, théorème 1.9 de [39]. □

En s'appuyant sur le lemme 4.11, on peut en déduire le lemme suivant :

### Lemme 4.12.

Soit  $I \subset \mathbb{Z}$ ,  $(\lambda_n)_{n \in I}$  une suite réelle bornée inférieurement (ou supérieurement),  $e \subset \mathbb{R}$  un ensemble de mesure strictement positive et  $(a_n)_{n \in I} \subset l^1(I, \mathbb{C})$ . Si

$$\sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} = 0, \quad \forall t \in e,$$

alors on a

$$\sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.*

Comme  $(a_n)_{n \in I} \subset l^1(I, \mathbb{C})$ , la série est normalement convergente. Cela nous permet d'écrire la somme.

On définit l'ensemble  $\mathbb{C}_+ := \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Im } s > 0\}$  et l'application

$$f := \begin{cases} \mathbb{C}_+ & \rightarrow \mathbb{C} \\ s & \mapsto \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n s}. \end{cases}$$

On peut écrire pour tout  $s = \alpha + i\beta$ ,  $\beta > 0$  :

$$f'(s) = \sum_{n \in I} i\lambda_n a_n e^{-\lambda_n \beta} e^{i\lambda_n \alpha}.$$

On suppose que  $(\lambda_n)_n \subset [-m, +\infty]$  et on pose  $\lambda'_n = \lambda_n + m$ . Alors, on obtient :

$$f'(s) = e^{m\beta} \sum_{n \in I} i a_n (\lambda'_n - m) e^{-\lambda'_n \beta} e^{i\lambda_n \alpha}.$$

Puisque  $(a_n)_n \subset l^1(I, \mathbb{C})$  et  $\beta > 0$ ,  $\lambda'_n > 0$ , la série est normalement convergente. Cela montre que  $f$  est une fonction analytique sur  $\mathbb{C}_+$  et qu'elle est continue jusqu'au bord de  $\mathbb{C}_+$  ( $\partial \mathbb{C}_+ = \mathbb{R}$ ).

Faisons le changement de variable  $z = e^{is}$  pour tout  $s \in \partial \mathbb{C}_+ = \mathbb{R}$ . On définit une fonction  $u : D \rightarrow \mathbb{C}$  par :

$$u := \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \sum_{n \in I} a_n z^{\lambda_n}, \end{cases}$$

où  $D$  est défini dans le lemme 4.11.

On sait que  $f$  s'annule sur  $e \subset \mathbb{R}$ , donc  $u$  s'annule sur un ensemble  $e' \subset \partial D$  de mesure strictement positive. D'après le lemme 4.11,  $u$  s'annule sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Ceci implique que  $f$  s'annule sur  $\mathbb{R}$ . D'où le résultat.

Dans le cas où  $(\lambda_n)_n$  est bornée supérieurement, on prend par analogie l'ensemble  $\mathbb{C}_-$  qui contient les complexes de parties imaginaires négatives.  $\square$

En s'appuyant sur le lemme précédent, on obtient le résultat suivant qui nous aide à montrer la contrôlabilité approchée  $t$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive de  $(A, B)$  :

**Lemme 4.13.**

Soient  $X, Y$  deux espaces de Hilbert,  $A_0$  un opérateur autoadjoint diagonalisable sur  $X$ , et  $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ . On suppose en plus que le spectre de  $A_0$ ,  $\sigma(A_0)$  vérifie  $\sigma(A_0) \subset [m, +\infty[$  où  $m \in \mathbb{R}$  (ou  $\sigma(A_0) \subset ]-\infty, m]$ ). Soit  $z_0 \in X$ ,  $z \in C^0(\mathbb{R}, X)$  et  $y \in C^0(\mathbb{R}, Y)$  satisfaisant :

$$\dot{z}(t) = iA_0 z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad z(0) = z_0, \quad (4.11)$$

$$y(t) = Cz(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Si il existe un ensemble  $e \subset \mathbb{R}$  de mesure strictement positive t.q. :

$$y(t) = 0 \quad \forall t \in e,$$



alors on a,

$$y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.*

Puisque  $A_0$  est autoadjoint et diagonalisable, on sait qu'il existe une base orthogonale formée par les vecteurs propres  $(\varphi_n)_{n \in I}$  de  $A_0$  associés aux valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in I}$  t.q. pour tout  $n \in I$ ,  $\lambda_n \in [m, +\infty[$ . La solution de (4.11) s'écrit :

$$z(t) = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} \varphi_n, \text{ où } a_n = \langle z_0, \varphi_n \rangle_X.$$

On peut aussi écrire :

$$y(t) = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} C \varphi_n.$$

Pour tout  $v \in Y$ , on a :

$$\langle y(t), v \rangle_Y = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} \langle C \varphi_n, v \rangle_Y = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} \langle \varphi_n, C^* v \rangle_X.$$

Comme  $(a_n)_n, (\langle \varphi_n, C^* v \rangle_X)_n \subset l^2(I, \mathbb{C})$ , on a donc  $(a_n \langle \varphi_n, C^* v \rangle_X)_n \subset l^1(I, \mathbb{C})$ .

On sait de plus que pour tout  $t \in e$ ,  $\langle y(t), v \rangle_Y = 0$ . En appliquant le lemme 4.12, On en déduit que pour tout  $v \in Y$ , et tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\langle y(t), v \rangle_Y = 0$ . Donc,  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

#### Corollaire 4.14.

*Supposons que  $\Omega$  vérifie l'une des 2 hypothèses décrites dans le théorème 3.24.*

*Alors, pour tout  $z_0, z^f \in L^2(\Omega)$ ,  $z_0 \neq z^f$ , **il existe un unique contrôle en temps optimal**  $u^*$  entraînant la solution de (4.7)-(4.9) du point initial  $z_0$  au point final  $z^f$  en temps minimal  $\tau^*$ .*

*De plus, il existe  $\eta \in L^2(\Omega)$ ,  $\eta \neq 0$  t.q. :*

$$\int_O w(x, t) \bar{u}^*(x, t) dx = \max_{v \in L^2(O), \|v\|_{L^2(O)} \leq 1} \int_O w(x, t) \bar{v}(x) dx, \quad t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}, \quad (4.13)$$

*où  $w$  est la solution du système adjoint avec une condition finale :*

$$\dot{w}(x, t) = -i\Delta w(x, t) + i\bar{a}(x)w(x, t), \quad x \in \Omega, t \geq 0, \quad (4.14)$$

$$w(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (4.15)$$

$$w(x, \tau^*) = \eta(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.16)$$

*De plus,  $u^*$  vérifie la propriété de bang-bang, i.e. :*

$$\|u^*(\cdot, t)\|_{L^2(O)} = 1, \quad t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.} \quad (4.17)$$

*Démonstration.*

D'après le théorème 3.24, on sait que le système est exactement contrôlable en tout  $t > 0$ . On peut donc appliquer le théorème 4.7 pour obtenir (4.13).

On montre ensuite la contrôlabilité approchée du système (4.7)-(4.9) en  $\tau^*$  sur tout ensemble  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure strictement positive. D'après le théorème 3.9, il nous suffit de montrer **l'observabilité approchée** du système adjoint (4.14)-(4.16) **en  $\tau^*$  sur tout sous-ensemble  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure strictement positive.**

En termes d'EDP, cela s'écrit comme : si la solution  $w$  du système adjoint (4.14)-(4.16) vérifie :

$$w(x, t) = 0, \quad x \in O, \quad t \in e,$$

alors on a,

$$w(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

D'après la proposition 3.23,  $A = iA_0$ , où  $A_0$  est un opérateur autoadjoint et diagonalisable de spectre borné inférieurement. Donc, on peut appliquer le lemme 4.13 pour obtenir :

$$w(x, t) = 0, \quad x \in O, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On utilise ensuite l'observabilité exacte de  $(A^*, B^*)$ , qui est équivalente à :

$$\forall z \in X, \quad C_t^2 \int_0^{\tau^*} \|B^* S(\sigma)^* z\|_U^2 d\sigma \geq c \|z\|_X^2,$$

où on rappelle que  $C_t$  est le coût du contrôle.

On sait que  $w(., t) = S(\tau^* - t)^* \eta$ ,  $\eta \in L^2(\Omega)$ . On obtient au final que :

$$C_t^2 \int_0^{\tau^*} \int_O |\mathcal{H}_t w(x, \sigma)|^2 dx d\sigma \geq \int_\Omega |\eta(x)|^2 dx.$$

Du fait que  $w(x, t) = 0$  pour tout  $x \in O$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  et que  $w(., t) = S(\tau^* - t)^* \eta$ , on a  $\eta(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Donc  $w(x, t) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ . D'où l'observabilité approchée en  $\tau^*$  sur tout  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure strictement positive.

Enfin, on peut appliquer le théorème 4.9 pour obtenir (4.17). D'où le résultat.  $\square$

## 4 Propriété de bang-bang et un type de $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro

Dans cette section, on verra qu'en supposant la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro **en tout temps  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive**, le

contrôle en temps optimal possède la propriété de bang-bang (théorème 4.15). On établit à la fin une condition suffisante (théorème 4.17 et proposition 4.18) pour que le système possède ce type de la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro dans le cas  $A = A^* < 0$ , diagonalisable avec résolvante compacte. On s'est fortement inspiré de l'article [25] et de l'article de G. Wang [37] où la propriété de bang-bang est établie pour le contrôle optimal en temps de l'équation du type de la chaleur en s'appuyant sur une technique introduite par G. Lebeau et L. Robbiano [21].

Dans toute la suite de la section IV.4, on note  $C_{t,e}$  au lieu de  $C_{t,e}^{+\infty,0}$  pour simplifier l'écriture.

### (1) Résultat principal

On énonce tout de suite le résultat principal :

#### Théorème 4.15.

*Supposons que  $(A, B)$  est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive et que  $U$  est strictement convexe.*

*Soient  $z_0, z^f \in X$  avec  $z^f$  accessible. Alors, il existe un unique contrôle optimal  $u^*$  en temps  $\tau^*$  et  $u^*$  possède la propriété de bang-bang (4.4).*

*Démonstration.*

L'existence d'un contrôle optimal en temps est déjà montrée dans la section précédente (le théorème 4.4).

L'unicité vient simplement du fait que  $u^*$  vérifie la propriété de bang-bang et que  $U$  est strictement convexe comme on l'a vu dans le théorème 4.9.

Il reste donc à montrer la propriété de bang-bang (4.4). Par l'absurde, supposons que  $u^*$  est le contrôle optimal en temps  $\tau^*$  et qu'il existe  $\epsilon > 0$  et  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure strictement positive t.q. :

$$\|u^*(\sigma)\|_U \leq 1 - \epsilon, \quad \forall \sigma \in e.$$

On note  $z^*(t) = z(t, z_0, u^*)$  la trajectoire engendrée par  $u^*$  à partir du point  $z_0$  au temps  $t$ .

On remarque d'abord qu'il existe  $\delta_0 > 0$  t.q. :

$$e_0 \text{ a une mesure positive où } e_0 = \{t \in [\delta_0, \tau^* - \delta_0] \mid t \in e\}.$$

Il est clair que  $z^*(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} z_0$ . Donc il existe  $0 < \delta < \delta_0$  t.q. :

$$\|z_0 - z^*(\delta)\|_X \leq \frac{\epsilon}{M}, \quad \text{où } M = \sup_{0 < \delta < \delta_0} \{C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta}\}. \quad (4.18)$$

D'après la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en temps  $\tau^* - \delta$  sur  $e_0 - \delta$ , on sait qu'il existe un contrôle  $v \in L^\infty([0, \tau^*]; U)$  t.q. le support de  $v$  est inclus dans  $e_0 - \delta$  et que :

$$\begin{aligned} 0 &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \Phi_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta} v \\ &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \int_0^{\tau^* - \delta} \chi_{e_0 - \delta}(\sigma) S(\tau^* - \delta - \sigma) B v(\sigma) d\sigma \\ &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \int_\delta^{\tau^*} \chi_{e_0 - \delta}(\sigma - \delta) S(\tau^* - \sigma) B v(\sigma - \delta) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\text{avec } \|v(\sigma)\|_U \leq C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta} \|z_0 - z^*(\delta)\|_X \leq C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta} \frac{\epsilon}{M} \leq \epsilon \quad (\sigma \in e_0 - \delta). \quad (4.20)$$

Notons  $\tilde{v}(\sigma) = v(\sigma - \delta)$ . Puisque le support de  $v$  est inclu dans  $e_0 - \delta$ , on en déduit que  $\tilde{v}(\sigma) = v(\sigma - \delta)$  est non nul si  $\sigma - \delta \in \text{supp } v \subset e_0 - \delta$ . Autrement dit, le support de  $\tilde{v}$  est inclu dans  $e_0$ .

On peut également écrire (4.19) et (4.20) comme suit :

$$0 = S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \int_\delta^{\tau^*} \chi_{e_0}(\sigma) S(\tau^* - \sigma) B \tilde{v}(\sigma) d\sigma, \quad (4.21)$$

$$\|\tilde{v}(\sigma)\|_U \leq \epsilon, \quad \text{pour } \sigma \in e_0. \quad (4.22)$$

**On montre ensuite que  $u^*$  n'est pas le contrôle optimal en temps  $\tau^*$  pour en déduire la contradiction.**

Posons  $\tilde{u}(t) = u^*(t + \delta) + \tilde{v}(t + \delta)$  pour  $t \in [0, \tau^* - \delta]$ .

On vérifie d'abord que  $\tilde{u} \in \mathcal{L}_1(\tau^* - \delta)$ . En effet, si  $t + \delta \in e_0$ , d'après (4.22) on obtient que  $\|\tilde{u}(t)\|_U \leq \|u^*(t + \delta)\|_U + \|\tilde{v}(t + \delta)\|_U \leq (1 - \epsilon) + \epsilon = 1$ . Et pour  $t + \delta \notin e_0$ , on a que  $\|\tilde{u}(t)\|_U = \|u^*(t + \delta)\|_U \leq 1$ .

Puis, en utilisant que le support de  $\tilde{v}$  est inclu dans  $e_0$  et (4.21), on obtient :

$$\begin{aligned} &S(\tau^* - \delta)z_0 + \Phi_{\tau^* - \delta} \tilde{u} \\ &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + S(\tau^* - \delta) \left( S(\delta)z_0 + \int_0^\delta S(\delta - \sigma) B u^*(\sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + \Phi_{\tau^* - \delta} \tilde{v}(\cdot + \delta) + \Phi_{\tau^* - \delta} u^*(\cdot + \delta) \\ &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \Phi_{\tau^* - \delta} \tilde{v}(\cdot + \delta) \\ &\quad + S(\tau^*)z_0 + \int_0^\delta S(\tau^* - \sigma) B u^*(\sigma) d\sigma + \int_0^{\tau^* - \delta} S(\tau^* - \delta - \sigma) B u^*(\sigma + \delta) d\sigma \\ &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \int_0^{\tau^* - \delta} S(\tau^* - \delta - \sigma) B \tilde{v}(\sigma + \delta) d\sigma \\ &\quad + S(\tau^*)z_0 + \int_0^\delta S(\tau^* - \sigma) B u^*(\sigma) d\sigma + \int_\delta^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma) B u^*(\sigma) d\sigma \\ &= S(\tau^* - \delta)(z_0 - z^*(\delta)) + \int_\delta^{\tau^*} \chi_{e_0}(\sigma) S(\tau^* - \sigma) B \tilde{v}(\sigma) d\sigma + S(\tau^*)z_0 + \Phi_{\tau^*} u^* \\ &= 0 + z^f. \end{aligned}$$

Donc  $\tilde{u}$  entraîne  $z_0$  au  $z^f$  en temps  $\tau^* - \delta$ . C'est contradictoire avec l'optimalité en temps  $\tau^*$  de  $u^*$ .

