Sur quelques aspects de la relativité restreinte

Christian Fonteix, Badie Morsi, Dimitrios Meimaroglou, Mauricio Camargo

▶ **To cite this version:**

Christian Fonteix, Badie Morsi, Dimitrios Meimaroglou, Mauricio Camargo. Sur quelques aspects de la relativité restreinte. 2022. hal-03641116

HAL Id: hal-03641116
https://hal.univ-lorraine.fr/hal-03641116

Preprint submitted on 14 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR QUELQUES ASPECTS DE LA RELATIVITE RESTREINTE

FONTEIX Christian[1], MORSI Badie[2], MEIMAROGLOU Dimitrios[3], CAMARGO Mauricio[1]

[1]Équipe de Recherche sur Les Processus Innovatifs (ERPI), Université de Lorraine, 8 Rue Bastien Lepage, 54000 Nancy Cedex, France

[2]Department of Chemical and Petroleum Engineering, University of Pittsburgh, Pittsburgh, Pennsylvania 15261, United States

[3]Laboratoire Réactions et Génie des Procédés, Université de Lorraine, CNRS, LRGP, F-54000 Nancy, France

Résumé

Il est facile d'écrire la transformation de LORENTZ, dans le cas général, sous forme matricielle, ce qui permet de respecter l'indissociabilité du temps et de l'espace. L'intérêt de cette représentation est de pouvoir démontrer aisément divers aspects de la relativité restreinte, comme la composition des vitesses, la rotation de THOMAS-WIGNER, la transformation de sommes de forces et de couples. Le cas du paradoxe des jumeaux est également abordé.

1 Introduction

L'objectif de cet article est de démontrer que certains aspects de la relativité restreinte, comme la rotation de WIGNER-THOMAS ou la transformation de quadri-couples par exemple, se démontrent à l'aide de la transformation de LORENTZ présentée en section 4. Il s'agit là d'une modélisation du passage d'un repère inertiel quelconque au repère inertiel tangent à la trajectoire d'un point matériel donné. En effet, (MIZONY 2006) cite KANT : « *Dans toute modélisation il y a un choix a priori de l'espace mathématique servant à repérer l'ensemble des phénomènes* ». De plus, il cite (GRANGER 1992) : « *Ce que nous appelons référentiel est donc un espace de représentation adéquat des phénomènes* ». Bien des auteurs appellent Référentiel cet espace de représentation, nous préfèrerons utiliser Repère, un ancien terme qui qui signifie bien que l'on veut se repérer dans l'espace et le temps. Nous parlons de repère inertiel plutôt que de référentiel Galiléen, car si dans les deux cas il existe bien des forces inertielles, il existe aussi des forces de gravitation ou électromagnétiques.

2 Le principe d'inséparabilité de l'espace et du temps

Comme le préconise (MINKOWSKI 1907), nous appliquerons un principe absolu en relativité : **« L'espace et le temps sont indissociables. »** Tenter de les dissocier conduit souvent à une erreur de calcul.

En relativité restreinte, l'espace-temps est non Euclidien. Par contre l'espace proprement dit est Euclidien tant que l'on se place dans un repère inertiel unique. Il a trois dimensions (DAYANTIS 2007), mais il faut penser au temps. (GUY 2011) dit que l'espace et le temps sont ensembles mais en opposition, ce qui signifie qu'ils sont de nature différente, et pourtant !

Lorsque l'on change de repère inertiel, il est **impossible** de faire correspondre l'espace du premier et l'espace du second à l'aide d'une matrice de passage 3x3. En effet, il est possible de faire correspondre l'espace-temps vu par le premier et l'espace-temps vu par le second à l'aide d'une matrice 4x4, mais les temps ne se correspondent pas indépendamment de l'espace.

En conséquence, il est **impossible** de prendre certaines distances dans un repère inertiel et d'autres dans un autre pour utiliser des formules de trigonométrie Euclidienne. Il est possible d'utiliser la trigonométrie Euclidienne dans un repère inertiel **unique**. En physique classique, il est possible de prendre certaines distances dans un repère inertiel et d'autres dans un autre pour utiliser des formules de trigonométrie Euclidienne parce que ces deux repères ont le même axe des temps, et à la condition de se placer au même instant dans ces deux repères. Ceci est impossible en relativité restreinte, car les axes des temps ne sont pas les mêmes d'un repère inertiel à un autre. (GUY 2019) obtient un facteur de LORENTZ qui varie en fonction de la direction de la vitesse du second repère inertiel par rapport au premier, mais sa démonstration viole le principe de MINKOWSKI : elle est donc fausse.

3 Le Repère Inertiel Tangent (ou RIT)

Selon (POINCARE 1891) « *nous pourrions renoncer à la géométrie Euclidienne ou bien modifier les lois de l'optique et admettre que la lumière ne se propage pas rigoureusement en ligne droite* ». Ainsi, nous considérerons que l'espace est Euclidien, mais que le temps est imaginaire (CHAPPELL 2012), comme le signalait (WALTER 1999) « *Physicists developped a four-dimensional vector and tensor formalism on the basis of Minkowski's work, which we refer to as the space-time formalism. By this term we mean a four-dimensional calculus in which the temporal coordinate is imaginary and treated on an equal footing with the real spatial coordinates* ». Ce même auteur (WALTER 2009) signalait que « *Sommerfeld délaissa le calcul matriciel novateur -et étrange- de Minkowski en faveur d'une algèbre quadridimensionnelle proche du formalisme vectoriel ordinaire* ». C'est très exactement ce que nous allons faire, en effet nous avons opté pour une représentation d'une position dans l'espace-temps définie dans un repère inertiel (référentiel « Galiléen » en espace plat non vide, avec gravitation) R par un quadrivecteur $\vec{\boldsymbol{X}}$ défini par :

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} = (ict \quad \vec{x}^T) \\ \boldsymbol{d\vec{X}^T} = (icdt \quad d\vec{x}^T) = (ic \quad \vec{u}^T)dt = \vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}dt \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Où i est l'imaginaire pur tel que $i^2 = -1$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, où t est le temps et où $\vec{x}$ est un vecteur réel de dimension 3 dont les éléments sont les coordonnées spatiales. Dans tout ce qui suit, chaque repère inertiel a des axes orthogonaux entre eux deux à deux et les échelles sont toutes identiques. Ceci est vrai aussi pour l'axe des temps, qui est orthogonal à chaque axe spatial, et dont l'échelle est la même que celle des axes spatiaux si l'on considère que ct est assimilable à une longueur. Les vecteurs écrits en gras sont des quadrivecteurs, conformément au principe d'indissociabilité du temps et de l'espace.

Donc, si une information allant de $\vec{\boldsymbol{X}}$ à $\vec{\boldsymbol{X}} + d\vec{\boldsymbol{X}}$ met le temps dt pour parcourir cette distance à la vitesse c, alors $d\vec{\boldsymbol{X}}^T d\vec{\boldsymbol{X}} = 0$. Plus généralement nous pouvons définir un indicateur ds d'arrivée en $\vec{\boldsymbol{X}} + d\vec{\boldsymbol{X}}$ de l'information partie de $\vec{\boldsymbol{X}}$, appelé souvent intervalle entre $\vec{\boldsymbol{X}}$ et $\vec{\boldsymbol{X}} + d\vec{\boldsymbol{X}}$, voire pseudo-norme de $d\vec{\boldsymbol{X}}$:

$$ds^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}^T d\vec{\boldsymbol{X}} = -c^2dt^2 + d\vec{x}^T d\vec{x} \qquad (2)$$

Cet indicateur ds^2 est nul si l'information vient juste d'arriver. Il est positif si l'information n'est pas encore arrivée, et négatif si elle est déjà parvenue en $\vec{\boldsymbol{X}} + d\vec{\boldsymbol{X}}$ depuis un certain temps. Dans la définition de ds^2 le temps est précédé d'un signe moins, et les 3 coordonnées d'espace par un signe plus : la signature est $-+++$. C'est le signe moins de cette signature qui explique l'utilisation du nombre imaginaire pur défini par $i^2 = -1$. La valeur de l'indicateur ds est indépendante du repère inertiel utilisé. Cette propriété est fondamentale et sera très importante en section 5.

Nous appellerons point matériel un mobile de très petites dimensions, approximable à un point, mais ayant une masse finie non nulle et, éventuellement, une charge électrique. Soit un point matériel M se déplaçant dans un repère inertiel R selon une trajectoire donnée par $\vec{x} = \vec{x}_s(t)$. Ce repérage est tout à fait possible car il donne une position $\vec{\boldsymbol{X}} = (ict \quad \vec{x}_s^T(t))$ en fonction du paramètre de repérage t. Afin d'illustrer les notions de repère inertiel tangent et de repère entrainé, plaçons-nous dans un espace à 2 dimensions. La figure 1a montre la trajectoire de M dans R de centre O, et un repère centré sur M à l'instant t dans R. La figure 1b indique la position M' du point matériel à $t' \neq t$, et le repère inertiel tangent R_T, centré sur T à l'instant t' dans R. Ce dernier s'est déplacé de M à T à vitesse constante égale à la vitesse de M dans R à l'instant t. Ainsi, T se déplace sur la droite tangente à la trajectoire du point matériel en M, à vitesse constante. Le repère R_e dont le centre M' a suivi la trajectoire du point matériel est le repère entrainé. Ici les directions des axes restent parallèles à celles de R, mais ce n'est pas le cas en relativité. Il est clair que les vitesses du point matériel en M sont nulles dans R_T et R_e. Par contre, les accélérations, et donc les forces, ne sont pas les mêmes.

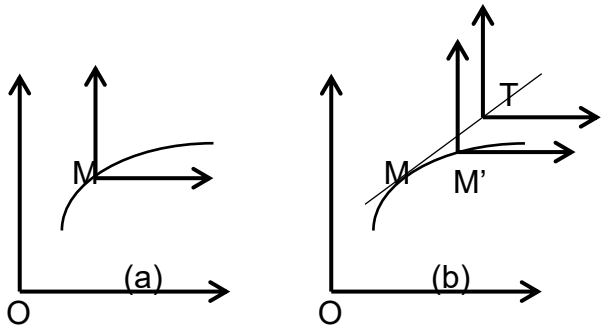

Figure 1 : Repères Entrainé et Inertiel Tangent

Les définitions des repères inertiel tangent et entrainé doivent être étendues à un espace-temps à 4 dimensions. Soit un point matériel se déplaçant dans R de $\vec{x}$ à $\vec{x} + d\vec{x}$, pendant dt. Le repère entrainé, R_e, est lié au point matériel, c'est-à-dire centré sur sa position. Dans R_e le point matériel est immobile car on a toujours $\vec{x}_e = 0$. Le temps écoulé correspondant dans R_e est $d\tau_T$. Les coordonnées du point dans R_e sont $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}} = (ic\tau_T \quad 0)$ où τ_T est le temps propre du point matériel, et $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}$ dans R_T. Si nous considérons un espace infiniment petit autour de $\vec{x}$ et un temps proche de t, dans ce petit espace-temps R_e peut être considéré comme un repère localement inertiel, et il est alors appelé repère inertiel tangent R_T (RIT), ou repère inertiel local (RIL) (De SOUZA et al. 2016). L'écoulement du temps $d\tau_T$ est localement le même dans R_T que dans R_e, ce qui permet d'écrire dans le repère inertiel tangent :

$$d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = (icd\tau_T \quad 0) \qquad (3)$$

Le temps propre τ_T est souvent présenté comme celui vécu par le point matériel (nous verrons ce qu'il en est section 5) alors que le temps t est celui vécu par un observateur situé en un point spatial fixe du repère inertiel R. Nous avons donc, pour l'indicateur ds^2, entre les repères R et R_T :

$$ds^2 = -c^2 d\tau_T^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^T d\vec{x} \qquad (4)$$

En effet, nous avons dit plus haut que la valeur de ds^2 est indépendante du repère inertiel utilisé pour définir la position $\vec{\boldsymbol{X}}$ du point matériel (invariant cinématique). La vitesse de déplacement du point matériel dans R est $\vec{u}$, définie par (1), ce qui donne avec (4) :

$$\frac{d\tau_T}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^T\vec{u}}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}} \qquad (5)$$

Ainsi $d\tau_T < dt$, ce qui signifie que le temps propre s'écoule moins vite que celui d'un observateur lié à R. Ce temps propre est aussi appelé temps d'univers.

