



HAL
open science

Une approche par la théorie des jeux du problème du choix des niveaux nationaux d'émissions de CO₂

Bouchra Mroué, Anthony Couthures, Samson Lasaulce, Irinel-Constantin Morarescu

► **To cite this version:**

Bouchra Mroué, Anthony Couthures, Samson Lasaulce, Irinel-Constantin Morarescu. Une approche par la théorie des jeux du problème du choix des niveaux nationaux d'émissions de CO₂. XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, GRETSI 2023, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04216596

HAL Id: hal-04216596

<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-04216596>

Submitted on 25 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche par la théorie des jeux du problème du choix des niveaux nationaux d'émissions de CO₂¹

Bouchra MROUÉ Anthony COUTHURES Samson LASAULCE Irinel-Constantin MORĂRESCU

Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000, Nancy, France

Résumé – Dans ce travail, nous proposons un modèle de jeu statique, dans lequel les joueurs sont les gouvernements, l'action d'un joueur est le niveau d'émission de CO₂ qu'il prévoit d'émettre jusqu'aux prochains accords internationaux, et les utilités représentent un compromis entre le bénéfice qui dépend des émissions et le dommage global causé par le changement climatique. Nous étudions l'existence d'un équilibre de Nash du jeu proposé et donnons des conditions suffisantes pour son unicité.

Abstract – In this work, we propose a static game model, in which the players are the governments, the action of a player is the level of CO₂ emissions they plan to emit until the next international agreements and the utilities represent a trade-off between the benefit that depends on emissions and the overall damage caused by climate change. We study the existence of a Nash equilibrium of the proposed game and give sufficient conditions for its uniqueness.

1 Introduction

L'édition 2022 du Gretsia a marqué un tournant dans la communauté traitement du signal et de l'image. Après un été chaud et marqué par des incendies dévastateurs, le regard des participants sur les travaux scientifiques qui concernaient le climat, l'énergie et l'environnement a été plus attentif que jamais. Une question naturelle s'est posée. Comment notre communauté peut contribuer à faire face à ces défis? Le présent article s'inscrit dans cette volonté, celle d'utiliser notre savoir-faire méthodologique pour aider à appréhender et résoudre les défis qui se posent à nous. Plus spécifiquement, l'intention des auteurs est de montrer comment les outils de la théorie des jeux, de l'optimisation, des systèmes dynamiques, l'analyse numérique peuvent contribuer à aider à la décision en termes de choix de niveau d'émission de CO₂ au niveau des pays. La théorie des jeux apparaît naturellement car chaque pays reste largement souverain dans ce choix et analyser un équilibre de Nash d'un jeu revient à considérer une solution de décarbonation que chaque pays a intérêt à suivre.

Alors qu'élaborer des stratégies de réduction d'émissions qui soient suivies est devenu un impératif, on s'aperçoit, en inspectant la littérature sur les stratégies de décarbonation, que la très grande majorité des analyses climato-socio-économiques fournissent des stratégies de décarbonation empiriques ou ad hoc (comme par exemple [6], [17]). D'un point de vue formel, la littérature est très peu étayée. Parmi les travaux formels on peut trouver [1] où est étudié le problème de coalition sans considérer la dynamique des températures atmosphérique et océanique dans les fonctions de dommages économiques et social. Les auteurs de [3] présentent bien un cadre théorique de jeu où une fonction d'endommagement dépend de la température mais aucune analyse du jeu est fournie. Dans [4], Chander étudie la stabilité des coalitions entre pays dans le cadre de la problématique du changement climatique mais il n'utilise pas les outils de la théorie des jeux et ne réalise pas l'analyse

des équilibres. Contrairement à cela, [19] présente un modèle économique-écologique et étudie la stabilité interne des coalitions tout en abordant l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash dans certains cas particuliers. Pour conclure cette brève présentation, il convient de mentionner que [5] analyse un jeu différentiel coopératif qui ne tient pas compte du modèle géophysique. De plus, [12] propose un jeu différentiel qui aborde les flux d'émissions, mais sans les corrélés aux bénéfices économiques. En plus, comme [2], ces travaux traitent des jeux différentiels sans considérer la fonction dommage comme étant une fonction de la température atmosphérique. Enfin, le fait de répéter un jeu statique est plus réaliste pour voir l'effet des émissions au long terme.

