AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique
École doctorale IAEM Lorraine - DFD Automatique
École Nationale d'Ingénieurs de Monastir - Tunisie

Observation et Commande des Systèmes Linéaires dans les Domaines Temporel et Fréquentiel

THÈSE

présentée et soutenue publiquement à Longwy le 14 octobre 2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1– France

(spécialité Automatique)

et

Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir – Tunisie

(spécialité Génie Electrique)

par

Montassar EZZINE

Composition du jury

Président :	M. OULADSINE	Professeur, Université de Marseille
Rapporteurs :	F. FNAIECH	Professeur, ESST, Tunisie
	A. OUSTALOUP	Professeur, Université de Bordeaux
Examinateurs :	M. DAROUACH	Professeur, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I
	H. MESSAOUD	Professeur, ENIM, Tunisie
	A. CHAARI	Maître de Conférences, ESST, Tunisie
	H. SOULEY ALI	Maître de Conférences, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I

Centre de Recherche en Automatique de Nancy CRAN - CNRS UMR 7039

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués dans le cadre d'une cotutelle internationale entre l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM) - Tunisie et l'Université Henri Poincaré - Nancy I - France, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Hassani MESSAOUD Professeur à l'ENIM et de Monsieur Mohamed DAROUACH Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I. Le lieu de travail a été l'unité de Recherche en Automatique Traitement de Signal et Image (ATSI) à l'ENIM, dirigé par Monsieur le Professeur Hassani MESSAOUD et le Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, CNRS, UMR 7039) dirigé par Monsieur le Professeur Alain RICHARD, plus particulièrement au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Farhat FNAIECH, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (Tunisie) et Monsieur Alain OUSTALOUP, Professeur à l'Université de Bordeaux. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Que Monsieur Mustapha OULADSINE, Professeur à l'Université de Marseille, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepter de juger mon travail et d'être parmi le jury d'examen.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN et Monsieur Hassani MESSAOUD, Professeur et Responsable de l'unité de Recherche en Automatique traitement de Signal et Image (ATSI) à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (Tunisie), mes directeurs de thèse, pour leurs disponibilités, leurs encouragements et surtout leurs soutiens permanents.

Que Monsieur Abdelkader CHAARI Maître de conférences à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (Tunisie), soit remercié pour avoir accepter de juger mon travail et pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant d'examiner mon travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur Harouna SOULEY ALI, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et surtout pour ses conseils judicieux et nos discussions fructueuses. Ses encouragements et ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je lui en suis très reconnaissant.

Je tiens à remercier spécialement Madame Allison BORDIER, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN, pour son aide et son soutien de tous les instants.

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'unité de recherche ATSI à Monastir-Tunisie (Ilyés ELAISSI, Kais BOUZRARA, Khaled OUNI, Nabiha SAIDI,...) et de l'équipe de Longwy du CRAN (Michel ZASADINSKI, Latifa BOUTAT-BADDAS, Ali ZEMOUCHE, Ibrahima N'DOYE, Mohamed ZERROUGUI,...) que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse.

Je tiens à remercier toute ma famille et surtout mon père pour tous ces encouragements, ses sacrifices et surtout sa compréhension. Merci PAPA.

J'adresse enfin toute ma reconnaissance à mon épouse MEJOUDA pour son aide permanente, sa compréhension totale et pour les nombreux sacrifices qu'elle a consentis surtout dans les périodes difficiles de la thèse, en lui souhaitant un très bon courage et une bonne chance.

BISOUS A LOULOU LINA

Je dédie cette thèse
à mes parents Moncef et Hayet
à ma soeur Emira, mes frères Wassim et Mohamed Amine
à ma femme Mejda,
à ma fille Lina,
à toute ma famille,
et à tous mes amis.

Table des matières

Table des figures **ix**

Symboles et abréviations **xi**

Introduction Générale **1**

Chapitre 1
Observateurs Standards **5**

1.1 Introduction 5
1.2 Définitions structurelles 6
1.3 Observateurs standards d'ordre plein et d'ordre réduit 10
1.3.1 Observateur d'ordre plein 10
1.3.2 Observateur d'ordre réduit 11
1.4 Observateurs fonctionnels 12
1.4.1 Synthèse temporelle 13
1.4.2 Synthèse fréquentielle 13
1.4.3 Exemple Numérique 16
1.5 Synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers 18
1.5.1 Introduction 18
1.5.2 Synthèse d'observateur d'ordre plein 19
1.5.3 Synthèse d'observateur d'ordre réduit 22
1.6 Commande-basée sur observateur standard directement dans le domaine fréquentiel 25
1.6.1 Commande par retour d'état 25
1.6.2 Observateur standard d'ordre plein 29
1.6.3 Méthode de synthèse directe d'un correcteur basé sur un observateur d'ordre plein dans le domaine fréquentiel 31

1.6.4 Résumé des étapes d'une synthèse fréquentielle directe du correcteur basé observateur 36
1.6.5 Exemple d'application 37
1.7 Conclusion 39

Chapitre 2
Observateurs à entrées inconnues **41**

2.1 Introduction 41
2.2 Positionnement du problème 42
2.3 Conditions d'existence des observateurs à entrées inconnues 42
2.3.1 Condition de causalité 43
2.3.2 Condition de stabilité 43
2.4 Synthèse d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues 43
2.4.1 Méthode de synthèse temporelle 43
2.4.2 Méthode de synthèse fréquentielle 45
2.5 Synthèse d'un observateur à entrée inconnues pour les systèmes singuliers 46
2.5.1 Position du problème 46
2.5.2 Synthèse temporelle de l'observateur d'ordre réduit 47
2.5.3 Synthèse fréquentielle de l'observateur d'ordre réduit 51
2.5.4 Exemple numérique 52
2.6 Observateur à entrées inconnues pour les systèmes singuliers à retard constant 57
2.6.1 Position du problème 57
2.6.2 Synthèse temporelle de l'observateur fonctionnel à entrées inconnues 58
2.6.3 Synthèse fréquentielle de l'observateur fonctionnel à entrées inconnues 63
2.6.4 Exemple numérique 65
2.7 Conclusion 67

Chapitre 3
Filtrage H_∞ **69**

3.1 Introduction 69
3.2 Définitions et Rappel 70
3.2.1 Définitions H_∞ et L_2 70
3.2.2 Rappel : Lemme de Schur 71
3.3 Filtre H_∞ d'ordre plein en utilisant l'équation de Riccati et les MFDs . . . 72

3.3.1 Position du problème . . . 72
3.3.2 Synthèse du filtre H_∞ dans le domaine temporel en utilisant l'approche Riccati . . . 72
3.3.3 Synthèse du filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel en utilisant les MFDs . . . 73
3.3.4 Application numérique . . . 82
3.4 Synthèse de filtres fonctionnels H_∞ . . . 85
3.4.1 Position du problème . . . 85
3.4.2 Synthèse temporelle du filtre fonctionnel H_∞ . . . 86
3.4.3 Synthèse fréquentielle du filtre fonctionnel H_∞ . . . 92
3.4.4 Application numérique . . . 94
3.5 Synthèse d'un observateur fonctionnel robuste utilisant une méthode polynomiale . . . 98
3.6 Synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes singuliers . . . 100
3.6.1 Position du problème . . . 100
3.6.2 Synthèse du filtre H_∞ pour les systèmes singuliers dans le domaine temporel . . . 101
3.6.3 Synthèse du filtre H_∞ pour les systèmes singuliers dans le domaine fréquentiel . . . 107
3.6.4 Application numérique . . . 108
3.7 Conclusion . . . 112

Chapitre 4
Synthèse de commande via un filtre H_∞ pour les systèmes linéaires

4.1 Introduction . . . 113
4.2 Commande basée sur un filtre H_∞ pour les systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel . . . 115
4.2.1 Commande H_∞ par retour d'état . . . 115
4.2.2 Filtre H_∞ d'ordre plein . . . 120
4.2.3 Synthèse de correcteur basé sur un filtre H_∞ d'ordre plein directement dans le domaine fréquentiel . . . 123
4.2.4 Résumé des étapes d'une synthèse fréquentielle directe d'un correcteur basé sur un filtre H_∞ d'ordre plein . . . 127
4.3 Synthèse de commande via un filtre fonctionnel H_∞ pour les systèmes singuliers . . . 129

4.3.1 Position du problème 129
4.3.2 Synthèse d'un retour d'état H_∞ : cas continu et cas discret 132
4.3.3 Synthèse de correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ dans le domaine temporel : cas continu et cas discret 135
4.3.4 Synthèse de correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ dans le domaine fréquentiel : cas continu et cas discret 143
4.3.5 Exemple d'application 145
4.4 Conclusion 150

Conclusion Générale **151**

Bibliographie **155**

Table des figures

1.1 Observateur 5
1.2 Système de commande basée-observateur en boucle fermée 6
1.3 Structure de base de l'observateur d'ordre réduit 11
1.4 Commande par retour d'état dans le domaine fréquentiel 27
1.5 Observateur d'ordre plein dans le domaine fréquentiel 30
1.6 Système en boucle fermé avec un correcteur dans une structure en retour de sortie 34

2.1 Evolution de la première composante de $e(t)$ 54
2.2 Evolution de la troisième composante de $e(t)$ 54
2.3 Evolution de la quatrième composante de $e(t)$ 55
2.4 Représentation de la SVD du transfert entre $d(s)$ et $e(s)$ 56
2.5 Evolution de l'erreur d'estimation $e(t)$ 67
2.6 Représentation de la SVD du transfert entre $d(s)$ et $e(s)$ 67

3.1 La caractéristique $\bar{J} = f(\gamma)$ 83
3.2 Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$ 84
3.3 Evolution de la première composante de $e(t)$ 84
3.4 Evolution de la de deuxième composante de $e(t)$ 84
3.5 Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$ 85
3.6 Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$ 96
3.7 Evolution de l'erreur d'estimation temporelle $e(t)$ 96
3.8 Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$ 97
3.9 Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$ 110
3.10 Evolution de la première composante de $e(t)$ 110
3.11 Evolution de la deuxième composante de $e(t)$ 110
3.12 Evolution de la troisième composante de $e(t)$ 111
3.13 Evolution de la quatrième composante de $e(t)$ 111
3.14 Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$ 111

4.1 Commande H_∞ par retour d'état fictif dans le domaine fréquentiel 118
4.2 Filtre H_∞ fictif dans le domaine fréquentiel 122
4.3 Système de commande H_∞ en boucle fermé 126
4.4 Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$ 147
4.5 Le comportement de la première composante de l'erreur d'estimation $e(t)$. 147

4.6 Le comportement de la seconde composante de l'erreur d'estimation $e(t)$. 148
4.7 Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$ 149

Symboles et abréviations

Ensembles

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{C}^{n\times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\mathbb{R}[s]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(s)$	ensemble des matrices de transfert rationnelles strictement propres
RH_∞	ensemble de toutes les matrices rationnelles réelles stables et propres

Sous-espaces de fonctions

s	variable de la transformée de Laplace d'un signal continu ($s \in \mathbb{C}$)
z	variable de la transformée en **Z** d'un signal discret ($z \in \mathbb{C}$)
$L_2[0,\infty)$ (ou L_2)	espace des signaux continus carré-intégrables sur $[0,\infty)$ vers $\mathbb{R}^n$.