4 Passage d'un repère inertiel R quelconque au RIT

Historiquement, Albert EINSTEIN et Henri POINCARE ont démontré les équations de passage d'un repère inertiel à un autre lorsqu'ils se déplaçaient l'un par rapport à l'autre le long d'un même axe spatial, mais le premier fut (VOIGT 1887). Ce type de transformation a pris le nom de « Lorentz boost », et est encore très utilisée. Nous nous placerons d'emblée dans le cas où la direction de déplacement d'un repère inertiel par rapport à l'autre est quelconque par rapport aux axes spatiaux utilisés. Nous avons choisi d'écrire les équations selon les notations de l'analyse vectorielle et matricielle, et non selon la forme compacte des notations tensorielles. Nous appliquons une représentation utilisant à la fois des nombres réels et des imaginaires purs, qui présente la particularité de faire disparaître la notion de signature en relativité restreinte, et de faire apparaître un tenseur métrique à déterminant positif en relativité générale (FONTEIX et al. 2020 a). Les tenseurs d'ordre deux que nous rencontrerons seront écrits sous forme de matrices 4x4, que nous qualifierons de semi-réelles, représentées par $\begin{pmatrix} \alpha & i\vec{a}^T \\ i\vec{b} & \bar{\bar{A}} \end{pmatrix}$, où la matrice 3x3 $\bar{\bar{A}}$ est formée de nombres réels, tout comme les vecteurs de dimension 3 $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Le scalaire α est un nombre réel. Au point de tangence, le quadrivecteur vitesse dans le repère inertiel R est $\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}}{dt} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}}$ et celui dans R_T : $\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}}{d\tau_T} = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}$. Le passage de R à R_T se fait par :

$$d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \bar{\bar{\boldsymbol{P}}}\bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}} \qquad (6)$$

Où $\bar{\bar{\boldsymbol{P}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{P}} \end{pmatrix}$, avec $\bar{\bar{P}}\bar{\bar{P}}^T = \bar{\bar{P}}^T\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{\delta}}$, la matrice unité de Kronecker 3x3. $\bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$ représente l'effet relativiste et $\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}$ un éventuel changement d'axes spatiaux. Les équations (2), (3), (4), (6) montrent que :

$$ds^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}^T d\vec{\boldsymbol{X}} = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = d\vec{\boldsymbol{X}}^T \bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{P}}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{P}}} \bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}} \qquad (7)$$

Ce qui implique que :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} = \bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} \bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} = \bar{\bar{\boldsymbol{\delta}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{\delta}} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Soit $\vec{u}$ la vitesse d'un mobile, sa quadrivitesse dans R est $\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}}{dt} = \frac{1}{dt}\begin{pmatrix} icdt \\ d\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}}$, et sa quadrivitesse dans R_T est $\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}}{d\tau_T} = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}$ où τ_T est le temps propre de ce mobile. Remarquons que $\vec{u}$ est variable le long de la trajectoire du mobile, mais nous considérons seulement sa vitesse en une position donnée $\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}}$ dans R. Donc, c'est aussi la vitesse constante $\vec{u} = \vec{u}^0$ de R_T dans R, et nous ne devons pas oublier que $\vec{u} = \vec{u}^0$ dans $\bar{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$ est une constante, comme toute la matrice

$\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$. La matrice de transition peut donc s'écrire $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & i\vec{\varepsilon}^{T} \\ i\vec{\beta} & \overline{\overline{\sigma}} \end{pmatrix}$, où α, $\vec{\beta}$, $\vec{\varepsilon}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ sont formés de nombres réels qui doivent être déterminés. Avec (5) et (6), si $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{\delta}}$, donc $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$, nous avons :

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}(\gamma\vec{\boldsymbol{u}}) \\ \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}}{\gamma} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Ces relations fournissent en $\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}}$:

$$\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^0}\begin{pmatrix} \alpha & i\vec{\beta}^T \\ i\vec{\varepsilon} & \overline{\overline{\sigma}}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ic\alpha}{\gamma^0} \\ \frac{-c\vec{\varepsilon}}{\gamma^0} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \gamma^0 \quad and \quad \vec{\varepsilon} = -\frac{\gamma^0\vec{u}^0}{c} \qquad (10)$$

La seconde équation de (9) conduit à, avec le résultat de (10) :

$$\begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma^0\begin{pmatrix} \gamma^0 & -i\frac{\gamma^0\vec{u}^{0T}}{c} \\ i\vec{\beta} & \overline{\overline{\sigma}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic\gamma^{02} - i\gamma^{02}\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{c} \\ -\gamma^0 c\vec{\beta} + \gamma^0\overline{\overline{\sigma}}\vec{u}^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{\gamma^{02}} = 1 - \frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{c^2} \;\; et \;\; \vec{\beta} = \frac{\overline{\overline{\sigma}}\vec{u}^0}{c} \qquad (11)$$

Avec l'équation (8) nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \gamma^0 & i\frac{\vec{u}^{0T}\overline{\overline{\sigma}}^T}{c} \\ -i\gamma^0\frac{\vec{u}^0}{c} & \overline{\overline{\sigma}}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^0 & -i\gamma^0\frac{\vec{u}^{0T}}{c} \\ i\frac{\overline{\overline{\sigma}}\vec{u}^0}{c} & \overline{\overline{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{\delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{02} - \frac{\vec{u}^{0T}\overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}}\vec{u}^0}{c^2} & -i\gamma^{02}\frac{\vec{u}^{0T}}{c} + i\frac{\vec{u}^{0T}\overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}}}{c} \\ -i\gamma^{02}\frac{\vec{u}^0}{c} + i\frac{\overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}}\vec{u}^0}{c} & -\gamma^{02}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} + \overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Les différents termes de (12) impliquent :

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\delta}} + \gamma^{02}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} \\ \overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}}\vec{u}^0 = \vec{u}^0 + \gamma^{02}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{c^2} = \vec{u}^0 + \gamma^{02}\vec{u}^0\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^{02}\vec{u}^0 \\ 1 = \gamma^{02} - \frac{\vec{u}^{0T}\gamma^{02}\vec{u}^0}{c^2} = \gamma^{02}\left(1 - \frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{c^2}\right) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Or nous constatons que :

$$\left.\begin{array}{c} \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2}\right)\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2}\right) = \overline{\overline{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} + \frac{\gamma^{04}}{(\gamma^0+1)^2}\frac{\vec{u}^0(\vec{u}^{0T}\vec{u}^0)\vec{u}^{0T}}{c^4} = \\ \overline{\overline{\delta}} + \frac{2\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} + \frac{\gamma^{04}\left(1-\frac{1}{\gamma^{02}}\right)}{(\gamma^0+1)^2}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} = \overline{\overline{\delta}} + \frac{2\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} + \frac{\gamma^{02}(\gamma^{02}-1)}{(\gamma^0+1)^2}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} = \\ \overline{\overline{\delta}} + \frac{\gamma^{02}(2+\gamma^0-1)}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} = \overline{\overline{\delta}} + \gamma^{02}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} = \overline{\overline{\sigma}}^T\overline{\overline{\sigma}} \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Ce qui nous permet de poser :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{U}}\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2}\right) \qquad (15)$$

Où $\overline{\overline{U}}\overline{\overline{U}}^T = \overline{\overline{U}}^T\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{\delta}}$, $\overline{\overline{U}}$ matrice réelle 3x3 orthonormée (orthogonale et normée), et avec la mise en relation avec l'équation (11) donnant $\vec{\beta}$:

$$\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2}\right)\vec{u}^0 = \vec{u}^0 + \frac{\gamma^{02}\left(1-\frac{1}{\gamma^{02}}\right)}{\gamma^0+1}\vec{u}^0 = (1 + \gamma^0 - 1)\vec{u}^0 = \gamma^0\vec{u}^0 \qquad (16)$$

Nous obtenons finalement, avec (16) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda_T}}} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & -i\gamma^0 \frac{\vec{u}^{0T}}{c} \\ i\overline{\overline{U}}\gamma^0 \frac{\vec{u}^0}{c} & \overline{\overline{U}}\left(\bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{U}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 & -i\gamma^0 \frac{\vec{u}^{0T}}{c} \\ i\gamma^0 \frac{\vec{u}^0}{c} & \bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Mais il s'agit là de la combinaison de deux changements de repère inertiel, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{U}} \end{pmatrix}$ correspond au changement de repère purement spatial $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{P}} \end{pmatrix}$ dans l'équation (6). Nous pouvons donc prendre $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{P}}$, parce que $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$ prend en compte le changement de repère spatial. Ainsi, si nous voulons prendre en compte seulement l'effet relativiste, nous posons $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$ ce qui donne :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda_T}}} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & -i\gamma^0 \frac{\vec{u}^{0T}}{c} \\ i\gamma^0 \frac{\vec{u}^0}{c} & \bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Il s'agit là de la forme générale de la matrice de transition d'un repère inertiel quelconque au repère inertiel tangent lié localement à un mobile, c'est-à-dire quelque soit l'orientation de la vitesse de ce mobile. Cette forme ne prend en compte que les effets relativistes et aucunement un changement de repère spatial, qui est pris en compte par la matrice orthonormée $\overline{\overline{P}}$ dans l'équation (6). L'équation de passage démontrée ici l'avait été précédemment par bien des auteurs, mais avec $\overline{\overline{P}} = \bar{\bar{\delta}}$ (THOMAS 1927) (FOCK 1964) (IVEZIC 2000) (COSTELLA et al. 2001) (OZIEWICZ 2006) (De ABREU et al. 2015) (BAIZID et al. 2015) (BEYERLE 2017) (FONTEIX et al. 2020 a).

Notons que les matrices 4x4 semi-réelles ont de nombreuses propriétés intéressantes. Nous n'en citerons ici qu'une : tout produit de matrices 4x4 semi-réelles est une matrice 4x4 semi-réelle. Comme par ailleurs tout produit de matrices orthonormées est une matrice orthonormée, il est clair que l'ensemble des matrices 4x4 orthonormées et semi-réelles forme un groupe, associé au produit de deux matrices 4x4. Les matrices $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda_T}}}$ ne sont qu'un cas particulier de cet ensemble (sous groupe).

5 Sur le paradoxe des jumeaux de LANGEVIN

Nous avons vu dans la section précédente comment s'effectuait le passage d'un repère inertiel quelconque R dans un autre pour une position $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{0}}$ localement fixe dans l'espace du second repère inertiel (appelé alors RIT, repère inertiel tangent R_T). Nous allons maintenant passer du repère inertiel tangent R_T au repère inertiel R, et déterminer la vitesse dans R_T d'une position fixe $\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{1}}$ dans l'espace de R. Nous avons vu précédemment les équations (6) (avec $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$), (8) et (18) qui nous permettent d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{X}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{-\boldsymbol{1}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & \frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^{0T} \\ -\frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^0 & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma^0 - 1)\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

De la première équation précédente nous déduisons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{\boldsymbol{X}}}{d\tau} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}}{dt_T}\frac{dt_T}{d\tau} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} \frac{d\vec{\boldsymbol{X}}}{d\tau} = \frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}}{dt_T}\frac{dt_T}{d\tau} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Où τ est le temps propre de R vu de R_T, et t_T le temps dans R_T. Comme $\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{1}}$ est un point fixe dans l'espace de R (mais pas un temps fixe), nous avons :

$$\frac{d\vec{X}}{d\tau} = \vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{0}} = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Alors que dans R_T nous avons :

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}}{dt_T} = \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{1}} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \left(\frac{d\vec{x}_T}{dt_T}\right)^1 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Le principe d'invariance de ds^2 quelque soit le repère inertiel utilisé donne :

$$\left.\begin{array}{c} ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt_T^2 + d\vec{x}_T^T d\vec{x}_T \\ \frac{d\tau}{dt_T} = \sqrt{1 - \frac{\vec{u}_T^{1T}\vec{u}_T^1}{c^2}} = \frac{1}{\gamma^1} \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Ainsi, à l'aide de (19), (20), (21), (22) et (23), nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \gamma^0 & -i\gamma^0 \frac{\vec{u}^{0T}}{c} \\ i\gamma^0 \frac{\vec{u}^0}{c} & \bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma^{02}}{\gamma^0+1}\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T^1 \end{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^0 = \gamma^1 \\ -\gamma^0 \vec{u}^0 = \gamma^1 \vec{u}_T^1 \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Ainsi la vitesse de R dans R_T est $\vec{u}_T^1 = -\vec{u}^0$.