Au regard de l'état de l'art, les travaux présentés ici reviennent plusieurs contributions notables. Alors que la littérature considère des fonctions d'utilités très génériques pour les pays (e.g., [8], [13] et [20]), nous proposons des fonctions d'utilités structurées par un modèle géophysique dynamique [18]; ceci a pour conséquence d'éviter des conclusions non réalistes et de construire des stratégies de décarbonation auxquelles les pays n'adhèrent pas en réalité. L'évolution dynamique de la température atmosphérique étant non-linéaire en la quantité globale d'émission de CO₂, l'analyse de l'unicité de l'équilibre de Nash du jeu s'avère non-triviale comme nous le démontrons dans cet article pour l'étude du cas quadratique.

2 Formulation du problème

Nous commençons par présenter une structure de modèle climatique simple que nous allons coupler avec le jeu que nous proposons dans la suite.

2.1 Modèle climatique (MC)

Les modèles économiques sont souvent associés aux modèles climatiques et utilisés comme modèles d'évaluation intégrés (MEI). Nous utilisons la structure climatique des MEI dans notre jeu. Souvent, le modèle intègre un cycle du carbone

¹Ce travail est soutenu par l'ANR via les financements NICETWEET No ANR-20-CE48-0009, ECOREES No ANR-19-CE05-0042, et le Programme Gaspard Monge en Optimisation (PGMO).

(CC), une relation de forçage radiatif et une dynamique de température (DT). L'état du système global est $x = (C, \theta)$ où C est l'état du CC et θ est l'état de la DT. La modélisation est linéaire comme décrite dans [18] :

$$(CC) \begin{cases} C(t+1) = \mathbf{A}_C C(t) + d_C E(t), \\ C_{AT}(t+1) = b_C^\top C(t+1), \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$(DT) \begin{cases} \theta(t+1) = \mathbf{A}_\theta \theta(t) + d_\theta F(t+1), \\ \theta_{AT}(t+1) = b_\theta^\top \theta(t+1), \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

où $C(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ est le vecteur d'équivalent carbone dans les m_1 boîtes de la dynamique CC au temps t et $\theta(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ est le vecteur de températures dans les m_2 boîtes de la DT au temps t . Les matrices \mathbf{A}_C et \mathbf{A}_θ représentent les flux entre les boîtes des CC et DT respectivement, et d_C, d_θ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$ respectivement. Les vecteurs $b_C \in \mathbb{R}^{m_1}$ et $b_\theta \in \mathbb{R}^{m_2}$ sont des vecteurs d'extraction des sorties C_{AT} (quantité atmosphérique d'équivalent de carbone) et θ_{AT} (température atmosphérique moyenne globale) respectivement. L'entrée du cycle CC est $E(t) \in \mathbb{R}$, qui représente les émissions en GtCO₂ alors que le forçage radiatif $F(t) \in \mathbb{R}$, en W.m⁻², est l'entrée de la DT. Ce dernier est une approximation de l'impact de l'accumulation de gaz à effet de serre sur le bilan radiatif global [11]. La relation entre l'accumulation de gaz à effet de serre et l'augmentation du forçage radiatif est dérivée de mesures empiriques et de modèles climatiques, comme le montre l'équation suivante

$$F(t) = F_{2 \times \text{CO}_2} \log_2 \left[\frac{C_{AT}(t)}{C_{AT,\text{ref}}} \right] + F_{\text{nonCO}_2}(t), \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

où $C_{AT,\text{ref}}$ est la quantité atmosphérique de carbone de référence ; un choix courant est de prendre l'année 1750 comme début de l'ère industrielle et ainsi $C_{AT,\text{ref}} = 592.14$ GtC. Pour s'adapter au mieux au modèle climatique terrestre du GIEC, nous utilisons le paramètre commun $F_{2 \times \text{CO}_2}$ qui représente le forçage radiatif résultant de 2 fois CO₂ atmosphérique (typiquement $F_{2 \times \text{CO}_2} = 3,7$ W.m⁻²). On représente les forçages exogènes par une fonction du temps $F_{\text{nonCO}_2}(t)$.

