



HAL
open science

Vous avez dit matière noire ou énergie sombre ?

Christian Fonteix, Dimitrios Meimaroglou, Badie Morsi, Mauricio Camargo,
Jean-Claude Charpentier

► **To cite this version:**

Christian Fonteix, Dimitrios Meimaroglou, Badie Morsi, Mauricio Camargo, Jean-Claude Charpentier.
Vous avez dit matière noire ou énergie sombre ?. 2024. hal-04505340

HAL Id: hal-04505340

<https://hal.univ-lorraine.fr/hal-04505340v1>

Preprint submitted on 14 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Vous avez dit matière noire ou énergie sombre ?

C. FONTEIX^{a,c}, D. MEIMAROGLOU^a, B.I. MORSI^b, M. CAMARGO^c, J.C. CHARPENTIER^a

^aUniversité de Lorraine, CNRS, LRGP, F-54000 Nancy, France

^bDepartment of Chemical and Petroleum Engineering, Swanson School of Engineering, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA 15261, USA

^cUniversité de Lorraine, ERPI, Nancy F-54000, France

Résumé

Dans le présent papier nous nous posons des questions concernant les hypothèses d'existence de la matière noire et de l'énergie sombre. La première est : a-t-on vraiment besoin de faire appel à une matière noire pour justifier la stabilité des galaxies spirales ? En section 5, nous montrons que la réponse devrait être non, car si cela est vrai dans le cas de la stricte gravitation Newtonienne, cela ne l'est plus dans le cadre de la gravitation compatible avec la relativité, en particulier du fait des forces magnétogravitationnelles. La deuxième question est de savoir si l'énergie sombre est indispensable pour justifier l'accélération de l'expansion de l'univers ? En section 6, nous revenons au premier principe de la thermodynamique appliqué au mélange fluide continu car nous acceptons une importante simplification : l'univers est approximé par un tel fluide. La résolution de la dynamique du système formé par l'univers nécessite le calcul d'une solution simultanée des équations (105) et (108). Les conditions aux limites et initiales de ce système différentiel font apparaître le tenseur $\bar{\bar{Y}}$ vérifiant (106). Ce tenseur peut être considéré comme relevant des théories scalaire-vecteur-tenseur, ce qui permet d'envisager une expansion de l'univers sans énergie sombre. Cependant, l'énergie totale apparaissant dans $\bar{\bar{T}}_T$ (terme supérieur gauche) comprend toutes les énergies, comme l'énergie de masse plus l'énergie cinétique, l'énergie interne, l'énergie électromagnétique, l'énergie gravitationnelle et magnétogravitationnelle. La totalité de ces énergies pourrait constituer l'énergie sombre, y compris la valeur à l'origine (0°K, 0 Pa) de l'énergie interne.

1 Introduction et contexte de l'étude

Les hypothèses de la matière noire et de l'énergie sombre ont suscité bon nombre de publications. Les recherches semblant loin d'être terminées, nous proposerons ici des explications qui pourraient être intéressantes. En ce qui concerne l'énergie sombre, nous avons besoin de la relativité générale dans le cas des mélanges fluides continus. En effet, nous ferons l'importante simplification que l'espace et les galaxies peuvent être approximés par un fluide continu, ce qui nous permet d'appliquer deux postulats : le premier permettant de passer les équations de la physique classique à la relativité restreinte et le deuxième de la relativité restreinte à la relativité générale (FONTEIX et al. 2020a) (FONTEIX et al. 2020b). Il s'agit d'écrire les bilans d'énergie, de quantité de mouvement et de matière en relativité restreinte, pour les mélanges fluides continus (ARZELIES 1971), puis ces bilans en relativité générale. Contrairement aux habitudes, ces bilans ont été démontrés à l'aide de 2 principes. Le premier est bien connu, il s'agit de l'inséparabilité de l'espace et du temps lors d'un changement de repère inertiel (MINKOWSKI 1907). Le deuxième est notre proposition originale : **dans le Repère Inertiel Tangent d'un espace-temps plat, les équations de la dynamique relativiste des mélanges fluides continus et celles de la physique classique sont identiques**. Grâce à cela, nous avons pu intégrer la gravitation relativiste (BRAGINSKY et al. 1977) (Mc DONALD 1997) (TARTAGLIA et al. 2004) en espace-temps plat (non courbé) et l'électromagnétisme. Cependant, nous n'avons pas pris en compte les

réactions nucléaires et les phénomènes quantiques (SCHULMAN 1980), ni abordé la thermodynamique relativiste (ARZELIES 1965) (De BROGLIE 1968) (STRUCHTRUP 1998).

En section 2 nous présenterons des rappels de dynamique classique des mélanges fluides continus, et en section 3 des rappels de dynamique des fluides en relativité restreinte. En section 4, cette même dynamique est obtenue en relativité générale. La matière noire est abordée section 5, puis l'énergie sombre en section 6 sera suivi d'une conclusion 7. Dans ce qui suit, nous choisirons autant que possible d'utiliser des notations matricielles, cependant nous passerons en notation tensorielles lorsque cela sera nécessaire.

2 Rappels de dynamique classique des mélanges fluides continus

Comme nous partons de la physique classique pour démontrer les expressions de la relativité restreinte, nous nous placerons dans l'espace-temps, avec une notation semi réelle où le temps apparaîtra sous la forme ict . Le repère utilisé est donc formé de 3 axes spatiaux orthogonaux deux à deux et de même échelle, et d'un axe symbolisant le temps, orthogonal à chaque axe spatial et de même échelle où i est l'imaginaire pur de norme unitaire, c est la vitesse de la lumière dans le vide et t le temps (FONTEIX et al. 2022) (FONTEIX et al. 2023). Conformément à (FONTEIX et al. 2020a), le tenseur énergie-impulsion se présentera comme une matrice symétrique semi réelle telle que $\begin{pmatrix} -\alpha & i\vec{a}^T \\ i\vec{a} & \bar{\bar{A}} \end{pmatrix}$, où la matrice symétrique 3x3 $\bar{\bar{A}}$ est formée de nombres réels, tout comme le vecteur \vec{a} de dimension 3. Le scalaire $-\alpha$ est un nombre réel, le signe moins provenant de $i^2 = -1$. La dérivation spatio-temporelle, ou quadri-gradient, s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\dots) = \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial(\dots)}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{grad}}^T(\dots) \right) \quad (1)$$

Où $\overrightarrow{\text{grad}}(\dots)$ est l'opérateur gradient (spatial) usuel. Conformément au premier principe de la thermodynamique, nous devons avoir, avec $\bar{\bar{T}}$ le tenseur d'ordre deux symétrique énergie-impulsion :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\bar{T}}) = \overrightarrow{\text{grad}}^T \begin{pmatrix} -\alpha & i\vec{a}^T \\ i\vec{a} & \bar{\bar{A}} \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{i}{c} \frac{\partial(\alpha)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(i\vec{a}) = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{a}^T)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\bar{A}}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Où $\overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{a})$ est une divergence. Le quadri-gradient du tenseur énergie-impulsion doit être construit à partir des équations permettant le calcul complet de la dynamique des mélanges fluides continus, puisque c'est ce modèle très simplifié des galaxies ou du cosmos que nous adopterons. Notons que les 2 dernière ligne de (2) peuvent être simplifiées en :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\alpha)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(c\vec{a}) = 0 \\ \frac{\partial(c\vec{a}^T)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(c^2\bar{\bar{A}}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La première équation de la mécanique des fluides est le bilan de masse, appelé équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide et \vec{u} sa vitesse locale. La deuxième équation est vectorielle, c'est le bilan de quantité de mouvement, qui prend en compte les forces de surface et de volume s'exerçant sur le fluide. Pour écrire ce bilan, nous devons faire la liste des forces volumiques :

- $\rho \vec{H}$: la pesanteur, où le vecteur \vec{H} est le champ de gravitation,
- $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)$: la pression,
- $(\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\tau}))^T$: la contrainte mécanique, où $\bar{\tau}$ est le tenseur des contraintes rhéologiques,
- $\rho \alpha \vec{E}$: la force électrique, où α est la charge par unité de masse et \vec{E} le champ électrique,
- $\vec{C} \wedge \vec{B}$: la force magnétique, où \vec{B} est le champ magnétique, et \vec{C} le courant électrique.
- $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T \vec{E} + \vec{M}^T \vec{B}) - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B}$: les forces dipolaires électriques et magnétiques, où \vec{P} est le vecteur polarisation ou moment dipolaire électrique et \vec{M} le moment dipolaire magnétique.

La dérivée particulaire est $\frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + \vec{u}^T \overrightarrow{\text{grad}}(\dots)$, et le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{H} - \overrightarrow{\text{grad}}(P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) + (\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\tau}))^T + \rho \alpha \vec{E} + \vec{C} \wedge \vec{B} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B} \quad (5)$$

Usuellement les mécaniciens des fluides se contentent des équations (4) et (5) pour calculer la pression P et les 3 coordonnées spatiales de la vitesse \vec{u} à chaque instant dans tout l'espace considéré. Ceci nécessite plusieurs hypothèses simplificatrices : l'écoulement est isotherme et les phénomènes électromagnétiques sont absents ou négligeables. Pour déterminer la température en chaque point de l'espace-temps il faut une équation supplémentaire, que la thermodynamique désigne comme le bilan d'énergie totale. L'écriture de ce bilan s'appuie sur le premier principe de la thermodynamique : **la production volumique d'énergie totale est nulle au sein d'un mélange fluide continu**. L'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie interne U (J/kg), de l'énergie électromagnétique et de l'énergie de gravitation, dont l'équation est, avec \vec{q} le flux de chaleur :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B} - \frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G} \right) + \\ & \overrightarrow{\text{grad}}^T \left(\rho U \vec{u} + \vec{q} + \vec{u} \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) + \vec{K} \wedge \vec{H} \right) \\ & - \overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\tau} \vec{u} - (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{u}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

L'énergie totale par unité de volume est donc $\rho U + \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B} - \frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G}$, avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, et où $\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B}$ est l'énergie électromagnétique volumique. Notons que G est la constante universelle de la gravitation et que l'énergie volumique de gravitation $-\frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G}$ est négative, ce qui est logique puisque cette énergie volumique est nulle dans une région très loin de toute masse, et que cette énergie de gravitation diminue à l'approche d'une masse effective. Le calcul du champ magnétogravitationnel \vec{K} se fait grâce à des équations dérivées de celles de MAXWELL. Si φ est le potentiel local de gravitation, l'équation de POISSON s'écrit (FONTEIX et al. 2020c) :

$$(\overrightarrow{\text{grad}}^T \overrightarrow{\text{grad}}) \varphi = 4\pi G \rho \quad (7)$$

Où $\overrightarrow{\text{grad}}^T \overrightarrow{\text{grad}}$ le Laplacien. Les champs de gravitation sont alors donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{H}) &= -4\pi G\rho \\ \text{rot}(\vec{H}) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{K}) &= -\rho\vec{u} + \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{K}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Comme dans (FONTEIX et al. 2020c) nous obtenons le bilan d'énergie volumique gravitationnelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G} \right) + \overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{K} \wedge \vec{H}) = -\rho\vec{u}^T \vec{H} \quad (9)$$

Il parait logique de construire le tenseur énergie-impulsion à partir de l'équation (6), alors il s'agit du tenseur énergie-impulsion totale avec $\alpha_{T1} = \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \rho U + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B} - \frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G}$, et aussi $c\vec{a}_{T1} = \rho U \vec{u} + \vec{q} + \vec{u} \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) + \vec{K} \wedge \vec{H} - \vec{v} \vec{u} + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{u}$, soit :

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_{T1} = \begin{pmatrix} -\alpha_{T1} & i\vec{a}_{T1}^T \\ i\vec{a}_{T1} & \overline{\overline{A}}_{T1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Cependant l'équation (10) appelle deux commentaires. Le premier est que la matrice symétrique 3x3 $\overline{\overline{A}}_{T1}$ est inconnue en physique classique et le deuxième est que, pour préparer ce tenseur au passage à la relativité, il manque l'énergie volumique ρc^2 qui est l'énergie de la masse Newtonienne, c'est-à-dire essentiellement l'énergie nucléaire. Or il est possible de construire le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_N$ avec les équations (4) et (5). Nous avons alors $\alpha_N = \rho c^2$ et $\vec{a}_N = \rho c \vec{u}$, et :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial(\vec{u})}{\partial t} + \rho \vec{u}^T \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) &= \rho \vec{H} - \overrightarrow{\text{grad}}(P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) + \left(\overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{v}) \right)^T \\ + \rho \alpha \vec{E} + \vec{C} \wedge \vec{B} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B} &= \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(\rho \vec{u}) \vec{u} + \rho \vec{u}^T \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) \\ &= \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(\rho \vec{u} \vec{u}^T) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

En ajoutant l'équation (4) multipliée par \vec{u} et en multipliant (11) par c , nous obtenons :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c \vec{u})}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^T(\rho \vec{u} \vec{u}^T + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{\delta} - \vec{v}) = \rho \vec{H} + \rho \alpha \vec{E} + \vec{C} \wedge \vec{B} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B} \quad (12)$$

Nous retrouvons ici $\vec{a}_N = \rho c \vec{u}$, auquel s'ajoute $\overline{\overline{A}}_N = \rho \vec{u} \vec{u}^T + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{\delta} - \vec{v}$, selon (2). Ceci permet d'écrire le tenseur énergie-impulsion de masse Newtonienne $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_N$:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_N &= \begin{pmatrix} -\rho c^2 & i\rho c \vec{u}^T \\ i\rho c \vec{u} & \rho \vec{u} \vec{u}^T + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{\delta} - \vec{v} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T(\overline{\overline{\mathbf{T}}}_N) &= \left(0 \quad \rho \vec{H}^T + \rho \alpha \vec{E}^T + (\vec{C} \wedge \vec{B} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}^T) \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M}^T) \vec{B})^T \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

La deuxième équation de (13) est nécessaire à la résolution du problème de l'écoulement du fluide. Cependant, la valeur 0 qui y apparait est vraie si les phénomènes quantiques se réduisent à des effets thermodynamiques, et si les réactions nucléaires peuvent être approximées comme des cas particuliers de réactions chimiques ordinaires moyennant une fonction définissant les sections efficaces (conservation de la masse totale), le fluide étant toujours considéré comme un milieu continu. Dans un cas plus général, où la masse peut se transformer en chaleur par exemple, il faut faire apparaître un terme supplémentaire qui remplace 0. Quant au tenseur énergie-impulsion totale, il devient finalement :

$$\left. \begin{aligned}
\bar{\bar{T}}_T &= \bar{\bar{T}}_{T1} + \bar{\bar{T}}_N = \begin{pmatrix} -\alpha_T & i\vec{a}_T^T \\ i\vec{a}_T & \bar{\bar{A}}_T \end{pmatrix} \\
\alpha_T &= \rho c^2 + \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \rho U + \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B} - \frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G} \\
c\vec{a}_T &= \rho c^2 \vec{u} + \vec{u} \frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \rho U \vec{u} + \vec{q} + \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) + \vec{K} \wedge \vec{H} - \vec{\tau} \vec{u} + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{u}
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Là encore $\bar{\bar{A}}_T$ n'est pas connu, mais est calculable si on étend le premier principe de la thermodynamique présenté en gras plus haut dans la présente section, avant l'équation (6) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\bar{T}}_T) = 0 \quad (15)$$

La deuxième équation de (14) montre une somme de différentes énergies. Ainsi, ρc^2 est l'énergie volumique de masse Newtonienne, $\frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u}$ est l'énergie cinétique volumique, ρU est l'énergie interne volumique, $\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} - \vec{M}^T \vec{B}$ est l'énergie électromagnétique volumique et $-\frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G}$ est l'énergie volumique de gravitation. Puisque l'énergie volumique totale est la somme de cinq énergies différentes, nous considérerons que le tenseur énergie-impulsion totale est la somme de cinq tenseurs correspondants. Ainsi $\bar{\bar{T}}_N$, en équation (13), correspond à l'énergie volumique de masse Newtonienne,

$\bar{\bar{T}}_C = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} & \frac{i\vec{u}^T}{c} \left(\frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} \vec{\delta} - \vec{\tau} + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{\delta} \right) \\ i \left(\frac{\rho}{2} \vec{u}^T \vec{u} \vec{\delta} - \vec{\tau} + (P - \vec{P}^T \vec{E} - \vec{M}^T \vec{B}) \vec{\delta} \right) \frac{\vec{u}}{c} & \bar{\bar{A}}_C \end{pmatrix}$ est le tenseur énergie-impulsion cinétique ($\vec{\delta}$ = matrice de KRONECKER), $\bar{\bar{T}}_I = \begin{pmatrix} -\rho U & \rho U \frac{\vec{u}^T}{c} + \frac{\vec{q}^T}{c} \\ \rho U \frac{\vec{u}}{c} + \frac{\vec{q}}{c} & \bar{\bar{A}}_I \end{pmatrix}$ est

le tenseur énergie-impulsion interne, $\bar{\bar{T}}_E = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^T \vec{E}}{2} - \frac{\vec{B}^T \vec{B}}{2\mu_0} + \vec{M}^T \vec{B} & \frac{i}{c} \left(\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \right)^T \\ \frac{i}{c} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) & \bar{\bar{A}}_E \end{pmatrix}$

correspond au tenseur énergie-impulsion électromagnétique et $\bar{\bar{T}}_G = \begin{pmatrix} \frac{\vec{H}^T \vec{H}}{8\pi G} & \frac{i}{c} (\vec{K} \wedge \vec{H})^T \\ \frac{i}{c} \vec{K} \wedge \vec{H} & \bar{\bar{A}}_G \end{pmatrix}$ est le

tenseur énergie-impulsion de gravitation. Ceci donne :

$$\bar{\bar{T}}_T = \bar{\bar{T}}_N + \bar{\bar{T}}_C + \bar{\bar{T}}_I + \bar{\bar{T}}_E + \bar{\bar{T}}_G \quad (16)$$

Cette décomposition du tenseur énergie-impulsion totale en plusieurs tenseurs énergie-impulsion est générale et s'applique aussi bien à la relativité restreinte qu'à la relativité générale, comme nous le verrons plus loin. Tous les éléments de chaque tenseur ont la même unité : énergie par unité de volume. Cependant, l'énergie des trois premiers tenseurs de l'équation (16) permet de définir une masse volumique relativiste ρ_R :

$$\rho_R = \rho \left(1 + \frac{\vec{u}^T \vec{u}}{2c^2} + \frac{U}{c^2} \right) \quad (17)$$

Le problème que pose cette masse volumique relativiste, ainsi que le tenseur énergie-impulsion interne (donc le tenseur énergie-impulsion totale), est que leur valeur effective n'est pas calculable. En effet, nous ne pouvons calculer que des variations d'énergie interne entre deux états connus, la valeur exacte de cette énergie interne massique U est inconnue (POINCARÉ 1901). C'est une des raisons pour lesquelles nous préférons parler de masse volumique Newtonienne que de masse volumique relativiste, d'autres raisons étant données dans (FONTEIX et al. 2020a).