En section 4 le mobile parcourait l'intervalle $d\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{u}}dt = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}^0 \end{pmatrix} dt$ dans R, dont l'image dans R_T est $d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}} d\tau_T = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} d\tau_T$. Dans la présente section, nous venons de voir que l'image de la position $\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{1}}$, fixe dans l'espace de R, se déplace dans R_T de $d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{1}} = \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{1}} dt_T = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T^1 \end{pmatrix} dt_T = \begin{pmatrix} ic \\ -\vec{u}^0 \end{pmatrix} dt_T$ auquel correspond dans R l'intervalle $d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{1}} = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} d\tau$. Dans le premier cas nous avions l'équation (4) :

$$\left.\begin{array}{c} ds^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}} = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = -c^2 dt^2 + \vec{u}^{0T}\vec{u}^0 dt^2 = -c^2 d\tau_T^2 = -c^2 \frac{dt^2}{\gamma^{02}} \\ \frac{1}{\gamma^0} = \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{c^2}} = \sqrt{-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}} \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Qui correspond à l'invariance de la pseudo norme dans les repères R et R_T. Dans le deuxième cas cette invariance se traduit par :

$$\left.\begin{array}{c} ds_1^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{1T}} d\vec{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{1}} = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{1T}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{1}} = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt_T^2 + \vec{u}^{0T}\vec{u}^0 dt_T^2 = -c^2 \frac{dt_T^2}{\gamma^{02}} \\ \frac{1}{\gamma^0} = \frac{d\tau}{dt_T} = \frac{d\tau_T}{dt} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Les pseudo normes ds et ds_1 n'ont aucun rapport car les intervalles correspondants sont très différents. De ce fait, il n'est pas possible de trouver une relation entre dt et dt_T, tout comme entre $d\tau$ et $d\tau_T$. La seule chose que nous pouvons remarquer est que dans le repère inertiel R nous trouvons deux écoulements du temps très différents dt et $d\tau$, et qu'il en est de même pour le repère inertiel tangent R_T avec dt_T et $d\tau_T$. Il semble que ce fait ait permis à certains scientifiques de mettre en doute, à une certaine époque, la théorie de la relativité. Nous allons éclaircir ce point en revenant sur le paradoxe des jumeaux de LANGEVIN.

Soit deux jumeaux que nous nommerons A et B. A se trouve dans une position fixe dans l'espace du repère inertiel R (mais le temps s'écoule). B se trouve dans le mobile cité en section 4, c'est-à-dire dans une position fixe (localement, au voisinage proche de $\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}}$ dans R) dans l'espace du repère inertiel tangent R_T. En section 4, A regarde B, et en section 5, B regarde A. Quand A observe B, le temps s'écoule selon dt pour lui, mais il lui semble que l'écoulement du temps de B est $d\tau_T < dt$ ($\gamma^0 > 1\ si\ \vec{u}^{0T}\vec{u}^0 > 0$). C'est à partir de cela qu'a été forgé le paradoxe des jumeaux de LANGEVIN. Pourtant, quand B observe A, le temps s'écoule selon dt_T pour lui, et il lui semble que l'écoulement du temps de A est $d\tau < dt_T$. L'interprétation de ce paradoxe des jumeaux est complexe, et conduit à une difficulté majeure : l'écoulement du temps dt du jumeau A est-il très différent de celui du jumeau B, c'est-à-dire dt_T ? Nous ne sommes pas en mesure de répondre à cette question, mais nous pouvons dire que l'écoulement du temps vécu par B n'est pas $d\tau_T$, comme il n'est pas $d\tau$ pour A. En effet, si $dt_T = d\tau_T$ alors $dt = d\tau$ par réciprocité, donc compte tenu de (26) $dt_T = d\tau_T = \frac{dt}{\gamma^0} = \frac{d\tau}{\gamma^0} = \frac{dt_T}{\gamma^{02}}$ dont nous déduisons $\gamma^{02} = 1$, c'est-à-dire $\vec{u}^{0T}\vec{u}^0 = 0$. Ainsi, toutes les vitesses devraient être nulles et la relativité restreinte n'existerait pas. Il faut donc approfondir la réflexion.

La mesure du temps (BIZE 2019) est importante : depuis 1967, la seconde est définie à l'aide de l'état fondamental de l'atome de césium 133, depuis l'horloge optique mesure le temps avec une précision cent fois supérieure. En 1971, HAFELE et KEATING effectuent deux tours du monde en avion sur des lignes commerciales, un d'ouest en est et l'autre en sens inverse, et comparent le temps avec une horloge atomique restée à l'Observatoire Naval des Etats Unis : le voyage vers l'est indique un retard de 40 nanosecondes et celui vers l'ouest une avance de 275 nanosecondes (HAFELE 1972) (HAFELE et al. 1972 a) (HAFELE et al. 1972 b). (STRATONOVITCH 2014) souligne la difficulté que pose le temps en relativité restreinte. Selon lui (STRATONOVITCH 2015), chaque point de l'espace-temps a une histoire qui lui est propre. (PIERSEAUX 2007) conclue : « *Seulement récemment la conception relativiste de l'espace-temps a pu être mise en place de façon pratique avec le GPS (Global Positioning System). L'effet SAGNAC, forme concrète mesurable du terme elliptique de POINCARE y joue un rôle important* ». Pour éviter de mettre en opposition la durée de temps dans R et du temps propre dans R_T, (OZIEWICZ 2006), (IVEZIC 2000), (MOCANU 1993) et (GUERRA et al. 2006) considèrent, comme POINCARE, que l'on définit spontanément un repère inertiel préféré, qui sert de référence. (De ABREU et al. 2008) parlent de : « *relativity of time dilation* ». (GUY 2015) s'appuie sur (BERGSON 1922) pour dire que la différence entre les deux temps (dans R et R_T) est équivalente à une erreur de parallaxe. (GUERRA et al. 2005) estiment que le temps est semblable dans chaque repère, (DANCI 2017) va plus loin en disant que l'écoulement du temps est identique pour chacun.

En conclusion, nous considérons que, pour un observateur A fixe, le ralentissement du temps vécu par B est une illusion, un effet virtuel pour lequel certains auteurs (GUY 2015) parlent « *d'erreur de parallaxe* ». Le paradoxe des jumeaux de LANGEVIN, tel qu'il est usuellement décrit n'a donc pas lieu d'être car nous ne savons pas si le vieillissement de B est différent de celui de A. Tout se passe comme si un observateur lié à un repère inertiel percevait correctement le temps dans son entourage, mais beaucoup moins bien celui qui règne dans d'autres repères inertiels, du fait de l'application des équations de LORENTZ. Dans le cas où $dt_T = dt$, les horloges dans les deux repères inertiels sont qualifiées de Lorentziennes. Finalement, la dénomination « temps propre », associée à un mobile, semble plutôt « impropre ».

La matrice $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$ étant orthonormée (orthogonale et normée) son déterminant est égal à 1. De ce fait, tout hyper-volume (volume multiplié par un intervalle de temps) est identique dans tous les repères inertiels ($\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$ est une matrice 4x4).

$$dtdV = d\tau_T dW_T \quad et \quad dt_T dV_T = d\tau dW \qquad (27)$$

La deuxième équation (26) nous fournit, où dV et dW sont des éléments de volumes dans R, et dV_T et dW_T dans R_T (dV et dW_T se correspondent et, dV_T et dW se correspondent) :

$$\frac{d\tau_T}{dt} = \frac{1}{\gamma^0} = \frac{dV}{dW_T} \quad et \quad \frac{d\tau}{dt_T} = \frac{1}{\gamma^0} = \frac{dV_T}{dW} \qquad (28)$$

L'équation (28) traduit une réduction du volume dans le repère mobile par rapport à un autre. Comme pour l'écoulement des temps, le phénomène est réciproque, ce qui correspond à une perception « vue de loin ». (POINCARE 1909) dit : « *On ne s'apercevra de rien : le mètre que l'on pourrait employer deviendra plus court, comme la longueur qu'on mesure* ». Ainsi :

- dt est l'écoulement du temps vécu par R, et dt_T est l'écoulement du temps vécu par R_T,
- $d\tau_T$ est l'écoulement du temps dans R_T vu depuis R, et $d\tau$ est l'écoulement du temps dans R vu depuis R_T.

Nous ne parlons ici que d'écoulement du temps (sous forme de différentielle) et jamais de temps (d'heure) pour rester indépendant de l'origine des temps. L'influence de l'origine des temps est un autre problème que nous n'aborderons pas ici. Nous avons vu plus haut que l'effet de ralentissement de l'écoulement du temps s'accompagnait d'une réduction des volumes dans un repère inertiel, vu d'un autre repère inertiel. Afin d'éviter au maximum des erreurs, il convient de rester très prudent dans les raisonnements, et il faut penser à se référer dans chacun des repères inertiels à une position fixe dans l'espace (le temps continuant à s'écouler). S'il existe un mobile se déplaçant dans ces repères inertiels, tout se complique et il faut envisager trois repères inertiels : les deux premier et le repère inertiel tangent à la trajectoire du mobile. Nous avons alors trois positions fixes dans l'espace de ces repères, une dans chacun d'entre eux.

6 Composition des vitesses

Plaçons nous dans les conditions de la section 4, mais il existe maintenant un deuxième mobile dans R dont la position est $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}} = (ict' \quad \vec{x}'^T)$, et la quadri-vitesse $\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{T}}}{dt'} = \left(ic \quad \frac{d\vec{x}'^T}{dt'}\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}}'^{\boldsymbol{T}} = (ic \quad \vec{u}'^T)$. Nous devons nous poser la question : quelle est sa vitesse dans le repère inertiel tangent R_T. Les équations (6) (avec $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$) et (18) nous permettent d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{X}_T}{d\tau_T} = \vec{u}_T = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T \end{pmatrix} = \overline{\overline{\Lambda}}_T \frac{d\vec{X}}{dt'}\frac{dt'}{d\tau_T} = \overline{\overline{\Lambda}}_T \vec{u}'\frac{dt'}{d\tau_T} = \overline{\overline{\Lambda}}_T \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}' \end{pmatrix}\frac{dt'}{d\tau_T} \\ \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & -\frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^{0T} \\ \frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^0 & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma^0 - 1)\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}' \end{pmatrix}\frac{dt'}{d\tau_T} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic\gamma^0\left(1 - \frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right) \\ -\gamma^0\vec{u}^0 + \vec{u}' + \vec{u}^0(\gamma^0 - 1)\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \end{pmatrix}\frac{dt'}{d\tau_T} \qquad (30)$$

A l'aide de la première ligne de (30) nous obtenons :

$$\frac{dt'}{d\tau_T} = \frac{1}{\gamma^0\left(1 - \frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)} \qquad (31)$$

Afin de déterminer $\vec{u}_T$ à l'aide de la deuxième équation de (30), nous calculerons :

$$\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}^{0}}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^{02}} = \frac{(\gamma^0-1)(\gamma^0+1)}{\gamma^{02}} \qquad (32)$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{u}_T = \frac{-\gamma^0\vec{u}^0+\vec{u}'+\vec{u}^0(\gamma^0-1)\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}}{\gamma^0\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)} = -\frac{\vec{u}^0}{1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}} + \frac{\vec{u}'(\gamma^0-\gamma^0+1)}{\gamma^0\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)} + \frac{\vec{u}^0(\gamma^0-1)\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}}{\gamma^0\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)} \qquad (33)$$

Ou encore :

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{u}'-\vec{u}^0}{1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}} + \frac{\vec{u}^0(\gamma^0-1)\vec{u}^{0T}\vec{u}'-\vec{u}'(\gamma^0-1)\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{\gamma^0\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \qquad (34)$$

C'est-à-dire finalement, compte tenu de la relation (32) :

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{u}'-\vec{u}^0}{1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}} + \frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}\vec{u}'-\vec{u}'\vec{u}^{0T}\vec{u}^0}{\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)c^2}\frac{\gamma^0}{\gamma^0+1} \qquad (35)$$

Or nous savons que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \vec{u}(\vec{u}^T\vec{w}) - (\vec{u}^T\vec{u})\vec{w}$, où $\wedge$ est le produit vectoriel de deux vecteurs de dimension 3, ce qui modifie (35) en :

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{u}'-\vec{u}^0}{1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}} + \frac{\vec{u}^0\wedge(\vec{u}^0\wedge\vec{u}')}{\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)c^2}\frac{\gamma^0}{\gamma^0+1} \qquad (36)$$

Il s'agit là de la formule de composition générale des vitesses présentée par (GUY 2010) et qu'il explique être tirée de (TONNELAT 1959). La seule différence est que la vitesse de R dans R_T est $-\vec{u}^0$, conformément à ce que nous avons vu en section 5. Il s'agit donc de la composition des vitesses $\vec{u}'$ et $-\vec{u}^0$, quelle que soit leur orientation (OZIEWICZ 2006) (AHMAD et al. 2014). Notons que (GUY 2010) propose, comme d'autres auteurs, un temps tridimensionnel, ce que nous ne suivrons pas.