Normes

$\|.\|$	norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$\|x\|_2$	norme L_2 du signal $x \in L_2[0,\infty)$ ou $x \in l_2[0,\infty)$
$\|G\|_\infty$	norme H_∞ du système continu $G(s)$ ou du système discret $G(z)$
$\|G\|_2$	norme H_2 du système continu $G(s)$ ou du système discret $G(z)$.

Matrices, opérations et relations matricielles

$I,\ 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n,\ 0_{n\times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$)
$\exp(A)$	exponentiel de $A \in \ \mathbb{R}^{n\times n}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \ \mathbb{R}^{n\times n}$
$rang(A)$	rang de $A \in \ \mathbb{R}^{n\times m}$
$Re(A)$	partie réelle de A
$Im(A)$	partie imaginaire de A
$A^T,\ A^{-T}$	transposée de A (resp. de l'inverse de A) $\in \ \ \mathbb{R}^{n\times m}$
A^{-1}	inverse de $A \in \ \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$
A^+	pseudo-inverse de $A \in \ \mathbb{R}^{n\times m}$ vérifiant $AA^+A = A$
$A^\perp$	une matrice telle que $A^\perp A^{\perp T} > 0$ et $A^\perp A = 0$
$G(s)=\left[\begin{array}{cccc} A, & B, & C, & D \end{array}\right]$	est une matrice de transfert vérifiant $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Abréviations

LMI	*Linear Matrix Inequality* - Inégalité Matricielle Linéaire
MFD	*Matrix Fraction Description* - Description matricielle fractionnaire
LTI	*Linear Time Invariant* - Linéaire à Temps Invariant
SISO	*Single Input Single Output* - Mono-Entrée Mono-Sortie
MIMO	*Multi Input Multi Output* - Multi-Entrées Multi-Sorties
SVD	*Singular Value Decomposition* - Décomposition en valeurs singulières

Introduction Générale

Ces dernières années, des efforts particuliers de recherches se sont intéressés à l'étude et à la résolution des problèmes d'estimation ou d'observation du vecteur d'état (ou d'une partie de ce vecteur) des systèmes multivariables linéaires invariants dans le temps (LTI), déterministes ou stochastiques. Ces recherches sont motivées par le fait que de nombreuses méthodes de commande des processus sont élaborées à partir de la connaissance de l'état du système (commande par retour d'état, commande optimale, commande par placement de pôle...). En général, seules les variables d'entrée et de sortie sont connues. Il est alors nécessaire, à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle choisi afin d'élaborer la commande appropriée. Donc, observer ou filtrer (estimer tout en minimisant l'influence des perturbations sur l'erreur d'estimation) un vecteur d'état revient à estimer ou à reconstruire ses composantes ou bien leur combinaison linéaire en utilisant les entrées et sorties disponibles. Comparé au domaine temporel où plusieurs travaux relatif à l'estimation de l'état ont été proposés dans la littérature [DZX94], [ORe83], [Lue66], [Lue71]..., peu de résultats ont été élaborés dans le domaine fréquentiel, bien que l'approche fréquentielle soit la base de nombreuses analyses effectuées sur les systèmes de commande [DGF94], [DFG90], [RB77]. Ainsi il a été montré dans [AK85] que la commande par retour d'état ainsi que le filtrage optimal peuvent être caractérisés par des matrices polynomiales paramétrant directement la commande par retour d'état et l'observateur dans le domaine fréquentiel. De plus, il est important de rappeler que Popov [Pop69] et Rosenbrock [Ros70] ont été les premiers à appliquer les méthodes utilisant les matrices polynomiales pour la commande des systèmes linéaires. La motivation principale de travailler dans le domaine fréquentiel se trouve dans les avantages que présente l'approche fréquentielle pour la commande basée-observateur [HD09]. En effet, dans ce cas, le correcteur est commandé par les entrées et sorties du processus. Donc, seul le comportement entrée-sortie du correcteur (caractérisé par sa fonction de transfert dans le domaine fréquentiel) affecte les propriétés de la boucle fermée du système. De plus, le fait qu'il existe aujourd'hui des boites à outils logiciels (toolbox) permettant une mise en oeuvre aisée de l'approche fréquentielle milite aussi pour cela. Sans oublier, l'importance du fréquentiel dans le traitement de signal et surtout dans la transmission par des canaux de communication (le domaine des télécommunications par exemple) où une implémentation est souvent recommandée en fréquentiel.

C'est dans ce cadre que s'inscrivent les travaux relatifs à cette thèse où nous proposons de nouvelles méthodes pour l'estimation d'état des systèmes linéaires multivariables aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel, et leurs utilisation pour la synthèse d'une commande via un observateur. Nous tenons à noter que nous avons fait le choix de traiter

des situations différentes suivant les chapitres pour étudier ("balayer") le champs le plus vaste des observateurs (réduit, plein, fonctionnel) et des systèmes (standard, singulier, sujet à des perturbations à énergie bornée, à entrées inconnues, à retard). Et pour éviter de traiter de nombreux cas semblables, nous traitons un cas par section dans tous les chapitres de la thèse. Ce manuscript est ainsi organisé en quatre chapitres.

Le premier se subdivise en quatre volets. Nous commençons par donner quelque définitions structurelles nécessaires pour l'étude des observateurs standards où le système considéré n'est pas soumis à l'effet des perturbations extérieures, et puis par rappeler des résultats de la littérature se rapportant à l'observation et à la synthèse d'observateurs standards d'ordre plein et d'ordre réduit. Le deuxième volet s'intéresse au problème d'estimation d'une fonctionnelle (combinaison linéaire) de l'état dans le domaine temporel et fréquentiel. Ensuite, nous traitons le problème de synthèse d'observateurs standards pour la classe la plus générale des systèmes linéaires à savoir les systèmes descriptifs ou singuliers. Enfin dans le dernier volet, nous présentons une méthode de synthèse fréquentielle directe, tirée de [HD09], d'une commande basée sur un observateur standard d'ordre plein où nous donnons une application numérique validant la méthode présentée.

Le deuxième chapitre traite des observateurs à entrées inconnues où nous proposons d'estimer les états d'un système sujet à des entrées totalement inconnues, même pas la bornitude de l'énergie. La première partie de ce chapitre rappelle les conditions d'existence de ce type d'observateur, ensuite nous présentons une méthode temporelle et une autre fréquentielle pour la synthèse d'un tel observateur. Dans l'avant dernière partie du chapitre, nous proposons de traiter le problème d'observation à entrées inconnues pour la classe la plus générale des systèmes linéaires, à savoir les systèmes singuliers, où nous estimons l'état sans aucune information sur ces entrées. Et nous terminons le chapitre en traitant le cas des systèmes descriptifs à retard sujets à des entrées inconnues et ceci en proposant une méthode de synthèse temporelle basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov pour donner la condition d'existence de tels observateurs. Le gain implémenté dans la synthèse est obtenu en utilisant les LMIs. La méthode fréquentielle résulte de celle temporelle et ceci en proposant des descriptions matricielles fractionnaires judicieuses des matrices de l'observateur et surtout en appliquant l'approche de factorisation. Nous obtenons une description polynomiale de l'observateur fonctionnel proposé. Une application numérique est proposée illustrant l'efficacité de l'approche proposée. Nons tenons à noter que nous avons choisi de traiter des observateurs à entrées inconnues avec un retard et que nous aurions pu le faire aussi avec le filtrage H_∞, objet du chapitre suivant.

Le troisième chapitre a pour but de traiter le problème de filtrage H_∞ dans le domaine temporel et fréquentiel pour que nous puissions estimer les états d'un système affecté par des perturbations à énergie bornée, dont nous cherchons à minimiser l'effet sur l'erreur d'estimation. En effet, nous proposons des solutions au problème de l'estimation H_∞ d'ordre plein et d'une fonctionnelle de l'état en présence de perturbations à énergie finie ; Ensuite, nous présentons une méthode de synthèse d'observateurs fonctionnel robuste par rapport aux perturbations utilisant une approche polynomiale. Nous terminons le chapitre en proposant de nouveaux résultats de synthèse de filtres H_∞ pour le cas des systèmes singuliers. Une validation des différents résultats théoriques proposés, est obtenues sur des exemples de simulations. La méthode temporelle que nous proposons est basée, sur la non dépendance explicite de la dynamique de l'erreur d'estimation avec l'etat $x(t)$ du système

considéré et de l'entrée de commande $u(t)$ (c'est le non biais du filtre) et sur l'utilisation de l'approche Lyapunov (lemme borné réel). Nous proposons également une nouvelle écriture de la dynamique de l'erreur estimation afin de contourner le problème de l'apparition de la dérivée de la perturbation dans cette dynamique. La méthode fréquentielle proposée découle de la méthode temporelle en utilisant les MFDs. Il faut noter que nous aurions pu traiter le cas des systèmes discrets linéaires singuliers, ou non dans cette partie. Mais du fait de la similitude de l'approche avec le cas continu, nous avons préféré traiter le cas discret dans le cadre de la commande basée-observateur.