3 Rappels de dynamique des mélanges fluides continus en relativité restreinte

Dans (FONTEIX et al. 2020a), nous avons proposé un principe original permettant de transformer les relations de la physique classique en équations de la relativité restreinte : **dans le Repère Inertiel Tangent d'un espace-temps plat, les équations de la dynamique relativiste des mélanges fluides continus et celles de la physique classique sont identiques**. Cela nécessite une transformation permettant le passage du repère inertiel tangent à un repère inertiel quelconque. De plus, il faut considérer que, à l'échelle terrestre, les vitesses restent négligeables par rapport à celle de la lumière dans le vide, et qu'un repère lié à la terre peut, dans un intervalle de temps limité, être considéré comme inertiel tangent par rapport au cosmos. Ainsi, il suffira de poser les vitesses égales à 0 (vitesse locale à l'origine du repère inertiel tangent) dans les équations de la physique classique et d'effectuer la transformation pour obtenir les équations correspondantes en relativité restreinte. Bien entendu, nous verrons par la suite les ajustements nécessaires, comme le cas de la gravité Newtonienne qui est inacceptable en l'état en relativité restreinte. Notons que, comme en physique classique, le repère utilisé est formé de 3 axes spatiaux orthogonaux deux à deux et de même échelle, et d'un axe ict symbolisant le temps, orthogonal à chaque axe spatial et de même échelle où i est l'imaginaire pur de norme unitaire, c est la vitesse de la lumière dans le vide et t le temps

La transformation s'effectue à l'aide d'une matrice de transition dont la démonstration est donnée dans (FONTEIX et al. 2022). Cette matrice $\bar{\bar{\Lambda}}_T$, permettant le passage d'un repère inertiel quelconque au repère inertiel tangent, est semi-réelle, orthogonale et normée, ce qui correspond à $\det(\bar{\bar{\Lambda}}_T) = 1$ et $\bar{\bar{\Lambda}}_T^T = \bar{\bar{\Lambda}}_T^{-1}$. Son équation est :

$$\bar{\bar{\Lambda}}_T = \begin{pmatrix} \gamma^0 & -\frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^{0T} \\ \frac{i\gamma^0}{c}\vec{u}^0 & \bar{\delta} + (\gamma^0 - 1)\frac{\vec{u}^0\vec{u}^{0T}}{\vec{u}^{0T}\vec{u}^0} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Avec $\gamma^0 = \gamma$ (facteur de LORENTZ) et $\vec{u}^0 = \vec{u}$ au point de tangence (par la suite nous n'utiliserons plus la puissance 0 qui indique une valeur au point de tangence : une constante). La notion de tangence est précisée dans (FONTEIX et al. 2020a) et (FONTEIX et al. 2022). Il s'agit de la tangence de la trajectoire du repère inertiel tangent à la trajectoire de l'objet considéré, au point considéré. Un élément important est de respecter scrupuleusement le principe de MINKOWSKI qui stipule que le temps et l'espace ne peuvent pas être dissociés (MINKOWSKI 1907), le risque étant de faire de grosses erreurs.

Nous mettrons un indice T aux grandeurs dans le repère inertiel tangent, comme $\bar{\bar{\Lambda}}_T$. La transformation des vitesses se fait grâce à $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_T = \bar{\bar{\Lambda}}_T(\gamma\vec{\mathbf{u}})$ et celle des accélérations par $\bar{\bar{\mathbf{a}}}_T = \bar{\bar{\Lambda}}_T(\gamma^2\vec{\mathbf{a}})$. Tous les tenseurs d'ordre deux, matrices 4x4 semi-réelles symétriques ou antisymétriques, se transforment du repère inertiel tangent vers un repère inertiel quelconque à l'aide de :

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \bar{\bar{\Lambda}}_T^T \bar{\bar{\mathbf{T}}}_T \bar{\bar{\Lambda}}_T \quad (19)$$

Comme la masse Newtonienne est un invariant (identique en physique classique et en relativité restreinte) la transformation des accélérations s'applique aux forces. L'important ici est de rendre covariantes toutes les expressions, c'est-à-dire de structure invariante lors d'un changement de repère inertiel, y compris pour le repère inertiel tangent, donc pour les équations de la physique classique. Ainsi, pour être sûr de ne pas faire d'erreur lors du passage de la physique classique à la relativité restreinte, le plus simple est de présenter les expressions de la physique classique comme un ensemble de tenseurs d'ordre 2 (liés par des multiplications et des additions), sauf pour certaines forces (alors vecteurs de dimension 4). Cette façon de procéder n'est pas habituelle pour élaborer les équations en relativité restreinte et la simplification des fluides parfaits est souvent utilisée (GOURGOULHON 2006). D'ailleurs, nous avons montré dans (FONTEIX et al. 2020a) que la plupart des méthodes employées posaient problème.

Avant d'aborder les forces, et même les tenseurs énergie-impulsion, nous devons réécrire les équations de MAXWELL (THOMAS 1927) sous la forme de matrices antisymétriques semi-réelles :

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{E}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{E} & -\overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{B}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \overline{\overline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & ic\vec{B}^T \\ -ic\vec{B} & \overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{E}) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Où l'opérateur $\overline{\overline{\text{mat}}}(\dots)$ permet de construire une matrice antisymétrique 3x3 à partir d'un vecteur. En particulier, $\overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{a})\vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ est un produit vectoriel. De même nous avons :

$$\overline{\overline{\mathbf{P}}} = \begin{pmatrix} 0 & ic\vec{P}^T \\ -ic\vec{P} & \overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{M}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \overline{\overline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{M}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{M} & -\overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{P}) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Les équations de MAXWELL régissant les phénomènes électromagnétiques s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\text{grad}}}^T(\varepsilon_0 c^2 \overline{\overline{\mathbf{E}}} + \overline{\overline{\mathbf{P}}}) &= -\vec{C}^T \\ \overline{\overline{\text{grad}}}^T(\overline{\overline{\mathbf{B}}}) &= 0 \end{aligned} \right] \quad (22)$$

(HEAVISIDE 1912) où \vec{C} est le quadri-courant électrique. Afin de préparer le passage à la relativité restreinte, nous présenterons ici la gravitation Newtonienne en nous inspirant des équations ci-dessus. Les champs gravitationnels sont formés de deux vecteurs, le champ de gravitation \vec{H} et le champ magnéto-gravitationnel \vec{K} (POINCARÉ 1906). Ceux-ci peuvent être rassemblés dans deux tenseurs antisymétriques d'ordre 2 :

$$\overline{\overline{\mathbf{H}}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{H}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{H} & -\frac{4\pi G}{c^2}\overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{K}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \overline{\overline{\mathbf{K}}} = \begin{pmatrix} 0 & iK^T \\ -i\vec{K} & \frac{c}{4\pi G}\overline{\overline{\text{mat}}}(\vec{H}) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Tous ces tenseurs se transforment grâce à (19). L'équivalent des équations de MAXWELL s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\text{grad}}}^T(\overline{\overline{\mathbf{H}}}) &= \frac{4\pi G}{c^2}\rho\vec{u}^T \\ \overline{\overline{\text{grad}}}^T(\overline{\overline{\mathbf{K}}}) &= 0 \end{aligned} \right] \quad (24)$$

Où G est la constante universelle de la gravitation. Introduire le vecteur \vec{K} n'est pas gênant car son effet est totalement négligeable à l'échelle terrestre, mais est nécessaire en relativité restreinte (surtout à l'échelle de l'univers). Notons que ces deux vecteurs, comme leurs équivalents de l'électromagnétisme, permettent l'existence d'ondes, qualifiées d'ondes de gravitation. La force apparaissant équation (13) devient (FONTEIX 2020a) la quadri-force :

$$\vec{F}_V = \overline{\overline{\mathbf{H}}}\rho\vec{u} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}\vec{C} - \frac{\gamma}{c^2}\left(\vec{\delta} + \frac{\gamma^2\vec{u}\vec{u}^T}{c^2}\right)\left(\overline{\overline{\text{grad}}}(\gamma\vec{u}^T\overline{\overline{\mathbf{P}}})\vec{E} + \overline{\overline{\text{grad}}}(\gamma\vec{u}^T\overline{\overline{\mathbf{M}}})\vec{B}\right)\vec{u} \quad (25)$$

Le tenseur énergie-impulsion de masse Newtonienne s'écrit, où \circ est le produit scalaire de deux matrices (somme des produits des éléments correspondants dans les deux matrices) :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_N &= \rho\gamma\vec{u}\vec{u}^T + \left(\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\overline{\overline{\mathbf{P}}}\circ\overline{\overline{\mathbf{E}}}\right)\left(\vec{\delta} + \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{u}\vec{u}^T\right) - \vec{\tau} \\ \overline{\overline{\text{grad}}}^T(\overline{\overline{\mathbf{T}}}_N) &= \vec{F}_V^T \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ici le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_N$ est la somme des tenseurs $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_N$ et $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_C$ de la physique classique car le facteur de LORENTZ γ correspond à $1 + \frac{\vec{u}^T\vec{u}}{2c^2}$ de (17). De plus, certaines parties de $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_I$, liées au flux de chaleur \vec{q} et à $\overline{\overline{\mathbf{A}}}_I$ sont directement intégrées à l'expression du tenseur énergie-impulsion totale (30). Ainsi, l'équation (16) est conservée à condition de faire disparaître les tenseurs énergie-impulsion cinétique $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_C$ et interne

$\bar{\bar{T}}_I$, car, selon (29), l'énergie cinétique et l'énergie interne sont intégrées grâce à la masse volumique relativiste ρ_R . Ceci étant, avec ces modifications, l'équation (15) est conservée en relativité restreinte. Le tenseur énergie-impulsion électromagnétique devient :

$$\bar{\bar{T}}_E = \frac{\epsilon_0}{2} (c^2 \bar{\bar{E}}\bar{\bar{E}}^T + \bar{\bar{B}}\bar{\bar{B}}^T) - \bar{\bar{B}}\bar{\bar{M}} \frac{\gamma^2 \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T}{c^2} - \frac{\gamma^2 \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T}{c^2} \bar{\bar{M}}\bar{\bar{B}} - \left(\frac{\gamma^2}{c^2} \bar{\bar{u}}^T \bar{\bar{B}}\bar{\bar{M}}\bar{\bar{u}} \right) \frac{\gamma^2 \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T}{c^2} \quad (27)$$

De même le tenseur énergie-impulsion de gravitation est égal à :

$$\bar{\bar{T}}_G = -\frac{c^2}{8\pi G} \bar{\bar{H}}\bar{\bar{H}}^T - \frac{2\pi G}{c^2} \bar{\bar{K}}\bar{\bar{K}}^T \quad (28)$$

La masse volumique relativiste est en relativité restreinte :

$$\rho_R = \rho \left(\gamma + \frac{U}{c^2} \right) \quad (29)$$

Finalement le tenseur énergie-impulsion totale est donné par (FONTEIX et al. 2020a) :

$$\bar{\bar{T}}_T = \rho_R \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T + \frac{\epsilon_0}{2} (c^2 \bar{\bar{E}}\bar{\bar{E}}^T + \bar{\bar{B}}\bar{\bar{B}}^T) - \frac{c^2}{8\pi G_c} \bar{\bar{H}}\bar{\bar{H}}^T - \frac{2\pi G_c}{c^2} \bar{\bar{K}}\bar{\bar{K}}^T + \left. \begin{aligned} & \left(\frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \bar{\bar{P}} \circ \bar{\bar{E}} \right) \left(\bar{\bar{\delta}} + \frac{\gamma^2}{c^2} \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T \right) - \bar{\bar{v}} - \gamma^2 \frac{\bar{\bar{v}}\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T + \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T \bar{\bar{v}}}{c^2} + \frac{\bar{\bar{q}}\bar{\bar{u}}^T + \bar{\bar{u}}\bar{\bar{q}}^T}{c^2} \\ & - \bar{\bar{B}}\bar{\bar{M}} \frac{\gamma^2 \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T}{c^2} - \frac{\gamma^2 \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T}{c^2} \bar{\bar{M}}\bar{\bar{B}} - \left(\frac{\gamma^2}{c^2} \bar{\bar{u}}^T \bar{\bar{B}}\bar{\bar{M}}\bar{\bar{u}} \right) \frac{\gamma^2 \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}^T}{c^2} + \bar{\bar{\Theta}}_I \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Là encore la matrice 4x4 $\bar{\bar{\Theta}}_I$ est inconnue. Il reste à voir la transformation de quelques vecteurs et scalaires comme le quadri flux de chaleur $\bar{\bar{q}}$, le quadri courant électrique $\bar{\bar{C}}$, l'énergie interne massique U , la masse volumique Newtonienne ρ , La pression P et la température absolue T :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{q}} &= \gamma \bar{\bar{\Lambda}}_T^T \bar{\bar{q}}_T \quad \text{and} \quad \bar{\bar{C}}_T = \bar{\bar{\Lambda}}_T \bar{\bar{C}} \quad \text{and} \quad U = \gamma U_T \\ \rho &= \gamma \rho_T \quad \text{and} \quad P = \gamma^2 P_T \quad \text{and} \quad T = \gamma T_T \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Les démonstrations et explications sont présentées dans (FONTEIX et al. 2020a).

4 Rappels de dynamique des mélanges fluides continus en relativité générale

La relativité générale ajoute à la relativité restreinte le fait que l'espace-temps soit déformé, courbé par la matière (DAMOURE 2006) (ROMERO 2013). Malgré la courbure de l'espace-temps, pour POINCARÉ « nous pourrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire » (POINCARÉ 1901). Dans (FONTEIX et al. 2020b), nous appliquons les recommandations de POINCARÉ et gardons le même repère qu'en relativité restreinte : le repère utilisé est formé de 3 axes spatiaux orthogonaux deux à deux et de même échelle, et d'un axe *ict* symbolisant le temps, orthogonal à chaque axe spatial et de même échelle où *i* est l'imaginaire pur de norme unitaire, *c* est la vitesse de la lumière dans le vide et *t* le temps. Ces axes sont rectilignes, et donc virtuels mais servent à se repérer, ce sont les trajectoires de la lumière et des objets stellaires qui sont courbes. Cette courbure se traduit par un tenseur métrique $\bar{\bar{G}}$ pouvant être représenté par une matrice symétrique semi-réelle

$$4 \times 4 \text{ tel que } \bar{\bar{G}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{g}{c^2} & -\frac{i\bar{g}^T}{2c^2} \\ -\frac{i\bar{g}}{2c^2} & \bar{\bar{\delta}} + \frac{\bar{g}}{c} \end{pmatrix} = \bar{\bar{\delta}} + \begin{pmatrix} -\frac{g}{c^2} & -\frac{i\bar{g}^T}{2c^2} \\ -\frac{i\bar{g}}{2c^2} & \frac{\bar{g}}{c} \end{pmatrix}.$$

Dans (FONTEIX et al. 2020b), nous avons proposé un principe permettant un passage de la relativité restreinte à la relativité générale : **Si le repère utilisé dans l'espace-temps courbe est inertiel, alors nous admettons, sans démonstration, que le repère correspondant dans l'espace-temps *V* plat est inertiel. Ainsi, les équations de la dynamique des fluides continus en**

relativité restreinte, dans lesquelles les phénomènes Newtoniens ont été effacés, s'appliquent dans l'espace-temps V (virtuel). Ces mêmes équations s'écrivent en relativité générale grâce au changement de variables local $d\vec{X}^* = \overline{\overline{\mathbf{G}}}^T d\vec{X}$ soumis aux conditions

$\left. \begin{array}{l} \frac{\vec{v}^T \overline{\overline{\mathbf{g}}} \vec{v}}{\vec{v}^T \vec{v}} + c > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0 \\ c^2 - g > 0 \end{array} \right\}$ dans un repère inertiel quelconque (ce qui assure leur covariance), où

\vec{X}^* est une position dans l'espace-temps V et \vec{X} la position correspondante dans l'espace-temps réel courbe. Compte tenu des conditions indiquées, le tenseur métrique est une matrice symétrique définie positive admettant :

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\overline{\mathbf{G}}}^T \overline{\overline{\mathbf{G}}}^T \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{\mathbf{G}}}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{g}{c^2} + \frac{1}{4c^4} \vec{g}^T \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^{-1} \vec{g}} & 0 \\ -\frac{i}{c} \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^T \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^{-1} \frac{\overline{\overline{g}}}{2c} & \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^T \end{pmatrix} \quad (32)$$