Nous pouvons définir 3 facteurs de Lorentz, le premier étant déjà connu :

$$\left.\frac{1}{\gamma^{02}} = -\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}^{0}}{c^2}, \quad \frac{1}{\gamma_T^2} = -\frac{\vec{u}_T^T\vec{u}_T}{c^2} \quad et \quad \frac{1}{\gamma'^2} = -\frac{\vec{u}'^T\vec{u}'}{c^2}\right\} \qquad (37)$$

Il nous reste à vérifier l'équation (31), en utilisant l'invariance des pseudo normes :

$$\left.\begin{gathered} ds^2 = d\vec{X}_T^T d\vec{X}_T = \vec{u}_T^T d\tau_T \vec{u}_T d\tau_T = d\vec{X}^T d\vec{X} = \vec{u}'^T dt' \vec{u}' dt' \\ ds^2 = -c^2\frac{d\tau_T^2}{\gamma_T^2} = -c^2\frac{dt'^2}{\gamma'^2} \end{gathered}\right\} \qquad (38)$$

Les équations (31) et (38) donnent un résultat que nous devons vérifier :

$$\left.\begin{gathered} \frac{dt'^2}{d\tau_T^2} = \frac{1}{\gamma^{02}\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)^2} = \frac{\gamma'^2}{\gamma_T^2} \\ \frac{1}{\gamma_T^2} = \frac{1}{\gamma^{02}\gamma'^2\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)^2} = -\frac{\vec{u}_T^T\vec{u}_T}{c^2} \end{gathered}\right\} \qquad (39)$$

Pour effectuer cette vérification, il suffit d'utiliser la première ligne de l'équation (29) :

$$\frac{1}{\gamma_T^2} = -\frac{\vec{u}'^T\bar{\bar{\Lambda}}_T^T\bar{\bar{\Lambda}}_T\vec{u}'\left(\frac{dt'}{d\tau_T}\right)^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma'^2}\frac{dt'^2}{d\tau_T^2} \qquad (40)$$

Compte tenu de la relation (8) et de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$. Bien entendu, il est possible d'obtenir le même résultat à partir de l'équation (35) et de $\frac{1}{\gamma_T^2} = 1 - \frac{\vec{u}_T^T\vec{u}_T}{c^2}$, mais de façon bien plus compliquée.

Signalons, en prévision de la prochaine section, que :

$$\vec{u}_T = \begin{pmatrix} \frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^0 & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma^0 - 1)\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}' \end{pmatrix}\frac{dt'}{d\tau_T} = (-\vec{u}^0)\oplus\vec{u}' \qquad (41)$$

Où $\oplus$ indique la composition des vitesses. Il s'agit du produit des trois dernières lignes de $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$ et de $\vec{\boldsymbol{u}}'$ multipliées par $\frac{1}{\gamma^0\left(1-\frac{\vec{u}^{0T}\vec{u}'}{c^2}\right)}$. L'opérateur $\oplus$ n'est pas commutatif.

7 Passage d'un repère inertiel quelconque, R_1, à un autre, R_2

Soit un repère inertiel quelconque R_1, un autre tout aussi quelconque R_2, et un mobile se déplaçant dans R_1 à la vitesse $\vec{u}$. Ce même mobile se déplace dans R_2 à la vitesse $\vec{v}$. Soit une position particulière du mobile dans R_1, à partir de cette position, nous définissons le repère inertiel tangent R_T se déplaçant dans R_1 à la vitesse $\vec{u}$. A l'origine spatiale de R_T (là où se trouve le mobile qui est dans la position particulière dans R_1) correspond une position particulière dans R_2, dans laquelle le mobile se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans R_2 (qui est la vitesse de R_T dans R_2). En effet, selon ce scénario, le repère inertiel tangent R_T est unique. Ainsi, à une position donnée du mobile dans R_1 correspond une position donnée dans R_2.

Ces explications nous permettent de simplifier la notation en évitant le 0 en puissance (comme vu en section 4) sur les vitesses $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (qui correspondent au même repère inertiel tangent R_T). Ces deux vitesses nous fournissent les deux matrices de transition de R_1 et R_2 à R_T suivant l'équation (18) de la section 4. Notons que, comme à la fin de la section 4, nous ne prenons en compte que les effets relativistes et aucun changement de repère spatial défini par $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$ ($\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$ dans les deux cas). Nous pouvons donc écrire dans les positions particulières définies plus haut :

$$d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}} \qquad (42)$$

C'est-à-dire aussi :

$$d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{12}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} \qquad (43)$$

Nous devons remarquer que $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}$ sont des matrices 4x4 semi-réelles et orthonormées, ce qui impose que $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{12}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}$ soit une matrice 4x4 semi-réelle, orthogonale et normée (faisant donc partie du groupe non commutatif défini en section 4, le groupe de LORENTZ).

Comme les positions dans les trois repères se correspondent, nous avons :

$$ds^2 = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{T}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}} = d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} \qquad (44)$$

Les vitesses indiquées plus haut nous conduisent à écrire :

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}}}{dt_1} = \vec{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} \quad et \quad \frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}}}{dt_2} = \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad et \quad \frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}}{d\tau} = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (45)$$

Compte tenu de l'équation (5), nous obtenons, à partir de (44) et (45) :

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dt_1}{\gamma_u} = \frac{dt_2}{\gamma_v} = d\tau \\ \frac{1}{\gamma_u^2} = -\frac{\vec{u}^T\vec{u}}{c^2} \quad et \quad \frac{1}{\gamma_v^2} = -\frac{\vec{v}^T\vec{v}}{c^2} \end{array}\right\} \qquad (46)$$

La matrice de passage de R_1 à R_2 est donnée par :

$$\bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{12}} = \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{T}}\bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \gamma_v & \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}^T \\ -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_u & -\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u}^T \\ \frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \qquad (47)$$

Compte tenu de l'équation (41), nous pouvons écrire :

$$\bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{12}} = \begin{pmatrix} \gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) & \frac{i}{c}\left((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\right)^T\gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) \\ \frac{i}{c}\left((-\vec{v}) \oplus \vec{u}\right)\gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) & \bar{\bar{X}}_{vu} \end{pmatrix} \qquad (48)$$

Avec :

$$\bar{\bar{X}}_{vu} = -\frac{\gamma_u\gamma_v}{c^2}\vec{v}\vec{u}^T + \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} + (\gamma_u - 1)(\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \qquad (49)$$

C'est-à-dire, à l'aide de l'équation (32) ($\frac{\gamma_u - 1}{\vec{u}^T\vec{u}} = \frac{\gamma_u^2}{(\gamma_u+1)c^2}$) :

$$\bar{\bar{X}}_{vu} = \bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma_u^2\vec{u}\vec{u}^T}{(\gamma_u+1)c^2} + \frac{\gamma_v^2\vec{v}\vec{v}^T}{(\gamma_v+1)c^2} - \frac{\gamma_u\gamma_v\vec{v}\vec{u}^T}{c^2}\left(1 - \frac{\gamma_u\gamma_v\vec{v}^T\vec{u}}{(\gamma_u+1)(\gamma_v+1)c^2}\right) \qquad (50)$$

Les équations (48) et (50) représentent la transformation de LORENTZ entre deux repères inertiels quelconques, c'est-à-dire se déplaçant dans des directions quelconques l'un part rapport à l'autre. Ce résultat a été obtenu par l'intermédiaire d'un repère inertiel tangent, localement, à la trajectoire d'un mobile. Là encore, la direction du mouvement du mobile est quelconque par rapport aux repères inertiels R_1 et R_2. Il est donc intéressant de déterminer la vitesse de déplacement de l'un par rapport à l'autre. Pour cela nous utiliserons la méthode d'une position fixe dans l'espace de l'un.

Les équations (43) et (45) nous permettent d'écrire :

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{2}}'}{dt_2} = \vec{\boldsymbol{v}}' = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{v}' \end{pmatrix} = \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{12}}\frac{d\vec{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{1}}'}{dt_1}\frac{dt_1}{dt_2} = \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{12}}\vec{\boldsymbol{u}}'\frac{dt_1}{dt_2} = \bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{12}}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}' \end{pmatrix}\frac{\gamma_u'}{\gamma_v'} \qquad (51)$$

Si la position $\vec{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{1}}'$ est fixe dans l'espace de R_1, alors $\vec{u}' = 0$ et $\gamma_u' = 1$. La vitesse $\vec{v}'$ est celle du repère R_2 dans R_1. Elle est obtenue à l'aide de (51) et de (48) car $\bar{\bar{\mathbf{\Lambda}}}_{\mathbf{12}}$ est une matrice constante :

$$\begin{pmatrix} ic \\ \vec{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) & \frac{i}{c}\left((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\right)^T\gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) \\ \frac{i}{c}\left((-\vec{v}) \oplus \vec{u}\right)\gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) & \bar{\bar{X}}_{vu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\gamma_v'} \qquad (52)$$

Ce qui donne :

$$\left.\begin{array}{c} \gamma_v' = \gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) \\ \vec{v}' = -\frac{\left((-\vec{v}) \oplus \vec{u}\right)\gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}{\gamma_v'} = -\left((-\vec{v}) \oplus \vec{u}\right) \end{array}\right\} \qquad (53)$$

Il nous faut vérifier que l'on ait bien :

$$\frac{1}{\gamma_v'^2} = 1 - \frac{\vec{v}'^T\vec{v}'}{c^2} = \frac{1}{\gamma_v^2\gamma_u^2\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)^2} = -\frac{\vec{v}'^T\vec{v}'}{c^2} \qquad (54)$$

En fait il s'agit de la même démonstration que pour l'équation (40), associée à (31). Pour l'utiliser il faut définir les correspondances : dans l'équation (41) $\vec{u}_T$ correspond à $\vec{v}'$ de (53), $\vec{u}^0$ correspond à $\vec{v}$, et $\vec{u}'$ correspond à $\vec{u}$. Le signe moins devant la combinaison des vitesses dans (54) n'a pas d'importance car nous cherchons $\vec{v}'^T\vec{v}'$ pour déterminer $\gamma_v'^2$. De plus, dans (40), γ_T^2 correspond à $\gamma_v'^2$ dans (54), γ'^2 correspond à γ_u^2, et γ^0 dans (31) correspond à γ_v dans (53). Ainsi le remplacement dans (31) et (40) des termes correspondant dans (53) nous fournit l'équation (54) qu'il fallait vérifier.

La vitesse du repère inertiel R_2 dans le repère inertiel R_1 est donc $-\left((-\vec{v})\oplus\vec{u}\right)$. Il nous reste à déterminer la vitesse de R_1 dans R_2. Pour cela, nous reprenons l'équation (51) dans laquelle la position $\vec{X}_2'$ est fixe dans l'espace de R_1, alors $\vec{v}' = 0$ et $\gamma_v' = 1$. La vitesse $\vec{u}'$ est celle du repère R_1 dans R_2. Cependant, nous devons réécrire l'équation (51) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}' \end{pmatrix} = \bar{\bar{\Lambda}}_{12}^{-1}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{v}' \end{pmatrix}\frac{\gamma_v'}{\gamma_u'} = \bar{\bar{\Lambda}}_{12}^{T}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{v}' \end{pmatrix}\frac{\gamma_v'}{\gamma_u'} = \bar{\bar{\Lambda}}_{21}\begin{pmatrix} ic \\ \vec{v}' \end{pmatrix}\frac{\gamma_v'}{\gamma_u'} \qquad (55)$$

La forme détaillée de (55) est :

$$\begin{pmatrix} ic \\ \vec{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) & \frac{i}{c}\left((-\vec{v})\oplus\vec{u}\right)^T\gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) \\ \frac{i}{c}\gamma_u\gamma_v\left((-\vec{u})\oplus\vec{v}\right)\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) & \bar{\bar{X}}_{vu}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\gamma_u'} \qquad (56)$$

Ce qui donne $\gamma_u' = \gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)$ et :

$$\vec{u}' = -\left((-\vec{u})\oplus\vec{v}\right) \qquad (57)$$

La vérification de l'expression $\gamma_u' = \gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)$ n'est pas nécessaire car la démonstration est la même que celle vue précédemment. Ainsi la vitesse du repère inertiel R_1 dans le repère inertiel R_2 est donc $-\left((-\vec{u})\oplus\vec{v}\right)$ alors que celle de R_2 dans R_1 est $-\left((-\vec{v})\oplus\vec{u}\right)$. Rappelons que l'opérateur de composition des vitesses $\oplus$ n'est pas commutatif. La propriété de réciprocité des vitesses vue en section 5 ne semble pas valable dans le cas général. Voyons ce qu'il en est réellement.