2.2 Modèle proposé du jeu

Comme dans [19], nous considérons une économie mondiale composée de N pays. Un pays $n \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ est un agent économique. Son bénéfice noté B_n , représente son produit intérieur brut (PIB), qui dépend de ses émissions de gaz à effet de serre (GES) exprimées en terme d'émission de CO₂. Pour l'action du joueur, nous utiliserons a_n qui n'est autre que ses émissions. Dans [19], la fonction d'utilité d'un joueur n est la différence entre un bénéfice qui dépend de l'action du joueur et un dommage individuel D_n , fonction de l'état du jeu et de la somme des actions de tous les joueurs i.e., $\sum_{n=1}^N a_n$, représentant les pertes économiques.

Dans cet article, nous considérons que le dommage dépend de la projection de la température atmosphérique moyenne globale. Il est important de signaler que l'utilité de chaque joueur dépend des actions jouées et de la sortie $\theta_{AT}(t+1)$ du modèle climatique (1)-(2). On note que $\theta_{AT}(t+1)$ est une fonction des actions des joueurs a et de l'état du jeu x , au temps t . En effet nous omettrons la mention du temps t , puisque le jeu est statique et nous considérons θ_{AT} comme une fonction

$\theta_{AT}(x, a)$. Pour faire le lien entre la modélisation climatique et le jeu, celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\theta_{AT}(x, a) = \psi_\theta(x) + \zeta_\theta \ln \left(\psi_C(x) + \zeta_C \sum_{n=1}^N a_n \right),$$

où ζ_θ, ζ_C sont des paramètres positifs de (1)-(2) et ψ_θ, ψ_C sont des fonctions positives de l'état x , qui sont donnés par : $\psi_\theta(x) = b_\theta^\top \theta + d_\theta F_{\text{nonCO}_2} - \frac{d_\theta F_{2 \times \text{CO}_2}}{\ln 2} \ln C_{AT,\text{ref}}$, $\zeta_\theta = \frac{d_\theta F_{2 \times \text{CO}_2}}{\ln 2}$, $\psi_C(x) = b_C^\top A_C C$, et $\zeta_C = b_C^\top d_C$. En raison de la forme particulière de θ_{AT} dans la littérature, u_n n'est pas quasi-concave et donc l'analyse théorique du jeu n'est plus immédiate.

Pour la formulation mathématique du problème, nous fixons l'ensemble d'actions du joueur $n \in \mathcal{N}$, $\mathcal{A}_n = [e_n^{\min}, e_n^{\max}] \subset \mathbb{R}$. L'ensemble des actions possibles sera noté par $\mathcal{A} = \prod_{n=1}^N \mathcal{A}_n$ et \mathcal{A}_{-n} l'ensemble des actions collectives possibles de tous les agents différents de n . Une action du joueur n est donnée par $a_n \in \mathcal{A}_n$. Pour un profil d'action $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathcal{A}$, soit a_{-n} le profil des actions des agents autres que l'agent n , c'est-à-dire $a_{-n} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, \dots, a_N) \in \mathcal{A}_{-n}$. Avec cette notation, nous écrivons parfois un profil d'actions a comme (a_n, a_{-n}) . L'ensemble des états géophysiques x est noté $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{m_1+m_2}$.

Définition 1. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, $(a_n, a_{-n}) \in \mathcal{A}$, on définit la fonction utilité du joueur $n \in \mathcal{N}$, $u_n : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ comme une fonction bénéfice $B_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{R}$ moins un dommage positivement pondéré par w_n , $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$u_n(x, a_n, a_{-n}) = B_n(a_n) - w_n D(\theta_{AT}(x, a)). \quad (3)$$

Notez que contrairement à [19], les dommages individuels D_n sont exprimés en fonction d'un dommage collectif, nous faisons l'hypothèse que $D_n = w_n D$. Cette hypothèse sera utile dans la suite de l'article. On note que dans la littérature on trouve ce type de fonctions de dommages partagés comme dans le modèle de RICE de Nordhaus [16].