Où $\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^T \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^T = \overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c}$ (décomposition obtenue par CHOLESKI inversé, donnant $\left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^T$ sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure). Sachant que $\det(\dots)$ indique le déterminant d'une matrice, nous pouvons remarquer que :

$$\det(\overline{\overline{\mathbf{G}}}) = \left(1 - \frac{g}{c^2} + \frac{1}{4c^4} \vec{g}^T \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right)^{-1} \vec{g} \right) \det \left(\overline{\overline{\delta}} + \frac{\overline{\overline{g}}}{c} \right) > 0 \quad (33)$$

Ce qui est contraire au résultat usuel, et est dû à l'usage de matrices semi-réelles. L'intérêt de ceci est de pouvoir considérer l'espace-temps V (localement plat) comme assimilable à celui de la relativité restreinte. En effet, nous savons que $d\vec{X}$ est un tenseur contravariant d'ordre 1. Par contre $d\vec{X}^*$ n'est pas un tenseur, et il n'est ni contravariant ni covariant, il a le comportement d'un vecteur ordinaire : nous le qualifierons de vecteur neutre (l'étoile correspond ici à la relativité restreinte). Soit un vecteur contravariant (tenseur d'ordre 1) \vec{f}^C , le vecteur neutre correspondant est :

$$\vec{f}^N = \overline{\overline{\mathbf{G}}}^T \vec{f}^C \quad (34)$$

En théorie des tenseurs, les dérivées covariantes ont une place importante. Cependant, une dérivée covariante n'a pas la même expression si elle s'applique à un vecteur covariant, un vecteur contravariant, ou des tenseurs covariants ou contravariants (LANDAU et al. 1989). Pour illustrer ce fait, rappelons les différentielles covariantes du vecteur contravariant \vec{f}^C et du tenseur covariant $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D}(\vec{f}^C)_i = d(\vec{f}^C)_i + d\vec{X}^T \overline{\overline{\Gamma}}^i \vec{f}^C \\ \mathbf{D}(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{\alpha\beta}) = d(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{\alpha\beta}) - \sum_{i=0}^3 (\overline{\overline{\Gamma}}^i d\vec{X})_{\alpha} \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{i\beta} - \sum_{i=0}^3 \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{\alpha i} (\overline{\overline{\Gamma}}^i d\vec{X})_{\beta} = 0 \end{array} \right\} \quad (35)$$

Où $\mathbf{D}(\dots)$ est une différentielle covariante, $d(\dots) = (d\vec{X}^T \overline{\overline{\mathbf{grad}}})(\dots)$ une différentielle ordinaire avec $\overline{\overline{\mathbf{grad}}}$ défini en (1), et $\overline{\overline{\Gamma}}^i$ une matrice symétrique semi-réelle (si $i>0$ et multipliée par i si $i=0$) formée à l'aide des symboles de CHRISTOFFEL (REZZOLLA et al. 2013) (LANDAU et al. 1989). Le terme $(\vec{f}^C)_i$ indique le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur \vec{f}^C , et $(\overline{\overline{\mathbf{G}}})_{\alpha\beta} = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{\alpha\beta}$ l'élément de la $\alpha^{\text{ème}}$ ligne et de la $\beta^{\text{ème}}$ colonne de $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$. Dans (35), $i = 0$ indique le temps et $i > 0$ une des coordonnées spatiales. La matrice $\overline{\overline{\Gamma}}^i$ est donnée par $\partial_j \left(\left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}^T \right)_{k\beta} \right) = \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}^T \right)_{ki} (\overline{\overline{\Gamma}}^i)_{\beta j}$ et la différentielle covariante par $\mathbf{D}(\vec{f}^C) = \overline{\overline{\mathbf{G}}}^{-T} d(\vec{f}^N)$.

Nous avons vu en (34) la transformation des vecteurs, pour les matrices nous avons :

$$\bar{\bar{A}}^N = \bar{\bar{G}}^T \bar{\bar{A}}^C \bar{\bar{G}}^{-1} \quad (36)$$

Où $\bar{\bar{A}}^N$ est une matrice neutre et $\bar{\bar{A}}^C$ un tenseur contravariant.

Les transformations de base effectives sont, d'abord pour les quadri-vitesses :

$$\vec{u}^* = \frac{1}{\Gamma} \bar{\bar{G}}^T \vec{u} \quad \text{avec} \quad \frac{dt^*}{dt} = \Gamma \quad (37)$$

Ensuite les facteurs de LORENTZ locaux et le flux de chaleur :

$$\frac{\gamma^*}{\gamma} = \frac{\Gamma}{\sqrt{1-\frac{g}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \vec{q}^* = \frac{\Gamma \bar{\bar{G}}^T \vec{q}}{\sqrt{(1-\frac{g}{c^2}) \det(\bar{\bar{G}})}} \quad (38)$$

Les volumes élémentaires et les masses Newtoniennes volumiques :

$$dV^* = \sqrt{\det(\bar{\bar{G}})} dV \quad \text{et} \quad \rho^* = \gamma^* \frac{\rho}{\gamma} \sqrt{\frac{1-\frac{g}{c^2}}{\det(\bar{\bar{G}})}} \quad (39)$$

Les réactions chimiques $r_i = r_i^* \sqrt{\det(\bar{\bar{G}})}$, et la pression :

$$P = \frac{P^*}{\Gamma^2} \sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{\bar{G}})} \quad (40)$$

Si nous admettons l'hypothèse généralement admise que l'entropie est un invariant, c'est que la température absolue (donc en °K) suit une loi identique à celle suivie par tous les types d'énergie, celle proposée par (ARZELIES 1971) (covariance) $T_T = \frac{T^*}{\gamma^*} = \frac{T}{\gamma}$. Également, si \vec{F}^* est une quadri-force volumique dans l'espace-temps V (relativité restreinte) et \vec{F} la quadri-force volumique correspondante dans l'espace-temps réel courbe, nous avons (FONTEIX et al. 2020b) :

$$\vec{F}^* \sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{\bar{G}})} = \bar{\bar{G}}^T \vec{F} \quad (41)$$

Le tenseur des contraintes de cisaillement $\bar{\bar{\tau}}^*$ se transforme en :

$$\bar{\bar{\tau}}^* = \frac{\bar{\bar{G}}^T \bar{\bar{\tau}} \bar{\bar{G}}^{-1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{\bar{G}})}} \quad (42)$$

Comme tous les tenseurs, dont les tenseurs énergie-impulsion. Pour le tenseur électromagnétique :

$$\bar{\bar{E}} = \sqrt{1 - \frac{g}{c^2}} \bar{\bar{G}}^{-\frac{T}{2}} \bar{\bar{E}}^* \bar{\bar{G}}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \lambda_E = \lambda_E^* \frac{\sqrt{\det(\bar{\bar{G}})}}{\Gamma \sqrt{1 - \frac{g}{c^2}}} \quad (43)$$

Où $\bar{\bar{E}}$ est un tenseur d'ordre 2 antisymétrique et contravariant, $\bar{\bar{E}}^*$ étant une matrice antisymétrique neutre, et λ_E la conductivité électrique moyenne du mélange fluide continu. Le courant électrique total est $\vec{C} = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i \alpha_i \vec{u} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{j}_i + \rho_I \alpha_E \vec{u} + \lambda_E \bar{\bar{E}} \vec{u}$, avec :

$$\left. \begin{aligned} \vec{C}^* &= \frac{\bar{\bar{G}}^T \vec{C}}{\sqrt{\det(\bar{\bar{G}})}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{P}} = \bar{\bar{G}}^{-\frac{T}{2}} \bar{\bar{P}}^* \bar{\bar{G}}^{-\frac{1}{2}} \\ \bar{\bar{B}} &= \sqrt{1 - \frac{g}{c^2}} \bar{\bar{G}}^{-\frac{T}{2}} \bar{\bar{B}}^* \bar{\bar{G}}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{G}}^{-\frac{T}{2}} \bar{\bar{M}}^* \bar{\bar{G}}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Les équations de MAXWELL s'écrivent en relativité générale (notation tensorielle) :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 c^2 \left(\bar{\mathbf{E}}_{;i}^{im} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}^{im} \partial_i \left(\ln \left(1 - \frac{g}{c^2} \right) \right) \right) + \sqrt{1 - \frac{g}{c^2}} \bar{\mathbf{P}}_{;i}^{im} = -\bar{\mathbf{C}}^m \sqrt{\frac{1 - \frac{g}{c^2}}{\det(\bar{\mathbf{G}})}} \\ \bar{\mathbf{B}}_{;i}^{im} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^{im} \partial_i \left(\ln \left(1 - \frac{g}{c^2} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Le tenseur énergie-impulsion électromagnétique devient, avec $\bar{\mathbf{U}} = \frac{\gamma \bar{\mathbf{u}}}{\sqrt{c^2 - g}}$:

$$\bar{\mathbf{T}}_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \sqrt{\frac{\det(\bar{\mathbf{G}})}{1 - \frac{g}{c^2}}} (c^2 \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{E}}^T + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{B}}^T) - \sqrt{\det(\bar{\mathbf{G}})} (\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{B}} + (\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{U}}) \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T) \quad (46)$$

Le tenseur énergie-impulsion de masse Newtonienne se transforme en :

$$\bar{\mathbf{T}}_N = \rho_I \gamma \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T + \left(\left(1 - \frac{g}{c^2} \right) \frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\det(\bar{\mathbf{G}})} (\bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{G}}) \circ (\bar{\mathbf{E}}) \right) (\bar{\mathbf{G}}^{-1} + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T) - \bar{\tau} \quad (47)$$

Le bilan correspondant au tenseur énergie-impulsion Newtonienne s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{N;i}^{im} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{T}}_N^{im} \partial_i \left(\ln \left(\left(1 - \frac{g}{c^2} \right) \det(\bar{\mathbf{G}}) \right) \right) = \bar{\mathbf{E}}^{mi} \bar{\mathbf{C}}_i + \bar{\mathbf{F}}_D^m \\ \bar{\mathbf{F}}_D = -\sqrt{\det(\bar{\mathbf{G}})} (\bar{\mathbf{G}}^{-1} + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T) \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{G}}^2 \right) \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}}^T \bar{\mathbf{G}}^2 \right) \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{B}} \right) \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{U}} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Le tenseur énergie-impulsion totale est, avec le tenseur énergie-impulsion de gravitation $\bar{\mathbf{T}}_G$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_T = \rho \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T + \frac{\varepsilon_0}{2} \sqrt{\frac{\det(\bar{\mathbf{G}})}{1 - \frac{g}{c^2}}} (c^2 \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{E}}^T + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{B}}^T) + \bar{\mathbf{T}}_G - \bar{\tau} - \bar{\tau} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T - \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\tau} \\ + \left(\left(1 - \frac{g}{c^2} \right) \frac{P}{\gamma^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\det(\bar{\mathbf{G}})} (\bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{G}}) \circ (\bar{\mathbf{E}}) \right) (\bar{\mathbf{G}}^{-1} + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T) \\ - \sqrt{\det(\bar{\mathbf{G}})} (\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T + \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{B}} + (\bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{U}}) \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T) + \frac{\bar{q} \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\mathbf{u}} \bar{q}^T}{c^2} + \bar{\Theta}_I \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Nous avons vu qu'en physique classique et qu'en relativité restreinte l'équation (15) s'applique, $\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{\mathbf{T}}_T) = 0$, étant l'expression du premier principe de la thermodynamique. Ce principe doit toujours s'appliquer en relativité générale, mais les dérivées sont plus complexes, comme celles intervenant dans la première équation (48). En fait, dans (FONTEIX et al. 2020b) nous avons simplifié le problème en posant $\bar{\mathbf{T}}_T = 0$, ce qui avait permis de démontrer l'équation d'EINSTEIN, $\bar{\mathbf{T}}_T - \bar{\mathbf{T}}_G = \frac{c^4}{8\pi G} \bar{\mathbf{G}}_E$, où $\bar{\mathbf{G}}_E$ est le tenseur symétrique contravariant d'EINSTEIN, écrit sous la forme d'une matrice symétrique semi-réelle, calculable à partir du tenseur métrique $\bar{\mathbf{G}}$, en utilisant $\bar{\mathbf{G}}_E = \bar{\mathbf{R}} - \frac{\bar{\mathbf{G}} \circ \bar{\mathbf{R}}}{2} \bar{\mathbf{G}}^{-1}$ où $\bar{\mathbf{R}}$ est le tenseur symétrique contravariant de RICCI sous sa forme de matrice symétrique semi-réelle. Cependant, les théories scalaire-vecteur-tenseur ajoutent un tenseur symétrique contravariant à l'expression de $\bar{\mathbf{G}}_E$.

Dans (FONTEIX et al. 2020b), en section 10 (Calcul de la dynamique des fluides continus en relativité générale), nous signalons qu'une connaissance de $\bar{\mathbf{G}}$ en toute position de l'espace-temps dans le domaine étudié peut être utilisée pour résoudre les équations de la dynamique sauf celles donnant de nouvelles valeurs de $\bar{\mathbf{G}}$. Bien entendu, les conditions aux limites et à l'origine sont nécessaires, en particulier, pour la détermination des champs électromagnétiques, mais aussi de la courbure de

l'espace-temps. Pour intégrer les équations (45) et (48), nous pourrions être tentés de proposer initialement $\bar{G} = \bar{\delta}$ dans le domaine d'étude, mais serait une erreur. Il est préférable de résoudre préalablement la dynamique des fluides en relativité restreinte, **AVEC les phénomènes gravitationnels**, et d'en déduire $\bar{T}_T - \bar{T}_G$ puis \bar{G} pour toute position de l'espace-temps. Cette connaissance de \bar{G} dans tout le domaine étudié est le point de départ de la procédure itérative. Encore faut-il s'assurer de la convergence de la méthode. Le fait que les phénomènes gravitationnels Newtoniens apparaissent dans les bilans de quantité de mouvement et d'énergie totale en relativité restreinte peut accélérer l'obtention de la métrique en relativité générale. Le tenseur $\bar{T}_T - \bar{T}_G$ obtenu permet de déterminer une première expression du tenseur métrique, par l'intermédiaire du tenseur d'EINSTEIN. Comme indiqué plus haut les valeurs de \bar{G} obtenues permettent de résoudre les équations de la dynamique en relativité générale, et d'en déduire un nouveau $\bar{T}_T - \bar{T}_G$, puis une nouvelle expression de \bar{G} , et ainsi de suite. Ceci va influencer le tenseur énergie-impulsion et déclencher la courbure de l'espace-temps. Le calcul de la matrice \bar{G}^T ayant les propriétés nécessaires, et de ses dérivées, est relativement complexe, mais faisable.

5 Matière noire et autres hypothèses

Bien des galaxies spirales ont, en première approximation, la forme d'un disque plus ou moins épais ayant une sphère en leur centre. Il a été constaté que la vitesse (dans le sens de rotation) de chaque élément de ces galaxies ne dépendait pas de la distance de cet élément à l'axe de rotation de la galaxie correspondante (SOFUE et al. 2001) (Mc GAUGH et al. 2001).

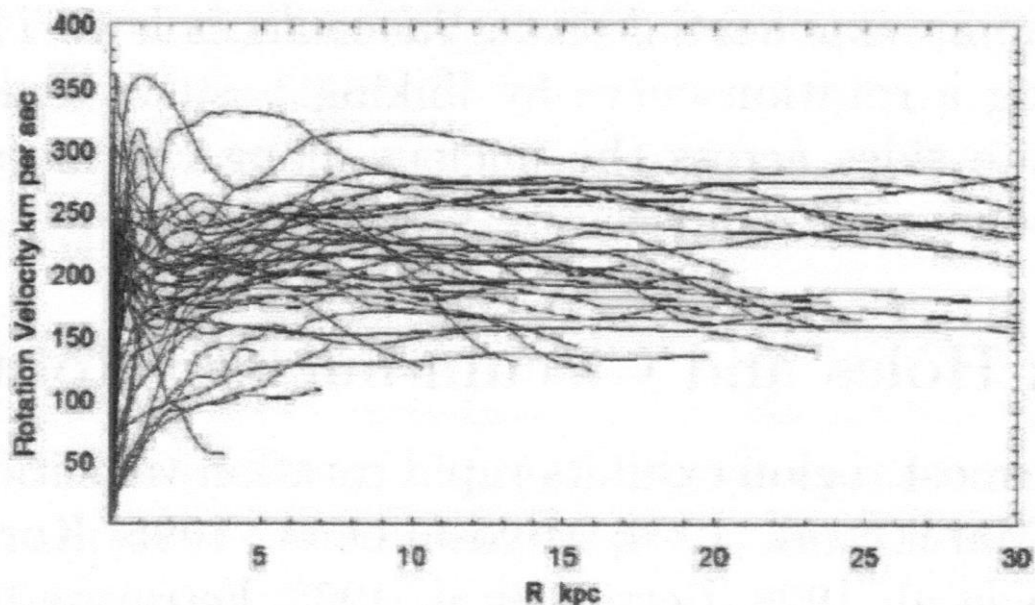


Figure 1 : Vitesse radiale en fonction de la distance au centre de la galaxie (SOFUE et al. 2001)

De ce fait, la force centrifuge s'exerçant sur les éléments périphériques de ces galaxies devrait causer la dispersion dans l'espace de ces éléments, et la disparition de ces galaxies. Or nous constatons que ces galaxies sont stables, il existe donc une force centripète qui s'oppose à la force centrifuge. Le problème est de déterminer quelle est cette force, et quelle est son origine. De nombreuses

hypothèses ont été proposées (TAILLET 2010) (MBELEK 2003). La théorie la plus présentée est celle de la matière noire. C'est la masse de cette matière qui stabilise les galaxies et empêche leur dislocation, mais pour cela, cette matière doit englober ces galaxies et bien au-delà. C'est pour ceci que la matière noire est la matière la plus répandue dans l'univers, et pourtant nous ne la détectons pas malgré tous les efforts déployés (De BLOK et al. 1997) (GUO et al. 2019). Cependant certains auteurs pensent avoir prouvé son existence (CLOWE et al. 2006) et même la possibilité de la mesurer (OPPENHEIMER et al. 2001). D'ailleurs, le télescope spatial EUCLID a été lancé avec cette ambition. Ceci montre l'importance de la matière noire pour les chercheurs (GUO et al. 2019), cependant cette masse ne suit pas toujours la masse de la matière visible (Van DOKKUM et al. 2018). Certains auteurs relèvent même un manque de matière noire dans certains cas (Van DOKKUM et al. 2019) (HAMMER et al. 2019) (ALMEIDA et al. 2019), jusqu'à conduire, parfois, au rejet de l'existence de la matière noire froide (Van WAERBEKE et al. 2023).