8 Rotation de THOMAS-WIGNER

Le fait que la transformation de LORENTZ générale, donnée équation (48), soit d'une forme différente de celle obtenue en section 4 a interpellé bien des scientifiques spécialistes. Certains pensaient qu'il aurait été logique qu'elle soit du type de celle donnée équation (18) avec une vitesse correspondant à la composition des vitesses apparaissant dans $\bar{\bar{\Lambda}}_1$ et $\bar{\bar{\Lambda}}_2$, équation (47). Rappelons que la composition des vitesses est donnée par, compte tenu de la fin de la section 6 :

$$\left.\begin{aligned} \vec{w} = (-\vec{v})\oplus\vec{u} &= \left(-\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v-1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right)\begin{pmatrix}\gamma_u \\ \frac{i\gamma_u}{c}\vec{u}\end{pmatrix}\frac{c}{i\gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)} \\ \gamma_w &= \gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{w}^T\vec{w}}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

A partir de cette vitesse $\vec{w}$ il est possible de construire une transformation de LORENTZ du type (18) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} \gamma_w & -\frac{i\gamma_w}{c}\vec{w}^T \\ \frac{i\gamma_w}{c}\vec{w} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_w - 1)\frac{\vec{w}\vec{w}^T}{\vec{w}^T\vec{w}} \end{pmatrix} \qquad (59)$$

Llewellyn Hilleth THOMAS et Eugene Paul WIGNER (WIGNER 1939) (UNGAR 1989) (MOCANU 1993) (COSTELLA et al. 2001) (RHODES et al. 2004) (O'DONNELL et al. 2011) (SILAGADZE 2012) (BAIZID et al. 2015) (BEYERLE 2017) (MALHOTRA et al. 2020) ont montré qu'il existait une matrice de transformation $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ telle que :

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{12}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}} \end{array}\right\} \qquad (60)$$

Comme les matrices $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}}$ sont semi-réelles orthogonales et normées 4x4, $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ l'est aussi. Grâce à la deuxième ligne de (60) nous pouvons calculer cette matrice de transformation $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \begin{pmatrix} \gamma_u & \frac{i\gamma_u}{c}\vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}^T \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_w & -\frac{i\gamma_w}{c}\vec{w}^T \\ \frac{i\gamma_w}{c}\vec{w} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_w - 1)\frac{\vec{w}\vec{w}^T}{\vec{w}^T\vec{w}} \end{pmatrix} \qquad (61)$$

Le produit des deux premières matrices s'écrit, compte tenu de la section 7 :

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{pmatrix} \gamma_w & \frac{i\gamma_w}{c}(\vec{w})^{\boldsymbol{T}} \\ \frac{i\gamma_w}{c}\big((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\big) & \bar{\bar{X}}_{uv} \end{pmatrix} \\ \bar{\bar{X}}_{uv} = \bar{\bar{X}}_{vu}^T = \Big(-\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\Big)\begin{pmatrix} -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}^T \\ \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \end{pmatrix} \\ \frac{i\gamma_w}{c}(-\vec{u}) \oplus \vec{v} = \Big(-\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\Big)\begin{pmatrix} \gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \qquad (62)$$

Ainsi nous obtenons :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \begin{pmatrix} \gamma_w & \frac{i\gamma_w}{c}(\vec{w})^{\boldsymbol{T}} \\ \frac{i\gamma_w}{c}\big((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\big) & \bar{\bar{X}}_{uv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_w & -\frac{i\gamma_w}{c}\vec{w}^T \\ \frac{i\gamma_w}{c}\vec{w} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_w - 1)\frac{\vec{w}\vec{w}^T}{\vec{w}^T\vec{w}} \end{pmatrix} \qquad (63)$$

C'est-à-dire plus précisément :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \begin{pmatrix} \gamma_w^2\left(1 - \frac{\vec{w}^T\vec{w}}{c^2}\right) & \frac{i\gamma_w}{c}\left(-\gamma_w\vec{w}^T + \vec{w}^T + (\gamma_w - 1)\frac{\vec{w}^T\vec{w}\vec{w}^T}{\vec{w}^T\vec{w}}\right) \\ \frac{i\gamma_w^2}{c}\big((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\big) + \frac{i\gamma_w}{c}\bar{\bar{X}}_{uv}\vec{w} & \frac{\gamma_w^2}{c^2}\big((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\big)\vec{w}^T + \bar{\bar{X}}_{uv} + (\gamma_w - 1)\bar{\bar{X}}_{uv}\frac{\vec{w}\vec{w}^T}{\vec{w}^T\vec{w}} \end{pmatrix} \qquad (64)$$

Le vecteur imaginaire pur supérieur droit est nul, nous devons calculer le vecteur inférieur gauche :

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \begin{pmatrix} \gamma_w^2\left(1 - \frac{\vec{w}^T\vec{w}}{c^2}\right) & 0 \\ \frac{i\gamma_w}{c}\vec{A}_{uv} & \bar{\bar{B}}_{uv} \end{pmatrix} \\ \vec{A}_{uv} = \gamma_w\big((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\big) + \bar{\bar{X}}_{uv}\vec{w} \end{array}\right\} \qquad (64)$$

En utilisant les équations (58) et (62) nous pouvons présenter $\vec{A}_{uv}$ sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}_{uv} &= \frac{c}{i}\left(-\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\right)\begin{pmatrix}\gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \\ \left(-\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\right)&\begin{pmatrix} -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}^T \\ \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\end{pmatrix}\left(-\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right)\begin{pmatrix}\gamma_u \\ \frac{i\gamma_u}{c}\vec{u}\end{pmatrix}\frac{c}{i\gamma_u\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Que nous réécrirons :

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}_{uv} &= \frac{c}{i}\left(-\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\right)\vec{a}_{uv} \\ \vec{a}_{uv} &= \begin{pmatrix}\gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix} -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}^T \\ \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\end{pmatrix}\left(-\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right)\begin{pmatrix}1 \\ \frac{i}{c}\vec{u}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Nous calculerons, dans un premier temps, le vecteur $\vec{a}_{uv}$:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_{uv} &= \begin{pmatrix}\gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix} -\frac{\gamma_v^2\vec{v}^T\vec{v}}{c^2} & -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}^T - \frac{i\gamma_v}{c}(\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}^T\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \\ -\frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} - \frac{i\gamma_v}{c}(\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T\vec{v}}{\vec{v}^T\vec{v}} & \left(\bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \frac{i}{c}\vec{u}\end{pmatrix} \\ \vec{a}_{uv} &= \begin{pmatrix}\gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix} -(\gamma_v^2 - 1) & -\frac{i\gamma_v^2\vec{v}^T}{c} \\ -\frac{i\gamma_v^2\vec{v}}{c} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_v^2 - 1)\frac{\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \frac{i}{c}\vec{u}\end{pmatrix} \\ \vec{a}_{uv} &= \begin{pmatrix}\gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix} 1-\gamma_v^2 & -\frac{i\gamma_v^2\vec{v}^T}{c} \\ -\frac{i\gamma_v^2\vec{v}}{c} & \bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma_v^2\vec{v}\vec{v}^T}{c^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \frac{i}{c}\vec{u}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_{uv} &= \begin{pmatrix}\gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix} 1-\gamma_v^2\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right) \\ -\frac{i\gamma_v^2\vec{v}}{c} + \frac{i}{c}\vec{u} + \frac{i\gamma_v^2\vec{v}}{c}\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\end{pmatrix} \\ \vec{a}_{uv} &= \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix}1 \\ \frac{i}{c}\vec{u}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma_v - \gamma_v \\ \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v} - \frac{i\gamma_v}{c}\vec{v}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Car $\frac{\vec{w}^T\vec{w}}{c^2} = \frac{(\gamma_w+1)(\gamma_w-1)}{\gamma_w^2}$, finalement :

$$\vec{A}_{uv} = \frac{1}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)}\left(-\frac{i\gamma_u}{c}\vec{u} \quad \bar{\bar{\delta}} + (\gamma_u - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\right)\begin{pmatrix}\frac{c}{i} \\ \vec{u}\end{pmatrix} = \frac{-\gamma_u\vec{u}+\vec{u}+(\gamma_u-1)\vec{u}}{\gamma_v\left(1-\frac{\vec{v}^T\vec{u}}{c^2}\right)} = 0 \quad (69)$$

La matrice $\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ est donc du type :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \bar{\bar{B}}_{uv}\end{pmatrix} \quad (70)$$

Avec $\vec{A}_{uv} = 0 \Longrightarrow \gamma_w\left((-\vec{u}) \oplus \vec{v}\right) = -\bar{\bar{X}}_{uv}\vec{w}$ compte tenu de l'équation (64), nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{B}}_{uv} &= -\frac{\gamma_w}{c^2}\bar{\bar{X}}_{uv}\vec{w}\vec{w}^T + \bar{\bar{X}}_{uv} + \gamma_w^2\bar{\bar{X}}_{uv}\frac{\vec{w}\vec{w}^T}{(\gamma_w+1)c^2} \\ \bar{\bar{B}}_{uv} &= \bar{\bar{X}}_{uv}\left(\bar{\bar{\delta}} + \frac{(\gamma_w^2-\gamma_w^2-\gamma_w)\vec{w}\vec{w}^T}{(\gamma_w+1)c^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

A l'aide des équations (50) et $\bar{\bar{X}}_{vu} = \bar{\bar{X}}_{uv}^T$, nous trouvons aisément la matrice 3x3 $\bar{\bar{B}}_{uv}$, que nous ne calculerons pas ici. Il suffit de savoir que $\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ est orthogonale et normée, ce qui impose :

$$det\left(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}\right) = 1 = det\left(\bar{\bar{B}}_{uv}\right) \quad et \quad \bar{\bar{B}}_{uv}\bar{\bar{B}}_{uv}^T = \bar{\bar{\delta}} \quad (72)$$

Les équations (43), (55) et (60) fournissent :

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\mathbf{21}} &= \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{T}} \\ d\vec{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{1}} &= \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{T}} d\vec{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{2}}\end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

Qui est tout à fait semblable à l'équation (6). Il s'agit du passage du repère inertiel R_2 au repère inertiel R_1, dans lequel $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{w}}^{\boldsymbol{T}}$ a la même structure que $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$, avec une vitesse $-\vec{w}$, alors que $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ est identique à $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$, avec la matrice 3x3 orthogonale et normée $\overline{\overline{B}}_{uv}$ qui à donc rigoureusement les mêmes propriétés que $\overline{\overline{P}}$ et $\overline{\overline{U}}$ en section 4. En effet, tout comme $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ définit un changement d'axes spatiaux avec conservation à l'identique de l'axe des temps.

Bien des auteurs parlent de rotation dans l'espace, c'est certainement vrai (nous ne chercherons pas à le démontrer ici), mais il est possible que $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ ne représente qu'une partie des transformations $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$. En effet, $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{uv}}$ est totalement défini par les deux vitesses $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mais est-ce suffisant pour obtenir une matrice orthonormée 3x3 quelconque ? Il est possible que cela soit trop restrictif, les rotations ne formant qu'un sous ensemble des changements d'axes spatiaux. Par exemple, l'échange de deux axes spatiaux, le troisième étant inchangé, n'est pas une rotation (une rotation peut échanger deux axes spatiaux, mais en modifiant le troisième).

Finalement, la section 4 prévoyait déjà le cas général de la transformation de LORENTZ, avec la matrice de changement des axes spatiaux $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}$, équation (6), et nous insistons sur cette notion de généralité. C'est le résultat majeur que nous retiendrons ici.

9 Cas d'un photon

La vitesse de la lumière dans le vide joue un rôle important en relativité, mais aussi, comme nous l'avons vu en section 5 dans la mesure du temps. (GUY 2013) propose une vision un peu différente.

Dans la dynamique relativiste des fluides continus, le RIT (repère inertiel tangent) est un repère inertiel se déplaçant à la vitesse $\vec{u}$ dans un repère inertiel R. Comme vu au dessus, d'un point de vue plus général, si un repère R' se déplace à la vitesse $\vec{u}$ dans un repère inertiel R, la matrice de transition de R vers R' est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \overline{\overline{U}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & -i\gamma\frac{\vec{u}^T}{c}\\ i\gamma\frac{\vec{u}}{c} & \overline{\overline{\delta}}+(\gamma-1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\end{pmatrix}$ dans le cas général, où $\overline{\overline{U}}$ est une matrice 3x3 orthonormée et γ le facteur de Lorentz. Le passage de R' vers R est donné par la matrice inverse de la précédente, c'est-à-dire sa transposée (matrice 4x4 semi-réelle orthonormée).

S'il existe une horloge dans le repère R et que celle-ci est basée sur un rayon lumineux, celui-ci se déplace dans un environnement matériel, car l'horloge est matérielle et se trouve elle-même dans un environnement matériel. De ce fait la vitesse de la lumière correspondante est inférieure à celle dans le vide et s'écrit $\vec{u} = c(1-\varepsilon)\vec{n}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, $\varepsilon \ll 1$ et $\vec{n}$ un vecteur unitaire indiquant la direction du rayon lumineux dans R, tel que $\vec{n}^T\vec{n} = 1$.

Soit R' un repère inertiel se déplaçant avec le rayon lumineux, la matrice de transition de R vers R' est $\boldsymbol{\Lambda}' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \overline{\overline{U}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & -i\gamma(1-\varepsilon)\vec{n}^T\\ i\gamma(1-\varepsilon)\vec{n} & \overline{\overline{\delta}}+(\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T\end{pmatrix}$ où $\frac{1}{\gamma^2} = 1-(1-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon-\varepsilon^2$.

