



HAL
open science

Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Partie 1 : En relativité restreinte

C. Fonteix, Dimitrios Meimaroglou, M. Camargo, M. Feidt

► **To cite this version:**

C. Fonteix, Dimitrios Meimaroglou, M. Camargo, M. Feidt. Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Partie 1 : En relativité restreinte. 2020. <hal-02482689>

HAL Id: hal-02482689

<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-02482689v1>

Preprint submitted on 18 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus

Partie 1 : En relativité restreinte

C. FONTEIX^a, D. MEIMAROGLU^b, M. CAMARGO^a, M. FEIDT^c

^a Équipe de Recherche sur Les Processus Innovatifs (ERPI), Université de Lorraine, 8 Rue Bastien Lepage, 54000 Nancy Cedex, France

^b CNRS, Laboratoire Réactions et Génie des Procédés, Université de Lorraine UMR 7274, Nancy F-54001, France

^c CNRS, Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA), Université de Lorraine UMR 7573, 2 Avenue de la Forêt de Haye, 54518 Vandoeuvre CEDEX, Nancy, France

Résumé

L'objectif est de démontrer les équations de la dynamique relativiste des fluides à partir de celles connues en physique classique, à l'aide d'un nouveau postulat. Dans un premier temps, nous devons présenter ces dernières sous forme de deux tenseurs énergie-impulsion. Leur transformation dans un repère inertiel quelconque assure la covariance des équations. Nous avons besoin de deux tenseurs énergie-impulsion parce que la dynamique classique des fluides est définie par trois bilans : de matière, de quantité de mouvement et d'énergie. De plus, l'énergie interne n'est connue qu'à une valeur additive près, ce qui nécessite, en relativité, l'écriture d'un nouveau bilan. Nous obtenons les équations de la dynamique des fluides multicomposants, chargés, dipolaires, visqueux et/ou élastiques en écoulement dans des champs électromagnétiques et de gravitation, et soumis à des réactions chimiques, des phénomènes diffusionnels et un transfert de chaleur. Une telle complexité est nouvelle en relativité.

1 Introduction et contexte de l'étude

Nous présenterons une méthode originale permettant de transformer les équations de la physique classique en relations de la relativité restreinte. La covariance sera assurée par la structure des transformations mises en jeu. Nous ferons apparaître deux tenseurs énergie-impulsion indispensables à la résolution complète de la dynamique. Le fait que, en relativité, bien des auteurs ne considèrent qu'un seul tenseur énergie-impulsion de type cinétique (voir l'ensemble des références) vient du fait qu'ils se placent dans un cas d'écoulement très simplifié. Certains [1] soulignent cependant une certaine difficulté à définir les forces qui s'exercent sur le système. Ceci est dû au fait que certains spécialistes de la relativité associent le bilan d'énergie totale au bilan de quantité de mouvement pour construire le tenseur énergie-impulsion, [2] p. 1917. C'est possible dans certains cas simples, mais impossible dans un cas plus général, que nous souhaitons aborder. Pour montrer cela, nous nous appuyerons sur la physique classique qui montre que la résolution de la dynamique des fluides nécessite le bilan d'énergie totale (ou de masse-énergie), le bilan de quantité de mouvement et le bilan de masse Newtonienne, [3] p. 86-88. En fait, le premier tenseur énergie-impulsion associe le bilan de masse Newtonienne (énergie nucléaire principalement) au bilan de

quantité de mouvement. Le deuxième associe le bilan d'énergie totale à un bilan d'impulsion (totale) qu'il conviendra de définir. Nous admettrons cependant que les phénomènes quantiques se réduisent à des effets thermodynamiques, et que les réactions nucléaires peuvent être approximées comme des cas particuliers de réactions chimiques ordinaires moyennant une fonction définissant les sections efficaces, le fluide étant toujours considéré comme un milieu continu.

En section 2 nous rappellerons les équations de l'électromagnétisme et de la gravitation en physique classique. Dans ce dernier cas, les sections 3 et 4 présentent les deux tenseurs énergie-impulsion nécessaires. Des éléments de la relativité restreinte sont rappelés en section 5, utiles à la section 6 définissant le postulat permettant de passer de la physique classique à la relativité restreinte. En section 7 nous démontrons des éléments de cinétique relativiste des mélanges fluides, et en section 8 certaines transformations des forces. La section 9 aborde les phénomènes électromagnétiques et gravitationnels en relativité restreinte. Dans ces mêmes conditions, la section 10 présente les lois qui régissent les deux tenseurs énergie-impulsion. Les conclusions et les perspectives font l'objet de la section 11. Nous avons choisi d'écrire les équations selon les notations de l'analyse vectorielle et matricielle, et non selon la forme compacte des notations tensorielles, sauf en Partie 2. Nous appliquons une représentation utilisant à la fois des nombres réels et des imaginaires purs, qui présente la particularité de faire disparaître la notion de signature en relativité restreinte, et de faire apparaître un tenseur métrique à déterminant positif en relativité générale. Les tenseurs d'ordre deux que nous rencontrerons seront symétriques ou antisymétriques. Par exemple, un tenseur d'ordre deux symétrique sera représenté suivant $\begin{pmatrix} -\alpha & i\vec{a}^T \\ i\vec{a} & \bar{\bar{A}} \end{pmatrix}$, où la matrice symétrique 3x3 $\bar{\bar{A}}$ est formée de nombres réels, tout comme le vecteur de dimension 3 \vec{a} . Le scalaire $-\alpha$ est un nombre réel, le signe moins provenant de $i^2 = -1$. Une position dans l'espace-temps sera définie par un quadrivecteur $\vec{X}^T = (ict \quad \vec{x}^T)$ dans un repère inertiel (Galiléen) dont tous les axes spatiaux sont orthogonaux entre eux et d'échelles identiques, où t est le temps, \vec{x} un vecteur formé des trois coordonnées spatiales et c la vitesse de la lumière dans le vide. L'axe du temps est orthogonal à tous les axes spatiaux. Les quadrivecteurs (comme \vec{X}) et les matrices 4x4 seront écrites en lettres grasses. Un vecteur, ou tenseur d'ordre 1, est surmonté d'une flèche, alors qu'une matrice, ou tenseur d'ordre 2, l'est par deux traits. Un accroissement de position dans l'espace-temps correspond à :

$$d\vec{X}^T = (icdt \quad d\vec{x}^T) = (ic \quad \vec{u}^T)dt = \vec{u}^T dt \quad (I-1)$$

Où \vec{u} est la vitesse et \vec{u} la quadri-vitesse. La dérivation spatio-temporelle, ou quadri-gradient, s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}^T(\dots) = \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial(\dots)}{\partial t} \quad \overrightarrow{grad}^T(\dots) \right) \quad (I-2)$$

Où $\overrightarrow{grad}(\dots)$ est l'opérateur gradient (spatial) usuel.

2 Electromagnétisme et gravitation Newtonienne en physique classique

M. Von LAUE [4] obtient les équations des milieux continus par transposition des équations de l'électromagnétisme. Nous commencerons donc par la présentation tensorielle des phénomènes

électromagnétiques. Cependant, si l'électromagnétisme dans le vide est bien connu, celui dans la matière fluide fait apparaître des moments dipolaire \vec{P} et magnétique \vec{M} .

Les champs électromagnétiques sont formés de deux vecteurs, le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} . Ceux-ci peuvent être rassemblés dans deux tenseurs antisymétriques d'ordre 2 :

$$\vec{\bar{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{E}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{E} & -\overline{\text{mat}}(\vec{B}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 0 & ic\vec{B}^T \\ -ic\vec{B} & \overline{\text{mat}}(\vec{E}) \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

Où l'opérateur $\overline{\text{mat}}(\dots)$ permet de construire une matrice antisymétrique à partir d'un vecteur. En particulier, $\overline{\text{mat}}(\vec{a})\vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ est un produit vectoriel. De même nous avons :

$$\vec{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 0 & ic\vec{P}^T \\ -ic\vec{P} & \overline{\text{mat}}(\vec{M}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{\bar{M}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{M}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{M} & -\overline{\text{mat}}(\vec{P}) \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

Les équations de MAXWELL régissant les phénomènes électromagnétiques s'écrivent [5] :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\text{grad}}^T(\varepsilon_0 c^2 \vec{\bar{E}} + \vec{\bar{P}}) &= -\vec{\bar{C}}^T \\ \overline{\text{grad}}^T(\vec{\bar{B}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

Où $\vec{\bar{C}}$ est le quadri-courant électrique, avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Le tenseur $\varepsilon_0 c^2 \vec{\bar{E}} + \vec{\bar{P}}$ est antisymétrique, or le double quadri-gradient d'un tenseur antisymétrique est nul, donc :

$$\overline{\text{grad}}^T \left(\left(\overline{\text{grad}}^T(\varepsilon_0 c^2 \vec{\bar{E}} + \vec{\bar{P}}) \right)^T \right) = 0 = -\overline{\text{grad}}^T(\vec{\bar{C}}) \quad (1-6)$$

Qui représente le bilan de charges électriques. Le quadri-courant $\vec{\bar{C}}$ sera détaillé plus loin.

Le bilan d'énergie électromagnétique est connu. Sa forme la plus intéressante fait appel à l'énergie volumique $\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B}$ et au vecteur de POYNTING $\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)$, car elle est adaptée à une interprétation thermodynamique des équations d'évolution de \vec{P} et \vec{M} rencontrées dans bien des ouvrages [6] [7] [8]. Le tenseur énergie-impulsion électromagnétique devient :

$$\vec{\bar{T}}_E = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} - \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} + \vec{M}^T \vec{B} & \frac{i}{c} \left(\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \right)^T \\ \frac{i}{c} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) & -\varepsilon_0 (\vec{E} \vec{E}^T + c^2 \vec{B} \vec{B}^T) + \varepsilon_0 \frac{\vec{\delta}}{2} (\vec{E}^T \vec{E} + c^2 \vec{B}^T \vec{B}) + \vec{\Theta}_E \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

Or l'expression (1-7) peut être décomposée en deux parties ($\vec{\bar{T}}_E = \vec{\bar{T}}_{E1} + \vec{\bar{T}}_{E2}$). $\vec{\bar{T}}_{E1}$ correspond à ce que l'on obtiendrait dans le vide, appelé noyau du tenseur énergie-impulsion électromagnétique, et $\vec{\bar{T}}_{E2}$, appelé extension du tenseur énergie-impulsion électromagnétique. Ils sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{E1} &= \frac{\varepsilon_0}{2} (c^2 \bar{\bar{E}}\bar{\bar{E}}^T + \bar{\bar{B}}\bar{\bar{B}}^T) \\ \bar{\bar{T}}_{E2} &= \begin{pmatrix} \vec{M}^T \vec{B} & -\frac{i}{c} (\vec{E} \wedge \vec{M})^T \\ -\frac{i}{c} \vec{E} \wedge \vec{M} & \bar{\bar{\Theta}}_E \end{pmatrix} \end{aligned} \right] \quad (I-8)$$

Où $\bar{\bar{\Theta}}_E$ est une matrice 3x3 actuellement inconnue, mais qui sera définie en relativité restreinte (I-40).

Certains auteurs disent qu'il y a incompatibilité entre la gravitation Newtonienne et la relativité. Pourtant son adaptation a été mentionnée par plusieurs auteurs [5] [9] [10] [11] [12] [13] [14].

Afin de préparer le passage à la relativité restreinte, nous présenterons ici la gravitation Newtonienne en nous inspirant des équations de MAXWELL vues équation (I-5). Les champs gravitationnels sont formés de deux vecteurs, le champ de gravitation \vec{H} et le champ magnéto-gravitationnel \vec{K} . Ceux-ci peuvent être rassemblés dans deux tenseurs antisymétriques d'ordre 2 :

$$\bar{\bar{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} \vec{H}^T \\ -\frac{i}{c} \vec{H} & -\frac{4\pi G_c}{c^2} \overline{\text{mat}}(\vec{K}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \bar{\bar{K}} = \begin{pmatrix} 0 & i\vec{K}^T \\ -i\vec{K} & \frac{c}{4\pi G_c} \overline{\text{mat}}(\vec{H}) \end{pmatrix} \quad (I-9)$$

L'équivalent des équations de MAXWELL s'écrit ici :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\text{grad}}^T(\bar{\bar{H}}) &= \frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_I \vec{u}^T \\ \overline{\text{grad}}^T(\bar{\bar{K}}) &= 0 \end{aligned} \right] \quad (I-10)$$

Où G_c est la constante universelle de la gravitation. Introduire le vecteur \vec{K} n'est pas gênant car son effet est négligeable à l'échelle terrestre. Le double quadri-gradient d'un tenseur antisymétrique est nul :

$$\overline{\text{grad}}^T \left(\left(\overline{\text{grad}}^T(\bar{\bar{H}}) \right)^T \right) = 0 = \frac{4\pi G_c}{c^2} \overline{\text{grad}}^T(\rho_I \vec{u}) \quad (I-11)$$

Qui représente le bilan de masse, où ρ_I est la masse volumique conservative. Cependant, comme nous ferons apparaître, dans le cadre de la relativité, une masse-énergie volumique différente de ρ_I , nous lui donneront le nom de masse volumique intrinsèque, l'énergie intrinsèque étant l'énergie nucléaire. Notons qu'en physique classique la masse conservative s'appelle aussi masse Newtonienne. En effet, nous nous plaçons dans le cas où la variation de masse due aux réactions chimiques est négligeable (I-14) et où la masse des électrons est considérée comme nulle, comme indiqué après l'équation (I-15).

L'énergie volumique de gravitation $-\frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G_c} - \frac{2\pi G_c}{c^2} \vec{K}^T \vec{K}$ est négative [10]. C'est normal si elle est nulle loin de toute masse et diminue à l'approche d'une masse. Le tenseur énergie-impulsion de gravitation est :

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_G = \left(\begin{array}{cc} \frac{\overline{\overline{\mathbf{H}}^T \overline{\overline{\mathbf{H}}}}}{8\pi G_c} + \frac{2\pi G_c}{c^2} \overline{\overline{\mathbf{K}}^T \overline{\overline{\mathbf{K}}}} & \frac{i}{c} (\overline{\overline{\mathbf{K}}} \wedge \overline{\overline{\mathbf{H}}})^T \\ \frac{i}{c} (\overline{\overline{\mathbf{K}}} \wedge \overline{\overline{\mathbf{H}}}) & \frac{\overline{\overline{\mathbf{H}} \overline{\overline{\mathbf{H}}^T} - \frac{1}{2} \overline{\overline{\delta \mathbf{H}}^T \overline{\overline{\mathbf{H}}}}}{4\pi G_c} + \frac{4\pi G_c}{c^2} (\overline{\overline{\mathbf{K}} \overline{\overline{\mathbf{K}}^T} - \frac{1}{2} \overline{\overline{\delta \mathbf{K}}^T \overline{\overline{\mathbf{K}}}}) \end{array} \right) \quad (I-12)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_G = -\frac{c^2}{8\pi G_c} \overline{\overline{\mathbf{H}} \overline{\overline{\mathbf{H}}^T}} - \frac{2\pi G_c}{c^2} \overline{\overline{\mathbf{K}} \overline{\overline{\mathbf{K}}^T}}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{grad}}^T}(\overline{\overline{\mathbf{T}}}_G) = -\left(\frac{i}{c} \rho_I \overline{\overline{\mathbf{u}}}^T \overline{\overline{\mathbf{H}}} \quad \rho_I \overline{\overline{\mathbf{H}}}^T + \frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_I (\overline{\overline{\mathbf{u}}} \wedge \overline{\overline{\mathbf{K}}})^T \right) = \rho_I \overline{\overline{\mathbf{u}}}^T \overline{\overline{\mathbf{H}}}$$

Où $\overline{\overline{\mathbf{H}}} \rho_I \overline{\overline{\mathbf{u}}}$ est la quadri-force de gravitation s'exerçant sur l'unité de volume de fluide.