La principale théorie concurrente de la matière noire est MOND (MODified Newtonian Dynamics), basée sur l'existence d'une accélération de gravité (fonction de \vec{H} en relativité restreinte) minimale (BEKENSTEIN 2005) (MILGROM 2008) (GENTILE et al. 2010) (SCHIRBER 2021) (SKORDIS 2021) (CHAE et al. 2022) (DUERR et al. 2023). Cette valeur minimale peut avoir une origine quantique, mais elle est trop faible pour avoir eu une confirmation sur terre. Il existe une théorie semble-t-il équivalente : le modèle de gravité thermodynamique, correspondant à une modification de la loi de Poisson (PSZOTA et al. 2023). (BROWNSTEIN et al. 2005) proposent une autre modification de la gravité, plus précisément de son accélération, qui explique la stabilité des galaxies sans faire appel à la matière noire.

(VERLINDE 2010) fait l'hypothèse que la gravité émerge de l'entropie, puis qu'elle émerge, en même temps que l'espace-temps, de la structure intriquée d'une théorie microscopique sous-jacente (VERLINDE 2016). (DIEZ-TEJEDOR et al. 2018) comparent la théorie de VERLINDE avec MOND.

Un problème est la constitution de la matière noire, et les particules massives à interaction faible (WIMP : Weekly Interacting Massive Particles) sont recherchées (ARCHAMBAULT et al. 2009). Voyager-1 est un des outils pouvant être utilisés (BOUDAUD 2019). Cependant, les particules de matière noire peuvent être détruites par les antiprotons (NIPPEL et al. 2022) (CHOLIS et al. 2019). Il existe d'autres candidats pour les particules de matière noire, comme les axions hadroniques (ASAKA 1998), ou comme les trous noirs primordiaux (BOUDAUD et al. 2019). En fait, ces trous noirs primordiaux sont très anciens et peuvent s'être transformés en trous blancs (VIDOTTO 2018) (ROVELLI et al. 2018) (ROVELLI 2023). En effet, un trou noir en fin de vie voit son noyau s'effondrer sur lui-même, du fait de la gravité, jusqu'à une taille de quelques longueurs de PLANCK (ce qui les rend indétectables aux télescopes malgré leur effet gravitaire local), alors il devient un objet quantique appelé trou blanc. La petite taille de ces trous blancs en fait des candidats acceptables comme matière noire. Mais il y a bien d'autres candidats, comme le fluide de poussières (LE TIEC 2017), ou le superfluide (FERREIRA et al. 2019) (ZLOSHCHASTIEV 2022) (ZLOSHCHASTIEV 2023) qui explique aussi l'énergie sombre (ZLOSHCHASTIEV 2020), bien qu'il ne soit pas toujours fluide (MARKEVITCH 2004). L'inhomogénéité de l'univers peut aussi expliquer la matière noire (VIGNERON et al. 2019).

Il existe bien d'autres théories censées remplacer l'hypothèse de la matière noire, dont celle de l'éther cristallin (GREMAUD 2021), mais aussi les phénomènes magnétiques peuvent avoir un effet (MIGNON-RISSE et al. 2021a) (MIGNON-RISSE et al. 2021b) (COMMERCON et al. 2022), ou encore les théories scalaire-tenseur-vecteur peuvent avoir un rôle semblable à la matière noire (MOFFAT 2005). La stabilité des galaxies spirales est peut-être due au gravitomagnétisme (MASHHOON et al. 1999) (MASHHOON 2000) (CLARK et al. 2000) (BEZERRA et al. 2005) (MASHHOON 2008) (YAVARI 2014) (ROUMI et al. 2016) (MASHHOON 2021). Nous allons vérifier si cela est possible, dans la suite.

A la fin de la section 4 nous avons montré que le calcul du tenseur métrique était compliqué en relativité générale, or les matrices $\bar{\Gamma}^i$ formées à l'aide des symboles de CHRISTOFFEL doivent être calculées à partir du tenseur métrique local. Ces matrices permettent de calculer les dérivées covariantes, et donc faire apparaître les forces de gravitation. Nous avons aussi signalé que ce calcul était itératif et nécessitait la résolution préalable du problème en relativité restreinte. C'est donc dans ce cadre que nous allons faire apparaître les forces de gravitation : ces forces induisent la dynamique du mélange fluide continu et donc finalement son comportement en relativité générale. Nous pouvons donc en déduire que les forces de gravitation en relativité restreinte induisent les conséquences de la courbure de l'espace-temps, c'est-à-dire les forces de gravitation en relativité générale.

Nous partons donc des équations (23), (24) et (25) pour exprimer les forces de gravitation. En effet, nous savons que la courbure de l'univers est faible et donc que, localement, l'essentiel des forces de gravitation est dû à la répartition des masses de matière. Ainsi, équation (25) la quadri-force de gravitation est, sachant que $\vec{u}^T = (ic \quad \vec{u}^T)$ (FONTEIX et al. 2020a) :

$$\bar{H}\rho\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{H}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{H} & -\frac{4\pi G}{c^2}\overline{\text{mat}}(\vec{K}) \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} ic \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\rho\vec{H}^T\vec{u} \\ \rho\vec{H} - \frac{4\pi G}{c^2}\overline{\text{mat}}(\vec{K})\vec{u} \end{pmatrix} \quad (50)$$

La force liée à la gravitation est formée de deux éléments, $\rho\vec{H}$ la force de gravitation Newtonienne et $-\frac{4\pi G}{c^2}\overline{\text{mat}}(\vec{K})\vec{u} = -\frac{4\pi G}{c^2}\vec{K} \wedge \vec{u} = \frac{4\pi G}{c^2}\vec{u} \wedge \vec{K}$ la force magnétogravitationnelle (équivalente à la force magnétique de l'électromagnétisme). Pour déterminer la force magnétogravitationnelle nous devons calculer les champs \vec{H} et \vec{K} à l'aide des équations (24).

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}^T(\vec{H}) &= \frac{4\pi G}{c^2} \rho \vec{u}^T = \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial(\dots)}{\partial t} \quad \overline{\text{grad}}^T(\dots) \right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}\vec{H}^T \\ -\frac{i}{c}\vec{H} & -\frac{4\pi G}{c^2}\overline{\text{mat}}(\vec{K}) \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{i}{c} \overline{\text{grad}}^T(\vec{H}) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\vec{H}^T)}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2} \overline{\text{grad}}^T(\overline{\text{mat}}(\vec{K})) \right) = \frac{4\pi G}{c^2} \rho (ic \quad \vec{u}^T) \end{aligned} \quad (51)$$

Pour la première équation, et pour la deuxième :

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}}^T(\vec{K}) &= 0 = \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial(\dots)}{\partial t} \quad \overline{\text{grad}}^T(\dots) \right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{4\pi G} \overline{\text{mat}}(\vec{H}) \\ -i\vec{K} & \frac{c}{4\pi G} \overline{\text{mat}}(\vec{H}) \end{pmatrix} \\ &= \left(-i \overline{\text{grad}}^T(\vec{K}) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{K}^T)}{\partial t} + \frac{c}{4\pi G} \overline{\text{grad}}^T(\overline{\text{mat}}(\vec{H})) \right) = (0 \quad 0) \end{aligned} \quad (52)$$

Nous avons donc les 4 équations de la gravitation en relativité restreinte :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\text{grad}}^T(\vec{H}) &= -4\pi G\rho \\ \text{rot}(\vec{H}) &= -\frac{4\pi G}{c^2} \frac{\partial\vec{K}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{K}) &= -\rho\vec{u} + \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \overline{\text{grad}}^T(\vec{K}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Nous avons là 2 équations scalaires et 2 équations vectorielles, soit 2+2x3=8 équations au total. Le nombre d'inconnues est 6 puisque les deux vecteurs cherchés, \vec{H} et \vec{K} , ont trois coordonnées chacun, toutes étant des fonctions de 3 variables spatiales (que nous présenterons plus loin).

Pour simplifier le problème nous ferons plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Une galaxie spirale est formée d'un noyau sphérique et d'un disque spiralé. Le noyau comprend, en son centre, un trou noir. Nous simplifierons en considérant le noyau comme homogène, et de rayon r_0 , et le disque comme plein, cylindrique de rayon R et de faible épaisseur e .
- Nous appliquerons le principe de superposition en attribuant l'indice 1 au noyau et 2 au disque.
- Nous considérons que la galaxie est en rotation autour de son axe de symétrie. Pour simplifier nous nous placerons dans un repère dans lequel cette galaxie est fixe. Cela veut dire que ce repère est en rotation par rapport à un repère inertiel suivant un vecteur rotation $\vec{\omega}$.

Selon (FONTEIX et al. 2022) un changement de repère inertiel en relativité restreinte se fait grâce à deux transformations, une prenant en compte l'effet relativiste à l'aide d'une matrice semi-réelle orthogonale et normée $\bar{\Lambda}$, l'autre $\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{pmatrix}$, où \bar{P} est une matrice réelle 3x3 orthogonale et normée prenant en charge les changements d'axes spatiaux. Nous pouvons considérer que \bar{P} puisse rendre compte des rotations, car $\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = \bar{P} \overline{\text{mat}}(\vec{\omega})$ et $\frac{\partial \bar{P}\vec{H}}{\partial t} = \bar{P} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \vec{H} = \bar{P} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} \right)$ en physique classique de la cinématique du point matériel (changement d'un repère fixe à un autre en rotation). Ainsi, dans les équations (53) les dérivées temporelles doivent être remplacées par $\vec{\omega} \wedge \vec{K}$ et $\vec{\omega} \wedge \vec{H}$, et comme l'axe de rotation du repère est supposé fixe il n'y a pas de dérivée temporelle.

En fait, nous devons étudier séparément le cas du noyau galactique sphérique et le disque spiralé. En ce qui concerne le noyau, nous utiliserons les coordonnées sphériques $(r \ \theta \ \psi)$, où θ est l'angle que fait le segment allant du centre du noyau à r , noté \vec{r} , avec $\vec{\omega}$ et où ψ est l'angle que fait une projection de \vec{r} sur le plan orthogonal à $\vec{\omega}$, passant par le centre du noyau, avec un axe fixe, passant par le centre du noyau, dans ce plan. Le gradient est dans ce cas $\left(\frac{\partial}{\partial r} \ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \psi} \right)$ et le rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(H_{1\psi} \sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial H_{1\theta}}{\partial \psi} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(H_{1r} \sin(\theta))}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_{1\psi})}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_{1\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_{1r}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (54)$$

En coordonnées sphériques la 1^{ère} équation de (53) devient, pour le noyau central de la galaxie (car le produit scalaire du gradient et d'un vecteur est une divergence) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{H}_1) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 H_{1r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(H_{1\theta} \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial H_{1\psi}}{\partial \psi} = -4\pi G \rho_1 \quad (55)$$

Nous avons vu, équation (50), que $\rho \vec{H}$ est la force volumique d'attraction que produit le noyau central sur un corps extérieur. Or cette force d'attraction est forcément colinéaire à $-\vec{r}$, donc H_{1r} est non nul sauf si r tend vers l'infini, cependant, dans ce cas nous sommes à l'extérieur du noyau et :

$$\text{si } r > r_0 \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 H_{1r})}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 H_{1r} = a \quad \Rightarrow \quad H_{1r} = \frac{a}{r^2} \quad H_{1\theta} = 0 = H_{1\psi} \quad (56)$$

Or nous savons que dans ce cas $H_{1r} = -\frac{GM}{r^2}$ où $M = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_1$ est la masse du noyau central de la galaxie, r_0 étant son rayon. Mais l'objectif de ce papier est d'exprimer le champ magnétogravitationnel au sein du disque galactique, ce qui nécessite l'expression du champ gravitationnel Newtonien. A

l'intérieur du noyau galactique nous avons aussi $H_{1\psi} = H_{1\theta} = 0$, ainsi que $\frac{\partial(r^2 H_{1r})}{\partial r} = -4\pi G \rho_1 r^2$ et $r^2 H_{1r} = -4\pi G \rho_1 \frac{r^3}{3} + A(\theta, \psi)$. Ceci donne (\vec{H}_1 ne varie pas avec t) :

$$\text{si } r \leq r_0 \quad H_{1r} = -GM \frac{r}{r_0^3} + \frac{A(\theta, \psi)}{r^2} \quad H_{1\psi} = H_{1\theta} = 0 \quad (57)$$

En $r = r_0$ nous devons avoir, par continuité de (56) à (57), $-GM \frac{1}{r_0^2} + \frac{A(\theta, \psi)}{r_0^2} = -\frac{GM}{r_0^2}$, ce qui impose $A(\theta, \psi) = 0$. Nous pouvons maintenant aborder la 2^{ème} équation de (53), cependant il convient de déterminer le produit vectoriel remplaçant $\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}$, avec $\vec{\omega}$ constant (le noyau central tourne en bloc). Le plus simple est de calculer le vecteur \vec{K}_1 en coordonnées sphériques :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\psi) & \sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cos(\theta) \\ -\omega \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Car en coordonnées cartésiennes $\vec{\omega}^T = (0 \quad 0 \quad \omega)$, et $\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}$ est remplacé par :

$$\begin{pmatrix} \omega \cos(\theta) \\ -\omega \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} K_{1r} \\ K_{1\theta} \\ K_{1\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega K_{1\psi} \sin(\theta) \\ -\omega K_{1\psi} \cos(\theta) \\ \omega K_{1\theta} \cos(\theta) + \omega K_{1r} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (59)$$

Ainsi la 2^{ème} équation de (53) devient, avec (54), (57), (59) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{4\pi G}{c^2} \begin{pmatrix} -\omega K_{1\psi} \sin(\theta) \\ -\omega K_{1\psi} \cos(\theta) \\ \omega K_{1r} \sin(\theta) + \omega K_{1\theta} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (60)$$

Nous en déduisons $K_{1\psi} = 0$ et $K_{1\theta} = -K_{1r} \text{tg}(\theta)$. Commençons par la 4^{ème} équation de (53) :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{K}_1) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 K_{1r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(K_{1\theta} \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial K_{1\psi}}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{2K_{1r}}{r} + \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(K_{1r} \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)})}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\text{tg}(\theta)}{r} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \theta} + \frac{K_{1r}}{r \sin(\theta)} (2\sin(\theta) + \sin(\theta) \text{tg}^2(\theta)) &= \frac{2K_{1r}}{r} + \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

C'est-à-dire :

$$K_{1r} \text{tg}^2(\theta) + \frac{\partial K_{1r}}{\partial \theta} \text{tg}(\theta) = r \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} \quad (62)$$

En ce qui concerne la 3^{ème} équation de (53), nous avons $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega r \sin(\theta) \end{pmatrix}$, car \vec{u} et $\vec{\omega}$ sont des vecteurs orthogonaux, et \vec{u} est en direction de $d\psi$ avec un rayon $r \sin(\theta)$. Ceci s'applique à :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{K}_1) = -\rho_1 \vec{u} + \frac{1}{4\pi G} \vec{\omega} \wedge \vec{H}_1 \quad (63)$$

Pour obtenir le produit vectoriel de (63), il suffit de remplacer K_1 par H_1 dans le vecteur à droite de (60) et H_1 par K_1 dans l'expression du rotationnel de (54), et tenir compte de la relation après (60) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos(\theta)} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \psi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \psi} \\ -\frac{K_{1r}}{r} t g(\theta) - \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} t g(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = -\rho_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega r \sin(\theta) \end{pmatrix} + \frac{1}{4\pi G} \begin{pmatrix} -\omega H_{1\psi} \sin(\theta) \\ -\omega H_{1\psi} \cos(\theta) \\ \omega H_{1\theta} \cos(\theta) + \omega H_{1r} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (64)$$

En tenant compte de (56), nous constatons que ceci impose $\frac{\partial K_{1r}}{\partial \psi} = 0$. Donc, après simplification il ne nous reste qu'une équation, compte tenu de (62) :

$$-\frac{K_{1r}}{r} t g(\theta) - \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} t g(\theta) - \frac{1}{r t g(\theta)} \left(r \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} - K_{1r} t g^2(\theta) \right) = -\rho_1 \omega r \sin(\theta) + \frac{\omega \sin(\theta)}{4\pi G} \left(-GM \frac{r}{r_0^3} \right) \quad (65)$$

Mais K_{1r} est indépendant de ψ . C'est-à-dire :

$$\frac{\partial K_{1r}}{\partial r} \left(t g(\theta) + \frac{1}{t g(\theta)} \right) = \omega \sin(\theta) \left(\rho_1 r + \frac{Mr}{4\pi r_0^3} \right) = \rho_1 \omega \sin(\theta) \frac{4r}{3} \quad (66)$$