D'où  $u^*$  vérifie la propriété de bang-bang.  $\square$

## (2) Technique de Lebeau-Robbiano

Dans cette section, on s'appuie sur une méthode introduite par G. Lebeau et L. Robbiano [21] pour obtenir la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur. On s'est fortement inspiré de l'article de S. Micu, I. Roventa et M. Tucsnak [25], de l'article de G. Wang [37] et de l'article de L. Miller [27].

On verra une condition suffisante pour que  $(A, B)$  possède la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en tout temps  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive, ce qui est similaire au théorème 3.2 de [25].

On suppose que dans cette section  $A = A^* < 0$  et que  $A$  est diagonalisable avec une base orthonormée formée par les vecteurs propres  $(\varphi_k)_k$  de  $A$  où les valeurs propres associées  $(-\lambda_k)_k$  sont t.q. pour tout  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k > 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$ . On suppose de plus que la résolvante de  $A$  est compacte.

Avec les hypothèses ci-dessus, on peut écrire :

$$A\psi = - \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle \psi, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad \forall \psi \in D(A) \quad (4.23)$$

$$\text{et} \quad S(t)z = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad \forall t > 0, \forall z \in X. \quad (4.24)$$

On énonce d'abord un lemme de la théorie de la mesure :

### Lemme 4.16.

*Soit  $e \subset \mathbb{R}$  un ensemble de mesure strictement positive.*

*Alors il existe  $0 < \rho < 1$  et  $c > 0$  t.q. pour presque tout  $t \in e$ , on peut trouver une suite  $(t_n)_n$  strictement croissante t.q.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$  et t.q. elle vérifie les deux conditions suivantes :*

$$\mu([t_i, t_{i+1}] \cap e) \geq \rho(t_{i+1} - t_i) \quad (4.25)$$

$$\text{et} \quad \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+2} - t_{i+1}} \leq c. \quad (4.26)$$

*Démonstration.*

Voir la page 274 du livre de J.L. Lions [23].  $\square$

Pour  $\zeta > 0$  on définit le sous-espace  $V_\zeta$  de  $X$  par :

$$V_\zeta = \text{vect} \left\{ \varphi_k \mid \lambda_k^{\frac{1}{2}} \leq \zeta \right\}. \quad (4.27)$$

On note  $P_\zeta$  la projection de  $X$  sur  $V_\zeta$ .

On énonce par la suite le théorème principal de cette section :

**Théorème 4.17.**

Soit  $\tau > 0$  et  $e \subset [0, \tau]$  un ensemble de mesure strictement positive.

Supposons qu'il existe  $d_0 > 0$  et  $d_1 > 0$  t.q. pour tout  $\zeta > 0$  et tout  $0 < s < t \leq \tau$ , on a :

$$\|S(\tau)^*\varphi\|_X \leq \frac{d_0 e^{d_1 \zeta}}{\mu(\mathcal{E})} \|\Psi_{\tau, \mathcal{E}'}^d \varphi\|_{L^1([0, \tau]; U)}, \quad \forall \varphi \in V_\zeta, \quad (4.28)$$

où  $\mathcal{E} := \{\sigma \in e \mid s \leq \sigma \leq t\}$  et  $\mathcal{E}' := \{\tau - \sigma \mid \sigma \in \mathcal{E}\}$ .

Alors  $(A, B)$  est  $L^\infty$ -**contrôlable à zéro en temps  $\tau$  sur  $e$** .

*Démonstration.*

Soit  $z_0 \in X$ . Prenons  $\tilde{t} \in e$  t.q. l'on peut construire une suite  $(t_n)_n$  ayant les propriétés décrites dans le lemme 4.16 et on définit  $t_0 = 0$ . On note aussi :

$$r_{k+1} = t_{k+1} - t_k \text{ et } \zeta_k = \frac{1}{r_{2k}^p} \text{ où } p \text{ sera précisé plus tard.} \quad (4.29)$$

On définit ensuite pour tout  $k \geq 0$  les fonctions  $\tilde{z}_k \in C([t_{2k}, t_{2k+2}]; X)$  et  $\tilde{u}_k \in L^\infty([t_{2k}, t_{2k+2}]; U)$  par :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{-1}(0) &= z_0, \\ \tilde{u}_k(\sigma) &= \begin{cases} 0 & \text{pour } \sigma \in [t_{2k}, t_{2k+1}] \\ v_k(\sigma) & \text{pour } \sigma \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}], \end{cases} \\ \tilde{z}_k(\sigma) &= S(\sigma - t_{2k})\tilde{z}_{k-1}(t_{2k}) + \int_{t_{2k}}^\sigma \chi_e(\sigma) S(\sigma - s) B \tilde{u}_k(\sigma) d\sigma, \text{ pour } \sigma \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \end{aligned} \quad (4.30)$$

où  $(v_k)_k \subset L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)$  est t.q.

$$\begin{cases} P_{\zeta_k} \tilde{z}_k(t_{2k+2}) = 0, \\ \text{le support de } v_k \subset e \cap [t_{2k+1}, t_{2k+2}], \\ \|v_k\|_{L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)} \leq \frac{d_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\rho r_{2k+2}} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X. \end{cases} \quad (4.31)$$

On pose  $\mathcal{E}_k = e \cap [t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ . Alors d'après (4.25) on obtient que  $\mu(\mathcal{E}_k) \geq \rho r_{2k+2}$ .

On montre ensuite pour tout  $k \geq 0$  **l'existence d'un contrôle  $v_k$  qui vérifie toutes les propriétés de (4.31)**. En effet, en prenant  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$  et  $\zeta = \zeta_k$  dans (4.28) et d'après l'équivalence entre (i) et (ii) dans la proposition 3.20 (en prenant  $X = V_{\zeta_k}$ ), on obtient que pour tout  $\tilde{z}_k(t_{2k+1})$  on peut trouver un contrôle  $v_k$  dont le support de  $v_k$  est inclu dans  $e \cap [t_{2k+1}, t_{2k+2}]$  qui "entraîne  $\tilde{z}_k(t_{2k+1})$  à zéro dans  $V_{\zeta_k}$  en temps  $\tau - t_{2k+1}$ " (c'est-à-dire,  $P_{\zeta_k} \tilde{z}_k(\tau) = 0$ ). Or, comme le support de  $v_k$  est inclu dans  $\mathcal{E}_k$ , on sait que  $P_{\zeta_k} \tilde{z}_k(t) = 0$  après le temps  $t_{2k+2}$ . Autrement dit,  $v_k$  entraîne  $\tilde{z}_k(t_{2k+1})$  à zéro dans  $V_{\zeta_k}$  en temps  $r_{2k+2}$ .

De plus, puisque le coût du contrôle est plus petit que  $\frac{d_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\mu(\mathcal{E}_k)}$ , on a :

$$\|v_k\|_{L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)} \leq \frac{d_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\mu(\mathcal{E}_k)} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X \leq \frac{d_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\rho r_{2k+2}} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X. \quad (4.32)$$

D'où l'existence de  $v_k$  vérifiant les propriétés dans (4.31).

On remarque ensuite que comme  $A$  est un opérateur négatif, il est donc m-dissipatif (voir la proposition 3.3.5 de [35]). D'après le théorème de Lumer-Phillips,  $S(t)$  est un semigroupe contractant. De plus, d'après (4.30) et (4.32) il est clair que pour tout  $k \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k(t_{2k+1}) &= S(r_{2k+1})\tilde{z}_{k-1}(t_{2k}), \\ \|\tilde{z}_k(t_{2k+2})\|_X &\leq \|S(t_{2k+2} - t_{2k})\tilde{z}_{k-1}(t_{2k})\|_X + \left\| \int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+2}} S(t_{2k+2} - s) B v_k(s) ds \right\|_X \\ &\leq \|S(r_{2k+2})S(r_{2k+1})\tilde{z}_{k-1}(t_{2k})\|_X + r_{2k+2} \|B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \|v_k\|_{L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)} \\ &= \|S(r_{2k+2})\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X + \|B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \frac{d_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\rho} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X \\ &\leq \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X \left( 1 + \frac{d_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\rho} \|B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Puisque  $P_{\zeta_k}(\tilde{z}_k(t_{2k+2})) = 0$ , on peut écrire :

$$S(r_{2k+3})\tilde{z}_k(t_{2k+2}) = \sum_{\lambda_n \geq \zeta_k^2} e^{-\lambda_n r_{2k+3}} \langle \tilde{z}_k(t_{2k+2}), \varphi_n \rangle_X \varphi_n.$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_{k+1}(t_{2k+3})\|_X &= \|S(r_{2k+3})\tilde{z}_k(t_{2k+2})\|_X \leq \sum_{\lambda_n \geq \zeta_k^2} \|e^{-\lambda_n r_{2k+3}} \langle \tilde{z}_k(t_{2k+2}), \varphi_n \rangle_X \varphi_n\|_X \\ &\leq e^{-\zeta_k^2 r_{2k+3}} \sum_{\lambda_n \geq \zeta_k^2} \|\langle \tilde{z}_k(t_{2k+2}), \varphi_n \rangle_X \varphi_n\|_X = e^{-\zeta_k^2 r_{2k+3}} \|\tilde{z}_k(t_{2k+2})\|_X. \end{aligned} \quad (4.34)$$

En combinant (4.33) et (4.34), on obtient qu'il existe  $d'_0 > d_0$  t.q. pour tout  $k \geq 0$  :

$$\|\tilde{z}_{k+1}(t_{2k+3})\|_X \leq d'_0 e^{(-\zeta_k^2 r_{2k+3} + d_1 \zeta_k)} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X. \quad (4.35)$$

**Notre but est de montrer qu'il existe  $L > 0$  t.q. pour tout  $k \geq 0$  on a :**

$$\|v_k\|_{L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)} \leq L \|z_0\|_X. \quad (4.36)$$

Notons  $a_k := \frac{d'_0 e^{d_1 \zeta_k}}{\rho r_{2k+2}} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X$ . On sait que  $\|v_k\|_{L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)} \leq a_k$ .

D'après (4.35) et (4.26), on obtient que :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{d'_0 e^{d_1 \zeta_{k+1}} \|\tilde{z}_{k+1}(t_{2k+3})\|_X}{\rho r_{2k+4}} \frac{\rho r_{2k+2}}{d'_0 e^{d_1 \zeta_k} \|\tilde{z}_k(t_{2k+1})\|_X} \\
&\leq \frac{e^{d_1 \zeta_{k+1}} r_{2k+2}}{e^{d_1 \zeta_k} r_{2k+4}} d'_0 e^{(-\zeta_k^2 r_{2k+3} + d_1 \zeta_k)} \\
&= d'_0 e^{(-\zeta_k^2 r_{2k+3} + d_1 \zeta_{k+1})} \frac{r_{2k+2}}{r_{2k+4}} \\
&\leq d'_0 c^2 e^{(-\zeta_k^2 r_{2k+3} + d_1 \zeta_{k+1})} .
\end{aligned} \tag{4.37}$$

On regarde le terme au-dessus l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
-\zeta_k^2 r_{2k+3} + d_1 \zeta_{k+1} &\leq -\left(\frac{1}{r_{2k}}\right)^{2p} r_{2k+3} + d_1 \left(\frac{1}{r_{2k+2}}\right)^p \\
&\leq -\frac{1}{c^3} \left(\frac{1}{r_{2k}}\right)^{2p-1} + d_1 c^{2p} \left(\frac{1}{r_{2k}}\right)^p .
\end{aligned} \tag{4.38}$$

On remarque que si on a une suite  $(X_k)_k \rightarrow +\infty$  et deux réels  $n_1, n_2$  t.q.  $n_1 > n_2$  et  $n_1 > 1$ , alors il existe  $N > 0$  et  $k' > 0$  t.q. pour tout  $k > k'$  on a :

$$-\alpha X_k^{n_1} + \beta X_k^{n_2} \leq -N X_k^{n_1}, \tag{4.39}$$

où  $\alpha, \beta$  sont deux constantes fixées.

En appliquant ceci à  $(X_k)_k = (\frac{1}{r_{2k}})_k$ ,  $\alpha = \frac{1}{c^3}$ ,  $\beta = d_1 c^{2p}$ ,  $n_1 = 2p - 1$  et  $n_2 = p$  dans (4.39), où  $\mathbf{p} > \mathbf{1}$ , on sait qu'il existe  $k_1 > 0$  et  $N > 0$  t.q. pour tout  $k > k_1$  on a :

$$-\zeta_{k+1}^2 r_{2k+3} + d_1 \zeta_{k+1} \leq -N \left(\frac{1}{r_{2k}}\right)^{2p-1}.$$

On obtient donc pour tout  $k > k_1$  :

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq d'_0 c^2 e^{-N \left(\frac{1}{r_{2k}}\right)^{2p-1}}.$$

Donc il existe  $k_2 > k_1 > 0$  t.q. pour tout  $k > k_2$ , on a :  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1$ .

Si on définit une constante  $L$  par :

$$L := \max_{1 \leq k \leq k_2} \left\{ a_0 \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{a_{j+1}}{a_j}}{\|z_0\|_X} \right\},$$



alors on en déduit que pour tout  $k > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{L^\infty([t_{2k+1}, t_{2k+2}]; U)} &\leq a_k = a_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{a_{j+1}}{a_j} \\ &\leq \begin{cases} a_0 \prod_{j=0}^{k_2-1} \frac{a_{j+1}}{a_j} \prod_{j=k_2}^{k-1} \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq L \|z_0\|_X, & \text{si } k > k_2, \\ L \|z_0\|_X, & \text{si } k \leq k_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Enfin, on pose :

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{z}_k(t) \chi_{[t_{2k}, t_{2k+2}]} \\ \text{et} \quad u(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{u}_k(t) \chi_{[t_{2k}, t_{2k+2}]} \end{aligned}$$

Comme  $P_{\zeta_k} z(t_{2k+2}) = 0$  pour tout  $k > 0$  et  $t_{2k+2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \tilde{t}$ , on obtient  $P_{\zeta_k} z(\tilde{t}) = 0$ . Comme  $u(\sigma) = 0$  pour  $\sigma \in [\tilde{t}, \tau]$ , on a donc  $P_{\zeta_k} z(\tau) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus, on sait que  $\zeta_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc on conclut que  $z(\tau) = 0$ .

En conclusion, on a montré que pour tout  $z_0 \in X$  il existe  $u \in L^\infty([0, \tau]; U)$  où le support de  $u$  est inclu dans  $e$  t.q.  $u$  entraîne  $z_0$  à zéro en temps  $\tau$ . De plus, on sait qu'il existe  $L > 0$  t.q.  $\|u\|_{L^\infty([0, \tau]; U)} \leq L \|z_0\|_X$ . Donc le système est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $\tau$  sur  $e$ .

□

Si l'inégalité (4.28) est vraie pour  $t$  et  $e$ , on peut établir la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en  $t > 0$  sur  $e$ . Le problème reste à savoir pour quels types de systèmes l'inégalité (4.28) a lieu pour tout  $t > 0$  et pour tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive.

Pour  $\zeta > 0$ , on définit le même espace  $V_\zeta$  comme dans (4.27).

