



# Discrétisation des systèmes de Lur'e : stabilisation et consistance

Julien Louis

## ► To cite this version:

Julien Louis. Discrétisation des systèmes de Lur'e : stabilisation et consistance. Autre. Université de Lorraine, 2015. Français. NNT : 2015LORR0080 . tel-01191424v1

**HAL Id: tel-01191424**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01191424v1>**

Submitted on 29 Mar 2018 (v1), last revised 1 Sep 2015 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Discrétisation des systèmes de Lur'e : stabilisation et consistance.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 27 août 2015

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

**Spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique**

par

Julien LOUIS

### Composition du jury

|                      |                |                                                                                                    |
|----------------------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Président :</i>   | H. ABOU-KANDIL | Professeur, École Normale Supérieure de Cachan, SATIE                                              |
| <i>Rapporteurs :</i> | P. CHEVREL     | Professeur, l'École des Mines de Nantes, IRCCyN                                                    |
|                      | H. GUÉGUEN     | Professeur, Centrale-Supélec Rennes, IETR                                                          |
| <i>Examineurs :</i>  | J. DAAFOUZ     | Professeur, Université de Lorraine, CRAN,<br>Institut Universitaire de France (Directeur de thèse) |
|                      | M. JUNGERS     | Chargé de Recherche CNRS, CRAN (Co-directeur de thèse)                                             |

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Même si cette thèse est le fruit des travaux effectués durant mes trois années de doctorat. Ils sont également le résultat d'une synergie de collaborations scientifiques et de soutiens moraux. Je profite de ces quelques lignes pour remercier l'ensemble des personnes qui m'ont aidé et soutenu lors de ces trois dernières années.

Je tiens dans un premier temps à remercier mes directeurs de thèse M. Jamal DAAFOUZ, professeur à l'Université de Lorraine et M. Marc Jungers, chargé de recherches au CNRS pour leur écoute, leurs conseils avisés et nos conversations diverses malgré leurs emplois du temps chargés. Je remercie également l'ensemble du personnel du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) et plus particulièrement du groupe thématique Contrôle, Identification et Diagnostic (CID).

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Hervé GUEGUEN, professeur à Centrale-Supélec Rennes, et M. Philippe CHEVREL, professeur à l'École des Mines de Nantes, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie M. Hisham ABOU-KANDIL, professeur des universités à l'École Normale Supérieure de Cachan pour avoir présidé le jury de ma thèse. Je leur suis reconnaissant pour leur lecture attentive de mon manuscrit et pour leurs remarques m'ayant permis de l'améliorer.

Les années de thèse impliquent également de se frotter aux difficultés administratives. Je tiens à remercier Carole et Christine pour l'aide qu'elles m'ont apportée pour surmonter ces problèmes qui ne se résolvent pas à l'aide de théorèmes.

Je tiens également à remercier l'ensemble des professeurs avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner lors de mon monitorat à l'ENSEM et tout particulièrement Constantin, Radu et Valérie qui ont su rendre ces heures d'enseignement plaisant en toute circonstance.

Durant ces trois années passées au CRAN, j'ai eu le plaisir de partager des moments de joies, de réflexions, de stress et des moments de doutes avec mes collègues étudiants au CRAN. Je tiens à remercier l'ensemble de ces personnes, et tout particulièrement Vairis, Marcos et Gundars pour nos longues conversations. Je les remercie également pour avoir pris le temps et fait les efforts nécessaires pour communiquer avec moi, notamment en début de thèse lorsque mon anglais était encore plus que fragile. J'ai également une pensée particulière pour Vitor qui a partagé mon bureau durant une année lors de son stage en France et qui est devenu un véritable ami. Je remercie par la même occasion un autre brésilien, Carlos dont les travaux sont à l'origine de mon sujet de thèse. J'ai également une pensée pour les doctorants récemment arrivés, Gaetan, Florian et Harry à qui je souhaite bon courage pour le reste de leur thèse.

J'ai également eu l'occasion de côtoyer des personnes en dehors du laboratoire. Je tiens à les remercier tout aussi chaleureusement pour leur amitié tout au long de ces trois années : un grand merci à Cédric pour ses pizzas et son accueil dans son restaurant, à Marion pour son aide notamment lors de la préparation du pot de thèse et à Lucile. Je tiens bien évidemment à remercier ma famille et particulièrement mes parents ainsi que mon

frère de m'avoir toujours soutenu et conseillé en toute circonstance et dans tous les instants de ma vie. Je leur suis très reconnaissant de tous les moments que nous avons partagés ensemble. Ce diplôme de doctorat est également le fruit de leur écoute, de leur soutien et de l'éducation qu'ils ont su me donner tout au long de ces années. Je tiens également à remercier Mathieu, Adrienne et Sylvain qui par leur amitié, m'ont permis de grandir tout au long de ces années d'études. Je leur suis très reconnaissant pour tous les moments de détente qu'ils m'ont fait vivre notamment pendant ces trois dernières années.

Pour finir, je tiens à remercier tout particulièrement Michele d'être revenue me supporter pendant la pire période, celle de l'écriture de la thèse. Je lui suis reconnaissant pour son courage, son aide et son soutien notamment pendant les moments de doutes et de stress où me calmer n'est pas une chose aisée.

*à mes parents, mon frère et Michele,  
pour avoir su réaliser les conditions suffisantes à mon bonheur.*



# Table des matières

|                                                                                           |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notations</b>                                                                          | <b>1</b>  |
| <b>Introduction Générale</b>                                                              | <b>3</b>  |
| <b>Chapitre 1 Notions introductives.</b>                                                  | <b>7</b>  |
| 1.1 Le problème de Lur'e . . . . .                                                        | 7         |
| 1.1.1 Exemples de processus modélisable sous une forme de Lur'e . . . . .                 | 9         |
| 1.1.2 Analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps discret . . . . .                | 12        |
| 1.2 Système non-linéaire à données échantillonnées . . . . .                              | 15        |
| 1.3 Conclusion . . . . .                                                                  | 19        |
| <b>Chapitre 2 Utilisation d'une fonction de Lyapunov à lignes de niveau non connexes.</b> | <b>21</b> |
| 2.1 Positionnement du problème . . . . .                                                  | 22        |
| 2.2 Construction d'une suite d'ensembles connexes . . . . .                               | 26        |
| 2.2.1 Propriétés du système de Lur'e . . . . .                                            | 27        |
| 2.2.2 Analyse de stabilité . . . . .                                                      | 30        |
| 2.3 Conclusion . . . . .                                                                  | 39        |
| <b>Chapitre 3 Stratégie d'échantillonnage non-uniforme.</b>                               | <b>41</b> |
| 3.1 Analyse de stabilité avec un échantillonnage non-uniforme. . . . .                    | 42        |
| 3.2 Systèmes de Lur'e à données échantillonnées . . . . .                                 | 45        |
| 3.3 Stabilisation conjointe du système de Lur'e . . . . .                                 | 48        |
| 3.4 Conclusion et perspectives . . . . .                                                  | 59        |
| <b>Chapitre 4 Consistance des systèmes de Lur'e commutés</b>                              | <b>61</b> |
| 4.1 Rappels sur la notion de consistance . . . . .                                        | 62        |
| 4.2 La consistance dans le cadre des systèmes de Lur'e . . . . .                          | 67        |
| 4.3 Échantillonnage non-uniforme consistant . . . . .                                     | 75        |

*Table des matières*

---

|                                       |           |
|---------------------------------------|-----------|
| 4.4 Conclusion . . . . .              | 83        |
| <b>Chapitre 5 Conclusion Générale</b> | <b>85</b> |
| <b>Bibliographie</b>                  | <b>89</b> |

# **Table des matières**



# Notations

|                                                    |                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                                       | ensemble des nombres naturels                                                                                                                           |
| $\mathbb{N}^*$                                     | ensemble des nombres naturels strictement positifs                                                                                                      |
| $\mathbb{R}$                                       | ensemble des nombres réels                                                                                                                              |
| $\mathbb{R}^+$                                     | ensemble des nombres réels non négatifs                                                                                                                 |
| $\mathbb{R}^n$                                     | ensemble des vecteurs de dimension $n$ de composantes réelles                                                                                           |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$                          | ensemble des matrices réelles de dimension $m \times n$                                                                                                 |
| $I_n$ ( $0_n$ resp.)                               | matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$                                                                                                |
| $0_{m \times n}$                                   | matrice nulle de dimension $m \times n$                                                                                                                 |
| $x_{(\ell)}$                                       | $\ell$ -ème composante du vecteur $x$                                                                                                                   |
| $A_{(\ell)}$                                       | $\ell$ -ème ligne de la matrice $A$                                                                                                                     |
| $P'$                                               | matrice transposée de $P$                                                                                                                               |
| $P^\perp$                                          | base du noyau associé à la matrice $P$                                                                                                                  |
| $\ x\ $                                            | norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$                                                                                                       |
| $\ A\ $                                            | norme 2 de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$                                                                                                   |
| $M > 0_n$ (resp. $M < 0_n$ )                       | matrice définie positive (resp. négative) de dimension $n \times n$                                                                                     |
| $\mathbf{He}(M)$                                   | matrice Hermitienne $M + M'$                                                                                                                            |
| $\text{diag}(A; B)$                                | matrice diagonale par blocs avec $A$ et $B$ sur la diagonale principale                                                                                 |
| $\begin{bmatrix} A & \star \\ B & C \end{bmatrix}$ | matrice par blocs dont $\star$ désigne $B'$                                                                                                             |
| $\mathcal{I}_N$                                    | ensemble des nombres naturels $\{1; \dots; N\}$                                                                                                         |
| $\mathcal{D}$                                      | ensemble des matrices diagonales dans $\mathbb{R}^{p \times p}$ , $p \in \mathbb{N}$ où chaque élément de la diagonale appartient à l'intervalle unité. |
| $L_V(\gamma)$                                      | ligne de niveau définie par $\{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq \gamma\}$                                                                     |
| $\mathcal{E}(M, \gamma)$                           | ellipsoïde définie par $\{x \in \mathbb{R}^n; x'Mx \leq \gamma\}$                                                                                       |
| $\mathcal{E}(M)$                                   | ellipsoïde définie tel que $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M, 1)$                                                                                         |

|              |                                                                                                 |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lambda(M)$ | valeurs propres de la matrice carrée $M$                                                        |
| GUAS         | abréviation pour Globalement Uniformément Asymptotiquement Stable, voir définition 1.5, page 18 |
| GUBT         | abréviation pour Globalement Uniformément Borné sur $T$ , voir définition 1.6, page 18          |
| LMI          | abréviation anglaise pour Inégalité Matricielle linéaire                                        |
| UIB          | abréviation pour Uniformément Incrémentalement Borné, voir définition 1.4, page 18              |
| SDD          | abréviation pour <i>Sampled-Data Design</i> , conception à données échantillonnées              |
| CTD          | abréviation pour <i>Continuous-Time Design</i> , conception à temps continu                     |
| DTD          | abréviation pour <i>Discrete-Time Design</i> , conception à temps discret                       |

# Introduction Générale

Les systèmes physiques à piloter sont désormais de plus en plus complexes ; notamment à cause de plusieurs caractéristiques comme les grandes dimensions, les interconnexions, les différentes échelles de temps, les dynamiques hétérogènes (hybrides) ou encore les dynamiques non-linéaires. Cette thèse s'attache à considérer une de ces complexités : les dynamiques non-linéaires. Les systèmes non-linéaires génériques ont déjà généré une littérature importante proposant une large gamme de résultats généraux. Cependant, afin d'obtenir des résultats exploitables numériquement, une classe particulière de systèmes non-linéaires est considérée. Il s'agit des systèmes de Lur'e, qui consistent en l'interconnexion d'un système linéaire et d'une non-linéarité vérifiant une condition de secteur globale conique. Ces systèmes ont déjà été étudiés de manière approfondie par la communauté des automaticiens que ce soit en temps continu ou en temps discret. La motivation de cette étude étant renforcée par le large champ d'applications de ces systèmes, mais aussi par l'apparition de nouvelles contributions originales sur le sujet, en temps discret.

De plus, une tendance forte, en pratique et dans l'industrie, est de piloter de manière numérique les systèmes physiques ; à cause de la flexibilité et du faible coût de ces contrôleurs numériques. Les systèmes de Lur'e faisant cohabiter temps continu et temps discret sous forme de systèmes échantillonnés ou à données échantillonnées sont peu abordés dans la littérature et constituent l'objet d'étude de cette thèse.

## Objectifs

L'objectif de cette thèse est double. Le premier est d'étendre le champ d'application de la fonction de Lyapunov adaptée au système de Lur'e à temps discret qui contient un terme croisé entre l'état et la non-linéarité. En effet, cette fonction de Lyapunov a la propriété remarquable de fournir des lignes de niveau potentiellement non connexes et non convexes. Cette caractéristique compréhensible dans le cas discret, où les trajectoires sont discontinues par nature, est incompatible avec une étude en temps continu. Par conséquent, si le système à temps discret provient de la discrétisation d'un système à temps continu, il n'est pas possible de conclure directement sur la stabilité du système à temps continu d'origine avec cet outil. Nous verrons comment construire, à partir des lignes de niveau non connexes obtenues à partir du modèle discrétisé, une suite décroissante au sens de l'inclusion d'ensembles au moins connexes et bornés, qui converge vers le singleton origine et qui permettra de conclure sur la stabilité du système à temps continu d'origine. Des conditions suffisantes d'existence de ces nouveaux ensembles seront proposées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour la stabilisation globale des systèmes de Lur'e à temps continu.

Le second objectif est d'utiliser les connaissances développées sur l'analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps continu par leur discrétisé d'Euler pour construire une méthode de synthèse de contrôleur pour les systèmes à données échantillonnées de type Lur'e avec un échantillonnage non-uniforme. Cette méthode proposera une reformulation du problème, lorsqu'un nombre fini de périodes d'échantillonnage est considéré, comme un problème de stabilisation d'un système commuté de type Lur'e avec des paramètres incertains bornés en normes. La détermination d'une stratégie d'échantillonnage non-uniforme sera alors formulée comme un problème de synthèse d'une loi de commutation stabilisant un système commuté de type Lur'e avec incertitudes. L'approche que nous proposons permet d'envisager la prise en compte de coûts associés aux différentes périodes d'échantillonnage admissibles. L'extension de la notion de consistance aux systèmes commutés de type Lur'e permet de montrer l'intérêt et l'avantage de notre approche.

## **Organisation du mémoire**

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres principaux. Une conclusion générale résumera l'ensemble des contributions présentées au cours de ces chapitres.

### **Chapitre 1**

Dans le premier chapitre, nous présentons le problème de Lur'e et les différentes solutions apportées par la littérature pour traiter ce problème et ses évolutions en temps discret et en temps continu. Des exemples de systèmes pouvant être modélisés par un système de Lur'e sont présentés. Ensuite, nous définissons le problème de Lur'e à temps discret en rappelant les outils récemment développés en vue de l'analyse de stabilité et de la synthèse de commande pour ce type de systèmes. Plus particulièrement, nous rappelons une fonction de Lyapunov adaptée au système de Lur'e à temps discret. Nous soulignons ses avantages et ses propriétés qui mèneront aux problématiques constituant le fil conducteur de cette thèse. Le lien entre temps continu et temps discret pour les systèmes de Lur'e pourra être formalisé soit par les systèmes de Lur'e échantillonnées (à l'aide de différentes discrétisations : exacte, approchée d'Euler explicite) soit par les systèmes de Lur'e à données échantillonnées. Notons que ces derniers sont encore très peu abordés dans la littérature. Nous rappelons alors la définition des systèmes non-linéaires à données échantillonnées ainsi que les principaux résultats sur leur analyse de stabilité.

### **Chapitre 2**

Le deuxième chapitre a pour but d'étendre l'utilisation de la fonction de Lyapunov adaptée au système de Lur'e à temps discret dans le cas où le modèle est issu de la discrétisation d'un système de Lur'e à temps continu. L'idée est de justifier de la validité des lignes de niveau non connexes et non convexes, obtenues avec la fonction de Lyapunov appliquée au modèle discret, sur les trajectoires à temps continu du système d'origine avec les outils utilisés pour les systèmes non-linéaires à données échantillonnées. Nous montrerons, alors, comment construire une suite décroissante d'ensembles au moins connexes et bornés, convergente au sens de l'inclusion vers

---

le singleton origine et contenant la partie future de la trajectoire à temps continu. Cette construction s'effectuera à partir des lignes de niveau non connexes. Nous en déduirons une méthode d'analyse fondée sur des ensembles contractants garantissant la stabilité du modèle discrétisé ainsi que celle du système continu. Une discussion sur le choix de la période d'échantillonnage sera faite permettant d'interpréter l'existence des lignes de niveau non connexes. Des exemples viendront illustrer la construction de cette suite d'ensembles connexes.

### Chapitre 3

Le troisième chapitre est dédié à la stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme. Nous considérerons pour cela un ensemble fini de périodes d'échantillonnage. Sous cette hypothèse, nous proposons une méthode originale de stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées en reformulant le problème comme celui de la stabilisation d'un système de Lur'e commuté en temps discret avec des paramètres incertains bornés en norme. Nous introduirons également un critère de performance sous la forme d'une fonction coût quadratique qui permettra de prendre en compte le fait que l'on peut associer à chaque période d'échantillonnage un coût spécifique. Un exemple numérique sera présenté pour illustrer les spécificités de la méthode.

### Chapitre 4

Le quatrième chapitre approfondit les propriétés de la stratégie de commande introduite au chapitre 3, notamment en termes de performance. Cette étude se fera en particulier par rapport aux performances obtenues avec un échantillonnage uniforme. Pour cela, nous rappellerons la notion de consistance d'une loi de commutation dans le cadre des systèmes commutés linéaires. Ce concept permet de qualifier une loi de commutation qui améliore la performance considérée par rapport aux performances obtenues en étudiant les modes indépendamment les uns des autres. Nous étendrons cette notion au cas des systèmes de Lur'e commutés à temps discret et nous mettrons en évidence les différences entre les cas linéaire et non-linéaire. Pour finir, nous prouverons l'intérêt de l'utilisation de la méthode de synthèse des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme en comparaison avec l'emploi d'un échantillonnage uniforme. Des exemples numériques seront présentés à chaque étape du raisonnement pour illustrer nos résultats.

## Références associées à cette thèse

### Revues internationales et nationales avec comité de Lecture

- J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Sufficient LMI stability conditions for Lur'e type systems governed by a control law designed on their Euler approximate model. *International Journal of Control*, online :1–17, 2015.
- J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov à lignes de niveau non connexes. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 47(4–8) :483–501, 2013.
- J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Consistance des systèmes de Lur'e commutés : application à la synthèse de commande numérique avec un échantillonnage non uniforme. Soumis.

### Conférences internationales et nationales avec comité de Lecture

- J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Stabilization of sampled-data Lur'e systems with nonuniform sampling. In *54th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2015*, Osaka, Japan, 2015. Accepté.
- J. Louis, M. Jungers, J. Daafouz and E.B. Castelan.  $\mathcal{L}_2$ -induced gain for discrete-time switched Lur'e systems via a suitable Lyapunov function. In *16th IFAC workshop on control applications of optimization, CAO 2015*, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2015. Accepté.
- J. Louis, M. Jungers et J. Daafouz. Consistance des systèmes de Lur'e commutés : application à la synthèse de commande numérique avec un échantillonnage non uniforme. Dans *6e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2015*, page CDROM, Bourges, France, 2015.
- J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Switching control consistency of switched Lur'e systems with application to digital control design with non uniform sampling. In *14th European Control Conference, ECC 2015*, Linz, Austria, 2015.
- J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. On using disconnected level sets Lyapunov functions in the context of sampled-data systems. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2013*, pages 630–635, Florence, Italy, 2013.
- J. Louis. Discrétisation et analyse de stabilité des systèmes de type Lur'e. Dans *5e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2013*, page CDROM, Strasbourg, France, 2013.

# Chapitre 1

## Notions introductives.

Ce chapitre a pour objectif de fournir les prérequis nécessaires à la compréhension des problèmes et des résultats présentés dans cette thèse. Nous nous focaliserons principalement sur la classe des systèmes non-linéaires à données échantillonnées de type Lur'e.

Nous présenterons, dans un premier temps, le problème de Lur'e dans son aspect original ainsi que certaines évolutions théoriques développées autour de cette problématique. Nous introduirons un certain nombre d'exemples de systèmes pouvant être modélisés comme des systèmes de type Lur'e. Cette présentation du problème de Lur'e aboutira alors sur des résultats récents construits à partir d'une fonction de Lyapunov adaptée au problème de Lur'e à temps discret dépendante de la non-linéarité du système. Nous insisterons alors sur ses propriétés remarquables comme la potentielle non-convexité et non-connexité des lignes de niveau associées. Cette propriété de non-connexité n'étant pas compatible avec une étude à temps continu, elle nous mènera à la problématique du chapitre 2. Nous nous interrogerons, alors, sur la validité de ce type d'outil lorsque le système à temps discret est issu de la discrétisation d'un système à temps continu en vue de l'analyse de stabilité de ce dernier. Pour cela, nous nous aiderons d'outils développés pour l'analyse des systèmes non-linéaires à données échantillonnées.

Nous commencerons par définir les systèmes non-linéaires à données échantillonnées de façon générique. Nous évoquerons les différentes méthodologies existantes dans la littérature pour la stabilisation de ces systèmes. Le but sera de présenter les différentes familles de solutions rencontrées pour stabiliser un système à temps continu piloté par un contrôleur numérique. Nous rappellerons, ensuite, des conditions suffisantes de stabilité pour ce type de système non-linéaire à données échantillonnées et nous indiquerons les problèmes liés à une formulation générique du problème pour obtenir des méthodes de résolution systématique qui puissent être facilement manipulable de manière numérique avec des outils classiques de l'automatique.

Les références détaillant chacun des théorèmes et des lemmes présentés dans ce chapitre seront indiquées et seules certaines démonstrations, essentielles pour la suite du document, seront proposées pour plus de clarté.

### 1.1 Le problème de Lur'e

La stabilité des systèmes composés par un système linéaire en boucle fermée avec une non-linéarité, dépendante de la sortie et vérifiant une condition de secteur borné de type cone, en

contre-réaction a été largement étudiée depuis les premiers travaux, à temps continu, introduisant les fonctions de Lyapunov de type Lur’e [LP44] ainsi que les premières adaptations à temps discret [JL64, PG64, Sze63].

Ainsi toute une gamme d’outils a été développée pour étudier la stabilité des systèmes de type Lur’e. Nous pouvons citer l’approche fréquentielle proposée par Popov [Pop61], Yakubovich [Yak62] et Kalman [Kal63], qui mène, avec une formulation LMI, au lemme de Kalman–Yakubovich–Popov. Ce lemme est intimement lié à la propriété de positivité réelle stricte d’une fonction de transfert auxiliaire caractéristique du système de type Lur’e [Kha02]. Le critère du cercle utilise ce lemme dans le cas d’une fonction de Lyapunov quadratique et est adapté aux non-linéarités dépendantes du temps. Le critère de Popov [Kha02] en temps continu, quant à lui, considère une fonction de Lyapunov de type Lur’e possédant une intégrale de la non-linéarité. Il suppose alors que la non-linéarité est invariante par rapport au temps. Le critère de Tsytkin [Tsy62, PJ94] est une extension au cas du temps discret du critère de Popov. D’autres techniques classiques existent pour traiter l’analyse de stabilité des systèmes de Lur’e. Notons par exemple l’approche par passivité, ou par contrainte intégrale quadratique [MR97, FLR08, TKP09].

Récemment, une nouvelle classe de fonctions de Lyapunov a été introduite [GJDC11], permettant de relaxer certaines des hypothèses sur la non-linéarité pour les systèmes à temps discret. Cette fonction est constituée d’un terme quadratique en l’état et d’un terme croisé entre l’état et la non-linéarité. Des conditions suffisantes sous forme de contraintes LMI ont été proposées [GJD12b, Gon12] pour l’étude de la stabilité asymptotique globale et locale de ce type de système.

Le chapitre 2 a été motivé par les observations obtenues lors du tracé de ces lignes de niveau. Dans ce chapitre, nous rappelons donc les résultats nécessaires à la compréhension de la problématique du chapitre 2 et de sa résolution.

Pour ce faire, nous définissons le système de Lur’e à temps discret tel que :

$$\mathcal{S}_d \begin{cases} x[k+1] &= Ax[k] + B\varphi(y[k]), \quad k \in \mathbb{N}^+, \\ y[k] &= Cx[k], \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x[k] \in \mathbb{R}^n$ ,  $y[k] \in \mathbb{R}^p$  sont l’état et la sortie du système (1.1). La non-linéarité  $\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}^p$  est une fonction dépendante de la sortie, sans mémoire et décentralisée, c’est-à-dire,

$$\varphi_{(\ell)}(y[k]) = \tilde{\varphi}(y_{(\ell)}[k]), \quad \forall \ell = \{1, \dots, p\}, \quad \forall y(\cdot) \in \mathbb{R}^p \quad (1.2)$$

avec  $\tilde{\varphi}(\cdot)$  une non-linéarité scalaire. De plus, cette non-linéarité vérifie une condition de secteur conique explicitée dans la définition 1.1.

**Définition 1.1** [Kha02] *La non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  vérifie la condition de secteur global si et seulement si la relation suivante est satisfaite :*

$$\varphi'(y[k])S(\varphi(y[k]) - \Omega y[k]) \leq 0, \quad \forall y[k] \in \mathbb{R}^p, \quad (1.3)$$

où  $S$  et  $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times p}$  sont des matrices diagonales définies positives. Cette propriété est abusivement notée  $\varphi(\cdot) \in [0_p; \Omega]$ .

Avant de nous intéresser plus spécifiquement aux résultats concernant la fonction de Lyapunov adaptée, nous rappelons dans la sous-section 1.1.1 des exemples de systèmes pouvant être modélisés par un système de Lur’e. Cette sous-section est présentée pour illustrer la large variété de systèmes concernés.

### 1.1.1 Exemples de processus modélisable sous une forme de Lur'e

À l'origine, le problème de Lur'e a été introduit pour analyser la stabilité des systèmes faisant intervenir une saturation dans la boucle de retour [LP44]. Depuis les premières contributions, d'autres réponses ont été apportées pour traiter le problème de stabilité des systèmes de Lur'e notamment avec une condition de secteur locale [TPdS06, CTQ08] ou des techniques permettant l'évaluation de la non-linéarité à l'aide de programmes quadratiques [Pri01] ont permis des progrès sur l'analyse de stabilité de ce type de système, notamment dans le cadre des non-linéarités de type saturation et zone morte [LHL07, LHL08]. Cependant, l'hypothèse de condition de secteur global (1.1) permet aux systèmes de Lur'e de modéliser une plus large classe de systèmes non-linéaires. Nous présenterons dans la suite de cette sous-section une liste d'exemples de systèmes modélisables par une structure de type Lur'e. Nous commencerons par la présentation d'un oscillateur mécanique simple. Puis, nous continuerons avec deux systèmes couramment étudiés par la communauté des systèmes chaotiques : le système de *Duffing* et le circuit de *Chua*. L'identification des paramètres de ces systèmes a également été étudiée dans [PR06]. Nous finirons par une interprétation des systèmes de Lur'e pour la modélisation des systèmes incertains.

**Oscillateur mécanique autonome** Nous choisissons ici de détailler un exemple de modélisation d'un oscillateur mécanique composé d'une masse  $m$  glissant sur un rail avec un coefficient de viscosité  $\alpha$ . La masse est reliée à un ressort, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , lui-même relié en liaison pivot à un point fixe. La coordonnée horizontale  $z(t)$  représente le déplacement de la masse autour de la position  $z = 0$ , où le ressort est à la verticale. Cet exemple, décrit par la figure 1.1, a été déjà bien étudié dans la littérature en physique dans des versions plus ou moins complexes [Str94, page 73 et 84].

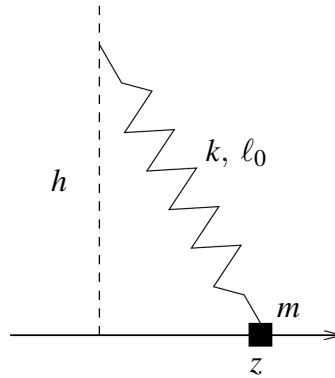


FIGURE 1.1 – Masse sur un rail horizontal.

L'équation du mouvement de la masse est donnée par les lois de Newton :

$$\ddot{z}(t) = -\frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) - \frac{k}{m}z(t) + \frac{k}{m} \frac{\ell_0}{\sqrt{z^2(t) + h^2}}z(t). \quad (1.4)$$

En posant le vecteur d'état  $x(t) = (\dot{z}(t) \ z(t))'$ , le système peut se mettre sous la forme d'un

système de Lur'e à temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c \varphi(y(t)), & t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) = C_c x(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

avec

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [0 \quad 1], \quad (1.6)$$

et

$$\varphi(y(t)) = \frac{\ell_0}{\sqrt{z^2(t) + h^2}} y(t). \quad (1.7)$$

La non-linéarité vérifie bien la condition de secteur global (1.3) tel que  $\Omega = \frac{\ell_0}{h}$ .

**Système de Duffing** Le système mécanique dit de *Duffing* est caractérisé par l'équation différentielle

$$m\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \alpha\xi + \beta\xi^3 = F \cos(wt) \quad (1.8)$$

où  $\xi$  correspond au déplacement,  $m$  à la masse du système,  $\gamma$  au coefficient d'amortissement,  $\alpha$  à la raideur,  $\beta$  à la force de rappel,  $F$  à l'amplitude de force d'entraînement et  $w$  à la pulsation de la force d'entraînement. Ce système est notamment utilisé pour modéliser des oscillateurs forcés. Un exemple applicatif d'une poutre élastique et magnétique est détaillé dans [GH90, page 83]. Le système de *Duffing* est représenté par un système de Lur'e commandé de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \varphi(y(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t), & t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) = [1 \quad 0] x(t), \\ u(t) = F \cos(wt), \end{cases} \quad (1.9)$$

avec  $x(t) = (\dot{\xi}(t) \quad \xi(t))'$  et  $\varphi(y(t)) = \beta y^3$ . Dans ce cas particulier, la non-linéarité vérifie la condition de secteur global (1.3) tel que  $\Omega = +\infty$ .

**Circuits de Chua** [MCK85] Il s'agit d'un circuit électronique autonome composé de deux capacités notées  $C_1$  et  $C_2$ , d'une bobine  $L$ , d'une résistance  $G$  et d'une résistance non-linéaire  $R$ . Ce circuit est présenté à la figure 1.2.

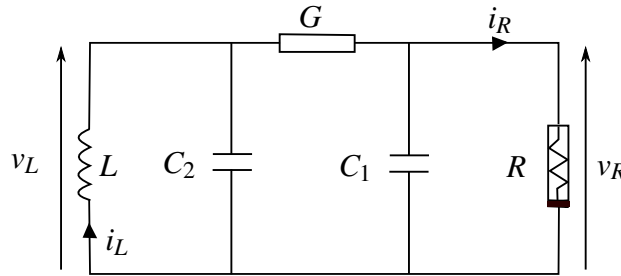


FIGURE 1.2 – Circuits de Chua.

En posant  $x(t) = (v_R \ v_L \ i_L)'$ , le circuit de Chua est modélisé par le système de Lur'e suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi(y(t)), \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.10)$$

où la non-linéarité du système caractérise la relation entre le courant qui traverse la résistance  $R$  et la tension à ses bornes (voir la figure 1.3). Elle est donnée par l'équation

$$\varphi(y(t)) = m_0 y(t) + \frac{m_1 - m_0}{2} (|y(t) + b| - |y(t) - b|), \quad (1.11)$$

où les paramètres  $m_0$ ,  $m_1$  et  $b$  sont des scalaires définis sur la figure 1.3. Ce système est un exemple simple de systèmes chaotiques.

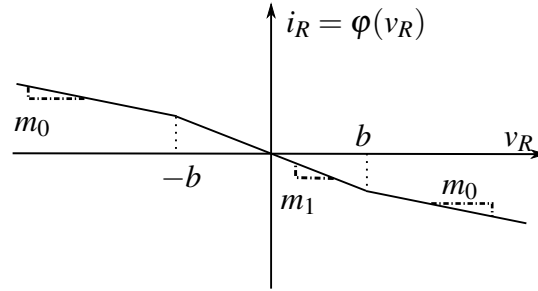


FIGURE 1.3 – Relation courant/tension aux bornes de la résistance  $R$ .

**Incertitudes non structurées** D'un tout autre point de vue par rapport aux autres exemples, la non-linéarité dans le modèle de Lur'e peut représenter des incertitudes non structurées (voir la figure 1.4). Le système  $\mathcal{S}_d$  étant défini à l'équation (1.1), la non-linéarité est alors définie tel que  $\varphi(y[k]) = \Delta y[k]$ , où la matrice  $\Delta$  représente les incertitudes non structurées dans une matrice diagonale.

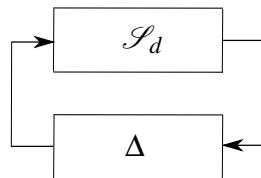


FIGURE 1.4 – Système avec des incertitudes non structurées vu comme un système de Lur'e.

Ce formalisme permet de faire le lien entre les systèmes de Lur'e et les études de robustesse des systèmes [DF99, ACA<sup>+</sup>99, EPA14].

Au terme de cette sous-section, nous avons rappelé un certain nombre d'exemples variés de systèmes modélisables par un système de Lur'e. Cette liste n'est pas exhaustive, de nombreux exemples sont disponibles dans la littérature tel que le bras flexible d'un robot étudié dans [BFA10]. Dans la sous-section suivante, nous rappelons le problème d'analyse de stabilité de cette classe de systèmes que nous traiterons à l'aide de la fonction de Lyapunov avancée [GJD12b].

### 1.1.2 Analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps discret

Le problème d'analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps discret se formule comme suit :

**Problème 1.1** *Déterminer des conditions suffisantes pour que l'origine du système (1.1) soit globalement asymptotiquement stable pour toutes les non-linéarités vérifiant la condition de secteur borné de type cone (1.3).*

Pour traiter ce problème, nous rappelons la fonction de Lyapunov avancée introduite dans [GJD12b], qui présente l'avantage de s'affranchir de l'hypothèse sur la dérivée de la fonction de Lyapunov de type Lur'e originalement introduite [Sze63]. Cette hypothèse, provient de l'adaptation, aux systèmes à temps discret, de la fonction de Lyapunov Lur'e classiquement utilisée pour l'analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps continu. Cette fonction est composée d'une intégrale de la non-linéarité qui est, à temps discret, approchée avec la méthode des trapèzes faisant apparaître la dérivée de la non-linéarité. Il est alors nécessaire de borner cette dérivée pour conclure sur la stabilité des systèmes de Lur'e à temps discret. En pratique, cette adaptation, de la fonction de Lyapunov Lur'e classique, au temps discret ne permet pas l'étude de non-linéarité à tangente infinie. De plus, elle ne permet pas l'étude de systèmes variants dans le temps tels que les systèmes de Lur'e à commutation. La fonction composée d'un terme quadratique en l'état et d'un terme croisé entre l'état et la non-linéarité :

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x[k]; \varphi(Cx[k])) & \longmapsto x'Px + 2\varphi'(Cx[k])\Delta\Omega Cx[k], \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive et  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice diagonale semi-définie positive, permet de s'affranchir de ces deux contraintes [Gon12]. Nous précisons que la fonction de Lyapunov quadratique est un cas particulier de la fonction (1.12), obtenue avec  $\Delta = 0_p$ . Cependant, les manipulations nécessaires à l'obtention des conditions suffisantes de stabilité sont différentes pour ces deux fonctions de Lyapunov. En pratique, les conditions suffisantes de stabilité obtenu pour la fonction de Lyapunov quadratique et pour la fonction de Lyapunov (1.12) ne sont pas comparables.

Le théorème 1.1 rappelle les conditions suffisantes de stabilité du système de Lur'e (1.1) utilisant la fonction de Lyapunov (1.12). Nous rappelons également sa preuve, car ce résultat sera utilisé comme tel dans le chapitre 2.

**Théorème 1.1** ([GJD12b]) *Soit la classe des systèmes définis par (1.1), s'il existe une matrice  $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et des matrices diagonales définies positives  $S_1$  et  $S_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , telles*

que la LMI suivante

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} P - G'_1 - G_1 & G'_1 A & G'_1 B & 0_{n \times p} \\ \star & -P & \Pi_1 & A' \Pi_2 \\ \star & \star & -2S_1 & B' \Pi_2 \\ \star & \star & \star & -2S_2 \end{bmatrix} < 0_{2n+2p}, \quad (1.13)$$

est vérifiée, où

$$\Pi_1 = C' \Omega [S_1 - \Delta]; \quad \Pi_2 = C' \Omega [S_2 + \Delta], \quad (1.14)$$

alors, la fonction (1.12) est une fonction de Lyapunov et l'origine du système (1.1) est globalement asymptotiquement stable.