3 Tenseur énergie-impulsion « intrinsèque » en physique classique

En pratique, le fluide est un mélange composé de n constituants. La composition du fluide en constituant i est définie par son titre massique x_i , c'est-à-dire la masse intrinsèque de i par masse intrinsèque unité de mélange, avec $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Sur une position de l'espace-temps, le flux de transfert de i est $\rho_I x_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i$ (masse intrinsèque de i traversant l'unité de surface par unité de temps), où $\rho_I x_i \overline{\overline{\mathbf{u}}}$ est le flux de transport et $\overline{\overline{\mathbf{J}}}_i$ le flux de diffusion, tel que $\sum_{i=1}^n (\rho_I x_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i) = \rho_I \overline{\overline{\mathbf{u}}}$. Le quadrivecteur flux de transfert est $\begin{pmatrix} i c \rho_I x_i \\ \rho_I x_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i \end{pmatrix} = \rho_I x_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i$, où $\overline{\overline{\mathbf{J}}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i \end{pmatrix}$ avec $\sum_{i=1}^n \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i = 0$. Le bilan du constituant i s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathbf{grad}}^T}(\rho_I x_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i) = r_i \quad (I-13)$$

Où r_i est la vitesse de production (pouvant être négative) de masse intrinsèque de i par unité de volume et unité de temps, due aux réactions. La somme des n équations (I-13) doit donner (I-11), donc :

$$\sum_{i=1}^n r_i = 0 \quad (I-14)$$

Cette relation traduit la conservation de la masse intrinsèque totale par les réactions chimiques. Des réactions nucléaires peuvent être prises en compte dans (I-13) si elles respectent cette conservation.

Le constituant i peut avoir une charge α_i par unité de masse intrinsèque de i (ions). Le courant électrique induit par le flux de transfert des ions i est $\rho_I x_i \alpha_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i \alpha_i$. Le bilan de charges i est :

$$\overline{\overline{\mathbf{grad}}^T}(\rho_I x_i \alpha_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i \alpha_i) = r_i \alpha_i \quad (I-15)$$

Car les α_i sont des constantes. La somme des n équations (I-15) ne donne pas (I-6), car $\sum_{i=1}^n r_i \alpha_i \neq 0$. Le courant électrique induit par le flux de transfert de tous les ions n'est donc pas le courant total $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$. En effet, il existe des électrons libres dont la masse est considérée comme nulle, mais disposant d'une charge donnant un courant $\overline{\overline{\mathbf{C}}}_E$. Ce courant $\overline{\overline{\mathbf{C}}}_E$ est la somme du transport des électrons par le fluide et d'un courant de conduction respectant la loi d'OHM [15] [16] :

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}}_E = \rho_I \alpha_E \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \lambda_E \overline{\overline{\mathbf{E}}} \overline{\overline{\mathbf{u}}} \quad (I-16)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \sum_{i=1}^n (\rho_I x_i \alpha_i \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{J}}}_i \alpha_i) + \rho_I \alpha_E \overline{\overline{\mathbf{u}}} + \lambda_E \overline{\overline{\mathbf{E}}} \overline{\overline{\mathbf{u}}}$$

Où α_E est la charge des électrons libres par unité de masse intrinsèque de fluide et λ_E la conductivité électrique du fluide. L'équation (I-16), la somme de (I-15) pour tout i et (I-6) donnent :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^T (\sum_{i=1}^n (\rho_i x_i \alpha_i \vec{u} + \vec{J}_i \alpha_i) + \rho_i \alpha_E \vec{u} + \lambda_E \vec{E} \vec{u}) = 0 \\ \sum_{i=1}^n r_i \alpha_i + \overrightarrow{\text{grad}}^T (\vec{C}_E) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-17})$$

Ainsi, $-\sum_{i=1}^n r_i \alpha_i$ est la vitesse de production de charges électrique, correspondant aux électrons libres, par unité de volume et unité de temps. La charge totale massique du fluide est $\alpha = \alpha_E + \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$.

Les différentes forces s'exerçant sur le fluide par unité de volume sont :

- $\rho_i \vec{H} + \frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_i \vec{u} \wedge \vec{K}$: les forces de gravitation vues équation (I-12),
- $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)$: la pression (P : force par unité de surface),
- $(\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\tau}))^T$: la contrainte mécanique, où $\bar{\tau}$ est le tenseur des contraintes rhéologiques,
- $\rho_i \alpha \vec{E} + \vec{C} \wedge \vec{B}$: la force de LAPLACE, somme des forces électrique et magnétique,
- $(\vec{P}^T \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} + (\vec{M}^T \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$: la force dipolaire due à la polarisation et l'aimantation du fluide.

L. LANDAU et E. LIFCHITZ [17] présentent des expressions des forces dipolaires électrique et magnétique relativement différentes de celles rencontrées dans les autres documents. M. BERTIN, J.P. FAROUX et J. RENAULT [6] proposent comme force exercée la somme de la pression électrostatique et de la pression magnétostatique. E. DURAND [18] propose $(\vec{M}^T \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$ pour la force dipolaire magnétique s'exerçant sur l'ensemble du mélange fluide multiconstituant. F. FER [19] présente une expression apparemment différente, correspondant à la somme de $-\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B}$ et du gradient d'un tenseur dont il ne précise pas la nature. Or nous remarquons que :

$$(\vec{P}^T \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} + (\vec{M}^T \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T \vec{E} + \vec{M}^T \vec{B}) - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B} \quad (\text{I-18})$$

Nous retrouvons ici la force à distance signalée par F. FER et une force de contrainte caractérisée par le tenseur $(\vec{P}^T \vec{E} + \vec{M}^T \vec{B}) \bar{\delta}$ correspondant à la pression électrostatique et la pression magnétostatique. Nous pouvons maintenant écrire le bilan de forces dans le fluide :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^T (\rho_i \vec{u} \vec{u}^T) + \overrightarrow{\text{grad}}^T (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) - \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\tau}) = \vec{F}_V^T \\ \vec{F}_V = \rho_i \vec{H} + \frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_i \vec{u} \wedge \vec{K} + \rho_i \alpha \vec{E} + \vec{C} \wedge \vec{B} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-19})$$

Où \vec{F}_V est une force volumique. L'association de l'équation (I-19) avec (I-11) conduit à :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{T}_M) = \overrightarrow{\text{grad}}^T \left(\rho_i \vec{u} \vec{u}^T + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} - \bar{\tau} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{F}_V^T \\ 0 & \bar{\tau} \end{pmatrix} \\ \bar{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\tau} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-20})$$

Où $\bar{\delta}$ est la matrice 3x3 unité de KRONECKER, et où nous voyons apparaître le tenseur énergie-impulsion intrinsèque \bar{T}_M (masse conservative), qui est la somme de son noyau \bar{T}_{M1} et de son extension \bar{T}_{M2} :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{M1} &= \rho_I \vec{u} \vec{u}^T \\ \bar{\bar{T}}_{M2} &= (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{D}} \end{pmatrix} - \bar{\bar{\tau}} \end{aligned} \right] \quad (I-21)$$

Ce tenseur énergie-impulsion joue un rôle crucial lors du calcul de la dynamique des fluides, non seulement en physique classique mais aussi relativiste, comme nous le verrons plus loin.

4 Tenseur énergie-impulsion totale en physique classique

Nous savons que l'énergie totale par unité de volume du fluide continu est la somme de [20] :

- Son énergie nucléaire, ou énergie liée à sa masse intrinsèque, $\rho_I c^2$ (que l'on trouve dans $\bar{\bar{T}}_{M1}$),
- Son énergie cinétique $\rho_I \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{2}$,
- Son énergie interne $\rho_I U$, où U est l'énergie interne du mélange par unité de masse intrinsèque,
- L'énergie électromagnétique $\frac{\epsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B}$,
- L'énergie « potentielle » de gravitation $-\frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G_c} - \frac{2\pi G_c}{c^2} \vec{K}^T \vec{K}$.

Le bilan d'énergie cinétique volumique est obtenu en multipliant scalairement le bilan de quantité de mouvement volumique par la vitesse. Tous calculs faits en tenant compte de (I-11), nous obtenons :

$$\overline{grad}^T \left(\rho_I \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{2} \vec{u} \right) + \overline{grad}^T \left((P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{u} - \bar{\bar{\tau}} \vec{u} \right) = (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \overline{grad}^T (\vec{u}) - \bar{\bar{\tau}} \circ \bar{\bar{D}} + \vec{u}^T \vec{F}_V \quad (I-22)$$

Où $\bar{\bar{D}}$ est le tenseur des déformations, et \circ le produit scalaire de deux matrices (somme des produits membre à membre). Le flux de transfert d'énergie totale du fluide (impulsion totale) est la somme de :

- Son impulsion intrinsèque $\rho_I c^2 \vec{u}$ déduite de (I-20),
- Son impulsion cinétique (justifiée par (I-22)) $\rho_I \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{2} \vec{u} + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{u} - \bar{\bar{\tau}} \vec{u}$,
- Son impulsion interne (transport d'énergie interne et flux de chaleur) $\rho_I U \vec{u} + \vec{q}$,
- L'impulsion électromagnétique (vecteur de POYNTING) $\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)$,
- L'impulsion gravitationnelle $\vec{K} \wedge \vec{H}$, déduite de (I-12).

Notons que le flux de transfert de chaleur \vec{q} est la somme du flux d'enthalpie du à la diffusion de chaque constituant et du flux de chaleur par conduction.

Des considérations ci-dessus concernant les énergies et les impulsions, nous déduisons que le tenseur énergie-impulsion totale $\bar{\bar{T}}_T$ (énergie-impulsion étant ici un seul mot) est la somme des tenseurs énergie-impulsion intrinsèque $\bar{\bar{T}}_M$, cinétique $\bar{\bar{T}}_C$, interne $\bar{\bar{T}}_I$, électromagnétique $\bar{\bar{T}}_E$ et de gravitation $\bar{\bar{T}}_G$:

$$\bar{\bar{T}}_T = \bar{\bar{T}}_M + \bar{\bar{T}}_C + \bar{\bar{T}}_E + \bar{\bar{T}}_G + \bar{\bar{T}}_I \quad (I-23)$$

Cette expression est liée au fait que l'énergie totale est la somme de toutes les énergies de la matière.

En ce qui concerne $\bar{\bar{T}}_C = \bar{\bar{T}}_{C1} + \bar{\bar{T}}_{C2}$, nous nous référons à l'énergie et l'impulsion cinétique pour écrire :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{C1} &= \rho_I \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{2c^2} \vec{u} \vec{u}^T \\ \bar{\bar{T}}_{C2} &= (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\vec{u} \vec{u}^T}{c^2} \right) - \frac{\vec{u} \vec{u}^T + \vec{u} \vec{u}^T \vec{\tau}}{c^2} \end{aligned} \right] \quad (I-24)$$

Le tenseur énergie-impulsion interne $\bar{\bar{T}}_I = \bar{\bar{T}}_{I1} + \bar{\bar{T}}_{I2}$ est donné par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{I1} &= \rho_I \frac{U}{c^2} \vec{u} \vec{u}^T \\ \bar{\bar{T}}_{I2} &= \frac{\vec{q} \vec{u}^T + \vec{u} \vec{q}^T}{c^2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{\Theta}}_I \end{pmatrix} \end{aligned} \right] \quad (I-25)$$

Le premier terme de $\bar{\bar{T}}_{I2}$ est le « tenseur thermodynamique » proposé par C. ECKART [21], puis cité par Charles-Michel MARLE [22], par Pham MAU QUAN [23], et par J. GARIEL [24]. Le second correspond à une incertitude sur la connaissance de $\bar{\bar{T}}_I$, qui se répercute bien entendu sur $\bar{\bar{T}}_T$. Cette incertitude sera en partie levée par le premier principe de la thermodynamique, comme nous le verrons plus loin. Le reliquat de cette incertitude ne pourrait être totalement levé que par une extension, à définir (mais ce n'est pas ici notre propos), du second principe de la thermodynamique. Rappelons que $\bar{\bar{\Theta}}_E$ est ici supposée connue bien qu'elle ne le sera réellement qu'en relativité restreinte.

Nous pouvons maintenant écrire le tenseur énergie-impulsion totale $\bar{\bar{T}}_T = \bar{\bar{T}}_{T1} + \bar{\bar{T}}_{T2}$, où nous faisons apparaître la masse-énergie volumique en mouvement (non conservative) du fluide (nous différencions la masse-énergie volumique ρ de la masse intrinsèque conservative Newtonienne volumique ρ_I) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{T1} &= \rho \vec{u} \vec{u}^T + \frac{\varepsilon_0}{2} (c^2 \bar{\bar{E}} \bar{\bar{E}}^T + \bar{\bar{B}} \bar{\bar{B}}^T) - \frac{c^2}{8\pi G_c} \bar{\bar{H}} \bar{\bar{H}}^T - \frac{2\pi G_c}{c^2} \bar{\bar{K}} \bar{\bar{K}}^T \\ \bar{\bar{T}}_{T2} &= (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \left(\bar{\bar{\delta}} + \frac{\vec{u} \vec{u}^T}{c^2} \right) - \frac{\vec{u} \vec{u}^T + \vec{u} \vec{u}^T \vec{\tau}}{c^2} - \vec{\tau} + \frac{\vec{q} \vec{u}^T + \vec{u} \vec{q}^T}{c^2} + \begin{pmatrix} \vec{M}^T \vec{B} & -\frac{i}{c} (\vec{E} \wedge \vec{M})^T \\ -\frac{i}{c} \vec{E} \wedge \vec{M} & \bar{\bar{\Theta}}_E + \bar{\bar{\Theta}}_I \end{pmatrix} \\ \rho &= \rho_I \left(1 + \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{2c^2} + \frac{U}{c^2} \right) \end{aligned} \right] \quad (I-26)$$

Usuellement, dans le cas d'un fluide continu, le premier principe de la thermodynamique indique que la production volumique d'énergie totale est nulle (la relation classique $dU = \dots$ est démontrable à partir de (I-27) et (I-22)). Comme $\bar{\bar{\Theta}}_I$ est une matrice 3x3 symétrique non définie, nous pouvons étendre ce premier principe à :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\bar{T}}_T) = 0 \quad (I-27)$$

De cette expression nous pouvons déduire le bilan d'impulsion totale qui fournit 3 équations (1 équation vectorielle) pour déterminer une partie des 6 inconnues de $\bar{\bar{\Theta}}_I$ (matrice symétrique). Comme dans Jean-François BENNOUN [25], l'énergie interne de la matière est incluse dans ρc^2 , tout comme l'énergie cinétique. L'unification de la masse et de l'énergie est importante, mais a des limites. Certains auteurs sont conscients de l'existence de la « masse conservative », mais s'interdisent de l'utiliser. Ils semblent éluder

ce problème [26] [27] [28] [29] ou le contourner en ne parlant pas de masse, mais plutôt de nombre de particules [1] [24] [30]. Cependant, de nombreux auteurs utilisent la masse intrinsèque (en l'appelant conservative) quand cela leur semble nécessaire [2] [17] [22] [31] [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38].