Nous en déduisons la matrice de transition de R à R' :

$$\boldsymbol{\Lambda'} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\begin{pmatrix} 1 & -i(1-\varepsilon)\vec{n}^T \\ i(1-\varepsilon)\overline{\overline{U}}\vec{n} & \overline{\overline{U}}\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2} + \left(1-\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\overline{\overline{U}}\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \quad (74)$$

Lorsque l'on envisage de passage d'un repère inertiel à un autre, il est préférable d'appliquer ceci à des accroissements et non à des positions, car ces dernières nécessitent de se référer à une origine spatio-temporelle. Par exemple, il faudrait définir la position de l'origine de R' dans R à partir de sa position à l'origine des temps. Pour éviter ce type de référence, nous écrirons le passage de R' à R du rayon lumineux par (la matrice de transition est la transposée de celle de R à R') :

$$\begin{pmatrix} icdt \\ d\vec{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\begin{pmatrix} 1 & i(1-\varepsilon)\vec{n}^T\overline{\overline{U}}^T \\ -i(1-\varepsilon)\vec{n} & \overline{\overline{U}}^T\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2} + \left(1-\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}\right)\vec{n}\vec{n}^T\overline{\overline{U}}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} icd\tau' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{cd\tau'}{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\begin{pmatrix} i \\ (1-\varepsilon)\vec{n} \end{pmatrix} \quad (75)$$

Où τ' est le temps propre du rayon lumineux. Comme R' se déplace à la même vitesse que le rayon lumineux (dans la même direction) dans R, la vitesse de ce rayon lumineux dans R' est nulle (donc tout déplacement élémentaire est nul).

Nous en déduisons une forme simplifiée si ε est suffisamment petit $dt = \frac{d\tau'}{\sqrt{2\varepsilon}} = \gamma d\tau'$ et $d\vec{x} = c\vec{n}\frac{d\tau'}{\sqrt{2\varepsilon}} = c\vec{n}dt$ dans R. Il faut cependant être très prudent dans l'utilisation de ces expressions, et en particulier vérifier que l'on ne viole pas le principe d'inséparabilité du temps et de l'espace de MINKOWSKI.

Comme c et $\vec{n}$ sont constants, il est aisé d'intégrer cette dernière équation si nécessaire (connaissant l'origine spatio-temporelle de référence, et en respectant la règle rappelée ci-dessus). Rappelons que le repère inertiel R est quelconque. Il ne faut pas oublier que si $\varepsilon = 0$ le facteur de LORENTZ γ est infini, et donc que le temps propre ne s'écoule pas pour le photon (cas du photon dans le vide). Attention, comme précisé en section 5, il est quasi certain que l'écoulement du temps vécu réellement par le photon n'est pas celui du temps propre.

10 Transformation et somme des quadri-forces

Le temps t est celui vécu par un observateur situé à l'origine du repère inertiel R et le temps propre τ_T est celui que l'observateur précédent pense être vécu par le point matériel. Nous avons donc, pour l'indicateur ds^2, entre les repères R et R_T, l'équation (4). En effet, nous avons dit en section 3 que la valeur de ds^2 est indépendante du repère inertiel utilisé pour définir la position $\vec{\boldsymbol{X}}$ du point matériel (invariant cinématique). Ainsi, l'équation (4) montre que l'écoulement du temps propre ($d\tau_T$) est indépendant du choix du repère inertiel R. La vitesse de déplacement du point matériel dans R est $\vec{u}$, définie par (1), ce qui donne avec (4) l'équation (5). Ainsi $d\tau_T < dt$, ce qui signifie que le temps propre s'écoule moins vite que celui d'un observateur lié à R. Ce temps propre est aussi appelé temps d'univers. Au point de tangence, le quadrivecteur vitesse dans R est $\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}}$ et celui dans R_T $\frac{d\vec{X}_T}{d\tau_T} = \begin{pmatrix} ic \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}}_T$. Le passage de R à R_T se fait par l'équation (6) $d\vec{\boldsymbol{X}}_T = \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}\,\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_T d\vec{\boldsymbol{X}}$ où $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{U}} \end{pmatrix}$ avec la matrice 3x3 $\overline{\overline{U}}$ définissant les nouvelles directions spatiales par rapport aux premières, et $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_T$ correspondant aux seuls effets relativistes (matrice de transformation de Lorentz). Nous simplifierons les équations grâce à $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{\delta}}$, où $\overline{\overline{\delta}}$ est la matrice unité de KRONECKER. Ceci implique $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$.

La matrice de transition de R vers le RIT est une constante où $\vec{u}^0 = \vec{u}$ au point de tangence (Figure 1) :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & -\frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^{0T} \\ \frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^0 & \overline{\overline{\delta}} + (\gamma^0-1)\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \end{pmatrix} \quad (76)$$

Qui est une autre façon d'exprimer l'équation (18), avec $\gamma^0 = \gamma$ (point de tangence), et $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$. Compte tenu de (9) nous obtenons :

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}}{d\tau_T} = \gamma\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}\frac{d(\gamma\vec{\boldsymbol{u}})}{dt} \qquad (77)$$

Où $\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}$ est une matrice 4x4 à coefficients constants (le RIT se déplace à vitesse constante par rapport à R). $\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}}{d\tau_T}$ représente l'accélération dans le repère inertiel tangent.

A ce niveau, nous énoncerons un postulat original proposé dans (FONTEIX et al. 2020 a) : **« Dans le Repère Inertiel Tangent d'un espace-temps plat, les équations de la physique relativiste et celles de la physique classique sont identiques. »**

Ceci est du au fait que la physique classique, valable dans un repère inertiel (Galiléen), à été développée localement à l'échelle terrestre, pour des vitesses très faibles devant celle de la lumière. Ainsi, tout s'est passé comme si les scientifiques s'étaient placés dans un repère inertiel (presque) tangent à l'échelle de l'univers. Par exemple, (POINCARE 1901) dit du centre du système solaire : « *on constaterait alors que ce mouvement est à peu près rectiligne et uniforme* » (origine d'un repère inertiel). Nous considérons donc que les équations de la physique classique sont identiques à celles écrites dans le repère inertiel tangent en relativité restreinte (espace-temps plat). Le fait de se placer dans le repère inertiel tangent, où la vitesse est localement nulle (mais pas ses dérivées temporelle ou spatiales), élimine le problème de la définition de l'énergie cinétique (différentes en physiques classique et relativiste). Plusieurs auteurs signalent l'importance du RIT (ARZELIES 1971), mais l'un d'entre eux (HALBWACHS 1960) dit que les équations de la physique classique sont valables dans le RIT près de la position considérée. Malheureusement, il n'utilise pas cette hypothèse. Ensuite, nous devrons passer du repère inertiel tangent à un repère inertiel quelconque R. Pour différentier les expressions dans le RIT de celles dans R, nous y ajouterons un T en indice, comme dans R_T. Toutes les équations vues dans les sections précédentes sont valables dans le RIT, à la condition que $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} = (ic \quad \vec{u}_T^T) = (ic \quad 0)$, et donc que $\gamma_T = 1 - \frac{\vec{u}_T^T\vec{u}_T}{c^2} = 1$. Ainsi, la deuxième ligne de (9) s'écrit $\gamma_T\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}(\gamma\vec{\boldsymbol{u}})$.

En physique classique, la force d'accélération est le produit de l'accélération par la masse Newtonienne m_N du mobile. Nous pouvons donc en déduire les quadri-forces dans R_T, $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}}$, et dans R, $\vec{\boldsymbol{f}}$:

$$\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}} = m_N\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}}{d\tau_T} = m_N\gamma\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}\frac{d(\gamma\vec{\boldsymbol{u}})}{dt} = \gamma\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}\vec{\boldsymbol{f}} \qquad (78)$$

La quadri-force dans R est en effet $\vec{\boldsymbol{f}} = m_N\frac{d(\gamma\vec{\boldsymbol{u}})}{dt} = \frac{d(m_N\gamma\vec{\boldsymbol{u}})}{dt}$, dérivée de la quantité de mouvement $m_N\gamma\vec{\boldsymbol{u}}$, comme $m_N\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}$ l'est dans R_T. Nous pouvons remarquer que dans R la quantité de mouvement est la quadri-vitesse multipliée par $m_N\gamma$. C'est à partir de cela que les spécialistes de la relativité ont défini la notion de masse en mouvement, par opposition à la masse au repos. Cependant, cette masse au repos n'est pas la masse Newtonienne. En effet, l'énergie de la matière au repos est la somme de l'énergie nucléaire (m_Nc^2) et de l'énergie interne (connue actuellement à un terme additif près). L'énergie en mouvement de la matière est la somme des deux énergies précédentes plus l'énergie cinétique. Mais attention, si la masse newtonienne est indépendante du repère inertiel utilisé, ce n'est pas le cas de l'énergie interne (FONTEIX et al. 2020 a). La différence $(m_N\gamma - m_N)c^2$ est cependant l'énergie cinétique. En fait, il ne faut pas confondre masse Newtonienne et masse relativiste au repos.

La loi (78) est linéaire, et, dans un même repère inertiel R, une somme de quadri-forces est nulle si cette somme de quadri-forces est nulle dans R_T. C'est en particulier le cas lors de phénomènes d'action

– réaction, contrairement à une croyance du début du 20ème siècle (POINCARE 1900). L'erreur était généralement due à une violation du principe d'indissociabilité du temps et de l'espace. Un autre exemple de ce type d'erreur sera abordé en section 12.

Plus généralement, pour une somme de quadri-forces $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{Ti}}$ dans R_T, nous obtenons dans R :

$$\vec{\boldsymbol{f}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \frac{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}}{\gamma} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{Ti}} = \frac{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}}{\gamma} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}} \qquad (79)$$

11 Transformation et somme des quadri-couples

Usuellement, en physique classique, le torseur, s'appliquant à un point matériel, est défini par quatre vecteurs de dimension trois (formant une matrice 4x3). Le premier vecteur, $\vec{x}_C$, est le point définissant le torseur (centre des moments ou point de définition des torseurs), le deuxième, $\vec{x}$, est le point où s'applique la force (ce point peut éventuellement glisser sur une droite, mais nous nous placerons ici dans le cas où il est fixe), le troisième est la force en elle-même, $\vec{F}$, et le quatrième est le moment $\vec{M}$:

$$\{T(\vec{x})\}_C = (\vec{x}_C \quad \vec{x} \quad \vec{F} \quad \vec{M}) \qquad (80)$$

Avec $\vec{M} = (\vec{x} - \vec{x}_C) \wedge \vec{F}$. Dans le cas où il existe plusieurs points matériels, chacun étant affecté par une force, $\vec{x}$ est remplacé par un ensemble de points correspondant au lieu d'action de chaque force, $\vec{F}$ est alors la somme de toutes les forces (force résultante), et $\vec{M}$ est la somme de tous les moments (moment résultant). La seule opération dont nous parlerons est le changement de point de définition du torseur. Dans le cas d'un point matériel unique définissons un point $\vec{x}'_C$, alors :

$$\vec{M}' = (\vec{x} - \vec{x}'_C) \wedge \vec{F} = (\vec{x} - \vec{x}_C + \vec{x}_C - \vec{x}'_C) \wedge \vec{F} = \vec{M} + (\vec{x}_C - \vec{x}'_C) \wedge \vec{F} \qquad (81)$$

Si nous avons envisagé ces deux cas (forces multiples et changement de point de définition), c'est pour souligner le fait qu'il existe une hypothèse non exprimée. Si le ou les points matériels se déplacent dans l'espace au cours du temps, les points $\vec{x}$, $\vec{x}_C$ et $\vec{x}'_C$ (après tout pourquoi ces deux derniers ne se déplaceraient-ils pas aussi) doivent être pris au même instant. Cette dimension temporelle ne doit pas être négligée.

Bien entendu, la dimension temporelle est encore plus importante en relativité restreinte, du fait du principe d'imbrication du temps et de l'espace. La notion de torseur (et de couple ou moment) doit être repensée dans ce cas, d'autant plus qu'elle doit satisfaire à la transformation de LORENTZ lors d'un changement de repère inertiel. Compte tenu du postulat qui dit que la physique classique s'applique au voisinage de l'origine d'un repère inertiel tangent, en espace-temps plat (voir section 10), nous nous positionnerons donc initialement dans le repère inertiel tangent, R_T, à la trajectoire d'un point matériel de position $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}$ qui est l'origine de R_T. Nous effectuerons ensuite un changement de repère inertiel vers un repère R en translation uniforme par rapport à R_T. Notons que nous nous situons en relativité restreinte (espace-temps plat).