Après intégration il apparaît le terme $B(\theta)$, qui prend en compte la condition initiale de r :

$$K_{1r} = \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{2r^2}{3} + B(\theta) \quad (67)$$

Ainsi le résultat est en coordonnées sphériques, pour l'intérieur du noyau galactique ($r \leq r_0$) :

$$\text{si } r \leq r_0 \quad \vec{K}_1 = \begin{pmatrix} K_{1r} \\ K_{1\theta} \\ K_{1\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{2r^2}{3} + B(\theta) \\ -\rho_1 \omega \sin^3(\theta) \frac{2r^2}{3} - B(\theta) t g(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Cependant, nous avons besoin de \vec{K}_1 à l'extérieur du noyau galactique, au niveau du disque de la galaxie, donc pour $r > r_0$ et $r \leq R$. L'équation (60) est inchangée car ω s'élimine et la variation de cette vitesse de rotation n'influe pas sur le résultat, ce qui conserve (62), par contre l'avant dernière relation de (53) doit être modifiée. En effet, la vitesse de rotation n'est plus ω , mais celle du disque galactique, c'est-à-dire $\frac{u}{r}$ comme indiqué après (77). En $r = r_0$ on doit avoir $\omega = \frac{u}{r_0}$, ce qui donne en r la vitesse de rotation $\omega \frac{r_0}{r}$. Ainsi, (64) devient pour $r_0 < r \leq R$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r \cos(\theta)} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \psi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \psi} \\ -\frac{K_{1r}}{r} t g(\theta) - \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} t g(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_{1r}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4\pi G} \begin{pmatrix} -\omega \frac{r_0}{r} H_{1\psi} \sin(\theta) \\ \omega \frac{r_0}{r} H_{1\psi} \cos(\theta) \\ \omega \frac{r_0}{r} H_{1\theta} \cos(\theta) + \omega \frac{r_0}{r} H_{1r} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (69)$$

Comme pour (64), ceci impose $\frac{\partial K_{1r}}{\partial \psi} = 0$ et :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{K_{1r}}{r} t g(\theta) - \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} t g(\theta) - \frac{1}{r t g(\theta)} \left(r \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} - K_{1r} t g^2(\theta) \right) &= \frac{\omega \frac{r_0}{r} \sin(\theta)}{4\pi G} \left(-\frac{GM}{r^2} \right) \\ \frac{\partial K_{1r}}{\partial r} \left(t g(\theta) + \frac{1}{t g(\theta)} \right) &= -\rho_1 \omega \frac{r_0}{r} \sin(\theta) \frac{r^3}{3r^2} = -\rho_1 \omega \sin(\theta) \frac{r_0^4}{3r^3} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Après intégration, nous obtenons :

$$K_{1r} = \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^4}{6r^2} + B_1(\theta) \quad (70)$$

Or si $r \rightarrow \infty$, il faut que $K_{1r} \rightarrow 0$ donc $B_1(\theta) = 0$. Si $r = r_0$ la continuité du champ impose $\rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{2r_0^2}{3} + B(\theta) = \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^2}{6}$, c'est-à-dire $B(\theta) = -\rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^2}{2}$. Le champ magnéto-gravitationnel à l'extérieur du noyau est donc :

$$si r > r_0 \quad \vec{K}_1 = \begin{pmatrix} K_{1r} \\ K_{1\theta} \\ K_{1\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^4}{6r^2} \\ -\rho_1 \omega \sin^3(\theta) \frac{r_0^4}{6r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

Ainsi un objet stellaire de masse m circulant sur une orbite circulaire, à la vitesse \vec{u} , à la distance $r > r_0$ du centre du noyau, subit une force égale à (sans compter le disque de la galaxie) :

$$\begin{aligned} m\vec{H}_1 + \frac{4\pi mG}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{K}_1 &= m \begin{pmatrix} -\frac{GM}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4\pi mG}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \rho_1 u \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^3}{6r^2} \\ -\rho_1 u \sin^3(\theta) \frac{r_0^3}{6r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{GMm}{r^2} + \frac{4\pi mG}{c^2} \rho_1 u^2 \sin^3(\theta) \frac{r_0^3}{6r^2} \\ \frac{4\pi mG}{c^2} \rho_1 u^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^3}{6r^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{GMm}{r^2} + \frac{GMm}{2r^2} \frac{u^2}{c^2} \sin^3(\theta) \\ \frac{GMm}{2r^2} \frac{u^2}{c^2} \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

Nous constatons que le mobile subit, en plus de la force de gravitation Newtonienne, une force supplémentaire en $\frac{u^2}{c^2}$. Cependant il convient de vérifier l'influence du disque galactique.

Il reste donc à déterminer les champs \vec{H}_2 et \vec{K}_2 correspondant au disque de la galaxie, mais pour modéliser ce disque, nous devons utiliser un système de coordonnées cylindriques et non plus sphériques. Comme nous devons ajouter les champs donnés en (56) et (71) à ceux du disque galactique, il faut les présenter en coordonnées cylindriques (les passer de coordonnées sphériques à cylindriques). Pour déterminer la matrice de transition permettant ce changement de coordonnées, le plus simple est de passer par les coordonnées cartésiennes. Nous avons vu équation (58) la matrice de transition des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques. Cette matrice étant orthogonale et normée, c'est sa transposée qui permet le changement inverse de coordonnées :

$$\vec{H}_1 = \begin{pmatrix} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\psi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{GM}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

Nous avons là \vec{H}_1 en coordonnées cartésiennes, sauf que celles-ci sont exprimées en coordonnées sphériques ($r \ \theta \ \psi$). Cependant, nous ne ferons pas la transformation des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes, car nous devons finalement avoir les transformées en coordonnées cylindriques ($r_c \ \psi \ z$). Le passage de \vec{H}_1 en coordonnées cylindriques se fait à l'aide de la transformation :

$$\begin{pmatrix} H_{1r_c} \\ H_{1\psi} \\ H_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{pmatrix} \quad (74)$$

Ce qui donne la transformation de \vec{H}_1 des coordonnées sphériques en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\psi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

Ce qui conduit à \vec{H}_1 exprimé en coordonnées cylindriques (à partir des coordonnées sphériques) :

$$\begin{pmatrix} H_{1r_c} \\ H_{1\psi} \\ H_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{GM}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_1 \frac{G}{r^2} \sin(\theta) \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_1 \frac{G}{r^2} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (76)$$

La conversion utile des coordonnées sphériques en cylindriques est donnée par $r^2 = r_c^2 + z^2$, $\cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{r_c^2 + z^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{r_c}{\sqrt{r_c^2 + z^2}}$, ce qui donne $H_{1r_c} = -\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_1 \frac{Gr_c}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}$, $H_{1\psi} = 0$ et $H_{1z} = -\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_1 \frac{Gz}{(r_c^2 + z^2)^{3/2}}$. Nous appliquons la même procédure pour \vec{K}_1 :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} K_{1r_c} \\ K_{1\psi} \\ K_{1z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \cos(\theta) \frac{r_0^4}{6r^2} \\ -\rho_1 \omega \sin^3(\theta) \frac{r_0^4}{6r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_1 \omega \sin^2(\theta) \frac{r_0^4}{6r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_1 \omega \frac{r_c^2}{r_c^2 + z^2} \frac{r_0^4}{6(r_c^2 + z^2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Dans le cas des galaxies spirales, au sein du disque galactique $\|\vec{\omega}\| r_c = \|\vec{u}\|$, ou encore $\omega = \frac{u}{r_c}$ où u est une constante pour $r_c > r_0$. Les équations (53) proviennent de (51) et (52), or nous savons que ces équations conservent leur structure lors d'un changement de repère inertiel (FONTEIX et al. 2020a). Nous étendons ce fait au cas d'un changement de repère quelconque (la démonstration est la même, il suffit de remplacer $\vec{\Lambda}_T$ par $\vec{P}\vec{\Lambda}_T$) (FONTEIX 2022). En pratique, chaque élément de chaque équation de (53) est multiplié par \vec{P} , ce qui fait que nous pouvons éliminer cette matrice de ces équations, cependant il faut ajouter $\vec{\omega} \wedge \vec{H}_2$ en effaçant la dérivée temporelle (voir les explications au-dessus de (54)), car le système est localement fixe dans le repère tournant et l'équation (53) devient :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{H}_2) &= -4\pi G \rho_2 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}_2) &= -\frac{4\pi G}{c^2} \vec{\omega} \wedge \vec{K}_2 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{K}_2) &= -\rho_2 \vec{u} + \frac{1}{4\pi G} \vec{\omega} \wedge \vec{H}_2 \\ \overrightarrow{\text{grad}}^T(\vec{K}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

En réalité, il faut envisager un repère rotatif autour de l'axe de la galaxie pour chaque rayon r_c car nous avons vu que $\omega = \frac{u}{r_c}$ avec u constant. Du fait de la symétrie cylindrique du disque galactique nous choisissons les variables $(r_c \ \psi \ z)$ où ψ est l'angle formé par \vec{r}_c et une direction origine. Le gradient

est alors $\overrightarrow{\text{grad}}^T(\dots) = \left(\frac{\partial \dots}{\partial r_c} \ \frac{1}{r_c} \frac{\partial \dots}{\partial \psi} \ \frac{\partial \dots}{\partial z} \right)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_c} \frac{\partial H_{2z}}{\partial \psi} - \frac{\partial H_{2\psi}}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{2r}}{\partial z} - \frac{\partial H_{2z}}{\partial r_c} \\ \frac{H_{2\psi}}{r_c} + \frac{\partial H_{2\psi}}{\partial r_c} - \frac{\partial H_{2r}}{\partial \psi} \end{pmatrix}$. En coordonnées

cylindriques l'équation (53) devient pour $r_0 \leq r_c \leq R$:

$$\frac{\partial H_{2r}}{\partial r_c} + \frac{H_{2r}}{r_c} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial H_{2\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial H_{2z}}{\partial z} = -4\pi G \rho_2 \quad (79a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r_c} \frac{\partial H_{2z}}{\partial \psi} - \frac{\partial H_{2\psi}}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{2r}}{\partial z} - \frac{\partial H_{2z}}{\partial r_c} \\ \frac{H_{2\psi}}{r_c} + \frac{\partial H_{2\psi}}{\partial r_c} - \frac{\partial H_{2r}}{\partial \psi} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi G}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ r_c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} K_{2r} \\ K_{2\psi} \\ K_{2z} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi G}{c^2} \begin{pmatrix} -\frac{u}{r_c} K_{2\psi} \\ \frac{u}{r_c} K_{2r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (79b)$$

L'axe de rotation $\vec{\omega}$ est en effet l'axe z , alors que la vitesse \vec{u} a comme direction celle de ψ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r_c} \frac{\partial K_{2z}}{\partial \psi} - \frac{\partial K_{2\psi}}{\partial z} \\ \frac{\partial K_{2r}}{\partial z} - \frac{\partial K_{2z}}{\partial r_c} \\ \frac{K_{2\psi}}{r_c} + \frac{\partial K_{2\psi}}{\partial r_c} - \frac{\partial K_{2r}}{\partial \psi} \end{pmatrix} = -\rho_2 \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4\pi G} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ r_c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} H_{2r} \\ H_{2\psi} \\ H_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{H_{2\psi} u}{4\pi G r_c} \\ -\rho_2 u + \frac{H_{2r} u}{4\pi G r_c} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (79c)$$

$$\frac{\partial K_{2r}}{\partial r_c} + \frac{K_{2r}}{r_c} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial K_{2\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial K_{2z}}{\partial z} = 0 \quad (79d)$$

Le long d'un cercle de rayon r_c dans le disque galactique (dans son plan), il n'est pas possible de différencier un point d'un autre. Donc les dérivées par rapport à ψ de \vec{H}_2 et \vec{K}_2 sont forcément nulles. L'équation de (79a) s'écrit :

$$\frac{\partial H_{2r}}{\partial r_c} + \frac{H_{2r}}{r_c} + \frac{\partial H_{2z}}{\partial z} = -4\pi G \rho_2 = \frac{1}{r_c} \frac{\partial(r_c H_{2r})}{\partial r_c} + \frac{\partial H_{2z}}{\partial z} \quad (80)$$

Une galaxie spirale n'est pas un disque homogène, mais nous ferons cette approximation. Pour cela la masse volumique moyenne doit varier avec r_c . Un anneau de rayon r_c , de largeur dr_c et d'épaisseur e a un volume égal à $dV = 2\pi r_c e dr_c$, qui contient une masse de matière $dM = \rho_2 dV$. Ainsi, la masse volumique locale est $\rho_2 = \frac{dM}{2\pi r_c e dr_c}$. L'accroissement de masse dM correspondant à dr_c dépend du nombre de branches (qui est constant) et non de r_c , donc $\frac{dM}{dr_c}$ doit être une constante et $\frac{dM}{2\pi e dr_c} = \mu$ aussi. Donc $\rho_2 = \frac{\mu}{r_c}$, car plus r_c augmente plus les branches s'écartent et plus ρ_2 diminue, en moyenne. Nous pouvons maintenant aborder (79b), les trois équations correspondantes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial H_{2\psi}}{\partial z} &= \frac{4\pi G u}{c^2} \frac{K_{2\psi}}{r_c} \\ \frac{\partial H_{2r}}{\partial z} - \frac{\partial H_{2z}}{\partial r_c} &= -\frac{4\pi G u}{c^2} \frac{K_{2r}}{r_c} \\ \frac{H_{2\psi}}{r_c} + \frac{\partial H_{2\psi}}{\partial r_c} &= 0 = \frac{1}{r_c} \frac{\partial(r_c H_{2\psi})}{\partial r_c} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

La relation (79c) devient :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial K_{2\psi}}{\partial z} &= -\frac{H_{2\psi} u}{4\pi G r_c} \\ \frac{\partial K_{2r}}{\partial z} - \frac{\partial K_{2z}}{\partial r_c} &= -\rho_2 u + \frac{H_{2r} u}{4\pi G r_c} = -\frac{\mu u}{r_c} + \frac{H_{2r} u}{4\pi G r_c} \\ \frac{K_{2\psi}}{r_c} + \frac{\partial K_{2\psi}}{\partial r_c} &= 0 = \frac{1}{r_c} \frac{\partial(r_c K_{2\psi})}{\partial r_c} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

L'équation (79d) conduit à :

$$\frac{\partial K_{2r}}{\partial r_c} + \frac{K_{2r}}{r_c} + \frac{\partial K_{2z}}{\partial z} = 0 = \frac{1}{r_c} \frac{\partial(r_c K_{2r})}{\partial r_c} + \frac{\partial K_{2z}}{\partial z} \quad (83)$$

Nous devons déterminer les champs \vec{H}_2 et \vec{K}_2 à l'intérieur du disque galactique pour déterminer les forces volumiques s'exerçant sur des parties élémentaires de ce disque. Nous commencerons par l'intégration de la troisième ligne de (81), ainsi que celle de la troisième ligne de (82) :

$$\frac{\partial(r_c H_{2\psi})}{\partial r_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{2\psi} = \frac{A(z)}{r_c} \quad ; \quad \frac{\partial(r_c K_{2\psi})}{\partial r_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{2\psi} = \frac{B(z)}{r_c} \quad (84)$$

Ce qui donne avec la première ligne de (81) et la première ligne de (82) :

$$\frac{1}{r_c} \frac{\partial B(z)}{\partial z} = \frac{A(z) u}{4\pi G r_c^2} \quad ; \quad \frac{1}{r_c} \frac{\partial A(z)}{\partial z} = -\frac{4\pi G u}{c^2} \frac{B(z)}{r_c^2} \quad (85)$$

Les fonctions A et B étant indépendantes de r_c , les deux équations de (85) n'ont pas de solutions différentes de zéro (il n'est pas possible d'éliminer r_c), donc $H_{2\psi} = K_{2\psi} = 0$.

