



**HAL**  
open science

# Turbulence générée par les particules piégées dans un tokamak

Julien Médina

► **To cite this version:**

Julien Médina. Turbulence générée par les particules piégées dans un tokamak. Physique [physics]. 2016. hal-04012385

**HAL Id: hal-04012385**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-04012385>**

Submitted on 2 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Turbulence générée par les particules piégées dans un tokamak

---

Mémoire de master  
présenté par

Julien MÉDINA

Stage effectué à  
*l'Institut Jean Lamour*  
de *l'Université de Lorraine*

sous la direction de  
*Dr. Maxime Lesur*

Mention de master : *Physique*  
Master 2 Sciences de la Fusion et des Plasmas

14 Mars 2016 - Septembre 2016

Nancy, Région Grand Est

# Résumé

Ce stage se place dans le contexte de l'étude, via la simulation numérique, de la turbulence dans les plasmas de fusion, en particulier en géométrie de tokamak.

Il existe actuellement des codes numériques qui permettent de simuler tout ou parties du plasma d'après des modèles plus ou moins complets. Mais on souhaiterait se focaliser sur les phénomènes cinétiques, notamment de résonance, dans le cadre de la turbulence.

Dans un tokamak, il existe une classe importante de particule appelées piégées, qui suivent des trajectoires pour lesquelles le formalisme angle-action est particulièrement adapté.

L'objectif de mon stage était d'étudier la turbulence générée par cette classe de particule via le code numérique TERESA, qui tire avantage du formalisme angle-action pour réduire grandement le temps de calcul.

Pour cela, nous allons tout d'abord comprendre le formalisme utilisé dans ce code, de façon théorique, puis de façon numérique en créant des codes relativement simples, qui s'apparentent aux problèmes résolus par TERESA. J'ai ensuite pu contribuer au développement de ce code.

Le résultat principal de ce travail a été une première étape dans l'implémentation de particules test au sein de TERESA.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Formalisme angle-action</b>	<b>3</b>
1.1	Oscillateur harmonique perturbé . . . . .	3
1.1.1	En variables angle-action ( $\alpha, J$ ) . . . . .	3
1.1.2	En variable position-vitesse ( $x, v$ ) . . . . .	5
1.2	Particules piégées dans un champ magnétique toroïdal . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Equation de Poisson</b>	<b>10</b>
2.1	Plasma 1D . . . . .	10
2.1.1	Par FFT . . . . .	11
2.1.2	Par différences finies . . . . .	11
2.2	Plasma 3D toroïdal . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Trajectoire d'une particule dans un potentiel</b>	<b>15</b>
3.1	Potentiel imposé . . . . .	15
3.1.1	Une seule onde . . . . .	15
3.1.2	Un spectre de plusieurs ondes . . . . .	17
3.2	Potentiel auto-consistant . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de <math>J</math> et <math>\alpha</math></b>	<b>31</b>
<b>B</b>	<b>Equation de Poisson</b>	<b>32</b>

# Introduction

La complexité des phénomènes de turbulences dans les plasmas de fusion magnétisés pose un réel défi au développement de réacteurs à fusion par confinement magnétique tels que les tokamaks. En effet le but de tels réacteurs est de confiner au mieux le plasma de fusion créée dans le tokamak à l'aide de puissants champs magnétiques. Un tokamak est un grand instrument constitué d'une chambre à vide de forme toroïdale où se situe le plasma. La capacité de confinement d'un réacteur à fusion peut être caractérisée par -entre autre- son temps de confinement de l'énergie  $\tau_E$ [1]. Dans des conditions proches de celles requises pour un réacteur viable, la turbulence présente dans le plasma tend à diminuer ce temps de confinement et ainsi réduit l'efficacité du réacteur.

C'est dans ce contexte que l'étude et la compréhension de la turbulence des plasmas de fusion dans les tokamaks est devenue une priorité.

L'étude de la turbulence dans les plasmas de fusion bénéficie grandement des avancées dans le domaine de l'informatique et de l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs. De nombreux codes numériques sont apparus, qui permettent aujourd'hui de simuler tout ou parties du plasma d'après des modèles plus ou moins complets. Un de ces codes est le code GYSELA[2][3], développé par le CEA au centre de Cadarache et qui requiert des temps de calcul très importants.

On peut identifier deux classes de particules : les piégées qui présentent une trajectoire oscillante, et les passantes décrivant une trajectoire s'enroulant autour d'un tube de flux magnétique tout entier. Le code GYSELA traite ces 2 classes de particules au même niveau de modélisation.

TERESA[4][5][6][7] est un autre code numérique, développé à l'Institut Jean Lamour en collaboration avec le CEA. C'est un modèle réduit de GYSELA qui ne prend en compte qu'une réponse adiabatique des particules passantes. Il permet d'étudier de manière approfondie les phénomènes liés aux particules piégées, en étant beaucoup moins gourmand en temps de calcul. C'est le code TERESA que nous allons utiliser lors de ce stage, afin d'étudier la turbulence générée par les particules piégées dans un tokamak.

# Chapitre 1

## Formalisme angle-action

Le code TERESA utilise le formalisme angle-action pour décrire le mouvement doublement périodique des particules piégées. Afin de se familiariser avec le formalisme angle-action, considérons un oscillateur harmonique 1D perturbé.

### 1.1 Oscillateur harmonique perturbé

#### 1.1.1 En variables angle-action ( $\alpha, J$ )

L'oscillateur harmonique 1D perturbé est décrit par le système d'équations suivant,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -m\omega^2 x - \varepsilon m\omega^2 k^2 x^3 \quad (1.2)$$

où  $\varepsilon \ll 1$  mesure l'amplitude de la perturbation et  $\omega$  est la fréquence de l'oscillateur non perturbé. Comme conditions initiales, on impose  $x(0) = 0$  et  $v(0) = K$ , une constante supposée connue.

Nous allons déterminer les équations du mouvement décrivant ce système, en variables angle-action.

L'Hamiltonien du système s'écrit sous la forme :

$$H = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \varepsilon \frac{m\omega^2 k^2 x^4}{4} \quad (1.3)$$

Il peut se décomposer de telle sorte,  $H = H_0 + \varepsilon H_1$ .

L'étude du mouvement perturbé nécessite la résolution du mouvement non perturbé.

Considérons donc tout d'abord l'Hamiltonien non perturbé  $H_0$ .

L'action s'écrit

$$J = \frac{mK^2}{2\omega} \quad (1.4)$$

et la variable angle (voir A)

$$\alpha(t) = \omega t \quad (1.5)$$

L'étude du mouvement d'équilibre ( $\varepsilon = 0$ ) permet ensuite d'obtenir la relation entre les variables angle-action  $(\alpha, J)$  et les variables position-vitesse  $(x, v)$

$$x = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \sin(\alpha) \quad (1.6)$$

$$v = \sqrt{\frac{2J\omega}{m}} \cos(\alpha) \quad (1.7)$$

Ce changement de variable peut ensuite être appliqué au mouvement non perturbé.

L'Hamiltonien total en variable angle-action s'écrit donc,

$$H = J\omega + \varepsilon \frac{k^2 J^2}{m} \sin^4(\alpha) \quad (1.8)$$

on en déduit les équations du mouvement perturbé :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega + \frac{2\varepsilon k^2 J}{m} \sin^4(\alpha) \quad (1.9)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{4\varepsilon k^2 J^2}{m} \sin^3(\alpha) \cos(\alpha) \quad (1.10)$$

Nous pouvons adimensionner ces équations en choisissant les changements de variables suivants :  $\hat{\alpha} = \alpha \quad \hat{J} = \frac{J}{\tilde{J}} \quad \hat{t} = \omega t$  avec  $\tilde{J} = \frac{m\omega}{2k^2}$ .

Les équations adimensionnées du mouvement perturbé en angle action s'écrivent donc :

$$\frac{d\hat{\alpha}}{d\hat{t}} = 1 + \varepsilon \hat{J} \sin^4(\hat{\alpha}) \quad (1.11)$$

$$\frac{d\hat{J}}{d\hat{t}} = -2\varepsilon \hat{J}^2 \sin^3(\hat{\alpha}) \cos(\hat{\alpha}) \quad (1.12)$$

On remarque que  $J$  est un invariant pour  $\varepsilon = 0$ . Pour simplifier les notations on impose  $K^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$  ce qui revient à imposer  $\hat{J}(t=0) = 1$ .

Nous allons résoudre numériquement ces équations du mouvement, avec 2 méthodes numériques : la méthode d'Euler forward et la méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre

4. Pour comparer la précision entre ces deux méthodes, nous allons calculer l'écart relatif  $\frac{\hat{J}_i - \hat{J}_0}{\hat{J}_0}$  en fonction du temps, pour un même pas de temps  $\Delta t = 0,1$  (fig 1.1) et nous allons comparer ces courbes à une courbe avec un pas de temps  $\Delta \tau \ll \Delta t$ . La méthode donnant la courbe la plus proche de la courbe en  $\Delta \tau$  sera la méthode la plus précise.

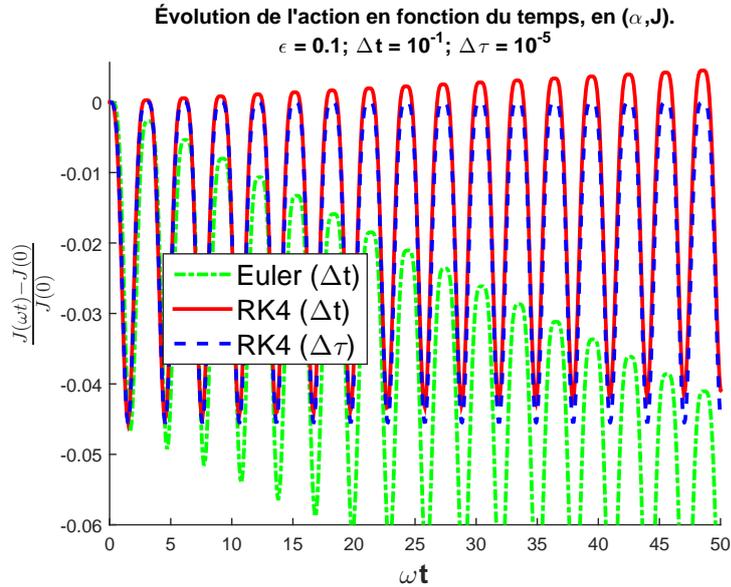


FIGURE 1.1 – Evolution de l'action en fonction du temps, forward Euler vs Runge Kutta 4 pour une amplitude de perturbation  $\epsilon = 0,1$

Les oscillations sur une période  $\frac{\pi}{\omega}$  sont attendues pour le mouvement étudié. Par contre, le fait que ces oscillations se décalent par rapport à l'origine de manière séculaire (sur plusieurs oscillations) est dû aux erreurs du schéma numérique. On voit que le schéma Runge-Kutta 4 est ici bien plus précis qu'Euler.