On introduit une inégalité dans le lemme suivant pour établir la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en tout  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  :

**Proposition 4.18.**

*Si pour tout  $\zeta > 0$ ,  $(A, B)$  vérifie l'inégalité :*

$$\exists d_0, d_1 > 0, \forall \varphi \in V_\zeta, \|\varphi\|_X \leq d_0 e^{d_1 \zeta} \|B^* \varphi\|_U, \quad (4.41)$$

*alors  $(A, B)$  vérifie l'inégalité (4.28). Le système est donc  $L^\infty$ -**contrôlable à zéro en tout  $t > 0$  sur tout  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive.***

*Démonstration.*

Pour tout  $\tau > 0$  et tout  $e \subset [0, \tau]$  de mesure strictement positive, on considère le système adjoint de (4.1), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = -A^* w(t), & t \in [0, \tau], \\ w(\tau) \in V_\zeta. \end{cases} \quad (4.42)$$

On peut exprimer  $w(\tau) = \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} \alpha_k \varphi_k$  où  $(\alpha_k)_k \subset \mathbb{R}$  et  $(\varphi_k)_k$  sont les vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $(\lambda_k)_k$ . Il est aussi clair que la solution de (4.42) s'écrit :

$$w(t) = \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-\lambda_k(\tau-t)} \alpha_k \varphi_k. \quad (4.43)$$

L'inégalité (4.41) implique que pour tout  $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$  on a :

$$\left\| \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} a_k \varphi_k \right\|_X \leq d_0 e^{d_1 \zeta} \|B^* \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} a_k \varphi_k\|_U. \quad (4.44)$$

Prenons  $a_k = e^{-\lambda_k(\tau-t)} \alpha_k$  dans (4.44) et intégrons cette inégalité sur l'intervalle  $\mathcal{E} := e \cap [s, t]$  pour  $0 < s < t \leq \tau$ . On obtient que pour tout  $(\alpha_k)_k \subset \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{E}} \left\| \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-\lambda_k(\tau-t)} \alpha_k \varphi_k \right\|_X dt \leq d_0 e^{d_1 \zeta} \int_{\mathcal{E}} \|B^* \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-\lambda_k(\tau-t)} \alpha_k \varphi_k\|_U dt \\ \iff & \int_{\mathcal{E}} \left( \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-2\lambda_k(\tau-t)} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq d_0 e^{d_1 \zeta} \|\chi_{\mathcal{E}}(\cdot) B^* \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-\lambda_k(\tau-\cdot)} \alpha_k \varphi_k\|_{L^1([0, \tau]; U)} \\ \Rightarrow & \mu(\mathcal{E}) \left\| \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-\lambda_k(\tau)} \alpha_k \varphi_k \right\|_X \leq d_0 e^{d_1 \zeta} \|\chi_{\mathcal{E}'}(\cdot) B^* \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} e^{-\lambda_k(\cdot)} \alpha_k \varphi_k\|_{L^1([0, \tau]; U)}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{E}' := \{\tau - t \mid t \in \mathcal{E}\}$ .

La dernière inégalité implique que pour tout  $\varphi \in V_\zeta$ , si on pose  $\varphi = \sum_{k, \varphi_k \in V_\zeta} \alpha_k \varphi_k$ , on a :

$$\|S(\tau)^* \varphi\|_X \leq \frac{d_0 e^{d_1 \zeta}}{\mu(\mathcal{E})} \|\chi_{\mathcal{E}'}(\cdot) B^* S(\cdot)^* \varphi\|_{L^1([0, \tau]; U)} = \frac{d_0 e^{d_1 \zeta}}{\mu(\mathcal{E})} \|\Psi_{\tau, \mathcal{E}'}^d \varphi\|_{L^1([0, \tau]; U)}.$$

Donc l'inégalité (4.28) est vraie. Et comme les hypothèses du théorème 4.17 sont toutes satisfaites, on obtient la  $L^\infty$ -contrôlabilité en tout  $\tau > 0$  sur tout  $e \subset [0, \tau]$  de mesure strictement positive du système  $(A, B)$ .  $\square$

#### Remarque 4.19.

On peut obtenir un résultat plus général pour l'opérateur fractionnaire  $A = (-\Delta)^\theta$ ,  $B = \chi_O$  où  $\theta > \frac{1}{2}$ . La démarche pour établir la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en tout  $\tau > 0$  sur tout  $e \subset [0, \tau]$  de mesure strictement positive est la même que celle du théorème 4.17. On s'appuie toujours sur la technique de Lebeau-Robbiano et on pose à nouveau pour  $\gamma \in ]0, 1[$  l'espace  $V_{\zeta, \gamma} := \text{vect} \{\varphi_k \mid \lambda_k^\gamma \leq \zeta\}$  pour obtenir une inégalité similaire à (4.28). Il reste à obtenir une inégalité dy type (4.41) pour conclure. On se réfère au théorème 2.1 de l'article [27] qui montre que (4.41) est satisfait pour  $A = (-\Delta)^\theta$  et  $B = \chi_O$  où  $\theta > \frac{1}{2}$ .

### (3) Application à l'équation de la chaleur

On applique la proposition 4.18 à l'équation de la chaleur avec un contrôle interne décrite dans (3.54)-(3.56).

**Corollaire 4.20.**

On considère l'équation de la chaleur décrite dans (3.54)-(3.56) en gardant toutes les hypothèses sur  $\Omega$ .

Alors, pour tout  $z_0, z^f \in L^2(\Omega)$ ,  $z_0 \neq z^f$ , il **existe un unique contrôle optimal en temps**  $u^* \in L^\infty([0, \tau^*]; L^2(O))$  entraînant la solution de (3.54)-(3.56) du point initial  $z_0$  au point final  $z^f$  en temps minimal  $\tau^*$ .

De plus,  $u^*$  vérifie **la propriété de bang-bang**, i.e. :

$$\|u(., t)\|_{L^2(O)} = 1, \quad t \in [0, \tau^*] \text{ p.p..} \quad (4.45)$$

*Démonstration.*

On rappelle que l'on peut écrire (3.54)-(3.56) sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0, \quad (4.46)$$

où  $A = \Delta$  et  $B = \chi_O$ .

On a vu dans la partie III.4.2 que  $A$  est négatif, diagonalisable avec une base orthornormée formée par les vecteurs propres  $(\varphi_k)_k$  de  $A$  où les valeurs propres associées  $(-\lambda_k)_k$  sont t.q. pour tout  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k > 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty$  et que la résolvante de  $A$  est compacte.

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.15 pour obtenir l'existence, l'unicité du contrôle en temps optimal et la propriété de bang-bang (4.45), il nous suffit d'établir l'inégalité (4.41) et d'utiliser la proposition 4.18 pour conclure.

On se réfère au théorème 3 de l'article de G. Lebeau et E. Zuazua [22] qui montre que l'inégalité (4.41) est vraie pour l'opérateur  $A = \Delta$  et  $B = \chi_O$ . D'où le résultat.

□



## V Fonction temps minimal et fonction norme minimale

Dans cette section, on va présenter des résultats concernant le lien entre la régularité de la fonction temps minimal, la régularité de la fonction norme minimale et la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro du système. Ces résultats sont obtenus dans l'article de F. Gozzi et P. Loreti [16] et dans l'article de O. Carja [7].

### 1 Définitions

Soient  $X, U$  deux espaces de Hilbert que l'on identifie à ses duals. On considère :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z_0 \in X, \quad (5.1)$$

où  $A$  est un opérateur qui engendre un semigroupe  $S(t)$  fortement continu,  $B \in \mathcal{L}(U, X)$  et  $u \in L^\infty([0, +\infty[; U)$ .

Soit  $p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ . On dit qu'un point  $z_0$  est  **$L^p$ -contrôlable à zéro en temps**  $t > 0$  si on peut trouver un contrôle dans  $L^p([0, t]; U)$  qui amène le système (5.1) du point initial  $z_0$  à zéro.

On dit aussi que le système est  **$L^p$ -contrôlable à zéro en temps**  $t > 0$  si tout point de  $X$  est  $L^p$ -contrôlable à zéro en temps  $t > 0$ .

On note deux ensembles  $L^\infty$ -contrôlables à zéro avec des contrôles admissibles comme suit :

$$\mathcal{R}_0^\infty(t) := \{z_0 \in X \mid S(t)z_0 + \Phi_t u = 0, u \in \mathcal{L}_1(t)\}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{R}_0^\infty := \cup_{t \geq 0} \mathcal{R}_0^\infty(t). \quad (5.3)$$

On présente dans la définition suivante la notion de la fonction temps minimal.

#### Définition 5.1.

Soit  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ . On définit une fonction  $T_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui représente le temps minimal pour que le système (5.1) parte du point  $z_0$  et arrive à 0 avec un contrôle admissible.

Plus précisément, on définit :

$$T_\infty(z_0) := \inf \{ t \geq 0 \mid S(t)z_0 + \Phi_t u = 0, u \in \mathcal{L}_1(t) \}. \quad (5.4)$$

On appelle  $T_\infty$  la **fonction temps minimal** (ou la fonction de Bellman).

Pour simplifier l'écriture, on définit deux ensembles représentant les ensembles admissibles du contrôle pour le problème de la norme minimale.

$$A_{t,z_0} := \{u \in L^\infty([0, t]; U) \mid S(t)z_0 + \Phi_t u = 0\}, \quad (5.5)$$

$$A_{t,z_0,p} := \{u \in L^p([0, t]; U) \mid S(t)z_0 + \Phi_t u = 0\}, \text{ pour } p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket. \quad (5.6)$$

On rappelle aussi que l'on note  $z(t, z_0, u) = S(t)z_0 + \Phi_t u$ , la trajectoire de la solution en temps  $t$  engendrée par le contrôle  $u$ .

On définit ensuite le problème de la norme minimale (ou de l'énergie minimale).

**Définition 5.2.**

Soient  $t > 0$  et  $z_0 \in X$ .

On définit  $\mathcal{E}_\infty^*$ , la **fonction norme minimale** comme :

$$\mathcal{E}_\infty^*(t, z_0) := \inf_{u \in A_{t, z_0}} \|u\|_{L^\infty([0, t]; U)}. \quad (5.7)$$

En effet,  $\mathcal{E}_\infty^*$  représente la norme minimale qu'un contrôle doit avoir pour amener le système (5.1) du point  $z_0$  à 0 en temps  $t$ .

On définit également la **fonction  $L^p$ -norme minimale** pour  $p \in ]1, +\infty[$  comme :

$$\mathcal{E}_p^*(t, z_0) := \inf_{u \in A_{t, z_0, p}} \|u\|_{L^p([0, t]; U)}. \quad (5.8)$$

Notre but est d'étudier le lien entre la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro du système et la régularité de la fonction temps minimal et de la fonction norme minimale autour de zéro. On présente ces résultats dans la section suivante.

**Remarque 5.3.**

On considère dans toute la section V, les problèmes de contrôle en temps minimal et les problèmes de contrôle en norme minimale avec le point final 0. Dans le cas général où  $z^f$  est un point fixé dans  $X$ , les résultats obtenus plus tard sont tous valables en considérant par exemple " le module de continuité de  $T_\infty$  en  $z^f$  ", " la  $L^\infty$ -contrôlabilité à  $z^f$  " et "  $T_\infty(z_0) := \inf \{t \geq 0 \mid \exists u \in \mathcal{L}_1(t), S(t)z_0 + \Phi_t u = z^f\}$  " etc.

## 2 Quelques propriétés

Le premier résultat important concerne la continuité de la fonction temps minimal et la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro du système.

**Théorème 5.4.**

Le système (5.1) est  **$L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps**  $t > 0$  si et seulement si la fonction temps minimal  $T_\infty$  est **continue en zéro**.

*Démonstration.*

Soit  $t > 0$ . En prenant  $G = \Phi_t, F = S(t), X_1 = X_3 = X$  et  $D(G) = X_2 =$

$L^\infty([0, t]; U)$  dans le lemme 3.6 ((i)  $\iff$  (ii)), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & (5.1) \text{ est } L^\infty\text{-contrôlable à zéro en temps } t > 0 \\
 & \iff \text{Ran } S(t) \subset \text{Ran } \Phi_t \\
 & \iff \exists k(t) > 0, \{S(t)z \mid \forall z \in X, \|z\|_X \leq k(t)\} \subseteq \{\Phi_t u \mid u \in \mathcal{L}_1(t)\} \\
 & \iff \exists k(t) > 0, \forall z \in X, \|z\|_X \leq k(t) \Rightarrow T_\infty(z) \leq t.
 \end{aligned}$$

Donc, on a enfin :

$$\begin{aligned}
 & (5.1) \text{ est } L^\infty\text{-contrôlable à zéro en tout temps } t > 0 \\
 & \iff \forall t > 0, \exists k(t) > 0, \forall z \in X, \|z\|_X \leq k(t) \Rightarrow T_\infty(z) \leq t \\
 & \iff \forall \epsilon > 0, \exists k(\epsilon) > 0, \forall z \in X, \|z - 0\|_X \leq k(\epsilon) \Rightarrow T_\infty(z) = T_\infty(z) - T(0) \leq \epsilon \\
 & \iff T_\infty \text{ est continue en zéro .}
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On énonce ensuite un théorème d'existence de la solution du problème de la  $L^p$ -norme minimale, pour  $p \in ]1, +\infty]$ .

**Théorème 5.5** (Existence).

*Soit  $p \in ]1, +\infty]$ .*

*Supposons que le système (5.1) est  $L^p$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ .*

*Alors, pour tout  $t > 0$  et tout  $z_0 \in X$ , le problème*

$$\min \left\{ \|u\|_{L^p([0, t]; U)} \mid S(t)z_0 + \Phi_t u = 0 \right\}$$

*admet au moins une solution.*

*Autrement dit, il existe au moins un contrôle dans  $L^p([0, t]; U)$  qui possède la  $L^p$ -norme minimale  $\mathcal{E}_p^*(t, z_0)$  et qui entraîne la solution du système du point initial  $z_0$  au point final 0 en temps  $t$ .*

*Démonstration.*

On sait qu'il existe une suite minimisante  $(\rho_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ ,  $\rho_n \searrow \mathcal{E}_p^*(t, z_0)$  et une suite  $(u_n)_n \subset L^p([0, t]; U)$  t.q. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S(t)z_0 + \Phi_t u_n = 0$  et que  $\|u_n\|_{L^p([0, t]; U)} = \rho_n$ .

On remarque ensuite comme  $(u_n)_n$  est une suite bornée (par  $\|u_1\|_{L^p([0, t]; U)}$ ) dans  $L^p([0, t]; U)$ . En appliquant le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki et le fait que  $L^p([0, t]; U) = (L^q([0, t]; U))'$  (où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $q = 1$  si  $p = +\infty$ ), on peut extraire une sous-suite de  $(u_n)_n$  faiblement convergente dans  $L^p([0, t]; U)$  vers un élément  $u^* \in L^p([0, t]; U)$ .

Pour tout  $z \in X$ , on pose une fonction  $\chi$  dans  $L^q([0, t]; U)$  comme  $\chi(\sigma) = B^*S(t - \sigma)^*z$ ,  $\sigma \in [0, t]$ .

