



**HAL**  
open science

# Modélisation des structures sensibles aux effets du second ordre

C. Mercier

► **To cite this version:**

C. Mercier. Modélisation des structures sensibles aux effets du second ordre. Structures. 2016. hal-02346423

**HAL Id: hal-02346423**

<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-02346423v1>

Submitted on 5 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Syndicat Français de l'Echafaudage,  
du Coffrage et de l'Etalement**

# Modélisation des structures sensibles aux effets du second ordre

---

STAGE DE RECHERCHE A L'IJL POUR LE COMPTE DU SFECE

Charlotte MERCIER

UNIVERSITE DE LORRAINE | MASTER GENIE CIVIL – SME - PARCOURS STRUCTURES – 2EME ANNEE  
ANNEE UNIVERSITAIRE 2015/2016



## Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique et les intervenants professionnels responsables de la formation Master Génie Civil à l'Université de Lorraine, pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Je tiens également à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt qu'elles m'ont fait vivre durant ces six mois de stage :

Pr Abdel KHELIL, enseignant chercheur et tuteur référent au sein de l'IUT Nancy Brabois, lieu où s'est déroulé mon stage. Ses nombreux conseils, sa disponibilité, son expérience et son aide m'ont été d'une grande utilité tout au long de mon stage.

M. Alain PAMIES, pour sa grande disponibilité, pour m'avoir conseillé de manière avisée, avoir suivi avec attention tous mes travaux.

A l'ensemble des membres du groupe calcul du SFCE pour leur accueil et leur disponibilité.

# Sommaire

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Preface</b>	<b>5</b>
<b>1. Présentation du SFECE</b>	<b>6</b>
<b>2. Méthodes de prises en compte des imperfections initiales de la structure</b>	<b>8</b>
2.1. Imperfections structurales	8
2.2. Méthode de l'Eurocode 3 : imperfections générées par la déformation de la structure	8
2.3. Méthode de l'Eurocode 3 : charges équivalentes	10
2.4. Méthode de l'Eurocode 3 §5.3.2 (11) : imperfection unique	11
2.5. Méthode de l'Eurocode 9 : imperfection unique	13
2.6. Méthode des sinus	14
<b>3. Comparaison des méthodes de prises en compte des imperfections</b>	<b>15</b>
3.1. Données	15
3.2. Détermination des effets du second ordre	17
3.2.1. <i>Méthode de l'Eurocode 3 : imperfections entrées manuellement</i>	17
3.2.2. <i>Méthode de l'Eurocode 3 : charges équivalentes</i>	20
3.2.3. <i>Méthode alternative de l'Eurocode 3 (paragraphe 5.3.2 (11))</i>	22
3.2.4. <i>Méthode de l'Eurocode 9 (paragraphe 5.3.2 (11) NOTE 3)</i>	26
3.2.5. <i>Méthode des sinus</i>	30
3.3. Récapitulatif des résultats obtenus	34
<b>4. Critères d'endommagement d'une structure chargée verticalement</b>	<b>35</b>
4.1. Rappels des critères existants	35
4.2. Application au portique 4x3m	35
4.2.1. <i>Données</i>	35
4.2.2. <i>Calcul de la structure avec imperfections initiales</i>	39
4.2.3. <i>Calcul de la structure sans imperfections initiales</i>	40
4.3. Résultats des critères d'endommagement existants en fonction du niveau de chargement	41
4.4. Définition d'un nouveau coefficient de flambement $\chi^*$ et calcul d'endommagement	42
4.5. Récapitulatif des résultats obtenus sous charges verticales uniquement	43
<b>5. Critères d'endommagement d'une structure chargée verticalement &amp; horizontalement</b>	<b>46</b>
5.1. Critères d'endommagement étudiés	46
5.2. Application au portique 4x3m	47
5.2.1. <i>Données</i>	47
5.2.2. <i>Calcul de la structure avec imperfections initiales</i>	51
5.2.3. <i>Calcul de la structure sans imperfections initiales</i>	53
5.3. Résultats des critères d'endommagement sous charges verticales et horizontales	57
<b>Conclusion</b>	<b>60</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>
<b>Annexes</b>	<b>62</b>



## Résumé

Le présent rapport s'inscrit dans l'objectif d'adapter les Eurocodes aux structures d'échafaudages et d'étaisements, objectif de la collaboration entre le SFECE (Syndicat Français de l'Echafaudage, du Coffrage et de l'Etaiement) et l'Université de Lorraine. Une brève présentation du SFECE est présentée dans la première partie de ce rapport.

L'analyse d'une structure passe par sa modélisation et la mise en place d'hypothèses qui doivent correspondre au mieux au comportement réelle de la structure. Pour modéliser la structure, il est nécessaire de déterminer les sollicitations qui lui sont appliquées. On réalise donc une analyse au premier ordre ou au second ordre, selon l'influence de la déformation de la géométrie de la structure. En effet, lorsque les effets de la déformation de la géométrie augmentent les effets des actions, il est nécessaire de les prendre en compte, et donc d'effectuer une analyse au second ordre. Pour cela, l'Eurocode 3 définit un coefficient critique,  $\alpha_{cr}$ , qui permet de savoir si les déformations de la géométrie peuvent être négligées ou non.

On peut ainsi constater que pour les structures de faible rigidité, telles les structures d'étaisement et d'échafaudage, présentant un coefficient critique faible ( $\alpha_{cr} < 3$ ), les défauts géométriques de la structure engendrent des effets du second ordre importants, qui doivent donc être pris en compte. Le problème est de définir correctement ses défauts géométriques ainsi que la manière de les prendre en compte dans l'analyse. On peut différencier deux grandes approches différentes, qui sont :

- les méthodes conventionnelles qui sont basées sur la définition d'une imperfection globale et d'une imperfection locale
- les méthodes alternatives qui sont basées sur la définition d'une imperfection unique de même allure que la déformée critique de la structure.

Ainsi, dans la seconde partie du rapport, les différentes manières pour calculer les imperfections géométriques vont être présentées. Il s'agira ensuite de comparer ces différentes méthodes en les appliquant à une structure, afin d'en sortir les avantages et inconvénients de chacune d'elles et savoir quelle est la méthode à adopter afin de refléter au mieux le comportement réel de la structure.

Après s'être intéressé à la manière de prendre en compte ses imperfections géométriques, il s'agira de déterminer la manière d'analyser ses structures. Pour cela, on comparera les critères d'endommagement proposés par l'Eurocode 3. Il s'agira également de recherche une méthode pour substituer, à la mise en place de l'imperfection initiale, une évaluation raisonnable et sécuritaire de l'endommagement. Les calculs seront ainsi menés pour une structure chargée verticalement, en partie 4 du rapport ; et pour une structure chargée verticalement et horizontalement, en partie 5. Cela permettra donc d'en sortir différents critères permettant de calculer l'endommagement de la structure reflétant au mieux la réalité, tout en étant sécuritaire.

## Preface

This report is part of the objective to adapt the Eurocodes to the scaffolding and shoring structures, aim of the collaboration between the SFECE and the University of Lorraine. A short presentation of the SFECE is carried out in the first part of this report.

Both an appropriate model and assumptions that reflect the behavior of the structure are necessary to design a structure. The stresses can be determined by analyzing the first or the second order according to the effects of the deformation of the structure. Indeed when the effects of the deformation increase the effects of loads, it is necessary to take them into account and so to carry out a second order analysis. The Eurocode 3 defines the critical coefficient  $\alpha_{cr}$  which enables to determine the analysis method: first or second order.

We can see that for low rigidity structures such as the scaffolding and shoring structures the critical coefficient  $\alpha_{cr}$  is often lower than 3. So the imperfections generate significant second order effects which must be taken into account. The main issue is to define the imperfections and the method to take them into account in the analysis. We can differentiate two different approaches:

- conventional methods based on the definition of both a global imperfection and a local imperfection
- alternative methods based on a single imperfection of same shape that the deformed critical of the structure.

Thus in the second part of this report the different methods to define the imperfections will be presented. Then, in the next part, we will compare these methods thanks to the study of a frame structure. This will allow to know the advantages and the drawbacks of each methods and thus to know the method that best reflects the behavior of the structure.

After the study of the way to take into account the imperfections, we will determine the way to analyze structures. We will compare the different structural damage requirements suggested by the Eurocode 3. We will also search a method that enables to substitute for the establishment of an initial imperfection, both a safe and reasonable assessment of the structural damage. We will study a vertically loaded structure in the fourth part and a vertically and horizontally loaded structure in the fifth part. Thus, we will define different structural damage requirements that reflect the real damage of a structure with a safety margin.

## 1. Présentation du SFECE

Le Syndicat Français de l'Echafaudage, du Coffrage et de l'Etalement (SFECE), autrefois appelé le Syndicat des professionnels de l'échafaudage, a été créé en 1967. Il est rattaché à la Fédération Française du Bâtiment (FFB). Il regroupe des professionnels de différents secteurs d'activités, à savoir :

- l'échafaudage,
- le coffrage et l'étalement,
- l'accès motorisé.

Le SFECE compte aujourd'hui plus de 125 adhérents en France.

### Objectifs et missions du SFECE

Son objectif principal est d'accompagner et de soutenir les professionnels qu'il représente, en défendant leurs intérêts communs et en valorisant leurs métiers. Cela passe donc par la défense et la promotion des métiers, des règles de l'art et de la sécurité des secteurs d'activités qu'il regroupe.

Les missions principales du SFECE sont les suivantes :

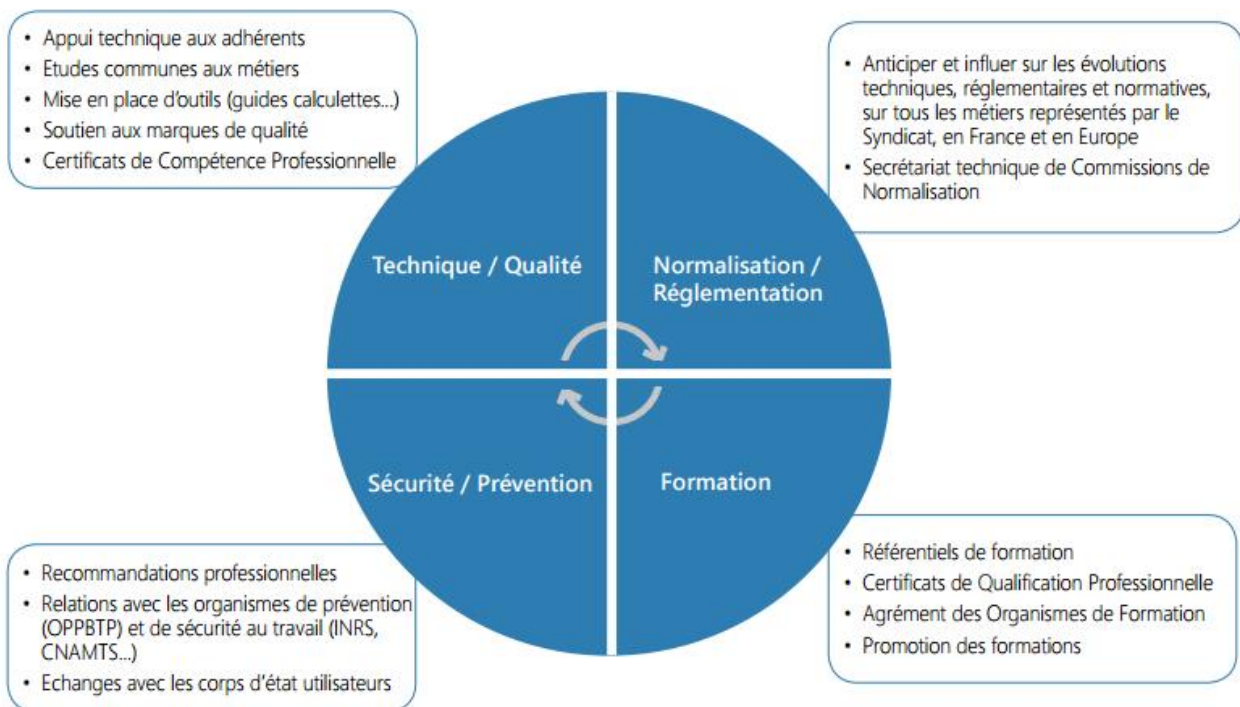


Figure 1 - Les missions du SFECE

### Organisation du SFECE

Le SFECE se répartit de la manière suivante :

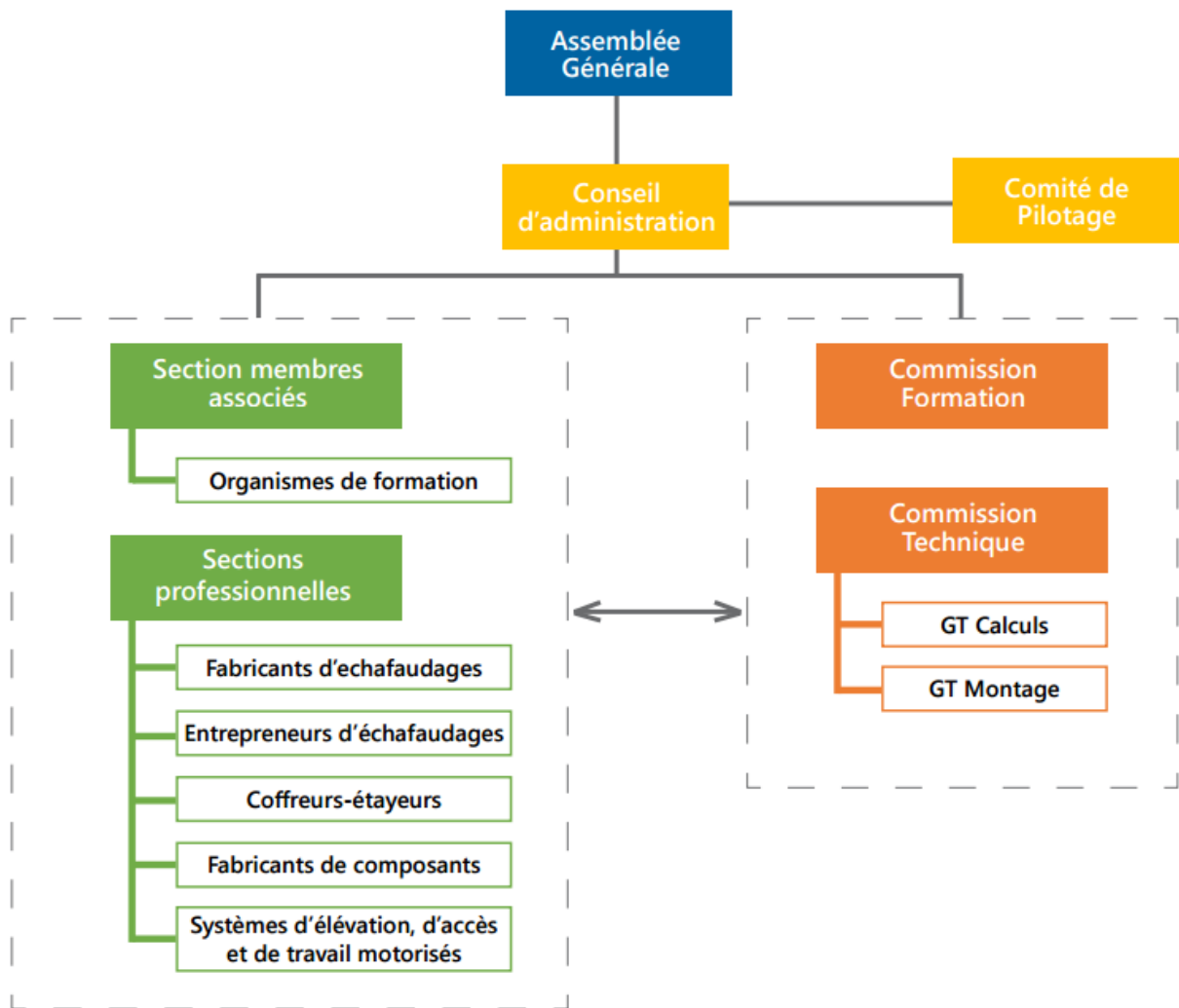


Figure 2 - Organisation du SFECE

Les actions du SFECE vont donc être lancées par le conseil d'administration puis suivi et coordonné par le comité de pilotage.

Ces actions sont ensuite menées par les sections ou par des commissions transversales. Ces commissions transversales sont au nombre de deux :

- une commission formation, qui a pour rôle de mettre en place la politique de formation du syndicat
- une commission technique, qui a pour rôle de traiter de toutes les problématiques techniques, telles que le calcul des échafaudages, les règles de montage...

Cette commission technique est composée de deux groupes de travail, dont le groupe de travail « Calculs », animé par M. DI SALVO. C'est au sein de ce groupe que j'ai eu l'occasion de travailler durant mon stage.

L'objectif de ce groupe est d'adapter les Eurocodes aux structures d'échafaudages et d'étaiements. C'est en vue de cet objectif qu'une collaboration a été mise en place entre le SFECE et l'Université de Lorraine.

## 2. Méthodes de prises en compte des imperfections initiales de la structure

### 2.1. Imperfections structurales

Les imperfections structurales d'une structure peuvent être dues à des contraintes résiduelles ou à des imperfections géométriques, comme :

- un défaut de verticalité
- un défaut de rectitude
- un défaut de planéité
- une excentricité des assemblages ...

Pour les structures de faible rigidité, comme les structures d'étaie et d'échafaudage, les imperfections engendrent des effets du second ordre importants, qui doivent donc être pris en compte dans l'analyse structurale.

On peut différencier deux manières pour prendre en compte ces imperfections. Dans chacun de deux cas, deux approches vont permettre de modéliser les imperfections.

- les méthodes conventionnelles basées sur une imperfection globale et une imperfection locale :
  - Méthode de l'Eurocode 3<sup>[1]</sup> basée sur l'application d'une imperfection globale et locale à travers la déformation de la structure lors de sa modélisation.
  - Méthode de l'Eurocode 3 basée sur l'application de charges équivalentes permettant de définir une imperfection globale et locale équivalente à la méthode précédente.
- les méthodes alternatives basées sur une imperfection unique ayant la même allure que la déformée critique de la structure :
  - Méthode alternative de l'Eurocode 3 basée sur la définition d'une imperfection unique à partir de l'expression de la courbure de la déformée critique.
  - Méthode de l'Eurocode 9<sup>[2]</sup> basée sur la définition d'une imperfection unique, comme dans l'Eurocode 3, en utilisant des moments de flexion pour ensuite en déduire une courbure.
  - Méthode des sinus basée sur la définition d'une imperfection unique à partir de l'équation de la déformée critique.

### 2.2. Méthode de l'Eurocode 3 : imperfections générées par la déformation de la structure

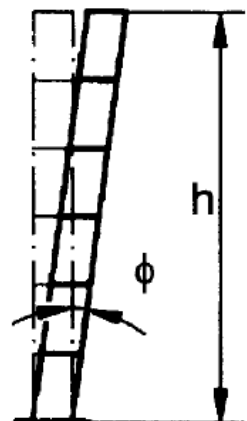
Cette méthode une méthode courante définit dans l'Eurocode 3 qui permet de déterminer les effets du second ordre d'une structure. Pour cela, l'Eurocode 3 définit une imperfection globale de la structure et une imperfection locale des barres. Ces imperfections sont présentées ci-dessous :

#### Imperfection globale

L'imperfection globale représente le défaut initial global d'aplomb de la structure. On matérialise donc l'imperfection globale comme étant un angle  $\Phi$ , où  $\Phi$  est égal à :

$$\phi = \phi_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$$

où : -  $\phi_0 = \frac{1}{200}$



<sup>[1]</sup> AFNOR. Eurocode 3. Calcul des structures en acier. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments. NF EN 1993-1-1. 2005, 100 p.

<sup>[2]</sup> AFNOR. Eurocode 9. Calcul des structures en aluminium. Partie 1-1 : Règles générales. NF EN 1999-1-1. 2007, 222p.

$$- \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} \text{ mais } \frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$$

$$- \alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

- h : hauteur de la structure (m)

- m : nombre de poteaux dans une file, en n'y intégrant que les poteaux supportant une charge verticale  $N_{Ed}$  supérieure ou égale à 50% de la valeur moyenne par poteau dans le plan vertical considéré.

Figure 3 - Imperfection globale

### Imperfection locale

L'imperfection locale correspond au défaut de rectitude des poteaux. On le modélise grâce à une imperfection en arc  $e_0$  des barres. L'Eurocode 3 permet de déterminer les valeurs de  $e_0/L$  à prendre en compte pour l'imperfection locale. Ces valeurs sont données dans le tableau ci-dessous.

Courbes européennes de flambement	Analyse élastique	Analyse plastique
	$e_0/l$	$e_0/l$
$a_0$	1/350	1/300
a	1/300	1/250
b	1/250	1/200
c	1/200	1/150
d	1/150	1/100

Figure 5 - Valeurs de calcul pour l'imperfection locale des barres (source : Eurocode 3)

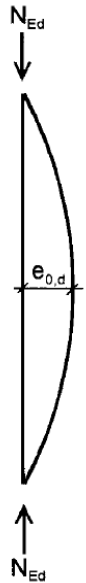


Figure 4 - Imperfection locale

### 2.3. Méthode de l'Eurocode 3 : charges équivalentes

#### Imperfection globale

Le défaut d'aplomb de la structure peut être remplacé un système de forces horizontales équivalentes, introduits pour chaque poteau. Cette force équivalente vaut :  $N_{Ed} \cdot \Phi$ , avec :

$$\phi = \phi_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$$

où : -  $\phi_0 = \frac{1}{200}$

-  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}}$  mais  $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$

-  $\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$

- h : hauteur de la structure (m)

- m : nombre de poteaux dans une file, en n'y intégrant que les poteaux supportant une charge verticale  $N_{Ed}$  supérieure ou égale à 50% de la valeur moyenne par poteau dans le plan vertical considéré.

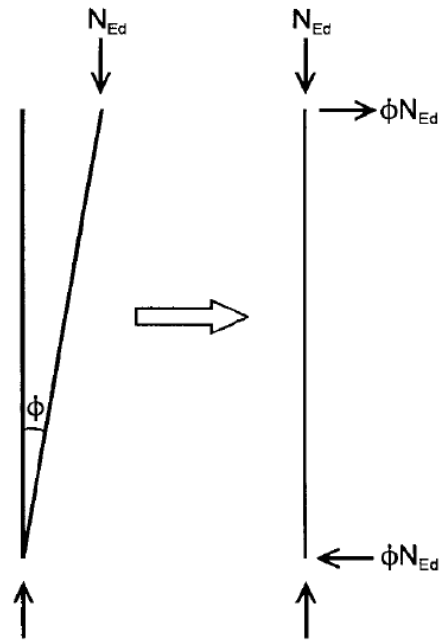


Figure 6 - Charges équivalentes pour l'imperfection globale

#### → Imperfection locale :

D'après l'Eurocode 3, il est possible de matérialiser l'imperfection locale en appliquant une charge répartie et une charge ponctuelle sur chaque poteau.