En physique classique, nous utilisons toujours une différence d'énergie interne qui est l'écart entre l'état étudié et un état standard du fluide arbitrairement choisi. C'est la valeur de U relative à l'état standard choisi qui est utilisée dans ρ (connue à une constante additive près). Si U_0 est l'énergie interne massique standard, l'énergie interne massique réelle est $U + U_0$, et le tenseur énergie-impulsion totale réel est :

$$\bar{\bar{T}}_T + \rho_I \frac{U_0}{c^2} \vec{u}\vec{u}^T = \bar{\bar{T}}_T + \frac{U_0}{c^2} \bar{\bar{T}}_{M1} \quad (I-28)$$

Nous pourrions croire que l'expression (I-27) n'est pas respectée lorsque nous remplaçons $\bar{\bar{T}}_T$ par $\bar{\bar{T}}_T + \rho_I \frac{U_0}{c^2} \vec{u}\vec{u}^T$. Il n'en est rien car les éléments (fonctions) de $\bar{\bar{\Theta}}_I$ ne sont pas les mêmes. En fait, $\bar{\bar{\Theta}}_I$ dépend du choix de l'état standard. Lorsque ce choix est fait, les équations (I-20), (I-26) et (I-27) sont toutes exactes et $\bar{\bar{\Theta}}_I$ en découle. Ceci justifie l'introduction de cette matrice symétrique dans (I-25). Le calcul de la dynamique des fluides en physique classique se fait par la résolution de (I-20) et (I-27).

5 Premiers éléments de relativité restreinte

Comme le préconise MINKOWSKI [39], nous appliquerons un principe absolu en relativité : « **L'espace et le temps sont indissociables.** » Tenter de les dissocier conduit souvent à une erreur de calcul.

C'est pour cette raison, entre autres, que nous avons opté pour une représentation d'une position dans l'espace-temps définie dans un repère inertiel (référentiel « Galiléen » en espace non vide, avec gravitation) R par un quadrivecteur \vec{X} défini en section 1. L'équation (I-1) est toujours valide. Donc, si une information allant de \vec{X} à $\vec{X} + d\vec{X}$ met le temps dt pour parcourir cette distance à la vitesse c , alors $d\vec{X}^T d\vec{X} = 0$. Plus généralement nous pouvons définir un indicateur ds d'arrivée en $\vec{X} + d\vec{X}$ de l'information partie de \vec{X} , appelé souvent intervalle entre \vec{X} et $\vec{X} + d\vec{X}$, voire pseudo-norme de $d\vec{X}$:

$$ds^2 = d\vec{X}^T d\vec{X} = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^T d\vec{x} \quad (I-29)$$

Cet indicateur ds^2 est nul si l'information vient juste d'arriver. Il est positif si l'information n'est pas encore arrivée, et négatif si elle est déjà parvenue en $\vec{X} + d\vec{X}$ depuis un certain temps. Dans la définition de ds^2 le temps est précédé d'un signe moins, et les 3 coordonnées d'espace par un signe plus : la signature est $-+++$. C'est le signe moins de cette signature qui explique l'utilisation du nombre imaginaire pur défini par $i^2 = -1$, et la définition de la position d'un point dans l'espace-temps déjà abordée en physique classique. La valeur de l'indicateur ds est indépendante du repère inertiel utilisé.

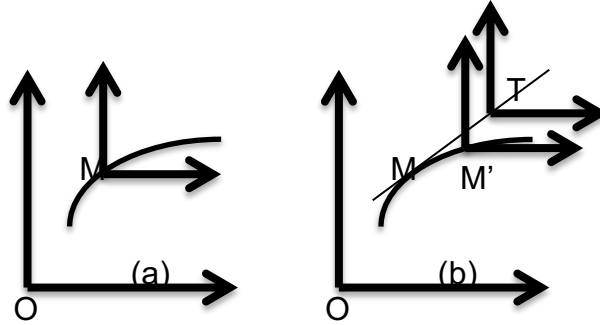


Figure 1 : Repères Entraîné et Inertiel Tangent

Nous appellerons point matériel un mobile de très petites dimensions, approximable à un point, mais ayant une masse finie non nulle. Soit un point matériel M se déplaçant dans un repère inertiel R selon une trajectoire donnée par $\vec{x} = \vec{x}_s(t)$. Ce repérage est tout à fait possible car il donne une position $\vec{X} = (ict \quad \vec{x}_s^T(t))$ en fonction du paramètre de repérage t . Afin d'illustrer les notions de repère inertiel tangent et de repère entraîné, plaçons nous dans un espace à 2 dimensions. La figure 1a montre la trajectoire de M dans R de centre O, et un repère centré sur M à l'instant t dans R. La figure 1b indique la position M' du point matériel à $t' \neq t$, et le repère inertiel tangent R_T , centré sur T à l'instant t' dans R. Ce dernier s'est déplacé de M à T à vitesse constante égale à la vitesse de M dans R à l'instant t . Ainsi, T se déplace sur la droite tangente à la trajectoire du point matériel en M, à vitesse constante. Le repère R_e dont le centre M' a suivi la trajectoire du point matériel est le repère entraîné. Ici les directions des axes restent parallèles à celles de R, mais ce n'est pas le cas en relativité. L'équation (I-34) correspond au cas le plus simple. Il est clair que les vitesses du point matériel en M sont nulles dans R_T et R_e . Par contre, les accélérations, et donc les forces ne sont pas les mêmes dans ces deux repères.

Les définitions des repères inertiel tangent et entraîné doivent être étendues à un espace-temps à 4 dimensions. Soit un point matériel se déplaçant dans R de \vec{x} à $\vec{x} + d\vec{x}$, pendant dt . Soit le repère entraîné, R_e , lié au point matériel, c'est-à-dire centré sur ce point. Dans R_e le point matériel est immobile car on a toujours $\vec{x}_e = 0$. Le temps écoulé correspondant dans R_e est $d\tau$. Les coordonnées du point dans R_e sont $\vec{X}_e^T = (ic\tau \quad 0)$ où τ est le temps propre du point matériel, et \vec{X}_T dans R_T . Si nous considérons un espace infiniment petit autour de \vec{x} et un temps proche de t , dans ce petit espace-temps R_e peut être considéré comme un repère localement inertiel, et il est alors appelé repère inertiel tangent R_T (RIT), ou repère inertiel local (RIL) [20]. L'écoulement du temps $d\tau$ est localement le même dans R_T que dans R_e :

$$d\vec{X}_T = (icd\tau \quad 0) \quad (I-30)$$

Le temps propre τ est celui vécu par le point matériel et le temps t est celui vécu par un observateur situé à l'origine du repère inertiel R. Nous avons donc, pour l'indicateur ds^2 , entre les repères R et R_T :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^T d\vec{x} \quad (I-31)$$

En effet, nous avons dit plus haut que la valeur de ds^2 est indépendante du repère inertiel utilisé pour définir la position \vec{X} du point matériel (invariant cinématique). Ainsi, le début de l'équation (I-31) montre

que l'écoulement du temps propre ($d\tau$) est indépendant du choix du repère inertiel R. La vitesse de déplacement du point matériel dans R est \vec{u} , définie par (I-1), ce qui donne avec (I-31) :

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{-\frac{\vec{u}^T \vec{u}}{c^2}} \quad (I-32)$$

Ainsi $d\tau < dt$, ce qui signifie que le temps propre s'écoule moins vite que celui d'un observateur lié à R. Ce temps propre est aussi appelé temps d'univers. Au point de tangence, le quadrivecteur vitesse dans R est $\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \vec{u}$ et celui dans R_T $\frac{d\vec{X}_T}{d\tau} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T \end{pmatrix} = \vec{u}_T$. Le passage de R à R_T se fait par :

$$d\vec{X}_T = \bar{\bar{P}} \bar{\bar{\Lambda}}_T d\vec{X} \quad (I-33)$$

Où $\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{P}} \end{pmatrix}$ avec la matrice 3x3 $\bar{\bar{P}}$ définissant les nouvelles directions spatiales par rapport aux premières, et $\bar{\bar{\Lambda}}_T$ correspondant aux seuls effets relativistes (matrice de transformation de Lorentz). Comme nous avons précisé plus haut que nous simplifierons les équations grâce à $\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{\delta}}$, où $\bar{\bar{\delta}}$ est la matrice unité de KRONECKER. Ceci implique $\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{\delta}}$.

La matrice de transition de R vers le RIT est une constante où $\vec{u}^0 = \vec{u}$ au point de tangence (Figure 1) :

$$\bar{\bar{\Lambda}}_T = \begin{pmatrix} \gamma^0 & -\frac{i\gamma^0}{c} \vec{u}^{0T} \\ \frac{i\gamma^0}{c} \vec{u}^0 & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma^0 - 1) \frac{\vec{u}^0 \vec{u}^{0T}}{\vec{u}^{0T} \vec{u}^0} \end{pmatrix} \quad (I-34)$$

Avec $\gamma^0 = \gamma$ (point de tangence), et $\bar{\bar{\Lambda}}_T^T \bar{\bar{\Lambda}}_T = \bar{\bar{\Lambda}}_T \bar{\bar{\Lambda}}_T^T = \bar{\bar{\delta}}$. Compte tenu de (I-32) et (I-33) nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} d\vec{X}_T &= \bar{\bar{\Lambda}}_T d\vec{X} \\ \vec{u}_T &= \frac{d\vec{X}_T}{d\tau} = \bar{\bar{\Lambda}}_T \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{X}}{dt} = \bar{\bar{\Lambda}}_T (\gamma \vec{u}) \\ \frac{d\vec{u}_T}{d\tau} &= \gamma \bar{\bar{\Lambda}}_T \frac{d(\gamma \vec{u})}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (I-35)$$

Où $\bar{\bar{\Lambda}}_T^T$ est une matrice 4x4 à coefficients constants (le RIT se déplace à vitesse constante par rapport à R). Le quadri-gradient a été défini en (I-2), et sa transformation se fait par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_T(\dots) = \bar{\bar{\Lambda}}_T \overrightarrow{\text{grad}}(\dots) \quad (I-36)$$

Si $d\vec{x}^T = (d(\vec{x})_1 \ d(\vec{x})_2 \ d(\vec{x})_3)$, dans le cas d'un hypervolume hypercubique orienté suivant les axes d'un repère orthonormé nous avons $dV = ic dt d(\vec{x})_1 d(\vec{x})_2 d(\vec{x})_3$. Nous constatons donc que dV est un nombre imaginaire pur. Le changement de repère inertiel (de R à R_T) conserve les hypervolumes :

$$dV_T = \det(\bar{\bar{\Lambda}}_T) dV = dV \quad (I-37)$$

Où l'opérateur $\det(\dots)$ est le déterminant d'une matrice ($\bar{\bar{\Lambda}}_T$ étant orthonormée $\det(\bar{\bar{\Lambda}}_T) = 1$).

6 Postulat original pour le passage de la physique classique à la relativité restreinte

La plupart des équations présentées dans la littérature ont été obtenues par trois méthodes différentes :

- Elaboration par induction en modifiant les équations de la dynamique classique des fluides, en suivant certaines règles permettant de les adapter aux exigences de la physique relativiste,
- Démonstration des équations de l'hydrodynamique relativiste des fluides à l'aide de l'équation de BOLTZMANN relativiste,
- Démonstration des équations de l'hydrodynamique relativiste des fluides à l'aide du principe de moindre action et du Lagrangien.

Or O. COSTA de BEAUREGARD [28] juge la première en ces termes : « *l'extension relativiste d'une théorie classique est un problème inductif, et soumis comme tel à un certain arbitraire où se manifeste le goût personnel de l'auteur. Il est donc rigoureusement impossible de donner raison à un auteur et tort aux autres, ou vice versa* ». Pourtant, c'est une méthode souvent utilisée, et qu'il utilise lui-même.

La deuxième technique consiste à bien poser l'équation de BOLTZMANN, et de bien choisir les distributions correspondantes, car le résultat obtenu est totalement dépendant de l'écriture choisie pour cette équation. Charles-Michel MARLE [40] est un des auteurs appliquant cet outil, qu'il commente de la façon suivante : « *Mais dès que, dans la théorie, on tente d'introduire des phénomènes dissipatifs tels que transfert de chaleur, viscosité ou diffusion, des difficultés se présentent. Il est possible de trouver de nombreuses équations différentes pour décrire ces phénomènes, qui toutes, dans le cas limite où la vitesse de la lumière tendrait vers l'infini, se réduisent aux équations classiques. Les auteurs qui ont étudié ce problème ne s'accordent pas tous sur le choix même des équations à adopter.* » Cet auteur considère que la dissipation inélastique est prise en compte par les frottements du fluide sur lui-même, ce qui est aussi notre cas. Par ailleurs, si faire tendre la vitesse de la lumière vers l'infini est discutable, c'est une méthode souvent utilisée et que nous appliquerons aussi, du fait de son utilité.

Henri ARZELIES [1] juge la méthode du Lagrangien en ces termes : « *On écrit une intégrale d'action avec un Lagrangien densitaire ; les équations du mouvement sont alors les équations d'EULER – LAGRANGE correspondantes. Bien entendu, on choisit le Lagrangien pour obtenir les équations cherchées. Autant de Lagrangiens, autant d'équations. Il y a là une source inépuisable de théories.* » Cette méthode est très utilisée, mais les auteurs ne s'accordent pas sur un Lagrangien unique, ce qui limite la portée des démonstrations correspondantes, ainsi que des résultats qui s'en déduisent.