### 1.1.2 En variable position-vitesse $(x, v)$

Nous pouvons résoudre directement les équations du mouvement (1.2) et faire tous les calculs sans passer par le formalisme angle-action (voir fig 1.2). Nous allons comparer cette méthode et la suivante, qui consiste à passer par le formalisme angle action (comme en 1.1.1) puis à utiliser le changement de variables approprié, pour obtenir les trajectoires en  $(x, v)$ .

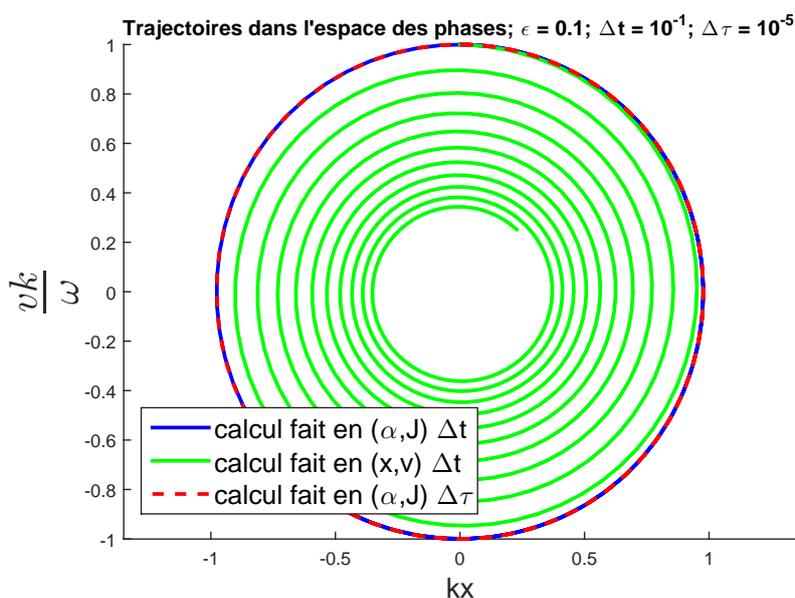


FIGURE 1.2 – Trajectoires dans l'espace des phases  $(x, v)$  obtenues soit par le calcul en  $(x, v)$  soit par le calcul en  $(\alpha, J)$ . Résolution des équations du mouvement via la méthode Runge-Kutta 4.

Comme précédemment, nous avons tracé les 2 courbes (bleues et vertes) avec un pas de temps  $\Delta t$ , puis une 3ème (en pointillés) avec un pas de temps  $\Delta \tau \ll \Delta t$ . On s'aperçoit ainsi que la résolution numérique des équations du mouvement en formalisme angle-action est beaucoup plus robuste que si l'on résout directement en  $(x, v)$ .

On peut maintenant comparer entre elles toutes les méthodes employées avec un pas de temps identique  $\Delta t$  (fig 1.3), et afficher en plus la courbe calculée en  $(\alpha, J)$  avec un pas de temps  $\Delta \tau \ll \Delta t$  qui nous donne une "référence", et ainsi déterminer quelle méthode se rapproche le plus de ce niveau de précision. On s'aperçoit que c'est bien la méthode de résolution en  $(\alpha, J)$  couplée au schéma Runge-Kutta 4 qui se rapproche le plus de la courbe calculée en  $\Delta \tau$  et donc qui donne la meilleure précision.

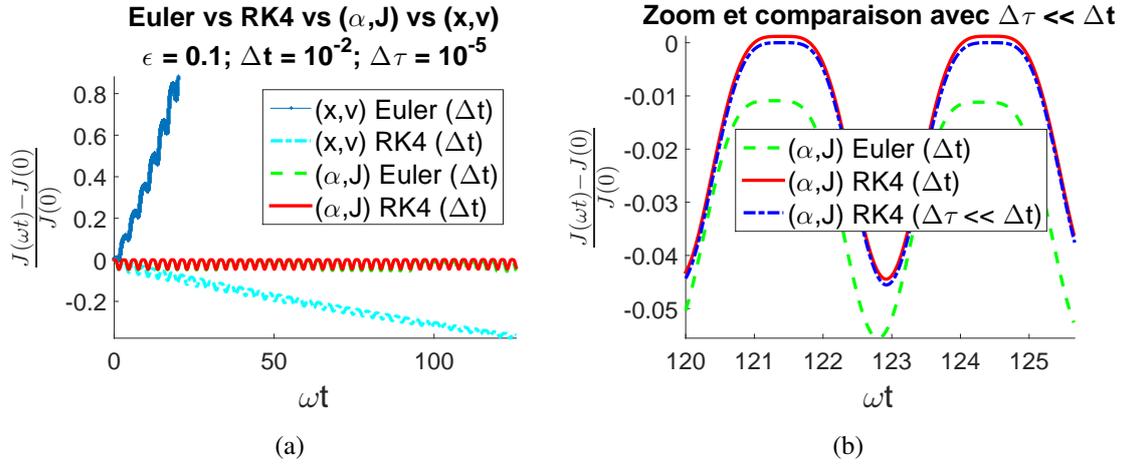


FIGURE 1.3 – Evolution de l'action calculée en forward Euler, Runge Kutta 4,  $(\alpha, J)$  et  $(x, v)$ . (a) Comparaison avec un pas de temps  $\Delta t$  identique, (b) Zoom sur deux période après  $\omega t = 120$ , et comparaison avec un pas de temps  $\Delta \tau \ll \Delta t$  afin d'obtenir une courbe "référence". La courbe  $(x, v)$  Euler n'est pas affichée sur (b) car elle s'éloigne très rapidement de la courbe avec la meilleure précision (en  $\Delta \tau$ ).

## 1.2 Particules piégées dans un champ magnétique toroïdal

Étudions à présent plus en détail le mouvement des particules piégées dans un tokamak. On pourra ainsi préciser comment TERESA tire avantage du formalisme angle-action afin de décrire le mouvement doublement périodique des particules piégées.

La trajectoire d'une particule chargée dans un tokamak peut-être caractérisée par 3 mouvements : le mouvement cyclotronique rapide autour des lignes de champ magnétique, le mouvement de rebond parallèle aux lignes de champ qui définit si les particules sont piégées ou non et le mouvement lent de dérive qui crée des trajectoires ressemblant à des "bananes" pour les particules piégées. En conséquence de ces 2 derniers mouvements, il existe aussi une dérive très faible dans la direction toroïdale qu'on peut appeler "mouvement de précession toroïdal des bananes".

Pour une particule piégée on peut donc associer 3 fréquences caractéristiques du mouvement :  $\omega_c$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_d$  respectivement "fréquences" cyclotronique, de rebond (bounce) et

de précession (drift).

Dans le modèle gyrocinétique, les particules d'une même espèce  $s$  sont décrites par une fonction de distribution  $f_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Dans le cadre des plasmas chauds non collisionnels,  $f_s$  est solution de l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial f_s}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} = 0, \quad (1.13)$$

où  $(q_i, p_i)$  sont les variables canoniquement conjuguées du système.

L'équation 1.13 peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - \{H_s, f_s\} = 0, \quad (1.14)$$

avec les crochets de Poisson définis comme  $\{g, h\} = \sum \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$ .

Le passage au formalisme angle action permet de grandement simplifier l'équation de Vlasov. Une des particularités de ce système de coordonnées est l'indépendance de l'hamiltonien d'équilibre vis à vis des variables d'angle. Les fréquences caractéristiques du mouvement cyclotronique  $\omega_c$  et du mouvement de rebond  $\omega_b$  étant bien plus élevées que celle du mouvement de précession  $\omega_d$ , il est possible, si l'on souhaite uniquement s'intéresser à des phénomènes aux temps caractéristiques de l'ordre de la période de précession, de moyenner le mouvement cyclotronique et de rebond. La procédure qui permet de séparer puis de négliger le mouvement cyclotronique, beaucoup plus rapide que les autres mouvements, s'appelle la gyro-moyenne. Sans rentrer dans les détails, le modèle utilisée par TERESA est obtenu après une "double" gyro-moyenne sur les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Cette procédure permet d'obtenir l'hamiltonien d'une espèce  $s$ [7]

$$\bar{\bar{H}}_s = E(1 + e\Omega_d\psi) + eZ_s\bar{\bar{\Phi}}(\vec{J}, \alpha) \quad (1.15)$$

ainsi que l'équation de Vlasov doublement gyro-moyennée :

$$\frac{\partial \bar{\bar{f}}_s}{\partial t} - q_s \left\{ \bar{\bar{\Phi}}, \bar{\bar{f}}_s \right\} + \frac{\Omega_d E}{Z_s} \frac{\partial \bar{\bar{f}}_s}{\partial \alpha_3} = 0, \quad (1.16)$$

qui donne l'évolution de la fonction de distribution  $\bar{\bar{f}}_s$  des bananes. Ici, les grandeurs surmontées de deux barres sont les grandeurs doublement gyro-moyennées,  $\psi$  est le flux

magnétique poloïdal avec  $J_3 = q_s \psi$ ,  $E$  est l'énergie des particules de la population étudiée,  $Z_s$  est le degré d'ionisation de l'espèce  $s$  avec  $Z_e = -1$  et  $\bar{\Phi}$  le potentiel électrique doublement gyro-moyenné. On peut montrer que  $J_1$  et  $J_2$  sont des invariants et peuvent donc être considérés comme des paramètres, reliés respectivement au "pitch angle"  $\kappa$  (rapport entre les composantes perpendiculaire et parallèle -au champ magnétique- de la vitesse) et à l'énergie  $E$  [7].