Dans le but d'interpréter le théorème 1.1, nous définissons la ligne de niveau associée à la fonction de Lyapunov (1.12) à l'aide du scalaire  $\gamma > 0$  tel que

$$L_V(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x; \varphi(Cx)) \leq \gamma\}, \quad (1.15)$$

Il est possible de réécrire la relation (1.3) sous la forme

$$\varphi_{(l)}(y[k])^2 \leq \varphi_{(l)}(y) [\Omega y[k]]_{(l)}. \quad (1.16)$$

De plus, selon la condition de secteur,  $\varphi_{(l)}(y[k])$  et  $y_{(l)}[k]$  ont le même signe. Cela implique l'inégalité suivante :

$$y_{(l)}[k] (\varphi(y[k]) - \Omega y[k])_{(l)} \leq 0, \quad \forall y[k] \in \mathbb{R}^p, \quad \forall l \in \{1; \dots; p\}. \quad (1.17)$$

Grâce à ces deux dernières inégalités, la fonction  $V(\cdot; \cdot)$  vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \leq x' P x \leq V(x, \varphi(Cx)) \leq x' (P + 2C' \Omega \Delta \Omega C) x. \quad (1.18)$$

L'encadrement (1.18) permet de considérer la fonction  $V(\cdot; \cdot)$  comme une candidate adaptée au problème de Lur'e à temps discret pour être une fonction de Lyapunov. Effectivement, les propriétés suivantes sont vérifiées [Gon12] :

- $V(x; \varphi(Cx)) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ,
- $V(x; \varphi(Cx)) = 0$  uniquement pour  $x = 0$ ,
- La fonction  $x \mapsto V(x; \varphi(Cx))$  est radialement non bornée.

D'après l'encadrement (1.18) sur la fonction  $V(\cdot; \cdot)$ , la ligne de niveau  $L_V(\gamma)$ , définie à l'équation (1.15), vérifie les inclusions suivantes :

$$\mathcal{E}(P + 2C' \Omega \Delta \Omega C, \gamma) \subseteq L_V(\gamma) \subseteq \mathcal{E}(P, \gamma), \quad (1.19)$$

où  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)$  est une ellipsoïde définie tel que  $\mathcal{E}(M, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' M x \leq \gamma\}$ . Nous noterons par convention  $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M, \gamma)$ .

Notons en particulier que la fonction  $x \mapsto V(x; \varphi(Cx))$  étant radialement non bornée, la seconde inclusion de la relation (1.19) montre que la ligne de niveau  $L_V(\gamma)$  est toujours contenue dans un support compact et borné comme l'illustre les figures 1.5 et 1.6 obtenues pour les valeurs de la fonction de Lyapunov

$$P = \text{diag} \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right) \quad \Delta = 1; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \Omega = 0.7; \quad \varphi(y) = \Omega \frac{1}{2} y (1 + \cos(10y)).$$

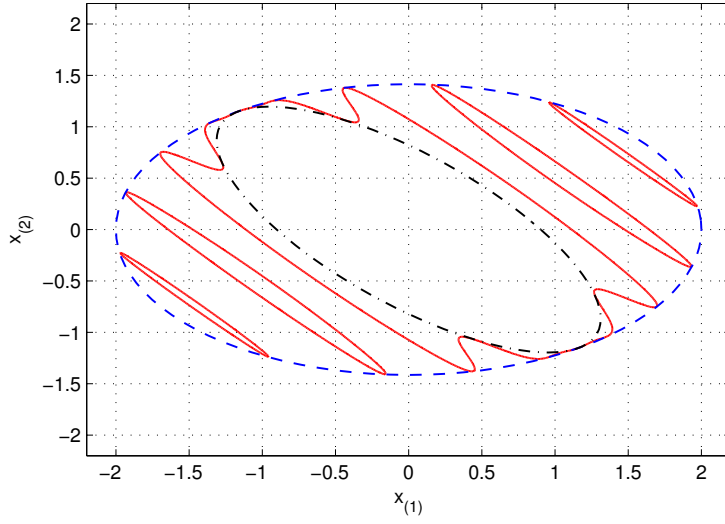


FIGURE 1.5 – Ligne de niveau  $L_V(1)$  de la fonction de Lyapunov  $V(x; \varphi(Cx))$  (ligne pleine rouge), encadrée par l'ellipse intérieure  $\mathcal{E}(P + 2C'\Omega\Delta\Omega C)$  (ligne "· -") et l'ellipse extérieure  $\mathcal{E}(P)$  (ligne "— —").

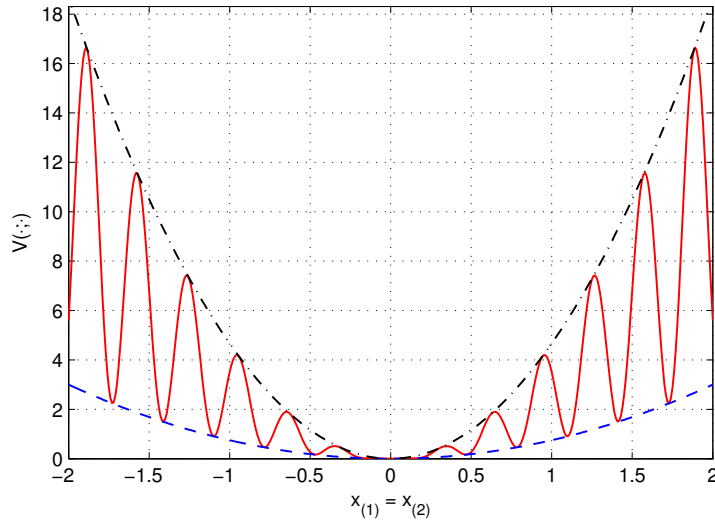


FIGURE 1.6 – Évolution de la fonction de Lyapunov en fonction de la droite d'équation  $x_{(1)} = x_{(2)}$  (ligne pleine rouge), majorer par la fonction  $x \mapsto x'(P + 22C'\Omega\Delta\Omega C)x$  (ligne "· -") et minorer par la fonction  $x \mapsto x'Px$  (ligne "— —").

Les lignes de niveau d'une telle fonction de Lyapunov peuvent être non convexes et non connexes comme l'illustre la figure 1.5. Cette propriété est rarement rencontrée, en pratique, dans la littérature. Son application aux systèmes de Lur'e à temps continu sera au cœur de l'étude du chapitre 2.

Au terme de cette section, nous avons rappelé des résultats concernant la stabilité des systèmes de Lur'e à temps discret à l'aide d'une fonction de Lyapunov avancée. Il existe également un certain nombre de résultats concernant le problème de synthèse de commande de ce type de système à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique [JCTD11] ou de la fonction de Lyapunov avancée [GJD13]. Or les exemples introduits dans la sous-section 1.1.1 sont des systèmes à temps continu. Le choix d'un dimensionnement de loi de contrôle à temps discret pour améliorer les performances de processus à temps continu est de nos jours une solution classiquement employée dans l'industrie et connue sous le nom de système à données échantillonnées. Bien que les systèmes de Lur'e aient été étudiés avec beaucoup d'attention dans leurs versions continue et discrète, peu de résultats concernant la version à données échantillonnées existent. À notre connaissance, seul le problème de synchronisation de système chaotique pouvant être modélisé par un système de Lur'e à données échantillonnées a été exploré [LH08, ZHW09, CWL12, TB14]. Le chapitre 3 s'intéressera à la problématique des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme. Par conséquent, dans la section 1.2, nous nous intéresserons aux résultats existant dans la littérature traitant des systèmes non-linéaires à données échantillonnées. Nous nous attacherons notamment à rappeler les différentes approches existantes pour mieux situer nos travaux par rapport à la littérature.

## 1.2 Système non-linéaire à données échantillonnées

Soit le système non-linéaire à temps continu

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), \tilde{u}(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) &= h(x(t)), \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  et  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement l'état, la sortie et l'entrée du système. Nous supposons dans la suite les fonctions  $f$  et  $h$  continues tel que  $h(0) = 0$ . Nous souhaitons commander ce système à l'aide d'un correcteur numérique, pour cela nous introduisons une période d'échantillonnage  $T$  telle que la trajectoire à l'instant  $t$  soit définie par :

$$x(t) = x[k] + \int_{t_k}^t f(\tau, x(\tau), \tilde{u}(\tau)) \, d\tau. \quad (1.21)$$

En supposant le problème bien posé, nous définissons le système discret suivant

$$x[k+1] = x[k] + \int_{t_k}^{t_k+T} f(\tau, x(\tau), \tilde{u}(\tau)) \, d\tau \quad (1.22)$$

$$:= F_T^c(x[k]), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.23)$$

Le passage du temps continu au temps discret est réalisé via l'échantillonneur

$$\mathcal{E} : x[k] = x(t = t_k), \quad k \geq 0. \quad (1.24)$$

Avec ces éléments nous introduisons le correcteur numérique

$$\mathcal{C}_d : u[k] = g(k, x[k], T), \quad (1.25)$$

fonction de la période d'échantillonnage et de l'état. La liaison entre cette commande et le système à temps continu (1.20) est réalisée par une fonction injective de l'ensemble des commandes discrètes  $u[k]$  avec  $k \in \mathbb{N}$  à l'ensemble des entrées continues  $\tilde{u}(t)$ , avec  $t \in \mathbb{R}^+$  via le bloqueur d'ordre zéro défini par

$$\mathcal{H} : \tilde{u}(t) = u[k], \quad t \in [t_k; t_{k+1}[. \quad (1.26)$$

Le système composé de l'interconnexion entre le système continu  $\mathcal{S}_c$  et le correcteur numérique  $\mathcal{C}_d$  est connu sous le nom de système à données échantillonnées. Le problème relatif à ce genre de systèmes à données échantillonnées est le suivant :

**Problème 1.2** Déterminer une loi de commande numérique (1.25)–(1.26), tel que le système (1.20)–(1.24)–(1.25)–(1.26) soit stable.

La conception d'une commande numérique, solution du problème 1.2, a motivé une large recherche pour les systèmes linéaires et non-linéaires. La principale difficulté est liée à l'analyse de stabilité du système à temps continu (1.20) sous l'action d'une entrée constante par morceau (1.26). Il est possible de classer les méthodes proposées dans la littérature en trois grandes familles.

La première, et la plus ancienne, consiste à implémenter une version discrétisée du correcteur à temps continu [HS87, MNC85]. Le contrôleur est alors dimensionné sans tenir compte de la période d'échantillonnage [KKK], puis il est implémenté par une méthode de discrétisation [CF95]. Ces méthodes sont connues sous le nom de *continuous-time design* (CTD) et supposent que la période d'échantillonnage soit suffisamment faible pour que le comportement du correcteur soit suffisamment *proche* de celui du contrôleur à temps continu et ainsi conclure sur la stabilité du système à données échantillonnées. Cependant, les méthodes de discrétisation classiquement privilégiée dans la littérature (Euler, Tustin, placement de pôle et zéro) pour leur simplicité peuvent nécessiter des périodes d'échantillonnage excessivement faibles dont l'implémentation est impossible même dans le cas linéaire [Kat81, And93]. Des méthodologies plus complexes, fondées sur des modèles à temps continu modifié ou des procédures de dimensionnement du contrôleur compensant les effets de l'échantillonnage et celui de l'interface entre le contrôleur et le système ont été explorées dans [KA92, HA95]. Elles ont mené à la construction de méthodologies performantes composées généralement de deux étapes. La première appelée *émulation* [LNT02], qui n'est autre que le dimensionnement de type CTD décrit ci-dessus, est complété par une phase dite de redimensionnement (*redesign* [NG05]) permettant d'adapter le contrôleur aux contraintes de ce type de système. De plus, une méthode donnant une estimée non conservative du majorant de la plus grande valeur de période d'échantillonnage admissible, pour l'*émulation*, a été récemment exhibée [NTC09]. Ces techniques améliorent en pratique les performances et font de cette famille de correcteurs l'une des plus répandues à l'heure actuelle.

La seconde famille, connue sous l'appellation *discrete-time design* (DTD), se propose de dimensionner le correcteur à temps discret en utilisant la discrétisation exacte du modèle à temps continu. Les premiers résultats dans ce domaine supposent que le modèle exact du système est

connu avec une structure de rétroaction pour l'implémentation du contrôleur [KB94, DNMS98]. Or cette hypothèse est principalement valable dans le cas linéaire où il est possible d'obtenir une *discrétisation exacte* du système à temps continu [SCSS11]. Dans le cadre des systèmes non-linéaires, cette hypothèse nécessite, en pratique, la résolution d'une équation différentielle non-linéaire sur une période d'échantillonnage ce qui n'est généralement pas faisable [GML82, DB84, NT04]. Le dimensionnement du correcteur est alors effectué à partir d'un modèle discrétisé approché. Généralement, la discrétisation d'Euler est utilisée [CDGMNC97, BMNC96, NTK99a, NTK99b] pour des raisons de simplicité. La difficulté est alors de dimensionner un contrôleur sur le modèle approché stabilisant le discrétisé exact [GE04, GE07]. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été proposées en ce sens dans [Grü08, Gyu09]. Des comparaisons existent dans la littérature entre les méthodes de type CTD et DTD [MNC01, NT06], où il s'avère que les méthodes de type DTD sont parfois bien plus performantes que les méthodes de type CTD et tolèrent des périodes d'échantillonnage plus grandes. Cependant, ces observations ne sont pas généralisables et dépendent des méthodes choisies. Ainsi des méthodes de *redesign* plus complexes peuvent être considérées au prix d'études plus difficiles [NG05, PAABLL08]. De plus, les méthodologies de type DTD ne garantissent pas automatiquement la stabilité du système à données échantillonnées vu que le comportement entre deux instants d'échantillonnage n'est pas pris en compte et peut être néfaste.

La troisième famille de méthodologies consiste à dimensionner un correcteur assurant la stabilité du système à données échantillonnées ainsi que les performances souhaitées. Elle est connue sous le nom de *sampled-data design* (SDD) [NTK99b, MNC01, LNA05]. Le contrôleur numérique est calculé en prenant en compte le comportement entre les instants d'échantillonnage. En effet, les deux familles de méthodes précédentes ignorent l'échantillonnage à l'étape du dimensionnement du correcteur, elles peuvent produire des effets indésirables sur le comportement du système entre deux instants d'échantillonnages. Si cette famille de correcteurs semble la plus adaptée, elle est aussi la plus difficile à étudier. La première contribution majeure sur ce sujet donne des conditions suffisantes en boucle fermée sur la stabilité des systèmes à données échantillonnées [NTS99]. Ces conditions caractérisent le comportement entre les instants d'échantillonnage de la solution en fonction du comportement du système discrétisé exact. Cependant, elle ne permet en pratique qu'une approche locale de la stabilité des systèmes à données échantillonnées. Cette difficulté a récemment été levée dans [KK09], en s'inspirant des résultats sur les systèmes linéaires [FSR04, Fri10] suggérant de modéliser le bloqueur d'ordre zéro par un retard dans le système à données échantillonnées. D'autres solutions sont envisagées en modélisant le système à données échantillonnées comme une sous classe de systèmes hybrides [GST12].

Nous mentionnons également les liens étroits entre ce domaine de recherche et celui des systèmes contrôlés en réseau [HTvN10] avec les méthodes d'*event-triggered* et de *self-triggered* [AT10]. Une discussion sur ce sujet, au chapitre 3, soulignera les différences existant avec les travaux qui sont développés dans cette thèse.

L'étude de la stabilité de ce type de système n'est pas une tâche aisée dans un cadre générique. Toutefois, une méthode basée sur des conditions suffisantes de stabilité [NTS99] en boucle fermée concernant uniquement les trajectoires permet de donner une ligne directrice pour étudier ce type de système. Avant d'énoncer ces conditions, nous introduisons les définitions nécessaires à leurs compréhensions.

**Définition 1.2** Soit  $a \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $\alpha : [0, a] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction continue,  $\alpha$  est dite de classe  $\mathcal{K}$ , si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . De plus,  $\alpha$  est dite classe  $\mathcal{K}_\infty$ , si elle est définie pour tout  $r \geq 0$  et  $\alpha(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Définition 1.3** Une fonction continue  $\beta(r, s)$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$ , si pour tout  $s_0 > 0$  fixé  $\beta(r, s_0) \in \mathcal{K}$  et si pour tout  $r_0$  fixé  $\beta(r_0, s)$  est décroissante avec  $\beta(r_0, s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$ .

**Définition 1.4** Soit une fonction  $\beta(r, s)$  de classe  $\mathcal{KL}$ , elle est dite uniformément incrémentalement bornée (UIB), s'il existe un nombre  $P > 0$  tel que

$$\beta(r, s) \leq P\beta(r, s+1). \quad (1.27)$$

**Définition 1.5** Le system (1.20) est dit globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$ , tel que pour tout  $t_{init} > 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_{init})\|, t - t_{init}), \quad \forall t \geq t_{init}. \quad (1.28)$$

**Définition 1.6** Soit  $T > 0$  une période d'échantillonnage donnée, les solutions du systèmes (1.20) sont dites globalement uniformément bornées sur  $T$  (GUBT), s'il existe une fonction  $\kappa$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  tel que pour tout  $t_0 > 0$ , les solutions du système (1.20) existent sur l'intervalle  $[t_{init}; t_{init} + T]$  et vérifient

$$\|x(t)\| \leq \kappa(\|x(t_{init})\|), \quad \forall t \in [t_{init}; t_{init} + T]. \quad (1.29)$$

**Proposition 1.1** ([NTS99]) Soit le système à données échantillonnées (1.20) et la période d'échantillonnage  $T$ . Si

— le modèle temps discret (1.22) est GUAS, il existe une fonction  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que

$$\|x[k]\| \leq \beta(\|x[k_0]\|, k - k_0), \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad (1.30)$$

— les solutions sont GUBT, il existe une fonction  $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$  vérifiant  $\forall t \in [t_{init}; t_{init} + T]$

$$\|x(t)\| \leq \kappa(\|x(t_{init})\|), \quad (1.31)$$

alors le système à données échantillonnées (1.20) est GUAS tel que

$$\|x(t)\| \leq \bar{\beta}(\|x(t_{init})\|, t - t_{init}), \quad \forall t \geq t_{init} \geq 0, \quad (1.32)$$

où  $\bar{\beta} \in \mathcal{KL}$  peut être choisi, dans le cas général, tel que :

$$\bar{\beta}(s, \tau) = \max \left\{ \frac{\kappa(s)}{e^{\tau-T}}; 4 \max_{\eta \in [0; \tau]} \left( 2^{-\eta} \hat{\beta} \left( s, \frac{\tau - \eta}{T} \right) \right) \right\}. \quad (1.33)$$

La proposition 1.1 est ici choisie comme la ligne directrice du raisonnement qui sera utilisé pour résoudre les problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes de Lur'e à temps continu par leurs modèles discrétisés proposés aux chapitres (2) et (3).

## 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé la définition des systèmes de Lur'e. Nous avons motivé ce choix de modèle non-linéaire et nous nous sommes attachés à présenter les derniers résultats de la littérature sur le problème de Lur'e à temps discret. Nous avons rappelé les conditions suffisantes sous forme de contraintes LMI et nous avons mis en lumière le peu de résultats portant sur la stabilité des systèmes de Lur'e à données échantillonnées.

Cela nous a mené à présenter les systèmes à données échantillonnées sous une forme générique. Nous avons récapitulé un certain nombre d'approches existantes dans la littérature pour dimensionner le contrôleur numérique commandant un processus à temps continu. Les principaux résultats existants proposent des méthodologies génériques et donnent des conditions parfois difficilement exploitables numériquement. Des conditions suffisantes de stabilité ont été rappelées pour expliquer la philosophie de l'analyse de stabilité des systèmes à données échantillonnées. Elles supposent l'existence d'un certain nombre de fonctions ayant des caractéristiques particulières dont nous avons rappelé les définitions. Ces conditions nous serviront dans la suite de la thèse.

Dans le chapitre 2, nous reprendrons le problème de stabilité des systèmes de Lur'e à temps continu par l'utilisation d'un modèle discrétisé. Le but sera de mettre en évidence les problèmes liés à l'utilisation de la fonction de Lyapunov adaptée au système de Lur'e à temps discret pour une étude à temps continu. En nous fondant sur un résultat d'analyse de stabilité des systèmes à données échantillonnées, nous proposerons une approche permettant de conclure sur la stabilité du système à temps continu.



## Chapitre 2

# Utilisation d'une fonction de Lyapunov à lignes de niveau non connexes.

Le chapitre 1 a été l'occasion de présenter un des résultats existants sur l'analyse de la stabilité des systèmes de Lur'e en temps discret. Il est basé sur l'introduction d'une fonction de Lyapunov adaptée [GJDC11]. Cette fonction est constituée d'un terme quadratique en l'état et d'un terme croisé entre l'état et la non-linéarité. Des conditions suffisantes sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) ont été proposées [GJD12b, Gon12] pour l'étude de la stabilité asymptotique globale et locale de ce type de système. Cette fonction de Lyapunov autorise des non-linéarités dont les tangentes peuvent avoir un coefficient directeur infini et elle est compatible avec les études des systèmes commutés de type Lur'e [GJD12a], contrairement aux fonctions de Lyapunov de type Lur'e à temps discret présentes dans la littérature [JL64]. De plus, cette famille de fonctions de Lyapunov fait apparaître des lignes de niveau, qui peuvent être, non connexes et non convexes. Quand les conditions suffisantes sont réunies, ces lignes de niveau sont décroissantes au sens de l'inclusion, bornées et convergent vers le singleton origine. Due à la nature discontinue des trajectoires des systèmes à temps discret, une ligne de niveau non connexe contient bien la partie ultérieure de la trajectoire en temps discret. Cette propriété de non-connexité et non-convexité concorde donc avec la nature des trajectoires des systèmes à temps discret.

Il s'agit d'une rupture vis-à-vis de la littérature. Effectivement, la fonction de Lyapunov la plus répandue, la fonction quadratique, présente des lignes de niveau ellipsoïdales, donc convexes et connexes. D'autres fonctions de Lyapunov sont couramment utilisées. Citons, par exemple, les fonctions polyédrales [BM03, ABLH06, BM08] dont les lignes de niveau sont des polygones, mais aussi les fonctions composites [HL03, FJ14] qui sont le minimum ou le maximum d'un ensemble de fonctions de Lyapunov classiques. Ces fonctions composites mènent à des lignes de niveau qui sont exprimées comme des unions ou des intersections d'ensembles classiques (polygones ou ellipses). L'union d'ensembles ne conserve pas la propriété de convexité, mais celle de connexité. Dans l'état de nos recherches, la fonction de Lyapunov Lur'e, introduite dans [GJD12b, GJD13], est l'une des très rares contributions ne présentant pas nécessairement de connexité pour ses lignes de niveau.

Cette propriété de non-connexité des lignes de niveau de la fonction de Lyapunov Lur'e se comprend bien pour un système de Lur'e générique à temps discret. Elle soulève néanmoins des questions pour des systèmes particuliers de Lur'e à temps discret. Si le système de Lur'e à temps

discret est le discrétisé d'Euler d'un système de Lur'e à temps continu, comment pouvons-nous utiliser cet outil ? Quelles sont les conséquences de la non-connexité des lignes de niveau sur le système de Lur'e à temps continu ? En effet, l'étude de stabilité des systèmes à temps continu appelle des lignes de niveau connexes. Dans le cadre de la discrétisation, il nous faut donc construire des outils permettant de relier ces nouveaux résultats à temps discret aux contraintes liées au système à temps continu.

Ce chapitre apporte des éléments de réponse à ces questions. En particulier, dans le cadre de la discrétisation (par la méthode d'Euler) d'un système non-linéaire, nous montrerons comment construire une suite d'ensembles au moins connexes, bornés, qui soit décroissante au sens de l'inclusion et qui converge vers le singleton origine et qui contienne le futur de la trajectoire en temps continu. Cette construction s'effectuera à partir des lignes de niveau non connexes. Comme application de cette technique, nous montrerons qu'elle peut être vue comme une alternative aux conditions classiques assurant la stabilité asymptotique globale d'un système de Lur'e échantillonné, déjà largement traitée dans la littérature [ÅW97, GGS00, LNA05]. Notamment, nous reprendrons le raisonnement utilisé lors de l'analyse de stabilité des systèmes échantillonnés non-linéaires génériques [NTK99b, NT04, LNA05] sans pour autant utiliser le caractère Lipschitzien de la fonction de Lyapunov, qui est une hypothèse bloquante pour l'étude de la stabilité globale des systèmes non-linéaires à données échantillonnées avec les fonctions de Lyapunov *classiques* type fonctions de Lyapunov quadratiques.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2.1, nous présentons le système de Lur'e à temps continu. Nous rappelons la définition et certaines propriétés de la fonction de Lyapunov présentée au chapitre 1, notamment nous illustrerons les lignes de niveau non connexes et non convexes qu'elle peut induire. Cela débouchera sur la problématique de ce chapitre. Dans la section 2.2, la construction, à partir des lignes de niveau du système discret, d'une suite d'ensembles connexes est proposée pour étendre le résultat de stabilité du modèle discrétisé au système à temps continu d'origine. Une interprétation sur la stabilité asymptotique globale du système est présentée. Un exemple illustre le principal résultat, avant de conclure.

Les résultats présentés ici s'appuient sur les publications [Lou13, LJD13a, LJD13b].

## 2.1 Positionnement du problème

Nous considérons la classe des systèmes non-linéaires à temps continu suivante :

$$\mathcal{P}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\varphi(y(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) &= Cx(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie du système. Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont réelles et de dimensions appropriées.

Nous supposons que la non-linéarité  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est sans mémoire, décentralisée et vérifie une condition de secteur borné par une conique, voir définition 1.1. Pour rappel,  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(\cdot) \in [0_p, \Omega]$ , où  $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice diagonale définie positive. Ainsi, la condition de secteur généralisée (1.3) est également valide en temps continu, tel que

$$\varphi'(y(t))W(\varphi(y(t)) - \Omega y(t)) \leq 0, \quad \forall y(\cdot) \in \mathbb{R}^p, \quad (2.2)$$

avec  $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  diagonale et définie positive. De plus, nous supposons que  $\varphi(\cdot)$  est Lipschitzienne pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système (2.1) pour une condition initiale donnée (dans la suite seule l'hypothèse de continuité sur le vecteur  $x(\cdot)$  sera utilisée).

Depuis la première contribution sur l'analyse de stabilité des systèmes de type Lur'e [LP44], la littérature s'est fortement enrichie et offre différentes solutions que ce soit à temps continu ou discret, en utilisant les fonctions de Lyapunov quadratique et de type Lur'e [Kha02, Sze63, JL64, PG64]. Récemment, une nouvelle classe de fonctions a été proposée pour l'analyse globale et locale de la stabilité asymptotique des systèmes à temps discret de type Lur'e [GJD12b, DTS13] dont les avantages ont été rappelés au chapitre 1.

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, cette fonction de Lyapunov possède des propriétés particulières directement liées à sa structure. En effet, elle est composée d'un terme quadratique en l'état et d'un terme croisé entre l'état et la non-linéarité :

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x; \varphi(Cx)) & \longmapsto x'Px + 2\varphi'(Cx)\Delta\Omega Cx, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive et  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice diagonale semi-définie positive. Il s'agit d'un outil adapté au système de Lur'e à temps discret (voir la discussion section 1.1).

Cependant, la fonction de Lyapunov (2.3) dépend de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  ce qui permet de faire apparaître des lignes de niveau potentiellement non convexes et non connexes mais cela rend la fonction incompatible de prime abord avec une étude d'un système de Lur'e à temps continu (2.1). Prenons l'exemple suivant et montrons que la ligne de niveau unitaire n'est ni convexe ni connexe.

$$P = \frac{1}{4}I_2; \quad \Delta = 2; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Omega = \frac{1}{2}; \quad \varphi(y) = \Omega \frac{1}{2}y(1 + \cos(10y)).$$

La ligne de niveau  $L_V(1)$  est représentée sur la figure 2.2, elle est issue de la coupe horizontale d'équation  $V(\cdot; \cdot) = 1$  illustrée sur la figure 2.1.

Considérons maintenant les points sur la droite verticale d'équation  $x_{(1)} = 1, 3$  (aussi représentée sur la figure 2.2. C'est-à-dire les points  $x = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ x_{(2)} \end{pmatrix}$ . Alors

$$V(x; \varphi(Cx)) = V\left(\begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix}; \varphi(x_{(1)})\right) = \frac{1}{4}x_{(1)}^2 + 2\varphi(x_{(1)})x_{(1)} + \frac{1}{4}x_{(2)}^2, \quad (2.4)$$

$$= 2,0343 + \frac{1}{4}x_{(2)}^2 > 1, \quad \forall x_{(2)} \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Cela implique qu'aucun point de la droite verticale d'équation  $x_{(1)} = 1, 3$  n'appartient à la ligne de niveau  $L_V(1)$ . Néanmoins

$$V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(1)\right) = 0,33 < 1, \quad V\left(\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(1,7)\right) = 0,83 < 1.$$

Les points  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartiennent bien à la ligne de niveau  $L_V(1)$ , mais aucun chemin inclus dans  $L_V(1)$  ne permet de les relier. L'ensemble  $L_V(1)$  est donc non connexe et non convexe.

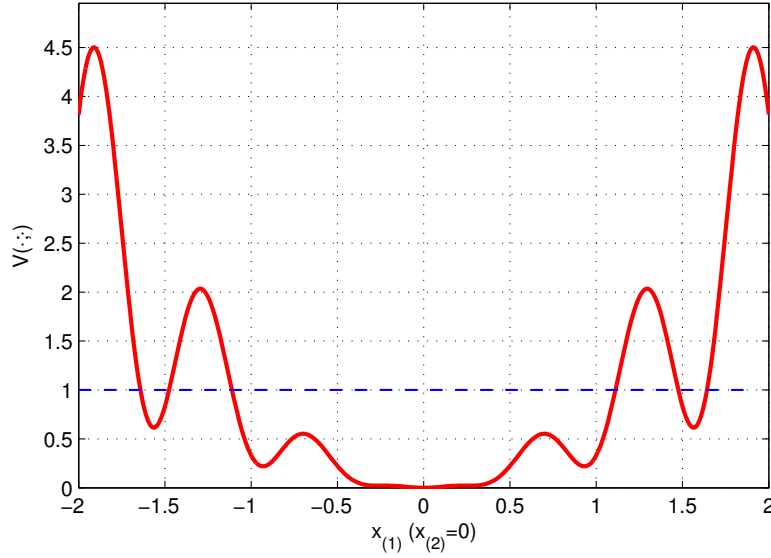


FIGURE 2.1 – Évolution de la fonction de Lyapunov en fonction de  $x_{(1)}$ , pour  $x_{(2)} = 0$  (ligne pleine rouge), et droite horizontale d'équation  $V(\cdot; \cdot) = 1$  (ligne "—").

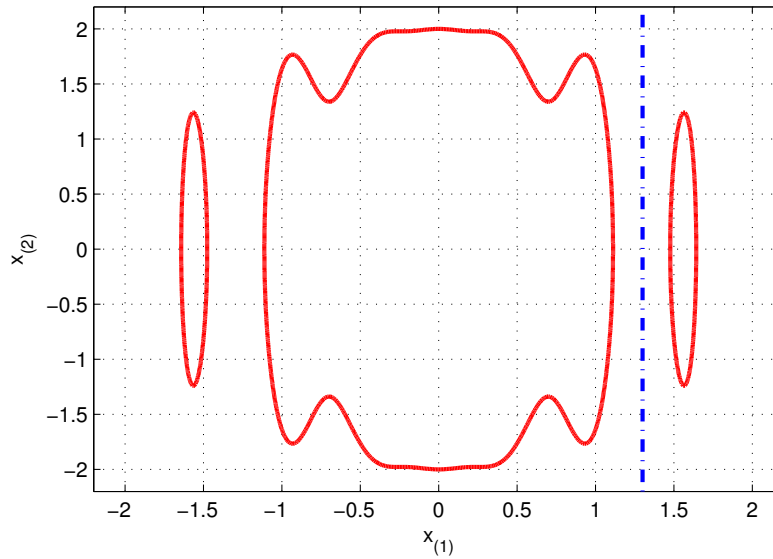


FIGURE 2.2 – Ligne de niveau non connexe  $L_V(V(x; \varphi(Cx)))$  (ligne pleine rouge) et droite verticale d'équation  $x_{(1)} = 1,3$  (ligne "·—").

Cette propriété de possible non-connexité s'explique par le fait que la trajectoire est une suite discrète d'états. Les lignes de niveau contiennent bien l'ensemble des échantillons futurs de la trajectoire. La contraction de ces lignes de niveau vers le singleton  $\{0\}$  illustre la stabilité asymptotique du système à temps discret. En temps continu, les lignes de niveau doivent également contenir la partie ultérieure de la trajectoire. Les sauts entre les différentes régions sont par

conséquent interdits. Il est donc nécessaire d'adapter cette méthode d'analyse pour le cas des systèmes à temps continu, notamment en vue de son application sur les systèmes de Lur'e à données échantillonnées où l'on souhaite garantir sur le système à temps continu des performances obtenues pour son discrétisé. De plus, il faut expliciter la transformation des ensembles non connexes. Nous choisissons dans ce chapitre de proposer des conditions suffisantes permettant la construction d'une suite d'ensembles bornés et connexes dépendant du temps qui converge vers le singleton origine et qui contient la partie ultérieure de la trajectoire à temps continu. Ces ensembles connexes sont construits à partir des lignes de niveau associées à la fonction de Lyapunov adaptée au problème à temps discret et de conditions assurant la proximité du modèle approché avec celui à temps continu.

La discrétisation exacte du système (2.1) et donnée par le modèle :

$$x[k+1] = x[k] + \int_{kT}^{(k+1)T} (Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau))) d\tau, \quad (2.6)$$

$$:= F_T^e(x[k]), \quad (2.7)$$

avec  $T$  la période d'échantillonnage,  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état du système discrétisé exact à l'instant  $kT$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . La présence de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  rend difficile, voir impossible, l'expression d'une solution analytique pour  $F_T^e(\cdot)$ . Pour utiliser les outils du temps discret, il est nécessaire de définir un modèle analytique approché  $F_T^a(\cdot)$ , sous la contrainte que cette approximation soit suffisamment *bonne*, dans le sens d'une distance précisée par la suite. Nous choisissons ici d'utiliser la discrétisation d'Euler explicite :

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d \varphi_d(C_d x[k]), \quad (2.8)$$

$$:= F_T^a(x[k]), \quad (2.9)$$

avec  $A_d = I_n + TA$ ,  $B_d = TB$ ,  $C_d = C$  et  $\varphi_d(\cdot) = \varphi(\cdot)$ , où  $\varphi_d(\cdot)$  vérifie les mêmes hypothèses que  $\varphi(\cdot)$ , avec  $\varphi_d(\cdot) \in [0_p, \Omega_d]$  et  $\Omega_d = \Omega$ .

**Remarque 2.1** Les paramètres du modèle discrétisé d'Euler (2.8) ont été choisis de manière à conserver la même condition de secteur que celle du système à temps continu (2.1). D'autres choix sont possibles comme  $B_d = B$  et  $\varphi_d(\cdot) = T\varphi(\cdot)$ , voir [LJD13b] pour l'étude avec ce choix de paramètres.

**Remarque 2.2** Dans les équations (2.6) et (2.8),  $x[k]$  est la condition initiale pour évaluer  $F_T^e(x[k])$  et  $F_T^a(x[k])$ . Dans le cadre de l'étude de la stabilité globale du système (2.1), il n'est pas nécessaire de définir différents  $x[k]$  pour la trajectoire exacte et approchée.

**Remarque 2.3** Par définition de la discrétisation d'Euler explicite, le système (2.8) est un système de Lur'e à temps discret. Il s'agit d'une propriété fondamentale dans notre étude qui n'est pas toujours vérifiée pour d'autres méthodes de discrétisation (Runge-Kutta, ...). Ici nous choisissons cette discrétisation dans l'ensemble de la thèse pour cette raison. Cela rejoint la problématique plus générique de la simulation numérique des systèmes non-linéaires que nous n'aborderons pas dans cette thèse.

Dans ce chapitre, le problème suivant est traité.

**Problème 2.1** Soit le système à temps continu (2.1) et le discrétisé d'Euler associé (2.8). Si les conditions du théorème 1.1 sont vérifiées pour le système (2.8), alors il existe une suite décroissante d'ensembles bornés, qui peuvent être non connexes et non convexes, convergeant vers le singleton origine et contenant tous les échantillons suivants de la trajectoire du système discrétisé (2.8). Comment construire une suite d'ensembles connexes possédant ces mêmes propriétés pour la trajectoire à temps continu du système (2.1), à partir de celle à temps discret ?

## 2.2 Construction d'une suite d'ensembles connexes

La séquence d'ensembles connexes décroissante au sens de l'inclusion et convergente vers le singleton origine, qui est le cœur du problème 2.1, est intimement liée à la stabilité asymptotique globale des systèmes non-linéaires discrétisés. La stabilité asymptotique des systèmes non-linéaires discrétisés est généralement traitée à l'aide de la méthodologie explicitée dans [LNA05] et que nous rappelons dans la Proposition 2.1. Elle est une version abrégée de la proposition 1.1 rappelée au chapitre précédent qui ne considère pas la problématique où la condition initiale peut exister entre deux instants d'échantillonnage. Cette méthodologie est fondée sur deux conditions : la stabilité des états échantillonnés et la non explosion de la trajectoire à temps continu entre deux échantillons consécutifs. Ceci est illustré sur la figure 2.3.