Hypothèse. • Pour tout $n \in \mathcal{N}$ et $x \in \mathcal{X}$, la fonction B_n est strictement croissante sur \mathcal{A}_n .

• La fonction de dommage D est strictement croissante et convexe par rapport à θ_{AT} .

La première hypothèse décrit le fait que l'augmentation du bénéfice est réalisée par une augmentation de la consommation (énergétique) qui reflète une augmentation d'émissions. La deuxième hypothèse met l'accent sur le fait qu'une température atmosphérique plus élevée aura un impact plus important sur l'économie de chaque joueur. La convexité implique que ce phénomène augmente pour une température plus élevée. Ces hypothèses sont raisonnables et courantes dans la littérature.

3 Analyse du jeu

Nous allons étudier le jeu posé précédemment où les joueurs décident de leurs actions pour une seule étape. L'analyse suivante mettra en évidence la potentialité de ce jeu, ce qui conduit à l'existence d'un Équilibre de Nash (EN) pur. Nous commençons par rappeler la définition d'un jeu de potentiel pondéré [14]. Ensuite, nous prouvons que le jeu proposé est de potentiel pondéré dans la proposition suivante.

Définition 2 (Jeu de potentiel pondéré). *Un jeu $(\mathcal{N}, \mathcal{A}, (u_n)_n)$ est un jeu de potentiel pondéré si et seulement s'il existe une fonction $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(w_n)_n$ un vecteur de poids positifs, tel que, pour tout $n \in \mathcal{N}$, $a_n, a'_n \in \mathcal{A}_n$ et $a_{-n} \in \mathcal{A}_{-n}$, on a $u_n(a) - u_n(a'_n, a_{-n}) = w_n [\phi(a) - \phi(a'_n, a_{-n})]$.*

Proposition 3. *Notre jeu est de potentiel pondéré pour tout $B_n, n \in \mathcal{N}$, D, θ_{AT} et pour tout poids positifs $w_n, n \in \mathcal{N}$, avec la fonction potentielle suivante, $\forall a \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}$,*

$$\phi(x, a) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{w_n} B_n(a_n) - D(\theta_{AT}(x, a)). \quad (4)$$

3.1 Existence de l'équilibre de Nash

Dans cette partie nous utilisons le lemme suivant de [14], pour garantir l'existence d'un équilibre de Nash lorsque la fonction de potentiel est continue en $a \in \mathcal{A}$.

Lemme 4. *Considérons $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, (u_n)_n)$ un jeu de potentiel pondéré de fonction potentielle ϕ , et le jeu de fonctions d'utilité identiques $\hat{\Gamma} = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, (\phi)_n)$. Les ensembles d'équilibres de Nash des deux jeux Γ et $\hat{\Gamma}$ coïncident, i.e., $EN(\Gamma) = EN(\hat{\Gamma})$.*

Proposition 5. *Si les fonctions B_n et $D \circ \theta_{AT}$ sont continues en $a \in \mathcal{A}$, alors il existe au moins un EN pur du jeu Γ .*

3.2 Unicité de l'équilibre de Nash

Nous soulignons que l'unicité de l'EN dépend des fonctions de bénéfice et de dommage. Cette section présente des conditions pour l'unicité de l'EN pur, et nous l'exprimerons lorsque la fonction potentielle ϕ donnée dans (4) est concave. Lorsque l'on considère les fonctions de bénéfice quadratiques dans les actions et une fonction de dommage quadratique dans θ_{AT} , (4) sera donnée par ce qui suit, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathcal{X}$,

$$\phi(x, a) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{w_n} \sum_{i=0}^2 \beta_{i,n} a_n^i - \sum_{i=0}^2 \gamma_i \theta_{AT}^i(x, a), \quad (5)$$

avec $\beta_{i,n}, \gamma_i \in \mathbb{R}$, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, et $n \in \mathcal{N}$. Supposons que ϕ est concave. L'EN pur est le profil $a^* = (a_1^*, \dots, a_N^*)$ où soit il existe $n \in \mathcal{N}$, tel que $a_n^* \in \{e_n^{\min}, e_n^{\max}\}$, soit a^* est un EN intérieur. Nous donnons des conditions suffisantes, dans la proposition ci-dessous, pour l'exprimer dans ce cas. Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant sur les zéros de l'équation $rs^2 + bs + c = d \ln(rs + p)$.