Le formalisme angle action ainsi que la double gyromoyenne ont donc permis de passer d'une équation de Vlasov à 6 dimensions à une équation de Vlasov à 2 dimensions,  $\alpha_3$  et  $J_3$ . Afin de normaliser l'équation de Vlasov, effectuons les changements de variables suivants :

$$\boxed{\hat{E} = \frac{E}{T_0} \quad \hat{t} = \omega_0 t \quad \hat{\Omega}_d = \frac{\Omega_d T_0}{\omega_0} \quad \hat{\psi} = \frac{\psi}{L_\psi} \quad \hat{\Phi} = \frac{\Phi}{\omega_0 L_\psi} \quad \hat{f}_s = \frac{1}{n_{0,s}} \left( 2\pi \frac{T_{0,s}}{m_s} \right)^{\frac{3}{2}} \bar{f}_s}$$

où  $T_0$  est une température de référence arbitraire,  $\omega_0$  la fréquence de référence représentant la fréquence de précession toroïdale ionique à la température  $T_0$ ,  $L_\psi$  la valeur du flux magnétique poloïdal au bord du tokamak et où  $n_{0,s}$  est une densité de référence arbitraire.

L'équation de Vlasov adimensionnée s'écrit donc :

$$\frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{t}} - \left\{ \mathcal{J}_{0s} \hat{\Phi}, \hat{f}_s \right\} + \frac{\hat{\Omega}_d \hat{E}}{Z_s} \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \alpha} = 0 \quad (1.17)$$

Sans rentrer dans les détails,  $\mathcal{J}_{0s}$  est l'opérateur de double gyro-moyenne qu'on applique au potentiel  $\Phi$ . Dans la limite  $E = 0$ ,  $\mathcal{J}_{0s} = 1$ .

C'est l'équation 1.17 qui est utilisée dans le code TERESA.

Cependant nous verrons dans la section 2.2 que la double gyromoyenne, qui simplifie de l'équation de Vlasov, provoque la complication de l'équation de quasi-neutralité qui permet de fermer le système. En effet, il est plus simple d'obtenir  $\Phi$  à partir de  $f_s$  qu'à partir de  $\bar{f}_s$ .

# Chapitre 2

## Equation de Poisson

L'équation de Vlasov décrit l'évolution de la fonction de distribution  $f$ , mais implique les champs électromagnétiques (en général). Il est donc nécessaire d'obtenir ces champs à partir de  $f$ , afin d'obtenir un modèle auto-consistant.

### 2.1 Plasma 1D

Le potentiel électrique  $\Phi$  s'obtient grâce à l'équation de Poisson. Pour nous familiariser avec cette procédure, nous allons maintenant résoudre l'équation de Poisson d'un plasma 1D, avec une fonction de distribution des ions et des électrons définie par

$$f_i(x, v) = f_{M_i}(v) (1 + a(x))$$

$$f_e(v) = f_{M_e}(v)$$

avec  $f_{M_s}(v) \equiv \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{Ts}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_{Ts}}\right)^2}$ ,

$a(x) = 0, 2 \cos(kx) + 0, 1 \sin(kx) + 0, 3 \cos(5kx) + 0, 1 \sin(15kx)$ , pour une taille de système égale à  $L = \frac{2\pi}{k}$  et des conditions aux bords périodiques.

L'équation de Poisson associée s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0 a(x) \quad (2.1)$$

avec  $e$  la charge élémentaire.

Effectuons les changements de variables suivant afin d'adimensionner l'équation :

$$\boxed{\hat{x} = \frac{x}{x_0} \quad \hat{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0}} \text{ avec } x_0 = \frac{1}{k} = \frac{L}{2\pi} \text{ et } \phi_0 = \frac{en_0}{k^2 \epsilon_0}.$$

L'équation de Poisson adimensionnée associée s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial^2 \hat{x}} = -0, 2 \cos(\hat{x}) - 0, 1 \sin(\hat{x}) - 0, 3 \cos(5\hat{x}) - 0, 1 \sin(15\hat{x}) \quad (2.2)$$

Nous allons résoudre numériquement l'équation (2.2) via 2 méthodes : par FFT (Fast Fourier Transform) et par la méthode des différences finies sur une "grille" de 64 points. La solution obtenue pourra ainsi être comparée à la solution analytique,

$$\hat{\phi} = 0,2 \cos(\hat{x}) + 0,1 \sin(\hat{x}) + \frac{0,3}{25} \cos(5\hat{x}) + \frac{0,1}{225} \sin(15\hat{x}). \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Par FFT

La transformée de Fourier de la solution de l'équation de Poisson s'écrit

$$\phi_k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} n_0 \frac{a_k}{k^2} \text{ si } k \neq 0 \text{ et}$$

$$\phi_k = 0 \text{ si } k = 0$$

La solution s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse des  $\phi_k$ .

Superposons alors le potentiel obtenu par FFT et la solution analytique, fig (2.1a) :

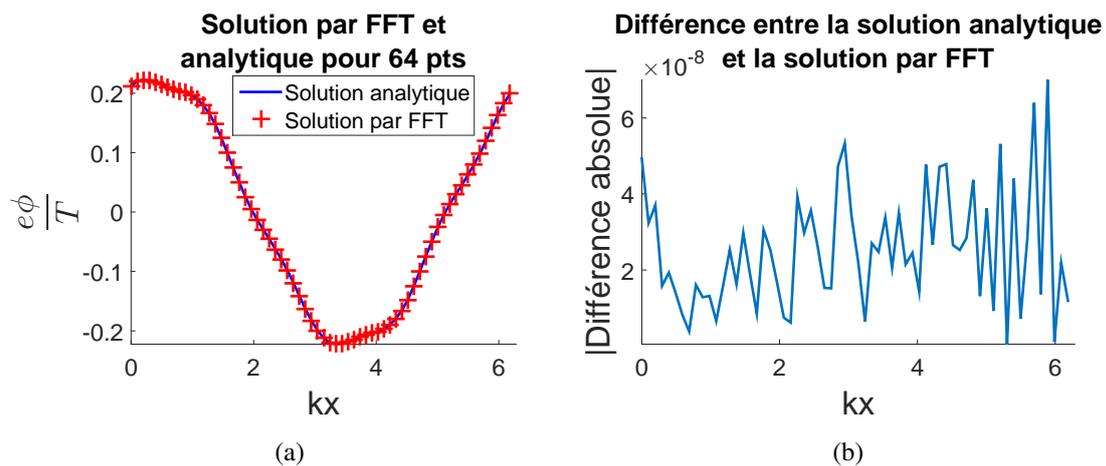


FIGURE 2.1 – (2.1a) Potentiel obtenu par FFT et analytiquement. (2.1b) Erreur absolue

La méthode de résolution par Fourier est une méthode exacte en théorie. L'écart absolu (fig 2.1b) entre les deux courbes représente l'erreur liée à la précision de la machine (environ  $10^{-8}$  pour une variable real simple precision en fortran).

### 2.1.2 Par différences finies

Résolvons maintenant l'équation de Poisson via la méthode des différences finies. Choisissons un schéma centré, d'ordre 2 sur  $N$  points :

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -a_i \quad (2.4)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , avec des conditions périodiques  $\phi_{-1} = \phi_{N-1}$  et  $\phi_{N+1} = \phi_1$ . Ce système de  $N$  équations se met sous forme matricielle, et la valeur du potentiel  $\phi$  est obtenue en inversant une matrice d'ordre  $N \times N$ .

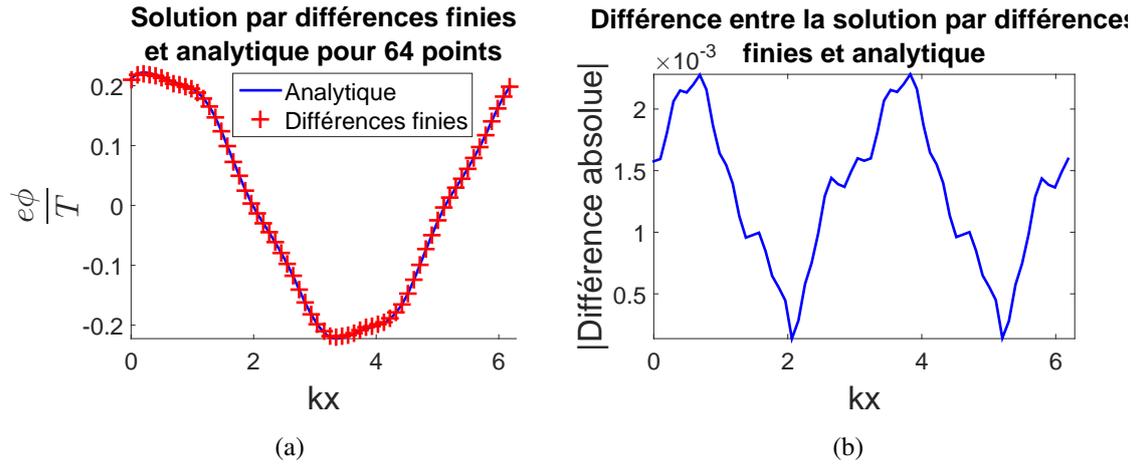


FIGURE 2.2 – (2.2a) Solution analytique de l'équation 2.3 et solution obtenue par différences finies. (2.2b) Erreur absolue

La figure 2.2 montre que la résolution de l'équation de Poisson par la méthode des différences finies donne une bonne approximation de la solution analytique pour un nombre de points égal à 64, avec un écart de l'ordre de  $10^{-3}$  avec la solution analytique.

## 2.2 Plasma 3D toroidal

Dans le chapitre précédent, nous avons donné l'équation de Vlasov utilisée par le code TERESA. Pour la résoudre il reste à déterminer le potentiel électrique  $\Phi$ .

On part de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\Delta\phi \quad (2.5)$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique et  $\rho$  est la densité de charges du plasma.

En utilisant les notations de la section 1.2, on peut écrire :

$$\rho = e \left( \sum_{j=1}^N Z_j n_j - n_e \right) \quad (2.6)$$

où  $N$  est le nombre d'espèces ioniques présentes dans le modèle.