On écrit ensuite que pour tout  $z \in X$  :

$$\langle z, -S(t)z_0 \rangle_X = \langle z, \Phi_t u_n \rangle_X = \int_0^t \langle \chi(\sigma), u_n(\sigma) \rangle_U d\sigma.$$

Passons à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On obtient :

$$\langle z, -S(t)z_0 \rangle_X = \int_0^t \langle \chi(\sigma), u^*(\sigma) \rangle_U d\sigma = \langle z, \Phi_t u^* \rangle_X.$$

Cela implique que  $S(t)z_0 + \Phi_t u^* = 0$ .

De plus, comme  $\rho_n \searrow \mathcal{E}_p^*(t, z_0)$ , on sait que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  t.q.  $\|u_n\|_{L^p([0,t];U)} \leq \mathcal{E}_p^*(t, z_0) + \epsilon$  pour tout  $n > N$ . En passant à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\|u^*\|_{L^p([0,t];U)} \leq \mathcal{E}_p^*(t, z_0) + \epsilon$ . Donc,  $\|u^*\|_{L^p([0,t];U)} = \mathcal{E}_p^*(t, z_0)$ .

D'où l'existence de la solution pour le problème de la  $L^p$ -norme minimale.  $\square$

### Remarque 5.6.

On a vu dans la remarque 3.15 que pour le problème de la  $L^p$ -norme minimale où  $p \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ , on a **l'unicité** de la solution. Dans le cas  $p = +\infty$ , on a seulement l'existence de la solution.

On présente ensuite une proposition concernant deux propriétés de la fonction norme minimale.

### Proposition 5.7.

Supposons que le système (5.1) est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ .

Alors, on a :

- (a)  $\mathcal{E}_\infty^*(t, \cdot)$  est homogène de degré 1, i.e.,  $\mathcal{E}_\infty^*(t, \lambda z_0) = \lambda \mathcal{E}_\infty^*(t, z_0)$  ( $\forall \lambda > 0$ ),
- (b)  $\mathcal{E}_\infty^*(\cdot, z_0)$  est strictement décroissante pour tout  $z_0$  dans  $X$ .

*Démonstration.*

Pour montrer le point (a), il suffit de remarquer que :

$$A_{t, \lambda z_0} = \lambda A_{t, z_0}, \quad \forall \lambda > 0.$$

On montre ensuite l'assertion (b).

Soient  $0 < t_1 < t_2$  et  $z_0 \in X$ . D'après le théorème 5.5, on sait qu'il existe un contrôle  $u_0$  qui possède la norme minimale  $\mathcal{E}_\infty^*(t_1, z_0)$  et qui entraîne le système du point initial  $z_0$  à 0.

De plus, d'après la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro du système en temps  $t_2 - t_1$ , on sait que  $\text{Ran } S(t_2 - t_1) \subset \text{Ran } \Phi_{t_2 - t_1}$ . Cela équivaut (d'après l'assertion (i)  $\iff$  (ii) dans le lemme 3.6) au fait que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  t.q. :

$$S(t_2 - t_1) (\{\|z\|_X < \delta\}) \subset \Phi_{t_2 - t_1} \left( \left\{ \|u\|_{L^\infty([0, t_2 - t_1]; U)} \leq \epsilon \right\} \right). \quad (5.9)$$



Choisissons  $\epsilon$  t.q.  $0 < \epsilon < \|u_0\|_{L^\infty([0,t_1];U)}$  et notons  $\hat{z} := \lambda S(t_1)z_0$  pour  $\lambda \in ]0, 1[$ . On peut trouver  $\lambda \in ]0, 1[$ , t.q.  $\|\hat{z}\|_X \leq \delta$ .

D'après (5.9), on sait qu'il existe un contrôle  $\hat{u} \in A_{t_2-t_1, \hat{z}}$  t.q.  $\|\hat{u}\|_{L^\infty([0,t_2-t_1];U)} \leq \epsilon$ .

Définissons un contrôle  $\tilde{u}$  par :

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} (1 - \lambda)u_0(\sigma), & \forall \sigma \in [0, t_1], \\ \hat{u}(\sigma - t_1), & \forall \sigma \in ]t_1, t_2]. \end{cases}$$

Notre but est de montrer que  $z(t_1, z_0, \tilde{u}) = 0$  et que  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty([0,t_2];U)} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0,t_1];U)}$  afin de conclure que  $\mathcal{E}_\infty^*(t_2, z_0) < \mathcal{E}_\infty^*(t_1, z_0)$ .

En effet, puisque  $\|\hat{u}\|_{L^\infty([0,t_2-t_1];U)} \leq \epsilon < \|u_0\|_{L^\infty([0,t_1];U)}$ , on sait :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{L^\infty([0,t_2];U)} &\leq \max \left\{ (1 - \lambda)\|u_0\|_{L^\infty([0,t_1];U)}, \|\hat{u}\|_{L^\infty([0,t_2-t_1];U)} \right\} \\ &< \|u_0\|_{L^\infty([0,t_1];U)}. \end{aligned}$$

Puis, on calcule :

$$\begin{aligned} S(t_2)z_0 + \Phi_{t_2}\tilde{u} &= S(t_2 - t_1)S(t_1)z_0 + (1 - \lambda) \int_0^{t_1} S(t_2 - \sigma)Bu_0(\sigma)d\sigma \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - \sigma)B\hat{u}(\sigma - t_1)d\sigma \\ &= S(t_2 - t_1) (S(t_1)z_0 + (1 - \lambda)\Phi_{t_1}u_0) + \Phi_{t_2-t_1}\hat{u} \\ &= (1 - \lambda)S(t_2 - t_1) (S(t_1)z_0 + \Phi_{t_1}u_0) + S(t_2 - t_1)\hat{z} + \Phi_{t_2-t_1}\hat{u} = 0. \end{aligned}$$

D'où la décroissance stricte de la fonction  $\mathcal{E}_\infty^*(., z_0)$ . □

On rappelle que dans le théorème 4.15, on a montré qu'en supposant la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en tout temps  $t > 0$  et sur tout ensemble  $e \subset [0, t]$  de mesure strictement positive, le contrôle optimal en temps doit posséder la propriété de bang-bang. Ici, on voit un résultat similaire mais avec une autre notion de **propriété de bang-bang faible**.

**Théorème 5.8** (Propriété de bang-bang faible).

*Supposons que le système (5.1) est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ .*

*Alors, pour tout contrôle optimal  $u^* \in \mathcal{L}_1(\tau^*)$  en temps  $\tau^*$ , on a :*

$$\|u^*\|_{L^\infty([0,\tau^*];U)} = 1. \tag{5.10}$$

*On dit aussi qu'un contrôle possède la **propriété de bang-bang faible** si il vérifie (5.10).*

*Démonstration.*

Supposons par l'absurde que  $\rho = \|u^*\|_{L^\infty([0, \tau^*]; U)} < 1$ .

On calcule pour tout  $0 < s < \tau^*$  :

$$\begin{aligned}\Phi_{\tau^*} u^* &= \int_0^{\tau^*-s} S(\tau^* - \sigma) B u^*(\sigma) d\sigma + \int_{\tau^*-s}^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma) B u^*(\sigma) d\sigma \\ &= S(s) \Phi_{\tau^*-s} u^* + \Phi_s (u^*(\tau^* - s + \cdot)).\end{aligned}\quad (5.11)$$

Notons  $\tilde{z}(s) = S(\tau^* - s)z_0 + \Phi_{\tau^*-s} u^* - z_0$  et  $\tilde{u}(\sigma) = u^*(\tau^* - s + \sigma)$  pour  $\sigma \in [0, s]$ .

D'après (5.11), on obtient :

$$\begin{aligned}0 &= S(\tau^*)z_0 + \Phi_{\tau^*} u^* \\ &= S(s)z_0 + S(s)(S(\tau^* - s)z_0 - z_0) + S(s)\Phi_{\tau^*-s} u^* + \Phi_s \tilde{u} \\ &= S(s)(S(\tau^* - s)z_0 + \Phi_{\tau^*-s} u^* - z_0) + S(s)z_0 + \Phi_s \tilde{u} \\ &= S(s)z_0 + \Phi_s \tilde{u} + S(s)\tilde{z}(s).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Puis, par la  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en temps  $s > 0$  et d'après le lemme 3.6((i)  $\iff$  (ii)), on sait que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  t.q. :

$$S(s)(\{\|z\|_X \leq \delta\}) \subset \Phi_s \left( \left\{ \|u\|_{L^\infty([0, s]; U)} \leq \epsilon \right\} \right). \quad (5.13)$$

Prenons  $\epsilon = \frac{1-\rho}{2}$  et  $0 < s < \tau^*$  t.q.  $\|\tilde{z}(s)\|_X \leq \delta$  (ce qui est toujours possible car  $\lim_{s \rightarrow \tau^*} \tilde{z}(s) = 0$ ).

Alors, d'après (5.13), on sait qu'il existe un contrôle  $\hat{u} \in L^\infty([0, s]; U)$  t.q.  $\Phi_s \hat{u} = S(s)\tilde{z}(s)$  et que  $\|\hat{u}\|_{L^\infty([0, s]; U)} \leq \epsilon$ .

On obtient enfin que :

$$0 = S(s)z_0 + \Phi_s \tilde{u} + S(s)\tilde{z}(s) = S(s)z_0 + \Phi_s (\tilde{u} + \hat{u}).$$

On vérifie que :

$$\|\tilde{u} + \hat{u}\|_{L^\infty([0, s]; U)} \leq \rho + \epsilon = \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} < 1.$$

Donc,  $\tilde{u} + \hat{u}$  est un contrôle admissible. C'est une contradiction avec l'optimalité de  $u^*$  en temps  $\tau^*$ . D'où le résultat.  $\square$

En utilisant le théorème 5.5 et le théorème 5.8, on peut obtenir une relation entre la fonction temps minimal et la fonction norme minimale.

### **Théorème 5.9.**

*Supposons que le système (5.1) est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ .*

*Alors, on a pour tout  $z_0 \in X$ ,*

$$\mathcal{E}_\infty^*(\mathbf{T}_\infty(\mathbf{z}_0), \mathbf{z}_0) = 1.$$

*Démonstration.*

On suppose d'abord que  $\mathcal{E}_\infty^*(T_\infty(z_0), z_0) > 1$ . Cela implique que tout contrôle qui entraîne le système du point initial  $z_0$  au point final 0 doit avoir une norme plus grande que 1. C'est une contradiction avec l'existence d'un contrôle optimal en temps dans  $\mathcal{L}_1(T_\infty(z_0))$  (théorème 4.4).

Dans l'autre sens, on suppose que  $\mathcal{E}_\infty^*(T_\infty(z_0), z_0) < 1$ .

D'après le théorème 5.5, on sait qu'il existe un contrôle  $u \in A_{T_\infty(z_0), z_0}$  qui possède la norme minimale  $\mathcal{E}_\infty^*(T_\infty(z_0), z_0) < 1$ . Ceci est en contradiction avec la propriété de bang-bang faible (théorème 5.8).

D'où le résultat. □

### Remarque 5.10.

*Le théorème précédent implique que :*

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) \leq 1 & \text{si } T > T_\infty(z_0), \\ \mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) \geq 1 & \text{si } T < T_\infty(z_0). \end{cases}$$

## 3 Le module de continuité de $T_\infty$

Dans cette section, on présente un résultat concernant le module de continuité de  $T_\infty$  à l'aide du principe d'optimalité de Bellman. Ces résultats sont obtenus dans l'article de O. Carja [7].

**Proposition 5.11** (Principe d'optimalité de Bellman).

*Soit  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ .*

*Alors, pour tout  $0 < t < T_\infty(z_0)$ , on a :*

$$T_\infty(z_0) = \inf \{t + T_\infty(z(t, z_0, u)) \mid u \in \mathcal{L}_1(t)\}. \quad (5.14)$$

*Démonstration.*

**On commence par montrer que  $T_\infty(z_0) \leq t + T_\infty(z(t, z_0, u))$  pour tout  $u \in \mathcal{L}_1(t)$ .**

Si  $z(t, z_0, u)$  n'est pas dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ , i.e., il n'est pas  $L^\infty$ -contrôlable à zéro par un contrôle admissible, tout est évident. Sinon, il existe  $s > 0$  et  $v \in \mathcal{L}_1(s)$  t.q.  $S(s)z(t, z_0, u) + \Phi_s v = 0$ .

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned} 0 &= S(s)z(t, z_0, u) + \Phi_s v \\ &= S(t)S(s)z_0 + S(s)\Phi_t u + \Phi_s v \\ &= S(t+s)z_0 + \int_0^t S(t+s-\sigma)Bu(\sigma)d\sigma + \int_t^{t+s} S(t+s-\sigma)Bv(\sigma-t)d\sigma \\ &= S(s+t)z_0 + \Phi_{t+s}w, \end{aligned}$$

$$\text{où } w(\sigma) = \begin{cases} u(\sigma) & \sigma \in [0, t] \\ v(\sigma - t) & \sigma \in ]t, t + s] \end{cases}, w \in \mathcal{L}_1(t + s).$$

Donc,  $T_\infty(z_0) \leq s + t$ . Les calculs ci-dessus sont valables pour tout  $s > 0$  où  $z(t, z_0, u)$  est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $s$  avec un contrôle dans  $\mathcal{L}_1(s)$ . Prenons  $s = T_\infty(z(t, z_0, u))$ . On a montré que  $T_\infty(z_0) \leq t + T_\infty(z(t, z_0, u))$  pour tout  $u \in \mathcal{L}_1(t)$ .

Ensuite, afin de conclure, on veut montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{L}_1(t)$  t.q.  $t + T_\infty(z(t, z_0, u)) \leq T_\infty(z_0) + \epsilon$ .

En effet, on sait qu'il existe  $s > 0$  t.q.  $T_\infty(z_0) \leq s < T_\infty(z_0) + \epsilon$  et  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty(s)$ .

Autrement dit, il existe un contrôle  $v \in A_{s, z_0}$ .

On calcule ensuite que :

$$\begin{aligned} 0 &= S(s)z_0 + \Phi_s v \\ &= S(s-t)S(t)z_0 + S(s-t)\Phi_t v + \int_t^s S(s-\sigma)Bv(\sigma)d\sigma \\ &= S(s-t)z(t, z_0, v) + \int_0^{s-t} S(s-t-\sigma)Bv(t+\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Donc,  $z(t, z_0, v)$  appartient à  $\mathcal{R}_0^\infty(s-t)$ . On obtient au final que  $T_\infty(z(t, z_0, u)) \leq s - t$ . Donc,  $t + T_\infty(z(t, z_0, u)) \leq s \leq T_\infty(z_0) + \epsilon$ .

D'où le résultat. □

On voit dans le théorème suivant qu'en s'appuyant sur le principe d'optimalité de Bellman, on peut obtenir le module de continuité de  $T_\infty$  dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ , l'ensemble qui contient tous les points  $L^\infty$ -contrôlables à zéro à l'aide du module de continuité de  $T_\infty$  en zéro.

### **Théorème 5.12.**

*Supposons que le système (5.1) est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ .*

*Alors on a :*

- (a)  $\mathcal{R}_0^\infty$  est un ouvert de  $X$ .
- (b) Si  $T_\infty$  est bornée dans un voisinage de zéro, alors  $T_\infty$  est localement bornée dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ .
- (c) Si  $T_\infty$  est continue en zéro, alors  $T_\infty$  est localement uniformément continue dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ .
- (d) Si  $T_\infty$  est localement lipschitzienne en zéro, alors  $T_\infty$  est localement lipschitzienne dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ .

*Démonstration.*

**On montre d'abord l'assertion (a).**

Prenons  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ . On sait qu'il existe  $t > 0$  t.q.  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty(t)$ . Autrement dit, il existe un contrôle  $u \in \mathcal{L}_1(t)$  t.q.  $z(t, z_0, u) = 0$ . Comme  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  et  $0 \in \text{int } \mathcal{R}_0^\infty$ , il existe  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $z_0$  t.q. :

$$S(t)(x - z_0) \in \mathcal{R}_0^\infty, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Donc, on obtient  $z(t, x, u) = S(t)x + \Phi_t u = S(t)(x - z_0) \in \mathcal{R}_0^\infty$ .

Puis, on sait qu'il existe  $s > 0$  et un contrôle  $v \in \mathcal{L}_1(s)$  t.q.  $S(s)z(t, x, u) + \Phi_s v = 0$ . En posant  $\tilde{u}(\sigma) = \chi_{[0,t]}u(\sigma) + \chi_{[t,t+s]}v(\sigma - t)$ , on peut calculer :

$$S(s+t)x + \Phi_{s+t}\tilde{u} = S(s)S(t)x + S(s)\Phi_t u + \Phi_s v = S(s)(z(t, x, u)) + \Phi_s v = 0.$$

On en déduit que pour tout  $x \in \mathcal{V}$ , on a  $x \in \mathcal{R}_0^\infty$ . D'où  $\mathcal{R}_0^\infty$  est un ouvert.

**L'assertion (b)** vient du principe d'optimalité de Bellman (proposition 5.11). En effet, pour tout  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $z_0$  inclus dans  $\mathcal{R}_0^\infty$  (car  $\mathcal{R}_0^\infty$  est un ouvert).

Prenons  $t = T_\infty(z_0)$ . On sait qu'il existe un contrôle  $u \in \mathcal{L}_1(t)$  t.q.  $S(t)z_0 + \Phi_t u = 0$ . D'après le principe d'optimalité de Bellman, pour tout  $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}_0^\infty$ , on a :

$$T_\infty(x) \leq T_\infty(z_0) + T_\infty(z(T_\infty(z_0), x, u)) = T_\infty(z_0) + T_\infty(S(T_\infty(z_0))(x - z_0)).$$

De plus, puisque  $T_\infty$  est bornée dans un voisinage de zéro, on sait qu'il existe un voisinage de  $z_0$ ,  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  et une constante  $M > 0$  t.q. pour tout  $x \in \mathcal{V}'$  on a  $T_\infty(S(T_\infty(z_0))(x - z_0)) \leq M$ . Cela implique que  $T_\infty(x) \leq T_\infty(z_0) + M$ , pour tout  $x$  dans  $\mathcal{V}'$ . D'où le résultat.

**On montre ensuite l'assertion (c).**

Prenons  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ . On sait qu'il existe un voisinage de  $z_0$ ,  $\mathcal{V}$  inclus dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ . D'après les calculs ci-dessus, si  $y \in \mathcal{V}$  est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $t$  avec un contrôle admissible, on a :

$$T_\infty(x) \leq t + T_\infty(S(t)(x - y)), \quad \forall x \in \mathcal{V}. \quad (5.15)$$

Prenons  $t = T_\infty(y)$ , on en déduit que :

$$T_\infty(x) - T_\infty(y) \leq T_\infty(S(T_\infty(y))(x - y)), \quad \forall x, y \in \mathcal{V}. \quad (5.16)$$

En changeant le rôle de  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$T_\infty(y) - T_\infty(x) \leq T_\infty(S(T_\infty(x))(y - x)). \quad (5.17)$$

D'après l'hypothèse que  $T_\infty$  est continue en zéro, on sait que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  t.q. pour tout  $y$  dans  $X$ ,  $\|y\|_X \leq \delta$  on a  $T_\infty(y) \leq \epsilon$ . De plus, comme  $T_\infty$  est localement bornée dans  $\mathcal{R}_0^\infty$  (car elle est bornée dans un voisinage de zéro), on en déduit qu'il existe un voisinage de  $z_0$ ,  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  et une constante  $M > 0$  t.q. pour

tout  $x$  dans  $\mathcal{V}'$  on a  $\|S(T_\infty(x))\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ . On en déduit que pour tout  $x, y$  dans  $\mathcal{V}'$  t.q.  $\|x - y\|_X \leq \frac{\delta}{M} = \delta'$ , on a :

$$\begin{aligned} \|S(T_\infty(y))(x - y)\|_X &\leq M\|x - y\|_X \leq \delta, \\ \|S(T_\infty(x))(y - x)\|_X &\leq M\|x - y\|_X \leq \delta. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a montré que pour tout  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ , tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $V'$ , un voisinage de  $z_0$  et une constante  $\delta' = \frac{\delta}{M}$  t.q. pour tout  $x, y \in V'$ ,  $\|x - y\|_X \leq \delta'$  on a :

$$|T_\infty(x) - T_\infty(y)| \leq \max \{T_\infty(S(T_\infty(y))(x - y)), T_\infty(S(T_\infty(x))(y - x))\} \leq \epsilon.$$

D'où la continuité uniforme locale de la fonction  $T_\infty$ .

**Quant à l'assertion (d)**, d'après les calculs ci-dessus, on sait que pour tout  $z_0 \in \mathcal{R}_0^\infty$ , il existe un voisinage de  $z_0$ ,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}_0^\infty$  t.q. pour tout  $x$  dans  $\mathcal{V}$  on a :

$$|T_\infty(x) - T_\infty(z_0)| \leq \max \{T_\infty(S(T_\infty(z_0))(x - z_0)), T_\infty(S(T_\infty(x))(z_0 - x))\}.$$

D'après la continuité lipschitzienne locale en zéro de la fonction  $T_\infty$ , on sait qu'il existe  $\delta > 0$  et une constante  $K > 0$  t.q. pour tout  $y \in X$ ,  $\|y\|_X \leq \delta$  on a  $T_\infty(y) \leq K\|y\|_X$ .

Ensuite, il est clair qu'il existe un voisinage de  $z_0$ ,  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  t.q. pour tout  $x$  dans  $\mathcal{V}$  on a :

$$\begin{aligned} \|S(T_\infty(z_0))(x - z_0)\|_X &\leq \delta, \\ \|S(T_\infty(x))(z_0 - x)\|_X &\leq \delta. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x \in \mathcal{V}'$  on a :

$$\begin{aligned} |T_\infty(x) - T_\infty(z_0)| &\leq \max \{T_\infty(S(T_\infty(z_0))(x - z_0)), T_\infty(S(T_\infty(x))(z_0 - x))\} \\ &\leq K \max \{\|S(T_\infty(z_0))\|_{\mathcal{L}(X)}, \|S(T_\infty(x))\|_{\mathcal{L}(X)}\} \|x - z_0\|_X \leq K'\|x - z_0\|_X. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

### Remarque 5.13.

\* D'après le théorème 5.4 et le théorème 5.12, si le système est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ , alors  $T_\infty$  est **localement uniformément continue** dans  $\mathcal{R}_0^\infty$ .

\* Le principe de Bellman n'est plus valable pour le problème en temps optimal où on cherche le contrôle dans l'espace  $L^p([0, t]; U)$  avec  $p \in ]1, +\infty[$ . Dans l'article [16] (section 5.2), ils ont donné un résultat similaire au principe de Bellman qui aide aussi à étudier le module de continuité de la fonction temps minimal dans l'ensemble de points  $L^p$ -contrôlables à zéro.

## 4 Le taux d'explosion de la fonction norme minimale

Il est clair que  $\lim_{z \rightarrow 0} T_\infty(z) = 0$  et que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{E}_\infty^*(t, z_0) = +\infty$  pour tout  $z_0 \neq 0 \in X$ . Dans la suite de la section, on s'intéresse au lien entre le taux d'explosion de la fonction norme minimale quand  $t$  tend vers zéro et le module de continuité de la fonction temps minimal en zéro.

On commence par présenter le théorème principal qui nous aide à étudier le lien entre eux.

### Théorème 5.14.

*Supposons que le système (5.1) est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en tout temps  $t > 0$ . On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , continue, strictement décroissante et t.q.  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty$ .*

*Alors, on a l'équivalence entre :*

- (i) *Il existe  $T_0 > 0$  t.q.  $\mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) \leq f(T)\|z_0\|_X$  pour tout  $z_0 \in X$  et tout  $T \in ]0, T_0]$ .*
- (ii)  *$T_\infty(z_0) \leq f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X})$  pour  $z_0$  appartenant à un voisinage de 0.*

*Démonstration.*

**On montre d'abord que (i)  $\Rightarrow$  (ii).**

Soient  $0 < T \leq T_0$  et  $z_0 \in X$ . D'après le théorème 5.5, on sait qu'il existe un contrôle  $u \in A_{T, z_0}$  t.q.  $\|u\|_{L^\infty([0, T]; U)} \leq f(T)\|z_0\|_X$ .

Notons  $T = f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X})$ . On remarque d'abord que pour tout  $z_0 \in B(0, \frac{1}{f(T_0)})$ , un voisinage de zéro dans  $X$ , on a  $T \leq T_0$ .

En effet, d'après la décroissante stricte de la fonction  $f$ , on a :

$$f(T) = \frac{1}{\|z_0\|_X} \geq f(T_0) \iff T \leq T_0.$$

Autrement dit, pour tout  $z_0 \in B(0, \frac{1}{f(T_0)})$ , il existe un contrôle  $u \in A_{T, z_0}$  t.q.  $\|u\|_{L^\infty([0, T]; U)} \leq f(T)\|z_0\|_X = 1$ . Donc,  $T_\infty(z_0) \leq T = f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X})$  pour tout  $z_0 \in B(0, \frac{1}{f(T_0)})$ , un voisinage de 0.

**On montre ensuite que (ii)  $\Rightarrow$  (i).**

On sait qu'il existe  $r > 0$  t.q.

$$\forall z_0 \in X, \|z_0\|_X \leq r \Rightarrow T_\infty(z_0) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{\|z_0\|_X}\right).$$

Soit  $t > 0$ . On remarque que :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{\|z_0\|_X}\right) \leq t \iff \|z_0\|_X \leq \frac{1}{f(t)}.$$

Donc, si  $z_0 \in X$  t.q.  $\|z_0\|_X \leq r$  et  $\|z_0\|_X \leq \frac{1}{f(t)}$ , on peut trouver un contrôle admissible qui amène le système du point initial  $z_0$  à 0 en temps  $t$ .

En prenant  $T_0 > 0$  t.q.  $\frac{1}{f(T_0)} \leq r$  (ce qui est toujours possible car  $f$  est décroissante et que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty$ ), on obtient que pour tout  $T \in ]0, T_0]$ ,  $\frac{1}{f(T)} \leq \frac{1}{f(T_0)} \leq r$  et que :

$$\begin{aligned} S(T) \left( \left\{ \|z_0\|_X \leq \frac{1}{f(T)} \right\} \right) &\subset \Phi_T \left( \left\{ \|u\|_{L^\infty([0,T];U)} \leq 1 \right\} \right) \\ \iff S(T) \left( \left\{ \|z_0\|_X \leq \alpha \right\} \right) &\subset \Phi_T \left( \left\{ \|u\|_{L^\infty([0,T];U)} \leq \alpha f(T) \right\} \right), \quad \forall \alpha > 0. \end{aligned}$$

La dernière inclusion implique l'assertion (i). D'où le résultat.  $\square$

**Remarque 5.15.**

\* Si on change **le sens des deux inégalités** dans (i) et (ii), on peut aussi montrer l'équivalence entre elles.

Plus précisément, notons

(i') Il existe  $T_0 > 0$  t.q.  $\mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) \geq f(T)\|z_0\|_X$  pour tout  $z_0 \in X$  et tout  $T \in ]0, T_0]$ .

(ii')  $T_\infty(z_0) \geq f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X})$  pour  $z_0$  appartenant à un voisinage de 0.

Soient  $0 < T < T_0$  et  $z_0 \in X$ . D'après l'assertion (i'), on sait que tout contrôle  $u$  entraînant le système du point initial  $z_0$  à zéro en temps  $T$  doit avoir une norme plus grande que  $f(T)\|z_0\|_X$ . Ensuite, pour tout  $z_0 \in B(0, \frac{1}{f(T_0)})$ , si on note  $T = f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X})$ , on sait  $T \leq T_0$ . Cela implique que  $T_\infty(z_0) \geq T = f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X})$  pour tout  $z_0 \in B(0, \frac{1}{f(T_0)})$ . D'où l'assertion (ii').

Dans l'autre sens, en gardant les mêmes notations dans la démonstration, on sait qu'il existe  $r > 0$  t.q.

$$T_\infty(z_0) \geq f^{-1}(\frac{1}{\|z_0\|_X}), \quad \forall z_0 \in X, \quad \|z_0\|_X \leq r.$$

Supposons par l'absurde que l'assertion (i') n'est pas vraie. Autrement dit, pour tout  $T_0 > 0$ , il existe  $T \in ]0, T_0]$  et  $z_0$  dans  $X$  t.q.  $\mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) < f(T)\|z_0\|_X$ .

Prenons,  $T_0 = f^{-1}(\frac{1}{r})$ . Comme  $\mathcal{E}_\infty^*(t, \cdot)$  est homogène de degré 1 (proposition 5.7), on sait que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\mathcal{E}_\infty^*(T, \lambda z_0) < \lambda f(T)\|z_0\|_X$ .

Prenons  $\lambda > 0$  t.q.  $\lambda f(T)\|z_0\|_X = 1$ . L'inégalité ci-dessus implique que  $\lambda z_0$  est  $L^\infty$ -contrôlable à zéro en temps  $T$  avec un contrôle de la  $L^\infty$ -norme strictement plus petite que 1. Donc, d'après la propriété de bang-bang faible,  $T_\infty(\lambda z_0) < T$ . Or, il est clair que  $\lambda\|z_0\|_X \leq r$ . On en déduit que  $T_\infty(\lambda z_0) \geq f^{-1}(\frac{1}{\lambda\|z_0\|_X}) = T$ . C'est une contradiction. D'où (ii')  $\Rightarrow$  (i').

\* Prenons par exemple  $f(t) = Ct^{-\beta}$  pour certains  $C > 0$  et  $\beta > 0$ . En s'appuyant sur le théorème précédent, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) &\leq f(T)\|z_0\|_X, \quad \text{pour } T \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ et } z_0 \text{ dans } X, \\ \iff T_\infty(z_0) &\leq C_0\|z_0\|_X^{\frac{1}{\beta}}, \quad \text{pour } z_0 \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ et } CC_0^{-\beta} = 1. \end{aligned}$$



Autrement dit, le taux d'explosion de la fonction norme minimale  $\mathcal{E}_\infty^*(T, z)$  autour de  $T = 0$  donne le facteur höldérien de la fonction temps minimal autour de  $z = 0$ .

\* Si on note  $u_{T,z_0}^*$  la solution du problème de la  $L^2$ -norme minimale en temps  $T > 0$  avec point initial  $z_0$ , on sait que  $\mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) \leq \|u_{T,z_0}^*\|_{L^\infty([0,T];U)}$ .  
Donc, on peut trouver une majoration de  $\mathcal{E}_\infty^*(T, z_0)$  en étudiant la  $L^\infty$ -norme de  $u_{T,z_0}^*$ .

Supposons que le système (5.1) est contrôlable à zéro en tout temps  $T > 0$ .