Finalement, le quatrième chapitre a pour objectif d'appliquer les méthodes d'estimation proposées précédemment dans le cadre de la commande. En fait, il est décomposé en deux parties. Dans un premier volet, nous proposons une méthode de synthèse directe dans le domaine fréquentiel, d'une commande via un filtre H_∞ pour des systèmes linéaires sujet à des perturbations à énergie bornée. Ensuite, dans le deuxième volet, nous proposons une méthode de synthèse d'une commande via un observateur pour les systèmes singuliers, en traitant les deux cas continu et discret aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. En effet, pour la méthode de synthèse fréquentielle directe, objet du premier volet, nous essayons de déterminer les matrices polynomiales du correcteur via un filtre H_∞, caractérisé par sa description matricielle fractionnaire (MFD) copremière à gauche, en résolvant une équation diophantienne, sans passer par le domaine temporel. Ceci se fait en paramétrant dans le domaine fréquentiel, une loi de commande par retour d'état ainsi que la dynamique du filtre H_∞ d'ordre plein par des matrices polynomiales. Les matrices du correcteurs sont par conséquent déterminées à partir de ces deux matrices polynomiales. La correspondance entre le domaine temporel et fréquentiel a été bien démontrée. Pour la deuxième approche proposée dans le second volet du chapitre, nous déterminons dans une première étape, le gain d'une commande par retour d'état satisfaisant un critère de performance H_∞, ensuite nous essayons d'appliquer les méthodes de filtrage fonctionnels H_∞ proposées dans le chapitre précèdent, permettant d'obtenir les matrices du correcteur via un filtre H_∞. Ce correcteur basé sur un filtre H_∞ permet d'obtenir la loi de commande qui est en fait donnée par la sortie du filtre. L'ordre de ce correcteur est égal à la dimension de la fonctionnelle à estimer, et le gain de la loi de commande par retour d'état est déterminé en utilisant les techniques H_∞. Il faut noter que notre approche diffère de la commande basée observateur classique. En effet, ici il s'agit d'exploiter les résultats du filtrage fonctionnel proposés à la commande. Nous procédons en deux étapes, l'avantage est de construire un filtre qui a la même dimension que la commande, donc d'ordre réduit généralement. Il s'agit d'abord de trouver la commande qui permet d'atteindre les objectifs de commande, ensuite nous construisons un observateur (filtre) qui estime cette loi de commande. Un exemple numérique est présenté pour valider l'approche proposée.

Chapitre 1

Observateurs Standards

1.1 Introduction

L'estimation de l'état est d'une grande importance pour les méthodes de commande s'appuyant sur le formalisme d'état. En effet, de nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe du retour d'état et la mise en oeuvre d'une telle commande demande la connaissance de l'état ou d'une partie de celui-ci. Dans la plupart des cas, la dimension du vecteur des sorties est inférieure à celle de l'état. Que ce soit pour des considérations techniques ou économiques, nous ne pouvons pas déduire l'état directement à partir des mesures. A ce propos nous cherchons à construire un système dynamique qui va nous fournir une estimation de cet état. En tenant compte du fait que, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrée et de sortie, le problème d'observation ou d'estimation de l'état se définit comme la construction d'un système dynamique auxiliaire qui a pour entrées les entrées et les sorties du système à estimer et pour sortie l'estimation de l'état. De tels systèmes auxiliaires sont appelés reconstructeurs d'état ou observateurs. Un schéma bloc du processus de reconstruction de l'état d'un système en boucle ouverte est donné par la figure (1.1).

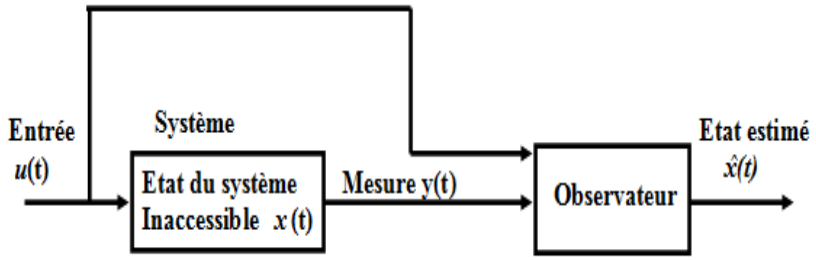


FIG. 1.1 – Observateur

L'estimation du vecteur d'état devient impérative lorsqu'une stratégie de commande par retour d'état est souhaitée. Dans ce cas, la commande est donnée par la relation linéaire $u(t) = Kx(t)$, l'observateur peut être vu comme faisant partie d'un schéma de

correction par retour d'état linéaire, utilisé dans le but de générer l'estimation du signal de commande désiré : ce type de commande est appelé commande basée-observateur. Cette configuration du système correcteur basé-observateur en boucle fermée, est illustrée par la figure (1.2).

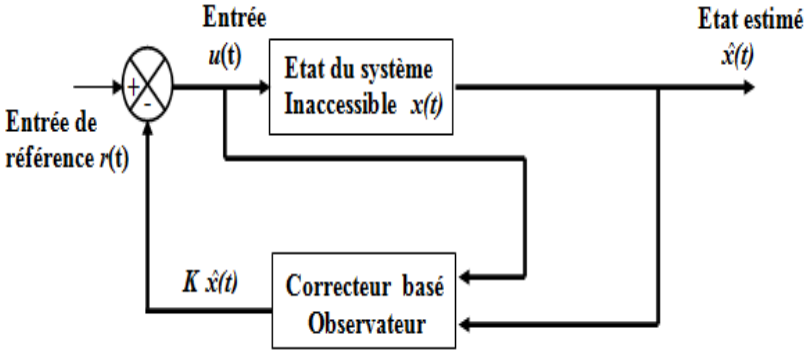


FIG. 1.2 – Système de commande basée-observateur en boucle fermée

La théorie des observateurs a été développée entre autres par Luenberger [Lue66], [Lue71]. Aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel, les travaux [ORe83], [BM92], [Won79], [Zha87], [Hau83], [DFG90], [DGF94], [Deu02], [HD09], [ML75], [Mar03]... ont été proposés pour l'étude du problème de l'estimation de l'état, sur lesquels nous nous basons pour rappeler ce qui suit.

1.2 Définitions structurelles

Considérons le système linéaire invariant (LTI) suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.2}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $u(t) \in \mathbb{R}^q$ sont le vecteur d'état, le vecteur de sorties et le vecteur de commandes respectivement. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p\times q}$ sont respectivement la matrice d'évolution du système, la matrice d'application de la commande, la matrice d'observation et le terme direct entre la commande et les mesures.

Définition 1 *Le système* $(1.1)-(1.2)$ *est observable si, par observation des sorties et des entrées sur un intervalle de temps fini, on peut déterminer l'état initial du système.*

Définition 2 *Le système* $(1.1)-(1.2)$ *est observable si et seulement si :*

$$rang\ ([\ C^T\ A^TC^T\ (A^T)^2C^T...(A^T)^{n-1}C^T]) = n \tag{1.3}$$

D'autre part, l'hypothèse d'observabilité peut être relaxée en hypothèse de détectabilité :

Définition 3 *Le système* (1.1) − (1.2) *est détectable si tous ses modes instables sont observables.*

Cette définition est équivalente à l'affirmation suivante : le système (1.1) − (1.2) est détectable s'il existe une matrice K telle que $(A - KC)$ ait toutes ses valeurs propres stables.

Définition 4 *Le système* (1.1) − (1.2) *est détectable si et seulement si :*

$$rang \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \ , \ \forall \ s \in \ \mathbb{C} \ tel \ que \ Re(s) \geq 0. \tag{1.4}$$

Définition 5 *Le système* (1.1) − (1.2) *est stabilisable par retour d'état si et seulement si, la matrice* $[sI - A, \ B]$ *est de rang plein pour tout* $Re(s) \geq 0$.

D'autre part, la transformée de Laplace du système (1.1)-(1.2) sous la condition initiale $x(0) = 0$, donne la matrice de transfert du système, suivante :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{1.5}$$

Les matrices de transfert pour les systèmes MIMO (sans retard), sont des matrices rationnelles de la variable complexe s .

- ◇ Une matrice de transfert $G(s)$ est dite propre, si chaque élément est une fonction rationnelle propre, c'est-à-dire, $G(s)$ tend vers une matrice K_1 quand s tend vers l'infini.
- ◇ $G(s)$ est strictement propre si :

$$\lim_{s \to +\infty} G(s) = 0 \tag{1.6}$$

- ◇ $G(s)$ est stable si elle est propre et si tous les coefficients de $G(s)$ possèdent des pôles à partie réelle négative.

Définition 6 *Une matrice polynomiale est dite unimodulaire si et seulement si son déterminant est constant et non nul.*

Définition 7 [Wan03]
Soient P(s), L(s) et R(s) des matrices polynomiales telles que P(s)= L(s) R(s). Alors R(s) (resp L(s)) est un diviseur à droite (resp. à gauche) de P(s), et P(s) est un multiple gauche (resp. droite) de R(s) (resp. L(s)).

Définition 8 [Wan03]
Soient deux matrices polynomiales $N_2(s)$ et $D_2(s)$ ayant le même nombre de colonnes.