Lemme 6. *Pour $b, c, d \in \mathbb{R}$, $p, r \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ tel que $rs + p > 0$, l'équation suivante en s :*

$$rs^2 + bs + c = d \ln(rs + p) \quad (6)$$

- admet au plus une solution si $rd + (2p - b)^2/8 < 0$,
- admet au plus deux solutions si $rd + (2p - b)^2/8 = 0$,
- admet au plus trois solutions si $rd + (2p - b)^2/8 > 0$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, $f(s) = rs^2 + bs + c - d \ln(rs + p)$. On remarque que les zéros de f sont solutions de l'équation (6). Étudions les variations de f , pour $s \in \mathbb{R}_+$, $f'(s) = 2rs + b - \frac{rd}{rs+p}$. Ce qui nous donne :
 $f'(s) = 0 \iff (2rs + b)(rs + p) = rd \iff$

$(r\sqrt{2}s + \frac{2p+b}{2\sqrt{2}})^2 = rd + \frac{(2p-b)^2}{8}$. Donc, selon le signe de $rd + (2p - b)^2/8$, on conclut sur le nombre maximum de solutions de l'équation (6).

- Si $rd + (2p - b)^2/8 > 0$, alors f' admet au plus deux zéros dans \mathbb{R}_+ . Ainsi, f a au plus trois variations ce qui implique que f a au plus trois zéros dans \mathbb{R}_+ .
- Si $rd + (2p - b)^2/8 = 0$, alors f' admet au plus un zéro dans \mathbb{R}_+ . Ainsi, f a au plus deux variations ce qui implique que f a au plus deux zéros dans \mathbb{R}_+ .
- Si $rd + (2p - b)^2/8 < 0$, alors $f' > 0$ dans \mathbb{R}_+ . Et alors f a au plus une racine dans \mathbb{R}_+ . \square

L'importance de l'EN pur intérieur est qu'il montre à quelle condition les pays auront tendance à réduire efficacement leurs émissions. Lorsque ϕ est concave, nous pouvons appliquer les conditions KKT pour trouver l'unique EN pur. Supposons que ϕ est continue sur \mathcal{A} , donc il existe un EN pur, a^* . En effet, pour tout $n \in \mathcal{N}$, on note λ_n les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes $e_n^{\min} \leq a_n$ et $\bar{\lambda}_n$ ceux associés aux contraintes $a_n \leq e_n^{\max}$. Donc pour tout $n \in \mathcal{N}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial a_n}(x, a^*) = \bar{\lambda}_n - \lambda_n, \bar{\lambda}_n, \lambda_n \geq 0, \\ \lambda_n(a_n^* - e_n^{\min}) = 0, \bar{\lambda}_n(a_n^* - e_n^{\max}) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Proposition 7. *Supposons que u_n est concave, $\beta_{2,n} \neq 0$, $\forall n \in \mathcal{N}$, et*

$$\tilde{\zeta}^2 \gamma_2 \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{\beta_{2,n}} + \frac{[\psi_C(x) + \zeta_C \sum_{n=1}^N \Lambda_n]^2}{8} < 0.$$

Alors l'unique EN pur du jeu Γ est donné par $a^ = (a_1^*, \dots, a_N^*)$, où pour tout $n \in \mathcal{N}$,*

$$a_n^*(x) = \Lambda_n + \tilde{\zeta} w_n \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2 [\psi_\theta(x) + \zeta_\theta \ln(\psi_C(x) + \zeta_C \tilde{S})]}{2\beta_{2,n} [\psi_C(x) + \zeta_C \tilde{S}]},$$

où \tilde{S} est l'unique solution de l'équation $\zeta_C s^2 + bs + c = d \ln(\psi_C(x) + \zeta_C s)$, et $\tilde{\zeta}, \Lambda_n, b, c$ et d sont donnés par