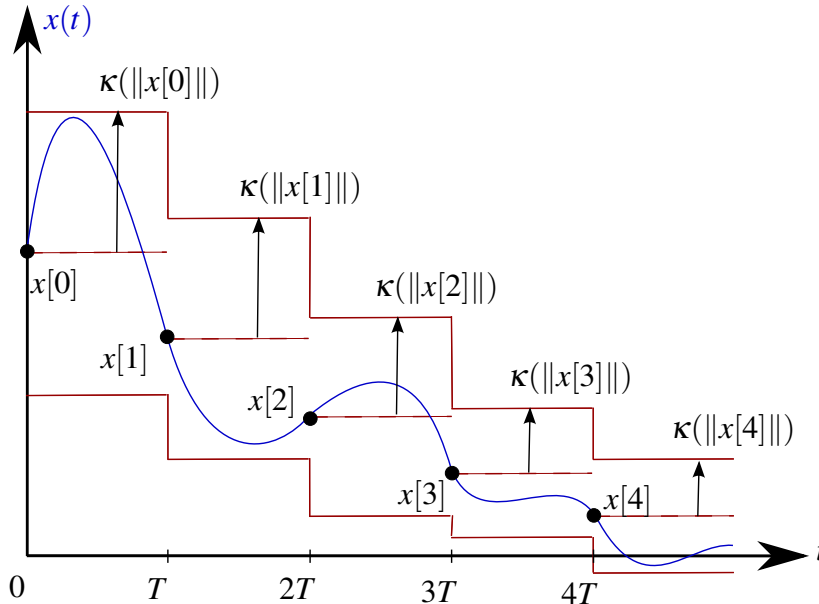


FIGURE 2.3 – Convergence du système continu, suivant les conditions de la Proposition 2.1.

**Proposition 2.1** Soit le système (2.1) et son modèle discrétisé exact (2.6), la période d'échantillonnage  $T > 0$ , et  $x[k] = x(kT) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

— S'il existe  $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$  tel que les trajectoires du système discrétisé exact (2.6) vérifient :

$$\|x[k]\| \leq \tilde{\beta}(\|x_0\|, kT), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_0 = x[k=0], \quad (2.10)$$

— S'il existe  $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$  tel que la solution du système en temps continu (2.1) vérifie :

$$\|x(t) - x[k]\| \leq \kappa(\|x[k]\|), \quad \forall t \in [kT; (k+1)T], \quad (2.11)$$

Alors il existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que les trajectoires du système à temps continu vérifient :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.12)$$

**Remarque 2.4** Dans la version originale [LNA05], la condition (2.11) est formulée tel que  $\|x(t)\| \leq \kappa_a(\|x[k]\|)$ ,  $\forall t \in [kT; (k+1)T]$ , avec  $\kappa_a \in \mathcal{K}_\infty$ . S'il existe une fonction  $\kappa(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$  vérifiant l'inégalité (2.11) alors, la fonction  $\kappa_a(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$  vérifiant la contrainte originale présentée dans [LNA05] existe. Il suffit de poser  $\kappa_a(r) = \kappa(r) + r$ ,  $\forall r \in \mathbb{R}$ , avec  $\kappa(\cdot)$  une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  vérifiant l'inégalité (2.11). La fonction  $\kappa_a(\cdot)$  est alors strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  tel que  $\kappa_a(0) = 0$  et  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \kappa_a(r) = r$ . Donc  $\kappa_a(\cdot)$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  et l'inégalité

$$\|x(t)\| \leq \|x(t) - x[k]\| + \|x[k]\| \leq \kappa(\|x[k]\|) + \|x[k]\| = \kappa_a(\|x[k]\|), \quad (2.13)$$

est satisfaite.

Pour répondre au Problème 2.1, nous allons utiliser la méthodologie de la Proposition 2.1 : la fonction de Lyapunov  $V(\cdot; \cdot)$ , à lignes de niveau non nécessairement connexes sera utilisée pour démontrer la stabilité des échantillons (approchés et/ou exacts), et le fait que la trajectoire reste bornée entre deux échantillons consécutifs nous permettra de construire, sur ces lignes de niveau, de nouveaux ensembles connexes. La suite d'ensembles connexes en résultant devra être bornée, décroissante au sens de l'inclusion, converger vers le singleton origine et contenir le futur de la trajectoire à temps continu.

De plus, comme nous l'avons vu précédemment, nous ne pouvons pas travailler sur le modèle discrétisé exact. L'analyse de la stabilité s'effectue dans un premier temps sur le système discrétisé approché (2.8) à l'aide du résultat [GJD12b, Theorem 2]. Dans un second temps, des contraintes sur la proximité des modèles discrétisés exacts et approchés doivent être utilisées.

Pour plus de clarté, nous choisissons de séparer en deux parties la réponse au problème 2.1. La première consiste à introduire les outils nécessaires pour vérifier les hypothèses de la Proposition 2.1 : évaluation de  $\kappa(\cdot)$  et de la distance entre  $F_T^e(\cdot)$  et  $F_T^a(\cdot)$ . La seconde partie a pour objectif de formaliser une solution sous forme LMI au problème de stabilité asymptotique globale des systèmes continu et discret, afin de construire les ensembles connexes solution du problème 2.1.

### 2.2.1 Propriétés du système de Lur'e

Nous allons dans un premier temps démontrer que la condition (2.11) est toujours valide pour le système de Lur'e (2.1). La trajectoire de ce système entre deux instants d'échantillonnage est

$$x(t) = x[k] + \int_{kT}^t (Ax(\tau) + B\phi(Cx(\tau))) d\tau, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [kT; (k+1)T]. \quad (2.14)$$

Soit le problème d'optimisation

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}} \mu, \quad (2.15)$$

sous la contrainte

$$\begin{bmatrix} \mu I_n & \star \\ A + B\Gamma_i \Omega C & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \{1; \dots; 2^p\}, \quad (2.16)$$

où  $\Gamma_i$  sont les sommets de  $\mathcal{D}$  qui désigne l'ensemble des matrices diagonales dans  $\mathbb{R}^{p \times p}$  où chaque élément de la diagonale appartient à l'intervalle unité.

Le théorème 2.1 explicite la fonction  $\kappa(\cdot)$  de la proposition 2.1.

**Théorème 2.1**  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [kT; (k+1)T]$ , il existe une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  paramétrée en  $\|x[k]\|$  bornant l'évolution de  $x(t)$  :

$$\|x(t) - x[k]\| \leq (e^{MT} - 1)\|x[k]\|, \quad (2.17)$$

où  $M = \sqrt{\mu}$  avec  $\mu$  solution du problème d'optimisation (2.15).

**Preuve du théorème 2.1.** La preuve est organisée en deux étapes. La première a pour objectif d'évaluer la constante  $M$  et la seconde de justifier l'existence d'une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  de l'équation (2.11).

Partie 1 :

$$\|Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau))\| \leq \sup_{\Gamma \in \mathcal{D}} \|A + B\Gamma \Omega C\| \|x(\tau)\| = M \|x(\tau)\|, \quad (2.18)$$

avec  $\mathcal{D}$  qui désigne l'ensemble des matrices diagonales dans  $\mathbb{R}^{p \times p}$  où chaque élément de la diagonale appartient à l'intervalle unité. Nous avons alors  $M = \sqrt{\mu}$  avec  $\mu$  la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}} \mu, \quad (2.19)$$

sous la contrainte,

$$(A + B\Gamma \Omega C)'(A + B\Gamma \Omega C) < \mu I_n, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{D}. \quad (2.20)$$

En utilisant un complément de Schur [BGFB94], l'inégalité (2.20) peut se mettre sous la forme d'une LMI en la matrice  $\Gamma$ . En notant que

$$A + B\Gamma \Omega C = \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i N_i, \text{ avec } \begin{cases} \lambda_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i = 1, \\ N_i = A + B\Gamma_i \Omega C, \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\Gamma_i = \text{diag}(\gamma_j^i)$  avec  $\gamma_j^i = 1$  ou  $0$ ,  $j \in \{1; \dots; p\}$ . L'inégalité (2.20) peut-être remplacée par l'inégalité (2.16).

Partie 2 : En utilisant successivement, l'équation (2.14), l'inégalité triangulaire et l'équation (2.18) :

$$\begin{aligned}
 \|x(t) - x[k]\| &= \left\| \int_{kT}^t Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau)) d\tau \right\|, \\
 &\leq \int_{kT}^t \|Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau))\| d\tau, \\
 &\leq \int_{kT}^t M\|x(\tau)\| d\tau, \leq M \int_{kT}^t \|x(\tau) - x[k] + x[k]\| d\tau, \\
 &\leq M \left( \int_{kT}^t \|x(\tau) - x[k]\| d\tau + (t - kT)\|x[k]\| \right).
 \end{aligned}$$

En remarquant que le terme  $\|x(\cdot) - x[k]\|$  est présent dans les deux parties de l'inégalité et que  $x(t)$  est continu en  $t$  sur l'intervalle  $[kT; (k+1)T]$  donc  $\|x(t) - x[k]\|$  et  $(t - kT)\|x[k]\|$  sont positifs et continus sur cet intervalle. Nous pouvons utiliser le lemme de Gronwall [Chi06] comme suit :

$$\begin{aligned}
 \|x(t) - x[k]\| &\leq M(t - kT)\|x[k]\| + \int_{kT}^t M^2(\tau - kT)\|x[k]\| e^{\int_{kT}^t M ds} d\tau, \\
 &\leq M(t - kT)\|x[k]\| + \int_{kT}^t M^2(\tau - kT)\|x[k]\| e^{M(t-s)} d\tau, \\
 &\leq M(t - kT)\|x[k]\| + \left[ -M\|x[k]\|(\tau - kT)e^{M(t-\tau)} \right]_{kT}^t + \int_{kT}^t M\|x[k]\| e^{M(t-\tau)} d\tau, \\
 &\leq (e^{M(t-kT)} - 1)\|x[k]\| \leq (e^{MT} - 1)\|x[k]\| = \alpha(\|x[k]\|),
 \end{aligned}$$

où  $\alpha(\cdot)$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$ . L'équation (2.17) est vérifiée  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [kT; (k+1)T]$ .  $\square$

Le théorème 2.1 nous permet d'affirmer que les trajectoires (2.14) du système de Lur'e (2.1) n'explosent pas en temps fini, tel que la condition (2.11) soit vérifiée.

Pour vérifier la seconde condition de la proposition 2.1, qui consiste à analyser la stabilité du système discrétisé exact, nous utiliserons comme précisé précédemment une discrétisation approchée d'Euler (2.8) qui permet l'obtention d'un modèle analytique de type Lur'e à temps discret exploitable avec les outils de la littérature [GJD12b]. Or pour garantir la stabilité du système discrétisé exact via celle du système discrétisé d'Euler, il est nécessaire de quantifier la distance séparant ces deux modèles. Le théorème 2.2 détermine un majorant à cette fin.

**Théorème 2.2** Soit le système de Lur'e (2.1), son discrétisé exact  $F_T^e(x[k])$  reste proche du discrétisé approché d'Euler  $F_T^a(x[k])$  tel que :

$$\|F_T^e(x[k]) - F_T^a(x[k])\| \leq \rho(T)\|x[k]\|, \quad \forall x[k] \in \mathbb{R}^n, \quad (2.22)$$

avec  $\rho(T) = \left( \|A\| \left( \frac{e^{MT}-1}{M} - T \right) + \|B\|\|\Omega C\| \left( \left( \frac{e^{MT}-1}{M} \right) + T \right) \right)$  une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

**Preuve du théorème 2.2.** En utilisant l'inégalité triangulaire suivie du théorème 2.17, nous majorons l'écart entre le modèle discrétisé exact et approché :

$$\begin{aligned}
 \|F_T^e(x[k]) - F_T^a(x[k])\| &\leq \int_{kT}^{(k+1)T} \|A\| \|x(\tau) - x[k]\| d\tau + \int_{kT}^{(k+1)T} \|B\| \|\varphi(Cx(\tau)) - \varphi(Cx[k])\| d\tau, \\
 &\leq \int_{kT}^{(k+1)T} \|A\| \left( e^{M(\tau-kT)} - 1 \right) \|x[k]\| d\tau \\
 &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} \|B\| \|\Omega C\| (\|x(\tau)\| + \|x[k]\|) d\tau, \\
 &\leq \|A\| \left( \frac{e^{MT} - 1}{M} - T \right) \|x[k]\|, \\
 &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} \|B\| \|\Omega C\| \left( e^{M(\tau-kT)} + 1 \right) \|x[k]\| d\tau, \\
 &\leq \left( \|A\| \left( \frac{e^{MT} - 1}{M} - T \right) + \|B\| \|\Omega C\| \left( \left( \frac{e^{MT} - 1}{M} \right) + T \right) \right) \|x[k]\|, \\
 &= \rho(T) \|x[k]\|, \quad \forall k \in \mathbb{N},
 \end{aligned}$$

où  $\rho(T)$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

□

Connaissant la majoration entre nos deux modèles, nous pouvons désormais nous atteler au problème d'analyse de stabilité, à proprement parler, du modèle discrétisé approché dans le but de garantir la condition (2.10) de la proposition 2.1 sachant que la condition (2.10) est toujours vérifiée d'après le théorème 2.1.

## 2.2.2 Analyse de stabilité

L'objectif de cette sous section est d'établir les conditions pour la stabilité du système discrétisé exact (2.6), sous l'hypothèse que le modèle discrétisé approché est GUAS, afin de déterminer la fonction de Lyapunov définissant les lignes de niveau potentiellement non connexes et non convexes. Il sera ensuite possible de conclure sur la stabilité asymptotique globale du système à temps continu et d'élaborer la suite d'ensembles illustrant cette stabilité.

La condition de stabilité du système discrétisé approché est donnée par :

$$V(F_T^a(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^a(x[k]))) - V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])) < 0, \quad \forall x[k] \neq 0, \quad (2.23)$$

où  $V(\cdot; \cdot)$  est la fonction de Lyapunov (2.3). L'objectif est de prouver la stabilité du système discrétisé exact :

$$V(F_T^e(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^e(x[k]))) - V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])) < 0, \quad \forall x[k] \neq 0. \quad (2.24)$$

Même si les modèles approché et exact sont suffisamment proches, la valeur de la fonction  $V(F_T^e(\cdot); \varphi_d(C_d F_T^e(\cdot)))$  peut-être supérieure ou inférieure à celle de  $V(F_T^a(\cdot); \varphi_d(C_d F_T^a(\cdot)))$ . Pour évaluer la distance entre ces deux fonctions, nous introduisons la fonction  $f_\alpha(\cdot)$ , telle que  $f_\alpha(0) = 0$  et

$$V(F_T^e(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^e(x[k]))) - V(F_T^a(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^a(x[k]))) \leq f_\alpha(x[k]). \quad (2.25)$$

Cette hypothèse raisonnable implique que pour garantir la stabilité du système discrétisé exact, la condition de l'équation (2.23) est insuffisante. Il est nécessaire de supposer que la fonction de Lyapunov du modèle discrétisé approché décroît suffisamment rapidement pour compenser l'écart  $f_\alpha(\cdot)$  :

$$V(F_T^a(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^a(x[k]))) - V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])) \leq -f_\varepsilon(x[k]), \quad (2.26)$$

où  $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$  tel que  $f_\varepsilon(x[k]) > 0$ ,  $\forall x[k] > 0$  et  $f_\varepsilon(0) = 0$ .

**Théorème 2.3** Si les fonctions  $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$  et  $f_\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  tel que  $f_\varepsilon(0_{n \times 1}) = 0$  et  $f_\alpha(0_{n \times 1}) = 0$  vérifient les équations (2.25) et (2.26) tel que :

$$f_\alpha(x[k]) < f_\varepsilon(x[k]), \quad \forall x[k] \neq 0, \quad (2.27)$$

Alors le système discrétisé exact (2.6) est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve du théorème 2.3.** La preuve vient directement de l'inégalité suivante.

$$\begin{aligned} & V(F_T^e(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^e(x[k]))) - V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])) \\ &= V(F_T^e(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^e(x[k]))) - V(F_T^a(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^a(x[k]))) \\ &\quad + V(F_T^a(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^a(x[k]))) - V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])), \\ &\leq f_\alpha(x[k]) - f_\varepsilon(x[k]) < 0, \quad \forall x[k] \neq 0. \end{aligned}$$

□

Dans le but de simplifier la recherche des fonctions  $f_\alpha(\cdot)$  et  $f_\varepsilon(\cdot)$ , nous les restreignons à une classe particulière de fonctions qui peut se mettre aisément sous forme LMI. Nous supposons donc que  $f_\alpha(x[k]) = w'[k]Q^\alpha w[k]$  et  $f_\varepsilon(x[k]) = w'[k]Q^\varepsilon w[k]$ , où  $Q^\alpha$  et  $Q^\varepsilon \in \mathbb{R}^{(n+2p) \times (n+2p)}$  sont des matrices symétriques définies positives avec le vecteur augmenté  $w[k]$  défini par

$$w'[k] = (x'[k] \quad \varphi_d'(C_d x[k]) \quad \varphi_d'(C_d F_T^a(x[k])))' \in \mathbb{R}^{n+2p}. \quad (2.28)$$

En tenant compte de ce choix particulier pour les fonctions  $f_\alpha(\cdot)$  et  $f_\varepsilon(\cdot)$ , le théorème 2.4 propose des conditions suffisantes de stabilité, sous la forme de contraintes LMI, pour le système (2.6), nous permettant de conclure directement sur celle du système (2.1) avec la proposition 2.1.

**Théorème 2.4** Soit le système (2.1) et son discrétisé d'Euler (2.8), s'il existe les matrices symétriques définies positives  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q^\alpha$  et  $Q^\varepsilon \in \mathbb{R}^{(n+2p) \times (n+2p)}$ , une matrice diagonale semi-définie positive  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , des matrices diagonales définies positives  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $S_1$  et  $S_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , des matrices  $G_1$  et  $G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et deux scalaires positifs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tel que :

$$\mathcal{M} + \text{diag}(0_n; Q^\varepsilon) < 0, \quad (2.29)$$

avec  $\mathcal{M}$  défini à l'équation (1.13)

$$\begin{bmatrix} P - G'_2 - G_2 & \star & \star & \star & \star & \star \\ G_2 & \Sigma_1 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \Sigma_2 & \Sigma_4 & \star & \star & \star \\ 0 & \Sigma_3 A_d & \Sigma_3 B_d & -2W_2 & \star & \star \\ 0 & \Sigma_5 & 0 & 0 & -2W_3 & \star \\ G_2 & -\tau_2(I_n - A_d) & \tau_2 B_d & 0 & \Sigma'_5 & -(\tau_1 + \tau_2)I_n \end{bmatrix} < \text{diag}(0_n; Q^\alpha; 0_{p+n}), \quad (2.30)$$

avec  $\Sigma_1 = -A'_d P A_d + \tau_1 (M\gamma(T))^2 I_n + \tau_2 (\rho^2 I_n - (I_n - A_d)'(I_n - A_d))$ ,  $\Sigma_2 = -B'_d P A_d + W_1 \Omega_d C_d + \tau_2 B'_d (I_n - A_d)$ ,  $\Sigma_3 = (W_2 - \Delta) \Omega_d C_d$ ,  $\Sigma_4 = -2W_1 - B'_d P B_d - \tau_2 B'_d B_d$ ,  $\Sigma_5 = (W_3 + \Delta) \Omega_d C_d$  et

$$Q^\varepsilon > Q^\alpha, \quad (2.31)$$

alors l'origine du système (2.1) et de son discrétisé d'Euler (2.8) est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve du théorème 2.4.** En pré-multipliant l'inégalité (2.29) par  $w'[k]$  qui est défini à l'équation (2.28) et en post-multipliant par sa transposée, nous déduisons l'inégalité (2.26), en suivant la preuve du théorème 1.1 disponible dans [GJD12b, théorème 2], avec  $f_\varepsilon(x[k]) = w'[k]Q^\varepsilon w[k]$ .

Si l'inégalité (2.30) est vérifiée, alors  $P - G'_2 - G_2 < 0$  et  $P > 0$ . Donc, la matrice  $G_2$  est de rang plein et l'inégalité suivante est vérifiée  $-G'_2 P^{-1} G_2 \leq P - G'_2 - G_2 < 0$  (voir [DB01]), ce qui mène à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} -G'_2 P^{-1} G_2 & \star & \star & \star & \star & \star \\ G_2 & \Sigma_1 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \Sigma_2 & \Sigma_4 & \star & \star & \star \\ 0 & \Sigma_3 A_d & \Sigma_3 B_d & -2W_2 & \star & \star \\ 0 & \Sigma_5 & 0 & 0 & -2W_3 & \star \\ G_2 & -\tau_2(I_n - A_d) & \tau_2 B_d & 0 & \Sigma'_5 & -(\tau_1 + \tau_2)I_n \end{bmatrix} < \text{diag}(0_n; Q^\alpha; 0_{p+n}). \quad (2.32)$$

En effectuant le changement de base  $\text{diag}(G_2^{-1}; I_{2n+3p})$  suivi d'un complément de Schur [HJ94] par rapport au premier bloc. Nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{3p \times n} \\ I_n \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{3p \times n} \\ I_n \end{bmatrix}' + \Theta < \text{diag}(0_n; Q^\alpha; 0_{p+n}), \quad (2.33)$$

avec

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \star & \star & \star & \star \\ \Sigma_2 & \Sigma_4 & \star & \star & \star \\ \Sigma_3 A_d & \Sigma_3 B_d & -2W_2 & \star & \star \\ \Sigma_5 & 0 & 0 & -2W_3 & \star \\ -\tau_2(I_n - A_d) & \tau_2 B_d & 0 & \Sigma'_5 & -(\tau_1 + \tau_2)I_n \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

En pré-multipliant l'inégalité (2.33) par  $z'[k]$ , défini comme suit

$$z'[k] = (w'[k] \quad \phi'_d(C_d F_T^e(x[k])) \quad d'[k])' \in \mathbb{R}^{2n+3p}, \quad (2.35)$$

avec  $d[k] = F_T^e(x[k]) - x[k]$  et  $w_k$  défini à l'équation (2.28), et en post-multipliant par sa transposée, nous en déduisons l'inégalité

$$V(F_T^e(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^e(x[k]))) - V(F_T^a(x[k]); \varphi_d(C_d F_T^a(x[k]))) \quad (2.36)$$

$$\leq w'[k] Q^\alpha w[k] + 2\varphi'_d(C_d x[k]) W_1(\varphi_d(C_d x[k]) - \Omega_d C_d x[k]) \quad (2.37)$$

$$+ 2\varphi'_d(C_d F_T^e(x[k])) W_3(\varphi_d(C_d F_T^e(x[k])) - \Omega_d C_d F_T^e(x[k])) \quad (2.38)$$

$$+ 2\varphi'_d(C_d F_T^a(x[k])) W_2(\varphi_d(C_d F_T^a(x[k])) - \Omega_d C_d F_T^a(x[k])) \quad (2.39)$$

$$+ \tau_2 ((F_T^e(x[k]) - F_T^a(x[k]))' (F_T^e(x[k]) - F_T^a(x[k])) - \rho^2 x'[k] x[k]) \quad (2.40)$$

$$+ \tau_1 (d'[k] d[k] - (M\gamma(T))^2 x'[k] x[k]), \quad \forall x[k] \in \mathbb{R}^n. \quad (2.41)$$

En tenant compte du fait que la non-linéarité évaluée en  $F_T^e(x[k])$ ,  $F_T^a(x[k])$  et en  $x_k$  vérifie la condition de secteur (2.2), ainsi qu'en utilisant la  $S$ -procédure [Sch97, IMF00] sur les inégalités (2.17) et (2.22), l'inégalité (2.36) implique l'inégalité (2.25) avec  $f_\alpha(x[k]) = w'[k] Q^\alpha w[k]$ .

Pour conclure, si la contrainte LMI (2.31) est vérifiée, alors en appliquant le théorème 2.3, nous déduisons que le système discrétisé exact (2.6) est globalement asymptotiquement stable. Avec la proposition 2.1 et le théorème 2.1, la stabilité du modèle discrétisé exact (2.6) nous permet de déduire que le système de Lur'e (2.1) est globalement asymptotiquement stable.  $\square$

**Remarque 2.5** Le théorème 2.4 ne suppose pas que la non-linéarité soit Lipschitzienne, même si cette hypothèse est nécessaire pour garantir l'existence et l'unicité de la solution. Une condition de continuité est toutefois nécessaire pour utiliser le lemme de Gronwall [Chi06] pour obtenir que le théorème 2.1 soit vérifié. L'hypothèse que la non-linéarité vérifie une condition de secteur conique est suffisante dans le reste de la démonstration.

A ce stade, nous avons mis en évidence via le théorème 2.4 des conditions suffisantes de stabilité. Si ces conditions sont vérifiées, elles nous permettront de construire directement la suite d'ensembles connexes répondant au problème 2.1. Pour clarifier le lien entre ces ensembles connexes et le théorème 2.4, nous définissons deux domaines :

**Définition 2.1** Le domaine où vit la trajectoire en temps continu entre deux échantillons  $x[k]$  et  $x[k+1]$  est défini par :

$$\mathcal{B}(x[k]) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \|\tilde{x} - x[k]\| \leq \kappa(\|x[k]\|)\}. \quad (2.42)$$

**Définition 2.2** Le domaine où vivent toutes les trajectoires à temps continu dont la condition initiale  $x[k]$  appartient à une ligne de niveau  $L_V(\cdot)$  est défini par :

$$\mathcal{A}(\gamma) = \bigcup_{z \in L_V(\gamma)} \mathcal{B}(z). \quad (2.43)$$

**Proposition 2.2** Soit la période d'échantillonnage  $T > 0$  et  $L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  la ligne de niveau déterminée avec le théorème 2.4. Le domaine  $\mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  vérifie les propriétés suivantes :

$$L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k]))) \subset \mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k]))), \quad (2.44)$$

$$\mathcal{A}(\cdot) \text{ est bornée, car } \kappa(\cdot) \text{ est radialement non bornée,} \quad (2.45)$$

$$x(t) \in \mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k]))), \quad \forall t \geq kT, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{A}(V(x[k+1]; \varphi_d(C_d x[k+1]))) \subset \mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k]))), \quad (2.47)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k]))) = \{0\}. \quad (2.48)$$

Ainsi la séquence  $\{\mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une solution du Problème 2.1.

Les différents points de la proposition 2.2 sont aisément démontrables. Une illustration de certains points est proposée figure 2.4.

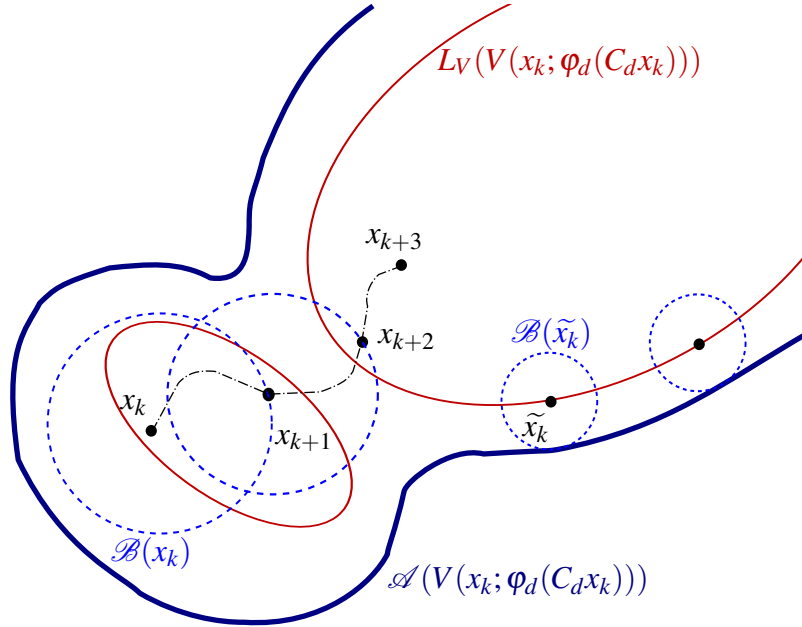


FIGURE 2.4 – Exemple de trajectoire, où l'échantillon  $x[k]$  appartient à la ligne de niveau  $L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  (ligne pleine et fine). La trajectoire en temps continu (ligne en point et tiret) est contenue dans le domaine  $\mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  (ligne pleine et épaisse) construite par la réunion des  $\mathcal{B}(x[k])$  (ligne en tiret).

Le domaine  $\mathcal{A}(\cdot)$  est l'union des boules dont les centres sont l'ensemble des points de  $L_V(\cdot)$ , nous en déduisons aisément l'équation (2.44).  $L_V(\cdot)$  étant borné et les boules de rayon  $\kappa(\cdot)$  formant  $\mathcal{A}(\cdot)$  le sont également, nous en déduisons (2.45). Une des propriétés de la fonction de Lyapunov impose l'inclusion  $L_V(V(x[k+1]; \varphi_d(C_d x[k+1]))) \subset L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$ . Or  $\kappa(\cdot)$  est de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , nous en déduisons directement l'équation (2.47) qui explicite la contraction des ensembles  $\mathcal{A}(\cdot)$ . Sur l'intervalle  $[kT; (k+1)T]$ , avec  $T$  la période d'échantillonnage, la trajectoire à temps continu  $x(t)$  appartient à la boule  $\mathcal{B}(x[k])$ . Par définition

$\mathcal{A}(\cdot)$  est la réunion de ces boules, donc  $x(t)$  appartient au domaine  $\mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$ . Avec l'équation (2.47), nous prouvons l'équation (2.46), c'est-à-dire que le domaine  $\mathcal{A}(\cdot)$  contient toute la partie future de la trajectoire à temps continu. Ces ensembles se contractent, et comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k]))) = \{0\}$  ce qui traduit la stabilité du système discret et  $\lim_{x[k] \rightarrow 0} \mathcal{B}(x[k]) = \{0\}$ , il vient que le système en temps continu est stable : la suite d'ensembles  $\mathcal{A}(\cdot)$  tend vers le singleton  $\{0\}$ , voir l'équation (2.48). Le théorème 2.4 devra nécessairement faire apparaître des domaines  $\mathcal{A}(\cdot)$  connexes suffisamment grands pour joindre les différentes parties des lignes de niveau  $L_V(\cdot)$ . Pour cela la valeur de  $T$  doit être prise en compte. Plus exactement, cette méthode a une incidence sur le choix de la période d'échantillonnage  $T$ . Pour que les contraintes de type LMI soient faisables, il faut au moins que les modèles approchés et exacts soient proches, ce qui implique que  $T$  ne soit pas trop grand, à cause de la croissance de la fonction  $\rho(\cdot)$ . D'un autre côté, l'apparition de sous-ensembles non connexes n'est possible que si  $T$  n'est pas trop petit, à cause de la croissance de la fonction  $\kappa(\cdot)$ . Pour plus de détails sur ce dernier point, voir les cas particuliers représentés sur les figures 2.5 et 2.6 : l'échantillon calculé par la méthode d'Euler "saute" dans la direction imposée par le modèle ( $x[k+1] = f(x[k]) = A_d x[k] + B_d \varphi_d(C_d x[k])$ ), la longueur du "saut" dépend de  $T$ , si  $T$  est trop petit, il est impossible de passer d'un sous-ensemble à l'autre pour la trajectoire à temps continu. Ainsi la valeur de  $T$  appartient qualitativement à un intervalle borné.

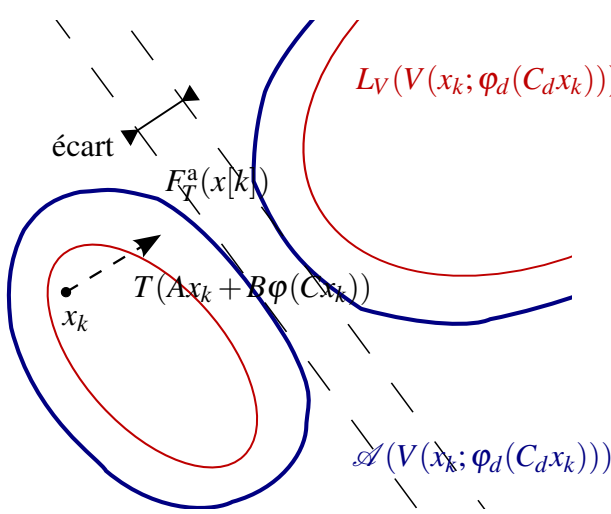


FIGURE 2.5 –  $T$  trop petit pour permettre l'apparition des ensembles non connexes.

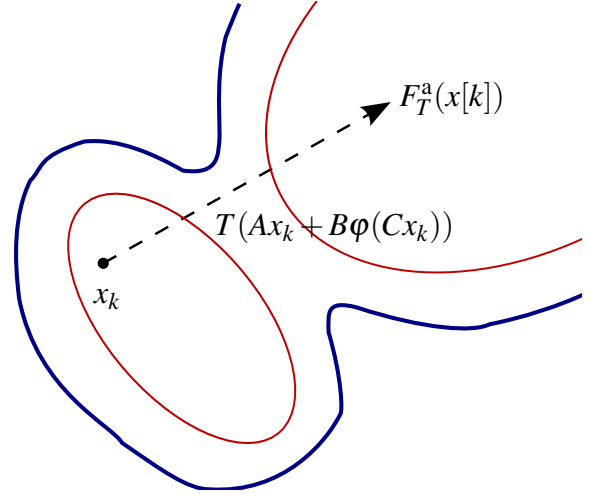


FIGURE 2.6 –  $T$  suffisamment important pour permettre le passage entre deux ensembles de la ligne de niveau non connexe.

Dans la pratique, le choix de  $T$  pour faire apparaître ces ensembles est délicat, le théorème 2.4 donnant des résultats où le terme croisé de la fonction de Lyapunov (2.3) est trop faible pour que l'écart entre les deux ellipses bornant la ligne de niveau soit suffisamment important pour faire apparaître des ensembles lignes de niveau à temps discret non connexes.

Cette difficulté sera levée dans l'exemple 2.1 améliorant la borne  $\rho(T)$  calculée au théorème 2.2. En effet, dû au conservatisme de l'inégalité triangulaire et vu que nous travaillons

sur tout le domaine d'état  $\mathbb{R}^n$  et pour toute non-linéarité respectant la condition de secteur, la borne  $\rho(T)\|x[k]\|$  dans l'inégalité (2.22) est relativement grande pour permettre l'apparition des lignes de niveau non connexes. Une amélioration de la borne  $\rho(T)$  peut-être évaluée par simulation dans un voisinage limité  $\mathcal{N}$ , de l'origine, considérant toutes les trajectoires possibles :  $\rho(T; \mathcal{N})$ .  $F_T^e(\cdot)$  peut-être évalué par une méthode de sur-échantillonnage de l'approximation d'Euler. L'exemple 2.2 présentera un système dont l'analyse de stabilité mène à une solution fonction de Lyapunov dont les lignes de niveau sont connexes.

### Exemple 2.1

Cet exemple numérique est présenté pour illustrer la construction de ces suites d'ensembles connexes. Nous considérons le système (2.1) où

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0,96 \\ -1,92 \end{bmatrix}, \varphi(y(t)) = \frac{\Omega y(t)}{2} (1 + \cos(1,6y(t) - 0,155y^2(t))),$$

$$\Omega = 1,3, x_0 = (5,8 \quad 6)' , C = [-0,75 \quad -1,425], T = 0,07.$$

La distance maximale entre  $F_T^e(\cdot)$  et  $F_T^c(\cdot)$  est obtenue par simulation sur la grille définie par  $\mathcal{N} = \{-19; \dots; 19\}^2$  avec un pas de 0.5 :  $\rho(T, \mathcal{N}) = 0.23$ . Avec le théorème 2.4, nous définissons la fonction de Lyapunov avec les valeurs de paramètre suivant :

$$P = \begin{bmatrix} 7,7193 & 0,6458 \\ 0,6458 & 9,1032 \end{bmatrix}, \Delta = 0,2214. \quad (2.49)$$

La figure 2.7 illustre, en simulation, une trajectoire avec la condition initiale  $x_0$ , la ligne de niveau  $L_V(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$  (ligne pleine et fine) et le nouveau domaine  $\mathcal{A}(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$  (ligne pleine et épaisse). La trajectoire  $x(t)$  est contenue dans l'ensemble  $\mathcal{A}(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$  et elle peut sortir de la ligne de niveau  $L_V(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$  entre deux échantillons comme l'illustre la figure 2.7. Cependant, tous les échantillons sont contenus dans la ligne de niveau  $L_V(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$ .

La figure 2.8 illustre la contraction des différents ensembles  $L_V(\cdot)$  et  $\mathcal{A}(\cdot)$ .  $L_V(\cdot)$  est une région bornée qui peut être connexe ou non. En comparaison,  $\mathcal{A}(\cdot)$  est toujours un ensemble borné et connexe mais pas nécessairement convexe. La contraction de  $\mathcal{A}(\cdot)$  vers l'origine garantie la stabilité du système à temps continu. L'ensemble des propriétés de la proposition 2.2 est donc illustré dans cet exemple.

