HAL
open science

Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Part 2 : En relativité générale

C. Fonteix, Dimitrios Meimaroglou, M. Camargo, M. Feidt

To cite this version:

C. Fonteix, Dimitrios Meimaroglou, M. Camargo, M. Feidt. Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Part 2 : En relativité générale. 2020. hal-02482702

HAL Id: hal-02482702

https://hal.univ-lorraine.fr/hal-02482702

Preprint submitted on 18 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus
Part 2 : En relativité générale

C. FONTEIX[a], D. MEIMAROGLOU[b], M. CAMARGO[a], M. FEIDT[c]

[a] Équipe de Recherche sur Les Processus Innovatifs (ERPI), Université de Lorraine, 8 Rue Bastien Lepage, 54000 Nancy Cedex, France

[b] CNRS, Laboratoire Réactions et Génie des Procédés, Université de Lorraine UMR 7274, Nancy F-54001, France

[c] CNRS, Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA), Université de Lorraine UMR 7573, 2 Avenue de la Forêt de Haye, 54518 Vandoeuvre CEDEX, Nancy, France

Résumé

Nous avons obtenu en Part 1 les équations de la dynamique des mélanges fluides continus en relativité restreinte. Notre objectif est de déduire ces mêmes équations en relativité générale à partir des précédentes. Pour cela, nous devons définir une transformation locale créant un lien entre un espace-temps réel courbe et un espace-temps virtuellement (et localement) plat, assimilable à l'univers de la relativité restreinte. Nous démontrons que cette transformation existe et étudions ses propriétés. Nous l'appliquons ensuite, en énonçant un nouveau postulat. Tout comme en Part 1, la transformation des différents tenseurs énergie-impulsion assure la covariance des équations. Le calcul de la dynamique des mélanges fluides continus prouve la nécessité de prise en compte de deux tenseurs énergie-impulsion, c'est-à-dire de la masse intrinsèque (conservative) aux côtés de la masse-énergie. Une réécriture du premier principe de la thermodynamique conduit à démontrer l'équation d'EINSTEIN.

1 Introduction et contexte de l'étude

L'objectif du présent article est de démontrer les équations de la dynamique des mélanges fluides continus, chargés, dipolaires, visqueux, soumis à des réactions chimiques, des phénomènes diffusionnels et un transfert de chaleur, en écoulement dans des champs électromagnétiques en espace-temps courbe. En Part 1, nous avons présenté les équations de la dynamique des fluides continus en relativité restreinte, c'est-à-dire dans le cas d'un espace-temps plat. Ces résultats serviront de base pour une transformation originale présentée en section 2. Cette dernière permet de démontrer certaines transformations, en notation vectorielle-matricielle en section 3, ou en notation tensorielle en section 4. La section 5 est consacrée à un nouveau postulat créant localement un pont entre les relativités restreinte et générale. La transformation des quadri-forces est abordée en section 6, et celle des phénomènes électromagnétiques en section 7. Nous verrons, en section 8, l'expression des deux tenseurs énergie-impulsion, et, en section 9, le premier principe de la thermodynamique et l'équation d'EINSTEIN. La section 10 propose une méthode de calcul de la dynamique des fluides en relativité générale, et la section 11 présente des conclusions et perspectives. Lorsque l'espace-temps est courbé par la présence de matière, nous utiliserons, comme en Part 1, un repère inertiel R dont les axes spatiaux sont orthogonaux entre eux et dont les échelles sont identiques, l'axe du temps étant orthogonal à tous les axes spatiaux. Attention, cet

outil de repérage est théorique et indépendant de la courbure de l'espace-temps [1]. Le repère inertiel R semble correspondre à un univers plat, mais il permet de rendre compte de toute position dans l'espace-temps réel courbe, sans préjuger de la manière de la mesurer. Une position dans cet espace-temps est définie, comme en Part 1, par le vecteur $\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} = (ict \quad \vec{x}^T)$ dans R, où t est le temps, c la vitesse de la lumière dans le vide, $\vec{x}$ la position du point dans l'espace à l'instant considéré, et i l'imaginaire pur tel que $i^2 = -1$. Le vecteur définissant la distance orientée entre les deux points $\vec{\boldsymbol{X}}$ et $\vec{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{X}}$ est toujours $d\vec{x}$, mais la gravité dévie la trajectoire de la lumière, qui n'est plus rectiligne. La distance parcourue par la lumière entre les deux points est $d\vec{l}$, fonction de $d\vec{x}$ et dt, où dt est le temps nécessaire à la lumière pour aller de $\vec{\boldsymbol{X}}$ à $\vec{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{X}}$ à la vitesse $c' \leq c$ (la vitesse de la lumière dans la matière est généralement inférieure à celle dans le vide). Nous avons donc $d\vec{l}^T d\vec{l} = c'^2 dt^2$. Lorsque dt ne correspond plus au temps nécessaire à la lumière pour aller de $\vec{\boldsymbol{X}}$ à $\vec{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{X}}$, nous définissons un indicateur qui rend compte du fait que la lumière est déjà arrivée ou pas encore :

$$ds^2 = -c'^2 dt^2 + d\vec{l}^T d\vec{l} = d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{G}}} d\vec{\boldsymbol{X}} \qquad \text{(II-1)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ est le tenseur métrique que nous noterons ($\overline{\overline{\delta}}$: matrice unité de KRONECKER) [1] [2] [3] [4] :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{g}{c^2} & -\frac{i\vec{g}^T}{2c^2} \\ -\frac{i\vec{g}}{2c^2} & \overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \end{pmatrix} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}} + \begin{pmatrix} -\frac{g}{c^2} & -\frac{i\vec{g}^T}{2c^2} \\ -\frac{i\vec{g}}{2c^2} & \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \end{pmatrix} \qquad \text{(II-2)}$$

Sachant que $\overline{\overline{g}}$ est une matrice réelle symétrique 3x3, et $\vec{g}$ un vecteur réel de dimension 3. Nous posons :

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\vec{v}^T \overline{\overline{g}} \vec{v}}{\vec{v}^T \vec{v}} + c > 0 \;\; \forall \vec{v} \neq 0 \\ c'^2 > 0 \;\; \Longrightarrow \;\; c^2 - g > 0 \end{array}\right] \qquad \text{(II-3)}$$

Comme conditions de validité de notre modèle ($c'^2 = c^2 - g$). La première équation de (II-3) impose que $\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}$ soit symétrique définie positive. Le tenseur métrique $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ est une matrice symétrique semi-réelle 4x4 parce qu'il y apparaît des vecteurs imaginaires purs. L'intérêt de cette formulation est que le déterminant de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ est positif, contrairement au tenseur métrique défini dans la littérature (formé uniquement de nombres réels) [5]. Plus important encore, nous considérerons que la matrice $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ est décomposable (en racine carrée), grâce à (II-3). Cette propriété est fondamentale pour la suite de ce travail :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}} \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}} \qquad \text{(II-4)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}$ est la matrice transposée de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}$. Cette décomposition peut être réalisée à l'aide de la technique de CHOLEWSKI ou par extraction des valeurs singulières, par exemple. En fait, il existe une infinité de décompositions de type (II-4), car il suffit de multiplier $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}$ à droite par une matrice orthonormée semi-réelle quelconque $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ telle que $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$, où $\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$ est la matrice unité de KRONECKER (le produit de 2 matrices semi réelles est semi réelle). Dans ce cas, $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{U}$ est solution de (II-4) car $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}} \overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$.

Dans (II-1), $d\vec{\boldsymbol{X}}$ est un vecteur (ou tenseur d'ordre 1) contravariant, et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}d\vec{\boldsymbol{X}}$ un vecteur covariant. De même, $d\vec{\boldsymbol{X}}d\vec{\boldsymbol{X}}^T$ est un tenseur d'ordre 2 (ou matrice) contravariant-contravariant, et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}d\vec{\boldsymbol{X}}d\vec{\boldsymbol{X}}^T\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ un tenseur d'ordre 2 covariant-covariant (covariant de chaque côté de la matrice). Comme par la suite nous n'utiliserons que des tenseurs d'ordre 2 contravariant-contravariants ou covariant-covariants, et rarement des tenseurs mixtes, nous nous contenterons de parler de tenseurs contravariants (pour doublement contravariants) ou covariants (pour doublement covariants). De plus, nous nommerons vecteur tout tenseur d'ordre 1, et tenseur sans qualificatif tout tenseur d'ordre 2, car nous n'utiliserons pas de tenseur d'ordre supérieur à 2. Par exemple, $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ est un tenseur covariant, et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-1}$ un tenseur contravariant. Par contre, $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}$ n'est pas un tenseur, nous ne parlerons alors que de matrice. Une solution de l'équation (II-4) est (l'indice 1 indique une première approche de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}$) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{T}{2}} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ \frac{i}{c}\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)_1^{\frac{T}{2}}\vec{u}_R & \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)_1^{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{(II-5)}$$

Où $\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)_1^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)_1^{\frac{T}{2}} = \overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}$ (décomposition obtenue par CHOLESKI inversé, donnant $\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)_1^{\frac{T}{2}}$ sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure), et avec :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \sqrt{1 - \frac{g}{c^2} + \frac{1}{4c^4}\vec{g}^T\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)^{-1}\vec{g}} \\ \vec{u}_R &= -\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)^{-1}\frac{\vec{g}}{2c} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-6)}$$

Les expressions θ et $\vec{u}_R$ sont calculables à partir de la connaissance de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$, indépendamment du choix de la décomposition (II-4). La variable θ est un réel grâce à la deuxième équation (II-3) et au fait que $\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}$ soit une matrice symétrique définie positive. Ceci donne le déterminant de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ (réel positif) :

$$\left.\begin{aligned} det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{T}{2}}\right) = \theta det\left(\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right)_1^{\frac{T}{2}}\right) = \sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)} \\ det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right) = \theta^2 det\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}\right) \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-7)}$$

2 Choix d'un changement de variables

Le problème du choix d'un changement de variable a fait l'objet de nombreuses études [1]. A ce propos L. LANDAU et E. LIFCHITZ [5] écrivent : « *Le champ gravitationnel réel ne peut être éliminé par aucune transformation des coordonnées.* » « *Néanmoins une transformation appropriée des coordonnées permet de réduire les* (éléments du tenseur métrique) *à la forme Galiléenne en un point isolé de l'espace-temps non Galiléen.* »

Eric GOURGOULHON [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] a travaillé sur un changement de variables appelé 3+1 qui facilite la résolution numérique du problème posé par la relativité générale. En effet, l'équation (II-1) peut s'écrire, compte tenu de (II-6) :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} icdt & d\vec{x}^T - \vec{u}_R^T dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{\delta}} + \frac{\bar{\bar{g}}}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} icdt \\ d\vec{x} - \vec{u}_R dt \end{pmatrix} \qquad \text{(II-8)}$$

Ceci correspond au changement de variables :

$$\begin{pmatrix} icdt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{i}{c}\vec{u}_R & \bar{\bar{\delta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} icdt \\ d\vec{x} \end{pmatrix} \qquad \text{(II-9)}$$

Théophile de DONDER [13] [14] et Georges DARMOIS [15] ont été les précurseurs, suivis d'André LICHNEROWICZ [16] puis d'Yvonne CHOQUET-BRUHAT [17] [18] [19] [20]. Si nous proposons un changement de variables proche du 3+1, $d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} = \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{2}\,\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}}$, nous obtenons une métrique égale à la matrice unité (de KRONECKER) telle que $ds^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{\delta}}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} = d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{G}}} d\vec{\boldsymbol{X}}$. En fait nous utiliserons, en supposant que la matrice orthonormée semi-réelle $\bar{\bar{\boldsymbol{U}}}$ est connue (ce qui sera vrai plus tard) :

$$\left.\begin{aligned} \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}} = \bar{\bar{\boldsymbol{U}}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{2}\,\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} a & i\vec{b}^T \\ i\vec{a} & \bar{\bar{b}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} icdt^* \\ d\vec{x}^* \end{pmatrix} = d\vec{\boldsymbol{X}}^* = \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} a & i\vec{b}^T \\ i\vec{a} & \bar{\bar{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} icdt \\ d\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} icadt + i\vec{b}^T d\vec{x} \\ -c\vec{a}dt + \bar{\bar{b}} d\vec{x} \end{pmatrix} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-10)}$$