Afin d'éviter les écueils de ces méthodes, nous énoncerons un postulat original conduisant à une démonstration des expressions de la dynamique des fluides continus en relativité restreinte : « **Dans le Repère Inertiel Tangent d'un espace-temps plat, les équations de la dynamique relativiste des mélanges fluides continus et celles de la physique classique sont identiques.** »

Ceci est du au fait que la physique classique, valable dans un repère inertiel (Galiléen), a été développée localement à l'échelle terrestre, pour des vitesses très faibles devant celle de la lumière. Ainsi, tout s'est passé comme si les scientifiques s'étaient placés dans un repère inertiel (presque) tangent à l'échelle de l'univers. Nous considérons donc que les équations de la physique classique sont identiques à celles écrites

dans le repère inertiel tangent en relativité restreinte (espace-temps plat). Le fait de se placer dans le repère inertiel tangent, où la vitesse est localement nulle (mais pas ses dérivées temporelle ou spatiales), élimine le problème de la définition de l'énergie cinétique (différentes en physique classique et relativiste). Plusieurs auteurs signalent l'importance du RIT [1], mais l'un d'entre eux [30] dit que les équations de la physique classique sont valables dans le RIT près de la position considérée. Malheureusement, il n'utilise pas cette hypothèse. Ensuite, nous devons passer du repère inertiel tangent à un repère inertiel quelconque R. Pour différencier les expressions dans le RIT de celles dans R, nous y ajouterons un T en indice, comme dans R_T . Toutes les équations vues dans les sections précédentes sont valables dans le RIT, à la condition que $\vec{u}_T^T = (ic \quad \vec{u}_T^T) = (ic \quad 0)$, et donc que $\gamma_T = 1 - \frac{\vec{u}_T^T \vec{u}_T}{c^2} = 1$. Ainsi, la deuxième ligne de (I-35) s'écrit $\gamma_T \vec{u}_T = \bar{\Lambda}_T(\gamma \vec{u})$. Les termes à rendre covariants relèvent de l'électromagnétisme, comme les pressions électrostatique et magnétostatique $\vec{P}_T^T \vec{E}_T + \vec{M}_T^T \vec{B}_T$ (I-19). Pour cela, nous remarquons que :

$$-\frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}}_T \circ \bar{\mathbf{E}}_T = \vec{P}_T^T \vec{E}_T + \frac{1}{2} \overline{\text{mat}}(\vec{M}_T) \circ \overline{\text{mat}}(\vec{B}_T) = \vec{P}_T^T \vec{E}_T + \vec{M}_T^T \vec{B}_T \quad (\text{I-38})$$

Où l'opérateur \circ est le produit scalaire de deux matrices : la somme des produits des éléments de même position dans les deux matrices. Les forces volumiques dipolaires $-\overline{\text{grad}}_T(\vec{P}_T^T) \vec{E}_T - \overline{\text{grad}}_T(\vec{M}_T^T) \vec{B}_T$ sont aussi à définir (I-19). Commençons par exprimer autrement $\left(\overline{\text{grad}}_T(\vec{P}_T^T) \vec{E}_T\right)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{p}_T \vec{u}_T}{c^2} &= \begin{pmatrix} 0 & ic \vec{P}_T^T \\ -ic \vec{P}_T & \overline{\text{mat}}(\vec{M}_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{P}_T \end{pmatrix} \\ \left(\bar{\delta} + \frac{\vec{u}_T \vec{u}_T^T}{c^2}\right) \overline{\text{grad}}_T \left(\frac{\vec{u}_T^T \vec{P}_T^T}{c^2}\right) \bar{\mathbf{E}}_T \vec{u}_T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial r} \\ \overline{\text{grad}}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{P}_T \end{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}_T \vec{u}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\text{grad}}_T(\vec{P}_T^T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{E}_T \end{pmatrix} = \left(\overline{\text{grad}}_T(\vec{P}_T^T) \vec{E}_T\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-39})$$

De la même façon nous obtenons $\left(\bar{\delta} + \frac{\vec{u}_T \vec{u}_T^T}{c^2}\right) \overline{\text{grad}}_T(\vec{u}_T^T \vec{M}_T^T) \frac{\bar{\mathbf{B}}_T \vec{u}_T}{c^2} = \left(\overline{\text{grad}}_T(\vec{M}_T^T) \vec{B}_T\right)$. Suivant la même méthode, il reste à déterminer $\bar{\Theta}_{ET}$, ou plutôt $\bar{\mathbf{T}}_{E2T}$ (I-8), à l'aide de :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_T \bar{\mathbf{M}}_T \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} (ic \quad 0) &= \begin{pmatrix} -c^2 \vec{B}_T^T \vec{M}_T & 0 \\ ic \vec{E}_T \wedge \vec{M}_T & 0 \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_T \bar{\mathbf{M}}_T \vec{u}_T \vec{u}_T^T \\ (ic \quad 0) \bar{\mathbf{B}}_T \bar{\mathbf{M}}_T \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} &= -c^2 \vec{B}_T^T \vec{M}_T = \vec{u}_T^T \bar{\mathbf{B}}_T \bar{\mathbf{M}}_T \vec{u}_T \\ \bar{\mathbf{T}}_{E2T} &= -\bar{\mathbf{B}}_T \bar{\mathbf{M}}_T \frac{\vec{u}_T \vec{u}_T^T}{c^2} - \frac{\vec{u}_T \vec{u}_T^T}{c^2} \bar{\mathbf{M}}_T \bar{\mathbf{B}}_T - \left(\frac{1}{c^2} \vec{u}_T^T \bar{\mathbf{B}}_T \bar{\mathbf{M}}_T \vec{u}_T\right) \frac{\vec{u}_T \vec{u}_T^T}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-40})$$

L'expression (I-39) conduit à $\bar{\Theta}_{ET} = 0$ (pas en relativité). Pour simplifier $\bar{\mathbf{T}}_{T2T}$ (I-26), nous poserons :

$$\bar{\Theta}_{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Theta}_{IT} \end{pmatrix} \quad (\text{I-41})$$

7 Eléments de cinétique relativiste des fluides

Afin de réaliser la transformation des différentes grandeurs lors du passage du repère inertiel tangent (RIT) à un repère inertiel quelconque (R), nous aborderons quelques éléments de cinétique des fluides en relativité restreinte. Il s'agit d'une théorie cinétique des gaz, qui ne présuppose, ni utilise, aucune distribution statistique. En effet, F. FER [19] écrit : « *L'obtention d'équations de mécanique macroscopique exigerait donc, pour se prononcer en toute certitude, de passer par la mécanique (non statistique d'ailleurs) des corpuscules, et d'effectuer ensuite des moyennes précises.* »

Ce type de théorie se réfère à un hypervolume élémentaire représentatif (HER) du fluide qui doit comprendre un grand nombre de molécules. Ainsi, la valeur locale, au sein du HER, d'une certaine grandeur sera la moyenne sur toutes les molécules situées à l'intérieur de ce HER. Parler de HER est conforme au principe d'indissociabilité du temps et de l'espace, et à la conservation des hypervolumes vue en (I-37). Un point important est que nous n'étudierons pas les collisions entre molécules. En effet, une collision entre deux molécules ne modifie ni la quantité de mouvement, ni l'énergie, de l'ensemble des molécules du HER, donc du fluide. Cela impose donc que les distances de déplacement des molécules que nous envisagerons sont petites devant leur libre parcours moyen. Un HER est défini par son hypervolume et le nombre de molécules de chaque constituant qu'il contient. Soit K_i le nombre de molécules de constituant i dans le HER, chacune de ces molécules ayant une masse intrinsèque m_i . L'hypervolume du HER est dV_T dans R_T et dV dans R (I-37). La masse intrinsèque de i dans le HER est :

$$K_i m_i = \rho_{IT} x_i \frac{dV_T}{icd\tau} = \rho_I x_i \frac{dV}{icdt} \quad (I-42)$$

Où $\frac{dV_T}{icd\tau}$ est le volume du HER dans le RIT, et $\frac{dV}{icdt}$ dans R. En effet, il s'agit des mêmes molécules vues dans deux repères inertiels différents. Compte tenu de (I-32), (I-37) et (I-42) nous avons :

$$\rho_{IT} = \frac{\rho_I}{\gamma} \quad (I-43)$$

La masse intrinsèque totale de mélange fluide dans le HER est $\sum_{i=1}^n K_i m_i = \rho_{IT} \frac{dV_T}{icd\tau} = \rho_I \frac{dV}{icdt}$ (pour les n constituants), ce qui montre bien que :

$$x_i = \frac{K_i m_i}{\sum_{i=1}^n K_i m_i} \quad (I-44)$$

Est un invariant cinématique (indépendant du repère utilisé), et que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Soit $\vec{u}_{ikT}^T = (ic \ \vec{u}_{ikT}^T)$ la quadri-vitesse de la $k^{ème}$ molécule de type i dans le RIT, sa quadri-quantité de mouvement est $m_i \vec{u}_{ikT}^T$. En effet, nous avons vu en section 3 que la quantité de mouvement est définie à l'aide de la masse intrinsèque et non de la masse-énergie. La quadri-quantité de mouvement totale du constituant i dans le HER est (ce qui permet de définir son flux de diffusion dans le RIT) :

$$\left. \begin{aligned} m_i \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^T &= \rho_{IT} x_i \frac{dV_T}{icd\tau} \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^T = \rho_{IT} x_i \frac{dV_T}{icd\tau} \vec{u}_T + \vec{J}_{iT} \frac{dV_T}{icd\tau} \\ \frac{\vec{J}_{iT}}{\rho_{IT} x_i} &= \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^T - \vec{u}_T = \left(\frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^T \right) - \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_{IT} x_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{J}_{iT} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (I-45)$$

La quadri-quantité de mouvement par unité de volume du fluide dans le RIT est donc :

$$\left. \begin{aligned} \rho_{IT} \vec{u}_T &= \rho_{IT} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT} \\ \vec{u}_T &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT} = \sum_{i=1}^n x_i \left(\vec{u}_T + \frac{\vec{J}_{iT}}{\rho_{IT} x_i} \right) = \vec{u}_T + \frac{1}{\rho_{IT}} \sum_{i=1}^n \vec{J}_{iT} \\ \sum_{i=1}^n \vec{J}_{iT} &= 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \vec{J}_{iT} = 0 \end{aligned} \right] \quad (I-46)$$

La transformation des vitesses selon (I-35), lors du passage du RIT à R, donne :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_T &= \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{u} \quad \text{and} \quad \vec{u}_{ikT} = \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{u}_{ik} \\ \vec{J}_{iT} &= \frac{\rho_{IT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT} - \rho_{IT} x_i \vec{u}_T = \frac{\rho_{IT} x_i}{K_i} \bar{\Lambda}_T \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ik} - \rho_{IT} x_i \bar{\Lambda}_T \vec{u} = \bar{\Lambda}_T \vec{J}_i = \bar{\Lambda}_T \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{J}_i \end{pmatrix} \\ \sum_{i=1}^n \vec{J}_i &= 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \vec{J}_i = 0 \quad \text{and} \quad \vec{u}^T \vec{J}_i = \frac{\vec{u}_T^T \bar{\Lambda}_T}{\gamma} \bar{\Lambda}_T^T \vec{J}_{iT} = \frac{1}{\gamma} (ic \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{J}_{iT} \end{pmatrix} = 0 = \vec{u}_T^T \vec{J}_{iT} \end{aligned} \right] \quad (I-47)$$

Nous pouvons poser :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_{ikT} &= \vec{u}_T + \frac{\vec{J}_{iT}}{\rho_{IT} x_i} + \vec{u}_{ikT}^\delta \quad \text{and} \quad \vec{u}_{ik} = \vec{u} + \frac{\vec{J}_i}{\rho_I x_i} + \vec{u}_{ik}^\delta \\ \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^\delta &= 0 \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ik}^\delta = 0 \end{aligned} \right] \quad (I-48)$$

L'énergie hors champs de la $k^{ième}$ molécule de type i dépend du repère inertiel utilisé. Sa masse-énergie au repos est définie localement dans un repère inertiel tangent à sa trajectoire, la vitesse de la molécule étant nulle dans un tel repère. Cela veut dire qu'il y a autant de repères inertiels tangents dans l'hypervolume élémentaire représentatif que de molécules dans cet HER. Soit $m_i \left(1 + \frac{U_{0ik}}{c^2}\right)$ la masse-énergie au repos de la $k^{ième}$ molécule de type i , sa masse-énergie en mouvement dans le RIT du HER est $m_i \left(1 + \frac{U_{0ik}}{c^2}\right) \gamma_{ikT}$, où U_{0ik} est l'énergie interne au repos de cette molécule par unité de masse intrinsèque et $\frac{1}{\gamma_{ikT}^2} = -\frac{\vec{u}_{ikT}^T \vec{u}_{ikT}}{c^2}$ (I-32). L'énergie hors champs (électromagnétiques et gravitationnels) du fluide dans l'hypervolume élémentaire représentatif est donc, avec (I-42) :

$$\sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^{K_i} (c^2 + U_{0ik}) \gamma_{ikT} = \frac{dV_T}{icd\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{IT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (c^2 + c^2(\gamma_{ikT} - 1) + \gamma_{ikT} U_{0ik}) \quad (I-49)$$

Où nous pouvons définir l'énergie interne par unité de masse intrinsèque du constituant i dans le RIT :

$$\frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (c^2(\gamma_{ikT} - 1) + \gamma_{ikT} U_{0ik}) = U_{iT} \quad (I-50)$$

En effet, $\frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} c^2(\gamma_{ikT} - 1)$ est l'énergie de l'agitation Brownienne par unité de masse intrinsèque du constituant i , celle-ci faisant partie de l'énergie interne de ce constituant. Comme la masse-énergie dans R est la masse-énergie au repos multipliée par γ , nous obtenons l'énergie hors champs du HER dans R :

$$\left. \begin{aligned} \gamma \frac{dV_T}{icd\tau} \sum_{i=1}^n \rho_{IT} x_i (c^2 + U_{iT}) &= \frac{dV}{icdt} \rho_I (c^2 \gamma + \gamma \sum_{i=1}^n x_i U_{iT}) = \\ \frac{dV}{icdt} \rho_I (c^2 \gamma + \gamma U_T) &= \frac{dV}{icdt} \rho_I (c^2 + c^2(\gamma - 1) + U) \end{aligned} \right] \quad (I-51)$$

$U_T = \sum_{i=1}^n x_i U_{iT}$ est l'énergie interne par unité de masse intrinsèque du fluide dans le RIT, et $U = \gamma U_T$ est l'énergie interne par unité de masse intrinsèque du fluide dans R. Dans la dernière partie de (I-51), $\rho_I c^2$ est l'énergie intrinsèque (nucléaire) du fluide par unité de volume, $\rho_I c^2 (\gamma - 1)$ l'énergie cinétique par unité de volume et $\rho_I U$ l'énergie interne du fluide par unité de volume.

L'expression $U = \gamma U_T$ nous indique que l'énergie interne est covariante, or la chaleur étant une composante importante de l'énergie interne, nous pouvons penser que ce passage d'un repère à un autre est identique pour l'énergie interne et la chaleur. Or il existe trois principaux modèles pour rendre compte d'un échange de chaleur, noté ΔQ_T dans le RIT et ΔQ dans R. Albert EINSTEIN et Louis de BROGLIE [26] [41] [42] [43] ont proposé $\Delta Q = \Delta Q_T / \gamma$, alors qu'Henri ARZELIES [44] [45] préfère la forme covariante $\Delta Q = \gamma \Delta Q_T$. FRONTEAU [29] [46] et B. ROTHENSTEIN et I. ZAHARIE [47] comparent ces modèles à $\Delta Q = \Delta Q_T$ sans trancher. Nous avons vu plus haut que l'énergie interne massique U était covariante, donc nous admettrons qu'il en est de même d'un échange de chaleur, mais aussi de l'enthalpie massique H . Ainsi le passage de l'enthalpie par unité de masse intrinsèque du RIT vers R s'écrit, en se servant de (I-43) :

$$H = \gamma H_T = \gamma \left(U_T + \frac{P_T}{\rho_{IT}} \right) = U + \frac{\gamma^2 P_T}{\rho_I} = U + \frac{P}{\rho_I} \quad (I-52)$$

Où P_T est la pression dans le RIT et P la pression dans R. Ceci impose :

$$P = \gamma^2 P_T \quad (I-53)$$

Ceci est normal car $dU_T = -P_T d\left(\frac{1}{\rho_{IT}}\right) + \delta Q_T = -\frac{P}{\gamma^2} d\left(\frac{\gamma}{\rho_I}\right) + \frac{\delta Q}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \left(-Pd\left(\frac{1}{\rho_I}\right) + \delta Q \right) = \frac{dU}{\gamma}$ compte tenu de (I-43), (I-51) et (I-53), γ étant considéré comme une constante dans une position donnée.