$$\tilde{\zeta} = \zeta_\theta \zeta_C, \quad \Lambda_n = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n - \beta_{1,n})/2\beta_{2,n},$$

$$b = \psi_C(x) - \zeta_C \sum_{n=1}^N \Lambda_n, \quad d = \gamma_2 \tilde{\zeta} \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{\beta_{2,n}},$$

$$c = -\psi_C(x) \sum_{n=1}^N \Lambda_n - \frac{\tilde{\zeta}}{2} \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{\beta_{2,n}} (\gamma_1 + 2\gamma_2 \psi_\theta(x)).$$

Démonstration. En utilisant les conditions KKT, nous obtenons pour tout $n \in \mathcal{N}$, $\beta_{1,n} + 2\beta_{2,n}a_n^* - w_n \tilde{\zeta} \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2 \theta_{AT}(x, a^*)}{\psi_C(x) + \zeta_C \sum_{n=1}^N a_n^*} = \bar{\lambda}_n - \lambda_n$. Ce qui équivaut pour $\beta_{2,n} \neq 0$, à $a_n^* = \Lambda_n + \tilde{\zeta} \frac{w_n}{2\beta_{2,n}} \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2 \theta_{AT}(x, a^*)}{\psi_C(x) + \zeta_C \sum_{n=1}^N a_n^*}$. Par conséquent, la somme des actions de tous les joueurs $s = \sum_{n=1}^N a_n^*$ vérifie $\zeta_C s^2 + bs + c = d \ln(\psi_C(x) + \zeta_C s)$, où b, c et d sont donnés dans la proposition. En utilisant le lemme (6), nous concluons que si (7) est vérifiée, alors il existe au plus une solution de la dernière équation dans $[E^{\min}, E^{\max}] = [\sum_{n=1}^N e_n^{\min}, \sum_{n=1}^N e_n^{\max}]$. Rappelons que nous avons prouvé que le jeu est potentiel, et puisque B_n et $D \circ \theta_{AT}$ sont continues, on garantit l'existence d'équilibres de Nash purs. Par conséquent, en combinant les énoncés précédents, il existe un unique équilibre de Nash pur donné par l'équation (7). \square

4 Analyse numérique

Nous allons illustrer les résultats théoriques précédents et le comportement du modèle proposé. Nous avons réalisé un code qui nous permet de jouer sur les paramètres qu'ils soient du MC ou des fonctions bénéfiques et dommages. Nous fixons $N = 6$ avec les paramètres spécifiés dans le Tableau 1, où RDM désigne le reste du monde. Pour les graphiques présentés, nous utiliserons le CC de [10] et la DT de [9] car souvent donnés comme les plus proches des résultats du GIEC [15, 18]. Chaque joueur peut maximiser soit son utilité personnelle, ce qui donne des équilibres de Nash (EN) soit la somme de toutes les utilités pour obtenir alors des optima sociaux (OS). Nous illustrerons le cas où la fonction

Joueur	e_n^{\max} (GtCO ₂ /y)	PIB _n ^{max} (10 ⁹ \$)	w_n
Chine	11	14630	1.1847
USA	7	19290	1.1941
UE	4	13890	1.1248
Inde	3	2500	0.9074
Russie	2	1420	1.2866
RDM	5	11640	1.1847

TABLEAU 1 : Les valeurs particulières de chaque joueur en 2020.

bénéfice est une sigmoïde entre 0 et PIB_n^{max} et les dommages sont quadratiques redimensionnés, i.e., $u_n(x, a) = B_n(a_n) - w_n \text{PIB}_n^{\max} [D(\theta_{AT}(x, a))]^\alpha$, avec α la puissance du dommage. Par soucis de réalisme nous mettrons à jour e_n^{\max} et PIB_n^{max} à chaque itération du jeu, pour plus d'information voir le code [7]. Nous illustrons les résultats donnés par notre jeu statique, joué de manière répétitive tous les cinq ans jusqu'en 2100. Il est intéressant de noter l'importance