Où l'étoile en puissance indique les nouvelles variables. La première ligne de (II-10) indique que $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}}$ est une matrice semi-réelle, ce qui est le cas d'un produit de deux matrices semi-réelles. Nous avons :

$$ds^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}^{*\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{\delta}}} d\vec{\boldsymbol{X}}^* = d\vec{\boldsymbol{X}}^{*\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}}^* = d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{G}}} d\vec{\boldsymbol{X}} \qquad \text{(II-11)}$$

Ce qui veut dire que l'espace-temps défini par $\vec{\boldsymbol{X}}^{*\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} ict^* & \vec{x}^{*T} \end{pmatrix}$ a un comportement localement plat. Nous dirons de lui qu'il est un espace-temps virtuellement plat, et l'appellerons espace-temps V. La deuxième ligne de (II-10) correspond donc à un changement de variables (local) permettant de passer de l'espace-temps réel courbe à l'espace-temps V (Virtuel), localement plat. Par ailleurs, nous savons que $d\vec{\boldsymbol{X}}$ est un tenseur contravariant d'ordre 1. Par contre $d\vec{\boldsymbol{X}}^*$ n'est pas un tenseur, et il n'est ni contravariant ni covariant, il a le comportement d'un vecteur ordinaire : nous le qualifierons de vecteur neutre. Soit un vecteur contravariant (tenseur d'ordre 1) $\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}$, le vecteur neutre correspondant est :

$$\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{N}} = \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}} \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}} \qquad \text{(II-12)}$$

En théorie des tenseurs, les dérivées covariantes ont une place importante. Cependant, une dérivée covariante n'a pas la même expression si elle s'applique à un vecteur covariant, un vecteur contravariant, ou des tenseurs covariants ou contravariants [5]. Pour illustrer ce fait, rappelons les différentielles covariantes du vecteur contravariant $\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}$ et du tenseur covariant $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}$:

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{D}\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}\right)_i = d\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}\right)_i + d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}}\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}} \\ \boldsymbol{D}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\alpha\beta}\right) = d\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\alpha\beta}\right) - \sum_{i=0}^{3}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}d\vec{\boldsymbol{X}}\right)_{\alpha}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{i\beta} - \sum_{i=0}^{3}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\alpha i}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}d\vec{\boldsymbol{X}}\right)_{\beta} = 0\end{array}\right] \qquad \text{(II-13)}$$

Où $\boldsymbol{D}(\cdots)$ est une différentielle covariante, $d(\cdots) = \left(d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)(\cdots)$ une différentielle ordinaire avec $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}$ défini en (I-2), et $\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$ une matrice symétrique formée à l'aide des symboles de CHRISTOFFEL [1] [5]. Le terme $\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}\right)_i$ indique le $i^{ème}$ élément du vecteur $\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}$, et $\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}\right)_{\alpha\beta} = \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\alpha\beta}$ l'élément de la $\alpha^{ème}$ ligne et de la $\beta^{ème}$ colonne de $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}$. Dans (II-13), $i = 0$ indique le temps et $i > 0$ une des coordonnées spatiales.

Nous pouvons calculer, à l'aide de (II-12) :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{2}}d\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{N}}\right) = d\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}\right) + \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{-\boldsymbol{1}}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}d\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}} \qquad \text{(II-14)}$$

La somme de $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}d\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)$ et de sa transposée n'est autre que la différentielle $d\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}\right)$, c'est à dire une matrice symétrique liée aux symboles de CHRISTOFFEL (II-13). Nous souhaitons que l'expression de $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}d\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)$ reportée dans (II-14) donne la première ligne de (II-13), c'est-à-dire $\boldsymbol{D}\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}\right)$. Donc nous poserons :

$$\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}d\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)\right)_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{3}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\alpha i}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}d\vec{\boldsymbol{X}}\right)_{\beta} \qquad \text{(II-15)}$$

Ce qui conduit à deux résultats importants, où ∂_j indique la dérivée par rapport à i ($\partial_0 \equiv \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}$) :

$$\left.\begin{array}{c}\partial_j\left(\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{k\beta}\right) = \left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{ki}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j} \\ \boldsymbol{D}\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}}\right) = \bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}d\left(\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{N}}\right)\end{array}\right] \qquad \text{(II-16)}$$

Ce résultat montre deux choses : premièrement dans l'espace-temps V les dérivées covariantes sont remplacées par des dérivées ordinaires, confirmant ainsi la platitude locale de cet espace-temps. Deuxièmement, les symboles de CHRISTOFFEL sont calculables à partir des dérivées de $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}$. Si nous reportons la première ligne de (II-10) dans la première ligne de (II-16), nous obtenons :

$$\partial_j\left(\left(\bar{\bar{\boldsymbol{U}}}\right)_{nk}\right) = \left(\bar{\bar{\boldsymbol{U}}}\right)_{mk}\left(\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{mi}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{lj}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{ln} - \partial_j\left(\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{ml}\right)\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{ln}\right) \qquad \text{(II-17)}$$

Expression dans laquelle les signes somme sont effacés (la présence de deux indices identiques dans un même monôme implique une somme sur cet indice). Les parenthèses sont conservées car aucune matrice de (II-17) est un tenseur. Cette équation (II-17) montre que les éléments de $\bar{\bar{\boldsymbol{U}}}$ sont calculables si $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}$ est connu dans le domaine étudié, et que $\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}$ est probablement unique dans un problème donné, à conditions aux limites connues.

Toute matrice carrée pouvant être décomposée en valeurs singulières-vecteurs singuliers, c'est-à-dire en une somme de produits tensoriels de vecteurs, nous pouvons écrire, compte tenu de (II-12) :

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_1^N \vec{f}_2^{NT} &= \overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \vec{f}_1^C \vec{f}_2^{CT} \overline{\overline{G}}^{\frac{1}{2}} \\ \overline{\overline{A}}^N &= \overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \overline{\overline{A}}^C \overline{\overline{G}}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-18)}$$

Où $\overline{\overline{A}}^N$ est une matrice neutre et $\overline{\overline{A}}^C$ un tenseur contravariant. Ceci nous conduit à :

$$\overline{\overline{G}}^{-\frac{T}{2}} d\left(\overline{\overline{A}}^N\right) \overline{\overline{G}}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{D}\left(\overline{\overline{A^C}}\right) = \overline{\overline{G}}^{-\frac{T}{2}} d\left(\overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \overline{\overline{A}}^C \overline{\overline{G}}^{\frac{1}{2}}\right) \overline{\overline{G}}^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-19)}$$

Ce qui, avec (II-15), correspond à une expression proche de la deuxième ligne de (II-13). Finalement, l'espace-temps V se comporte comme l'espace-temps plat de la relativité restreinte.

3 Détermination de diverses transformations en notation vectorielle-matricielle

La transformation correspondant à la deuxième ligne de (II-10) donne celle des quadri-gradients :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^*(\cdots) = \overline{\overline{G}}^{-\frac{1}{2}} \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\cdots) \qquad \text{(II-20)}$$

Les vitesses dans l'espace-temps V et dans l'espace-temps réel courbe sont :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{X}^*}{dt^*} &= \vec{\boldsymbol{u}}^* = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \frac{d\vec{x}^*}{dt^*} \end{pmatrix} \\ \frac{d\vec{X}}{dt} &= \vec{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-21)}$$

La première égalité de la deuxième ligne de (II-10) s'écrit $dt^* = \left(a + \frac{\vec{b}^T \vec{u}}{c}\right) dt$, donc :

$$\frac{dt^*}{dt} = \Gamma = a + \frac{\vec{b}^T \vec{u}}{c} \qquad \text{(II-22)}$$

Le réel Γ est donc calculable. Nous en déduisons la transformation des vitesses :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{X}^*}{dt^*} &= \frac{dt}{dt^*} \overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \frac{d\vec{X}}{dt} \\ \vec{\boldsymbol{u}}^* &= \frac{1}{\Gamma} \overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \vec{\boldsymbol{u}} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-23)}$$

Dans l'espace-temps V, le temps propre τ^* d'un hypervolume élémentaire représentatif (HER) de fluide est défini dans son repère inertiel tangent : $ds^2 = -c^2 d\tau^{*2} = -c^2 dt^{*2} + d\vec{x}^{*T} d\vec{x}^*$ (comme en relativité restreinte). Nous pouvons en déduire :

$$\left.\begin{array}{c}\frac{dt^*}{d\tau^*}=\gamma^* \\ \frac{1}{\gamma^{*2}}=1-\frac{\vec{u}^{*T}\vec{u}^*}{c^2}=-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{u}}^*}{c^2}\end{array}\right] \qquad \text{(II-24)}$$

Par définition, le temps propre est le temps vécu par l'hypervolume élémentaire représentatif (HER), c'est-à-dire celui qui est localement situé à l'origine du repère inertiel tangent. Mais la courbure de l'espace-temps existe dans cette position, même si ses effets ne s'y font pas sentir : elle influe sur le temps propre. En effet, dans l'espace-temps réel le repère inertiel tangent n'est pas le même que celui dans l'espace-temps V, mais le raisonnement est le même (c'est-à-dire poser $d\vec{x}=0$) :

$$\left.\begin{array}{c}ds^2=-(c^2-g)d\tau^2=-(c^2-g)dt^2+\frac{\vec{g}^T}{c}dtd\vec{x}+d\vec{x}^T\left(\bar{\bar{\delta}}+\frac{\bar{\bar{g}}}{c}\right)d\vec{x} \\ \frac{dt}{d\tau}=\gamma \\ \frac{1}{\gamma^2}=1-\frac{\frac{\vec{g}^T\vec{u}}{c}+\vec{u}^T\left(\bar{\bar{\delta}}+\frac{\bar{\bar{g}}}{c}\right)\vec{u}}{c^2-g}=-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2-g}\end{array}\right] \qquad \text{(II-25)}$$

En effet, la vitesse localement maximum est c', la vitesse locale de la lumière dans la matière. Nous retrouvons donc le carré de cette vitesse maximum $c'^2=c^2-g$ devant $d\tau^2$ et dt^2. En appliquant la transformation des vitesses (II-23), nous pouvons exprimer autrement (II-24) :

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{\gamma^{*2}}=-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{u}}^*}{c^2}=-\frac{1}{\Gamma^2}\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}=\frac{1}{\Gamma^2}\frac{1-\frac{g}{c^2}}{\gamma^2} \\ \frac{\gamma^*}{\gamma}=\frac{\Gamma}{\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\end{array}\right] \qquad \text{(II-26)}$$

Nous avons vu les principales transformations en (II-20), (II-23) et (II-26). Avant de les utiliser, nous devons voir comment se transforme le quadri-gradient d'un vecteur et d'une matrice, et plus particulièrement, comment nous pouvons passer d'une notation matricielle à une notation tensorielle. Soit un quadrivecteur neutre, dans l'espace-temps V, noté $\vec{\boldsymbol{V}}^*$, dont $\vec{\boldsymbol{V}}$ est le vecteur contravariant correspondant en espace-temps réel courbe. Nous supposerons que la relation entre ces deux vecteurs n'est pas simplement donnée par (II-12), mais s'écrit, à l'instar de la vitesse en (II-23) :

$$\vec{\boldsymbol{V}}^*=\frac{1}{\alpha}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\vec{\boldsymbol{V}} \qquad \text{(II-27)}$$

Où α est un scalaire variable. La transformation envisagée est, compte tenu de (II-20) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{*\boldsymbol{T}}(\vec{\boldsymbol{V}}^*)=\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{1}{\alpha}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\vec{\boldsymbol{V}}\right) \qquad \text{(II-28)}$$

Afin de détailler le terme de droite, nous utiliserons $\left(\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}^{\boldsymbol{T}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}(\vec{\boldsymbol{w}})=\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}\vec{\boldsymbol{w}})-\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\bar{\bar{\boldsymbol{A}}})\vec{\boldsymbol{w}}$:

$$\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{1}{\alpha}\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\vec{\boldsymbol{V}}\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\vec{\boldsymbol{V}})-\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(ln(\alpha))\vec{\boldsymbol{V}}-\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}\left(\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\right)\bar{\bar{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\vec{\boldsymbol{V}}\right) \qquad \text{(II-29)}$$

Nous voyons apparaître trois termes :

- le premier, $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\vec{\boldsymbol{V}})$, est semblable à $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{*\boldsymbol{T}}(\vec{\boldsymbol{V}}^*)$, ce sont des quadri-divergences,
- le deuxième, $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(ln(\alpha))\vec{\boldsymbol{V}}$, est du à la déformation de l'hypervolume élémentaire représentatif lors du passage de l'espace-temps V plat, à l'espace-temps réel courbe,
- le troisième, $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\vec{\boldsymbol{V}}$, est lié aux symboles de CHRISTOFFEL.

