AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

U.F.R. Sciences et Techniques de la Matière et des Procédés
Ecole Doctorale EMMA
Département de Formation Doctorale POEM

Thèse

Présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

En Physique des Plasmas

Par Pierre MOREL

Le modèle « water bag » appliqué aux équations cinétiques des plasmas de Tokamak

Membres du jury :

Rapporteurs :

M. Dominique ESCANDE	Directeur de Recherche, LPIIM Marseille
M. Giovanni MANFREDI	Chargé de Recherche, IPCMS Strasbourg

Examinateurs :

M. Xavier GARBET	Ingénieur CEA (HDR), DRFC Cadarache
M. Pierre BERTRAND	Professeur émérite, Université Nancy 1
M. Alain GHIZZO	Professeur, Université Nancy 1
M. Etienne GRAVIER	Maître de Conférences, Université Nancy 1

Membres invités :

M. Nicolas BESSE	Maître de Conférences, Université Nancy 1
M. Dennoun Saifaoui	Professeur, Université Casablanca

Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés
Faculté des Sciences et Techniques – 54500 Vandoeuvre-lès-Nancy

Le modèle water bag appliqué aux équations cinétiques des plasmas de tokamak

Pierre MOREL

A mon père, Jean-Charles MOREL

Remerciements

A Bernard Weber et Jamal Bougdira pour m'avoir accueilli et encouragé dans mon travail au sein du Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés,

A Sophie Klein, Nathalie Turki, Karine Jacquot, Georges Billan et tous les personnels techniques et administratifs de l'Université Henri Poincaré qui par leur travail savent alléger notre quotidien commun,

A Pierre Bertrand, du fond du coeur, pour m'avoir si pédagogiquement formé à ce qu'est la Science et donné tant d'idées pour lesquelles "il n'y a plus qu'à"... A Pierre Bertrand encore pour être revenu ces vendredis matins de discussion si riches, ces *moments que rien n'égale*,

A Etienne Gravier pour sa justesse et sa pondération, sa rigueur quelque fois s'opposant à mon exubérance, sa présence chaque fois que la discussion s'imposait,

A Nicolas Besse avec qui la Science a pu se pratiquer jusque tard dans la nuit, Nicolas dont l'enthousiasme n'a jamais failli, Nicolas qui patiemment m'a transmis l'idée de ce que sont les mathématiques appliquées,

A Alain Ghizzo pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, et surtout pour m'avoir donné l'idée d'aller jusque là au détour d'un cours de mécanique du point, alors que j'étais encore étudiant en première année à Epinal,

A Giovanni Manfredi pour avoir accepté de relire ce travail, dont il avait vu les prémices avant de partir sous d'autres "topics",

A Dominique Escande dont les commentaires et appréciations en tant que rapporteur ont grandement enrichi ce texte,

A Dennoun Saifaoui pour m'avoir accueilli à Casablanca si chaleureusement, ainsi que pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse,

A Xavier Garbet pour avoir suivi ce travail dès son début, pour toutes ces idées que j'ai pu rapporter de mes séjours à Cadarache, ces réunions tellement fructueuses avec aussi Virginie Grandgirard, Yanick Sarazin, Philippe Gendrih, Guilhem Dif-Pradalier, Nicolas Dubuit. A Xavier Garbet surtout pour avoir pris part à mon jury de thèse,

A tous les collègues physiciens du Laboratoire de Physique des Milieux

Ionisés, maintenant dispersés dans l'Institut Jean Lamour,

A tous les collègues enseignants de la Faculté des Sciences avec qui j'ai pu partager les joies de l'enseignement et les peines de la correction de copies,

A Eric, Stéphane, Fred, Michel, Rudy qui m'ont suivi ou précédé dans le dur labeur de thèsard,

A tout Phi-Sciences pour les vertus trappistes abondamment distillées, pour ceux qui ont aimé les soirées Poésie, pour la bibliothèque qui marchera peut-être un jour, pour le club nature qu'il vive longtemps,

A Claude Mourey, Olivier Lenoble, Alain Stocker, JB, Fanny, Corine, Tof, Clément, Emeric, Mmanu, Xavier, Lilou, Jean, Lilian, pour les années spinaliennes,

A Emilie pour m'avoir accompagné un joli temps,

Aux collocataires successifs qui ont su (ou pas) me supporter, Sylvie, François, Yannou, Abelin, Pierco et Dan, et à tous les amis que j'ai,

A mes parents qui m'ont fait confiance,

A Lamia parce que Lamia,

je vous remercie de vous

Table des matières

1 Le modèle water bag **13**

1.1 Introduction 13
1.2 Concepts de base 14
1.2.1 Equation de Vlasov et simple water bag 14
1.2.2 Connexion avec le modèle fluide 15
1.2.3 Modèle multi-water-bag 16
1.3 Equivalence au sens des moments 19
1.4 Calcul pratique des paramètres water bag 21
1.5 Amortissement Landau et water bag 24
1.5.1 Analyse linéaire 25
1.5.2 L'amortissement Landau 33
1.5.3 Comparaison avec des simulations non linéaires multi-water-bag 35
1.6 Conclusion 37

2 Modèle de dérive cinétique et water bag **39**

2.1 Introduction 39
2.2 Turbulence et modèle girocinétique 40
2.3 Le modèle giro-water-bag 43
2.4 Les conditions initiales water bag 45
2.4.1 Les équations multi water bag 46
2.4.2 Grandeurs caractéristiques 46
2.5 Analyse linéaire 48
2.5.1 Equation de dispersion 48
2.5.2 $\Omega_j^\star$ et équivalence fluide. 50
2.5.3 Calcul pratique des α_j et $\Omega_j^\star$ 51
2.5.4 Potentiel électrostatique 54
2.6 Analyse de stabilité linéaire 55
2.6.1 Modèles simplifiés 56
2.6.2 Seuil de stabilité linéaire pour un nombre quelconque de bags 58

2.6.3 Comparaison des descriptions water bag, cinétique et fluide . . . 66
2.7 Conclusion . . . 68

3 Effets de rayon de Larmor fini 69
3.1 Introduction . . . 69
3.2 Le rayon de Larmor fini . . . 71
3.2.1 La giromoyenne . . . 72
3.2.2 La dérive de polarisation . . . 74
3.2.3 Le modèle de dérive cinétique . . . 75
3.3 Application au modèle water bag . . . 76
3.3.1 Les équations non-linéaires . . . 76
3.3.2 Equations normalisées et analyse dimensionnelle . . . 77
3.4 Analyse linéaire . . . 80
3.5 Stabilité du plasma en phase linéaire . . . 82
3.5.1 Effet isolé de giromoyenne . . . 84
3.5.2 Effet de la dérive de polarisation . . . 87
3.5.3 Effets conjugués de polarisation et giromoyenne . . . 89
3.6 Conclusion . . . 91

4 Stabilité d'un plasma en présence d'impuretés 95
4.1 Introduction . . . 95
4.2 Charge efficace et grandeurs macroscopiques . . . 97
4.3 Modèle à plusieurs espèces d'ions . . . 98
4.4 Analyse linéaire . . . 100
4.5 Impuretés et stabilité linéaire . . . 101
4.5.1 Profil plat de la densité d'impuretés . . . 103
4.5.2 Profil plat en charge efficace Z_{eff} . . . 110
4.6 Conclusion . . . 114

5 Conclusion et Perspectives 115

6 Annexes 127

Introduction

Nous voici parvenus aux extrémités de la terre, dans la Scythie, au fond d'un désert impraticable. Vulcain, c'est à toi de songer aux ordres que ton père t'a donnés. Sur ces rocs escarpés attache indissolublement, avec des chaînes de diamant, ce hardi protecteur des humains. Il a dérobé ton attribut, le feu, organe de tous les arts : il en a fait part aux hommes ; c'est un crime dont il doit payer la peine à tous les Dieux. Qu'il apprenne à fléchir sous le sceptre de Jupiter ; qu'il cesse de tout sacrifier aux mortels.

Eschyle
Prométhée Enchaîné

Fusion nucléaire et physique des plasmas

La maîtrise par l'humanité de la réaction de fusion nucléaire est souvent comparée au mythe prométhéen du feu sacré. Car si en théorie cette réaction nucléaire est simple et présente le grand avantage de ne produire aucun déchet directement, elle s'avère en pratique extrêmement difficile à réaliser. De plus, les neutrons émis lors de la réaction de fusion des noyaux de Deutérium et de Tritium ont pour effet d'activer l'enceinte du réacteur. Ainsi, l'ensemble des sciences de la fusion englobe des disciplines très différentes dans leurs méthodes et leurs origines, séquelles d'une histoire extrêmement riche et passionée.

Depuis les rapides progrès en physique nucléaire des années 1950, les bases de ce type de réaction sont très bien établies : elles reposent sur la courbe (figure 1) de stabilité des noyaux en fonction de leur nombre de nucléons. Nous pouvons constater que la stabilité est maximale pour le noyau de Cuivre, et décroît tant pour les éléments lourds que ceux légers. Ainsi, il est possible de produire de l'énergie en cassant un noyau lourd pour en obtenir deux plus légers : c'est la voie de la réaction de fission nucléaire, atuellement utilisée industriellement, avec les problèmes écologiques que l'on sait.

La seconde possibilité est de fusionner deux noyaux légers en un noyau plus lourd : l'ensemble de ces réactions nucléaires est ainsi nommé réactions de fusion nucléaire. Nous voyons en figure (1) que cette méthode est d'autant plus avantageuse que les noyaux fusionnés sont légers, ainsi les physiciens se

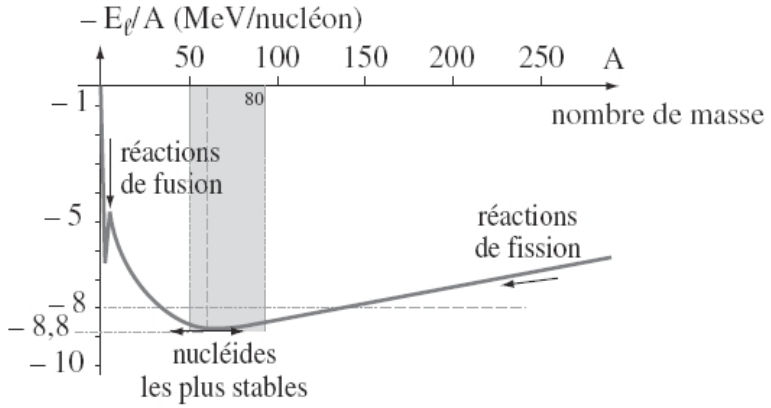


FIGURE 1 – Courbe d'Aston représentant l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de nucléons.

sont-ils intéressés aux réactions faisant intervenir les isotopes de l'hydrogène : le Deutérium D et le Tritium T.

$$\begin{aligned} D + D &\rightarrow {}^3He + n \\ D + D &\rightarrow T + p \\ D + T &\rightarrow {}^4He + n \\ D + {}^3He &\rightarrow {}^4He + p \end{aligned} \tag{1}$$

Nous avons donc regroupé en (1) les réactions de fusion les plus communément étudiées. De façon générale, pour arriver à faire fusionner deux noyaux, il faut les faire collisionner avec une énergie suffisante pour vaincre la répulsion électrostatique engendrée par leurs charges électriques. Cette considération appliquée au fonctionnement d'un réacteur mène au critère de Lawson :

$$nT\tau_E > 5.10^{21} m^{-3}.keV.s, \tag{2}$$

où n est la densité, T la température et τ_E le temps de confinement de l'énergie caractéristiques du réacteur. Cette inégalité pose l'existence de valeurs minimales en température et en densité pour qu'un réacteur à fusion nucléaire puisse fonctionner. De ce critère, nous pouvons démarquer deux voies pour la production d'énergie par fusion : la plus naturelle est l'augmentation de densité du plasma, qui est assurée dans toute étoile qui se respecte par la colossale force de gravitation présente. C'est aussi par l'augmentation de la densité que la fusion inertielle est censée être assurée, en comprimant

une cible de Deutérium au moyen de lasers très énergétiques. Il est cependant difficilement envisageable de produire de l'énergie de façon continue par ce procédé actuellement, car le temps de charge de tels lasers est très grand devant les temps de confinement de l'énergie produite. La seconde possibilité est d'augmenter la température tout en maintenant une valeur acceptable à la densité du milieu : pour une densité de l'ordre de $10^{20}m^{-3}$ particules, la température requise est de l'ordre de deux cent millions de degrés Kelvin ! Aucune paroi matérielle ne peut naturellement supporter une telle contrainte, et le confinement des particules chargées est assuré par un champ magnétique, dont les différentes configurations définissent toute la diversité des projets de réacteurs à fusion par confinement magnétique (Reversed field pinch, Z-pinch, stellarator et tokamak).

Dans tous les cas les noyaux appelés à fusionner sont séparés de leur cortège électronique par l'action des températures très élevées : il faut donc par définition que le milieu dans lequel se déroule la réaction de fusion soit à l'état de plasma. Cet état de la matière est très commun dans l'univers et très peu sur terre, car il correspond à des conditions extrêmes en température et en densité. Dans un plasma, une fraction ou l'ensemble des particules est ionisé et se comporte donc comme un fluide chargé.

La description dynamique d'un plasma nécessite donc le couplage entre les équations de Maxwell régissant les champs auxquels sont soumises les particules chargées, et les équations du mouvement de ces particules. Il s'agit d'un système autocohérent puisque les deux dynamiques des champs et des particules sont inséparables. De plus, du fait du très grand nombre de particules présentes, il est impossible de résoudre les trajectoires individuelles des particules, c'est donc l'évolution de la fonction de distribution de chaque espèce de particule dans l'espace des phases que l'on cherchera à déterminer.

Description d'un plasma de tokamak

Comme toute spécialité naissante, la physique de la fusion nucléaire a connu un grand foisonnement depuis ses débuts il y a une soixantaine d'années. Et une grande variété de machines a été imaginée pouvant permettre de réaliser des réactions de fusion. Cependant, depuis quelques années et avec l'engagement croissant des états, la communauté s'est resserrée autour d'un projet de grande lisibilité : ITER qui désigne à la fois la voie en latin et l'acronyme anglais International Thermonuclear Experimental Reactor. Ce projet s'appuie sur le TO.KA.MA.K. (acronyme tiré du russe TOroidalnaja KAmera MAgnetnaja Katuska) qui est à l'heure actuelle la machine la plus stable et, ou diront ses détracteurs, la plus étudiée. Son principe de fonctionnement a

été énoncé par Tamm et Sakharov dans les années 1950, et repose sur des bases simples. L'idée est de confiner les particules chargées dans une enveloppe magnétique toroïdale torsadée. Cette configuration magnétique admet donc deux composantes : l'une est générée par des bobines enlaçant tout le tore, et la seconde composante est produite par le courant diamagnétique toroïdal du plasma. C'est cette dernière astuce qui constitue le trait caractéristique d'un tokamak.

Même si le principe de confinement du plasma est très élégant dans le cas d'un tokamak, la réalité expérimentale est encore bien loin d'un fonctionnement en mode réacteur. Il subsiste ainsi de nombreux freins tant technologiques que scientifiques.

La réaction de fusion nucléaire la plus accessible est celle faisant fusionner Deutérium et Tritium, elle a pour produit un noyau d'Hélium sous sa forme isotopique la plus stable et un neutron. C'est ce dernier qui emporte l'essentiel de l'énergie produite par la réaction (80% d'un total de 17,6MeV produits). Puisque non chargé électriquement, ce dernier échappe au confinement magnétique : c'est donc un défi dans la conception du futur réacteur ITER de réaliser des matériaux supportant un bombardement par des neutrons fortement énergétiques sur des échelles de temps de l'année ! De plus, le Tritium étant un élément extrêmement rare sur Terre, il est prévu d'en produire dans la couverture matérielle du tokamak, à partir de ces neutrons énergétiques et de Lithium. Les solutions technologiques à ces problèmes ne sont pas encore connues, et la construction d'ITER a justement pour but de les développer car aucun tokamak n'a à ce jour pu accéder à un régime de fusion sur des temps longs.

Ce mode de fonctionnement, très proche de celui d'un futur réacteur, va également permettre de développer des moyens d'extraire l'énergie produite par la réaction de fusion. Encore une fois, les matériaux devant assurer l'échange thermique entre le plasma et l'extérieur devront supporter des contraintes énormes sur des temps très longs. D'autant plus que cette zone devra également récupérer l'Hélium continûment produit par la réaction avant qu'il n'étouffe les réactions de fusion.

En vertu du critère de Lawson, l'entretien d'une température propice au processus de fusion nucléaire est un domaine de recherche crucial. Différents procédés permettent une injection de puissance dans le plasma. Le premier d'entre eux est l'effet Joule naturellement induit par le courant plasma toroïdal, mais la résistance du milieu décroissant avec la température, il ne permet d'atteindre que des températures de l'ordre de 10 millions de degrés. A partir de cette limite, des procédés additionnels prennent le relais, tels le chauffage par des ondes résonnantes avec le milieu et l'injection de neutres très énergétiques qui vont de proche en proche transmettre leur

énergie par collision. Une grande difficulté est d'utiliser ces procédés à bon escient car le plasma est très facilement déstabilisé par un profil inhomogène en température, et le confinement peut être très rapidement perdu.

A titre d'exemple, un tokamak présente le plus fort gradient de température dans l'univers, avec des températures de cent millions de degrés en son centre et de quelques degrés Kelvin autour des bobines supraconductrices, quelques mètres plus loin. Le plasma oscille donc en permanence entre les contraintes imposées par la machine et sa grande propension à l'instabilité et la turbulence. Une description doit donc être faite des mécanismes conduisant aux turbulences mesurées, aussi réaliste que possible, dans une géométrie particulièrement compliquée, et avec la difficulté théorique d'équations autocohérentes portant sur une grande assemblée de particules. La compréhension des mécanismes de développement d'instabilités et de la turbulence s'avère cruciale pour obtenir une description satisfaisante d'un plasma de Tokamak.

Pour étudier la dynamique d'un plasma, nous avons vu qu'une approche statistique est nécessaire. Elle substitue à chaque population de particules (de mêmes masse et charge), une fonction de distribution donnant la probabilité de trouver une particule à une vitesse et une position donnée pour un instant donné. Cette fonction est la même pour chaque particule d'une même population, et devient donc la seule inconnue du problème. Mais une description dynamique fine selon les six directions (trois en vitesse et autant en espace) reste inaccessible aux moyens numériques actuels. Par ailleurs, selon les échelles de temps considérées, les phénomènes physiques en présence sont très variés, et permettent de poser des hypothèses simplificatrices. Ainsi, au coeur du tokamak, le taux de collisions est très faible devant le temps caractéristique de développement des instabilités, alors qu'au bord du plasma, les collisions jouent un rôle nettement plus important. Selon les instablités que l'on cherche à décrire et les zones du tokamak où l'on se situe, des approximations très différentes peuvent donc être élaborées.

Nous pouvons distinguer deux types actuels de modélisation :

- ⋆ La description cinétique conserve la représentation en terme de fonction de distribution et est nécessaire à des échelles de temps courtes, pour décrire les processus de "microinstabilités". Des hypothèses peuvent être faites en particulier sur les degrés de liberté en vitesse, qui permettent de mener à bien des simulations numériques, dont le coût en temps de calcul reste néanmoins très élevé.
- ⋆ La description fluide est envisageable dès lors que les collisions peuvent jouer leur rôle de diffusion entre les particules. Ainsi, les différentes grandeurs se communiquent de proche en proche et un équilibre thermodynamique local peut être défini.

L'objectif de cette thèse est d'adapter au contexte des plasmas magnétisés

de tokamak un modèle dont il a pu être établi [1, 2, 3], qu'il assurait une connexion élégante entre les descriptions fluide et cinétique : c'est le modèle water bag. Nous commencerons par présenter les fondations de ce modèle, en nous intéressant à l'application simple de l'amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques. Nous adapterons ensuite le modèle water bag aux équations girocinétiques caractérisant les plasmas magnétisés, en géométrie cylindrique. Nous distinguerons en application de ce modèle giro-water-bag trois chapitres, selon que nous étudierons un seule espèce d'ion sans (chapitre II) ou avec (chapitre III) les effets de rayon de Larmor fini, pour terminer nous étudierons la stabilité d'un plasma composé de plusieurs espèces d'ions.

Chapitre 1

Le modèle water bag

Je te salue vieil Océan
Isidore Ducasse
Les chants de Maldoror

1.1 Introduction

Pour modéliser un plasma de tokamak, deux types de descriptions sont envisageables. Pour des raisons de bien plus faible coût en temps de calcul et des limitations techniques associées, ce sont les modèles fluides qui ont été les premiers utilisés. Néanmoins les coefficients de transport prédits par ces modèles vont jusqu'au double des valeurs données par la théorie cinétique [4, 5].

Dès lors, deux approches ont été développées visant à mieux décrire les interactions entre les particules et les ondes présentes dans le milieu. La première a été d'enrichir les équations fluides, au moyen de fermetures très sophistiquées [6, 7, 8, 9, 10], mais en conservant une description des seules grandeurs moyennes (densité, vitesse moyenne, température, énergie, entropie, ...).

Une seconde approche est de résoudre directement les équations cinétiques, c'est-à-dire d'accéder à la fonction de distribution des particules plutôt qu'à ses différentes valeurs moyennes. Cette seconde approche, puisque nécessitant de considérer l'espace des phases dans son ensemble, est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul, mais elle a l'avantage de décrire naturellement les interactions ondes-particules. Ces interactions sont nécessaires à l'explication de certains phénomènes comme par exemple l'amortissement Landau. Le principe de base du modèle water bag [11, 12, 13] est d'utiliser la propriété de conservation de la fonction de distribution le long d'une trajectoire dans l'epsace des phases, régissant les plasmas non-collisionnels. L'existence

de cette invariance permet dès lors d'abaisser d'un degré la dimensionnalité d'un problème donné [14]. En ce sens, ce modèle préserve *exactement* le caractère cinétique des équations.

Une première application sera présentée dans ce chapitre ne comportant qu'un degré de liberté en espace et un autre en vitesse, qui nous permettra de retrouver l'effet d'amortissement sans collisions décrit pour la première fois par Landau, qui, faisant appel à la notion d'interaction "onde-particules", est un trait caractéristique des modèles cinétiques. Nous aurons préalablement présenté les différentes techniques nécessaires pour s'assurer en amont d'une description physiquement acceptable du plasma.

1.2 Concepts de base

L'idée de départ du modèle water bag est d'utiliser à son avantage la propriété de conservation de la fonction de distribution des particules décrite par une équation de Vlasov. Nous présentons donc ici l'origine de cette équation cinétique, puis le modèle water bag qui naturellement en découle.

1.2.1 Equation de Vlasov et simple water bag

Le théorème de Liouville, qui conserve la densité de probabilité de tous les états accessibles d'un système (donc dans le grand espace des phases à 6N dimensions) est équivalent à la conservation de la fonction de distribution de l'ensemble des particules, dans l'espace des phases à six dimensions.

En introduisant $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$ la fonction de distribution à une particule, après avoir intégré l'équation de Liouville selon $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$, on obtient la première équation de la hiérarchie BBGKY (pour Bogliubov, Born, Green, Kyrkwood et Yvon). Elle décrit l'évolution de f_1 tout en ayant le mauvais goût d'y faire apparaître $f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2, t)$, fonction de distribution à deux particules, de même l'équation portant sur la fonction f_2 à deux partciules fera intervenir le fonction à 3 particules f_3... Ainsi résoudre l'équation de Liouville est équivalent à résoudre une hiérarchie infinie d'équations.

Cependant, deux alternatives subsistent. D'une part, on peut ne considérer que des interactions binaires, et obtenir ainsi l'équation de Boltzmann, soit négliger toute corrélation entre particules pour ne retenir que des champs moyens. Cette dernière approche est caractéristique de la physique des plasmas, dans lesquels les phénomènes sont essentiellement collectifs et permet d'obtenir l'équation de Vlasov, qui s'écrit dans le cas d'une dimension d'espace x et d'une dimension en vitesse v :

$$\partial_t f + v\partial_x f + \frac{F}{m}\,\partial_v f = 0, \tag{1.1}$$

il s'agit toujours d'une équation de conservation, à savoir celle du volume décrit par la fonction de distribution de l'ensemble des particules dans l'espace des phases.

L'idée du modèle water bag est de considérer à un instant donné une fonction de distribution particulière, en marche d'escalier selon v [15, 16, 17, 18]. Cette distribution est donc définie par sa hauteur A, constante en vertu du caractère conservatif de l'équation de Vlasov (1.1), et par les deux contours $v^{\pm}(x,t)$:

$$\begin{aligned} f(x,v,t) &= A \quad v^- < v < v^+ \\ &= 0 \quad v > v^+ \,\text{ou}\, v < v^-, \end{aligned} \tag{1.2}$$

ou encore, à l'aide de la fonction échelon de Heaviside Υ :

$$f(x,v,t) = A\left[\Upsilon(v-v^-) - \Upsilon(v-v^+)\right] \tag{1.3}$$

En introduisant cette fonction de distribution water bag dans l'équation de Vlasov (1.1), on obtient les équations des contours $v^{\pm}(x,t)$ du water bag :

$$\partial_t v^{\pm} + v^{\pm}\partial_x v^{\pm} = \frac{F}{m} \tag{1.4}$$

1.2.2 Connexion avec le modèle fluide

Il est intéressant de définir une densité $n = A(v^+ - v^-)$, et une vitesse moyenne $u = (v^+ + v^-)/2$, pour obtenir les équations régissant le fluide incompressible (d'où l'appellation de water bag) :

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_x(un) &= 0 \\ \partial_t u + u\partial_x u &= \frac{F}{m} - \frac{\partial_x n^2}{8A^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Remarquons tout d'abord que ce système est rigoureusement fermé. Nous pouvons en effet adopter une définition de la pression, par analogie avec l'équation d'Euler relative à un fluide incompressible :

$$\frac{\partial_x n^2}{8A^2} = \frac{\partial_x P}{mn} \Longleftrightarrow P = \frac{mn^3}{12A^2} \tag{1.6}$$

Enfin, la connaissance des densité, vitesse, et pression, nous permet de calculer la force autocohérente :

$$F = F(n, u, t) \tag{1.7}$$

1.2.3 Modèle multi-water-bag

Si l'on suppose comme condition initiale une fonction de distribution superposition de N marches d'escalier, alors la hauteur de chacune des marches A_j est conservée (1.1) [11, 12, 13], et la distribution totale s'écrit :

$$f(x, v, t) = \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\Upsilon \left(v - v_j^-(x,t) \right) - \Upsilon \left(v - v_j^+(x,t) \right) \right] \tag{1.8}$$

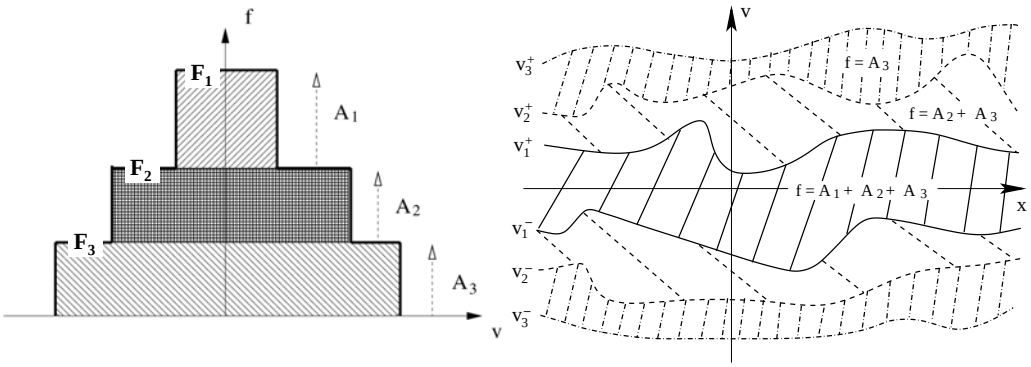


FIGURE 1.1 – Allure de la fonction de distribution multi-water-bag selon la vitesse v (à gauche), et dans l'espace des phases (à droite). Cas de $N = 3$ bags.

Si nous insérons cette fonction de distribution multi-water-bag dans l'équation de Vlasov (1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} A_j \quad & \left\{ - \left[\partial_t v_j^- + v_j^- \partial_x v_j^- - F/m \right] \delta(v - v_j^-) \right. \\ & \left. + \left[\partial_t v_j^+ + v_j^+ \partial_x v_j^+ - F/m \right] \delta(v - v_j^+) \right\} = 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

où nous avons utilisé la propriété de la fonction échelon de Heaviside : $\partial_Y \Upsilon(X - X_0(Y)) = -\partial_Y X_0(Y)\, \delta(X - X_0(Y))$

Cette équation doit être vérifiée pour tout jeu de coefficients A_j non nuls, les équations pour les $2N$ contours $v_j^{\pm}$ s'écrivent donc :

$$\partial_t v_j^{\pm} + v_j^{\pm} \partial_x v_j^{\pm} = \frac{F}{m} \tag{1.10}$$

Nous pouvons définir par analogie avec le paragraphe précédent une densité $n_j = A_j(v_j^+ - v_j^-)$ ainsi qu'une vitesse moyenne $u_j = (v_j^+ + v_j^-)/2$ pour chaque bag j, pour obtenir les équations des fluides associés à chaque bag :

$$\begin{aligned} \partial_t n_j + \partial_x(u_j n_j) &= 0 \\ \partial_t u_j + u_j \partial_x u_j &= \frac{F}{m} - \frac{\partial_x n_j^2}{8A_j^2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nous pouvons dès lors proposer la définition d'une pression partielle "par bag" :

$$P_j = \frac{m n_j^3}{12 A_j^2} \tag{1.12}$$

La pression macroscopique suit quant à elle la loi des gaz parfaits :

$$P = nT = \sum_{j=1}^{N} P_j \tag{1.13}$$

En pratique, le couplage entre les bags, donc entre chaque "fluide", sera assuré par l'équation régissant les champs $F = F(n_j, u_j)$. En particulier, en physique des plasmas, du fait de la présence de particules chargées, le couplage est assuré par les équations de Maxwell, qui permettent de déterminer la force de Laplace $F = q(E + u \times B)$:

$$\begin{aligned} \nabla . \mathbf{E} &= \frac{\sum_s q_s n_s}{\varepsilon_0} \\ \nabla . \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \sum_s q_s n_s u_s + \varepsilon_0 \mu_0 \, \partial_t \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où l'indice s court sur les différentes espèces présentes dans le plasma.

Si l'une de ces espèces (indicée $_s$) doit être décrite par un multi-water-bag, densité et vitesse moyenne associées sont définies (le détail des calculs est donné en Annexe A) :

$$n_s = \sum_{j=1}^{N} n_{sj} = \sum_{j=1}^{N} A_{sj}(v_{sj}^{+} - v_{sj}^{-}) \tag{1.15}$$

$$u_s = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{sj} u_{sj} = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_{sj}(v_{sj}^{+} - v_{sj}^{-})}{n_s} \frac{v_{sj}^{+} + v_{sj}^{-}}{2}, \tag{1.16}$$

où nous avons défini les paramètres water bag $\alpha_{sj} = A_{sj}(v_{sj}^{+} - v_{sj}^{-})/n_s$, $u_{sj} = (v_{sj}^{+} + v_{sj}^{-})/2$.

Le modèle multi-water-bag permet donc de transformer une équation cinétique en un système multi-fluides [1, 2, 3], grâce à l'abandon de l'opérateur ∂_v au profit d'une sommation discrète. En outre le cas d'un seul bag permet de retrouver des équations similaires à celle d'un fluide (avec une fermeture adiabatique), l'équivalence avec une fonction de distribution continue est obtenue avec un nombre infini de bags.

Cependant les effets cinétiques sont présents dès lors que l'on considère plus d'un bag. En effet, si l'on peut mettre en évidence une connexion avec des modèles multi-fluides classiques, la fermeture (1.12) proposée par le modèle multi-water-bag est quant à elle exacte. La dynamique entière est portée par les contours $v_j^{\pm}$, qui doivent suivre la contrainte de rester monovalués.

Par ailleurs, même si les collisions sont très peu fréquentes dans un plasma, il en subsiste toujours un peu, qui invalident notre modèle. En effet l'existence de collisions ne permet plus de considérer les discontinuités A_j comme des invariants exacts du problème. Cependant, nous supposerons cette invariance validée sur des temps suffisament courts au regard du temps caractéristique des collisions.

D'un point de vue plus fondamental, le modèle multi-water-bag représente une classe particulière de solutions de l'équation de Vlasov. A partir du moment où l'on suppose des solutions de cette forme particulière, elles conserveront leur forme water bag tout au long de leur évolution.

Ainsi, se donner une fonction de distribution initiale de type multi-water-bag ne représente en aucun cas une approximation de l'équation de Vlasov, mais plutôt l'utilisation judicieuse de son caractère conservatif [14]. Et cette modélisation ne doit pas être vue comme une discrétisation en vitesse parallèle, mais bien en un choix de forme particulière de solution. De ce point de vue, ce modèle est ainsi mieux posé qu'un modèle faisant encore intervenir en vitesse un opérateur aux dérivées partielles [20].

1.3 Equivalence au sens des moments

Le lien essentiel entre une description fluide et une description cinétique est assuré par le choix de la relation de fermeture. Une description fluide n'est en effet equivalente a la description cinetique que si elle prend en compte l'infinite de moments de la fonction de distribution. En considerant les proprietes physiques du systeme, par exemple les conservations de certaines quantites, on peut aboutir a des descriptions fluides de plus en plus elaborees selon la facon dont elles tronquent le systeme infini de moments.

En présence de collisions, les phénomènes de relaxation permettent de considérer le système en état d'équilibre thermodynamique local, et de fermer la hiérarchie. Mais un plasma est un milieu très faiblement collisionnel et les modèles de fermeture habituels perdent leur pertinence.

Le modèle water bag constitue en ce sens une alternative intéressante, proposant une fermeture rigoureuse des équations cinétiques, conservant ainsi toute la physique associée et préservant en particulier la possibilité de résonnance entre onde et particules.

Le fait de se donner une condition initiale de type water bag amène pour inconnues du problème les paramètres $A_j, v_j^{\pm}$. Nous avons donc à établir le lien entre ces paramètres et ceux liés à une description classique en terme de fonction de distribution continue [21]. La connexion qu'assure le modèle multi-water-bag entre descriptions cinétique et fluide est à la base de notre démarche.

Nous avons considéré le problème de cette donnée des paramètres water bag initiaux comme un problème d'équivalence au sens des moments entre les fonctions de distribution multi-water-bag et continue.

Cette section a donc pour but d'obtenir les expressions d'une part des moments d'une distribution multi-water-bag, et d'autre part la formulation de leur équivalence avec ceux d'une fonction de distribution continue arbitraire de référence.

Les moments multi-water-bag se définissent simplement, à partir de la distribution (1.8) :

$$\mathcal{M}_l^{mwb} = \frac{1}{n_{i0}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^l \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\Upsilon\left(v - v_j^-\right) - \Upsilon\left(v - v_j^+\right) \right] dv, \tag{1.17}$$

où n_{i0} est la densité ionique d'équilibre : le moment water bag d'ordre zéro vaut donc 1.

Dans le cas général, une intégration par parties nous donne (le calcul est détaillé en Annexe A) :

$$\mathcal{M}_l^{mwb} = \frac{1}{l+1} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sum_{i=0}^{l} (v_j^+)^i (v_j^-)^{l-i}, \tag{1.18}$$

où les $\alpha_j = A_j(v_j^+ - v_j^-)/n_{i0}$ désignent les densités partielles de chaque bag (par analogie avec la densité proposée dans le cas d'un seul bag $n = A(v^+ - v^-)$).

En considérant une fonction de distribution multi-water-bag initiale symétrique en vitesse ($v_j^\pm = \pm a_j$) :

$$\mathcal{M}_l^{mwb} = \frac{1}{l+1} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j^l, \tag{1.19}$$

où l'on remarque que tous les moments d'indice l impair sont nuls.

De la même façon, une fonction de distribution continue initiale paire f_0 a pour moments :

$$\mathcal{M}_l^{cont} = \frac{1}{n_{i0}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^l f_0 dv, \tag{1.20}$$

que nous supposons connaître.

Dès lors, en considérant les $2(N-1)$ premiers moments pairs de f_0 et de la distribution multi-water-bag :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j^l &= (l+1)\mathcal{M}_l^{cont}, \quad \forall\, l = 0, ..., 2(N-1) && (1.21) \\ \Leftrightarrow \mathbf{V}\alpha &= M && (1.22) \end{aligned}$$

La formulation matricielle est obtenue en considérant :

$$\begin{aligned} V_{l,j} &= a_j^l \\ \alpha &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0^{cont} \\ \cdots \\ (l+1)\mathcal{M}_l^{cont} \\ \cdots \\ (N+1)\mathcal{M}_N^{cont} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.23}$$

En résolvant ce système (1.22) pour les N inconnues α_j, nous satisfaisons l'équivalence, au sens des moments, entre distribution water bag à N bags et distribution continue. Cette équivalence court jusqu'au moment d'ordre $2(N-1)$ de la fonction de distribution continue, puisque nous avons supposé cette fonction paire. Le modèle water bag est en ce sens équivalent à une description hydrodynamique fermée sur son moment d'ordre $2(N-1)$. La vitesse de coupure, c'est-à-dire la dernière vitesse prise en compte par la distribution water bag est totalement arbitraire, excepté dans le cas d'un seul bag ($a_1^2 = 3v_{Ti}^2$).

1.4 Calcul pratique des paramètres water bag

L'équivalence donnée par le système (1.22) peut être mise à profit pour déterminer les paramètres water bag : si nous supposons connue la répartition des contours a_j à l'instant initial, alors nous obtenons par simple inversion les paramètres water bag manquants α_j (ou indirectement $A_j = n_{i0}\alpha_j/2a_j$).

En pratique, la matrice définie par les éléments $V_{l,j}$ est une matrice de Vandermonde. Ce type de matrice est mal conditionné : c'est-à-dire que son inversion devient instable numériquement au-delà de 15 bags. En effet, le premier élément vaut 1, alors que le dernier vaut 5^{28} si l'on a choisi une dernière vitesse de $5v_{Ti}$ (où $v_{Ti} = \sqrt{T_i/M_i}$ est la vitesse thermique des ions des masse M_i et de température T_i) !

A cause de cette difficulté technique, nous avons eu recours à une approximation pour les grands nombres de bags. Elle repose sur un développement de Taylor de la fonction f_0 d'une part, et son intégration par la méthode des trapèzes d'autre part.

En premier lieu, nous supposons une répartition régulière des contours d'équilibre $\pm a_j$, représentée en figure (1.2). Nous obtenons alors une valeur constante de l'intervalle entre chaque contour à l'instant initial :

$$\Delta a = \frac{2a_{max}}{2N-1} \tag{1.24}$$

Nous pouvons dès lors proposer :

$$F_{j+1} = f_0(a_{j+1} - \Delta a/2) = f_0(a_j + \Delta a/2), \tag{1.25}$$

ce qui revient à calculer les valeurs de la fonction de distribution au centre de chaque intervalle, comme représenté sur la figure (1.2).

Si nous supposons un grand nombre de bags, l'intervalle Δa devient petit, et nous effectuons un développement de Taylor au voisinage de chaque a_j :

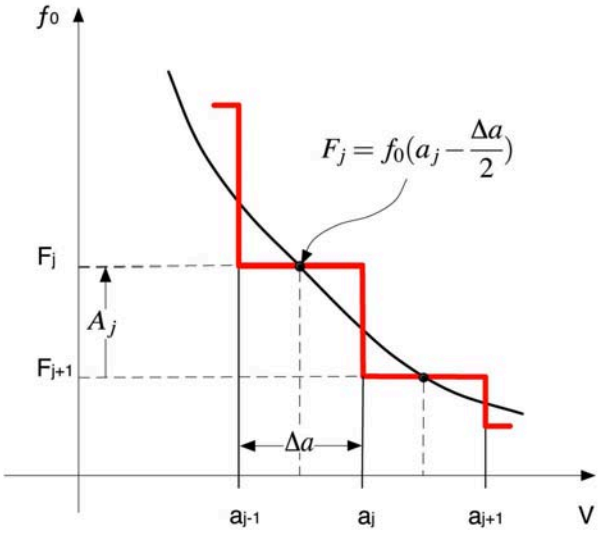


FIGURE 1.2 – Calcul des valeurs de la fonction de distribution multi-water-bag dans le cas d'un espacement régulier des vitesses a_j. Entre $\pm a_1$, la fonction de distribution prend sa valeur au centre $F_1 = f_0(0)$.