Les charges sont définies de la manière suivante :

- La charge répartie :  $q = \frac{8 \cdot N_{Ed} \cdot e_0}{L^2}$

- La charge ponctuelle :  $Q = \frac{4 \cdot N_{Ed} \cdot e_0}{L}$

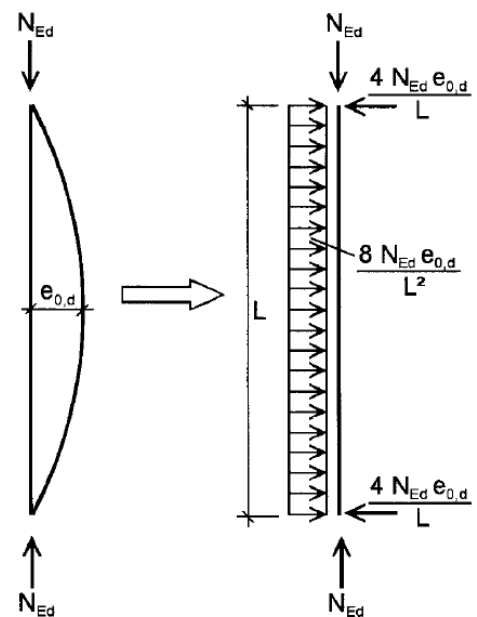


Figure 7 - Charges équivalentes pour l'imperfection locale

## 2.4. Méthode de l'Eurocode 3 §5.3.2 (11) : imperfection unique

Cette méthode définit une imperfection unique, globale et locale, selon l'EC3 §5.3.2 (11), basée sur l'allure de la déformée du mode de flambement élastique et sur un coefficient de normalisation. Le coefficient de normalisation est défini comme étant le rapport suivant :

$$C_{nor} = \frac{\eta_{init,max}}{\eta_{cr,max}}$$

L'Eurocode 3 définit donc la déformée de la manière suivante :

$$\eta_{init} = e_0 \cdot \frac{N_{Rk}}{\bar{\lambda}^2 \left[ EI \cdot \left| \eta_{cr}'' \right|_{max} \right]} \cdot \eta_{cr}$$

$$\text{et : } e_0 = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{W_{el,y}}{A}$$

Avec :

- $\left| \eta_{cr}'' \right|_{max}$  : valeur maximale de la dérivée seconde de  $\eta_{cr}$ . Afin de déterminer cette valeur il est nécessaire de mettre en équation la déformée critique du mode de flambement considéré.
- $\eta_{cr}$  : allure de la déformée du mode de flambement élastique

### Fondements théoriques de l'expression de l'imperfection initiale $\eta_{init,max}$ <sup>[3]</sup> :

L'allure de l'imperfection unique selon l'EC3 §5.3.2 (11) est basée sur l'allure de la déformée critique du 1<sup>er</sup> mode de flambement.

Afin de définir cette imperfection, il est nécessaire d'admettre que la courbure maximale de la déformée critique de la structure doit être identique à la courbure maximale d'une barre de référence. Cette barre de référence a les mêmes caractéristiques géométriques ainsi que la même charge critique que la section critique m de la structure. Ainsi, la longueur de la barre de référence est  $L_{cr,m}$  et l'élançement réduit  $\bar{\lambda}_m$  est :

$$\bar{\lambda}_m = \sqrt{\frac{A_m \cdot f_y}{N_{cr,m}}}$$

Cela conduit donc au fait que le moment, dans la section critique m de la structure sollicitée par un effort de compression, dû à l'imperfection initiale, est identique au moment dans la barre de référence déformée avec l'imperfection  $e_0$ .

→ Expression du moment de flexion dans la section critique m de la structure sollicitée par un effort de compression en présence de l'imperfection initiale  $\eta_{init}$  :

L'endommagement de la section critique m d'une structure sollicitée par un effort de compression N, basé sur un critère de résistance élastique linéaire, s'écrit :

$$E_m = \frac{N_{Ed,m}^II}{N_{Rd,m}} + \frac{M_{\eta_{init},m}^II}{M_{Rd,m}} = E_{N,m} + E_{M,\eta_{init},m}$$

<sup>[3]</sup> E. CHLADNY, M. STUJBERO. *Frames with unique global and local imperfection in the shape of the elastic buckling mode. Partie 1.* 2013.



- où :
- $E_{N,m} = \frac{N_{Ed,m}^{II}}{N_{Rd,m}}$  : endommagement dû à l'effort normal de compression N
  - $E_{M,\eta_{init,m},m} = \frac{M_{\eta_{init,m},m}^{II}}{M_{Rd,m}}$  : endommagement dû à l'imperfection initiale  $\eta_{init}$  et à la charge de compression dans la section critique.

Le moment  $M_{\eta_{init,m},m}^{II}$ , moment dans la section critique dû à l'imperfection initiale et à la charge de compression, calculé au second ordre, est tel que :

$$M_{\eta_{init,m},m}^{II} = EI_m \eta_{init,m}'' \times \frac{1}{\alpha_{cr} - 1}$$

Cependant, on peut écrire :  $\eta_{init,m} = \frac{\eta_{init,max}}{|\eta_{cr}|_{max}} \times \eta_{cr,m}$  → Règle de trois entre la section critique m et la section qui abrite la déformée critique maximale

d'où :  $\eta_{init,m}'' = \frac{\eta_{init,max}}{|\eta_{cr}|_{max}} \times \eta_{cr,m}''$

On a donc :

$$M_{\eta_{init,m},m}^{II} = \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} \times \frac{\eta_{init,max}}{|\eta_{cr}|_{max}} \times [EI \eta_{cr,m}'' ] \quad (1)$$

→ Expression du moment dans la barre de référence déformée avec l'imperfection  $e_0$  :

Le moment maximale dans la barre de référence, déformée avec l'imperfection  $e_0$ , et sollicitée par le même effort normal  $N_{Ed,m}$  que l'effort normal dans la section critique de la structure, s'écrit :

$$M_{\eta_{init,m},m}^{II} = EI_m \left[ e_0 \times \sin \left( \frac{\pi x}{L_{cr,m}} \right) \right]_{max} \times \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} = EI_m \times e_0 \times \frac{1}{\alpha_{cr} - 1}$$

On peut également écrire :

$$M_{\eta_{init,m},m}^{II} = N_{Ed,m} \times e_0 \times \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1} \quad (2)$$

avec : -  $N_{Ed,m}$  : effort normal de compression dans la section critique m

-  $e_0$  : déformée de la barre de référence :

$$e_0 = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_0) M_{el,Rk}}{N_{Rk}} = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}_0) W_{el}}{A}$$

→ Expression de l'imperfection initiale  $\eta_{init}$  :

D'après les expressions (1) et (2), on a donc :

$$\frac{1}{\alpha_{cr} - 1} \times \frac{\eta_{init,max}}{|\eta_{cr}|_{max}} \times [EI\eta_{cr}'' ]_m = N_{Ed,m} \times e_0 \times \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}$$

On en déduit :

$$\eta_{init,max} = \frac{\alpha_{cr} \cdot N_{Ed,m} \cdot e_0 \cdot |\eta_{cr}|_{max}}{[EI\eta_{cr}'' ]_m}$$

Or :  $\alpha_{cr} \cdot N_{Ed,m} = N_{cr,m} = \frac{N_{Rk}}{\lambda_m^2}$

D'où :  $\eta_{init,max} = e_0 \times \frac{N_{Rk}}{\lambda_m^2 \times [EI\eta_{cr}'' ]_m} |\eta_{cr}|_{max}$

Ainsi, l'expression de l'imperfection initiale en tout point de la structure est :

$$\eta_{init} = e_0 \times \frac{N_{Rk}}{\lambda_m^2 \times [EI\eta_{cr}'' ]_m} \times \eta_{cr}$$

## 2.5. Méthode de l'Eurocode 9 : imperfection unique

La méthode de l'Eurocode 9 est directement issue de la méthode de l'Eurocode 3 §5.3.2 (11). Elle est basée sur la définition d'une imperfection unique, globale et locale, basée également sur la déformée critique et le coefficient de normalisation. Par ailleurs, le facteur de normalisation est issu du moment lié aux effets du second ordre, lorsque la structure est initialement affectée d'une imperfection d'allure identique à la déformée critique.

L'Eurocode 9 définit le facteur de normalisation par l'expression suivante :

$$C_{nor} = \frac{\eta_{init,max}}{\eta_{cr,max}}$$

où :  $\eta_{init,max} = \alpha \cdot \frac{\bar{\lambda} - 0,2}{\lambda^2} \cdot \eta_{max}'' \cdot \frac{M_{el,Rk}}{[M'']_{\eta_{cr,max}}}$  avec :  $\eta_{max}'' = \frac{\eta_{cr,max}}{\alpha_{cr} - 1}$

donc :  $C_{nor} = \alpha \cdot \frac{\bar{\lambda} - 0,2}{\lambda} \cdot \frac{M_{el,Rk}}{(\alpha_{cr} - 1) [M'']_{\eta_{cr,max}}}$

avec : -  $\eta_{cr,max}$  : valeur maximale de l'amplitude du mode de flambement

-  $\eta_{max}''$  : flèche maximale de la structure par analyse au second ordre pour la structure dont l'imperfection prend la forme du mode de flambement critique élastique  $\eta_{cr}$  avec l'amplitude maximale  $\eta_{cr,max}$

-  $[M'']_{\eta_{cr,max}}$  : moment fléchissant dans la section critique calculé pour  $\eta_{cr,max}$

## 2.6. Méthode des sinus

La méthode des sinus est également basée sur la définition d'une imperfection unique qui admet la superposition de deux éléments, qui sont : la déformée critique du montant de la structure qui abrite la section critique et la déformée d'une barre de référence dont les caractéristiques géométriques et la charge critique sont identiques à celle du montant le plus sollicité de la structure.

Le facteur d'amplification  $C_{nor}$  est défini de sorte que la courbure maximale de la déformée critique est égale localement à la courbure maximale de la barre de référence.

### Détermination de la courbure maximale du montant le plus sollicité :

Afin de déterminer la courbure maximum de la structure, il est nécessaire de mettre en équation les déplacements et les rotations des différents nœuds de la structure, obtenus à l'aide des logiciels de calcul.

L'équation de la déformée est donnée par l'expression suivante :

$$X = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + C \cdot z + D$$

Soit une équation à quatre inconnues. En écrivant l'expression de UX aux nœuds 1 et 2, ainsi que l'expression des rotations RY (dérivée de X) aux nœuds 1 et 2, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi l}{l_f}\right) - 1 \right] + B \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi l}{l_f}\right) - \frac{\pi l}{l_f} \right] = \Delta - RY_1 \cdot l \\ A \cdot \left[ -\sin\left(\frac{\pi l}{l_f}\right) \right] + B \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi l}{l_f}\right) - 1 \right] = \frac{RY_2 - RY_1}{\pi} \cdot l_f \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} l = Z_1 - Z_2 \\ \Delta = UX_2 - UX_1 \end{cases}$$

Après détermination des coefficients A et B, on peut déterminer la courbure maximale par l'expression suivante :

$$X_M'' = -A \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right) - B \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right)$$

L'ordonnée  $Z_M$  du point de courbure maximum, mathématiquement, est obtenu lorsque la dérivée de la courbure s'annule : soit alors  $X''' = 0$  donc :

$$Z_M = l_f + \left(\frac{l_f}{\pi}\right) \cdot \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

A partir du vecteur propre des nœuds 1 et 2, et à partir de la longueur de flambement des barres, on détermine ainsi :

- Les coefficients : A, B, C et D
- L'ordonnée du point de courbure maximale du montant :  $Z_M$
- La déformée critique maximale du montant :  $X_M''$

Détermination de la courbure maximale de la barre de référence :

La courbure de la barre de référence est, quant à elle, donnée par l'expression suivante :

$$e_{0\max}'' = e_0 \cdot \left( \frac{\pi}{l_f} \right)^2$$

$$\text{où : } e_0 = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) W_{el}}{A}$$

Détermination du facteur d'amplification  $C_{nor}$  :

Le facteur d'amplification est alors défini de la manière suivante :

$$C_{nor} = \frac{e_0''}{\eta_M''}$$

### 3. Comparaison des méthodes de prises en compte des imperfections

Les différentes méthodes présentées précédemment ont été appliquées à différentes structures. Les calculs et résultats présentés ici ont été réalisés sur un portique bi-articulé, de dimension 4x3m.

#### 3.1. Données

Géométrie - Charges

On considère un portique bi-articulé, de dimensions 4x3m (fig. 5). Le portique est constitué de tube creux circulaire 100x10mm. On applique à ce portique une charge verticale de 86,708kN en tête de chaque montant.

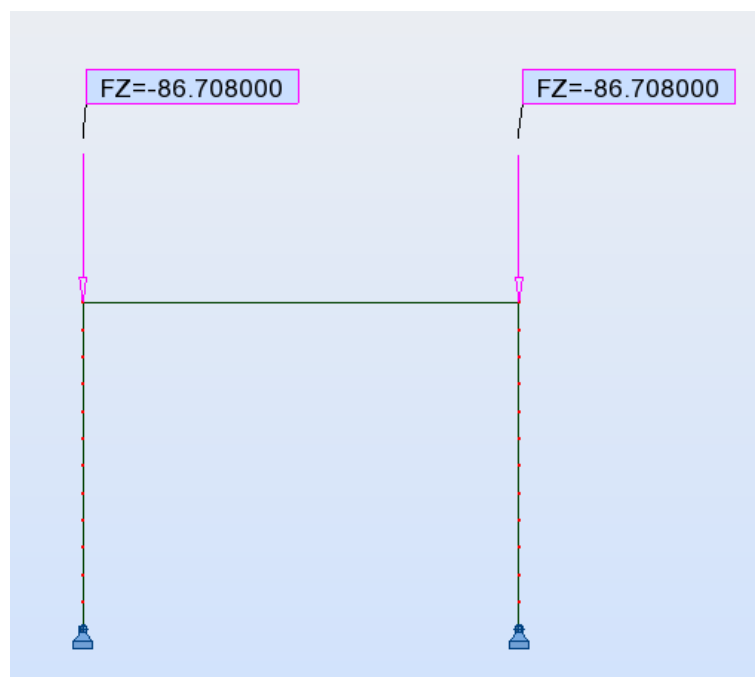


Figure 8 - Géométrie et charges

Avec un calcul au second ordre, on obtient un **coefficient critique de 1,300**, et une **charge critique de 112,721 kN**. Le mode 1 de flambage de la structure est le suivant :



Figure 9 – Mode 1 de flambage de la structure

### Acier

Limite d'élasticité :  $f_y = 320$  MPa

Module d'élasticité :  $E = 210\,000$  MPa

$\gamma_{M0} = 1$

$\gamma_{M1} = 1$

### Caractéristiques de la section

	montant 100x10mm
A (cm <sup>2</sup> )	28,274
I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	289,812
W <sub>el,y</sub> (cm <sup>3</sup> )	57,962
W <sub>pl,y</sub> (cm <sup>3</sup> )	81,333

### 3.2. Détermination des effets du second ordre

#### 3.2.1. Méthode de l'Eurocode 3 : imperfections entrées manuellement

##### → Imperfection globale :

L'imperfection globale représente le défaut initial global d'aplomb de la structure. On matérialise donc l'imperfection globale comme étant un angle  $\Phi$ , où  $\Phi$  est égal à :

$$\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m$$

Avec : -  $\Phi_0 = 1/200$

-  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}}$  mais  $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1,0$

-  $\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$

Dans le cas présent, on a :  $h = 3m$  et  $m=2$

On a donc :  $\alpha_h = 1$  et  $\alpha_m = 0,866$

Ainsi, on obtient une imperfection globale :  $\Phi = 0,00433$  rad.

Cet angle correspond à un déplacement en tête de poteau de 0,01299m.

Pour représenter cette imperfection globale de la structure, on calcule alors les coordonnées de chaque nœud de la structure. En effet, le déplacement dû à l'imperfection globale au nœud  $i$ , est donné par la relation suivante :

$$X_{i,imp, globale} = \frac{Z_i \cdot \Delta_{en\ portique\ tête}}{H_{portique}}$$

où :  $X_i$  et  $Z_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$ .

##### → Imperfection locale :

L'imperfection locale correspond au défaut de rectitude des poteaux. On le modélise grâce à une imperfection en arc  $e_0$  des barres. L'Eurocode 3 permet de déterminer les valeurs de  $e_0/L$  à prendre en compte pour l'imperfection locale. Dans le cas présent, on a :

$$e_0/L = 1/200 \quad \text{où } L \text{ est la hauteur des poteaux.}$$

En prenant en compte une hauteur de 3m, on trouve donc  $e_0 = 0,015m$ .

Pour représenter cette imperfection locale de la structure, on calcule les coordonnées de chaque nœud de la structure. En effet, le déplacement dû à l'imperfection locale au nœud  $i$ , est donné par la relation suivante :

$$X_{i,imp, locale} = e_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z_i}{H_{portique}}\right)$$

où :  $X_i$  et  $Z_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$ .

→ **Imperfections globale et locale :**

On applique donc, à la structure, les deux imperfections présentées précédemment. Ainsi les coordonnées finales des nœuds se calculent de la manière suivante :

$$X_{final} = X_{initial} + X_{i,imp,globale} + X_{i,imp,locale}$$

Les coordonnées des nœuds de la structure sont données dans le tableau suivant :

Nœuds	Coordonnées initiales		Imperfection locale X <sub>i</sub> (m)	Imperfection globale X <sub>i</sub> (m)	Coordonnées finales	
	X (m)	Z (m)			X <sub>r</sub> (m)	Z <sub>r</sub> (m)
1	0	0	0,00E+00	0	0	0
2	0	0,25	0,003882286	0,0010825	0,0049648	0,25
3	0	0,5	0,0075	0,002165	0,009665	0,5
4	0	0,75	0,010606602	0,0032475	0,0138541	0,75
5	0	1	0,012990381	0,00433	0,0173204	1
6	0	1,25	0,014488887	0,0054125	0,0199014	1,25
7	0	1,5	0,015	0,006495	0,021495	1,5
8	0	1,75	0,014488887	0,0075775	0,0220664	1,75
9	0	2	0,012990381	0,00866	0,0216504	2
10	0	2,25	0,010606602	0,0097425	0,0203491	2,25
11	0	2,5	0,0075	0,010825	0,018325	2,5
12	0	2,75	0,003882286	0,0119075	0,0157898	2,75
13	0	3	1,83772E-18	0,01299	0,01299	3
14	4	0	0	0	4	0
15	4	0,25	0,003882286	0,0010825	4,0049648	0,25
16	4	0,5	0,0075	0,002165	4,009665	0,5
17	4	0,75	0,010606602	0,0032475	4,0138541	0,75
18	4	1	0,012990381	0,00433	4,0173204	1
19	4	1,25	0,014488887	0,0054125	4,0199014	1,25
20	4	1,5	0,015	0,006495	4,021495	1,5
21	4	1,75	0,014488887	0,0075775	4,0220664	1,75
22	4	2	0,012990381	0,00866	4,0216504	2
23	4	2,25	0,010606602	0,0097425	4,0203491	2,25
24	4	2,5	0,0075	0,010825	4,018325	2,5
25	4	2,75	0,003882286	0,0119075	4,0157898	2,75
26	4	3	1,83772E-18	0,01299	4,01299	3

Figure 10 - Coordonnées des nœuds avec imperfections globale et locale

Ainsi l'allure de la barre est la suivante :

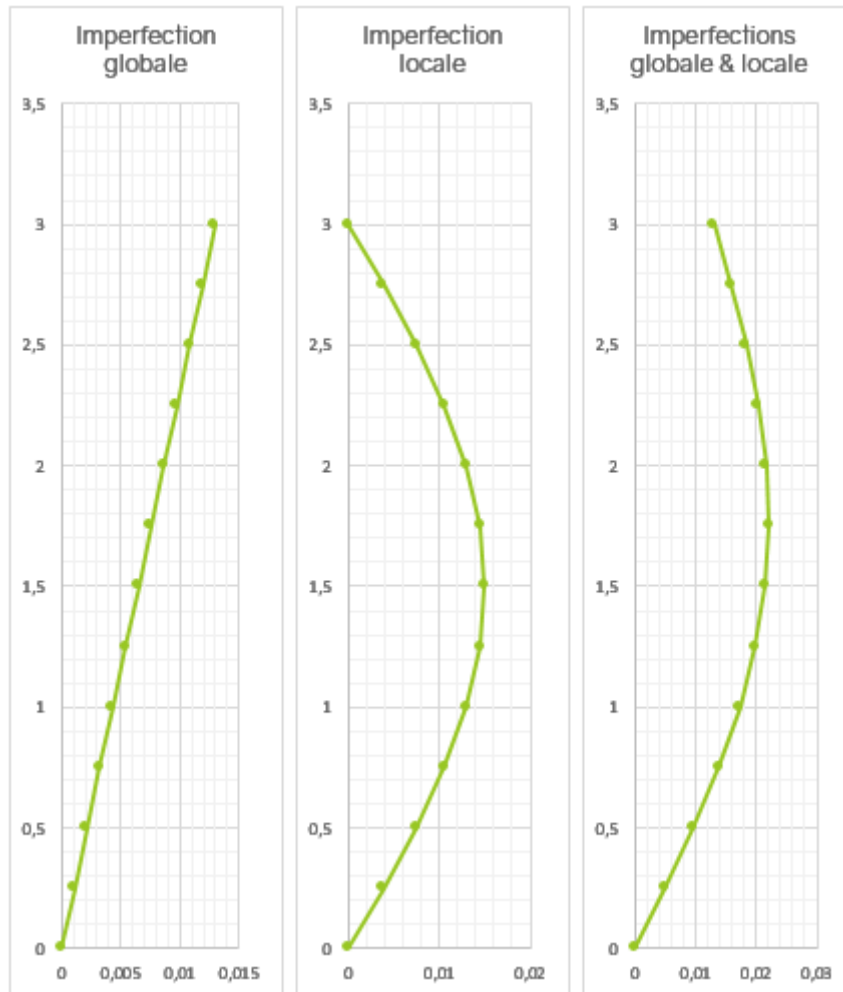


Figure 11 - Allure de la barre déformée avec imperfections globale et locale

→ Calcul au 2<sup>nd</sup> ordre (calcul statique non linéaire) :

On modélise donc la structure avec l'imperfection globale et l'imperfection locale et l'on effectue un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre des sollicitations. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

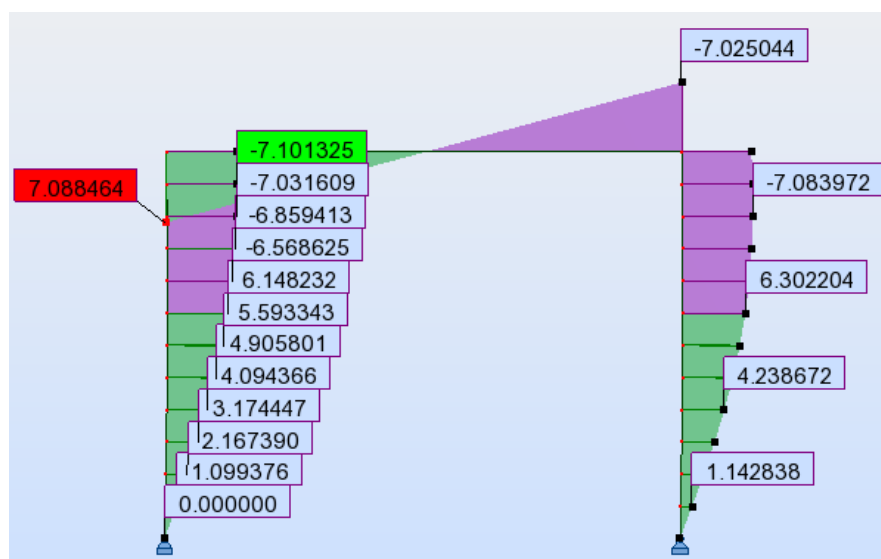


Figure 12 - Allure des moments avec imperfections globale et locale générées manuellement

Le moment maximal obtenu est de 7,0885 kN.m.



## 3.2.2. Méthode de l'Eurocode 3 : charges équivalentes

→ **Imperfection globale :**

D'après l'Eurocode 3, il est possible de matérialiser l'imperfection globale en appliquant une charge équivalente en tête de poteau. La charge équivalente est donnée par  $V \cdot \Phi$ , avec  $\Phi$  tel que :

$$\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m$$

Avec : -  $\Phi_0 = 1/200$

-  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}}$  mais  $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1,0$

-  $\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$

Dans le cas présent, on a :  $h = 3\text{m}$  et  $m=2$

On a donc :  $\alpha_h = 1$  et  $\alpha_m = 0,866$

Ainsi, on obtient une imperfection globale :  $\Phi = 0,00433 \text{ rad}$  soit une force équivalente :  $V \cdot \Phi = 0,375 \text{ kN}$  (on prend  $V = V_{Ed} = 86,708 \text{ kN}$ )

→ **Imperfection locale :**

D'après l'Eurocode 3, il est possible de matérialiser l'imperfection locale en appliquant une charge répartie et une charge ponctuelle sur chaque poteau.