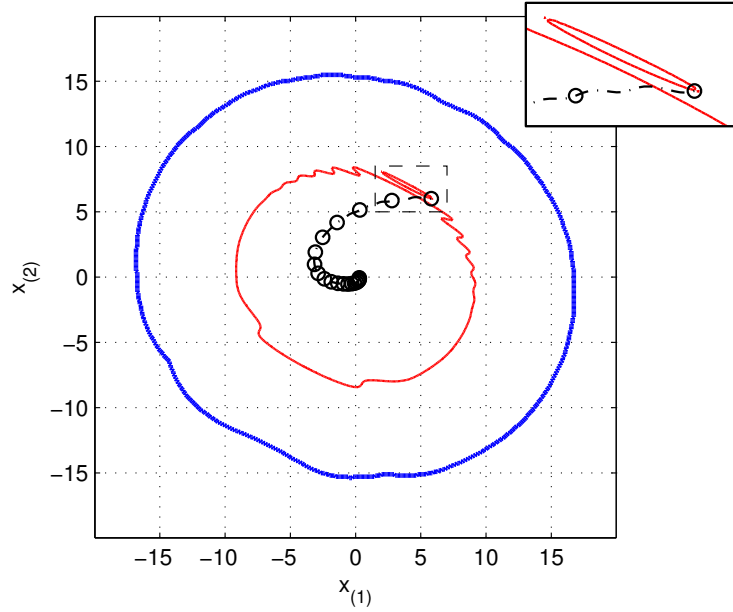


FIGURE 2.7 – Ligne de niveau non connexe  $L_V(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$  obtenue avec le théorème 2.4 (ligne pleine et fine) et la région où vivent les trajectoires du système à temps continu entre deux échantillons (ligne pleine et épaisse). Un exemple de trajectoire à temps continu (tirets), où les cercles représentent les échantillons de la trajectoire discrétisée exacte.

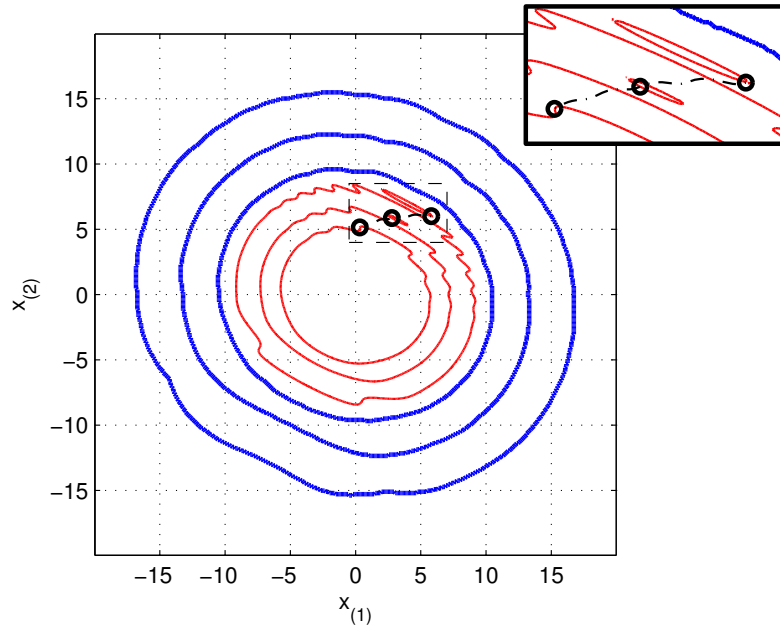


FIGURE 2.8 – Contraction des différents ensembles  $\mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  (ligne pleine et épaisse) et  $L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  (ligne pleine et fine) vers le singleton  $\{0\}$ . Les échantillons de la trajectoire (cercle) sont également dessinés.

### Exemple 2.2

La nature non connexe des lignes de niveau n'est pas toujours vérifiée et dépend des non-linéarités étudiées, ainsi que de la période d'échantillonnage considérée. C'est ainsi le cas pour l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0,4 \\ -0,8 \end{bmatrix}, \varphi(y) = \frac{\Omega y}{2} (1 + \cos(6y + 0,01y^2)),$$

$$\Omega = 1,3, x_0 = (3,95 \ 2)' , C = [-1,8 \ -1,2], T = 0,01.$$

La distance maximale entre  $F_T^c(\cdot)$  et  $F_T^c(\cdot)$  est obtenue par simulation sur la grille définie par  $\mathcal{N} = \{-7; \dots; 7\}^2$  avec un pas de 0.2 :  $\rho(T, \mathcal{N}) = 0,016$ . Avec le théorème 2.4, nous définissons la fonction de Lyapunov avec les valeurs de paramètre suivant :

$$P = \begin{bmatrix} 124,7208 & -2,3024 \\ -2,3024 & 101,0029 \end{bmatrix}, \Delta = 0,1350. \quad (2.50)$$

L'ensemble des propriétés de la proposition 2.2 reste valide dans cet exemple, seule la visualisation des lignes de niveau non connexes et non convexes n'apparaît pas sur les figure 2.9 et 2.10. Cela est lié à la prépondérance du terme quadratique sur le terme croisé dans la fonction de Lyapunov (2.3) pour les paramètres obtenus.

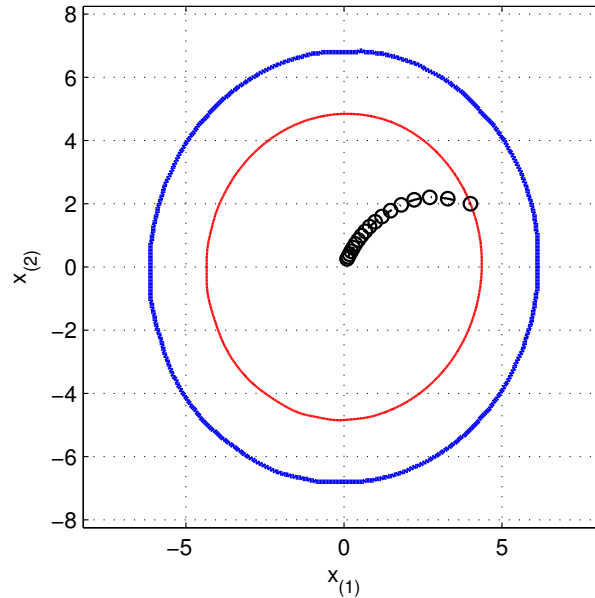


FIGURE 2.9 – Ligne de niveau non connexe  $L_V(V(x_0; \varphi_d(C_d x_0)))$  obtenue avec le théorème 2.4 (ligne pleine et fine) et la région où vivent les trajectoires du système à temps continu entre deux échantillons (ligne pleine et épaisse). Un exemple de trajectoire à temps continu (tirets), où les cercles représentent les échantillons de la trajectoire discrétisée exacte.

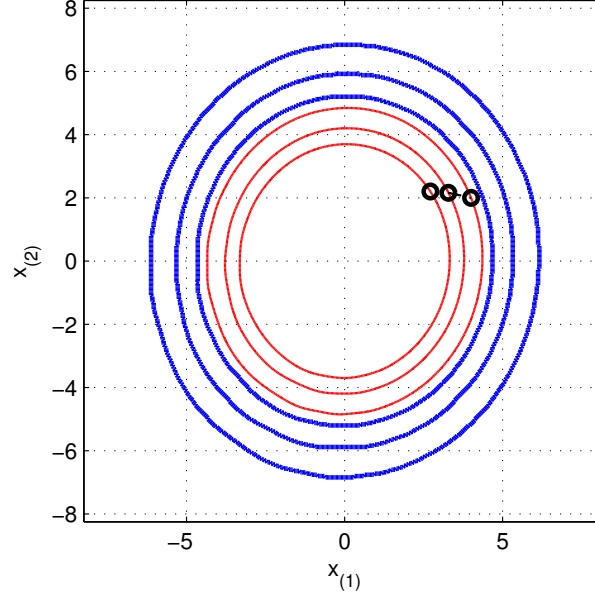


FIGURE 2.10 – Contraction des différents ensembles  $\mathcal{A}(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  (ligne pleine et épaisse) et  $L_V(V(x[k]; \varphi_d(C_d x[k])))$  (ligne pleine et fine) vers le singleton  $\{0\}$ . Les échantillons de la trajectoire (cercle) sont également dessinés.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité des systèmes de Lur'e à temps continu via leur discrétisation d'Euler. Il est dans ce cas possible d'utiliser des méthodes à temps discret. Pour cela, nous avons utilisé une fonction de Lyapunov adaptée à l'étude de la stabilité des systèmes de Lur'e à temps discret [Gon12]. Cette fonction a pour particularité d'exhiber des lignes de niveau potentiellement non connexes et non convexes. Nous avons expliqué en quoi cet outil est incompatible *a priori* avec une étude sur un système à temps continu. Par conséquent, il n'est pas possible, à partir de l'analyse de stabilité du modèle discrétisé, de remonter directement à la conclusion sur celle du temps continu. Pour résoudre ce problème, nous avons construit une suite d'ensembles connexes et bornés, décroissante au sens de l'inclusion qui converge vers le singleton origine et qui contient le futur de la trajectoire à temps continu. Cette suite d'ensembles est construite à partir des lignes de niveau de la fonction de Lyapunov adaptée. Les paramètres définissant la fonction de Lyapunov sont déterminés avec un problème sous contrainte LMI considérant la stabilité du modèle discrétisé d'Euler et de la discrétisation exacte du système de Lur'e à temps continu. Un exemple numérique illustre la construction de ces ensembles.

Ce chapitre nous a, entre autres, permis de mettre en évidence des caractéristiques liées à l'analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps continu par une étude construite sur son modèle discrétisé d'Euler. Ces éléments vont nous aider, dans le chapitre 3, à construire une méthode de synthèse jointe, entre un échantillonnage non-uniforme et des correcteurs adaptés, dont le but sera de stabiliser un système de Lur'e en temps continu via un contrôleur numérique.

Une extension de l'étude menée dans ce chapitre en considérant une non-linéarité vérifiant une condition de secteur local, dans le système de Lur'e, est une perspective intéressante pour notamment aborder le problème de la saturation et/ou sa forme duale : la zone morte. Ce problème ouvert reste difficile à aborder. En effet, la fonction de Lyapunov, dépendant de la non-linéarité, ne sera définie que localement. De plus, il faudra garantir que la trajectoire du système à temps continu reste dans la zone de validité de la condition de secteur locale, sans quoi les théorèmes proposés dans ce chapitre ne seront plus valides.

## Chapitre 3

# Stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme.

La synthèse de commande avec un échantillonnage non-uniforme pour les systèmes à données échantillonnées est motivée par des applications pratiques telles que les systèmes contrôlés en réseau. Plusieurs études proposent des contributions pertinentes, où l'échantillonnage non-uniforme est mis en avant notamment dans le cadre linéaire [[Suh08](#), [Seu12](#), [HKR12](#), [HZWW14](#), [MR14](#)]. Pour ce type de système l'accès au modèle discrétisé exact est la pierre angulaire pour le développement de solution qui justifie en partie la recherche sur la discrétisation de type Padé [[SCSS11](#), [RCS11](#)]. La situation est plus compliquée pour les systèmes non-linéaires où le passage par la discrétisation approchée est une quasi obligation. L'approche préconisée dans l'article [[NT04](#)], consiste à dimensionner la commande à l'aide du modèle discrétisé approché tout en garantissant la stabilité du système à données échantillonnées en boucle fermée. Cette approche est présentée dans le cadre des systèmes non-linéaires génériques, et est compatible avec un échantillonnage uniforme et non-uniforme. Cependant les conditions génériques exhibées ne sont pas toujours exploitables numériquement. En conséquence, dans ce chapitre, nous faisons le choix d'explorer une classe particulière de systèmes non-linéaires. Nous spécifierons également une classe de correcteurs et une méthode de discrétisation pour aboutir à une procédure systématique pour la synthèse de cette classe de systèmes non-linéaires à données échantillonnées.

Plus précisément, ce chapitre concerne la stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme. Les contributions concernant les systèmes de Lur'e à données échantillonnées sont majoritairement orientées vers le problème de synchronisation des systèmes chaotiques modélisés sous la forme de système de Lur'e à données échantillonnées [[LH08](#), [TB14](#)]. L'approche de synthèse que nous présentons ici est complètement différente de la méthode suggérée dans [[LJD15c](#)] dont la réalisation nécessite deux étapes dans la résolution du problème d'optimisation proposé. Il est à noter que ces approches ne considèrent qu'une stratégie d'échantillonnage uniforme.

Dans ce manuscrit, nous nous restreignons au cas d'un échantillonnage non-uniforme, pour lequel la période d'échantillonnage courante appartient à un ensemble fini de valeurs données.

Dans ce cadre, ce chapitre propose une approche originale pour traiter de la stabilisation

des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme. Cette approche s'articule autour de deux étapes cruciales. Premièrement le système non-linéaire à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme dont la période d'échantillonnage courante appartient à un ensemble de valeurs prédéfinies est reformulé comme un système non-linéaire commuté à temps discret. Les modes sont alors les discrétisés exacts pour chaque période d'échantillonnage admissible. Deuxièmement, ces modes non-linéaires étant délicats à exploiter sous leur forme naturelle, ils sont reformulés comme des systèmes de Lur'e à temps discret (Euler approché), avec la même non-linéarité et à l'aide d'incertitudes bornées en norme sur le modèle. Ainsi le problème de la stabilisation d'un système de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme sera posé et traité comme un problème de stabilisation d'un système de Lur'e commuté à temps discret comprenant des incertitudes bornées en norme. De plus, de manière à pouvoir envisager un choix sur les lois de commandes admissibles, nous introduisons un critère quadratique. Il permettra d'expliciter qu'une période d'échantillonnage a un coût différent des autres. La solution proposée prend en considération le comportement de la trajectoire entre les échantillons pour garantir la stabilité du système de Lur'e à données échantillonnées. Le résultat se fonde sur une extension des conditions de stabilité proposées dans [NTS99] pour une famille finie de période d'échantillonnage ainsi que sur une adaptation non triviale des systèmes commutés proposée dans [SDGD14] au cas Lur'e.

Le chapitre s'organise de la manière suivante : à la section 3.1 nous proposons l'extension de la proposition 1.1 au cas d'un échantillonnage non-uniforme. À la section 3.2 nous reformulons le problème de stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées en celui de la stabilisation d'un système commuté à temps discret. La section 3.3 propose des conditions suffisantes pour résoudre le problème de stabilisation de ce système commuté qui nous permet de conclure sur la stabilité en boucle de fermée du système de Lur'e à données échantillonnées.

Dans ce chapitre, nous présenterons les travaux de recherche développés dans [LJD15b].

### 3.1 Analyse de stabilité des systèmes non-linéaires à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme.

La technique d'analyse de stabilité des systèmes de Lur'e à temps continu basée sur son modèle discrétisé d'Euler que nous avons employée au chapitre 2, repose sur la proposition 1.1. Celle-ci ne permet, en l'état, que l'utilisation d'un échantillonnage uniforme. Dans l'optique de conserver un raisonnement analogue à celui déjà étudié précédemment, cette section est dédiée à l'extension de ce résultat d'analyse de stabilité au cadre d'un échantillonnage non-uniforme.

Nous considérons le système à données échantillonnées défini par l'interconnexion entre le système non-linéaire

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), \tilde{u}(t)), t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) &= h(x(t)), \end{cases} \quad (3.1)$$

et un contrôleur à temps discret avec un échantillonnage non uniforme. Le système (3.1) est caractérisé par les vecteurs  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  et  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$  représentant respectivement l'état, la sortie et l'entrée du système. Nous supposons comme au chapitre 1 les fonctions  $f$  et  $h$  continues tel que  $h(0) = 0$ .

Nous introduisons une famille finie de périodes d'échantillonnage  $\{T_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}$ , telle que la suite des instants d'échantillonnage  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  soit définie par

$$t_{k+1} - t_k \in \{T_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}, \quad (3.2)$$

avec  $t_0 = 0$ , sans perte de généralité. Le correcteur à temps discret est alors défini par

$$\mathcal{C}_d : u[k] = g(k, x[k], T_i). \quad (3.3)$$

Contrairement au correcteur (1.25), ici le paramètre  $T_i$  est variable dans le temps. L'interconnexion, entre les processus en temps continu et en temps discret, s'effectue comme au chapitre 1 via l'échantillonneur (1.24) et le bloqueur d'ordre zéro (1.26). Ce dernier élément précisant la liaison entre la suite  $u[\cdot]$  et la fonction continue  $\tilde{u}(\cdot)$ .

En nous appuyant sur l'équation (1.21) qui lie les deux domaines de temps considérés, nous définissons le modèle discrétisé exact de ce système à données échantillonnées par

$$x[k+1] = x[k] + \int_{t_k}^{t_k+T_i} f(\tau, x(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau \quad (3.4)$$

$$:= F_{T_i}^c(x[k]), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

où le temps séparant deux instants d'échantillonnage est  $t_{k+1} - t_k = T_i$ .

La proposition 3.1 présente des conditions suffisantes de stabilité du système à données échantillonnées (3.1)–(3.3) avec un échantillonnage non-uniforme.

**Proposition 3.1** *Soit le système à données échantillonnées (3.1)–(3.4) et une famille de périodes d'échantillonnage  $\{T_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}$ , si*

— *le modèle en temps discret est GUAS, il existe une fonction  $\beta \in \mathcal{KL}$  tel que*

$$\|x[k]\| \leq \beta(\|x[k_0]\|, k - k_0), \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad (3.6)$$

— *les solutions sont GUBT, il existe  $N$  fonctions  $\kappa_i \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$  vérifiant*

$$\|x(t)\| \leq \kappa_i(\|x(t_{init})\|), \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad \forall t \in [t_{init}; t_{init} + T_i], \quad (3.7)$$

*alors le système à données échantillonnées (3.1) est GUAS tel que*

$$\|x(t)\| \leq \bar{\beta}(\|x(t_{init})\|, t - t_{init}), \quad \forall t \geq t_{init} \geq 0, \quad (3.8)$$

*où  $\bar{\beta} \in \mathcal{KL}$  peut-être choisi, dans le cas général, tel que*

$$\bar{\beta}(s, \tau) = \max \left\{ \frac{\kappa_{\max}(s)}{e^{\tau - T_{\max}}}; 4 \max_{\eta \in [0; \tau]} \left( 2^{-\eta} \hat{\beta} \left( s, \frac{\tau - \eta}{T_{\max}} \right) \right) \right\}, \quad (3.9)$$

*avec  $T_{\max} = \max_{i \in \mathcal{I}_N} (T_i)$ ,  $\kappa_{\max}(s) = \max_{i \in \mathcal{I}_N} (\kappa_i(s))$  et  $\hat{\beta}(s, \tau) = \kappa_{\max}(\beta(\kappa_{\max}(s), \tau))$ .*

**Preuve de la proposition 3.1.** Soit  $t_{init} \in [t_q; t_{q+1}]$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $t_q \geq 0$ , tel que  $T_i$  est la période d'échantillonnage utilisée,  $i \in \mathcal{I}_N$ . Puisque  $e^{T_i - \tau} \geq 1$ ,  $\forall T_i \geq \tau$ , avec l'inégalité (3.7), nous pouvons écrire,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,

$$\|x(t)\| \leq \kappa_i(\|x(t_{init})\|), \quad (3.10)$$

$$\leq \max_{j \in \mathcal{I}_N} (\kappa_j(\|x(t_{init})\|)), \quad (3.11)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\|x(t_{init})\|) e^{T_i - (t - t_{init})}, \quad (3.12)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\|x(t_{init})\|) e^{T_{\max} - (t - t_{init})}, \quad (3.13)$$

$$:= \beta_1(\|x(t_{init})\|, t - t_{init}), \quad \forall t \in [t_{init}; t_{q+1}], \quad (3.14)$$

où

$$\kappa_{\max}(s) = \max_{j \in \mathcal{I}_N} (\kappa_j(s)). \quad (3.15)$$

D'un autre côté,  $\forall t \in [t_{k+q+1}; t_{k+q+2}]$ ,  $(k, q) \in \mathbb{N}^2$ , nous supposons que la période d'échantillonnage  $T_j$  est utilisée,  $j \in \mathcal{I}_N$ . En utilisant successivement les inégalités (3.6) et (3.7), nous déduisons

$$\|x_{sd}(t)\| \leq \kappa_j(\|x[q+1+k]\|), \quad (3.16)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\|x[q+1+k]\|), \quad (3.17)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\beta(\|x[q+1]\|, k)), \quad (3.18)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\beta(\|x(t_{q+1})\|, k)), \quad (3.19)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\beta(\kappa_i(\|x(t_{init})\|), k)), \quad (3.20)$$

$$\leq \kappa_{\max}(\beta(\kappa_{\max}(\|x(t_{init})\|), k)), \quad (3.21)$$

$$:= \hat{\beta}(\|x(t_{init})\|, k). \quad (3.22)$$

Si  $\hat{\beta}$  n'est pas UIB, nous pouvons toujours la majorer [NTS99, Lemma 1] avec une fonction  $\tilde{\beta}$  UIB et de classe  $\mathcal{KL}$  :

$$\tilde{\beta}(s, \tau) = \max_{\eta \in [0; \tau]} \left( 2^{-\eta} \hat{\beta}(s, \tau - \eta) \right). \quad (3.23)$$

Il suffit de continuer les calculs suivant en utilisant  $\tilde{\beta}$  au lieu de  $\hat{\beta}$ .

Sinon, si  $\hat{\beta}$  est une fonction UIB de classe- $\mathcal{KL}$  (voir [NTS99, Corollary 1] avec  $P = 2$ ), nous pouvons écrire  $\forall t \in [t_{k+q+1}; t_{k+q+2}]$ ,

$$\|x(t)\| \leq \hat{\beta}(\|x(t_{init})\|, k), \quad (3.24)$$

$$\leq 2^2 \hat{\beta}(\|x(t_{init})\|, k+2). \quad (3.25)$$

Par définition de  $t_{init}$  et  $t$ , nous avons  $t - t_{init} \leq t_{q+2+k} - t_q \leq (2+k)T_{\max}$ , alors

$$\|x(t)\| \leq 2^2 \hat{\beta}(\|x(t_{init})\|, 2+k), \quad (3.26)$$

$$\leq 2^2 \hat{\beta}(\|x(t_{init})\|, \frac{t - t_{init}}{T_{\max}}), \quad (3.27)$$

$$:= \beta_2(\|x(t_{init})\|, t - t_{init}), \quad \forall t \geq t_{q+1}. \quad (3.28)$$

En introduisant la fonction de classe- $\mathcal{KL}$

$$\bar{\beta}(s, \tau) = \max \{ \beta_1(s, \tau); \beta_2(s, \tau) \}, \quad (3.29)$$

nous obtenons la relation

$$\|x(t)\| \leq \bar{\beta}(\|x(t_{init})\|, t - t_{init}), \quad \forall t \geq t_{init} \geq 0, \quad (3.30)$$

ce qui achève la preuve. □

La proposition 3.1 donne des conditions suffisantes de stabilité sur les trajectoires du système (3.1) en boucle fermée. Or les fonctions vérifiant ces contraintes peuvent être délicates à exhiber sans hypothèse supplémentaire sur le système et sa commande. A cet égard, nous considérerons le problème de stabilisation du système de Lur'e à données échantillonnées via un échantillonnage non-uniforme dans la section 3.2, afin de rendre possible l'obtention de telles fonctions caractéristiques.

## 3.2 Systèmes de Lur'e à données échantillonnées

Nous focalisons notre attention sur le système de Lur'e à données échantillonnées suivant

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), \tilde{u}(t)) = Ax(t) + B\varphi(y(t)) + F\tilde{u}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) &= h(x(t)) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.31)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  l'entrée de commande. La non-linéarité  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est supposée décentralisée et satisfaisant la condition de secteur généralisée (1.3). Nous supposons également la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  Lipschitz pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système (3.31) pour toutes conditions initiales.

Le correcteur préconisé dans la littérature [CTQ08, JCTD11] est le retour d'état et celui de la non-linéarité. Le correcteur numérique (3.3) est alors défini tel que

$$\mathcal{C}_d : u[k] = g(k, x[k], T_i) = K_i x[k] + \Gamma_i \varphi(y[k]), \quad (3.32)$$

où  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$  sont respectivement le gain du retour d'état et celui du retour de non-linéarité.

Le système de Lur'e à données échantillonnées étant entièrement défini, nous souhaitons construire, en nous fondant sur la proposition 3.1, une méthode systématique qui résout le problème suivant :

**Problème 3.1** Déterminer des conditions suffisantes garantissant que le contrôleur numérique (3.32) stabilise globalement, uniformément et asymptotiquement le système de Lur'e (3.31) en utilisant un échantillonnage non-uniforme.

Selon la proposition 3.1, deux conditions sur les trajectoires du système de Lur'e à données échantillonnées doivent être vérifiées pour résoudre le problème 3.1 : la première permettant de

garantir que le système (3.31) ne diverge pas en temps fini et la seconde concernant le problème de stabilité du modèle discrétisé exact (3.4).

Comme vu au chapitre 2, les trajectoires du système de Lur'e autonome sont bornées entre deux périodes d'échantillonnage. Dans la même optique, le théorème 3.1 caractérise le comportement entre les instants d'échantillonnage du système (3.31) sous l'action du contrôleur (3.32). Le résultat est formulé dans un premier temps en séparant l'état de la commande pour aboutir à des équations plus aisément manipulables en vue de la synthèse des paramètres définissant le correcteur (3.32). Dans un second temps, le résultat est reformulé pour correspondre aux conditions de stabilité formulées à la proposition 3.1.

**Théorème 3.1** *Le système de Lur'e (3.31), avec le contrôleur (3.32) vérifie  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_k; t_{k+1}]$ ,*

$$\|x(t) - x(t_k)\| \leq \gamma(t - t_k) (M\|x(t_k)\| + \|Fu(t_k)\|). \quad (3.33)$$

*De plus,  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_k; t_{k+1}]$*

$$\|x(t) - x(t_k)\| \leq \kappa'_i(\|x(t_k)\|), \quad (3.34)$$

*où  $\kappa'_i(\cdot)$  sont des fonctions de classe- $\mathcal{K}_\infty$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ . Nous pouvons choisir*

$$\kappa'_i(r) = \gamma(T_i) (M + M_i^u) r, \quad (3.35)$$

*avec  $\gamma(T_i) = \frac{1}{M} (e^{MT_i} - 1)$  et où  $M$  et  $M_i^u$  sont des scalaires positifs dépendant des paramètres  $A, B, C, \Omega, F, K_i$  et  $\Gamma_i$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ . Plus précisément, nous avons*

$$M = \sup_{\Upsilon \in \mathcal{D}} \|A + B\Upsilon\Omega C\| \quad (3.36)$$

*et*

$$M_i^u = \sup_{\Upsilon \in \mathcal{D}} \|FK_i + F\Gamma_i\Upsilon\Omega C\| \quad (3.37)$$

*où  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathbb{R}^{p \times p}$  dont chaque élément de la diagonale est l'intervalle unité.*

**Preuve du théorème 3.1.** [LJD15c] *Le coefficient  $M$  est déterminé par le problème d'optimisation (2.15) présenté au chapitre 2. En suivant la même procédure, il est possible de définir les scalaires  $M_i^u$ , avec  $i \in \mathcal{I}_N$ , par*

$$\|Fu[k]\| = \|FK_i x[k] + F\Gamma_i \varphi(Cx[k])\| \leq \sup_{\Upsilon \in \mathcal{D}} \|FK_i + F\Gamma_i\Upsilon\Omega C\| \|x[k]\| = M_i^u \|x[k]\|. \quad (3.38)$$

*Nous définissons,*

$$\eta(t, t_k) = x(t) - x[k] - (t - t_k)u[k], \quad (3.39)$$

$$= \int_{t_k}^t [Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau))] d\tau. \quad (3.40)$$

En appliquant successivement, l'inégalité triangulaire et l'équation (3.36) nous obtenons

$$\|\eta(t, t_k)\| \leq \int_{t_k}^t \|Ax(\tau) + B\phi(Cx(\tau))\| d\tau, \quad (3.41)$$

$$\leq \int_{t_k}^t M\|x(\tau)\| d\tau, \quad (3.42)$$

$$\leq M \int_{t_k}^t \|\eta(\tau, t_k) - x[k] - (\tau - t_k)u[k]\| d\tau, \quad (3.43)$$

$$\leq M \left( \int_{t_k}^t \|\eta(\tau, t_k)\| d\tau + a(t, t_k) \right), \quad (3.44)$$

avec

$$a(t, t_k) = (t - t_k)\|x[k]\| + \frac{1}{2}(t - t_k)^2\|Fu[k]\|. \quad (3.45)$$

L'inégalité dépend de  $\|\eta(t, t_k)\|$  dans les deux parties. L'intégrale de la trajectoire exacte est inconnue. Puisque  $x(t)$  est une fonction continue en le paramètre  $t \in [t_k; t_{k+1}]$  alors  $\|\eta(t, t_k)\|$  et  $(t - t_k)(M\|x[k]\| + \|Fu[k]\|)$  sont des fonctions positives et continues sur cet intervalle, nous pouvons appliquer le lemme de Gronwall [Chi06]. Nous utilisons successivement le lemme de Gronwall et deux fois une intégration par partie comme suit :

$$\|\eta(t, t_k)\| \leq M \left( a(t, t_k) + \int_{t_k}^t Ma(\tau, t_k)e^{\int_{\tau}^t M ds} d\tau \right) \quad (3.46)$$

$$\leq M \left( a(t, t_k) + \int_{t_k}^t Ma(\tau, t_k)e^{M(t-\tau)} d\tau \right) \quad (3.47)$$

$$\leq M \left( a(t, t_k) + \left[ -a(t, t_k)e^{M(t-\tau)} \right]_{t_k}^t + \int_{t_k}^t \frac{da}{d\tau}(\tau, t_k)e^{M(t-\tau)} d\tau \right) \quad (3.48)$$

$$\leq \left[ -\frac{da}{d\tau}(\tau, t_k)e^{M(t-\tau)} \right]_{t_k}^t + \int_{t_k}^t \frac{d^2a}{d\tau^2}(\tau, t_k)e^{M(t-\tau)} d\tau, \quad (3.49)$$

$$\leq \gamma(t - t_k)M\|x[k]\| + (\gamma(t - t_k) - (t - t_k))\|Fu[k]\|, \quad (3.50)$$

avec la fonction  $\gamma(\cdot)$  définie au théorème 3.1. Nous déduisons de l'équation (3.38),

$$\|\eta(t_k, t_{k+1})\| \leq \gamma(T_i)M\|x[k]\| + (\gamma(T_i) - T_i)\|Fu[k]\| \quad (3.51)$$

$$\leq \left( \gamma(T_i)(M + M_{\sigma(k)}^u) - T_i M_i^u \right) \|x[k]\|. \quad (3.52)$$

Pour terminer la preuve, nous utilisons l'inégalité triangulaire sur  $\|\eta(t, t_k)\|$ ,  $x[k] = x(t_k)$ , et  $u[k] = u(t_k)$ ,

$$\|x(t) - x(t_k)\| \leq \|\eta(t, t_k)\| + (t - t_k)\|Fu(t_k)\| \quad (3.53)$$

$$\leq \gamma(t - t_k)(M\|x[k]\| + \|Fu(t_k)\|) \quad (3.54)$$

$$\leq \gamma(T_i)(M + M_i^u)\|x(t_k)\| \quad (3.55)$$

$$:= \kappa_i(\|x(t_k)\|), \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (3.56)$$

où  $\kappa_i(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ . Les équations (3.33) et (3.34) sont vérifiées  $\forall k \in \mathbb{N}$  et  $\forall t \in [t_k; t_{k+1}]$ .

□

**Remarque 3.1** L'application de l'inégalité triangulaire sur l'inégalité (3.34) permet de vérifier la contrainte (3.7) avec  $\kappa_i(r) = \kappa'_i(r) + r$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ . Par conséquent le système de Lur'e à données échantillonnées considéré est toujours GUBT, c'est-à-dire que l'inégalité (3.7) est satisfaite. En d'autres termes le système de Lur'e, dont la non-linéarité est une fonction continue vérifiant une condition de secteur conique globale, a ses trajectoires qui ne peuvent pas exploser en temps fini.

La condition (3.7) est toujours garantie par le théorème 3.1. Par conséquent les conditions de stabilité de la proposition 3.1, appliquées au système de Lur'e à données échantillonnées (3.31), se réduisent au problème de stabilité du modèle discrétisé exact (3.5). Dans le cas des systèmes de Lur'e, le vecteur  $F_{T_i}^e(x[k])$  s'exprime sous la forme :

$$F_{T_i}^e(x[k]) = x[k] + \int_{t_k}^{t_k+T_i} (Ax(\tau) + B\varphi(Cx(\tau)) + Fu[k]) d\tau. \quad (3.57)$$

Le problème 3.1 peut être reformulé comme suit :

**Problème 3.2** Déterminer des conditions suffisantes assurant la stabilité du système commuté

$$x[k+1] = F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]), \quad (3.58)$$

où la loi de commutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_N$  représente la suite des périodes d'échantillonnage  $\{T_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}$  utilisées.

Un correcteur peut être dimensionné avec d'autres objectifs que la stabilisation du système dans le but d'améliorer une performance donnée. Dans ce chapitre, en plus du problème de stabilisation, nous introduisons le critère de performance suivant :

$$\mathcal{J}(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x'[k]Q_{\sigma(k)}x[k] + u'[k]R_{\sigma(k)}u[k]), \quad (3.59)$$

avec  $x_0 = x[k=0] = x(t=0)$  la condition initiale de la trajectoire. Les matrices définies positives  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  caractérisent le coût associé à chaque période d'échantillonnage  $T_i$ , avec  $i \in \mathcal{I}_N$ . L'introduction de ce critère a deux objectifs, d'une part, il permet de pondérer les périodes d'échantillonnage pour privilégier l'utilisation d'une période par rapport à une autre. D'autre part, le critère est un outil qui nous permettra de comparer différentes stratégies de commande. La section 3.3 est consacrée à la synthèse conjointe de la loi de commande (3.32) et de la loi de commutation  $\sigma(\cdot)$  pour répondre au problème 3.2.

### 3.3 Stabilisation conjointe du système de Lur'e

La présence de la non-linéarité  $\varphi(\cdot)$  dans le modèle discrétisé exact (3.57) est un obstacle à l'obtention d'une expression analytique du système commuté (3.58), dans le cas général. Nous introduisons par conséquent, le modèle discrétisé d'Euler défini par

$$x[k+1] = A_{\sigma(k)}^d x[k] + B_{\sigma(k)}^d \varphi(Cx[k]) + F_{\sigma(k)}^d u[k], \quad (3.60)$$

$$:= F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k]), \quad (3.61)$$

avec  $A_{\sigma(k)}^d = I_n + T_{\sigma(k)}A$ ,  $B_{\sigma(k)}^d = T_{\sigma(k)}B$  et  $F_{\sigma(k)}^d = T_{\sigma(k)}F$ . Tout comme le système en temps continu (3.31), sa discrétisation d'Euler est un système de Lur'e à temps discret avec la même non-linéarité  $\varphi(\cdot)$ .

Pour déduire des résultats sur le système discrétisé exact (3.58), à partir d'une étude sur le modèle approché (3.60), il est nécessaire de connaître l'écart existant entre ces deux modèles. Un majorant de cet écart est donné au théorème 3.2. Tout comme au théorème 3.1, le résultat est donné en veillant à séparer l'entrée de commande, de l'état pour faciliter la procédure de synthèse.