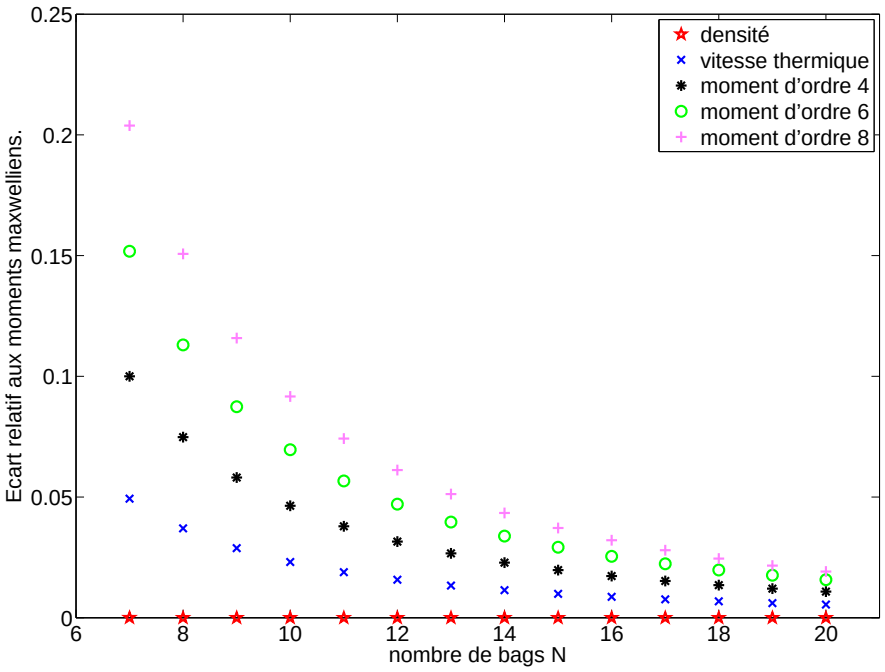


FIGURE 1.3 – Ecarts relatifs des moments multi-water-bag aux moments Maxwelliens, en fonction du nombre de bags.

$$\begin{aligned} F_j &= f_0(a_j) - \frac{\Delta a}{2} \left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=a_j} + \mathcal{O}(\Delta a^2) \\ F_{j+1} &= f_0(a_j) + \frac{\Delta a}{2} \left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=a_j} + \mathcal{O}(\Delta a^2) \end{aligned} \tag{1.26}$$

En effectuant la différence des deux expressions précédentes :

$$\partial_v f_0|_{v=a_j} = \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta a} \tag{1.27}$$

En revenant à l'égalité des moments (1.21), intégrée par parties :

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j^l = -\frac{1}{n_{i0}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{l+1} \partial_v f_0 dv \tag{1.28}$$

Après avoir calculé la dernière intégrale par une méthode de trapèzes dans l intervalle defini par nos contours a_j, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_j &= F_j - F_{j+1} \\ \alpha_j &= 2a_j A_j / n_{i0} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Cette approximation d'un grand nombre de bags permet donc d'éviter la manipulation d'une matrice de Vandermonde.

Nous pouvons à ce stade choisir une fonction de distribution initiale continue quelconque et la décrire au moyen d'un multi-water-bag. L'équivalence entre les deux descriptions est assurée au sens des moments jusqu'à l'ordre $2(N-1)$ pour une distribution paire.

Dans le cadre de l'approximation d'un grand nombre de bags, nous avons représenté en figure (1.3) l'écart entre moments multi-water-bag et moments d'une fonction de distribution maxwellienne prise comme référence, en fonction du nombre de bags. Cet écart, en accord avec l'approximation d'un grand nombre de bags, décroît avec le nombre de bags. L'accord devient satisfaisant (de l'ordre de 5 %) dès 10 bags pour les trois premiers moments (densité, température et flux de chaleur). Nous estimerons donc par la suite que ce type de description est correct pour $N \geq 10$.

Pour résumer, nous choisirons donc systématiquement une distribution des vitesses d'équilibre a_j régulière. Pour moins de dix bags, l'inversion exacte de la matrice de Vandermonde nous donnera les coefficients water bag A_j, et pour $N \geq 10$ bags, nous utiliserons la méthode approchée.

1.5 Amortissement Landau et water bag

Nous cherchons dans cette section à obtenir une première application claire des capacités du modèle water bag. L'étude de l'amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques va nous procurer cette première illustration.

Le modèle

Le système d'équations non-linéaires multi-water-bag régit la dynamique des contours $v_j^{\pm}$ (1.10). Dans le cas d'une dimension en espace et une en vitesse la champ magnétique $\mathbf{B}$ est nul et le couplage avec le potentiel électrostatique ϕ est donc assuré par l'équation de Poisson :

$$-\triangle\phi = \frac{e}{\varepsilon_0}\left[Z_i n_i - n_e\right], \tag{1.30}$$

où $e = 1,6.10^{-19}C$ est la charge élémentaire, $\varepsilon_0 = 8,8510^{-12}F.m^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide, Z_i le nombre de charges ioniques, n_i et n_e les densités respectivement ionique et électronique.

Une grandeur caractéristique du plasma est sa longueur d'écrantage, ou longueur de Debye λ_D. Elle a pour expression littérale :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0/e^2}{n_e/T_e + Z_i^2 n_i/T_i}}, \tag{1.31}$$

où T_e et T_i sont les températures respectivement électronique et ionique.

Dans les conditions d'un plasma de tokamak, la longueur d'écrantage de Debye est de l'ordre de $10^{-4}m$ (soit une centaine de microns). Au-delà de cet ordre de grandeur caractéristique, le plasma est donc globalement neutre, les ions étant écrantés par le nuage électronique. Il s'agit de l'hypothèse de quasi-neutralité, qui permet de considérer le plasma comme neutre électriquement en considérant des échelles caractéristiques supérieures à la longueur de Debye.

L'équation de quasi-neutralité s'écrit :

$$Z_i n_i = n_e \tag{1.32}$$

Notre but étant de modéliser des instabilités typiquement ioniques, nous décrirons cette population par une fonction de distribution multi-water-bag. La densité ionique à l'instant initial s'écrira donc :

$$n_{i0} = \sum_{j=1}^{N} 2A_j a_j \tag{1.33}$$

Pour ce qui est des électrons, nous pouvons à ces échelles négliger leur inertie. Ainsi une description fluide de ces derniers nous donne :

$$0 = e\partial_x\phi - \frac{1}{n_e}\partial_x n_e T_e \tag{1.34}$$

Si l'on suppose les électrons isothermes, on obtient :

$$\partial_x \left(e\phi - T_e \ln n_e\right) = 0 \tag{1.35}$$

La densité électronique suit donc la loi de Boltzmann :

$$n_e(x,t) = n_{e0} e^{e\phi(x,t)/T_e} \tag{1.36}$$

Dans l'hypothèse d'une énergie cinétique des électrons grande devant le potentiel électrostatique $T_e >> e\phi$, nous obtenons l'expression approximée de la densité électronique :

$$n_e = n_{e0}\left(1 + \frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{1.37}$$

Le système d'équations multi-water-bag non-linéaires permettant de décrire les fluctuations ioniques dans un plasma à une dimension en espace et une en vitesse s'écrit donc :

$$\partial_t v_{xj}^{\pm} + v_{xj}^{\pm}\partial_x v_{xj}^{\pm} = \frac{q_i E}{M_i} \tag{1.38}$$

$$Z_i \sum_{j=1}^{N} A_j \left(v_j^{+} - v_j^{-}\right) = n_{e0}\left(1 + \frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{1.39}$$

1.5.1 Analyse linéaire

Effectuer l'analyse linéaire d'un système physique, c'est étudier le comportement de petites fluctuations autour d'un état d'équilibre du système. Cela revient à se donner des grandeurs d'équilibre X_0 et des perturbations δX très petites par rapport à cet équilibre. Dans notre cas nous écrivons :

$$v_j^{\pm}(x,t) = \pm a_j(x) + w_j^{\pm}(x,t) \tag{1.40}$$

$$\phi(x,t) = 0 + \delta\phi(x,t) \tag{1.41}$$

où les grandeurs $a_j(x)$ désignent les contours d'équilibre et $w_j^{\pm}(x,t)$ les perturbations. Nous supposerons un équilibre homogène, soit $a_j(x) = cste$.

En insérant les expressions perturbatives (1.40, 1.41) dans le système non-linéaire (1.38, 1.39), nous obtenons :

$$\partial_t w_j^{\pm} + (\pm a_j + w_j^{\pm})\partial_x(\pm a_j + w_j^{\pm}) = -\frac{q_i}{M_i}\partial_x \delta\phi \quad (1.42)$$

$$Z_i \sum_{j=1}^{N} A_j \left(2a_j + w_j^{+} - w_j^{-}\right) = n_{e0}\left(1 + \frac{e\delta\phi}{T_e}\right) \quad (1.43)$$

Chaque terme perturbatif étant très petit (d'ordre $\epsilon << 1$), nous regroupons différents systèmes par puissances croissantes de ϵ. En tenant compte des caractéristiques de l'équilibre et en négligeant les termes non linéaires, d'ordre supérieur à ϵ, le système caractérisant les perturbations s'écrit :

$$\partial_t w_j^{\pm} \pm a_j \partial_x w_j^{\pm} = -\frac{q_i}{M_i}\partial_x \delta\phi \quad (1.44)$$

$$Z_i \sum_{j=1}^{N} A_j \left(w_j^{+} - w_j^{-}\right) = \frac{e n_{e0}}{T_e}\delta\phi \quad (1.45)$$

Nous supposons des perturbations harmoniques en espace et en temps :

$$w_j^{\pm}(x,t) = w_j^{\pm}\, e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (1.46)$$

$$\delta\phi_0(x,t) = \delta\phi\, e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (1.47)$$

si cette forme de perturbations ne pose pas de problèmes en espace, elle viole en temps le principe de causalité. Nous devrions en toute rigueur utiliser plutôt une transformation de Laplace en temps, cependant cette transformation peut se ramener sous nos approximations à une transformation de Fourier [2].

Nous obtenons le système linéarisé dans l'espace de Fourier :

$$(\omega \mp k_x a_j) w_j^{\pm} = \frac{q_i k_x}{M_i}\delta\phi \quad (1.48)$$

$$Z_i \sum_{j=1}^{N} A_j \left(w_j^{+} - w_j^{-}\right) = \frac{e n_{e0}}{T_e}\delta\phi \quad (1.49)$$

Une approche alternative est de directement linéariser l'équation de Vlasov, puis de choisir une forme water bag pour la fonction de distribution : nous obtenons exactement les mêmes équations au final. Le détail des calculs est donné en Annexe B.

Equation de dispersion

En éliminant les contours (1.48) :

$$w_j^{\pm} = \frac{q_i k_x \delta\phi / M_i}{\omega \mp k_x a_j}$$

de l'équation de quasi-neutralité (1.49), nous obtenons l'équation :

$$\left[\frac{e n_{e0}}{T_e} - Z_i \frac{q_i k_x}{M_i} \sum_{j=1}^{N} A_j \left(\frac{1}{\omega - k_x a_j} - \frac{1}{\omega + k_x a_j} \right) \right] \delta\phi = 0 \tag{1.50}$$

La fonction diélectrique de plasma, définie par $\varepsilon(\omega).\delta\phi = 0$, prend donc dans le cas d'un modèle multi-water-bag la forme suivante :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - Z_i \frac{T_e}{T_i} \frac{k_x^2 T_i}{M_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{2 a_j A_j / n_{i0}}{\omega^2 - k_x^2 a_j^2} \tag{1.51}$$

Nous définissons les grandeurs : $Z_i^{\star} = Z_i/\tau = Z_i T_e/T_i$, $\alpha_j = 2 a_j A_j / n_{i0}$, $v_{Ti} = \sqrt{T_i/M_i}$. Nous utilisons également les normalisations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{v} &= v/v_{Ti} \\ \hat{\omega} &= \omega/k_x v_{Ti}, \end{aligned} \tag{1.52}$$

pour finalement obtenir l'expression de la fonction diélectrique multi-water-bag :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - Z_i^{\star} \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\omega^2 - a_j^2} \tag{1.53}$$

Cette fonction est symétrique, les solutions de l'équation de dispersion, $\varepsilon(\omega) = 0$, le seront donc aussi. Elles seront par ailleurs toutes réelles : le plasma ainsi décrit est stable.

De façon générale, cette fonction admet $2N$ asymptotes, les racines symétriques étant situées entre chacune de ces asymptotes, ainsi que représenté en figure (1.4), dans le cas de trois bags.

Ces solutions sont les modes propres de l'équilibre choisi, seules les ondes associées à ces modes pourront se propager dans le plasma (dans le cas contraire, nous aurions $\delta\phi = 0$).

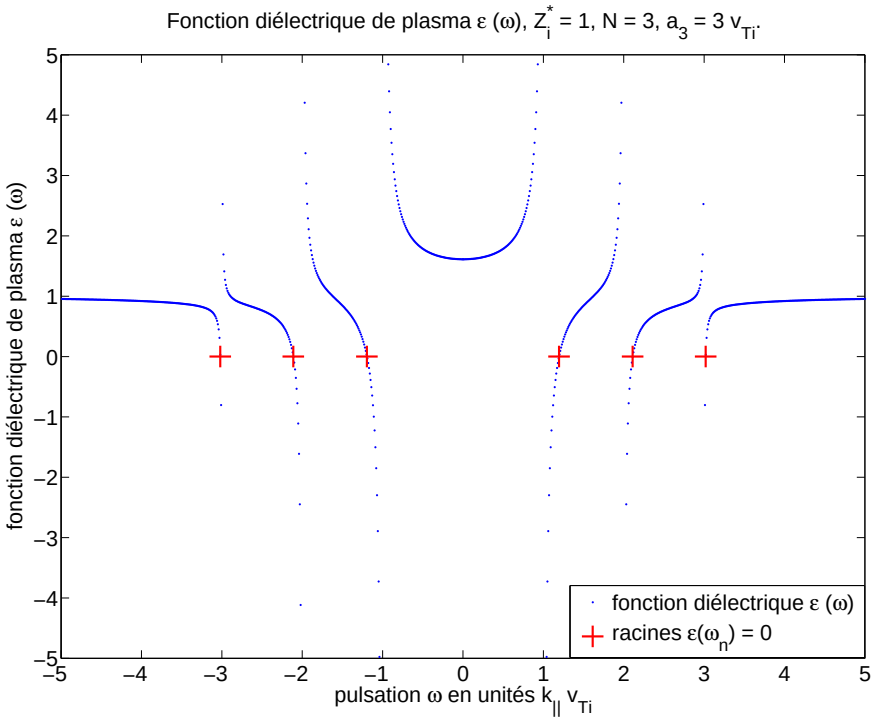


FIGURE 1.4 – Allure de la fonction diélectrique d'un plasma modélisé par un multi-water-bag. $Z_i^\star = 1$, $N = 3$, $a_3 = 2,5 v_{Ti}$.

Fonctions propres de l'opérateur multi-water-bag

Revenons maintenant au système (1.48, 1.49), dont nous éliminons le potentiel électrostatique $\delta\phi$. Nous obtenons les équations déterminant les perturbations $w_j^{\pm}$:

$$(\omega \mp k_x a_j) w_j^{\pm} = \frac{q_i k_x}{M_i} \frac{T_e}{e n_{e0}} Z_i \sum_{k=1}^{N} A_k (w_k^{+} - w_k^{-}) \tag{1.54}$$

Nous réécrivons ces équations en introduisant notre système de normalisations :

$$(\omega \mp a_j) w_j^{\pm} - Z_i^{\star} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{n_{i0}} (w_{kx}^{+} - w_{kx}^{-}) = 0 \tag{1.55}$$

En changeant de convention de sommation :

$$\begin{aligned} A_{-j} &= -A_j \\ a_{-j} &= -a_j \\ w_{-j} &= w_j^{-}, \end{aligned} \tag{1.56}$$

et en multipliant par A_j, nous pouvons définir les fonctions propres du multi-water-bag $W_j = A_j w_j$:

$$(\omega - a_j) W_j - Z_i^{\star} \frac{A_j}{n_{i0}} \sum_{k=-N}^{N}{}^{\star} W_k = 0, \tag{1.57}$$

où l'indice k court maintenant de $-N$ à N, le symbole * sur la sommation signifie quant à lui que cette sommation omet la valeur $k = 0$.

Le système d'équations (1.57) constitue un système algébrique linéaire d'équations aux valeurs et fonctions propres. Les fonctions propres sont déterminées à une constante multiplicative arbitraire près. Nous pouvons donc choisir la contrainte de normation :

$$\sum_{j=-N}^{N}{}^{\star} W_j = 1 \tag{1.58}$$

Nous obtenons par ce biais l'expression des fonctions propres du multi-water-bag :

$$W_j = Z_i^{\star} \frac{A_j / n_{i0}}{\omega - a_j} \tag{1.59}$$

Cependant l'ensemble des W_j ne constitue pas une base complète, il faut également tenir compte de l'opérateur adjoint du water-bag, défini par l'équation adjointe :

$$(\omega - a_j)\bar{W}_j - Z_i^\star \overset{\star}{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{A_k}{n_{i0}} \bar{W}_k = 0 \tag{1.60}$$

A nouveau nous pouvons nous donner une contrainte particulière :

$$\overset{\star}{\sum_{j=-N}^{N}} \frac{A_j}{n_{i0}} \bar{W}_j = 1, \tag{1.61}$$

pour finalement obtenir les fonctions propres de l'opérateur multi-water-bag adjoint :

$$\bar{W}_j = \frac{Z_i^\star}{\omega - a_j} \tag{1.62}$$

N.B. Les deux conventions de sommation précédentes, combinées aux expressions des fonctions propres associées, nous permettent de retrouver directement l'équation de dispersion, dont les solutions sont les modes propres du multi-water-bag.

Orthogonalité de la base des fonctions propres $\{W_j, \bar{W}_j\}$

Nous devons nous munir d'un produit scalaire. Définissons-le comme suit :

$$\left\langle W^m \middle| \bar{W}^n \right\rangle = \overset{\star}{\sum_{j=-N}^{N}} W_j^n \bar{W}_j^m, \tag{1.63}$$

où les indices n, m désignent les fonctions propres associées aux valeurs propres ω_n, ω_m.

En explicitant les fonctions propres :

$$\left\langle W^m \middle| \bar{W}^n \right\rangle = \overset{\star}{\sum_{j=-N}^{N}} Z_i^\star \frac{A_j/n_{i0}}{\omega_n - a_j} \frac{Z_i^\star}{\omega_m - a_j}, \tag{1.64}$$

nous remarquons que le produit scalaire est non nul dans le cas $m = n$. Nous définissons :

$$b_n = \left\langle W^n \middle| \bar{W}^n \right\rangle = Z_i^{\star 2} \overset{\star}{\sum_{j=-N}^{N}} \frac{A_j/n_{i0}}{(\omega_n - a_j)^2} \tag{1.65}$$

Pour les autres cas de figure, nous séparons les dénominateurs sous la somme :

$$\left\langle W^m \middle| \bar{W}^n \right\rangle = Z_i^{\star 2} \sum_{j=-N}^{N}{}^{\star} \frac{A_j}{n_{i0}} \frac{1}{\omega_m - \omega_n} \left[\frac{1}{\omega_n - a_j} - \frac{1}{\omega_m - a_j} \right] \tag{1.66}$$

Dans notre convention de sommation, la fonction diélectrique s'écrit :

$$\epsilon(\omega) = 1 - Z_i^{\star} \sum_{j=-N}^{N}{}^{\star} \frac{A_j / n_{i0}}{\omega - a_j}, \tag{1.67}$$

nous la faisons apparaître dans l'expression du produit scalaire (1.66) :

$$\left\langle W^m \middle| \bar{W}^n \right\rangle = \frac{1}{\omega_m - \omega_n} \left[1 - \epsilon(\omega_n) - 1 - \epsilon(\omega_m) \right], \tag{1.68}$$

qui est bien nulle pour toute solution $\omega_{n,m}$ de l'équation de dispersion $\epsilon(\omega_n) = 0$.

La base des fonctions propres et adjointes est donc bien orthogonale.

Potentiel électrostatique

Nous pouvons écrire la solution générale en terme de fonctions propres :

$$W_j(x,t) = \sum_n C_n(k_x, \omega_n) W_j^n(k_x, \omega_n) e^{i(k_x x - \omega_n t)} \tag{1.69}$$

Si nous nous intéressons à la dépendance temporelle du potentiel 1.49 :

$$\delta\phi(k_x, t) = Z_i^{\star} \sum_n C_n(k_x, \omega_n) \sum_j A_j w_j^n(k_x, \omega_n) e^{-i\omega_n t}, \tag{1.70}$$

ou encore avec la condition de normation $\sum_j W_j^n = 1$:

$$\delta\phi(k_x, t) = Z_i^{\star} \sum_n C_n(k_x, \omega_n) e^{-i\omega_n t} \tag{1.71}$$

Il reste à évaluer les coefficients C_n appropriés, en se donnant des conditions initiales :

$$W_j(k_x, 0) = \sum_n C_n(k_x, \omega_n) W_j^n(k_x, \omega_n) \tag{1.72}$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions propres, nous obtenons :

$$C_n(k_x,\omega_n) = \frac{1}{b_n}\sum_{j=-N}^{N}{}^{\star}\,\bar{W}_j^n(k_x,\omega_n)W_j(k_x,0) \tag{1.73}$$

En remplaçant les fonctions propres et adjointes par leurs expression (1.69, 1.62), le potentiel s'écrit finalement :

$$\delta\phi(k_x,t) = n_{i0}\sum_n \frac{\sum_{j=-N}^{N^\star} A_j w_j(k_x,0)/(\omega_n - k_x a_j)}{\sum_{j=-N}^{N^\star} A_j/(\omega_n - k_x a_j)^2} e^{-i\omega_n t} \tag{1.74}$$

le retour à la convention de sommation naturelle nous donne (avec les perturbations initiales $w_{j0}^{\pm} = w_j^{\pm}(k_x,0)$) :

$$\delta\phi(k_x,t) = \sum_n \frac{\sum_{j=1}^{N} A_j\left[\omega_n(w_{j0}^{+} - w_{j0}^{-}) + a_j(w_{j0}^{+} - w_{j0}^{-})\right]/(\omega_n^2 - a_j^2)}{\sum_{j=1}^{N} 2\omega_n\alpha_j/(\omega_n^2 - a_j^2)^2} e^{-i\omega_n t} \tag{1.75}$$

A ce stade, nous sommes en mesure de déterminer l'évolution temporelle linéaire du potentiel électrostatique. Cette information va nous permettre de déterminer les valeurs des taux d'amortissement Landau et donc de tester la bonne description par notre modèle des effets cinétiques.

Nous remarquons que cette évolution temporelle du potentiel électrostatique peut être vue comme une superposition d'oscillateurs non amortis ω_n (1.75) similaire aux interprétations de Van Kampen [22] et Case [23] de l'amortissement Landau.

1.5.2 L'amortissement Landau

Un test de la prise en compte des effets cinétiques en physique des plasmas est l'amortissement Landau [24]. C'est un effet non collisionnel, caractéristique d'une interaction entre une onde de vitesse de phase donnée et les particules ayant une distribution de vitesses autour de cette vitesse de phase.

Revenons à l'équation de Vlasov (1.1). Considérons le cas de petites perturbations $f(x,v,t) = F_0(v) + f_1(v)e^{i(kx-\omega t)}$, autour d'un équilibre stationnaire homogène $F_0(v)$. La seule force considérée est engendrée par une fluctuation de potentiel électrostatique, nul à l'équilibre : $\phi(x,t) = 0 + \delta\phi\, e^{i(kx-\omega t)}$.

Nous obtenons alors le système linéarisé :

$$(kv-\omega)f_1 = k\frac{q_i\delta\phi}{M_i}\partial_v F_0 \tag{1.76}$$

$$Z_i\int_{-\infty}^{+\infty} f_1\, dv = \frac{en_{e0}}{T_e}\delta\phi \tag{1.77}$$

Nous obtenons la fonction diélectrique de plasma en éliminant f_1 :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - Z_i^\star k^2 v_{Ti}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v f_0}{v - v_\phi} dv \tag{1.78}$$

Nous avons introduit les grandeurs $Z_i^\star = Z_i T_e/T_i$, $v_{Ti}^2 = T_i/M_i$, $f_0 = F_0/n_0$ et $v_\phi = \omega/k$.

La résolution de cette équation de dispersion est ardue. Dans le cas d'une fonction d'équilibre f_0 maxwellienne, l'intégrale est une fonction connue : la fonction de Fried et Conte. Des expressions approchées peuvent en être données dans les deux limites de grands et petits arguments. Dans tous les cas, et c'est là le point important de cette section, les intégrations dans le plan complexe voient apparaître des solutions à partie imaginaire non nulle.

L'approximation d'une vitesse de phase de l'onde très supérieure à la vitesse thermique associée à la distribution f_0 des ions (supposée maxwellienne) conduit aux expressions [25] :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k^2 v_{Ti}^2 (Z_i^\star + 3) \\ \omega &\simeq \sqrt{Z_i^\star} k v_{Ti} \left(1 + i\frac{\pi}{2} Z_i^\star v_{Ti}^2 \left[\frac{\partial f_0}{\partial v}\right]_{v=v_\phi}\right) \end{aligned} \tag{1.79}$$

Ces deux expressions sont obtenues dans un premier temps en négligeant totalement la partie imaginaire de la pulsation. La partie réelle obtenue permet ensuite d'obtenir la solution complète (1.79).

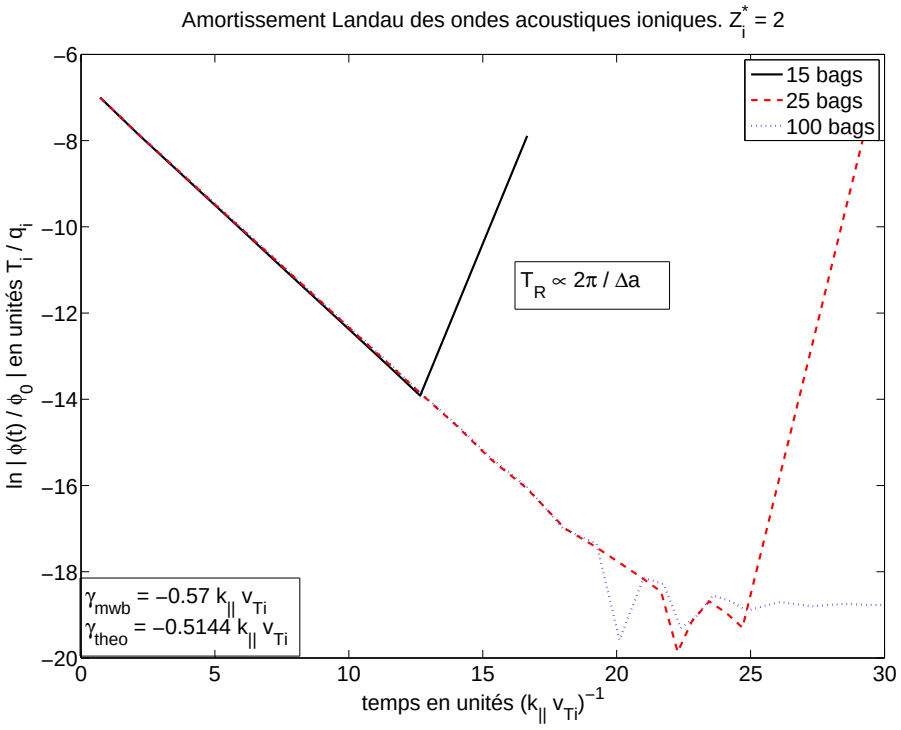


FIGURE 1.5 – Amortissement Landau linéaire : évolution temporelle du potentiel électrostatique, pour différents nombres de bags (échelle logarithmique).

Nous constatons dans l'expression (1.79), que le signe de la partie imaginaire est celui de la dérivée par rapport à la vitesse de la fonction de distribution d'équilibre F_0. Ainsi, dans le cas d'une Maxwellienne, et plus généralement d'une fonction de distribution monotone, on assiste à un effet d'amortissement de l'onde via la résonnance avec les particules de vitesse comparable à sa vitesse de phase : c'est l'amortissement Landau.

Un bon test pour notre modèle water bag est donc de retrouver cet effet d'amortissement caractéristique d'une description cinétique. Nous obtiendrons en particulier des accords différents selon le nombre de bags. En figure (1.5), nous avons reporté l'évolution temporelle du potentiel électrostatique normalisé. Nous observons que l'accord entre taux de croissance linéaire multi-water-bag et cinétique classique (1.79) est bon (de l'ordre de 10%).

Dans le cas de notre modèle, le processus physique est legerement différent du cas d'une fonction de distribution continue. Il s'agit d'un mélange de phase entre différents oscillateurs non amortis : en effet l'équation de dispersion multi-water-bag admet $2N$ racines réelles (dans le cas de N bags),

qui constituent autant d'oscillateurs propres au plasma décrit. Sous l'effet de la perturbation initiale, ces oscillateurs sont lancés au même instant et accumulent un déphasage croissant entre eux au cours du temps, qui a pour effet d'amortir l'onde électrostatique. Cette interprétation de l'amortissement Landau en terme de mélange de phase entre différents oscillateurs est à rapprocher [19] des travaux de Van Kampen et Case [22, 23].

De plus, si l'on considère que les fréquences propres de chaque oscillateur sont multiples de Δa, une période de récurrence doit voir revenir tous ces oscillateurs en phase, et donc le potentiel doit revenir à son excitation initiale. C'est effectivement ce que l'on constate, avec des périodes de récurrence $T_R \propto 2\pi/\Delta a$ croissant avec le nombre de bags (1.5).

1.5.3 Comparaison avec des simulations non linéaires multi-water-bag

Le taux d'amortissement Landau obtenu dans le cadre de l'analyse linéaire, peut servir de cas test à la mise au point d'un code numérique non linéaire résolvant les équations des contours. Ce travail a été entrepris par N. Besse [26]. Nous rappelons ici très brièvement le principe de ce code. Nous présenterons ensuite les résultats des simulations caractérisant l'amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques pour les comparer à ceux obtenus dans le cadre de l'analyse linéaire.

Méthode numérique

Si le système d'équations considéré dans ce chapitre est très idéalisé, le choix de la méthode Galerkin [27, 28, 29] discontinue en espace couplée à un algorithme de Runge-Kutta en temps s'est fait essentiellement dans l'optique des difficultés ultérieures.

De manière très schématique, nous présenterons ici le principe de la méthode Galerkin discontinue, qui permet de résoudre la partie spatiale des équations non-linéaires aux dérivées partielles.

L'idée est de décomposer l'espace en cellules correspondant au maillage numérique, et de résoudre pour chaque cellule la dynamique. Cette résolution se déroule de manière discontinue : aucune condition de raccordement des valeurs aux bords n'est choisie. Cette hypothèse a l'avantage d'une parallèlisation plus aisée (la communication entre processeurs étant amoindrie), elle permet également d'utiliser des maillages adaptatifs (concentrant l'effort de calcul sur les zones physiquement intéressantes), enfin le maillage lui-même peut décrire une géométrie complexe.

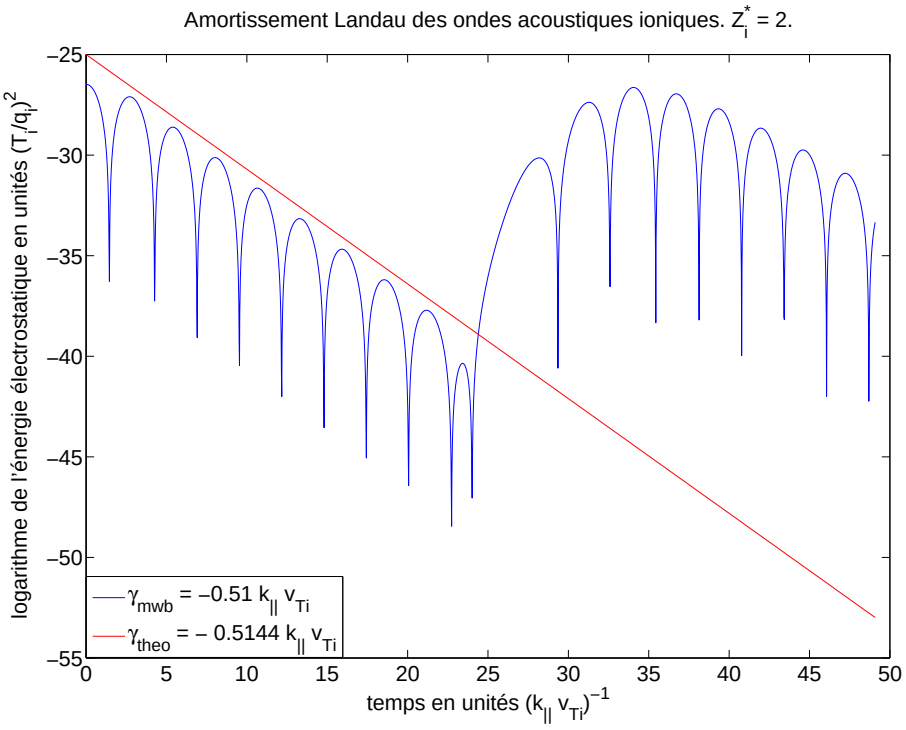


FIGURE 1.6 – Amortissement Landau. Allure de l'énergie électrique en fonction du temps (échelle logarithmique).

La circulation de l'information entre les différentes cellules est assurée par un flux numérique, qui, du fait de la discontinuité, doit obéir à des conditions aux limites adaptées aux problèmes traités. Ainsi, dans le cas de l'étude de phénomènes de diffusion, l'information est moyennée à chaque interface, quand pour un problème de transport le flux réel sera assimilé aux flux définis comme sortants.

Amortissement Landau

L'évolution temporelle du potentiel électrostatique, tout comme la dynamique des contours water bag, sont simulées numériquement grâce à la méthode de Galerkin discontinue en espace et Runge-Kutta en temps. Les équations non-linéaires caractérisant l'évolution du système sont les équations (1.38, 1.39).

Les paramètres de la simulation numérique sont les suivants : $L = 4\pi/k_x$, $N = 16$, $v_{max} = 6v_{Ti}$, $n_0 = 1$ et $Z_i^\star = 2$. La figure 1.6 permet de constater

que le taux d'amortissement Landau $\gamma_{mwb} = -0,51 k_{\|} v_{Ti}$ est sensiblement le même que la valeur prédite par la théorie linéaire $\gamma_{theo} = -0.5144 k_{\|} v_{Ti}$. De plus le temps de récurrence théorique $T_R = 2\pi/(\Delta v)$ est égal à 32.46 ce qui coïncide parfaitement avec les simulations.

La comparaison entre les résultats linéaires (1.5) et non-linéaires (1.6) est intéressante. L'ensemble de ces résultats est en accord avec les valeurs théoriques. Les temps de récurrence vérifient bien dans les deux cas la prédiction théorique $T_R \propto 2\pi/\Delta v$.

Le très bon accord à la fois sur le taux d'amortissement et le temps de récurrence, est donc une bonne indication de la validité du schéma numérique.

1.6 Conclusion

La propriété de conservation de l'équation de Vlasov vis-à-vis de la fonction de distribution est à la base du modèle water bag.

Notre modèle water bag est équivalent à un modèle hydrodynamique jusqu'au moment d'ordre $2(N-1)$. Cette propriété d'équivalence permet en particulier de se donner un jeu de paramètres water bag satisfaisants. Ainsi, le modèle water bag assure par essence la connexion des modèles cinétiques aux modèles hydrodynamiques.

L'exemple de l'amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques a été examiné. La formulation water bag des équations procure une interprétation très claire de cet effet purement cinétique. Cette formulation est à rapprocher des travaux de Van Kampen et Case décrivant l'effet d'amortissement Landau au moyen d'un mélange d'oscillateurs.

Les taux d'amortissement Landau linéaires sont retrouvés dans le cadre de l'analyse linéaire comme au moyen de simulations non-linéaires réalisées par Nicolas Besse.

Les propriétés spécifiques de la modélisation water bag sont maintenant bien établies. Leur transposition au contexte des plasmas magnétisés de tokamak est l'objet des prochains chapitres.

Chapitre 2

Modèle de dérive cinétique et water bag

O pluie o poussière impalpable
Existence couleur de sable
Brouillard des respirations
Quel choix préside à mon vertige
Je tombe et fuis dans ce prodige
Ma propre accélération.
Louis Aragon

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le modèle water bag utilise l'invariance *exacte* de Liouville dans l'espace des phases (les paramètres A_j sont ainsi invariants exacts). Avec un nombre fini d'invariants, il est possible de décrire des effets cinétiques correctement. Dans le cas d'une géométrie simplifiée, l'effet d'amortissement Landau a été retrouvé en phase linéaire. Dans le cas d'un plasma magnétisé, la théorie girocinétique [30, 31, 32] basée sur l'existence de l'invariance *adiabatique* permet de réduire de 6 à 5, voire à 4 la dimension de l'espace des phases.

L'idée fondamentale de ce travail est de montrer que pour les plasmas sans collision de tokamak, il est possible de combiner à la fois l'invariance *exacte* de Liouville (et donc d'utiliser un modèle water bag) à l'invariance *adiabatique* (modèle girocinétique) pour réduire encore la dimensionnalité du problème.

Nous nous intéressons au cas d'un plasma magnétisé, dans l'approximation cylindrique d'un tore de grand rayon très grand devant son petit rayon. Cette géométrie présente en outre l'avantage d'être directement comparable

à de nombreuses expériences cylindriques de laboratoire, comme Mirabelle (LPMIA - Université Nancy 1 - Henri Poincaré), Mistral (LPIIM Université de Provence Aix Marseille) ou encore Columbia Linear Machine (CPPL - Columbia University - New York). Il nous faut pour cela en théorie considérer un espace des phases à six dimensions. Cependant, l'approximation girocinétique permet de n'avoir à considérer qu'une seule dimension en vitesse, parallèle au champ magnétique : le modèle water bag est donc particulièrement adapté à ce contexte.

L'ambition de ce chapitre est d'adapter le modèle water bag à l'équation cinétique la plus simple décrivant un plasma magnétisé : l'équation de dérive cinétique. Malgré sa simplicité, cette équation permet de mettre en évidence les Instabilités de Gradient de Température (ITG) [33, 34, 35], qui sont suspectées jouer un rôle important dans le transport anormal au sein des tokamaks. Une étude water bag, avec sa connexion naturelle entre description fluide et cinétique est donc tout à fait pertinente.

Nous présenterons dans un premier temps les problèmatiques générales liées à la turbulence dans les plasmas magnétisés et l'intérêt du modèle girocinétique. Nous introduirons ensuite les approximations liées à la description de dérive cinétique, tant au niveau du modèle cinétique "classique" qu'à celui water bag que nous introduirons. L'analyse linéaire sera particulièrement développée, qui nous permettra de confronter des résultats typiquement water bag à des résultats analytiques connus, dans le cas particulier d'une fonction de distribution maxwellienne d'équilibre.

2.2 Turbulence et modèle girocinétique

A première vue, la configuration magnétique d'un tokamak devrait à elle seule permettre de bloquer les flux de chaleur et de particules vers l'extérieur du plasma et assurer un confinement stable. Ainsi, dans les années cinquante, les physiciens espéraient-ils un essor fulgurant de la fusion nucléaire. Cependant, il a vite été avéré que les coefficients de transport, et le temps de confinement obtenus n'étaient pas du tout à la hauteur des prévisions : les modèles de transport *classiques*, tenant uniquement compte des collisions entre particules du plasma, n'étaient pas suffisants.

En particulier, les phénomènes de turbulence au sein du plasma doivent être pris en compte pour décrire le transport *anormal*. Cette turbulence prend sa source dans les nombreuses formes d'instabilités au sein du plasma (par exemple dans notre cas les gradients de température ionique) : l'étude de ces instabilités s'avère donc inévitable [35].

Dans la géométrie compliquée d'un tokamak, la description cinétique doit

en théorie se faire dans un espace des phases à six dimensions (trois en vitesse et autant en position). Cependant, le mouvement des particules perpendiculairement au champ magnétique est séparable d'une part en leur giration très rapide (caractérisée par $\Omega_{ci} = q_i B/M_i$ pour les ions), et des mouvements de dérive de l'ensemble d'une espèce, caractéristiques de la configuration magnétique macroscopique.