Les charges sont définies de la manière suivante :

- La charge répartie :  $q = \frac{8 \cdot N_{Ed} \cdot e_0}{L^2}$   
( $N_{Ed} = 86,708 \text{ kN}$ )
- La charge ponctuelle :  $Q = \frac{4 \cdot N_{Ed} \cdot e_0}{L}$

Ainsi, pour la structure, on a :  $q = 1,156 \text{ kN/m}$  et  $Q = 1,734 \text{ kN}$  ( $e_0 = 0,015 \text{ m}$ )

→ **Imperfections globale et locale :**

On applique à la structure les deux imperfections selon l'EC3 §5.3.2 (7). Ainsi, les charges appliquées à la structure sont :

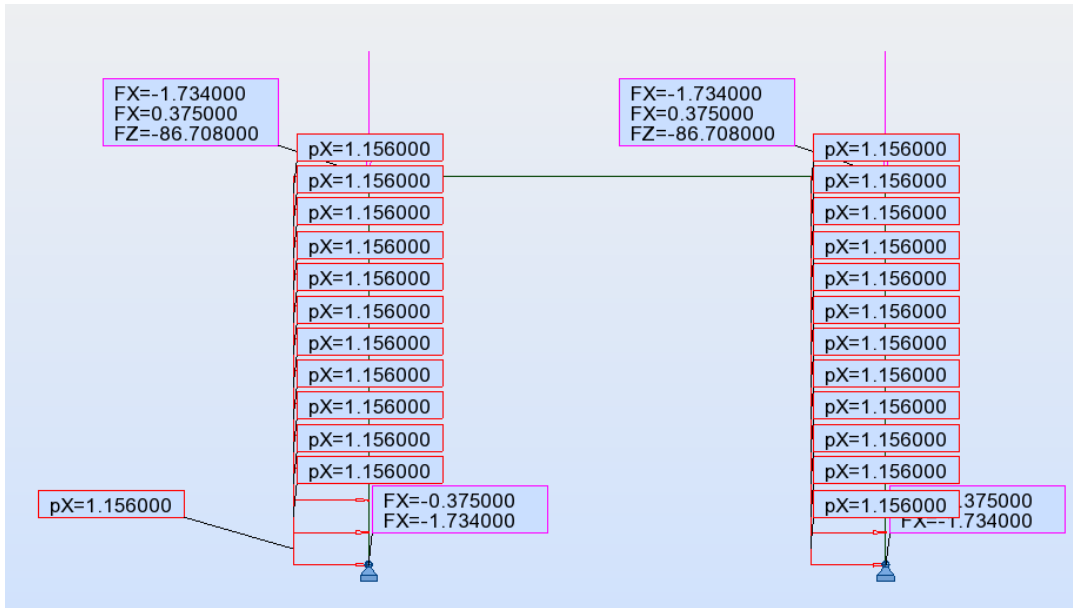


Figure 13 - Charges équivalentes pour les imperfections globale et locale

→ **Calcul au 2<sup>nd</sup> ordre (calcul statique non linéaire) :**

On modélise donc la structure avec l'imperfection globale et l'imperfection locale et l'on effectue un calcul statique non linéaire des sollicitations. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

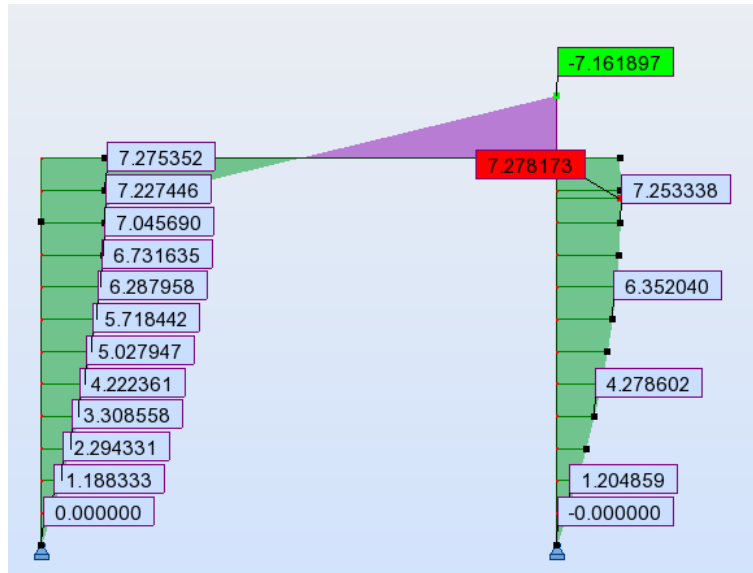


Figure 14 - Allure des moments avec imperfections globale et locale générées avec les charges équivalentes

Le moment maximal obtenu est de 7,2782 kN.m.

### 3.2.3. Méthode alternative de l'Eurocode 3 (paragraphe 5.3.2 (11))

Cette méthode définit d'une imperfection unique, globale et locale selon l'EC3 5.3.2 (11) basée sur l'allure de la déformée du mode de flambement élastique et sur un coefficient de normalisation. Le facteur de normalisation est issu du moment lié aux effets du second ordre, lorsque la structure est initialement affectée d'une imperfection d'allure identique à la déformée critique.

L'Eurocode 3 définit donc la déformée de la manière suivante :

$$\eta_{init} = e_0 \cdot \frac{N_{Rk}}{\lambda^2 \cdot [EI \cdot \eta_{cr}''']_{max}} \cdot \eta_{cr}$$

$$\text{et } e_0 = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{W_{el,y}}{A}$$

Avec :

- $|\eta_{cr}''|_{max}$  : valeur maximale de la dérivée seconde  $\eta_{cr}$
- $\eta_{cr}$  : allure de la déformée du mode de flambement élastique

On détermine les coordonnées des vecteurs propres du 1<sup>er</sup> mode de flambement de la structure. Ces coordonnées sont données ci-dessous :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode
	X (m)	Z (m)	UX (m)
1	0	0	0,000000000
2	0	0,25	0,000445578
3	0	0,5	0,000886004
4	0	0,75	0,001316183
5	0	1	0,001731141
6	0	1,25	0,002126079
7	0	1,5	0,002496430
8	0	1,75	0,002837911
9	0	2	0,003146573
10	0	2,25	0,003418846
11	0	2,5	0,003651581
12	0	2,75	0,003842087
13	0	3	0,003988161
14	4	0	0,000000000
15	4	0,25	0,000445578
16	4	0,5	0,000886004
17	4	0,75	0,001316183
18	4	1	0,001731141
19	4	1,25	0,002126079
20	4	1,5	0,002496430
21	4	1,75	0,002837911
22	4	2	0,003146573
23	4	2,25	0,003418846
24	4	2,5	0,003651581
25	4	2,75	0,003842087
26	4	3	0,003988161

Figure 15 – Déformée critique du 1<sup>er</sup> mode de flambement

A partir de ces coordonnées, on trace l'allure de la déformée critique du 1<sup>er</sup> mode de flambement, et on détermine l'équation de la déformée critique. On choisit ici d'exprimer la déformée critique avec une équation polynomiale.

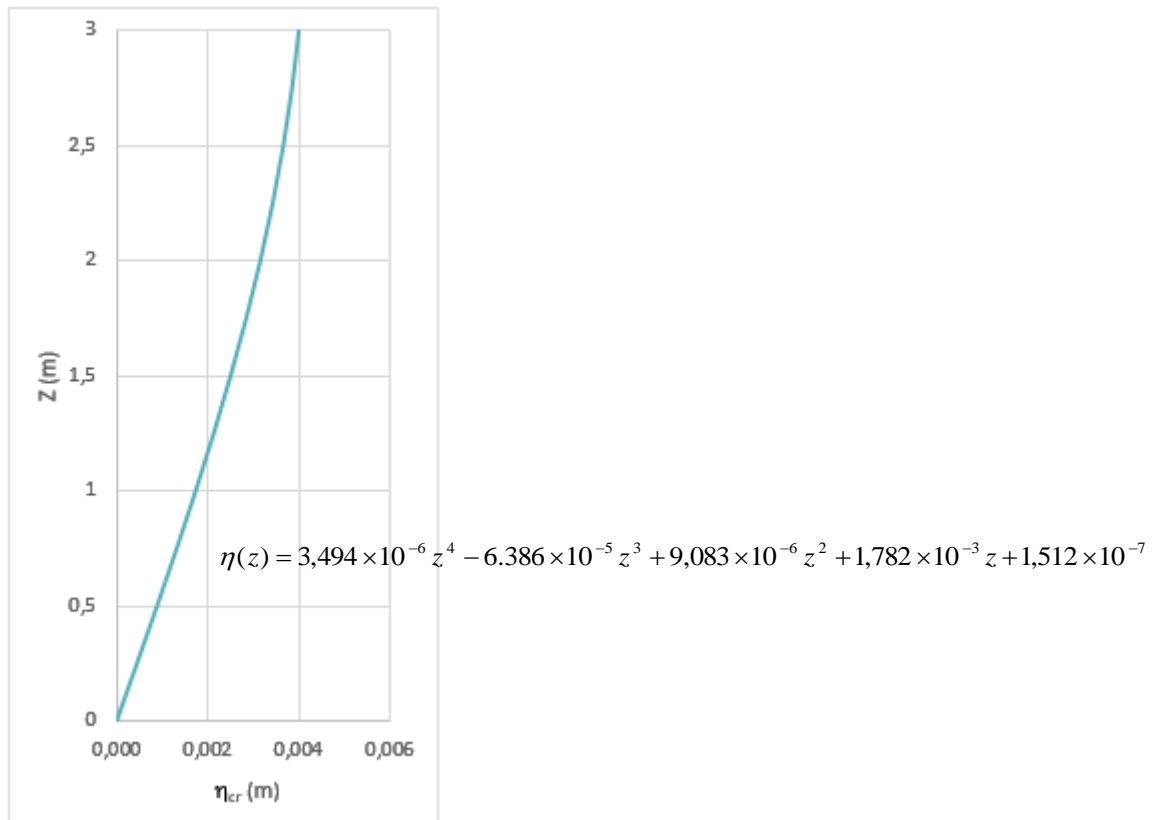
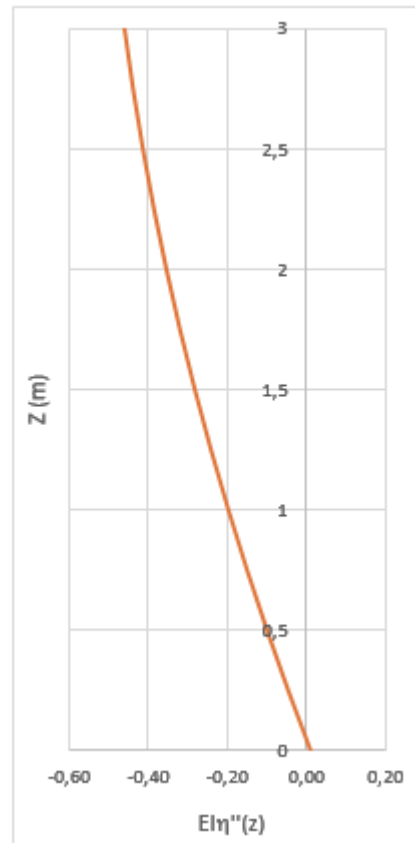


Figure 17 - Allure de la déformée critique

On peut donc calculer  $\eta''(z)$  sur la hauteur du montant :

Z (m)	$\eta(x)$	$\eta''(x)$	$EI\eta''(z)$ (kN.m)
0	1,512E-07	1,8166E-05	0,0111
0,25	0,0004452	-7,5004E-05	-0,0456
0,5	0,0008857	-1,6293E-04	-0,0992
0,75	0,0013159	-2,4562E-04	-0,1495
1	0,0017309	-3,2307E-04	-0,1966
1,25	0,0021256	-3,9527E-04	-0,2406
1,5	0,0024957	-4,6224E-04	-0,2813
1,75	0,002837	-5,2396E-04	-0,3189
2	0,0031455	-5,8044E-04	-0,3533
2,25	0,0034178	-6,3168E-04	-0,3844
2,5	0,0036506	-6,7768E-04	-0,4124
2,75	0,0038411	-7,1844E-04	-0,4372
3	0,0039867	-7,5396E-04	-0,4589

$$EI|\eta''|_{\max} = 0,4589$$


 Figure 16 - Allure de  $EI\eta''(z)$ 

On peut donc en déduire :  $EI|\eta''|_{\max} = 0,4589 \text{ kN.m}$

On peut donc calculer le coefficient de normalisation :

Données		Paramètres	Formules	Résultats
$\alpha$	0,49	$\bar{\lambda}$	$\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$	2,8331
A (cm <sup>2</sup> )	28,274			
$f_y$ (MPa)	320	$e_0$ (mm)	$\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{W_{el,y}}{A}$	26,450
$L_f$ (m)	7,299	$N_{Rk}$ (kN)	$A \cdot f_y$	904,768
$N_{cr}$ (kN)	112,721	$C_{nor}$	$e_0 \cdot \frac{N_{Rk}}{\bar{\lambda}^2 \cdot [EI \cdot \eta_{cr}'' ]_{max}}$	6,498
$\varepsilon$	1			
$EI \cdot \eta_{cr}''$ (kN.m)	0,4589			
$W_{el,y}$ (cm <sup>3</sup> )	57,962			

NB : On peut noter que la valeur du ventre  $e_0$ , calculée ici, est plus élevée que la valeur obtenue à partir du tableau de l'EC3, qui est de  $L/200$  (=15mm).

### → Modélisation de la structure normée :

Afin de représenter la structure normée, on calcule la déformée normée liée au 1<sup>er</sup> mode. On ajoute ensuite cette déformée normée aux coordonnées initiales de la structure. On obtient alors les coordonnées des nœuds de la structure déformée normée.

Les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau ci-dessous :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode UX (m)	Déformée liée au 1er mode normé	Coordonnées 1er mode	
	X (m)	Z (m)			Xf (m)	Zf (m)
1	0	0	0,000000000	0,000000	0,000000	0
2	0	0,25	0,000445578	0,002895	0,002895	0,25
3	0	0,5	0,000886004	0,005757	0,005757	0,5
4	0	0,75	0,001316183	0,008552	0,008552	0,75
5	0	1	0,001731141	0,011248	0,011248	1
6	0	1,25	0,002126079	0,013814	0,013814	1,25
7	0	1,5	0,002496430	0,016221	0,016221	1,5
8	0	1,75	0,002837911	0,018439	0,018439	1,75
9	0	2	0,003146573	0,020445	0,020445	2
10	0	2,25	0,003418846	0,022214	0,022214	2,25
11	0	2,5	0,003651581	0,023726	0,023726	2,5
12	0	2,75	0,003842087	0,024964	0,024964	2,75
13	0	3	0,003988161	0,025913	0,025913	3
14	4	0	0,000000000	0,000000	4,000000	0
15	4	0,25	0,000445578	0,002895	4,002895	0,25
16	4	0,5	0,000886004	0,005757	4,005757	0,5
17	4	0,75	0,001316183	0,008552	4,008552	0,75
18	4	1	0,001731141	0,011248	4,011248	1
19	4	1,25	0,002126079	0,013814	4,013814	1,25
20	4	1,5	0,002496430	0,016221	4,016221	1,5
21	4	1,75	0,002837911	0,018439	4,018439	1,75
22	4	2	0,003146573	0,020445	4,020445	2
23	4	2,25	0,003418846	0,022214	4,022214	2,25
24	4	2,5	0,003651581	0,023726	4,023726	2,5
25	4	2,75	0,003842087	0,024964	4,024964	2,75
26	4	3	0,003988161	0,025913	4,025913	3

Figure 18 - Coordonnées des nœuds avec imperfection unique méthode EC3 §5.3.2 (11)

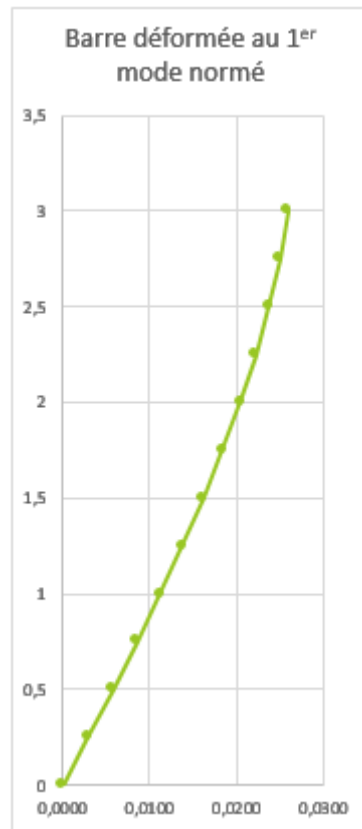


Figure 19 - Allure de la barre déformée imperfection unique méthode EC3 §5.3.2 (11)

→ Calcul au 2<sup>nd</sup> ordre (calcul statique non linéaire) :

On modélise donc la structure avec l'imperfection globale et l'imperfection locale et l'on effectue un calcul statique non linéaire des sollicitations. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

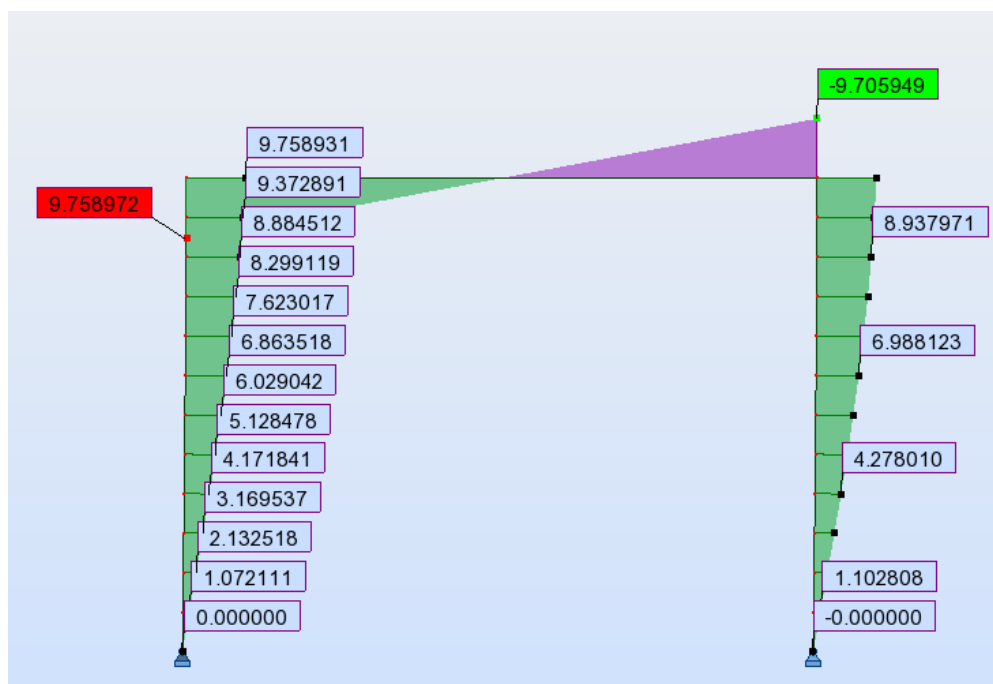


Figure 20 - Allure des moments imperfection unique méthode EC3 §5.3.2 (11)

Le moment maximal obtenu est de 9,7590 kN.m.

3.2.4. Méthode de l'Eurocode 9 (paragraphe 5.3.2 (11) NOTE 3)

La méthode de l'Eurocode 9 est basée sur la définition d'une imperfection unique, globale et locale, basée également sur la déformée critique et le coefficient de normalisation. Par ailleurs, le facteur de normalisation est issu non plus de la courbure, ni de la déformée, mais du moment lié aux effets du second ordre, lorsque la structure est initialement affectée d'une imperfection d'allure identique à la déformée critique.

L'Eurocode 9 définit le facteur de normalisation par l'expression suivante :

$$C_{nor} = \frac{\eta_{init,max}}{\eta_{cr,max}}$$

où :

$$\eta_{init,max} = \alpha \cdot \frac{\bar{\lambda} - 0,2}{\bar{\lambda}^2} \cdot \eta_{max}^{II} \cdot \frac{M_{el,Rk}}{[M^{II}]_{\eta_{cr,max}}}$$

donc :

$$C_{nor} = \alpha \cdot \frac{\bar{\lambda} - 0,2}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{M_{el,Rk}}{(\alpha_{cr} - 1) [M^{II}]_{\eta_{cr,max}}}$$

avec : -  $\eta_{cr,max}$  : valeur maximale de l'amplitude du mode de flambement

-  $\eta_{max}^{II}$  : flèche maximale de la structure par analyse au second ordre pour la structure dont l'imperfection prend la forme du mode de flambement critique élastique  $\eta_{cr}$  avec l'amplitude maximale  $\eta_{cr,max}$

-  $[M^{II}]_{\eta_{cr,max}}$  : moment fléchissant dans la section critique calculé pour  $\eta_{cr,max}$

Les vecteurs propres au 1<sup>er</sup> mode de flambement de la structure sont les suivants :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode
	X (m)	Z (m)	UX (m)
1	0	0	0,000000000
2	0	0,25	0,000445578
3	0	0,5	0,000886004
4	0	0,75	0,001316183
5	0	1	0,001731141
6	0	1,25	0,002126079
7	0	1,5	0,002496430
8	0	1,75	0,002837911
9	0	2	0,003146573
10	0	2,25	0,003418846
11	0	2,5	0,003651581
12	0	2,75	0,003842087
13	0	3	0,003988161
14	4	0	0,000000000
15	4	0,25	0,000445578
16	4	0,5	0,000886004
17	4	0,75	0,001316183
18	4	1	0,001731141
19	4	1,25	0,002126079
20	4	1,5	0,002496430
21	4	1,75	0,002837911
22	4	2	0,003146573
23	4	2,25	0,003418846
24	4	2,5	0,003651581
25	4	2,75	0,003842087
26	4	3	0,003988161

Figure 21 - Déformée critique du 1er mode de flambement

On trouve donc :  $\eta_{cr,max} = 0,003988 m$

On peut donc déterminer la valeur de  $\eta_{max}''$  avec la relation suivante :  $\eta_{max}'' = \frac{\eta_{cr,max}}{\alpha_{cr} - 1}$

On a donc :  $\eta_{max}'' = \frac{0,003988}{1,300 - 1} = 0,01329m$

On déforme la structure à partir du 1<sup>er</sup> mode de flambement et en prenant en compte un déplacement maximal de  $\eta_{cr,max}$ . Avec un calcul au second ordre, on obtient le diagramme des moments fléchissant suivant :

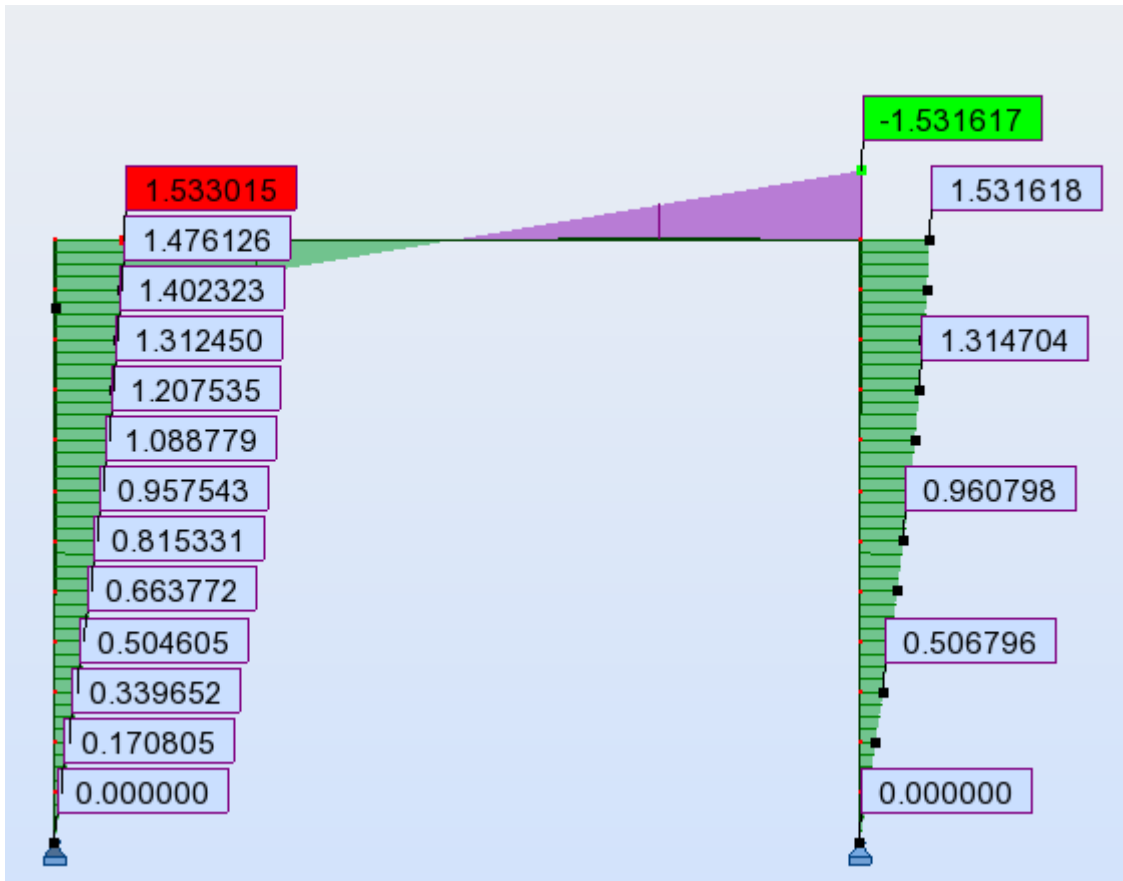


Figure 22 - Diagramme des moments de la structure en prenant en compte la déformée critique du 1<sup>er</sup> mode de flambement

On trouve ainsi :  $[M'']_{\eta_{cr,max}} = 1,5330 kN.m$

D'où :  $\eta_{init,max} = \alpha \cdot \frac{\bar{\lambda} - 0,2}{\bar{\lambda}^2} \cdot \eta_{max}'' \cdot \frac{M_{el,Rk}}{[M'']_{\eta_{cr,max}}} = 0,49 \times \frac{2,8331 - 0,2}{2,8331^2} \times 0,01329 \times \frac{57,962 \times 10^{-6} \times 320 \times 10^6}{1,5330 \times 10^3}$

Donc :  $\eta_{init,max} = 25,847 \times 10^{-3} m$

Donc :  $C_{nor} = \frac{\eta_{init,max}}{\eta_{cr,max}} = \frac{25,847 \times 10^{-3}}{0,003988} = 6,481$



→ **Modélisation de la structure normée :**

Afin de représenter la structure normée, on calcule la déformée normée liée au 1<sup>er</sup> mode. On ajoute ensuite cette déformée normée aux coordonnées initiales de la structure. On obtient alors les coordonnées des nœuds de la structure déformée normée.