- ◇ *Une matrice polynomiale carrée R(s) est dite diviseur commun à droite de $N_2(s)$ et $D_2(s)$ si R(s) est un diviseur à droite des deux, c'est-à-dire, qu'il y a des matrices polynomiales $N_1(s)$ et $D_1(s)$ telles que*

$$N_2(s) = N_1(s)R(s) \tag{1.7}$$
$$D_2(s) = D_1(s)R(s) \tag{1.8}$$

◇ *R(s) est le plus grand commun diviseur à droite (PGCDD) de $N_2(s)$ et $D_2(s)$ si R(s) est un multiple à gauche de tout autre diviseur commun à droite $R_1(s)$ de $N_2(s)$ et $D_2(s)$, c'est-à-dire il y a une matrice polynomiale L(s) telle que*

$$R(s) = L(s)R_1(s) \tag{1.9}$$

◇ *$N_2(s)$ et $D_2(s)$ sont dites copremières à droite (right coprime) si tous les diviseurs communs à droite de $N_2(s)$ et $D_2(s)$ sont unimodulaires.*

La représentation en MFD est une alternative à la représentation d'état d'une matrice de transfert rationnelle. En effet, elle généralise le concept de fonctions de transfert pour les systèmes SISO, aux systèmes multivariables.

Définition 9 [Wan03]
Une représentation en MFD à droite, pour la matrice de transfert rationnelle G(s), de dimension $p \times q$, est une factorisation de la forme

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) \tag{1.10}$$

où $N(s)$ est une matrice polynomiale de dimension $p \times q$, $M(s)$ est une matrice polynomiale non singulière de dimension $q \times q$. Une telle MFD est appelée MFD copremière à droite, si $N(s)$ et $M(s)$ sont copremières à droite. Le degré d'une MFD à droite est le degré du polynôme $det(M(s))$. Une MFD à gauche pour G(s) est de la forme

$$G(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s) \tag{1.11}$$

où $\hat{N}(s)$ est une matrice polynomiale de dimension $p \times q$, $\hat{M}(s)$ est une matrice polynomiale non singulière de dimension $p \times p$. Une telle MFD est appelé MFD copremière à gauche, si $\hat{N}(s)$ et $\hat{M}(s)$ sont copremières à gauche. Le degré d'une MFD à gauche est le degré du polynôme $det(\hat{M}(s))$.

Nous en déduisons, que nous pouvons avoir une double factorisation, copremière à droite et à gauche, de la même matrice de transfert rationnelle $G(s)$ telle que

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s) \tag{1.12}$$

où $N(s)$, $M(s)$ et $\hat{M}^{-1}(s)$, $\hat{N}(s)$ sont des matrices RH_∞ ($\in RH_\infty$) copremières à droite (respectivement à gauche). Cette double factorisation, engendre l'existence de matrices RH_∞ $Y(s)$, $X(s)$, $\hat{Y}(s)$ et $\hat{X}(s)$ qui satisfont l'identité de Bezout généralisée [Vid85] :

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -\hat{X}(s) \\ N(s) & \hat{Y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & \hat{X}(s) \\ -N(s) & \hat{Y}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) & -X(s) \\ \hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Les huit matrices de transferts, décrites ci dessus, peuvent être représentées de la manière suivante [Fra87] :

$$M(s) = [A_k,\ B,\ K_0,\ I], \quad N(s) = [A_k,\ B,\ C_k,\ D] \tag{1.14}$$

$$\hat{M}(s) = [A_l, -L,\ C,\ I], \quad \hat{N}(s) = [A_l,\ B_l,\ C,\ D] \tag{1.15}$$

$$Y(s) = [A_l,\ B_l, -K_0,\ I], \quad X(s) = [A_l,\ L, -K_0,\ 0] \tag{1.16}$$

$$\hat{Y}(s) = [A_k,\ L,\ C_k,\ I], \quad \hat{X}(s) = [A_k,\ L, -K_0,\ 0] \tag{1.17}$$

où K_0 et L sont des matrices telles que $A_k = A + BK_0$ et $A_l = A - LC$ sont stables, avec $C_k = C + DK_0$ et $B_l = B - LD$.

D'autre part et avant de passer à l'étude des différents types d'observateurs, nous tenons à rappeler certaines propriétés d'une matrice polynomiale sous forme de définitions, qui nous serons utiles lors des prochains chapitres :

Définition 10 *(degré des colonnes)*
Le degré de la i-éme colonne $\delta_{ci}[P(s)]$ d'une matrice polynomiale P(s) est donné par le degré du polynôme de plus haut degré dans la i- éme colonne de $P(s)$.

Définition 11 *(matrice de coefficients de plus haut degré des colonnes)*
La matrice de coefficients des plus haut degrés des colonnes $\Gamma_c[P(s)]$ d'une matrice polynomiale $P(s)$ est la matrice des coefficients du polynôme de degré $\delta_{ci}[P(s)]$ dans la i-éme colonne.

Définition 12 *(Matrice polynomiale de colonnes réduites)*
Une matrice polynomiale P(s) est dite de colonnes réduites si det $\Gamma_c[P(s)] \neq 0$.

Définition 13 *(degré des lignes)*
Le degré de la i-éme ligne $\delta_{ri}[P(s)]$ d'une matrice polynomiale $P(s)$ est donné par le degré du polynôme de plus haut degré dans la i-éme ligne de P(s).

Définition 14 *(matrice de coefficients de plus haut degré des lignes)*
La matrice de coefficients des plus hauts degrés des lignes $\Gamma_r[P(s)]$ d'une matrice polynomiale P(s) est la matrice des coefficients du polynôme de degré $\delta_{rj}[P(s)]$ dans la j-éme ligne.

Définition 15 *(Matrice polynomiale de lignes réduites)*
Une matrice polynomiale $P(s)$ est dite de lignes réduites si det$(\Gamma_r[P(s)]) \neq 0$.

Dans la suite nous donnons un exemple qui illustre les définitions que nous venons de présenter :

Exemple 1 *Pour* $P(s) = \begin{bmatrix} s^2-3 & 1 & 2s \\ 4s+2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s+3 & -3s+2 \end{bmatrix}$, *nous avons*

a) $\delta_{r1}[P(s)] = 2$, $\delta_{r2}[P(s)] = 1$, $\delta_{r3}[P(s)] = 2$, $\Gamma_r[P(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\delta_{c1}[P(s)] = 2$, $\delta_{c2}[P(s)] = 1$, $\delta_{c3}[P(s)] = 1$, $\Gamma_c[P(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Définition 16 *(Partie polynomiale et partie strictement propre d'une matrice rationnelle)*

Une matrice de transfert $G(s)$ peut s'écrire comme suit

$$G(s) = \Pi\{G(s)\} + SP\{G(s)\} \tag{1.18}$$

où la partie polynomiale $\Pi\{.\}$ est une matrice polynomiale et la partie strictement propre $SP\{.\}$ est une matrice rationnelle strictement propre.

Exemple 2

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s+3 & 2s+4 \\ 3 & s^2+3s+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Observateurs standards d'ordre plein et d'ordre réduit

Considérons le système (1.1)-(1.2) avec $p \leq n$, nous supposons que $rang\ C = p$, ce qui signifie que toutes les sorties sont utiles, ou plus précisément il n'y a pas d'information redondante dans les mesures. Nous parlons d'observateurs standards lorsque le système n'est pas soumis à l'effet des perturbations extérieures.

1.3.1 Observateur d'ordre plein

La structure de base de cet estimateur est de la forme [ORe83] :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_f(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{1.19}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{1.20}$$

où K_f est le gain de correction, appelé aussi gain de l'observateur, $\hat{x}(t)$ est l'estimé de $x(t)$.

L'erreur d'estimation de l'observateur (1.19)-(1.20) est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{1.21}$$

et obéit à la dynamique suivante :

$$\dot{e}(t) = (A - K_f C)e(t) \tag{1.22}$$

Pour que l'observateur soit utilisable il est nécessaire que cette erreur tende vers 0 quand t tend vers l'infini. Lorsque cette propriété est satisfaite, l'observateur est dit asymptotique, mais il est évident que c'est une propriété nécessaire au fonctionnement correct d'un observateur. En conséquence, il faut choisir K_f telle que les valeurs propres de la matrice $(A - K_f C)$ soient toutes à partie réelle strictement négative.

Définition 17 [ORe83]

Pour toute paire de matrices réelles $(A,\ C)$*, il existe une ou plusieurs matrices réelles* K_f *telles que les valeurs propres de* $(A - K_f C)$ *peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire* $(A,\ C)$ *est observable.*

1.3.2 Observateur d'ordre réduit

Afin d'éviter la redondance générée par l'observateur d'ordre plein, nous cherchons à éliminer la partie mesurée du vecteur d'état. Cette mesure s'illustre dans la présence de p combinaisons linéaires de l'état dans l'expression de la sortie (1.2). Nous n'estimons ici que $(n-p)$ composantes de l'état non mesurées. Alors, un observateur de dimension $(n-p)$ est conçu avec un vecteur d'état $z(t)$, qui estime la fonctionnelle $Tx(t)$ pour une matrice T de dimension $(n-p)\times n$. Alors, une estimée $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ peut être déterminée par :

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

Le schéma de base de cet observateur est donné par la figure (1.3)

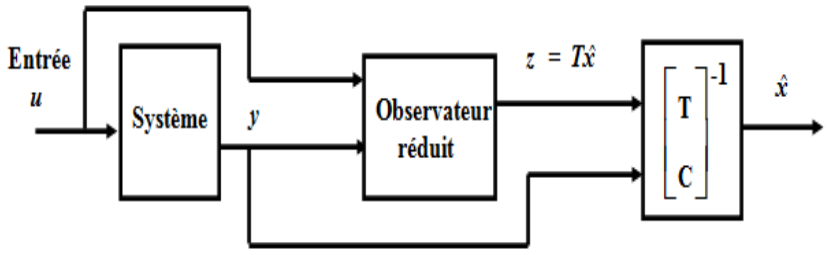


FIG. 1.3 – Structure de base de l'observateur d'ordre réduit

Soit $[V \quad P] = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1}$, les équations d'un tel observateur sont données par :

$$\dot{z}(t) = D_1 z(t) + E_1 y(t) + G_1 u(t) \tag{1.24}$$
$$\hat{x}(t) = Pz(t) + Vy(t) \tag{1.25}$$
$$z(t) = T\hat{x}(t) \tag{1.26}$$

D_1, E_1 et G_1 sont des matrices de dimensions appropriées.