**Théorème 3.2** *Soit le système de Lur'e (3.31) avec une entrée de commande constante par morceau (1.26), son modèle discrétisé exact (3.58) et son modèle discrétisé approché d'Euler (3.60) vérifient l'inégalité suivante :*

$$\|F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) - F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k])\| \leq r_1(T_{\sigma(k)})\|Fu[k]\| + r_2(T_{\sigma(k)})\|x[k]\|, \quad (3.62)$$

avec  $r_1(T_{\sigma(k)})$  et  $r_2(T_{\sigma(k)})$  des fonctions de classe  $\mathcal{K}_\infty$  définies par

$$r_1(T_{\sigma(k)}) = \frac{\gamma(T_{\sigma(k)}) - T_{\sigma(k)}}{M} (\|A\| + \|B\|\|\Omega C\|), \quad (3.63)$$

où  $M$  est défini par l'équation (3.36), et par

$$r_2(T_{\sigma(k)}) = (\gamma(T_{\sigma(k)}) - T_{\sigma(k)})\|A\| + (\gamma(T_{\sigma(k)}) + T_{\sigma(k)})\|B\|\|\Omega C\|. \quad (3.64)$$

**Preuve du théorème 3.2.** [LJD15c] En appliquant successivement l'inégalité triangulaire et le théorème 3.1, la distance séparant les modèles discrétisés exact et approché d'Euler est bornée tel que

$$\|F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) - F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k])\| \quad (3.65)$$

$$\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A\|\|x(\tau) - x[k]\|\|B\|(\|\varphi(Cx(\tau))\| + \|\varphi(Cx[k])\|) d\tau, \quad (3.66)$$

$$\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|A\|\gamma(\tau - t_k)b[k] + \|B\|\|\Omega C\| \left( (e^{M(\tau - t_k)} + 1)\|x[k]\| + \gamma(\tau - t_k)\|Fu[k]\| \right) d\tau, \quad (3.67)$$

$$\leq r_1(T_{\sigma(k)})\|Fu[k]\| + r_2(T_{\sigma(k)})\|x[k]\|, \quad (3.68)$$

avec

$$b[k] = M\|x[k]\| + \|Fu[k]\|, \quad (3.69)$$

$$r_1(T_{\sigma(k)}) = \frac{\gamma(T_{\sigma(k)}) - T_{\sigma(k)}}{M} (\|A\| + \|B\|\|\Omega C\|), \quad (3.70)$$

et

$$r_2(T_{\sigma(k)}) = (\gamma(T_{\sigma(k)}) - T_{\sigma(k)})\|A\| + (\gamma(T_{\sigma(k)}) + T_{\sigma(k)})\|B\|\|\Omega C\|. \quad (3.71)$$

□

La méthode d'analyse, présentée dans le chapitre 2, a été développée dans le but de justifier l'utilisation des lignes de niveau non connexes et non convexes dans le cadre des systèmes à données échantillonnées. Une possible extension de cette méthode pour la synthèse de commande, en deux temps, a été développée [LJD15c] dans le cadre d'un échantillonnage uniforme. Ici nous nous focalisons sur une méthode de synthèse conjointe, de la loi de commutation  $\sigma(\cdot)$  et des paramètres de l'entrée de commande (3.32), dans le but de stabiliser le système (3.58) tout en considérant la performance (3.59).

Pour résoudre ce problème, nous privilégions une méthode alternative en tirant avantage de la forme de Lur'e issue de la discrétisation d'Euler. L'idée est de modéliser le système discrétisé exact (3.58) par un système de Lur'e issu de la discrétisation d'Euler dont les paramètres sont incertains. Cette technique permet également de s'affranchir de l'hypothèse d'une fonction de Lyapunov Lipschitzienne proposée dans le cadre de systèmes non-linéaires plus généraux [NTK99b] et ainsi de pouvoir considérer le problème de stabilité globale de la boucle fermée.

Le théorème 3.3 nous permet de réécrire le système discrétisé exact (3.58) comme son discrétisé d'Euler (3.60) avec des incertitudes additives bornées en norme. Avant d'énoncer le théorème 3.3, nous introduisons la proposition 3.2 qui est un résultat préliminaire justifiant que la construction d'un modèle incertain selon certaines hypothèses est toujours possible.

**Proposition 3.2** *Soit les vecteurs  $x, y$  et  $z \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|y\| \leq a_1\|x\| + a_2\|z\|$ , avec  $a_1 \geq 0$  et  $a_2 \geq 0$  des scalaires. Alors des matrices  $\Delta_1$  et  $\Delta_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existent tel que*

$$y = \Delta_1 x + \Delta_2 z, \quad (3.72)$$

avec  $\Delta_i' \Delta_i \leq a_i^2 I_n$ ,  $i \in \{1; 2\}$ .

**Preuve de la proposition 3.2.** Nous supposons  $x \neq 0$ ,  $z \neq 0$  et  $y \neq 0$  pour construire les vecteurs unitaires associés  $x_1 = \frac{x}{\|x\|}$ ,  $z_1 = \frac{z}{\|z\|}$  and  $y_1 = \frac{y}{\|y\|}$ . A l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt, il est toujours possible de construire les bases orthonormales  $Y, X$  et  $Z$  de  $\mathbb{R}^n$  associées à ces vecteurs. Il existe alors deux matrices de changement de base tel que  $Y = P_X^Y X$  et  $Y = P_Z^Y Z$  avec  $P_X^{Y'} P_X^Y = P_Z^{Y'} P_Z^Y = I_n$ . La valeur maximale autorisée pour  $\|y\|$  est  $r_0 = a_1\|x\| + a_2\|z\|$ . En posant  $\alpha = \frac{a_1\|x\|}{r_0}$ , nous obtenons

$$y_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_1, \quad (3.73)$$

$$= \alpha P_X^Y x_1 + (1 - \alpha) P_Z^Y z_1. \quad (3.74)$$

Pour conclure, nous pouvons toujours construire les matrices  $\Delta_1 = \alpha \frac{\|y\|}{\|x\|} P_X^Y$  et  $\Delta_2 = (1 - \alpha) \frac{\|y\|}{\|z\|} P_Z^Y$  vérifiant

$$y = \Delta_1 x + \Delta_2 z, \quad (3.75)$$

tel que  $\Delta_1' \Delta_1 \leq a_1^2 I_n$  et  $\Delta_2' \Delta_2 \leq a_2^2 I_n$ .

Dans le cas où  $z = 0$  et  $x \neq 0$  (resp.  $x = 0$  et  $z \neq 0$ ), alors en utilisant la matrice de changement de base  $P_X^Y$  (resp.  $P_Z^Y$ ) et  $\alpha = 1$  (resp.  $\alpha = 0$ ), les matrices  $\Delta_1 = \frac{\|y\|}{\|x\|} P_X^Y$  et  $\Delta_2 = a_2 I_n$  (resp.  $\Delta_1 = a_1 I_n$  et  $\Delta_2 = \frac{\|y\|}{\|z\|} P_Z^Y$ ) sont solutions. Les cas  $x = z = 0$  et  $y = 0$  sont triviaux, ce qui conclut la preuve pour tout  $x, y$  et  $z \in \mathbb{R}^n$ . □

**Théorème 3.3** *Le système discrétisé exact (3.58) peut se réécrire sous la forme d'un système incertain construit à partir de son modèle discrétisé d'Euler, tel que*

$$x[k+1] = F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) = F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k]) + \Delta_{2,\sigma(k)}x[k] + \Delta_{1,\sigma(k)}F_d u([k]), \quad (3.76)$$

où  $\Delta_{1,i}$  et  $\Delta_{2,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$  sont des matrices d'incertitudes vérifiant  $\Delta'_{1,i}\Delta_{1,i} \leq r_{1,i}^2 I_n$  et  $\Delta'_{2,i}\Delta_{2,i} \leq r_{2,i}^2 I_n$ . Les scalaires  $r_{j,i} = r_j(T_i)$ ,  $j \in \{1;2\}$  sont définis dans le théorème 3.2.

**Preuve du théorème 3.3.** En appliquant la proposition 3.2 sur l'inégalité (3.62) nous prouvons l'existence des matrices  $\Delta_{1,i}$  et  $\Delta_{2,i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$  tel que

$$F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) - F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k]) = \Delta_{2,\sigma(k)}x[k] + \Delta_{1,\sigma(k)}F_d u([k]), \quad (3.77)$$

avec  $\Delta'_{1,i}\Delta_{1,i} \leq r_{1,i}^2 I_n$  et  $\Delta'_{2,i}\Delta_{2,i} \leq r_{2,i}^2 I_n$ .  $r_{1,i}$  et  $r_{2,i}$  sont définis au théorème 3.2 pour différentes valeurs de  $\{T_i\}_{i \in \mathcal{I}_N}$ , tel que  $r_{j,i} = r_j(T_i)$ ,  $j \in \{1;2\}$ .

En réécrivant le modèle discrétisé exact comme suit,

$$x[k+1] = F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) = F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k]) + F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) - F_{T_{\sigma(k)}}^a(x[k]), \quad (3.78)$$

nous déduisons le modèle de Lur'e incertain (3.76). □

La modélisation sous la forme d'un système de Lur'e commuté dont les paramètres sont incertains, nous permet de reformuler le problème 3.2 de la manière suivante :

**Problème 3.3** *Déterminer des conditions suffisantes assurant la stabilité du système commuté, dont les paramètres sont incertains,*

$$x[k+1] = F_{T_{\sigma(k)}}^e(x[k]) = \left( A_{\sigma(k)}^d + \Delta_{2,\sigma(k)} \right) x[k] + B_{\sigma(k)}^d \varphi(Cx[k]) + (I_n + \Delta_{1,\sigma(k)}) F_{\sigma(k)}^d u[k], \quad (3.79)$$

où  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_N$  représente la loi de commutation.

Trouver une fonction de Lyapunov garantissant la stabilité du système commuté (3.79) implique l'existence d'une fonction  $\beta$  vérifiant la condition (3.6), qui est l'unique condition manquante pour conclure sur la stabilité du système de Lur'e à données échantillonnées (3.31). Pour rappel, l'autre condition de stabilité (3.7) est garantie par le théorème 3.1.

La stratégie de type *min-switching* est naturellement privilégiée [GDD11] pour caractériser la loi de commutation  $\sigma(\cdot)$  dans le but de trouver le plus petit majorant du critère (3.59) tout en garantissant la stabilité en boucle fermée du système (3.79). Cette méthode est implémentée en utilisant la classe de fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{\min} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x_k & \mapsto \min_{i \in \mathcal{I}_N} V_i(x_k), \end{cases} \quad (3.80)$$

avec  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,  $V_i(x_k) = x_k' P_i x_k$  où  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices symétriques définies positives.

**Théorème 3.4** Pour la classe des systèmes définis par (3.79), pour la fonction coût (3.59), s'il existe des matrices  $Y_{1,i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $Y_{2,i} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $J_i$  et  $U_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices symétriques définies positives  $\mathcal{T}_{ij}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices diagonales définies positives  $W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , des scalaires  $\varepsilon_{1,i} > 0$ ,  $\varepsilon_{2,i} > 0$  et les coefficients  $\pi_{ij}$  de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}$  avec  $j$  et  $i \in \mathcal{J}_N$ , tel que le problème d'optimisation

$$\min_{G_i, J_i, U_i, W_i, Y_{1,i}, Y_{2,i}, \varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i}, \Pi, \mathcal{T}_{ij}} \left( \min_{i \in \mathcal{J}_N} -\text{trace}(G_i) \right), \quad (3.81)$$

sous les contraintes

$$\mathcal{C}_{ij} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & \star & \star \\ N_{1,i} & -\varepsilon_{1,i} I_n & \star \\ N_{2,i} & 0 & -\varepsilon_{2,i} I_n \end{bmatrix} < 0_{m+5n+p}, \quad (3.82)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{ij} & \star \\ J_i & G_j \end{bmatrix} > 0_{2n}, \quad (3.83)$$

avec  $\Upsilon_{ij} = \Theta_{ij} + \varepsilon_{1,i} M_{1,i} M'_{1,i} + \varepsilon_{2,i} M_{2,i} M'_{2,i}$ ,

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} -R_i^{-1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -Q_i^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\mathcal{V}_i & \star & \star \\ Y'_{1,i} & U'_i & (\Xi_i^a)' & G_i - U'_i - U_i & \star \\ Y'_{2,i} & 0 & (\Xi_i^b)' & \Omega C U_i & -2W_i \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

$$M_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{1,i} I_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{2,i} I_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N'_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (F_i^d Y_{1,i})' \\ (F_i^d Y_{2,i})' \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

$$N_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & U_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_i = J'_i + J_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathcal{T}_{ij}, \quad (3.86)$$

$\Xi_i^a = A_i^d U_i + F_i^d Y_{1,i}$ ,  $\Xi_i^b = B_i^d W_i + F_i^d Y_{2,i}$  admet une solution,  $\forall (i, j) \in \mathcal{J}_N^2$ . Alors l'entrée de commande (3.32) est définie par les gains  $K_i = Y_{1,i} U_i^{-1}$  et  $\Gamma_i = Y_{2,i} W_i^{-1}$ , et la loi de commutation par

$$\sigma(k) = \arg \min_{i \in \mathcal{J}_N} x'[k] P_i x[k], \quad (3.87)$$

où  $P_i = G_i^{-1}$ . Le système (3.31) est globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) en boucle fermée avec cette commande conjointe. De plus,

$$\overline{\mathcal{J}}(x_0) = V_{\min}(x_0) = \min_{i \in \mathcal{J}_N} (x'_0 P_i x_0) \quad (3.88)$$

est un majorant de la fonction coût (3.59).

**Preuve du théorème 3.4.** En appliquant deux fois le lemme de Petersen's [Pet87], l'inégalité (3.82) est équivalente à

$$\Theta_{i,j} + \mathbf{He}(M_{1,i}\nabla_{1,i}N_{1,i}) + \mathbf{He}(M_{2,i}\nabla_{2,i}N_{2,i}) < 0, \quad (3.89)$$

avec  $\nabla'_{\xi,i}\nabla_{\xi,i} < 1$ ,  $\xi = \{1, 2\}$ . Nous notons  $\Delta_{\xi,i} = r_{\xi,i}\nabla_{\xi,i}$ . Sachant que

$$\mathcal{V}_i \leq J'_i + J_i - J'_i \sum_{j=1}^N \pi_{ji} G_j^{-1} J_i \leq \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} G_j^{-1} \right)^{-1} = (P)_{p,i}^{-1}, \quad (3.90)$$

l'inégalité (3.89) est reformulée tel que

$$\begin{bmatrix} -R_i^{-1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -Q_i^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -(P)_{p,i}^{-1} & \star & \star \\ Y'_{1,i} & U'_i & \Upsilon_i^a & G_i - U'_i - U_i & \star \\ Y'_{2,i} & 0 & \Upsilon_i^b & \Omega C U_i & -2W_i \end{bmatrix} < 0, \quad (3.91)$$

avec  $\Upsilon_i^a = ((A_i^d + \Delta_{2,i})U_i + (I_n + \Delta_{1,i})F_i^d Y_{1,i})'$  et  $\Upsilon_i^b = (B_i^d W_i + (I_n + \Delta_{1,i})F_i^d Y_{2,i})'$ .

En effectuant un changement de base  $\text{diag}(I_{2n+m}; U_i^{-1}; W_i^{-1})$  et trois compléments de Schur consécutifs, nous déduisons

$$\begin{bmatrix} \Lambda_i^a \\ \Lambda_i^b \end{bmatrix} (P)_{p,i} \begin{bmatrix} \Lambda_i^a \\ \Lambda_i^b \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} K_i' \\ \Gamma_i' \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} K_i' \\ \Gamma_i' \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix} Q_i \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -P_i & \star \\ W_i^{-1} \Omega C & -2W_i^{-1} \end{bmatrix} < 0_{n+p}, \quad (3.92)$$

avec  $\Lambda_i^a = (A_i^d + \Delta_{2,i} + (I_n + \Delta_{1,i})F_i^d K_i)'$ ,  $\Lambda_i^b = (B_i^d + (I_n + \Delta_{1,i})F_i^d \Gamma_i)'$ , et où  $K_i = Y_{1,i}U_i^{-1}$  et  $\Gamma_i = Y_{2,i}W_i^{-1}$ . En post-multipliant l'inégalité (3.92) par  $(x'[k] \ \varphi'(y[k]))' \neq 0$  et en la pré-multipliant par sa transposée, nous obtenons

$$x'[k+1](P)_{p,i}x[k+1] - x'[k]P_i x[k] < SC(y[k]; \varphi; W_i^{-1}) - x'[k]Q_i x[k] - u'[k]R_i u[k]. \quad (3.93)$$

Le mode  $i$  est choisi tel que  $i = \underset{j \in \mathcal{I}_N}{\text{argmin}} x'[k]P_j x[k]$ . Il en découle que

$$V_{\min}(x[k+1]) - V_{\min}(x[k]) < -x'[k]Q_i x[k] - u'[k]R_i u[k]. \quad (3.94)$$

Les matrices  $Q_i$  et  $R_i$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$  étant définies positives, nous en déduisons que l'inégalité (3.94) assure que le modèle incertain (3.79) est GUAS. Par définition, le modèle discrétisé exact (3.4) est GUAS. En utilisant les résultats du théorème 3.1 et de la proposition 3.1, nous concluons que le système de Lur'e à données échantillonnées (3.31) est GUAS en boucle fermée avec la loi de commande conjointe (3.32).

De plus, nous savons que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_{\min}(x[k]) = 0$ , en sommant l'inégalité (3.94) sur l'horizon  $k = 0$  à  $k = +\infty$ , nous obtenons

$$\overline{\mathcal{J}}(x_0) = V_{\min}(x_0) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (x'[k]Q_{\sigma(k)}x[k] + u'[k]R_{\sigma(k)}u[k]) = \mathcal{J}(x_0), \quad (3.95)$$

ce qui conclut la preuve. □

**Remarque 3.2** Toute une classe de systèmes de Lur'e à temps discret, fonction des incertitudes, est stabilisée sous réserve de la faisabilité du problème d'optimisation introduit au théorème 3.4. Le système discrétisé d'Euler (3.60) correspond au nominal et appartient donc à cette classe. Le théorème 3.4 garantit donc que le système discrétisé d'Euler (3.60) est GUAS.

En s'inspirant de la littérature [GDD11, DSG13, DFG13], nous considérons une sous-classe des matrices de Metzler telle que

$$\mathcal{M}^{\text{so}} = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \forall (i, \ell) \in \mathcal{I}_N^2, \pi_{ii} = \gamma_i \in [0, 1[, \right. \\ \left. \forall i \neq \ell, \pi_{\ell i} \geq 0, \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N \setminus \{i\}} \pi_{\ell i} = 1 - \gamma_i \right\}. \quad (3.96)$$

Même si cette approche est sous-optimale, elle permet d'obtenir des contraintes de type LMI (aisément manipulables numériquement) explicitées dans la proposition 3.3 et dépendant uniquement de  $N$  scalaires à choisir. Une procédure de recherche en ligne sur les scalaires  $\gamma_i$  est utilisée pour trouver la meilleure solution sur l'ensemble  $\mathcal{M}^{\text{so}}$ .

**Proposition 3.3** Pour tous les scalaires  $0 \leq \gamma_i < 1$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ , le problème d'optimisation (3.81), présenté au théorème 3.4, reste valide avec le choix de matrice de Metzler  $\Pi_{ij} \in \mathcal{M}^{\text{so}}$  tel que  $\pi_{ji} = 1 - \gamma_i$ , avec  $j \neq i$ . Par abus de notation,  $\forall i \neq j$ ,  $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{I}_N^2$ , et  $\mathcal{V}_i = J'_i + J_i - D_i(\Pi_{ij})$  avec  $D_i(\Pi_{ij}) = \gamma_i \mathcal{T}_i + (1 - \gamma_i) \mathcal{T}_j$ . Par conséquent la contrainte (3.83) est remplacée par

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_j & \star \\ J_i & G_j \end{bmatrix} < 0_{2n}, \forall i \neq j. \quad (3.97)$$

**Preuve de la proposition 3.3.** Les scalaires  $\gamma_i = \pi_{ii}$  sont les paramètres caractérisant les matrices de Metzler  $\Pi_{ij} \in \mathcal{M}^{\text{so}}$ . En multipliant l'équation (3.82) par  $\pi_{ji}$  et en sommant sur l'ensemble des  $j \in \mathcal{I}_N$ , tel que  $j \neq i$ , seulement le terme  $\mathcal{V}_i$  est modifié tel que

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_N \setminus \{i\}} \pi_{ji} \mathcal{V}_i = \sum_{j \in \mathcal{I}_N \setminus \{i\}} \pi_{ji} \left( J'_i + J_i - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} \mathcal{T}_{ij} \right), \quad (3.98)$$

$$= (1 - \gamma_i) \left( J'_i + J_i - \gamma_i \mathcal{T}_i - \sum_{j \in \mathcal{I}_N \setminus \{i\}} \pi_{ji} \mathcal{T}_j \right), \quad (3.99)$$

$$= (1 - \gamma_i) (J'_i + J_i - D_i(\Pi_{ij})), \quad (3.100)$$

avec  $D_i(\Pi_{ij}) = \pi_{ii} \mathcal{T}_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_N \setminus \{i\}} \pi_{ji} \mathcal{T}_j = \gamma_i \mathcal{T}_i + (1 - \gamma_i) \mathcal{T}_j$ . Par conséquent, l'équation (3.82) se met sous la forme

$$(1 - \gamma_i) \mathcal{C}_{ij} < 0, \quad (3.101)$$

où  $\mathcal{C}_{ij}$  est défini à l'équation (3.82). Il suffit de multiplier par  $(1 - \gamma_i)^{-1}$  cette dernière inégalité, avec  $\gamma_i \neq 1$ , pour aboutir à une solution particulière de l'inégalité (3.82).  $\square$

Nous proposons d'illustrer par la suite la validité de la méthode de synthèse conjointe pour stabiliser le système de Lur'e à données échantillonnées (3.31) avec un échantillonnage non-uniforme.

### Exemple 3.1

Soit le système (3.31) décrit par les paramètres suivant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3.8 \\ -2,8 & -0,1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix}, C = [0,5 \quad 0,5],$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi(y) = \frac{\Omega y}{2}(1 + \cos(2y)), \Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les périodes d'échantillonnage considérées sont  $T_1 = 0.01$  et  $T_2 = 0.1$ . La fonction coût (3.59) est définie par les paramètres  $R_1 = R_2 = 0.1$ ,  $Q_1 = 10I_2$  et  $Q_2 = I_2$ . Ainsi utiliser la plus petite période d'échantillonnage, c'est-à-dire  $T_1$ , coûte plus dans le critère que d'appliquer  $T_2$ . Nous noterons avec l'exposant *co*, les variables relatifs à la stratégie de commutation pour les différentier des stratégies dont l'échantillonnage est uniforme. La proposition 3.3 mène à la solution

$$P_1^{\text{co}} = \begin{bmatrix} 960,0989 & -376,8987 \\ -376,8987 & 291,9338 \end{bmatrix}, K_1^{\text{co}} = [-50,5924 \quad 7,4189], \Gamma_1^{\text{co}} = 0,5065,$$

$$P_2^{\text{co}} = \begin{bmatrix} 1351,2 & -468,9 \\ -468,9 & 307,7 \end{bmatrix}, K_2^{\text{co}} = [-22,2016 \quad 1,1514], \Gamma_2^{\text{co}} = 1,2500,$$

en utilisant la matrice de Metzler  $\mathcal{M}^{so}$  avec les coefficients  $\gamma_1 = 0,4$  et  $\gamma_2 = 0$ .

La trajectoire du système à données échantillonnées (3.31) partant de  $x'_0 = (0,5 \quad -10)'$  est tracée dans le plan de phase en figure 3.1. Cette illustration montre les zones d'activation des modes 1 et 2, ainsi que la distance entre les deux modèles exact et approché d'Euler pour les trois premiers échantillons. La borne définie à l'équation (3.62) qui caractérise cette distance est une fonction exponentielle de la période d'échantillonnage, voir le théorème 3.1. Un zoom permettant de mieux visualiser la borne sur les deux premiers échantillons pour  $T_1$  est proposé figure 3.1.

La synthèse de correcteur avec un échantillonnage uniforme est un cas particulier du théorème 3.4 en considérant le nombre de modes  $N$  égal à un. En ne tenant compte que de la période  $T_1$ , nous obtenons :  $K_1 = [-39,8284 \quad 10,5522]$ ,  $\Gamma_1 = 0,3277$ . En revanche pour  $T_2$  le problème d'optimisation du théorème 3.4 n'est pas faisable, nous considérerons par abus de notation le majorant de la fonction coût  $\mathcal{J}_2(x_0) = +\infty$ . L'impact de ces lois de commande est représenté sur les figures 3.2 et 3.3.

Nous désignons par la suite la stratégie de *min-switching* par  $\sigma_s$ . La proposition 3.3 nous donne les valeurs de majorant de la fonction coût suivant :  $\overline{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0) = 33202$  et  $\overline{\mathcal{J}}_1(x_0) = 54264$ . l'amélioration de cette borne, avec la stratégie de *min-switching* est de 38,9% en comparaison avec le meilleur résultat obtenu à l'aide d'une des stratégies d'échantillonnage uniforme considérées. Cette observation numérique sera étudiée et justifiée au chapitre 4.

Pour confirmer la validité et la véracité des estimées de la fonction coût (3.59), nous avons estimé par simulation le coût exact de la trajectoire considérée pour les différentes stratégies d'échantillonnage, nous obtenons  $\widetilde{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0) = 5538.9$  et  $\widetilde{\mathcal{J}}_1(x_0) = 24417$ . Ces coûts sont obtenus avec le protocole suivant

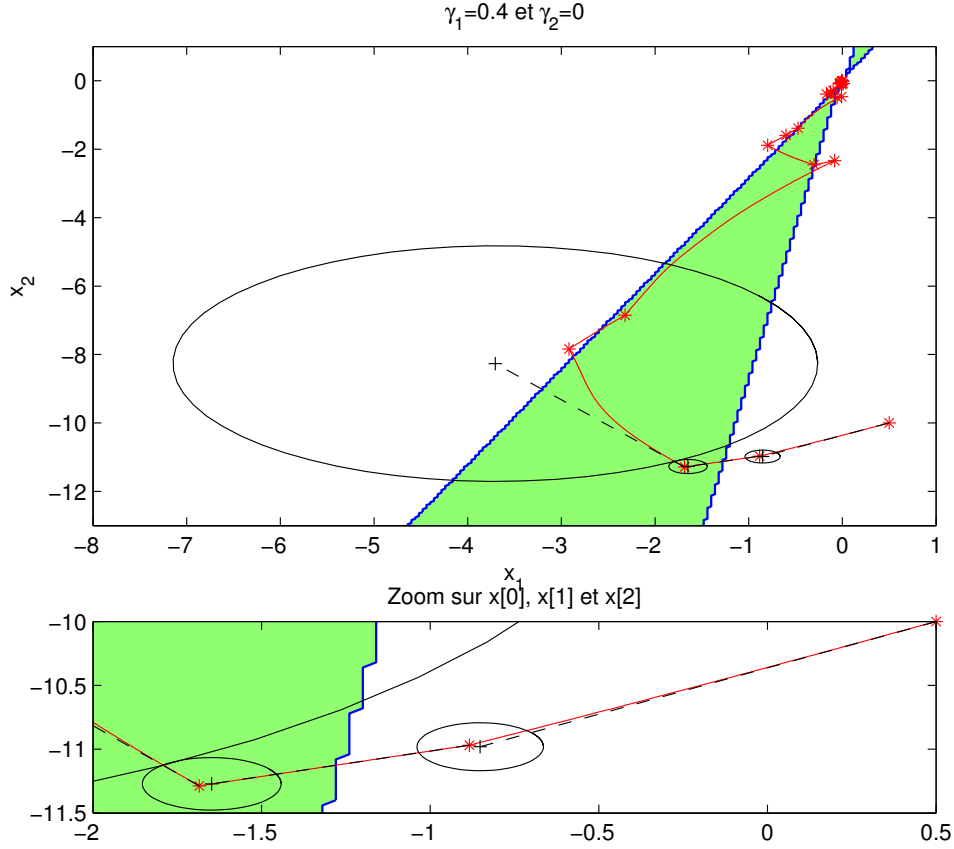


FIGURE 3.1 – La partie blanche (resp. verte) représente la zone d'activation du mode 1 (resp. du mode 2). La ligne rouge représente la trajectoire obtenue par la stratégie de commutation, où les étoiles sont les échantillons. Les croix noires sont les trois premiers échantillons du système d'Euler à l'instant  $k + 1$  pour la condition initiale  $x[k]$ . Elles sont reliées par des tirets noirs. les cercles noirs représentent la distance maximale entre le discrétisé d'Euler et le modèle exact à l'instant  $k + 1$  pour une condition initiale  $x[k]$ .

**Protocole 3.1** *Le coût estimé par simulation est un minorant du coût exact de la trajectoire considérée pour une stratégie de commutation et il est défini par*

$$\widetilde{\mathcal{J}}(x_0; k_f) = \sum_{k=0}^{k_f} (x'[k] Q_{\sigma(k)} x[k] + u'[k] R_{\sigma(k)} u[k]) \quad (3.102)$$

L'horizon fini  $k_f$  est déterminé pour fixer l'erreur relative, entre le coût estimé sur l'horizon fini et le coût sur l'horizon infini, à moins de  $\varepsilon\%$ . Nous ne nous intéressons pas directement à estimer la valeur de  $k_f$ , par conséquent, dans la suite nous noterons  $\widetilde{\mathcal{J}}(x_0)$  la fonction  $\widetilde{\mathcal{J}}(x_0; k_f)$ .

Par définition, nous avons

$$\mathcal{J}(x_0) = \widetilde{\mathcal{J}}(x_0) + \sum_{k=k_f+1}^{+\infty} (x'[k]Q_{\sigma(k)}x[k] + u'[k]R_{\sigma(k)}u[k]). \quad (3.103)$$

et l'erreur relative  $\varepsilon_r$  définie tel que

$$\varepsilon_r = \frac{|\mathcal{J}(x_0) - \widetilde{\mathcal{J}}(x_0)|}{\mathcal{J}(x_0)} \quad (3.104)$$

Or d'après le théorème 3.4,

$$\mathcal{J}(x_0) \leq \widetilde{\mathcal{J}}(x_0) + \overline{\mathcal{J}}(x_{k_f+1}), \quad (3.105)$$

nous en déduisons

$$0 \leq \varepsilon_r \leq \frac{\overline{\mathcal{J}}(x_{k_f+1})}{\mathcal{J}(x_0)} \leq \frac{V_{\min}(x_{k_f+1})}{\widetilde{\mathcal{J}}(x_0)} \leq \varepsilon. \quad (3.106)$$

La condition d'arrêt, définie par  $V_{\min}(x_{k_f+1}) \leq \widetilde{\mathcal{J}}(x_0)\varepsilon$ , permet d'assurer que l'erreur relative  $\varepsilon_r$  est inférieure à la valeur  $\varepsilon$  souhaitée.

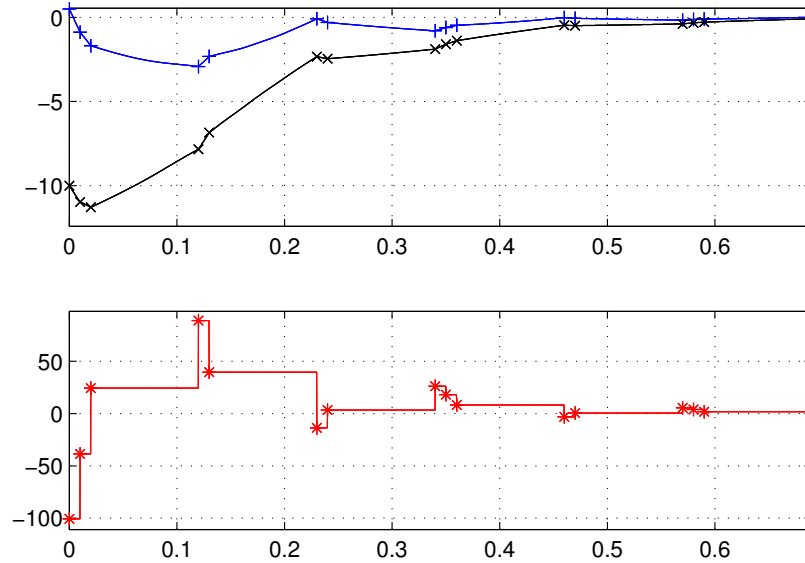


FIGURE 3.2 – Stratégie d'échantillonnage non-uniforme. Première fenêtre : la ligne bleue (resp. noire) représente la première (resp. seconde) composante du vecteur d'état en fonction du temps. Deuxième fenêtre : la ligne rouge décrit l'entrée de commande. Les croix bleues, les cercles noirs et les 'plus' rouges symbolisent les échantillons.

Pour les simulations présentées dans ce chapitre,  $\varepsilon = 1\%$ . Les estimées du coût exact sont donc suffisamment proches du coût réel (3.59) pour être assimilées à celui-ci. Dans ce contexte,

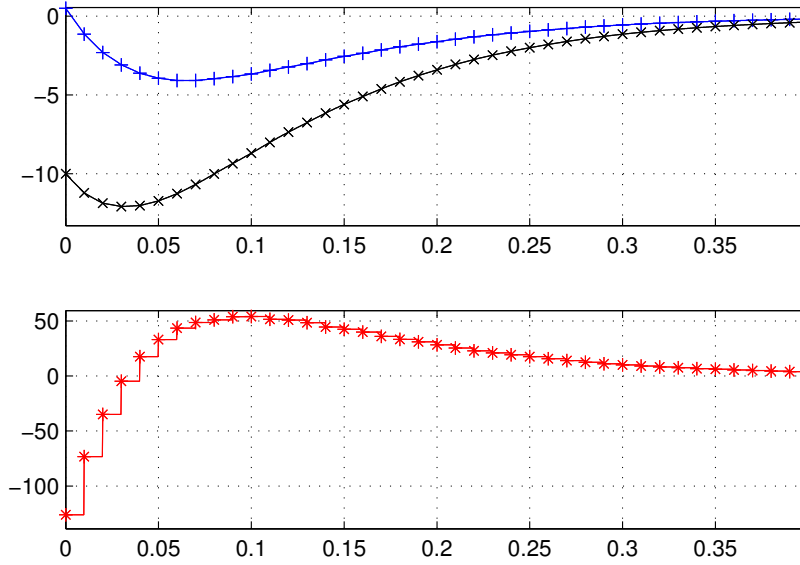


FIGURE 3.3 – Stratégie d'échantillonnage uniforme avec  $T_1 = 0.01$ . Première fenêtre : la ligne bleue (resp. noire) représente la première (resp. seconde) composante du vecteur d'état en fonction du temps. Deuxième fenêtre : la ligne rouge décrit l'entrée de commande. Les croix bleues, les cercles noirs et les plus rouges symbolisent les échantillons.

la stratégie de *min-switching* améliore de 77% le coût comparé à l'utilisation de la période d'échantillonnage  $T_1$ .

Pour la condition initiale  $x_0$ , nous remarquons un écart entre le majorant de la fonction coût donné par la proposition 3.3 et le coût exact estimé associé à la trajectoire. Comme le majorant de la fonction coût est valide pour toutes les conditions initiales, toutes les non-linéarités vérifiant la condition de secteur (1.3) et que la méthode de synthèse prend en compte un majorant de l'écart entre le modèle discrétisé exact et le modèle discrétisé approché, cette observation est justifiée. Sur le mode 1, un ratio d'environ 2 sépare  $\overline{\mathcal{J}}_1(x_0)$  de  $\mathcal{J}_1(x_0)$ .

En plus de l'amélioration du majorant de la fonction coût (3.59), la stratégie de *min-switching* permet, dans cet exemple, d'utiliser une période d'échantillonnage qui, lors d'un échantillonnage uniforme, ne nous permet pas de stabiliser le système via notre méthode. Nous définissons alors l'échantillonnage moyen  $T_{av}$  qui est la valeur moyenne des périodes d'échantillonnage utilisées sur la trajectoire tracée figure 3.2. Dans cet exemple,  $T_{av} = 0.0418$ , soit une période d'échantillonnage quatre fois supérieure à la valeur  $T_1$ . Cependant, l'augmentation de la période moyenne est une conséquence liée à cet exemple. En effet, la technique de synthèse développée dans ce chapitre est également avantageuse quand tous les modes sont stables, c'est-à-dire lorsque la période d'échantillonnage la plus grande peut-être utilisée seule. Nous étudierons cela dans le chapitre 4. Signalons enfin que la philosophie derrière cette approche rejoint celle utilisée dans les méthodes dites de *self-triggered* [VFM03, WL10, HJT12].

### 3.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de synthèse d'entrée de commande adaptée au système de Lur'e à données échantillonnées, en utilisant un échantillonnage non-uniforme. Cette solution permet d'associer à chaque période d'échantillonnage un coût différent fixé par l'utilisateur selon les contraintes du problème.

Cette technique propose une méthodologie axée sur les systèmes commutés de Lur'e avec des paramètres incertains bornés en norme pour résoudre le problème de stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme. Le changement de représentation a été justifié dans le cadre d'une discrétisation de type Euler. Les conditions suffisantes pour stabiliser le système considéré sont formulées à l'aide d'un problème d'optimisation sous contraintes qui permettent de garantir que le système de Lur'e à données échantillonnées, avec un échantillonnage non-uniforme, est globalement uniformément asymptotiquement stable. L'évaluation d'un majorant de la performance décrite par la fonction coût (3.59) est également fourni par ce problème d'optimisation.

Dans le chapitre 4, nous approfondirons notre étude de la performance obtenue par une stratégie d'échantillonnage non-uniforme. Nous nous attacherons notamment à la garantie de performance apportée par cette méthode en comparaison aux stratégies d'échantillonnage uniforme. Cette étude se basera sur la notion de consistance [GDD11] introduite pour les systèmes linéaires.

Une extension de l'étude menée dans ce chapitre en considérant une non-linéarité dans le système de Lur'e de type local, est une perspective intéressante pour notamment aborder le problème de la saturation et/ou de la zone morte. Cette question mène à considérer pour un état donné, la validité de l'aspect local des modèles discrétisés approché et exact. Ce problème se transpose également sur l'état du système à temps continu. De même l'extension via la fonction de Lyapunov avancée, utilisée au chapitre 2, permettrait une amélioration des performances, la difficulté résidant dans les garanties d'amélioration [Gon12]. Ces deux extensions sont des problèmes ouverts.



## Chapitre 4

# Consistance des systèmes de Lur'e commutés : application à la synthèse de commande numérique avec un échantillonnage non-uniforme.