Dans ce repère R_T nous devons respecter le postulat indiqué plus haut. Ainsi toutes les positions considérées devront être prises au même temps propre, pour être en accord avec la physique classique. Donc, soit une position appelée point de réduction $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{CT}} = \begin{pmatrix} ic\tau_T \\ \vec{x}_{CT} \end{pmatrix}$, une autre position $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} ic\tau_T \\ \vec{x}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ic\tau_T \\ 0 \end{pmatrix}$ dans R_T et une force $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}_T \end{pmatrix}$ s'exerçant en $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}$. Les deux positions sont prises au

même temps propre dans R_T (pour être conforme à la physique classique). La distance entre $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}}$ et $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{CT}}$ est donnée par :

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T}} - \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{CT}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{d}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}_T - \vec{x}_{CT} \end{pmatrix} \qquad (82)$$

Le moment $\overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{T}}}$ dans R_T est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{T}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{d}_T \wedge \vec{F}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}_T \end{pmatrix} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}_{\boldsymbol{T}} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}} \qquad (83)$$

Où $\overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T)\vec{F}_T = \vec{d}_T \wedge \vec{F}_T$, $\overline{\overline{mat}}(\cdots)$ étant un opérateur transformant un vecteur de dimension 3 en une matrice antisymétrique 3x3. A ce niveau, nous poserons une hypothèse : le quadrivecteur moment se transforme, lors du passage de R_T à R, comme un quadrivecteur force, en espace-temps plat (de MINKOWSKI), suivant l'équation (78).

Afin de simplifier le problème, comme en section 10, nous nous placerons dans le cas où les directions des axes indiquant les 3 directions spatiales ne sont pas modifiées volontairement, en conséquence $\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\delta}}}$. Nous avons donc :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\gamma} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{T}}} \qquad (84)$$

De même que :

$$\vec{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\gamma} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}} \qquad (85)$$

Ainsi ($\overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}$ étant une matrice orthonormée localement constante) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\gamma} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}_{\boldsymbol{T}} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{T}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}_{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} \vec{\boldsymbol{f}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \vec{\boldsymbol{f}} \qquad (86)$$

Nous en déduisons :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}_{\boldsymbol{T}} \overline{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}_{\boldsymbol{T}} \qquad (87)$$

Nous pouvons remarquer que $\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}$ est une matrice antisymétrique (comme $\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}_{\boldsymbol{T}}$). Plus précisément, nous obtenons :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T \\ \frac{i\gamma}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \qquad (88)$$

Ce qui donne :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} &= \begin{pmatrix} \gamma & \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i\gamma}{c}\overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T)\vec{u} & \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) + (\gamma - 1)\overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} &= \begin{pmatrix} \gamma & \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma - 1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i\gamma}{c}\vec{d}_T \wedge \vec{u} & \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) + (\gamma - 1)(\vec{d}_T \wedge \vec{u})\frac{\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix} \end{aligned}\right] \qquad (89)$$

Ou encore :

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{u}^T(\vec{d}_T \wedge \vec{u}) & \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T\overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) + \frac{i\gamma}{c}(\gamma-1)\vec{u}^T(\vec{d}_T \wedge \vec{u})\frac{\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \\ \frac{i\gamma}{c}\vec{d}_T \wedge \vec{u} + \frac{i\gamma}{c}(\gamma-1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}(\vec{d}_T \wedge \vec{u}) & \left(\bar{\bar{\delta}} + (\gamma-1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\right)\left(\overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) + (\gamma-1)(\vec{d}_T \wedge \vec{u})\frac{\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}}\right) \end{pmatrix} \quad (90)$$

Or, $\vec{u}^T(\vec{d}_T \wedge \vec{u}) = 0$ et $\vec{u}^T\overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) = (\vec{u} \wedge \vec{d}_T)^T = -(\vec{d}_T \wedge \vec{u})^T$, donc :

$$\bar{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\gamma}{c}(\vec{d}_T \wedge \vec{u})^T \\ \frac{i\gamma}{c}\vec{d}_T \wedge \vec{u} & \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) + \frac{\gamma-1}{\vec{u}^T\vec{u}}\left((\vec{d}_T \wedge \vec{u})\vec{u}^T - \vec{u}(\vec{d}_T \wedge \vec{u})^T\right) \end{pmatrix} \quad (91)$$

Signalons que :

$$\left.\begin{aligned} \vec{X} - \vec{X}_C = \bar{\bar{\Lambda}}_T^T(\vec{X}_T - \vec{X}_{CT}) = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T \\ -\frac{i\gamma}{c}\vec{u} & \bar{\bar{\delta}} + (\gamma-1)\frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T\vec{u}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{d}_T \end{pmatrix} \\ \vec{X} - \vec{X}_C = \begin{pmatrix} \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T\vec{d}_T \\ \vec{d}_T + (\gamma-1)\frac{\vec{u}^T\vec{d}_T}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u} \end{pmatrix} \end{aligned}\right] \quad (92)$$

Ainsi :

$$\vec{u}^T(\vec{X} - \vec{X}_C) = \begin{pmatrix} ic & \vec{u}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i\gamma}{c}\vec{u}^T\vec{d}_T \\ \vec{d}_T + (\gamma-1)\frac{\vec{u}^T\vec{d}_T}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (93)$$

Exactement comme nous avions :

$$\vec{u}_T^T(\vec{X}_T - \vec{X}_{CT}) = \begin{pmatrix} ic & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{d}_T \end{pmatrix} = 0 \quad (94)$$

Enfin, si nous posons :

$$\vec{d} = \vec{d}_T + (\gamma-1)\frac{\vec{u}^T\vec{d}_T}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u} \quad (95)$$

Nous obtenons :

$$\vec{X} - \vec{X}_C = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\vec{u}^T\vec{d} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \quad (96)$$

Car, en multipliant (95) à gauche par $\vec{u}^T$:

$$\vec{u}^T\vec{d} = \gamma\vec{u}^T\vec{d}_T \quad (97)$$

Finalement, en multipliant (96) à droite par $\wedge\,\vec{u}$:

$$\vec{d} \wedge \vec{u} = \vec{d}_T \wedge \vec{u} + (\gamma-1)\frac{\vec{u}^T\vec{d}_T}{\vec{u}^T\vec{u}}(\vec{u} \wedge \vec{u}) = \vec{d}_T \wedge \vec{u} \quad (98)$$

Et :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{mat}}(\vec{d}) = \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) + (\gamma-1)\frac{\vec{u}^T\vec{d}_T}{\vec{u}^T\vec{u}}\overline{\overline{mat}}(\vec{u}) \\ \overline{\overline{mat}}(\vec{d}_T) = \overline{\overline{mat}}(\vec{d}) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\vec{u}^T\vec{d}}{\vec{u}^T\vec{u}}\overline{\overline{mat}}(\vec{u}) \end{aligned}\right] \quad (99)$$

C'est-à-dire :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\gamma}{c}\left(\vec{d}\wedge\vec{u}\right)^T \\ \frac{i\gamma}{c}\vec{d}\wedge\vec{u} & \overline{\overline{mat}}(\vec{d}) - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\vec{u}^T\vec{d}}{\vec{u}^T\vec{u}}\overline{\overline{mat}}(\vec{u}) + \frac{\gamma-1}{\vec{u}^T\vec{u}}\left(\left(\vec{d}\wedge\vec{u}\right)\vec{u}^T - \vec{u}\left(\vec{d}\wedge\vec{u}\right)^T\right) \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\gamma}{c}\left(\vec{d}\wedge\vec{u}\right)^T \\ \frac{i\gamma}{c}\vec{d}\wedge\vec{u} & \overline{\overline{mat}}\left(\vec{d} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\vec{u}^T\vec{d}}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\right) - \frac{\gamma-1}{\vec{u}^T\vec{u}}\left(\overline{\overline{mat}}(\vec{u})\vec{d}\vec{u}^T + \vec{u}\vec{d}^T\overline{\overline{mat}}(\vec{u})\right) \end{pmatrix} \qquad (100)$$

Ainsi, nous avons vu que, en relativité restreinte, un torseur était défini par :

$$\left\{\boldsymbol{T}\left(\vec{\boldsymbol{X}}\right)\right\}_{\boldsymbol{C}} = \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \quad \vec{\boldsymbol{X}} \quad \vec{\boldsymbol{f}} \quad \vec{\boldsymbol{M}}\right) \qquad (101)$$

Non seulement la covariance est assurée pour un torseur (ou un couple), mais si un couple (ou un couple résultant s'il est la somme de plusieurs couples) est nul dans un repère inertiel, il l'est aussi dans un autre. Ce résultat est important pour la section qui suit.

Plus généralement, pour une somme de quadri-couples $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{Ti}}$ dans R_T, nous obtenons dans R :

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \frac{\overline{\overline{\Lambda}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}}{\gamma}\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{Ti}} = \frac{\overline{\overline{\Lambda}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}}{\gamma}\sum_{\boldsymbol{i}} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}_{\boldsymbol{Ti}}\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{Ti}} = \frac{\overline{\overline{\Lambda}}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}}{\gamma}\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{T}} \qquad (102)$$

12 Un problème amusant

(ARZELIES 1971) critique en ces termes le travail de (Von LAUE 1911), prix Nobel de physique de 1914 : « *Le concept de courant d'énergie de Von LAUE, et le concept de quantité de mouvement transversale, sont à la base da la théorie relativiste des milieux continus telle qu'elle est admise depuis un demi-siècle. Ma critique de cette théorie porte, suivant les auteurs, sur divers concepts et hypothèses. Mais, quand on réduit la théorie à la forme la plus dépouillée, on s'aperçoit que le courant d'énergie de Von LAUE est le concept fondamental. C'est donc, en dernière analyse, sur ce concept que porte ma contestation ; c'est sur ce concept que doit s'établir la discussion. En ce qui me concerne, j'ai longtemps admis les idées de Von LAUE que la réussite semblait justifier, et je les ai exposées dans ma Dynamique relativiste (1957). Mais ce courant d'énergie m'avait toujours paru mystérieux. J'ai repris la question pendant les années 1962-1963 ; cette méditation personnelle m'a conduit à rejeter le courant d'énergie de Von LAUE et les formules traditionnelles de transformation des grandeurs thermodynamiques (articles parus en 1965). Et j'annonçais que la théorie des milieux continus devait elle aussi être révisée. Cette contestation a déjà recueilli un accord assez large en thermodynamique ; mais le bastion des milieux continus reste encore à peu près intact, malgré mes notes et mémoires.* » … « *Les deux concepts ainsi introduits, courant d'énergie et quantité de mouvement transversale, sont utilisés par divers auteurs pour établir les équations relativistes des milieux continus. Le problème du levier coudé cesse d'être une simple curiosité relativiste ; il met en jeu des concepts fondamentaux. Ces deux concepts m'avaient toujours paru mystérieux, mais la réussite du calcul semblait les justifier. Des recherches de thermodynamique m'ayant conduit à méditer de nouveau la question, je me suis aperçu que de graves erreurs relativistes figuraient non seulement dans la solution du problème mais aussi dans la façon de le poser. J'ai alors donné une nouvelle solution qui rejette le courant d'énergie* ».

Quel est donc ce problème qui semble être si délicat à résoudre ? Soit, dans un repère inertiel généralisé R_T, en relativité restreinte, une barre (sans épaisseur) coudée à angle droit pour former deux branches de longueur identique. Cette barre est dotée, au niveau de l'angle droit, situé à l'origine de R_T, d'un pivot permettant à cette barre de tourner librement autour de cette origine de R_T (le pivot ne peut pas se déplacer dans R_T). Deux forces égales en norme, perpendiculaires à chaque branche, sont

appliquées à l'extrémité de chaque branche. Les couples exercés par les forces sont égaux et opposés, de ce fait la barre ne tourne pas autour du pivot. Que ce passe-t-il si nous nous plaçons dans un repère inertiel généralisé R en déplacement uniforme par rapport à R_T ?

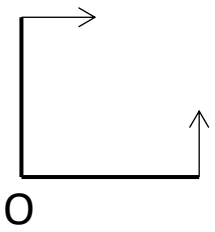

Figure 2 : schéma de présentation du problème

(Von LAUE 1911) raisonne au niveau spatial et constate, en appliquant la transformation de LORENTZ réduite aux effets spatiaux, que les forces et les longueurs des branches sont modifiées dans R. De ce fait le couple résultant n'est plus nul dans R, et donc la barre coudée tourne dans R alors qu'elle était immobile dans R_T. Comme ceci est impossible, il invente le courant qui porte son nom pour compenser ce phénomène et faire en sorte que la barre ne tourne pas dans R.