Nous retrouvons les mêmes phénomènes lors de la transformation concernant une matrice neutre $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*$. Supposons que nous ayons dans ce cas, compte tenu de (II-18) :

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^* &= \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\\ \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{*\boldsymbol{T}}(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*) &= \left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\right)\end{aligned}\right] \qquad \text{(II-30)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$ est un tenseur contravariant. Comme $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}(\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}) - \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{\boldsymbol{T}})\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}$:

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\right) = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}) + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{\boldsymbol{T}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\right)\alpha\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\right)\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\alpha} \qquad \text{(II-31)}$$

Nous avons vu comment les quadri-gradients de vecteurs et matrices se transformaient en notation matricielle et vectorielle, il nous reste à déterminer leur forme tensorielle.

4 Transformations en notation tensorielle

En notation tensorielle le tenseur métrique covariant $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ s'écrit $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$, et son inverse $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ car c'est un tenseur contravariant. Le vecteur $d\vec{\boldsymbol{X}}$ est contravariant et devient $d\vec{\boldsymbol{X}}^{\alpha}$. Par exemple, la deuxième ligne de (II-10) se présente sous la forme, avec la matrice neutre $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}$ et le vecteur neutre $d\vec{\boldsymbol{X}}^*$:

$$\left(d\vec{\boldsymbol{X}}^*\right)_{\gamma} = \sum_{i=0}^{3}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{\gamma i} d\vec{\boldsymbol{X}}^i = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{\gamma i} d\vec{\boldsymbol{X}}^i \qquad \text{(II-32)}$$

En tenant compte de (II-12) et (II-27), nous pouvons poser :

$$\left.\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{N}} &= \vec{\boldsymbol{V}}^* = \frac{1}{\alpha}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\vec{\boldsymbol{V}}\\ \vec{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{C}} &= \frac{1}{\alpha}\vec{\boldsymbol{V}}\end{aligned}\right] \qquad \text{(II-33)}$$

Que nous reportons dans la deuxième ligne de (II-16) :

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{kj}\left(d\vec{\boldsymbol{X}}^*\right)_{\gamma}(\partial^*)_{\gamma}\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j = d\vec{\boldsymbol{X}}^i\left(\frac{1}{\alpha}\vec{\boldsymbol{V}}^k\right)_{;i} \qquad \text{(II-34)}$$

Où l'indice ; i indique une dérivation covariante par rapport à la coordonnée i dans l'espace-temps réel courbe. Or la dérivation covariante d'un scalaire se réduit à la dérivée classique. De plus, nous pouvons

utiliser (II-32) pour remplacer $\left(d\vec{\boldsymbol{X}}^*\right)_\gamma$ par $d\vec{\boldsymbol{X}}^i$, puis éliminer $d\vec{\boldsymbol{X}}^i$ en remarquant que ses éléments peuvent prendre n'importe quelle valeur. Par ailleurs, le quadri-gradient d'un quadrivecteur correspond généralement à une divergence en relativité restreinte, ce qui revient à faire $\gamma = j$ et donc :

$$(\partial^*)_j\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j = \frac{1}{\alpha}\left(\vec{\boldsymbol{V}}^i_{;i} - \vec{\boldsymbol{V}}^i\partial_i\left(ln(\alpha)\right)\right) \qquad \text{(II-35)}$$

Car $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{kj}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ji} = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{ki}$ qui n'a d'intérêt que lorsqu'il est égal à 1, quand $k = i$.

Avant de comparer les équations (II-29) et (II-35), nous devons transformer (II-13) en :

$$\vec{\boldsymbol{V}}^i_{;i} = \partial_i\left(\vec{\boldsymbol{V}}^i\right) + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{ij}\vec{\boldsymbol{V}}^j \qquad \text{(II-36)}$$

La matrice $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$, formée avec des symboles de CHRISTOFFEL, n'est pas un tenseur, c'est pourquoi nous l'écrivons comme une matrice neutre. Avec $\alpha = 1$ la comparaison donne :

$$\partial_i\left(\vec{\boldsymbol{V}}^i\right) - \partial_i\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{ik}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{kj}\vec{\boldsymbol{V}}^j = \vec{\boldsymbol{V}}^i_{;i} \qquad \text{(II-37)}$$

Compte tenu de (II-36) et du fait que $\vec{\boldsymbol{V}}^j$ peut être quelconque, (II-37) nous conduit à écrire :

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{ij} = -\partial_i\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{ik}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{kj} \qquad \text{(II-38)}$$

Résultat que l'on peut rapprocher de (II-16). Il est possible de démontrer que $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$ est une matrice semi réelle si $i > 0$, et semi réelle multipliée par l'imaginaire pur si $i = 0$, mais nous ne le ferons pas ici.

Dans le cas d'un tenseur d'ordre 2, nous reprendrons dans l'espace-temps V plat la matrice neutre $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*$, et dans l'espace-temps réel courbe le tenseur correspondant $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$ de la section précédente :

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}^{\boldsymbol{N}} = \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^* = \frac{1}{\alpha}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\\ \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}^{\boldsymbol{C}} = \frac{1}{\alpha}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\end{aligned}\right] \qquad \text{(II-39)}$$

Le même raisonnement que précédemment nous donne, à partir de l'équation (II-19) :

$$\left((\partial^*)_j\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*\right)_{jn}\right)\alpha\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\right)_{nm} = \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{im}_{;i} - \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{im}\partial_i\left(ln(\alpha)\right) \qquad \text{(II-40)}$$

Ce qui confirme la relation entre les symboles de CHRISTOFFEL et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}$, car grâce à (II-31) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{im}_{;i} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^T\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\right) + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^T\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^T\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^T\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\right)_m \qquad \text{(II-41)}$$

En pratique, nous utiliserons la notation vectorielle-matricielle si sa conversion en tensorielle est aisée, et la notation tensorielle lorsqu'une dérivée covariante existe dans l'équation considérée.

5 Nouveau postulat pour le passage de la relativité restreinte à la relativité générale

En relativité restreinte, l'équation (I-20) rassemble les bilans de matière et de quantité de mouvements, en faisant apparaître le tenseur intrinsèque (I-21). Nous devons voir comment son noyau se transforme à l'aide de (II-23). Cependant la masse intrinsèque par unité de volume intervient, nous devons donc étudier sa transformation. Dans l'hypervolume élémentaire représentatif, le nombre et le type de molécules est le même, que nous nous placions dans l'espace-temps réel ou dans l'espace-temps V :

$$\rho_I^* \frac{dV^*}{icdt^*} = \rho_I \frac{dV}{icdt} \qquad \text{(II-42)}$$

Or (II-10) impose pour les hypervolumes, compte tenu de (II-7) :

$$dV^* = det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}}\right) dV = \sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)} dV \qquad \text{(II-43)}$$

Ce qui donne avec (II-22) (il est clair que x_i est un invariant, identique dans les deux relativités, puisque c'est le rapport de la masse intrinsèque d'un constituant sur la masse intrinsèque totale du HER) :

$$\rho_I^* = \frac{\Gamma \rho_I}{\sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}} = \gamma^* \frac{\rho_I}{\gamma} \sqrt{\frac{1-\frac{g}{c^2}}{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}} \qquad \text{(II-44)}$$

L'expression (II-26) modifie la transformation des vitesses (II-23) en :

$$\gamma^* \vec{\boldsymbol{u}}^* = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}} \gamma \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}} \qquad \text{(II-45)}$$

Les équations (II-23) et (II-26) permettent de transformer le noyau du tenseur intrinsèque (I-86) en :

$$\rho_I^* \gamma^* \vec{\boldsymbol{u}}^* \vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}} \frac{\rho_I \gamma \vec{\boldsymbol{u}} \vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right) det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}} \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}_{\boldsymbol{2}} \qquad \text{(II-46)}$$

L'expression (II-39) s'applique avec $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^* = \rho_I^* \gamma^* \vec{\boldsymbol{u}}^* \vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}} = \rho_I \gamma \vec{\boldsymbol{u}} \vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}$ et $\alpha = \sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right) det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}$. Donc (II-40) permet de déterminer $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{*\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*\right) \sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right) det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)} \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}$ en faisant apparaître les dérivées covariantes de $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$ (II-41). Les termes liés aux symboles de CHRISTOFFEL correspondent à des quadri-forces volumiques de gravitation, dues à la courbure de l'espace-temps. Celles-ci incluent les phénomènes Newtoniens et se substituent à eux par rapport à la relativité restreinte. Cela signifie qu'il n'existe pas de phénomènes Newtoniens dans l'espace-temps V, et nous pouvons énoncer un nouveau postulat : **« Si le repère utilisé dans l'espace-temps courbe est inertiel, alors nous admettrons, sans démonstration, que le repère correspondant dans l'espace-temps V plat est inertiel. Ainsi, les équations de la dynamique des fluides continus en relativité restreinte, dans lesquelles les phénomènes**

Newtoniens ont été effacés, s'appliquent dans l'espace-temps V. Ces mêmes équations s'écrivent en relativité générale grâce au changement de variables local (II-10) soumis aux conditions (II-16), dans un repère inertiel quelconque (ce qui assure leur covariance). »

Ceci a été confirmé par la platitude locale de l'espace-temps V, du fait qu'il n'y apparaît que des produits scalaires classiques et que les dérivées covariantes y sont remplacées par des dérivées ordinaires. Attention cependant, comme il n'y a pas de phénomènes Newtoniens dans l'espace-temps V le tenseur énergie-impulsion $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}}$ ne correspond plus à (I-80). Pourtant certains auteurs cherchent un lien entre les expressions de la gravité en relativités restreinte et générale [21] [22] [23] [24]. Nous préfèrerons la définition de $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}}$, liée à la courbure de l'espace-temps, donnée par Albert EINSTEIN [1] [5] :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}} = -\frac{c^4}{8\pi G_c}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}} \qquad \text{(II-47)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}}$ est le tenseur d'EINSTEIN, calculé à partir du tenseur de RICCI, lui-même obtenu à l'aide du tenseur de courbure de RIEMANN [1] [5]. Attention cependant, dans notre cas $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}}$ est un tenseur symétrique semi-réel, c'est-à-dire dont les vecteurs de dimension 3 supérieur et latéral gauche sont formés d'imaginaires purs. De plus, nous avons fait apparaître un signe « moins » dans (II-47), qui nécessite qu'une attention particulière soit apportée à la modification de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}}$ indiquée ci-dessus.

Nous pouvons encore remarquer que $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{*\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{*}\right)$, où $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{*}$ est un tenseur de type énergie-impulsion, a la dimension d'une quadri-force volumique, tout comme $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}\right)$. Donc, si $\vec{\boldsymbol{F}}^{*}$ est une quadri-force volumique dans l'espace-temps V et $\vec{\boldsymbol{F}}$ la quadri-force volumique correspondante dans l'espace-temps réel courbe, (II-31) impose (attention à la transposition) :

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{F}}^{*}\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}}\vec{\boldsymbol{F}} \\ \vec{\boldsymbol{F}}^{*}\frac{dV^{*}}{icdt^{*}} = d\vec{\boldsymbol{f}}^{*} = \frac{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}}\right)dV}{\Gamma icdt}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}}\vec{\boldsymbol{F}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}}}{\Gamma\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)}}\vec{\boldsymbol{F}}\frac{dV}{icdt} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{2}}}{\Gamma\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)}}d\vec{\boldsymbol{f}} \end{array}\right] \qquad \text{(II-48)}$$

En relativité restreinte, nous avons $\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{F}}^{*}_{\boldsymbol{VT}} = \begin{pmatrix} ic & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}^{*}_{VT} \end{pmatrix} = 0 = \vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{F}}^{*}_{\boldsymbol{V}}$, ce qui devient $\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{V}} = 0$ en relativité générale grâce à (II-23). Nous verrons que ceci s'applique aussi au flux de chaleur.