Le flux de quadri-quantité de mouvement (tenseur d'ordre 2, ou matrice 4x4) de constituant i dans l'hypervolume élémentaire représentatif dans le RIT est, à l'aide de (I-48) :

$$\begin{aligned} m_i \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT} \vec{u}_{ikT}^T &= \rho_{IT} x_i \frac{dV_T}{icd\tau} \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \left(\vec{u}_T + \frac{\vec{J}_{iT}}{\rho_{IT} x_i} + \vec{u}_{ikT}^\delta \right) \left(\vec{u}_T^T + \frac{\vec{J}_{iT}^T}{\rho_{IT} x_i} + \vec{u}_{ikT}^{\delta T} \right) \\ &= \rho_{IT} x_i \frac{dV_T}{icd\tau} \left(\vec{u}_T \vec{u}_T^T + \frac{\vec{J}_{iT} \vec{u}_T^T + \vec{u}_T \vec{J}_{iT}^T}{\rho_{IT} x_i} + \frac{\vec{J}_{iT} \vec{J}_{iT}^T}{(\rho_{IT} x_i)^2} + \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^\delta \vec{u}_{ikT}^{\delta T} \right) \end{aligned} \quad (I-54)$$

Ce qui donne le flux de quadri-quantité de mouvement du mélange dans le RIT, compte tenu de (I-46) :

$$\sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT} \vec{u}_{ikT}^T = \frac{dV_T}{icd\tau} \left(\rho_{IT} \vec{u}_T \vec{u}_T^T + \sum_{i=1}^n \frac{\vec{J}_{iT} \vec{J}_{iT}^T}{\rho_{IT} x_i} \right) + \frac{dV_T}{icd\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{IT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^\delta \vec{u}_{ikT}^{\delta T} \end{pmatrix} \quad (I-55)$$

Or, en physique classique (théorie cinétique des gaz) nous savons que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho_{IT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^\delta \vec{u}_{ikT}^{\delta T} = P_T \vec{\delta} + \vec{\bar{M}}_T \quad (I-56)$$

Où $\vec{\bar{M}}_T$ une matrice symétrique correspondant à des forces thermodynamiques dues à l'anisotropie de la distribution des vitesses des molécules. Nous généraliserons (I-56) en ($\frac{\rho_{IT} x_i}{\rho_{IT}} =$ titre volumique de i) :

$$\frac{\rho_{IT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT}^\delta \vec{u}_{ikT}^{\delta T} = \frac{\rho_{IT} x_i}{\rho_{IT}} P_T \vec{\delta} + \vec{\bar{M}}_{iT} \quad (I-57)$$

Où ρ_{iT} est la masse intrinsèque de i par unité de volume de i à l'intérieur du mélange dans le RIT. A l'aide de (I-42) et (I-46), nous pouvons transformer (I-55) et obtenir l'expression correspondante dans R :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ikT} \vec{u}_{ikT}^T &= \gamma^2 \frac{dV}{icdt} \bar{\Lambda}_T \left(\rho_i \vec{u} \vec{u}^T + \sum_{i=1}^n \frac{\vec{J}_i \vec{J}_i^T}{\rho_i x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ik}^\delta \vec{u}_{ik}^{\delta T} \right) \bar{\Lambda}_T^T \\ \gamma^2 \frac{dV}{icdt} \bar{\Lambda}_T \left(\sum_{i=1}^n \frac{\rho_i x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ik}^\delta \vec{u}_{ik}^{\delta T} \right) \bar{\Lambda}_T^T &= \gamma P_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_T \end{pmatrix} \end{aligned} \right] \quad (I-58)$$

Ce qui donne, compte tenu de (I-53) et du fait que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \bar{\delta} + \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} ic & \\ & 0 \end{pmatrix} (ic \quad 0) = \bar{\delta} + \frac{\vec{u}_T \vec{u}_T^T}{c^2}$:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \vec{u}_{ik}^\delta \vec{u}_{ik}^{\delta T} &= \frac{P}{\gamma^2} \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u} \vec{u}^T \right) + \bar{M} \\ \bar{M} &= \bar{\Lambda}_T^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_T \end{pmatrix} \bar{\Lambda}_T \end{aligned} \right] \quad (I-59)$$

Le flux d'énergie hors effets de champs de la $k^{ième}$ molécule de type i dans le RIT est le produit de son énergie volumique par sa quadri-vitesse, c'est-à-dire, compte tenu de (I-49), $m_i(c^2 + U_{oik})\gamma_{ikT} \vec{u}_{ikT}$. Le flux d'énergie, hors champs, dans le RIT en est déduit, puis modifié grâce à (I-46), (I-48) et (I-50) :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho_{iT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (c^2 + U_{oik}) \gamma_{ikT} \vec{u}_{ikT} = \rho_{iT} (c^2 + U_T) \vec{u}_T + \sum_{i=1}^n \left(\vec{J}_{iT} U_{iT} + \frac{\rho_{iT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (c^2 + U_{oik}) \gamma_{ikT} \vec{u}_{ikT}^\delta \right) \quad (I-60)$$

La vitesse \vec{u}_{ikT} est très petite devant celle de la lumière (RIT), c'est le cas aussi en physique classique où γ_{ikT} est approximé par $1 + \frac{\vec{u}_{ikT}^T \vec{u}_{ikT}}{2c^2}$, donc nous développerons γ_{ikT} en :

$$\gamma_{ikT} = 1 + \frac{\vec{u}_{ikT}^T \vec{u}_{ikT}}{2c^2} + \gamma_{ikT}^\delta = 1 + \frac{\vec{J}_{iT}^T \vec{J}_{iT}}{2c^2 (\rho_{iT} x_i)^2} + \frac{\vec{J}_{iT}^T \vec{u}_{ikT}^\delta}{\rho_{iT} x_i c^2} + \frac{\vec{u}_{ikT}^{\delta T} \vec{u}_{ikT}^\delta}{2c^2} + \gamma_{ikT}^\delta \quad (I-61)$$

Car $\vec{u}_T = 0$. Comme $\vec{J}_{iT}^T = \begin{pmatrix} 0 & \vec{J}_{iT}^T \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_{ikT}^{\delta T} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{u}_{ikT}^{\delta T} \end{pmatrix}$, nous écrivons :

$$\gamma_{ikT} = 1 + \frac{\vec{J}_{iT}^T \vec{J}_{iT}}{2c^2 (\rho_{iT} x_i)^2} + \frac{\vec{J}_{iT}^T \vec{u}_{ikT}^\delta}{\rho_{iT} x_i c^2} + \frac{\vec{u}_{ikT}^{\delta T} \vec{u}_{ikT}^\delta}{2c^2} + \gamma_{ikT}^\delta \quad (I-62)$$

Ce qui donne le flux d'énergie du fluide dans le RIT hors $\rho_{iT}(c^2 + U_T)\vec{u}_T$, compte tenu de (I-48) et (I-57) :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\vec{J}_{iT} U_{iT} + \frac{\rho_{iT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \left(c^2 + \frac{\vec{J}_{iT}^T \vec{J}_{iT}}{2(\rho_{iT} x_i)^2} + \frac{\vec{u}_{ikT}^{\delta T} \vec{J}_{iT}}{\rho_{iT} x_i} + \frac{\vec{u}_{ikT}^{\delta T} \vec{u}_{ikT}^\delta}{2} + c^2 \gamma_{ikT}^\delta + \gamma_{ikT} U_{oik} \right) \vec{u}_{ikT}^\delta \right) &= \\ \sum_{i=1}^n \left(\vec{J}_{iT} \left(U_{iT} + \frac{P_T}{\rho_{iT}} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{iT} \end{pmatrix} \frac{\vec{J}_{iT}}{\rho_{iT} x_i} + \frac{\rho_{iT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \left(\frac{\vec{u}_{ikT}^{\delta T} \vec{u}_{ikT}^\delta}{2} + c^2 \gamma_{ikT}^\delta + \gamma_{ikT} U_{oik} \right) \vec{u}_{ikT}^\delta \right) & \end{aligned} \right] \quad (I-63)$$

Or nous savons que dans le RIT l'enthalpie massique du constituant i est $H_{iT} = U_{iT} + \frac{P_T}{\rho_{iT}}$. Dans (I-63) le terme $\sum_{i=1}^n \vec{J}_{iT} H_{iT}$ correspond au transfert de chaleur par diffusion d'enthalpie et $\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{iT} \end{pmatrix} \frac{\vec{J}_{iT}}{\rho_{iT} x_i}$ au travail de forces d'interaction entre constituants qui, avec les réactions chimiques, déforment leurs profils de vitesse. $\sum_{i=1}^n \frac{\rho_{iT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \left(\frac{\vec{u}_{ikT}^{\delta T} \vec{u}_{ikT}^\delta}{2} + c^2 \gamma_{ikT}^\delta + \gamma_{ikT} U_{oik} \right) \vec{u}_{ikT}^\delta$ peut être interprété comme un transfert de chaleur par conduction dans le RIT. Compte tenu de (I-47), nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma_{ik}^2} &= -\frac{\vec{u}_{ik}^T \vec{u}_{ik}}{c^2} = -\frac{\vec{u}_{ikT}^T \bar{\Lambda}_T \bar{\Lambda}_T^T \vec{u}_{ikT}}{c^2 \gamma^2} = \frac{\vec{u}_{ikT}^T \vec{u}_{ikT}}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma_{ikT}^2 \gamma^2} \\ \gamma_{ik} &= \gamma \gamma_{ikT} \end{aligned} \right\} \quad (I-64)$$

Le flux d'énergie hors champs du mélange dans R est, avec (I-43) et (I-47) :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\rho_i x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (c^2 + U_{0ik}) \gamma_{ik} \vec{u}_{ik} = \gamma \bar{\Lambda}_T^T \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{iT} x_i}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (c^2 + U_{0ik}) \gamma_{ikT} \vec{u}_{ikT} \quad (I-65)$$

Ainsi, chaque élément de (I-60) ou (I-63) doit être multiplié à gauche par $\gamma \bar{\Lambda}_T^T$ pour passer du Repère Inertiel Tangent à R. En particulier $\gamma \bar{\Lambda}_T^T \rho_{iT} (c^2 + U_T) \vec{u}_T = \rho_i (\gamma c^2 + U) \vec{u}$ (flux de transport d'énergie liée à la matière). Le flux de chaleur par diffusion d'enthalpie dans R est égal à $\gamma \bar{\Lambda}_T^T \sum_{i=1}^n \vec{J}_{iT} H_{iT} = \sum_{i=1}^n \vec{J}_i H_i$, en tenant compte de (I-47). Le quadri-flux de transfert de chaleur (somme des transferts par diffusion d'enthalpie et par conduction) doit suivre la même loi, donc :

$$\left. \begin{aligned} \vec{q} &= \gamma \bar{\Lambda}_T^T \vec{q}_T = \gamma \bar{\Lambda}_T^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{q}_T \end{pmatrix} \\ \vec{u}^T \vec{q} &= \frac{\vec{u}_T^T \bar{\Lambda}_T}{\gamma} \gamma \bar{\Lambda}_T^T \vec{q}_T = \vec{u}_T^T \vec{q}_T = (ic \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{q}_T \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I-66)$$

8 Transformation des forces de la physique classique à la relativité restreinte

Dans l'équation (I-19), nous voyons apparaître cinq quadri-forces volumiques, dont deux sous quadri-gradient. La première est $\overrightarrow{grad}_T^T(\bar{\tau}_T) = (0 \quad \overrightarrow{grad}_T^T(\bar{\tau}_T))$. La dernière expression de (I-35) indique que la quadri-force par unité de masse intrinsèque dans le RIT est égale à celle dans R multipliée à gauche par $\gamma \bar{\Lambda}_T$. Cette transformation correspond à celle déjà rencontrée en (I-65). Comme la masse intrinsèque est un invariant cinématique, la quadri-force dans R est celle dans le RIT multipliée à gauche par $\frac{\bar{\Lambda}_T}{\gamma}$, ou par $\frac{\bar{\Lambda}_T}{\gamma^*}$ à droite pour la transposée. La quadri-force (dans le HER) dans le RIT devient dans R, avec (I-36) :

$$\left(\frac{dv_T}{icdt} \overrightarrow{grad}_T^T(\bar{\tau}_T) \right) \frac{\bar{\Lambda}_T}{\gamma} = \left(\gamma \frac{dv}{icdt} \overrightarrow{grad}^T(\bar{\Lambda}_T^T \bar{\tau}_T) \right) \frac{\bar{\Lambda}_T}{\gamma} = \frac{dv}{icdt} \overrightarrow{grad}^T(\bar{\Lambda}_T^T \bar{\tau}_T \bar{\Lambda}_T) \quad (I-67)$$

Car $\bar{\Lambda}_T$ est une matrice orthonormée constante (transition entre repères inertiels). L'équation (I-67) nous montre que la quadri-force par unité de volume dans R est $\overrightarrow{grad}^T(\bar{\Lambda}_T^T \bar{\tau}_T \bar{\Lambda}_T) = \overrightarrow{grad}^T(\bar{\tau})$, donc que :

$$\bar{\tau} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\tau}_T \bar{\Lambda}_T \quad (I-68)$$

Le tenseur $\bar{\tau}_T$ étant symétrique, il est évident que $\bar{\tau}$ est aussi un tenseur symétrique. Ce résultat est contraire à ce qu'obtient H. ARZELIES [1] pour ce tenseur. Ce problème vient du fait qu'il dissocie le temps et l'espace, erreur dont il fait le reproche à Von LAUE [48] environ cent pages plus loin dans le cas de l'exercice de la barre coudée. Yvonne BRUHAT [35] dit que de nombreuses tentatives ont été faites pour symétriser le tenseur électromagnétique \bar{T}_E (I-7), et interpréter le terme ajouté comme interaction entre l'impulsion-énergie matérielle et le champ électromagnétique. C'est le cas rencontré par Guy PICHON [33].

Cependant, le tenseur des contraintes ne lui pose pas de problème, l'auteur se plaçant dans le cas d'un fluide Newtonien. Nous ne verrons que des tenseurs d'ordre 2 symétriques ou antisymétriques.

Le deuxième cas de quadri-force volumique provenant d'un quadri-gradient est celle due aux pressions totale, électrostatique et magnétostatique. Pour les mêmes raisons que pour le tenseur des contraintes de cisaillement, la transformation vue en (I-68) s'applique, en tenant compte de (I-20), (I-38) et (I-53) :

$$\bar{\Lambda}_T^T \left(P_T^* + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}}_T \circ \bar{\mathbf{E}}_T \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} \bar{\Lambda}_T = \left(\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}} \circ \bar{\mathbf{E}} \right) \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{\mathbf{u}} \vec{\mathbf{u}}^T \right) \quad (I-69)$$

Qui est bien conforme à (I-59). Nous verrons un peu plus loin que $\bar{\mathbf{P}}_T \circ \bar{\mathbf{E}}_T = \bar{\mathbf{P}} \circ \bar{\mathbf{E}}$. Il s'agit d'une propriété du produit scalaire de deux matrices \circ quand ces deux matrices se transforment suivant (I-68).