Le chapitre précédent traitait d'un système de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme et plus particulièrement de la synthèse conjointe (commande exogène et choix des périodes d'échantillonnage) de ce type de systèmes. L'approche choisie consistait à reformuler ce problème comme la synthèse conjointe d'un système de Lur'e commuté avec des incertitudes additives bornées en norme. Des conditions suffisantes répondant à cette question ont été proposées au chapitre 3 à l'aide de la stratégie de *min-switching*. Cette stratégie permettant la stabilisation est associée à une performance, sous la forme d'un coût quadratique, à optimiser.

Ce chapitre approfondit les spécificités de la stratégie *min-switching* en termes de performance. Effectivement, dans le cadre des systèmes commutés linéaires, la stratégie de *min-switching* est dite consistante. La notion de consistance, introduite dans [GDD11], correspond au fait que le coût associé à une loi de commutation donnée (dite consistante) est meilleur que le coût associé à chaque mode utilisé indépendamment des autres. Il s'agit d'un argument supplémentaire en faveur de l'utilisation de la stratégie de *min-switching*, même dans le cas où tous les modes sont stables. La consistance pour les systèmes linéaires a été étudiée en temps continu et en temps discret pour différents types de critères de performance, par exemple les normes  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_2$  [DGD11, GDD13]. En revanche, la consistance dans le cas des systèmes non-linéaires reste une question largement ouverte. La contribution de ce chapitre est de proposer une extension adaptée de la consistance pour les systèmes de Lur'e à temps discret et de voir les conséquences sur le problème 3.1 traité au chapitre 3.

Ce chapitre est organisé en trois parties. Une première section rappellera la notion de consistance dans le cadre linéaire. La partie 4.2 mettra en évidence les différences introduites dans le cas non-linéaire en considérant des systèmes de type Lur'e et proposera une relecture de la consistance pour l'étendre au cas non-linéaire. Enfin, la partie 4.3 reprendra le problème 3.1 traité au chapitre 3 sous l'angle de la notion de consistance.

Les résultats présentés ici s'appuient sur les articles [LJD15d, LJD15a].

## 4.1 Rappels sur la notion de consistance

Cette section est dédiée aux rappels des résultats de consistance pour les systèmes linéaires à temps discret développés dans [GDD11, DGD11, DFG13]. Nous avons opté pour l'option qui consiste à présenter ces résultats sous une forme unifiée pour les comparer dans la section suivante avec les résultats que nous proposons dans le cadre des systèmes de type Lur'e.

Nous choisissons d'illustrer la notion de consistance dans le cadre linéaire avec la classe suivante de systèmes linéaires commutés à temps discret :

$$\begin{cases} x[k+1] &= A_{\sigma(k)}x[k] + H_{\sigma(k)}w[k], \\ z[k] &= E_{\sigma(k)}x[k] + G_{\sigma(k)}w[k], \end{cases} \quad (4.1)$$

évoluant à partir de la condition initiale  $x[0] = x_0$ , où  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z[k] \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie du système et  $w[k] \in \mathbb{R}^r$  est une entrée exogène (perturbation ou commande). La loi de commutation  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}_N$  est sélectionnée à chaque instant de temps  $k \in \mathbb{N}$  parmi les  $N$  sous systèmes considérés.

Un critère quadratique est associé à ce système (4.1) sous la forme :

$$\mathcal{J}_\sigma(x_0; \{w[k]\}_{k \in \mathbb{N}}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} x[k] \\ w[k] \end{pmatrix}' Q_{\sigma(k)} \begin{pmatrix} x[k] \\ w[k] \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

avec  $Q_i$  des matrices symétriques définies positives de dimensions appropriées. Il faut noter que la structure générique de ce coût  $\mathcal{J}_\sigma(\cdot; \cdot)$  permet d'englober l'étude de différents critères. Effectivement, nous pouvons considérer :

— le gain " $\mathcal{H}_2$ ", en posant :

$$\mathcal{J}_\sigma(x_0; 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|z[k]\|^2, \quad (4.3)$$

avec  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,

$$Q_i = \begin{bmatrix} E_i' E_i & \star \\ G_i' E_i & G_i' G_i \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

— le coût induit  $\mathcal{L}_2$ , en posant :

$$\mathcal{J}_\sigma(0; \{w[k]\}_{k \in \mathbb{N}}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|z[k]\|^2 - \rho \|w[k]\|^2, \quad (4.5)$$

soit  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,

$$Q_i = \begin{bmatrix} E_i' E_i & \star \\ G_i' E_i & G_i' G_i - \rho I_r \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

et où le gain induit  $\mathcal{L}_2$ , noté  $\gamma$ , est défini tel que

$$\gamma^2 = \sup_{w \in \mathcal{L}_2 \setminus \{0\}} \frac{\|z\|^2}{\|w\|^2}, \quad (4.7)$$

qui est alors majoré par :

$$\gamma \leq \sqrt{\rho}. \quad (4.8)$$

Avant d'introduire la notion de consistance, nous définissons pour plus de clarté l'ensemble  $\mathcal{S}$  contenant toutes les lois de commutations, prenant la forme d'un retour d'état c'est-à-dire dont  $\sigma(k)$  est une fonction de  $x[k]$ , qui assurent la stabilité asymptotique globale du système (4.1). Nous définissons également l'ensemble  $\mathcal{C}$  contenant les  $N$  lois de commutation telles que  $\forall k \in \mathbb{N}, \sigma(k) = i \in \mathcal{I}_N$ . Le concept de consistance est défini comme suit :

**Définition 4.1** [GDD11] *Considérons la classe des systèmes commutés linéaires à temps discret (4.1), une stratégie de commutation particulière  $\sigma_s(\cdot)$  est dite consistante par rapport au critère  $\mathcal{J}_\sigma(\cdot; \cdot)$  (4.2), si elle appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}$  et si elle garantit  $\forall \sigma \in \mathcal{C}$ , et  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  que*

$$\mathcal{J}_{\sigma_s}(x_0; \{w[k]\}_{k \in \mathbb{N}}) \leq \mathcal{J}_\sigma(x_0; \{w[k]\}_{k \in \mathbb{N}}). \quad (4.9)$$

*Si l'inégalité est stricte, la stratégie de commutation est dite strictement consistante.*

Une stratégie de commutation est dite consistante, si la performance associée est inférieure ou égale à la meilleure performance obtenue par un des sous systèmes étudiés indépendamment des autres. Une stratégie de commutation type *min-switching* (3.80) semble naturellement candidate pour garantir une telle propriété. Cependant la construction d'une telle loi de commutation dépend de la performance étudiée.

Le problème qui nous intéresse est alors décrit de la manière suivante :

**Problème 4.1** *Construire une loi de commutation  $\sigma_s$  tel que la propriété de consistance de la définition 4.1 soit satisfaite dans le cadre de la fonction coût (4.3) (respectivement (4.5)).*

La stratégie de type *min-switching* se construit en considérant les outils suivants :

— la fonction de Lyapunov,

$$V_{\min} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^+, \\ x[k] & \mapsto \min_{i \in \mathcal{I}_N} V_i(x[k]), \end{cases} \quad (4.10)$$

avec  $\forall i \in \mathcal{I}_N, V_i(x_k) = x_k' P_i x_k$  où  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices symétriques définies positives.

— l'ensemble des matrices de Metzler,

$$\mathcal{M} = \left\{ \Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}, \forall (i, \ell) \in \mathcal{I}_N^2, \pi_{\ell i} \in [0, 1], \pi_{\ell i} \geq 0, \sum_{\ell \in \mathcal{I}_N} \pi_{\ell i} = 1 \right\}. \quad (4.11)$$

— la combinaison linéaire des matrices définissant la fonction de Lyapunov (4.10) fonction des paramètres de la matrice de Metzler (4.11).

$$(P)_{p,i} = \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \pi_{ji} P_j. \quad (4.12)$$

Le théorème suivant résout le problème 4.1 dans le cadre de la performance (4.3).

**Théorème 4.1** *Soit le système (4.1) tel que l'entrée de perturbation est nulle. S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i, \forall i \in \mathcal{I}_N$ , et une matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}$  solution du problème d'optimisation*

$$\min_{P_i, \Pi} \left( \min_{i \in \mathcal{I}_N} \text{trace}(P_i) \right), \quad (4.13)$$

sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ (P)_{p,i}A_i & (P)_{p,i} & \star \\ E_i & 0 & I_p \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (4.14)$$

alors la loi de commutation définie par  $\sigma_s(x[k]) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} x'[k]P_i x[k]$  stabilise globalement, uniformément et asymptotiquement le système 4.1, et  $\mathcal{J}_{\sigma_s}(x_0; \{w[k]\}_{k \in \mathbb{N}}) \leq V_{\min}(x_0)$ . De plus cette loi de commutation est consistante.

**Preuve du théorème 4.1.** D'après [GCB08, théorème 1], si les contraintes (4.14) sont vérifiées, alors le système (4.1) est globalement, uniformément et asymptotiquement stable et que  $\mathcal{J}_{\sigma_s}(x_0; \{w[k]\}_{k \in \mathbb{N}}) \leq V_{\min}(x_0)$ . La stratégie de min-switching est consistante selon [DFG13, théorème 1]. □

Le théorème 4.2 résout le problème 4.1 dans le cadre de la performance (4.5).

**Théorème 4.2** Soit le système (4.1) tel que l'entrée de perturbation est bornée en norme ( $\sum_{k \in \mathbb{N}} w'[k]w[k] < +\infty$ ) et la condition initiale  $x_0 = 0$ . S'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ , et une matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}$  et un scalaire  $\rho \in \mathbb{R}^+$  solution du problème d'optimisation

$$\min_{P_i, \Pi} \rho, \quad (4.15)$$

sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star & \star \\ 0 & \rho I_r & \star & \star \\ (P)_{p,i}A_i & (P)_{p,i}H_i & (P)_{p,i} & \star \\ E_i & G_i & 0 & I_p \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N, \quad (4.16)$$

alors la loi de commutation définie par  $\sigma_s(x[k]) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} x'[k]P_i x[k]$  stabilise globalement, uniformément et asymptotiquement le système 4.1, et le gain  $\mathcal{L}_2$ , associé à la fonction coût (4.5), est  $\gamma \leq \sqrt{\rho}$  qui maximise le rejet de perturbation. De plus cette loi de commutation est consistante.

**Preuve du théorème 4.2.** D'après [DGD11, théorème 1] que si les contraintes (4.16) sont vérifiées, alors le système (4.1) est globalement, uniformément et asymptotiquement stable et que l'inégalité (4.8) est vérifiée. L'objectif du problème d'optimisation (4.15) permet de sélectionner la meilleure solution parmi toutes les matrices de Metzler. La stratégie de min-switching est alors consistante selon [DFG13, théorème 2]. □

Comme au chapitre 3, l'introduction de la matrice  $(P)_{p,i}$  dans le problème d'optimisation mène à des contraintes bilinéaires. La solution préconisée dans la littérature [DGD11] et employée au chapitre 3 est d'utiliser la sous classe de matrices de Metzler (3.96). Le problème d'optimisation est alors sous forme LMI, en effectuant une recherche en ligne sur les paramètres  $\gamma_i$  composant la matrice de Metzler (3.96).

**Proposition 4.1** Pour tous les scalaires  $0 \leq \gamma_i < 1$ ,  $i \in \mathcal{I}_N$ , les théorèmes 4.1 et 4.2, restent valides avec le choix de la matrice de Metzler  $\Pi_{ij} \in \mathcal{M}^{so}$  définie à l'équation (3.96), tel que  $\pi_{ji} = 1 - \gamma_i$ , avec  $j \neq i$ . La matrice  $(P)_{p,i}$  prend alors la forme particulière  $(P)_{p,i} = \gamma_i P_i + (1 - \gamma_i) P_j$ .

La démonstration de la proposition 4.1 est disponible dans [DGD11, corolaire 2] dans le cadre du gain induit  $\mathcal{L}_2$  et dans [GCB08, corolaire 1] dans celui de la performance (4.3).

Dans la section 4.2, l'étude se focalisera sur la performance (4.3). Dans un but comparatif, nous introduisons l'exemple 4.1 qui illustre numériquement que la stratégie de *min-switching* est bien consistante vis-à-vis de la performance (4.3).

### Exemple 4.1

Soit le système commuté linéaire (4.1) défini par les paramètres

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.8 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, E'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et  $\forall i \in \mathcal{I}_N, H_i = 0_{n \times r}$  et  $G_i = 0_{p \times r}$ .

Nous nous intéressons à la performance (4.3) dans le but d'illustrer le théorème 4.1. Le problème d'optimisation a pour solution  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = 0,6$ ,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.0824 & 0.1988 \\ 0.1988 & 1.0376 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.0900 & 0.2842 \\ 0.2842 & 3.0800 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

En d'autres termes, le majorant de la fonction coût pour la stratégie de *min-switching* est  $V_{\min}(x_0) = 21,44$ . Le coût exact de cette trajectoire, représentée sur les figures 4.1 et 4.2, est  $\mathcal{J}_{\sigma_s} = 13,22$ . Les stratégies modales, quant à elles, mènent aux coûts  $\mathcal{J}_1 = 34,72$ , pour le mode 1 et  $\mathcal{J}_2 = 35,44$ , pour le mode 2.

La stratégie de *min-switching* est donc consistante et vérifie l'inégalité

$$\mathcal{J}_{\sigma}(x_0) \leq V_{\min}(x_0) \leq \mathcal{J}_1(x_0) \leq \mathcal{J}_2(x_0). \quad (4.18)$$

Nous pouvons alors garantir avec le théorème 4.1 un gain de performance de  $\frac{\mathcal{J}_1(x_0) - V_{\min}(x_0)}{\mathcal{J}_1(x_0)} = 38\%$  en comparaison avec la meilleure stratégie modale, le mode 1. Sur la trajectoire considérée dans cet exemple, le gain de performance est de  $\frac{\mathcal{J}_1(x_0) - \mathcal{J}_{\sigma}(x_0)}{\mathcal{J}_1(x_0)} = 62\%$ . Nous en concluons que la stratégie de *min-switching* apporte une amélioration de performance sur le système considéré.

Avec cet exemple, nous constatons que la stratégie de *min-switching* a un potentiel d'amélioration de la performance qui se vérifie dans la littérature, pour les diverses performances étudiées. Cette amélioration est garantie par la non dégradation de la performance via la concept de consistance.

Après avoir rappelé les informations nécessaires à la compréhension de la notion de consistance sur les systèmes linéaires, nous allons étendre cette notion dans la section suivante aux systèmes de Lur'e à temps discret.

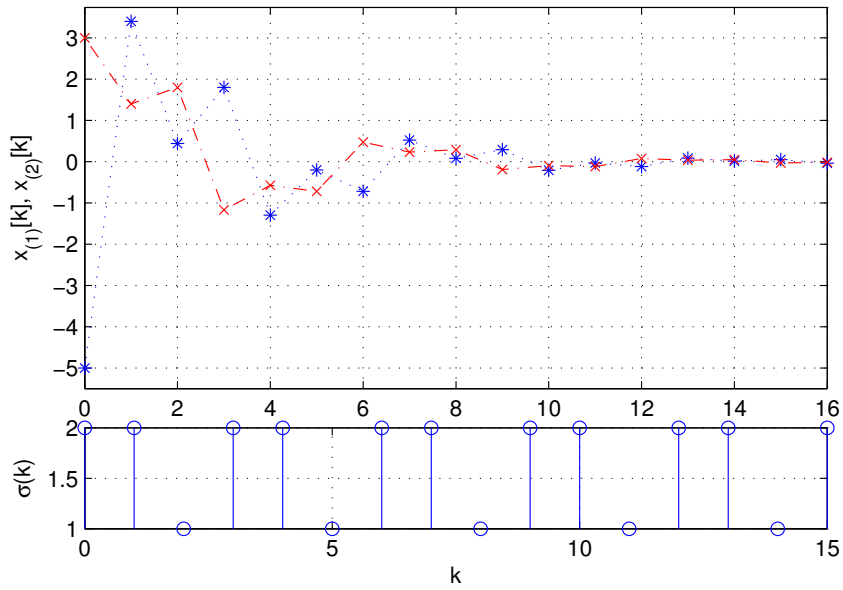


FIGURE 4.1 – Sur le premier graphique, les étoiles bleues représentent la première composante du vecteur d'état et les croix rouges la seconde. Le second graphique illustre l'évolution de la loi de commutation obtenue par le théorème 4.1 avec  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = 0,6$ .

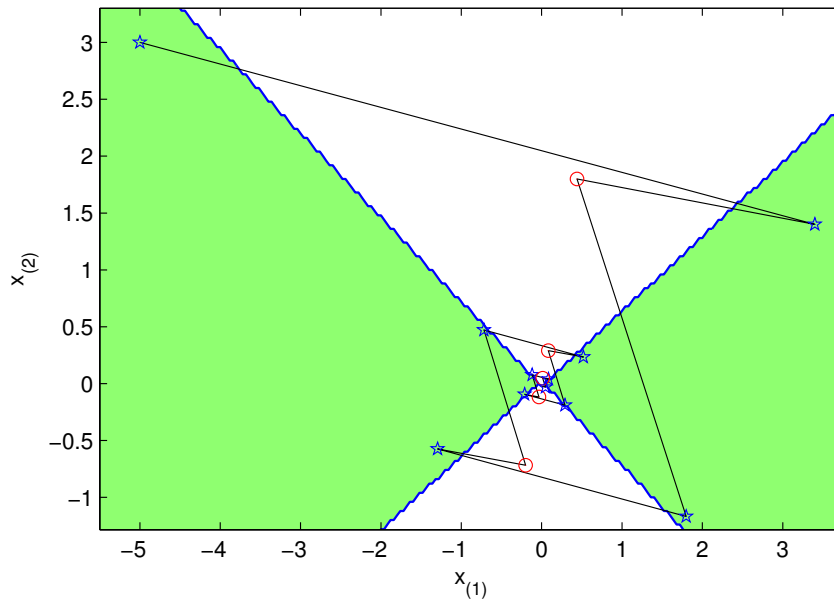


FIGURE 4.2 – Les zones blanches et vertes représentent les zones d'activation des modes 1 et 2. Elles sont obtenues par le théorème 4.1 avec  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = 0,6$ . La ligne noire représente la trajectoire commutée, où les pentagones bleus sont les échantillons dans la zone d'activation 2 et les cercles rouges ceux de la zone d'activation 1.

## 4.2 La consistance dans le cadre des systèmes de Lur'e

Considérons la classe suivante de systèmes non linéaires à temps discret :

$$\begin{cases} x[k+1] = A_{\sigma(k)}x[k] + B_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(y[k]), \\ y[k] = C_{\sigma(k)}x[k], \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $x[k] \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $y[k] \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie du système. La loi de commutation est notée  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{J}_N$  où  $N$  est le nombre de modes. Chaque mode est défini par des matrices réelles  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  de dimensions appropriées,  $\forall i \in \mathcal{J}_N$ . Les non-linéarités  $\varphi_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont supposées être décentralisées et vérifient la condition de secteur généralisée [Kha02],  $\forall i \in \mathcal{J}_N$ . Nous introduisons les matrices diagonales définies positives quelconques  $S_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$  vérifiant la condition de secteur (1.3),  $\forall i \in \mathcal{J}_N$ , c'est-à-dire :

$$\varphi_i'(y[k])S_i(\varphi_i(y[k]) - \Omega_i y[k]) \leq 0. \quad (4.20)$$

**Remarque 4.1** *Le système de Lur'e (4.19) est un système autonome qui conserve une structure proche de celle du système (4.1), où  $\forall i \in \mathcal{J}_N$  les matrices  $E_i$  et  $H_i$  sont respectivement remplacées par les matrices  $C_i$  et  $B_i$ , les matrices  $G_i$  sont nulles, et la perturbation  $w[\cdot]$  est remplacée par un bouclage non-linéaire avec le vecteur de sortie  $y[\cdot]$ , noté  $\varphi_i(\cdot)$  et vérifiant la condition de secteur généralisée (4.20).*

Généralement, la loi de commutation  $\sigma(\cdot)$  est recherchée de manière à assurer uniquement la stabilité asymptotique globale ou locale pour le système (4.19) (voir par exemple [Gon12, GJD12a]). Ici nous introduisons une contrainte supplémentaire en attribuant un poids quadratique à chaque mode, de manière à ce que la loi de commutation garantisse d'une part la stabilité asymptotique globale du système (4.19), mais aussi minimise la fonction coût

$$\mathcal{J}_{\sigma}(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} x'[k]Q_{\sigma(k)}x[k], \quad (4.21)$$

où les matrices  $Q_i$  sont connues, symétriques et définies positives,  $\forall i \in \mathcal{J}_N$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est la condition initiale considérée. Ces pondérations sont fixées et définies en fonction de l'application étudiée. Nous pouvons remarquer que la fonction coût (4.21) est l'adaptation du critère (3.59) dans le cadre des systèmes autonomes.

Le choix entre les différents critères de performance dépend de l'objectif de l'étude. Dans le cadre linéaire, les choix de la performance  $\mathcal{L}_2$  et quadratique (pour le problème  $LQ$  commuté) ont été faits pour rappeler ce qui existe dans la littérature. Les résultats présentés dans cette section se limitent à celui du critère quadratique (4.21) pour correspondre au critère de performance utilisé au chapitre 3, mais ils peuvent être étendus à la performance  $\mathcal{L}_2$  en utilisant une démarche analogue à celle développée à la section 4.1.

Comme il a été souligné dans l'introduction, à cause de la présence des non-linéarités dans le modèle de Lur'e à temps discret, les méthodes fondées sur les fonctions de Lyapunov ne peuvent pas mener à la valeur exacte de la performance pour une trajectoire donnée, mais uniquement à un majorant de celle-ci. Nous définissons ainsi dans la proposition suivante la classe des majorants que nous allons considérer.

**Proposition 4.2** *Pour la classe des systèmes définis par (4.19) et une loi de commutation constante  $\sigma = \ell$ , s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P_\ell \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice diagonale définie positive  $S_\ell \in \mathbb{R}^{p \times p}$  qui soient solution du problème d'optimisation*

$$\min_{P_\ell, S_\ell} \text{trace}(P_\ell), \quad (4.22)$$

sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} A'_\ell P_\ell A_\ell - P_\ell + Q_\ell & \star \\ B'_\ell P_\ell A_\ell + S_\ell \Omega_\ell C_\ell & B'_\ell P_\ell B_\ell - 2S_\ell \end{bmatrix} < 0. \quad (4.23)$$

alors l'origine du mode  $\ell$  est globalement asymptotiquement stable et un majorant (le plus petit dans cette classe) de la fonction coût (4.21) est donné par  $\overline{\mathcal{J}}_\ell = x'_0 P_\ell x_0$ , où  $x_0$  est la condition initiale.

**Preuve de la proposition 4.2.** En post-multipliant l'inégalité (4.23) par  $(x'[k] \quad \phi'_\ell(C_\ell x_\ell))'$  et en la pré-multipliant par sa transposée, nous obtenons

$$V_\ell(x[k+1]) - V_\ell(x[k]) < -x'[k] Q_\ell x[k] + 2\phi'_\ell(y[k]) S_\ell (\phi_\ell(y[k]) - \Omega_\ell y[k]), \quad (4.24)$$

avec  $V_\ell(x[k]) = x'[k] P_\ell x[k]$  une fonction de Lyapunov quadratique. Comme  $Q_\ell$  est une matrice symétrique définie positive et à cause de la condition de secteur (4.20), l'inégalité (4.24) implique que le mode  $\ell$  est globalement asymptotiquement stable et que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_\ell(x[k]) = 0$ . Nous en déduisons, à partir de l'inégalité (4.24) le majorant de la fonction coût (4.21) :

$$\overline{\mathcal{J}}_\ell(x_0) = V_\ell(x_0) > \sum_{k=0}^{+\infty} x'[k] Q_\ell x[k] = \mathcal{J}_\ell(x_0). \quad (4.25)$$

□

Dans la suite, si la contrainte (4.23) du problème d'optimisation (4.22) n'est pas faisable, nous poserons par abus de notation  $\overline{\mathcal{J}}_\ell = +\infty$ .

La présence de la non-linéarité dans les modèles de Lur'e à temps discret conduit à considérer des majorants définis dans la proposition 4.2. Les systèmes linéaires sont un cas particulier où les majorants obtenus sont égaux aux valeurs des performances. Ainsi, sans pouvoir déterminer exactement la valeur du coût dans le cadre des systèmes non-linéaires, la définition 4.1 ne peut pas être directement utilisée. Il est donc nécessaire de préciser la notion de consistance dans un cadre plus générique par rapport aux outils dont nous disposons. Cette version englobe le cas linéaire et n'est pas à strictement parler une nouvelle définition. Dans le cadre non-linéaire, la notion de consistance ne se réfère pas uniquement à une stratégie générant une loi de commutation, mais bien au couple stratégie de commutation et classe de majorants.

Avant d'énoncer la définition de consistance telle que nous la considérerons dans le cadre non-linéaire, nous introduisons deux sous ensembles de  $\mathcal{C}$  :  $\underline{\mathcal{C}}$  contenant les lois figées solutions du problème d'optimisation (4.2) et  $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \setminus \underline{\mathcal{C}}$  (en d'autres termes ces modes sont associés à des majorants infinis  $\overline{\mathcal{J}}_\ell = +\infty$ ).

La consistance d'une loi de commutation se définit de la manière suivante dans notre cadre non-linéaire.

**Définition 4.2** Considérons le système commuté (4.19). Une stratégie de commutation particulière  $\sigma_s(\cdot)$ , associée à un majorant du critère (4.21)  $M_{co}(x_0)$  fonction de la condition initiale, est consistante si elle appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}$  et garantit  $\forall \sigma \in \mathcal{C}$  et  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  que

$$M_{co}(x_0) \leq \overline{\mathcal{J}}_\sigma(x_0), \quad (4.26)$$

où  $\overline{\mathcal{J}}_\sigma(x_0)$  sont définis par la proposition 4.2.

**Remarque 4.2** La définition 4.2 pour la consistance s'applique aux cas linéaires et non-linéaires en se démarquant des spécificités et particularités du cas linéaire.

Le problème qui nous intéresse est alors décrit de la manière suivante :

**Problème 4.2** Construire une loi de commutation  $\sigma_s$  et un majorant quadratique  $\overline{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0)$  de la fonction coût (4.21), aussi petit que possible, tel que la propriété de consistance de la définition 4.2 soit satisfaite.

Le théorème suivant propose une solution à ce problème.

**Théorème 4.3** Pour la classe des systèmes définis par (4.19) et une fonction coût (4.21), s'il existe une matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}$ , des matrices symétriques définies positives  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices diagonales définies positives  $S_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , telles que  $\forall i \in \mathcal{I}_N$

$$\min_{P_i, S_i, \Pi} \left( \min_{i \in \mathcal{I}_N} \text{trace}(P_i) \right), \quad (4.27)$$

sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} A'_i(P)_{p,i} A_i - P_i + Q_i & \star \\ B'_i(P)_{p,i} A_i + S_i \Omega_i C_i & B'_i(P)_{p,i} B_i - 2S_i \end{bmatrix} < 0, \quad (4.28)$$

alors la stratégie de min-switching

$$\sigma_s(k) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}_N} x'[k] P_i x[k], \quad (4.29)$$

garantit que l'origine du système (4.19) est globalement asymptotiquement stable. De plus, un majorant de la fonction coût (4.21) est donné par  $V_{\min}(x_0)$ , où  $x_0$  est la condition initiale et

$$V_{\min}(x_0) = \min_{i \in \mathcal{I}_N} x'_0 P_i x_0, \quad (4.30)$$

est une fonction de Lyapunov composite. La stratégie de min-switching (4.29) est consistante au sens de la définition 4.2.

Pour prouver que la loi de commutation (4.29) est consistante, il est nécessaire de comparer le majorant induit par le problème d'optimisation (4.27) avec le majorant donné par l'étude de chaque mode indépendamment les uns des autres (voir la proposition 4.2).

**Preuve du théorème 4.3.** Cette preuve est décomposée en deux parties. La première partie donne un majorant de la fonction coût considéré en association de la stratégie de min-switching. La seconde partie justifie que le majorant donné par (4.29) est consistant.

Étape 1 : en introduisant  $z[k] = (x'[k] \ \varphi'_i(C_i x[k]))'$ , la fonction de Lyapunov (4.10) vérifie l'égalité

$$V_{\min}(x[k+1]) = \min_{j \in \mathcal{J}_N} x'[k+1] P_j x[k+1], \quad (4.31)$$

$$= \min_{\substack{\sum_{j \in \mathcal{J}_N} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \in \mathbb{R}^+}} \sum_{j \in \mathcal{J}_N} \lambda_j z'[k] \begin{bmatrix} A'_i P_j A_i & \star \\ B'_i P_j A_i & B'_i P_j B_i \end{bmatrix} z[k]. \quad (4.32)$$

Par définition, chaque colonne de la matrice de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}$  appartient au simplex unité. Nous en déduisons

$$V_{\min}(x[k+1]) = \min_{\substack{\sum_{j \in \mathcal{J}_N} \lambda_j = 1 \\ \pi_{ji} \in \mathbb{R}^+}} \sum_{j \in \mathcal{J}_N} \pi_{ji} z'[k] \begin{bmatrix} A'_i P_j A_i & \star \\ B'_i P_j A_i & B'_i P_j B_i \end{bmatrix} z[k], \quad (4.33)$$

$$\leq z'[k] \begin{bmatrix} A'_i(P)_{p,i} A_i & \star \\ B'_i(P)_{p,i} A_i \Omega_i C_i & B'_i(P)_{p,i} B_i \end{bmatrix} z[k]. \quad (4.34)$$

En post-multipliant l'inégalité (4.28) par  $z'[k]$  et en la pré-multipliant par sa transposée, nous déduisons alors

$$V_{\min}(x[k+1]) - x'[k] P_i x[k] \leq 2 \varphi'_i(C_i x[k]) S_i (\varphi_i(C_i x[k]) - \Omega_i C_i x[k]) - x'[k] Q_i x[k]. \quad (4.35)$$

Or à l'instant  $k$ , le mode  $i = \underset{j \in \mathcal{J}_N}{\operatorname{argmin}} x'[k] P_j x[k]$  est supposé actif, c'est-à-dire  $V_{\min}(x[k]) = x'[k] P_i x[k]$ . La condition de secteur (4.20), étant vérifiée, nous pouvons réécrire l'inégalité (4.35) tel que

$$V_{\min}(x[k+1]) - V_{\min}(x[k]) \leq -x'[k] Q_i x[k] < 0, \quad \forall x[k] \neq 0. \quad (4.36)$$

Grâce au fait que  $Q_i$  est symétrique et définie positive, l'inégalité (4.36) implique que le système (4.19) soit globalement asymptotiquement stable. Cela signifie que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} V_{\min}(x[k]) = 0$  et que la loi de commutation de type min-switching (4.29), notée  $\sigma_s$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}$ . En sommant l'inégalité (4.36) sur l'horizon de temps  $k = 0$  à  $k = +\infty$ , nous obtenons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} V_{\min}(x[k]) - V_{\min}(x_0) \leq -\mathcal{J}_{\sigma_s}(x_0), \quad (4.37)$$

c'est-à-dire, le majorant de la fonction coût (4.21) est donné par

$$V_{\min}(x_0) > \mathcal{J}_{\sigma_s}(x_0). \quad (4.38)$$

Étape 2 : pour prouver que la stratégie de type min-switching  $\sigma_s$  est consistante dans le sens donné par la définition 4.2, nous supposons qu'au moins un des modes, noté  $\ell$  appartient à  $\underline{\mathcal{C}}$ . En d'autres termes, le sous-système caractérisé par  $\{A_\ell; B_\ell; C_\ell; \Omega_\ell\}$  est solution du problème d'optimisation (4.22). Cette hypothèse est nécessaire pour avoir l'ensemble  $\underline{\mathcal{C}}$  non vide.

Sélectionnons  $\Pi_\ell \in \mathcal{M}$  avec des composantes nulles, à l'exception de  $\forall j \in \mathcal{J}_N$ ,  $\pi_{\ell j} = 1$ , tel que  $(P)_{p,j} = P_\ell$ . Les contraintes d'optimisation (4.28) deviennent alors

$$\begin{bmatrix} A'_i P_\ell A_i - P_i + Q_i & \star \\ B'_i P_\ell A_i + S_i \Omega_i C_i & B'_i P_\ell B_i - 2S_i \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_N \setminus \{\ell\}, \quad (4.39)$$

et l'inégalité (4.23) pour  $i = \ell$ .  $\forall i \in \mathcal{J}_N \setminus \{\ell\}$ . Comme la loi de commutation constante  $\ell$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{C}$ , il existe toujours des matrices  $P_\ell$  et  $S_\ell$  vérifiant la contrainte (4.23). Il est alors toujours possible de choisir des matrices  $P_i$  et  $S_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{J}_N \setminus \{\ell\}$  aussi grande que nécessaire vérifiant (4.39), tel que  $P_i > P_\ell$ ,  $\forall i \in \mathcal{J}_N \setminus \{\ell\}$ . Avec ce choix de paramètres, le critère du problème d'optimisation (4.27) est égal à celui présenté dans le cadre de l'étude modale (4.22). Nous déduisons donc que le majorant obtenu avec le théorème 4.3, en considérant la matrice de Metzler  $\Pi_\ell$ , est égal à celui déterminé avec la proposition 4.2, c'est-à-dire que le majorant est  $\overline{\mathcal{J}}_\ell(x_0) = x_0' P_\ell x_0$ . Le théorème 4.3 recherche la meilleure solution sur l'ensemble des matrices de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}$ . La matrice  $\Pi_\ell$  étant une solution particulière, nous déduisons que

$$V_{\min}(x_0) \leq \overline{\mathcal{J}}_\ell(x_0), \quad \forall \ell \in \mathcal{C}. \quad (4.40)$$

Finalement, comme les autres lois de commutation constantes appartenant à  $\mathcal{C}$  sont associées à des majorants infinis, l'inégalité (4.40) est vérifiée  $\forall \ell \in \mathcal{C}$ . Cela termine la preuve.  $\square$

Comme au chapitre 3, nous choisissons l'implémentation du théorème précédent à l'aide d'une approche sous-optimale en considérant la sous-classe des matrices de Metzler  $\mathcal{M}^{\text{so}}$  (3.96). Cette méthode permet l'obtention de contraintes type LMI pour la proposition 4.3 dépendant uniquement de  $N$  scalaires à choisir. Pour trouver la meilleure solution parmi la sous-classe de Metzler  $\mathcal{M}^{\text{so}}$ , une procédure de recherche en ligne sur les paramètres  $\gamma_i$  est utilisée.

**Proposition 4.3** Pour la classe des systèmes définis par (4.19), pour la fonction coût (4.21) et pour des scalaires fixés  $0 \leq \gamma_i < 1$ , s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i$  et des matrices diagonales définies positives  $S_i$ , avec  $i \in \mathcal{J}_N$ , tel que

$$\min_{P_i, S_i, \gamma_i} \left( \min_{i \in \mathcal{J}_N} \text{trace}(P_i) \right), \quad (4.41)$$

sous les contraintes  $\forall (i, j) \in \mathcal{J}_N^2$ ,  $i \neq j$ ,

$$\begin{bmatrix} A'_i \mathbf{D}_{ij} A_i - P_i + Q_i & \star \\ B'_i \mathbf{D}_{ij} A_i + S_i \Omega_i C_i & B'_i \mathbf{D}_{ij} B_i - 2S_i \end{bmatrix} < 0, \quad (4.42)$$

avec  $\mathbf{D}_{ij} = \gamma_i P_i + (1 - \gamma_i) P_j$ , alors la stratégie (4.29) garantit que l'origine est globalement asymptotiquement stable. Un majorant de la fonction coût (4.21) est donné par  $V_{\min}(x_0)$ , avec  $V_{\min}(\cdot)$  défini par l'équation (4.10). La stratégie min-switching considérée est consistante au sens de la définition 4.2.