En considérant qu'à l'équilibre, la densité de charge est nulle et en faisant apparaître les fluctuations de densité en notant pour une espèce  $s$  :

$$n_s = n_{eq,s} + \tilde{n}_s \quad (2.7)$$

L'équation de Poisson devient :

$$\lambda_D^2 \Delta \frac{e\Phi}{T_{eq,e}} = \left( \frac{\tilde{n}_e}{n_{eq}} - \frac{1}{n_{eq}} \sum_{j=1}^N Z_j \tilde{n}_j \right) \quad (2.8)$$

où  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_{eq,e}}{e^2 n_{eq}}}$  est la longueur de Debye électronique.

Cette équation de Poisson fait apparaître les fluctuations de densité de toutes les particules, aussi bien piégées que passantes des différentes espèces présentes dans le plasma. Cependant le code TERESA décrit la réponse des particules passantes aux fluctuations de potentiel électrique de manière adiabatique. Ainsi les fluctuations de densité peuvent s'écrire comme la somme de la fluctuation de la densité des particules piégées  $\tilde{n}'_s$  et de la fluctuation adiabatique des passantes qui sera proportionnelle à  $\Phi$  :

$$\tilde{n}_s = -\frac{q_s n_{eq,s} \Phi}{T_{eq,s}} + \tilde{n}'_s \quad (2.9)$$

Globalement on peut dire que le plasma est neutre, on peut ainsi remplacer l'équation de Poisson par l'équation de quasi-neutralité,

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_{eq}} = \frac{1}{n_{eq}} \sum_{j=1}^N Z_j \tilde{n}_j \quad (2.10)$$

Ainsi pour obtenir le potentiel électrique il faut connaître les fluctuations de densité des particules. Cela requiert des calculs relativement longs puisqu'il faut tout d'abord écrire la relation entre  $f_s$  et  $\bar{f}_s$  afin d'intégrer en variable angle-action la fonction de distribution non gyro-moyennée et obtenir la densité  $n_s$ [7]. Une fois la densité obtenue on peut

en utilisant 2.7 et le comportement adiabatique des particules passantes obtenir les fluctuations de densité de l'espèce  $s$ , et ainsi obtenir l'expression finale adimensionnée (en omettant la notation " $\hat{\phantom{x}}$ ") de la quasi-neutralité qui est utilisée dans le code TERESA :

$$C_1 (\Phi - \langle \Phi \rangle) + C_2 \Delta \Phi = \int_0^{+\infty} \mathcal{J}_{0i} \bar{f}_i E^{\frac{1}{2}} dE - \int_0^{+\infty} \mathcal{J}_{0e} \bar{f}_e E^{\frac{1}{2}} dE \quad (2.11)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont 2 constantes qui dépendent des paramètres macroscopiques du plasma d'équilibre.

Dans le code TERESA, l'équation de Poisson est résolue via FFT dans la dimension angulaire (périodique)  $\alpha$ , et via différences finies en  $\psi$  où des conditions de bord non périodiques sont présentes.

# Chapitre 3

## Trajectoire d'une particule dans un potentiel

Le but de ce stage est d'implémenter des particules test dans le code TERESA afin d'analyser la dynamique du plasma. Une particule test est une particule artificielle qui subit les effets des champs électromagnétiques sans y contribuer. Il est judicieux d'étudier au préalable 2 problèmes plus simples (section 3.1) avant d'aborder le travail de développement des particules test dans TERESA (section 3.2).

### 3.1 Potentiel imposé

#### 3.1.1 Une seule onde

Étudions d'abord le cas de la trajectoire dans l'espace des phases d'une particule dans un plasma 1D à potentiel imposé  $\phi(x, t)$  :

$$\phi(x, t) = \phi_0 \cos(kx - \omega t) \quad (3.1)$$

avec  $\phi_0$  l'amplitude constante de l'onde,  $k$  le nombre d'onde constant, et  $\omega$  la pulsation constante.

Afin de déterminer analytiquement la trajectoire d'une particule dans l'espace des phases, nous allons utiliser la conservation de l'énergie. L'énergie de la particule  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi(x, t)$  n'est pas conservée dans le référentiel du laboratoire. Cela est dû au fait que l'onde et la particule peuvent échanger de l'énergie. Cependant si l'on se place dans le référentiel de phase de l'onde,  $v' = v - \frac{\omega}{k}$ ,  $x' = x - \frac{\omega}{k}t$ , l'énergie de la particule s'écrit :

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}mv'^2 + q\phi_0 \cos(kx') = E_0 \quad (3.2)$$

et on montre que cette énergie est conservée :

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = mv' \frac{dv'}{dt} - q\phi_0 k \sin(kx') \frac{dx'}{dt} = v' q\phi_0 k \sin(kx') - v' q\phi_0 k \sin(kx') = 0 \quad (3.3)$$

D'où la vitesse  $v'$  de la particule dans le référentiel de l'onde qui s'écrit :

$$v'^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{2q\phi_0}{m} \cos(kx'), \text{ avec } E_0 \geq -|q\phi_0| \text{ une constante.} \quad (3.4)$$

Imposons  $q\phi_0 > 0$  (sans perte de généralité) on a alors :

$$v' = \sqrt{\frac{2q\phi_0}{m}} \sqrt{\frac{E_0}{q\phi_0} - \cos(kx')} \quad (3.5)$$

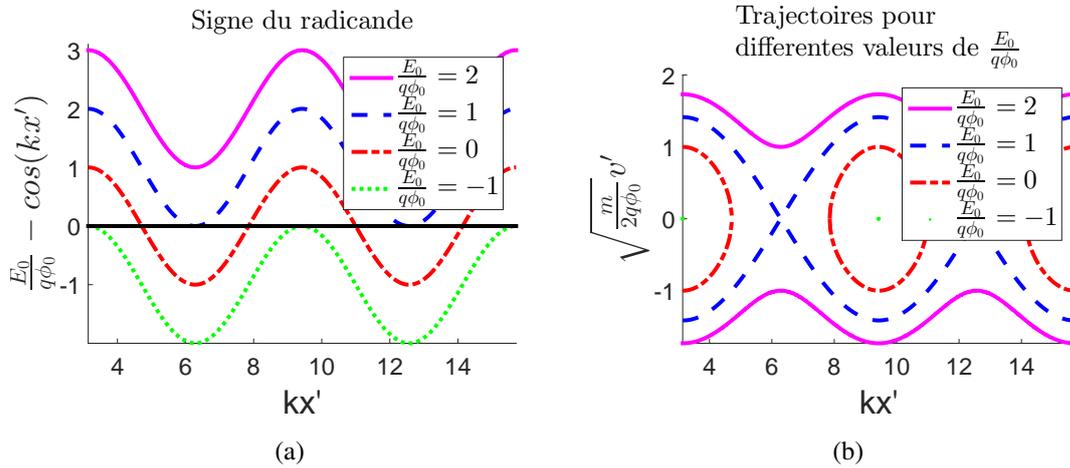


FIGURE 3.1 – (a) Signe du radicande. (b) Trajectoires dans l'espace des phases de 4 particules.

On voit sur la figure 3.1 que suivant la valeur de  $\frac{E_0}{q\phi_0}$  on peut distinguer plusieurs cas. Pour  $\frac{E_0}{q\phi_0} > 1$ , le radicande est toujours positif et la particule passante. Pour  $\frac{E_0}{q\phi_0} = 1$  on a le cas limite entre la particule passante et la particule piégée, appelée séparatrice. L'intérieur de la séparatrice est appelé "îlot". Pour  $-1 \leq \frac{E_0}{q\phi_0} < 1$  la particule est piégée. Sur la figure on a aussi représenté le cas particulier  $\frac{E_0}{q\phi_0} = -1$ , où on a une particule dont la vitesse reste exactement égale à la vitesse de phase de l'onde.

Afin de se familiariser avec le travail d'implémentation de particules test, nous avons développé en Fortran un code qui résout les équations du mouvement avec plusieurs ondes via la méthode Runge Kutta 4 pour obtenir les trajectoires de plusieurs particules. Nous avons obtenu des résultats en accord quantitatif avec la figure 3.1.

### 3.1.2 Un spectre de plusieurs ondes

Prenons maintenant un potentiel avec de multiples composantes.

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \cos(k_i x - \omega_i t + \alpha_i) \quad (3.6)$$

avec  $\omega(k) \approx \omega_p \left(1 + \frac{3}{2}(\lambda_D k)^2\right)$ , qui modélise la relation de dispersion des ondes de Langmuir (ondes électrostatiques omniprésentes dans les plasmas),

$k_1 = \frac{2\pi}{L}$ ,  $k_i = ik_1$ , et  $L$  la dimension du système.

$\omega_i = \omega(k_i)$  et  $\alpha_i$  les  $N$  phases choisies aléatoirement à  $t = 0$ .

En premier lieu nous choisissons 5 composantes pour  $\phi$ , dont le spectre est représenté sur la figure 3.2. Afin de rester dans le cadre décrit par l'équation de Vlasov, on doit satisfaire  $k_i \lambda_D \ll 1$ . On choisit  $k_1 = 10^{-2} \lambda_D^{-1}$ .

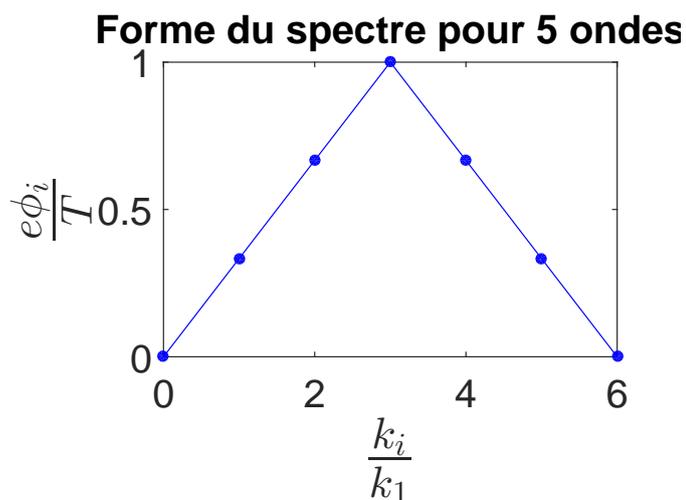


FIGURE 3.2 – Forme du spectre de  $\phi$  pour 5 ondes.