La quadri-force volumique suivante dans (I-19) est la force de gravitation Newtonienne (y compris magnéto-gravitationnelle) qui s'écrit $\bar{\mathbf{H}}_T \rho_{IT} \vec{\mathbf{u}}_T$ dans le RIT. Elle devient dans R (dans le HER) :

$$\bar{\Lambda}_T^T \left(\frac{dV_T}{icd\tau} \bar{\mathbf{H}}_T \rho_{IT} \vec{\mathbf{u}}_T \right) = \frac{\bar{\Lambda}_T^T}{\gamma} \left(\gamma \frac{dV}{icdt} \bar{\mathbf{H}}_T \frac{\rho_I}{\gamma} \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{\mathbf{u}} \right) = \frac{dV}{icdt} \left(\bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{H}}_T \bar{\Lambda}_T \right) \rho_I \vec{\mathbf{u}} \quad (I-70)$$

A l'aide de (I-32), (I-37), (I-43) et (I-35). Le terme de droite de (I-70) est la quadri-force (dans le HER) de gravitation dans R, soit $\frac{dV}{icdt} \bar{\mathbf{H}} \rho_I \vec{\mathbf{u}}$, donc :

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{H}}_T \bar{\Lambda}_T \quad (I-71)$$

La force volumique dans R est $\bar{\mathbf{H}} \rho_I \vec{\mathbf{u}}$, c'est-à-dire semblable à celle dans le RIT, $\bar{\mathbf{H}}_T \rho_{IT} \vec{\mathbf{u}}_T$. Par ailleurs, $\bar{\mathbf{H}}_T$ étant une matrice antisymétrique, $\bar{\mathbf{H}}$ est aussi une matrice antisymétrique.

La quadri-force volumique électromagnétique suit une loi proche de celle concernant la gravitation : $\bar{\mathbf{E}}_T \vec{\mathbf{C}}_T$ dans le RIT, où $\vec{\mathbf{C}}_T$ est le quadri-courant électrique total donné en (I-16). Avant d'envisager la transformation de la force nous devons aborder celle de $\vec{\mathbf{C}}_T$ du RIT vers R :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathbf{C}}_T &= \sum_{i=1}^n (\rho_{IT} x_i \alpha_i \vec{\mathbf{u}}_T + \vec{\mathbf{J}}_{IT} \alpha_i) + \rho_{IT} \alpha_E \vec{\mathbf{u}}_T + \lambda_{ET} \bar{\mathbf{E}}_T \vec{\mathbf{u}}_T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\rho_I}{\gamma} x_i \alpha_i \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{\mathbf{u}} + \bar{\Lambda}_T \vec{\mathbf{J}}_i \alpha_i \right) + \\ &\frac{\rho_I}{\gamma} \alpha_E \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{\mathbf{u}} + \lambda_{ET} \bar{\mathbf{E}}_T \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{\mathbf{u}} = \bar{\Lambda}_T \left(\sum_{i=1}^n (\rho_I x_i \alpha_i \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{J}}_i \alpha_i) + \rho_I \alpha_E \vec{\mathbf{u}} + \gamma \lambda_{ET} \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{E}}_T \bar{\Lambda}_T \vec{\mathbf{u}} \right) = \bar{\Lambda}_T \vec{\mathbf{C}} \end{aligned} \right\} \quad (I-72)$$

A l'aide de (I-43), (I-35) et (I-47). Le fait d'écrire que le quadri-courant électrique total dans R, $\vec{\mathbf{C}}$, soit tel que $\vec{\mathbf{C}}_T = \bar{\Lambda}_T \vec{\mathbf{C}}$ nécessite le fait que α_E soit un invariant cinématique ainsi que l'hypothèse :

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{E}}_T \bar{\Lambda}_T \quad \text{and} \quad \lambda_E = \gamma \lambda_{ET} \quad (I-73)$$

Hypothèse que nous devons vérifier. Comme dans (I-70), nous avons pour la force de LAPLACE :

$$\bar{\Lambda}_T^T \left(\frac{dV_T}{icd\tau} \bar{\mathbf{E}}_T \vec{\mathbf{C}}_T \right) = \frac{\bar{\Lambda}_T^T}{\gamma} \left(\gamma \frac{dV}{icdt} \bar{\mathbf{E}}_T \bar{\Lambda}_T \vec{\mathbf{C}} \right) = \frac{dV}{icdt} \left(\bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{E}}_T \bar{\Lambda}_T \right) \vec{\mathbf{C}} = \frac{dV}{icdt} \bar{\mathbf{E}} \vec{\mathbf{C}} \quad (I-74)$$

Ce qui confirme l'hypothèse que $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{E}}_T \bar{\Lambda}_T$, la quadri-force volumique électromagnétique dans R étant $\bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{C}}$, tout à fait semblable à $\bar{\mathbf{E}}_T\bar{\mathbf{C}}_T$ dans le RIT. Ainsi, $\bar{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^n (\rho_i x_i \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{J}}_i) \alpha_i + \rho_i \alpha_E \bar{\mathbf{u}} + \lambda_E \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{u}}$, c'est-à-dire, la somme du transfert des ions, du transport des électrons et de la conduction.

La dernière quadri-force volumique de (I-19) est dipolaire, soit $\bar{\mathbf{F}}_{Dr} = \left(-\overrightarrow{\text{grad}}_T(\bar{\mathbf{P}}_T^T) \bar{\mathbf{E}}_T - \overrightarrow{\text{grad}}_T(\bar{\mathbf{M}}_T^T) \bar{\mathbf{B}}_T \right)$ dans le RIT, c'est-à-dire avec (I-39) et ce qui suit, $\bar{\mathbf{F}}_{Dr} = -\left(\bar{\delta} + \frac{\bar{\mathbf{u}}_T \bar{\mathbf{u}}_T^T}{c^2} \right) \left(\overrightarrow{\text{grad}}_T \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}_T^T \bar{\mathbf{P}}_T^T}{c^2} \right) \bar{\mathbf{E}}_T + \overrightarrow{\text{grad}}_T \left(\frac{\bar{\mathbf{u}}_T^T \bar{\mathbf{M}}_T^T}{c^2} \right) \bar{\mathbf{B}}_T \right) \bar{\mathbf{u}}_T$. Ces dernières expressions deviennent, lors du passage du RIT à R, compte tenu de (I-35), (I-36), (I-73), (I-84) et (I-85) :

$$\left. \begin{aligned} \left(\bar{\delta} + \gamma^2 \bar{\Lambda}_T \frac{\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T}{c^2} \bar{\Lambda}_T^T \right) \bar{\Lambda}_T \overrightarrow{\text{grad}} \left(\gamma \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\Lambda}_T^T}{c^2} \right) \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{E}} \bar{\Lambda}_T^T \gamma \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{u}} &= \gamma \bar{\Lambda}_T \left(\bar{\delta} + \gamma^2 \frac{\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T}{c^2} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\gamma \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}}^T}{c^2} \right) \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{u}} \\ \left(\bar{\delta} + \gamma^2 \bar{\Lambda}_T \frac{\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T}{c^2} \bar{\Lambda}_T^T \right) \bar{\Lambda}_T \overrightarrow{\text{grad}} \left(\gamma \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{M}}^T \bar{\Lambda}_T^T \right) \frac{\bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{B}} \bar{\Lambda}_T^T \gamma \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{u}}}{c^2} &= \gamma \bar{\Lambda}_T \left(\bar{\delta} + \gamma^2 \frac{\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T}{c^2} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\gamma \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{M}}^T \right) \frac{\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}}{c^2} \end{aligned} \right] \quad (I-75)$$

Finalement, la quadri-force volumique $\bar{\mathbf{F}}_V$, transformée de $(0 \quad \bar{\mathbf{F}}_V^T)^T$, s'écrit dans R :

$$\bar{\mathbf{F}}_V = \bar{\mathbf{H}} \rho_i \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{C}} - \frac{\gamma}{c^2} \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2 \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T}{c^2} \right) \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\gamma \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}}^T \right) \bar{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\gamma \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{M}}^T \right) \bar{\mathbf{B}} \right) \bar{\mathbf{u}} \quad (I-76)$$

9 Les phénomènes gravitationnels et électromagnétiques en relativité restreinte

Les équations (I-9) et (I-71) permettent aisément de montrer que (via un calcul vectoriel) :

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{K}}_T \bar{\Lambda}_T \quad (I-77)$$

Les relations permettant de calculer $\bar{\mathbf{H}}$ et $\bar{\mathbf{K}}$ sont, compte tenu de (I-10), (I-35), (I-36), (I-43) et (I-71) :

$$\left. \begin{aligned} \left(\bar{\Lambda}_T \overrightarrow{\text{grad}} \right)^T \left(\bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{H}} \bar{\Lambda}_T^T \right) &= \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{H}}) \bar{\Lambda}_T^T = \frac{4\pi G_c \rho_i}{c^2} \gamma \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\Lambda}_T^T = \left(\frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_i \bar{\mathbf{u}}^T \right) \bar{\Lambda}_T^T \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{H}}) &= \frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_i \bar{\mathbf{u}}^T \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{K}}) &= 0 \end{aligned} \right] \quad (I-78)$$

Comme $\bar{\mathbf{H}}$ est un tenseur antisymétrique, nous avons :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T \left(\left(\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{H}}) \right)^T \right) = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}^T \left(\frac{4\pi G_c}{c^2} \rho_i \bar{\mathbf{u}} \right) = \overrightarrow{\text{grad}}^T(\rho_i \bar{\mathbf{u}}) \quad (I-79)$$

Correspondant à (I-11). Le tenseur énergie-impulsion de gravitation $\bar{\mathbf{T}}_{GT}$, (I-12), se transforme en :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{c^2 \bar{\mathbf{H}}_T \bar{\mathbf{H}}_T^T}{8\pi G_c} - \frac{2\pi G_c \bar{\mathbf{K}}_T \bar{\mathbf{K}}_T^T}{c^2} &= -\frac{c^2 \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{H}} \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\Lambda}_T^T}{8\pi G_c} - \frac{2\pi G_c \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{K}} \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\Lambda}_T^T}{c^2} = \bar{\Lambda}_T \left(-\frac{c^2 \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^T}{8\pi G_c} - \frac{2\pi G_c \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{K}}^T}{c^2} \right) \bar{\Lambda}_T^T \\ \bar{\mathbf{T}}_G &= -\frac{c^2}{8\pi G_c} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^T - \frac{2\pi G_c}{c^2} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{K}}^T = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{T}}_{GT} \bar{\Lambda}_T \end{aligned} \right] \quad (I-80)$$

Avec la transformation de la dernière ligne de (I-12), à l'aide de (I-36) et (I-70) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_T^T(\bar{\mathbf{T}}_{GT}) \bar{\Lambda}_T = \left(\bar{\Lambda}_T \overrightarrow{\text{grad}} \right)^T \left(\bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{T}}_G \bar{\Lambda}_T^T \right) \bar{\Lambda}_T = \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{T}}_G) = \rho_i \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \quad (I-81)$$

En ce qui concerne les phénomènes électromagnétiques, nous pouvons reproduire la procédure allant de (I-77) à (I-79), en partant de (I-72) et (I-73), et utilisant les définitions (I-3) et (I-4), ce qui donne :

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{B}}_T \bar{\Lambda}_T \quad \text{and} \quad \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{B}}) = 0 \quad (I-82)$$

Par ailleurs, la première équation (I-5) devient lors du passage du RIT à R :

$$(\bar{\Lambda}_T \overrightarrow{\text{grad}})^T (\varepsilon_0 c^2 \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{E}} \bar{\Lambda}_T^T + \bar{\mathbf{P}}_T) = -\vec{\mathcal{C}}^T \bar{\Lambda}_T^T = \overrightarrow{\text{grad}}^T (\varepsilon_0 c^2 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{P}}_T \bar{\Lambda}_T) \bar{\Lambda}_T^T \quad (I-83)$$

Ce qui nous conduit à écrire, y compris la nullité du double quadri-gradient de $\varepsilon_0 c^2 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{P}}$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{P}}_T \bar{\Lambda}_T \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T (\varepsilon_0 c^2 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{P}}) &= -\vec{\mathcal{C}}^T \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T (\vec{\mathcal{C}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I-84)$$

Par analogie avec la démonstration de la transformation donnant $\bar{\mathbf{K}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$ nous obtenons :

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{M}}_T \bar{\Lambda}_T \quad (I-85)$$

Le noyau du tenseur énergie-impulsion électromagnétique est, suivant (I-8) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{E1T} &= \frac{\varepsilon_0}{2} (c^2 \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{E}} \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\Lambda}_T^T + \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{B}} \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\Lambda}_T^T) = \bar{\Lambda}_T \frac{\varepsilon_0}{2} (c^2 \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T) \bar{\Lambda}_T^T \\ \bar{\mathbf{T}}_{E1} &= \frac{\varepsilon_0}{2} (c^2 \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T) = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{T}}_{E1T} \bar{\Lambda}_T \end{aligned} \right\} \quad (I-86)$$

L'extension du tenseur énergie-impulsion électromagnétique est donnée par (I-40) dans le RIT, et devient dans R, tous calculs faits à l'aide de (I-35), (I-82) et (I-85) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{E2} &= -\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T}{c^2} - \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T}{c^2} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} - \left(\frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u}^T \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{u} \right) \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T}{c^2} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{T}}_{E2T} \bar{\Lambda}_T \\ \bar{\mathbf{T}}_E &= \bar{\mathbf{T}}_{E1} + \bar{\mathbf{T}}_{E2} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{T}}_{ET} \bar{\Lambda}_T \end{aligned} \right\} \quad (I-87)$$

10 Les tenseurs énergie-impulsion totale et intrinsèque en relativité restreinte

Nous avons vu, équation (I-21), que le noyau du tenseur énergie-impulsion de masse intrinsèque s'écrivait $\rho_{IT} \vec{u}_T \vec{u}_T^T$ dans le RIT, ce qui donne $\frac{\rho_I}{\gamma} \bar{\Lambda}_T \gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T \bar{\Lambda}_T^T$, en se servant de (I-35) et de (I-43). Ceci correspond à la première partie de (I-55) et (I-58). L'extension du tenseur énergie-impulsion de masse intrinsèque a déjà été calculée dans (I-68) et (I-69). Nous avons donc dans R :

$$\bar{\mathbf{T}}_M = \rho_I \gamma \vec{u} \vec{u}^T + \left(\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}} \circ \bar{\mathbf{E}} \right) \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u} \vec{u}^T \right) - \bar{\tau} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\mathbf{T}}_{MT} \bar{\Lambda}_T \quad (I-88)$$

Ainsi, la première équation de (I-20) devient dans R, en utilisant entre autres (I-76) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{T}}_M) = \vec{F}_V^T \quad (I-89)$$

Notons que $\rho_I \gamma c^2$ est la somme de l'énergie intrinsèque et de l'énergie cinétique volumiques du fluide.