Les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau ci-dessous :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode UX (m)	Déformée liée au 1er mode normé pour $\alpha=0,49$	Coordonnées 1er mode	
	X (m)	Z (m)			Xf (m)	Zf (m)
1	0	0	0,000000000	0,000000	0,000000	0
2	0	0,25	0,000445578	0,002888	0,002888	0,25
3	0	0,5	0,000886004	0,005742	0,005742	0,5
4	0	0,75	0,001316183	0,008530	0,008530	0,75
5	0	1	0,001731141	0,011220	0,011220	1
6	0	1,25	0,002126079	0,013779	0,013779	1,25
7	0	1,5	0,002496430	0,016179	0,016179	1,5
8	0	1,75	0,002837911	0,018393	0,018393	1,75
9	0	2	0,003146573	0,020393	0,020393	2
10	0	2,25	0,003418846	0,022158	0,022158	2,25
11	0	2,5	0,003651581	0,023666	0,023666	2,5
12	0	2,75	0,003842087	0,024901	0,024901	2,75
13	0	3	0,003988161	0,025847	0,025847	3
14	4	0	0,000000000	0,000000	4,000000	0
15	4	0,25	0,000445578	0,002888	4,002888	0,25
16	4	0,5	0,000886004	0,005742	4,005742	0,5
17	4	0,75	0,001316183	0,008530	4,008530	0,75
18	4	1	0,001731141	0,011220	4,011220	1
19	4	1,25	0,002126079	0,013779	4,013779	1,25
20	4	1,5	0,002496430	0,016179	4,016179	1,5
21	4	1,75	0,002837911	0,018393	4,018393	1,75
22	4	2	0,003146573	0,020393	4,020393	2
23	4	2,25	0,003418846	0,022158	4,022158	2,25
24	4	2,5	0,003651581	0,023666	4,023666	2,5
25	4	2,75	0,003842087	0,024901	4,024901	2,75
26	4	3	0,003988161	0,025847	4,025847	3

Figure 24 - Coordonnées des nœuds imperfection unique méthode EC9

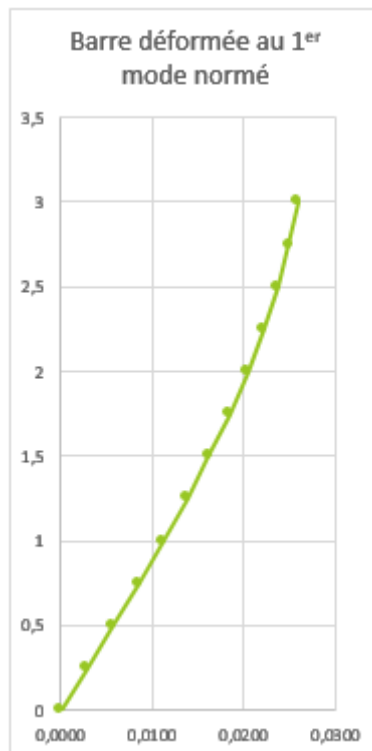


Figure 23 - Allure de la barre déformée imperfection unique méthode EC9

→ Calcul au 2<sup>nd</sup> ordre (calcul statique non linéaire) :

On modélise donc la structure avec l'imperfection unique et l'on effectue un calcul statique non linéaire des sollicitations. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

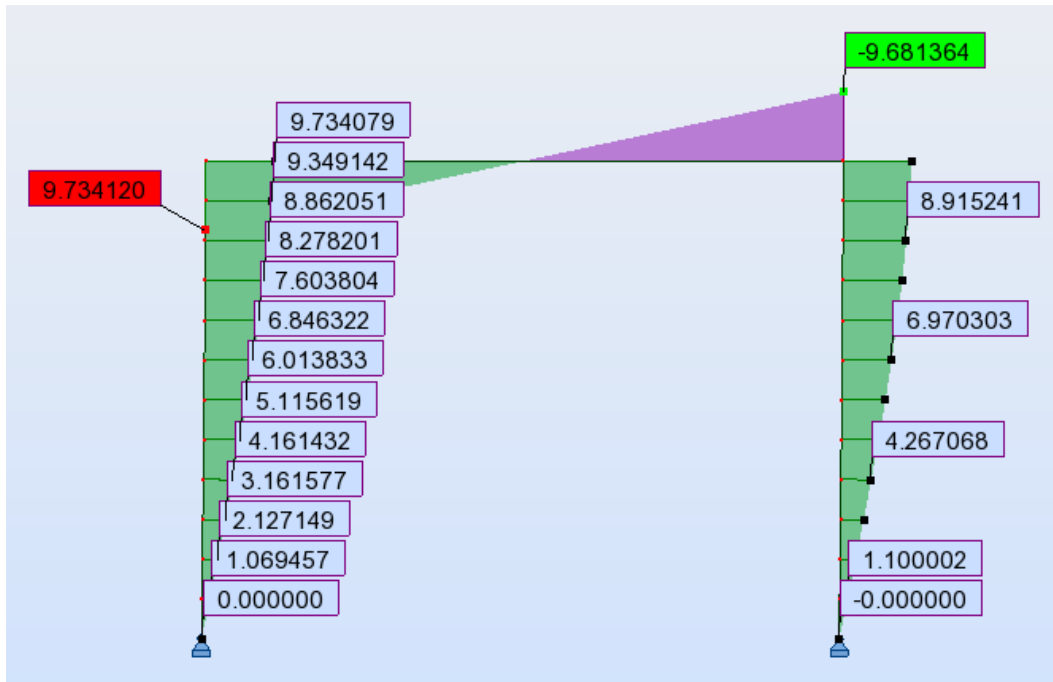


Figure 25 - Allure des moments imperfection unique méthode EC9

Le moment maximal obtenu est de 9,7341 kN.m.

### 3.2.5.Méthode des sinus

Cette méthode est basée sur la définition d'une imperfection unique, globale et locale. Le facteur d'amplification  $C_{nor}$  est défini comme étant le rapport entre la courbure maximale de la barre de référence et la courbure du montant le plus sollicité de la structure.

On détermine le facteur  $C_{nor}$  en exploitant la courbure maximale déterminée grâce à une expression sinusoïdale de la déformée de la structure.

#### → Détermination de la courbure maximale au droit de la section critique :

Afin de déterminer cette courbure maximale, on utilise les déplacements et rotation obtenus avec la déformée critique du 1<sup>er</sup> mode de flambement. Ces valeurs sont données dans le tableau ci-dessous :

Noeuds	UX (m)	RY (rad)	Z (m)
13	0,003988161	0,000493004	3
10	0,003418846	0,001011967	2,25
Hauteur du montant : 3m			
Longueur de flambement : 7,299m			

L'équation de la déformée est donnée par l'expression suivante :

$$X = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + C \cdot z + D$$

Soit une équation à quatre inconnues. En écrivant l'expression de UX aux nœuds 1 et 2, ainsi que l'expression des rotations RY (dérivée de X) aux nœuds 1 et 2, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - 1 \right] + B \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - \frac{\pi \cdot l}{l_f} \right] = \Delta - RY_1 \cdot l \\ A \cdot \left[ -\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) \right] + B \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - 1 \right] = \frac{RY_2 - RY_1}{\pi} \cdot l_f \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} l = Z_1 - Z_2 \\ \Delta = UX_2 - UX_1 \end{cases}$$

Après détermination des coefficients A et B, on peut déterminer la courbure maximale par l'expression suivante :

$$X''_M = -A \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right) - B \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right)$$

L'ordonnée  $Z_M$  du point de courbure maximum, mathématiquement, est obtenu lorsque la dérivée de la courbure s'annule : soit alors  $X''' = 0$  donc :

$$Z_M = l_f + \left(\frac{l_f}{\pi}\right) \cdot \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

A partir du vecteur propre des nœuds 1 et 2, et à partir de la longueur de flambement des barres, on détermine ainsi :

- Les coefficients  $A = 3,419 \times 10^{-3}$  et  $B = 2,351 \times 10^{-3}$
- L'ordonnée du point de courbure maximale pour une barre  $Z_M = 3,650$  m
- La déformée critique obtenue par la méthode des sinus  $\eta''_M = 7,685 \times 10^{-4} m^{-1}$

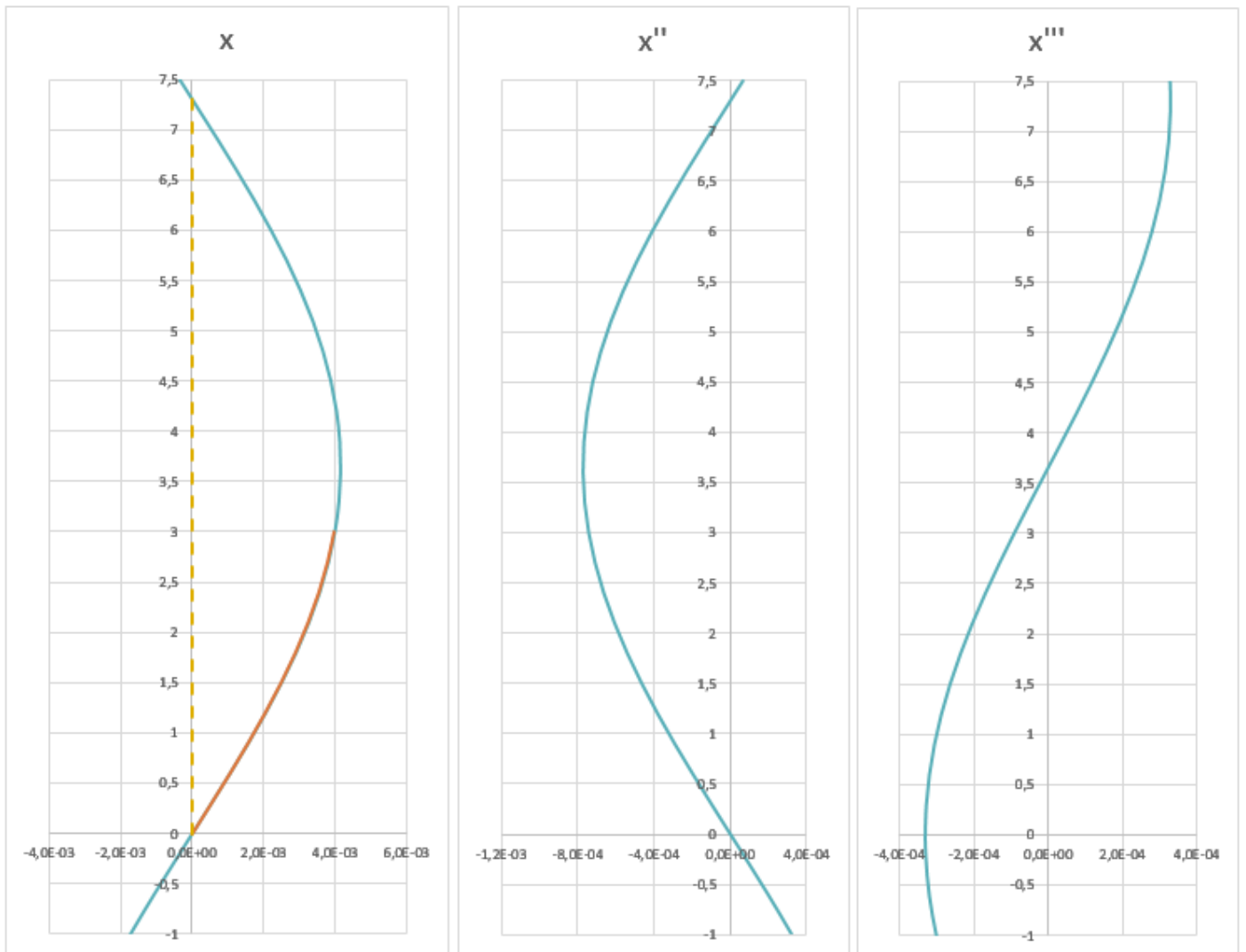


Figure 26 - Allure de la déformée critique de la barre méthode des sinus

→ **Détermination de la courbure équivalente de la barre de référence :**

La courbure de la barre de référence est donnée par l'expression suivante :

$$e_{0\max}'' = e_0 \cdot \left( \frac{\pi}{l_f} \right)^2$$

$$e_0 = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot W_{el}}{A}$$

On a ainsi les valeurs suivantes :

Données	
$\alpha$	0,49
A (cm <sup>2</sup> )	28,274
$f_y$ (MPa)	320
$W_{el,y}$ (cm <sup>3</sup> )	57,962
E (MPa)	210.10 <sup>3</sup>
$N_{cr}$ (kN)	112,721

Paramètres	Formules	Résultats
$\bar{\lambda}$	$\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$	2,8331
$L_f$ (m)	$\pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{N_{cr}}}$	7,299
$e_0$ (mm)		0,02645
$e_{0\max}''$ (m <sup>-1</sup> )		4,899x10 <sup>-3</sup>

→ **Détermination du facteur d'amplification  $C_{nor}$  :**

Le facteur d'amplification est défini de la manière suivante :

$$C_{nor} = \frac{e_0}{\eta_M}$$

On trouve ainsi  $C_{nor} = 6,374$

→ **Modélisation de la structure normée :**

Afin de représenter la structure normée, on calcule la déformée normée liée au 1er mode. On ajoute ensuite cette déformée normée aux coordonnées initiales de la structure. On obtient alors les coordonnées des nœuds de la structure déformée normée.

Les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau ci-dessous :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode UX (m)	Déformée liée au 1er mode normé	Coordonnées 1er mode	
	X (m)	Z (m)			Xf (m)	Zf (m)
1	0	0	0,00000000	0,000000	0,000000	0
2	0	0,25	0,000445578	0,002840	0,002840	0,25
3	0	0,5	0,000886004	0,005648	0,005648	0,5
4	0	0,75	0,001316183	0,008390	0,008390	0,75
5	0	1	0,001731141	0,011035	0,011035	1
6	0	1,25	0,002126079	0,013553	0,013553	1,25
7	0	1,5	0,002496430	0,015913	0,015913	1,5
8	0	1,75	0,002837911	0,018090	0,018090	1,75
9	0	2	0,003146573	0,020058	0,020058	2
10	0	2,25	0,003418846	0,021793	0,021793	2,25
11	0	2,5	0,003651581	0,023277	0,023277	2,5
12	0	2,75	0,003842087	0,024491	0,024491	2,75
13	0	3	0,003988161	0,025422	0,025422	3
14	4	0	0,00000000	0,000000	4,000000	0
15	4	0,25	0,000445578	0,002840	4,002840	0,25
16	4	0,5	0,000886004	0,005648	4,005648	0,5
17	4	0,75	0,001316183	0,008390	4,008390	0,75
18	4	1	0,001731141	0,011035	4,011035	1
19	4	1,25	0,002126079	0,013553	4,013553	1,25
20	4	1,5	0,002496430	0,015913	4,015913	1,5
21	4	1,75	0,002837911	0,018090	4,018090	1,75
22	4	2	0,003146573	0,020058	4,020058	2
23	4	2,25	0,003418846	0,021793	4,021793	2,25
24	4	2,5	0,003651581	0,023277	4,023277	2,5
25	4	2,75	0,003842087	0,024491	4,024491	2,75
26	4	3	0,003988161	0,025422	4,025422	3

Figure 28 – Coordonnées des nœuds imperfection unique méthode des sinus

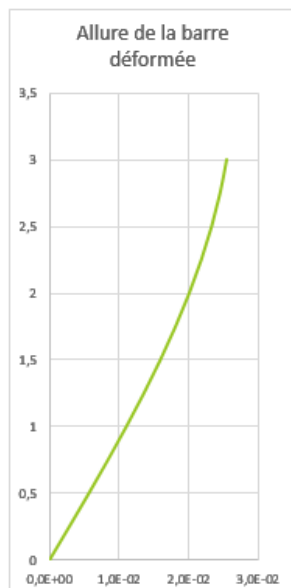


Figure 27 – Allure de la barre déformée imperfection unique méthode des sinus

→ Calcul au 2<sup>nd</sup> ordre (calcul statique non linéaire) :

On modélise donc la structure avec l'imperfection unique et l'on effectue un calcul statique non linéaire des sollicitations. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

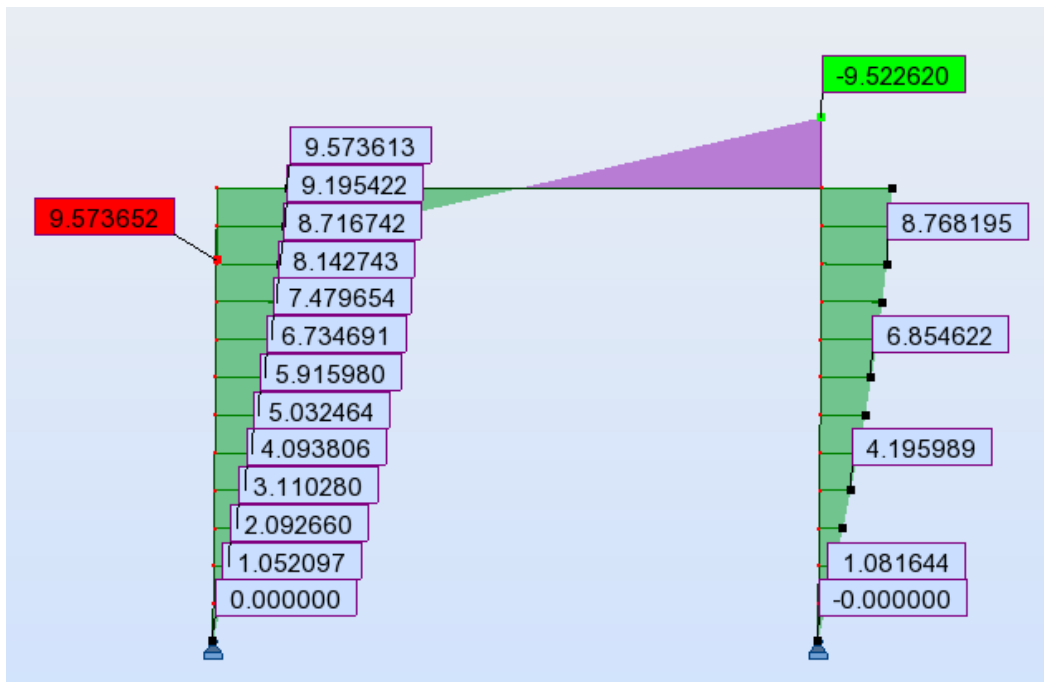


Figure 29 - Allure des moments imperfection unique méthode des sinus

Le moment maximal obtenu est de 9,5226 kN.m.

### 3.3. Récapitulatif des résultats obtenus

Les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

Méthode	Méthodes conventionnelles : imperfections globale et locale		Méthodes alternative : imperfection unique basée sur la déformée critique		
	Méthode EC3 : imperfections générées manuellement	Méthode EC3 : charges équivalentes	Méthode EC3 §5.3.2 (11)	Méthode EC9 §5.3.2(11) NOTE 3	Méthode des sinus
$C_{nor}$	-	-	6,497	6,481	6,374
$M_{max}$ (kN/m) (2 <sup>nd</sup> ordre)	7,0885	7,2782	9,7590	9,7341	9,5226
Erreur (%)	-25,6%	-23,6%	+2,5%	+2,2%	0%

Figure 30 - Récapitulatifs des résultats - Comparaison des méthodes de prises en compte des imperfections

On constate donc que les deux premières méthodes, basées sur la définition de deux imperfections, une globale et une locale, donnent des résultats sous-estimés par rapport aux méthodes basées sur une déformée unique.

Ces trois méthodes, basées sur la définition d'une imperfection unique, permettent de prendre en compte les aspects géométriques, les conditions aux limites, les caractéristiques mécaniques intrinsèques ainsi que le niveau de charges des barres. Ces éléments ne sont pas pris en compte lorsque l'on modélise une imperfection locale et une imperfection globale.

On peut également noter qu'il y a plusieurs façons de prendre en compte l'imperfection globale et l'imperfection locale pour une même structure. Suivant le sens d'application de ces imperfections, les valeurs des sollicitations seront différentes. Il se pose donc le problème de connaître le sens d'application des imperfections globales et locales afin d'obtenir les sollicitations les plus défavorables.

Ce problème n'apparaît pas avec l'imperfection unique. En effet, comme cette imperfection unique est définie à partir de l'allure de la déformée critique, elle permettra forcément d'obtenir les sollicitations les plus défavorables.

Pour la méthode de l'EC3 §5.3.2 (11), il est nécessaire de déterminer la valeur de la courbure maximale de la déformée critique. Cette valeur ne peut pas être directement obtenue grâce au logiciel. Il est donc nécessaire de mettre en équation la déformée critique de la structure. Il se pose alors le problème de trouver une expression assez proche de la réalité. Pour certaines structures, il peut être nécessaire d'avoir un maillage plus fin que dans l'exemple ci-dessus afin d'avoir des résultats plus précis.

L'avantage de la méthode de l'EC9 est qu'elle permet donc de normer la déformée critique, comme la méthode de l'EC3 §5.3.2 (11), sans passer par le calcul des courbures.