6 Transformation des différentes quadri-forces et grandeurs associées

La transformation (II-48) est utile, mais nous devons être prudents si la quadri-force volumique fait appel à un quadri-gradient. En effet, le quadri-gradient provient de la formule de GREEN-OSTROGRADSKI lors de la transformation d'une quadri-force par unité de surface en une quadri-force par unité de volume. Dans ce cas, il nous faut revenir à l'origine de la force et effectuer le raisonnement en quadri-force par unité de surface. Pour déterminer la transformation des éléments de surface, nous nous placerons dans le cas simple d'un scalaire φ, compte tenu de (II-20) et (II-43) :

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^*(\varphi)dV^* = \varphi\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^* = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\varphi)\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}dV = \varphi\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} \\ \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^* = \sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}\end{array}\right] \qquad \text{(II-49)}$$

En effet, φ peut être quelconque. L'opérateur $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}$ est covariant et, selon (II-20), $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}$ est un opérateur neutre. De même, $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$ est un vecteur neutre et $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$ est un vecteur covariant. Effectuons une vérification avec le flux de masse intrinsèque dans le HER, avec (II-23) et (II-44) :

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*\boldsymbol{T}}\rho_I^*\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^* = \sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\frac{\Gamma\rho_I}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{\Gamma} = \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\rho_I\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \qquad \text{(II-50)}$$

Où $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$ est covariant et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ contravariant. Dans le cas du tenseur des contraintes de cisaillement (I-68), nous avons la quadri-force de cisaillement, à laide de la deuxième ligne de (II-48) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*\frac{\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^*}{icdt^*} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\frac{\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}}{icdt} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\frac{\Gamma\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^*}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}icdt^*} \qquad \text{(II-51)}$$

Compte tenu de (II-22) et (II-49). Ce résultat conduit à :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^* = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}} \qquad \text{(II-52)}$$

La matrice $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*$ étant neutre, conformément à (II-39) $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ est un tenseur contravariant symétrique. La transformation (II-52) est semblable à (II-46), et une matrice symétrique reste symétrique.

En se basant sur (II-25) et (II-45), bien des auteurs utilisent une vitesse réduite définie par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{U}} = \frac{\gamma\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{c^2-g}} \quad or \quad \overrightarrow{\boldsymbol{U}}^i = \frac{\gamma\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^i}{\sqrt{c^2-g}} \quad and \quad \overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}} = -1 = \overrightarrow{\boldsymbol{U}}^i\overrightarrow{\boldsymbol{U}}_i \qquad \text{(II-53)}$$

Où $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^i$ est l'écriture tensorielle du vecteur contravariant $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$, et $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}_i$ sa forme covariante correspondant à $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$. Elle servira à représenter la force de pression à partir de celle dans l'espace-temps V (I-69) :

$$\frac{P^*}{\gamma^{*2}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}} + \frac{\gamma^{*2}}{c^2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^*\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}\right)\frac{\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^*}{icdt^*} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{P}}\frac{\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}}{icdt} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{P}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\frac{\Gamma\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^*}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}icdt^*} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{P}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\frac{\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^*}{icdt^*} \qquad \text{(II-54)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{P}}$ est le tenseur de pression contravariant dans l'espace-temps réel courbe. La relation (II-54) donne à nouveau la transformation correspondant à (II-46) et (II-52). A l'aide de (II-23) et (II-26), nous trouvons :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{P}} = \frac{P^*\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}{\gamma^2\Gamma^2}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\boldsymbol{1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\right)\left(1-\frac{g}{c^2}\right) \qquad \text{(II-55)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\boldsymbol{1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}$ est un tenseur contravariant symétrique. Nous poserons, ce qui se justifiera en (II-78) :

$$P = \frac{P^*}{\Gamma^2}\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)} \qquad \text{(II-56)}$$

Pour aborder les forces électromagnétiques, nous devons voir la transformation des différentes formes du courant électrique. Le courant du au transport des ions de type i et celui du au transport des électrons sont, compte tenu de (II-50), $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*\boldsymbol{T}}\rho_I^* x_i\alpha_i\vec{\boldsymbol{u}}^* = \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\rho_I x_i\alpha_i\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*\boldsymbol{T}}\rho_I^*\alpha_E\vec{\boldsymbol{u}}^* = \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\rho_I\alpha_E\vec{\boldsymbol{u}}$. En effet, α_i est une constante et x_i et α_E sont des invariants par nature (référés à la masse intrinsèque), indépendants du type de relativité en cours. Le courant du à la diffusion des ions de type i est :

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*\boldsymbol{T}}\alpha_i\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}}^* = \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\alpha_i\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}}^* = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{2}\,\boldsymbol{T}}}{\sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}}\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}} \qquad \text{(II-57)}$$

Il reste le courant électrique par conduction, définit par la loi d'OHM :

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*\boldsymbol{T}}\lambda_E^*\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^* = \sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\lambda_E^*\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^*\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{2}\,\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{u}}}{\Gamma} = \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\lambda_E\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{u}} \qquad \text{(II-58)}$$

Ce qui nous permet d'écrire, ce qui sera justifié par (II-61) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{E}}} = \sqrt{1-\frac{g}{c^2}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^*\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}} \;\; and \;\; \lambda_E = \lambda_E^*\frac{\sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}} \qquad \text{(II-59)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}$ est un tenseur d'ordre 2 antisymétrique et contravariant, $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^*$ étant une matrice antisymétrique neutre. Le courant électrique total est, compte tenu de (II-49) :

$$\left.\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{C}} = \sum_{i=1}^{n}\rho_I x_i\alpha_i\vec{\boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}} + \rho_I\alpha_E\vec{\boldsymbol{u}} + \lambda_E\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{u}} \\ \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{C}}^* = \overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{C}} \;\; and \;\; \vec{\boldsymbol{C}}^* = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{2}\,\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{C}}}{\sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}}\end{array}\right] \qquad \text{(II-60)}$$

Où $\vec{\boldsymbol{C}}$ est un vecteur contravariant, $\vec{\boldsymbol{C}}^*$ étant un vecteur neutre. A l'aide de (II-48), nous transformons la quadri-force électromagnétique dans le HER (I-74), de l'espace-temps V à l'espace-temps courbe :

$$\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^*\vec{\boldsymbol{C}}^*\frac{dV^*}{icdt^*} = \Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{2}\,\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{C}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\frac{dV}{icdt} = \overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{C}}\frac{dV}{icdt} \qquad \text{(II-61)}$$

La quadri-force électromagnétique par unité de volume est, dans l'espace-temps réel courbe, $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{C}}$, où $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}$ est un tenseur contravariant antisymétrique d'ordre 2 et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{C}}$ un tenseur covariant d'ordre 1 (vecteur).

Il existe des quadri-forces non encore abordées : les forces dipolaires, et en particulier les pressions électrostatique et magnétostatique présentées équation (I-69). Avec la deuxième ligne de (II-48), la quadri-force due aux pressions dipolaires provient du tenseur symétrique contravariant $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}}$:

$$\left(\frac{1}{2}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}\circ\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{*}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}+\frac{\gamma^{*2}}{c^{2}}\vec{\boldsymbol{u}}^{*}\vec{\boldsymbol{u}}^{*T}\right)\frac{\overrightarrow{dS}^{*}}{icdt^{*}}=\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^{2}}}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}}\frac{\overrightarrow{dS}}{icdt}=\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}}}{\Gamma\sqrt{1-\frac{g}{c^{2}}}}\frac{\Gamma\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\overrightarrow{dS}^{*}}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})icdt^{*}}}=\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^{2}}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\frac{\overrightarrow{dS}^{*}}{icdt^{*}}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\left(\frac{1}{2}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}\circ\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{*}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}+\frac{\gamma^{*2}}{c^{2}}\vec{\boldsymbol{u}}^{*}\vec{\boldsymbol{u}}^{*T}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^{2}}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\circ(\overline{\overline{\boldsymbol{E}}})\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-1}+\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\right) \qquad \text{(II-62)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}$ est une matrice antisymétrique neutre, $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}$ un tenseur d'ordre 2 antisymétrique contravariant et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ un tenseur d'ordre 2 antisymétrique covariant. En effet, le produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 2 doit se faite entre un tenseur covariant et un tenseur contravariant. Par ailleurs, la transformation qui apparaît dans (II-62) est identique à (II-54), (II-46) et (II-52). Ainsi, et compte tenu des forces volumiques dipolaires vues plus loin, nous poserons :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{*}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-63)}$$

En ce qui concerne les quadri-forces dipolaires volumiques $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{D}}$ (I-75) ne relevant pas d'un tenseur, leur transformation sera réalisée par la première ligne de (II-48), en posant :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}=\sqrt{1-\frac{g}{c^{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^{*}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}}\ \ and\ \ \overline{\overline{\boldsymbol{M}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}^{*}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-64)}$$

Ce qui donne avec (II-20), (II-23), (II-26), (II-48), (II-53), (II-59), (II-63) et (II-64) :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{D}}=-\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-1}+\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\right)\left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\left(\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}+\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\left(\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{U}} \qquad \text{(II-65)}$$

7 Les phénomènes électromagnétiques

Les champs électrique et magnétiques, en relativité restreinte, sont donnés par (I-82) et (I-84). Il est possible de transformer (I-84) à l'aide de (II-31) ou (II-40), en remplaçant $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$ par $\varepsilon_0 c^2\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}$ et α par $\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}$, puis $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$ par $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$ et α par 1, ce qui donne dans la notation tensorielle :

$$\varepsilon_0 c^2\left(\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{im}_{;i}-\frac{1}{2}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{im}\partial_i\left(ln\left(1-\frac{g}{c^2}\right)\right)\right)+\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}^{im}_{;i}=-\vec{\boldsymbol{C}}^{m}\sqrt{\frac{1-\frac{g}{c^2}}{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}} \qquad \text{(II-66)}$$

L'expression ci-dessus est plus complexe que celle rencontrée dans la littérature [25], d'une part du fait de la présence ici du tenseur polarisation électrique, et d'autre part parce que (II-66) inclue des termes liés à la courbure de l'espace-temps, en particulier en facteur du quadrivecteur courant électrique. En ce qui concerne le tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}$, l'équation (I-82) est transformée à l'aide de (II-40) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^{im}_{;i}=\frac{1}{2}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^{im}\partial_i\left(ln\left(1-\frac{g}{c^2}\right)\right) \qquad \text{(II-67)}$$

Cependant les tenseurs antisymétriques $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}$ ne satisfont plus les relations (I-3) du fait de la courbure de l'espace-temps. La transformation du bilan de charges électriques (I-84) s'écrit, compte tenu de (II-35) et (II-60) :

$$\vec{\boldsymbol{C}}^i_{;i} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{C}}^i \partial_i \left(ln\left(det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\right)\right) \qquad \text{(II-68)}$$

Partant de (I-86), par analogie avec la transformation de $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*$ par (II-52), compte tenu de (II-59) et (II-64) le noyau du tenseur énergie-impulsion électromagnétique devient :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E1}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\sqrt{\frac{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}{1-\frac{g}{c^2}}}\left(c^2\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\boldsymbol{T}} + \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{T}}\right) \qquad \text{(II-69)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E1}}$ est un tenseur symétrique contravariant. Ce résultat diffère des expressions classiques [26] par un terme multiplicatif. Contrairement à nous, certains auteurs, comme Guy PICHON [27] ou Yvonne BRUHAT [28], sont confrontés à des tenseurs non symétriques (Part 1, section 8). En fait, certains auteurs obtiennent un tenseur $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E}}$ non symétrique lorsque le milieu a une permittivité électrique et une perméabilité magnétique non nulles [25], ce qui est pourtant notre cas avec $\vec{P} \neq 0$ et $\vec{M} \neq 0$. L'équation (I-87) nous donne l'extension du tenseur énergie-impulsion électromagnétique :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E2}} = -\sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}} + \vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}} + \left(\vec{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\,\vec{\boldsymbol{U}}\right)\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\right) \qquad \text{(II-70)}$$

Finalement, nous obtenons le tenseur symétrique contravariant $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E}}$:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E}} = \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E1}} + \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E2}} \quad and \quad \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{E}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}} \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{1}}{2}} \qquad \text{(II-71)}$$