Le noyau et l'extension du tenseur énergie-impulsion totale dans le RIT sont donnés par (I-26). A l'aide de (I-35), de (I-43), de la covariance de l'énergie interne par unité de masse intrinsèque, et sachant que $\vec{u}_T^T = (ic \ 0)$ ($\vec{u}_T^T = 0$), nous obtenons le noyau du tenseur énergie-impulsion totale dans R :

$$\left. \begin{aligned} \rho_{IT} \left(1 + \frac{U_T}{c^2}\right) \vec{u}_T \vec{u}_T^T &= \frac{\rho_I}{\gamma} \left(1 + 0 + \frac{U}{\gamma c^2}\right) \bar{\Lambda}_T \gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T \bar{\Lambda}_T^T = \bar{\Lambda}_T \left(\rho_I \left(\gamma + \frac{U}{c^2}\right) \vec{u} \vec{u}^T\right) \bar{\Lambda}_T^T \\ \bar{T}_{T1} &= \rho \vec{u} \vec{u}^T + \frac{\varepsilon_0}{2} (c^2 \bar{E} \bar{E}^T + \bar{B} \bar{B}^T) - \frac{c^2}{8\pi G_c} \bar{H} \bar{H}^T - \frac{2\pi G_c}{c^2} \bar{K} \bar{K}^T = \bar{\Lambda}_T^T \bar{T}_{T1T} \bar{\Lambda}_T \\ \rho &= \rho_I \left(\gamma + \frac{U}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (I-90)$$

Où ρ est la masse-énergie volumique en mouvement du fluide (I-51). Certains éléments de l'extension du tenseur énergie-impulsion totale (I-26) forment l'extension des tenseurs énergie-impulsion intrinsèque et électromagnétique, dont nous avons déjà vu la transformation en (I-88) et (I-87). Deux autres sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{t}_T \vec{u}_T \vec{u}_T^T + \vec{u}_T \vec{u}_T^T \bar{t}_T}{c^2} &= \frac{\bar{\Lambda}_T \bar{t}_T \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T \bar{\Lambda}_T^T + \bar{\Lambda}_T \gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{t}_T \bar{\Lambda}_T^T}{c^2} = \bar{\Lambda}_T \gamma^2 \frac{\bar{t}_T \vec{u} \vec{u}^T + \vec{u} \vec{u}^T \bar{t}_T}{c^2} \bar{\Lambda}_T^T \\ \frac{\bar{q}_T \vec{u}_T^T + \vec{u}_T \bar{q}_T^T}{c^2} &= \frac{\bar{\Lambda}_T \bar{q}_T \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{u}^T \bar{\Lambda}_T^T + \bar{\Lambda}_T \gamma \vec{u}^T \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T \bar{q}_T^T}{c^2} = \bar{\Lambda}_T \frac{\bar{q}_T \vec{u}^T + \vec{u} \bar{q}_T^T}{c^2} \bar{\Lambda}_T^T \end{aligned} \right\} \quad (I-91)$$

Que l'on a transformé à l'aide de (I-35), (I-64) et (I-66). Tous les éléments autres que $\bar{\Theta}_{IT}$ du tenseur énergie-impulsion totale se transforment de la même façon du RIT vers R. Nous considérerons donc qu'il en est de même pour $\bar{\Theta}_{IT}$, c'est-à-dire $\bar{\Theta}_I = \bar{\Lambda}_T^T \bar{\Theta}_{IT} \bar{\Lambda}_T$, et donc que, à l'image de (I-26) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_T &= \bar{T}_{T1} + \bar{T}_{T2} = \bar{\Lambda}_T^T \bar{T}_{TT} \bar{\Lambda}_T = \bar{\Lambda}_T^T \bar{T}_{T1T} \bar{\Lambda}_T + \bar{\Lambda}_T^T \bar{T}_{T2T} \bar{\Lambda}_T \\ \bar{T}_{T2} &= \left(\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \bar{P} \circ \bar{E}\right) \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u} \vec{u}^T\right) - \bar{t} - \gamma^2 \frac{\bar{t}_T \vec{u} \vec{u}^T + \vec{u} \vec{u}^T \bar{t}_T}{c^2} + \frac{\bar{q}_T \vec{u}^T + \vec{u} \bar{q}_T^T}{c^2} \\ &\quad - \bar{B} \bar{M} \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T}{c^2} - \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T}{c^2} \bar{M} \bar{B} - \left(\frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u}^T \bar{B} \bar{M} \vec{u}\right) \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T}{c^2} + \bar{\Theta}_I \end{aligned} \right\} \quad (I-92)$$

A l'aide des mêmes relations que précédemment, la transformation de (I-27) donne [20] :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{T}_T) = 0 \quad (I-93)$$

Cette équation correspond au premier principe de la thermodynamique, tel que nous l'avons formulé en physique classique : les expressions en physique classique et en relativité restreinte sont identiques.

Comme nous passeront, en Partie 2, de la relativité restreinte à la relativité générale, nous pouvons déjà définir le tenseur énergie-impulsion \bar{T}_{EI} (sans qualificatif), grâce aux équations (I-93) et (I-81) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{T}_{EI}) = \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{T}_T - \bar{T}_G) = \vec{F}_G^T = (\rho_I \bar{H} \vec{u})^T \quad (I-94)$$

11 Conclusions et perspectives

Nous avons atteint l'objectif que nous nous étions fixé, à savoir écrire les équations de la dynamique des mélanges fluides en relativité restreinte dans des conditions très générales, ce qui est original. Plus précisément nous avons obtenu des relations valables dans un repère inertiel quelconque, ce qui assure la covariance des équations (I-78), (I-79), (I-82), (I-84), (I-89), (I-93). Toutes ces équations de la relativité restreinte sont identiques à celles correspondantes de la physique classique (parfois au facteur de LORENTZ γ près dans R, ce qui n'est pas gênant puisque $\gamma_T = 1$ dans le repère inertiel tangent, ou en physique classique) (I-5), (I-6), (I-10), (I-11), (I-20) et (I-27). Ce même phénomène est démontrable pour l'équation (I-13), car r_i est égal dans les deux physiques puisqu'il s'agit d'une production volumique de masse intrinsèque par unité de temps, c'est-à-dire de masse par unité d'hypervolume et que ceux-ci sont égaux (I-37). Les transformations (I-68), (I-69), (I-71), (I-73), (I-77), (I-80), (I-82), (I-84), (I-85), (I-86), (I-87), (I-88), (I-90), (I-91) et (I-92) ont toutes une même structure confirmant le caractère tensoriel des matrices 4x4 correspondantes. La démonstration a été faite localement, mais est valable en toute position de l'espace-temps. Un point important est que les tenseurs d'ordre 2 symétriques (ou antisymétriques) en physique classique restent symétriques (ou antisymétriques) en relativité restreinte, ce qui constitue un point nouveau (voir les commentaires après l'équation (I-68)).

Les champs électromagnétiques et gravitationnels se calculent de la même façon dans les deux physiques. Les 3 composantes de la vitesse et la pression sont obtenues grâce à (I-89), et la température absolue, ainsi que 3 contraintes sur $\bar{\Theta}_I$, à l'aide de (I-93) ou (I-94). Rappelons que cette matrice est liée au fait que l'énergie interne massique, et donc la masse-énergie volumique ρ , n'est connue qu'à un terme additif inconnu près. Nous avons précisé, en fin de section 4, que la masse intrinsèque (conservative) doit être maintenue aux côtés de la masse-énergie, chacune des deux faisant apparaître, ce qui est nouveau, un tenseur énergie-impulsion, les deux étant indispensables à la résolution de la dynamique des mélanges fluides continus. Le passage de la température dans le Repère Inertiel Tangent au repère inertiel quelconque R est possible si nous admettons, comme tous les auteurs que l'entropie massique est égale dans les deux repères (invariant cinématique). Alors, nous partirons de $G = H - TS$, où G est l'enthalpie libre de GIBBS par unité de masse intrinsèque de fluide, H l'enthalpie massique et S l'entropie massique. L'enthalpie libre de GIBBS est une énergie, comme l'enthalpie, et se transforme comme tel (I-52), soit $G = \gamma G_T$, $H = \gamma H_T$ et $S = S_T$, ce qui donne :

$$G = H - TS = \gamma G_T = \gamma H_T - \gamma T_T S_T = \gamma H_T - T S_T \quad (I-95)$$

Ce qui veut dire que la température absolue est covariante [44] [45].

Pour résoudre la dynamique des fluides, plusieurs fonctions doivent être connues, comme l'énergie interne massique (un état de référence étant choisi) ou la masse intrinsèque volumique ρ_I . Les expressions de \vec{J}_{iT} et \vec{q}_T sont définies, en physique classique, par le deuxième principe de la thermodynamique, celles de \vec{J}_i et \vec{q} par (I-47) et (I-66). Une perspective de ce travail serait d'étudier ce deuxième principe de la thermodynamique en relativité restreinte, et une seconde d'aborder le problème de CAUCHY : calcul des vitesses de déplacement des ondes de concentrations, de pression et de température [2] [33] [35] [48] (vérification que ces vitesses n'excèdent pas celle de la lumière dans le vide). En physique classique, les

vitesses de diffusion et de conduction sont très faibles par rapport à celle du fluide (qui est négligeable devant celle de la lumière dans le vide).

Une autre extension de ces recherches consisterait à démontrer les relations de la dynamique des mélanges fluides continus en relativité générale à partir de celles obtenues en relativité restreinte. Ceci fera l'objet de la Partie 2, où, après avoir présenté certaines caractéristiques de la relativité générale, nous aborderons un nouveau changement de variable et ses propriétés. Une d'entre elle est de permettre une écriture des équations, soit sous forme tensorielle, soit sous forme matricielle. Nous montrerons comment retrouver, à partir de ces dernières, les symboles de CHRISTOFFEL à travers les dérivées de certaines matrices. Les propriétés de cette transformation locale nous permettront d'énoncer un postulat original conduisant à démontrer les équations de la dynamique des fluides continus en relativité générale, ce qui est scientifiquement nouveau (dans les mêmes conditions que le présent papier).

Références

1. Henri ARZELIES « Fluides relativistes - Principes généraux, équations fondamentales », Masson Ed., Paris, 1971
2. Marcelo M. DISCONZI « On the well-posedness of relativistic viscous fluids », *Nonlinearity*, 27 (2014) 1915-1935
3. Luciano REZZOLLA, Olindo ZANOTTI « Relativistic Hydrodynamics », Oxford University Press 2013
4. M. von LAUE « Zur dynamik der relativitätstheorie », *Ann. Der Physik*, 340, 8 (1911) 524-542
5. Oliver HEAVISIDE « Electromagnetic theory », The Electrician printing and publishing company limited, London 1912
6. M. BERTIN, J.P. FAROUX et J. RENAULT « Electromagnétisme 4 : Milieux diélectriques et milieux aimantés », Dunod Université Ed., Gauthier-Villars, Paris 1984
7. Vera V. DANIEL « Dielectric relaxation », Academic press, Londres et New York 1967
8. C. VASSALLO « Electromagnétisme classique dans la matière », Dunod, Paris 1980
9. William H. INGHAM « Answer to question # 49 : Why c for gravitational waves ? », *American Journal of Physics*, 65, 7 (1997) 589-590
10. Kirk T. Mc DONALD « Answer to question # 49 : Why c for gravitational waves ? », *American Journal of Physics*, 65, 7 (1997) 591-592
11. V.B. BRAGINSKY, C.M. CAVES, K.S. THORNE « Laboratory experiments to test relativistic gravity », *Physical Review D*, 15 (1977) 2047-2068
12. A. TARTAGLIA, M.L. RUGGIERO « Gravito-electromagnetism versus electromagnetism », *European Journal of Physics* 25 (2004) 203-210
13. J. J. LLOVERA « Induciendo la existencia de las ondas gravitacionales en el curso de fisica general. Un enfoque Maxwelliano de la gravitacion », *Rev. Cubana Fis.*, 35 (2018) E54-E55
14. Harihar BEHERAA « Comments on gravitoelectromagnetism of Ummarino and Gallerati in Superconductor in a weak static gravitational field », *Eur. Phys. J. C*, 77 (2017) 549-568

15. T. GOMEZ, cours de « Magnétohydrodynamique ; Approche optimale et couplage multiphysique », Institut Jean Le Rond d'ALEMBERT, Université Pierre et Marie CURIE, Saint Cyr l'Ecole
16. M. BERHANU, thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure « Magnétohydrodynamique turbulente dans les métaux liquides », 15 septembre 2008, Université Pierre et Marie CURIE
17. L. LANDAU et E. LIFCHITZ « Physique théorique, tome VIII : Electrodynamique des milieux continus », éditions MIR, Moscou 1969
18. E. DURAND « Magnétostatique », Masson, Paris
19. F. FER « Thermodynamique macroscopique, I and II », Gordon and Breach Science Publishers Ltd, London 1970
20. R. DERRADI de SOUZA, T. KOIDE, T. KODAMA « Hydrodynamic approaches in relativistic heavy ion reactions », Progress in Particle and Nuclear Physics, 86 (2016) 35-85
21. C. ECKART « The thermodynamics of irreversible processes. III Relativistic theory of simple fluid », Phys. Rev., 58 (1940) 919-924
22. Charles-Michel MARLE « Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs II – méthodes de résolution approchée de l'équation de BOLTZMANN relativiste », Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A, 10, 2 (1969) 127-194
23. Pham MAU QUAN « Thermodynamique d'un fluide relativiste », Séminaire L. De BROGLIE, Théories physiques, 24, exp. 3 (1954-1955) 1-19
24. J. GARIEL « Rapprochement entre deux formalismes en thermodynamique relativiste des phénomènes irréversibles », Annales de l'Institut Henri POINCARÉ, section A, 33, 2 (1980) 195-203
25. Jean-François BENNOUN « Etude des milieux continus élastiques et thermodynamique en relativité générale », Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique, 3, 1 (1965) 41-110
26. Louis de BROGLIE « Thermodynamique relativiste et mécanique ondulatoire », Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique, 9, 2 (1968) 89-108
27. Ilija LUKACEVIC « Sur le mouvement irrotationnel des fluides parfaits chargés en relativité générale », Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, 7, 21 (1967) 51-54
28. O. COSTA De BEAUREGARD « Intéressantes questions soulevées par H. ARZLIES dans *Fluides Relativistes*, Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique, 16, 2 (1972) 103-107
29. Jean FRONTEAU « Et si la chaleur était d'essence non covariante ? (Contribution à la relativisation de la thermodynamique sur la base d'une thermodynamique fine » Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique, 22, 1 (1975) 63-79
30. Francis HALBWACHS « Théorie relativiste des fluides à spin », Gauthier-Villars, Paris 1960
31. Abraham H. TAUB « Relativistic Rankine-Hugoniot equations », Phys. Rev., 74, 3 (1948) 328
32. André LICHNEROWICZ « Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme », Masson et Cie Ed., 1955
33. Guy PICHON, dans « Etude relativiste de fluides visqueux et chargés », Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique, 2, 1 (1965) 21-85
34. André LICHNEROWICZ « Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes », Commun. Math. Phys., 1 (1966) 328-373
35. Yvonne BRUHAT « Etude des équations des fluides chargés relativistes inductifs et conducteurs », Commun. Math. Phys., 3 (1966) 334-357