Contrairement au cas précédent à une seule onde, il n'existe pas de solution analytique aux équations du mouvement. Il s'agit donc de traiter le problème par la simulation numérique.

Après avoir effectué la normalisation suivante :

$\hat{x} = k_1 x$  |  $\hat{k} = \frac{k}{k_1}$  |  $\hat{t} = \omega_p t$  |  $\hat{v} = \frac{k_1 v}{\omega_p}$  |  $\hat{\phi} = \frac{e\phi}{T}$  où  $T = m\omega_p^2 \lambda_D^2$ , on obtient les équations du mouvement normalisées :

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i \hat{k}_i (k_1 \lambda_D)^2 \sin \left( \hat{k}_i \hat{x} - \left( 1 + \frac{3}{2} (k_1 \lambda_D \hat{k}_i)^2 \right) \hat{t} + \alpha_i \right) \quad (3.8)$$

Même si avec plusieurs ondes il n'y a plus d'îlots au sens strict de la figure 3.1, il est judicieux de calculer analytiquement la position des îlots "virtuels", c'est à dire en imaginant chaque composante  $\phi_i$  isolée, afin de discerner les zones plutôt passantes des zones plutôt piégées.

D'après l'équation 3.5 et la figure 3.1, la taille  $\Delta v$  d'un îlot adimensionnée s'écrit :

$$\Delta \hat{v}_i = 4k_1 \lambda_D \sqrt{\hat{\phi}_i} \quad (3.9)$$

et la vitesse moyenne de l'îlot :

$$\hat{v}_i = \hat{k}_i^{-1} \left( 1 + \frac{3}{2} (k_1 \lambda_D \hat{k}_i)^2 \right) \quad (3.10)$$

Pour vérifier ce résultat et le code de simulation de trajectoires, affichons les trajectoires dans l'espace des phases pour l'instant avec une seule composante d'onde parmi les 5, donc un seul îlot, et avec 6 particules, figure 3.3.

Les trajectoires prennent une apparence différente que sur la figure 3.1, car nous ne nous plaçons plus dans le référentiel de l'onde, mais dans celui du laboratoire. En effet, se mettre dans le référentiel d'une onde parmi plusieurs autres qui n'ont pas la même vitesse de phase ne serait pas judicieux.

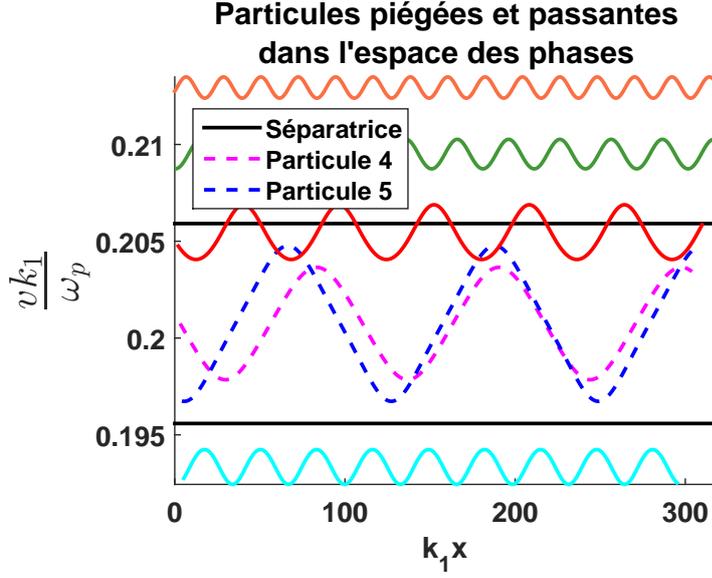


FIGURE 3.3 – 6 particules, mais avec une seule composante d’onde d’amplitude  $\hat{\phi}_j = \sqrt{\frac{0,2}{3}}$  et  $k_j = 5$ , les particules piégées dans l’îlot sont les particules 4 et 5. Les autres particules sont passantes. Les deux segments horizontaux délimitent l’étendue en vitesse de l’îlot de piégeage.

Une façon de vérifier le résultat obtenu à la figure 3.3 est de calculer la “fréquence” du mouvement adimensionnée  $\hat{\omega}_b$ .

On obtient :

$$\hat{\omega}_{b_j} = \frac{\omega_{b_j}}{\omega_p} = k_1 \lambda_D \frac{k_j}{k_1} \sqrt{\frac{e\phi}{T}} = \hat{k}_j k_1 \lambda_D \sqrt{\hat{\phi}_j} = 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{0,2}{3}} \approx 1,29 \cdot 10^{-2} \quad (3.11)$$

La période du mouvement est donc  $\hat{T}_{b_j} = \frac{2\pi}{\hat{\omega}_{b_j}} \approx 487$ .

Sur la figure 3.3 on peut estimer la distance entre 2 maxima en vitesse de la particule 4 : environ 100, ce qui est environ égal à  $0,2\hat{T}_{b_j} \approx 97,3$ .

C’est bien la valeur de la distance entre deux périodes du mouvement pour une particule piégée telle que la particule 4 que l’on retrouve sur la figure 3.3.

Traçons maintenant les trajectoires de 6 particules en présence des 5 composantes d’ondes (figure 3.4). D’après l’équation 3.9, la taille d’un îlot dépend de  $\hat{\phi}_i$ . Afin d’observer un mouvement turbulent de quelques particules, nous souhaitons que certains îlots se chevauchent. Pour y arriver, on augmente la valeur des  $\hat{\phi}_i$ . Ici on choisit  $\hat{\phi}_3 = 0,8$  et  $k_1 \lambda_D = 10^{-3}$ . La zone en vitesse où les îlots se chevauchent est une zone de turbulence.

Comme attendu, on observe que la trajectoire des particules dans cette zone de turbulence est chaotique. Dans ce cas, l'importance d'un schéma numérique précis devient primordiale. Dans le futur on pourra étudier si le schéma explicite Runge-Kutta 4 est bien adapté.

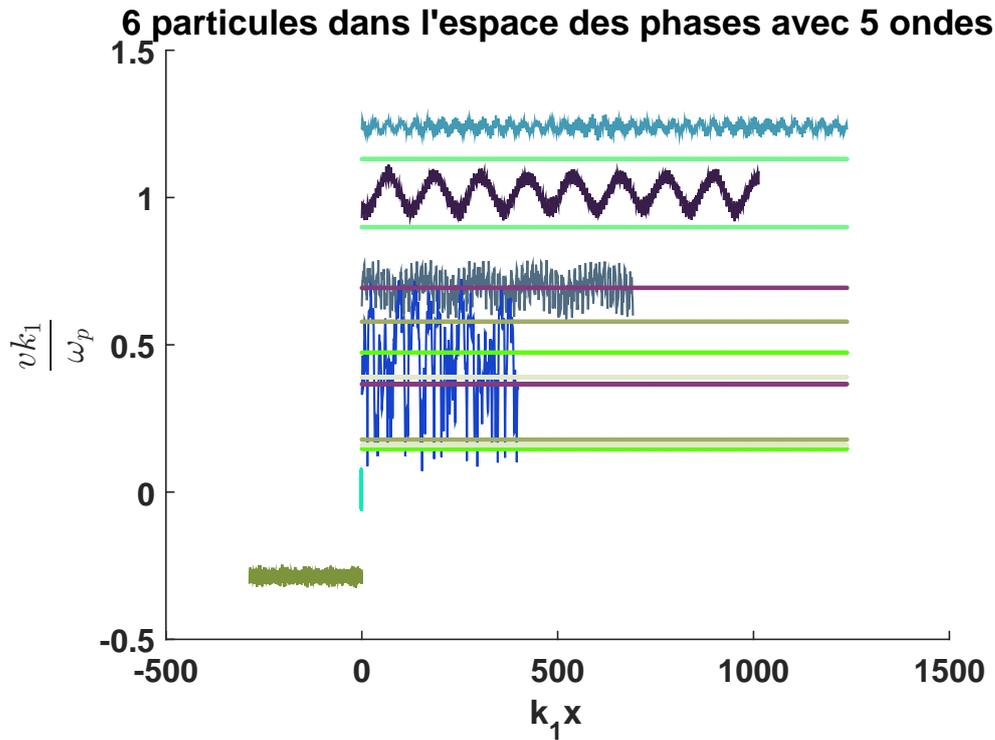


FIGURE 3.4 – 6 particules dans l'espace des phases pour un paquet de 5 ondes où certains ilots se chevauchent et créent une zone de turbulence pour les particules

Dans un deuxième temps, on souhaite augmenter le nombre de composantes de  $\phi$ , et calculer le coefficient de diffusion en vitesse des particules dans la zone turbulente en considérant que leur mouvement s'approche d'une marche aléatoire. On peut trouver dans la littérature[8] l'équation analytique de la diffusion en vitesse que l'on pourra normaliser et simplifier pour l'instant :

$$\hat{D} = \sum_i (\lambda_D k_1)^4 \hat{k}_i^2 \hat{\phi}_i \quad (3.12)$$

Le calcul avec 111 ondes donne  $\hat{D} \approx 2,05 \cdot 10^{-7}$ .

Comparons ce résultat théorique avec le résultat que l'on peut obtenir numériquement

en calculant [9] :

$$D = \frac{\Delta v^2}{2\Delta t} \quad (3.13)$$

qui est le coefficient de diffusion d'une marche aléatoire, avec  $\Delta v = v - v_0$ ,  $v_0 \equiv v(t = 0)$ , et où  $\Delta t$  doit être choisit empiriquement, c'est à dire assez grand pour obtenir une bonne statistique, on pourra étudier s'il existe un critère maximal ou minimal. En effet chaque onde présente une phase aléatoire. Afin d'obtenir une bonne statistique, on moyenne ce coefficient de diffusion sur un grand nombre de particules qui auront des vitesses initiales au sein de la zone de turbulence.

Traçons maintenant la moyenne des  $v - v_0$  sur un grand nombre de particules, ainsi que la moyenne des carrés des  $v - v_0$  en fonction du temps, figure 3.5.