Alors, on a déjà montré dans le théorème 3.14 et dans la remarque 3.15 que le problème de la  $L^2$ -norme minimale admet une unique solution comme :

$$u_{T,z_0}^* := F_0(T)z_0, . \quad (5.18)$$

On sait aussi que  $C_t^0 = \|F_0(T)\|_{L(X,L^2([0,T];U))}$  et  $\mathcal{E}_2^\infty(T, z_0) = \|F_0(T)z_0\|_X$ .

On a vu dans la remarque 3.15 que l'on peut écrire :

$$F_0(T) = -\Phi_T^* R_T^{-1} S(T) \quad (5.19)$$

sous l'hypothèse  $S(T)z_0 \in \text{Ran } R_T$ .

Pour  $z_0$  assez proche de zéro, il est clair que  $S(T)z_0 \in \text{Ran } R_T$ . Donc, la formule (5.19) est vraie au moins dans un voisinage de zéro.

On arrive donc à calculer la  $L^\infty$ -norme de la solution du problème de la  $L^2$ -norme minimale. Cela nous donne une majoration de la fonction norme minimale  $\mathcal{E}_\infty^*$ .

Plus précisément, pour tout  $T > 0$  et  $z_0$  dans un voisinage de zéro, on sait :

$$\begin{aligned} \|u_{T,z_0}^*\|_{L^\infty([0,T];U)} &= \sup_{\sigma \in [0,T]} \|B^* S(T-\sigma)^* R_T^{-1} S(T)z_0\|_U \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} \|R_T^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{\sigma \in [0,T]} \|S(T-\sigma)^*\|_{\mathcal{L}(X)} \|R_T^{-\frac{1}{2}} S(T)z_0\|_X \\ &\leq K \|R_T^{-\frac{1}{2}} S(T)\|_{\mathcal{L}(X)} \|z_0\|_X = K C_T^0 \|z_0\|_X \text{ (voir (3.18)).} \end{aligned}$$

Donc, si on peut déterminer le comportement de  $C_T^0$  quand  $T$  tend vers zéro, on peut déterminer le module de continuité de la fonction temps minimale  $T_\infty$  en zéro.

Par exemple, si on sait qu'il existe  $M > 0, \beta > 0$  t.q.  $C_T^0 \leq M T^{-\beta}$  pour  $T$  dans un voisinage de zéro, d'après le théorème 5.14, on en déduit qu'il existe une constante  $M' > 0$  t.q. :

$$\mathcal{E}_\infty^*(T, z_0) \leq \|u_{T,z_0}^*\|_{L^\infty([0,T];U)} \leq M' T^{-\beta} \|z_0\|_X,$$

pour  $T$  dans un voisinage de zéro et  $z_0$  dans un voisinage de zéro.

Donc, on a  $T_\infty(z_0) \leq M'' \|z_0\|_X^{\frac{1}{\beta}}$  pour  $z_0$  dans un voisinage de zéro. Cela nous donne le facteur höldérien de  $T_\infty$  en zéro.

On a vu quelques résultats du taux d'explosion du coût du contrôle en zéro dans la section III.3. On peut donner par exemple un corollaire suivant :

**Corollaire 5.16.**

- *En dimension finie (où  $X = \mathbb{R}^n$  et  $U = \mathbb{R}^m$ ), on sait que  $T_\infty$  est localement  $\frac{1}{\beta}$ -höldérienne où  $\beta = k + \frac{1}{2}$ ,  $k$  est le plus petit nombre entier t.q.  $\text{Ran}[B, AB, \dots, A^k B] = n$ .*
- *Pour l'équation de la chaleur avec un contrôle interne, décrite dans (3.54)-(3.56), on a qu'il existe  $c > 0$  t.q. :*

$$T_\infty(z_0) < f^{-1}\left(\frac{1}{\|z_0\|_X}\right), \text{ pour } z_0 \text{ dans un voisinage de zéro,} \quad (5.20)$$

$$\text{où } f(t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{c}{t}}.$$

*Démonstration.*

Il suffit d'utiliser les résultats dans (3.35) et (3.37) en appliquant le théorème 5.14 pour conclure.  $\square$

## VI Méthodes numériques

On présente ici deux types de méthode numérique pour résoudre le problème de contrôle optimal en temps : **les méthodes directes** et **les méthodes indirectes**. Ces méthodes peuvent traiter un problème de contrôle optimal plus général qui cherche par exemple à minimiser une fonction non linéaire. Les méthodes directes consistent à discrétiser la solution du système et le contrôle en transformant le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes. Les méthodes indirectes sont basées sur une méthode de tir en appliquant le principe du maximum de Pontriaguine.

Dans la suite, on présente juste deux méthodes : **la discrétisation totale** pour les méthodes directes et **la méthode de tir simple** pour les méthodes indirectes. on se réfère au livre de Emmanuel Trélat [34] et à l'article de O. Von Stryk et R. Bulirsch [36] pour plus de détails sur les différentes méthodes numériques.

### 1 Présentation des méthodes

On présente par la suite les principes de deux méthodes numériques.

#### (1) Méthodes directes : la discrétisation totale

C'est la méthode la plus évidente pour traiter un problème de contrôle optimal. On discrétise la solution du système et le contrôle en un vecteur  $Z = (z_1, \dots, z_N, u_1, \dots, u_n)$ , et on se ramène à résoudre un problème d'optimisation non-linéaire de la forme :

$$\min_{Z \in C} F(Z), \quad (6.1)$$

où  $C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g_j(Z) \leq 0, j \in \llbracket r+1, m \rrbracket\}$ .

Plus précisément, on choisit les contrôles dans un espace de dimension finie, puis on intègre le système en utilisant une méthode d'intégration numérique sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ . On peut choisir par exemple des contrôles linéaires sur chaque subdivision  $[t_i, t_{i+1}]$ . Par ailleurs, on choisit une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple, si on choisit le schéma d'Euler explicite, on obtient :

$$z_{i+1} = h_i f(t_i, z_i, u_i), \quad \text{où } h_i = t_{i+1} - t_i.$$

L'ensemble  $C$  représente les conditions initiales, finales du système, les contraintes sur la solution du système et les contraintes sur le contrôle.  $F$  est la fonction à optimiser. Dans le cas du problème en temps optimal, on prend  $F(Z) = t_f$ . De plus, dans notre cas où le temps final  $t_f$  n'est pas connu, on rajoute une variable  $t_f$  au vecteur  $Z$  et une équation supplémentaire  $t_f \geq 0$  à l'ensemble de contraintes  $C$ .

On se ramène à résoudre un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes (6.1). Ce problème peut être résolu par exemple par la méthode de SQP. Dans ce mémoire, on utilise la fonction **fmincon.m** en matlab pour la mise en oeuvre de

la méthode directe. On se réfère aux livres de R. Fletcher [12] et [13] pour plus de détails sur la méthode SQP et sur d'autres méthodes d'optimisation non linéaire.

En résumé, il existe une infinité de variantes pour les méthodes directes selon le choix de l'approximation du contrôle sur chaque subdivision du temps, le choix de la méthode d'intégration de l'équation différentielle, et le choix de la méthode de la discrétisation de l'équation différentielle. On se réfère à l'article de M. Diehl, H.G. Bock, H. Diedam et P.-B. Wieber [8] pour d'autres méthodes directes et au livre de J.T. Betts [4] pour la mise en oeuvre des méthodes directes.

## (2) Méthodes indirectes : la méthode de tir simple

Le principe du maximum de Pontriaguine nous donne une condition nécessaire d'optimalité. Si on est capable, à partir du principe du maximum, d'exprimer le contrôle optimal en fonction de  $(z(t), p(t))$ , où  $p(t)$  est la solution du système adjoint, la solution du problème en temps optimal s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z_0, z(t_f)) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

où  $R$  représente les conditions initiales et finales du système.

A l'aide des méthodes numériques, on peut trouver  $z(t, z_0)$  la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), & t \in [0, t_f], \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Notons  $Z = (z_0, t_f)$  et posons une fonction  $G(Z) = R(z_0, z(t_f, z_0))$ . Le problème en temps optimal (6.2) est équivalent à résoudre  $G(Z) = 0$ . Il s'agit donc de trouver un zéro de la fonction  $G$  et on peut utiliser par exemple la méthode de Newton. On se réfère par exemple au livre de J. Stoer et R. Bulirsch [31] pour plus de détails sur la méthode de Newton.

Il existe d'autres types de méthode indirecte, par exemple, la méthode de tir multiple qui découpe le système en  $N$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  et résout le sous-système optimal sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  en prenant en compte la continuité de  $z(t, z_0)$  en chaque instant  $t_i$ . On se réfère au livre de J. Store et R. Bulirsch [31] pour des détails sur la méthode de tir multiple.

Dans ce mémoire, on utilise la fonction **fsolve.m** en matlab pour trouver un zéro de la fonction  $G$ . On précisera les mises en oeuvre de ces deux méthodes dans la section suivante en traitant des exemples concrets en dimension finie et dimension infinie.

En résumé, les méthodes directes sont plus simple à implémenter, plus robustes et moins sensibles au choix de la valeur initiale. En revanche, les méthodes indirectes peuvent donner une solution plus précise mais il faut être capable de deviner de bonnes valeurs initiales. On se réfère à la section 9.3 du livre de E. Trélat [34] pour la comparaison entre les deux méthodes.

## 2 Dimension finie

On commence par expliciter les mises en oeuvre de deux méthodes en s'appuyant sur les fonctions **fmincon.m** et **fsolve.m** en matlab.

Pour la méthode directe, on choisit  $N$ , le nombre de discrétisation en temps et on note  $t_1 = 0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = t_f$  la discrétisation du temps. On prend des valeurs initiales pour le temps final  $t_f$  et pour le contrôle  $[u_1, \dots, u_N]$  où  $u_i \in \mathbb{R}^m$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . On cherche à minimiser le temps final, en prenant en compte la condition finale  $z(t_f) = z^f$ , la contrainte sur le contrôle, i.e., pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $\|u_i\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$ , et le fait que le temps final doit être positif. Sur chaque subdivision du temps  $[t_i, t_{i+1}]$ , on intègre le système par la méthode d'Euler explicite.

On crée une fonction **methodedirecte.m** (voir l'Annexe A.1) qui donne les résultats et les dessins pour la trajectoire de la solution et du contrôle. Le principe est d'utiliser **fmincon.m** pour minimiser la fonction **principal.m** qui prend une variable  $X$  contenant les discrétisations du contrôle  $U$  et le temps final  $t_f$  sous les contraintes écrites dans la fonction **contrainte.m**. On choisit ici la méthode SQP pour la méthode d'optimisation non linéaire.

Quant à la méthode de tir, on rappelle que dans le corollaire 2.11, on a montré qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, le contrôle optimal en temps a la forme :

$$u^*(\sigma) = \frac{B^*S(t-\sigma)^*\eta}{\|B^*S(t-\sigma)^*\eta\|_{\mathbb{R}^m}}, \quad \sigma \in [0, t_f], \quad (6.4)$$

pour un  $\eta \neq 0$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^n$ .

Notons  $p(t)$  la solution du système adjoint avec une condition finale :

$$\dot{p}(t) = -A^*p(t), \quad t \in [0, t_f], \quad (6.5)$$

$$p(t_f) = \eta. \quad (6.6)$$

Il est clair que l'on peut réécrire (6.4) comme :

$$u^*(\sigma) = \frac{B^*p(\sigma)}{\|B^*p(\sigma)\|_{\mathbb{R}^m}}, \quad \sigma \in [0, t_f]. \quad (6.7)$$

Notons,  $X = (p(0), t_f)$ . Le principe de la méthode de tir est de trouver un zéro de la fonction **F.m** (Voir Annexe 1 (b)) qui prend  $X$  comme variable et qui rend la valeur  $z(t_f) - z^f$ . On utilise la fonction **ode113.m** pour calculer la solution du système  $z(t)$  et la solution du système adjoint  $p(t)$ .

On teste les deux méthodes par un exemple pris du livre de E. Trélat [34] (exemple 9.3.1) où on est capable de calculer le temps minimal exact.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), & x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) = u(t), & y(0) = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

où  $|u(t)| \leq 1$ .

Notons  $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ,  $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Avec les notations ci-dessus, le système (6.8) s'écrit sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0, \quad t \in [0, t_f]. \quad (6.9)$$

On remarque que  $\text{Ran} [AB, B] = \text{Ran} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$ . Donc,  $(A, B)$  est exactement contrôlable.

D'après les calculs dans [34], on peut obtenir la fonction temps minimal comme :

$$T_\infty(x_f, y_f) = \begin{cases} 2\sqrt{x_f + \frac{1}{2}y_f^2} - y_f & \text{si } x_f \geq \frac{y_f^2}{2} \text{signe}(y_f), \\ 2\sqrt{-x_f + \frac{1}{2}y_f^2} + y_f & \text{si } x_f \leq \frac{y_f^2}{2} \text{signe}(y_f). \end{cases} \quad (6.10)$$

On cherche par la suite le problème de contrôle en temps optimal avec la condition finale  $z^f = \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule (6.10), on a :  $t_{f\text{exact}} = 1 + \sqrt{2} \approx 2.4142$ . On présente les résultats obtenus en matlab dans l'Annexe B.2. On remarque que pour la méthode directe, si on augmente le nombre de discrétisation, le temps final numérique est plus proche du temps final exact. De plus, le résultat obtenu par la méthode de tir est très précis par rapport à celui obtenu par la méthode directe, mais si on prend une valeur initiale  $t_f$  trop loin du temps final exact, on obtient un résultat mauvais.

### 3 Dimension infinie

On essaie la méthode directe pour résoudre l'équation de la chaleur avec un contrôle interne dans  $[0, 1]$ .

Plus précisément, on considère l'équation :

$$\dot{z}(t, x) = \Delta z(t, x) + \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(x)u(t, x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, t_f], \quad (6.11)$$

$$z(t, x) = 0, \quad x = 1 \text{ ou } 0, \quad t \in [0, t_f]. \quad (6.12)$$

On utilise la méthode des différences finies pour discrétiser le système ci-dessus. On choisit aussi le schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps. Prenons  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_d = t_f$  la discrétisation en temps par  $d$  intervalles, et  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{N+1} = 1$  la discrétisation en espace par  $N + 1$  intervalles.

Notons  $z_{i,k} = z(t_i, x_k)$  la valeur de la solution en temps  $t_i$  et au point  $x_k$  où  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 0, N + 1 \rrbracket$ . On prend les approximations comme suit :

$$\dot{z}(t_i, x_k) \approx \frac{z_{i,k} - z_{i-1,k}}{t_h} \text{ et } \Delta z(t_i, x_k) \approx \frac{z_{i,k+1} + z_{i,k-1} - 2z_{i,k}}{h^2}, \quad (6.13)$$

où  $t_h = \frac{t_f}{d}$  et  $h = \frac{1}{N+1}$ .

Notons aussi  $Z_i = \begin{pmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,N} \end{pmatrix}$ . On peut donc écrire le système discrétisé de (6.11)-

(6.12) par :

$$\frac{Z_{i+1} - Z_i}{t_h} = A_h \cdot Z_{i+1} + B_h \cdot U_{i+1}, \quad (6.14)$$

où  $A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  de taille  $N \times N$ ,  $B_h = \text{diag}(X_{ind})$  une

matrice diagonale de taille  $N \times N$  avec comme diagonale  $X_{ind} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{pmatrix}$ ,

$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x_i \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $U_{i+1} = \begin{pmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{pmatrix}$  avec  $u_{i,k}$  est valeur choisie pour le contrôle en temps  $t_i$  et au point  $x_k$ .