La phase associée à la giration cylotronique n'est pas une information importante : en filtrant cette information pour ne retenir que le module en vitesse perpendiculaire au champ magnétique $v_\perp$, il est possible de réduire d'un degré de liberté l'espace des phases : c'est le modèle *girocinétique* [30, 36, 37, 38, 39, 31, 32], basé sur l'opération de giromoyenne $\mathcal{J}_{v_\perp}[g(\mathbf{x},\mathbf{v}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\, g(\mathbf{x}+\rho_{\mathbf{v}_\perp}(\alpha),\mathbf{v})$. De plus, le module en vitesse perpendiculaire peut être lié au moment magnétique $\mu = M_i v_\perp^2/(2B)$, et nous pouvons donc substituer à la dépendance en $v_\perp$ une dépendance en μ. L'équation de Vlasov régissant la fonction de distribution $f = f(t,\mathbf{r},v_\parallel,\mu)$ s'écrit :

$$D_t f = \partial_t f + \dot{\mathbf{X}}_\perp.\nabla f + \dot{X}_\parallel \nabla_\parallel f + \dot{v}_\parallel \partial_{v_\parallel} f = 0, \tag{2.1}$$

avec :

- ⋆ $\dot{\mathbf{X}}_\parallel = v_\parallel \mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{X}}_\perp = \mathbf{v_E} + \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_c$.
- ⋆ le champ magnétique corrigé $\mathbf{B}^\star$, donné par les relations $\mathbf{B}^\star = \mathbf{B} + \frac{M_i v_\parallel}{q_i}\nabla\times\mathbf{b}$, avec $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ le vecteur unitaire dirigé selon le champ magnétique $\mathbf{B}$.
- ⋆ $\mathbf{v_E}$ la vitesse de dérive électrique :

$$\mathbf{v_E} = \frac{1}{B_\parallel^\star}\mathbf{b}\times\nabla\mathcal{J}_\mu\phi \tag{2.2}$$

  où $\mathcal{J}_\mu\phi$ est le potentiel électrostatique giromoyenné.
- ⋆ $\mathbf{v}_{\nabla B}$ est le vitesse de dérive liée au gradient de champ magnétique :

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{\mu}{q_i B_\parallel^\star}\mathbf{b}\times\nabla B \tag{2.3}$$

- ⋆ $\mathbf{v_c}$ est la vitesse de dérive liée à la courbure du champ magnétique :

$$\mathbf{v}_c = \frac{M_i v_\parallel^2}{q_i B_\parallel^\star}\left(\frac{\mathbf{b}\times\nabla B}{B} + \frac{(\nabla\times\mathbf{B})_\perp}{B}\right) = \frac{M_i v_\parallel^2}{q_i B_\parallel^\star}\mathbf{b}\times\frac{\mathbf{N}}{R_c} \tag{2.4}$$

  où $\mathbf{N}/R_c$ est le vecteur portant la courbure des lignes de champ magnétique.
- ⋆ $\dot{v}_\parallel$ est l'accélération parallèle :

$$\dot{v}_\parallel = -\left[\mathbf{b} + \frac{M_i v_\parallel^2}{q_i B}\left(\mathbf{b}\times\frac{\mathbf{N}}{R_c}\right)\right].\left[\frac{\mu}{M_i}\nabla\mathbf{B} + \frac{q_i}{M_i}\nabla\mathcal{J}_\mu\phi\right] \tag{2.5}$$

Le champ magnétique est supposé ne pas fluctuer : l'équation de Poisson ferme le système d'équations :

$$Z_i \mathcal{J}_\mu n_i + Z_i \frac{q_i}{T_i} r_{Li}^2 \nabla_\perp . (n_i \nabla_\perp \phi) + Z_i \frac{q_i n_i}{T_i} \lambda_{Di}^2 \triangle \phi \quad = \quad n_e \tag{2.6}$$

où Z_i est la charge des ions, T_i leur température et $r_{Li} = v_\perp / \Omega_{ci}$ leur rayon de Larmor. $n_i = \int 2\pi \frac{\Omega_{ci}}{q_i} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f dv_\parallel$ est la densité des ions, n_{e0} est celle des électrons isothermes de température T_e et de charge $-e$.

Le terme $Z_i \frac{q_i}{T_i} r_{Li}^2 \nabla_\perp . (n_i \nabla_\perp \phi)$ apparaissant dans l'équation de Poisson est appelé terme de dérive de polarisation, c'est un effet lié à la prise en compte d'un rayon de Larmor fini, que nous étudierons plus en détail au chapitre III.

La dérivation rigoureuse des équations girocinétiques a permi de grandes avancées numériques cette dernière décennie, avec la réalisation de nombreux codes girocinétiques. Ces simulations se détaillent par ailleurs en deux sous-catégories : les codes dits PIC pour Particle In Cell [40, 41, 42] qui suivent la dynamique de macroparticules, et les codes Vlasov résolvant la fonction de distribution [43, 44, 45, 46, 47].

Par ailleurs, le moment magnétique $\mu = M_i v_\perp^2 / (2B)$ d'une particule chargée varie très lentement : on l' appelle un *invariant adiabatique*. Ceci caracterise le fait qu'une particule voit a l echelle de sa giration un champ magnetique quasiment constant. Par voie de conséquence, le module en vitesse perpendiculaire peut en premiere approximation etre considere comme un invariant du problème, traitable comme un label [14]. Ceci nous permet de baisser d'un degré la dimension du problème :

$$f(t, \mathbf{r}, v_\parallel, \mu) = \sum_l f_l(t, \mathbf{r}, v_\parallel) \delta(\mu - \mu_l) \tag{2.7}$$

Ainsi, dans le cas général de plusieurs valeurs de μ (c'est-à-dire d'une distribution en $v_\perp$), nous obtenons autant d'équations girocinétiques (2.1) que de valeurs de moment magnétique. Ces différentes "populations" sont alors couplées par l'équation de Poisson (2.6) par l'intermédiaire d'une sommation discrète :

$$n_i = \sum_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_\mu f_\mu dv_\parallel \tag{2.8}$$

En particulier, le cas $\mu = 0$ correspond à la limite d'un rayon de giration nul des particules autour de leurs centres-guides, et donne le modèle girocinétique le plus simple : celui de dérive cinétique.

Nous nous situerons toujours à des échelles spatiales grandes devant la longueur de Debye, caractéristique de l'écrantage des ions par les électrons : le terme $Z_i \frac{q_i n_i}{T_i} \lambda_{Di}^2 \triangle \phi$ sera négligé dans l'équation de Poisson, que nous appellerons alors équation de quasi-neutralité.

Enfin, il est possible de supposer un tore de grand rayon infini, et donc se situer en géométrie simplifiée cylindrique avec un champ magnétique axial homogène.

Puisque nous nous intéressons à combiner un modèle *water bag* au modèle girocinétique, nous allons dans un premier temps pousser les simplifications au maximum, pour distinguer plus aisément les particularités de notre modèle.

2.3 Le modèle giro-water-bag

Dans toute la suite de ce mémoire, nous quitterons le cas général d'une géométrie torique, pour étudier la géométrie cylindrique plus simple. En considérant le cas d'un plasma de géométrie cylindrique, avec un champ magnétique uniforme longitudinal, les équations girocinétiques (2.1, 2.6) peuvent se simplifier fortement. Ce jeu d'équations comprend autant d'équations de Vlasov que de valeurs considérées pour l'invariant adiabatique μ, et donc de populations $f_\mu(t, \mathbf{r}, v_\parallel)$:

$$\partial_t f_\mu + \mathcal{J}_\mu \mathbf{v_E}.\nabla_\perp f_\mu + v_\parallel \partial_z f_\mu + \frac{q_i}{M_i} \mathcal{J}_\mu E_\parallel \partial_{v_\parallel} f_\mu = 0 \tag{2.9}$$

Ces différentes équations respectent toutes l'invariance de Liouville, l'introduction d'une fonction de distribution water bag est donc tout à fait appropriée. Elles sont couplées par l'équation de quasi-neutralité :

$$Z_i n_i + Z_i \nabla_\perp . \left(\frac{n_i}{B\Omega_{ci}} \nabla_\perp \phi \right) = n_e \tag{2.10}$$

avec $n_i = \sum_\mu \int \mathcal{J}_\mu f_\mu dv_\parallel$ la densité de particules réelles calculée à partir des fonctions de distribution f_μ des centres-guides giromoyennées.

La population d'électrons est supposée adiabatique : $n_e = n_{e0} e^{e\phi/T_e}$, avec une énergie cinétique grande devant l'énergie potentielle électrostatique $e\phi << T_e$. Nous écrirons pour cette population $n_e = n_{e0}(1 + e\phi/T_e)$.

Nous supposerons également que la dérive de polarisation des ions porte sur leur distribution d'équilibre n_{i0}. Ce terme est inclus dans l'équation de quasi-neutralité et n'a donc pas à apparaître comme une vitesse de dérive supplémentaire : la seule vitesse perpendiculaire à prendre en compte est donc la dérive électrique $\mathbf{v_E} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$.

Le caractère conservatif des équations de Vlasov découlant de l'invariance de Liouville est assuré quant aux distributions de centres-guides f_μ. Nous introduisons donc les fonctions de distribution multi-water-bag pour décrire la population de centres-guides ioniques :

$$f_\mu(t,\mathbf{r},v_\parallel) = \sum_{j=1}^{N_\mu} A_{\mu j}\left[\Upsilon(v_\parallel - v_{\mu j}^-) - \Upsilon(v_\parallel - v_{\mu j}^+)\right] \tag{2.11}$$

La propriété générale des fonctions de Heaviside Υ nous permet d'obtenir aisément les équations *water bag girocinétiques*, fondant ainsi le modèle giro-water-bag :

$$\partial_t v_{\mu j}^\pm + \mathcal{J}_\mu \mathbf{v_E}.\nabla_\perp v_{\mu j}^\pm + v_{\mu j}^\pm \partial_z v_{\mu j}^\pm = \frac{q_i}{M_i}\mathcal{J}_\mu E_\parallel \tag{2.12}$$

$$Z_i n_i + Z_i \nabla_\perp.\left(\frac{n_i}{B\Omega_{ci}}\nabla_\perp\phi\right) = n_{e0}\left(1+\frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{2.13}$$

La densité d'ions est calculée à partir des contours water bag : $n_i = \sum_\mu \sum_{j=1}^{N_\mu} A_{\mu j}\mathcal{J}_\mu(v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-)$.

Ce système d'équations est strictement équivalent aux équations girocinétiques en géométrie cylindrique (2.9, 2.10). En posant le changement de variables $n_{\mu j} = A_{\mu j}(v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-)$ et $u_{\mu j} = (v_{\mu j}^+ + v_{\mu j}^-)/2$, nous pouvons réécrire les équations des contours :

$$\partial_t n_{\mu j} + \nabla_\perp.(n_{\mu j}\mathcal{J}_\mu \mathbf{v_E}) + \partial_z(n_{\mu j}u_{\mu j}) = 0 \tag{2.14}$$

$$\partial_t(n_{\mu j}u_{\mu j}) + \nabla_\perp.(n_{\mu j}u_{\mu j}\mathcal{J}_\mu \mathbf{v_E}) + \partial_z(n_{\mu j}u_{\mu j}^2) + \frac{1}{M_i}\partial_z p_{\mu j} = \frac{q_i}{M_i} n_{\mu j}\mathcal{J}_\mu E_\parallel \tag{2.15}$$

Nous avons défini la pression partielle pour un bag j : $p_{\mu j} = M_i n_{\mu j}^3/(12A_{\mu j}^2)$, où les deux grandeurs $n_{\mu j}$ et $u_{\mu j}$ jouent respectivement les rôles d'une densité et d'une vitesse moyenne. Les trois grandeurs ($n_{\mu j}$, $u_{\mu j}$, $p_{\mu j}$) sont définies vis-à-vis de la fonction de distribution water bag, et donc de la population de *centres-guides* : l'équivalence avec les particules réelles est obtenue en appliquant la giromoyenne.

Nous obtenons toujours $2N_\mu$ équations water bag par valeur de μ : ce système est donc strictement équivalent aux équations (2.12). Nous constatons également que pour chaque valeur de μ et chaque bag j, les deux équations obtenues (2.14, 2.15) prennent la forme respectivement d'une équation de continuité et d'une équation d'Euler. La fermeture se fait ici "bag à bag",

par la définition de la pression. Enfin le couplage entre bags, et entre valeurs du moment magnétique μ est assuré par l'équation de quasi-neutralité (2.13).

Nous retrouvons donc formellement la propriété de connexion du modèle water bag entre les descriptions fluide et cinétique [3], dans le cadre plus large du modèle giro-water-bag [48].

2.4 Les conditions initiales water bag

L'équation girocinétique la plus simple pour décrire un plasma est l'équation de dérive cinétique. Elle considère que les particules sont confondues avec leur centre de giration autour des lignes de champ magnétique : le moment magnétique μ est donc nul. La giromoyenne permettant de tenir compte du décalage spatial entre particules et centres-guides n'a plus lieu d'être : nous avons donc $\mathcal{J} = 1$.

Nous nous plaçons également dans le cas d'un tore infiniment déroulé $R_c \to \infty$, avec un champ magnétique homogène $\nabla B = 0$.

Nous obtenons ainsi l'équation de Vlasov de dérive cinétique :

$$\partial_t f(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + \mathbf{v}_\perp . \nabla_\perp f(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + v_\parallel \partial_z f(\mathbf{r}, v_\parallel, t) - \frac{q_i \nabla_\parallel \phi}{M_i} \partial_{v_\parallel} f(\mathbf{r}, v_\parallel, t) = 0 \tag{2.16}$$

Il faut remarquer que l'approximation d'une géométrie cylindrique est très forte et nous permet de ne considérer en première approximation que la vitesse de dérive électrique $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_\mathbf{E} = -\nabla_\perp \phi \times \mathbf{B}/B^2$. Cet effet de dérive a pour avantage d'agir indépendamment des masses et charges des particules, et ne permet donc pas de séparation de charges, source d'instabilité du plasma.

L'équation de quasi-neutralité où est négligée la dérive de polarisation (2.13) ferme le système d'équations :

$$Z_i n_i = n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi}{T_e} \right) \tag{2.17}$$

où nous avons supposé une population d'électrons adiabatiques, de grande énergie cinétique devant leur énergie potentielle électrostatique $e\phi << T_e$, la densité des ions est obtenue directement à partir de la fonction de distribution des centres-guides, puisque ces derniers sont confondus avec les particules : $n_i = \int f(\mathbf{r}, v_\parallel, t) dv_\parallel$.

2.4.1 Les équations multi water bag

Nous reprenons les équations du modèle giro-water-bag (2.12, 2.13). Nous négligeons les termes liés aux effets de rayon de Larmor fini $\mathcal{J} = 1$ et $Z_i \nabla_\perp . [n_{i0} \nabla_\perp \phi / (B\Omega_{ci})] = 0$, pour obtenir le système d'équations de dérive cinétique :

$$\partial_t v_j^\pm + \mathbf{v_E} . \nabla_\perp v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \frac{q_i \partial_z \phi}{M_i} = 0 \tag{2.18}$$

$$Z_i \sum_{j=1}^{N} A_j (v_j^+ - v_j^-) = n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi}{T_e} \right) \tag{2.19}$$

2.4.2 Grandeurs caractéristiques

La direction parallèle au champ magnétique constitue la source des effets cinétiques, liés à la prise en compte d'un étalement en $v_\parallel$. Nous choisissons donc d'adimensionner le problème vis-à-vis de la longueur caractéristique des fluctuations associées à cette direction :

$$\hat{L} = k_\parallel \times L, \tag{2.20}$$

où $\hat{L}$ est la longueur normalisée, L la longueur et $k_\parallel = 2\pi / L_\parallel$ le vecteur d'onde caractéristiques de la direction parallèle au champ magnétique.

L'étalement typique de la fonction de distribution des ions selon la vitesse est par définition de l'ordre de la vitesse thermique ionique $v_{Ti} = \sqrt{T_i / M_i}$, ce qui nous donne la normalisation des vitesses :

$$\hat{v} = v / v_{Ti} \tag{2.21}$$

La pulsation caractéristique nous est dès lors simplement donnée par le produit des deux précédentes grandeurs :

$$\hat{\omega} = \omega / (k_\parallel v_{Ti}) \tag{2.22}$$

Enfin, les discontinuités des différents bags A_j sont normalisées par rapport à la densité d'équilibre n_{i0}. La condition de résonnance ondes particules nous est donnée dans cette normalisation : $\hat{\omega} \sim 1$.

Enfin le potentiel électrostatique est comparé à l'énergie cinétique des ions, puisque c'est à la description de cette espèce que nous portons notre attention :

$$\hat{\phi} = q_i \phi / T_i \tag{2.23}$$

Nous pouvons réécrire le système d'équations (2.18, 2.19) en termes de grandeurs normalisées :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{t}} \hat{v}_j^{\pm} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{E}} . \hat{\nabla}_{\perp} \hat{v}_j^{\pm} + \hat{v}_j^{\pm} \partial_{\hat{z}} \hat{v}_j^{\pm} + \partial_{\hat{z}} \hat{\phi} &= 0 \qquad (2.24) \\ \sum_{j=1}^{M} \hat{A}_j (\hat{v}_j^{+} - \hat{v}_j^{-}) - 1 &= \frac{T_i}{Z_i T_e} \hat{\phi} \qquad (2.25) \end{aligned}$$

La vitesse de dérive électrique pouvant être explicitée :

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{E}} = \frac{1}{\hat{\Omega}_{ci}} \times \begin{vmatrix} -\partial_{\theta} \hat{\phi} / \hat{r} \\ \partial_{\hat{r}} \hat{\phi} \\ 0 \end{vmatrix} , \tag{2.26}$$

où $\hat{\Omega}_{ci} = q_i B / k_{\parallel} v_{Ti} M_i$ est la fréquence cyclotron ionique normalisée, caractérisant le mouvement de giration autour des lignes de champ magnétique.

Dans notre système, les différents termes n'ont *a priori* pas tous le même poids. Ainsi, le potentiel électrostatique ($Z_i^{\star} e\phi / T_e$) prend de faibles valeurs, puisque le modèle de base est celui d'un plasma quasi-neutre. De la même façon, les phénomènes que nous observons doivent se dérouler sur des temps caractéristiques longs devant le temps cyclotronique (proportionnel à Ω_{ci}^{-1}). Enfin les longueurs des fluctuations transverse ($k_{\perp}^{-1}$) et parallèle ($k_{\parallel}^{-1}$) doivent également être bien séparées : tout ceci nous conduit à considérer les conditions de petitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\Omega_{ci}} &= \epsilon_{\omega} \\ \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} &= \epsilon_k \\ \frac{e\phi}{T_e} &= \epsilon_{\phi} \end{aligned}$$

où les différents paramètres ϵ vérifient $\epsilon \leq 10^{-3}$ pour un plasma de Tokamak.

Il existe en théorie une condition supplémentaire assurant des longueurs caractéristiques des gradients transverses d'équilibre $L_{\nabla_{\perp 0}}$ grandes devant le rayon de Larmor r_{Li} :

$$\epsilon_{L_{\nabla_{\perp 0}}} = r_{Li} / L_{\nabla_{\perp 0}} \leq 10^{-3}, \tag{2.27}$$

cette condition est dans notre cas automatiquement assurée par l'hypothèse forte d'un rayon de Larmor nul (conséquence du choix $\mu = 0$).

Il n'y a donc aucune limitation théorique aux longueurs de gradients transverses dans le cas d'un modèle de dérive cinétique. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que le terme de dynamique transverse est du même ordre de grandeur que celui parallèle :

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{E}}.\hat{\nabla}_{\perp}\hat{v}_j^{\pm} \simeq \epsilon_{\omega}\epsilon_k^{-1}Z_i^{\star}\epsilon_{\phi}\epsilon_k^{-1}, \tag{2.28}$$

où nous avons supposé que la pulsation caractéristique des phénomènes considérés permettait des interactions ondes particules $\omega \sim k_{\parallel}v_{Ti}$. Ce dernier résultat est surprenant compte tenu de l'hypothèse de départ qui voulait que la dynamique parallèle soit une petite perturbation devant celle transverse du centre-guide. Mais il faut se rappeler que nous cherchons à modéliser des phénomènes à des échelles de temps petites devant celle de la physique des dérives, pour lesquels il est donc tout à fait acceptable que dynamiques transverse et parallèle aient des intensités comparables.

2.5 Analyse linéaire

Dans cette section, l'étude vise à déterminer les instabilités caractéristiques d'un plasma multi-water-bag décrit par l'équation de dérive cinétique.

En particulier nous nous attacherons à obtenir une description *locale* du plasma, c'est-à-dire en un rayon donné de la colonne de plasma. Les dépendances selon les deux autres directions d'espace seront quant à elles décomposées en modes de Fourier.

Même si l'analyse linéaire s'attache à décrire des comportements locaux, l'adjonction en particulier de la direction radiale, non périodique, constitue une source de nouveaux problèmes. En particulier, les profils radiaux des différentes grandeurs ne peuvent pas se décomposer simplement sur une base de Fourier, il faut conserver ces dépendances qui contiennent toute la physique des instabilités (par exemple un gradient de potentiel électrostatique est a la souce d'instabilités de Kelvin-Helmholtz, un gradient de température des ITG...).

2.5.1 Equation de dispersion

L'analyse linéaire est menée autour d'un équilibre supposé pair en vitesse, sans potentiel électrostatique d'équilibre. Nous supposons également que cet équilibre est homogène dans les directions longitudinale et poloïdale. Enfin

les perturbations sont décomposées en modes de Fourier selon θ, z et le temps t (les différentes grandeurs sont normalisées ainsi que précédemment défini) :

$$\begin{aligned} \hat{v}_j^{\pm}(r,\theta,z,t) &= \pm\hat{a}_j(r) + \hat{w}_j^{\pm}(r)\, e^{i(m\theta+\hat{z}-\hat{\omega}\hat{t})} \\ \hat{\phi}(r,\theta,z,t) &= 0 + \delta\hat{\phi}(r)\, e^{i(m\theta+\hat{z}-\hat{\omega}\hat{t})} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Nous insérons ces dépendances dans les équations non-linéaires (2.24, 2.25) normalisées. Dans toute la suite de ce chapitre nous travaillerons avec des grandeurs normalisées en omettant la notation $\hat{}$. Si les perturbations sont supposées faibles devant les grandeurs d'équilibre, nous pouvons linéariser le système en séparant les équations par puissances croissantes des perturbations.

L'ordre 0 caractérise l'équilibre stationnaire :

$$a_j \partial_z a_j = 0 \tag{2.30}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1, \tag{2.31}$$

où nous utilisons la définition $\alpha_j = 2a_j A_j / n_{i0}$. L'équation (2.31) permet de valider systématiquement l'équivalence des moments d'ordre zéro.

L'ordre 1 en perturbation :

$$(\omega \mp a_j) w_j^{\pm} = \left[1 \mp \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_j\right] \delta\phi \tag{2.32}$$

$$Z_i^{\star} \sum_{j=1}^{N} A_j (w_j^{+} - w_j^{-}) = \delta\phi, \tag{2.33}$$

avec le paramètre $Z_i^{\star} = Z_i T_e / T_i$, qui caractérise l'intensité de l'amortissement Landau linéaire des ondes acoustiques ioniques [25].

En éliminant les contours perturbés entre les deux équations, nous obtenons l'expression de la fonction diélectrique multi water bag du plasma :

$$\varepsilon(\omega, k_\theta) = 1 - Z_i^{\star} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{1 - \omega\Omega_j^{\star}}{\omega^2 - a_j^2}, \tag{2.34}$$

en définissant les fréquences diamagnétiques associées à chaque bag j : $\Omega_j^{\star} = k_\theta d_r \ln a_j / \Omega_{ci}$. (Nous verrons également par la suite la notation $\kappa_j = d_r \ln a_j$.)

Trouver les racines annulant la fonction diélectrique permet de connaître les doublets (ω, k_θ) pour lesquels une perturbation à l'équilibre peut exister dans le plasma. C'est la définition même de la fonction diélectrique :

$$\varepsilon(\omega, k_\theta).\delta\phi = 0 \tag{2.35}$$

Nous raisonnerons dans la suite sur les racines ω pour une valeur donnée de k_θ.

Nous voyons apparaître dans l'équation de dispersion (2.35) les paramètres water bag $\Omega_j^\star$ caractéristiques des dépendances radiales $a_j(r)$. Nous cherchons donc à les déterminer en utilisant une méthode d'équivalence au sens des moments.

2.5.2 $\Omega_j^\star$ et équivalence fluide.

Pour nous donner les paramètres water bag physiquement intéressants, nous utilisons la même méthode qu'au précédent chapitre, considérant l'équivalence de la fonction de distribution water bag avec une condition initiale continue. Cette méthode est tout à fait valable compte tenu de la formulation fluide "bag à bag" des équations des contours déjà obtenue (2.14, 2.15).

En plus des grandeurs α_j, nous avons également à déterminer les dépendances radiales $\Omega_j^\star = k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}$ (en grandeurs normalisées). Pour ce faire, nous considérons à la fois les moments :

$$\sum_{j=1}^{N} 2A_j a_j^{l+1} = n_i(l+1) \int_{-\infty}^{+\infty} v^l f_0 dv, \tag{2.36}$$

et leurs dépendances radiales ; c'est-à-dire leurs dérivées selon la direction radiale :

$$\sum_{j=1}^{N} 2A_j d_r a_j^{l+1} = n_i(l+1) \int_{-\infty}^{+\infty} v^l d_r f_0 dv \tag{2.37}$$

Il y a donc bien équivalence de notre modèle water bag avec un modèle hydrodynamique décrivant jusqu'au moment d'ordre $2(N-1)$, y compris dans la dépendance radiale. Cette équivalence est obtenue par rapport à une fonction de distribution continue arbitraire f_0.

Nous cherchons à caractériser les instabilités ITG, nous supposons que la dépendance radiale de la fonction f_0 n'est portée que par ses deux premiers moments : la densité n_i et la température T_i. Nous pouvons dès lors poser :

$$f_0 = \frac{n_i}{v_{Ti}} \mathcal{G}\left(\frac{v}{v_{Ti}}\right) \tag{2.38}$$

où $\mathcal{G}$ est une fonction adimensionnée de la variable v/v_{Ti}, elle-même sans dimension.

Nous supposons que le multi-water-bag ne dépend également que des gradients de température et de densité (de même que nous avons supposé $f_0(r,v) = f_0(n_i(r), T_i(r), v)$), les coefficients water bag radiaux sont supposés s'écrire comme des combinaisons linéaires des gradients de densité et de température, de coefficients β_j et γ_j :

$$\begin{aligned} \alpha_j \Omega_j^\star &= \beta_j \frac{\Omega_T^\star}{2} + \gamma_j \Omega_n^\star \\ \alpha_j \kappa_j &= \beta_j \frac{\kappa_T}{2} + \gamma_j \kappa_n \end{aligned} \tag{2.39}$$

L'équivalence au sens des moments de la description water bag est donc prolongeable aux dépendances radiales. En supposant que ces dépendances ne sont portées que par les profils en densité κ_n et en température κ_T, cette équivalence va nous permettre de fixer les valeurs des différents paramètres water bag.

2.5.3 Calcul pratique des α_j et $\Omega_j^\star$

Nous cherchons tout d'abord à expliciter la dérivée par rapport à la direction radiale de f_0 (2.38) :

$$\partial_r f_0 = \frac{n}{v_{Ti}} \mathcal{G}\left(\frac{v}{v_{Ti}}\right) \left[\partial_r \ln n_i - \frac{1}{2}\partial_r \ln T_i + \partial_r \ln \mathcal{G}\left(\frac{v}{v_{Ti}}\right)\right] \tag{2.40}$$

v et r étant des variables indépendantes, nous pouvons décomposer la dérivée radiale de $\mathcal{G}$:

$$\partial_r \ln \mathcal{G}\left(\frac{v}{v_{Ti}}\right) = -\frac{v}{v_{Ti}} \frac{1}{2} \partial_r \ln T_i \; \partial_{v/v_{Ti}} \ln \mathcal{G}\left(\frac{v}{v_{Ti}}\right) \tag{2.41}$$

Nous insérons maintenant les deux dernières équations (2.41), (2.40) dans le terme de droite de l'équation (2.37) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^l \partial_r f_0 dv = \left(\kappa_n - \frac{\kappa_T}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} v^l \frac{n_i}{v_{Ti}} \mathcal{G}\left(\frac{v}{v_{Ti}}\right) dv - \frac{\kappa_T}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^{l+1}}{v_{Ti}} \partial_{v/v_{Ti}} \ln \mathcal{G} dv \tag{2.42}$$

Si nous définissons le l-ième moment de $\mathcal{G}$: $\bar{\mathcal{M}}_l = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l \mathcal{G}(x)dx$, nous obtenons dans l'equation précedente (2.42) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^l \partial_r f_0 dv = n_i v_{Ti}^l \left(\kappa_n - \frac{\kappa_T}{2}\right) \bar{\mathcal{M}}_l - n_i v_{Ti}^l \frac{\kappa_T}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{l+1} \partial_x \mathcal{G}(x)dx \quad (2.43)$$

Enfin en intégrant par parties le dernier terme, nous obtenons l'expression de la dérivée radiale du moment continu en fonction de celui de la fonction arbitraire $\mathcal{G}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^l \partial_r f_0 dv = n_i v_{Ti}^l \left[\kappa_n + \frac{l\kappa_T}{2}\right] \bar{\mathcal{M}}_l \quad (2.44)$$

Nous exprimerons par la suite les différentes grandeurs selon les moments $\mathcal{M}_l$ de f_0 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^l \partial_r f_0 dv = \left[\kappa_n + \frac{l\kappa_T}{2}\right] \mathcal{M}_l \quad (2.45)$$

L'équivalence entre dépendances radiales des moments s'écrit donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} 2A_j d_r a_j^{l+1} = (l+1) \left[\kappa_n + \frac{l\kappa_T}{2}\right] \mathcal{M}_l \quad (2.46)$$

Il nous reste à reformuler le terme de gauche :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} 2A_j d_r a_j^{l+1} = (l+1) \sum_{j=1}^{N} \frac{2a_j A_j}{n_i} a_j^l d_r \ln a_j \quad (2.47)$$

Cette dernière formulation permet de retrouver les grandeurs multi-water-bag : $\alpha_j = 2a_j A_j / n_i$, $\kappa_j = d_r \ln a_j$.

Finalement l'équivalence des dépendances radiales des moments s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j^l \kappa_j = \left[\kappa_n + \frac{l\kappa_T}{2}\right] \mathcal{M}_l \quad (2.48)$$

En insérant l'hypothèse (2.39) dans l'équivalence des moments et en séparant vis-à-vis des variables indépendantes κ_T, κ_n, nous obtenons les coefficients caractérisant le profil radial de chaque bag en $r = r_0$:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j^l = (l+1)\mathcal{M}_l \tag{2.49}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j a_j^l = l\mathcal{M}_l \tag{2.50}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \gamma_j a_j^l = \mathcal{M}_l \tag{2.51}$$

Si nous considérons tous les moments associés aux valeurs $l = 0, 2, ..., 2(N-1)$, nous obtenons la formulation matricielle de l'équivalence entre moments d'une distribution continue arbitraire et ceux multi water bag :

$$\alpha = \mathbf{V}^{-1} M_\alpha \tag{2.52}$$

$$\beta = \mathbf{V}^{-1} M_\beta \tag{2.53}$$

$$\gamma = \mathbf{V}^{-1} M_\gamma, \tag{2.54}$$

où l'on a défini les différents vecteurs :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ ... \\ (2N-1)\mathcal{M}_{2N-2} \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ ... \\ \beta_N \end{pmatrix}$$

$$M_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ (2N-2)\mathcal{M}_{2N-2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ ... \\ \gamma_N \end{pmatrix}$$

$$M_\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ ... \\ \mathcal{M}_{2N-2} \end{pmatrix}$$

Enfin chaque élément (l, j) de la matrice de Vandermonde $\mathbf{V}$ est défini par $V_{l,j} = a_j^l$. Bien entendu le problème de son inversion subsiste dans le cas d'un nombre de bags élevé. Nous utilisons donc une approximation à l'ordre deux pour déterminer les paramètres water bag dans le cas d'un grand nombre de bags. Des calculs analogues dans le principe à ceux effectués au chapitre précédent nous permettent d'obtenir les expressions approchées :

$$\alpha_j = 2a_j \frac{F_j - F_{j+1}}{n_i} \tag{2.55}$$

$$\gamma_j = \Delta a \frac{F_j + F_{j+1}}{n_i} \tag{2.56}$$

$$\beta_j = \alpha_j - \gamma_j \tag{2.57}$$

Le choix entre une inversion exacte et une méthode approchée à l'ordre deux s'effectue selon les mêmes bases qu'au précédent chapitre : l'inversion exacte est privilégiée pour un nombre de bag $N < 10$, et la méthode approchée prend le relais dès 10 bags.

2.5.4 Potentiel électrostatique

Le calcul des fonctions propres, puis de la dépendance temporelle du potentiel électrostatique est donné en Annexe D. Il reprend les mêmes grandes lignes que celui déjà mené au précédent chapitre, dans le cas général.

La dépendance temporelle du potentiel électrostatique dans la phase linéaire peut s'exprimer :

$$\delta\phi_{k_\theta,k_\parallel}(r,t) = \sum_n \frac{\sum_{j=-N}^{N\ \star} A_j w_j^0/(\omega_n - a_j)}{\sum_{j=-N}^{N\ \star} A_j \left[1 - k_\theta d_r a_j/\Omega_{ci}\right]/(\omega_n - a_j)^2} \exp^{-i\omega_{n,m}t} \tag{2.58}$$

Enfin nous pouvons revenir à la convention de sommation naturelle, pour obtenir l'expression de référence pour ce chapitre du potentiel électrostatique normalisé :

$$\delta\phi_{k_\theta,k_\parallel}(r,t) = \sum_n \frac{\sum_{j=1}^{N} \left[\omega_n(\epsilon_j^{0+} - \epsilon_j^{0-}) + a_j(\epsilon_j^{0+} + \epsilon_j^{0-})\right] \Big/ (\omega_n^2 - a_j^2)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left[2\omega_n - (\omega_n^2 + a_j^2)k_\theta\kappa_j/\Omega_{ci}\right] \Big/ (\omega_n^2 - a_j^2)^2} e^{-i\omega_n t}, \tag{2.59}$$

où nous avons utilisé les définitions $\kappa_j = d_r \ln a_j$, $\alpha_j = 2a_j A_j / n_{i0}$, $\epsilon_j^{0\pm} = A_j w_j^{0\pm} / n_{i0}$.

En pratique cette expression du potentiel électrostatique nous est utile car c'est la reconstruction qu'elle opère en mélangeant les différents modes associés aux bags, qui reproduit l'effet cinétique d'amortissement Landau [22], [23].

2.6 Analyse de stabilité linéaire

Cette section a pour but de confronter dans les faits les résultats fournis par notre modèle à ceux obtenus en particulier par l'analyse linéaire de modèles cinétiques "classiques". Ainsi, dans le cas d'une description cinétique, une expression du seuil d'instabilité des ITG peut être dérivée de l'analyse linéaire, à condition de supposer une fonction de distribution maxwellienne à l'équilibre. Elle s'écrit dans notre système de normalisations (le détail des calculs est donné en Annexe D) :

$$\Omega_{T\pm}^\star = \Omega_n^\star \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{Z_i^\star + 3}{Z_i^{\star 2} \Omega_n^{\star 2}}} \right] \tag{2.60}$$

Cette expression nous sera très utile, servant de référence à nos comparaisons avec nos propres résultats water bag, dont les paramètres auront été fixés au sens de l'équivalence avec des moments maxwelliens.

Un paramètre caractéristique des instabilités ITG est le facteur η :

$$\eta = \frac{\Omega_T^\star}{\Omega_n^\star} \tag{2.61}$$

Dans un premier temps nous chercherons par différentes voies à obtenir des résultats qualitatifs simples, en utilisant des simplifications fortes permises par notre modèle water-bag. Nous retrouverons ainsi des résultats de référence en ne considérant qu'un seul bag. Nous considèrerons ensuite le cas d'un nombre arbitraire de bags, mais sous la *limite fluide* d'un faible nombre d'onde parallèle, qui permet de ne considérer que des phénomènes de grande vitesse de phase devant l'étalement caractéristique en vitesse parallèle de la fonction de distribution.

Nous chercherons dans un second temps une caractérisation plus aigüe des seuils de stabilité linéaire. Nous présenterons l'approche paramétrique que nous avons du adopter à défaut de pouvoir obtenir une expression analytique du seuil de stabilité pour un nombre quelconque de bags. Les effets

propres à notre modèle multi-water-bag seront isolés, pour que nous comparions finalement les seuils water bag au seuil cinétique classique (2.60), et au seuil donné par un modèle fluide.

2.6.1 Modèles simplifiés

Nous cherchons dans cette partie à résoudre l'équation de dispersion (2.35) dans des cas de figure simples pour dégager un comportement qualitatif du plasma. L'objectif est de pousser au maximum les possiblités de résolution analytiques de l'équation de dispersion multi-water-bag.

Cas d'un bag et modèle fluide

Dans le cas d'un seul bag, l'équation de dispersion s'écrit simplement :

$$\varepsilon_{k_\theta}(\omega) = 1 - Z_i^\star \frac{1 - \omega\Omega_n^\star}{\omega^2 - a_j^2} = 0 \tag{2.62}$$

Nous avons donc à résoudre un polynôme de degré deux :

$$\omega^2 + Z_i^\star \Omega_n^\star \omega - Z_i^\star - 3 = 0 \tag{2.63}$$

La condition d'existence de solution complexes (sources d'instabilité), s'écrit :

$$Z_i^{\star 2}\Omega_n^{\star 2} + 4(Z_i^\star + 3) < 0, \tag{2.64}$$

elle n'est jamais vérifiée.

Les deux solutions sont donc réelles, et s'écrivent :

$$\omega_{0\pm} = -\frac{Z_i^\star \Omega_n^\star}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{Z_i^\star + 3}{Z_i^{\star 2}\Omega_n^{\star 2}}}\right) \tag{2.65}$$

Un plasma conforme à nos approximations est donc stable vis-à-vis d'un seul bag, en accord avec la contrainte $\eta = 2$ imposée par l'équivalence des moments water bag et maxwelliens :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_1 a_1^2 &= 3 \\ \alpha_1 \Omega_1^\star &= \Omega_n^\star \\ \alpha_1 a_1^2 \Omega_1^\star &= \Omega_n^\star + \Omega_T^\star \end{aligned} \tag{2.66}$$

Cette stabilité est en accord avec les prédictions données par un modèle fluide à fermeture adiabatique. Des modèles fluides plus poussés peuvent cependant aboutir à l'existence d'instabilités, avec des fermetures plus élaborées qu'une simple hypothèse adiabatique, permettant de passer outre la restriction adiabatique $\eta = 2$.

Faible nombre d'onde parallèle

L'approximation d'un faible nombre d'onde parallèle : $\omega >> k_{\|} v_{Ti}$ permet de tendre vers la limite dite fluide. En effet, au vu de notre choix de normalisations, il apparaît clairement que les fréquences associées à cette hypothèse sont situées loin des résonnances multi-water-bag, c'est-à-dire loin du corps de la fonction de distribution (ceci pose le problème d'une description correcte des interactions onde-particules). Cette approximation permet en particulier de négliger les couplages entre les différents bags dans les parties sommatives de la fonction diélectrique :

$$\frac{1}{\omega^2 - a_j^2} = \frac{1}{\omega^2}\left[1 + \frac{a_j^2}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a_j^4}{\omega^4}\right)\right] \tag{2.67}$$

Où nous avons effectué un développement de Taylor grâce au paramètre de petitesse : $\frac{1}{\omega^2} \propto \epsilon^2$. La fonction diélectrique s'écrit donc :

$$\epsilon_{k_\theta}(\omega) = 1 - Z_i^\star \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{1 - \omega\Omega_j^\star}{\omega^2}\left[1 + \frac{a_j^2}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a_j^4}{\omega^4}\right)\right] \tag{2.68}$$

En utilisant l'équivalence au sens des moments $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Omega_j^\star = \Omega_n^\star$, et en ne considérant que les deux termes principaux :

$$\omega = -Z_i^\star \Omega_n^\star \ , \tag{2.69}$$

nous retrouvons ce résultat de base de la description fluide, à savoir que la réponse du plasma se limite dans le cadre de la théorie fluide à une oscillation à la fréquence diamagnétique $\omega_n^\star = -Z_i^\star \Omega_n^\star$.

Si nous considérons deux termes supplémentaires, nous obtenons :

$$\omega^3 + Z_i^\star \Omega_n^\star \omega^2 - Z_i^\star \omega + Z_i^\star \left(\Omega_n^\star + \Omega_T^\star\right) = 0, \tag{2.70}$$

où nous avons encore une fois utilisé l'équivalence au sens des moments pour voir apparaître $\Omega_T^\star$ et $\Omega_n^\star$.

En comparant ces deux dernières équations (2.69, 2.70), nous remarquons la condition d'ordering suivante :

$$\omega \sim \epsilon^{x-1}$$
$$\Omega_X^\star \sim \epsilon^{-1} \tag{2.71}$$

En outre, pour bien valider l'hypothèse $\omega >> k_\parallel v_{Ti}$, nous devons supposer $x < 1$. Il est intéressant de remarquer que les termes de gradients radiaux peuvent devancer ceux qui leurs sont à priori associés en ω, et ce suivant la valeur du paramètre x.