L'épaisseur e d'une galaxie (hormis le noyau) est très petite devant son rayon R , donc z varie dans le domaine $\frac{e}{2} \geq z \geq -\frac{e}{2}$. Dans ce domaine (mais également à l'extérieur) H_{2z} s'applique dans des directions opposées et symétriques par rapport à l'axe $z = 0$. Ainsi nous admettrons l'expression $H_{2z} = \frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} z + \frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} z^3$. En ce qui concerne H_{2r} , sa variation en fonction de z admet aussi la symétrie par rapport à $z = 0$ mais sans changer de signe. Nous accepterons donc $H_{2r} = \frac{a_{2r}(r_c)}{r_c} + \frac{b_{2r}(r_c)}{r_c} z^2$, ce qui conduit (80) à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(r_c H_{2r})}{\partial r_c} &= \frac{\partial(a_{2r}(r_c) + b_{2r}(r_c) z^2)}{\partial r_c} = -4\pi G\mu - \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} - 3 \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} z^2 \\ H_{2r} &= \frac{a_{2r}(r_c)}{r_c} + \frac{b_{2r}(r_c)}{r_c} z^2 = -4\pi G\mu - \frac{a_{2z}(r_c)}{r_c} - 3 \frac{b_{2z}(r_c)}{r_c} z^2 + \frac{c_{2r} + c'_{2r} z^2}{r_c} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Où c_{2r} et c'_{2r} sont des constantes d'intégration. On obtient $a_{2r}(r_c) = -4\pi G\mu r_c - a_{2z}(r_c) + c_{2r}$ et $b_{2r}(r_c) = -3b_{2z}(r_c) + c'_{2r}$. La deuxième relation de (81) fournit :

$$K_{2r} = -\frac{c^2 r_c}{4\pi G u} \left(\frac{\partial H_{2r}}{\partial z} - \frac{\partial H_{2z}}{\partial r_c} \right) = -\frac{c^2 r_c}{4\pi G u} \left(\left(-6 \frac{b_{2z}(r_c)}{r_c} + \frac{2c'_{2r}}{r_c} \right) z - \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} z - \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} z^3 \right) \quad (87)$$

$$\text{Ou } K_{2r} = -\frac{c^2 r_c}{4\pi G u} \left(\left(-\frac{6b_{2z}(r_c)}{r_c} + \frac{2c'_{2r}}{r_c} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial^2 a_{2z}(r_c)}{\partial r_c^2} \right) z + \left(\frac{1}{r_c^2} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial^2 b_{2z}(r_c)}{\partial r_c^2} \right) z^3 \right).$$

L'équation (83) fournit de ce fait :

$$\frac{\partial K_{2z}}{\partial z} = -\frac{1}{r_c} \frac{\partial(r_c K_{2r})}{\partial r_c} = \frac{c^2}{4\pi G u r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} \left(r_c (-6b_{2z}(r_c) + 2c'_{2r}) z - r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} z - r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} z^3 \right) \quad (88)$$

$$\text{Ou } K_{2z} = \frac{c^2}{4\pi G u r_c} \left(\left(-6 \frac{\partial(r_c b_{2z}(r_c))}{\partial r_c} + 2c'_{2r} - \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right) \frac{z^2}{2} - \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \frac{z^4}{4} + c_{2z}(r_c) \right).$$

La deuxième expression de (82) s'écrit donc, compte tenu de (87) et après (88) :

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{c^2 r_c}{4\pi G u} \left(-6 \frac{b_{2z}(r_c)}{r_c} + \frac{2c'_{2r}}{r_c} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} - 3 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} z^2 \right) - \\ &\frac{c^2}{4\pi G u} \frac{\partial}{\partial r_c} \left(\left(-\frac{6}{r_c} \frac{\partial(r_c b_{2z}(r_c))}{\partial r_c} + \frac{2c'_{2r}}{r_c} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right) \frac{z^2}{2} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \frac{z^4}{4} + \frac{c_{2z}(r_c)}{r_c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

$$= -\frac{\mu u}{r_c} + \frac{u}{4\pi G} \left(-\frac{4\pi G\mu}{r_c} - \frac{a_{2z}(r_c)}{r_c^2} - 3 \frac{b_{2z}(r_c)}{r_c^2} z^2 + \frac{c_{2r} + c'_{2r} z^2}{r_c^2} \right)$$

Nous constatons que les équations indépendantes de z (90a), en z^2 (90b) et en z^4 (90c) sont :

$$-\frac{c^2 r_c}{4\pi G u} \left(-6 \frac{b_{2z}(r_c)}{r_c} + \frac{2c'_{2r}}{r_c} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right) - \frac{c^2}{4\pi G u} \frac{\partial \left(\frac{c_{2z}(r_c)}{r_c} \right)}{\partial r_c} = -\frac{2\mu u}{r_c} - \frac{u}{4\pi G} \frac{a_{2z}(r_c)}{r_c^2} + \frac{u}{4\pi G} \frac{c_{2r}}{r_c^2} \quad (90a)$$

$$\frac{3c^2 r_c}{4\pi G u} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} + \frac{c^2}{4\pi G u} \frac{\partial}{\partial r_c} \left(\frac{3}{r_c} \frac{\partial (r_c b_{2Z}(r_c))}{\partial r_c} - \frac{c'_{2r}}{r_c} + \frac{1}{2r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right) = \frac{u}{4\pi G} \left(-\frac{3b_{2Z}(r_c)}{r_c^2} + \frac{c'_{2r}}{r_c^2} \right) \quad (90b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_c} \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right) = 0 \quad (90c)$$

L'équation (90c) donne :

$$\frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} = d_{2Z} r_c \Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial b_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} = \frac{d_{2Z}}{2} + \frac{d'_{2Z}}{r_c^2} \Rightarrow \frac{\partial b_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} = \frac{d_{2Z}}{2} r_c^2 - d'_{2Z} + d''_{2Z} r_c \quad (91)$$

Ce qui se traduit par $b_{2Z}(r_c) = \frac{d_{2Z}}{6} r_c^3 - d'_{2Z} r_c + \frac{d''_{2Z}}{2} r_c^2 + d_{2Z}^0$. Nous en déduisons la relation de (90b) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{3c^2 r_c}{4\pi G u} \left(\frac{d_{2Z}}{2} + \frac{d'_{2Z}}{r_c^2} \right) + \frac{c^2}{4\pi G u} \frac{\partial}{\partial r_c} \left(2d_{2Z} r_c^2 + \frac{9d''_{2Z}}{2} r_c - 3d'_{2Z} + \frac{3d_{2Z}^0}{r_c} - \frac{c'_{2r}}{r_c} + \frac{1}{2r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right) = \\ -\frac{u}{4\pi G} \left(\frac{d_{2Z}}{2} r_c + \frac{3d''_{2Z}}{2} - \frac{3d'_{2Z}}{r_c} + \frac{3d_{2Z}^0}{r_c^2} - \frac{c'_{2r}}{r_c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (92a)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} = -\frac{u^2}{c^2} \left(\frac{3d_{2Z}}{2} r_c + \frac{3d'_{2Z}}{r_c} + 4d_{2Z} r_c + \frac{9d''_{2Z}}{2} - \frac{3d_{2Z}^0}{r_c^2} + \frac{c'_{2r}}{r_c^2} + \frac{d_{2Z}}{2} r_c + \frac{3d''_{2Z}}{2} - \frac{3d'_{2Z}}{r_c} + \frac{3d_{2Z}^0}{r_c^2} - \frac{c'_{2r}}{r_c^2} \right) \quad (92b)$$

Que l'on intègre en :

$$\frac{1}{2r_c} \frac{\partial \left(r_c^2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} = -\frac{u^2}{c^2} (3d_{2Z} r_c^2 + 6d''_{2Z} r_c + a'_{2Z}) \quad (93a)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r_c} \frac{\partial a_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} \right)}{\partial r_c} = -\frac{u^2}{c^2} \left(\frac{3}{2} d_{2Z} r_c^2 + 4d''_{2Z} r_c + a'_{2Z} + \frac{a''_{2Z}}{r_c^2} \right) \quad (93b)$$

Ce qui fournit finalement :

$$\frac{\partial a_{2Z}(r_c)}{\partial r_c} = -\frac{u^2}{c^2} \left(\frac{1}{2} d_{2Z} r_c^4 + 2d''_{2Z} r_c^3 + a'_{2Z} r_c^2 - a''_{2Z} + a_{2Z}^0 r_c \right) \quad (94a)$$

$$a_{2Z}(r_c) = -\frac{u^2}{c^2} \left(\frac{1}{10} d_{2Z} r_c^5 + \frac{1}{2} d''_{2Z} r_c^4 + \frac{1}{3} a'_{2Z} r_c^3 + \frac{1}{2} a_{2Z}^0 r_c^2 - a''_{2Z} r_c + a_{2Z}^{00} \right) \quad (94b)$$

Où d_{2Z} , d'_{2Z} , d''_{2Z} , d_{2Z}^0 , a'_{2Z} , a''_{2Z} , a_{2Z}^0 , a_{2Z}^{00} , c_{2r} et c'_{2r} sont des constantes. L'expression (90a) s'écrit, en tenant compte de (93b), (94b) et de la relation après (91) :

$$\frac{\partial \left(\frac{c_{2z}(r_c)}{r_c} \right)}{\partial r_c} = d_{2z} r_c^3 \left(1 - \frac{8u^2}{5c^2} \right) - 6d'_{2z} r_c + 3d''_{2z} r_c^2 \left(1 - \frac{11u^2}{6c^2} \right) + 6d_{2z}^0 - 2c'_{2r} \left. \vphantom{\frac{\partial \left(\frac{c_{2z}(r_c)}{r_c} \right)}{\partial r_c}} \right\} \quad (95a)$$

$$+ \frac{u^2}{c^2} \left(\frac{8\pi G\mu}{r_c} - \frac{4}{3} a'_{2z} r_c - \frac{1}{2} a_{2z}^0 - \frac{a_{2z}^{00}}{r_c^2} - \frac{c_{2r}}{r_c^2} \right)$$

$$c_{2z}(r_c) = \frac{d_{2z} r_c^5}{4} \left(1 - \frac{8u^2}{5c^2} \right) - 3d'_{2z} r_c^3 + d''_{2z} r_c^4 \left(1 - \frac{11u^2}{6c^2} \right) + 6d_{2z}^0 r_c^2 - 2c'_{2r} r_c^2 + c'_{2z} r_c \left. \vphantom{c_{2z}(r_c)} \right\} \quad (95b)$$

$$+ \frac{u^2}{c^2} \left(8\pi G\mu r_c \ln(r_c) - \frac{4}{3} a'_{2z} r_c^3 - \frac{1}{2} a_{2z}^0 r_c^2 + a_{2z}^{00} + c_{2r} \right)$$

Les expressions (95b), (94b) et après (91) permettent d'écrire l'équation après (88) sous la forme :

$$K_{2z} = \frac{c^2}{4\pi G\mu r_c} \left(\frac{d_{2z} r_c^5}{4} \left(1 - \frac{8u^2}{5c^2} \right) - 3d'_{2z} r_c^3 + d''_{2z} r_c^4 \left(1 - \frac{11u^2}{6c^2} \right) + 6d_{2z}^0 r_c^2 - 2c'_{2r} r_c^2 + c'_{2z} r_c \right) \left. \vphantom{K_{2z}} \right\} \quad (96)$$

$$+ \frac{c^2}{4\pi G\mu r_c} \left(\frac{u^2}{c^2} \left(8\pi G\mu r_c \ln(r_c) - \frac{4}{3} a'_{2z} r_c^3 - \frac{1}{2} a_{2z}^0 r_c^2 + a_{2z}^{00} + c_{2r} \right) - d_{2z} r_c \frac{z^4}{4} \right)$$

$$+ \frac{c^2}{4\pi G\mu r_c} \left(-4d_{2z} \left(1 - \frac{3u^2}{2c^2} \right) r_c^3 + 12d'_{2z} r_c - 9d''_{2z} r_c^2 - 6d_{2z}^0 + 2c'_{2r} + \frac{u^2}{c^2} (12d''_{2z} r_c^2 + 2a'_{2z} r_c) \right) \frac{z^2}{2}$$

De même l'expression (87) devient, à l'aide de (93b), (91) et après (91) :

$$K_{2r} = -\frac{c^2 r_c}{4\pi G\mu} \left(\left(-d_{2z} \left(1 - \frac{3u^2}{2c^2} \right) r_c^2 + 6d'_{2z} - 3d''_{2z} \left(1 - \frac{4u^2}{3c^2} \right) r_c - 6\frac{a_{2z}^0}{r_c} + \frac{2c'_{2r}}{r_c} + \frac{u^2}{c^2} \left(a'_{2z} + \frac{a_{2z}^{00}}{r_c} \right) \right) z \right) \left. \vphantom{K_{2r}} \right\} \quad (97)$$

$$+ \frac{c^2 r_c}{4\pi G\mu} \left(\frac{d_{2z}}{2} + \frac{d'_{2z}}{r_c} \right) z^3$$

Les deux équations après (86) donnent, avec (94b) et après (91) :

$$a_{2r}(r_c) = -4\pi G\mu r_c + \frac{u^2}{c^2} \left(\frac{1}{10} d_{2z} r_c^5 + \frac{1}{2} d''_{2z} r_c^4 + \frac{1}{3} a'_{2z} r_c^3 + \frac{1}{2} a_{2z}^0 r_c^2 - a_{2z}'' r_c + a_{2z}^{00} \right) + c_{2r} \quad (98a)$$

$$b_{2r}(r_c) = -\frac{d_{2z}}{2} r_c^3 + 3d'_{2z} r_c - \frac{3}{2} d''_{2z} r_c^2 - 3d_{2z}^0 + c'_{2r} \quad (98b)$$

Nous en déduisons, compte tenu des relations avant (86) et de (91), (98a) et (98b) :

$$H_{2r} = -4\pi G\mu + \frac{u^2}{c^2} \left(\frac{1}{10} d_{2z} r_c^4 + \frac{1}{2} d''_{2z} r_c^3 + \frac{1}{3} a'_{2z} r_c^2 + \frac{1}{2} a_{2z}^0 r_c - a_{2z}'' + \frac{a_{2z}^{00}}{r_c} \right) + \frac{c_{2r}}{r_c} \left. \vphantom{H_{2r}} \right\} \quad (99a)$$

$$+ \left(-\frac{d_{2z}}{2} r_c^2 + 3d'_{2z} - \frac{3}{2} d''_{2z} r_c - \frac{3d_{2z}^0}{r_c} + \frac{c'_{2r}}{r_c} \right) z^2$$

$$H_{2z} = -\frac{u^2}{c^2} \left(\frac{1}{2} d_{2z} r_c^3 + 2d''_{2z} r_c^2 + a'_{2z} r_c - \frac{a_{2z}''}{r_c} + a_{2z}^0 \right) z + \left(\frac{d_{2z}}{2} r_c - \frac{d'_{2z}}{r_c} + d''_{2z} \right) z^3 \quad (99b)$$

Dans ce modèle très simplifié des deux champs de gravité dus au disque galactique, nous avons, au total, 10 constantes. Pour simplifier, nous ne calculerons les forces qu'au plan central de la galaxie, c'est-à-dire en $z = 0$. De plus, nous négligerons toutes les constantes d'intégration, en effet nous pensons que les champs dus au disque galactique lui-même ne peuvent pas augmenter fortement au sein de ce disque, et par ailleurs ces constantes d'intégration nous sont inconnues. Nous prendrons tout de même $c_{2r} = -8\pi G\mu r_c \ln(r_0)$ pour des questions d'unité :

$$\left. \begin{aligned} H_{2r} &= -4\pi G\mu & ; & & H_{2\psi} &= 0 & ; & & H_{2z} &= 0 \\ K_{2r} &= 0 & ; & & K_{2\psi} &= 0 & ; & & K_{2z} &= 2\mu u \ln \left(\frac{r_c}{r_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Les champs \vec{H} et \vec{K} produits par la galaxie entière sont les sommes de ceux induits par le noyau et le disque galactique. Nous ne les envisagerons que pour les objets situés à la périphérie de la galaxie, donc pour $r_c = R$ et $z = 0$. Ainsi, compte tenu de (76), (77) et (100) nous avons :

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -\frac{GM}{R^2} - 4\pi G\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (101)$$

Où $M = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_1$. Et pour le champ magnétogravitational, en considérant que $\omega = \frac{u}{R}$:

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_1 \frac{ur_0^4}{6R^3} + 2\mu u \ln(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mur_0}{8\pi R^3} + 2\mu u \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \end{pmatrix} \quad (102)$$

Au point $(R, \psi, 0)$ du disque galactique, la force de gravitation volumique totale est :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu}{R} \begin{pmatrix} -\frac{GM}{R^2} - 4\pi G\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4\pi\mu G}{Rc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Mur_0}{8\pi R^3} + 2\mu u \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} -\frac{GM\mu}{R^3} - \frac{4\pi G\mu^2}{R} + \frac{\mu Gu^2}{Rc^2} \left(\frac{Mr_0}{2R^3} + 8\pi\mu \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Cette force s'exerce dans la direction de \vec{r}_c ou de son opposée. Nous considérerons que la périphérie de la galaxie est stable si la force volumique de gravitation compense la force volumique centrifuge.