36. L. LANDAU et E. LIFCHITZ « Mécanique des fluides », Editions MIR, Moscou, 1971
37. L. LANDAU et E. LIFCHITZ « Physique théorique – Théorie des champs », Editions MIR, Moscou, 1989
38. Béchir MAHJOUB « Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur », Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique, 14, 2 (1971) 113-137
39. Hermann MINKOWSKI « The relativity principle », Meeting of the Göttingen Mathematical Society, November 5, 1907
40. Charles-Michel MARLE « Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs I – l'équation de BOLTZMANN relativiste », Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A, 10, 1 (1969) 67-126
41. L. de BROGLIE « La thermodynamique cachée des particules », Ann. Inst. Henri Poincaré, 1, 1 (1964) 1-19
42. L. de BROGLIE « Recherches d'un demi siècle », Albin Michel 1976
43. L. de BROGLIE « Diverses questions de mécanique et de thermodynamique classiques et relativistes », Lectures notes in physics, new series m :Monographs, Springer-Verlag, 1995
44. Henri ARZELIES « Sur le concept de température en thermodynamique relativiste et en thermodynamique statistique », Il Nuovo Cimento, vol. 40 B, 2 (1965) 333-344
45. Henri ARZELIES « Transformation relativiste de la température et de quelques autres grandeurs thermodynamiques », Il Nuovo Cimento, 35, 3 (1965) 792-804
46. Jean FRONTEAU « L'entropie fine, la mécanique dissipative et la notion de masse au repos variable », Ann. Inst. Henri Poincaré, 18, 2 (1973) 99-120
47. B. ROTHENSTEIN et I. ZAHARIE « Relativistic thermodynamics for the introductory physics course », Jour. of Theoretics, Guest Commentary, 5-2 (2003) 8 p.
48. Juan CALVO « On the hypobolicity and causality of the relativistic EULER system under the kinetic equation of state », Commun. Pure Appl. Anal., 12 (2013) 1341-1347

Appendice A: La matrice de transition (I-34), matrice de transformation de LORENTZ

Les équations (I-29), (I-30), (I-31) et (I-33) montrent que :

$$ds^2 = d\vec{X}^T d\vec{X} = d\vec{X}_T^T d\vec{X}_T = d\vec{X}^T \bar{\Lambda}_T^T \bar{P}^T \bar{P} \bar{\Lambda}_T d\vec{X} \quad (\text{A-1})$$

Où $\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{pmatrix}$, avec $\bar{P} \bar{P}^T = \bar{P}^T \bar{P} = \bar{\delta}$, la matrice unité de Kronecker 3x3, ce qui implique :

$$\bar{\Lambda}_T^T \bar{\Lambda}_T = \bar{\Lambda}_T \bar{\Lambda}_T^T = \bar{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

Soit \vec{u} la vitesse d'un mobile, sa quadrivitesse dans R est $\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{1}{dt} \begin{pmatrix} icdt \\ d\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \vec{u}$, et sa quadrivitesse dans R_T est $\frac{d\vec{X}_T}{d\tau} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T \end{pmatrix} = \vec{u}_T$ où τ est le temps propre de ce mobile. Remarquons que \vec{u} est variable le long de la trajectoire du mobile, mais nous considérons seulement sa vitesse en une position donnée. Donc, c'est aussi la vitesse constante de R_T dans R, et nous ne devons pas oublier que \vec{u} dans $\bar{\Lambda}_T$ est une constante, comme toute la matrice $\bar{\Lambda}_T$. La matrice de transition peut donc s'écrire $\bar{\Lambda}_T = \begin{pmatrix} \alpha & i\vec{\beta}^T \\ i\vec{\beta} & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$, où α , $\vec{\beta}$, $\vec{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ doivent être déterminés. Par ailleurs, l'équation (I-35) donne (avec la simplification $\bar{P} = \bar{\delta}$) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_T &= \bar{\Lambda}_T(\gamma \vec{u}) \\ \vec{u} &= \frac{\bar{\Lambda}_T^T \vec{u}_T}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

Ces relations fournissent :

$$\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \alpha & i\vec{\beta}^T \\ i\vec{\beta} & \bar{\sigma}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ic\alpha}{\gamma} \\ \gamma \\ -c\vec{\varepsilon} \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \gamma \quad \text{and} \quad \vec{\varepsilon} = -\frac{\gamma \vec{u}}{c} \quad (\text{A-4})$$

La seconde équation de (A-3) conduit à, avec le résultat de (A-4) :

$$\begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \gamma & -i\frac{\gamma \vec{u}^T}{c} \\ i\vec{\beta} & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic\gamma^2 - i\gamma^2 \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{c} \\ -\gamma c \vec{\beta} + \gamma \bar{\sigma} \vec{u} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{c^2} \quad \text{and} \quad \vec{\beta} = \frac{\bar{\sigma} \vec{u}}{c} \quad (\text{A-5})$$

Avec l'équation (A-2) nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \gamma & i\frac{\vec{u}^T \bar{\sigma}^T}{c} \\ -i\gamma \frac{\vec{u}}{c} & \bar{\sigma}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma \frac{\vec{u}^T}{c} \\ i\frac{\bar{\sigma} \vec{u}}{c} & \bar{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \frac{\vec{u}^T \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} \vec{u}}{c^2} & -i\gamma^2 \frac{\vec{u}^T}{c} + i\frac{\vec{u}^T \bar{\sigma}^T \bar{\sigma}}{c} \\ -i\gamma^2 \frac{\vec{u}}{c} + i\frac{\bar{\sigma}^T \bar{\sigma} \vec{u}}{c} & -\gamma^2 \frac{\vec{u} \vec{u}^T}{c^2} + \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

Les différents termes de (A-6) impliquent :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} &= \bar{\delta} + \gamma^2 \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} \\ \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} \bar{u} &= \bar{u} + \gamma^2 \frac{\bar{u}\bar{u}^T \bar{u}}{c^2} = \bar{u} + \gamma^2 \bar{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^2 \bar{u} \\ 1 &= \gamma^2 - \frac{\bar{u}^T \gamma^2 \bar{u}}{c^2} = \gamma^2 \left(1 - \frac{\bar{u}^T \bar{u}}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

Or nous constatons que :

$$\left. \begin{aligned} \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2}\right) \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2}\right) &= \bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} + \frac{\gamma^4}{(\gamma+1)^2} \frac{\bar{u}(\bar{u}^T \bar{u})\bar{u}^T}{c^4} = \\ \bar{\delta} + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} + \frac{\gamma^4(1-\frac{1}{\gamma^2})}{(\gamma+1)^2} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} &= \bar{\delta} + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} + \frac{\gamma^2(\gamma^2-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} = \\ \bar{\delta} + \frac{\gamma^2(2+\gamma-1)}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} &= \bar{\delta} + \gamma^2 \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} = \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

Ce qui nous permet de poser :

$$\bar{\sigma} = \bar{U} \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} \right) \quad (\text{A-9})$$

Où $\bar{U}\bar{U}^T = \bar{U}^T\bar{U} = \bar{\delta}$, et, avec $\left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2}\right) \bar{u} = \bar{u} + \frac{\gamma^2(1-\frac{1}{\gamma^2})}{\gamma+1} \bar{u} = (1 + \gamma - 1)\bar{u} = \gamma\bar{u}$:

$$\bar{\Lambda}_T = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma \frac{\bar{u}^T}{c} \\ i\bar{U} \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2}\right) \frac{\bar{u}}{c} & \bar{U} \left(\bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma \frac{\bar{u}^T}{c} \\ i\gamma \frac{\bar{u}}{c} & \bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A-10})$$

Mais il s'agit là de la combinaison de deux changements de repère inertiel, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{U} \end{pmatrix}$ correspond au changement de repère purement spatial $\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{pmatrix}$ dans l'équation (A-1). Nous pouvons donc prendre $\bar{U} = \bar{P}$, parce que \bar{P} prend en compte le changement de repère spatial. Ainsi :

$$\bar{\Lambda}_T = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma \frac{\bar{u}^T}{c} \\ i\gamma \frac{\bar{u}}{c} & \bar{\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\bar{u}\bar{u}^T}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A-11})$$

Qui est l'équation (I-34).

Appendice B: Transformation des champs électromagnétiques (sections 8 et 9)

Les définitions des tenseurs $\bar{\mathbf{E}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$ sont les mêmes en physique classique et en relativité restreinte :

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} \vec{E}^T \\ -\frac{i}{c} \vec{E} & -\overline{\text{mat}}(\vec{B}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & ic\vec{B}^T \\ -ic\vec{B} & \overline{\text{mat}}(\vec{E}) \end{pmatrix} \quad (\text{B-1})$$

L'équation (I-73) donne:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{i\gamma}{c} \vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma}{c} \vec{u} & \bar{\delta} + (\gamma - 1) \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c} \vec{E}_T^T \\ -\frac{i}{c} \vec{E}_T & -\overline{\text{mat}}(\vec{B}_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{i\gamma}{c} \vec{u}^T \\ \frac{i\gamma}{c} \vec{u} & \bar{\delta} + (\gamma - 1) \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{B-2})$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{i\gamma}{c} \vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma}{c} \vec{u} & \bar{\delta} + (\gamma - 1) \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma \vec{E}_T^T \vec{u}}{c^2} & \frac{i}{c} \left(\vec{E}_T^T + (\gamma - 1) \frac{\vec{E}_T^T \vec{u} \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} \right) \\ -\frac{i\gamma}{c} (\vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u}) & -\frac{\gamma \vec{E}_T \vec{u}^T}{c^2} - \overline{\text{mat}}(\vec{B}_T) - (\gamma - 1) \frac{(\vec{B}_T \wedge \vec{u}) \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{B-3})$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma^2 \vec{E}_T^T \vec{u}}{c^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u}^T (\vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u}) & \frac{i\gamma}{c} \left(\vec{E}_T^T + (\gamma - 1) \frac{\vec{E}_T^T \vec{u} \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} - \frac{\gamma \vec{u}^T \vec{E}_T \vec{u}^T}{c^2} + (\vec{B}_T \wedge \vec{u})^T \right) \\ \frac{i\gamma^2 \vec{u} \vec{E}_T^T \vec{u}}{c^3} - \frac{i\gamma}{c} (\vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u}) - \frac{i\gamma}{c} (\gamma - 1) \frac{\vec{u} \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} (\vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u}) & \bar{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \quad (\text{B-4})$$

Remarquons que $\vec{u}^T (\vec{B}_T \wedge \vec{u}) = 0$ et $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{c^2}$. Donc, nous avons $\frac{\vec{u}^T \vec{u}}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{\gamma^2}$, qui s'écrit aussi $\frac{\gamma-1}{\vec{u}^T \vec{u}} = \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)}$. Nous obtenons :

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\gamma}{c} \left(\vec{E}_T^T + (\vec{B}_T \wedge \vec{u})^T + \frac{\gamma^2 \vec{E}_T^T \vec{u} \vec{u}^T}{c^2(\gamma+1)} - \frac{\gamma \vec{u}^T \vec{E}_T \vec{u}^T}{c^2} \right) \\ \frac{i\gamma^2 \vec{u} \vec{E}_T^T \vec{u}}{c^3} - \frac{i\gamma}{c} (\vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u}) - \frac{i\gamma}{c} \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T \vec{E}_T}{c^2(\gamma+1)} & \bar{\mathbf{X}} \end{pmatrix} \quad (\text{B-5})$$

Le premier résultat est :

$$\vec{E} = \gamma (\vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u}) + \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{u} \vec{u}^T \vec{E}_T \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} - \frac{\gamma+1}{\gamma+1} \right) = \gamma \left(\left(\bar{\delta} - \frac{\gamma \vec{u} \vec{u}^T}{c^2(\gamma+1)} \right) \vec{E}_T + \vec{B}_T \wedge \vec{u} \right) \quad (\text{B-6})$$

Nous devons maintenant déterminer $\bar{\mathbf{X}}$:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\gamma \vec{u}}{c^2} \left(\vec{E}_T^T + (\gamma - 1) \frac{\vec{E}_T^T \vec{u} \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} \right) - \frac{\gamma \vec{E}_T \vec{u}^T}{c^2} - \overline{\text{mat}}(\vec{B}_T) - (\gamma - 1) \frac{(\vec{B}_T \wedge \vec{u}) \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} - (\gamma - 1) \frac{\vec{u} \vec{u}^T \gamma \vec{E}_T \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u} c^2} - (\gamma - 1) \frac{\vec{u} \vec{u}^T \overline{\text{mat}}(\vec{B}_T)}{\vec{u}^T \vec{u}} - (\gamma - 1) \frac{\vec{u} \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} (\gamma - 1) \frac{(\vec{B}_T \wedge \vec{u}) \vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} \quad (\text{B-7})$$

Rappelons que la matrice de transition du RIT vers R est constante (repères inertiels), et c'est le donc cas de γ et \vec{u} (c'est pourquoi, dans l'équation I-34, nous les avons noté γ^0 et \vec{u}^0). Nous savons, de part la définition de $\bar{\mathbf{E}}$ que le résultat doit être $\bar{\mathbf{X}} = -\overline{\text{mat}}(\vec{B})$, nous devons donc faire apparaître l'opérateur $\overline{\text{mat}}$ en facteur dans l'expression (le dernier terme est nul à cause du produit scalaire $\vec{u}^T (\vec{B}_T \wedge \vec{u}) = 0$) :

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\gamma}{c^2} \left(\vec{u} \vec{E}_T^T - \vec{E}_T \vec{u}^T + \frac{\gamma^2 \vec{E}_T^T \vec{u}}{c^2(\gamma+1)} \vec{u} \vec{u}^T - \frac{\gamma^2 \vec{E}_T^T \vec{u}}{c^2(\gamma+1)} \vec{u} \vec{u}^T \right) - \overline{\text{mat}}(\vec{B}_T) - \frac{\gamma^2 (\vec{B}_T \wedge \vec{u}) \vec{u}^T}{c^2(\gamma+1)} + \frac{\gamma^2 \vec{u} (\vec{B}_T \wedge \vec{u})^T}{c^2(\gamma+1)} \quad (\text{B-8})$$

Nous pouvons appliquer $\vec{b} \vec{a}^T - \vec{a} \vec{b}^T = \overline{\text{mat}}(\vec{a} \wedge \vec{b})$ et $(\overline{\text{mat}}(\vec{a}))^T = -\overline{\text{mat}}(\vec{a})$:

$$\bar{\mathbf{X}} = \overline{\text{mat}} \left(\frac{\gamma}{c^2} \vec{E}_T \wedge \vec{u} \right) - \overline{\text{mat}}(\vec{B}_T) - \overline{\text{mat}} \left(\frac{\gamma^2 \vec{u}}{c^2(\gamma+1)} \wedge (\vec{B}_T \wedge \vec{u}) \right) = -\overline{\text{mat}} \left(\frac{\gamma}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E}_T + \vec{B}_T + \frac{\gamma^2 \vec{u}}{c^2(\gamma+1)} \wedge (\vec{B}_T \wedge \vec{u}) \right) \quad (\text{B-9})$$

Avec $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \vec{u} (\vec{u}^T \vec{w}) - (\vec{u}^T \vec{u}) \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{u}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\gamma}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E}_T + \vec{B}_T + \frac{\gamma^2 \vec{u}}{c^2(\gamma+1)} \wedge (\vec{B}_T \wedge \vec{u}) = \vec{B}_T - \frac{\gamma-1}{\vec{u}^T \vec{u}} (\vec{u}(\vec{u}^T \vec{B}_T) - (\vec{u}^T \vec{u})\vec{B}_T) + \frac{\gamma}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E}_T \\
\vec{B} &= \gamma \vec{B}_T - \frac{\gamma^2 \vec{u} \vec{u}^T \vec{B}_T}{c^2(\gamma+1)} + \frac{\gamma}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E}_T = \gamma \left(\left(\bar{\delta} - \frac{\gamma \vec{u} \vec{u}^T}{c^2(\gamma+1)} \right) \vec{B}_T + \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_T}{c^2} \right)
\end{aligned} \tag{B-10}$$

Ce résultat est le même suivant le même raisonnement à partir de \vec{B} .