Un autre résultat analytique peut être obtenu : en supposant un profil de densité plat $\Omega_n^\star = 0$ le taux de croissance linéaire d'instabilité prend la forme :

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| Z_i^\star \Omega_T^\star \right|^{1/3} \tag{2.72}$$

Nous vérifions en outre que la partie réelle de cette solution est d'ordre ϵ, avec la valeur $x = 2/3 < 1$. Ce résultat est bien connu dans le cas d'une fonction de distribution d'équilibre maxwellienne [49].

2.6.2 Seuil de stabilité linéaire pour un nombre quelconque de bags

La description water bag d'un plasma en géométrie cylindrique permet d'obtenir analytiquement des résultats déjà vérifiés [49], en particulier dans le cadre de descriptions fluides. Il nous reste cependant à proposer des résultats quantitativement comparables aux phases linéaires observées grâce à des modèles purement cinétiques [47]. Cherchant à décrire le phénomène d'instabilité de Gradient de Température Ionique (ITG), nous chercherons donc à tracer des diagrammes de stabilité dans le plan des fréquences associées aux gradients de densité $\Omega_n^\star$ et de température $\Omega_T^\star$. Nous chercherons également à superposer les taux de croissance d'instabilité associés à ces diagrammes.

Résolution paramétrique du seuil de stabilité linéaire

Dans le cas général de notre modèle, c'est-à-dire pour un nombre arbitraire de bags, l'expression de la fonction diélectrique ne permet pas de formuler une expression analytique du seuil.

Cependant la fonction diélectrique peut toujours s'exprimer comme une fraction rationnelle, ses zéros étant confondus avec ceux du polynôme au numérateur. Ce dernier polynôme étant à coefficients réels, la condition de seuil peut s'exprimer :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_\theta}(\omega) &= 0 \\ d_\omega \varepsilon_{k_\theta}(\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Puisque nous recherchons une expression du type $\Omega_T^\star = f(\Omega_n^\star)$, nous pouvons considérer le système d'équations précédent comme un système linéaire algébrique portant sur $\Omega_T^\star$ et $\Omega_n^\star$:

$$\begin{aligned} Z_i^\star \omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j}{\omega^2 - a_j^2} \Omega_n^\star + Z_i^\star \omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\beta_j}{\omega^2 - a_j^2} \frac{\Omega_T^\star}{2} &= Z_i^\star \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\omega^2 - a_j^2} - 1 \\ \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \frac{\omega^2 + a_j^2}{(\omega^2 - a_j^2)^2} \Omega_n^\star + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \frac{\omega^2 + a_j^2}{(\omega^2 - a_j^2)^2} \frac{\Omega_T^\star}{2} &= 2\omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{(\omega^2 - a_j^2)^2} \end{aligned} \quad , \tag{2.74}$$

que nous résoudrons numériquement par une approche paramétrique selon ω.

L'équivalence au sens des moments nous fournissant les différents paramètres water bag, nous pouvons tracer et comparer seuils de stabilité water bag et maxwelliens dans le plan des fréquences $(\Omega_n^\star, \Omega_T^\star)$.

Nous avons dans un premier temps superposé au seuil associé à une fonction de distribution maxwellienne, celui obtenu au moyen de seulement trois bags (figure 2.1). Si l'accord entre les deux courbes n'est pas quantitativement satisfaisant, nous obtenons nénanmoins un seuil aux ordres de grandeur similaires. Nous pouvons de plus obtenir quelques informations caractéristiques du modèle, en remarquant la forme particulière, en lobes, du seuil water bag.

Le nombre de lobes dans chaque domaine ($\Omega_T^\star < 0$ ou $\Omega_T^\star > 0$), est d'une unité inférieur à celui de bags. Nous retrouvons donc que le cas d'un seul bag est stable. Le cas de deux bags voit quant à lui apparaître l'instabilité ITG dont le seuil de stabilité water bag est décrit par un seul lobe.

Cette structure en lobes permet également d'avancer l'idée que les différentes zones instables sont associées à des résonnances avec des particules de vitesse bien déterminée, c'est là une illustration de l'interaction onde-particule caractéristique des effets cinétiques.

La figure (2.2) confirme cette intuition : y sont reportés deux points associés à des valeurs du paramètre ω de v_{Ti} et de $3v_{Ti}$. Nous retrouvons en outre que les particules résonnantes sont celles du corps de la fonction de distribution pour des valeurs de η proches de 2, quand ce sont les particules cinétiques, très rapides mais peu nombreuses qui résonnent pour des valeurs de η plus petites.

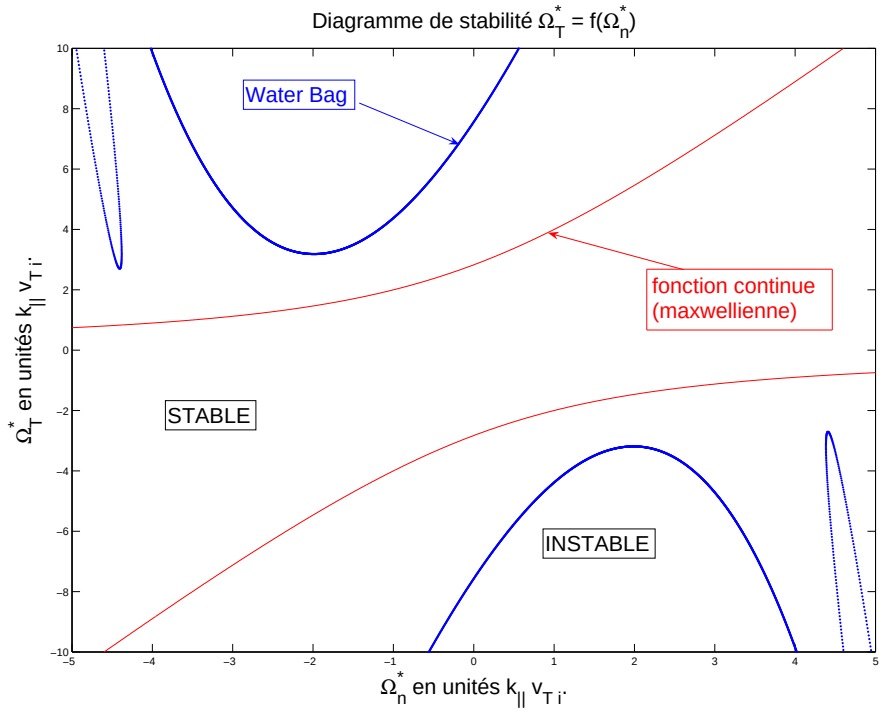


FIGURE 2.1 – Comparaison entre seuils de stabilité pour une fonction water bag et une fonction continue maxwellienne. Cas d'un faible nombre de bags $N = 3$.

Egalement dans cette figure (2.2), nous noterons un accord tout à fait satisfaisant avec le seuil maxwellien de référence.

Paramètres significatifs

Caractéristique de l'approche que nous avons choisie, la donnée des différentes vitesses de bag a_j dépend de deux paramètres : le nombre de bags N et la vitesse d'équilibre du dernier bag a_N. Dans l'approximation d'un grand nombre de bags, nous avons ainsi dû poser :

$$a_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{2a_N}{2N-1} \tag{2.75}$$

Pour comparer l'effet de la dernière vitesse prise en compte a_N et son rapport avec le nombre de bags choisi N, nous avons tracé en figure (2.3) les seuils obtenus avec en haut $N = 8$ bags et en bas $N = 16$ bags, en maintenant constant l'espacement Δa entre chaque bag. Ainsi les bags ajoutés entre

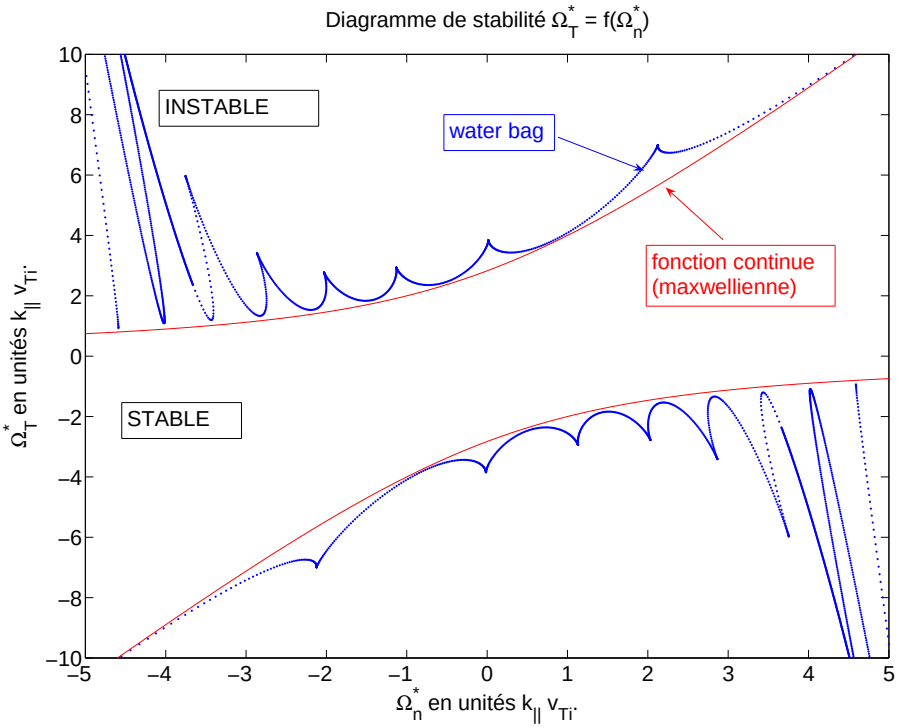


FIGURE 2.2 – Comparaison entre seuils de stabilité pour une fonction water bag et une fonction continue maxwellienne. $N = 10$.

les deux figures correspondent chacun à la prise en compte d'une nouvelle tranche en vitesse de la population décrite par la fonction de distribution continue d'équilibre. La valeur référence de Δa correspond au cas $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\, v_{Ti}$, soit une valeur de $\Delta a = 10/19\, v_{Ti}$.

Nous constatons que les lobes associés aux huit premiers bags se superposent parfaitement : chacun d'eux correspond donc bien à une population de vitesse donnée.

L'ajout entre les deux figures de huit nouveaux bags amène en théorie huit nouveaux lobes, or, nous n'en voyons apparaître que cinq. Si cet effet est en partie dû à un problème de maillage sur les valeurs du paramètre ω, nous pouvons néanmoins remarquer que les lobes apparaissant sont de plus en plus fins. Cela traduit le fait que les populations très rapides ajoutées sont de plus en plus faibles. Nous avons donc considéré qu'une dernière vitesse égale à $5\, v_{Ti}$ permet de décrire correctement la physique des ITG.

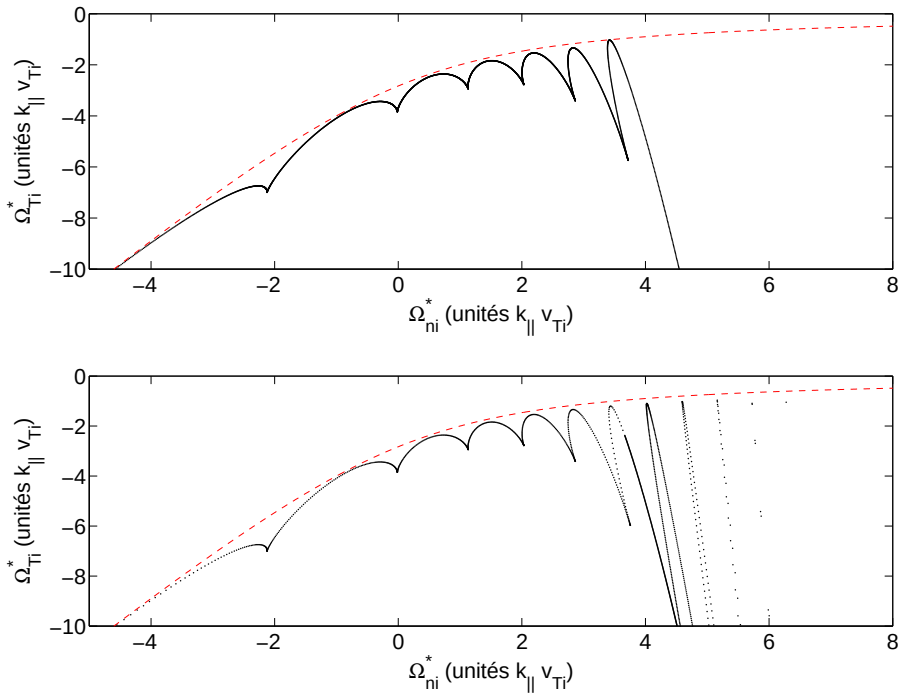


FIGURE 2.3 – Particularités du seuil de stabilité linéaire dues au choix d'une description multi-water-bag. Tracé à $\Delta a = cste$ dans les cas de 8 (haut) et 16 bags (bas).

Amortissement Landau

Dans le cas simple des modes acoustiques ioniques le paramètre de contrôle des effets d'amortissement Landau était $Z_i^\star = Z_i T_e/T_i$ [25]. Dans la partie théorique de ce chapitre, nous avons pu exprimer la dépendance temporelle du potentiel électrostatique en fonction des racines ω_n de l'équation de dispersion (2.59).

Mais dans le cas présent, il peut exister une instabilité : il est donc intéressant d'observer la compétition entre le mélange de phase reproduisant l'amortissement Landau et l'instabilité ITG. Nous avons reporté en figure (2.4) l'effet de cette compétition sur le profil temporel du logarithme du potentiel électrostatique. Pour les valeurs de paramètres choisies, le temps de récurrence est de l'ordre de 20. Nous observons que l'amortissement Landau l'emporte sur les deux premières périodes de récurrence, pour ensuite laisser place à l'instabilité ITG.

Pour résumer, sur des temps longs, nous pourrons toujours assimiler le

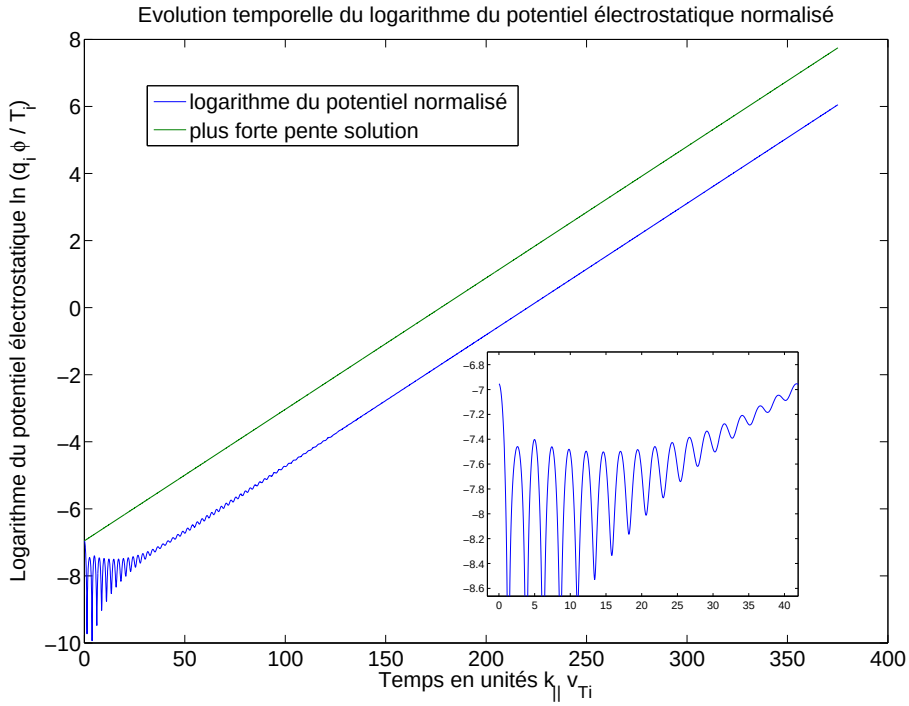


FIGURE 2.4 – Compétition entre amortissement Landau et instabilité ITG. $N = 100$, $a_N = 5v_{Ti}$, $Z_i^\star = 1$, $\Omega_n^\star = -.2$, $\Omega_T^\star = -3.2$.

taux de croissance réel de l'instabilité à celui correspondant au mode instable recontré parmi les racines de l'équation de dispersion.

Effets cinétiques et paramètre $Z_i^\star$

Nous nous intéressons maintenant à l'effet du paramètre $Z_i^\star$ sur les valeurs du taux de croissance d'instabilité γ (figure 2.5).

A mesure que $Z_i^\star$ augmente, et ce quelle que soit la valeur du gradient de densité $\Omega_n^\star$, nous constatons que le taux de croissance augmente (figure 2.5).

Le taux d'instabilité est en particulier maximal pour un profil de densité plat, ce qui correspond à la valeur $\Omega_n^\star = 0$. En ce sens, le fait que le taux de croissance linéaire décroisse quand le paramètre $\Omega_n^\star$ croît correspond à l'effet stabilisant de ce même gradient de densité [50].

Nous constatons également que cet effet est d'autant plus fort que la valeur de $Z_i^\star$ est élevée. Ainsi le diagramme en bas de la figure (2.5) montre que le taux de croissance est presque le même pour $Z_i^\star = 6$ ou $Z_i^\star = 40$, alors qu'il est environ le double pour un profil de densité plat.

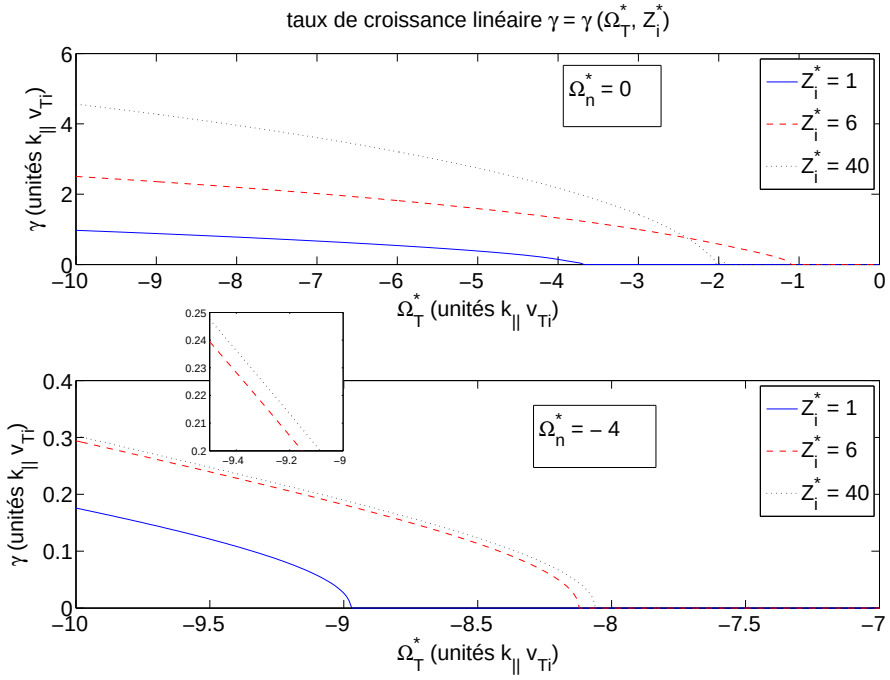


FIGURE 2.5 – Influence du paramètre $Z_i^\star$ sur les valeurs du taux de croissance d'instabilité en fonction de $\Omega_T^\star$, pour deux valeurs du gradient de densité ($\Omega_n^\star = 0 k_\parallel v_{Ti}$ et $-4 k_\parallel v_{Ti}$).

Distribution d'équilibre non Maxwellienne

Jusqu'à ce point, nous n'avons fait que comparer nos résultats à des résultats analytiques déjà connus, obtenus pour une distribution maxwellienne. Cependant l'un des avantages d'une description water bag est qu'elle permet de considérer des fonctions de distribution d'équilibre quelconques. Une telle étude est l'objet de ce paragraphe.

En figure (2.6), nous avons considéré le cas d'une fonction d'équilibre Lorentzienne :

$$f(v) = \frac{n_{i0}}{\pi} \frac{v_{Ti}/2}{v^2 + (v_{Ti}/2)^2} \tag{2.76}$$

Dans le but de suivre au mieux le seuil, nous avons choisi $N = 100$ bags. Par ailleurs la décroissance de la Lorentzienne étant moins forte, nous avons dû prendre une dernière vitesse de 10 vitesses thermiques $a_{100} = 10$. En guise de comparaison, nous avons reporté le seuil théorique lié à une fonction de

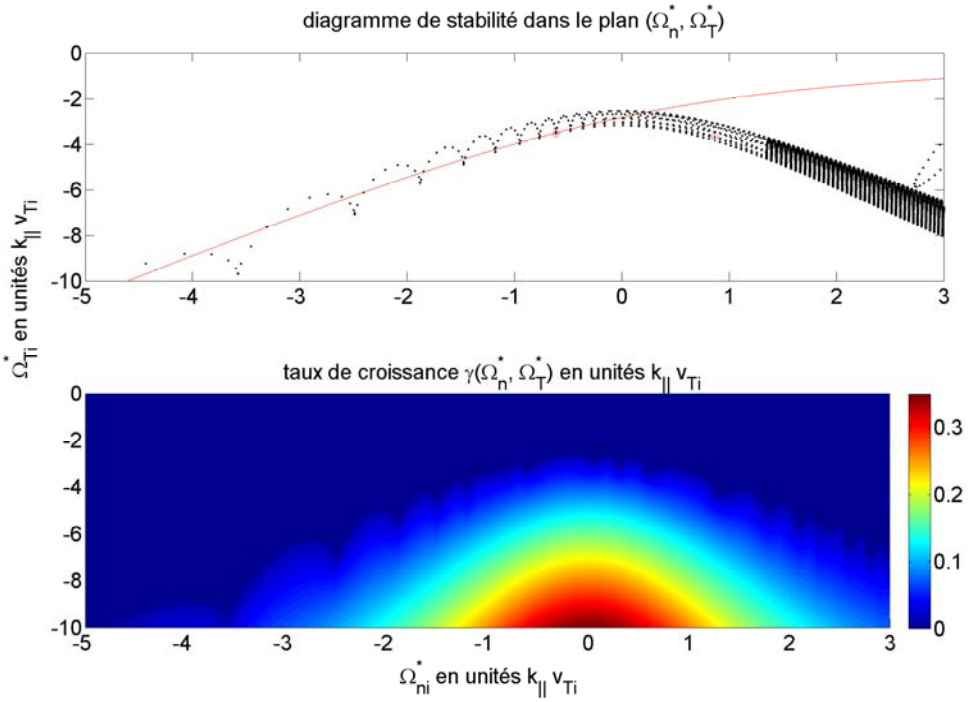


FIGURE 2.6 – Seuil de stabilité linéaire et taux de croissance d'instabilité dans le cas d'un équilibre Lorentzien, comparé au cas d'un équilibre maxwellien (trait continu). $N = 100$ bags, $a_{100} = 10 v_{Ti}$, $Z_i^\star = 1$.

distribution maxwellienne (courbe rouge en haut).

La stabilité n'est que très peu affectée dans les zones où le paramètre η reste proche de 2. Ces zones sont associées aux particules formant le corps de la fonction de distribution. Les particules très rapides, caractéristiques des zones de profils en température et densité opposés, deviennent plus stables.

Les valeurs du taux de croissance ne sont que localement affectées par la structure en lobe induite par le modèle water bag.

Les ordres de grandeur des taux de croissance, pour leurs valeurs maximales correspondant aux profils plats en densité, peuvent également être comparés (2.5, 2.6). La stabilité liée à une fonction de distribution Lorentzienne est accrue d'un facteur 3 par rapport au cas référence maxwellien.

De façon générale, nous constatons donc que la forme de la fonction de distribution d'équilibre selon la vitesse parallèle au champ est fondamentale, et peut modifier de beaucoup la stabilité du plasma.

2.6.3 Comparaison des descriptions water bag, cinétique et fluide

Cette section a pour but de comparer les domaines de stabilité donnés par des descriptions fluide, cinétique et water bag. Nous utiliserons pour les deux dernières approches les diagrammes de stabilité (dans le plan des gradients de densité $\Omega_n^\star$ et de température $\Omega_T^\star$) déjà donnés.

La description fluide choisie s'obtient en intégrant l'équation de Vlasov de dérive cinétique (2.16) au sens des moments [51]. Trois équations gouvernent alors la dynamique des ions : l'équation de continuité donnant la densité, celle d'Euler caractérisant l'évolution de la vitesse moyenne et enfin une équation régissant le transport de chaleur. Dans le cas d'une fonction de distribution maxwellienne, le flux de chaleur est nul et cette condition nous permet de fermer le système d'équations.

L'analyse linéaire du système d'équations fluide nous permet d'obtenir l'équation de dispersion suivante :

$$\omega^3 + Z_i^\star \Omega_n^\star \omega^2 - k_\parallel^2 v_{Ti}^2 (3 + Z_i^\star)\omega + Z_i^\star k_\parallel^2 v_{Ti}^2 (\Omega_T^\star - 2\Omega_n^\star) = 0 \qquad (2.77)$$

Cette équation polynômiale de degré trois, à coefficients réels, ne peut admettre que deux solutions complexes conjuguées. Le seuil de stabilité linéaire est donc défini par la condition d'existence de solutions complexes, fonction uniquement des paramètres $Z_i^\star$, $k_\parallel$, v_{Ti}, $\Omega_n^\star$ et $\Omega_T^\star$.

Nous avons superposé en figure (2.7) les seuils de stabilité obtenus pour les trois descriptions cinétique, water bag et fluide. Ces différents seuils de stabilité sont obtenus pour la référence d'une fonction de distribution maxwellienne d'équilibre (cas cinétique : trait discontinu). Nous observons que le seuil donné par la description fluide suit très bien la limite asymptotique $\eta \to 2$. Le seuil water bag est quant à lui moins intéressant dans ce domaine du fait de sa structure en lobe. Par contre, dans la zone fortement cinétique en particulier dans la zone de profil plat en densité, le seuil fluide est différent du seuil cinétique.

Souhaitant effectuer une comparaison plus quantitative, nous avons également calculé les taux de croissance linéaires associés aux différentes descriptions. Le point A associé aux valeurs des gradients ($\Omega_n^\star = -1$, $\Omega_T^\star = -8$) est choisi dans la zone instable. Nous avons en ce point calculé les taux de croissance d'instabilité fluide et water bag. La référence du cas continu est obtenue dans la limite $N \to \infty$, le taux de croissance associé est noté γ_∞.

Le taux de croissance fluide obtenu vaut $\gamma_f = 1,6\gamma_\infty$: nous retrouvons donc bien le phénomène d'amplification du taux d'instabilité par le modèle fluide. Par contre, les taux water bag sont très satisfaisants : pour $N = 5$

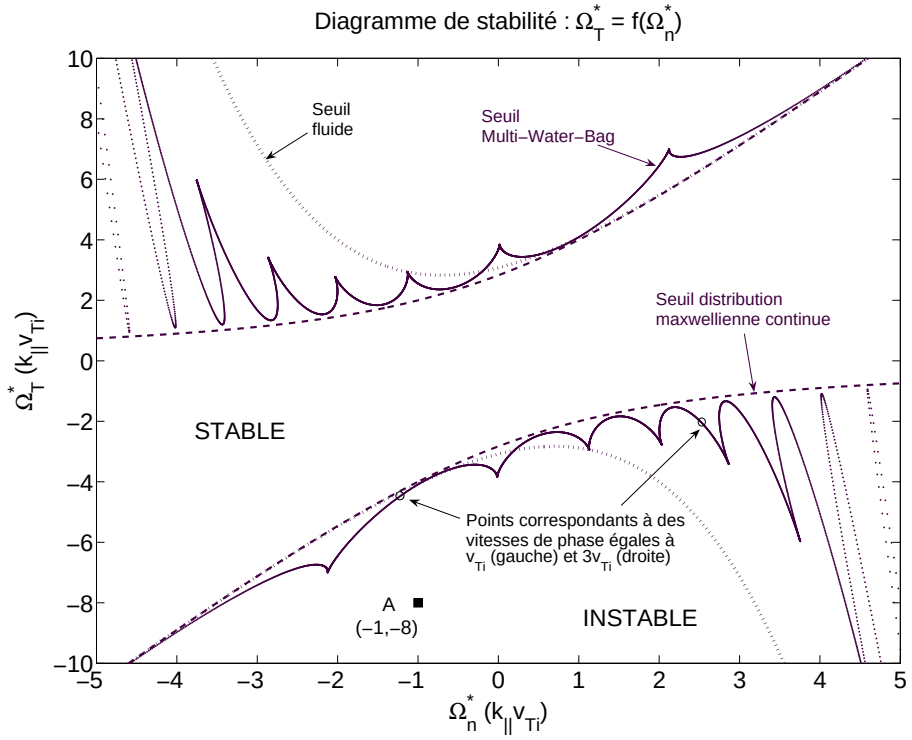


FIGURE 2.7 – Comparaison entre les descriptions fluide, cinétique (fonction de distribution maxwellienne) et water bag : seuils de stabilité ITG dans le plan des gradients de densité ($\Omega_n^\star$) et de température ($\Omega_T^\star$).

bags, le taux d'instabilité obtenu vaut $\gamma_5 = 1,07\gamma_\infty$ et dans le cas représenté en figure (2.7) de $N = 10$ bags, nous obtenons un taux de croissance linéaire $\gamma_{10} = 1,015\gamma_\infty$.

Si dans la plupart des cas, nous obtenons des taux supérieurs à la valeur limite, il nous faut mentionner qu'en choisissant un point A à proximité du creux d'un lobe, nous pouvons obtenir $\gamma_N < \gamma_\infty$.

Pour résumer ce point comparatif, le seuil obtenu au moyen d'une description multi-water-bag est plus précis et proche du cas de référence continu que celui procuré par la description fluide. L'examen des taux de croissance linéaires d'instabilité permet d'affirmer que la description water bag est satisfaisante à partir par exemple de $N = 5$ bags.

2.7 Conclusion

La transition entre théories fluides et cinétiques est donc assurée par le modèle water bag dans le cas du modèle de dérive cinétique. En particulier, la description water bag est *comparable* à une description hydrodynamique multi-fluides au sens des moments et de leurs dépendances radiales jusqu'au moment d'ordre $2(N-1)$. De la même manière, la fonction de distribution multi-water-bag est *équivalente* à une fonction de distribution continue arbitraire au sens de leurs moments, jusqu'à l'ordre $2(N-1)$.

Dans le cas d'un petit nombre de bags $N \leq 10$, notre modèle permet bien de retrouver qualitativement les seuils de stabilité caractéristiques des ITG, ainsi que d'étudier l'effet des particules rapides et lentes : les différentes classes en vitesse sont associées aux lobes typiques de notre description.

Notre modèle permet de décrire la stabilité d'une fonction de distribution d'équilibre arbitraire : ainsi nous avons pu tester le cas d'un équilibre Lorentzien très facilement. Ce dernier cas diffère notablement du cas test classique d'une distribution d'équilibre maxwellienne, avec en particulier une queue de particules rapides plus épaisse, et une stabilité accrue.

La structure en lobes propre à notre modèle qui apparaît sur les seuils de stabilité linéaire n'est visible qu'au voisinage de ces seuils : le taux de croissance que l'on peut leur superposer devient satisfaisant en s'éloignant du seuil et même pour un faible nombre de bags.

Bien entendu, si l'on veut retrouver quantitativement les résultats associés à une distribution continue, le nombre de bags peut être augmenté.

Cette première adaptation d'un modèle water bag au modèle girocinétique est tout à fait encourageante. Nous allons maintenant poursuivre dans notre stratégie d'enrichissement progressif du modèle en permettant à l'invariant adiabatique μ de prendre une valeur non nulle : en d'autres termes nous allons tenir compte des effets de rayon de Larmor fini $r_{Li} = v_\perp/\Omega_{ci} \propto \sqrt{\mu}$.

Chapitre 3

Effets de rayon de Larmor fini

En vain j'ai voulu de l'espace
Trouver la fin et le milieu
Sous je ne sais quel oeil de feu
Je sens mon aile qui se casse
Et brûlé par l'amour du beau
Je n'aurai pas l'honneur sublime
De donner mon nom à l'abîme
Qui me servira de tombeau

Charles Baudelaire
Les plaintes d'un Icare - Les fleurs du mal

3.1 Introduction

Si le modèle de dérive cinétique utilisé dans le précédent chapitre permet un premier contact avec les phénomènes cinétiques dans un plasma magnétisé, il demeure très idéalisé. En particulier l'hypothèse de confondre les particules avec leurs centres-guides est trop forte : en réalité ces particules décrivent un cercle dans le plan transverse au champ magnétique, ce qui constitue le mouvement cyclotronique de rayon le rayon de Larmor.

Et même s'il est très petit, le rayon de Larmor reste fini : l'objet de ce chapitre est d'enrichir notre modèle des effets associés à l'introduction de ce paramètre. Nous conserverons l'hypothèse d'un tore déroulé, où le champ magnétique reste homogène dans une géométrie à symétrie cylindrique autour des lignes de champ.

Les effets de rayon de Larmor fini sont décrits dans la théorie girocinétique [30, 36, 37, 38, 39, 31, 32]. Leur principe physique commun est de ne retenir que le module de la vitesse perpendiculaire en effectuant une moyenne sur sa phase : la giromoyenne. Mathématiquement, le caractère conservatif de

l'équation de Vlasov est préservé, cela signifie que notre description water bag est toujours valable et que les hauteurs A_j de chaque bag restent des constantes du mouvement.

Une interprétation géométrique de la giromoyenne est de la voir comme un changement de système de coordonnées, permettant de basculer de la dynamique des centres-guides décrite par l'équation de Vlasov (dont les invariants sont connus) à celle du champ électrique lié aux particules réelles (situées à une distance du centre-guide égale à leur rayon de Larmor). Les différents travaux de physique mathématique aboutissant aux modèles girocinétiques partent de cette interprétation géométrique : tout le jeu est alors de poser proprement la transformation des coordonnées, dans le contexte perturbatif d'une giration rapide autour de lignes de champ magnétique. Ce caractère perturbatif est assuré par le respect de certains rapports présumés petits : l'ordering girocinétique :

$$\frac{\omega}{\Omega_{ci}} \sim \frac{k_\parallel}{k_\perp} \sim \frac{r_{Li}}{L_{\nabla_\perp 0}} \sim \frac{e\phi}{T_e} \sim \epsilon \leq 10^{-3}, \tag{3.1}$$

où nous avons défini les différentes grandeurs ω la pulsation caractéristique des fluctuations, $\Omega_{ci} = q_i B/M_i$ la pulsation cyclotron caractérisant le mouvement de giration d'ions de charge q_i et de masse M_i autour des lignes de champ magnétique B, $k_\parallel$ le vecteur d'onde caractéristique des fluctuations dans la direction parallèle aux lignes de champ, $k_\perp$ celui caractérisant la direction transverse, $r_{Li} = v_\perp/\Omega_{ci}$ le rayon de Larmor, $L_{\nabla_\perp 0}$ la longueur caractéristique des grandeurs d'équilibre (dans notre cas les gradients de densité κ_n et de température κ_T perpendiculairement aux lignes de champ), et enfin $e\phi$ le potentiel électrostatique normalisé à l'énergie cinétique des électrons T_e.

Il faut encore retenir de cette formulation mathématique qu'elle demeure valable quelle que soit la géométrie considérée, ainsi permet-elle sans problème de décrire le tore associé à un tokamak (2.1, 2.6). Néanmoins ce n'est pas l'ambition de ce mémoire que de réécrire les dérivation et validation mathématiques des équations girocinétiques.

Par ailleurs, les différents termes issus de ces considérations peuvent être expliqués simplement par des arguments physiques, c'est le parti pris que nous adopterons dans ce chapitre, tout en nous efforçant de souligner les différentes hypothèses utilisées. Nous verrons ainsi apparaître deux nouveaux termes dans les équations que nous séparerons en deux effets physiques distincts : l'effet de dérive de polarisation et celui de giromoyenne. Cette séparation est courament utilisée et nous permettra de considérer chaque phénomène séparément.

Nous présenterons tout d'abord les deux effets de dérive de polarisation

et de giromoyenne, pour ensuite les introduire dans notre modèle water bag non-linéaire. Après avoir déduit les équations linéarisées, nous étudierons dans un premier temps les influences séparées de la giromoyenne puis de la dérive de polarisation sur la stabilité linéaire du plasma.

3.2 Le rayon de Larmor fini

La dérive de polarisation comme la giromoyenne sont liées au fait que les particules ne sont pas confondues avec leurs centres-guides, mais décrivent une giration rapide autour de ces derniers, à la fréquence cyclotron $\Omega_{ci} = q_i B/M_i$. La figure (3.1) représente ce mouvement et introduit le rayon de Larmor associé à cette giration $r_{Li} = v_\perp/\Omega_{ci}$. L'hypothèse de forts champs magnétiques, usuelle dans un tokamak, permet de négliger en première approximation ce mouvement. C'était l'objet du chapitre précédent que de réaliser l'étude du mouvement des centres-guides dans cette forte approximation.

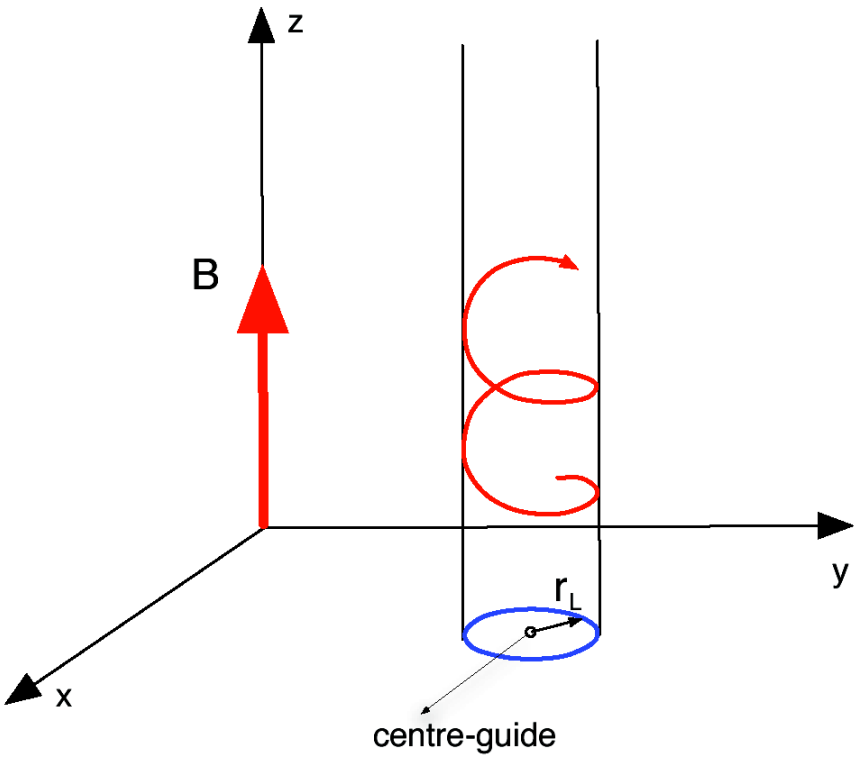


FIGURE 3.1 – Rayon de Larmor non nul et description de dérive cinétique.

Nous présenterons ici les effets arbitrairement séparés de giromoyenne puis de dérive de polarisation au moyen d'arguments physiques. Mais avant de ce faire, nous soulignons encore une fois que ces deux effets découlent de la même considération qui veut que les particules n'étant pas exactement localisées en leur centre-guide, une transformation géométrique s'avère nécessaire pour passer d'un système de coordonnées à l'autre. En outre, puisque le rayon de Larmor est inversement proportionnel au champ magnétique, dans les plasmas de fusion fortement magnétisés que nous étudions ici, ce changement de coordonnées peut être effectué selon une approche perturbative permettant de découpler les différentes échelles caractéristiques. Ainsi de ce point de vue, la dérive de polarisation n'est qu'une partie de l'opération plus fondamentale de giromoyenne [39].

3.2.1 La giromoyenne

L'effet de giromoyenne est lié au constat simple que les particules ne subissent pas les mêmes champs que leurs centres-guides. De la même façon un champ est affecté non par un centre-guide mais par la distribution de particules que ce centre-guide représente. Comme représenté en figure (3.2), nous avons donc à effectuer systématiquement un changement de coordonnées entre celles associées au centre guide et celles associées aux particules réelles [39, 52].

En termes mathématiques, un opérateur giromoyenne va assurer les passages entre représentation centre-guide qui régit l'équation cinétique, et représentation de particules réelles nécessaire à l'obtention des champs autocohérents par l'intermédiaire de l'équation de quasi-neutralité.