8 Les tenseurs énergie-impulsion totale et intrinsèque

Nous avons vu en Part 1 à la fin de la section 4, que deux tenseurs énergie-impulsion étaient nécessaires pour résoudre la dynamique des mélanges fluides en relativité restreinte, du fait du nombre de bilans à prendre en compte et de la connaissance de l'énergie interne à un terme additif près (choix d'un état standard). Une autre raison est l'existence de deux masses importantes, la masse intrinsèque conservative (Newtonienne) et la masse-énergie en mouvement (voir les explications et citations en section 4 Part 1). De nombreux auteurs font appel au bilan de matière, c'est-à-dire de masse conservative. Or, les bilans de masse intrinsèque (I-79) et (I-13) sont transformés à l'aide de (II-23), (II-35) et (II-44) :

$$\left.\begin{aligned} (\rho_I\vec{\boldsymbol{u}})^i_{;i} - \frac{1}{2}(\rho_I\vec{\boldsymbol{u}})^i\partial_i\left(ln\left(det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\right)\right) = 0 \\ \left(\rho_I x_i\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}}\right)^j_{;j} - \frac{1}{2}\left(\rho_I x_i\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}}\right)^j\partial_j\left(ln\left(det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\right)\right) = r_i \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-72)}$$

Où les parenthèses indiquent à quoi s'applique la dérivée covariante, où $\partial_j\left(ln\left(det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\right)\right)$ correspond à une variation d'hypervolume lors du passage de l'espace-temps V au réel, et où la deuxième équation s'applique au constituant i. De plus, dans le HER :

$$\left.\begin{array}{c} r_i^* dV^* = r_i dV \\ r_i = r_i^* \sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)} \quad and \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 0 \end{array}\right] \qquad \text{(II-73)}$$

L'équation de continuité (II-72) diffère de celle rencontrée chez bien des auteurs [25], qui écrivent cette relation sans l'effet en $ln\left(det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\right)$ [28], [29], [30], [31], [32]. D'autres ne font pas la différence entre le tenseur énergie-impulsion de masse intrinsèque et le tenseur énergie-impulsion totale (que nous verrons plus loin) [4] [33]. Or l'équation scalaire que l'on tire de ce dernier tenseur est un bilan d'énergie, et non un bilan de matière [34], [35], [36]. La production volumique totale de masse intrinsèque par les réactions chimiques est nulle (II-73), comme en physique classique et en relativité restreinte. Par ailleurs, la différence des vitesses de réaction entre les espace-temps réel courbe et V plat est liée à l'effet de déformation de l'hypervolume élémentaire représentatif lors du passage de l'un à l'autre.

Nous avons vu en (II-46) la transformation du noyau du tenseur énergie-impulsion intrinsèque. L'extension de ce tenseur est donnée par $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ (II-52), $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{P}}$ (II-55), en se servant de (II-56), et $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\boldsymbol{D}}$ (II-62), ce qui donne le tenseur énergie-impulsion intrinsèque complet à partir de (I-88) :

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}} = \rho_I \gamma \overrightarrow{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} + \left(\left(1-\frac{g}{c^2}\right)\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\circ\left(\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\boldsymbol{1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\right) - \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}}^{*} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}} \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)}} \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}} \end{array}\right] \qquad \text{(II-74)}$$

Ce tenseur est important pour l'écriture du bilan de quadri-quantité de mouvement, obtenu en transformant (I-89). La transformation de (I-76) sans les forces de gravitation (voir le postulat original en section 5) a déjà été faite en (II-61) et (II-65). Le bilan devient, avec (II-65) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M};i}^{im} - \frac{1}{2}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}}^{im}\partial_i\left(ln\left(\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\right)\right) = \overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{mi}\overrightarrow{\boldsymbol{C}}_i + \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{D}}^{m} \qquad \text{(II-75)}$$

Où $\overrightarrow{\boldsymbol{C}}_i$ est la forme covariante du courant électrique (II-60) sujet à (II-68). Les quadri-forces de gravitation dues à la courbure de l'espace-temps sont incluses dans les dérivées covariantes de $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}}$.

L'autre tenseur énergie-impulsion important pour la résolution de la dynamique des fluides continus en relativité générale est le tenseur énergie-impulsion totale, celui-ci incluant l'énergie interne de la matière, liée très directement à la température (ainsi que la pression et la composition du mélange) et dépendant du choix d'un état standard. Le noyau du tenseur énergie-impulsion totale est la somme d'un tenseur ressemblant à $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}}$, mais incluant l'énergie interne (I-90), et des tenseurs énergie-impulsion électromagnétique $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{E}}$ (II-71) et de gravitation $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}}$ (II-47). Son premier terme est (I-90) :

$$\rho_I^*\left(\gamma^*+\frac{U^*}{c^2}\right)\vec{\boldsymbol{u}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}=\frac{\Gamma\rho_I}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\left(\frac{\Gamma\gamma}{\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}+\frac{U^*}{c^2}\right)\frac{1}{\Gamma^2}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}=\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\rho\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}} \qquad \text{(II-76)}$$

Où ρ est la masse-énergie volumique en mouvement du fluide donnée par, avec $\frac{U^*}{\gamma^*}=\frac{U}{\gamma}$:

$$\rho=\rho_I\left(\gamma+\frac{U^*\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}{c^2\Gamma}\right)=\rho_I\left(\gamma+\frac{\gamma U^*}{\gamma^* c^2}\right)=\rho_I\left(\gamma+\frac{U}{c^2}\right) \qquad \text{(II-77)}$$

Car l'énergie interne massique est covariante (I-51). L'enthalpie massique, étant une forme d'énergie, doit aussi être transformée selon $\frac{H^*}{\gamma^*}=\frac{H}{\gamma}$ (I-52), ce qui permet de vérifier (II-56) :

$$H=\gamma\frac{H^*}{\gamma^*}=\frac{\gamma}{\gamma^*}\left(U^*+\frac{P^*}{\rho_I^*}\right)=U+\frac{\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}{\Gamma}\frac{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}{\Gamma\rho_I}\frac{P\Gamma^2}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}=U+\frac{P}{\rho_I} \qquad \text{(II-78)}$$

Finalement, le noyau du tenseur énergie-impulsion totale s'écrit, avec (II-71) et (II-47) :

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T1}}&=\rho\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}+\frac{\varepsilon_0}{2}\sqrt{\frac{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}{1-\frac{g}{c^2}}}\left(c^2\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\boldsymbol{T}}+\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{T}}\right)+\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}}\\ \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{T1}}-\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{G}}&=\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T1}}-\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}})\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\end{aligned}\right] \qquad \text{(II-79)}$$

En effet, le tenseur énergie-impulsion de gravitation n'existe pas dans l'espace-temps V. Comme notre référence est la relativité restreinte, en deuxième ligne de (II-79) il faut retrancher $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{G}}$ à $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{T1}}$ pour obtenir le noyau du tenseur énergie-impulsion totale en espace-temps V. Sa transformation correspond à $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T1}}-\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}}$ où $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T1}}$ est le noyau du tenseur énergie-impulsion totale en relativité générale. Certains éléments de l'extension du tenseur énergie-impulsion totale forment l'extension des tenseurs énergie-impulsion intrinsèque et électromagnétique (II-70) et (II-74). Le premier des deux autres est (I-91) :

$$\left.\begin{aligned}\gamma^{*2}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}+\vec{\boldsymbol{u}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*}{c^2}&=\frac{\Gamma^2\gamma^2}{1-\frac{g}{c^2}}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}+\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}}{c^2\Gamma^2\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\\ \gamma^{*2}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}+\vec{\boldsymbol{u}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^{*\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}^*}{c^2}&=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}+\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{2}}}\end{aligned}\right] \qquad \text{(II-80)}$$

Nous avons vu équation (I-66) comment le flux de chaleur se transforme d'un repère inertiel à un autre en relativité restreinte. En tenant compte de ce fait, de (II-49), (II-50) et (II-60), et sachant que $\vec{\boldsymbol{q}}$ est un flux d'énergie et donc doit aussi suivre une loi du type (II-78), nous devons avoir :

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{*T}\dfrac{\vec{\boldsymbol{q}}^*}{\gamma^*}=\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}^{T}\dfrac{\vec{\boldsymbol{q}}}{\gamma}\\ \vec{\boldsymbol{q}}^*=\dfrac{\Gamma}{\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}}\dfrac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\vec{\boldsymbol{q}}}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}=\dfrac{\Gamma\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\vec{\boldsymbol{q}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\end{array}\right] \qquad \text{(II-81)}$$

Ceci indique que, compte tenu de (I-66), nous avons $\vec{\boldsymbol{u}}^{*T}\vec{\boldsymbol{q}}^*=\vec{\boldsymbol{u}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{q}}$, et donne, de plus, le tenseur d'ECKART [1], à partir de (I-91) et avec (II-23) :

$$\frac{\vec{\boldsymbol{q}}^*\vec{\boldsymbol{u}}^{*T}+\vec{\boldsymbol{u}}^*\vec{\boldsymbol{q}}^{*T}}{c^2}=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\frac{\vec{\boldsymbol{q}}\vec{\boldsymbol{u}}^{T}+\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{q}}^{T}}{c^2\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-82)}$$

Ainsi, finalement :

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T2}}=\left(\left(1-\frac{g}{c^2}\right)\frac{P}{\gamma^2}+\frac{1}{2}\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\right)\circ\left(\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-1}+\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\right)-\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}-\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}-\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\\ -\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}+\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}+\left(\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\vec{\boldsymbol{U}}\right)\vec{\boldsymbol{U}}\vec{\boldsymbol{U}}^{T}\right)+\frac{\vec{\boldsymbol{q}}\vec{\boldsymbol{u}}^{T}+\vec{\boldsymbol{u}}\vec{\boldsymbol{q}}^{T}}{c^2}+\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}\\ \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{T2}}=\dfrac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T2}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\end{array}\right] \qquad \text{(II-83)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$ est déduit de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{IT}}$ (en physique classique) par l'intermédiaire de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}^*_{\boldsymbol{I}}$ comme indiqué avant (I-92). Les transformations du tenseur énergie-impulsion totale et de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$ sont donc données par :

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}}=\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T1}}+\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T2}}\\ \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{T}}-\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^*_{\boldsymbol{G}}=\dfrac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}}-\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}\\ \overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}^*_{\boldsymbol{I}}=\dfrac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{g}{c^2}\right)det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}=\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}^{T}_{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{IT}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}\end{array}\right] \qquad \text{(II-84)}$$

En physique classique, comme en relativité restreinte, le bilan d'énergie correspond à une équation différentielle issue du premier principe de la thermodynamique. Ce n'est pas le cas en relativité générale, comme nous le verrons en section suivante.

9 Premier principe de la thermodynamique et équation d'EINSTEIN

Nous avons indiqué en Part 1 que le premier principe de la thermodynamique, (I-27) en physique classique et (I-93) en relativité restreinte dans le cas d'un fluide continu, était tel que le quadri-gradient du tenseur énergie-impulsion totale soit nul. Or la plupart des éléments intervenant dans ce tenseur énergie-impulsion ne sont défini que par des équations différentielles, dont nous n'avons pas précisé les conditions aux limites. Ainsi beaucoup de ces éléments ne sont connus qu'à une constante près. C'est le cas, par exemple, de l'énergie interne par unité de masse intrinsèque (voir fin de la section 4 de la Part 1). Comme

le premier principe de la thermodynamique annonce la conservation de l'énergie totale et de l'impulsion totale, nous réduirons l'incertitude indiquée plus haut ($\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$) en considérant que :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}} = 0 \qquad \text{(II-85)}$$

Pour les fluides, nous exprimerons donc le **premier principe de la thermodynamique** de la manière suivante : **« En relativité générale, le tenseur énergie-impulsion totale d'un fluide continu est nul. »** Ceci est une propriété locale qui est applicable en toute position de l'espace-temps.