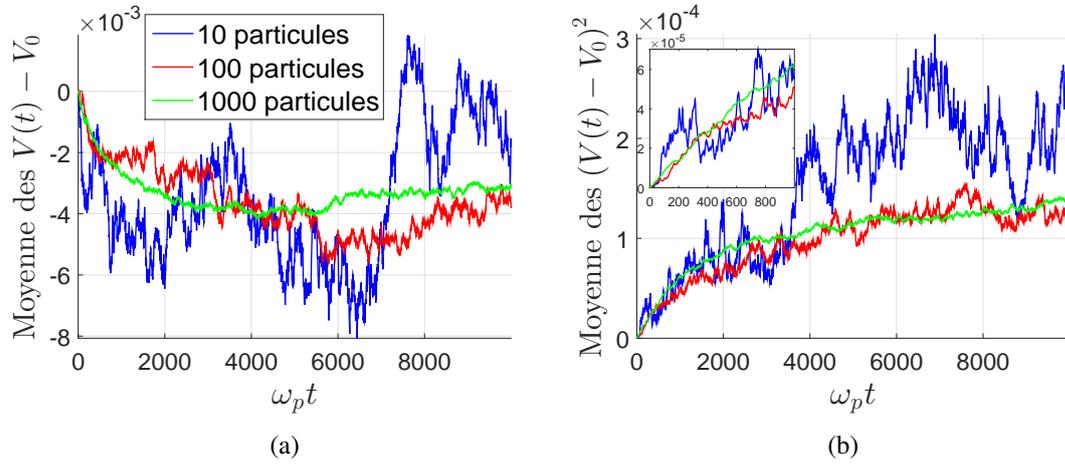


FIGURE 3.5 – 111 ondes ; pas de temps  $dt = 10^{-3}$ . (3.5a) Moyenne des  $v - v_0$ . (3.5b) moyenne des carrés des  $v - v_0$  en fonction du temps, sur 10, 100 et 1000 particules. Encart : zoom sur  $\omega_p t < 1000$ .

Lorsque le nombre de particules test augmente, la moyenne des  $v - v_0$  doit tendre vers 0 en raison du caractère de marche aléatoire. Ici on s'aperçoit que pour 1000 particules, on tend à se rapprocher de zéro vers la fin de la simulation mais avec une erreur relative de  $\frac{3 \cdot 10^{-3}}{2,88 \cdot 10^{-2}} \approx 10\%$ . Or avec 1000 particules, on s'attend à une erreur relative de  $\frac{\sqrt{1000}}{1000} \approx 3,2\%$ . On suggère qu'augmenter le nombre de composantes du paquet d'onde est important afin de rester dans le cas de la marche aléatoire, afin d'avoir une meilleure statistique sur les phases aléatoires des ondes. Cela pourra être étudié ultérieurement (la

simulation pour 1000 particules jusqu'à  $t=10000$  a demandé 65 heures de calcul sur un seul processeur). Pour la moyenne des carrés des  $v - v_0$ , fig 3.5b, on observe une augmentation puis une saturation. La saturation à  $(v - v_0)^2 \approx 10^{-4}$  s'explique par la taille limitée de la zone de turbulence pour 111 ondes : de l'ordre de  $10^{-2}$  en vitesse, qui au carré donne la valeur de la saturation pour les  $(v - v_0)^2$ . Grâce à la phase linéaire d'augmentation entre  $t = 0$  et  $t \approx 700$  on peut en déduire l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion, qu'on trouve de l'ordre de  $10^{-7}$ , ce qui correspond à l'ordre de grandeur obtenu par la solution analytique.

Après cette analyse d'ordre de grandeur, globale dans le sens où la moyenne a été faite sur toute la zone de turbulence, nous effectuons ensuite une analyse plus précise, et plus locale (en vitesse).

Reprenons l'équation 3.12 mais dans sa version complète[8], qui dépend de la vitesse :

$$\hat{D} = \sum_i (\lambda_D k_1)^4 \hat{k}_i^2 \hat{\phi}_i \left( \frac{\hat{\gamma}_i}{(\hat{k}_i \hat{v} - \hat{\omega}_i)^2 + \hat{\gamma}_i^2} + \pi \delta(\hat{k}_i \hat{v} - \hat{\omega}_i) \right) \quad (3.14)$$

avec  $\gamma_i$  le taux de croissance et  $\hat{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega_p}$  la fréquence de l'onde  $i$ .

Commençons par représenter le coefficient de diffusion théorique en fonction de la vitesse de phase des ondes, pour 111 ondes et un taux de croissance  $\gamma_i = 0$ , et avec le spectre de  $\phi$  toujours en forme de triangle mais avec son maximum à 0.8 afin de rester dans le cadre de l'équation de Vlasov.

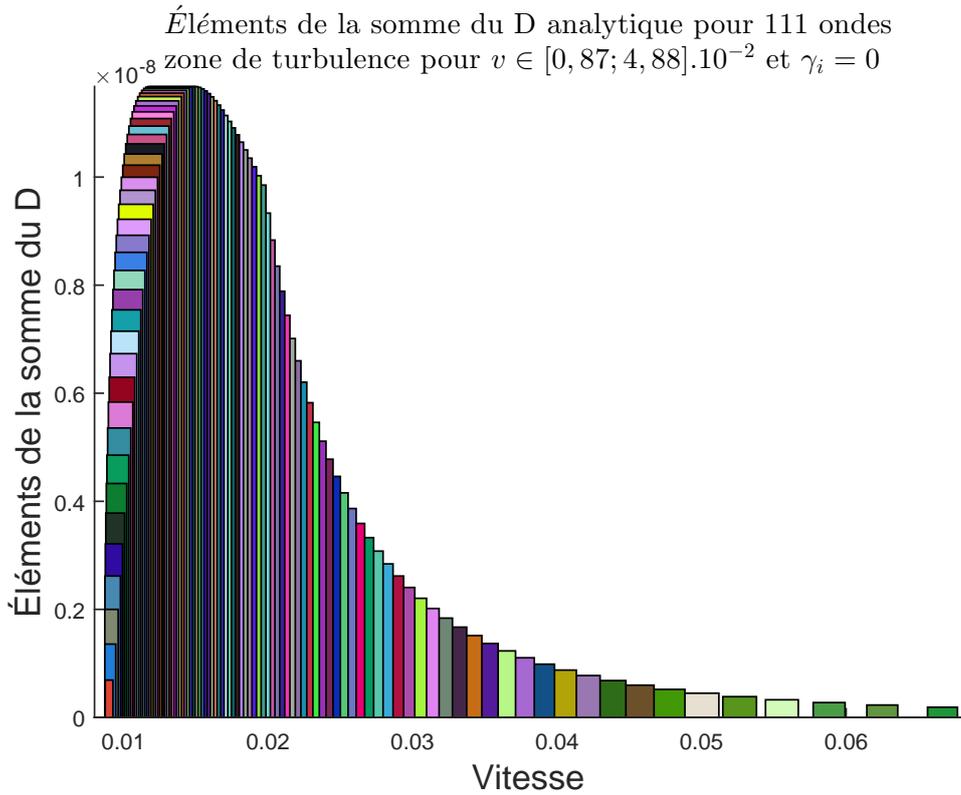


FIGURE 3.6 – Éléments de la somme du coefficient de diffusion analytique, Eq. (3.14), pour 111 ondes, la zone de turbulence est présente pour un  $v \in [0,87;4,88].10^{-2}$  et  $\gamma_i = 0$ .

Sur la figure 3.6 est affiché la contribution au coefficient de diffusion de chacune des 111 ondes, la largeur de chaque barre correspondant à la taille l'ilot  $\Delta\hat{v}$ . La zone où les barres des coefficients de diffusion se recouvrent correspondent à la zone de turbulence. Pour une vitesse  $v$  appartenant à la zone de turbulence, on retrouve le coefficient de diffusion en additionnant la valeur de toutes les barres qui se chevauchent à cette vitesse  $v$ .

Nous allons maintenant faire plusieurs simulations avec  $10^4$  particules sur un temps  $t = 1000$ , où chacune des  $10^4$  particules partira d'une vitesse initiale appartenant à la zone de turbulence ( $v \in [0,87;4,88].10^{-2}$ ). Nous découperons cette zone de turbulence en 7 plus petites et changerons à chaque fois  $v_0$  afin de bien couvrir toute la zone de turbulence, puis on représentera la moyenne sur  $10^4$  particules des  $(v(t) - v(0))^2$ , pour

chacune des 7 vitesses initiales. On répètera l'ensemble de cette procédure 3 fois, fig 3.7.

Sur les figures 3.7a, 3.7b et 3.7c on devrait obtenir que les  $(v(t) - v(0))^2$  moyens qui croissent le plus vite par rapport aux autres sont les courbes ayant une vitesse initiale qui correspond au "pic" de la figure 3.6.