Par un simple calcul, (6.14) revient à résoudre le système :

$$CZ_{i+1} = Z_i + t_h \cdot B_h \cdot U_i, \quad (6.15)$$

où  $C = Id_{N \times N} - t_h \cdot A_h$ .

Donc, en chaque pas du temps, on inverse la matrice  $C$  pour calculer  $Z_{i+1}$  par les valeurs de  $Z_i$  et  $U_i$ .

Notons  $X$  une variable qui contient tous les valeurs  $u_{i,k}$ ,  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et le temps final  $t_f$ . On rappelle que le principe de la méthode directe est de minimiser une fonction  $F(X)$  qui rend  $t_f$  avec les contraintes sur le contrôle, i.e.,  $\|U_i\|_{l^2(\llbracket \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rrbracket)} \leq 1$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et avec la condition finale :  $Z(t_f) = Z^f$ .

On considère ici la condition initiale et la condition finale comme :  $z_0(x) = \sin(\pi x)$  et  $z^f = 0$ . On prend aussi  $d = N$  dans la simulation.

On crée en matlab une fonction **chaleur.m** qui prend  $N$  comme variable et qui utilise **fmincon.m** pour minimiser la fonction **principal.m** sous les contraintes décrites dans la fonction **contrainte.m** (voir l'Annexe A.3).

On présente les résultats obtenus dans l'Annexe B.3. Le temps final numérique est environ 0.6. On voit aussi l'évolution de la norme  $l^2$  du contrôle en temps, qui n'est pas toujours égale à 1. Théoriquement, le contrôle devrait posséder la propriété

de bang-bang. Ceci implique que la solution obtenue n'est peut-être pas bonne même si la condition finale est bien satisfaite pour tout  $N$ .

On choisit Euler implicite pour la discrétisation en temps car concernant les résultats obtenus par la méthode d'Euler explicite, si on augmente la taille de la discrétisation, on n'arrive pas de trouver un minimum qui satisfait la condition finale. Cela vient probablement de l'instabilité du schéma numérique de la méthode d'Euler explicite.



## Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'étudier des résultats liant le problème de contrôle en temps optimal avec le principe du maximum et la propriété de bang-bang. Pour des systèmes possédant la contrôlabilité exacte, le principe du maximum est une condition nécessaire de l'optimalité en temps. Pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal, il faut examiner si le système possède un type de contrôlabilité approchée.

Quant aux systèmes qui ne possèdent pas la contrôlabilité exacte, on tente d'établir un type de  $L^\infty$ -contrôlabilité à zéro en s'appuyant sur la technique de Lebeau-Robbiano pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal.

Le principe du maximum nous donne la possibilité de construire des algorithmes numériques pour résoudre le problème de contrôle en temps optimal. On s'intéresse aussi dans la dernière section au lien entre les problèmes de contrôle en temps optimal et de contrôle en norme optimale qui nous permet d'estimer le module de continuité de la fonction temps minimal.

On discute par la suite de quelques problèmes ouverts qui sont liés avec le sujet de notre mémoire :

- \* Est-ce que le principe du maximum est toujours valable pour un système qui ne possède pas la contrôlabilité exacte ?
- \* Considérons par exemple l'équation des plaques :

$$\ddot{z}(x, t) = -i\Delta^2 z(x, t) + \chi_O(x)u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (6.16)$$

$$z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (6.17)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $O$  est un ensemble ouvert non vide de  $\Omega$ .

Ce système est exactement contrôlable mais semble ne pas posséder la contrôlabilité approchée sur tout ensemble  $e \subset [0, t]$  de mesure positive. Est-ce qu'un contrôle en temps optimal possède toujours la propriété de bang-bang ? Est-ce qu'il existe donc d'autres moyens pour établir la propriété de bang-bang pour un système exactement contrôlable ?

- \* Le problème de contrôle en temps optimal où on cherche un contrôle dans  $L^1([0, t]; U)$ , un espace de Banach non réflexif, est un sujet intéressant mais qui semble difficile.

Les méthodes que l'on a utilisé ne sont pas valables dans le cadre d'un espace de Banach, est-ce qu'on peut toujours obtenir le principe du maximum et la propriété de bang-bang pour un contrôle en temps optimal ?

- \* Dans le livre de H.O. Fattorini [11], en considérant  $B = Id$ , on voit beaucoup de résultats concernant le lien entre les problèmes de contrôle en temps optimal et en norme optimale. Par exemple, dans ce cas, un contrôle en temps optimal est nécessairement en norme optimale. Le lien entre les deux problèmes dans le cas  $B \neq Id$  peut-être un sujet très intéressant.

- \* On a vu dans la section V, comment obtenir une majoration de la fonction norme minimale  $\mathcal{E}_\infty^*$  par l'étude du coût du contrôle. Est-ce qu'il existe d'autres pistes pour majorer  $\mathcal{E}_\infty^*$  au lieu de passer par l'étude de  $\|u_{T,z_0}^*\|_{L^\infty([0,t];U)}$  où  $u_{T,z_0}^*$  est l'unique solution du problème  $L^2$ -norme minimale en temps  $T > 0$  et avec un point initial  $z_0 \in X$  ?

En résumé, ce mémoire consacre la plus grande partie à présenter des résultats théoriques. L'étude de la convergence et de la stabilité des méthodes numériques est aussi un domaine intéressant pour le problème de contrôle en temps optimal.

# Appendices

## A Annexe 1- Programmation en matlab

### (1) Méthode directe - Dimension finie

**function [tf,U] = methodedirecte(N)**

% N : le nombre de discrétisation en temps, tf : le temps final, U : les valeurs du contrôle.

A=[0 1;0 0]; B=[0;1]; n=2; m=1; tf=5;

% n : la dimension de l'espace X, m : la dimension de l'espace U.

U=2\*rand(m,N)-1; X0=[reshape(U,N\*m,1);tf];

z0=zeros(n,1); zf=[0;-1]; % z0 : l'état initial, zf : l'état final souhaité.

options=optimset('Algorithm','sqp');

% On choisit la méthode sqp comme méthode d'optimisation non linéaire.

[X,tf]=fmincon(@principal,X0,[],[],[],[],[],@X) contrainte(X,A,B,m,N,z0,zf),options);

% Dessins

U=X(1:(end-1)); U=reshape(U,m,N); z=zeros(n,N+1); h=tf/N;

for i=1:N

z(:,i+1)=z(:,i)+h\*(A\*z(:,i)+B\*U(:,i));

end

subplot(121); plot(z(1,:),z(2,:), 'r'); axis square;

subplot(122); plot(linspace(0,tf,N),U, 'r'); axis square;

**function [c,ceq] =contrainte(X,A,B,m,N,z0,zf)**

tf=X(end); U=X(1:(end-1)); U=reshape(U,m,N); h=tf/N;

c=[sum(abs(U).^m,1).^(1/m)-1,-tf]; z=z0;

% c représente la contrainte qu'en chaque instant  $t_i$ ,  $\|U(t_i)\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$  et  $tf \geq 0$ .

for i=1:N

z=z+h\*(A\*z+B\*U(:,i)); % On utilise le schéma d'Euler explicite pour résoudre le système.

end

ceq= z-zf;

% ceq représente la condition finale.

**function t = principal(X)**

t=X(end);

**(2) Méthode de tir - Dimension finie**

**function [r,tf,u]= methodeindirecte**

z0=[0;0]; A=[0 1; 0 0]; B=[0;1]; p0=[1;1]; tf=100;

% On prend des valeurs initiales de p(0) et de tf.

n=2; m=1; zf=[0;-1];

% n : la dimension de l'espace X, m : la dimension de l'espace U.

options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');

[potf,r]=fsolve(@(X) F(X,A,B,z0,zf,n,m),[p0;tf],options);

% On utilise fsolve.m pour trouver un zéro de F.

% Dessin

tf=potf(end); p0=potf(1:end-1); x0=[z0;p0];

options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);

[Tx,x]=ode113(@(t,x) state(t,x,A,B,n,m), [0 tf], x0,options);

x=x'; z=x(1:n,:); p=x((n+1):end,:); q=B'\*p; u=zeros(m,length(Tx));

for i=1:length(Tx)

u(:,i)=q(:,i)/norm(q(:,i),m);

end

subplot(121); plot(z(1,:),z(2,:), 'r'); axis square;

subplot(122); plot(Tx,u, 'r'); axis square;

**function res =F(X,A,B,z0,zf,n,m)**

% F rend la distance entre z(tf) et zf.

tf=X(end); p0=X(1:(end-1)); x0=[z0;p0];

options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);

[Tx,x]=ode113(@(t,x) state(t,x,A,B,n,m), [0;tf], x0,options);

% x représente les valeurs de z et p en chaque instant. On utilise ode113 pour résoudre le problème de Cauchy (6.3).

res = x(end,1:n)'-zf;

**function r =state(t,x,A,B,n,m)**

z= x(1:n); p= x((n+1):end);

q=B'\*p; u=q/norm(q,m); % On rappelle que  $u(t) = \frac{B^*p(t)}{\|B^*p(t)\|_{\mathbb{R}^m}}$  si il est en temps optimal.

r=[(A\*z+B\*u); (-A'\*p)];

**(3) Méthode directe - Dimension infinie**

```

function [tf,U] = chaleur(N)
tf=10; d=N; u=2*rand(N,d)-1; h=1/(N+1);

% N : nombre de discrétisation en espace, d : nombre de discrétisation en temps.
d0 = -2/h^2 * ones(N,1); d1 = 1/h^2 * ones(N,1);
A = spdiags([d1 d0 d1], -1 : 1, N, N); % A représente la discrétisation de l'opérateur laplacien.
x = linspace(h, 1-h, N); xind = (x >= 1/3).*(x <= 2/3); B = spdiags(xind', 0, N, N);

% xind représente la discrétisation de la fonction indicatrice  $\chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$  et B est la matrice diagonale comme
diagonale xind.

u = B * u; X0=[reshape(u,d*N,1);tf]; T = linspace(0,tf - th,d);
options=optimset('Algorithm','interior-point','MaxFunEvals',10000000,'MaxIter',100000);

% On choisit la méthode "point intérieur" comme méthode d'optimisation non linéaire.
[X,f]=fmincon(@principal,X0,[],[],[],[],[],@X contrainte(X,A,B,d,N),options);

% Dessin
tf=X(end); d=(length(X)-1)/N; U=reshape(X(1:end-1),N,d);
z0 = sin(pi * linspace(h, 1 - h, N)'); z=zeros(N,d+1); z(:,1)=z0;
th = tf/d; C = eye(N, N) - th * A; normcontrol=zeros(d,1);
for k=1:d
    z(:,k+1) = C\((z(:,k) + th * B * U(:,k))); normcontrol(k)=norm(U(:,k),2);
end
subplot(121); plot([0 x 1],[0;z(:,end);0],'r',[0 x 1],zeros(N+2,1),'b'); axis square;
subplot(122); plot(T,normcontrol,'r');axis square;

function [c,ceq] =contrainte(X,A,B,d,N)
tf=X(end); U=X(1:end-1); U=reshape(U,N,d); th=tf/d; h=1/(N+1); U=B*U;
c = [sum(abs(U).^2,1).^(1/2) - 1, -tf];

% c représente la contrainte sur le contrôle :  $\|U(t_i, \cdot)\|_{l^2([\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]}) \leq 1$  et que  $tf > 0$ .
z0 = sin(pi * linspace(h, 1 - h, N)'); C = eye(N,N)-th*A;

% On considère la condition initiale :  $z_0(x) = \sin(x)$ .
for k=1:d
    z0 = C\((z0 + th * B * U(:,k))); % On choisit le schéma d'Euler implicite pour discrétiser le système.
end;
ceq= z0- zeros(N,1); % ceq représente la condition finale  $z(tf)=z_f=0$ .

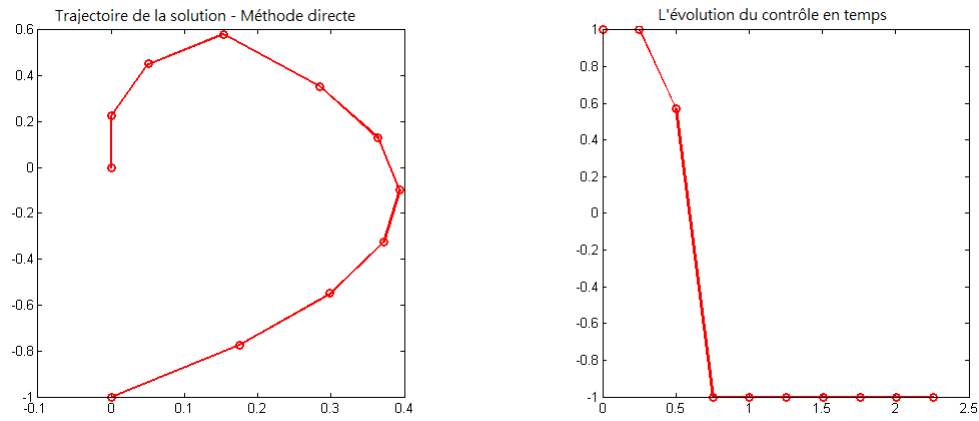
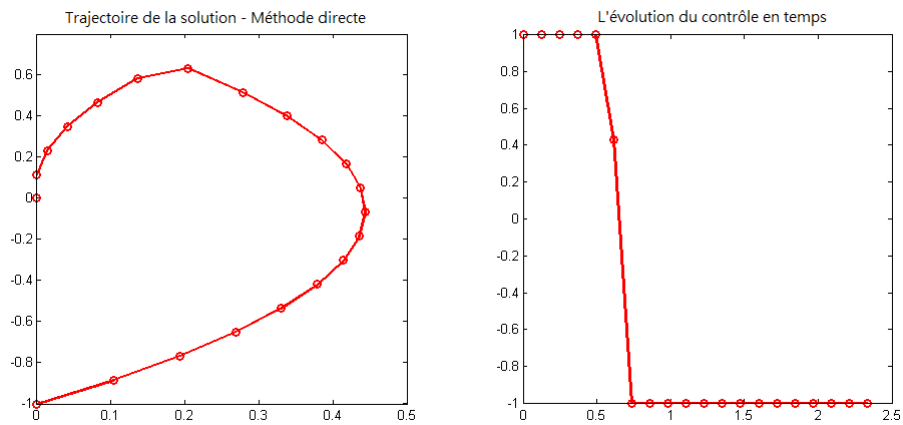
```

## B Annexe 2- Simulation numérique

### (1) Méthode directe -dimension finie

| $N$   | 10     | 20     | 40     | 100    |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| $t_f$ | 2.2581 | 2.3333 | 2.3729 | 2.3973 |