L'erreur d'observation est donnée, dans ce cas par :

$$\epsilon(t) = z(t) - Tx(t) \tag{1.27}$$

et en utilisant (1.1) et (1.24), sa dynamique obéit à l'équation suivante :

$$\dot{\epsilon}(t) = D_1\epsilon(t) + (D_1 T - TA + E_1 C)x(t) + (G_1 - TB)u(t) \tag{1.28}$$

D'autre part, d'après [ORe83],

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = P\epsilon(t) \tag{1.29}$$

Définition 18 [Hay95] *L'observateur* (1.24) − (1.26) *estime l'état* $x(t)$*, dans le sens*

$$\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t) \tag{1.30}$$

si et seulement si :

$$\begin{aligned} TA - D_1T &= E_1C && (1.31)\\ G_1 &= TB && (1.32)\\ PT + VC &= I_n && (1.33)\\ D_1 &\text{ est stable} \end{aligned}$$

D'autre part, d'autres redondances caractérisant l'observateur (1.24)-(1.26) par T, P et V, peuvent être éliminées en supposant que le système est sous la forme partitionnée suivante [ORe83] :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) && (1.34)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} x(t) && (1.35) \end{aligned}$$

L'idée d'obtenir une classe équivalente d'observateurs au système (1.24)-(1.26) est la suivante :

- ◇ Nous partitionnons $[V \quad P]$ comme suit : $[V \quad P] = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ V_2 & I_{n-p} \end{bmatrix}$ avec V_2 est la matrice de gain de cette classe equivalente.
- ◇ Nous choisissons T, D_1, E_1 et G_1 comme suit [ORe83] :

$$\begin{aligned} T &= [-V_2,\ I_{n-p}] && (1.36)\\ D_1 &= A_{22} - V_2A_{12} && (1.37)\\ E_1 &= A_{21} - V_2A_{11} + A_{22}V_2 && (1.38)\\ G_1 &= B_2 - V_2B_1 && (1.39) \end{aligned}$$

Afin d'obtenir un observateur stable (voir (1.28) et (1.37)), l'équivalence entre la détectabilité de la paire $(A_{22},\ A_{12})$ et celle de la paire $(A,\ C)$ (voir (1.22)) a été démontrée par O'Reilly [ORe83].

1.4 Observateurs fonctionnels

Dans certaines applications, une estimée d'une simple fonctionnelle linéaire P_1x de l'état est demandée plutôt que l'estimée de l'état lui même. Par exemple, une loi de commande linéaire invariante dans le temps pour un système mono-entrée, est par définition déterminée simplement par une fonctionnelle linéaire de l'état du système. Nous pouvons donc penser à construire un reconstructeur (appelé observateur de fonctionnelle linéaire) estimant directement la variable $w_1 = P_1x$ sans passer par l'estimation du vecteur d'état complet.

1.4.1 Synthèse temporelle

La forme générale de l'observateur fonctionnel est exactement analogue à l'observateur d'ordre réduit :

L'estimée de $w_1 = P_1 x$, où $w_1 \in \mathbb{R}^k$, est définie par :

$$\hat{w}_1(t) = c_1 z(t) + b_1 y(t) \tag{1.40}$$

$$\dot{z}(t) = D_1 z(t) + E_1 y(t) + G_1 u(t) \tag{1.41}$$

avec $\hat{w}_1 \in \mathbb{R}^k$ est l'estimé de la fonctionnelle $P_1 x$, $z \in \mathbb{R}^{n-p}$ est la dynamique de l'observateur, $P_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, D_1, E_1 et G_1 déjà définies dans la relation (1.24) de l'observateur d'ordre réduit avec $b_1 \in \mathbb{R}^{k\times p}$ et $c_1 \in \mathbb{R}^{k\times(n-p)}$ sont des vecteurs qui satisfont

$$c_1 T + b_1 C = P_1 \tag{1.42}$$

1.4.2 Synthèse fréquentielle

Les problèmes de synthèse d'observateurs linéaires dans le domaine fréquentiel ont fait l'objet de peu de travaux. Parmi eux, *Ding et al* dans [DFG90] ont formulé le problème d'estimation d'une fonctionnelle de l'état, et sont même allés jusqu'à résoudre le problème de synthèse d'observateurs robustes dans le domaine fréquentiel, et ceci en adoptant une approche polynomiale.

Considérons le système dynamique linéaire décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_2 w(t) \tag{1.43}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_3 w(t) \tag{1.44}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'observation (la sortie mesurée) et $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ est le vecteur des perturbations à énergie bornée. Prenons la transformée de Laplace de (1.43) et de (1.44), nous obtenons :

$$y(s) = G_u(s)u(s) + G_d(s)w(s) \tag{1.45}$$

où

$$G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{1.46}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}D_2 + D_3 \tag{1.47}$$

Nous souhaitons obtenir un observateur qui va nous produire l'estimée de la fonctionnelle d'état $w_1(t) = P_1 x(t)$ avec $P_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Il est clair que les mesures disponibles pour la construction de cet observateur sont le vecteur d'entrée $u(t)$ et le vecteur de sortie $y(t)$. De ce fait, la forme la plus générale d'observateurs linéaires est décrite par un autre système dynamique :

$$\hat{w}_1(s) = F(s)u(s) + F_1(s)y(s) \ \in \mathbb{R}^k \tag{1.48}$$

où $F(s)$ et $F_1(s)$ sont des matrices de transfert rationnelles propres et stables.

Ce système dynamique, est dit un observateur pour la fonctionnelle $P_1x(t)$ si pour $w = 0$,

$$\lim_{t\to\infty}(P_1x(t) - \hat{w}_1(t)) = 0 \tag{1.49}$$

pour tout $u(t) = 0$ et pour tout état initial.

Dans le cas où $w \neq 0$ mais est à énergie bornée, la condition (1.49) peut ne pas être satisfaite. Il est souhaité dans ce cas, de minimiser l'erreur d'estimation $(P_1x(t) - \hat{w}_1(t))$. Ceci en minimisant l'effet de la perturbation $w(t)$ sur cette erreur, c'est le problème de synthèse d'observateurs robustes H_∞, qu'on va le traiter ultérieurement.

Soit

$$G_u(s) = N_u(s)M_u^{-1}(s) \tag{1.50}$$

une factorisation copremière à droite de $G_u(s)$ (voir (1.46)), où $N_u(s)$ et $M_u(s)$ sont des matrices RH_∞ ($\in RH_\infty$) copremières à droite. Définissons $\xi(s)$, comme étant (un pseudo-état), comme suit :

$$M_u(s)\xi(s) = u(s) \tag{1.51}$$

Alors l'equation (1.45) peut être écrite sous la forme suivante :

$$y(s) = N_u(s)\xi(s) + G_d(s)w(s) \tag{1.52}$$

En tenant compte du fait qu'en utilisant (1.46), (1.50) et (1.14), pour $D = 0$ et $C = I$, nous aurons l'égalité suivante :

$$(sI - A)^{-1}B = (sI - A_k)^{-1}BM_u^{-1}(s) \tag{1.53}$$

il en découle d'après (1.43), que

$$x(s) = (sI - A)^{-1}(Bu(s) + D_2w(s)) = (sI - A_k)^{-1}B\xi(s) + (sI - A)^{-1}D_2w(s). \tag{1.54}$$

Alors, la variable à estimer, $P_1x(s)$, peut être écrite comme suit :

$$P_1x(s) = P_1(s)\xi(s) + F_d(s)w(s). \tag{1.55}$$

avec $P_1(s) = P_1(sI - A_k)^{-1}B \in RH_\infty$ et $F_d(s) = P_1(sI - A)^{-1}D_2$.

Théorème 1 [DGF94]

Étant donné le système régi par la relation (1.45) *avec* $w = 0$, *le système dynamique* (1.48) *est un observateur pour la fonctionnelle* $w_1(t) = P_1x(t)$, *dans le sens de* (1.49), *si et seulement si*

$$F(s)M_u(s) + F_1(s)N_u(s) = P_1(s). \tag{1.56}$$

■

Preuve 1 *En effet, pour* $w = 0$, (1.48) *est un observateur pour* $P_1x(t)$ *si et seulement si*

$$F(s)u(s) + F_1(s)y(s) = P_1x(s). \tag{1.57}$$

Or, d'après (1.55) *nous avons, pour* $w = 0$

$$P_1x(s) = P_1(s)\xi(s) \tag{1.58}$$

Donc, il suffit d'insérer les expressions de $u(s)$ *et de* $y(s)$ *(avec* $w = 0$*), données par* (1.51) *et* (1.52), *dans* (1.57) *et d'utiliser* (1.58) *pour montrer l'equation* (1.56). ■

Le lemme suivant joue un rôle essentiel dans la paramétrage de l'observateur.

Lemme 1 [DGF94] *Étant donné des matrices de transfert RH_∞, $M_u(s)$, $N_u(s)$ et $P_1(s)$. L'ensemble de toutes les matrices de transfert RH_∞, $F(s)$ et $F_1(s)$ qui résolvent l'équation*

$$F(s)M_u(s) + F_1(s)N_u(s) = P_1(s). \tag{1.59}$$

est donné par

$$F(s) = P_1(s)Y_u(s) - Q_1(s)\hat{N}_u(s). \tag{1.60}$$

$$F_1(s) = P_1(s)X_u(s) + Q_1(s)\hat{M}_u(s). \tag{1.61}$$

$$Q_1(s) \in RH_\infty. \tag{1.62}$$

où $\hat{N}_u(s)$ et $\hat{M}_u(s)$ résultent de la factorisation copremière à gauche de la même matrice de transfert $G_u(s)$ (voir (1.50)), donnée par $G_u(s) = \hat{M}_u^{-1}(s)\hat{N}_u(s)$ et les matrices $Y_u(s)$ et $X_u(s)$ satisfont l'identité de Bezout correspondante à cette factorisation copremière à droite (voir par (1.14)). En effet, (N_u, M_u) copremières à droite, cela implique qu'il existe $Y_u(s)$ et $X_u(s)$ telles que $X_u(s)N_u(s) + Y_u(s)M_u(s) = I$.■

Notons que pour chaque matrice de transfert $Q_1(s) \in RH_\infty$ de dimension appropriée, la relation (1.59) est toujours vérifiée, avec $F(s)$ et $F_1(s)$ vérifient (1.60) et (1.61).