Cette opération présente l'avantage de ne conserver comme variable que le module de la vitesse perpendiculaire $v_\perp$, directement relié au moment magnétique $\mu = M_i v_\perp^2/(2B)$. De plus ce module est un invariant adiabatique du mouvement, dont nous n'avons finalement pas à tenir compte autrement que sous la forme d'un label continu.

Ainsi, les champs étant calculés sur les coordonnées réelles, les densités qu'ils voient s'écrivent :

$$n(\mathbf{r}) =< n(\mathbf{R}) >= \frac{1}{2\pi r_{Li}} \oint_{\mathcal{C}} n(\mathbf{R}) \delta \left(|\mathbf{R} - \mathbf{r}| - r_{Li}(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{R}, \qquad (3.2)$$

où $n(\mathbf{r})$ désigne la densité de particules alors que $n(\mathbf{R})$ celle de centres-guides, l'opérateur de giromoyenne pourra par la suite être symbolisé $< . >$.

Si nous utilisons une tranformée de Fourier sur la densité $n(\mathbf{R})$ de centres-

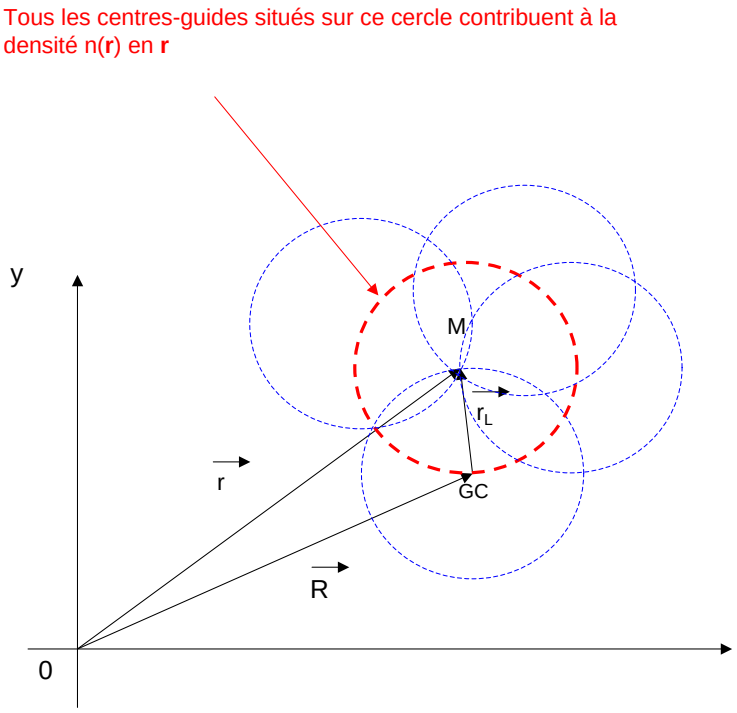


FIGURE 3.2 – Coordonnées du centre-guide et des particules : opération de giromoyenne.

guides :

$$n(\mathbf{R}) = \int_{k_\perp} n_{k_\perp} e^{i\mathbf{k}_\perp.\mathbf{R}} dk_\perp, \tag{3.3}$$

alors nous obtenons pour la densité de particules :

$$n(\mathbf{r}) = \int_{k_\perp} \hat{g}_{k_\perp} n_{k_\perp} e^{i\mathbf{k}_\perp \mathbf{R}} dk_\perp, \tag{3.4}$$

où, en posant $\mathbf{s} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$, les coefficients $g_{k_\perp}$ sont donnés par :

$$g_{k_\perp} = \frac{1}{2\pi r_{\mathcal{L}i}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik_\perp s\cos\phi} \delta(s - r_{\mathcal{L}i}) ds\, d\phi = \mathcal{J}_0(k_\perp r_{\mathcal{L}i}) \tag{3.5}$$

Dans l'hypothèse d'un champ magnétique uniforme et dans le plan perpendiculaire à ce champ, on peut considérer que les particules décrites par un centre-guide sont situées sur un même cercle de centre le centre-guide et

de rayon le rayon de Larmor : $r_{Li} = v_\perp/\Omega_{ci}$. Ceci correspond à négliger la variation de température $T_i(r)$ sur l'étendue du rayon de Larmor :

$$\frac{r_{Li}}{L_{\nabla_T}} << 1, \tag{3.6}$$

nous retrouvons ici l'un des termes de l'ordering gyrocinétique. Cette hypothèse équivaut à ne considérer qu'une seule valeur pour le moment magnétique μ.

Dans l'espace de Fourier, et pour des arguments faibles $k_\perp r_{Li}$, la fonction de Bessel de première espèce $\mathcal{J}_0$ admet le développement :

$$\mathcal{J}_0 = 1 - \frac{k_\perp^2 r_{Li}^2}{4} + \mathcal{O}(k_\perp^4 r_{Li}^4) \tag{3.7}$$

L'obtention d'un opérateur en revenant dans l'espace direct n'est pas un problème trivial. Un moyen est de supposer de faibles valeurs : $k_\perp r_{Li} << 1$, dans ce cas on peut se contenter de l'approximation mentionnée dans l'équation (3.7). Le retour dans l'espace physique nous donne alors un opérateur :

$$G. \simeq 1 - \frac{r_{Li}^2}{4}\triangle_\perp. \tag{3.8}$$

En pratique, l'écart relatif entre la fonction de Bessel et son approximation (3.7) est de 2% en $k_\perp r_{Li} = 1$. Nous pourrons donc par la suite étudier jusqu'à cette limite pour les valeurs de $k_\perp r_{Li}$ sans que notre description de la giro-moyenne ne tombe en défaut, de même, la forme proposée pour l'opérateur G (3.8) sera jugée satisfaisante.

3.2.2 La dérive de polarisation

L'étude des mouvements d'une particule chargée soumise à des champs électrique et magnétique est un préliminaire essentiel à la description dynamique d'un plasma. Le mouvement principal est composé de la giration rapide autour des lignes de champ et d'une translation parallèlement à ces lignes. Une première correction que nous avons déjà rencontrée est la dérive électrique $\mathbf{v_E} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ qui apparaît dès lors qu'existe une séparation locale de charges dans le plasma. Si le champ électrique est inhomogène ou non-stationnaire, une dérive supplémentaire va apparaître qui est justement la dérive de polarisation.

Il existe deux formulations différentes de cet effet de polarisation, l'une consiste donc à le faire apparaître comme une vitesse de dérive supplémentaire dans l'équation de Vlasov. Cette vitesse de dérive s'écrit :

$$\mathbf{v}_{pol} = \frac{M_i}{q_i B^2} d_t \mathbf{E}_\perp \tag{3.9}$$

Cette formulation indique clairement que l'effet de polarisation est induit par une variation du champ électrique perpendiculaire vu par la particule. C'est un effet d'ordre B^{-2}, quand la dérive électrique est en B^{-1}, donc en première approximation négligeable dans le cas de forts champs magnétiques. Cette expression est obtenue en considérant l'effet sur la dérive électrique d'une faible perturbation du champ électrique.

Une seconde approche, plus mathématique, est de considérer que l'existence d'un rayon de Larmor fini implique dans l'équation de Poisson l'existence de charges de polarisation traduisant la nature particulaire du plasma :

$$\nabla.\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{q_i}{\epsilon_0} f_i \right\rangle dv_\parallel + \frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0} \tag{3.10}$$

Plus précisément, la charge volumique apparaissant dans l'équation de Poisson est liée au moment d'ordre 1 de la fonction de distribution des *particules*. L'équation de Vlasov nous fournit quant à elle la fonction de distribution des *centres-guides* : outre le changement de référentiel assuré par la giromoyenne, le décalage spatial entre les densités de centres-guides et de particules réelles engendre par conséquent l'existence de charges de polarisation [39]. Le terme de polarisation s'écrit alors :

$$\nabla_\perp . \left[\frac{n_i}{B\Omega_{ci}} \nabla_\perp \phi \right] \tag{3.11}$$

Enfin, nous mentionnerons que la formulation (3.11) de la vitesse de dérive de polarisation est utilisable dans le domaine $k_\perp r_{Li} \leq 1$, tout comme l'approximation de l'opérateur giromoyenne $G. = 1 - r_{Li}^2/4\triangle_\perp$.

3.2.3 Le modèle de dérive cinétique

Nous reprenons ici les équations générales du modèle giro-water-bag (2.12, 2.13), en ne considérant qu'une seule valeur pour le moment magnétique μ, non nulle. Nous enrichissons donc notre modèle de dérive cinétique (2.16, 2.17). Compte-tenu des deux effets de rayon de Larmor fini, l'équation cinétique décrivant la population d'ions est l'équation de Vlasov suivante :

$$\partial_t f + \left\langle \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \right\rangle . \nabla_\perp f + v_\parallel \partial_z f + \left\langle \frac{q_i E_\parallel}{m_i} \right\rangle \partial_{v_\parallel} f = 0 \tag{3.12}$$

Où f est la fonction de distribution des centres-guides ioniques, qui ne dépend en vitesse que de $v_\parallel$, orientée selon $\vec{B}$. Le champ magnétique $\vec{B}$ est dirigé selon l'axe Oz, et le champ électrique découle du potentiel électrostatique $E_\parallel = -\partial_z \phi$.

Les électrons sont supposés Boltzmaniens :

$$n_e = n_{e0} \exp \frac{e\phi}{T_e} \simeq n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi}{T_e}\right), \tag{3.13}$$

avec l'hypothèse d'une énergie cinétique grande devant le potentiel $e\phi << T_e$.

Les deux populations sont couplées par la relation de quasi-neutralité, incluant l'effet de polarisation :

$$\left\langle Z_i \int_{-\infty}^{+\infty} f dv_\parallel \right\rangle + \nabla_\perp . \left[\frac{M_i n_{i0}(r)}{q_i B^2} \nabla_\perp \phi \right] = n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi}{T_e}\right) \tag{3.14}$$

3.3 Application au modèle water bag

Nous présentons ici les équations non-linéaires multi-water-bag, dérivées des équations (3.12, 3.14). Ces équations correspondent aux équations plus générales du modèle giro-water-bag (2.12, 2.13), ramenées au cas d'une seule valeur de l'invariant adiabatique μ. Nous analyserons l'impact des différents termes apparus du fait de la prise en compte des effets de rayon de Larmor fini.

3.3.1 Les équations non-linéaires

Pour obtenir la description multi-water-bag associée aux équations (3.12, 3.14), nous choisissons une fonction de distribution multi-water-bag pour les centres-guides :

$$f(r, \theta, z, v_\parallel, t) = \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\Upsilon(v_\parallel - v_j^-(r, \theta, z, t)) - \Upsilon(v_\parallel - v_j^+(r, \theta, z, t)) \right], \tag{3.15}$$

où Υ est la fonction échelon de Heaviside, N étant le nombre de bags. Les contours water bag $v_j^\pm$ sont donc définis comme les contours associés aux centres-guides.

L'équation de dérive cinétique se décompose alors :

$$\partial_t v_j^\pm + \langle \mathbf{v_E} \rangle . \nabla_\perp v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \left\langle \frac{q_i \partial_z \phi}{m_i} \right\rangle = 0, \tag{3.16}$$

où $\mathbf{v_E} = -\nabla_\perp \phi \times \mathbf{B}/B^2$ est la vitesse de dérive électrique.

L'équation de quasi-neutralité s'écrit :

$$Z_i \sum_{j=1}^{M} A_j \left\langle v_j^+ - v_j^- \right\rangle + Z_i \nabla_\perp . \left[\frac{M_i n_i(r)}{q_i B^2} \nabla_\perp \phi \right] = n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi}{T_e} \right) \qquad (3.17)$$

Dans la dérive de polarisation, la densité est évaluée sur les contours, en théorie giromoyennés :

$$n_i(r) = \sum_{j=1}^{N} A_j < v_j^+ - v_j^- > \qquad (3.18)$$

Nous négligerons cependant par la suite l'action de la giromoyenne sur la dérive de polarisation, puisque l'effet de polarisation est déjà supposé être faible.

3.3.2 Equations normalisées et analyse dimensionnelle

Nous terminons cette section par la normalisation des équations non-linéaires water-bag (3.16, 3.17). La procédure de normalisation utilise les mêmes grandeurs caractéristiques qu'au chapitre précédent, puisque les effets de rayon de Larmor fini constituent *a priori* de faibles perturbations au comportement global du plasma. La seule modification apportée est de considérer une longueur caractéristique parallèle au champ $k_{\|0}$ indépendante du mode longitudinal n considéré : cette considération vise à faire apparaître ce dernier paramètre dans les équations pour en analyser l'impact sur les effets de sélections par mode. Le vecteur d'onde parallèle pour un mode n donné s'écrira donc $k_{\|n} = nk_{\|0}$. Nous rappelons les différentes dimensions caractéristiques (la notation $\hat{}$ désigne les grandeurs sans dimension) :

$$\begin{aligned} \hat{v} &= v/v_{Ti} \\ \hat{k} &= k/k_{\|0} \\ \hat{\omega} &= \omega/(k_{\|0} v_{Ti}) \\ \hat{\phi} &= q_i \phi / T_i \\ \hat{A}_j &= v_{Ti} A_j / n_{i0} \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Le système d'équations normalisées prenant en compte les effets de rayon de Larmor fini s'écrit dans ce choix :

$$\partial_{\hat{t}}\hat{v}_j^{\pm} + \langle \hat{\mathbf{v}_E} \rangle .\hat{\nabla}_\perp \hat{v}_j^{\pm} + \hat{v}_j^{\pm}\partial_{\hat{z}}\hat{v}_j^{\pm} + \left\langle \partial_{\hat{z}}\hat{\phi} \right\rangle = 0 \tag{3.20}$$

$$Z_i^\star \left[\sum_{j=1}^{N} \hat{A}_j \left\langle \hat{v}_j^+ - \hat{v}_j^- \right\rangle - 1 \right] = \hat{\phi} - Z_i^\star \frac{\hat{\kappa}_n \hat{\nabla}_\perp \hat{\phi} + \hat{\triangle}_\perp \hat{\phi}}{\hat{\Omega}_{ci}^2}, \tag{3.21}$$

où nous avons introduit $Z_i^\star = Z_i T_e/T_i$ et $\hat{\kappa}_n = d_r \ln n_{i0}/k_{\|0}$.

Nous rappelons que le terme comprenant la vitesse de dérive électrique peut s'écrire : $\langle \hat{\mathbf{v}_E} \rangle .\hat{\nabla}_\perp \hat{v}_j^{\pm} = -(\hat{\nabla}_\perp < \hat{\phi} > \times \hat{\mathbf{b}}).\hat{\nabla}_\perp \hat{v}_j^{\pm}/\hat{\Omega}_{ci}$.

La prise en compte de la dérive de polarisation dépend directement du rayon de Larmor. Nous introduisons donc ce paramètre en supposant que la vitesse perpendiculaire est de l'ordre de la vitesse thermique des ions :

$$\frac{1}{\hat{\Omega}_{ci}} = \frac{k_{\|0} v_{Ti}}{\Omega_{ci}} \simeq \frac{k_{\|0} v_\perp}{\Omega_{ci}} = k_{\|0} r_{Li} = \hat{r}_{Li} \tag{3.22}$$

Le système d'équations (3.20, 3.21) peut donc se réécrire :

$$\partial_{\hat{t}}\hat{v}_j^{\pm} - \frac{1}{\hat{\Omega}_{ci}} \left(\hat{\nabla}_\perp < \hat{\phi} > \times \hat{\mathbf{b}} \right) .\hat{\nabla}_\perp \hat{v}_j^{\pm} + \hat{v}_j^{\pm}\partial_{\hat{z}}\hat{v}_j^{\pm} + \left\langle \partial_{\hat{z}}\hat{\phi} \right\rangle_\perp = 0 \tag{3.23}$$

$$Z_i^\star \left[\sum_{j=1}^{N} \hat{A}_j \left\langle \hat{v}_j^+ - \hat{v}_j^- \right\rangle - 1 \right] = \hat{\phi} - Z_i^\star \hat{r}_{Li}^2 \left[\hat{\kappa}_n \hat{\nabla}_\perp \hat{\phi} + \hat{\triangle}_\perp \hat{\phi} \right] \tag{3.24}$$

Nous utiliserons par la suite ces deux équations pour référence, la notation $\hat{}$ rappelant que les différentes grandeurs sont normalisées sera omise.

Les corrections apportées par la prise en compte des effets de rayon de Larmor finis apparaissent à la fois dans le terme de polarisation, qui peut être vu comme une correction au potentiel électrostatique dans le membre de gauche de l'équation de quasi-neutralité (3.24), et dans l'opérateur de giromoyenne $< . >$.

Nous chercherons ici à faire apparaître les différents paramètres de petitesse de l'ordering girocinétique :

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= k_{\|0}/k_\perp = \hat{k}_\perp^{-1} \\ \epsilon_\omega &= \omega/\Omega_{ci} = \hat{\Omega}_{ci}^{-1} \\ \epsilon_\phi &= e\phi/T_e = \hat{\phi}/Z_i^\star \\ \epsilon_{\nabla_{\perp 0}} &= r_{Li}/L_{\nabla_{\perp 0}} \\ x &= k_\perp r_{Li} \end{aligned} \tag{3.25}$$

ou les solutions en pulsation sont supposées permettre les interactions onde-particules ($\omega \sim k_{\|0} v_{Ti}$) et où le paramètre $x = k_\perp r_{Li}$ contrôle directement les effets de rayon de Larmor fini et peut donc tendre vers 1 en limite haute.

Un point discutable est l'ordre de grandeur des gradients transverses des différentes quantités, car les simulations non-linéaires voient ces grandeurs alterner entre les longueurs de gradients d'équilibre et des modes beaucoup plus localisés, typiquement de l'ordre du rayon de Larmor. Nous avons donc choisi de faire figurer ces deux types de profil radial pour toute grandeur X :

$$\frac{\nabla_\perp X}{X} \propto L^{-1}_{\nabla_{\perp 0}} + k_\perp \propto \epsilon_k^{-1}(1 + \frac{\epsilon_{\nabla_{\perp 0}}}{x})^2$$

Nous pouvons remarquer que l'influence des gradients d'équilibre ne peut être au mieux que du même ordre de grandeur que celui des modes localisés, et ce dans la limite de rayon de Larmor petit ($x \propto \epsilon$).

Si nous appelons ϵ^2_{pol} l'ordre de grandeur du terme de dérive de polarisation, alors le membre de gauche de l'équation de quasi-neutralité présente l'ordre de grandeur :

$$\left[1 - Z_i^\star r^2_{Li}(\kappa_{ni}\nabla_\perp + \triangle_\perp)\right].\phi \propto (1 - \epsilon^2_{pol})\phi$$

De la façon la plus générale, le terme de polarisation présente donc l'ordre de grandeur :

$$\epsilon^2_{pol} \propto Z_i^\star (1 + \frac{\epsilon_{\nabla_{\perp 0}}}{x})^2 x^2$$

Dans l'espace de Fourier, la giromoyenne est une fonction de $k_\perp r_{Li}$, et nous avons vu qu'elle pouvait s'approximer dans l'espace réel :

$$< . >_\perp \propto 1 - r^2_{Li}\triangle_\perp.$$

Nous pouvons donc introduire le paramètre ϵ_{giro} caractérisant l'importance relative de la giromoyenne :

$$\epsilon^2_{giro} \propto (1 + \frac{\epsilon_{\nabla_{\perp 0}}}{x})^2 x^2$$

Les deux effets introduits sont donc en première approximation directement proportionnels à la taille caractéristique des fluctuations comparées au rayon de Larmor $x = k_\perp r_{Li}$. Ils sont négligeables dans l'hypothèse d'un très petit rayon de Larmor, et deviennent importants pour des longueurs de gradient transverse de l'ordre de grandeur du rayon de Larmor.

Relativement l'un à l'autre, ces deux effets d'ordre deux diffèrent d'un facteur $Z_i^\star$. Dans le cas d'un tokamak, les températures ionique et électronique

sont du même ordre de grandeur, et les deux effets sont tout à fait comparables. Dans des expériences plus petites, comme Mirabelle, la température électronique est beaucoup plus élevée que celle des ions, et les effets de dérive de polarisation deviennent beaucoup plus importants que ceux de giromoyenne.

3.4 Analyse linéaire

Avant même de présenter les résultats de l'analyse linéaire, il nous a paru important de poser clairement les différentes hypothèses utilisées pour obtenir la fontion diélectrique de plasma. En effet, les deux effets de rayon de Larmor fini introduisent des dérivées selon la direction radiale, qui ne vont pas manquer de se répercuter sur les perturbations dans le cadre de l'analyse linéaire : des traitements et des hypothèses nouvelles ont dû être envisagés.

Un autre point essentiel dans cette section est l'abandon de la notation $\Omega^\star_{n,T}$ utilisée jusqu'alors. Nous utiliserons systématiquement la forme normalisée :

$$\Omega^\star_{n,T} = \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} \kappa_{n,T} \tag{3.26}$$

Ce choix se justifie par l'apparition dans la dérive de polarisation de la grandeur κ_n. De plus, du fait de l'adjonction des effets de rayon de Larmor fini, une sélection en modes (m, n) va s'opérer, qui nécessitera donc de faire clairement apparaître le nombre d'onde poloïdal k_θ. De la même façon, la normalisation est maintenant assurée selon une longueur caractéristique parallèle $k_{\|0}$ indépendante du mode longitudinal considéré n. *La grandeur n apparaîtra donc systématiquement.*

Nous présentons les résultats de l'analyse linéaire des équations (3.20, 3.21). Un problème conséquent sera soulevé qui est lié à l'introduction des opérateurs différentiels dans la direction radiale dûs à la prise en compte des effets de rayon de Larmor fini. L'équation de dispersion devient une équation différentielle selon le potentiel électrostatique : la résolution devrait donc s'effectuer globalement, sur tout le rayon puisque les autres dépendances seront éliminées par la transformée de Fourier. Nous verrons cependant comment éviter cette difficulté, et les implications d'une telle méthode quant à la validité des résultats.

Dans les équations non-linéaires (3.20, 3.21), nous posons :

$$\begin{aligned} \phi &= 0 + \delta\phi(r)\, e^{i(nz+m\theta-\omega t)} \\ v_j^\pm &= \pm a_j(r) + w_j^\pm(r)\, e^{i(nz+m\theta-\omega t)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

en supposant que les perturbations $\delta\phi$ et $w_j^{\pm}$ sont petites devant les grandeurs d'équilibre.

Les équations linéarisées sont obtenues en négligeant les termes quadratiques en perturbation. La giromoyenne reste une opération selon le rayon, alors qu'elle n'est plus qu'une fonction selon le mode poloïdal $k_\theta = m/r$, nous notons néanmoins abusivement cette demi-transformée $\mathcal{J}_0 = 1 - \frac{r_{Li}^2}{4}(d_r^2 + 1/rd_r - k_\theta^2)$:

$$(\omega \mp n a_j) w_j^{\pm} = \left[n \mp \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_j \right] \mathcal{J}_0 . \delta\phi \tag{3.28}$$

$$Z_i^\star \mathcal{J}_0 . \sum_{j=1}^{N} A_j (w_j^+ - w_j^-) = \delta\phi - Z_i^\star r_{Li}^2 \left[d_r^2 + \left(\frac{1}{r} + \kappa_n \right) d_r - k_\theta^2 \right] . \delta\phi \tag{3.29}$$

En éliminant les contours :

$$w_j^{\pm} = \frac{n \mp k_\theta d_r a_j / \Omega_{ci}}{\omega \mp n a_j} \mathcal{J}_0 . \delta\phi, \tag{3.30}$$

dans l'équation de quasi neutralité, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\left[1 - Z_i^\star r_{Li}^2 \left[d_r^2 + \left(\frac{1}{r} + \kappa_n \right) d_r - k_\theta^2 \right] - Z_i^\star \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2 - \omega k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}}{\omega^2 - n^2 a_j^2} \mathcal{J}_0^2 \right] . \delta\phi = 0 \tag{3.31}$$

où nous avons défini les gradients par bag $\kappa_j = d_r \, ln \, a_j$.

Nous avons pour obtenir cette équation fait l'hypothèse que les longueurs caractéristiques des contours d'équilibre sont négligeables devant celles des perturbations, ce qui revient à valider $r_{Li}/L_{\nabla_{\perp 0}} << 1$. Conformément à cette hypothèse l'action de la giromoyenne sous la somme n'est donc retenue que sur le potentiel électrostatique.

Pour éviter d'avoir à résoudre l'allure radiale du potentiel électrostatique, nous faisons l'hypothèse qu'il présente la dépendance particulière selon r :

$$\delta\phi(r) = \delta\phi_0 \, e^{g(r)} \tag{3.32}$$

Nous obtenons pour cette solution particulière l'expression :

$$\left[1 - Z_i^\star r_{Li}^2 \left[d_r^2 g + \left(d_r g + \frac{1}{r} + \kappa_n \right) d_r g - k_\theta^2 \right] - Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2 - \omega k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}}{\omega^2 - n^2 a_j^2} \right] . \delta\phi_0 = 0 \tag{3.33}$$

Nous identifions donc la fonction diélectrique de plasma $\varepsilon(\omega)$, pour un couple (m,n) donné :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - Z_i^\star r_{Li}^2 \left[d_r^2 g + \left(d_r g + \frac{1}{r} + \kappa_n \right) d_r g - k_\theta^2 \right] - Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2 - \omega k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}}{\omega^2 - n^2 a_j^2} \tag{3.34}$$

Pour clore cette section il nous reste à déterminer l'évolution du potentiel électrostatique. Cependant, une fois admise la forme particulière de dépendance radiale (3.32), les calculs suivent les mêmes grandes étapes qu'aux précédents chapitres, ils sont détaillés en annexe D, et le résultat est le suivant :

$$\phi_{k_\theta}(r,t) = \sum_n \frac{\sum_{j=1}^{N} \left[\omega_n (\epsilon_j^{0+} - \epsilon_j^{0-}) + n a_j (\epsilon_j^{0+} + \epsilon_j^{0-}) \right] \Big/ (\omega_n^2 - n^2 a_j^2)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left[2n^2 \omega_n - (\omega_n^2 + n^2 a_j^2) k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci} \right] \Big/ (\omega_n^2 - n^2 a_j^2)^2} e^{-i\omega_n t}, \tag{3.35}$$

où nous avons utilisé les définitions $\kappa_j = d_r \ln a_j$, $\alpha_j = 2 a_j A_j / n_{i0}$, $\epsilon_j^{0\pm} = A_j w_j^{0\pm} / n_{i0}$.

3.5 Stabilité du plasma en phase linéaire

Cette section a pour but de décrire qualitativement la réponse linéaire du plasma à une perturbation $\delta\phi$ donnée. Nous verrons dans un premier temps comment la seule giromoyenne peut influencer les caractéristiques de cette réponse. De la même manière l'introduction de la seule dérive de polarisation sera discutée. Dans les deux cas, nous nous intéresserons à la transition en rayon de Larmor en utilisant un facteur pondérant $k_\perp r_{Li}$, que nous appellerons ϵ_L. Faire varier ϵ_L revient à modifier la valeur de $k_\perp r_{Li}$, tout en conservant k_θ constant (et donc $\Omega_{n,T}^\star$). Finalement nous nous intéresserons à la réunion des deux effets.

Les différentes études se feront en premier lieu sur le diagramme de stabilité dans le plan des gradients de densité κ_n et de température κ_T. Les différentes directions transverses au champ magnétique seront exprimées en termes de rayon de Larmor r_{Li}, ce qui nous permettra d'accéder plus directement aux deux paramètres $k_\perp r_{Li}$ et $\epsilon_{\nabla_{\perp 0}} = r_{Li}/L_{\nabla_{\perp 0}}$. Nous préciserons ensuite les valeurs du taux de croissance d'instabilité dans les régions instables : ainsi que constaté au précédent chapitre, nous assimilerons pour ce

faire taux le plus instable et taux réel d'instabilité en faisant l'hypothèse de faible amortissement Landau.

Enfin, nous pourrons évaluer à gradients constants de densité et de température le mode le plus instable en termes de modes poloïdal m et longitudinal n.

Pour l'ensemble des résultats présentés, nous disposons pour comparaison du seuil de stabilité cinétique classique tenant compte des effets de giro-moyenne et de polarisation :

$$\kappa_T = \kappa_n \pm \sqrt{\kappa_n^2 + 4\frac{\Omega_{ci}^2}{k_\theta^2}(1-A(r))\frac{1-A(r)-Z_i^\star \mathcal{J}_0^2}{Z_i^{\star 2}\mathcal{J}_0^4}}, \tag{3.36}$$

où l'on a défini : $A(r) = Z_i^\star \frac{d_r^2 g + (d_r g + \kappa_n + 1/r) d_r g - k_\theta^2}{\Omega_{ci}^2}$.

Cette expression est obtenue en faisant l'hypothèse d'une fonction de distribution d'équilibre maxwellienne. Le détail du calcul donné en annexe D émane des travaux préliminaires à l'écriture du code non-linéaire Gysela utilisé par l'équipe turbulence du CEA-IRFM Cadarache. L'ensemble de nos résultats multi-water-bag est quant à lui obtenu en égalant notre distribution water bag à une fonction de distribution maxwellienne : la comparaison (3.36) est donc totalement justifiée. Bien entendu, nous pouvons toujours envisager l'étude de stabilité linéaire de fonctions de distribution non maxwelliennes : cette étude peut être une perpective intéressante à cette thèse.

Des hypothèses effectuées sur l'allure radiale du potentiel électrostatique, nous avons à nous donner quatre paramètres caractéristiques des directions transverses. Nous avons en effet choisi de considérer un profil en amplitude des fluctuations gaussien :

$$g(r) = -(r-r_0)^2/\Delta r^2, \tag{3.37}$$

où r est l'endroit du plasma considéré, r_0 est l'endroit où sont centrées les perturbations et Δr leur étalement caractéristique. Nous nous restreignons de plus au seul cas $r = r_0$, ce qui nous donne pour pseudo-vecteurs d'onde :

$$k_r^2 = d_r^2 g + d_r g \left(d_r g + \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = \frac{2}{\Delta r^2} \tag{3.38}$$

$$k_\theta = \frac{m}{r}\Big|_{r=r_0} = \frac{m}{r_0} \tag{3.39}$$

$$k_\perp^2 = k_r^2 + k_\theta^2 = \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{m}{r_0} \tag{3.40}$$

En pratique, nous avons choisi d'effectuer nos simulations avec les valeurs références $r = r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, et le rayon de Larmor respecte

l'ordre de grandeur : $r_{Li} \simeq 10^{-3}$. Nous vérifions donc $\epsilon_k \simeq 10^{-3}$, $\epsilon_\omega \simeq 10^{-3}$, $\epsilon_{L_{\nabla_{\perp 0}}} \simeq 10^{-2}$, en ayant supposé que les longueurs de gradient d'équilibre étaient de l'ordre de r_0.

3.5.1 Effet isolé de giromoyenne

L'opérateur de giromoyenne qui peut prendre des formes différentes dans l'espace de Fourier, est à la base de la théorie girocinétique. Nous chercherons donc tout d'abord quelles modifications il apporte au comportement d'un plasma de rayon de Larmor nul vu au chapitre précédent. Nous nous intéresserons tout particulièrement au couple de modes le plus instable (poloïdal m et longitudinal n). Nous ferons également varier le paramètre $k_\perp r_{Li}$ qui caractérise l'intensité des effets de rayon de Larmor fini.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressés au seuil de stabilité du plasma selon les gradients de densité κ_n et de température κ_T. En figure (3.3) sont tracés les seuils de stabilité pour $\epsilon_L = 0.1$ et 1, où le paramètre ϵ_L nous permet de pondérer la valeur du produit $k_\perp r_{Li}$ dans l'argument de la giromoyenne. L'allure globale du seuil n'est pas modifiée, mais les valeurs des gradients pour un même taux de croissance diffèrent sensiblement : nous observons une augmentation d'un facteur deux en passant d'un faible rayon de Larmor ($r_{Li} = 10^{-4}$) à notre valeur référence ($r_{Li} = 10^{-3}$).

Cette dilatation de l'échelle caractéristique en $\kappa_{n,T}$ correspond à une contraction de la longueur caractéristique radiale des profils, soit donc à des profils plus piqués. La prise en compte via la giromoyenne des effets de rayon de Larmor fini a donc un effet linéairement stabilisant sur le plasma, puisqu'elle voit diminuer le taux de croissance d'instabilité pour un même couple (κ_n, κ_T).

Nous reportons en figure (3.4) la valeur du taux de croissance linéaire d'instabilité en fonction des modes poloïdal m et longitudinal n. Nous nous sommes fixés en un même point dans le plan des gradients de densité $\kappa_n = -0,01\, {r_{Li}}^{-1}$ et de température $\kappa_T = -0,15\, {r_{Li}}^{-1}$ pour les deux graphiques, et avons fait varier l'intensité de l'effet de giromoyenne au moyen du paramètre ϵ_L.

D'un point de vue qualitatif et pour les deux courbes, nous observons clairement une sélection selon les deux modes : le mode le plus instable se situe à des valeurs de n de dix fois environ inférieures à celles de m. Cette sélection s'opère donc préférentiellement sur la direction longitudinale sous l'effet de la giromoyenne.

Quantitativement, la sélection est d'autant plus forte que les effets de rayon de Larmor fini deviennent importants dans l'argument de la fonction de giromoyenne. Nous obtenons également des taux de croissance d'instabilité

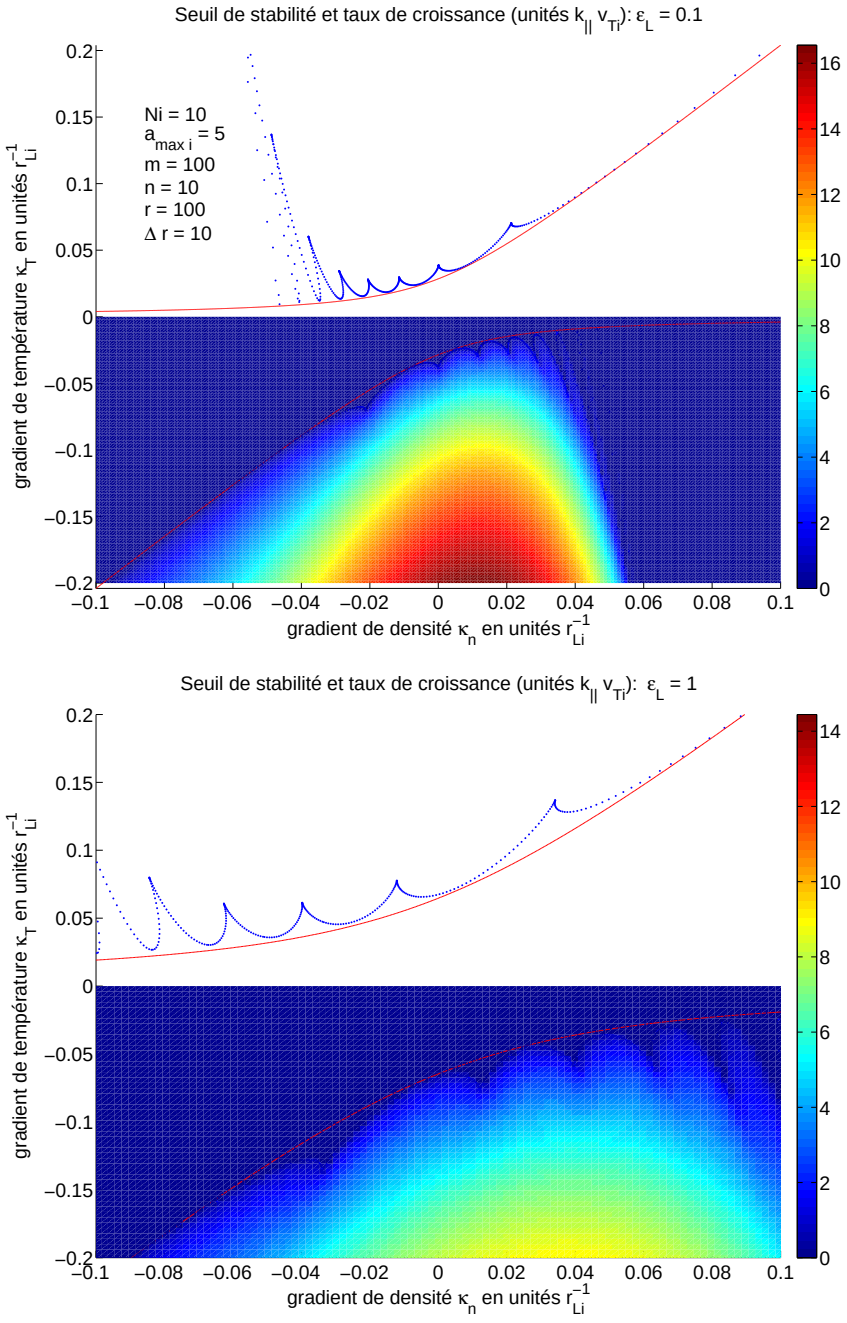


FIGURE 3.3 – Seuil de stabilité et taux de croissance linéaires du plasma dans le plan des gradients de température et de densité. Cas d'un plasma giromoyenné, sans dérive de polarisation.

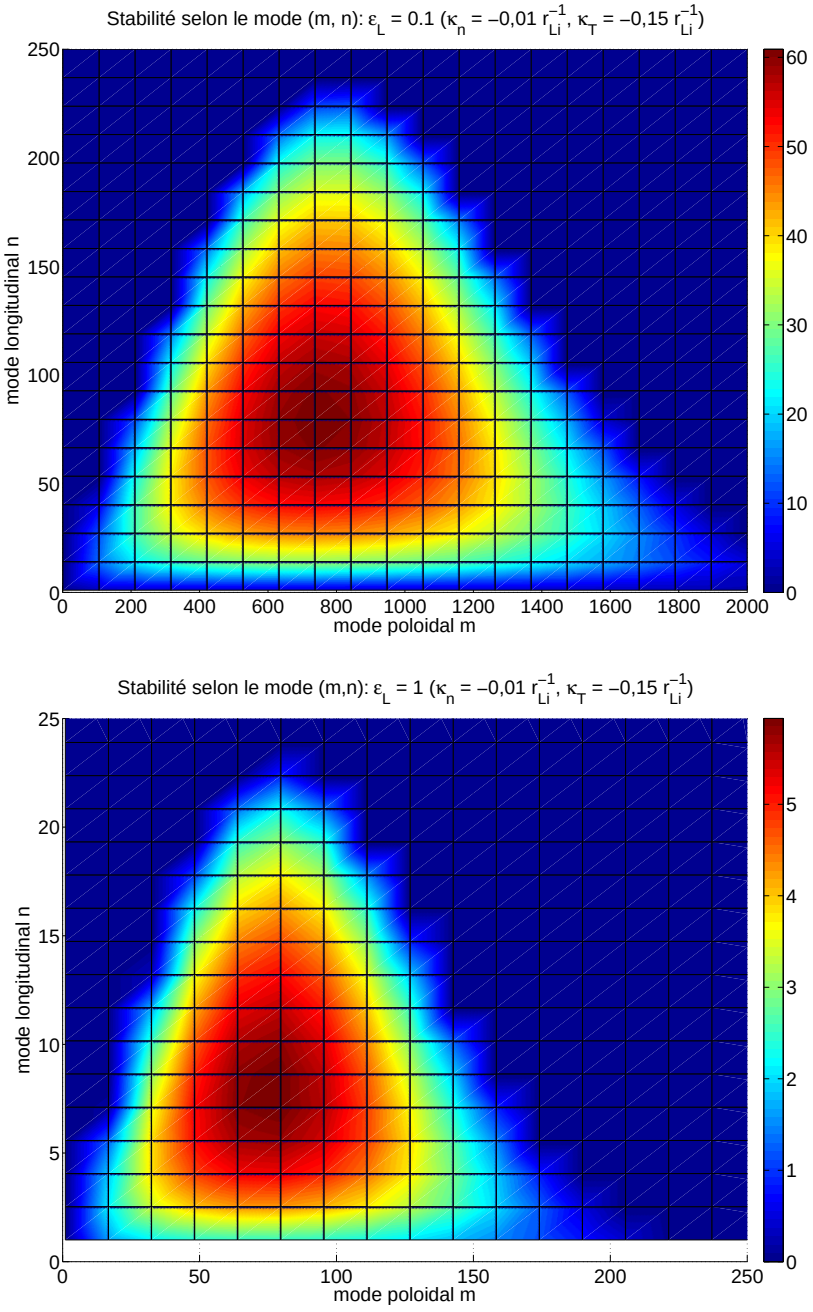


FIGURE 3.4 – Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n. Giromoyenne sans polarisation. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\,v_{Ti}$, $r_0 = 100\,r_{Li}$, $\Delta r = 10\,r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\,{r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\,{r_{Li}}^{-1}$.

à des valeurs beaucoup plus proches de l'unité (donc plus en accord avec nos normalisations).

Nous remarquerons enfin que la sélection en m s'opère de manière à ce que le vecteur d'onde associé k_θ (en unités ${r_{Li}}^{-1}$) soit proche de l'unité.