Ainsi, pour la suite des calculs, les imperfections initiales des structures seront déterminées par l'intermédiaire de la méthode des sinus.

#### 4. Critères d'endommagement d'une structure chargée verticalement

Les paragraphes 4 et 5, de ce présent rapport, s'inscrivent dans la recherche d'une méthode pour substituer à la mise en place de l'imperfection initiale, une évaluation raisonnable et sécuritaire de l'endommagement.

Après s'être intéressé à la manière de modéliser les imperfections initiales d'une structure, il est intéressant de voir les différents critères d'endommagement qui peuvent être appliqués à une structure chargée verticalement. Les calculs présentés ici sont ceux du portique 4x3 m, étudié précédemment.

##### 4.1. Rappels des critères existants

Afin de calculer l'endommagement d'une structure, chargée verticalement, en prenant en compte l'effet des imperfections initiales, les critères proposés par l'EC3 les suivants :

→ Imperfection initiale modélisée – Calcul des sollicitations au 2<sup>nd</sup> ordre : Vérification en section :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}} \leq 1$$

→ Imperfection initiale non modélisée – Calcul des sollicitations au 2<sup>nd</sup> ordre : Vérification de la stabilité des poteaux dans le plan :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1$$

où : 
$$N_{b,Rd} = \chi \times \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

A noter, ici, que le parti pris, est d'effectuer les calculs à partir de critères de résistance élastique linéaire.

##### 4.2. Application au portique 4x3m 4.2.1. Données

###### Géométrie – Charges

On considère un portique bi-articulé, de dimension 4x3m. Le portique est réalisé en tube creux rond de 100x10mm. Les charges appliquées à la structure sont appliquées en tête de chaque montant, comme sur la figure ci-dessous.

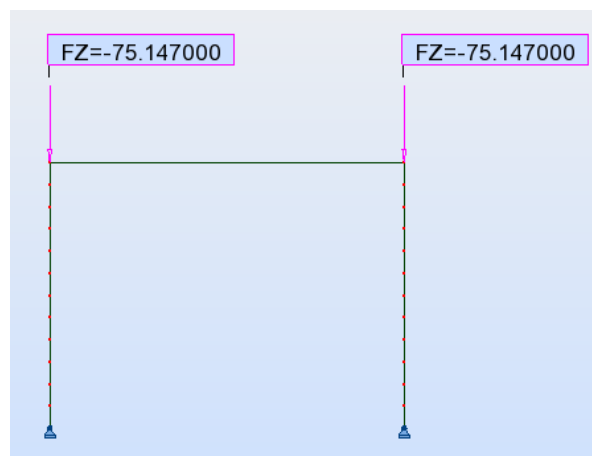


Figure 31 – Géométrie et charges appliquées – Charges verticales



Coefficient critique

$$\alpha_{cr} = 1,500$$

Imperfection unique – méthode des sinus

Cette méthode est basée sur la définition d'une imperfection unique, globale et locale. Le facteur d'amplification  $C_{nor}$  est défini comme étant le rapport entre la courbure maximale de la barre de référence et la courbure du montant le plus sollicité de la structure.

On détermine le facteur  $C_{nor}$  en exploitant la courbure maximale déterminée grâce à une expression sinusoïdale de la déformée de la structure.

→ Détermination de la courbure maximale au droit de la section critique :

Afin de déterminer cette courbure maximale, on utilise les déplacements et rotations obtenus pour les points proches de la section critique. Ces valeurs sont données dans le tableau ci-dessous :

Noeuds	UX (m)	RY (rad)	Z (m)
11	0,003922425	0,000911025	2,5
13	0,004283971	0,000529571	3
Hauteur du montant : 3 m			
Longueur de flambement : 7,2999 m			

L'équation de la déformée est donnée par l'expression suivante :

$$X = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + C \cdot z + D$$

Soit une équation à quatre inconnues. En écrivant l'expression de UX aux nœuds 1 et 2, ainsi que l'expression des rotations RY (dérivée de X) aux nœuds 1 et 2, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - 1 \right] + B \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - \frac{\pi \cdot l}{l_f} \right] = \Delta - RY_1 \cdot l \\ A \cdot \left[ -\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) \right] + B \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - 1 \right] = \frac{RY_2 - RY_1}{\pi} \cdot l_f \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} l = Z_1 - Z_2 \\ \Delta = UX_2 - UX_1 \end{cases}$$

Après détermination des coefficients A et B, on peut déterminer la courbure maximale par l'expression suivante :

$$X''_M = -A \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right) - B \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right)$$

L'ordonnée  $Z_M$  du point de courbure maximum, mathématiquement, est obtenu lorsque la dérivée de la courbure s'annule : soit alors  $X''' = 0$  donc :

$$Z_M = l_f + \left(\frac{l_f}{\pi}\right) \cdot \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

A partir du vecteur propre des nœuds 1 et 2, et à partir de la longueur de flambement des barres, on détermine ainsi :

- Les coefficients  $A = 3,922 \times 10^{-3}$  et  $B = 2,118 \times 10^{-3}$
- L'ordonnée du point de courbure maximale pour une barre  $Z_M = 3,650\text{m}$
- La déformée critique obtenue par la méthode des sinus  $\eta''_M = 8,256 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$

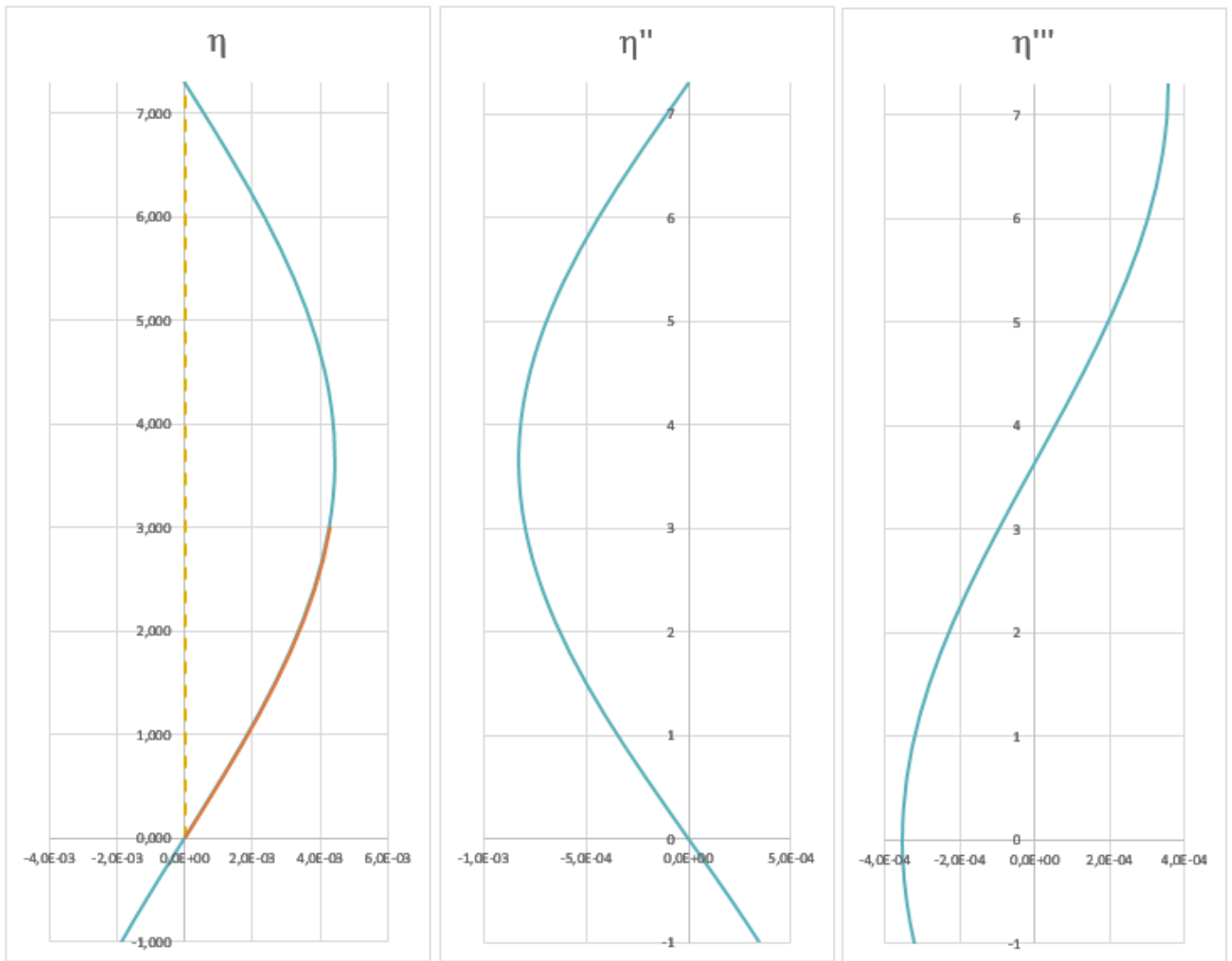


Figure 32 - Allure de la déformée critique méthode des sinus - Charges verticales

→ **Détermination de la courbure équivalente de la barre de référence :**

La courbure de la barre de référence est donnée par l'expression suivante :

$$e_{0\max}'' = e_0 \cdot \left( \frac{\pi}{l_f} \right)^2$$

$$e_0 = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot W_{el}}{A}$$

On a ainsi les valeurs suivantes :

Données	
$\alpha$	0,49
A (cm <sup>2</sup> )	28,274
$f_y$ (MPa)	320
I (cm <sup>4</sup> )	289,812
$v$ (cm)	5
E (MPa)	210.10 <sup>3</sup>
$N_{cr}$ (kN)	112,722

Paramètres	Formules	Résultats
$W_{el,y}$ (cm <sup>3</sup> )	$\frac{I_y}{v}$	57,962
$\bar{\lambda}$	$\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$	2,8331
$L_f$ (m)	$\pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{N_{cr}}}$	7,2999
$e_0$ (m)		0,02645
$e_{0\max}''$ (m <sup>-1</sup> )		4,899 x10 <sup>-3</sup>

→ **Détermination du facteur d'amplification  $C_{nor}$**  :

Le facteur d'amplification est défini de la manière suivante :

$$C_{nor} = \frac{e_0''}{\eta_M''}$$

On trouve ainsi  $C_{nor} = 5,934$

→ **Modélisation de la structure normée** :

Afin de représenter la structure normée, on calcule la déformée normée liée au 1er mode. On ajoute ensuite cette déformée normée aux coordonnées initiales de la structure. On obtient alors les coordonnées des nœuds de la structure déformée normée.

Les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau ci-dessous :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode UX (m)	Déformée liée au 1er mode normé	Coordonnées 1er mode	
	X (m)	Z (m)			Xf (m)	Zf (m)
1	0	0	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0
2	0	0,25	0,000478628	0,002840016	0,002840016	0,25
3	0	0,5	0,000951720	0,005647183	0,005647183	0,5
4	0	0,75	0,001413807	0,008389050	0,008389050	0,75
5	0	1	0,001859543	0,011033896	0,011033896	1
6	0	1,25	0,002283775	0,013551145	0,013551145	1,25
7	0	1,5	0,002681595	0,015911673	0,015911673	1,5
8	0	1,75	0,003048404	0,018088193	0,018088193	1,75
9	0	2	0,003379960	0,020055534	0,020055534	2
10	0	2,25	0,003672428	0,021790940	0,021790940	2,25
11	0	2,5	0,003922425	0,023274337	0,023274337	2,5
12	0	2,75	0,004127062	0,024488583	0,024488583	2,75
13	0	3	0,004283971	0,025419628	0,025419628	3
14	4	0	0,00000000	0,00000000	4,00000000	0
15	4	0,25	0,000478628	0,002840016	4,002840016	0,25
16	4	0,5	0,000951720	0,005647183	4,005647183	0,5
17	4	0,75	0,001413807	0,008389050	4,008389050	0,75
18	4	1	0,001859543	0,011033896	4,011033896	1
19	4	1,25	0,002283775	0,013551145	4,013551145	1,25
20	4	1,5	0,002681595	0,015911673	4,015911673	1,5
21	4	1,75	0,003048404	0,018088193	4,018088193	1,75
22	4	2	0,003379960	0,020055534	4,020055534	2
23	4	2,25	0,003672428	0,021790940	4,021790940	2,25
24	4	2,5	0,003922425	0,023274337	4,023274337	2,5
25	4	2,75	0,004127062	0,024488583	4,024488583	2,75
26	4	3	0,004283971	0,025419628	4,025419628	3

Figure 33 - Coordonnées des nœuds imperfection unique méthode des sinus - Charges verticales

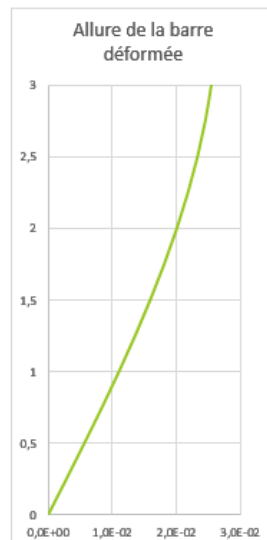


Figure 34 - Allure de la barre déformée imperfection unique méthode des sinus - Charges verticales

#### 4.2.2. Calcul de la structure avec imperfections initiales

On modélise donc la structure avec l'imperfection unique. Avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre, les sollicitations dans la structure sont :

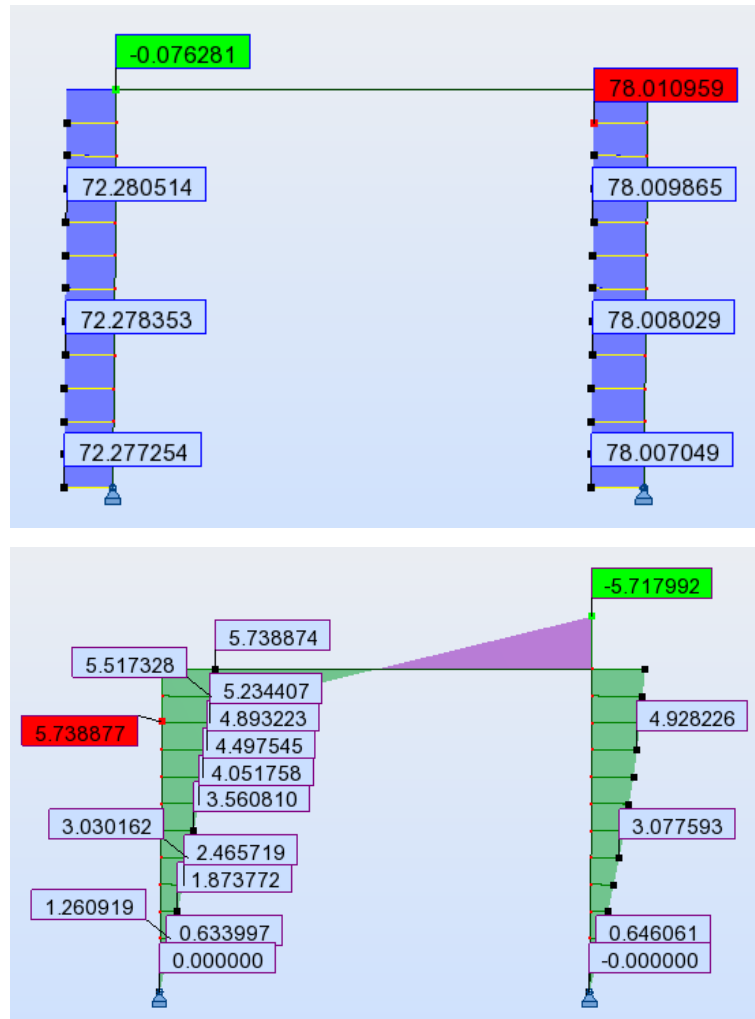


Figure 35 - Allure effort normal et moment de la structure avec imperfection unique méthode des sinus - Charges verticales

Dans la section la plus sollicitée, on a :

Données		Formules	Résultats
$N_{Ed}$ (kN)	78,0080	$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$	0,0862
$M_{Ed}$ (kN.m)	5,7180	$\frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	0,3083
$M_{el,Rd}$ (kN.m)	18,548	$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	0,3945
$N_{Rk}$ (kN)	904,768		

#### 4.2.3. Calcul de la structure sans imperfections initiales

Avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre de la structure non déformée, les sollicitations sont :

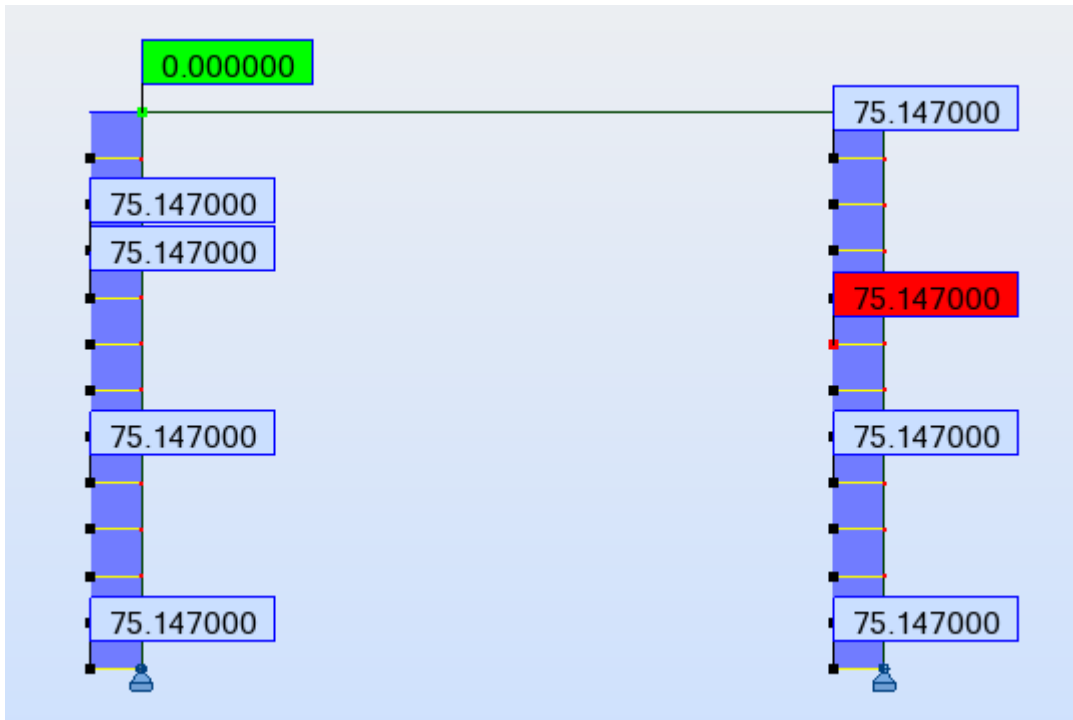


Figure 36 - Allure effort normal de la structure modélisée sans imperfections – Charges verticales

Dans même section que précédemment, on peut calculer le critère avec le coefficient  $\chi$  :

Données		Paramètres	Formules	Résultats
$N_{Ed}$ (kN)	75,1470	$\bar{\lambda}$	$\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$	2,8331
$N_{cr}$ (kN)	112,722	$\phi$	$0,5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$	5,1583
$\alpha$	0,49	$\chi$	$\frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}$	0,1056
$N_{Rk}$ (kN)	904,768		$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}}$	0,7865

On peut comparer les deux résultats obtenus :

Endommagement de la structure avec modélisation de l'imperfection initiale :	Endommagement de la structure sans modélisation de l'imperfection initiale :
$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}} = 0,3945$	$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}} = 0,7865$

On constate donc l'endommagement calculé à partir de la relation avec  $\chi$  est pratiquement le double de l'endommagement calculé en section lorsque l'imperfection initiale est modélisée.

Afin de voir, l'influence du niveau de chargement sur les critères, on fait varier l'intensité de la charge appliquée à la structure, ce qui fait varier le coefficient  $\alpha_{cr}$ , et l'on effectue les mêmes calculs d'endommagement que pour  $\alpha_{cr}=1,5$ .

#### 4.3. Résultats des critères d'endommagement existants en fonction du niveau de chargement

Après avoir fait varier l'intensité des charges appliquées à la structure, on répertorie dans le tableau ci-dessous les différents résultats obtenus :

Critère d'endommagement			
$\alpha_{cr}$	Structure avec imp.	Structure sans imp.	
	$(N_{Ed}/N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$\chi$	$(N_{Ed}/\chi \cdot N_{Rd})$
1,5	0,3945	0,1056	0,7865
2	0,2182	0,1056	0,5899
2,5	0,1538	0,1056	0,4719
3	0,1195	0,1056	0,3723
3,5	0,0980	0,1056	0,3371
4	0,0831	0,1056	0,2949
5	0,0639	0,1056	0,2359
6	0,0520	0,1056	0,1966
7	0,0438	0,1056	0,1685
8	0,0379	0,1056	0,1475
9	0,0333	0,1056	0,1311
10	0,0298	0,1056	0,1180
11	0,0269	0,1056	0,1072
12	0,0246	0,1056	0,0983
13	0,0226	0,1056	0,0907
15	0,0194	0,1056	0,0786
17	0,0171	0,1056	0,0694
20	0,0144	0,1056	0,0590

Figure 37 – Résultats critères d'endommagements existants - Charges verticales

On obtient donc les résultats suivants :

On remarque que l'on observe une différence entre l'endommagement de la structure avec l'imperfection initiale et l'endommagement de la structure sans imperfection initiale. Cette différence provient du coefficient  $\chi$  qui est surdimensionné.

La problématique est donc de définir un nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$ , qui permettent d'obtenir le même endommagement lorsque l'on modélise l'imperfection initiale et lorsque l'on ne la modélise pas.