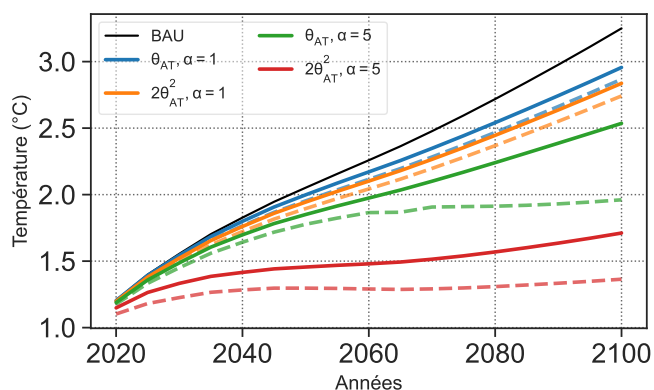


FIGURE 1 : Augmentation de θ_{AT} en °C. Les lignes pleines et pointillées représentent (EN) et (OS) respectivement.

de la trajectoire de température réalisée par les joueurs dans le cadre EN et OS. C'est dû au fait que la variation des dommages est faible par rapport à celle des bénéfices. Surtout pour des α petits (ex. $\alpha = 1$), les joueurs n'ont pas intérêt à diminuer leurs émissions ce qui est clair dans la Figure 2, et pour des α grands (ex. $\alpha = 5$), la Chine, l'USA, l'UE réduisent leurs émissions jusqu'à arrêter d'émettre. Dans la Figure 1, les courbes représentent différents dommages. Les températures en 2100 sont proches de +3°C pour de faibles dommages à la manière d'une stratégie Business As Usual (BAU) alors que pour des dommages les plus élevés elle descend à +1,6°C. Ces températures sont en accord avec les projections du GIEC [15] et correspondent aux différentes trajectoires d'émission des pays, illustrées sur la Figure 2. La modélisation des dommages économiques doit donc être une action de premier plan, pour

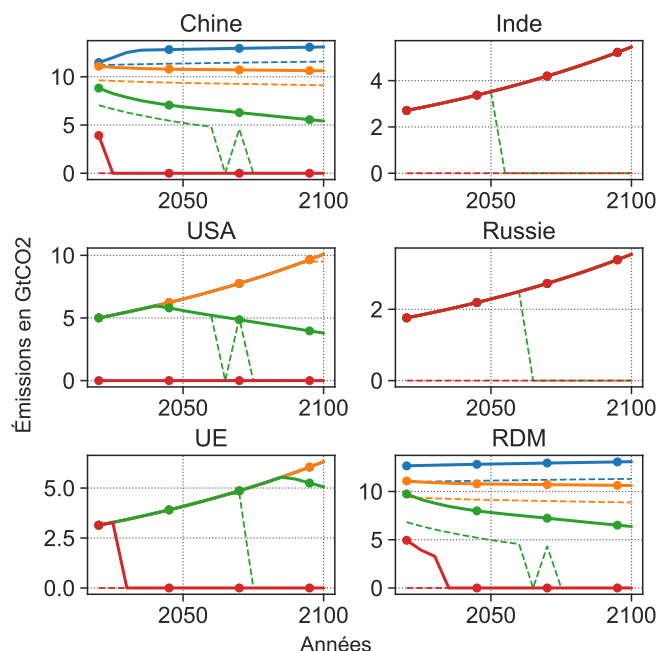


FIGURE 2 : Actions des joueurs en GtCO₂ à l'EN, où les courbes correspondent aux fonctions de dommages choisies pour la Figure 1.

faire changer les acteurs économiques de stratégie et pour les empêcher de nous emmener à un monde à +3°C en 2100. Plusieurs travaux ont été réalisés mais il y a encore aujourd'hui trop d'incertitude à ce sujet.