3.5.2 Effet de la dérive de polarisation

Si l'effet de dérive de polarisation est en théorie indissociable de l'opération de giromoyenne, il est souvent bien commode d'étudier séparemment les deux termes. De plus, de par de son effet régularisant dans l'équation de quasi-neutralité, ce terme est bien souvent le seul à être inclus dans le modèle de dérive cinétique dans un premier temps. Par ce biais, les simulations non-linéaires gagnent en effet en stabilité.

Il est donc tout à fait intéressant de faire l'étude isolée des effets de ce terme de polarisation sur la stabilité linéaire du plasma. Nous utilisons les mêmes paramètres que pour l'étude de la giromoyenne : $r = r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, $m = 100$, $n = 10$. Les paramètres water bag sont $N = 10$ bags pour une dernière vitesse parallèle $a_{10} = 5\, v_{Ti}$.

La figure (3.5) représente les seuils de stabilité linéaire du plasma dans le plan des gradients de densité κ_n et de température κ_T, pour deux intensités différentes de l'effet de rayon de Larmor fini ($\epsilon_L = 0,1$ ou 1). Les valeurs du taux de croissance d'instabilité sont également reportées dans les deux derniers quadrants.

Nous constatons le même effet de dilatation des échelles de gradients caractéristiques, d'un facteur 2, qui correspond à un effet stabilisant de la dérive de polarisation à gradients constants de densité et de température. Vis-à-vis du seuil de stabilité et des taux de croissance d'instabilité les deux effets ont donc la même conséquence, et la même intensité.

La considération des modes les plus instables (figures (3.6) dans le cas de la polarisation et (3.4) pour la giromoyenne) met en avant la particularité de chacun des termes. Dans le cas présent de la dérive de polarisation, le rapport entre les nombres d'onde les plus instables est toujours de 1 à 10 entre n et m, et la valeur du taux de croissance pour le mode le plus instable est proportionnelle à la pondération appliquée aux effets de rayon de Larmor fini (ϵ_L). Le mode poloidal le plus instable vérifie quant à lui toujours l'ordre de grandeur $k_\theta r_{Li} \simeq 1$.

Comparativement au cas de la seule fonction de giromoyenne, les diagrammes sont beaucoup plus étalés selon le nombre d'onde poloïdal m, ce qui signifie que la sélection opérée par la dérive de polarisation sur ces modes est beaucoup plus faible. Nous constatons d'ailleurs que les valeurs de m associées au maximum de taux de croissance sont légèrement plus hautes

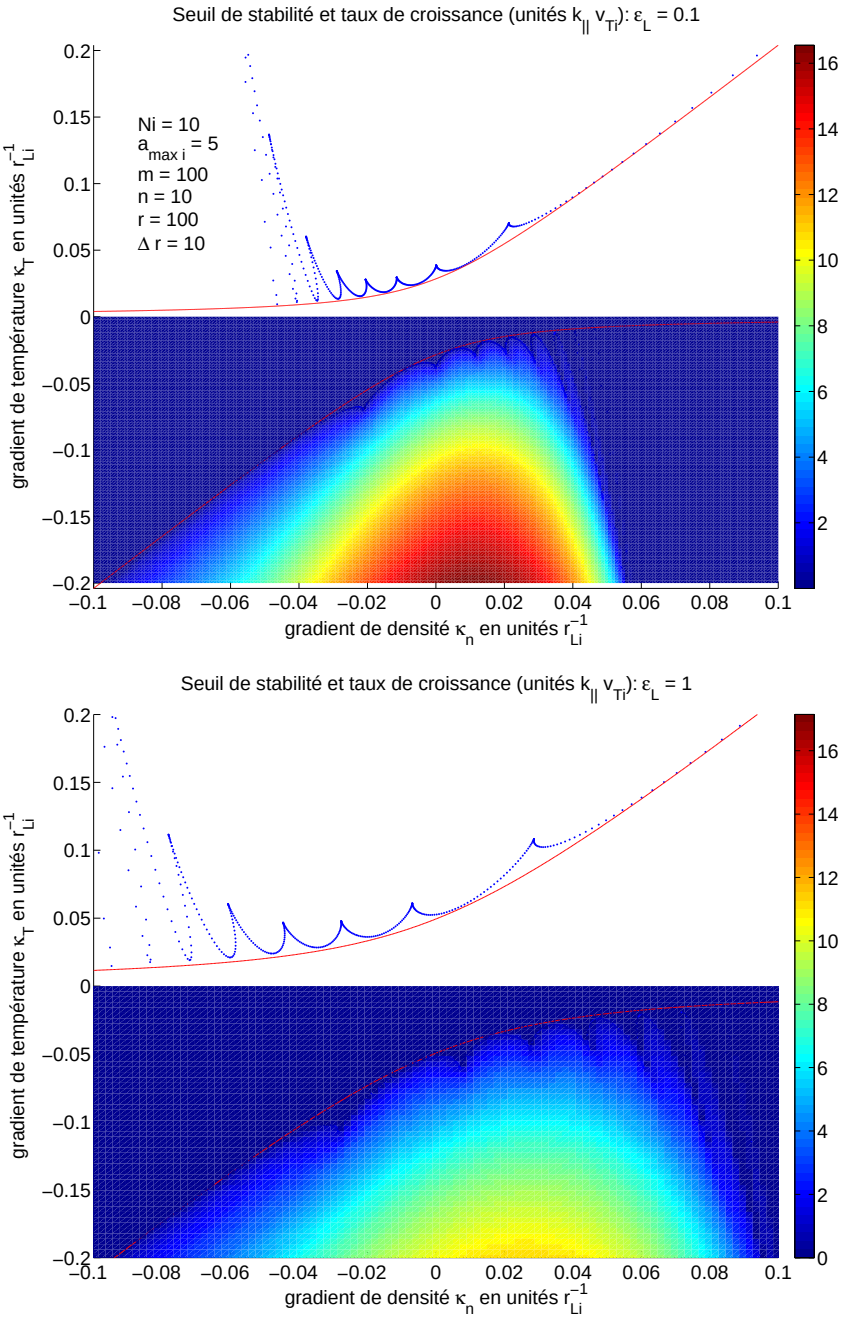


FIGURE 3.5 – Seuil de stabilité et taux de croissance linéaires du plasma dans le plan des gradients de température et de densité : effet isolé de dérive de polarisation.

dans le cas de la seule dérive de polarisation comparativement au cas de la giromoyenne.

Enfin, pour clore cette comparaison, nous pouvons remarquer que les taux de croissance associés au couple en modes (m, n) le plus instable est légèrement inférieur pour un plasma soumis à la seule polarisation que dans le cas de la giromoyenne isolée. Cet effet est observable quel que soit l'intensité des effets de rayon de Larmor fini : par exemple, pour $\epsilon_L = 0,1$, la giromoyenne sélectionne un taux $\gamma \simeq 60\, k_\parallel v_{Ti}$ quand l'effet de polarisation engendre $\gamma \simeq 45\, k_\parallel v_{Ti}$.

3.5.3 Effets conjugués de polarisation et giromoyenne

De la précédente section, nous savons que les deux effets pris séparément permettent la sélection d'un couple de modes le plus instable (m, n). La coupure est cependant plus nette selon le mode poloïdal dans le cas de la giromoyenne.

Dans cette section, nous chercherons en premier lieu à vérifier que ces comportements étudiés séparément sont bien retrouvés lorsque l'on permet la coexistence des deux effets de polarisation et de giromoyenne. Nous étudierons l'impact des effets de rayon de Larmor fini en faisant varier le paramètre ϵ_L, de même intensité pour chacun des deux termes.

Nous reprenons ici les paramètres des deux précédentes sous-sections, pour étudier la superposition des deux effets de rayon de Larmor fini sur la stabilité du plasma. Nous avons donc les paramètres $r = r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, $m = 100$, $n = 10$, $N = 10$ bags et $a_{10} = 5\, v_{Ti}$. En particulier nous chercherons à savoir si les tendances dégagées séparément pour la giromoyenne et la dérive de polarisation s'additionnent.

La figure (3.7) représente les seuils linéaires de stabilité et les taux de croissance associés dans le plan des gradients de densité κ_n et de température κ_T, pour deux valeurs du paramètre de contrôle des effets de rayon de Larmor fini ϵ_L. Vis-à-vis de ces gradients, les deux effets s'additionnent bien et nous constatons une dilatation beaucoup plus importante (d'un ordre de grandeur) entre de faibles et forts rayons de Larmor. La structure globale du taux de croissance comme celle du seuil de stabilité sont quant à elles préservées.

Puique les tendances individuelles étaient les mêmes pour les deux effets selon les gradients de température et de densité, il n'est pas surprenant d'observer une addition simple dans le cas de la réunion des deux effets. Par contre, la sélection en modes (m, n) s'opérant selon des scénarios différents, il est très intéressant d'y revenir, c'est l'objet de la figure (3.8). Nous y observons que la sélection en modes suit le même scénario que dans le cas de la seule giromoyenne, en particulier le mode poloïdal m le plus instable

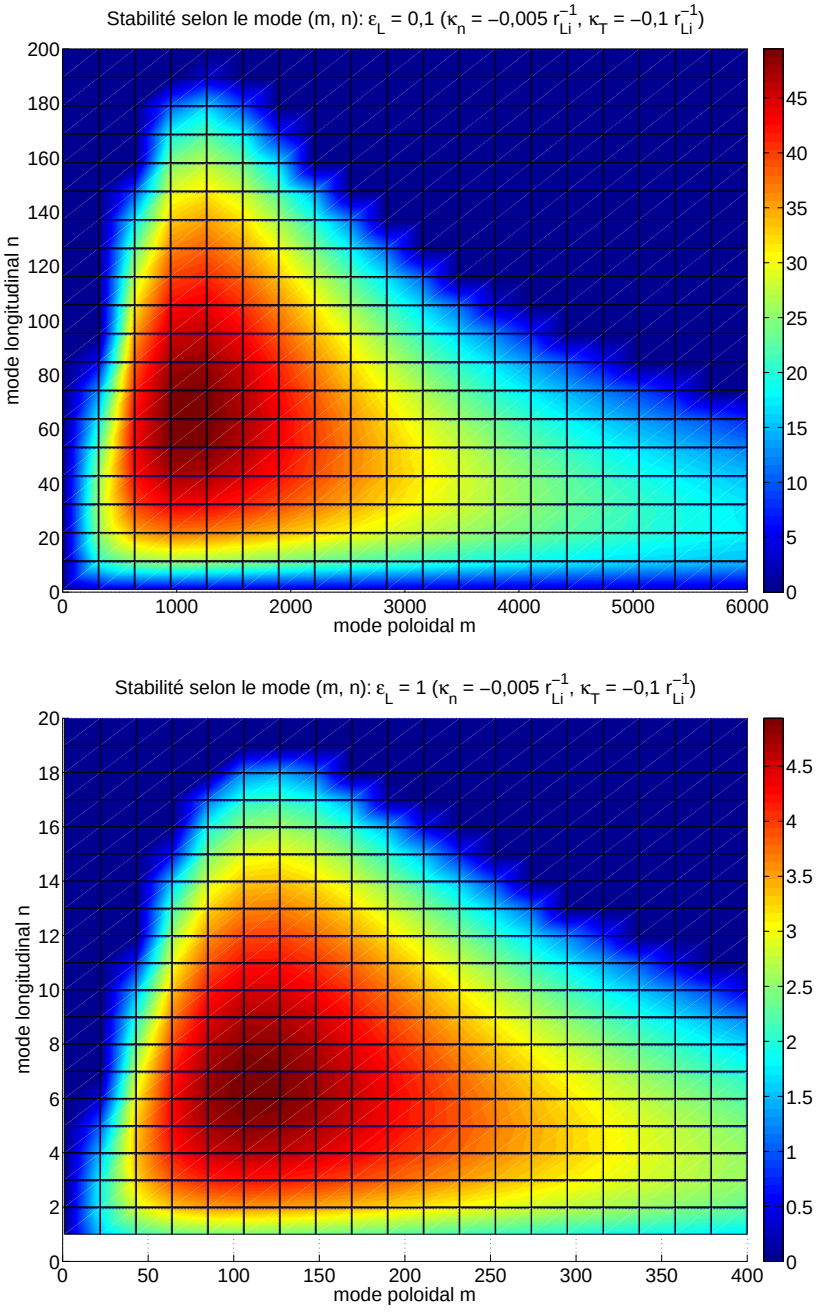


FIGURE 3.6 – Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n, cas de la seule dérive de polarisation. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\,v_{Ti}$, $r_0 = 100\,r_{Li}$, $\Delta r = 10\,r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\,{r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\,{r_{Li}}^{-1}$.

est fortement sélectionné. Nous constatons également que la sélection est en première approximation proportionnelle à l'intensité des effets de rayon de Larmor fini ϵ_L.

Pour clore cette étude systématique, nous reviendrons sur ses différents points marquants :

- ⋆ Les deux termes liés aux effets de rayon de Larmor fini ont des influences semblables sur le seuil de stabilité linéaire du plasma, qui n'est pas affecté dans son allure globale, mais dont les longueurs de gradients caractéristiques sont contractées : nous observons ici l'effet stabilisant de la prise en compte d'un rayon de Larmor fini [49].

- ⋆ Il apparaît une sélection selon les modes longitudinal n et poloïdal m. Cette sélection est plus marquée selon la direction longitudinale d'un ordre de grandeur. Dans le cas de la dérive de polarisation, la sélection poloïdale s'opère doucement et permet l'existence d'un grand nombre de modes instables. La réunion des deux effets voit disparaître cette tendance.

- ⋆ Le mode poloidal le plus instable est tel que la valeur associée du vecteur d'onde k_θ soit proche de l'unité en unités ${r_{Li}}^{-1}$.

3.6 Conclusion

Le modèle water bag s'adapte donc parfaitement à la description des effets de rayon de Larmor fini, sans aucune difficulté nouvelle propre au modèle. La formulation hydrodynamique du modèle reste valable, le fluide associé à chaque bag pouvant être défini dans les coordonnées des centres-guides, ou encore transposé dans le système lié aux particules réelles grâce à l'opérateur de giromoyenne.

De la prise en compte des effets de rayon de Larmor fini, nous avons pu constater que la physique d'un plasma (pourtant en simple géométrie cylindrique) est considérablement enrichie : des comportement nouveaux apparaissent comme la sélection d'un couple de modes (m, n) le plus instable, ou le basculement de modes à faible extension radiale à des structures plus étendues. Ces phénomènes nouveaux sont contrôlés par le paramètre caractéristique des effets de rayon de Larmor fini $k_\perp r_{Li}$ (modifié par $Z_i^\star$ dans le cas de la dérive de polarisation).

Ce dernier point reste cependant à confirmer, tant par des simulations non-linéaires que par une analyse linéaire résolvant le problème sur tout

le rayon en intégrant l'équation de dispersion, soit une analyse en modes globaux.

La confrontation aux résultats expérimentaux est également envisageable rapidement, particulièrement avec les observations réalisées sur des machines linéaires de laboratoire. Notons que dans le cadre d'un stage de Master 2, notre modèle a été enrichi grâce à la prise en compte de possibles collisions électrons-neutres [53]. Ainsi, en plus de décrire les instabilités ITG, ce modèle est capable de prendre en compte des ondes de dérive collisionnelles comparables à celles observées dans une machine cylindrique comme Mirabelle.

Enfin, les simulations non-linéaires doivent disposer d'un outil fiable d'initialisation et de validation dans leur phase linéaire, là encore une fois, la résolution sur l'ensemble du profil radial de l'équation de dispersion procurerait une base solide.

Le modèle water bag peut donc prendre en compte les effets de rayon de Larmor fini sans difficulté. Le nombre de bags nécessaires pour obtenir des comportements intéressants reste de l'ordre de $N = 10$ bags.

Ce résultat était en cela prévisible que la généralisation aux effets de rayon de Larmor finis ne remet pas en cause l'invariance de Liouville. Et cette invariance s'accorde toujours parfaitement avec l'invariance adiabatique de la description girocinétique.

Deux enrichissements subsistent encore pour tester et complètement valider une description water bag des plasmas de tokamak :

- ⋆ Le tokamak doit être replié, et l'on doit donc adapter le modèle à une géométrie torique. Deux nouveaux effets apparaissent qui sont liés à la courbure du champ magnétique et à son inhomogénéité. Ce travail entre dans le cadre de la thèse de Rudy Klein.
- ⋆ Dans un tokamak fonctionnant comme un réacteur, plusieurs espèces d'ions cohabitent : nous allons donc envisager de décrire la stabilité d'un plasma composé de plusieurs espèces d'ions, chacune de ces espèces étant décrite par une distribution water bag.

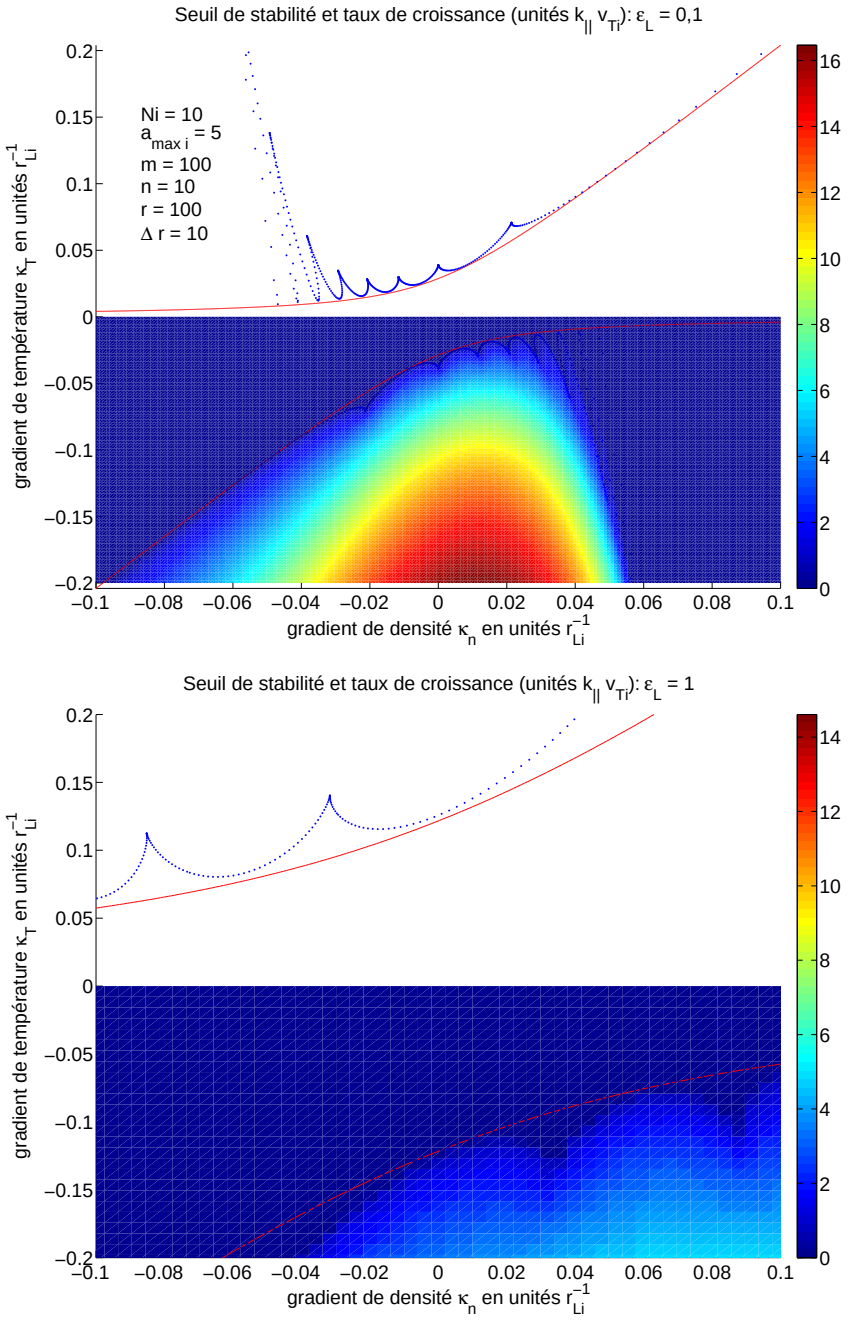


FIGURE 3.7 – Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\,v_{Ti}$, $r_0 = 100\,r_{Li}$, $\Delta r = 10\,r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\,{r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\,{r_{Li}}^{-1}$.

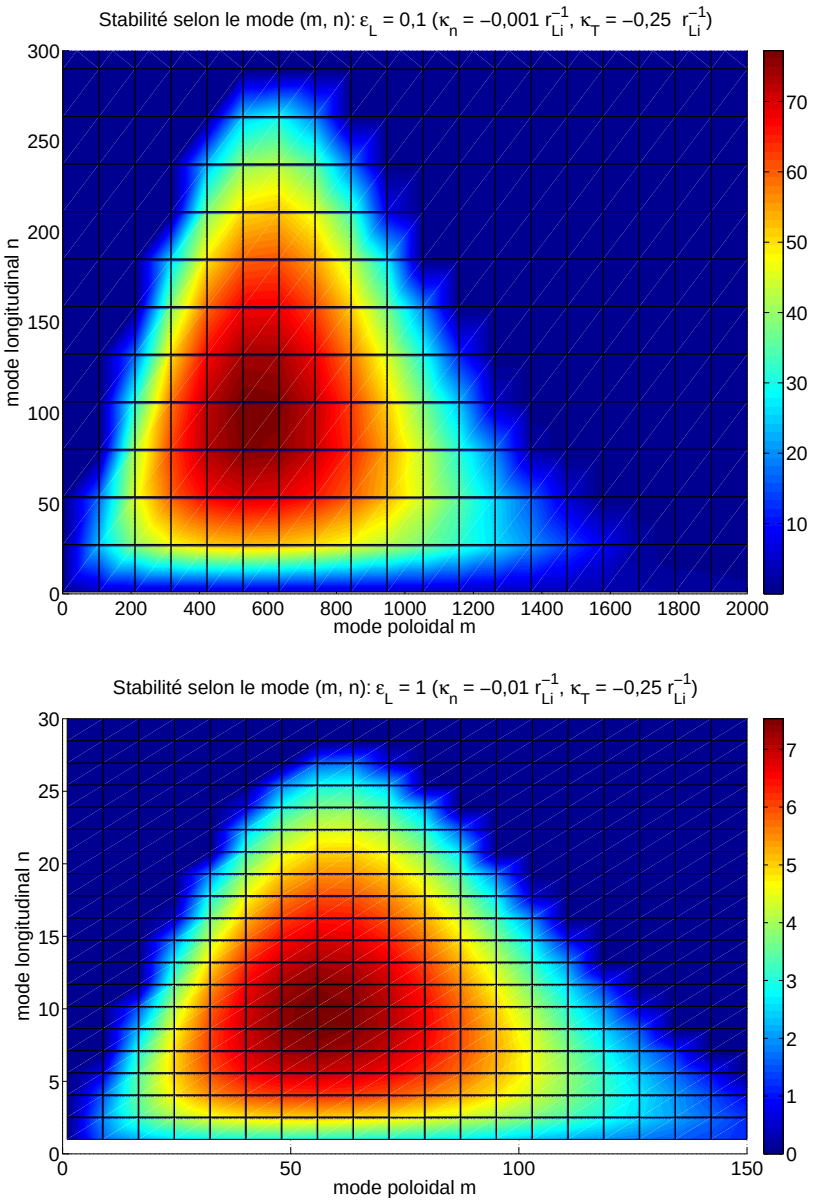


FIGURE 3.8 – Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\,v_{Ti}$, $r_0 = 100\,r_{Li}$, $\Delta r = 10\,r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\,{r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\,{r_{Li}}^{-1}$.

Chapitre 4

Stabilité d'un plasma en présence d'impuretés

Quand on regardait les insectes,
on perdait sa taille
et on commençait à comprendre
ce qui vibrait sans cesse
dans l'air et sur la terre.
J.M.G. Le Clézio
Mondo et autres histoires

4.1 Introduction

La stabilité d'un plasma composé de plusieurs espèces d'ions est actuellement un sujet très discuté [50], [54]. En particulier dans le cadre du projet ITER, la présence des particules α devra être correctement traitée, ainsi que la présence à la fois de deutérium et de tritium, mélange nécessaire à la réaction de fusion la plus accessible (en vertu du critère de Lawson fixant densité et température critiques). Par ailleurs, les impuretés émanant de la paroi matérielle du tokamak peuvent déstabiliser le plasma, jusqu'en son coeur par des moyens tres divers, comme le Bremsstrahlung ou rayonnement emis lors du freinage des particules chargees, la perte de reactivite des noyaux appeles a fusionner ou encore les effets lies au melange de plusieurs populations [55, 56, 57, 58, 59].

Nous nous intéresserons en particulier au devenir des ITG décrites tout au cours de cette thèse. L'ensemble des phénomènes liés à ces instabilités se déroulent sur des échelles de temps longues devant le temps cyclotron (c'est le sens du paramètre de petitesse girocinétique $\omega/\Omega_{ci} << 1$). En outre, ces instabilités se développent dans la région centrale du plasma, où les effets

collisionnels sont négligeables et permettent donc une description cinétique au moyen de l'équation de Vlasov. La question fondamentale est celle de la modification des caractéristiques de stabilité linéaire des modes ITG quand plusieurs espèces sont en présence. Nous chercherons donc dans ce chapitre à modéliser de tels plasmas, en dérivant un modèle water-bag des équations cinétiques relatives à chacune des espèces.

L'influence du paramètre $Z_i^\star$ est considérable quant à la stabilité d'une colonne cylindrique de plasma [26, 50, 60, 62]. Nous avons ainsi pu observer que des plasmas constitués d'ions différents devenaient en moyenne plus instables avec des charges Z_i croissantes. Mais notre étude n'a jusqu'ici porté que sur des plasmas purs, composés d'une seule espèce d'ions.

Dans la pratique, un des grands problèmes quant à la stabilité d'un plasma dans un tokamak est lié à la présence d'impuretés arrachées à la paroi qui viennent perturber le comportement global du plasma. Une première conséquence est la perte de chaleur par rayonnement de freinage ou "Bremsstrahlung", d'autant plus élevée que la charge des ions est grande : les parois d'un tokamak doivent donc être constituées de composants à faible nombre de nucléons. Une conséquence plus méconnue est l'effet direct de ces particules étrangères sur la stabilité d'un plasma habituellement décrit comme pur. Ainsi, au coeur du réacteur, les profils en température et densité sont très mal connus du fait des conditions extrêmes rencontrées. La principale source d'information est la mesure du rayonnement de brehmstrahlung. Sans aborder la difficulté de réaliser une mesure locale, un problème conséquent est que ce rayonnement est émis par tous les ions présents : l'expérience ne fournit donc qu'une charge effective associée à cet effet. Cette information est néanmoins très précieuse dans l'étude des impuretés, elle peut se définir :

$$Z_{eff} n_{e0} = Z_i^2 n_{i0} + Z_c^2 n_{c0}, \tag{4.1}$$

où Z_{eff} définit la charge effective, n_{e0} est la densité d'électrons, Z_i et Z_c les charges respectivement des ions dits majoritaires (de densité n_{i0}), et des impuretés (de densité n_{c0}).

La charge efficace a la dimension de charges élevées au carré : ceci vient des mesures expérimentales de cette grandeur, qui se font à partir du rayonnement de Bremsstrahlung émis, et dont l'intensité est proportionnelle aux carrés des charges des ions constituant le plasma.

La charge efficace Z_{eff} est indirectement fonction du rayon de la machine considérée. Ses profils radiaux peuvent varier très fortement [63, **?**, 55].

Notons enfin que la dénomination d'impuretés n'est ici que formelle et n'implique pas pour notre modélisation que leur densité soit faible devant celle des ions majoritaires.

4.2 Charge efficace et grandeurs macroscopiques

Un problème général à résoudre dans l'étude d'un plasma à plusieurs espèces est de lier les profils de densité de chacune. Nous avons pour ce faire introduit la charge efficace du plasma, qui est une mesure selon le profil radial du rayonnement de freinage produit par l'ensemble du plasma.

La connaissance expérimentale du profil radial de la charge efficace, combinée à la condition de quasi-neutralité, permet de lier les profils radiaux en densité des impuretés et des ions majoritaires. Pour ce faire, nous utilisons la condition de quasi-neutralité ainsi que la définition de la charge efficace, dans le cas particulier de deux espèces ($_i$ et $_c$) :

$$\begin{aligned} n_{e0} &= Z_i n_{i0} + Z_c n_{c0} \\ Z_{eff} n_{e0} &= Z_i^2 n_{i0} + Z_c^2 n_{c0}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\tag{4.3}$$

Nous obtenons l'expression de la charge efficace en fonction des seules densités (n_{i0} et n_{c0}) et charges (Z_i et Z_c) ioniques :

$$Z_{eff} = \frac{Z_i^2 n_{i0} + Z_c^2 n_{c0}}{Z_i n_{i0} + Z_c n_{c0}} \tag{4.4}$$

Sur l'étendue du petit rayon d'un tokamak, par exemple, la charge efficace varie, et les dérivées logarithmiques des profils en densité suivent la contrainte :

$$\kappa_{Z_{eff}} = \frac{Z_i n_{i0}.Z_c n_{c0}}{(Z_i n_{i0} + Z_c n_{c0}).(Z_i^2 n_{i0} + Z_c^2 n_{c0})}(Z_i - Z_c)(\kappa_{ni} - \kappa_{nc}), \tag{4.5}$$

où nous avons introduit les dérivées logarithmiques $\kappa_{Z_{eff}}$, κ_{ni} et κ_{nc}, respectivement associées aux profils radiaux de charge efficace et de densité d'ions majoritaires ou d'impuretés, par le lien $\kappa_X = d_r X(r)/X(r)$.

Cette relation nous permet donc de connaître le profil radial en densité des impuretés en fonction de celui choisi pour les ions majoritaires et du profil expérimental mesuré pour la charge efficace. Ce dernier profil reste néanmoins une mesure trop riche vis-à-vis de l'analyse linéaire, car elle est associée à des plasmas de turbulence déjà avérée. De plus notre modèle étant *local*, c'est la simple connaissance des différentes grandeurs en un point qui nous intéresse. Nous nous accorderons donc encore deux hypothèses supplémentaires.

La première est de considérer un profil plat pour les impuretés $\kappa_{nc} = 0$. Cette hypothèse nous permet de ne tenir compte que de l'effet de dilution lié aux impuretés.

Cependant, dans les zones faiblement collisionnelles où notre modèle water bag est approprié, situées très au coeur du tokamak, les profils en charge efficace sont relativement plats [64, 63]. Cette condition constitue une hypothèse alternative $\kappa_{Z_{eff}} = 0$. A la condition que les charges des deux espèces soient différentes, nous obtenons simplement :

$$\kappa_{nc} = \kappa_{ni} \tag{4.6}$$

Cette dernière relation nous sera très utile, nous permettant de lier systématiquement les profils de densité considérés. Par ailleurs, un mélange Deutérium-Tritium peut toujours être décrit par ce biais, mais avec une perte de généralité, puisque dans ce cas, les deux profils de densité sont indépendants.

Dans le cas général de s espèces différentes, le profil en charge efficace $\kappa_{Z_{eff}}$ nous donne également une contrainte sur les profils en densité κ_{ns} des différentes espèces présentes :

$$\kappa_{Z_{eff}} = \frac{\sum_s Z_s n_{s0}(Z_s - Z_{eff})\kappa_{ns}}{\sum_s Z_s^2 n_{s0}} \tag{4.7}$$

Dans le cas d'un profil plat en charge efficace Z_{eff}, nous obtenons la contrainte :

$$\sum_s Z_s n_{s0}(Z_s - Z_{eff})\kappa_{ns} = 0 \tag{4.8}$$

4.3 Modèle à plusieurs espèces d'ions

Pour décrire différentes espèces s, autant d'équations de Vlasov vont être nécessaires, qui seront couplées à l'équation de quasi-neutralité. Nous présenterons d'emblée un modèle complet, tenant compte des effets de rayon de Larmor fini pour les deux espèces. Nous travaillerons sans utiliser de normalisation, pour faire apparaître clairement les paramètres caractéristiques de chaque espèce.

Le système non-linéaire couple donc s équations de Vlasov, portant sur les fonctions de distribution $f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t)$:

$$\partial_t f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + \left\langle \mathbf{v_E} \right\rangle_s . \nabla_\perp f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + v_\parallel \partial_z f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + \frac{q_s}{M_s} < E >_s \partial_{v_\parallel} f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t) = 0 \tag{4.9}$$

à l'équation de quasi neutralité associée à la prise en compte des effets de rayon de Larmor fini, avec toujours l'hypothèse d'électrons de masse négligeable et d'énergie cinétique prépondérante :

$$\sum_s Z_s \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t) \right\rangle_s dv_\parallel + \nabla_\perp . \left[\frac{q_s n_{s0}}{B^2} \nabla_\perp \phi \right] \right) = n_{e0} \left[1 + \frac{e\phi}{T_e} \right] \quad (4.10)$$

ϕ, E, B et $\mathbf{v}_E$ désignent les potentiel et champ électrostatique et magnétique ainsi que la vitesse de dérive associée. Les différentes grandeurs q_s, M_s et n_{s0} sont respectivement les charge, masse et densité (d'équilibre en l'endroit radial considéré) associées à l'espèce s. T_e est la température des électrons, e leur charge et n_{e0} leur densité.

Enfin la giromoyenne est symbolisée par $<>_s$, elle est à priori dépendante de l'espèce considérée, puisque le rayon de Larmor est défini $r_{Ls} = v_\perp/\Omega_{cs} = v_\perp M_s/q_s B$.

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'autant de distributions multi-water-bag que d'espèces d'ions :

$$f_s(\mathbf{r}, v_\parallel, t) = \sum_{j=1}^{N_s} A_{sj} \left[\Upsilon \left(v_\parallel - v_{sj}^-(\mathbf{r}, t) \right) - \Upsilon \left(v_\parallel - v_{sj}^+(\mathbf{r}, t) \right) \right] \quad (4.11)$$

Les contours $v_{sj}^\pm$ et discontinuités A_{sj} water bag sont bien entendus relatifs à chaque espèce présente. Leur valeur sera quant à elle déterminée au sens des moments, relativement à une distribution continue spécifique à chaque population, de forme générale apte à décrire les instabilités ITG $f_s = \mathcal{G}(v_\parallel/v_{Ts}) n_{s0}/\sqrt{2\pi v_{Ts}^2}$, où nous retrouvons la densité n_{s0} de chaque espèce, ainsi que sa vitesse thermique v_{Ts} définie au moyen de la température locale : $v_{Ts} = \sqrt{T_s/M_s}$.

En insérant les distributions multi-water-bag (4.11) dans les équations (4.9, 4.10), nous obtenons le système non-linéaire multi-water-bag :

$$\partial_t v_{sj}^\pm(\mathbf{r}, t) + \left\langle \mathbf{v_E} \right\rangle_s . \nabla_\perp v_{sj}^\pm(\mathbf{r}, t) + v_{sj}^\pm \partial_z v_{sj}^\pm = \frac{q_s E}{M_s} \quad (4.12)$$

$$\sum_s Z_s \left[\sum_{j=1}^{N_s} A_{sj} \left\langle v_{sj}^+ - v_{sj}^- \right\rangle_s + \nabla_\perp \left(\frac{Z_s n_s}{B\Omega_{cs}} \nabla_\perp \phi \right) \right] = n_{e0} \left[1 + \frac{e\phi}{T_e} \right], \quad (4.13)$$

où l'indice s court sur les deux espèces d'ions présentes.

La généralisation du modèle water bag à plusieurs espèces ne pose donc aucun problème. Ces calculs sont d'ailleurs à rapprocher du cas d'un plasma avec plusieurs valeurs de μ, puisque dans ce dernier cas aussi il y aurait plusieurs équations de Vlasov couplées, associées à des populations de même caractéristiques physiques (charge et masse), mais présentant des moments magnétiques différents.

4.4 Analyse linéaire

Nous présentons dans cette section la dérivation de l'expression de la fonction diélectrique de plasma $\epsilon(\omega)$. L'équilibre est supposé homogène selon z et θ, sans potentiel électrostatique :

$$v_{sj}^{\pm} = \pm a_{sj}(r) + w_{sj}^{\pm}\, e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \omega t)} \tag{4.14}$$

$$\phi = 0 + \delta\phi(r)\, e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \omega t)} \tag{4.15}$$

L'opérateur de giromoyenne, de par son lien direct avec le rayon de Larmor r_{Ls} est relatif à chaque espèce présente, il consiste par ailleurs en une simple multiplication par le vecteur d'onde poloidal dans la direction orthoradiale (du fait de l'utilisation d'une base de Fourier dans cette direction). Selon la direction radiale, il reste un opérateur aux dérivées partielles. Nous obtenons les équations linéarisées au premier ordre en perturbations :

$$(\omega \mp k_{\parallel} a_{sj}) w_{sj}^{\pm} = \left[k_{\parallel} \frac{q_s}{M_s} \mp \frac{k_\theta}{B} d_r a_{sj} \right] \mathcal{J}_{0s} \delta\phi \tag{4.16}$$

$$\sum_s \left[Z_s \mathcal{J}_{0s} \sum_{j=1}^{N_s} (w_{sj}^{+} - w_{sj}^{-}) \right] = \left[\frac{e n_{e0}}{T_e} + \sum_s \frac{Z_s n_{s0}}{B\Omega_{cs}} (k_\theta^2 - \kappa(r) - \kappa_{ns} d_r g) \right] \delta\phi \tag{4.17}$$

Nous avons également supposé que la dépendance radiale du potentiel électrostatique a la forme particulière suivante :

$$\delta\phi(r) = \delta\phi_0 e^{g(r)}, \tag{4.18}$$

ce qui définit $\kappa(r) = -[d_r^2 g + (d_r g)^2 + d_r g / r]$. L'opération de giromoyenne devient quant à elle une simple multiplication selon la direction radiale. De plus, nous tiendrons compte du paramètre de petitesse $r_{Ls}/L_{\nabla_{\perp 0}} << 1$ pour négliger l'action de la giromoyenne sur les grandeurs d'équilibre.

En éliminant les contours perturbés dans l'équation linéarisée de quasi-neutralité (4.17), nous obtenons l'expression de la fonction diélectrique du plasma (où l'indice $_s$ court sur les deux espèces d'ions présentes) :

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{T_e}{e n_{e0}} \sum_s \left[Z_s n_{s0} \frac{q_s}{M_s} \left(\frac{\kappa(r) + \kappa_{ns} d_r g - k_\theta^2}{\Omega_{cs}^2} + \mathcal{J}_{0s}^2 \sum_{j=1}^{N_s} \alpha_{sj} \frac{k_\parallel^2 - \omega k_\theta \kappa_{sj}/\Omega_{cs}}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_{sj}^2} \right) \right] \tag{4.19}$$

Les paramètres water bag α_{sj} sont définis relativement à chaque espèce présente : $\alpha_{sj} = 2A_{sj}a_{sj}/n_{s0}$.

Nous faisons maintenant apparaître les paramètres $Z_s^\star = Z_s T_e/T_s$ et $v_{Ts}^2 = T_s/M_s$:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \sum_s \left[Z_s^\star \frac{Z_s n_{s0}}{n_{e0}} v_{Ts}^2 \left(\frac{\kappa(r) + \kappa_{ns} d_r g - k_\theta^2}{\Omega_{cs}^2} + \mathcal{J}_{0s}^2 \sum_{j=1}^{N_s} \alpha_{sj} \frac{k_\parallel^2 - \omega k_\theta \kappa_{sj}/\Omega_{cs}}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_{sj}^2} \right) \right] \tag{4.20}$$

Le nombre d'espèces n'influe pas sur nos conditions de seuil, qui sont relatives uniquement à l'argument en pulsation de la fonction diélectrique vérifiant donc encore une fois $\epsilon(\omega) = 0$ et $d_\omega \epsilon(\omega) = 0$. Si nous explicitons ces conditions dans notre cas (4.20), nous obtenons :

$$\sum_s Z_s^\star \frac{Z_s n_{s0}}{n_{e0}} v_{Ts}^2 \left[\frac{\kappa(r) + \kappa_{ns} d_r g - k_\theta^2}{\Omega_{cs}^2} + \mathcal{J}_{0s}^2 \sum_{j=1}^{N_s} \alpha_{sj} \frac{k_\parallel^2 - \omega k_\theta \kappa_{sj}/\Omega_{cs}}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_{sj}^2} \right] = 1 \tag{4.21}$$

$$\sum_s Z_s^\star \frac{Z_s n_{s0}}{n_{e0}} v_{Ts}^2 \sum_{j=1}^{N_s} \alpha_{sj} \frac{\Omega_{sj}^\star(\omega^2 + k_\parallel^2 a_{sj}^2) - 2\omega k_\parallel^2}{(\omega^2 - k_\parallel^2 a_{sj}^2)^2} = 0 \tag{4.22}$$

Par ailleurs aucune expression analytique du seuil de stabilité linéaire ne peut être obtenue, même dans le cas particulier d'une fonction de distribution d'équilibre continue et maxwellienne. Les comparaisons ne pourront donc se faire qu'avec les cas références des populations prises individuellement.