L'équation (I-94) peut servir de définition au tenseur énergie-impulsion (sans qualificatif) $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$. Compte tenu de (II-47) et (II-85) nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}} &= \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}} - \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{G}} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}} &= \frac{c^4}{8\pi G}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-86)}$$

Où la deuxième expression est appelée **équation d'EINSTEIN.**

Selon la présente hypothèse, l'équation d'EINSTEIN est une conséquence du premier principe de la thermodynamique (II-85) et du lien entre le tenseur énergie-impulsion de gravitation et la courbure de l'espace-temps (II-47). Cette équation d'EINSTEIN est importante car elle permet de calculer les 10 éléments du tenseur métrique $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$. Compte tenu de (II-79) et (II-83), le tenseur $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ est égal à :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}} = {} & \rho\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} + \frac{\varepsilon_0}{2}\sqrt{\frac{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}{1-\frac{g}{c^2}}}\left(c^2\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}^{\boldsymbol{T}} + \overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}^{\boldsymbol{T}}\right) + \left(\left(1-\frac{g}{c^2}\right)\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}) \circ (\overline{\overline{\boldsymbol{E}}})\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\boldsymbol{1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\right) \\ & -\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} - \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}} - \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} - \sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}} + \overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}} + \left(\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{U}}\overrightarrow{\boldsymbol{U}}^{\boldsymbol{T}}\right) + \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{q}}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} + \overrightarrow{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{T}}}{c^2} + \overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II-87)}$$

Où ρ est la masse-énergie en mouvement par unité de volume, donnée par (II-77). Une forme simplifiée du tenseur $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ se retrouve couramment dans la littérature, pour des fluides parfaits ($\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 0$) et non dipolaires ($\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = 0$, $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} = 0$), et avec $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}} = 0$ [31]. Les extensions dues à la pression et au flux de chaleur sont prises en compte par bien des auteurs [27] [30]. Souvent, la pression P est associée à la masse-énergie volumique en mouvement du fluide, ρ, par l'intermédiaire de l'enthalpie (II-78) [18] [25] [28] [32] [34]. Guy PICHON [27] se place dans le cas d'un fluide Newtonien. Le quadri-gradient de $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ fait apparaître une équation scalaire, que certains auteurs appellent équation de continuité (voir discussion en début de section 8), et une équation vectorielle considérée comme le bilan de quantité de mouvement (ou de forces) [35] [36]. Or, nous avons, ici, le tenseur inconnu $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$ dans cette dernière relation, dont le précurseur a été introduit en Part 1. Considérer que ce bilan est issu de $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{M}}$ est plus juste. Signalons que la plupart des auteurs cités ci-dessus reprennent les résultats publiés par André LICHNEROWICZ pour les fluides parfaits [37] [38], alors que nous nous plaçons dans un cas plus général.

En ce qui concerne le tenseur d'EINSTEIN, nous avons généralement [5] :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}} = \overline{\overline{\boldsymbol{R}}} - \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} \circ \overline{\overline{\boldsymbol{R}}}}{2}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\boldsymbol{1}} + \overline{\overline{\boldsymbol{Y}}} \qquad \text{(II-88)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{R}}}$ est la forme semi réelle contravariante du tenseur de RICCI, et où $\overline{\overline{\boldsymbol{Y}}}$ est un tenseur symétrique contravariant d'ordre 2 tel que $\overline{\overline{\boldsymbol{Y}}}^{ij}_{;j} = 0$. Ce dernier peut être obtenu à partir d'une théorie scalaire-vecteur-tenseur [39] [40], ou, à défaut, à l'aide de l'une des deux expressions données par A. EINSTEIN, soit 0, soit égale à une constante cosmologique multipliée par $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-1}$ (forme contravariante). L. LANDAU et E. LIFCHITZ [5] donnent l'expression du tenseur de RICCI covariant en fonction des symboles de CHRISTOFFEL dont la démonstration est toujours valable ici, bien que ces matrices soient semi-réelles.

L'équation (II-86) est soulignée par la plupart des auteurs cités ici, et l'équation (II-89) est parfois considérée comme l'expression du premier principe de la thermodynamique, par analogie avec la physique classique [30], alors qu'il ne s'agit que de la conséquence de (II-86) et $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{ij}_{\boldsymbol{E};j} = 0$, c'est-à-dire des identités de BIANCHI [1] [27] [34]. Cette dernière équation s'écrit, compte tenu de (I-94), (II-40) et du postulat de la section 5 :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{ij}_{\boldsymbol{EI};j} = 0 \qquad \text{(II-89)}$$

Cette expression est nécessaire au calcul complet de la dynamique des mélanges fluides continus en relativité générale. Dans (II-89) se trouve $\vec{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{G}} = -\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{EI}}\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{1}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{1}{2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\right)\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ (II-41), la quadri-force due à la courbure de l'espace-temps, donc à la gravitation. En notation tensorielle, cette force est liée aux symboles de CHRITOFFEL, donc est incluse dans la dérivée covariante.

10 Calcul de la dynamique des fluides continus en relativité générale

Les fonctions d'état comme l'énergie interne massique sont fonctions de la pression, de la température et de la composition du mélange. Nous avons vu, en relativités restreinte et générale que le titre massique x_i (rapport de masses intrinsèques) est un invariant, il prend la même valeur quel que soit le type de physique, et quel que soit le repère inertiel utilisé. Nous avons vu équations (I-53) et (II-56) comment la pression se transforme de la physique classique vers les relativités restreinte et générale : $P_T = \frac{P^*}{\gamma^{*2}} = \frac{P}{\gamma^2}\sqrt{\frac{1-\frac{g}{c^2}}{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}$, grâce à (II-26) et au fait que les grandeurs de la physique classique ont T en indice. Notons que le facteur $\sqrt{\frac{1-\frac{g}{c^2}}{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}$ est égal à 1 si $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$, et qu'il est présent dans certaines expressions comme dans (II-66) et (II-69), mais aussi dans $\rho_{IT} = \frac{\rho_I^*}{\gamma^*} = \frac{\rho_I}{\gamma}\sqrt{\frac{1-\frac{g}{c^2}}{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}$, à partir de (I-43) et (II-44). Rappelons que $r_{iT} = r_i^* = \frac{r_i}{\sqrt{det(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}})}}$ grâce à (II-73) et aux conclusions de la Part 1 du fait de (I-37).

En (I-95) nous avons montré que la température est covariante. Albert EINSTEIN et Louis de BROGLIE sont partis de l'expression $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ et du fait que tous les auteurs estiment que la variation d'entropie ΔS est un invariant, suite à une démonstration faite en thermodynamique statistique relativiste, pour dire que

l'échange de chaleur ΔQ et la température T se transforment de la même façon. Or ils ont développé le premier modèle présenté avant (I-52) [41] [42] [43] [44], alors que ce modèle n'est pas unique, et est contesté, en particulier par Henri ARZELIES [45] [46]. Nous pouvons également utiliser une relation classique de la thermodynamique $dH = \frac{dP}{\rho_I} + TdS + \sum_{i=1}^{n} \mu_i dx_i$, où S est l'entropie du fluide par unité de masse intrinsèque et μ_i le potentiel chimique massique, c'est-à-dire l'enthalpie libre de GIBBS du constituant i par unité de masse intrinsèque de i [1]. Nous avons vu, équation (II-78), que $\frac{P}{\rho_I}$ se transformait comme l'enthalpie massique du fluide H. Il est clair que μ_i suit cette transformation puisque x_i est un invariant, donc il en est de même de TdS. Si nous admettons l'hypothèse généralement admise que dS est un invariant, c'est que la température (absolue, donc en °K) suit une loi identique à celle suivie par tous les types d'énergie, celle proposée par ARZELIES (covariance) :

$$T_T = \frac{T^*}{\gamma^*} = \frac{T}{\gamma} \qquad \text{(II-90)}$$

Les inconnues à déterminer localement à un instant donné, pour la détermination de la dynamique des mélanges fluides continus en relativité générale, sont les mêmes qu'en physique classique ou en relativité restreinte, auxquelles il faut ajouter les éléments de la métrique, soit :

- Les trois composantes de la vitesse locale $\vec{u}$,
- Les deux variables d'état que sont la pression totale P et la température absolue T,
- La composition du fluide, c'est-à-dire de $n-1$ titres massiques x_i (car $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$),
- La charge totale des électrons libres par unité de masse intrinsèque de fluide α_E,
- Les vecteurs champs électrique et magnétique du tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}$,
- Les 6 éléments variables de l'extension $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$ du tenseur énergie-impulsion totale (ou 3) si nous nous référons à la physique classique, moyennant des transformations successives (Part 1),
- Les 10 éléments du tenseur métrique symétrique $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$.

Le nombre total d'inconnues, à déterminer à l'aide des équations dont nous parlerons plus bas, est donc égal à $27 + n$ (ou $24 + n$), où n est le nombre de constituants du mélange fluide.

Certaines grandeurs prennent des valeurs identiques en physique classique, en relativité restreinte et en relativité générale, ce sont :

- x_i, la masse intrinsèque du constituant i par unité de masse intrinsèque de fluide,
- α_E, la charge totale des électrons libres par unité de masse intrinsèque de fluide,
- α_i, la charge électrique du constituant i par unité de masse intrinsèque de i.

Nous remarquons que tous ces invariants sont tous liés à la masse intrinsèque, c'est-à-dire à la masse conservative Newtonienne que nous connaissons à notre échelle terrestre. Ceci montre l'importance d'une grandeur que beaucoup d'auteurs auraient souhaité oublier au profit de la masse-énergie. Notons que les x_i et α_E sont des variables inconnues alors que les α_i sont des constantes à connaître à priori.

Certaines grandeurs ne sont pas des inconnues, mais des fonctions à connaître au moins en physique classique, comme :

- Les fonctions d'état ρ_I et U (masse intrinsèque volumique et énergie interne massique) en fonction de la pression totale, de la température absolue et de la composition du fluide, ainsi que de la conductivité électrique du fluide λ_E en fonction des mêmes variables d'état,
- Un modèle rhéologique pour l'évaluation du tenseur des contraintes de cisaillement $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$, et d'un modèle permettant le calcul des moments dipolaire $\vec{P}$ et magnétique $\vec{M}$,
- Les expressions permettant de calculer le flux de chaleur $\vec{\boldsymbol{q}}$, les n flux de diffusion $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}}$ et les n vitesses de production r_i de chaque constituant par les réactions chimiques.

En physique classique, les expressions des flux $\vec{\boldsymbol{q}}$ et $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{i}}$ sont données par le deuxième principe de la thermodynamique. Comme ces déplacements d'énergie ou de matière sont généralement très lents par rapport aux phénomènes de transport, il est possible de partir de ces relations de la physique classique, et, par transformations successives, les amener aux expressions correspondantes de la relativité générale, dans un repère quelconque. En pratique, les vitesses de ces phénomènes devraient rester nettement inférieures à celle de la lumière. Cependant, théoriquement, il conviendrait de vérifier que les vitesses de propagation des ondes de concentrations, de pression et de température restent bien inférieures à celle de la lumière, quelque soient leurs amplitudes.

En pratique, les trois composantes de la vitesse et la pression sont obtenues à l'aide du bilan de quadri-quantité de mouvement (II-75). Le bilan de masse intrinsèque totale (II-72) n'est pas nécessaire car redondant avec (II-75). Par contre, le bilan de masse intrinsèque de constituant i, (II-72), permet de calculer le titre massique x_i. Cependant cette redondance entre les différentes équations pourrait être utilisée pour effectuer des corrections, éliminant ainsi d'éventuelles erreurs d'intégration.

Les expressions (II-66) et (II-67) nous conduisent à déterminer les tenseurs antisymétriques $\overline{\overline{\boldsymbol{E}}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{B}}}$, sachant que la relation qui les lie est complexe. Le fait que l'on ait 8 équations scalaires pour déterminer les 6 éléments des vecteurs champs électrique et magnétique n'est pas gênant car ce sont leurs dérivées qui sont calculées. En fait, nous savons, en physique classique, qu'un changement de variable permet d'obtenir les potentiels scalaire et vecteur (soit 4 variables scalaires) à l'aide de 4 équations scalaires. Le passage de la physique classique à la relativité générale se faisant par des transformations linéaires locales successives, cette propriété de non-redondance se conserve.

La charge totale des électrons libres par unité de masse intrinsèque de fluide α_E est obtenue à l'aide de (II-68). La température T et les éléments de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$ sont calculés à partir de (II-89) et (II-85). Quand aux 10 éléments de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{E}}$, ils sont déterminés à partir de (II-86) (corrections possibles). Des valeurs de ces 10 éléments, nous pouvons déduire celles des 10 éléments de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ grâce à (II-88) et la définition de $\overline{\overline{\boldsymbol{R}}}$.