**Preuve de la proposition 4.3.** Les scalaires  $\gamma_i = \pi_{ii}$  sont choisis tels que  $\Pi \in \mathcal{M}^{so}$ . Ainsi, en multipliant l'équation (4.42) par  $\pi_{ji}$  et en sommant sur l'ensemble  $j \in \mathcal{J}_N$ , tel que  $j \neq i$ , nous obtenons, avec  $D_i = \pi_{ii}P_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_N, j \neq i} \pi_{ji}P_j$

$$(1 - \gamma_i) \begin{bmatrix} A_i' D_i A_i - P_i + Q_i & \star \\ B_i' D_i A_i + S_i \Omega_i C_i & B_i' D_i B - 2S_i \end{bmatrix} < 0. \quad (4.43)$$

En multipliant cette dernière inégalité par  $(1 - \gamma_i)^{-1}$ ,  $\forall i \in \mathcal{J}_N$ , nous obtenons une solution particulière de l'inégalité (4.28). En prenant les cas particuliers  $\gamma_i = 0$  ou  $\gamma_i = 1$ , nous retrouvons les cas particuliers mentionnés dans la preuve 4.2. En suivant la preuve 4.2, nous établissons que la stratégie de min-switching donnée par la proposition 4.3 est consistante.  $\square$

### Exemple 4.2

Cet exemple illustre numériquement la propriété de consistance. Nous considérons le système (4.19) avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0,4 & -0,7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0,6 & 0 \\ -0,8 & -0,8 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, B_1 = -\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [0,6 \quad 0,2], C_2 = [0,2 \quad 5], \varphi_1(y[k]) = \frac{\Omega_1 y[k]}{2} (1 + \cos(2y[k])), \\ \varphi_2(y[k]) &= \frac{\Omega_2 y[k]}{2} (1 - \sin(5,5y[k])), \Omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Omega_2 = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Le tableau 4.1 illustre l'évolution des majorants des fonctions coûts pour la condition initiale  $x_0$  pour différentes valeurs  $q_i$ , tel que  $Q_i = q_i I_n$  et  $i \in \mathcal{J}_N$ .  $\overline{\mathcal{J}}_i(x_0)$  (resp.  $V_{\min}(x_0)$ ) désignent le majorant de la fonction coût donné pour le mode  $i$  (resp. par la loi de commutation *min-switching* (4.29), voir proposition 4.3). Une recherche en ligne est effectuée sur  $\gamma_i$ , tel que  $0 \leq \gamma_i \leq 1$  avec un pas de 0,1. Un minorant approchant la valeur réelle du coût de la trajectoire à une erreur de 1% est obtenue pour chaque stratégie via le protocole 3.1. Ces minorants sont désignés par  $\widetilde{\mathcal{J}}_j(x_0)$ , où  $x_0$  est la condition initiale et  $j$  désigne la stratégie de commutation :  $j = \sigma_s$  pour la loi de *min-switching* et  $j = 1$  ou 2 pour les stratégies modales.

| $q_1$ | $q_2$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0)$ | $V_{\min}(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_1(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_2(x_0)$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_1(x_0)$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_2(x_0)$ |
|-------|-------|-------------------------------------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1     | 1     | 55                                        | 88              | 159                             | 309                             | 111                              | 60                               |
| 4     | 1     | 69                                        | 180             | 637                             | 309                             | 445                              | 60                               |
| 1     | 4     | 111                                       | 159             | 159                             | 1237                            | 111                              | 242                              |

TABLE 4.1 – Évolution des fonctions coûts et de leurs estimées.

Pour des valeurs de paramètres  $q_1 = q_2 = 1$ , les trajectoires, sur lesquelles sont évaluées les performances  $\widetilde{\mathcal{J}}_j(x_0)$ ,  $j \in \{1, 2, \sigma_s\}$ , sont tracées sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5 pour respectivement la stratégie de *min-switching*, celle du mode 1 et celle du mode 2.

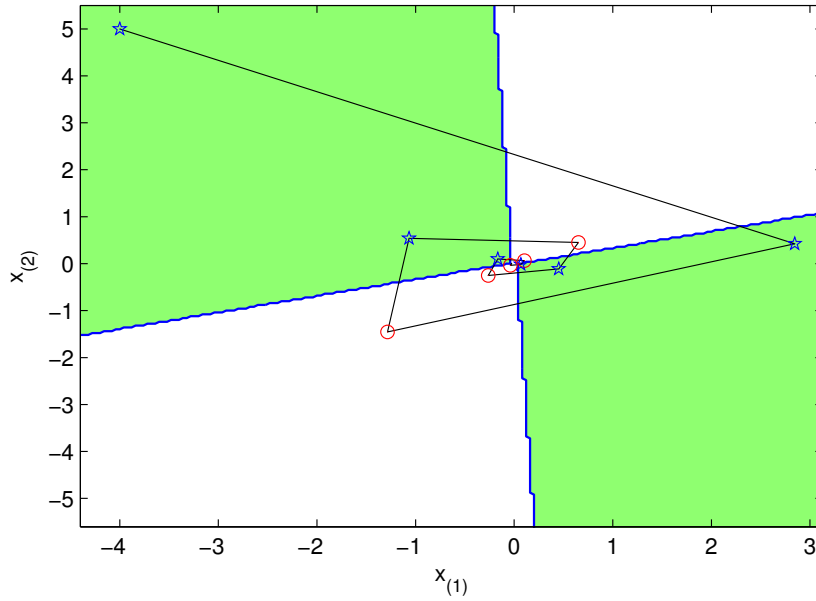


FIGURE 4.3 – Les zones blanches et vertes représentent les zones d'activation des modes 1 et 2. Elles sont obtenues par la proposition 4.3 avec  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$  et  $q_1 = q_2 = 1$ . La ligne noire représente la trajectoire commutée, où les pentagones bleus sont les échantillons dans la zone d'activation 2 et les cercles rouges ceux de la zone d'activation 1.

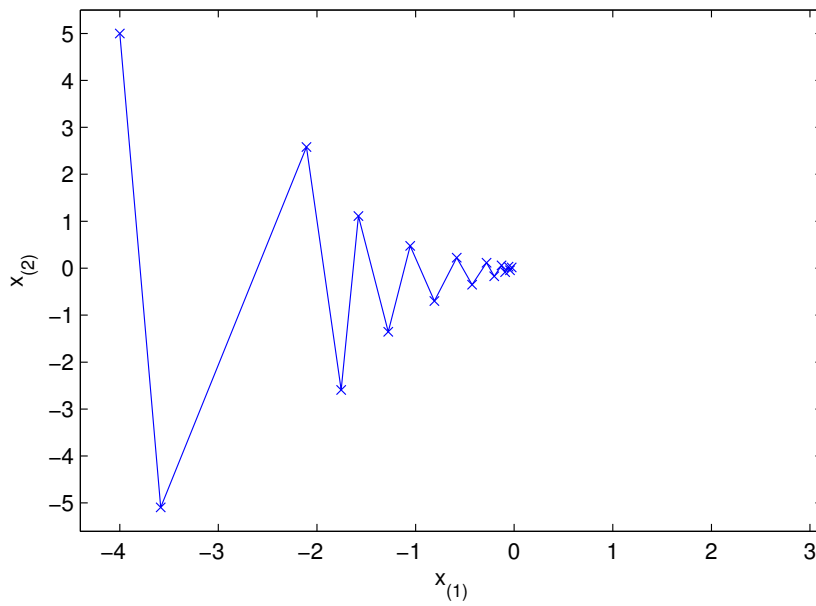


FIGURE 4.4 – La ligne bleue représente la trajectoire obtenue en appliquant le mode 1, les croix bleues étant les échantillons.

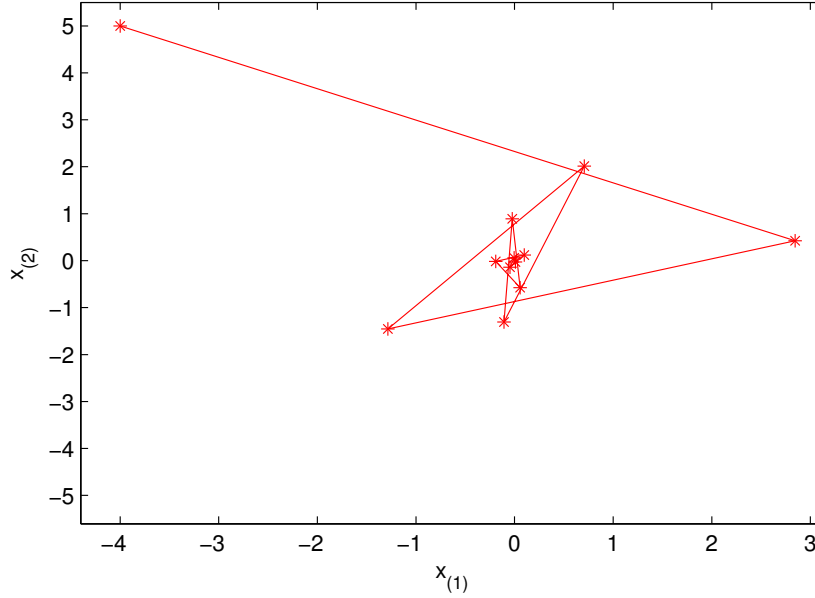


FIGURE 4.5 – La ligne rouge représente la trajectoire obtenue en appliquant le mode 2, les étoiles rouges étant les échantillons.

Nous notons que le majorant  $V_{\min}(x_0)$  donné par la proposition 4.3 est toujours plus petit ou égal que le majorant du coût obtenu par chaque mode séparément  $\overline{\mathcal{J}}_i(x_0)$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_2$ , avec un gain sur ce majorant pour les valeurs de  $q_1 = q_2 = 1$  de  $\frac{\overline{\mathcal{J}}_i(x_0) - V_{\min}(x_0)}{\overline{\mathcal{J}}_i(x_0)} = 44\%$  par rapport au meilleur majorant modal. Cette amélioration se réduit à 0% dans le cas où  $q_1 = 1$  et  $q_2 = 2$ . La stratégie de *min-switching* est alors la stratégie modale 1. Nous avons donc la relation suivante :

$$V_{\min}(x_0) \leq \overline{\mathcal{J}}_i(x_0), \quad \forall i \in \mathcal{I}_2, \quad (4.44)$$

c'est-à-dire, que la stratégie de *min-switching*, associée au majorant  $V_{\min}(x_0)$ , est consistante selon la définition 4.2. Cependant, contrairement au cas linéaire, nous ne pouvons pas étendre ce résultat au coût exact, ainsi pour les paramètres  $(q_1, q_2) = (4, 1)$ , nous obtenons  $\widetilde{\mathcal{J}}_2(x_0) < \widetilde{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0)$ .

Comme nous l'avons déjà mentionné, cela est directement lié à notre incapacité à évaluer la valeur de la fonction coût dans le cas d'une stratégie modale. Dans le cadre non-linéaire,  $\mathcal{J}_i \leq \overline{\mathcal{J}}_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_2$ . De plus, l'écart entre les coûts  $\widetilde{\mathcal{J}}_i$  et son majorant  $\overline{\mathcal{J}}_i$  peut être important. Il faut néanmoins rappeler que notre approche reste valable pour toute condition initiale et non uniquement pour cette valeur de  $x_0$ , ainsi que pour toute non-linéarité vérifiant la condition de secteur (4.20). Par exemple, si nous prenons deux cas particuliers de non-linéarité pour le mode 1,

- si  $\varphi_1(y[k]) = 0$ , alors le système de Lur'e (4.19) est un système linéaire dont nous pouvons obtenir le coût exact via le théorème 4.1 et le coût associé est  $\mathcal{J}_1^a(x_0) = 152$ .
- si  $\varphi_1(y[k]) = \Omega_1 y[k]$ , alors le système de Lur'e (4.19) est un système linéaire dont nous pouvons obtenir le coût exact via le théorème 4.1 et le coût associé est  $\mathcal{J}_1^b(x_0) = 98$ .

Nous obtenons bien les relations  $\mathcal{J}_1^a(x_0) \leq \overline{\mathcal{J}}_1(x_0)$  et  $\mathcal{J}_1^b(x_0) \leq \overline{\mathcal{J}}_1(x_0)$ , ce qui illustre l'écart obtenu entre la borne et la valeur du coût selon la forme de la non-linéarité.

Nous venons de prouver que la stratégie de *min-switching* (4.29) garantit un meilleur majorant quadratique de la fonction coût (4.21) qu'en considérant un mode isolé. La section suivante reprend la méthode de stabilisation des systèmes de Lur'e à données échantillonnées, développée au chapitre 3. L'objectif est alors de préciser la notion de consistance et son apport dans le cadre de la synthèse conjointe proposée au théorème 3.4 utilisant un échantillonnage non-uniforme comparée à la stratégie n'utilisant qu'une seule période d'échantillonnage.

### 4.3 Échantillonnage non-uniforme consistant

Nous reprenons dans cette section les résultats développés au chapitre 3, et plus précisément la proposition 3.3 et le théorème 3.4 concernant la synthèse de l'entrée de commande stabilisant le système de Lur'e à données échantillonnées (3.31). L'objectif de cette section est de garantir la performance obtenue via un échantillonnage non-uniforme. Comme nous l'avons vu à la section 4.2, nous ne pouvons pas utiliser la définition existante de la consistance concernant les systèmes linéaires. En effet la présence de la non-linéarité dans le système (3.31) ne permet pas l'accès à une commande optimale et nous oblige à considérer la définition 4.2.

Le théorème 4.4 justifie l'intérêt de l'utilisation d'une stratégie d'échantillonnage non-uniforme comparée à celle n'utilisant qu'une seule période d'échantillonnage.

**Théorème 4.4** *La stratégie de min-switching donnée par le théorème 3.4 (resp. la proposition 3.3), associée au majorant quadratique (3.88) du critère (3.59), est consistante selon la définition 4.2.*

**Preuve du théorème 4.4.** *Nous supposons qu'il existe au moins un mode, noté  $\ell$  dans l'ensemble  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire que le sous système  $\{A_\ell; B_\ell; C_\ell; \Omega_\ell; F_\ell; r_{1,\ell}; r_{2,\ell}; T_\ell\}$  vérifie le problème d'optimisation (3.81). Cette hypothèse est nécessaire pour que l'ensemble  $\mathcal{C}$  ne soit pas vide. Nous définissons la matrice de Metzler  $\Pi_\ell \in \mathcal{M}$  tel que  $\forall j \in \mathcal{J}_N$ ,  $\pi_{\ell j} = 1$  et tous les autres éléments soient nuls. Nous déduisons alors que  $\mathcal{V}_i = J_i' + J_i - \mathcal{T}_{i\ell}$  avec*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{i\ell} & \star \\ J_i & G_\ell \end{bmatrix} < 0_{2n}. \quad (4.45)$$

*Les autres contraintes définies par l'inégalité (3.83) sont transparentes pour le problème d'optimisation, vu que leurs paramètres n'affectent pas la valeur de  $\mathcal{V}_i$ .*

*En utilisant la même transformation qu'à l'équation (3.90), nous avons  $\mathcal{V}_i \leq G_\ell$ . Nous déduisons, de l'inégalité (3.91),  $\forall i \in \mathcal{J}_N$ ,*

$$\begin{bmatrix} -R_i^{-1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -Q_i^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -G_\ell & \star & \star \\ Y_{1,i}' & U_i' & ((A_i^d + \Delta_{2,i})U_i + (I_n + \Delta_{1,i})F_i^d Y_{1,i})' & G_i - U_i' - U_i & \star \\ Y_{2,i}' & 0 & (B_{d,i}W_i + (I_n + \Delta_{1,i})F_i^d Y_{2,i})' & \Omega C U_i & -2W_i \end{bmatrix} < 0_{m+3n+p}. \quad (4.46)$$

$\forall i \in \mathcal{I}_N \setminus \{\ell\}$ , les matrices  $G_i$ ,  $W_i$ ,  $U_i$ ,  $Y_{1,i}$  et  $Y_{2,i}$  sont arbitrairement fixées tel que  $G_i < G_\ell$ . Par hypothèse  $G_\ell$  vérifie la contrainte (4.46) pour  $i = \ell$ , il est donc toujours possible de trouver des matrices  $G_i$ ,  $W_i$ ,  $U_i$ ,  $Y_{1,i}$  et  $Y_{2,i}$  vérifiant (4.46) pour  $i \neq \ell$  et  $(i, \ell) \in \mathcal{I}_N^2$ . Par conséquent, les paramètres particuliers de la matrice de Metzler  $\Pi_\ell$  mènent à réduire l'inégalité (4.46) à

$$\begin{bmatrix} -R_\ell^{-1} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -Q_\ell^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -G_\ell & \star & \star \\ Y'_{1,\ell} & U'_\ell & ((A_\ell^d + \Delta_{2,\ell})U_\ell + (I_n + \Delta_{1,\ell})F_\ell^d Y_{1,\ell})' & G_\ell - U'_\ell - U_\ell & \star \\ Y'_{2,\ell} & 0 & (B_{d,\ell}W_\ell + (I_n + \Delta_{1,\ell})F_\ell^d Y_{2,\ell})' & \Omega C U_\ell & -2W_\ell \end{bmatrix} < 0_{m+3n+p}. \quad (4.47)$$

En appliquant deux compléments de Schur et le lemme de Petersen dans le sens inverse de celle utilisée dans la preuve du théorème 3.4, les contraintes (4.47) sont équivalentes aux contraintes (3.82).

Par conséquent, nous avons prouvé que les contraintes (3.82) et (3.83) sont réduites aux contraintes (4.47) et (4.45) avec un choix de matrice de Metzler spécifique  $\Pi_\ell$ .

En choisissant  $G_\ell > G_i$ ,  $\forall i \neq \ell$ , nous avons  $-\text{trace}(G_\ell) < -\text{trace}(G_i)$ ,  $\forall i \neq \ell$ . L'objectif du problème d'optimisation (3.81) est donc  $\min(-\text{trace}(G_\ell))$ .

Considérer la matrice de Metzler  $\Pi_\ell$  est donc équivalent à la synthèse de l'entrée de commande (3.32) avec un échantillonnage uniforme à  $T_\ell$ . Les conclusions du théorème 3.4 s'appliquent, et  $\overline{\mathcal{J}}_\ell(x_0) = x_0' P_\ell x_0$ ,  $\ell \in \underline{\mathcal{C}}$ , est un majorant de la fonction coût (3.59).

Le théorème 3.4 recherche la meilleure solution parmi l'ensemble des matrices de Metzler  $\mathcal{M}$ , tout en prenant en compte, avec le même objectif et les mêmes contraintes, le cas de l'échantillonnage uniforme, nous concluons que

$$V_{\min}(x_0) \leq \overline{\mathcal{J}}_\ell(x_0), \quad \forall \ell \in \underline{\mathcal{C}}. \quad (4.48)$$

Pour conclure, nous remarquons que les autres lois de commutation constantes sont dans l'ensemble  $\underline{\mathcal{C}}$ , dont les majorants sont supposés infinies. Donc l'inégalité (4.48) est vérifiée  $\forall \ell \in \underline{\mathcal{C}}$ , ce qui conclut la preuve pour le théorème 3.4. Ce résultat est également vrai pour la proposition 3.3 en remarquant que  $\Pi_\ell \in \mathcal{M}^{\text{sub}}$ . Par conséquent, la même preuve est applicable pour la proposition 3.3. □

Le théorème 4.4 garantit la consistance de l'échantillonnage non-uniforme via une stratégie de type *min-switching*. Cette notion a été démontrée dans le cadre de la fonction coût (4.21) en considérant le modèle discrétisé exact (3.58). La stratégie d'échantillonnage non-uniforme introduite au chapitre 3, donnera donc toujours un majorant du coût plus petit ou égal à celui généré par un échantillonnage uniforme, en considérant notre méthode. Nous notons également, que comme à la section précédente, la notion de consistance ne peut pas être étendue sur le coût exact des trajectoires considérées comme c'est le cas pour les systèmes linéaires (voir section 4.1).

**Remarque 4.3** La propriété de consistance est valable pour la stratégie de commutation obtenue via la proposition 3.3. La preuve du théorème 4.4 reste valable pour la proposition 3.3 en remarquant que la matrice de Metzler  $\Pi_\ell$ , définie telle que  $\forall j \in \mathcal{I}_N$ ,  $\pi_{\ell j} = 1$  et tous les autres éléments soient nuls, appartient au sous-ensemble  $\mathcal{M}^{\text{so}}$ .

Nous nous proposons d'illustrer cela avec le prochain exemple.

### Exemple 4.3

Soit le système (3.31) décrit par les paramètres suivants

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,6 \\ -0,8 & -0,1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix}, C = [0,1 \quad -0,15],$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \varphi(y) = \frac{\Omega y}{2}(1 + \cos(6y + 0,1y^2)), \Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les périodes d'échantillonnage considérées sont  $T_1 = 0,1$  et  $T_2 = 0,3$ . La fonction coût (3.59) est définie par les paramètres  $R_1 = 3, R_2 = 1, Q_1 = 3I_2$  et  $Q_2 = I_2$ . Nous considérons donc qu'utiliser la période d'échantillonnage la plus petite  $T_1$  a un coût plus important que d'appliquer  $T_2$  et que ce coût est réparti à parts égales sur l'état du système et sa commande. La proposition 3.3 mène à la solution

$$P_1^{\text{co}} = \begin{bmatrix} 358,4263 & 280,4982 \\ 280,4982 & 671,2604 \end{bmatrix}, K_1^{\text{co}} = [-1,4628 \quad -4,0444], \Gamma_1^{\text{co}} = -0,1409,$$

$$P_2^{\text{co}} = \begin{bmatrix} 383,9176 & 260,6704 \\ 260,6704 & 548,8238 \end{bmatrix}, K_2^{\text{co}} = [-4,5099 \quad -18,5721], \Gamma_2^{\text{co}} = -1,7408,$$

en utilisant la matrice de Metzler  $\mathcal{M}^{\text{so}}$  avec les coefficients  $\gamma_1 = 0,3$  et  $\gamma_2 = 0$ .

La trajectoire du système à données échantillonnées (3.31) d'origine  $x'_0 = (-14 \quad 0)$  est tracée dans le plan de phase en figure 4.6. Cette illustration montre les zones d'activation des modes 1 et 2, ainsi que la trajectoire utilisant la stratégie d'échantillonnage non-uniforme utilisant les périodes d'échantillonnage  $T_1$  et  $T_2$ .

La synthèse de correcteur avec un échantillonnage non-uniforme est un cas particulier du théorème 3.4 en considérant le nombre de mode  $N$  égal à un. En tenant compte uniquement de la période  $T_1$ , nous obtenons :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 538,3927 & 216,3261 \\ 216,3261 & 964,6829 \end{bmatrix}, K_1 = [-0,8587 \quad -5,9946], \Gamma_1 = -0,2864,$$

et pour  $T_2$  :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 416,6371 & 347,4038 \\ 347,4038 & 644,5325 \end{bmatrix}, K_2 = [-7,6981 \quad -21,3498], \Gamma_2 = -2,0886.$$

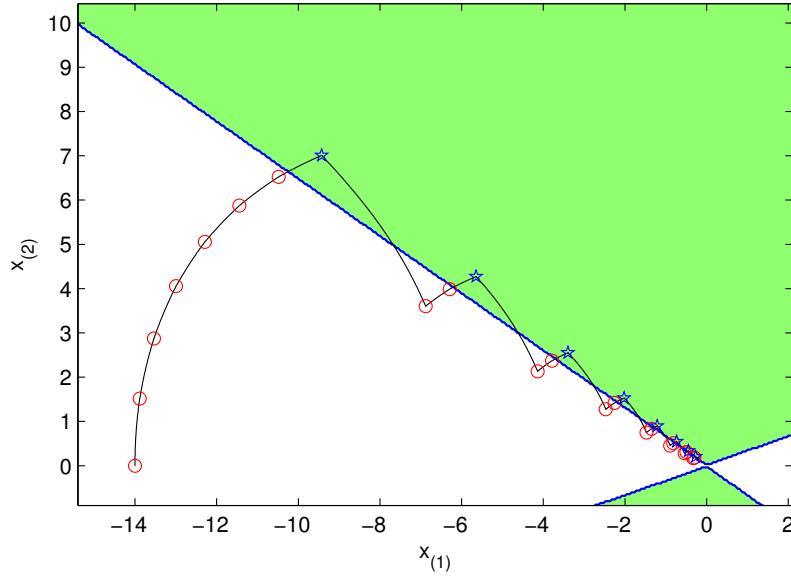


FIGURE 4.6 – Les zones blanches et vertes représentent les zones d'activation des modes 1 et 2. Elles sont obtenues par la proposition 3.3 avec  $\gamma_1 = 0,3$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 1$ ,  $Q_1 = 3I_2$  et  $Q_2 = I_2$ . La ligne noire représente la trajectoire dont l'échantillonnage est non-uniforme, où les pentagones bleus sont les échantillons dans la zone d'activation 2 (période  $T_2$ ) et les cercles rouges ceux de la zone d'activation 1 (période  $T_1$ ).

Les figures 4.7 et 4.8 représentent les trajectoires lors de l'utilisation d'un échantillonnage uniforme pour les périodes d'échantillonnage  $T_1$  et  $T_2$  avec les paramètres calculés ci-dessus.

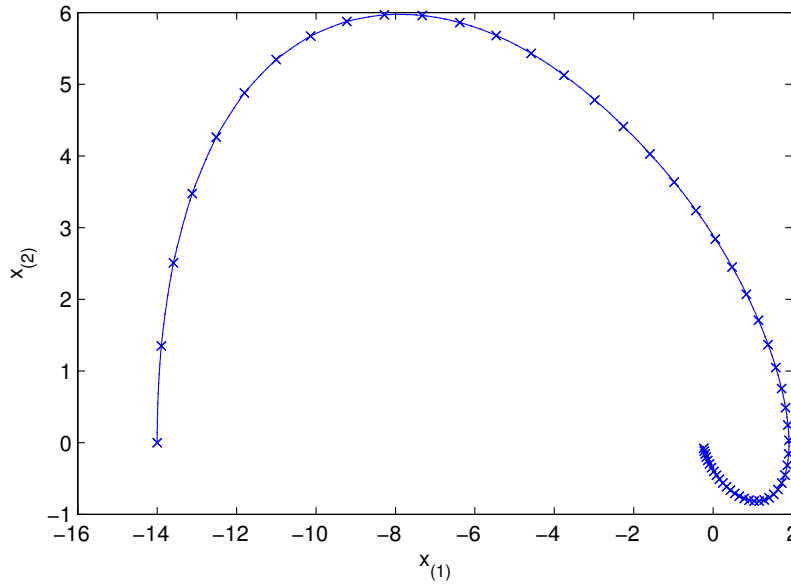


FIGURE 4.7 – La ligne bleue représente la trajectoire obtenue avec un échantillonnage uniforme  $T_1 = 0,1$ , les croix bleues étant les échantillons.

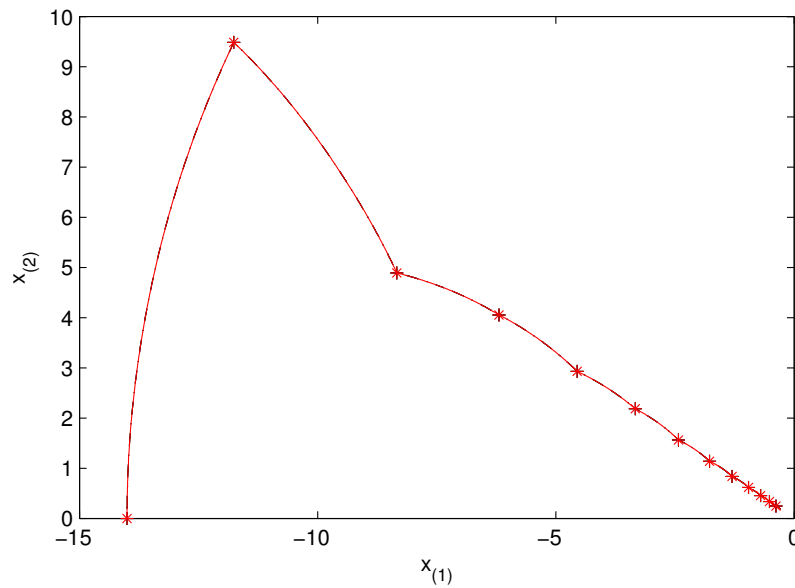


FIGURE 4.8 – La ligne rouge représente la trajectoire obtenue avec un échantillonnage uniforme  $T_2 = 0,3$ , les étoiles rouges étant les échantillons.

L'influence de ces lois de commande est représentée sur les figures 4.9, 4.10 et 4.11 en fonction du temps.

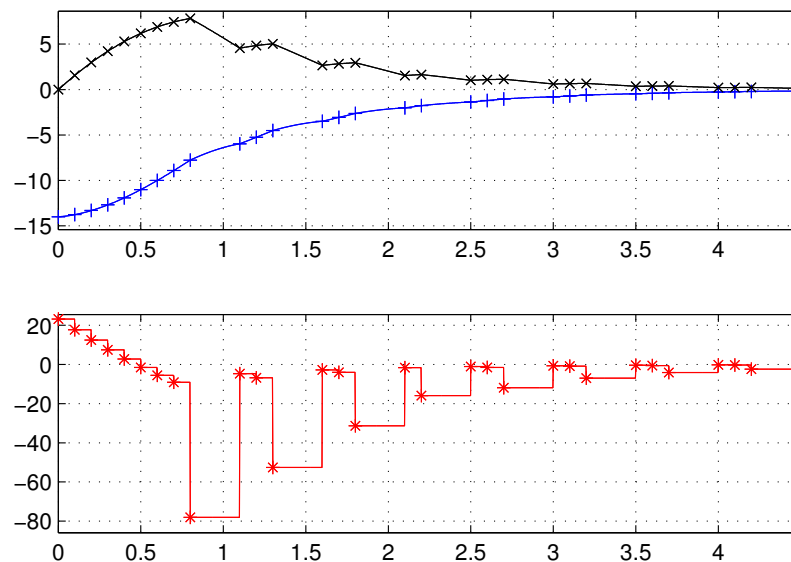


FIGURE 4.9 – Stratégie d'échantillonnage non-uniforme. Première fenêtre : la ligne bleue (resp. noire) représente la première (resp. seconde) composante du vecteur d'état en fonction du temps. Deuxième fenêtre : la ligne rouge décrit l'entrée de commande. Les croix bleues, les cercles noirs et les plus rouges symbolisent les échantillons.

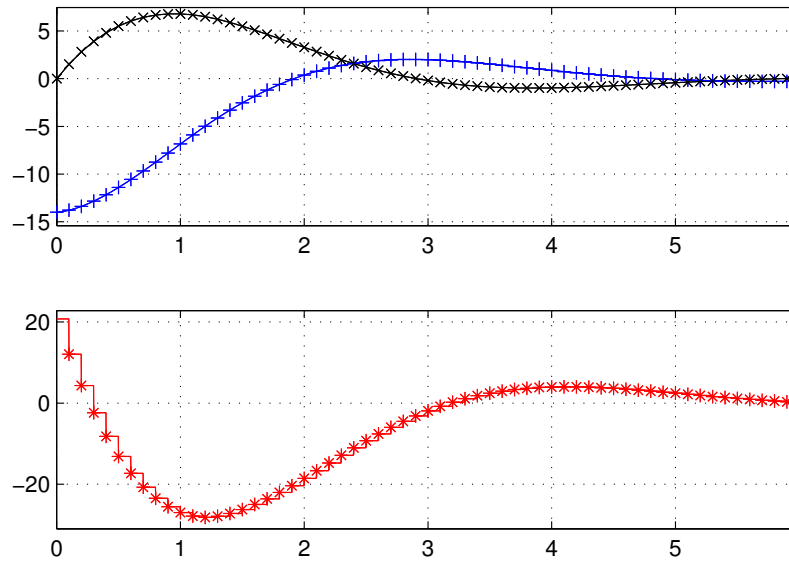


FIGURE 4.10 – Stratégie d'échantillonnage uniforme avec  $T_1 = 0,1$ . Première fenêtre : la ligne bleue (resp. noire) représente la première (resp. seconde) composante du vecteur d'état en fonction du temps. Deuxième fenêtre : la ligne rouge décrit l'entrée de commande. Les croix bleues, les cercles noirs et les plus rouges symbolisent les échantillons.

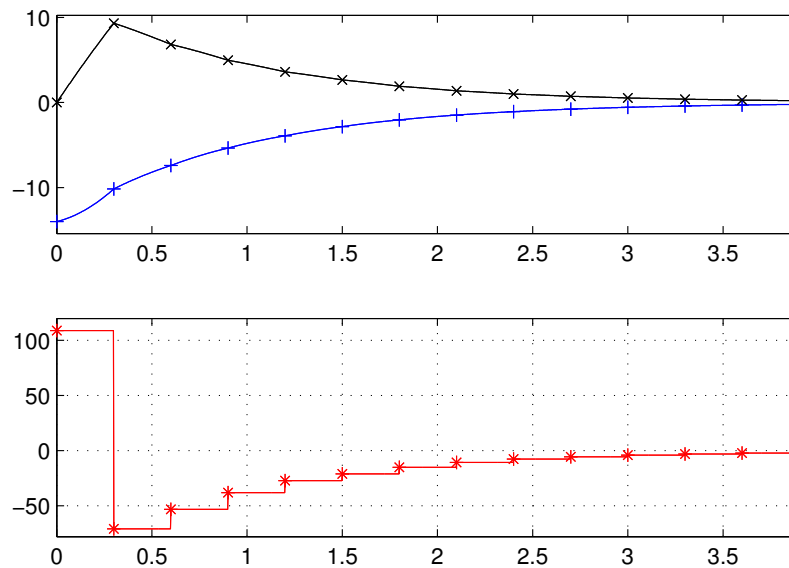


FIGURE 4.11 – Stratégie d'échantillonnage uniforme avec  $T_2 = 0,3$ . Première fenêtre : la ligne bleue (resp. noire) représente la première (resp. seconde) composante du vecteur d'état en fonction du temps. Deuxième fenêtre : la ligne rouge décrit l'entrée de commande. Les croix bleues, les cercles noirs et les plus rouges symbolisent les échantillons.

Nous désignons par la suite la stratégie de *min-switching* par  $\sigma_s$ . La proposition 3.3 nous donne les valeurs de majorant de la fonction coût et nous ré-utilisons le protocole 3.1, avec une erreur fixée à  $\varepsilon = 1\%$ , pour l'obtention des fonctions coûts simulées  $\widetilde{\mathcal{J}}(x_0)$  pour les différentes stratégies. Dans le but d'illustrer la consistance, nous choisissons de réécrire le critère sous la forme  $R_1 = r_1$ ,  $R_2 = r_2$ ,  $Q_1 = q_1 I_2$  et  $Q_2 = q_2 I_2$ , et de faire varier les scalaires  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_1$  et  $r_2$ . Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2.

| $q_1$ | $q_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0)$ | $V_{\min}(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_1(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_2(x_0)$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_1(x_0)$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_2(x_0)$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 3     | 1     | 3     | 1     | 19143                                     | 70252           | 105520                          | 81661                           | 40829                            | 29435                            |
| 3     | 1     | 0     | 0     | 1174                                      | 1818            | 8785                            | 2388                            | 5164                             | 1117                             |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 718                                       | 1240            | 2376                            | 2225                            | 1426                             | 1305                             |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 10044                                     | 30791           | 30799                           | 78809                           | 10048                            | 21814                            |

TABLE 4.2 – Évolution des fonctions coût et de leurs estimées.

Nous observons alors des résultats similaires au cas des systèmes de Lur'e présentés à la section 4.2. Le majorant obtenu avec un échantillonnage non-uniforme  $V_{\min}(x_0)$  est toujours plus petit ou égal que ceux donnés par une stratégie d'échantillonnage uniforme  $\overline{\mathcal{J}}_i(x_0)$ ,  $i \in \mathcal{I}_2$ . La stratégie de *min-switching* (3.87), associée au majorant (3.88), est consistante selon la définition 4.2. De plus, la non-linéarité dans le modèle de Lur'e implique que nous ne pouvons pas étendre ce résultat au coût des trajectoires (voir la discussion dans l'exemple 4.2) comme l'illustre la ligne 2 du tableau 4.2 où  $\overline{\mathcal{J}}_2(x_0) \leq \widetilde{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0)$ . Cet effet est même accentué par la présence des incertitudes dans le modèle (3.79). Le gain sur le majorant de la performance obtenu avec la stratégie de *min-switching* est de  $\frac{\overline{\mathcal{J}}_2(x_0) - V_{\min}(x_0)}{\overline{\mathcal{J}}_2(x_0)} = 13\%$  pour les paramètres de la ligne 1 du tableau 4.2, de  $\frac{\overline{\mathcal{J}}_2(x_0) - V_{\min}(x_0)}{\overline{\mathcal{J}}_2(x_0)} = 21\%$  pour les paramètres de la ligne 2 et de  $\frac{\overline{\mathcal{J}}_2(x_0) - V_{\min}(x_0)}{\overline{\mathcal{J}}_2(x_0)} = 44\%$  pour les paramètres de la ligne 3. En conclusion, le gain sur le majorant de la performance utilisant une stratégie d'échantillonnage non-uniforme est conséquent comparé au majorant de la fonction coût obtenu avec une stratégie d'échantillonnage uniforme, sélectionnée parmi les périodes d'échantillonnage considérées dans le problème. De plus, l'échantillonnage non-uniforme ne mènera jamais à un majorant supérieur.