4.5 Impuretés et stabilité linéaire

En toute rigueur, le seuil de stabilité (4.21, 4.22) d'un plasma formé de deux espèces d'ions est une surface dans l'espace à quatre dimension engendré

par les quatre gradients de densité (κ_{ni} et κ_{nc}) et de température (κ_{Ti} et κ_{Tc}). Nous négligerons ici les effets de rayon de Larmor fini, pour ne nous concentrer que sur le modèle à deux espèces le plus simple, nous donnant le seuil de stabilité :

$$\begin{aligned} 1 - Q_i v_{Ti}^2 \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{ij} \frac{k_\parallel^2 - \omega k_\theta \kappa_{ij}/\Omega_{ci}}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_{ij}^2} - \\ Q_c v_{Tc}^2 \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_{cj} \frac{k_\parallel^2 - \omega k_\theta \kappa_{cj}/\Omega_{cc}}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_{cj}^2} &= 0 \\ Q_i v_{Ti}^2 \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{ij} \frac{\omega k_\theta (\omega^2 + k_\parallel^2 a_{ij}^2)\kappa_{ij}/\Omega_{ci} - 2\omega k_\parallel^2}{(\omega^2 - k_\parallel^2 a_{ij}^2)^2} + \\ Q_c v_{Tc}^2 \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_{cj} \frac{\omega k_\theta (\omega^2 + k_\parallel^2 a_{cj}^2)\kappa_{cj}/\Omega_{cc} - 2\omega k_\parallel^2}{(\omega^2 - k_\parallel^2 a_{cj}^2)^2} &= 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

en posant pour l'espèce s : $Q_s = Z_s^\star \frac{Z_s n_{s0}}{n_{e0}}$.

Afin de décrire les ITG, les gradients logarithmiques radiaux κ_{sj} associés à chaque bag et chaque population sont supposés être des combinaisons linéaires des grandeurs macroscopiques $\kappa_{T,ns}$:

$$\alpha_{sj}\kappa_{sj} = \frac{\beta_{sj}}{2}\kappa_{Ts} + \gamma_{sj}\kappa_{ns} \tag{4.24}$$

Le seuil proposé (4.23) est donc bien fonction des quatre paramètres $\kappa_{(T,n)\,(i,c)}$ (dans le cas de deux espèces i et c). Ce seul fait constitue une difficulté considérable dans la représentation d'un diagramme de stabilité du plasma. Nous avons donc choisi de faire l'hypothèse que les profils en température des deux espèces sont similaires. Cette hypothèse de profils similaires en température est couramment utilisée.

Les profils en densité des différentes espèces sont liés par la définition de la charge efficace Z_{eff}. Deux hypothèses peuvent être faites :

- ⋆ la première est de considérer une densité plate d'impuretés, tout en gardant toute liberté sur le profil de densité des ions majoritaires. Ceci force le profil en charge efficace $\kappa_{Z_{eff}}$ à suivre celui des ions dits majoritaires :

$$\kappa_{Z_{eff}} = \frac{Z_i n_{i0}.Z_c n_{c0}}{(Z_i n_{i0} + Z_c n_{c0}).(Z_i^2 n_{i0} + Z_c^2 n_{c0})}(Z_i - Z_c)\kappa_{ni} \tag{4.25}$$

- ⋆ une seconde hypothèse est d'aligner les deux profils en densité, et dès lors de contraindre à une charge efficace homogène radialement.

Nous considèrerons tout-à-tour ces deux cas de figure, pour les trois espèces d'impuretés que nous avons choisi de décrire pour explorer une large gamme en charge et masse :

- ⋆ Le Tritium tout d'abord a été naturellement choisi du fait de la nécessité de sa présence dans un plasma de fusion. Ses propriétés ($Z_T = 1$ et $M_T \simeq 3m_p$ sont de plus très intéressantes de part leur proximité avec le Deutérium choisi pour référence. Bien entendu, nous devons nous situer à des temps courts devant le temps caractéristique de la réaction de fusion, pour que l'équation de Vlasov, et donc la description water bag restent valables.
- ⋆ Du fait de sa légèreté et de son actuelle abondance dans les différentes machines, le Carbone ($M_C \simeq 12m_p, Z_c = 6$) nous a paru un bon candidat pour l'exploration des valeurs intermédiaires en masse et charge.
- ⋆ Enfin, le Tungstène ($M_W \simeq 184m_p, Z_W \simeq 40$) est couramment utilisé et nous fournit des paramètres extrêmes. Nous nous basons en effet pour ce dernier élément sur son isotope le plus stable, comptant 184 nucléons, pour 74 protons. Dans les conditions de température associées au tokamak, le Tungstène n'est par ailleurs que partiellement ionisé, et nous lui prenons pour charge 40, qui est validée expérimentalement [**?**].

Bien que la notion d'espèce "majoritaire" soit superflue vis-à-vis de notre modèle, nous définirons les densités d'impuretés par rapport à la population de Deutérium de référence.

Du point de vue de notre modélisation water bag, et de sa résolution numérique, nous poserons deux populations distinctes, définies par leurs masse, charge, température et densité (en unités la densité n_{i0} des ions majoritaires). Les paramètres caractéristiques water bag seront donc donnés de façon indépendante pour chacune des espèces, au moyen de la procédure d'équivalence au sens des moments, avec pour référence des fonctions de distribution choisies maxwelliennes.

Pour assurer l'accord entre les différentes résonnances (liées aux points particuliers $\omega = a_{sj}$), nous choisirons un paramètre commun aux deux espèces Δa. Nous serons ainsi assurés de la coïncidence entre les bags des différentes espèces (figure 4.1). Le nombre de bags sera quant à lui déterminé par la dernière vitesse parallèle prise en compte, égale à cinq vitesses thermiques *de l'espèce considérée.*

4.5.1 Profil plat de la densité d'impuretés

L'hypothèse d'un profil de densité plat des impuretés présentes dans le plasma nous permet de mesurer la seule action du taux d'impuretés sur la stabilité du plasma. Sous cette hypothèse, le profil en charge efficace est

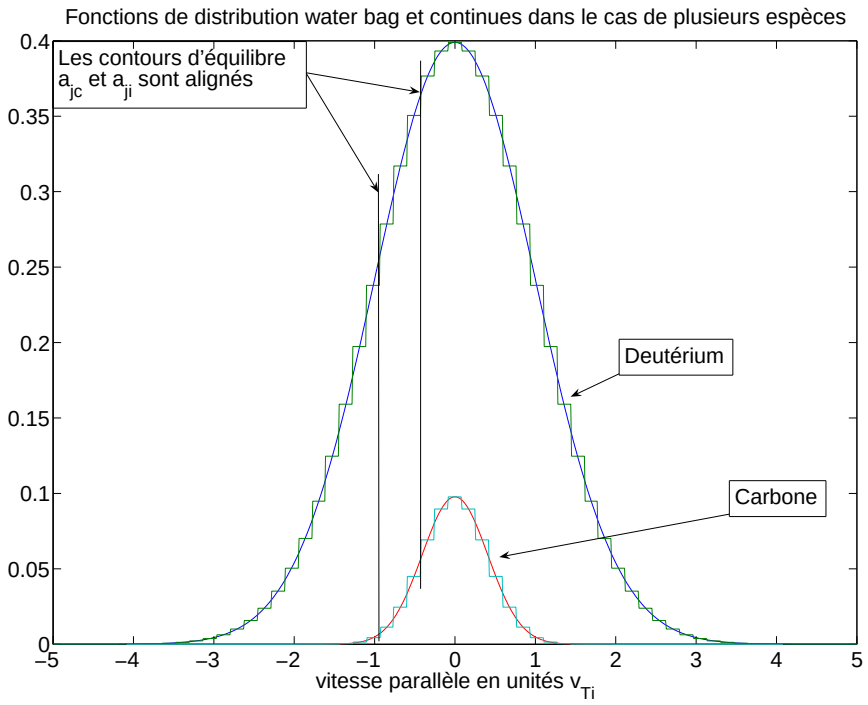


FIGURE 4.1 – Allure des fonctions de distribution selon la vitesse parallèle en unités v_{Ti}, dans le cas d'un mélange Deutérium Carbone ($n_{c0} = 10\% n_{i0}$).

directement proportionnel à celui des ions majoritaires κ_{ni}. Nous effectuons l'analyse linéaire en un point, en fixant les vecteurs d'onde $k_\theta = r_{Li}^{-1}$ et $k_\parallel = 1$. En ce point, les densités caractérisant l'équilibre fixent la valeur de la charge efficace.

Les températures des différentes espèces présentes sont sensiblement les mêmes au centre d'un tokamak, nous choisissons donc de raccorder les différents profils :

$$\kappa_{Ti} = \kappa_{Tc} = \kappa_T \tag{4.26}$$

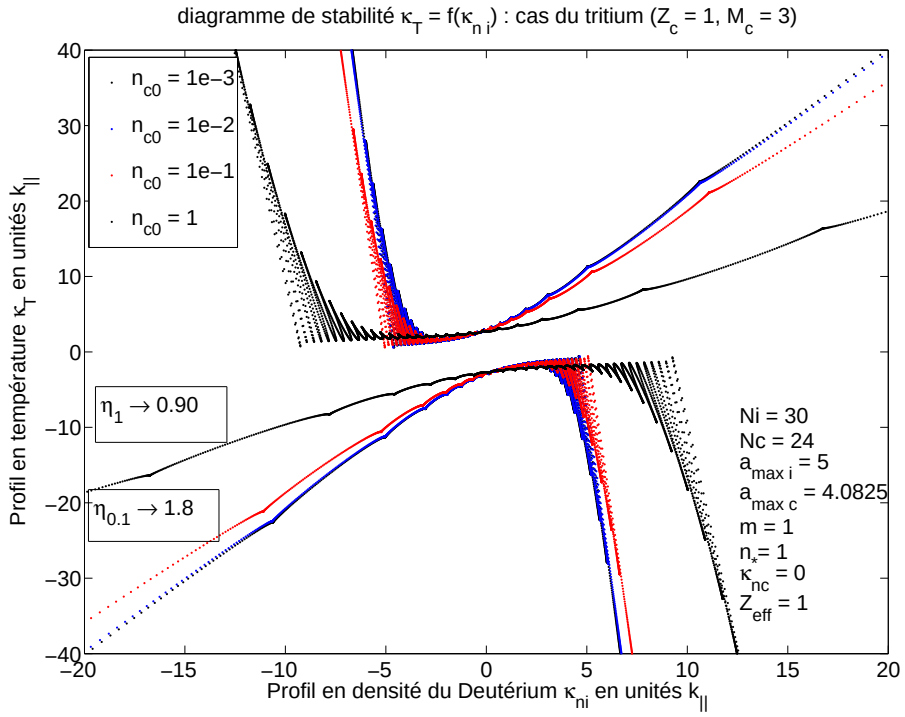


FIGURE 4.2 – Effet de la densité d'impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et tritium (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$).

Dans le cas du Tritium, nous ne pouvons pas réellement parler d'une population d'impuretés mais plutôt d'un mélange. En effet les densités respectives des deux populations doivent être comparables pour permettre la réaction de fusion espérée. Nous avons donc étudié des densités relatives élevées, allant jusqu'à des proportions égales des deux composants.

Nous avons reporté en figure (4.2) les seuils de stabilité linéaires d'un mélange de Deutérium et de Tritium dans le plan des gradients de densité des ions Deutérium et de température des deux espèces pour différents taux relatifs de Tritium. Pour afficher clairement les modifications subies, nous travaillons avec un nombre de bags élevé pour le Deutérium $N_i = 30$, ce qui fixe celui du Tritium à l'être également $N_c = 24$ (les deux grandeurs sont liées par le rapport des vitesses thermiques des deux espèces, proche de l'unité).

Suivant les zones de la figure (4.2) considérées, nous constatons deux types de réponse. En effet les zones à faible valeur du gradient de température du seuil liées aux particules très rapides de la queue des fonctions de distribution s'avèrent être stabilisées à mesure que la densité d'impuretés croît. Par contre la zone instable liée aux coeurs des fonctions de distribution s'étend très notablement et la limite dégagée précédemment d'un pente $\eta \to 2$ n'est plus vérifiée.

D'un point de vue quantitatif, ces modifications apparaissent pour une densité de Tritium de l'ordre du dixième de celle de Deutérium.

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une faible présence de Carbone au sein d'un plasma de Deutérium. En conservant $N_i = 30$ pour la description du Deutérium, nous obtenons pour le Carbone $N_c = 12$, nombre que nous jugeons satisfaisant pour une bonne prise en compte de cette dernière population. Les densités relatives d'impuretés sont quant à elles choisies en fonction des valeurs de la charge efficace qu'elles impliquent. En effet les données expérimentales font état de valeurs proches de l'unité (dans le cas d'une population majoritaire de charge 1). Nous nous sommes donc efforcés de ne pas dépasser outre mesure cet ordre de grandeur. Les densités relatives associées s'étalent donc du milliardième au dixième de celle des ions majoritaires.

La figure (4.3) représente le seuil de stabilité linéaire d'un plasma de Carbone et Deutérium dans le plan des gradients de densité et de température, pour différentes valeurs du taux de Carbone. Nous constatons deux effets distincts suivant les valeurs des gradients de densité et de température. Dans la zone de faible gradient κ_T du diagramme, la stabilité du plasma est accrue à mesure que la densité d'impuretés croit. Dans la zone dite fluide, c'est-à-dire pour des vitesses faibles devant la vitesse thermique, l'augmentation du taux de Carbone devient déstabilisante, et la limite de stabilité voit sa pente diminuer. Ces deux effets apparaissent pour des densités de Carbone supérieures au centième de celle de Deutérium.

Cette section visant à étudier les effets de dilution indépendamment des instabilités propres aux impuretés, nous avons cherché, pour le cas référence du Carbone, en quoi l'hypothèse de profils similaires en température pouvait affecter les seuls effets liés à la nouvelle population. Nous avons donc com-

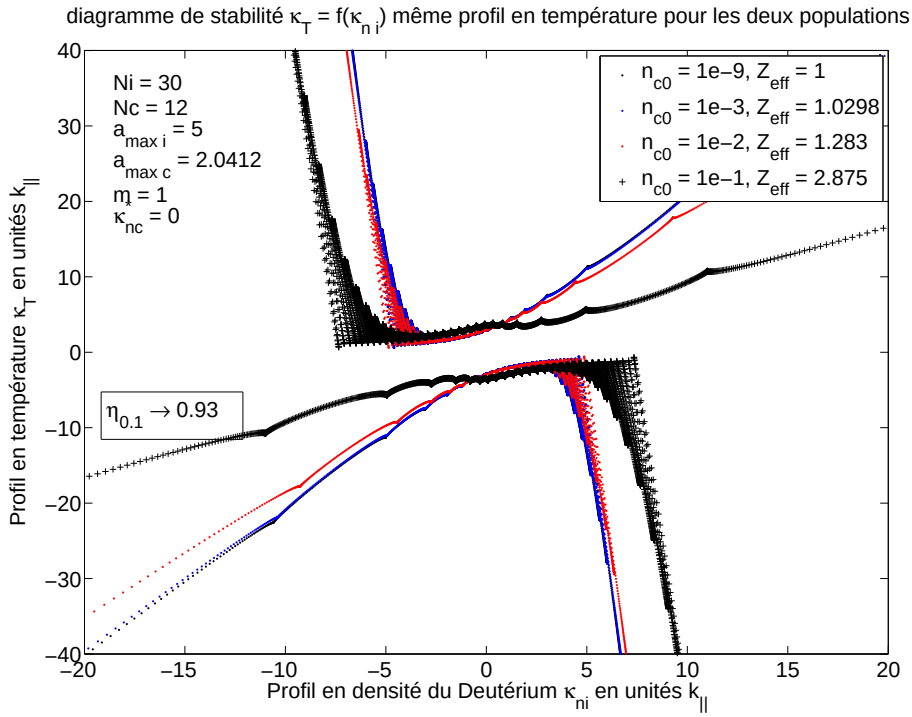


FIGURE 4.3 – Effet de la densité d'impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et carbone (plan des gradients de densité et température en unités $k_{\|}$).

paré en figure (4.4) les seuils de stabilité obtenus dans le cas d'un profil de température plat pour le Carbone avec ceux déjà présentés en figure (4.3). Pour obtenir une bonne lisibilité, nous avons choisi le cas le plus instable, et avons reporté le seuil référence sans Carbone, celui avec des profils plats d'impuretés, ainsi que le seuil de stabilité linéaire obtenu pour une charge efficace $Z_{eff} = 2.875$. Nous observons que le seul effet de dilution suffit à déstabiliser le plasma de Deutérium majoritaire : nous mesurons donc dans cette section des effets hybrides entre dilution et couplage ITG à deux populations. Cependant, nous constatons d'une part que la déstabilisation du plasma est beaucoup moins marquée dans le cas d'une dilution à $\kappa_{Tc} = 0$, et d'autre part cette hypothèse semble très peu réaliste, les profils en température étant bien souvent très proches [55, 60, 61].

Du fait de sa masse très élevée, la vitesse thermique de la population de Tungstène est beaucoup plus faible que celle associée au Deutérium : nous avons donc choisi d'utiliser un très grand nombre de bags ($N_i = 500$,

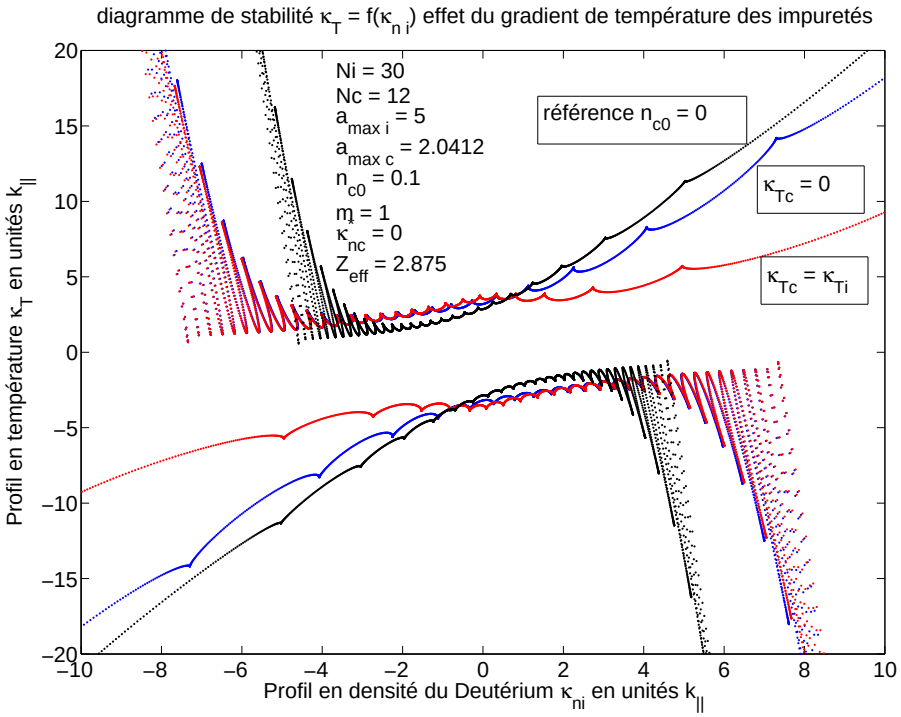


FIGURE 4.4 – Effet du piquage en température des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire, cas du Carbone (plan des gradients de densité et température en unités $k_{\|}$).

$N_c = 52$), pour obtenir des comportements étudiables.

Nous avons tracé en figure (4.5) le seuil de stabilité linéaire d'un plasma composé majoritairement de Deutérium, et de traces de Tungstène, dans le plan des gradients de densité du Deutérium et de température des deux espèces. Nous observons l'apparition d'un second lobe, dans la zone du diagramme liée aux vitesses faibles devant la vitesse thermique des ions majoritaires : nous pouvons donc imputer l'existence de cette seconde structure à la seule population de Tungstène. En effet, du fait d'un rapport de masse très élevé, la population de Tungstène présente une vitesse thermique nettement plus faible que celle des ions Deutérium majoritaires, et la fonction de distribution du Tungstène en vitesse parallèle est donc très peu étendue. Cette seconde structure a un effet fortement déstabilisant, puisqu'elle permet au plasma de présenter des valeurs d'η asymptotiques très différentes de la valeur référence 2, pour de faibles fractions d'impuretés présentes (de l'ordre du millième).

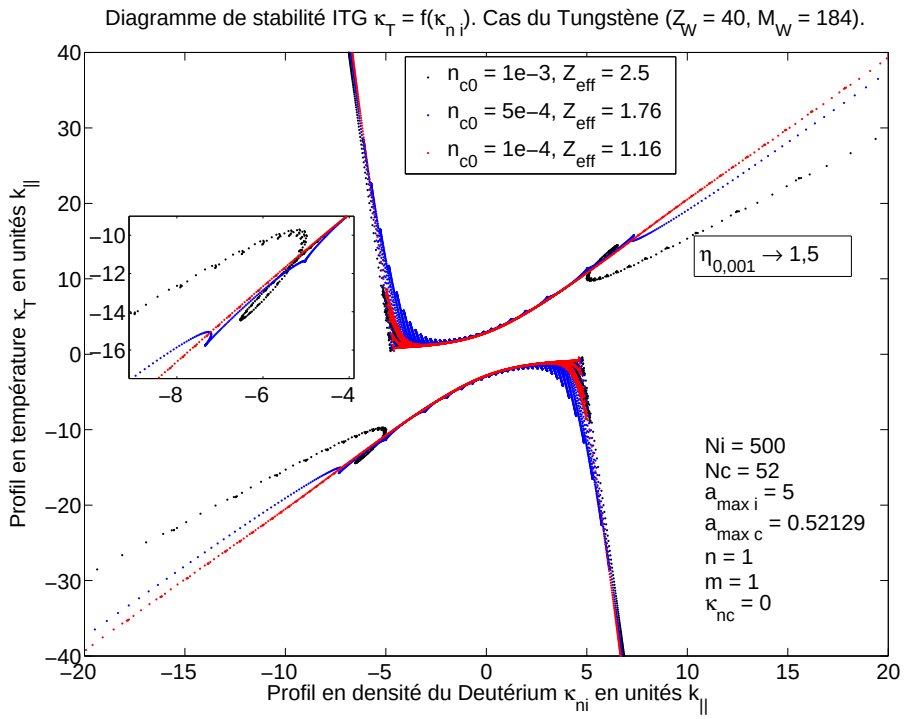


FIGURE 4.5 – Effet de la densité d'impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et de tungstène (plan des gradients de densité et température en unités $k_{\|}$).

Cette observation d'une seconde structure bien dissociable peut étayer l'idée de décrire les impuretés de Tungstène par un seul et unique bag, en particulier pour les simulations non-linéaires ultérieures.

Enfin, par rapport aux autres espèces, l'effet stabilisant observé pour les particules rapides n'est pas présent dans le cas du Tungstène : cet élément présente donc une forte aptitude à déstabiliser le plasma, et ce dès de très faibles taux (associés néanmoins à des valeurs de Z_{eff} relativement élevées).

Quelle que soit l'espèce considérée, nous observons une stabilité faiblement accrue du plasma dans la zone liée aux particules rapides de la fonction de distribution quand la fraction d'impuretés augmente. Par contre, les particules situées dans le corps de la fonction de distribution deviennent plus instables et la limite d'une pente $\eta \to 2$ n'est plus satisfaite.

Enfin, masse et charge des impuretés présentes jouent un grand rôle dans la sensibilité de ces deux effets au taux d'impuretés. Les modifications subies par le seuil de stabilité de l'espèce majoritaire sont ainsi remarquables

à d'autant plus faible densité relative que l'élément introduit est lourd et chargé.

4.5.2 Profil plat en charge efficace Z_{eff}

Si le piquage en densité d'un plasma à une seule espèce d'ion s'avère stabilisant pour le plasma, nous venons de voir dans l'approximation d'un profil de densité d'impuretés plat que le couplage entre deux populations accroît l'instabilité dans la zone de faibles vitesses associée à la pente $\eta = 2$. Nous cherchons donc ici à comparer dans la limite linéaire ces deux effets à priori contraires.

Le lien entre les profils radiaux des différentes espèces s'écrit de manière générale :

$$\kappa_{Z_{eff}} = \frac{Z_i n_{i0}.Z_c n_{c0}}{(Z_i n_{i0} + Z_c n_{c0}).(Z_i^2 n_{i0} + Z_c^2 n_{c0})}(Z_i - Z_c)(\kappa_{ni} - \kappa_{nc}) \qquad (4.27)$$

Pour tenir compte d'un profil en densité d'impuretés non homogène, nous faisons l'hypothèse d'une charge efficace homogène radialement. Ainsi, les deux profils d'impuretés et d'ions majoritaires sont liés par l'égalité :

$$\kappa_{ni} = \kappa_{nc} \qquad (4.28)$$

Notons cependant que dans le cas d'une population de Tritium (qui peut atteindre des proportions comparables à celles de Deutérium), nous avons le cas particulier $Z_i = Z_c$. Le profil en charge efficace $\kappa_{Z_{eff}}$ (4.27) est donc nécessairement plat, quel que soit celui des impuretés. Et nous imposons donc une contrainte arbitraire en fixant $\kappa_{nc} = \kappa_{ni}$.

Nous avons reporté en figure (4.6) les seuils de stabilité linéaire d'un plasma de Deutérium et de Tritium dans le plan des gradients de densité et de température (des deux espèces) pour différentes valeurs du rapport de la densité de Tritium à celle de Deutérium. Ces seuils ne sont pas affectés par la variation de densité de Tritium. En effet, notre hypothèse de profils en densité et températures similaires, combinée aux caractéristiques particulières de notre mélange de deux isotopes (de même charge et de masses proches), revient à considérer simplement une population globale unique de masse légèrement modifiée : la stabilité linéaire n'est donc pas affectée.

L'étude de populations plus dissemblables en termes de charge et masse s'avère donc *a priori* plus pertinente. Nous allons par la suite voir ce qu'il en est dans les cas du Carbone et du Tungstène.

Nous avons tracé en figure (4.7) le seuil de stabilité linéaire d'un plasma composé de Deutérium et de Carbone, dans le plan des gradients de densité

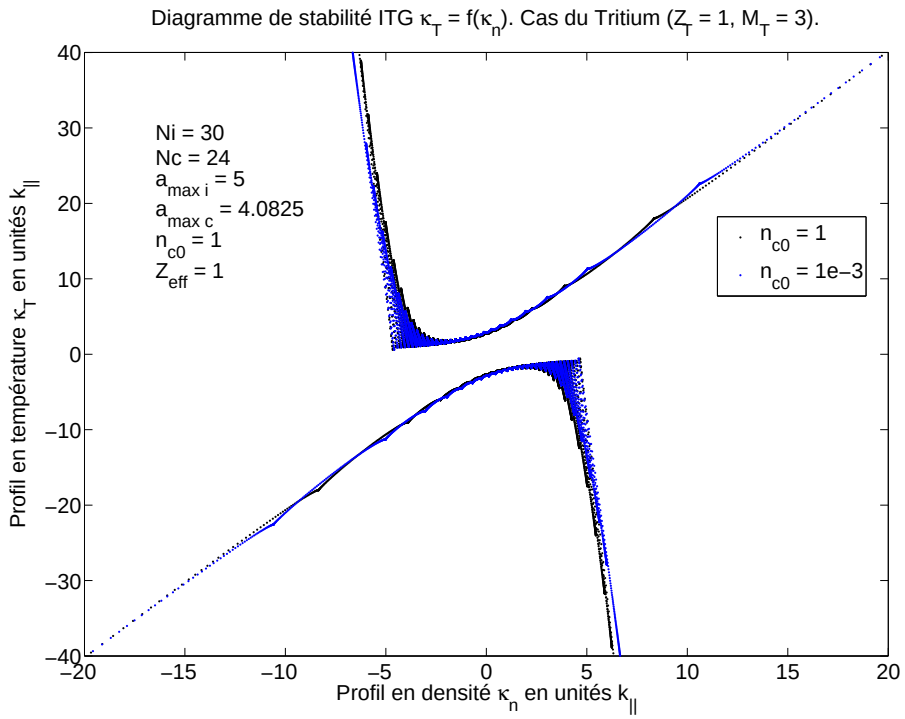


FIGURE 4.6 – Effet du piquage en densité des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et tritium (plan des gradients de densité et température en unités $k_{\|}$).

et de température (κ_n et κ_T) pour différentes valeurs du rapport de la densité de Carbone à celle de Deutérium.

En figure (4.7), et contrairement au résultat précédent pour le Carbone (figure (4.3)), nous observons que la population fluide n'est pas destabilisée, et que la limite d'une pente $\eta \to 2$) est respectée. En outre, le seul effet notable est l'apparition d'une zone de stabilité accrue autour des valeurs faibles en gradient de densité, et pour des densités et charges efficaces relativement élevées ($n_{c0} = 1.10^{-1}$ et $Z_{eff} = 2.875$).

A profils semblables en densité et température, l'adjonction de Carbone ne s'avère donc pas déstabilisante pour le plasma.

Enfin, le seuil de stabilité linéaire d'un plasma composé de Deutérium et Tungstène est reporté en figure (4.8), pour lequel le nombre de bags a été choisi grand afin d'éviter tout parasitage par la structure en lobes. Ce seuil est représenté dans le plan des gradients de température et de densité, et nous n'observons encore une fois aucun effet déstabilisant pour le plasma.

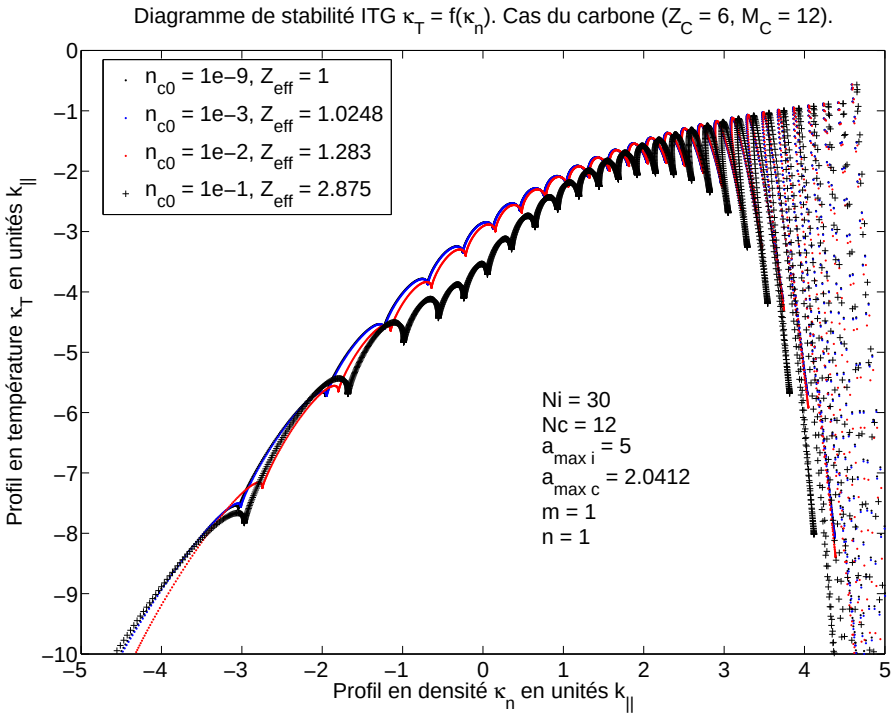


FIGURE 4.7 – Effet du piquage en densité des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et carbone (plan des gradients de densité et température en unités $k_{\|}$).

La structure en doubles lobes déjà remarquée dans le cas d'un profil plat de Tungstène est retrouvée. Cette fois, le second lobe associé à la population de Tungstène apparaît dans la zone stable et ne modifie donc pas la stabilité. Mieux, et comme dans le cas du Carbone, la branche fluide associée à la pente $\eta = 2$ semble subir une légère inflexion autour des couples ($\kappa_n = \pm 10 k_{\|}$, $\kappa_T = \pm 20 k_{\|}$).

Dans le cas de profils similaires en densité pour les deux espèces, et quelle que soit la population considérée, nous constatons donc que la stabilité linéaire du plasma n'est pas affectée globalement. Localement, cette dernière peut même être accrue.

Ce constat est à rapprocher de nombreux travaux antérieurs [50, 55, 60], même si notre modèle water bag se situe dans une géométrie de beaucoup simplifiée, et avec bien moins d'effets physiques. De façon générale, nous retrouvons l'effet stabilisant d'un piquage en densité, tant au niveau d'une population isolée vue au chapitre II, qu'au niveau du couplage linéaire entre

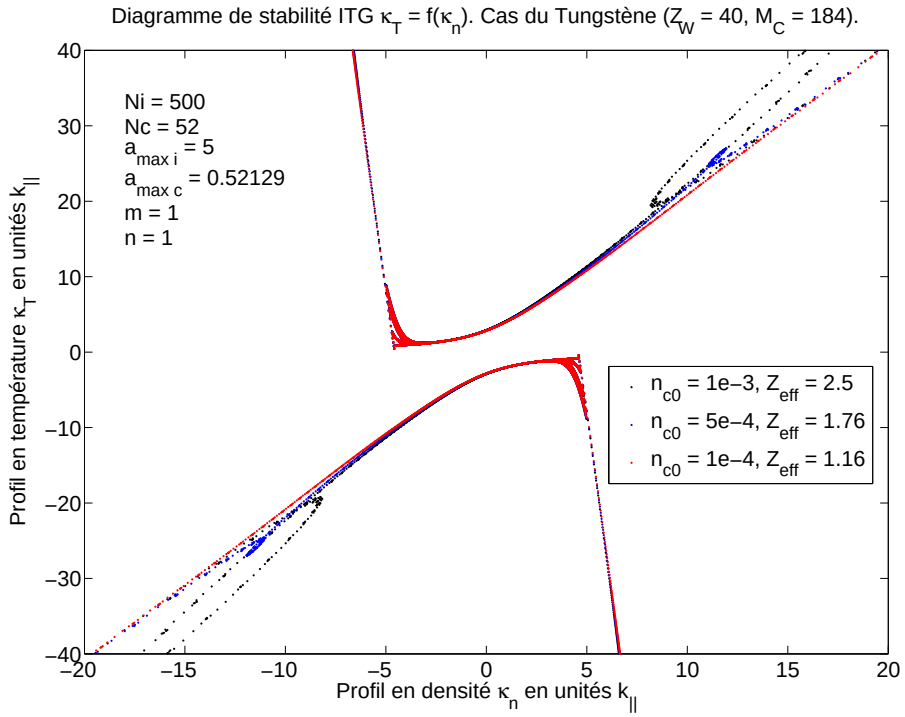


FIGURE 4.8 – Effet du piquage en densité des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et de tunsgstène (plan des gradients de densité et température en unités $k_{\|}$).

deux populations.

4.6 Conclusion

La modélisation water bag de plusieurs espèces est évidente et permet de décrire la stabilité linéaire d'une colonne cylindrique de plasma composé de plusieurs espèces d'ions. Les méthodes générales introduites aux chapitres I et II ont pu être transposées sans difficulté à ce nouveau contexte, les deux populations étant décrites par deux distributions water bag distinctes. L'accord entre les deux populations se fait en choisissant un même intervalle entre les bags associés aux deux espèces, et la coupure est déterminée par les valeurs des vitesses thermiques (donc des masses) en présence.

Bien que non considéré dans cette première approche, le cas d'un rayon de Larmor fini peut être abordé. Les restrictions sont les mêmes qu'au chapitre III, à savoir le choix ou non d'une résolution locale et d'un profil en potentiel électrostatique donné. Dans la perspective du développement d'une méthode d'analyse linéaire globale radialement entrevue en conclusion du chapitre III, nous pourrons bien entendu l'adapter au cas d'un plasma à plusieurs espèces d'ions.

La stablilité linéaire d'un mélange de plusieurs espèces vis-à-vis des instabilités de gradient de température ioniques a été discutée. Elle dépend très fortement du profil en densité des impuretés, et le choix d'un profil de densité d'impuretés plat s'avère modifier très fortement la stablilité du plasma. Par contre, un profil raccordé à celui des ions majoritaires ne modifie pas la stabilité du plasma. Nous retrouvons en ce sens l'effet stabilisant d'un piquage de densité d'impuretés.

Dans le cas particulier du Tungstène, et quelle que soit l'hypothèse faite sur son profil en densité, deux structures apparaissent clairement, qui laissent supposer qu'une description au moyen d'un seul bag puisse être satisfaisante (le cas d'un bag est équivalent à un modèle fluide avec fermeture adiabatique).

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Galilée : Une des causes principales de la misère dans les sciences
est qu'elles se croient riches, le plus souvent présomptueusement.
Leur but n'est pas d'ouvrir une porte à la sagesse infinie
mais de poser une limite à l'erreur infinie.
La Vie de Galilée, Bertolt Brecht

Apports de la modélisation "giro water bag"

L'objectif premier de cette thèse, à savoir la transposition du modèle water bag aux équations cinétiques caractéristiques des plasmas de tokamak est atteint. Certes, la transposition des équations de la géométrie cylindrique vers celle d'une machine toroidale est encore à elle seule un défi conséquent. Mais les bases d'une modélisation water bag adaptée à un plasma girocinétique (au sens où seule la vitesse parallèle aux lignes de champ magnétiques est une variable indépendante aux échelles de temps considérées) sont aujourd'hui établies.

Le modèle water bag, basé sur l'invariance *exacte* de Liouville dans l'espace des phases, peut se combiner à l'invariance *adiabatique* des modèles girocinétiques pour construire un ensemble de plus en plus pertinent, suivant des enrichissements physiques ou géométriques :

- ⋆ L'invariance adiabatique du moment magnétique permet de traiter la dépendance associée comme un simple label. Nous pouvons considérer le cas d'une seule valeur nulle qui nous permet de négliger les effets de rayon de Larmor fini.
- ⋆ Considérer une, voire plusieurs valeurs non nulles du moment magnétique est très aisé au moyen de notre modèle.
- ⋆ Dérouler le tore en un cylindre permet également de négliger les effets propres à la courbure et au gradient de champ magnétique.

- ⋆ Enfin, le modèle le plus élaboré inclura les effets propres à une distribution en μ et une géométrie torique.
- ⋆ Dans tous les cas, le grand avantage d'une modélisation water bag est de remplacer une dérivée partielle en vitesse parallèle par une somme discrète sur le nombre de bags choisi.

La description par un multi-water-bag est équivalente à un modèle de type hydrodynamique fermé sur son moment d'ordre $2(N-1)$, avec N le nombre de bags choisi. La dynamique de chaque bag est portée par les équations de ses deux contours $v_j^{\pm}$, et l'équation de quasi-neutralité couple les bags.

La modélisation water bag, avec un nombre N de bags variable, permet de décrire les phénomènes cinétiques d'interaction ondes-particules comme une assemblée d'oscillateurs. Elle procure ainsi une interprétation de l'amortissement Landau analogue à celle des modes de Van Kampen dans le cas discret.

Il est intéressant de combiner une description water bag à des modèles girocinétiques pour obtenir des approches plus analytiques, quelle que soit la forme de la fonction de distribution considérée. A titre d'exemple, les seuils de stabilité ITG d'une fonction de distribution Lorentzienne ont pu être retrouvés.

L'analyse linéaire de stabilité est satisfaisante pour des nombres de bags petits $N \leq 10$. Les résultats sont sensibles au nombre de bags près du seuil de stabilité, du fait de sa structure en lobes caractéristique. La sensibilité au nombre de bags, mesurée par les taux de croissance linéaires d'instabilité, diminue à mesure que l'on s'éloigne du seuil, ainsi qu'en augmentant le nombre de bags.

Tout ceci reste vrai :

- ⋆ quel que soit le niveau de description de l'invariance adiabatique.
- ⋆ dans le cas de plusieurs espèces de particules cinétiques.
- ⋆ si les collisions ne concernent pas les espèces décrites par une distribution water bag (par exemple collisions électrons neutres uniquement [53]).

Enfin, la modélisation water bag permet de retrouver des résultats connus sans difficulté, comme les seuils de stabilité linéaire ITG, ainsi que la sélection en modes poloïdal et longitudinal opérée par la prise en compte des effets de rayon de Larmor fini, ou encore comme l'effet stabilisant d'un piquage en densité d'impuretés sur un plasma composé de plusieurs espèces d'ions.