#### 4.4. Définition d'un nouveau coefficient de flambement $\chi^*$ et calcul d'endommagement

On considère une barre sollicitée par un effort de compression simple quelconque, d'intensité  $N$ , avec  $N < N_{b,Rd}$ . L'endommagement de cette barre sera donc :

$$\frac{N}{\chi^* \cdot N_{Rd}} \quad (1)$$

Le part de cet endommagement dû à l'effort normal de compression, est :  $\frac{N}{N_{Rd}}$

Ainsi, la part de l'endommagement dû à la flexion provoquée par le flambement est :

$$\frac{N}{\chi^* \cdot N_{Rd}} - \frac{N}{N_{Rd}} = \left( \frac{1}{\chi^*} - 1 \right) \cdot \frac{N}{N_{Rd}} \quad (2)$$

On peut également écrire le critère de résistance linéaire en flambement :

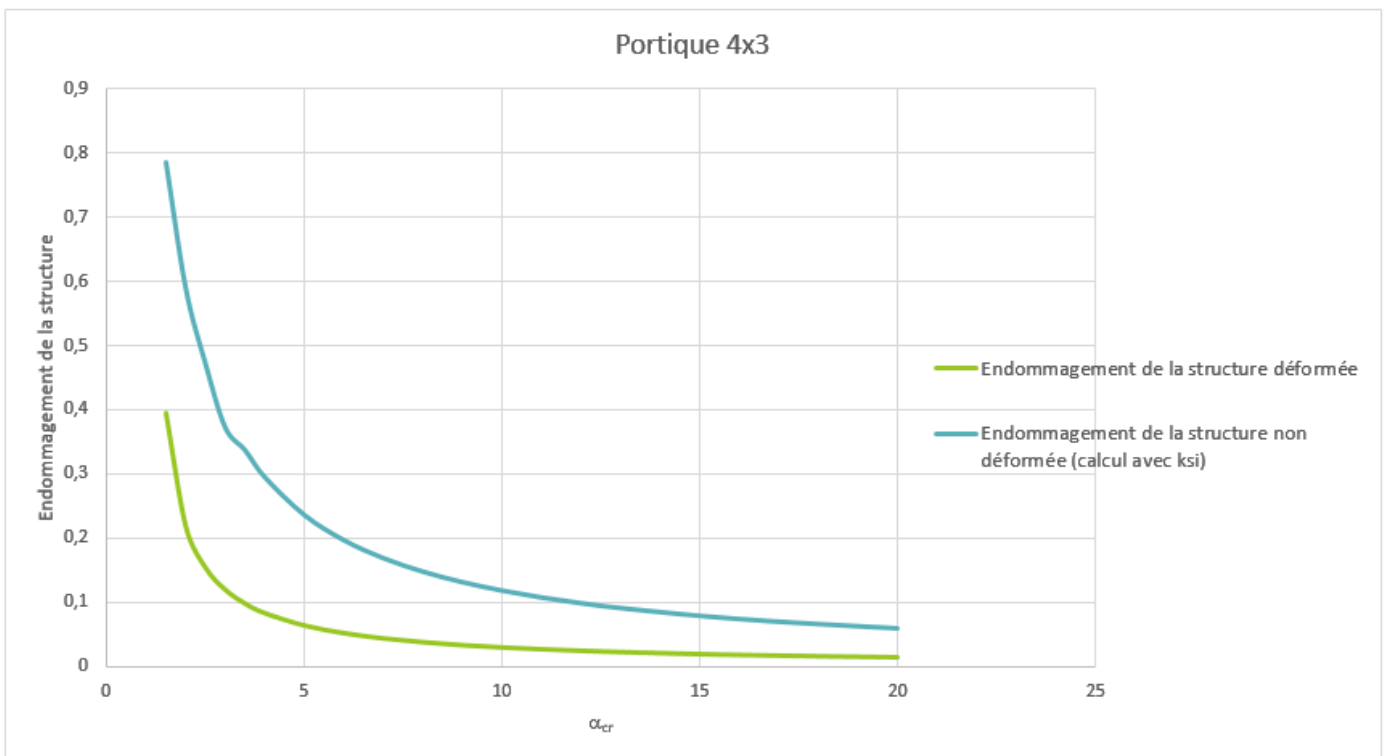


Figure 38 - Comparaison des deux critères d'endommagements existants - Charges verticales

$$\frac{N}{N_{Rd}} + \frac{N \cdot e_0}{M_{Rd}} \cdot \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1} \quad \text{avec} \quad e_0 = \alpha \cdot (\lambda - 0,2) \cdot \frac{M_{Rd}}{N_{Rd}} \quad (3)$$

La part de l'endommagement dû à la flexion provoquée par le flambement est donc ici :

$$\frac{N.e_0}{M_{Rd}} \cdot \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1} \quad (4)$$

On peut donc comparer les deux endommagements dus la flexion provoquée par le flambement (éq. (2) et (4)). On a donc :

$$\frac{N}{M_{Rd}} \cdot \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{M_{Rd}}{N_{Rd}} \cdot \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1} = \left( \frac{1}{\chi^*} - 1 \right) \cdot \frac{N}{N_{Rd}} \quad (5)$$

d'où :

$$\frac{1}{\chi^*} = 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1} \quad (6)$$

On peut donc arriver à la formulation d'un nouveau critère  $\chi^*$  :

$$\chi^* = \frac{1}{1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}} \quad (7)$$

On applique ce nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  aux différents cas étudiés précédemment.

Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau ci-dessous :

$\alpha_{cr}$	$N_{Ed}$ (kN)	$\chi^* = \frac{1}{1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}}$	$\frac{N_{Ed}}{\chi^* \cdot N_{Rd}}$
1,5	75,1470	0,2053	0,4045
2	56,3605	0,2793	0,2230
2,5	45,0884	0,3174	0,1570
3	37,5730	0,3407	0,1219
3,5	32,2060	0,3563	0,0999
4	28,18025	0,3676	0,0847
5	22,5445	0,3827	0,0651
6	18,7868	0,3924	0,0529
7	16,1029	0,3992	0,0446
8	14,0901	0,4010	0,0385
9	12,5245	0,4079	0,0339
10	11,2720	0,4109	0,0303
11	10,2474	0,4134	0,0274
12	9,3934	0,4154	0,0250
13	8,6708	0,4171	0,0230
15	7,5147	0,4197	0,0198
17	6,6306	0,4218	0,0174
20	5,6320	0,4241	0,0147

Figure 39 - Tableau des résultats critère d'endommagement avec  $\chi^*$  - Charges verticales

#### 4.5. Récapitulatif des résultats obtenus sous charges verticales uniquement



L'ensemble des résultats des endommagements calculés pour le portique 4x3m, chargé verticalement, sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Portique 4x3							
Critère d'endommagement						Déformée initiale maximale	
$\alpha_{cr}$	Structure avec imp. ( $N_{Ed}/N_{Rd}$ ) + ( $M_{Ed}/M_{Rd}$ )	$\chi$	Structure sans imp.			$\alpha_{cr}$	$\eta_{init,max}$ (m)
			( $N_{Ed}/\chi \cdot N_{Rd}$ )	$\chi^*$	( $N_{Ed}/\chi^* \cdot N_{Rd}$ )		
1,5	0,3945	0,1056	0,7865	0,2053	0,4045	1,5	0,025419628
2	0,2182	0,1056	0,5899	0,2793	0,2230	2	0,025423322
2,5	0,1538	0,1056	0,4719	0,3174	0,1570	2,5	0,025421724
3	0,1195	0,1056	0,3723	0,3407	0,1219	3	0,025420718
3,5	0,0980	0,1056	0,3371	0,3563	0,0999	3,5	0,025420498
4	0,0831	0,1056	0,2949	0,3676	0,0847	4	0,025421383
5	0,0639	0,1056	0,2359	0,3827	0,0651	5	0,025422110
6	0,0520	0,1056	0,1966	0,3924	0,0529	6	0,025421338
7	0,0438	0,1056	0,1685	0,3992	0,0446	7	0,025422763
8	0,0379	0,1056	0,1475	0,4041	0,0385	8	0,025421634
9	0,0333	0,1056	0,1311	0,4079	0,0339	9	0,025422249
10	0,0298	0,1056	0,1180	0,4109	0,0303	10	0,025421673
11	0,0269	0,1056	0,1072	0,4134	0,0274	11	0,025422254
12	0,0246	0,1056	0,0983	0,4154	0,0250	12	0,025421808
13	0,0226	0,1056	0,0907	0,4171	0,0230	13	0,025422653
15	0,0194	0,1056	0,0786	0,4197	0,0198	15	0,025422282
17	0,0171	0,1056	0,0694	0,4218	0,0174	17	0,025422142
20	0,0144	0,1056	0,0590	0,4241	0,0147	20	0,025422184

Figure 40 - Récapitulatif des résultats d'endommagement pour un chargement vertical

On peut donc observer, dans un premier temps, que l'imperfection initiale maximale ne dépend pas de l'intensité de la charge de compression. En effet, lorsque l'on fait varier  $\alpha_{cr}$ , les valeurs de  $\eta_{init,max}$  sont constantes.

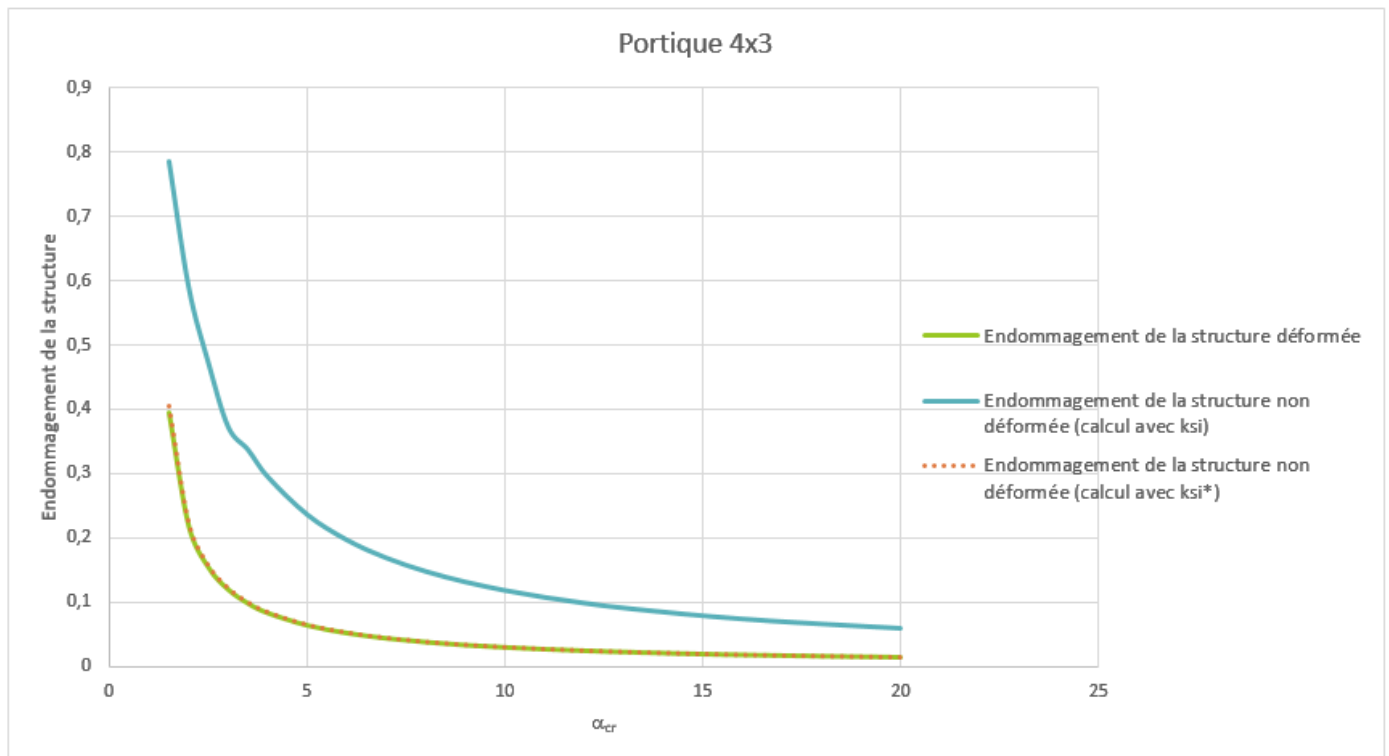


Figure 41 - Comparaison des critères d'endommagement pour un chargement vertical

D'après la figure ci-dessus, on constate les endommagements calculés à partir du critère avec le nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  sont les mêmes que ceux obtenus lorsque la structure est déformée avec l'imperfection initiale. Ainsi, pour cet exemple, le nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  répond bien à la problématique.

Cependant, il est nécessaire de savoir si ces résultats peuvent également être observés pour d'autres structures et sous charges verticales et horizontales. Pour cela, dans la partie, les calculs sont effectués pour ce même portique, chargé verticalement et horizontalement. De plus, ces différents calculs d'endommagement sous charges verticales ont également été menés pour une tour auto-stable 8x3m. Les caractéristiques géométriques de cette tour sont présentées en annexe 1 ; et les résultats des différents critères d'endommagement sont présentés en annexe 2.

## 5. Critères d'endommagement d'une structure chargée verticalement & horizontalement

### 5.1. Critères d'endommagement étudiés

Afin de calculer l'endommagement d'une structure, chargée verticalement et horizontalement, en prenant en compte l'effet des imperfections initiales, les critères peuvent être les suivants :

#### → Critères existants :

- Imperfection initiale modélisée – Calcul des sollicitations au 2<sup>nd</sup> ordre : Vérification en section :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}} \leq 1$$

- Imperfection initiale non modélisée – Calcul des sollicitations au 1<sup>er</sup> ordre : Vérification de la stabilité des poteaux dans le plan :

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}} + k_{yy} \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}} \leq 1$$

où :  $\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}$  et  $k_{yy} = C_{my,0} \times \frac{\mu}{1 - N_{Ed}/N_{cr}} \times \frac{1}{C_{yy}}$

#### → Nouveaux critères :

- Imperfection initiale non modélisée – Calcul des sollicitations au 2<sup>nd</sup> ordre :

$$\frac{N_{Ed}}{\chi^* \cdot N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$$

où :  $\chi^* = \frac{1}{1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \times \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}}$

- Imperfection initiale non modélisée – Calcul des sollicitations au 2<sup>nd</sup> ordre :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed} + M_{F_v, e_0}}{M_{el,Rd}}$$

où :  $M_{F_v, e_0}$  est le moment additionnel dû aux charges verticales et à l'effet de l'imperfection initiale qui n'est pas modélisée.

A noter, encore une fois, que le parti pris est d'effectuer les calculs à partir de critères de résistance élastique linéaire.

## 5.2. Application au portique 4x3m

## 5.2.1. Données

Géométrie – Charges

On considère un portique bi-articulé, de dimension 4x3m. Le portique est réalisé en tube creux rond de 100x10mm. Les charges appliquées à la structure sont appliquées en tête de chaque montant, comme sur la figure ci-dessous.

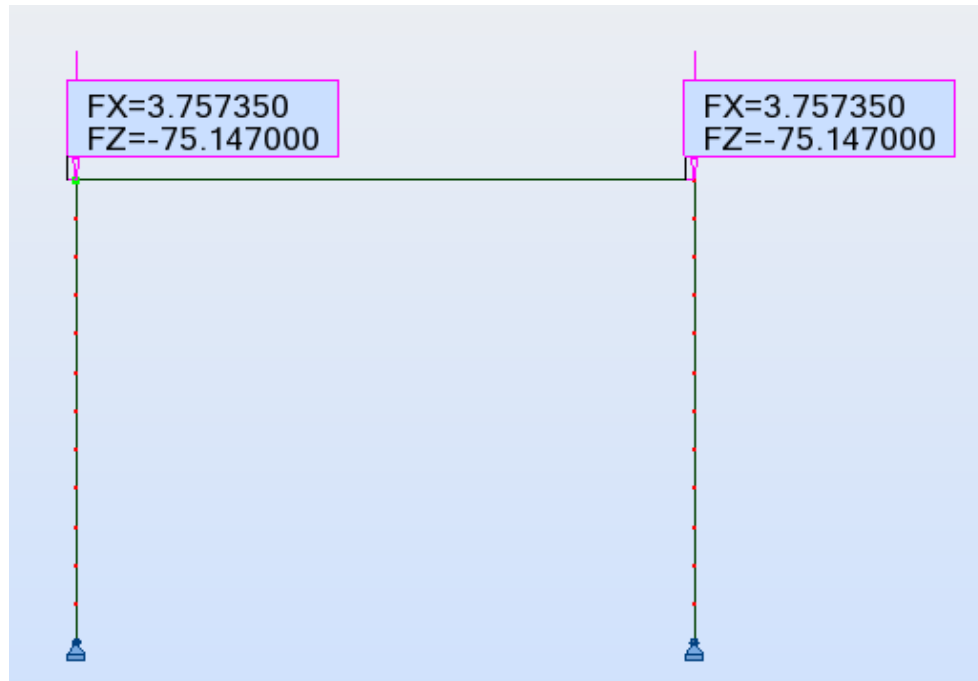


Figure 42 - Géométrie et charges appliquées - Charges verticales et horizontales

Coefficient critique

$$\alpha_{cr} = 1,4997$$

Imperfection unique – méthode des sinus

Cette méthode est basée sur la définition d'une imperfection unique, globale et locale. Le facteur d'amplification  $C_{nor}$  est défini comme étant le rapport entre la courbure maximale de la barre de référence et la courbure du montant le plus sollicité de la structure.

On détermine le facteur  $C_{nor}$  en exploitant la courbure maximale déterminée grâce à une expression sinusoïdale de la déformée de la structure.

→ Détermination de la courbure maximale au droit de la section critique :

Afin de déterminer cette courbure maximale, on utilise les déplacements et rotations obtenus pour les points proches de la section critique. La section critique est celle où la combinaison de l'effort normal et du moment fléchissant est la plus défavorable. Dans notre cas, elle se situe dans le montant de droite.

Ces valeurs sont données dans le tableau ci-dessous :

Noeuds	UX (m)	RY (rad)	Z (m)
24	0,003929724	0,000893278	2,5
26	0,004281998	0,000511688	3
Hauteur du montant : 3 m			
Longueur de flambement : 6,6278 m			

L'équation de la déformée est donnée par l'expression suivante :

$$X = A \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l_f}\right) + C \cdot z + D$$

Soit une équation à quatre inconnues. En écrivant l'expression de UX aux nœuds 1 et 2, ainsi que l'expression des rotations RY (dérivée de X) aux nœuds 1 et 2, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - 1 \right] + B \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - \frac{\pi \cdot l}{l_f} \right] = \Delta - RY_1 \cdot l \\ A \cdot \left[ -\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) \right] + B \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{l_f}\right) - 1 \right] = \frac{RY_2 - RY_1}{\pi} \cdot l_f \end{cases} \quad \text{où : } \begin{cases} l = Z_1 - Z_2 \\ \Delta = UX_2 - UX_1 \end{cases}$$

Après détermination des coefficients A et B, on peut déterminer la courbure maximale par l'expression suivante :

$$X''_M = -A \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right) - B \cdot \left(\frac{\pi}{l_f}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z_M}{l_f}\right)$$

L'ordonnée  $Z_M$  du point de courbure maximum, mathématiquement, est obtenu lorsque la dérivée de la courbure s'annule : soit alors  $X''' = 0$  donc :

$$Z_M = l_f + \left(\frac{l_f}{\pi}\right) \cdot \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

A partir du vecteur propre des nœuds 1 et 2, et à partir de la longueur de flambement des barres, on détermine ainsi :

- Les coefficients  $A = 3,271 \times 10^{-3}$  et  $B = 1,328 \times 10^{-3}$
- L'ordonnée du point de courbure maximale pour une barre  $Z_M = 3,314\text{m}$
- La déformée critique obtenue par la méthode des sinus  $\eta''_M = 7,931 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$

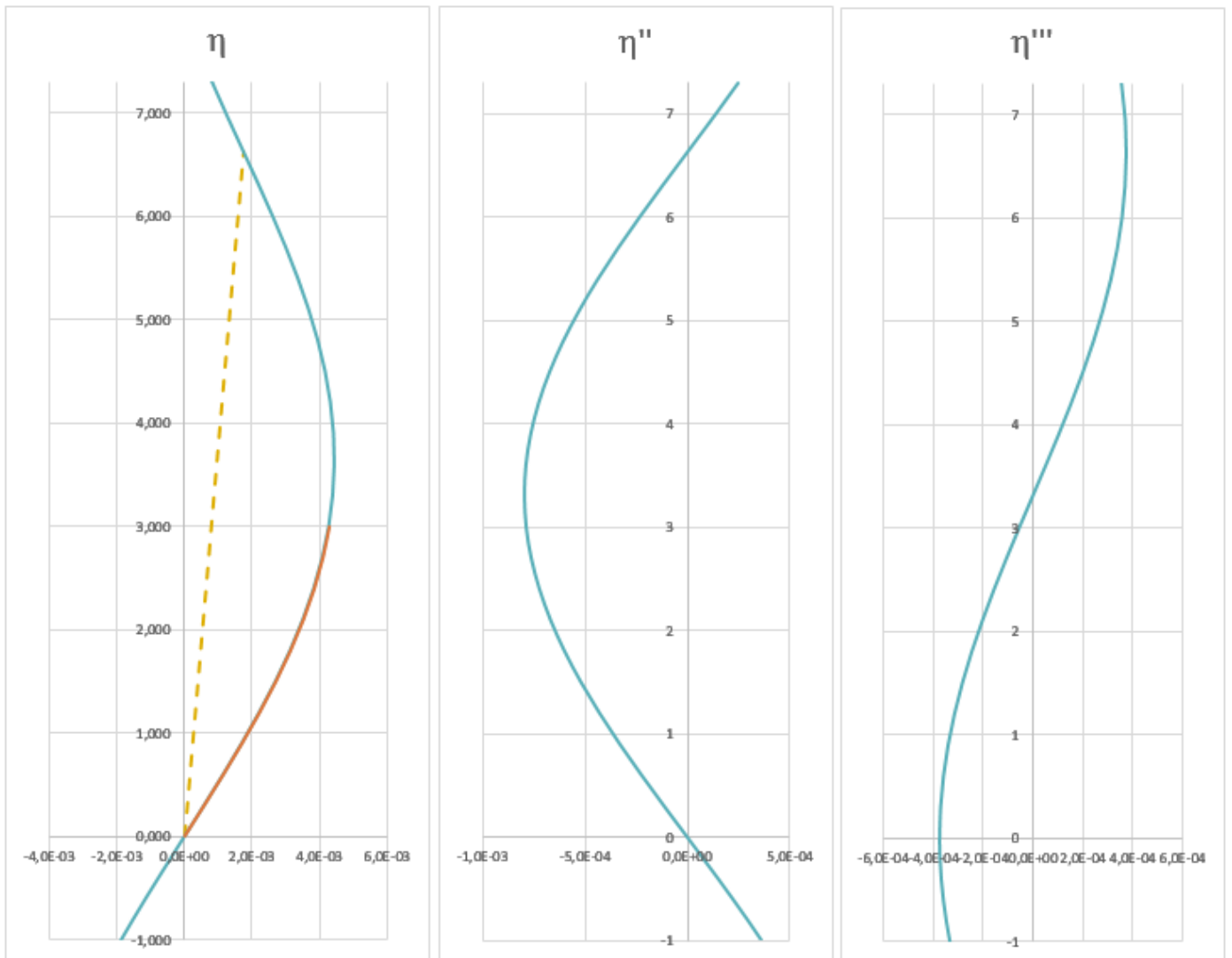


Figure 43 - Allure de la déformée critique méthode des sinus - Charges verticales et horizontales

→ **Détermination de la courbure équivalente de la barre de référence :**

La courbure de la barre de référence est donnée par l'expression suivante :

$$e_{0\max}'' = e_0 \cdot \left( \frac{\pi}{l_f} \right)^2$$

$$e_0 = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot W_{el}}{A}$$

On a ainsi les valeurs suivantes :

Données	
$\alpha$	0,49
A (cm <sup>2</sup> )	28,274
$f_y$ (MPa)	320
I (cm <sup>4</sup> )	289,812
$v$ (cm)	5
E (MPa)	210.10 <sup>3</sup>
$N_{cr}$ (kN)	136,736

Paramètres	Formules	Résultats
$W_{el,y}$ (cm <sup>3</sup> )	$\frac{I_y}{v}$	57,962
$\bar{\lambda}$	$\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$	2,5723
$L_f$ (m)	$\pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{N_{cr}}}$	6,628
$e_0$ (m)		0,02379
$e_{0\max}''$ (m <sup>-1</sup> )		5,354 x 10 <sup>-3</sup>

→ **Détermination du facteur d'amplification  $C_{nor}$**  :

Le facteur d'amplification est défini de la manière suivante :

$$C_{nor} = \frac{e_0''}{\eta_M''}$$

On trouve ainsi  $C_{nor} = 6,751$

→ **Modélisation de la structure normée** :

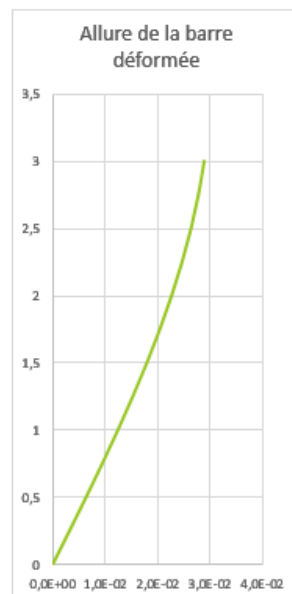
Afin de représenter la structure normée, on calcule la déformée normée liée au 1er mode. On ajoute ensuite cette déformée normée aux coordonnées initiales de la structure. On obtient alors les coordonnées des nœuds de la structure déformée normée.