(ARZELIES 1971) démontre que si on raisonne dans l'espace-temps le couple résultant est nul dans R comme il l'était dans R_T. Sa démonstration étant un peu compliquée, nous avons montré en section 11 que, lorsqu'un couple résultant est nul dans un repère inertiel tangent, il l'est dans n'importe quel repère inertiel. Au début de sa démonstration, (ARZELIES 1971) explique : « *Nous allons montrer que Von LAUE introduit son courant d'énergie pour résoudre une difficulté inhérente à un problème mal posé. En effet … Von LAUE se trouve en présence d'un couple qui n'entraine aucune rotation ; c'est pour résoudre cette contradiction qu'il introduit son courant d'énergie. Or c'est là une difficulté fictive, un faux problème, dû à des habitudes Newtoniennes (il est difficile de s'en dégager, et nous en sommes encore tout imprégnés). En effet, le lien couple-rotation provient de la dynamique Newtonienne usuelle des milieux étendus. Cette dynamique n'est valable qu'aux faibles vitesses, et de façon rigoureuse qu'aux vitesses nulles. Elle n'est donc valable en fait que dans le référentiel propre* K_0*. Si nous voulons avancer en terrain solide, il faut partir des énoncés de* K_0*, et voir ensuite ce qui se passe en langage de K, sans idées préconçues. En d'autres termes, nous devons établir dans K, et pour le problème particulier envisagé, les théorèmes de la dynamique du solide. Comme il s'agit de régime permanent, le levier est indéfiniment au repos dans* K_0 *à l'état de tension ; il n'y a absolument aucun changement au cours du temps. La situation est la même par rapport à K, avec un mouvement d'ensemble uniforme. Si on raisonne dans un seul référentiel, les questions de temps n'ont pas à intervenir. Mais elles interviendront nécessairement si on change de référentiel, et c'est précisément ce que nous devons faire.* »

Nous voyons poindre ici les prémisses du principe d'indissociabilité temps-espace, mais aussi du postulat selon lequel la physique classique s'applique dans le repère inertiel tangent (appelé K_0 par ARZELIES). Pourtant, la démonstration d'Henri ARZELIES ne convainc pas (De BEAUREGARD 1972), qui répond : « *Depuis LEWIS et TOLMAN, Von LAUE et EPSTEIN, le problème du levier coudé a fait couler beaucoup d'encre, ARZELIES y ayant contribué par une remarque pertinente que nous ferons nôtre. … Disons pour être bref que tout tourne autour de la définition relativiste du moment d'une force par rapport à un axe, définition qui (le principe de relativité appliqué au concept d'équilibre le montre) devrait être invariante relativiste.* » … « *Etant scalaire, le co-moment d'un système de forces appliquées à un solide est indépendant du référentiel, et le principe de relativité appliqué à l'équilibre est sauf*. »

Ainsi, (De BEAUREGARD 1972) semble d'accord avec (ARZELIES 1971), mais il se lance alors dans un calcul basé sur le tenseur élastique. Il discute ensuite ses résultats en ces termes : « *Si l'on considère un problème de dynamique, avec transmission retardée des actions et réactions, les choses se compliquent beaucoup : il faut considérer notamment les trajectoires d'espace-temps des points d'application des forces, et le plan du genre temps engendré par l'axe autour duquel tournera le solide relativiste.* » … « *Notre conclusion est donc que le courant de Von LAUE existe bien, comme un effet relatif conséquence de la loi du tenseur élastique. Mais cette conclusion, quoique rejetée par ARZELIES n'invalide aucunement sa remarque concernant les instants d'application des forces*. »

(De BEAUREGARD 1972) semble justifier l'existence du courant d'énergie de Von LAUE à l'aide de l'évolution du terme doublement temporel du tenseur élastique (c'est une matrice 4x4) lors d'un changement de repère inertiel généralisé. Nous ne trouvons pas son explication convaincante.

D'ailleurs, (ARZELIES 1971), un peu plus loin dans son livre, fait la même erreur en faisant un raisonnement purement spatial pour calculer l'évolution du tenseur élastique lors d'un changement de repère inertiel. Il en déduit que ce tenseur, symétrique dans le repère inertiel tangent, ne l'est plus dans un autre repère inertiel. Ceci est faux, ce tenseur que nous préférons appeler des contraintes de cisaillement est toujours symétrique. Il suit la même loi que dans l'équation (87) qui maintient la qualité d'une matrice 4x4 : symétrique ou antisymétrique (FONTEIX et al. 2020 a). En fait, il faut être vigilant et respecter autant que possible le principe d'indissociabilité du temps et de l'espace : toute transformation utilisable doit être quadridimensionnelle.

13 Conclusion

Le fait d'avoir choisi de représenter le temps sous forme d'un imaginaire pur facilite grandement l'expression du changement de repère inertiel. L'utilisation de matrices semi-réelles permet d'obtenir les équations (6) et (18). Ce point de départ conduit à la composition des vitesses (section 6), mais aussi à la transformation correspondant au passage d'un repère inertiel quelconque à un autre (section 7). Ceci nous amène à généraliser la rotation de THOMAS-WIGNER (section 8). La transformation des quadri-forces et des quadri-couples est abordée en sections 10 et 11. A ce propos, nous montrons aisément la conservation d'une somme de quadri-forces nulle, et il en est de même pour les quadri-couples. Notons que la transformation (88) de la matrice semi-réelle définissant un quadri-couple à partir d'une quadri-force est identique à la transformation des tenseurs d'ordre 2 obtenue dans (FONTEIX 2020 a). La section 12 rappelle un problème amusant ayant fait couler beaucoup d'encre, problème résolu en section 11. Le fameux courant de Von LAUE (prix Nobel 1914) n'existe donc pas !

En perspective, nous considérons qu'il est possible de transcrire tout cela dans le cadre de la relativité générale grâce au principe proposé par (FONTEIX et al. 2020 b). Ce principe définit une méthode permettant de passer de la relativité restreinte à la relativité générale à l'aide d'une transformation.

Références

AHMAD M., ALAM M. S., Non-associativity of Lorentz transformation and associative reciprocal symmetric transformation, *International Journal of reciprocal symmetry and theoretical physics,* 1,1 (2014) 9-19

ARZELIES H., Fluides relativistes - Principes généraux, équations fondamentales, *Masson Ed.,* Paris, 1971

BAIZID A.R., ALAM M.S., Mocanu paradox of different types of Lorentz transformations, *International Conference on physics sustainable development and technology, Department of physics, CUET* (2015) 10 p.

BERGSON H., Durée et simultanéité, à propos de la théorie d'EINSTEIN, *Félix Alcan* (1922), *PUF 1968*, 216 p.

BEYERLE G., Visualization of Thomas-Wigner rotations, *Symmetry*, 9, 292 (2017) 19 p.

BIZE S., The unit of time: Present and future directions, *Comptes Rendus Physique, Académie des Sciences* 1631-0705 (2019) 153-168

CHAPPELL J.M., IQBAL A., IANNELLA N., ABBOTT D., Revisiting special relativity: a natural algebraic alternative to Minkowski spacetime, *Plos one,*7, 12 (2012) 1-10

COSTELLA J.P., McKELLAR B.H.J., RAWLINSON A.A., The Thomas rotation, *American journal of physics*, 69, 837 (2001) 20 p.

DANCI V., The nineteen postulates of Einstein's special relativity theory, *Vixra.org* (2017) 24 p.

DAYANTIS J., Pourquoi l'espace dans lequel nous vivons a 3 dimensions et ne peut en avoir davantage, *Annales de la Fondation Louis de Broglie,* 24, 4 (2007) 513-518

De ABREU R., GUERRA V., The principle of relativity and the indeterminacy of special relativity, *Eur. J. Phys.,* 29 (2008) 33-52

De ABREU R., GUERRA V., Speakable and unspeakable in special relativity: time readings and clock rhythms, *Electronic journal of theoretical physics*, 12, 34 (2015) 183-204

De BEAUREGARD O.C., Intéressantes questions soulevées par H. ARZELIES dans « Fluides relativistes », *Ann. Inst. Henri Poincaré,* 16, 2 (1972) 103-107

De SOUZA R.D., KOIDE T., KODAMA T., Hydrodynamic approaches in relativistic heavy ion reactions, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 86 (2016) 35-85

FOCK V.A., The theory of space, time and gravitation, *(GITTL Moscow 1955, 1961, Nauka 1964) Pergamon Press New York* 1959, 1964

FONTEIX C., MEIMAROGLOU D., CAMARGO M., FEIDT M., Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Part 1 : en relativité restreinte, *hal* (2020 a) 02482689

FONTEIX C., MEIMAROGLOU D., CAMARGO M., FEIDT M., Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Part 2 : en relativité générale, *hal* (2020 b) 02482702

GRANGER G.G., La vérification, *Odile JACOB Ed.* (1992) 314 p.

GUERRA V., de ABREU R., The conceptualization of time and the constancy of the speed of light, *Eur. J. Phys.,* 26 (2005) S117-S123

GUERRA V., de ABREU R., On the consistency between the assumption of a special system of reference and special relativity, *Found. Phys.,* 36 (2006) 1826-1845

GUY B., Les relations de LORENTZ et le temps : proposition d'utilisation d'un paramètre temporel tri-dimensionnel défini par un déplacement, la question du temps en physique, *Archive.org* (2010) 41 p.

GUY B., Penser ensemble le temps et l'espace, *Philosophia scientiae, Travaux d'histoire et de philosophie des sciences,* 15, 3 (2011) 91-113

GUY B., Sur la vitesse de la lumière et sa mesure : disparition des étalons d'espace et de temps ; l'étalon de mouvement, *hal* (2013) 00814874

GUY B., Sur l'âge et le vieillissement comparés de deux jumeaux (théorie de la relativité), *hal* (2015) 01196320

GUY B., La transformation de Lorentz, le temps et l'espace. Généralisation du facteur gamma en fonction de la direction du mouvement caché dans les horloges, *hal* (2019) 02068970

HAFELE J.C., Relativistic time for terrestrial circumnavigations, *American Journal of Physics,* 40, 1 (1972) 81-85

HAFELE J.C., KEATING R.E., Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains, *Science,* 177, 4044 (1972 a) 166-168

HAFELE J.C., KEATING R.E., Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains, *Science,* 177, 4044 (1972 b) 168-170

HALBWACHS F., Théorie relativiste des fluides à spin, *Gauthier-Villars*, Paris 1960

IVEZIC T., « True transformations relativity » and electrodynamics, *ArXiv : physics/0012048v1 [physics.class-ph]* (2000) 27 p.

MALHOTRA L., GOLUB R., KRAEGELOH E., NOURI N., PLASTER B., Effect of Thomas rotation on the Lorentz transformation of electromagnetic fields, *Natureresearch Scientific Reports*, (2020) 15 p.

MINKOWSKI H., The relativity principle, *Meeting of the Göttingen Mathematical Society*, November 5 (1907)

MIZONY M., L'héritage de Poincaré : de l'éther à la modélisation/Relations entrephysique et mathématiques, un problème épistémologique, *Repères* 64 (2006) 91-111

MOCANU C.I., Is Thomas rotation a paradox ?, *Apeiron*, 16 (1993) 1-8

O'DONNELL K., VISSER M., Elementary analysis of the special relativistic combination of velocities, Wigner rotation and Thomas precession, *ArXiv: 1102.2001v2 [gr-qc]* (2011) 21 p.

OZIEWICZ Z., The Lorentz boost-link is not unique (relative velocity as a morphism in a connected groupoid category of null objects), *Fifth workshop applied category theory, graph-operad-logic,* Merida (2006) 42 p.

PIERSEAUX Y., La cinématique relativiste sous-jacente à l'ellipse de POINCARE, *C. R. Physique,* 8 (2007) 921-928

POINCARE H., Les géométries non Euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 23 (1891) 769-774

POINCARE H., La théorie de Lorentz et le principe de réaction, *Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 2, 5 (1900) 252-278

POINCARE H., Sur les principes de la mécanique, *Congrès international de philosophie, Logique et histoire des sciences,* 3 (1901) 457-494

POINCARE H., La mécanique nouvelle, *Revue scientifique* 12 (1909) 170-177

SILAGADZE Z. K., Thomas rotation and Mocanu paradox – not at all paradoxical, *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, 6, 1 (2012) 67-71

RHODES J.A., SEMON M.D., Relativistic velocity space, WIGNER rotation and THOMAS precession, *Am. J. Phys.,* 72, 7 (2004) 943-960

STRATONOVITCH J., La bizarre disparité des instruments de la relativité restreinte, *hal* (2014) 01096136

STRATONOVITCH Jean, Une axiomatisation de la géométrie fondée sur l'instrument et l'expérience, *hal* (2015) 01238713

THOMAS L.H., The kinematic of an electron with an axis, *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical magazine and journal of Science*, 7 (1927) 1-22

TONNELAT M.A., Les principes de la théorie électromagnétique de la relativité, *Masson, Paris* (1959) 394 p.

UNGAR Abraham A., The relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation, *Foundations of physics,* 19, 11 (1989) 1385-1395

VOIGT W., Uber das Doppler'sche princip, *Göttinger Nachr.*, 8 (1887) 41-51

Von LAUE M., Ein beispiel zur dynamik der relativitätstheorie, *Verhandl. Deutsch. Phys. ges.* (1911) 513-518

WALTER S.A., The non-Euclidean style of Minkowskian relativity, *in The symbolic universe, Geometry and physics 1890-1930,* GRAY J.J. Ed., Oxford univ. press (1999) 91-127

WALTER S.A., Henri POINCARE et l'espace-temps conventionnel, *hal* (1999) 00377077

WIGNER E., On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Annals of mathematics*, 40, 1 (1939) 149-204