Développements

La généralisation du modèle water bag au cas d'un plasma présentant plusieurs valeurs du moment magnétique μ est aisée. Le modèle couple autant d'équations de Vlasov que de valeurs du moment magnétique. En effet, de par son invariance adiabatique, le moment magnétique μ est considéré comme un label dans la théorie girocinétique : les fonctions de distribution n'en dépendent donc pas explicitement et considérer plusieurs valeurs de μ revient à coupler plusieurs équations de Vlasov. La dérivation d'un modèle à plusieurs μ est donc complètement analogue au cas d'un plasma de plusieurs espèces.

La prise en compte des effets de rayon de Larmor fini nécessite en toute rigueur de déterminer les profils radiaux des fluctuations. Nous avons contourné cette difficulté en supposant connu le profil en potentiel électrostatique. Cette méthode a permi d'obtenir des résultats qualitatifs intéressants (sélection en modes et stabilisation du plasma dans le plan des gradients de densité et température), dans le cadre de l'analyse linéaire. Il serait intéressant d'effectuer une résolution en modes globaux, c'est-à-dire sur toute une couronne radiale. Les équations linéarisées forment alors un système d'équations aux dérivées ordinaires selon r, aux valeurs propres $\omega_{m,n}$ supposant un effort numérique sensiblement accru. Les comparaisons avec les simulations non-linéaires seront dès lors plus aisées.

La comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques est souvent ardue en physique des plasmas. Le travail de stage de MASTER 2 de Rudy Klein avait pour vocation de comparer les prédictions du modèle water bag aux résultats expérimentaux obtenus sur la machine Mirabelle. Le nouveau modèle tient compte d'un courant électronique parallèle et de collisions électrons-neutres. Notons également que dans le cadre de la thèse de Rudy Klein la transition entre les régimes d'ondes de dérive et les ITG a pu être caractérisée.

L'un des apports du modèle water bag est de pouvoir décrire n'importe quelle fonction de distribution continue. Nous avons ainsi pu étudier aisément le seuil de stabilité ITG d'une fonction Lorentzienne. De telles études dans le cadre de l'analyse linéaire sont certainement à systématiser.

La présence d'un champ électrique parallèle d'équilibre implique également l'existence d'un courant parallèle, et donc une distribution water bag décalée en vitesse. La description de ce cas de figure peut être un travail intéressant.

Enfin, une des questions nouvelles posées par le réacteur ITER est celle de la stabilité d'un plasma vis-à-vis des particules α, c'est-à-dire des noyaux d'Hélium émises lors des réactions de fusion. Une étude à deux bags pourrait s'avérer pertinente, décrivant chaque population au moyen d'un seul bag.

Pour conclure, ce travail de thèse a servi de fondation aux simulations non-linéaires water bag effectuées à partir du modèle cylindrique [48], tout comme

au développement d'un nouveau modèle water bag en géométrie torique, tenant compte des gradient et courbure du champ magnétique.

Bibliographie

[1] P. Bertrand and M.R. Feix, *Phys. Lett.*, **28A**, 68 (1968).

[2] P. Bertrand, *Thèse*, Université de Nancy, France (1972).

[3] M. Gros, P. Bertrand and M.R. Feix, *Plasma Phys.*, **20**, 1075 (1978).

[4] F. Romanelli and S. Briguglio, *Phys. Fluids B*, **2**, 754 (1990).

[5] A.M. Dimits, G. Bateman, M.A. Beer *et al.*, *Phys. Plasmas*, **7**, 969 (2000).

[6] G.W. Hammett, F.W. Perkins, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 3019 (1990).

[7] W. Dorland and G.W. Hammett, *Phys. Fluids B*, **5**, 812 (1993).

[8] Y. Sarazin, V. Grandgirard, E. Fleurence, X. Garbet, Ph. Ghendrih, P. Bertrand and G. Depret, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **47**, 1817-1839 (2005).

[9] N. Mattor, *Phys. Plasmas*, **6**, 1065 (1999).

[10] T. Passot, P.L. Sulem, *Phys. Plasmas*, **10**, 3906 (2003).

[11] M. Navet and P. Bertrand, *Phys. Lett.*, **34A**, 117 (1971).

[12] P. Bertrand, J.P. Doremus, G. Baumann and M.R. Feix, *Phys. Fluids*, **15**, 1275 (1972).

[13] U. Finzi, *Plasma Phys.* **14**, 327 (1972).

[14] G. Manfredi, M. Shoucri, M. R. Feix, P. Bertrand, E. Fijalkow, and A. Ghizzo, *J. Comp. Phys.*, **112**, 298-313 (1995).

[15] D. C. DePackh, *J. Electron. Control*, **13**, 417 (1962).

[16] F. Hohl, *Phys. Fluids*, **12**, No. 1 , 230-234 (1969).

[17] M.R. Feix, F. Hohl and L.D. Staton, *Nonlinear effects in Plasmas*, Kalmann and Feix Editors, Gordon and Breach, pages 3-21 (1969).

[18] H.L. Berk and K.V. Roberts, *The water bag model*, in *Methods in Computational Physics*, vol. 9, Academic Press (1970).

[19] P. Bertrand, M. Gros and G. Baumann, *Phys. Fluids*, **19**, 1183 (1976).

[20] M. R. Feix, P. Bertrand, A. Ghizzo, *Eulerian codes for the Vlasov equation*, Series on advances in Mathematics for Applied Science : Kinetic Theory and Computing, vol. 22, 42-82 (1994).

[21] P. Morel, E. Gravier, N. Besse and P. Bertrand *The water bag model and gyrokinetic applications*, Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, **13**, No. 1, 11-17 (2008).

[22] N.G. Van Kampen, *Physica*, **21**, 959, (1955).

[23] K.M. Case, *Annal of Physics, N. Y.*, **7**, 349, (1959).

[24] L. D. Landau, Sov. Phys., **10**, 25 (1946).

[25] F.F. Chen *Introduction to plasma physics and controlled fusion* Vol.1, pp 271-272, Plenum Press, New York (1984).

[26] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, A. Ghizzo, P. Bertrand, X. Garbet, P. Ghendrih, V. Grandgirard, Y. Sarazin, *Phys. Plasmas*, **14**, 112109 (2007).

[27] B. Cockburn, C.-W. Shu, *Journal of Scientific Computing*, **16**, 173-261 (2001).

[28] S. Gottlieb, C.-W. Shu and E. Tadmor, *Strong stability-preserving high-order time discretization methods* SIAM review, **43**, No1, 89-112 (2001).

[29] N.A. Douglas, F. Brezzi, B. Cockburn, D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems* SIAM, J. Numer. Anal., **39**, No5, 1749-1779 (2002).

[30] R. G. Littlejohn, *J. Math. Phys.*, **20**, 12 (1979).

[31] T.S. Hahm, *Phys. Fluids*, **31**, 2670-2673 (1988).

[32] T. S. Hahm, W. W. Lee, A. Brizard, *Phys. Fluids*, **31**, 7 (1988).

[33] B. Coppi, M.N. Rosenbluth, and R.Z. Sagdeev, *Phys. Fluids*, **10**, 582 (1967).

[34] W. Horton, D. Choi, W.M. Tang, *Phys. Fluids*, **24**, 1077 (1981).

[35] R.E. Waltz, *Phys. Fluids*, **31**, 1962 (1988).

[36] T. M. Antonsen, B. Lane, *Phys. Fluids*, **30**, No. 6 (1980).

[37] P. J. Catto, W.M. Tang, and D. E. Baldwin, *Plasm. Phys.*, **23**, 639-650 (1981).

[38] E. A. Frieman, L. Chen, *Phys. Fluids*, **25** (1982).

[39] D. H. E. Dubin, J. A. Frommes, C. Obermann, and W. W. Lee, *Phys. Fluids*, **26**, 12 (1983).

[40] S.E. Parker, W.W. Lee and R.A. Santoro, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 2042 (1993).

[41] R.D. Sydora, V.K. Decyk and J.M. Dawson, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **38**, A281 (1996).

[42] Z. Lin, T.S. Hahm, W.W. Lee, W.M. Tang, R.B. White, *Phys. Plasmas*, **7**, 1857-1862 (2000).

[43] G. Depret, X. Garbet, P. Bertrand, A. Ghizzo, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **42**, 949 (2000).

[44] W. Dorland, F. Jenko, M. Kotschenreuther, B.N. Rogers, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 5579-5582 (2000).

[45] J. Candy, R.E. Waltz, *J. Comput. Phys.*, **186**, 545-581 (2003).

[46] T. Dannert, F. Jenko, *Phys. Plasmas*, **12**, 072309 (2005).

[47] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet *et al*, *J. Compt. Phys.*, **217**, 395-423 (2006).

[48] N. Besse, P. Bertrand, P. Morel, E. Gravier, *Phys. Rev. E*, accepté (Avril 2008).

[49] Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, and Ph. Ghendrih, *Phys. Plasmas*, **13**, 092307 (2006).

[50] C. Bourdelle, *Analyse de stabilité de plasmas de tokamak*, These, Université Joseph Fourier-Grenoble 1, (2000).

[51] E. Gravier, *Contribution à l'étude d'instabilités dans les plasmas magnétisés*, Thèse HDR - Nancy Université - Université Henri Poincaré (2007).

[52] F. R. Hansen, G. Knorr, J. P. Lynov, H. L. Pecseli, J.J. Rasmussen, *Plasma Phys. Control. Fusion* **31**, 173-183 (1989).

[53] R. Klein, *Rapport de MASTER 2 - Université Henri Poincaré* (2006).

[54] N. Dubuit, *Transport turbulent d'impuretés dans un plasma magnétisé*, PhD thesis, Université Nancy 1 - Henri Poincaré, (2006).

[55] C. Angioni, L. Carraro, T. Dannert, N. Dubuit, *et al*, *Phys. Plasmas*, **14**, 055905 (2007).

[56] T. Fülöp, J. Weiland, *Phys. Plasmas*, **13**, 112504 (2006).

[57] N. Dubuit, X. Garbet, T. Parisot, R. Guirlet, C. Bourdelle, *Phys. Plasmas*, **14**, 042301 (2007).

[58] G. M. Staebler, J. E. Kinsey, R. E. Waltz, *Phys. Plasmas*, **14**, 055909 (2007).

[59] C. Bourdelle, X. Garbet, F. Imbeaux, A. Casati, N. Dubuit, R. Guirlet, T. Parisot, *Phys. Plasmas*, **14**, 112501 (2007).

[60] R. Paccagnella, F. Romanelli, S. Briguglio, *Nucl. Fusion*, **30**, 545-548 (1990).

[61] C. Bourdelle, X. Garbet, G. T. Hoang, J. Ongena, R. V. Budny, *Nucl. Fusion*, **42**, 892-902 (2002).

[62] C. Eleon, C. Bourdelle, *Rapport de stage de MASTER 2 - Université Paris XI - 2003/2004.*

[63] D. P. Schissel, R. E. Stockdale, H. St. John, W. M. Tang, *Phys. Fluids*, **31**, 3738-3743 (1988).

[64] G. Fussmann, A. R. Field, A. Kallenbach, K. Krieger, K.-H. Steuer, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **33**, 1677-1695 (1991).

Table des figures

1 Courbe d'Aston représentant l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de nucléons. 8

1.1 Allure de la fonction de distribution multi-water-bag selon la vitesse v (à gauche), et dans l'espace des phases (à droite). Cas de $N = 3$ bags. 16

1.2 Calcul des valeurs de la fonction de distribution multi-water-bag dans le cas d'un espacement régulier des vitesses a_j. Entre $\pm a_1$, la fonction de distribution prend sa valeur au centre $F_1 = f_0(0)$. 22

1.3 Ecarts relatifs des moments multi-water-bag aux moments Maxwelliens, en fonction du nombre de bags. 22

1.4 Allure de la fonction diélectrique d'un plasma modélisé par un multi-water-bag. $Z_i^\star = 1$, $N = 3$, $a_3 = 2,5 v_{Ti}$. 28

1.5 Amortissement Landau linéaire : évolution temporelle du potentiel électrostatique, pour différents nombres de bags (échelle logarithmique). 34

1.6 Amortissement Landau. Allure de l'énergie électrique en fonction du temps (échelle logarithmique). 36

2.1 Comparaison entre seuils de stabilité pour une fonction water bag et une fonction continue maxwellienne. Cas d'un faible nombre de bags $N = 3$. 60

2.2 Comparaison entre seuils de stabilité pour une fonction water bag et une fonction continue maxwellienne. $N = 10$. 61

2.3 Particularités du seuil de stabilité linéaire dues au choix d'une description multi-water-bag. Tracé à $\Delta a = cste$ dans les cas de 8 (haut) et 16 bags (bas). 62

2.4 Compétition entre amortissement Landau et instabilité ITG. $N = 100$, $a_N = 5 v_{Ti}$, $Z_i^\star = 1$, $\Omega_n^\star = -.2$, $\Omega_T^\star = -3.2$. 63

2.5 Influence du paramètre $Z_i^\star$ sur les valeurs du taux de croissance d'instabilité en fonction de $\Omega_T^\star$, pour deux valeurs du gradient de densité ($\Omega_n^\star = 0 k_\parallel v_{Ti}$ et $-4 k_\parallel v_{Ti}$). 64
2.6 Seuil de stabilité linéaire et taux de croissance d'instabilité dans le cas d'un équilibre Lorentzien, comparé au cas d'un équilibre maxwellien (trait continu). $N = 100$ bags, $a_{100} = 10 v_{Ti}$, $Z_i^\star = 1$. 65
2.7 Comparaison entre les descriptions fluide, cinétique (fonction de distribution maxwellienne) et water bag : seuils de stabilité ITG dans le plan des gradients de densité ($\Omega_n^\star$) et de température ($\Omega_T^\star$). 67

3.1 Rayon de Larmor non nul et description de dérive cinétique. . 71
3.2 Coordonnées du centre-guide et des particules : opération de giromoyenne. 73
3.3 Seuil de stabilité et taux de croissance linéaires du plasma dans le plan des gradients de température et de densité. Cas d'un plasma giromoyenné, sans dérive de polarisation. 85
3.4 Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n. Giromoyenne sans polarisation. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\, v_{Ti}$, $r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\, {r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\, {r_{Li}}^{-1}$. 86
3.5 Seuil de stabilité et taux de croissance linéaires du plasma dans le plan des gradients de température et de densité : effet isolé de dérive de polarisation. 88
3.6 Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n, cas de la seule dérive de polarisation. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\, v_{Ti}$, $r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\, {r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\, {r_{Li}}^{-1}$. 90
3.7 Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\, v_{Ti}$, $r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\, {r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\, {r_{Li}}^{-1}$. . . . 93
3.8 Taux de croissance linéaire d'instabilité dans le plan des modes poloïdal m et longitudinal n. $N = 10$ bags, $a_{10} = 5\, v_{Ti}$, $r_0 = 100\, r_{Li}$, $\Delta r = 10\, r_{Li}$, $\kappa_n = -0,01\, {r_{Li}}^{-1}$, $\kappa_T = -0,15\, {r_{Li}}^{-1}$. . . . 94

4.1 Allure des fonctions de distribution selon la vitesse parallèle en unités v_{Ti}, dans le cas d'un mélange Deutérium Carbone ($n_{c0} = 10\% n_{i0}$). 104

4.2 Effet de la densité d'impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et tritium (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). 105
4.3 Effet de la densité d'impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et carbone (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). 107
4.4 Effet du piquage en température des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire, cas du Carbone (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). 108
4.5 Effet de la densité d'impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et de tungstène (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). 109
4.6 Effet du piquage en densité des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et tritium (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). . . 111
4.7 Effet du piquage en densité des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et carbone (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). . . 112
4.8 Effet du piquage en densité des impuretés sur le seuil de stabilité linéaire dans le cas d'un plasma de deutérium et de tunsgstène (plan des gradients de densité et température en unités $k_\parallel$). 113

Chapitre 6

Annexes

Annexe A : calcul des moments multi water bag

La densité s'écrit simplement comme la somme des densités partielles :

$$n = \sum_{j=1}^{N} n_j = \sum_{j=1}^{N} A_j (v_j^+ - v_j^-)$$

Détaillons le calcul de la vitesse moyenne. Nous avons par définition :

$$nu = \int_{-\infty}^{+\infty} v dv \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\Upsilon(v - v_j^-) - \Upsilon(v - v_j^+) \right]$$

Sommation par bag et intégration en vitesse peuvent être commutées :

$$nu = \sum_{j=1}^{N} A_j \int_{-\infty}^{+\infty} v \left[\Upsilon(v - v_j^-) - \Upsilon(v - v_j^+) \right] dv$$

En utilisant la propriété fondamentale des fonctions de Heaviside $d_x \Upsilon(x - x_0) = \delta(x - x_0)$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$nu = \sum_{j=1}^{N} A_j \left\{ \left[\frac{v^2}{2} \left(\Upsilon(v - v_j^-) - \Upsilon(v - v_j^+) \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \left[\delta(v - v_j^-) - \delta(v - v_j^+) \right] dv \right\}$$

Puisque $\left(\Upsilon(v - v_j^-) - \Upsilon(v - v_j^+) \right)$ est nulle en $v = \pm\infty$, et en utilisant la propriété de la fonction de Dirac $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$:

$$nu = \sum_{j=1}^{N} A_j \left\{ 0 - \frac{1}{2} \left(v_j^{-2} - v_j^{+2} \right) \right\}$$

d'où finalement :

$$u = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$$

avec $\alpha_j = n_j/n$

Cas général du n$^{\text{ième}}$ moment.

Définissons le moment $\mathcal{M}_l$ d'ordre l :

$$\mathcal{M}_l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} A_j \int_{-\infty}^{+\infty} v^l \left[\Upsilon(v - v_j^-) - \Upsilon(v - v_j^+) \right] dv$$

En généralisant l'intégration par parties précédente, nous obtenons :

$$\mathcal{M}_l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sum_{i=0}^{l} v_j^{+i} v_j^{-n-i}$$

Où l'on a utilisé l'identité remarquable :

$$v_j^{+l+1} - v_j^{-l+1} = (v_j^+ - v_j^-) \sum_{i=0}^{l} v_j^{+i} v_j^{-n-i}$$

Annexe B : linéarisation directe de l'équation de Vlasov

L'équation de dérive cinétique (incluant les effets de rayon de Larmor fini) portant sur la fonction de distribution ionique s'écrit :

$$\partial_t f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + < \mathbf{v}_E >_\perp . \nabla_\perp f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + v_\parallel \partial_z f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, t) + \frac{q_i}{M_i} < E_\parallel >_\perp \partial_{v_\parallel} f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, t) = 0$$

Elle est couplée à l'équation de quasi-neutralité :

$$Z_i \int < f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, t) >_\perp dv_\parallel + Z_i \nabla_\perp . \left[\frac{n_i}{B\Omega_{ci}} \nabla_\perp \delta\phi \right] = n_{e0} \left[1 + \frac{e\phi}{T_e} \right],$$

avec l'hypothèse d'une population d'électrons adiabatique.

Nous détaillons dans cette annexe le calcul consistant à d'abord linéariser le système précédent, pour ensuite seulement introduire la formulation water bag. La fonction de distribution des ions se décompose comme suit :

$$f_i(\mathbf{r}, v_\parallel, t) = f_{i0}(r, v_\parallel) + f_1(r, v_\parallel) e^{i(k_\parallel z + m\theta - \omega t)}$$

Le potentiel électrostatique est supposé nul à l'équilibre :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = 0 + \phi(r) e^{i(k_\parallel z + m\theta - \omega t)}$$

Nous insérons ces deux expressions dans le système non-linéaire, et ne retenons que les terme d'ordre un en perturbation :

$$\left[k_\parallel v_\parallel - \omega\right] \delta f_i = \left[\frac{k_\theta}{B}\partial_r f_{i0} + \frac{q_i}{M_i} k_\parallel \partial_{v_\parallel} f_{i0}\right] < \delta\phi >_\perp$$

$$Z_i \int \langle \delta f_i \rangle_\perp \, dv_\parallel + Z_i \frac{d_r n_{i0}}{B\Omega_{ci}} d_r \delta\phi + \frac{Z_i n_{i0}}{B\Omega_{ci}} \triangle_\perp \delta\phi = \frac{e n_{e0}}{T_e} \delta\phi$$

Si nous choisissons une fonction de distribution d'équilibre de type water bag, de contours symétriques :

$$f_{i0}(r, v_\parallel) = \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\Upsilon(v_\parallel - a_j) - \Upsilon(v_\parallel + a_j)\right],$$

alors nous obtenons les expressions de dérivées partielles :

$$\partial_{v_\parallel} f_{i0} = \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\delta(v_\parallel + a_j) - \delta(v_\parallel - a_j)\right]$$

$$\partial_r f_{i0} = \sum_{j=1}^{N} A_j \left[d_r a_j \delta(v_\parallel - a_j) + d_r a_j \delta(v_\parallel + a_j)\right]$$

Nous connaissons donc la perturbation δf_i en fonction de $\delta\phi$:

$$\delta f_i =< \delta\phi >_\perp \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\left(\frac{k_\theta}{B} d_r a_j + \frac{q_i}{M_i} k_\parallel\right) \frac{\delta(v_\parallel + a_j)}{k_\parallel v_\parallel - \omega} + \left(\frac{k_\theta}{B} d_r a_j - \frac{q_i}{M_i} k_\parallel\right) \frac{\delta(v_\parallel - a_j)}{k_\parallel v_\parallel - \omega}\right]$$

Nous négligerons l'action de la giromoyenne sur les grandeurs d'équilibre pour obtenir l'expression water bag de l'intégrale :

$$\int < \delta f_i >_\perp dv_\parallel =<< \delta\phi >>_\perp \sum_{j=1}^{N} A_j \left[\left(\frac{k_\theta}{B} d_r a_j + \frac{q_i}{M_i} k_\parallel \right) \int \frac{\delta(v_\parallel + a_j)}{k_\parallel v_\parallel - \omega} dv_\parallel + \right.$$

$$\left. \left(\frac{k_\theta}{B} d_r a_j - \frac{q_i}{M_i} k_\parallel \right) \int \frac{\delta(v_\parallel - a_j)}{k_\parallel v_\parallel - \omega} dv_\parallel \right]$$

En utilisant la propriété de la distribution de Dirac, nous obtenons finalement :

$$\int < \delta f_i >_\perp dv_\parallel = \frac{q_i}{T_i} << \delta\phi >>_\perp \sum_{j=1}^{N} \frac{2 a_j A_j}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_j^2} \left[k_\parallel^2 v_{Ti}^2 - \omega \frac{k_\theta T_i}{q_i B} \kappa_j \right]$$

Il nous reste à injecter cette expression dans l'équation de quasi-neutralité :

$$Z_i \frac{q_i}{T_i} << \delta\phi >>_\perp \sum_{j=1}^{N} \frac{2 a_j A_j}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_j^2} \left[k_\parallel^2 v_{Ti}^2 - \omega \frac{k_\theta T_i}{q_i B} \kappa_j \right] + Z_i \frac{d_r n_{i0}}{B \Omega_{ci}} d_r \delta\phi + \frac{Z_i n_{i0}}{B \Omega_{ci}} \triangle_\perp \delta\phi = \frac{e n_{e0}}{T_e} \delta\phi$$

Nous obtenons donc une équation différentielle ordinaire du second ordre portant sur les fluctuations de potentiel électrostatique $\delta\phi$:

$$\left\{ 1 - Z_i^\star \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_{ci}^2} \left[\kappa_{ni} d_r . + \triangle_\perp . \right] - Z_i^\star v_{Ti}^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2 - \omega k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}}{\omega^2 - n^2 a_j^2} \mathcal{J}_0^2 . \right\} . \delta\phi = 0$$

Si nous choisissons la forme particulière de dépendance radiale $\delta\phi = \delta\phi_0 e^{g(r)}$, pour les fluctuations, nous obtenons la fonction diélectrique obtenue au chapitre trois :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - Z_i^\star \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_{ci}^2} \left[\kappa_{ni} d_r g + A(r) \right] - Z_i^\star v_{Ti}^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2 - \omega k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}}{\omega^2 - n^2 a_j^2} \mathcal{J}_0^2$$

Enfin, nous retrouvons (aux normalisations près) les formes plus simples des chapitres I et II :

$$\varepsilon(\omega) =_{r_{Li}=0} 1 - Z_i^\star v_{Ti}^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2 - \omega k_\theta \kappa_j / \Omega_{ci}}{\omega^2 - n^2 a_j^2}$$

$$\varepsilon(\omega) =_{\kappa_j=0} 1 - Z_i^\star v_{Ti}^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{n^2}{\omega^2 - n^2 a_j^2}$$

Il est donc tout à fait équivalent d'introduire le modèle water bag avant ou après la procédure de linéarisation des équations non-linéaires dans tous les cas de figure.

Annexe C : effets de rayon de Larmor fini : calcul du potentiel électrostatique

Nous partons du système d'équations (3.28, 3.29) water bag linéarisé, dans lequel nous posons la dépendance radiale particulière du potentiel électrostatique $\delta\phi(r) = \delta\phi_0 e^{g(r)}$. Nous obtenons alors le système algébrique :

$$\omega \mp k_\parallel a_j) w_j^\pm = \mathcal{J}_0 \left[k_\parallel^2 \mp \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_j \right] \delta\phi$$

$$Z_i^\star \mathcal{J}_0 \sum_{j=1}^{N} A_j (w_j^+ - w_j^-) = \left[1 - A(r)\right] \delta\phi$$

Nous éliminons ensuite le potentiel électrostatique, pour obtenir :

$$(1 - A(r)) \left(\omega \mp k_\parallel a_j\right) w_j^\pm - Z_i^\star \mathcal{J}_0 \left[k_\parallel^2 \mp \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_j \right] \sum_{k=1}^{N} A_k (w_k^+ - w_k^-) = 0$$

En changeant la convention de sommation $A_{-j} = -A_j$, $a_{-j} = -a_j$ $w_{-j} = w_j^-$ et en faisant apparaître $W_j = A_j w_j$, alors ces dernières grandeurs apparaissent comme les fonctions propres de l'opérateur multi water bag ainsi défini :

$$(1 - A(r)) \left(\omega - k_\parallel a_j\right) W_j - Z_i^\star \mathcal{J}_0 A_j \left[k_\parallel^2 - \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_j \right] \sum_{k=-N}^{N}{}^{\star} W_k = 0,$$

le symbole $\sum^\star$ signifiant que le sommation n'admet pas la valeur $k = 0$.

Comme tout système linéaire, il est défini à une constante arbitraire près, nous choisissons la normalisation :

En choisissant la condition de normation des fonctions propres $\sum_{k=-N}^{N}{}^{\star} W_k = 1$, nous obtenons l'expression des fonctions propres du multi water bag :

$$W_j = \frac{Z_i^\star \mathcal{J}_0}{1-A(r)} A_j \frac{k_\parallel^2 - k_\theta d_r a_j/\Omega_{ci}}{\omega - k_\parallel a_j}$$

De la même façon, l'équation adjointe :

$$(1-A(r))(\omega - k_\parallel a_j)\bar{W}_j - Z_i^\star \mathcal{J}_0 \sum_{k=-N}^{N}{}^\star A_k \left[k_\parallel^2 - \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_k\right] \bar{W}_k = 0,$$

combinée à la condition de normation, $\sum_{k=-N}^{N}{}^\star A_k \left[k_\parallel^2 - \frac{k_\theta}{\Omega_{ci}} d_r a_k\right] \bar{W}_k = 1$, nous permet de définir les fonctions propres adjointes :

$$\bar{W}_j = \frac{Z_i^\star \mathcal{J}_0}{1-A(r)} \frac{1}{\omega - a_j}$$

Pour tester l'orthogonalité des fonctions propres et leurs adjointes, nous nous munissons du produit scalaire :

$$\left\langle \bar{W}^m \middle| W^n \right\rangle = \sum_{j=-N}^{N}{}^\star \bar{W}_j^m W_j^n$$

En faisant apparaître l'équation de dispersion, nous satisfaisons l'orthogonalité des fonctions propres et de leurs adjointes :

$$\left\langle \bar{W}^m \middle| W^n \right\rangle = \begin{array}{c} \left(\frac{Z_i^\star \mathcal{J}_0}{1-A(r)}\right)^2 \left[1 - \epsilon_{k_\theta}(\omega_n) - 1 + \epsilon_{k_\theta}(\omega_m)\right]/(\omega_m - \omega_n) = 0 \ \ \forall m \neq m \\ b_n = \left(\frac{Z_i^\star \mathcal{J}_0}{1-A(r)}\right)^2 \sum_{j=-N}^{N}{}^\star A_j \left[k_\parallel^2 - k_\theta d_r a_j/\Omega_{ci}\right]/(\omega_n - k_\parallel a_j)^2 \end{array}$$

La solution générale en termes de fonctions propres de l'opérateur multi-water-bag peut s'écrire :

$$W_j(r,\theta,z,t) = \sum_{n,k_\theta} C_{n,k_\theta}(r,k_\theta,\omega_n) W_j^{n,k_\theta}(r,k_\theta,t) e^{i(m\theta + z - \omega_n t)}$$

Le potentiel électrostatique s'écrivant grâce à l'équation de quasi-neutralité (3.29) :

$$\delta\phi(r,\theta,z,t) = \frac{Z_i^\star \mathcal{J}_0}{1-A(r)} \sum_{j=-N}^{N}{}^\star W_j(r,\theta,z,t) e^{g(r)}$$

Cherchant la dépendance temporelle du potentiel électrostatique, nous posons des perturbations connues à l'instant initial :

$$W_j^m(r, k_\parallel, 0) = \sum_n C_{n,m} W_j^{n,m}$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions propres :

$$C_{n,m} = \frac{1}{b_{n,m}} \sum_{j=-M}^{M}{}^{\star} \bar{W}_j^{n,m} W_j^m(r, 0)$$

Nous éludons ici le problème des dépendances selon z et θ, en ne considérant qu'un seul couple $(k_\theta, k_\parallel)$, le potentiel s'écrit finalement :

$$\delta\phi_{k_\theta,k_\parallel}(r,t) = \frac{Z_i^\star \mathcal{J}_0}{1 - A(r)} \sum_n C_{n,m}(r, k_\theta, \omega_n) \exp^{-i\omega_{n,m}t},$$

où nous avons tenu compte de la condition de normation choisie $\sum^\star W_j = 1$.

En explicitant le coefficient C_n, nous obtenons :

$$\delta\phi_{k_\theta,k_\parallel}(r,t) = \sum_n \frac{\sum_{j=-N}^{N}{}^{\star} A_j w_j^0/(\omega_n - k_\parallel a_j)}{\sum_{j=-N}^{N}{}^{\star} A_j \left[k_\parallel^2 - k_\theta d_r a_j/\Omega_{ci}\right]/(\omega_n - k_\parallel^2 a_j)^2} \exp^{-i\omega_{n,m}t}$$

Le retour à la convention naturelle de sommation nous donne le résultat :

$$\delta\phi_{k_\theta}(r,t) = \sum_n \frac{\sum_{j=1}^{N} \left[\omega_n(\epsilon_j^{0+} - \epsilon_j^{0-}) + n a_j(\epsilon_j^{0+} + \epsilon_j^{0-})\right] \Big/ (\omega_n^2 - n^2 a_j^2)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left[2n^2\omega_n - (\omega_n^2 + n^2 a_j^2) k_\theta \kappa_j/\Omega_{ci}\right] \Big/ (\omega_n^2 - n^2 a_j^2)^2} e^{-i\omega_n t}$$

Nous remarquerons que ce résultat est formellement indépendant de la prise en compte ou non des effets de rayon de Larmor fini. Les fréquences propres ω_n seront néanmoins affectées par ces effets, et pourront donc influer sur le comportement du potentiel.

Annexe D : Seuil de stabilité dans le cas d'une fonction de distribution maxwellienne

Nous reprenons les équations linéarisées obtenues en annexe B, à partir du système d'équations de Vlasov et de quasi-neutralité, tenant compte des effets de rayon de Larmor fini :

$$\left[k_\parallel v_\parallel - \omega\right] \delta f_i = \left[\frac{k_\theta}{B}\partial_r f_{i0} + \frac{q_i}{M_i} k_\parallel \partial_{v_\parallel} f_{i0}\right] < \delta\phi >_\perp$$

$$Z_i \int \langle \delta f_i \rangle_\perp \, dv_\parallel + Z_i \frac{d_r n_{i0}}{B\Omega_{ci}} d_r \delta\phi + \frac{Z_i n_{i0}}{B\Omega_{ci}} \triangle_\perp \delta\phi = \frac{e n_{e0}}{T_e}\delta\phi$$

Si nous choisissons une fonction de distribution d'équilibre Maxwellienne, de la forme $f_{i0}(r, v_\parallel) = \frac{n_{i0}}{\sqrt{2\pi v_{Ti}^2}} e^{-v_\parallel^2/2v_{Ti}^2}$, alors nous obtenons pour ses dérivées partielles :

$$\partial_{v_\parallel} f_{i0} = \frac{-v_\parallel}{v_{Ti}^2} f_{i0}$$

$$\partial_r f_{i0} = \left[\kappa_{ni} - \frac{\kappa_{Ti}}{2} + \frac{\kappa_{Ti}}{2}\frac{v_\parallel^2}{v_{Ti}^2}\right] f_{i0},$$

où κ_{ni} et κ_{Ti} désignent respectivement $d_r n_{i0}/n_{i0}$ et $d_r T_i/T_i$.

Par ailleurs l'action de la giromoyenne dans la quasi-neutralité n'est à priori pas triviale, nous détaillons ainsi le calcul de $< \delta\phi >_\perp$:

$$< \delta f_i >_\perp = \left\langle \frac{k_\parallel v_\parallel - \Omega_i^\star}{\omega - k_\parallel v_\parallel} \frac{q_i f_{i0}}{T_i} \right\rangle_\perp < \delta\phi >_\perp + \frac{k_\parallel v_\parallel - \Omega_i^\star}{\omega - k_\parallel v_\parallel} \frac{q_i f_{i0}}{T_i} << \delta\phi >>_\perp$$

Nous remarquons cependant que les différentes grandeurs giromoyennées dans le premier terme du membre de droite sont toutes caractéristiques de l'équilibre. Nous pouvons donc utiliser le paramètre de petitesse girocinétique $L_{\nabla_\perp 0} >> r_{Li}$, pour négliger ce terme devant la double giromoyenne de la perturbation en potentiel électrostatique :

$$< \delta f_i >_\perp \simeq \frac{k_\parallel v_\parallel - \Omega_i^\star}{\omega - k_\parallel v_\parallel} \frac{q_i f_{i0}}{T_i} << \delta\phi >>_\perp$$

Nous pouvons alors obtenir l'équation différentielle ordinaire :

$$\delta\phi - Z_i^\star \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_{ci}^2}\left[\kappa_{ni} d_r\delta\phi + \triangle_\perp \delta\phi\right] - Z_i^\star \left\langle \frac{k_\parallel v_\parallel - \Omega_i^\star}{\omega - k_\parallel v_\parallel} \right\rangle_{v_\parallel} << \delta\phi >>_\perp = 0$$

Nous utilisons ensuite un potentiel test de la forme :

$$\delta\phi = \delta\phi_0 e^{g(r)}$$

Et nous obtenons l'équation de dispersion du plasma :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - Z_i^\star \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_{ci}^2}\left[d_r^2 g + d_r g\left(d_r g + \frac{1}{r} + \kappa_{ni}\right) - k_\theta^2\right] - Z_i^\star \left\langle \frac{k_\parallel v_\parallel - \Omega_i^\star}{\omega - k_\parallel v_\parallel}\right\rangle_{v_\parallel} \mathcal{J}_0^2$$

En utilisant la propriété $< . >_{v_\parallel} = .$, nous réécrivons l'équation de dispersion cinétique classique sous sa forme bien connue :

$$\varepsilon(\omega) = 1 + Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 - Z_i^\star \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_{ci}^2}\left[d_r^2 g + d_r g\left(d_r g + \frac{1}{r} + \kappa_{ni}\right) - k_\theta^2\right] - Z_i^\star \left\langle \frac{\omega - \Omega_i^\star}{\omega - k_\parallel v_\parallel}\right\rangle_{v_\parallel} \mathcal{J}_0^2$$

Nous utilisons les différentes définitions :

$$< . >_{v_\parallel} = \frac{1}{n_{i0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{i0}.dv_\parallel$$

$$\mathcal{A}(r) = Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 - Z_i^\star \frac{v_{Ti}^2}{\Omega_{ci}^2}\left[d_r^2 g + d_r g\left(d_r g + \frac{1}{r} + \kappa_{ni}\right) - k_\theta^2\right]$$

$$\kappa(r) = d_r^2 g(r) + d_r g\left(d_r g(r) + \frac{1}{r}\right)$$

$$\Omega_i^\star = \left[\kappa_{ni} - \frac{\kappa_{Ti}}{2} + \frac{v_\parallel^2}{v_{Ti}^2}\frac{\kappa_{Ti}}{2}\right]\frac{k_\theta}{\Omega_{ci}}$$

Nous nous intéressons ici à dégager une expression analytique du seuil de stabilité linéaire du plasma, nous opérons pour ce faire le changement de variable $\omega = \omega_r + i\gamma$, pour étudier la limite $\gamma \to 0$. Nous obtenons les deux relations :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \mathcal{A}(r) - Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 \mathcal{P}\mathcal{P}\left\langle \frac{\omega_r - \Omega_i^\star}{\omega_r - k_\parallel v_\parallel}\right\rangle_{v_\parallel}$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \pi Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 \left\langle (\omega_r - \Omega_i^\star)\,\delta(\omega_r - k_\parallel v_\parallel)\right\rangle_{v_\parallel}$$

Nous utilisons tout d'abord l'expression de la partie imaginaire de la fonction diélectrique qui, vérifiant $\varepsilon_i = 0$, nous donne :

$$\omega_r = \Omega_i^\star(\omega_r) = \Omega_{ni}^\star - \frac{\Omega_{Ti}^\star}{2} + \frac{\Omega_{Ti}^\star}{2}\frac{\omega_r^2}{k_\parallel^2 v_{Ti}^2}$$

En insérant cette expression dans l'équation $\varepsilon_r = 0$, nous obtenons :

$$\varepsilon(\omega_r) = 0 = 1 + \mathcal{A}(r) - Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 \mathcal{P}\mathcal{P} \left\langle \frac{\Omega_{Ti}^\star}{2k_\parallel^2 v_{Ti}^2} \frac{\omega_r^2 - k_\parallel^2 v_\parallel^2}{\omega_r - k_\parallel v_\parallel} \right\rangle_{v_\parallel}$$

Nous pouvons dès lors éliminer la partie principale de Cauchy, en utilisant la relation $\omega_r^2 - k_\parallel^2 v_\parallel^2 = (\omega_r - k_\parallel v_\parallel)(\omega_r + k_\parallel v_\parallel)$. De plus, les propriétés de la fonction de distribution d'équilibre maxwellienne nous donnent $< . >_{v_\parallel} = .$ et $< v_\parallel >_{v_\parallel} = 0$, ce qui nous permet d'écrire l'expression des parties réelles au seuil de stabilité :

$$1 + \mathcal{A}(r) = Z_i^\star \mathcal{J}_0^2 \frac{\Omega_{Ti}}{2k_\parallel^2 v_{Ti}^2} \omega_r$$

Enfin, en combinant les deux expressions, nous obtenons le seuil de stabilité linéaire :

$$\omega_r = \frac{2k_\parallel^2 v_{Ti}^2}{\Omega_{Ti}^\star} \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} = \Omega_{ni}^\star - \frac{\Omega_{Ti}^\star}{2} + \frac{\Omega_{Ti}^\star}{2k_\parallel^2 v_{Ti}^2} \frac{4k_\parallel^4 v_{Ti}^4}{\Omega_{Ti}^{\star 2}} \frac{[1 + \mathcal{A}(r)]^2}{Z_i^{\star 2} \mathcal{J}_0^4}$$

Nous exprimerons cette condition de seuil comme un polynôme de degré deux selon $\Omega_{Ti}^\star$:

$$\Omega_{Ti}^{\star 2} - 2\Omega_{ni}^\star \Omega_{Ti}^\star + 4k_\parallel^2 v_{Ti}^2 \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} \left[1 - \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} \right]$$

Nous utilisons également les gradients logarithmiques de densité et température, le seuil s'écrit selon ces deux paramètres :

$$\kappa_T^2 - 2\kappa_n \kappa_T + 4 \frac{k_\parallel^2 \Omega_{ci}^2}{k_\theta^2 v_{Ti}^2} \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} \left[1 - \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} \right]$$

Nous obtenons l'expression générale du seuil de stabilité linéaire :

$$\kappa_T^\pm = \kappa_n \pm \sqrt{\kappa_n^2 - 4 \frac{k_\parallel^2 \Omega_{ci}^2}{k_\theta^2 v_{Ti}^2} \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} \left[1 - \frac{1 + \mathcal{A}(r)}{Z_i^\star \mathcal{J}_0^2} \right]}$$