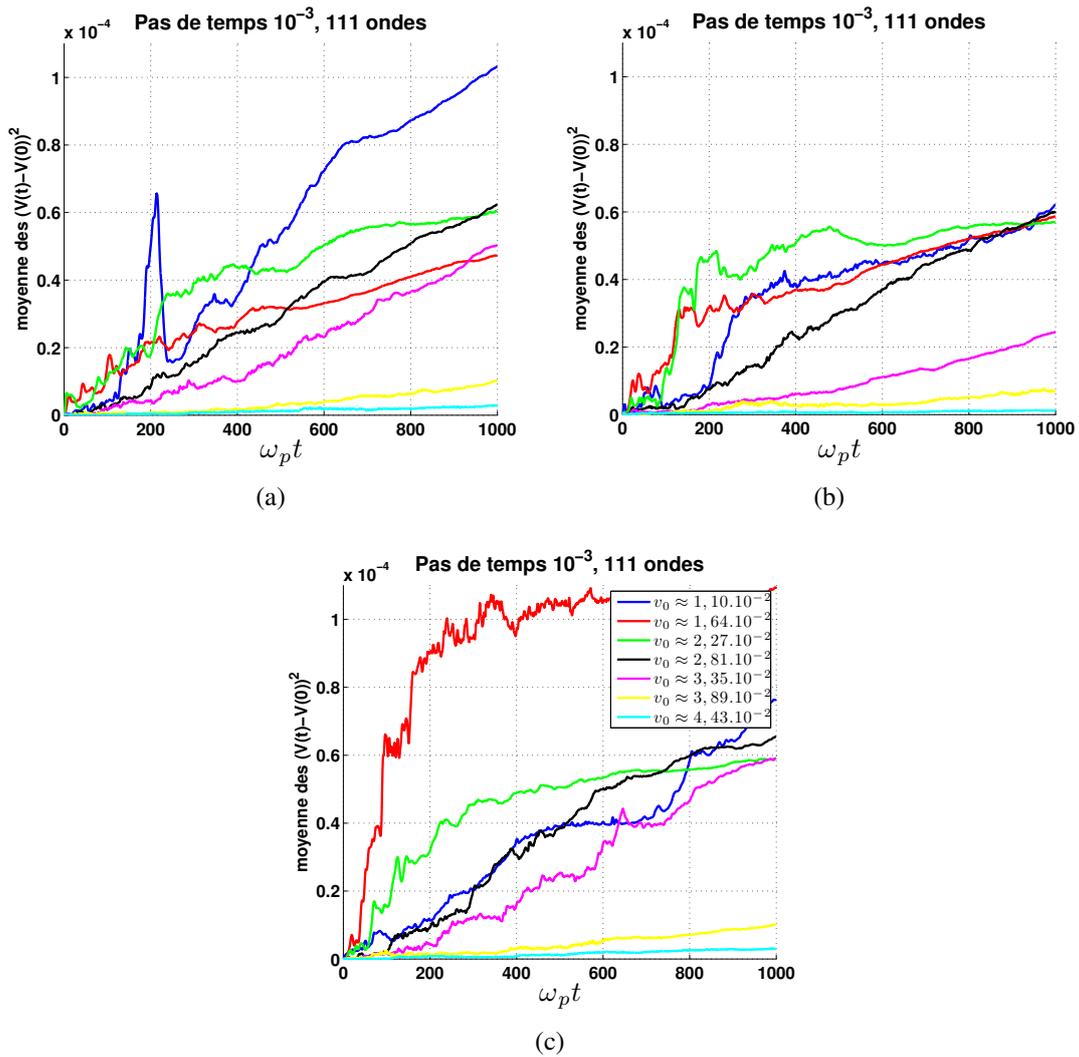


FIGURE 3.7 – 3 moyennes des  $(v(t) - v(0))^2$  sur  $10^4$  particules, 111 ondes, pour 7  $v(0)$  différents.

Cependant, sur trois simulations différentes on se rend compte que la moyenne

change de façon importante à chaque fois. On peut raisonnablement penser que le caractère aléatoire n'est pas respecté à cause du nombre d'ondes trop faible mais cela reste à confirmer dans un travail futur où nous reproduirons l'étude avec  $10^3$  voire  $10^4$  ondes. Ici nous n'obtenons qu'une estimation assez peu précise du coefficient de pseudo-diffusion.

Par la suite nous étudierons la turbulence de manière auto-cohérente, via le code numérique TERESA, c'est à dire que l'amplitude du potentiel dépendra du temps. L'étude réalisée dans cette partie nous informe déjà que l'analyse de la diffusion ne pourra se faire que dans des cas où le nombre d'ondes instables est suffisamment élevé.

### 3.2 Potentiel auto-consistant

Nous allons maintenant appliquer les outils étudiés dans les sections précédentes au code gyrocinétique TERESA, qui simule la fonction de distribution et le potentiel électrique de manière auto-consistante. Nous souhaitons obtenir les trajectoires de particules test dans l'espace des phases. Cependant cette fonctionnalité n'était pas présente dans TERESA. La dernière partie de mon travail a été d'implémenter les trajectoires de particules test.

Nous avons vu dans la section 1.2 que le modèle comprend 2 dimensions  $\alpha$  et  $\psi$  et 2 paramètres, l'énergie  $E$  et le "pitch angle"  $\kappa$ .

Le code TERESA crée une grille sur laquelle  $f$  et  $\Phi$  sont discrétisés. Les nombres de points de grille ainsi que les valeurs possibles sont les suivants :

"Dimension"	nombre de points de grille	valeurs comprises entre
$\alpha$	257	$[0; 2\pi]$
$\psi$	257	$[0; 1]$
$\kappa$	1	$[0; 1]$
$E$	96	$[0; 20]$

La première étape dans l'implémentation des particules test dans TERESA, est de choisir comment se fera l'initialisation des particules test. On souhaite que la grille sur laquelle les particules évoluent coïncide avec la grille en  $\alpha$ ,  $\psi$ ,  $\kappa$  et  $E$ . Les particules sont initialement placées de cette façon :

"Dimension"	Nombre de particule dans cette dimension	Position initiale comprise entre
$\alpha$	10	$[0; \frac{9}{10}2\pi]$
$\psi$	5	$[0, 1; 0, 9]$
$\kappa$	1	1
$E$	96	$[0; 20]$

où les positions initiales peuvent-être espacées soit régulièrement, soit aléatoirement dans l'intervalle. La méthode choisie pour identifier chaque particule a été de créer un tableau à 5 dimensions :  $10 \times 5 \times 1 \times 96 \times 2$  où les 4 premières dimensions définissent une unique particule (la numérote) et permettront d'enregistrer l'origine de chaque particule à tout instant, et où la dernière indique sa valeur en  $\psi$  et en  $\alpha$ .

Déterminons à présent les équations du mouvement normalisées en angle-action des particules test à partir de l'hamiltonien 1.15,

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \alpha}(\alpha, \psi, \kappa, E) \quad (3.15)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{E}{Z_s} \Omega_d + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \psi}(\alpha, \psi, \kappa, E) \quad (3.16)$$

Nous choisissons de calculer à chaque pas de temps de la simulation le nouveau  $\psi$  et  $\alpha$  de chaque particules, en résolvant les équations 3.15 et 3.16 via le schéma explicite Runge-Kutta 4.

Après chaque pas de temps, les nouvelles positions ( $\alpha'$  et  $\psi'$ ) des particules ne tomberont pas exactement sur la grille où  $\Phi$  est discrétisé. Afin de connaître le potentiel ressenti par les particules on utilise une fonction d'interpolation déjà implémentée dans TERESA.

Affichons maintenant les résultats des simulations de TERESA avec les particules test au premier plan, et le potentiel électrique en fond, fig 3.8.

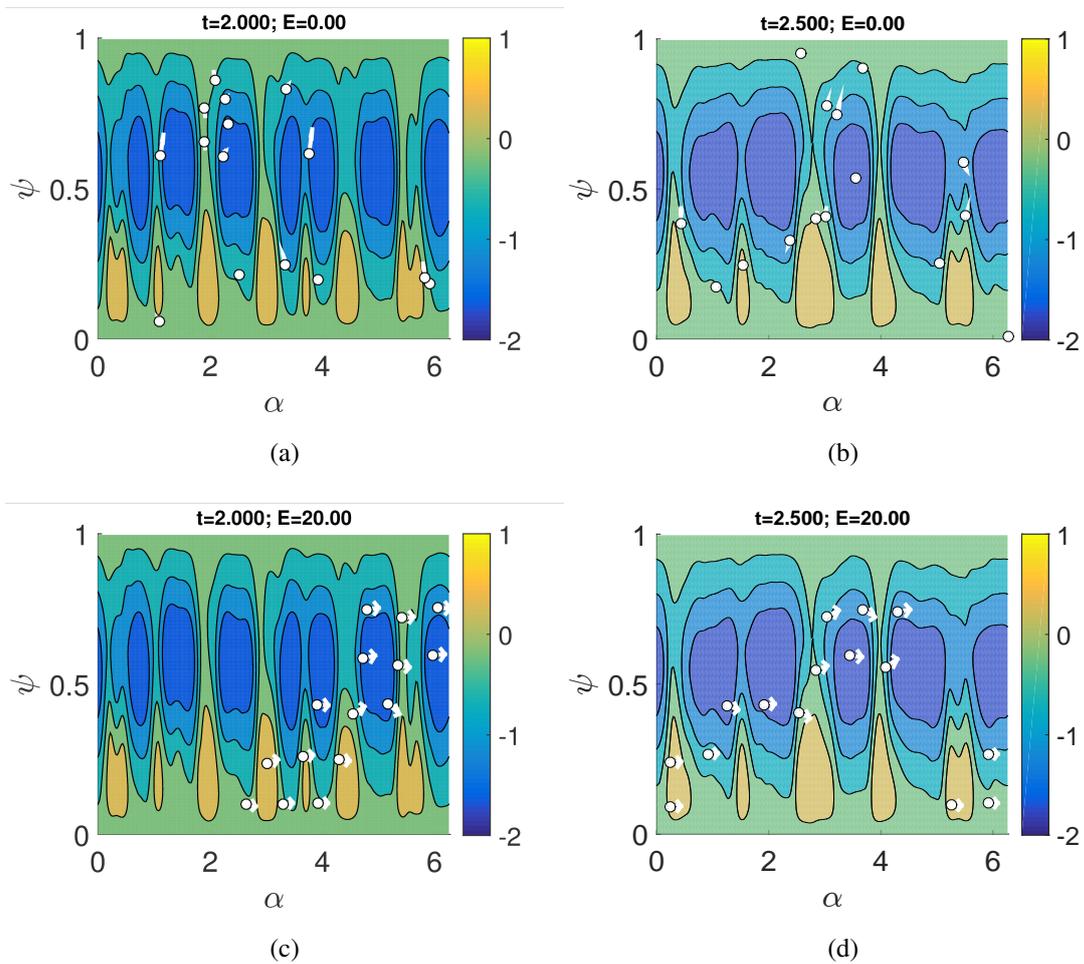


FIGURE 3.8 – Résultats d’une simulation de TERESA à  $t = 2$  et  $t = 2,5$ , avec le  $\Phi$  non gyromoyenné en fond, et les particules test au 1er plan, pour une énergie initiale de 0, puis de 20.