Théorème 2 [DGF94] *Étant donné la relation (1.45), l'ensemble de tous les observateurs pour la fonctionnelle $P_1x(t)$ est paramétré par*

$$F(s) = P_1(s)Y_u(s) - Q_1(s)\hat{N}_u(s).$$
$$F_1(s) = P_1(s)X_u(s) + Q_1(s)\hat{M}_u(s).$$
$$Q_1(s) \in RH_\infty.$$

■

c)Etapes de synthèse de l'observateur fonctionnel dans le domaine fréquentiel

Nous en déduisons alors les étapes nécessaire de synthèse de l'observateur fonctionnel fréquentiel, qui sont résumés ainsi :

1) Faire une double factorisation copremière à droite et à gauche de $G_u(s)$ ($N_u(s)$, $M_u(s)$, $\hat{N}_u(s)$ et $\hat{M}_u(s)$ sont alors connues),
2) Calculer $Y_u(s)$ et $X_u(s)$,
3) Déterminer la matrice de paramétrage $Q_1(s)$,
4) Il s'en suit alors d'après (1.48) que

$$\hat{w}_1(s) = (P_1(s)Y_u(s) - Q_1(s)\hat{N}_u(s))u(s) + (P_1(s)X_u(s) + Q_1(s)\hat{M}_u(s))y(s) \tag{1.63}$$

Dans la suite, nous essayons de déterminer l'observateur fonctionnel fréquentielle, en appliquant l'algorithme proposé sur un exemple de simulation numérique.

1.4.3 Exemple Numérique

Soit le processus régi par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Nous désirons concevoir un observateur de la forme

$$\hat{w}_1(s) = F(s)u(s) + F_1(s)y(s)$$

estimant la fonctionnelle

$$w_1(t) = P_1 x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Appliquons alors, l'algorithme correspondant :

1− La factorisation de la matrice de transfert $G_u(s)$ donne :

$$\begin{aligned} \hat{M}_u(s) &= [A_l,\ -L,\ C,\ I] \\ &= -C(sI - A_l)^{-1}L + I \end{aligned}$$

Soit $L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_l = A - LC = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, est bien stable.
Nous aurons,

$$\begin{aligned} \hat{M}_u(s) &= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + I \\ &= \frac{s+1}{s+2} \end{aligned} \tag{1.64}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{N}_u(s) &= [A_l,\ B_l,\ C,\ D] \\ &= C(sI - A_l)^{-1}B \\ &= \frac{2s+1}{(s+2)^2} \end{aligned} \tag{1.65}$$

D'autre part, soit

$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_k = A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, est bien stable.
Nous aurons donc,

$$\begin{aligned} M_u(s) &= [A_k,\ B,\ K_0,\ I] \\ &= K_0(sI - A_k)^{-1}B + I \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.66}$$

et

$$\begin{aligned} N_u(s) &= [A_k,\ B,\ C_k = C,\ 0] \\ &= C(sI - A_k)^{-1}B \\ &= \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned} \tag{1.67}$$

Remarque 1 *nous pouvons vérifier que,*

$$\begin{aligned} G_u(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \hat{M}_u^{-1}(s)\hat{N}_u(s) \\ &= N_u(s)M_u^{-1}(s) \end{aligned}$$

2−

$$\begin{aligned} X(s) &= [A_l,\ L,\ -K_0,\ 0] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.68}$$

De même,

$$\begin{aligned} Y(s) &= [A_l,\ B_l,\ -K_0,\ I] \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.69}$$

3− Nous choisissons une matrice stable et propre ($Q_1(s) \in RH_\infty$)

$$Q_1(s) = \frac{s+2}{2s+1} \tag{1.70}$$

4− Etant donné que,

$$P_1(s) = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} \tag{1.71}$$

l'observateur fonctionnel fréquentiel peut être donné alors, par :

$$\hat{w}_1(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\ u(s) + \frac{s+1}{2s+1}\ y(s).$$

1.5 Synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers

1.5.1 Introduction

Les systèmes singuliers ou systèmes descriptifs peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques linéaires usuels. En effet, si les systèmes usuels font apparaître exclusivement des relations dynamiques, les systèmes singuliers comportent également des relations algébriques. Cette augmentation permet d'intégrer des relations statiques dans la modélisation (loi de maillages, contraintes physiques, ...), de conserver aux systèmes leurs significations physiques (d'où l'appellation anglo-saxon "descriptor system"), ainsi que de modéliser des processus à comportement non causale.

La modélisation d'un processus physique complexe commence généralement par le choix des variables utilisées pour sa description et par le choix des grandeurs permettant d'agir sur l'évolution du système. Ces variables, appelées variables d'état et de commande, sont choisies, dans la mesure du possible, pour avoir une signification physique (position, vitesses, accélération, pression). Une fois les variables choisies, les relations mathématiques les liant, auront la forme suivante :

$$f(\dot{x}(t),\ x(t),\ u(t),\ y(t)) = 0 \tag{1.72}$$

$$g(x(t),\ u(t),\ y(t)) = 0 \tag{1.73}$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état regroupant les variables d'état, $\dot{x}(t)$ est sa dérivée par rapport au temps, $u(t)$ désigne le vecteur de commande et $y(t)$ le vecteur des sorties mesurées.

Après linéarisation autour d'un point de fonctionnement, nous obtenons le formalisme suivant :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.74}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.75}$$

où les matrices E, A, B et C sont réelles, constantes et de dimension compatibles avec les dimensions de $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$. Les dérivées successives des variables d'état peuvent intervenir dans une même relation, de ce fait E n'a pas nécessairement une structure diagonale. Toutes les relations de comportement n'étant pas nécessairement dynamiques, E n'étant pas nécessairement de rang lignes plein.

L'étude des systèmes singuliers a motivé de nombreuses recherches depuis le début des années 70, car le formalisme decrit par (1.74)-(1.75) permet l'analyse et la commande des systèmes pour lesquels la représentation d'état usuelle n'est pas satisfaisante. Parmi ces recherches, de nombreuses stratégies de commande des systèmes dynamiques ont été étendues aux systèmes singuliers telles que le placement de pôles [Cob81], la commande optimale [Cob83], ainsi que la synthèse d'observateurs [DB95] , [HM95] [PK92] ···

Dans la suite, aussi bien pour le cas ordre plein qu' ordre réduit, nous adopterons la méthode proposée par Darouach et Boutayeb [DB95].

1.5.2 Synthèse d'observateur d'ordre plein

Considérons le système singulier linéaire invariant suivant :

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.76}$$
$$y = Cx \tag{1.77}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, et $y \in \mathbb{R}^p$ sont le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sorties, respectivement. $E \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$, et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices constantes connues. Nous supposons que $rang\ E = r < n$, et sans perte de généralité $rang\ C = p$.

Dans la suite, nous supposerons que (voir [DB95])

$$rang \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + rang\ E \tag{1.78}$$

Alors, comme $rang\ E = r$, il existe une matrice non singulière $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ telle que :

$$\begin{aligned} PE &= \begin{bmatrix} E^* \\ 0 \end{bmatrix} \\ PA &= \begin{bmatrix} A^* \\ A_1 \end{bmatrix} \\ PB &= \begin{bmatrix} B^* \\ B_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.79}$$

avec $E^* \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et $rang\ E^* = r$, $A^* \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{(m-r)\times n}$, $B^* \in \mathbb{R}^{r\times q}$ et $B_1 \in \mathbb{R}^{(m-r)\times q}$.

Par cette transformation, nous obtenons un système équivalent, donné par :

$$E^*\dot{x} = A^*x + B^*u \tag{1.80}$$
$$y^* = C^*x \tag{1.81}$$

où

$$\begin{aligned} y^* &= \begin{bmatrix} -B_1u \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_1} \\ C^* &= \begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_1\times n},\ avec\ q_1 = m + p - r \end{aligned}$$

Alors, utilisant ces transformations, nous pouvons vérifier que nous avons

$$rang \begin{bmatrix} E^* & A^* \\ 0 & E^* \\ 0 & C^* \end{bmatrix} = n + rang\ E^* \tag{1.82}$$

où de manière analogue, comme E^* est de rang plein lignes , nous aurons

$$rang \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} = n \tag{1.83}$$

Nous pouvons trouver donc, une matrice inversible $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que

$$aE^* + bC^* = I_n \tag{1.84}$$
$$cE^* + dC^* = 0 \tag{1.85}$$

Remarque 2 ***(Décomposition en SVD)***

La matrice non singulière $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *peut être obtenue à partir de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de* $\begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}$. *En effet, la matrice* $\begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}$ *est de rang plein colonnes , alors il existe des matrices unitaires* U *et* V (*voir* [LT85]) *de dimensions appropriées telles que*

$$U^T \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.86}$$

où $\Sigma_1 = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ *avec* $\sigma_i > 0$, $i = 1, ...n$ *sont les valeurs singulières de la matrice* $\begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}$.