De plus, on remarque sur la Figure 2 que si les dommages ne sont pas élevés, les stratégies EN des joueurs sont proches des stratégies OS. Cela est donc un frein à la coopération recommandé par le GIEC. Cela peut s'expliquer par le manque de planification ce qui, on le sait, rend l'espace des stratégies infiniment plus grand. En effet, si les joueurs ne planifient pas sur une échelle de temps long comme c'est le cas ici (uniquement sur 5 ans), les joueurs passent à côté de futurs dommages, et donc, de toute possibilité d'accord. Ce phénomène peut s'observer sur la Figure 2 où seuls les joueurs avec un grand espace d'action comme la Chine, USA et RDM réduisent leurs émissions tandis que l'Inde et la Russie ne peuvent pas mesurer l'impact de leurs émissions sur le climat.

5 Conclusion

Le modèle de jeu statique proposé permet de modéliser mathématiquement le comportement des pays émetteurs de CO₂. L'équilibre de Nash du jeu est un concept de solution du jeu bien adapté car il garantit que les gouvernements ont intérêt à adhérer à la stratégie de décarbonation en place. Dans ce cadre nous étudions l'existence et l'unicité de l'équilibre et montrons comment les niveaux d'émissions de CO₂ évoluent dans le temps (entre 2020 et 2100) pour les grands émetteurs lorsque le modèle proposé est développé et testé avec des données numériques standards telles que celle fournies par le GIEC.

Références

- [1] A. AL KHOURDAJIE et M. FINUS. Measures to enhance the effectiveness of international climate agreements :

- The case of border carbon adjustments. *European Economic Review*, 2020.
- [2] O. BAHN et A. HAURIE. A Cost-Effectiveness Differential Game Model for Climate Agreements. *Dynamic Games and Applications*, 6, février 2015.
- [3] V. BOSETTI et AL. Incentives and stability of international climate coalitions : An integrated assessment. *Energy Policy*, 2013.
- [4] P. CHANDER. *Game Theory and Climate Change*. en. Columbia University Press, avril 2018.
- [5] A. CHEBOTAREVA et al. Value of Cooperation in a Differential Game of Pollution Control. In *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Cham. Springer International Publishing, 2022.
- [6] X. CHEN et AL. Regional emission pathways, energy transition paths and cost analysis under various effort-sharing approaches for meeting Paris Agreement goals. *Energy*, 2021.
- [7] A. COUTHURES. CO2-Game : Grets 2023, mars 2023. DOI : 10.5281/zenodo.7775252.
- [8] M. FINUS. Game Theory and International Environmental Cooperation : Any Practical Application ?, 2002.
- [9] O. GEOFFROY et AL. Transient Climate Response in a Two-Layer Energy-Balance Model. Part I : Analytical Solution and Parameter Calibration Using CMIP5 AOGCM Experiments. *Journal of Climate*, 2013.
- [10] F. JOOS et al. Carbon dioxide and climate impulse response functions for the computation of greenhouse gas metrics : a multi-model analysis. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 2013.
- [11] N. J. LEACH et al. FaIRv2.0.0 : a generalized impulse response model for climate uncertainty and future scenario exploration. *Geoscientific Model Dev.*, 2021.
- [12] C.F. MASON. Transboundary Externalities and Reciprocal Taxes : A Differential Game Approach. *Strategic Behavior and the Environment*, 9, janvier 2021.
- [13] C.F. MASON et al. Cooperation on climate-change mitigation. *European Economic Review*, 2017.
- [14] D. MONDERER et Shapley L.S. Potential Games. *Games and Economic Behavior*, 1996.
- [15] A. MUKHERJI et al. Synthesis report of the IPCC SIXTH assessment report (AR6). en.
- [16] W. NORDHAUS et Z. YANG. A Regional Dynamic General-Equilibrium Model of Alternative Climate-Change Strategies. *The American Eco. Review*, 1996.
- [17] I. PERISSI et A. JONES. Investigating European Union Decarbonization Strategies : Evaluating the Pathway to Carbon Neutrality by 2050. *Sustainability*, 2022.
- [18] A. REZAI et al. Are economists getting climate dynamics right and does it matter? Rapport technique, Copernicus Meetings, 2020.
- [19] H. TULKENS. *Economics, Game Theory and International Environmental Agreements :The Ca' Foscari Lectures*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2019.
- [20] P.J. WOOD. Climate change and game theory. *Annals of the New York Academy of Sciences*.