TABLE 1 – temps final numérique

FIGURE B.1 –  $N=10$ FIGURE B.2 –  $N=20$

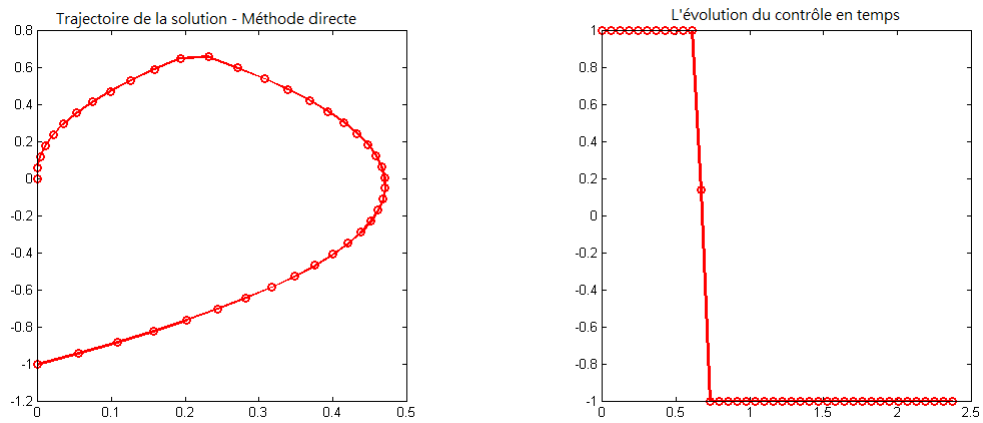


FIGURE B.3 –  $N=40$

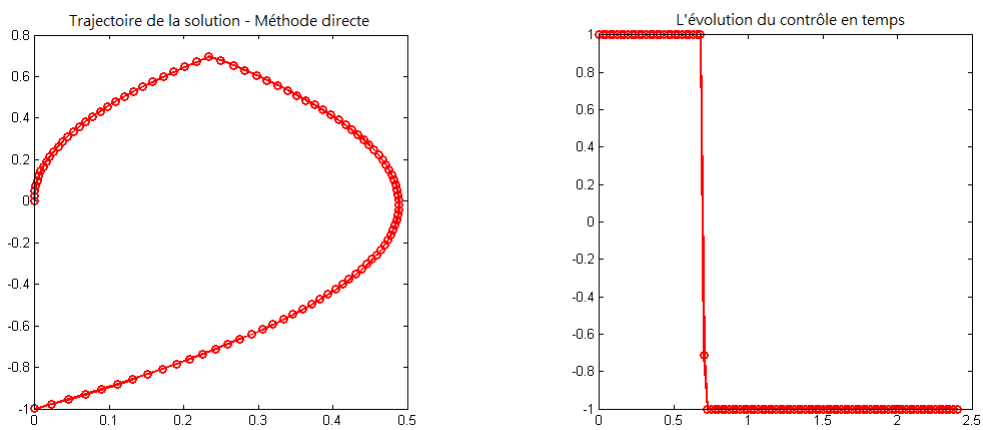
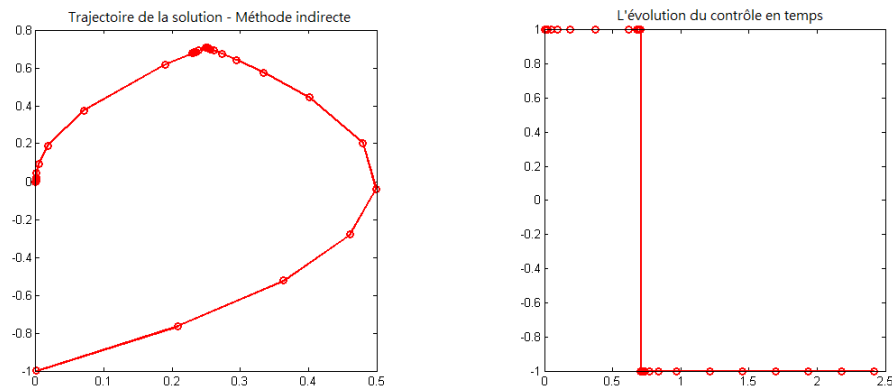
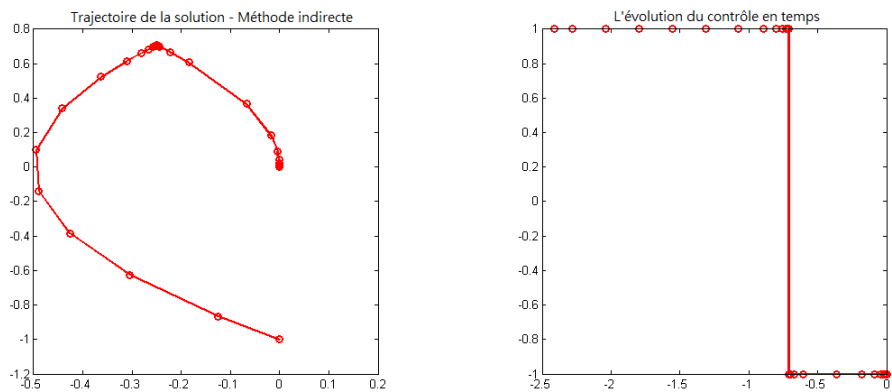


FIGURE B.4 –  $N=100$

## (2) Méthode de tir -dimension finie

|                                          | $t_f$   |
|------------------------------------------|---------|
| $P0_{init} = [1; 1], t_{f_{init}} = 5$   | 2.4142  |
| $P0_{init} = [1; 1], t_{f_{init}} = 100$ | -2.4142 |

TABLE 2 – temps final numérique

FIGURE B.5 –  $P0_{init} = [1; 1], t_{f_{init}} = 5$ FIGURE B.6 –  $P0_{init} = [1; 1], t_{f_{init}} = 100$

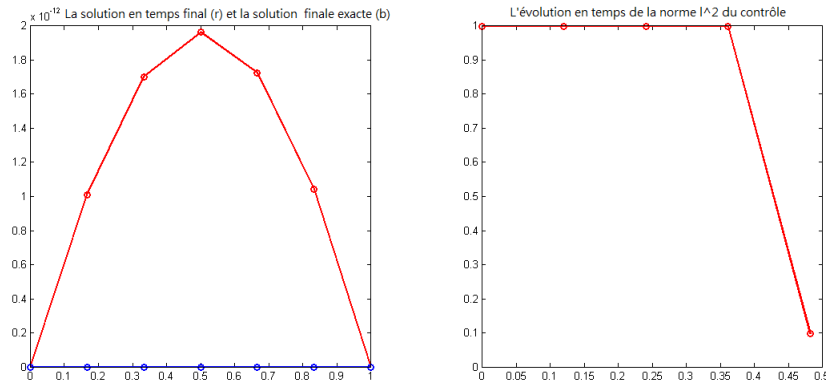
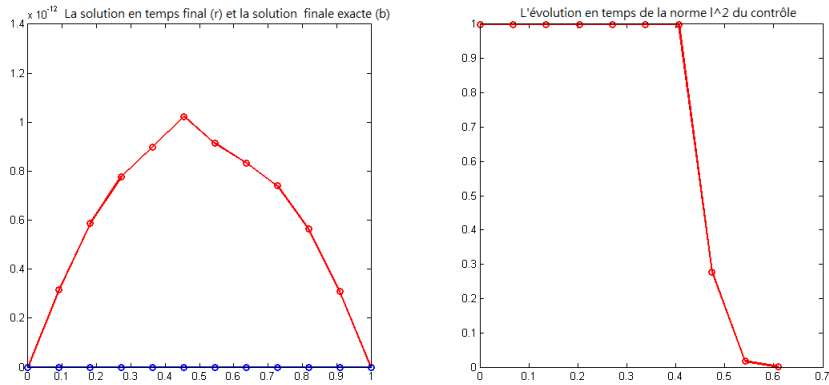


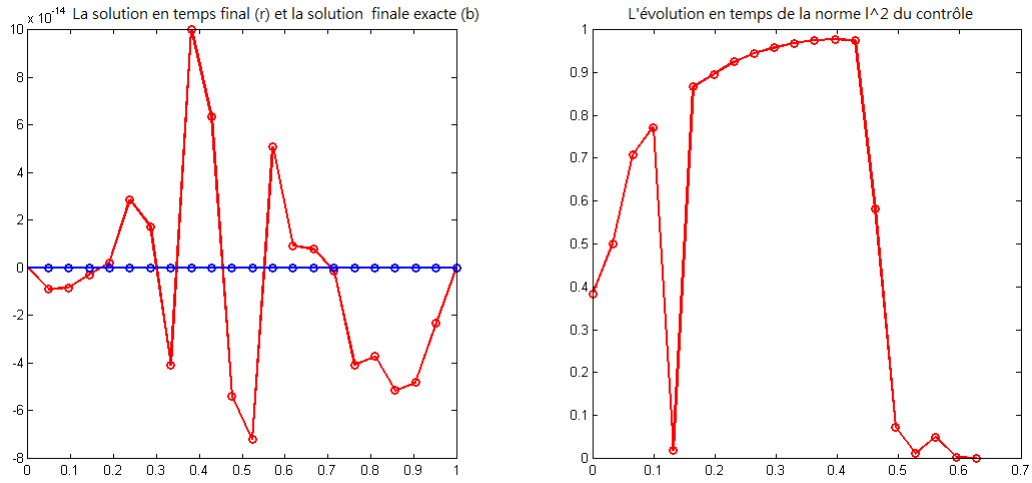
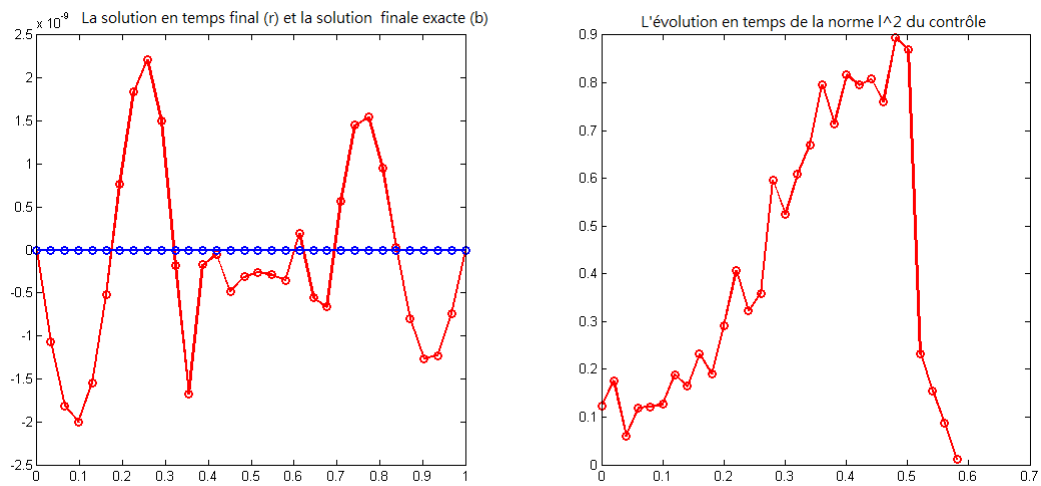
(3) Méthode directe - l'équation de la chaleur sur  $[0, 1]$ 

| $N$   | 5      | 10     | 20     | 30     |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| $t_f$ | 0.6029 | 0.6769 | 0.6600 | 0.6010 |

TABLE 3 – temps final numérique

Dans la suite, on présente dans la figure de gauche la solution finale  $z(t_f)$  obtenue par la méthode directe (ligne rouge) et la solution finale exacte  $z^f = 0$  (ligne bleue). Dans la figure de droite, on présente l'évolution de  $l^2$ -norme du contrôle en temps.

FIGURE B.7 –  $N=5$ FIGURE B.8 –  $N=10$

FIGURE B.9 –  $N=20$ FIGURE B.10 –  $N=30$

## Bibliographie

- [1] V. Barbu and Th. Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces*, volume 10 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, romanian edition, 1986.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5) :1024–1065, September 1992.
- [3] R. Bellman, I. Glicksberg, and O. Gross. On the “bang-bang” control problem. *Quart. Appl. Math.*, 14 :11–18, 1956.
- [4] J. T. Betts. *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*, volume 19 of *Advances in Design and Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edition, 2010.
- [5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [6] O. Carja. On constraint controllability of linear systems in Banach spaces. *J. Optim. Theory Appl.*, 56(2) :215–225, 1988.
- [7] O. Carja. The minimal time function in infinite dimensions. *SIAM J. Control Optim.*, 31(5) :1103–1114, 1993.
- [8] M. Diehl, H. G. Bock, H. Diedam, and P.-B. Wieber. Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control. In *Fast motions in biomechanics and robotics*, volume 340 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 65–93. Springer, Berlin, 2006.
- [9] R. G. Douglas. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 :413–415, 1966.
- [10] H. O. Fattorini. Time-optimal control of solutions of operational differential equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control*, 2 :54–59, 1964.
- [11] H. O. Fattorini. *Infinite dimensional linear control systems*, volume 201 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. The time optimal and norm optimal problems.
- [12] R. Fletcher. *Practical methods of optimization. Vol. 1*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1980. Unconstrained optimization, A Wiley-Interscience Publication.
- [13] R. Fletcher. *Practical methods of optimization. Vol. 2*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1981. Constrained optimization, A Wiley-Interscience Publication.

- [14] R. V. Gamkrelidze. Discovery of the maximum principle. *J. Dynam. Control Systems*, 5(4) :437–451, 1999.
- [15] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*, volume 5 of *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [16] F. Gozzi and P. Loreti. Regularity of the minimum time function and minimum energy problems : the linear case. *SIAM J. Control Optim.*, 37(4) :1195–1221 (electronic), 1999.
- [17] A. Ionescu Tulcea and C. Ionescu Tulcea. *Topics in the theory of lifting*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 48. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [18] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d’une plaque carrée. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(14) :759–762, 1988.
- [19] V. Komornik. On the exact internal controllability of a Petrowsky system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(4) :331–342, 1992.
- [20] I. Lasiecka and R. Triggiani. Uniform energy decay rates of hyperbolic equations with nonlinear boundary and interior dissipation. *Control and Cybernetics*, 37(4) :935–969, 2008.
- [21] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l’équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(1-2) :335–356, 1995.
- [22] G. Lebeau and E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelectricity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141(4) :297–329, 1998.
- [23] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris, 1968.
- [24] J. Lohéac and M. Tucsnak. Maximum principle and bang-bang property of time optimal controls for Schrödinger type systems. 2012.
- [25] S. Micu, I. Roventa, and M. Tucsnak. Time optimal boundary controls for the heat equation. November 2011.
- [26] L. Miller. The control transmutation method and the cost of fast controls. *SIAM J. Control Optim.*, 45(2) :762–772 (electronic), 2006.
- [27] L. Miller. On the controllability of anomalous diffusions generated by the fractional Laplacian. *Math. Control Signals Systems*, 18(3) :260–271, 2006.
- [28] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. Translated from the Russian by K. N. Trirogoff; edited by L. W. Neustadt. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York-London, 1962.

- [29] T. I. Seidman and J. Yong. How violent are fast controls? II. *Math. Control Signals Systems*, 9(4) :327–340, 1996.
- [30] E. D. Sontag. *Mathematical control theory*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Deterministic finite-dimensional systems.
- [31] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*, volume 12 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. Translated from the German by R. Bartels, W. Gautschi and C. Witzgall.
- [32] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations. *J. Differential Equations*, 243(1) :70–100, 2007.
- [33] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. On the null-controllability of diffusion equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 17(4) :1088–1100, 2011.
- [34] E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].
- [35] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [36] O. von Stryk and R. Bulirsch. Direct and indirect methods for trajectory optimization. *Ann. Oper. Res.*, 37(1-4) :357–373, 1992. Nonlinear methods in economic dynamics and optimal control (Vienna, 1990).
- [37] G. Wang.  $\mathcal{L}^\infty$ -null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4) :1701–1720, 2008.
- [38] J. Zabczyk. *Mathematical control theory : an introduction*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [39] A. Zygmund. *Trigonometrical series*. Chelsea Publishing Co., New York, 1952. 2nd ed.