Les particules sont affichées sous la forme de cercles blancs, et les flèches indiquent où sera la position de ces particules dans 4 pas de temps pour les figures 3.8a et 3.8b, et dans seulement 1 pas de temps pour les figures 3.8c et 3.8d, afin de voir leurs trajectoires. Une énergie initiale de 0 devrait permettre de voir que les particules suivent parfaitement les contours des lignes d’isopotential, or ce n’est peut-être pas le cas ici. En affichant une animation temporelle de ces figures, on aperçoit que certaines particules test semblent franchir des lignes d’isopotential. Pour une énergie initiale de 20, les particules test ne répondent que très peu aux effets du potentiel électrique, ce qui semble vérifié ici.

Afin de vérifier que les particules test sont bien implantées dans le code nous allons calculer également à chaque pas de temps l'hamiltonien de chaque particule,

$$\hat{\hat{H}}_s = \hat{E} (1 + \Omega_d \hat{\psi}) + Z_s \hat{\hat{\Phi}} (\alpha, \hat{\psi}, \kappa, \hat{E}) \quad (3.17)$$

où  $\hat{\hat{\Phi}}$  sera interpolé sur la grille de la même façon qu' $\alpha$  et  $\psi$ .

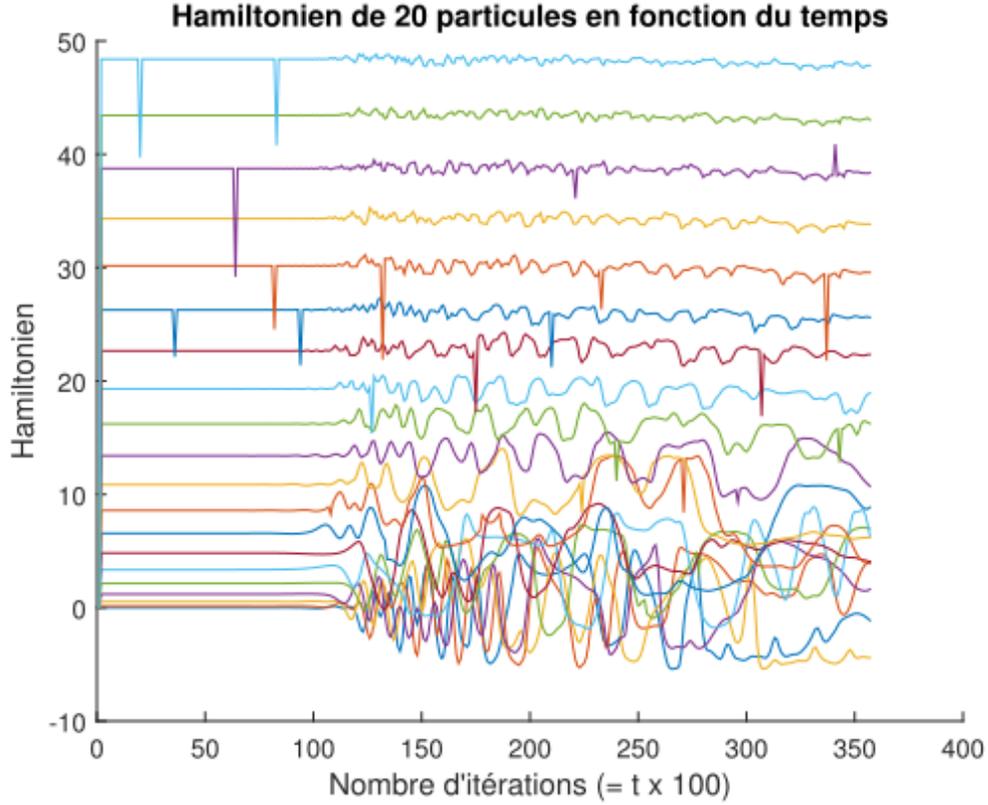


FIGURE 3.9 – Hamiltonien interpolé de 20 particules de différentes énergies et pour  $\alpha = 5$ ,  $\psi = 3$  et  $\kappa = 1$ .

Regardons qu'en est-il de la conservation de l'hamiltonien des particules,

$$\frac{d\bar{\bar{H}}}{dt} = E\Omega_d \frac{d\bar{\psi}}{dt} + Z_s \frac{d\bar{\bar{\Phi}}}{dt} = -E\Omega_d \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial \alpha} + Z_s \left( \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial t} \right) = Z_s \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial t} \quad (3.18)$$

L'hamiltonien des particules n'est pas conservé. Dans la figure 3.9 on distingue deux phases dans le temps de la simulation qui correspond à la phase de croissance linéaire

des modes de  $\Phi$  jusqu'à  $t \approx 1,1$  puis la phase de saturation de  $\Phi$ . On observe sur la figure 3.9 que dans la phase de saturation, l'hamiltonien des particules ayant une énergie initiale faible a tendance à fluctuer de façon plus importante que pour les particules à fortes énergies. Cela suggère que les particules avec  $E \gg 1$  n'interagissent que très peu avec le champ électrique. Cependant, les pics dans la figure 3.9 sont probablement dû à une erreur d'implémentation de ce diagnostique, qu'il nous reste à identifier.

# Chapitre 4

## Conclusion

Afin de préparer l'étude de la turbulence générée par les particules piégées au sein d'un plasma de tokamak via le code TERESA, nous avons abordé le formalisme angle-action et avons observé son efficacité (analytique et numérique), ainsi que diverses méthodes de résolution numérique de système d'équations différentielles comme la méthode par FFT ou par différences finies via des schémas numériques tels que Runge-Kutta 4 ou Euler Forward.

Grâce aux codes numériques que j'ai développé (à partir de fichiers vierges), nous avons aussi étudié les trajectoires dans l'espace des phases de particules soumises au potentiel d'une seule onde, puis à un spectre de plusieurs ondes, ce qui a permis de se familiariser avec les îlots de piégeage. Nous avons aussi créé une zone de turbulence où les particules suivent un mouvement chaotique proche d'une marche aléatoire, tout en montrant les limites du caractère aléatoire de la marche. Ceci a permis ensuite d'obtenir un ordre de grandeur du coefficient de diffusion en vitesse dans la zone de turbulence et de le comparer avec le résultat théorique.

Une part importante du travail que j'ai effectué dans ce stage a été ma contribution au développement d'un gros code ( $\approx 27000$  lignes) de calcul, TERESA. C'est une première contribution qui permettra de suivre les trajectoires de particules test. Cela permettra d'étudier les phénomènes de piégeage, de diffusion, de mouvement balistique, et d'autres, qui peuvent apparaître au sein d'une simulation de plasma de fusion.

Il reste cependant encore du travail pour vérifier la fiabilité des particules test, quantifier leur précision en fonction des divers paramètres, pour paralléliser les calculs des équations du mouvement ou pour analyser plus en détail les résultats obtenus.

# Annexe A

## Calcul de J et $\alpha$

Les coordonnées et impulsions généralisées s'écrivent  $q = x$  et  $p = mv$ . L'action J s'écrit

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{m}{2\pi} \oint vdx \quad (\text{A.1})$$

Or, l'énergie de l'hamiltonien non perturbé s'écrit

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (\text{A.2})$$

On peut donc déterminer la vitesse  $v$

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m} \left(1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E_0}\right)} = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = |\cos(\alpha)| \quad (\text{A.3})$$

Grâce au changement de variable on peut calculer l'intégrale de 0 à  $2\pi$

$$J = \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2E_0}{\omega} \cos^2(\alpha) d\alpha = \frac{E_0}{\omega} = \frac{mK^2}{2\omega} \quad (\text{A.4})$$

De plus

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{E_0}{\omega}\right)} = \omega \frac{\partial H}{\partial E_0} = \omega \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dJ}{dt} = 0 \quad (\text{A.6})$$

# Annexe B

## Equation de Poisson

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$n_e = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(v)dv = n_0$$

$$n_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x,v)dv = n_0(1 + a(x))$$

$$\Delta\phi = -\frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e) = -\frac{en_0a(x)}{\epsilon_0}$$

$$\Delta\phi = \frac{en_0}{\epsilon_0}(-0,2 \cos(kx) - 0,1 \sin(kx) - 0,3 \cos(5kx) - 0,1 \sin(15kx))$$

avec  $e = 1,60217662 \cdot 10^{-19}$  coulomb

# Bibliographie

- [1] J. D. Lawson, *Some Criteria for a Power producing thermonuclear reactor*, Proceedings of the Physical Society. Section B, Volume 70, 6 (December 1955).
- [2] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbeta, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, E. Sonnendrücker, J. Vaclavik, L. Villard, *A drift-kinetic Semi-Lagrangian 4D code for ion turbulence simulation*, J. Comput. Phys. 217, 395 (2006).
- [3] G. Dif-Pradalier, V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, Ph. Ghendrih, *Interplay between Gyrokinetic Turbulence, Flows, and Collisions : Perspectives on Transport and Poloidal Rotation*, PRL 103, 065002 (2009).
- [4] Thomas Cartier-Michaud, Philippe Ghendrih, Virginie Grandgirard, Guillaume Latu, *Optimizing the parallel scheme of the Poisson solver for the reduced kinetic code TERESA*, ESAIM : PROCEEDINGS, December 2013, Vol. 43, p. 274-294.
- [5] T. Cartier-Michaud, P. Ghendrih, Y. Sarazin, J. Abiteboul, H. Bufferand, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, V. Grandgirard, G. Latu, C. Norscini, C. Passeron, P. Tamain, *Projection on Proper elements for code control : Verification, numerical convergence, and reduced models. Application to plasma turbulence simulations*, PHYSICS OF PLASMAS 23, 020702 (2016).
- [6] T. Drouot, E. Gravier, T. Reveille, M. Sarrat, M. Collard, P. Bertrand, T. Cartier-Michaud, P. Ghendrih, Y. Sarazin, X. Garbet, *Global gyrokinetic simulations of trapped-electron mode and trapped-ion mode microturbulence*, PHYSICS OF PLASMAS 22, 082302 (2015).
- [7] Thomas Drouot, *Étude de la turbulence liée aux particules piégées dans les plasmas de fusion*, Thèse de doctorat en physique, Nancy, Université de Lorraine (2015).
- [8] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, *Nonlinear plasma theory*, W. A. Benjamin, Inc. (1969).
- [9] Albert Einstein, *Investigations on the theory of the Brownian Movement*, Dover Publications, Inc (1956).