Les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau ci-dessous :

Nœuds	Coordonnées initiales		Déformée liée au 1er mode UX (m)	Déformée liée au 1er mode normé	Coordonnées 1er mode	
	X (m)	Z (m)			Xf (m)	Zf (m)
1	0	0	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0
2	0	0,25	0,000473892	0,003199096	0,003199096	0,25
3	0	0,5	0,000942547	0,006362838	0,006362838	0,5
4	0	0,75	0,001400777	0,009456205	0,009456205	0,75
5	0	1	0,001843489	0,012444814	0,012444814	1
6	0	1,25	0,002265729	0,015295223	0,015295223	1,25
7	0	1,5	0,002662732	0,017975266	0,017975266	1,5
8	0	1,75	0,003029960	0,020454306	0,020454306	1,75
9	0	2	0,003363148	0,022703554	0,022703554	2
10	0	2,25	0,003658340	0,024696302	0,024696302	2,25
11	0	2,5	0,003911925	0,026408174	0,026408174	2,5
12	0	2,75	0,004120671	0,027817353	0,027817353	2,75
13	0	3	0,004281755	0,028904780	0,028904780	3
14	4	0	0,000000000	0,000000000	4,000000000	0
15	4	0,25	0,000483248	0,003262255	4,003262255	0,25
16	4	0,5	0,000960642	0,006484992	4,006484992	0,5
17	4	0,75	0,001426411	0,009629252	4,009629252	0,75
18	4	1	0,001874947	0,012657177	4,012657177	1
19	4	1,25	0,002300883	0,015532537	4,015532537	1,25
20	4	1,5	0,002699169	0,018221240	4,018221240	1,5
21	4	1,75	0,003065144	0,020691822	4,020691822	1,75
22	4	2	0,003394598	0,022915863	4,022915863	2
23	4	2,25	0,003683836	0,024868417	4,024868417	2,25
24	4	2,5	0,003929724	0,026528330	4,026528330	2,5
25	4	2,75	0,004129738	0,027878561	4,027878561	2,75
26	4	3	0,004281998	0,028906421	4,028906421	3

Figure 45 - Coordonnées des nœuds imperfection unique méthode des sinus - Charges verticales et horizontales

Figure 44 - Allure de la barre déformée imperfection unique méthode des sinus - Charges verticales et horizontales



### 5.2.2. Calcul de la structure avec imperfections initiales

On modélise donc la structure avec l'imperfection unique. Avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre, les sollicitations dans la structure sont :

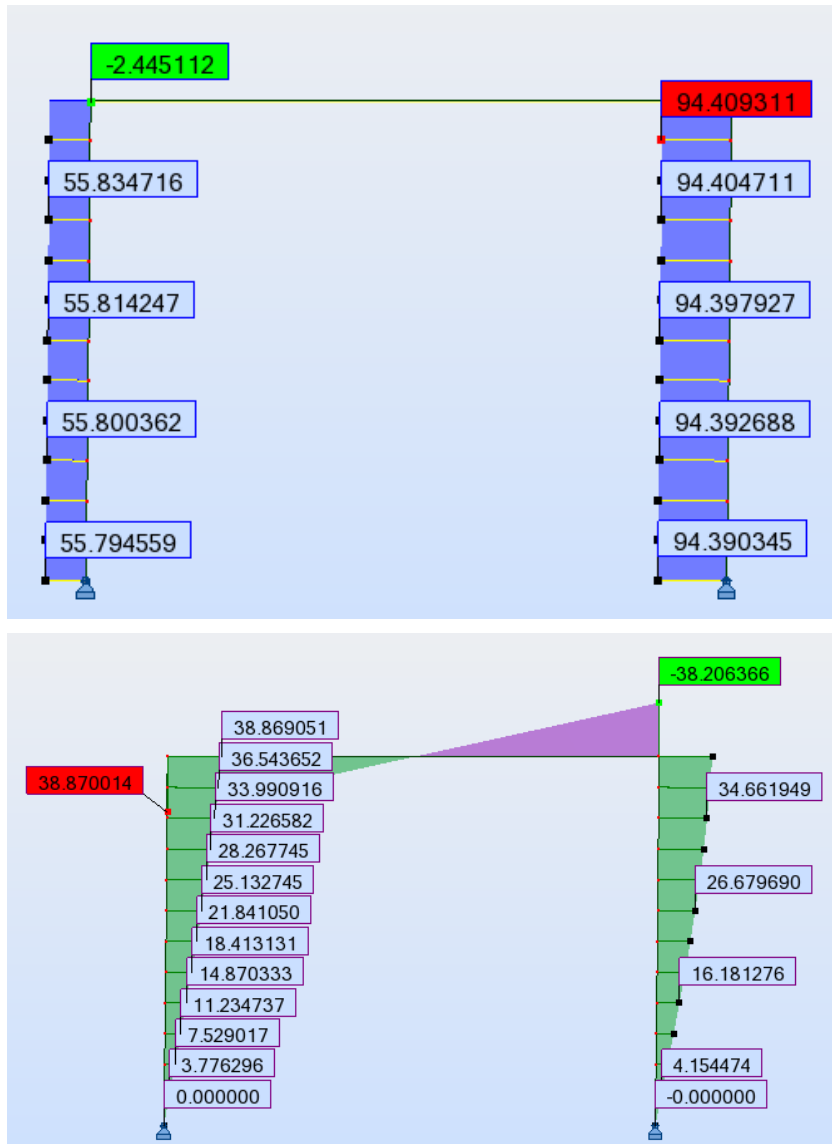


Figure 46 - Allure effort normal et moment de la structure avec imperfection unique méthode des sinus - Charges verticales et horizontales

Dans la section la plus sollicitée, on a :

Données		Formules	Résultats
$N_{Ed}$ (kN)	94,4093	$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$	0,1043
$M_{Ed}$ (kN.m)	38,2064	$\frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	2,0599
$M_{el,Rd}$ (kN.m)	18,548	$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	2,1642
$N_{Rk}$ (kN)	904,768		





5.2.3. Calcul de la structure sans imperfections initiales

a/ Critère d'endommagement avec coefficient  $k_{yy}$ :

Avec un calcul au 1<sup>er</sup> ordre de la structure non déformée, les sollicitations sont :

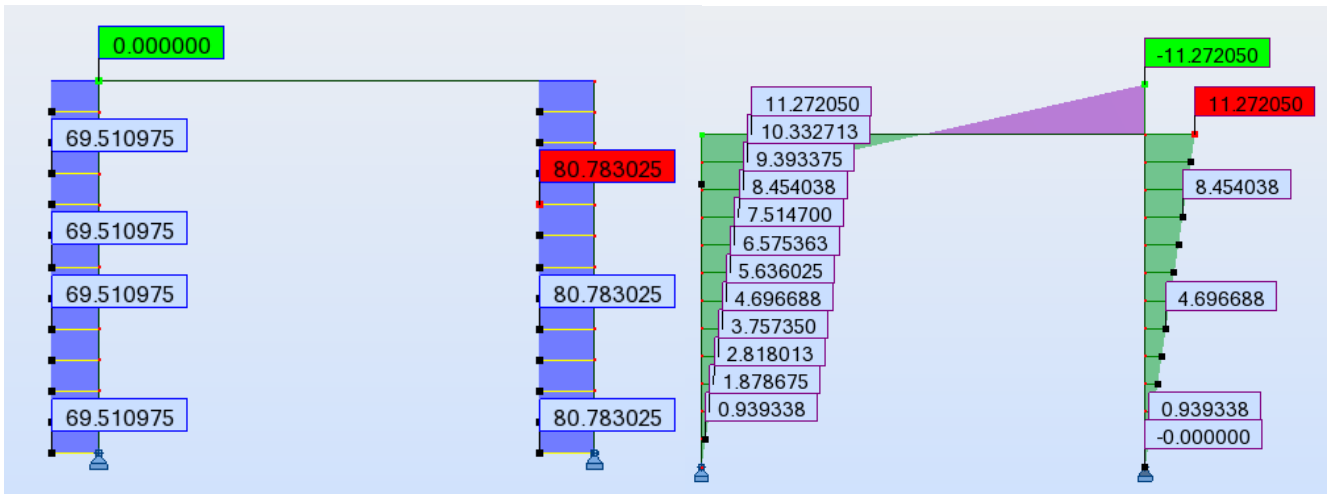


Figure 47 - Allure effort normal et moment de la structure sans imperfection unique avec un calcul au 1<sup>er</sup> ordre - Charges verticales et horizontales

A partir de ces sollicitations, on peut en déduire la répartition des moments sur la longueur de flambement.

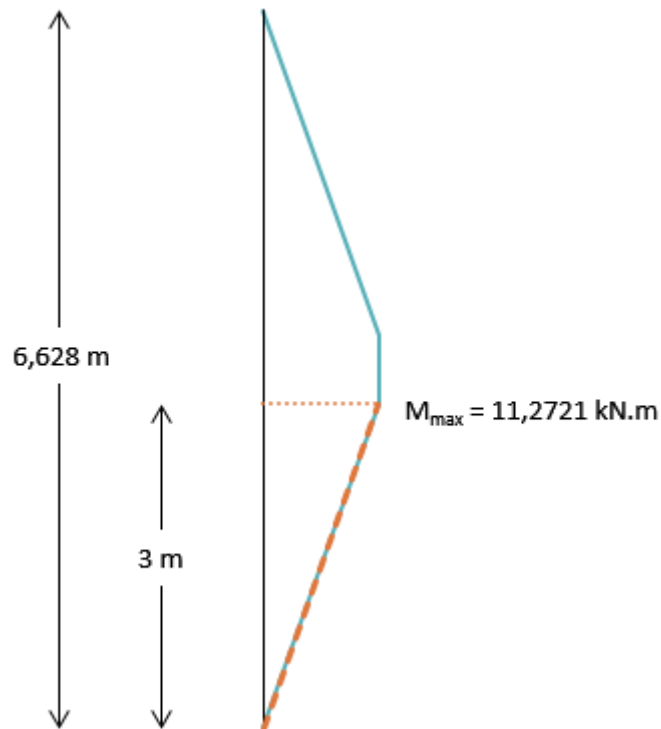


Figure 48 - Allure du moment sur la longueur de flambement - Charges verticales et horizontales

Données		Paramètres	Formules	Résultats
$N_{Ed}$ (kN)	80,7830	$C_{my,0}$	$1 + \left( \frac{\pi^2 \cdot EI_y \cdot \delta_x}{L^2 \cdot M_{Ed}} - 1 \right) \cdot \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}$	0,9390
$M_{Ed}$ (kN.m)	11,2721	$\bar{\lambda}$	$\sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}$	2,5723
$f_y$ (MPa)	320	$\phi$	$0,5 \left[ 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$	4,3897
$E$ (MPa)	$210 \times 10^3$	$\chi$	$\frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}$	0,1258
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	289,812	$\mu$	$\frac{1 - N_{Ed}/N_{cr}}{1 - \chi \cdot N_{Ed}/N_{cr}}$	0,4421
$A$ (cm <sup>2</sup> )	28,274	$k_{yy}$	$C_{my,0} \times \frac{\mu}{1 - N_{Ed}/N_{cr}}$	1,0144
$L$ (m)	6,6278	$M_{el,Rd}$ (kN.m)	$\frac{W_{el,y} \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$	18,548
$N_{cr}$ (kN)	136,7363	$N_{Rd}$ (kN)	$\frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$	904,768
$W_{pl,y}$ (cm <sup>3</sup> )	81,333		$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{rd}}$	0,7095
$W_{el,y}$ (cm <sup>3</sup> )	57,962		$k_{yy} \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	0,6165
$w_y$	1,4032		$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	1,3260
$\delta_x$ (m)	0,073917			

**b/ Critère d'endommagement avec le coefficient de flambement  $\chi^*$** 

Avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre de la structure non déformée, les sollicitations sont :

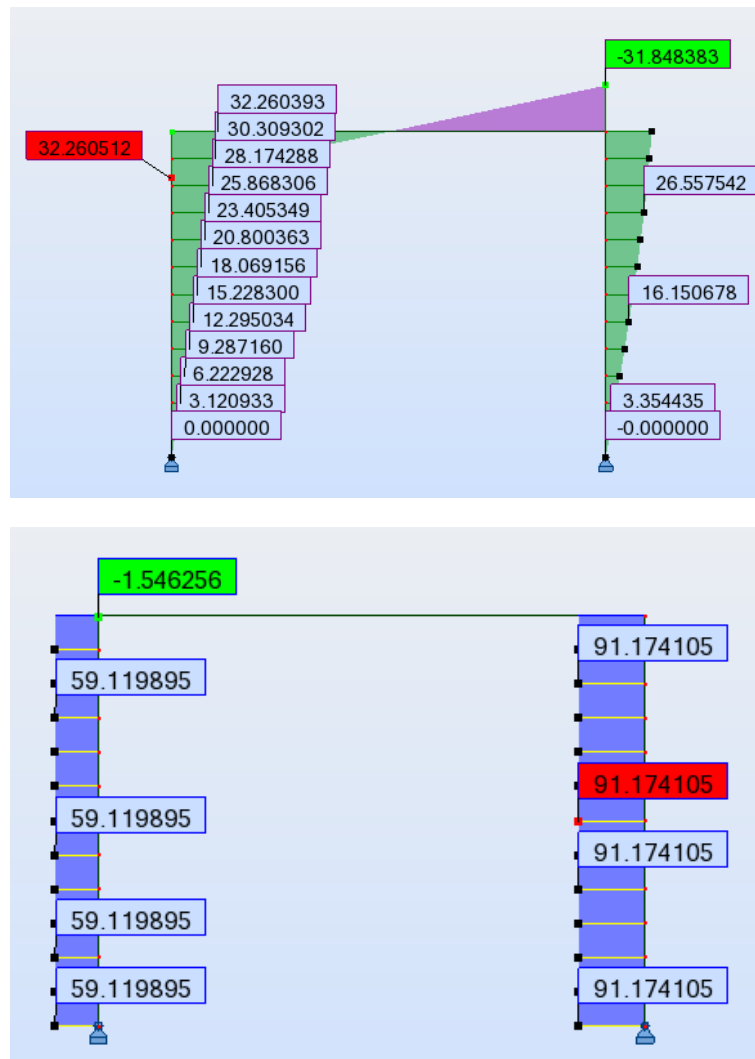


Figure 49 - Allure effort normal et moment de la structure sans imperfection unique avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre - Charges verticales et horizontales

Dans la section la plus sollicitée, on a :

Données		Formules	Résultats
$N_{Ed}$ (kN)	91,1741	$\chi^* = \frac{1}{1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}}$	0,2228
$M_{Ed}$ (kN.m)	31,8484	$\frac{N_{Ed}}{\chi^* \cdot N_{Rd}}$	0,4523
$M_{el,Rd}$ (kN.m)	18,548	$\frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	1,7171
$N_{Rk}$ (kN)	904,768	$\frac{N_{Ed}}{\chi^* \cdot N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$	2,1694
$\bar{\lambda}$	2,5723		

### c/ Critère d'endommagement à partir du calcul du moment dû à l'imperfection non modélisée

Avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre de la structure non déformée, les sollicitations sont :

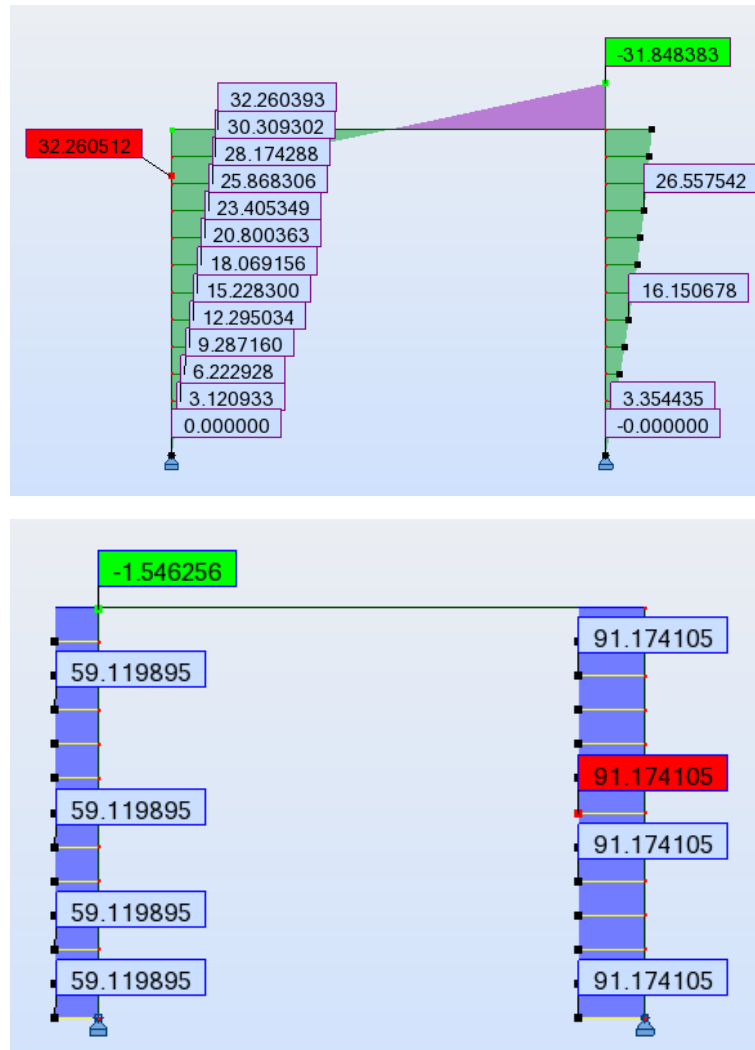


Figure 50 - Allure effort normal et moment de la structure sans imperfection unique avec un calcul au 2<sup>nd</sup> ordre - Charges verticales et horizontales

Dans la section la plus sollicitée, on a :

Données		Formules	Résultat s
$N_{Ed}$ (kN)	91,1741	$e_0 = \frac{\alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) \cdot w_{el}}{A}$	0,02383
$M_{Ed}$ (kN.m)	31,8484	$M_{F_v, e_0}^II = F_v \times e_0 \times \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}$	5,3742
$M_{el, Rd}$ (kN.m)	18,548	$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$	0,1008
$N_{Rk}$ (kN)	904,768	$\frac{M_{Ed}}{M_{el, Rd}}$	2,0068

$\bar{\lambda}$	2,5723	$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed} + M_{F_v, e_0}}{M_{el, Rd}}$	2,1076
-----------------	--------	--	--------

Afin de voir, l'influence du niveau de chargement sur les critères, on fait varier l'intensité de la charge appliquée à la structure, ce qui fait varier le coefficient  $\alpha_{cr}$ , et l'on effectue les mêmes calculs que pour  $\alpha_{cr}=1,5$ .

### 5.3. Résultats des critères d'endommagement sous charges verticales et horizontales

L'ensemble des résultats des endommagements calculés pour le portique 4x3m, chargé verticalement et horizontalement, sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Portique 4x3							
Critère d'endommagement					Déformée initiale maximale		
$\alpha_{cr}$	Structure avec imp.		Structure sans imp.			$\alpha_{cr}$	$\eta_{init, max}$ (m)
	$(N_{Ed}/N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/\chi \cdot N_{Rd})+k_{yy} \cdot (M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/\chi^* \cdot N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/N_{Rd})+(M_{Ed}+M_{F_v, e_0})/M_{Rd}$		
1,4997	2,1642	1,3260	2,1694	2,1076	1,4997	0,028906421	
1,9998	1,0597	1,0248	1,1162	1,0946	1,9998	0,027842373	
2,4997	0,7550	0,8276	0,7569	0,7447	2,4997	0,027474705	
2,9998	0,5727	0,6927	0,5740	0,5657	2,9998	0,027286479	
3,4997	0,4618	0,5952	0,4629	0,4566	3,4997	0,027174028	
3,9997	0,3871	0,5216	0,3880	0,3830	3,9997	0,027097746	
4,9996	0,2928	0,4180	0,2934	0,2899	4,9996	0,027004004	
5,9995	0,2355	0,3487	0,2360	0,2333	5,9995	0,026946262	
6,9995	0,1970	0,2991	0,1974	0,1952	6,9995	0,026908576	
7,9994	0,1693	0,2618	0,1697	0,1678	7,9994	0,026880347	
8,9994	0,1485	0,2425	0,1488	0,1472	8,9994	0,026859968	
9,9993	0,1322	0,2096	0,1325	0,1311	9,9993	0,026843178	
10,9991	0,1192	0,1905	0,1195	0,1182	10,9991	0,026831726	
11,9991	0,1085	0,1747	0,1087	0,1076	11,9991	0,026820042	
12,9991	0,0995	0,1613	0,0998	0,0987	12,9991	0,026811074	
14,9990	0,0854	0,1398	0,0856	0,0848	14,9990	0,026797505	
16,9989	0,0748	0,1234	0,0750	0,0743	16,9989	0,026787215	
19,9988	0,0631	0,1049	0,0633	0,0626	19,9988	0,026776564	

Figure 52 – Récapitulatif des résultats d'endommagement pour un chargement vertical et horizontal

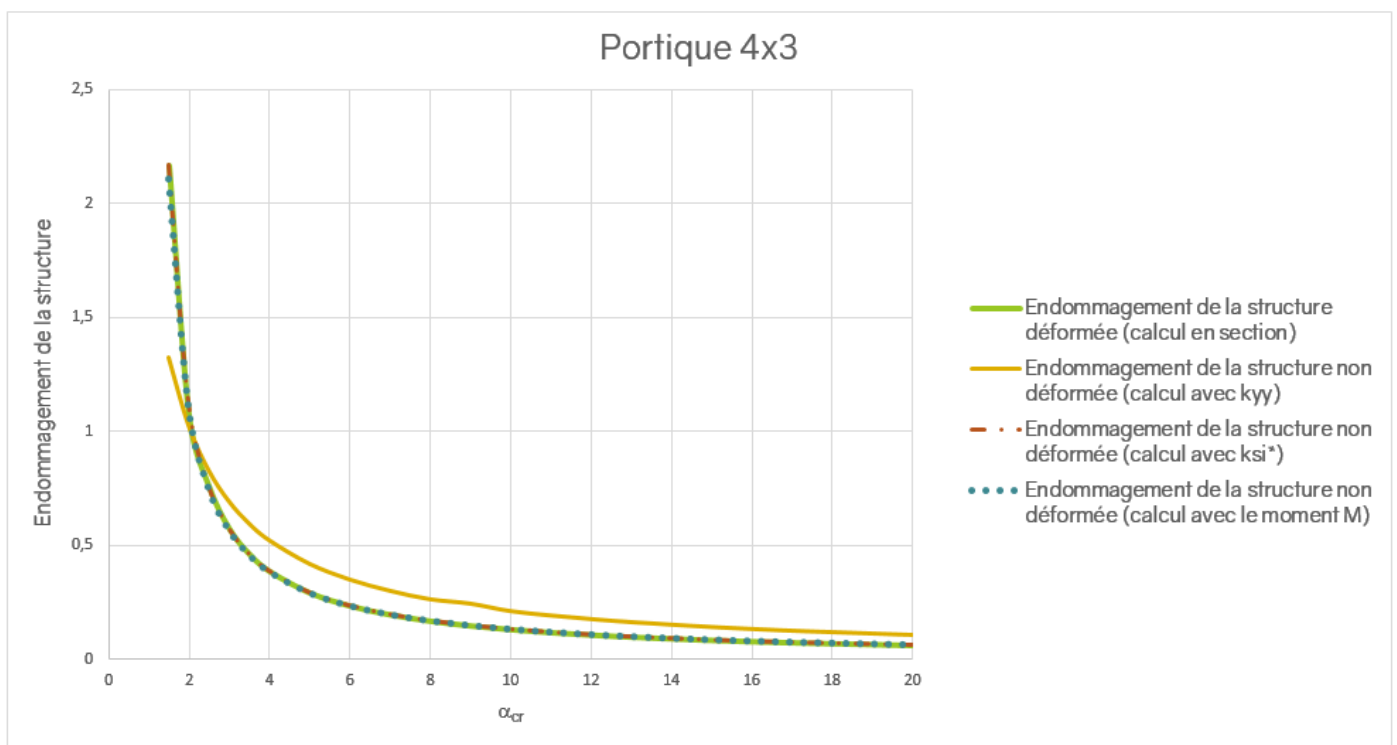


Figure 51 – Comparaison des critères d'endommagement pour un chargement vertical et horizontal



On compare donc les différents critères d'endommagement calculés. On constate que l'endommagement calculé à partir du critère d'endommagement avec  $k_{yy}$ , est supérieur à l'endommagement calculé à partir de la structure modélisée avec les imperfections initiales. Cette différence est due au coefficient de flambement  $\chi$ .