L'equation (1.86) *peut être réécrite selon*

$$U^T \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} V^T \tag{1.87}$$

ou de manière équivalente $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, *avec*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Sigma_1 V^T)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U^T \tag{1.88}$$

■

L'objectif, est de synthétiser un observateur d'ordre n satisfaisant la forme suivante [DB95] :

$$\dot{z} = Nz + L_1 y^* + L_2 y^* + Gu \tag{1.89}$$
$$\hat{x} = z + by^* + Kdy^* \tag{1.90}$$

où N, L_1, L_2, G et K sont des matrices inconnues de dimensions appropriées, qui doivent être déterminées afin que $\hat{x}$ converge asymptotiquement vers x .

D'après (1.80)-(1.81), (1.84)-(1.85) et (1.89)-(1.90) l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} && (1.91)\\ &= (a + Kc)E^*x - z && (1.92)\end{aligned}$$

et sa dynamique obéit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e} = Ne &+ [(a + Kc)A^* - N(a + Kc)E^* - L_1C^* - L_2C^*]x \\ &+ [(a + Kc)B^* - G]u \end{aligned} \quad (1.93)$$

L'équation (1.93) se réduit à l'équation homogène suivante :

$$\dot{e} = Ne \quad (1.94)$$

si et seulement si, les matrices G, K, L_1, L_2, et N satisfont :

$$G = (a + Kc)B^* \quad (1.95)$$

et

$$(a + Kc)A^* - N(a + Kc)E^* - L_1C^* - L_2C = 0 \quad (1.96)$$

alors $\hat{x}$ convergera asymptotiquement vers x si et seulement si N est stable.

Le problème de synthèse d'observateur d'ordre plein du système singulier (1.76)-(1.77), se ramène à trouver les matrices K, L_1, L_2, et une matrice stable N telle que (1.96) est satisfaite.

Par suite, en utilisant (1.84)-(1.85) l'équation (1.96) peut être réécrite selon la manière suivante :

$$(a + Kc)A^* - N(I_n - bC^* - KdC^*) - L_1C^* - L_2C^* = 0$$

où

$$N = (a + Kc)A^* - L_2C^* + [N(b + Kd) - L_1]C^* \quad (1.97)$$

Soit

$$L_1 = N(b + Kd) \quad (1.98)$$

alors

$$\begin{aligned} N &= aA^* + KcA^* - L_2C^* \\ &= aA^* + \begin{bmatrix} K & -L_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} cA^* \\ C^* \end{bmatrix} && (1.99)\end{aligned}$$

doit être stable.

Il est clair que N est stable si et seulement si la paire $(aA^*, \begin{bmatrix} cA^* \\ C^* \end{bmatrix})$ est détectable. Dans ce cas, nous pouvons trouver K et L_2 telles que N soit bien stable.

Théorème 3 [DB95]
Les conditions suffisantes pour l'existence de l'observateur ((1.89)-(1.90)) *sont :*

$$a)\ rang \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + rang\ E$$

$$b)\ rang \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n,\ \forall s \in\ \mathbb{C}\ \ Re(s) \geq 0.$$

■

1.5.3 Synthèse d'observateur d'ordre réduit

Nous supposerons, sans perte de généralité, que $rang\ C^* =\ q_1$ (voir $(1.80) - (1.81)$).

Notre but est de synthétiser un observateur, pour le même système singulier considéré $((1.76) - (1.77))$, de la forme

$$\dot{w} \ = \ \pi w + Ly^* + Hu \tag{1.100}$$

$$\hat{x} \ = \ Mw + Fy^* \tag{1.101}$$

où $w \in \mathbb{R}^{n-q_1}$ est la dynamique de l'observateur d'ordre réduit.

Le problème de synthèse de l'observateur d'ordre réduit, se ramène alors à trouver les matrices π, L, H, M, et F de façon à assurer la convergence asymptotique de $\hat{x}$ vers x.

La solution à ce problème est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4 [DB95] *:*
Soit T une matrice de dimension $(n - q_1) \times\ r$ telle que

$$TA^* - \pi TE^* \ = \ LC^* \tag{1.102}$$

où

$$det \begin{bmatrix} TE^* \\ C^* \end{bmatrix} \ \neq \ 0 \tag{1.103}$$

Alors pour

$$H = TB^* \tag{1.104}$$

et

$$\begin{bmatrix} TE^* \\ C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \tag{1.105}$$

nous aurons

$$\hat{x}(t) - x(t) = Me^{\pi t}[w(0) - TE^*x(0)] \tag{1.106}$$

■

La convergence de l'observateur d'ordre réduit est obtenue, si et seulement si, π est stable.

Dans la suite, nous présentons une méthode pour déterminer la matrice T de l'equation de Sylvester (1.102) (voir [Dar00]). Pour cela définissons les matrices non singulières suivantes :

$$\begin{bmatrix} R \\ C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-q} & K \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE^* \\ C^* \end{bmatrix}$$

où K est une matrice arbitraire de dimension $(n-q_1)\times q_1$ et R est une matrice de dimension $(n-q_1)\times n$ de rang plein lignes. Alors, nous avons

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} = R \tag{1.107}$$

Comme $rang \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} = n$ (de rang plein colonnes), l'équation (1.107) possède la solution suivante

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}^+ + Z(I_{r+q_1} - \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}^+) \tag{1.108}$$

où

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}^+ &= (\begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}^T \\ &= (\begin{bmatrix} (E^*)^T & (C^*)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} (E^*)^T & (C^*)^T \end{bmatrix} \\ &= ((E^*)^T E^* + (C^*)^T C^*)^{-1} \begin{bmatrix} (E^*)^T & (C^*)^T \end{bmatrix} \\ &= \Delta \begin{bmatrix} (E^*)^T & (C^*)^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\Delta = ((E^*)^T E^* + (C^*)^T C^*)^{-1}$ et Z est une matrice arbitraire de dimension appropriée. D'après (1.108), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} &= R\,\Delta \begin{bmatrix} (E^*)^T & (C^*)^T \end{bmatrix} + Z(I_{r+q_1} - \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}^+) \\ &= \begin{bmatrix} R\Delta(E^*)^T & R\Delta(C^*)^T \end{bmatrix} + Z(I_{r+q_1} - \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} (E^*)^T & (C^*)^T \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} R\Delta(E^*)^T & R\Delta(C^*)^T \end{bmatrix} + Z(I_{r+q_1} - \begin{bmatrix} E^*\Delta(E^*)^T & E^*\Delta(C^*)^T \\ C^*\Delta(E^*)^T & C^*\Delta(C^*)^T \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} R\Delta(E^*)^T & R\Delta(C^*)^T \end{bmatrix} + Z(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{q_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E^*\Delta(E^*)^T & E^*\Delta(C^*)^T \\ C^*\Delta(E^*)^T & C^*\Delta(C^*)^T \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} R\Delta(E^*)^T & R\Delta(C^*)^T \end{bmatrix} + Z(\begin{bmatrix} I_r - E^*\Delta(E^*)^T & -E^*\Delta(C^*)^T \\ -C^*\Delta(E^*)^T & I_{q_1} - C^*\Delta(C^*)^T \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

d'où les matrices T et K sont données par :

$$T = R\Delta(E^*)^T + Z \begin{bmatrix} I_r - E^*\Delta(E^*)^T \\ -C\Delta(E^*)^T \end{bmatrix} \tag{1.109}$$

$$K = R\Delta C^T + Z \begin{bmatrix} -E^*\Delta(C^*)^T \\ I_{q_1} - C^*\Delta(C^*)^T \end{bmatrix} \tag{1.110}$$

D'autre part, d'après (1.102), nous obtenons

$$\pi = TA^*M \tag{1.111}$$

$$L = TA^*F \tag{1.112}$$

Le problème de synthèse de l'observateur se réduit alors à chercher T telle que π soit stable.

D'après (1.111) et en utilisant (1.109) nous aurons

$$\begin{aligned} \pi &= (R\Delta(E^*)^T + Z \begin{bmatrix} I_r - E^*\Delta(E^*)^T \\ -C^*\Delta(E^*)^T \end{bmatrix})A^*M \\ &= R\Delta(E^*)^T A^*M + Z \begin{bmatrix} I_r - E^*\Delta(E^*)^T \\ -C^*\Delta(E^*)^T \end{bmatrix} A^*M \\ &= \Gamma + Z\Omega \end{aligned} \tag{1.113}$$

avec

$$\Gamma = R\Delta(E^*)^T A^*M \tag{1.114}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r - E^*\Delta(E^*)^T \\ -C^*\Delta(E^*)^T \end{bmatrix} A^*M = \begin{bmatrix} (I_r - E^*\Delta(E^*)^T)A^*M \\ -C^*\Delta(E^*)^T A^*M \end{bmatrix} \tag{1.115}$$

Nous concluons, que si la paire $(\Gamma,\ \Omega)$ est détectable, π est stable et par conséquent on peut synthétiser un observateur qui soit bien stable.

Théorème 5 [DB95] *:*

Pour le système (1.76) − (1.77)*, l'observateur d'ordre réduit* (1.100) − (1.101) *existe, si les conditions a) et b) du théorème* 3 *sont satisfaites.*■

Dans la suite, nous résumons dans un algorithme, les étapes nécessaires à la synthèse d'un observateur d'ordre réduit pour les systèmes singuliers :

1) Choisir une matrice R de dimension $(n-q_1)\times q_1$ telle que $\begin{bmatrix} R \\ C^* \end{bmatrix}$ soit non singulière,

2) La matrice M peut être obtenue à partir de (1.105) *et* (1.107)

$$M = \begin{bmatrix} R \\ C^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-q_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.116}$$

3) Si la paire $(\Gamma,\ \Omega)$ est détectable, on peut trouver Z telle que l'observateur est asymptotiquement stable, alors on peut déduire T de (1.109).