Ainsi, le calcul de toutes les inconnues listées plus haut est possible. Notons que si la détermination de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}$ peut paraître superflue, la réalité est que ceci est indispensable à l'obtention du tenseur énergie-impulsion $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ et donc du tenseur métrique $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$. Rappelons, qu'en physique classique et en relativité restreinte, l'introduction de $\overline{\overline{\Theta}}_{IT}$ avait permis l'écriture du premier principe de la thermodynamique sous la forme $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}^{\boldsymbol{T}}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}}\right) = 0$, qui était une prémisse de son écriture en relativité générale $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{T}} = 0$. Par ailleurs, nous

avons vu en conclusion de la Part 1 que les variables de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Theta}}}_{\boldsymbol{I}}^{*}$ intervenaient dans chaque équation scalaire de (I-93), il en est de même pour (II-86) et (II-89) en relativité générale.

Le calcul pratique des valeurs des diverses inconnues du problème pour chaque position de l'espace-temps est une opération complexe, correspondant à la résolution simultanée des équations citées dans les quatre paragraphes précédents. Ceci peut être fait de façon itérative : une connaissance de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ en toute position de l'espace-temps dans le domaine étudié peut être utilisée pour résoudre les équations de la dynamique sauf celles donnant $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$. Bien entendu, les conditions aux limites et à l'origine sont nécessaires, en particulier, pour la détermination des champs électromagnétiques, mais aussi de la courbure de l'espace-temps. Nous pourrions être tentés de proposer initialement $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$ dans le domaine d'étude, mais serait une erreur. Il est préférable de résoudre préalablement la dynamique des fluides en relativité restreinte, **AVEC les phénomènes gravitationnels**, et d'en déduire $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ puis $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ pour toute position de l'espace-temps. Cette connaissance de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ dans tout le domaine étudié est le point de départ de la procédure itérative. Encore faut-il s'assurer de la convergence de la méthode.

Le fait que les phénomènes gravitationnels Newtoniens apparaissent dans les bilans de quantité de mouvement et d'énergie totale en relativité restreinte (avec $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$), (I-89) et (I-93) via (I-80), peut accélérer l'obtention de la métrique en relativité générale. Le tenseur $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$ obtenu permet de déterminer une première expression du tenseur métrique, par l'intermédiaire du tenseur d'EINSTEIN. Comme indiqué plus haut les valeurs de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ obtenues permettent de résoudre les équations de la dynamique en relativité générale, et d'en déduire un nouveau $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{EI}}$, puis une nouvelle expression de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$, et ainsi de suite. Ceci va influencer le tenseur énergie-impulsion et déclencher la courbure de l'espace-temps (II-86). Le calcul de la matrice $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}$ ayant les propriétés nécessaires (II-5), (II-10), et de ses dérivées (II-17), est relativement complexe. Les équations différentielles (II-17), associées à des conditions initiales et aux conditions d'orthogonalité et de normalité, donnent la matrice semi réelle $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$ à l'aide de la connaissance des symboles de CHRISTOFFEL $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{lj}$, déduits de $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ par l'expression bien connue [5]**.**

11 Conclusions et perspectives

Nous avons atteint l'objectif que nous nous étions fixé, à savoir écrire les équations de la dynamique des mélanges fluides continus, chargés, dipolaires, visqueux, soumis à des réactions chimiques, des phénomènes diffusionnels et un transfert de chaleur, en écoulement dans des champs électromagnétiques, en relativité générale. L'important est que les tenseurs d'ordre 2 symétriques en physique classique et en relativité restreinte restent symétriques en relativité générale. De même les tenseurs d'ordre 2 antisymétriques restent antisymétriques.

Ce qui caractérise le présent article est l'apparition d'un nouveau tenseur énergie-impulsion appelé « intrinsèque », directement issu de la physique classique, en Part 1. Pour cela, nous avons posé un premier postulat original permettant de démontrer les équations de la dynamique des fluides continus en relativité restreinte à partir de celles de la physique classique : **« Dans le Repère Inertiel Tangent d'un**

espace-temps plat, les équations de la dynamique relativiste des mélanges fluides continus et celles de la physique classique sont identiques. ». En Part 2 nous avons étudié une transformation nouvelle qui jette un pont entre les relativités restreinte et générale, ainsi qu'un deuxième postulat inédit : **« Si le repère utilisé dans l'espace-temps courbe est inertiel, alors nous admettrons, sans démonstration, que le repère correspondant dans l'espace-temps V plat est inertiel. Ainsi, les équations de la dynamique des fluides continus en relativité restreinte, dans lesquelles les phénomènes Newtoniens ont été effacés, s'appliquent dans l'espace-temps V. Ces mêmes équations s'écrivent en relativité générale grâce au changement de variables local $d\vec{X}^* = \overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} d\vec{X}$ soumis à la condition $\partial_j \left(\left(\overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \right)_{k\beta} \right) = \left(\overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}} \right)_{ki} \left(\overline{\overline{\Gamma}}^{i} \right)_{\beta j}$, dans un repère inertiel quelconque, ce qui assure leur covariance. »**. Ceci est possible grâce à l'utilisation de tenseurs semi-réels qui permettent le calcul de $\overline{\overline{G}}^{\frac{T}{2}}$. Ainsi, nous avons pu démontrer les expressions de la dynamique des mélanges fluides en relativité générale. En physique classique, les bilans de matière et de forces nous ont conduit à écrire un tenseur énergie-impulsion, noté $\overline{\overline{T}}_M$, que nous retrouvons en relativité générale. Sa caractéristique est de faire appel à la masse intrinsèque, ou conservative Newtonienne, et non à la masse-énergie en mouvement, généralement utilisée par les spécialistes de la relativité. Cette masse conservative intervient dans les équations (II-42), (II-50), (II-60), (II-74), (II-75) et (II-78), ce qui montre son importance (voir la section 4 de la Part 1 pour les commentaires et citations). La masse-énergie en mouvement se trouve dans le tenseur énergie-impulsion totale $\overline{\overline{T}}_T$ (énergie totale, et impulsion totale différente de la quantité de mouvement), comme nous l'avons montré en physique classique, puis en relativités restreinte et générale. Attention, nous avons vu en physique classique qu'il existait une incertitude sur $\overline{\overline{T}}_T$ qui se répercute en relativité ($\overline{\overline{\Theta}}_I$). En relativité générale, le tenseur énergie-impulsion de gravitation $\overline{\overline{T}}_G$ faisant partie des inconnues, $\overline{\overline{T}}_{EI}$ (également basé sur la masse-énergie en mouvement) se substitue à $\overline{\overline{T}}_T$ (qui sert à déterminer $\overline{\overline{G}}$) pour le calcul de la température absolue et des inconnues de $\overline{\overline{\Theta}}_I$.

D'autres points restent à définir, en particulier les expressions de $\vec{q}$ et $\vec{J}_i$. Certains auteurs proposent des formules correspondantes [32] [47], mais nous pensons qu'un travail est encore à réaliser en thermodynamique relativiste, et en particulier concernant le deuxième principe de la thermodynamique, et ce malgré les nombreux travaux réalisés [1] [47] [48], y compris sur les trous noirs [49] [50].

En conclusion, de nombreux auteurs ont étudié la dynamique des fluides continus [51]. Du fait de l'initialisation proposée pour la résolution de la dynamique des fluides en relativité générale, nous pouvons considérer que la gravitation Newtonienne est l'élément déclencheur de la courbure de l'espace-temps, au moins dans le calcul effectué. En fait, certains auteurs ont essayé d'adapter les théories Newtoniennes [52]. Un point souligné par bien des auteurs est la nécessité de covariance des équations, c'est-à-dire le fait qu'elles doivent garder la même forme lors d'un changement de repère inertiel. Ceci est assuré pour les relations présentées dans cet article, car nous sommes partis d'un repère inertiel quelconque en relativité restreinte pour les démontrer. Plus précisément, le repère inertiel dans l'espace-temps V plat peut ne pas sembler inertiel, mais il s'agit localement de l'image d'un repère inertiel quelconque dans l'espace-temps réel courbe. Nous le considèrerons donc comme tel, c'est pourquoi nous avons introduit

cette notion dans notre postulat. Néanmoins, des travaux de recherche devraient dans le futur aborder cette question.

Ainsi, pour pouvoir résoudre le problème de la dynamique des mélanges fluides continus dans des conditions complexes, nous avons dû utiliser la masse volumique conservative Newtonienne, dite intrinsèque, parce qu'elle a une place importante dans de nombreuses équations, comme (II-42), (II-50), (II-60), (II-74), (II-75) et (II-78). Bien entendu, la masse volumique en mouvement a aussi beaucoup d'importance puisque chacune d'elles intervient dans un tenseur énergie-impulsion. Grâce à cela nous avons obtenu les équations de la dynamique des fluides dans un repère inertiel quelconque en relativité générale. De plus, le passage successif de la physique classique à la relativité restreinte, puis à la relativité générale assure la cohérence d'ensemble. Par ailleurs, nous avons exclus tous phénomènes quantiques, notamment au niveau des interactions [53]. Ainsi, les perspectives ouvertes par ce travail se situent au niveau de l'intégration des phénomènes quantiques et des réactions nucléaires, de même qu'en direction de la thermodynamique et plus spécialement du deuxième principe applicable en relativités restreinte et générale.

Références

1. Luciano REZZOLLA, Olindo ZANOTTI « Relativistic Hydrodynamics », Oxford University Press 2013
2. Sayantani BHATTACHARYYA, Shiraz MINWALLA, Spenta R. WADIA « The incompressible non-relativistic NAVIER-STOKES equations from gravity », Journ. of High Energy Phys., 08, 059 (2009) 1-24
3. Thibault DAMOUR, G. ESPOSITO-FARESE « Tensor-multi-scalar theories of gravitation », Classical and Quantum Gravity, 9 (1992) 2093-2176
4. Irene BREDBERG, Cynthia KEELER, Vyacheslav LYSOV, Andrew STROMINGER « From NAVIER-STOKES to EINSTEIN », Journ. of High Energy Phys., 07, 146 (2012) 1-14
5. L. LANDAU et E. LIFCHITZ « Physique théorique – Théorie des champs », Editions MIR, Moscou, 1989
6. Eric GOURGOULHON « 3+1 formalism and bases of numerical relativity », conférence au Trimestre de la Relativité Générale, Institut Henri POINCARE, Paris, sept.-déc. 2006, 1-220
7. Eric GOURGOULHON, Charalampos MARKAKIS, Köji URYU, Yoshiharu ERIGUCHI « Magnétohydrodynamics in stationary and axisymetric spacetimes : a fully covariant approach », Physical Review D 83, 104007 (2011) 1-28
8. Eric GOURGOULHON « Simple equations for general relativistic hydrodynamics in spherical symmetry applied to neutron star collapse », Astron. Astrophys. 252 (1991) 651-663
9. Eric GOURGOULHON « A generalized DAMOUR-NAVIER-STOKES equation applied to trapping horizons », Physical Review D 72, 104007 (2005) 1-16
10. Eric GOURGOULHON, José Luis JARAMILLO « Area evolution, bulk viscosity and entropy principles for dynamical horizons », Physical Review D 74, 087502 (2006) 1-4