Deux nouveaux critères ont également été calculés, à savoir :

1)  $\frac{N_{Ed}}{\chi^* \cdot N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$  : les sollicitations sont calculées au 2<sup>nd</sup> ordre, l'imperfection initiale n'est pas générée dans la structure mais elle est prise en compte par l'intermédiaire du coefficient  $\chi^*$

2)  $\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed} + M_{F_v, e_0}}{M_{el,Rd}}$  : les sollicitations sont calculées au 2<sup>nd</sup> ordre, l'imperfection initiale n'est pas générée dans la structure mais elle est prise en compte avec le moment  $M_{F_v, e_0}$ , qui correspond au moment additionnel de la charge verticale  $F_v$  appliquée à la structure avec l'effet de l'imperfection initiale  $\eta_{init,max}$ .

Ces deux nouveaux critères permettent d'obtenir des résultats d'endommagement très proches de ceux obtenus avec la structure où l'imperfection initiale est modélisée. Cependant, on peut tout de même noter que le critère avec  $\chi^*$  permet d'obtenir des valeurs légèrement supérieures, ce qui permet d'être un peu sécuritaire.

On peut également s'intéresser à l'évolution de l'imperfection initiale maximale (cf. figure ). On constate que pour des valeurs de  $\alpha_{cr}$  faibles, la déformée initiale dépend des charges appliquées à la structure. Ainsi, pour des valeurs de  $\alpha_{cr}$ , il est nécessaire de calculer à chaque fois l'imperfection initiale.

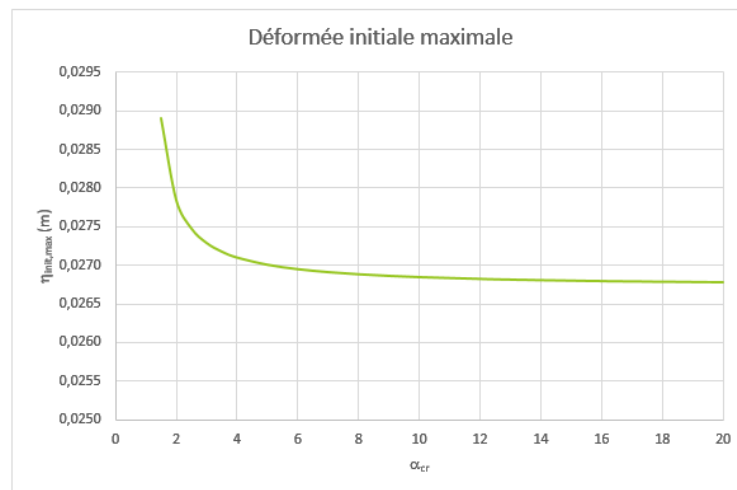


Figure 53 - Variation de la déformée initiale maximale en fonction de  $\alpha_{cr}$  pour un chargement vertical et horizontal

Afin d'étudier la stabilité des nouveaux critères d'endommagement, il est nécessaire d'étudier d'autres structures. Pour cela, ces différents calculs d'endommagement sous charges verticales et horizontales ont également été menés pour une tour auto-stable 8x3m. Les caractéristiques géométriques de cette tour sont présentées en annexe 1 ; et les résultats des différents critères d'endommagement sont présentés en annexe 3.



## Conclusion

La modélisation de la structure passe dans un premier temps par la détermination des sollicitations appliquées à la structure. Pour les structures de faible rigidité, il est nécessaire de passer par une analyse au second ordre des sollicitations, car les imperfections géométriques engendrent des effets du second ordre important. Pour cela, il est nécessaire de définir ses imperfections géométriques de manière sécuritaire, mais tout en respectant au mieux le comportement réel de la structure. Pour cela, nous avons pu comparer deux approches différentes :

- les méthodes conventionnelles qui sont basées sur la définition d'une imperfection globale et d'une imperfection locale
- les méthodes alternatives qui sont basées sur la définition d'une imperfection unique de même allure que la déformée critique de la structure.

On a ainsi pu constater que les méthodes, basées sur la définition d'une imperfection unique, permettent de prendre en compte les aspects géométriques, les conditions aux limites, les caractéristiques mécaniques intrinsèques ainsi que le niveau de charges des barres ; ce qui n'est pas le cas lorsque l'on utilise les méthodes conventionnelles.

De plus, on constate qu'il y a plusieurs façons de prendre en compte l'imperfection globale et l'imperfection locale pour une même structure. Suivant le sens d'application de ces imperfections, les valeurs des sollicitations seront différentes. Il se pose alors le problème de connaître le sens d'application des imperfections globales et locales afin d'obtenir les sollicitations les plus défavorables.

Ce problème n'apparaît pas avec les méthodes alternatives. En effet, l'imperfection unique, étant définie à partir de l'allure de la déformée critique, elle permet forcément d'obtenir les sollicitations les plus défavorables.

Les méthodes alternatives basées sur la définition d'une imperfection unique de même allure que la déformée critique de la structure semblent donc être les méthodes qui reflètent au mieux la réalité et qui sont les plus sécuritaires.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux critères d'endommagement pour l'analyse d'une structure. Nous avons pu mettre en évidence que les critères d'endommagement avec  $\chi$ , qui permettent de prendre en compte l'imperfection initiale de la structure dans le calcul sans la modéliser, surestiment beaucoup l'endommagement réelle de la structure. Cette différence provient du coefficient  $\chi$  qui est surdimensionné.

Il a donc été nécessaire de rechercher une méthode pour substituer, à la mise en place de l'imperfection initiale, une évaluation raisonnable et sécuritaire de l'endommagement. Pour cela, un nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  a été défini. On a ainsi pu constater que les nouveaux critères d'endommagement définis à partir de coefficient de flambement  $\chi^*$  permettent de calculer un endommagement proche de l'endommagement lorsque la structure est modélisée avec son imperfection initiale.

L'ensemble des calculs d'endommagement ont été menés en utilisant des critères de résistance élastique linéaire. Pour aller plus loin, il s'agira donc de reprendre les calculs d'endommagement avec des critères de résistance plastique linéaire et non-linéaire.

## Bibliographie

---

[1] AFNOR. *Eurocode 3. Calcul des structures en acier. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments*. NF EN 1993-1-1. 2005, 100 p.

[2] AFNOR. *Eurocode 9. Calcul des structures en aluminium. Partie 1-1 : Règles générales*. NF EN 1999-1-1. 2007, 222 p.

[3] E. CHLADNY, M. STUJBERO. *Frames with unique global and local imperfection in the shape of the elastic buckling mode. Partie 1*. 2013.

## Annexes

---

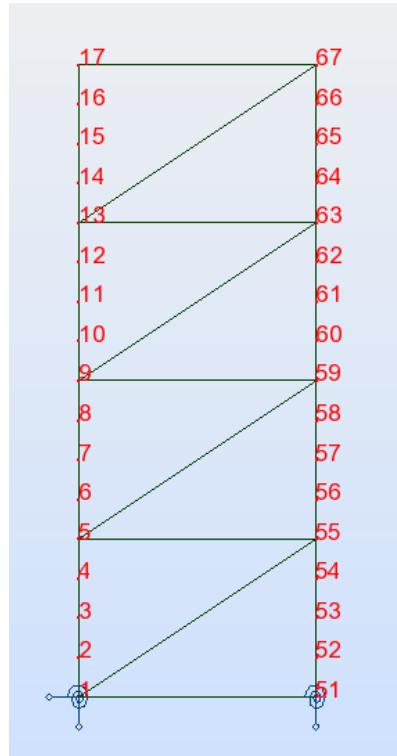
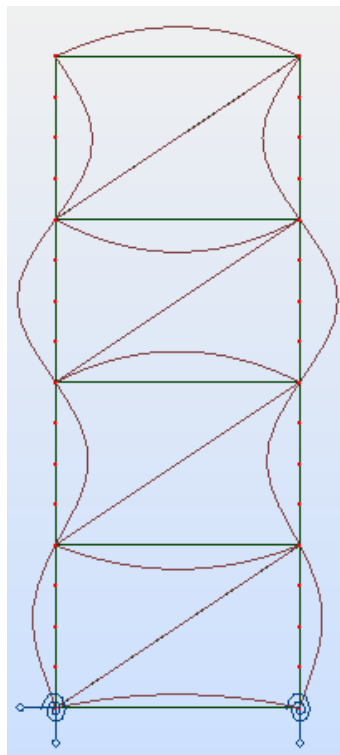
**Annexe 1 :** Caractéristiques de la tour auto-stable 8x3m.

**Annexe 2 :** Résultats des critères d'endommagement de la tour auto-stable 8x3m soumise à des charges verticales.

**Annexe 3 :** Résultats des critères d'endommagement de la tour auto-stable 8x3m soumise à des charges verticales et horizontales.

Annexe 1 : Caractéristiques de la tour auto-stable 8x3m**Géométrie - Charges**

On considère une tour, de dimension 8x3m, constituée de montants, traverses et diagonales. La tour est réalisée en tube creux rond de 48,3x2,9mm. Les charges verticales appliquées à la structure sont appliquées en tête de chaque montant.

**Allure du 1er mode de flambement sous charges verticales**

**Acier**Limite d'élasticité :  $f_y = 320$  MPaModule d'élasticité :  $E = 210\,000$  MPa $\gamma_{M0} = 1$  $\gamma_{M1} = 1$ **Caractéristiques de la section**

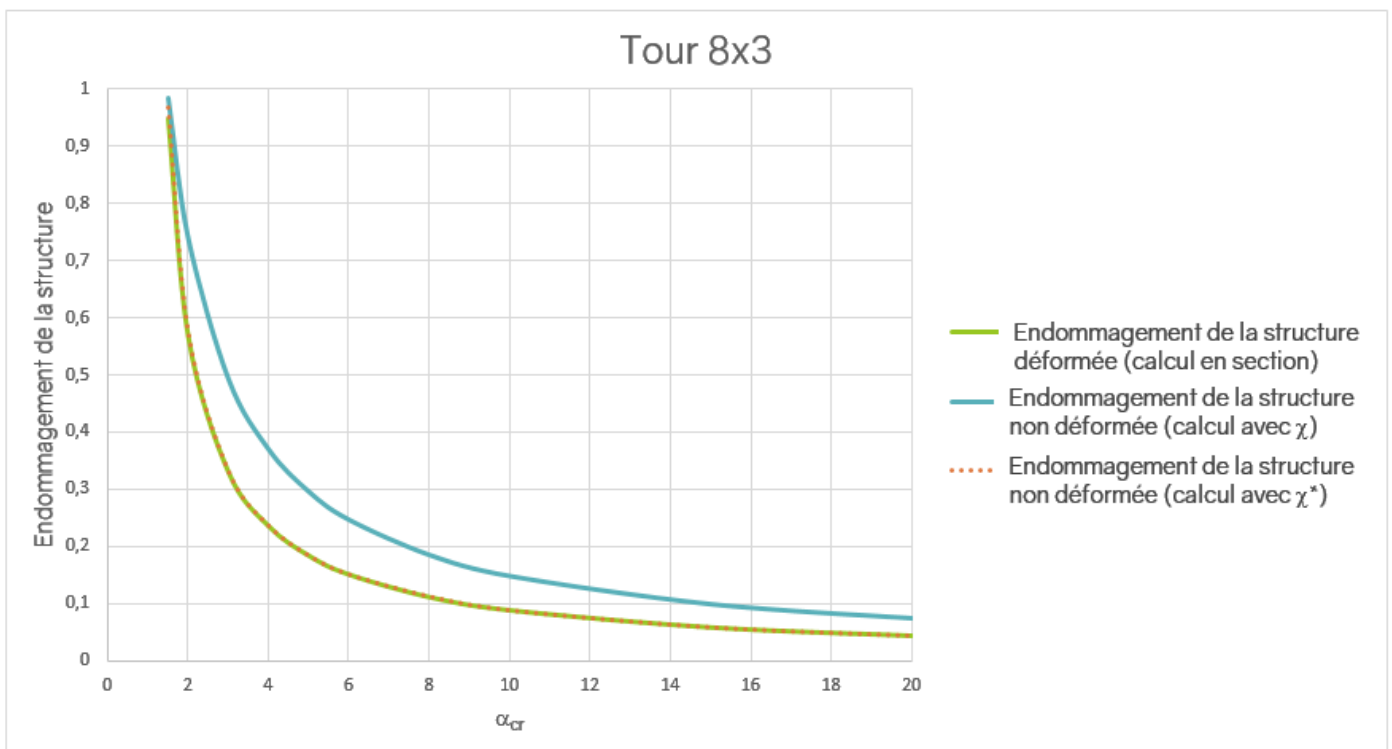
	montant 48,3x2,9mm
A (cm <sup>2</sup> )	4,136
I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	10,700
W <sub>el,y</sub> (cm <sup>3</sup> )	4,431
W <sub>pl,y</sub> (cm <sup>3</sup> )	5,985

## Annexe 2 : Résultats des critères d'endommagement de la tour auto-stable 8x3m soumise à des charges verticales.

Les endommagements de la tour auto-stable, calculés à partir des trois critères définis dans le paragraphe §4, sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Tour 8x3							
Critère d'endommagement						Déformée initiale maximale	
$\alpha_{cr}$	Structure avec imp. ( $N_{Ed}/N_{Rd}$ )+(M <sub>Ed</sub> /M <sub>Rd</sub> )	$\chi$	Structure sans imp.			$\alpha_{cr}$	$\eta_{init,max}$ (m)
			( $N_{Ed}/\chi \cdot N_{Rd}$ )	$\chi^*$	( $N_{Ed}/\chi^* \cdot N_{Rd}$ )		
1,5	0,9476	0,3614	0,9859	0,3681	0,9680	1,5	0,00736876
2	0,5656	0,3613	0,7394	0,4663	0,5729	2	0,007368536
3	0,3288	0,3612	0,4929	0,5380	0,3309	3	0,007368378
4	0,2345	0,3611	0,3696	0,5671	0,2354	4	0,007368325
5	0,1828	0,3611	0,2957	0,5829	0,1832	5	0,007368225
6	0,1499	0,3611	0,2464	0,5927	0,1501	6	0,007368252
8	0,1104	0,3610	0,1848	0,5983	0,1115	8	0,007368084
10	0,0874	0,3610	0,1478	0,6111	0,0873	10	0,007368106
15	0,0575	0,3610	0,0986	0,6197	0,0574	15	0,007368128
20	0,0429	0,3610	0,0739	0,6239	0,0428	20	0,007368076

On observe, dans un premier temps, comme pour le portique 4x3, que l'imperfection initiale maximale calculée ne dépend pas de l'intensité de la charge de compression. En effet, lorsque l'on fait varier  $\alpha_{cr}$ , les valeurs de  $\eta_{init,max}$  sont constantes.

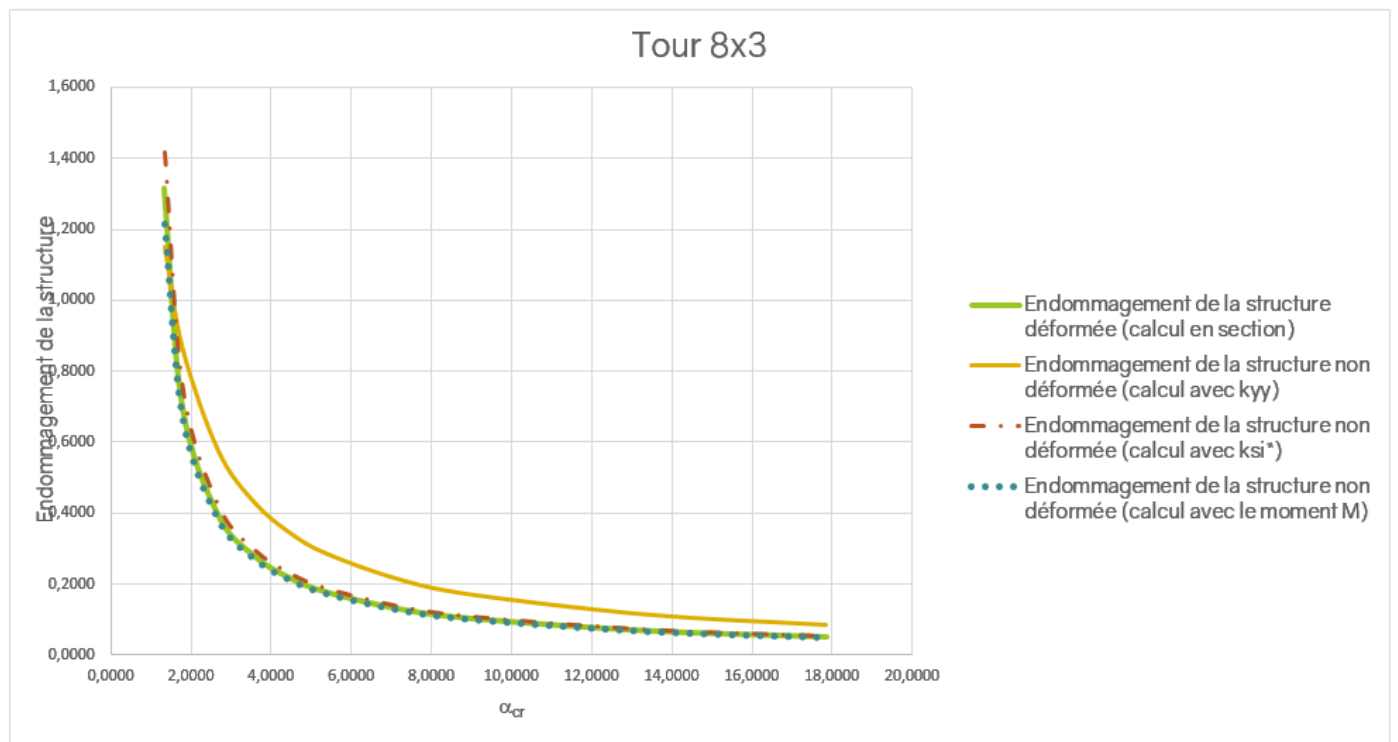


D'après la figure ci-dessus, on constate les endommagements calculés à partir du critère avec le nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  sont les mêmes que ceux obtenus lorsque la structure est déformée avec l'imperfection initiale. Ainsi, pour les deux exemples traités, le portique 4x3m et la tour auto-stable 8x3m, le nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  défini répond bien à la problématique.

### Annexe 3 : Résultats des critères d'endommagement de la tour auto-stable 8x3m soumise à des charges verticales et horizontales.

Les endommagements de la tour auto-stable, calculés à partir des trois critères définis dans le paragraphe §5, sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Tour 8x3							
Critère d'endommagement					Déformée initiale maximale		
$\alpha_{cr}$	Structure avec imp.		Structure sans imp.			$\alpha_{cr}$	$\eta_{init,max}$ (m)
	$(N_{Ed}/N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/\chi \cdot N_{Rd})+k_{yy} \cdot (M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/\chi \cdot N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/\chi^* \cdot N_{Rd})+(M_{Ed}/M_{Rd})$	$(N_{Ed}/N_{Rd})+((M_{Ed}+M_{FV,Ed})/M_{Rd})$		
1,3364	1,3150	1,1490	1,4185	1,2145		1,3364	0,007429886
1,7828	0,7054	0,8620	0,7563	0,6689		1,7828	0,007429644
2,6757	0,3955	0,5748	0,4219	0,3812		2,6757	0,00742941
3,5685	0,2795	0,4311	0,2977	0,2712		3,5685	0,007429292
4,4614	0,2170	0,3449	0,2310	0,2113		4,4614	0,007429204
5,3542	0,1776	0,2875	0,1889	0,1733		5,3542	0,007429147
7,1397	0,1304	0,2156	0,1387	0,1276		7,1397	0,007429100
8,9255	0,1031	0,1725	0,1096	0,1011		8,9255	0,007429061
13,3895	0,0677	0,1150	0,0720	0,0665		13,3895	0,007429026
17,8547	0,0505	0,0862	0,0536	0,0496		17,8547	0,007429132



On compare donc les différents critères d'endommagement calculés. On constate que l'endommagement calculé à partir du critère d'endommagement avec  $k_{yy}$ , est supérieur à l'endommagement calculé à partir de la structure modélisée avec les imperfections initiales. Cette différence est due au coefficient de flambement  $\chi$ .

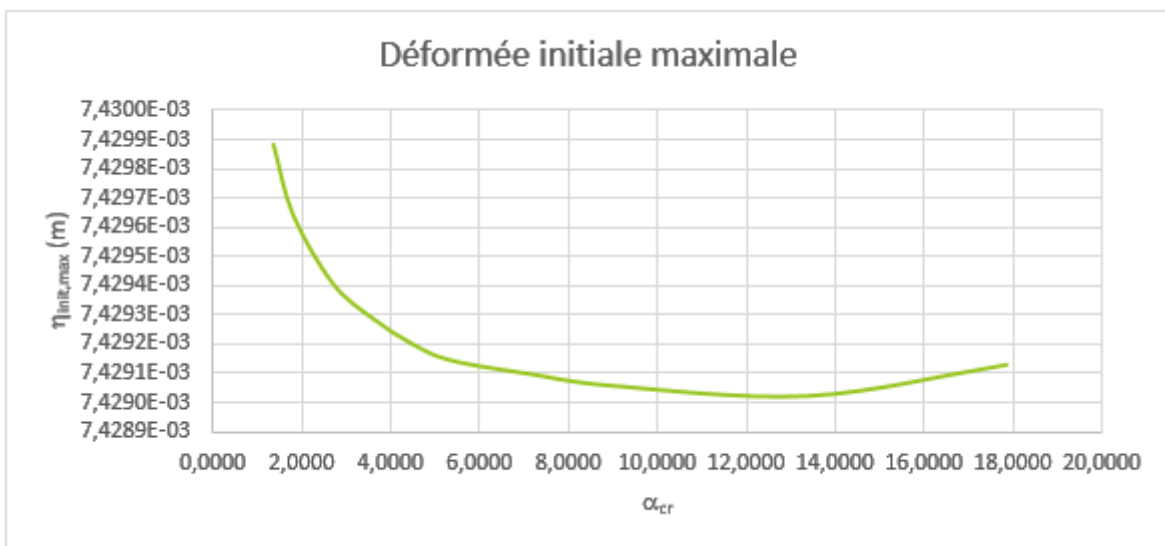
Les deux nouveaux critères ont également été calculé, à savoir :

1)  $\frac{N_{Ed}}{\chi^* \cdot N_{Rd}} + \frac{M_{Ed}}{M_{el,Rd}}$  : les sollicitations sont calculées au 2<sup>nd</sup> ordre, l'imperfection initiale n'est pas générée dans la structure mais elle est prise en compte par l'intermédiaire du coefficient  $\chi^*$

2)  $\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed} + M_{F_v, \epsilon_0}}{M_{el,Rd}}$  : les sollicitations sont calculées au 2<sup>nd</sup> ordre, l'imperfection initiale n'est pas générée dans la structure mais elle est prise en compte avec le moment  $M_{F_v, \epsilon_0}$ , qui correspond au moment additionnel de la charge verticale  $F_v$  appliquée à la structure avec l'effet de l'imperfection initiale  $\eta_{init,max}$ .

Ces deux nouveaux critères permettent d'obtenir des résultats d'endommagement très proches de ceux obtenus avec la structure où l'imperfection initiale est modélisée, comme pour le portique 4x3m.

Sur la figure ci-dessous, on peut également s'intéresser à l'évolution de l'imperfection initiale maximale. On constate que la déformée initiale dépend des charges appliquées à la structure. Ainsi, il est nécessaire de calculer, pour chaque cas de charges, l'imperfection initiale.



Ainsi, on constate donc, que pour les deux structures étudiées, le portique 4x3m et la tour auto-stable 8x3m, sous charges verticales ou charges verticales et horizontales, le nouveau coefficient de flambement  $\chi^*$  défini répond bien à la problématique.