Cette force volumique centrifuge en périphérie de la galaxie est $\frac{\mu}{R} \frac{u^2}{R} = \frac{\mu u^2}{R^2}$, ce qui donne :

$$-\frac{GM\mu}{R^3} - \frac{4\pi G\mu^2}{R} + \frac{\mu Gu^2}{Rc^2} \left(\frac{Mr_0}{2R^3} + 8\pi\mu \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \right) + \frac{\mu u^2}{R^2} = 0 \quad (104)$$

En principe ce type d'équation a au moins une solution puisque (104) correspond à l'intersection d'une courbe décroissante en R, $\frac{GM\mu}{R^3} + \frac{4\pi G\mu^2}{R}$, et d'une courbe faiblement décroissante en R, surtout à cause

du terme $\frac{\mu Gu^2}{Rc^2} \left(\frac{Mr_0}{2R^3} + 8\pi\mu \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \right) + \frac{\mu u^2}{R^2}$. Cette relation (104) prouve surtout qu'il existe une

relation entre la masse (M) du noyau, les caractéristiques du disque galactique ((μ, u)) et le rayon de la galaxie spirale (R). Par exemple, si nous ne conservons que les termes en $\frac{\mu Gu^2}{Rc^2} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)$ et $\frac{1}{R}$ de (104), nous

obtenons $\frac{c^2}{2u^2} = \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)$, c'est-à-dire $R = r_0 e^{\frac{c^2}{2u^2}}$. Si $\frac{c^2}{2u^2} \gg 1$ cela veut dire que le rayon du disque galactique est très supérieur à celui du noyau. Notons que dans le raisonnement ci-dessus la force centrifuge est considérée comme négligeable devant certaines forces magnétogravitationalles. **Bien entendu, ce modèle est très simplifié, mais il tend à montrer que l'hypothèse de l'existence de la matière noire n'est pas nécessaire pour expliquer la stabilité des galaxies spirales, les divers aspects de la gravité suffisent (y compris la force magnétogravitationalle).**

6 Et l'énergie sombre ?

Historiquement, c'est A. FRIEDMANN qui a montré que si l'univers ne s'effondrait pas sur lui-même sous l'effet de la gravité c'est qu'il existait une force contraire. Vers 1920 V. SLIPHER et G. LEMAITRE ont cherché à justifier ce fait, qui fut prouvé en 1929 par E. HUBBLE. Ce dernier a observé que le taux d'augmentation de la distance entre les galaxies était proportionnel à cette distance. En 1998, il fut trouvé que l'expansion de l'univers s'accélérait, ce qui pourrait être dû à l'existence d'une matière à masse négative. (HOSSFELDER 2006) (PETIT et al. 2014) (BOUDON et al. 2020) (CHUNG 2020) et

(PETIT et al. 2021) ont publié leurs travaux concernant cette matière à masse négative. En fait, certains auteurs font la différence entre masse inerte (positive) et masse gravitationnelle (pouvant être négative) : (MBAREK S. et al. 2014) (LE CORRE 2018) (FARNESSE J.S. 2018) (LE CORRE 2020). D'autres auteurs en sont encore à prouver la réalité de l'accélération de l'expansion de l'univers (RUBIN et al. 2020), ou à la mesurer (GLAZEBROOK et al. 2005). En fait, il existe un nombre important d'hypothèses pour expliquer ce phénomène (MBELEK 2003), comme par exemple que l'univers se comporte comme un superfluide (ZLOSHCHASTIEV 2020). Pour certains auteurs, l'expansion de l'univers est dû à des phénomènes quantiques (DUPAYS et al. 2013) (COHEN-TANNOUDJI 2019), liés à des gravitons produits par l'expansion de De SITTER (FERREIRA et al. 2016). Eric LINDER indique qu'actuellement « *on tente de lier l'énergie noire aux dimensions supplémentaires, à des modifications de la gravitation et à tout un bestiaire de champs scalaires simples et à couplage non minimal* » (LINDER 2003). Une autre hypothèse est que l'énergie cherchée est celle du vide (KAWKA et al. 2010) (KAWKA 2011) (VALENT 2017). A l'inverse, (LUDWIG et al. 2015) (MINAZZOLI 2020) (ARRUGA et al. 2020) (MINAZZOLI 2021) et (ARRUGA et al. 2022) pensent que le vide total ne peut exister car il y a de la matière partout dans l'univers, et ils ont élaboré une nouvelle théorie générale de la relativité appelée relativité intriquée (qui n'a rien à voir avec l'intrication quantique) qui explique l'expansion de l'univers. Une autre explication proposée est l'inhomogénéité de l'univers, surtout quand on l'approxime par un fluide (BUCHERT 2001) (HOSOYA et al. 2004) (BUCHERT 2010) (OSTROWSKI et al. 2013) (ALLES 2016) (ROUKEMA et al. 2016) (ATREYA et al. 2018). De même, la matière noire froide est un candidat pour représenter l'énergie sombre, dans le cadre d'une théorie appelée quintessence (Wang et al. 1998) (LARENA et al. 2006).

Un modèle différent des autres est basé sur une modification de l'expression de la gravité (BERNARDO et al. 2023). Mais le modèle le plus courant est celui appelé tenseur-vecteur-scalaire (SANDERS 2005) (MINAZZOLI et al. 2013) (SCULTHORPE 2014) (LANGLOIS 2018). Nous allons suivre cette dernière théorie en recherchant son origine, sa justification. Nous avons présenté équation (49) le tenseur énergie-impulsion total $\bar{\bar{T}}_T$, qui comprend les formes d'énergie de masse Newtonienne, cinétique, interne, électromagnétique et de gravitation. Le fait que ce tenseur inclue l'énergie de gravitation, sous la forme d'un tenseur énergie-impulsion de gravitation $\bar{\bar{T}}_G$, est important. En effet, dans (FONTEIX et al. 2020b) nous avons simplifié le problème en posant $\bar{\bar{T}}_T = 0$, ce qui avait permis de démontrer l'équation d'EINSTEIN, $\bar{\bar{T}}_T - \bar{\bar{T}}_G = \frac{c^4}{8\pi G} \bar{\bar{G}}_E$, où $\bar{\bar{G}}_E$ est le tenseur symétrique contravariant d'EINSTEIN, écrit sous la forme d'une matrice symétrique semi-réelle, calculable à partir du tenseur métrique $\bar{\bar{G}}$, en utilisant $\bar{\bar{G}}_E = \bar{\bar{R}} - \frac{\bar{\bar{G}} \cdot \bar{\bar{R}}}{2} \bar{\bar{G}}^{-1}$ où $\bar{\bar{R}}$ est le tenseur symétrique contravariant de RICCI sous sa forme de matrice symétrique semi-réelle. En fait, en physique classique et en relativité restreinte le premier principe de la thermodynamique s'écrit selon l'équation (15) dans les deux cas (FONTEIX et al. 2020a). Si nous souhaitons transformer cette équation (15) au cas de la relativité générale, alors il faut appliquer le principe écrit en gras avant l'équation (32) (1^{er} principe de la thermodynamique dans le cas d'un fluide continu) au tenseur énergie-impulsion totale (expression (32) en relativité restreinte). Les relations (II-31) et (II-40) dans (FONTEIX et al. 2020b) se traduisent par :

$$\overline{\text{grad}}^{T*}(\bar{\bar{T}}_T^*) \sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{\bar{G}}) \bar{\bar{G}}^{-\frac{1}{2}}} = \bar{\bar{T}}_{T;i}^{im} - \bar{\bar{T}}_T^{im} \partial_i \left(\ln \left(\sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{\bar{G}})} \right) \right) = 0 \quad (105)$$

Il s'agit du premier principe de la thermodynamique appliquée à un mélange fluide continu en relativité générale, et à gauche de l'équation l'étoile * indique des termes relevant de la relativité restreinte alors que $\sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{\bar{G}}) \bar{\bar{G}}^{-\frac{1}{2}}}$ est une expression formée d'éléments de la relativité générale. De plus, ce terme de gauche est écrit sous la forme vecteur-matrice alors que celui de droite l'est en écriture tensorielle (le ; en indice indique une dérivée covariante). Il est donc clair que (105) correspond toujours à une expression égale à 0, c'est le premier principe de la thermodynamique des fluides en relativité générale. Nous pouvons en déduire que $\bar{\bar{T}}_T \neq 0$ et plutôt $\bar{\bar{T}}_T = \bar{\bar{Y}}$ avec :

$$\bar{Y}_{;i}^{im} - \frac{1}{2} \bar{Y}^{im} \partial_i \left(\ln \left(1 - \frac{g}{c^2} \right) + \ln \left(\det(\bar{G}) \right) \right) = 0 \quad (106)$$

Où \bar{Y} est une solution de l'équation (105) incluant les conditions aux limites et les conditions aux limites et initiales. Or $\bar{T}_T - \bar{T}_G = \frac{c^4}{8\pi G} \bar{G}_E$ implique $\bar{T}_G = \bar{Y} - \frac{c^4}{8\pi G} \bar{G}_E = \bar{Y} - \bar{R} + \frac{\bar{G} \circ \bar{R}}{2} \bar{G}^{-1}$, où \bar{Y} vérifie (106). Attention, les signes peuvent être différents de ceux rencontrés généralement car les tenseurs sont ici écrits sous la forme de matrices semi-réelle, ce qui conduit à un tenseur métrique \bar{G} à déterminant positif par exemple. Notons que \bar{Y} entre dans le cadre des théories de type tenseur-vecteur-scalaire.

Pour ceux qui ne son pas familiarisés avec la notation de l'équation (106), son équivalent (à un facteur multiplicatif près) en notation vectorielle-matricielle est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^T(\bar{Y}) + (\bar{Y}^T \overrightarrow{\text{grad}})^T \left(\frac{\frac{1}{\bar{G}^2}}{\sqrt{(1-\frac{g}{c^2}) \det(\bar{G})}} \right) \sqrt{\left(1 - \frac{g}{c^2}\right) \det(\bar{G})} \bar{G}^{-\frac{1}{2}} - \overrightarrow{\text{grad}}^T \left(\bar{G}^{-\frac{T}{2}} \right) \bar{G}^{\frac{T}{2}} \bar{Y} = 0 \quad (107)$$

Cependant, il faut préciser que la résolution de la dynamique des fluides nécessite un tenseur énergie-impulsion de masse Newtonienne \bar{T}_N , qui fait partie intégrante du tenseur énergie-impulsion totale, et dont le gradient est égal à un vecteur 4D incluant les forces volumiques à distances (électromagnétiques, car la gravitation apparait en relativité restreinte et est incluse dans la dérivée covariante en relativité générale). Dans (FONTEIX et al. 2020b) nous avons obtenu :

$$\bar{T}_{N;i}^{im} - \frac{1}{2} \bar{T}_N^{im} \partial_i \left(\ln \left(\left(1 - \frac{g}{c^2} \right) \det(\bar{G}) \right) \right) = \bar{E}^{mi} \bar{C}_i + \bar{F}_D^m \quad (108)$$

Où \bar{C}_i est le courant électrique induit par l'espèce i , et \bar{F}_D^m la quadri-force volumique dipolaire. Cette dernière est donnée par, avec la vitesse réduite $\bar{U} = \frac{\gamma \bar{u}}{\sqrt{c^2 - g}}$:

$$\bar{F}_D = -\sqrt{\det(\bar{G})} (\bar{G}^{-1} + \bar{U} \bar{U}^T) \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\bar{U}^T \bar{G} \bar{P}^T \bar{G}^{\frac{1}{2}} \right) \bar{G}^{\frac{T}{2}} \bar{E} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\bar{U}^T \bar{G} \bar{M}^T \bar{G}^{\frac{1}{2}} \right) \bar{G}^{\frac{T}{2}} \bar{B} \right) \bar{G} \bar{U} \quad (109)$$

Or les hypothèses simplificatrices de (FONTEIX et al. 2020a) et (FONTEIX et al. 2020b) font que les phénomènes quantiques se réduisent à des effets thermodynamiques, et que les réactions nucléaires peuvent être approximées comme des cas particuliers de réactions chimiques ordinaires moyennant une fonction définissant les sections efficaces, le fluide étant toujours considéré comme un milieu continu. Il est clair que la modélisation de l'expansion de l'univers doit inclure les réactions nucléaires de fission et de fusion. Or ces réactions produisent ou absorbent des flux de neutrons, par exemple, ce qui impose de modifier les bilans de masse, entre autres, donc le tenseur énergie-impulsion de masse Newtonienne et le résultat de son gradient. Comme ce tenseur fait partie intégrante du tenseur énergie-impulsion totale, ce dernier doit donc également être modifié (ce qui ne modifie pas le résultat de son gradient, ou plutôt de l'expression (106)).

En conclusion, la résolution de la dynamique du système nécessite le calcul d'une solution simultanée des équations (105) et (108). Les conditions aux limites et initiales de ce système différentiel font apparaître le tenseur \bar{Y} vérifiant (106). Ce tenseur peut être considéré comme relevant des théories scalaire-vecteur-tenseur, ce qui permet d'envisager une expansion de l'univers sans énergie sombre. Cependant, l'énergie totale apparaissant dans \bar{T}_T (terme supérieur gauche) comprend toutes les énergies, comme l'énergie de masse Newtonienne (plus l'énergie cinétique), l'énergie interne (dont la valeur origine n'est pas connue), l'énergie électromagnétique, l'énergie gravitationnelle et magnéto-gravitationnelle. Cette dernière peut-elle être ce qu'on appelle énergie sombre, avec l'énergie interne ?

7 Conclusion

Si nous nous limitons à la seule gravitation Newtonienne le seul champ à prendre en compte est \vec{H} , et pour le disque galactique la seule équation est (80). En négligeant $\frac{\partial H_{2z}}{\partial z}$, le résultat est $H_{2r} = -4\pi G\mu$ à $\frac{r_0}{R}$ près pour le disque galactique. Cette force d'attraction vers le centre de la galaxie est alors égale à $-\frac{4\pi G\mu^2}{R}$, ce qui limiterai le rayon de la galaxie à $\frac{\mu u^2}{R^2} = \frac{4\pi G\mu^2}{R}$ c'est à dire $R = \frac{u^2}{4\pi G\mu}$. Bien entendu, les forces magnétogravitationnelles sont très négligeables à l'échelle terrestre et sûrement aussi à celle du système solaire, mais ce n'est plus le cas à celle d'une galaxie. Le modèle très simplifié que nous avons utilisé a donné $R = r_0 e^{\frac{c^2}{2u^2}}$ comme rayon d'une galaxie, ce qui est très certainement plus réaliste, le rayon du noyau étant r_0 . Bien entendu, ce modèle est très simplifié comme nous l'avons dit, mais il tend à montrer que l'hypothèse de l'existence de la matière noire n'est pas nécessaire pour expliquer la stabilité des galaxies spirales, les divers aspects de la gravité suffisent, en particulier la force magnétogravitationnelle.

En ce qui concerne l'hypothèse de l'existence de l'énergie sombre, la résolution de la dynamique du système formé par l'univers nécessite le calcul d'une solution simultanée des équations (105) et (108). Les conditions aux limites et initiales de ce système différentiel font apparaître le tenseur $\bar{\bar{Y}}$ vérifiant (106). Ce tenseur peut être considéré comme relevant des théories scalaire-vecteur-tenseur, ce qui permet d'envisager une expansion de l'univers sans énergie sombre. Cependant, l'énergie totale apparaissant dans $\bar{\bar{T}}_T$ (terme supérieur gauche de la matrice symétrique semi-réelle à qui le signe $-$ a été remplacé par $+$) comprend toutes les énergies, comme l'énergie de masse Newtonienne plus l'énergie cinétique (celle-ci n'apparaît pas explicitement car elle est fusionnée avec l'énergie de masse Newtonienne), l'énergie interne (inconnue), l'énergie électromagnétique, l'énergie gravitationnelle et magnétogravitationnelle. Cette dernière peut-elle être ce qu'on appelle énergie sombre, avec l'énergie interne ?

Finalement, les théories de la relativité (restreinte et générale) suffisent à expliquer les phénomènes cosmiques, et il n'est pas nécessaire de faire appel à des matières ou énergies inconnues. Ajoutons cependant qu'il faut prendre en compte le premier principe de la thermodynamique appliqué à un mélange fluide continu qui utilise des énergies volumiques.

Références

ALLES A., Inhomogeneous cosmology: an answer to the dark matter and dark energy problems ?, *HAL* (2016) 01266465

ALMEIDA J. S., FILHO M., Triaxiality can explain the alleged dark matter deficiency in some dwarf galaxies, *arXiv:1912.05268v1 [astro-ph.GA]* 11 dec (2019)

ARCHAMBAULT S., AUBIN F., AUGER M., BEHNKE E., BELTRAN B., CLARK K., DAI X., DAVOUR A., FARINE J., FAUST R., GENEST M.-H., GIROUX G., GORNEA R., KRAUSS C., KUMARATUNGA S., LAWSON I., LEROY C., LESSARD L., LEVY C., LEVINE I., MacDONALD R., MARTIN J.-P., NADEAU P., NOBLE A., PIRO M.-C., POSPISIL S., SHEPHERD T., STARINSKI N., STEKL I., STOREY C., WICHOSKI U., ZACEK V., Dark matter spin-dependent limits for WIMP interactions on ^{19}F by PICASSO, *arXiv:0907.0307v2 [hep-ex]* 10 nov (2009)

ARRUGA D., ROUSSELLE O., MINAZZOLI O., Compact objects in entangled relativity, *arXiv :2011.14629v1 [gr-qc]* 30 nov (2020)

ARRUGA D., MINAZZOLI O., Analytical spherical solutions in entangled relativity, *HAL* (2022) 03267317

ARZELIES H., Transformation relativiste de la température et de quelques autres grandeurs thermodynamiques, *Il Nuovo Cimento*, 35, 3 (1965) 792-804

ARZELIES H., Fluides relativistes - Principes généraux, équations fondamentales, *Masson Ed.*, Paris, (1971)

ASAKA T., Hadronic axion model in gauge-mediated supersymmetry breaking and cosmology of saxion, *arXiv:hep-ph/9811451v1* 24 nov (1998)

ATREYA A., BHATT J.R., MISHRA A.K., Viscous self interacting dark matter cosmology for small redshift, *arXiv:1810.11666v1 [astro-ph.CO]* 27 oct (2018)

BEKENSTEIN J. D., Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm, *arXiv:astro-ph/0403694v6* 23 aug (2006)

BERNARDO H., BOSE B., FRANZMANN G., HAGSTOTZ S., HE Y., LITSA A., NIEDERMANN F., Modified gravity approaches to the cosmological constant problem, *The University of Edinburgh, Edinburgh Research Explorer*, 12 sept (2023)

BEZERRA V. B., BARROS A., ROMERO C., On some aspects of gravitomagnetism in scalar-tensor theories of gravity, *Brazilian Journal of Physics*, 35, 4B, December (2005) 1057-1061

BOUDAUD M., Voyager probing dark matter, *36th International Cosmic Ray Conference*, Madison, USA, 7 p. (2019)

BOUDAUD M., CIRELLI M., Voyager 1 $\pm e$ further constrain primordial black holes as dark matter, *arXiv:1807.03075v2 [astro-ph.HE]* 14 jan (2019)

BOUDON A., BOSE B., HUANG H., LOMBRISER L., Baryogenesis through asymmetric Hawking radiation from primordial black holes as dark matter, *arXiv:2010.14426v1 [astro-ph.CO]* 27 oct (2020)

BRAGINSKY V.B., CAVES C.M., THORNE K.S., Laboratory experiments to test relativistic gravity, *Physical Review D*, 15 (1977) 2047-2068

BROWNSTEIN J. R., MOFFAT J. W., Galaxy rotation curves without non-baryonic dark matter, *arXiv:astro-ph/0506370v4* 22 sep (2005)