11. Eric GOURGOULHON « An introduction to relativistic hydrodynamics », Stellar Fluid Dynamics and Numerical Simulations, dans Sun to Neutron stars, M. RIEUTORD et B. DUBRULLE Eds., EAS Publications Series, 21 (2006) 43-79
12. Köji URYU, Eric GOURGOULHON, Charalampos MARKAKIS « Thermodynamics of magnetized binary compact objects », Physical Review D 82, 104054 (2010) 1-21
13. Théophile de DONDER « Introduction à la gravifique Einsteinienne », Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 8, Gauthier-Villars, 1925 (58 pages)
14. Théophile de DONDER « Applications de la gravifique Einsteinienne », Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 43, Gauthier-Villars, 1930 (60 pages)
15. Georges DARMOIS « Les équations de la gravitation Einsteinienne », Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 25, Gauthier-Villars, 1927 (48 pages)
16. André LICHNEROWICZ « Sur les équations relativistes de la gravitation », Bulletin de la S. M. F., 80 (1952) 237-251
17. Yvonne CHOQUET-BRUHAT, Tommaso RUGGERI « Hyperbolicity of the 3+1 system of EINSTEIN equations », Commun. Math., 89 (1983) 269-275
18. Arlen ANDERSON, Yvonne CHOQUET-BRUHAT, James W. YORK Jr., « EINSTEIN-BIANCHI hyperbolic system for general relativity », Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz SCHAUDER Center, 10 (1997) 353-373
19. Yvonne CHOQUET-BRUHAT, « Well posed reduced systems for the EINSTEIN equations », Mathematics of gravitation, Part 1, Lorentzian geometry and EINSTEIN equations, BANACH Center publications, 41, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa 1997
20. Yvonne CHOQUET-BRUHAT, « Non strict and strict hyperbolic systems for the EINSTEIN equations », arXiv:gr-qc/0111017v1 6 nov 2001
21. Vladimir B. BRAGINSKY « Laboratory experiments to test relativistic gravity », Physical Review D, 15, 8 (1977) 2047-2068
22. Kip S. THORNE « Gravitomagnetism, jets in quasars, and the Stanford gyroscope experiment », in « Near zero : new frontiers of physics », Fairbank, Deaver, Everitt, Michelson Ed., W.H. Freeman dand company, New York 1988
23. A. TARTAGLIA, M.L. RUGGIERO « Gravito-electromagnetism versus electromagnetism », European Journal of Physics 25 (2004) 203-210
24. Harihar BEHERAA « Comments on gravitielectromagnetism of Ummarino and Gallerati in Superconductor in a weak static gravitational field », Eur. Phys. J. C, 77 (2017) 549-568
25. Yvonne BRUHAT « Magnétohydrodynamique relativiste », Séminaire JANET (Mécanique analytique et Mécanique céleste), 3, 3ème année (1959/60) exp. n°3, 1-12 (6 février 1960)
26. Ilija LUKACEVIC « Sur le mouvement irrotationnel des fluides parfaits chargés en relativité générale », Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, 7, 21 (1967) 51-54
27. Guy PICHON « Etude relativiste de fluides visqueux et chargés », Ann. Inst. Henri POINCARE, section A Physique Théorique, 2, 1 (1965) 21-85
28. Yvonne BRUHAT « Etude des équations des fluides chargés relativistes inductifs et conducteurs », Commun. Math. Phys., 3 (1966) 334-357
29. Francis HALBWACHS « Théorie relativiste des fluides à spin », Gauthier-Villars, Paris 1960

30. J. GABRIEL « Rapprochement entre deux formalismes en thermodynamique relativiste des phénomènes irréversibles », Annales de l'Institut Henri POINCARE, section A, 33, 2 (1980) 195-203
31. Jean-François BENNOUN « Etude des milieux continus élastiques et thermodynamique en relativité générale », Ann. Inst. Henri POINCARE, section A Physique Théorique, 3, 1 (1965) 41-110
32. Charles-Michel MARLE « Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs II – méthodes de résolution approchée de l'équation de BOLTZMANN relativiste », Ann. Inst. Henri POINCARE, section A, 10, 2 (1969) 127-194
33. Eric GOURGOULHON « Generalized DAMOUR-NAVIER-STOKES equation applied to trapping horizons », Physical Review D, 72, 104007 (2005) 1-16
34. Béchir MAHJOUB « Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur », Ann. Inst. Henri POINCARE, section A, 14, 2 (1971) 113-137
35. Henri ARZELIES « Fluides relativistes – principes généraux, équations fondamentales », Masson Ed., Paris, 1971
36. O. COSTA de BEAUREGARD « Intéressantes questions soulevées par H. ARZELIES dans *Fluides relativistes* », Ann. Inst. Henri POINCARE, Section A Physique Théorique, 16, 2 (1972) 103-107
37. André LICHNEROWICZ, « Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste », Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 58, 3 (1941) 285-304
38. André LICHNEROWICZ « Etude mathématique des fluides thermodynamiques relativistes », Commun. Math. Phys., 1 (1966) 328-373
39. Yves WIAUX « Théories de la gravitation à la lumière d'étoiles doubles » thèse de Docteur en Sciences soutenue à l'université catholique de LOUVAIN (2002)
40. Stéphane FAY « Cosmologies spatialement homogènes en théories tenseur-scalaires », thèse de doctorat soutenue le 25 mars 2004 à l'université Paris 7 Denis DIDEROT
41. L. de BROGLIE « Thermodynamique relativiste et mécanique ondulatoire », Ann. Inst. Henri Poincaré, 9, 2 (1968) 89-108
42. L. de BROGLIE « La thermodynamique cachée des particules », Ann. Inst. Henri Poincaré, 1, 1 (1964) 1-19
43. L. de BROGLIE « Recherches d'un demi siècle », Albin Michel 1976
44. L. de BROGLIE « Diverses questions de mécanique et de thermodynamique classiques et relativistes », Lectures notes in physics, new series m :Monographs, Springer-Verlag, 1995
45. Henri ARZELIES « Sur le concept de température en thermodynamique relativiste et en thermodynamique statistique », Il Nuovo Cimento, 40 B, 2 (1965) 333-344
46. Henri ARZELIES « Transformation relativiste de la température et de quelques autres grandeurs thermodynamiques » dans Il Nuovo Cimento, 35, 3 (1965) 792-804
47. Pham MAU QUAN « Thermodynamique d'un fluide relativiste », Séminaire L. De BROGLIE, Théories physiques, 24 (1954-1955), exp. n°3, 1-19
48. Henning STRUCHTRUP, « Projected moments in relativistic kinetic theory », Physica A 253 (1998) 555-593
49. Eric GOURGOULHON, José Luis JARAMILLO « Area evolution, bulk viscosity and entropy principles for dynamical horizons », Physical Review D 74, 087502 (2006) 1-4
50. Köji URYU, Eric GOURGOULHON, Charalampos MARKAKIS « Thermodynamics of magnetized binary compact objects », Physical Review D 82, 104054 (2010) 1-21

51. Eric GOURGOULHON « An introduction to relativistic hydrodynamics », Stellar Fluid Dynamics and Numerical Simulations, dans Sun to Neutron stars, M. RIEUTORD et B. DUBRULLE Eds., EAS Publications Series, 21 (2006) 43-79
52. Thibault DAMOUR et N. DERUELLE « General relativistic celestial mechanics of binary systems I : the post-Newtonian motion », Ann. Inst. Henri POINCARE, Physique théorique, 43, 1 (1985) 107-132
53. L. S. SCHULMAN « Formulation and justification of the WHEELER-FEYNMAN absorber theory », Foundations of Physics, 10, 11-12 (1980) 841-853

Appendice A : démonstration de l'équation (II-17)

Reportons la première ligne de (II-10) dans la première ligne de (II-16), nous obtenons :

$$\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{k\beta}\right)=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{ki}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j}=\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{nk}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{n\beta}\right) \qquad \text{(A-1)}$$

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{mk}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{mi}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j}=\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{mk}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{m\beta}+\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{mk}\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{m\beta}\right) \qquad \text{(A-2)}$$

$$\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{nk}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{n\beta}=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{mk}\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{mi}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j}-\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{m\beta}\right)\right) \qquad \text{(A-3)}$$

$$\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{nk}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{n\beta}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{\beta\alpha}=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}\right)_{mk}\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{mi}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j}-\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{m\beta}\right)\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{\beta\alpha} \qquad \text{(A-4)}$$

Or $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{n\beta}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}_{\boldsymbol{1}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{\beta\alpha}=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{n\alpha}$ où $\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$ est la matrice unité de Kronecker telle que $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{n\alpha}=1$ si $n=\alpha$. Donc (A-4) se réduit à (II-17) si on remplace β par l.

Appendice B : démonstration de l'équation (II-35)

Nous reportons (II-33) dans la deuxième ligne de (II-16) :

$$\boldsymbol{D}\left(\frac{1}{\alpha}\vec{\boldsymbol{V}}\right)=\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}d\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right) \qquad \text{(B-1)}$$

Qui s'écrit, en développant :

$$-\frac{1}{\alpha^2}\partial_i(\alpha)\,d\vec{\boldsymbol{X}}^i\vec{\boldsymbol{V}}^k+\frac{1}{\alpha}\vec{\boldsymbol{V}}^k_{;i}\,d\vec{\boldsymbol{X}}^i=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{kj}\left(d\vec{\boldsymbol{X}}^*\right)_\gamma(\partial^*)_\gamma\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j \qquad \text{(B-2)}$$

En utilisant (II-32) nous n'obtenons que des $d\vec{\boldsymbol{X}}^i$ dans (B-2) :

$$\frac{1}{\alpha}\left(\vec{\boldsymbol{V}}^k_{;i}-\vec{\boldsymbol{V}}^k\partial_i\left(ln(\alpha)\right)\right)\,d\vec{\boldsymbol{X}}^i=\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{kj}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{\gamma i}\,d\vec{\boldsymbol{X}}^i(\partial^*)_\gamma\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j \qquad \text{(B-3)}$$

Comme nous nous intéressons à la divergence $(\partial^*)_j\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j$ nous poserons $\gamma=j$:

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{kj}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}}\right)_{ji}\,d\vec{\boldsymbol{X}}^i(\partial^*)_j\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j=\frac{1}{\alpha}\left(\vec{\boldsymbol{V}}^k_{;i}-\vec{\boldsymbol{V}}^k\partial_i\left(ln(\alpha)\right)\right)\,d\vec{\boldsymbol{X}}^i \qquad \text{(B-4)}$$

Où nous constatons que $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{kj}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ji} = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{ki}$, la matrice unité de Kronecker. Si $k \neq i$, alors $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{ki} = 0$. Le seul cas intéressant est $k = i$, avec $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{ki} = 1$. Nous poserons donc $k = i$:

$$d\vec{\boldsymbol{X}}^i(\partial^*)_j\left(\vec{\boldsymbol{V}}^*\right)_j d\vec{\boldsymbol{X}}^i = \frac{1}{\alpha}\left(\vec{\boldsymbol{V}}^i_{;i} - \vec{\boldsymbol{V}}^i\partial_i\left(ln(\alpha)\right)\right)\, d\vec{\boldsymbol{X}}^i \qquad \text{(B-5)}$$

Comme $d\vec{\boldsymbol{X}}^i$ peut prendre n'importe quelle valeur, nous pouvons le supprimer de part et d'autre de l'égalité, ce qui donne l'équation (II-35).

<u>Appendice C : démonstration de l'état semi-réel de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$</u>

Nous pouvons revenir à la première ligne de (II-16) en la multipliant par $\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}$:

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{k\beta}\right) = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ki}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j} \qquad \text{(C-1)}$$

En remarquant que :

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ki} = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}\right)_{\alpha i} \qquad \text{(C-2)}$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$ est la matrice unité de Kronecker. Comme plus haut nous poserons $\alpha = i$, et :

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j} = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{ik}\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{k\beta}\right) \qquad \text{(C-3)}$$

Afin de vérifier cette expression, nous dériverons l'équation (C-2) :

$$\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ki}\right) = 0 = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ki}\right) + \partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{\alpha k}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{ki} \qquad \text{(C-4)}$$

Ce qui donne, en remplaçant α par i et i par β :

$$\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}\right)_{\beta j} = -\partial_j\left(\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-\frac{T}{2}}\right)_{ik}\right)\left(\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{\frac{T}{2}}\right)_{k\beta} \qquad \text{(C-5)}$$

Qui est très proche de (II-38).

Nous pouvons remarquer qu'une matrice semi réelle $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}_{\alpha\beta}$ est telle si dans le couple $(\alpha,\ \beta)$ un des deux (et un seul) est nul, alors l'élément de la matrice est un nombre imaginaire pur. Si dans $(\alpha,\ \beta)$ le nombre d'indice nul est pair (ou qu'il n'y en a pas), alors l'élément de la matrice est un nombre réel. Ceci se généralise à tout produit de matrice semi réelle ou d'opérateur.

En ce qui concerne $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$, si $i > 0$, tout se joue sur le couple d'indices $(\beta,\ j)$ car ∂_0 est multiplié par un imaginaire pur et pas les dérivées spatiales. Donc pour $i > 0$, $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$ est une matrice symétrique semi-réelle.

Par contre, si $i = 0$, alors il y a un indice 0 en plus que dans le cas précédent. Donc $\overline{\overline{\boldsymbol{\Gamma}}}^{\boldsymbol{i}}$ est une matrice semi-réelle multipliée par un imaginaire pur (les éléments qui sont réels dans une matrice semi-réelle sont imaginaires, et inversement).