Nous nous intéressons dans le tableau 4.3 aux performances obtenues lors de l'utilisation de la valeur moyenne de la période d'échantillonnage  $T_{av}$ , résultant de la moyenne des périodes d'échantillonnage appliquées sur la trajectoire utilisant la stratégie de *min-switching*. Le critère associé est une moyenne pondérée linéaire des paramètres associés aux périodes  $T_1$  et  $T_2$ . Cela signifie, que nous considérons que le coût associé aux périodes d'échantillonnage est linéaire. Ceci dépend de l'application, d'autres formes (type exponentielle) sont tout à fait compatibles et dépendent de la volonté de pénaliser ou non la période d'échantillonnage moyenne. Dans notre exemple, nous pouvons observer dans le tableau 4.3 que la stratégie de *min-switching* est toujours plus performante, sur le majorant de la performance comme sur l'estimée par simulation. Toutefois cela n'a pas été démontré, c'est pour cela que nous présentons l'exemple 4.3 pour illustrer sur un exemple que cette conclusion n'est pas généralisable. De plus, il est à noter que ce résultat varie grandement en fonction de la pondération choisie définissant le critère pour

la période moyenne ( $Q_{av}$  et  $R_{av}$ ).

| $q_1$ | $q_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $T_{av}$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_{av}(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_{av}(x_0)$ |
|-------|-------|-------|-------|----------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 3     | 1     | 3     | 1     | 0.16     | 27651                               | 89824                              |
| 3     | 1     | 0     | 0     | 0.28     | 1438                                | 2659                               |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 0.27     | 1698                                | 2204                               |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0.1      | 10252                               | 30799                              |

TABLE 4.3 – Évolution du critère de performance en fonction de la période d'échantillonnage moyenne.

#### Exemple 4.4

Soit le système (3.31) décrit par les paramètres suivants

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0, 5 \quad -0, 5],$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi(y) = \frac{\Omega y}{2} (1 + \cos(6y + 0, 1y^2)), \Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Seules les trajectoires du système à données échantillonnées (3.31) d'origine  $x'_0 = (-5 \quad -10)$  sont étudiées dans cet exemple pour les différentes stratégies de commutation (*min-switching* et modales).

Le tableau 4.4 présente la variation des performances en fonction des paramètres  $q_1, q_2, r_1$  et  $r_2$ , tel que la fonction coût (4.21) soit définie par  $R_1 = r_1, R_2 = r_2, Q_1 = q_1 I_2$  et  $Q_2 = q_2 I_2$ . Dans ce second exemple, la consistance de la stratégie d'échantillonnage non-uniforme est vérifiée (voir les valeurs des majorants dans le tableau 4.4). Comme dans l'exemple précédent, nous considérons les performances obtenues en appliquant la période d'échantillonnage moyenne  $T_{av}$  avec un critère associé qui est une moyenne pondérée linéaire des paramètres associés aux périodes  $T_1 = 0, 1$  et  $T_2 = 0, 03$ . Dans cet exemple, le majorant de la fonction coût (3.59) obtenu en utilisant un échantillonnage uniforme  $T_{av}$  est meilleur que celui obtenu en utilisant l'échantillonnage non-uniforme entre les périodes  $T_1$  et  $T_2$  dans les lignes 1 et 2 des tableaux 4.4 et 4.5. Cependant, dans la ligne 1 des tableaux 4.4 et 4.5, l'estimée de la fonction coût par simulation est meilleure dans le cadre de la stratégie d'échantillonnage non-uniforme. Nous rappelons que ces observations sont très sensibles par rapport à la pondération choisie du critère pour la période moyenne ( $Q_{av}$  et  $R_{av}$ ).

| $q_1$ | $q_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_{\sigma_s}(x_0)$ | $V_{\min}(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_1(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_2(x_0)$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_1(x_0)$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_2(x_0)$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------------|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 5     | 1     | 0     | 0     | 171                                       | 678             | 1554                            | 678                             | 1163                             | 158                              |
| 2     | 1     | 0     | 0     | 277                                       | 367             | 621                             | 678                             | 464                              | 157                              |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 158                                       | 226             | 312                             | 678                             | 233                              | 157                              |

TABLE 4.4 – Évolution des fonctions coûts et de leurs estimées.

| $q_1$ | $q_2$ | $r_1$ | $r_2$ | $T_{av}$ | $\widetilde{\mathcal{J}}_{av}(x_0)$ | $\overline{\mathcal{J}}_{av}(x_0)$ |
|-------|-------|-------|-------|----------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 5     | 1     | 0     | 0     | 0,09     | 251                                 | 585                                |
| 2     | 1     | 0     | 0     | 0,08     | 202                                 | 340                                |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 0,036    | 206                                 | 262                                |

TABLE 4.5 – Évolution du critère de performance en fonction de la période d'échantillonnage moyenne.

## 4.4 Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons justifié l'intérêt d'utiliser une stratégie d'échantillonnage non-uniforme pour les systèmes de Lur'e à données échantillonnées en comparaison avec la technique d'échantillonnage uniforme. Pour cela, nous avons étendu la notion de consistance utilisée dans le cadre des systèmes commutés linéaires. Cette extension nécessite d'adapter la définition de la consistance qui porte sur les majorants des fonctions coûts dans notre cadre non-linéaire contrairement au cadre linéaire où la consistance est valable sur le coût de la trajectoire. Cette différence provient directement de la non-linéarité et plus particulièrement de la condition de secteur considérée qui entraîne l'incapacité du calcul de la valeur du coût a priori. Nous avons pu mettre en évidence les limites de l'utilisation d'un tel outil dans le cadre des systèmes de Lur'e à temps discret pour aboutir à une définition compatible avec nos outils de synthèse pour cette classe de systèmes non-linéaires de Lur'e.

Nous avons appliqué cette notion de consistance adaptée à notre problème d'échantillonnage non-uniforme. En conclusion de cette étude, il est possible de garantir mathématiquement l'amélioration d'une stratégie d'échantillonnage non-uniforme qui dans le pire des cas donnera le résultat obtenu par une stratégie tenant compte d'une seule période d'échantillonnage. Les limites de cette technique sont que nous ne pouvons rien garantir sur la performance exacte d'une trajectoire considérée. De plus, la méthode ne garantit pas une amélioration, ni pour le majorant ni pour le coût exact, par rapport à l'utilisation d'une période d'échantillonnage moyenne. Cependant, dans les exemples discutés nous nous apercevons que le coût exact évalué sur une trajectoire est majoritairement meilleur avec la stratégie d'échantillonnage non-uniforme.

Une extension intéressante serait d'améliorer les performances obtenues par la méthode introduite au chapitre 3, tout en conservant la propriété de consistance développée dans le chapitre 4. Pour mieux prendre en compte les particularités du système de Lur'e, il serait alors intéressant d'utiliser la fonction de Lyapunov avancée du chapitre 2. Cependant plusieurs difficultés doivent être levées. Il est tout d'abord nécessaire d'adapter les études portant sur la fonction de Lyapunov avancée développées dans [GJD13] pour prendre en compte la performance (4.21) et de comparer les résultats sur le majorant ainsi obtenu avec ceux déterminés dans ce chapitre. En effet, si la fonction de Lyapunov quadratique est un cas particulier de la fonction de Lyapunov avancée, les changements de variables opérés pour formuler le problème à l'aide de contrainte LMI sont différents. Notamment, la méthode de synthèse utilisant la fonction de Lyapunov avancée, développée dans [Gon12], fait intervenir une linéarisation, via le lemme de Finsler [Poz10], qui introduit un certain conservatisme. Une fois cette comparaison faite, il faut adapter les résultats des chapitres 3 et 4 à la nouvelle fonction de Lyapunov et

évaluer le gain de performance obtenu.

# Chapitre 5

## Conclusion Générale

Les travaux de cette thèse sont dédiés à l'étude des systèmes de Lur'e par leur discrétisation d'Euler. L'objectif étant la stabilisation des systèmes de Lur'e en temps continu à partir d'une étude de leurs modèles discrétisés. Le problème de Lur'e consiste en l'analyse de la stabilité d'une interconnexion entre un système linéaire et une non-linéarité vérifiant une condition de secteur globale. Il a été abondamment traité dans la littérature notamment en temps continu et en temps discret. L'introduction d'une fonction de Lyapunov adaptée au système de Lur'e à temps discret [GJD12b] a récemment permis de s'affranchir des contraintes introduites par la fonction de Lyapunov de type Lur'e à temps discret [JL64]. Cette fonction a la propriété d'exhiber des lignes de niveau potentiellement non connexes et non convexes. Cette propriété de non-connexité soulève de larges questions notamment dans le cas où le système discret est obtenu par discrétisation d'un système à temps continu. En effet, les lignes de niveau doivent contenir la partie ultérieure de la trajectoire, la stabilité du système à temps continu d'origine appelle donc des lignes de niveau connexes. Il est par conséquent nécessaire de développer des outils permettant d'utiliser la fonction de Lyapunov adaptée au système de Lur'e à temps continu. Notons de manière plus générique que la littérature sur les systèmes de Lur'e mêlant les deux temps continu et discret (systèmes de Lur'e échantillonnés, à données échantillonnées ...) est assez réduite.

La première partie de la thèse a donc proposé une approche méthodologique permettant d'utiliser cette fonction de Lyapunov adaptée au temps discret à l'étude des systèmes à temps continu à l'aide de leur discrétisé. Elle repose sur des théorèmes d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires échantillonnés permettant la construction d'une suite décroissante au sens de l'inclusion, d'ensembles connexes et bornés, qui converge vers le singleton origine et qui contient la partie ultérieure de la trajectoire en temps continu.

La seconde partie de la thèse s'est intéressée, quant à elle, aux systèmes de Lur'e à données échantillonnées. Bien que la littérature propose de multiples approches pour traiter les systèmes non linéaires génériques à données échantillonnées, il n'existe presque aucun résultat concernant les systèmes de Lur'e à données échantillonnées. Nous avons donc étudié le cas spécifique de la synthèse de contrôleur stabilisant cette classe de système avec un échantillonnage non uniforme. De manière à sélectionner une loi d'échantillonnage parmi celles qui sont admissibles (ici, la durée entre deux échantillons appartient à un ensemble fini de périodes données), nous avons introduit un critère de performance quadratique. Les résultats ont été formalisés sous la forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI donnant le majorant le plus petit pos-

sible de la fonction coût. Une étude approfondie, utilisant la notion de consistance d'une loi de commande, permet de garantir le gain de performance de cette méthode comparé à une stratégie utilisant un échantillonnage uniforme.

Les principales contributions de cette thèse sont détaillées dans les trois points suivants :

- La première contribution de cette thèse concerne l'extension de l'utilisation des lignes de niveau non connexes et non convexes valide pour les systèmes discrets, aux systèmes continus. L'objectif étant de pouvoir conclure sur la stabilité du système en temps continu, lorsque l'étude est effectuée sur son discrétisé. Pour conserver une structure de type Lur'e dans les deux domaines de temps, le système discret est obtenu par une discrétisation d'Euler du modèle de Lur'e à temps continu d'origine. L'idée est alors de construire deux suites décroissantes d'ensembles, convergeant vers le singleton origine et contenant pour l'un les échantillons suivants de la trajectoire et pour l'autre la partie ultérieure de la trajectoire continue. La première suite correspond aux lignes de niveau, possiblement non connexes et non convexes, de la fonction de Lyapunov avancée valide à temps discret. La seconde suite est composée d'ensembles connexes qui permettent de regrouper les différentes parties de chaque ligne de niveau à temps discret et de justifier du passage de la trajectoire continue entre ces parties. Les propriétés de cette suite d'ensembles connexes ont été explicitées et illustrées, ainsi que sa construction, avec un exemple numérique. Une discussion sur la valeur de la période d'échantillonnage a également été proposée en vue d'interpréter l'apparition des lignes de niveau potentiellement non connexes.
- La seconde contribution propose une méthodologie pour résoudre le problème de stabilisation des systèmes Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme. Dans ce cadre, un premier apport consiste à étendre le résultat développé dans [NTK99b] pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité des systèmes non-linéaires à données échantillonnées utilisant un échantillonnage non-uniforme. Une méthode de synthèse a été développée pour les systèmes de Lur'e à données échantillonnées. Elle est fondée sur des conditions suffisantes, formulées à l'aide de contrainte LMI, permettant de dimensionner la loi de contrôle et de sélectionner la période d'échantillonnage active parmi une famille finie de périodes d'échantillonnage. Ces conditions ont été obtenues en résolvant le problème de stabilisation du modèle discrétisé d'Euler dont les paramètres sont incertains. Cette modélisation simule le comportement du système discrétisé exact du système de Lur'e à données échantillonnées. Ces conditions suffisantes garantissent que le système de Lur'e à données échantillonnées d'origine est asymptotiquement globalement uniformément stable.
- La dernière contribution de cette thèse a justifié l'intérêt de l'usage d'un échantillonnage non-uniforme en comparaison avec une stratégie d'échantillonnage uniforme. Pour cela, la notion de consistance a été discutée pour une classe de systèmes non linéaires de type Lur'e en considérant un majorant quadratique de la fonction coût. Une loi de commutation consistante a été construite par rapport à cette classe de majorants. Ce résultat a été formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes BMI. Une solution sous optimale faisant intervenir une recherche en ligne utilisant des LMI a été propo-

---

sée. Des exemples académiques illustrent cette contribution et soulignent les principales différences avec le cas linéaire. Une application intéressante de ce résultat a été étudiée : l'implémentation d'une commande par données échantillonnées avec la méthode de synthèse utilisant un échantillonnage non-uniforme. Des exemples numériques ont mis en avant les améliorations possibles, tant pour la fonction coût que pour la période d'échantillonnage moyenne.

En étudiant les systèmes de Lur'e à données échantillonnées, cette thèse a permis de mettre en évidence une méthodologie propre aux systèmes de Lur'e utilisant un échantillonnage non-uniforme. Bien que les résultats en termes de gain de performance soient intéressants et que la méthode garantisse une amélioration de performance en comparaison avec une stratégie d'échantillonnage uniforme, de multiples questions ouvertes se posent. Nous référençons, ici, quelques pistes de perspectives à cette thèse :

- Tout au long de cette thèse, nous avons considéré que les non-linéarités intervenant dans les fonctions de Lyapunov Lur'e vérifient des conditions de secteur globales. Une étude supposant que la non-linéarité vérifie une condition de secteur locale permettrait, en adaptant les résultats de cette thèse, de considérer des non-linéarités telles que la saturation et/ou sa forme duale : la zone morte. Le cadre des fonctions de Lyapunov contenant des non-linéarités vérifiant une condition de secteur locale reste à étudier dans un premier temps pour le cas des systèmes discrets puis avec les contraintes du chapitre 2 reliant le modèle discrétisé au système à temps continu d'origine. Dans ce dernier cas, l'une des difficultés sera de garantir que les trajectoires du système à temps continu et de son discrétisé d'Euler restent dans la zone de validité de la condition de secteur locale. Il faudra alors prendre en compte cette nouvelle contrainte pour étendre les théorèmes proposés. Cela reste encore un problème ouvert.
- La méthode de synthèse du contrôleur pour le système de Lur'e à données échantillonnées fournit un majorant quadratique, du critère de performance. Une extension possible, ayant pour but d'améliorer cette valeur, est de considérer une autre classe de majorant. Celle définie à partir de la fonction de Lyapunov Lur'e adaptée au temps discret est un choix judicieux qui permet de prendre en compte les spécificités de la non-linéarité du système de Lur'e à données échantillonnées dans la valeur du majorant. Néanmoins, cette extension n'est pas triviale. Elle nécessite de résoudre plusieurs problèmes difficiles, encore non résolus. Il est tout d'abord nécessaire d'adapter les études portant sur la fonction de Lyapunov avancée développée dans [GJD13] pour prendre en compte la performance et de comparer les résultats sur le majorant ainsi obtenu avec ceux déterminés avec la fonction de Lyapunov quadratique. En effet, si cette dernière est un cas particulier de la fonction de Lyapunov avancée, les changements de variables opérés pour formuler le problème à l'aide de contraintes LMI sont différents. Notamment, la méthode de synthèse, utilisant la fonction de Lyapunov avancée développée dans [Gon12], fait intervenir une linéarisation, par le lemme de Finsler [Poz10], qui introduit un certain conservatisme. De plus, il n'existe pas actuellement de méthode de synthèse entre le correcteur à temps discret et la loi de *min-switching* construite sur cette fonction de Lyapunov avancée pour la stabilisation des systèmes de Lur'e à temps discret. Une fois cette comparaison faite, il faut adapter la méthode de synthèse de contrôleur, pour les

systèmes de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme, développée dans cette thèse en utilisant la fonction de Lyapunov Lur'e adaptée.

- Une extension intéressante est d'étudier la consistance de la loi de *min-switching* avec l'utilisation d'une classe de majorants non quadratiques, calculés à partir de la fonction de Lyapunov avancée. Les mêmes difficultés qu'au point précédent doivent être préalablement levées pour cela. L'étude menée au chapitre 4 montre que la notion de consistance appliquée aux systèmes de Lur'e est liée à la classe de majorants choisie pour les fonctions coût ou performances. Dans cette thèse, nous avons considéré la classe des majorants comme les fonctions quadratiques en l'état initial. L'utilisation de la fonction de Lyapunov avancée permettra de considérer une classe de majorant fonction de la non-linéarité du système. La valeur du majorant prendra ainsi en compte les spécificités du système de manière plus adaptée encore.

# Bibliographie

- [ABLH06] A. Alessio, A. Bemporad, M. Lazar, and W.P.M.H. Heemels. Convex polyhedral invariant sets for closed-loop linear MPC systems. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 4532–4537, Dec 2006.
- [ACA<sup>+</sup>99] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. *Robustesse et commande optimale*. Cépadués-Editions, Toulouse, France, 1999.
- [And93] B.D.O. Anderson. Controller design : moving from theory to practice. *Control Systems, IEEE*, 13(4) :16–25, Aug 1993.
- [AT10] A. Anta and P. Tabuada. To sample or not to sample : self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :2030–2042, 2010.
- [ÅW97] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, 1997.
- [BFA10] C. Böhm, R. Findeisen, and F. Allgöwer. Robust control of constrained sector bounded Lur’e systems with applications to nonlinear model predictive control. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 17(6) :935–958, 2010.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [BM03] F. Blanchini and S. Miani. Stabilization of LPV systems : State feedback, state estimation, and duality. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(1) :76–97, 2003.
- [BM08] F. Blanchini and S. Miani. *Set-Theoretic Methods in Control*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Basel, 2008.
- [BMNC96] J.P. Barbot, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. A sampled normal form for feedback linearization. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 9(2) :162–188, 1996.
- [CDGMNC97] B. Castillo, S. Di Gennaro, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. On regulation under sampling. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(6) :864–868, 1997.
- [CF95] T. Chen and B.A. Francis. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag London, 1995.

- [Chi06] C. Chicon. *Ordinary Differential Equations with Applications, Second Edition*. Springer, 2006.
- [CTQ08] E.B. Castelan, S. Tarbouriech, and I. Queinnec. Control design for a class of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 44(8) :2034–2039, 2008.
- [CWL12] W.-H. Chen, Z. Wang, and X. Lu. On sampled-data control for master-slave synchronization of chaotic Lur’e systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 59(8) :515–519, August 2012.
- [DB84] D. Dochain and G. Bastin. Adaptive identification and control algorithms for nonlinear bacterial growth systems. *Automatica*, 20(5) :621–634, 1984.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5) :355–359, 2001.
- [DF99] G. Duc and S. Font. *Commande  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$ -analyse : des outils pour la robustesse*. Collection pédagogique d’automatique. Hermes Science Publications, 1999.
- [DFG13] G.S. Deaecto, A.R. Fioravanti, and J.C. Geromel. Suboptimal switching control consistency analysis for discrete-time switched linear systems. *European Journal of Control*, 19(3) :214–219, 2013.
- [DGD11] G.S. Deaecto, J.C. Geromel, and J. Daafouz. Dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of switched linear systems. *Automatica*, 47(8) :1713–1720, 2011.
- [DNMS98] G. De Nicolao, L. Magni, and R. Scattolini. Stabilizing receding-horizon control of nonlinear time-varying systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(7) :1030–1036, Jul 1998.
- [DSG13] G.S. Deaecto, M. Souza, and J.C. Geromel. State feedback switched control of discrete-time switched linear systems with application to networked control. In *Control Automation (MED), 2013 21st Mediterranean Conference on*, pages 877–883, June 2013.
- [DTS13] J. Daafouz, S. Tarbouriech, and M. Sigalotti, editors. *Hybrid Systems with Constraints*. Wiley-ISTE, July 2013.
- [EPA14] Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. *S-variable approach to LMI-Based Robust Control*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2014.
- [FJ14] M. Fiacchini and M. Jungers. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems : A set-theory approach. *Automatica*, 50(1) :75–83, 2014.
- [FLR08] H. Fang, Z. Lin, and M. Rotea. On IQC approach to the analysis and design of linear systems subject to actuator saturation. *Systems & Control Letters*, 57(8) :611–619, 2008.
- [Fri10] E. Fridman. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46 :421–427, 2010.

- 
- [FSR04] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard. Robust sampled-data stabilization of linear systems : An input delay approach. *Automatica*, 40 :1441–1446, 2004.
- [GCB08] J.C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(3) :720–733, April 2008.
- [GDD11] J.C. Geromel, G.S. Deaecto, and J. Daafouz. Suboptimal switching state feedback control consistency analysis for switched linear systems. In *18th IFAC World Congress*, pages 5849–5854, August 2011.
- [GDD13] J.C. Geromel, G.S. Deaecto, and J. Daafouz. Suboptimal switching control consistency analysis for switched linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58(7) :1857–1861, July 2013.
- [GE04] E. Gyurkovics and A.M. Elaiw. Stabilization of sampled-data nonlinear systems by receding horizon control via discrete-time approximations. *Automatica*, 40(12) :2017–2028, 2004.
- [GE07] E. Gyurkovics and A. Elaiw. *Conditions for MPC Based Stabilization of Sampled-Data Nonlinear Systems Via Discrete-Time Approximations*, volume 358 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 35–48. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [GGS00] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2000.
- [GH90] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1990.
- [GJD12a] C.A.C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. Stability analysis and stabilisation of switched nonlinear systems. *International Journal of Control*, 85(7) :822–829, 2012.
- [GJD12b] C.A.C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. Stability analysis of discrete time Lur’e systems. *Automatica*, 48 :2277–2283, September 2012.
- [GJD13] C.A.C. Gonzaga, M. Jungers, and J. Daafouz. *Hybrid Systems with Constraints*, chapter Advanced Lyapunov functions for Lur’e systems and their switched extension. ISTE-Wiley, July 2013.
- [GJDC11] C.A.C. Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz, and E.B. Castelan. Stabilization of discrete-time nonlinear systems subject to input saturations : a new Lyapunov function class. In *18th IFAC World Congress*, pages 3403–3408, August 2011.
- [GML82] G.C. Goodwin, B. McInnis, and R.S. Long. Adaptive control algorithms for waste water treatment and pH neutralization. *Optimal Control Applications and Methods*, 3 :443–459, 1982.
- [Gon12] C.A.C. Gonzaga. *Analyse de stabilité et de performances d’une classe de systèmes non-linéaires à commutations en temps discret*. PhD thesis, Université de Lorraine, Nancy, France, 2012.
- [Grü08] L. Grüne. Input-to-state stability, numerical dynamics and sampled-data control. *GAMM-Mitteilungen*, 31(1) :94–114, 2008.

- [GST12] R. Goebel, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems : Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, 2012.
- [Gyu09] E. Gyurkovics. Sampled-data control and stability of sets for nonlinear systems. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 17(1-2) :169–183, 2009.
- [HA95] T. Hagiwara and M. Araki. FR operator approach to the  $H_2$  analysis and synthesis of sampled-data systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(8) :1411–1421, Aug 1995.
- [HJ94] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1994.
- [HJT12] W.P.M.H. Heemels, K.H. Johansson, and P. Tabuada. An introduction to event-triggered and self-triggered control. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 3270–3285, Dec 2012.
- [HKR12] L. Hetel, A. Kruszewski, and J.P. Richard. A hybrid method for the analysis of non-uniformly sampled systems. in *Time Delay Systems : Methods, Applications and New Trends, Springer, Series : Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 423, 2012.
- [HL03] Ti. Hu and Z. Lin. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(3) :440–450, Mar 2003.
- [HS87] P. Hsu and S. Sastry. The effect of discretized feedback in a closed loop system. In *Decision and Control, 1987. 26th IEEE Conference on*, volume 26, pages 1518–1523, 1987.
- [HTvN10] M. Heemels, A. R. Teel, N. van de Wouw, and D. Nešić. Networked control systems with communication constraints : Tradeoffs between transmission intervals, delays and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :1781–1796, 2010.
- [HZWW14] G. Hui, H. Zhang, Z. Wu, and Y. Wang. Control synthesis problem for networked linear sampled-data control systems with band-limited channels. *Information Sciences*, 275(0) :385–399, 2014.
- [IMF00] T. Iwasaki, G. Meinsma, and M. Fu. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 6(2–3) :305–320, 2000.
- [JCTD11] M. Jungers, E.B. Castelan, S. Tarbouriech, and J. Daafouz. Finite  $\mathcal{L}_2$ -induced gain and  $\lambda$ -contractivity of discrete-time switching systems including modal nonlinearities and saturating actuator. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 5(2) :289–300, May 2011.
- [JL64] E.I. Jury and B.W. Lee. On the absolute stability of nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4) :551–554, 1964.
- [KA92] J.P. Keller and B.D.O. Anderson. A new approach to the discretization of continuous-time controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(2) :214–223, Feb 1992.

- 
- [Kal63] R.E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. *Proceedings of National Academy of Sciences*, (49) :201–205, 1963.
- [Kat81] P. Katz. *Digital control using microprocessors*. Prentice Hall International, 1981.
- [KB94] G. Kreisselmeier and T. Birkholzer. Numerical nonlinear regulator design. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(1) :33–46, 1994.
- [Kha02] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- [KK09] I. Karafyllis and C. Kravaris. Global stability results for systems under sampled-data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19 :1105–1128, 2009.
- [KKK] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotović. *Nonlinear and adaptive control design*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control.
- [LH08] J.-G. Lu and D.J. Hill. Global asymptotical synchronization of chaotic Lur'e systems using sampled data : A linear matrix inequality approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 55(6) :586–590, June 2008.
- [LHL07] G. Li, W. P. Heath, and B. Lennox. An improved stability criterion for a class of lur'e systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4483–4488, New Orleans, USA, 2007.
- [LHL08] G. Li, W.P. Heath, and B. Lennox. Concise stability conditions for systems with static nonlinear feedback expressed by a quadratic program. *Control Theory Applications, IET*, 2(7) :554–563, July 2008.
- [LJD13a] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. On using disconnected level sets Lyapunov functions in the context of sampled-data systems. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2013*, pages 630–635, Florence, Italie, 2013.
- [LJD13b] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov à lignes de niveau non-connexes. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 47(4–8) :483–501, 2013.
- [LJD15a] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Consistance des systèmes de Lurée commutées : application à la synthèse de commande numérique avec échantillonnage non uniforme. In *6e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2013*, page CDROM, Bourges, France, Juin 2015.
- [LJD15b] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Stabilization of sampled-data Lur'e systems with nonuniform sampling. In *54th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2015*, Osaka, Japan, 2015. soumis.
- [LJD15c] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Sufficient LMI stability conditions for Lur'e type systems governed by a control law designed on their Euler approximate model. *International Journal of Control*, 88(9) :1841–1850, 2015.

- [LJD15d] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Switching control consistency of switched Lur'e systems with application to digital control design with non uniform sampling. In *14th annual European Control Conference, ECC 2015*, Linz, Austria, 2015.
- [LNA05] D.S. Laila, D. Nešić, and A. Astolfi. *Advanced topics in control systems theory II*, volume 328 of *Lecture notes from FAP 2006*, chapter Sampled-Data Control of Nonlinear Systems, pages 91–137. Springer, 2005.
- [LNT02] D.S. Laila, D. Nešić, and A.R. Teel. Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation. *European Journal of Control*, 8(2) :109–125, 2002.
- [Lou13] J. Louis. Discrétisation et analyse de stabilité des systèmes de type Lur'e. In *5e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2013*, page CDROM, Strasbourg, France, Jul 2013.
- [LP44] A.I. Lur'e and V.N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 8(3) :3–13, 1944.
- [MCK85] T. Matsumoto, L.O. Chua, and M. Komuro. The double scroll. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 32(8) :797–818, 1985.
- [MNC85] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. On the sampling of a linear analytic control system. In *Decision and Control, 1985 24th IEEE Conference on*, volume 24, pages 1457–1462, 1985.
- [MNC01] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. Issues on nonlinear digital control. *European Journal of Control*, 7 :160–177, 2001.
- [MR97] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(6) :819–830, 1997.
- [MR14] M. Moarref and L. Rodrigues. Stability and stabilization of linear sampled-data systems with multi-rate samplers and time driven zero order holds. *Automatica*, 50(10) :2685–2691, 2014.
- [NG05] D. Nešić and L. Grüne. Lyapunov-based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation. *Automatica*, 41(7) :1143–1156, 2005.
- [NT04] D. Nešić and A.R. Teel. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(7) :1103–1122, 2004.
- [NT06] D. Nešić and A.R. Teel. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their euler approximate model. *Automatica*, 42(10) :1801–1808, 2006.
- [NTC09] D. Nešić, A.R. Teel, and D. Carnevale. Explicit computation of the sampling period in emulation of controllers for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3) :619–624, March 2009.
- [NTK99a] D. Nešić, A.R. Teel, and P.V. Kokotović. On the design of a controller based on the discrete-time approximation of the nonlinear plant model. In *American*

- 
- Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 5, pages 3474–3478, 1999.
- [NTK99b] D. Nešić, A.R. Teel, and P.V. Kokotović. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems & Control Letters*, 38 :259–270, 1999.
- [NTS99] D. Nešić, A.R. Teel, and E.D. Sontag. Formulas relating  $\mathbb{KL}$  stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 38 :49–60, 1999.
- [PAABLL08] R. Postoyan, T. Ahmed-Ali, L. Burlion, and F. Lamnabhi-Lagarigue. On the Lyapunov-based adaptative control redesign for a class of nonlinear sampled-data systems. *Automatica*, 44 :2099–2107, 2008.
- [Pet87] I.R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & Control Letters*, 8(4) :351–357, 1987.
- [PG64] J.B. Pearson and J.E. Gibson. On the asymptotic stability of a class of saturating sampled-data systems. *IEEE Transactions on Industry Applications*, AI-83 :81–86, 1964.
- [PJ94] K. Premaratne and E.I. Jury. Discrete-time Positive-Real lemma revisited : the discrete-time counterpart Kalman-Yakubovich lemma. *IEEE transactions on Circuits and Systems I : Fundamental, Theory and Applications*, 41(11) :747–750, November 1994.
- [Pop61] V.M. Popov. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Avtomatika i Telemekhanika*, 22(8) :961–979, 1961.
- [Poz10] A. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers : Volume 1 : Deterministic Systems*. Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Elsevier Science, 2010.
- [PR06] C. Piccardi and S. Rinaldi. A method for parameter estimation in Lur’e systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(05) :1461–1470, 2006.
- [Pri01] J.A. Primbs. The analysis of optimization based controllers. *Automatica*, 37(6) :933–938, 2001.
- [RCS11] F. Rossi, P. Colaneri, and R. Shorten. Padé discretization for linear systems with polyhedral Lyapunov functions. *IEEE Transactions on automatic control*, 56 :2717–2722, 2011.
- [Sch97] C.W. Scherer. A full block S-procedure with applications. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2602–2607 vol.3, Dec 1997.
- [SCSS11] R. Shorten, M. Corless, S. Sajja, and S. Solmaz. On Padé approximations, quadratic stability and discretization of switched linear systems. *Systems & Control Letters*, 60 :683–689, 2011.
- [SDGD14] M. Souza, G.S. Deaecto, J.C. Geromel, and J. Daafouz. Self-triggered linear quadratic networked control. *Optimal Control Applications and Methods*, 35(5) :524–538, 2014.

- [Seu12] A. Seuret. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*, 48(1) :177–182, 2012.
- [Str94] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Advanced book program. Westview Press, 1994.
- [Suh08] Y.S. Suh. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems. *Automatica*, 44(12) :3222–3226, 2008.
- [Sze63] G.P. Szegö. On the absolute stability of sampled-data control systems. *Proceedings of National Academy of Sciences*, 50 :558–560, 1963.
- [TB14] S.J.S. Theesar and P. Balasubramaniam. Secure communication via synchronization of Lur’e systems using sampled-data controller. *Circuits Syst Signal Process*, 33 :37–52, 2014.
- [TKP09] M.C. Turner, M. Kerr, and I. Postlethwaite. On the existence of stable, causal multipliers for systems with slope-restricted nonlinearities. In *American Control Conference, 2009. ACC '09.*, pages 121–126, June 2009.
- [TPdS06] S. Tarbouriech, C. Prieur, and J.M.G. da Silva. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(8) :1364–1371, Aug 2006.
- [Tsy62] Y.Z. Tsytkin. The absolute stability of large-scale nonlinear sampled-data systems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 145 :52–55, 1962.
- [VFM03] M. Velasco, J.M. Fuertes, and P. Marti. The self triggered task model for real-time control systems. In *24th IEEE Real-Time Systems Symposium (work in progress)*, pages 67–70, 2003.
- [WL10] X. Wang and M.D. Lemmon. Self-triggering under state-independent disturbances. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(6) :1494–1500, June 2010.
- [Yak62] V.A. Yakubovich. Solution of some matrix inequalities encountered in the automatic control theory. *Doklady Akademii Nak*, 43 :1304–1307, 1962.
- [ZHW09] C.-K. Zhang, Y. He, and M. Wu. Improved global asymptotical synchronization of chaotic Lur’e systems with sampled-data control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 56(4) :320–324, April 2009.

---

**Résumé :** De récents résultats sur l'étude des systèmes de Lur'e (commutés) à temps discret mettent en avant une fonction de Lyapunov de type Lur'e avancée, dont les lignes de niveau peuvent être non convexes et non connexes. Celles-ci soulèvent de larges questions pour les systèmes de Lur'e à temps discret obtenus par la discrétisation d'un système continu. Les contributions de cette thèse sont d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

Tout d'abord, le verrou des lignes de niveau non-connexes est levé en construisant à partir de celles-ci une suite décroissante d'ensembles connexes et bornés qui converge vers l'origine et qui contient le futur de la trajectoire à temps continu. Dans un second temps, le problème de la stabilisation conjointe d'un système de Lur'e à données échantillonnées avec un échantillonnage non-uniforme est traité. Quand la période d'échantillonnage est à choisir parmi un nombre fini de valeurs, il est montré que ce problème se traduit comme la stabilisation conjointe d'un système commuté de Lur'e avec des incertitudes bornées en norme. En associant de plus à chaque mode un critère quadratique, une stratégie de type *min-switching* permet de résoudre cette question à l'aide d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Enfin, les propriétés de la stratégie de *min-switching* pour les systèmes de Lur'e commutés à temps discret sont étudiées. Une extension de la notion de consistance permet de prouver que cette stratégie est consistante vis-à-vis de majorants quadratiques modaux du critère de performance et ainsi de garantir l'intérêt de la stratégie d'échantillonnage non-uniforme développée.

**Mots-clés :** système de Lur'e, système de Lur'e à données échantillonnées, échantillonnage non-uniforme, discrétisation d'Euler, consistance pour un système de Lur'e commuté.

**Abstract:** Recent studies dealing with discrete-time (switched) Lur'e systems involve an adapted Lur'e type function exhibiting possibly non-convex and disconnected level sets. These properties raise fundamental issues in the case of discrete-time Lur'e system obtained by the sampling of a continuous time one. This PhD thesis aims at answering these questions.

The first contribution is to avoid the discrete-time disconnected level sets by a decreasing sequence of bounded and connected sets that converges to the origin and that contain the future of the continuous-time trajectory. The second contribution deals with the joint stabilization of a sampled-data Lur'e system with non-uniform sampling. When the sampling period belongs to a finite set of values, this problem is reformulated as the joint stabilization of a discrete-time Lur'e switched system with norm-bounded uncertain parameters. Furthermore, if a quadratic criterion is associated with each mode, a *min-switching* strategy combined with LMI constraints allow to provide a solution to this problem. Finally the property of consistency for discrete-time switched Lur'e systems is investigated. It is shown that the *min-switching* strategy is consistent with respect to quadratic upper bounds of the performances. This result is applied on the stabilization of Lur'e systems with non-uniform sampling.

**Keywords:** Lur'e system, sampled-data Lur'e system, non-uniform sampling, Euler discretization, consistency for a switched Lur'e system.

## DECISION

Vu l'arrêté du 07 août 2006 relatif à la formation doctorale,  
Sur avis du directeur de l'Ecole doctorale,  
Sur proposition de M. Jamal DAAFOUZ, directeur de thèse,

Le président de l'Université de Lorraine  
autorise

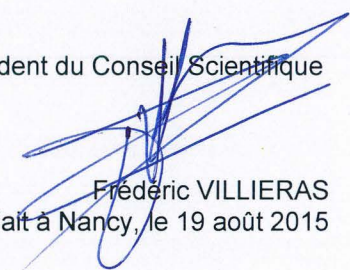
M. JULIEN LOUIS LOUIS

à soutenir la thèse de doctorat, préparée sous la direction de M. Jamal DAAFOUZ, intitulée

Discrétisation des systèmes de Lur'e : stabilisation et consistance

La soutenance aura lieu le 27 août 2015 à 10h30 Université de Lorraine - Site de Brabois (Salle Gallé) -  
2 avenue de la Forêt de Haye 54500 Vandoeuvre-lès-Nancy.

Le Vice-Président du Conseil Scientifique



Frédéric VILLIERAS  
Fait à Nancy, le 19 août 2015