BUCHERT T., On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies, *arXiv:gr-qc/0102049v2* 31 jul (2001)

BUCHERT T., A cosmic equation of state for the inhomogeneous universe: can a global far-from-equilibrium state explain dark energy ?, *arXiv:gr-qc/0507028v2* 13 sep (2005)

BUCHERT T., Towards physical cosmology: geometrical interpretation of dark energy, dark matter and inflation without fundamental sources, *arXiv:1012.3084v1 [gr-qc]* 14 dec (2010)

CHAE K.-H., MILGROM M., Numerical solutions of the external field effect on the radial acceleration in disk galaxies, *arXiv:2201.02109v2 [astro-ph.GA]* 9 feb (2022)

CHOLIS I., LIDEN T., HOOPER D., A robust excess in the cosmic-ray antiproton spectrum: implications for annihilating dark matter, *arXiv:1903.02549v2 [astro-ph.HE]* 16 aug (2019)

CHUNG D.-Y., A unifying theory of dark energy, dark matter, and baryonic matter in the positive-negative mass universe pair: protogalaxy and galaxy evolutions, *Journal of Modern Physics*, 11 (2020) 1091-1122

CLARK S. J., TUCKER R. W., Gauge symmetry and gravito-electromagnetism, *arXiv:gr-qc/0003115v2* 22 sep (2000)

CLOWE D., BRADAC M., GONZALEZ A. H., MARKEVICH M., RANDALL S. W., JONES C., ZARITSKY D., A direct empirical proof of the existence of dark matter, *arXiv:astro-ph/0608407v1* 19 aug (2006)

COHEN-TANNOUJDI G., The De Broglie' universal substratum, the Lochak' monopoles and the dark universe, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 44 (2019)

COMMERCON B., GONZALEZ M., MIGNON-RISSE R., HENNEBELLE P., VAYET N., Discs and outflows in the early phases of massive star formation: influence of magnetic fields and ambipolar diffusion, *Astronomy & Astrophysics* 658, A52 (2022) 1-21

DAMOUR T., La relativité générale aujourd'hui, *Séminaire Poincaré IX* (2006) 1-40

De BLOK W. J. G., Mc GAUGH S. S., The dark and visible matter content of low surface brightness disc galaxies, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 290 (1997) 533 – 552

De BROGLIE L., Thermodynamique relativiste et mécanique ondulatoire, *Ann. Inst. Henri POINCARÉ, section A Physique Théorique*, 9, 2 (1968) 89-108

DIEZ-TEJEDOR A., GONZALEZ-MORALES A. X., VERLINDE's emergent gravity versus MOND and the case of dwarf spheroidals, *arXiv:1612.06282v2 [astro-ph.CO]* 16 apr (2018)

DUERR P. M., WOLF W. J., Metodological reflexions on the MOND/dark matter debate, *arXiv:2306.13026v1 [physics.hist-ph]* 22 jun (2023)

DUPAYS A., LAMINA B., BLANCHARD A., Can dark energy emerge from quantum effects in a compact extra dimension ?, *arXiv:1301.1763v2 [astro-ph.CO]* 17 may (2013)

FARNES J.S., A unifying theory of dark energy and dark matter: negative masses and matter creation within a modified Λ CDM framework, *arXiv:1712.07962v2 [physics.gen-ph]* 26 oct (2018)

FERREIRA R.Z., SANDORA M.C., SLOTH M., Asymptotic symmetries in de Sitter and inflationary spacetimes, *arXiv:1609.06318v2 [hep-th]* 14 oct (2016)

FERREIRA E. G. M., FRANZMANN G., KHOURY J., BRANDENBERGER R., Unified superfluid dark sector, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 08 (2019) 027

FONTEIX C., MEIMAROGLOU D., CAMARGO M., FEIDT M., Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Partie 1 : En relativité restreinte, *HAL* (2020 a) 02482689

FONTEIX C., MEIMAROGLOU D., CAMARGO M., FEIDT M., Nouvelle dynamique des mélanges fluides continus Part 2 : en relativité générale, *HAL* (2020 b) 02482702

FONTEIX C., FEIDT M., CAMARGO M., Dynamique des mélanges fluides continus Part 1 : Applications d'une nouvelle formulation du deuxième principe de la thermodynamique, *HAL* (2020 c) 02877748

FONTEIX C., B.I. MORSI, MEIMAROGLOU D., CAMARGO M., Sur quelques aspects de la relativité restreinte, *HAL* (2022) 03641116

FORTEIX C., MEIMAROGLOU D., MORSI B. I., CAMARGO M., CHARPENTIER J.-C., Une expérience de Génie des Procédés peut-elle mettre en évidence un effet relativiste en comparant les résultats mesurés sur terre et dans la Station Spatiale Internationale (ISS) ?, *HAL* (2023) 04251771

GENTILE G., FAMACY B., De BLOK W. J. G., Things about MOND, *arXiv:1011.4148v1 [astro-ph.CO]* 18 nov (2010)

GLAZEBROOK K., EISENSTEIN D., DEY A., NICHOL B., Dark energy and cosmic sound: $w(z)$ surveys with the Gemini/Subaru wide-field multi-object spectrograph, *arXiv [astro-ph/0507457]* June (2005)

GOURGOULHON E., An introduction to relativistic hydrodynamics, *EAS Publications Series, Stellar fluid dynamics and numerical simulations: from the sun to neutron stars*, 21 (2006) 43-79

GREMAUD G., The crystalline ether: a simple and unified explanation of the theories of modern physics and of the universe, *viXra:2112.0046* (2021)

GUO Q., HU H., ZHENG Z., LIAO S., DU W., MAO S., JIANG L., WANG J., PENG Y., GAO L., WANG J., WU H., Further evidence for a population of dark-matter-deficient dwarf galaxies, *arXiv:1908.00046v2 [astro-ph.GA]* 4Dec (2019)

HAMMER F., YANG Y., WANG J., ARENOU F., PUECH M., FLORES H., BABUSIAUX C., On the absence of dark matter in dwarf galaxies surrounding the milky way, *arXiv:1812.10714v2 [astro-ph.GA]* 17 sep (2019)

HEAVISIDE O., Electromagnetic theory, *The Electrician printing and publishing company limited*, London (1912)

HOSOYA A., BUCHERT T., MORITA M., Information entropy in cosmology, *arXiv:gr-qc/0402076v1* 17 feb (2004)

HOSSENFELDER S., Anti-gravitation, *arXiv:gr-qc/0508013v3* 21 apr (2006)

KAWKA S., Van TIGGELEN B.A., Quantum electrodynamics of Casimir momentum: momentum of the quantum vacuum ?, *A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics, EPL*, 89 (2010) 11002

KAWKA S., Moment de Casimir : effet du vide quantique sur l'impulsion d'un milieu bi-anisotrope, *HAL* (2011) 00576211

LANDAU L., LIFCHITZ E., Physique théorique – Théorie des champs, *Editions MIR*, Moscou (1989)

LANGLOIS D., Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar-tensor (DHOST) theories: a review, *arXiv:1811.06271v1 [gr-qc]* 15 nov (2018)

LARENA J., BUCHERT T., ALIM I. J.M., Reinterpreting quintessential dark energy through averaged inhomogeneous cosmologies, *arXiv:astro-ph/0609315v2* 19 sep (2006)

LE CORRE S., About the negative gravitational mass, *Open Access Library Journal*, 5 (2018) e4312

LE CORRE S., Masse gravitationnelle négative : une solution idéale pour la cosmologie, *HAL* (2020) 02435139

LE TIEC A., Gravitation relativiste, *Master Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale* (2017)

LINDER E., Sur la piste de l'énergie noire, *Courrier du CERN*, septembre (2003)

LUDWIG H., MINAZZOLI O., CAPOZZIELLO S., Merging matter and geometry in the same Lagrangian, *arXiv:1506.03278v2 [gr-qc]* 19 oct (2015)

Mac DONALD K.T., Answer to question # 49: Why c for gravitational waves?, *American Journal of Physics*, 65, 7 (1997) 591-592

Mac GAUGH S. S., RUBIN V. C., De BLOK W. J. G., High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies data, *arXiv:astro-ph/0107326v1* 18 jul (2001)

MARKEVITCH M., GONZALEZ A. H., CLOWE D., VIKHLININ A., FORMAN W., JONES C., MURRAY S., TUCKER W., Direct constraints on the dark matter self-interaction cross-section from the merging galaxy cluster 1E 0657-56, *arXiv:astro-ph/0309303v2* 22 jan (2004)

MASHHOON B., GRONWALD F., LICHTENEGGER H. I. M., Gravitomagnetism and the clock effect, *arXiv:gr-qc/9912027v1* 8 dec (1999)

MASHHOON B., Gravitoelectromagnetism, *arXiv:gr-qc/0011014v1* 3 nov (2000)

MASHHOON B., Gravitoelectromagnetism: a brief review, *arXiv:gr-qc/0311030v2* 17 apr (2008)

MASHHOON B., Gravitomagnetic Stern-Gerlach force, *Entropy*, 23, 445 (2021) 1-12

MBAREK S., PARANJAPPE M.B., Negative mass bubbles in De Sitter space-time, *arXiv:1407.1457v2 [gr-qc]* 20 nov (2014)

MBELEK J.-P., Les champs scalaires et leurs applications en astrophysique et cosmologie, *Thèse de Doctorat de l'Université PARIS 6, Astrophysique et instrumentation spatiale* (2003)

MIGNON-RISSE R., GONZALEZ M., COMMERCION B., ROSDAHL J., Collapse of turbulent massive cores with ambipolar diffusion and hybrid radiative transfer: I accretion and multiplicity, *Astronomy & Astrophysics* 652, A69 (2021a) 1-21

MIGNON-RISSE R., GONZALEZ M., COMMERCION B., Collapse of turbulent massive cores with ambipolar diffusion and hybrid radiative transfer: II outflows, *Astronomy & Astrophysics* 656, A85 (2021b) 1-19

MILGROM M., The MOND paradigm, *arXiv:0801.3133v2 [astro-ph]* 3 mar (2008)

MINAZZOLI O., HEES A., Intrinsic solar system decoupling of a scalar-tensor theory with a universal coupling between the scalar field and the matter Lagrangian, *arXiv:1308.2770v1 [gr-qc]* 13 aug (2013)

MINAZZOLI O., Rethinking the link between matter and geometry, *arXiv:1811.05845v3 [gr-qc]* 18 dec (2018)

MINAZZOLI O., De Sitter space-times in entangled relativity, *arXiv:2011.14633v2 [gr-qc]* 6 may (2021)

MINKOWSKI H., The relativity principle, *Meeting of the Göttingen Mathematical Society*, November 5 (1907)

MOFFAT J. W., Scalar-tensor-vector gravity theory, *arXiv:gr-qc/0506021v7* 11 dec (2005)

NIPPEL K., KAHLHOEFER F., KORSMEIER M., KRAMER M., MANCANI S., Constraining dark matter annihilation with cosmic ray antiprotons using neural networks, *17th International Conference on topics in astroparticle and underground physics*, 2156 (2022) 012030

OPPENHEIMER B. R., HAMBLY N. C., DIGBY A. P., HODGKIN S. T., SAUMON D., Direct detection of galactic halo dark matter, *arXiv:astro-ph/0104293v1* 17 apr (2001)

OSTROWSKI J.J., ROUKEMA B.F., BUCHERT T., Virialization-induced curvature versus dark energy, *arXiv:1311.5402v1 [astro-ph.CO]* 21 nov (2013)

PETIT J.P., D'AGOSTINI G., Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with observed acceleration of the Universe, *Modern Physics Letters A*, 29, 34 (2014) 1450182

PETIT J.P., D'AGOSTINI G., Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy, *HAL* (2021) 03426503

POINCARÉ H., Sur les principes de la mécanique, *Congrès International de Philosophie, Logique et histoire des Sciences*, 3 (1901) 457-494

POINCARÉ H., Sur la dynamique de l'électron, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 21 (1906) 129-176

PSZOTA M., VAN P., Field equation of thermodynamic gravity and galactic rotational curves, *arXiv:2306.01825v1 [physics.gen-ph]* 2 jun (2023)

REZZOLLA L., ZANOTTI O., Relativistic Hydrodynamics, *Oxford University Press* (2013)

ROMERO E. G., Adversus singularities: The ontology of space-time singularities, *Foundations of science*, 18 (2013) 297-306 ; *arXiv: 1210.2427v1 [physics.gen-ph]* 8 oct (2012)

ROUKEMA B., MOURIER P., OSTROWSKI J.J., The background Friedmannian Hubble constant in relativistic inhomogeneous cosmology and the age of the universe, *arXiv:1608.06004v2 [astro-ph.CO]* 28 nov (2016)

ROUMI F. A. I., BUCHERT T., Relativistic structure formation models and gravitoelectromagnetism, *arXiv:1602.00121v1 [gr-qc]* 30 jan (2016)

ROVELLI C., Troux blancs, *Flammarion* (2023)

ROVELLI C., VIDOTTO F., Small black/white hole stability and dark matter, *arXiv:1805.03872v2 [gr-qc]* 9 nov (2018)

RUBIN D., HEITLAUF J., Is the expansion of the universe accelerating ? All signs still point to yes: a local dipole anisotropy cannot explain dark energy, *arXiv:1912.02191v2 [astro-ph.CO]* 25 feb (2020)

SANDERS R.H., A tensor-vector-scalar framework for modified dynamics and cosmic dark matter, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 363 (2005) 459-468

SCHIRBER M., Dark matter alternative passes big test, *Physics.aps.org, Am. Phys. Soc.*, 14,143 15 october (2021)

SCHULMAN L. S., Formulation and justification of the WHEELER-FEYNMAN absorber theory, *Foundations of Physics*, vol. 10, n° 11-12 (1980) 841-853

SCULTHORPE G.I., Scalar-tensor theories for dark energy and their cosmological consequences, *University of Sheffield, School of mathematics and Statistics, Doctor of philosophy*, feb (2014)

SKORDIS C., ZLOSIK T., New relativistic theory for MODified Newtonian Dynamics, *arXiv:2007.00082v3 [astro-ph.CO]* 14 oct (2021)

SOFUE Y., RUBIN V., Rotation curves of spiral galaxies, *Ann. Rev. Astron. & Astrophys.*, 39 (2001) 137 – 176 (*arXiv:astro-ph/0010594v3* 22 Feb 2019)

STRUCHTRUP H., Projected moments in relativistic kinetic theory, *Physica A* 253 (1998) p. 555-593

TAILLET R., Matière noire et rayons cosmiques galactiques, *HAL* (2010) 00633127

TARTAGLIA A., RUGGIERO M.L., Gravito-electromagnetism versus electromagnetism, *European Journal of Physics* 25 (2004) 203-210

THOMAS L. H., The kinematics of an electron with an axis, *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical magazine and Journal of Science*, January (1927) 1 – 22

VALENT A.G., Vacuum energy in quantum field theory and cosmology, *Departament de Física Quàntica i Astrofísica, Universitat de Barcelona*, April (2017)

Van DOKKUM P., DANIELI S., COHEN Y., MERITT A., ROMANOWSKY A. J., ABRAHAM R., BRODIE J., CONROY C., LOKHORST D., MOWLA L., O'SULLIVAN E., ZHANG J., A galaxy lacking dark matter, *arXiv:1803.10237v1 [astro-ph.GA]* 27 mar (2018a)

Van DOKKUM P., DANIELI S., ABRAHAM R., CONROY C., ROMANOWSKY A. J., A second galaxy missing dark matter in the NGC 1052 group, *arXiv:1901.05973v3 [astro-ph.GA]* 15 mar (2019)

Van WAERBEKE L., MELLIER Y., ERBEN T., CUILLANDRE J. C., BERNARDEAU F., MAOLI R., BERTIN E., Mc CRACKEN H. J., LE FEVRE O., FORT B., DANTEL-FORT M., JAIN B., SCHNEIDER P., Detection of correlated galaxy ellipticities from CFHT data: first evidence for gravitational lensing by large-scale structures, *Astron. Astrophys.*, 358 (2000) 30 – 44, *HAL* (2023) 04110355

VERLINDE E., On the origin of gravity and the laws of NEWTON, *arXiv:1001.0785v1 [hep-th]* 6 jan (2010)

VERLINDE E., Emergent gravity and the dark universe, *arXiv:1611.02269v2 [hep-th]* 8 nov (2016)

VIDOTTO F., Quantum insights on primordial black holes as dark matter, *2nd World Summit: Exploring the dark side of the universe*, Pointe-à-Pitre, Guadeloupe, France (2018)

VIGNERON Q., BUCHERT T., Dark matter from backreaction ? Collapse models on galaxy cluster scales, *arXiv:1902.08441v2 [gr-qc]* 8 aug (2019)

WANG L., STEINHARDT P.J., Cluster abundance constraints on quintessence models, *arXiv:astro-ph/9804015v1* 2 apr (1998)

YAVARI M., Calculation of the gravitoelectromagnetism force for cylindrically symmetric spacetime, *U. P. B. Sci. Bull., Series A*, 76, 3 (2014) 283-293

ZLOSHCHASTIEV K. G., Galaxy rotation curves in superfluid vacuum theory, *Pramana – J. Phys.* (2023) 97:2

ZLOSHCHASTIEV K. G., On asymptotic behaviour of galactic rotation curves in superfluid vacuum theory, *Astron. Rep.*, 65 (2021) 1078-1083, *arXiv:2201.04135v1 [gr-qc]* 11 jan (2022)

ZLOSHCHASTIEV K. G., An alternative to dark matter and dark energy: scale-dependent gravity in superfluid vacuum theory, *arXiv:2011.12565v2 [gr-qc]* 30 nov (2020)