4) La matrice F peut être obtenue à partir de (1.105)

$$F = \begin{bmatrix} TE^* \\ C^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{q_1} \end{bmatrix} \tag{1.117}$$

5) Les matrices H et L peuvent être obtenues à partir de (1.104) *et* (1.112).■

Dans la suite, nous proposons une synthèse directe d'une commande basée sur un observateur standard d'ordre plein directement dans le domaine fréquentiel. Elle est tirée des travaux de [HD09] et permet de prendre en compte directement des critères dans le domaine fréquentiel. Notre contribution ici, est l'utilisation d'un observateur d'ordre plein pour la commande au lieu d'un observateur d'ordre réduit. Notons que, cette méthode sera utilisée dans le premier volet du chapitre quatre pour un synthèse d'une commande basée sur un filtre H_∞ d'ordre plein pour des systèmes linéaires standards sujet à des perturbations à énergie bornée.

1.6 Commande-basée sur observateur standard directement dans le domaine fréquentiel

Le correcteur basé sur un observateur standard est d'ordre plein. Nous commençons par rappeler quelques notions utiles pour cette synthèse afin d'arriver à présenter la méthode de calcul directe du correcteur basé observateur dans le domaine fréquentiel et terminer par une application numérique qui valide la méthode proposée.

Nous essayons dans la suite de déterminer les deux matrices polynômiales paramétrant dans le domaine fréquentiel, une commande par retour d'état et la dynamique de l'observateur. Ensuite, en utilisant ces deux matrices polynômiales, une méthode de synthèse permettant de déterminer les matrices du correcteur basé observateur est développée. De plus la correspondance existante entre le domaine temporel et fréquentiel est bien illustrée. Un exemple d'application validant l'approche proposée est présentée.

1.6.1 Commande par retour d'état

Nous choisissons dans cette partie de considérer le retour d'état pour étudier le problème de la synthèse de commande dans le domaine fréquentiel. En effet, La commande par retour d'état est un aspect important de la théorie de la commande. En effet, si le processus est controllable, toutes ses valeurs propres peuvent être alors placées arbitrairement par une loi de commande par retour d'état.

D'autre part et pour illustrer les degrés de libertés que peut apporter la synthèse fréquentielle directe (voir l'application numérique (1.6.5) pour plus de details), nous évoquons les deux cas suivants : dans un système d'ordre n, à une seule entrée u ($q = 1$), les n valeurs propres choisies du système en boucle fermée fixent les n composantes du gain de retour d'état K de dimension $1 \times n$. Par contre si le système est à multi entrées ($q > 1$), les n valeurs propres choisies spécifient aussi n éléments des $q \times n$ éléments du gain de retour d'état K de dimension $q \times n$. Dans ce cas, après le placement des valeurs propres,

il reste $(q-1)\times n$ degrés de libertés permettant de paramètrer diverses propriétés du système en boucle fermée.

Dans le domaine fréquentiel, la loi de commande par retour d'état est paramétrée par une matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ de dimension $q \times q$. Dans le cas d'un système d'ordre n à une seule entrée, tous les coefficients "libres" dans $\tilde{D}(s)$ sont spécifiés par les valeurs propres du système en boucle fermée ; par contre dans le cas multi entrées, $(q-1)\times n$ degrés de libertés additionnels existe en plus.

a. Expression temporelle de la commande par retour d'état

Cette étape est préalable à la synthèse fréquentielle. Nous considérons la commande d'un système linéaire invariant dans le temps (LTI), dont la représentation d'état est donnée par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.118a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) \tag{1.118b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la mesure et $u \in \mathbb{R}^q$ $(q \leq p)$ est l'entrée du système. La mesure $y(t)$ est décomposée de façon que $y_1(t) \in \mathbb{R}^{p-q}$ contient $(p-q)$ mesures et $y_2(t) \in \mathbb{R}^q$ contient less q mesures à contrôlées. A, B, C_1 et C_2 sont des matrices connues de dimensions appropriées. Nous supposons que les entrées et les sorties du système sont linéairements indépendants.

D'autre part, nous supposons que nous disposons d'une commande :

$$u(t) = -Kx(t) + Mr(t) \tag{1.119}$$

avec $r(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'entrée de référence, la matrice M est supposée fixée et $K \in \mathbb{R}^{q\times n}$ est le gain de retour d'état. Il doit être choisi tel que les n valeurs propres $\tilde{s}_v$, $v = 1, 2, ..., n$, du système à commander (les zéros du polynôme caractéristique $det(sI - A + BK)$), appartiennent à la partie négative du plan complexe. Les $(q-1)\times n$ paramètres libres restant dans la matrice K (degrés de liberté) influencent les propriétés de la boucle fermée du système.

b. Synthèse fréquentielle

La sortie à commander s'écrit dans le domaine fréquentiel par

$$y_2(s) = C_2(sI - A + BK)^{-1}BMr(s) = G_r(s)r(s) \tag{1.120}$$

D'autre part, un comportement fréquentiel du système (1.118) considéré, est donné par $y(s) = G(s)u(s)$, avec

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \tag{1.121}$$

Une MFD copremière à droite de la matrice de transfert $G(s)$ est donnée par :

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) \tag{1.122}$$

où $D(s)$ est supposée de colonnes réduites (voir définition (12)). Notons que les pôles de $G(s)$ sont les zéros de $(det\ D(s))$. De même pour la sortie à contrôler, nous avons $y_2(s) = G_c(s)u(s)$, avec

$$G_c(s) = N_c(s)D^{-1}(s) \tag{1.123}$$

Soit,

$$N_c(s) = C_2 N_x(s) \tag{1.124}$$

la transformée de Laplace du vecteur d'état $x(t)$, notée $x(s)$ est donnée par

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \tag{1.125}$$
$$= N_x(s)D^{-1}(s)u(s) \tag{1.126}$$

nous voyons bien que la matrice $N_x(s)$ vérifie

$$N(s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} N_x(s) \tag{1.127}$$

A partir de ces MFDs, le comportement fréquentiel du système bouclé peut être donné par la figure (1.4).

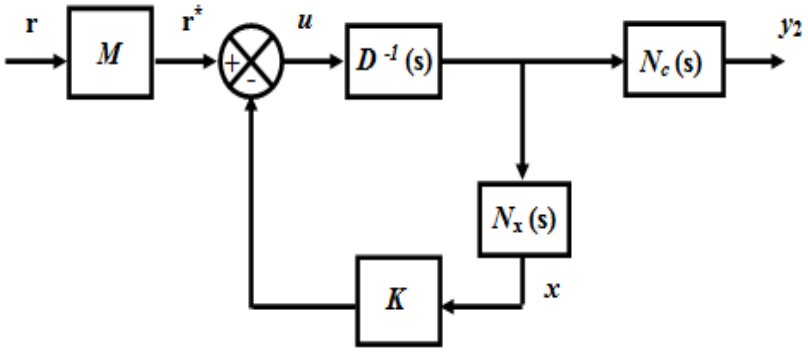


FIG. 1.4 – Commande par retour d'état dans le domaine fréquentiel

A partir de la figure (1.4), le comportement fréquentiel du système bouclé obéit à la relation suivante :

$$y_2(s) = N_c(s)[D(s) + KN_x(s)]^{-1}r^*(s) \tag{1.128}$$

En posant,

$$\tilde{D}(s) = D(s) + KN_x(s) \tag{1.129}$$

nous aurons

$$y_2(s) = N_c(s)\tilde{D}^{-1}(s)r^*(s) \tag{1.130}$$

D'autre part, en comparant les deux descriptions temporel et fréquentiel du système en boucle fermée (1.120) et (1.130) (qui sont équivalentes), nous en déduisons que

$$det(\tilde{D}(s)) = det(sI - A + BK) \tag{1.131}$$

Alors, la matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ dans la MFD (1.130), est la matrice dénominateur du système en boucle fermée et caractérise ainsi sa dynamique (les pôles sont les zéros de $det\ \tilde{D}(s)$).

Remarque 3 *Étant donné un paramétrage fréquentiel de la commande par retour d'état caractérisé par la matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$, la relation* (1.129) *permet d'obtenir la représentation équivalente dans le domaine temporel caractérisée par le gain de retour K et vice versa.*■

En multipliant (1.129) à droite par $D^{-1}(s)$ et en utilisant (1.125), nous obtenons

$$\tilde{D}(s)D^{-1}(s) = I + K(sI - A)^{-1}B \tag{1.132}$$

la relation liant la représentation temporelle (via K) à celle fréquentielle (via $\tilde{D}(s)$) d'une commande par retour d'état.

De plus, une des caractéristiques que doit vérifier cette matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ afin de jouer le rôle correspondant au gain de retour d'état K dans le domaine fréquentiel, c'est d'avoir le même nombre de paramètres libres ($q \times n$). Ce qui est donnée par le théorème suivant :

Théorème 6 [HD09]

La matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ caractérisant la dynamique de la boucle de retour d'état dans le domaine fréquentiel, doit vérifier les deux propriétés suivantes :

$$\delta_{ci}[\tilde{D}(s)] = \delta_{ci}[D(s)], i = 1, 2, 3....q \tag{1.133}$$

$$\Gamma_c[\tilde{D}(s)] = \Gamma_c[D(s)] \tag{1.134}$$

Elle possède dans ce cas exactement le même nombre de paramètres libres que le gain de retour d'état K. Avec δ_{ci} et Γ_c sont définies dans les définitions (10) *et* (11).■

D'autre part, le lemme suivant montre comment peut-on déterminer le gain de retour d'état K à partir de son équivalent dans le domaine fréquentiel $\tilde{D}(s)$:

Lemme 2 *Une représentation temporelle de la commande par retour d'état ($u = Mr - Kx$) peut être obtenue à partir de la matrice dénominateur $\tilde{D}(s)$ en résolvant l'équation diophantienne d'inconnues $P(s)$ et $Q(s)$ suivante :*

$$P(s)N_x(s) + Q(s)D(s) = \tilde{D}(s) \tag{1.135}$$

En comparant (1.135) *et* (1.129)*, une solution de cette équation est donnée par : $P(s) = P = K$ et $Q(s) = I$.*■

Après avoir obtenu la matrice polynomiale paramétrant une commande par retour d'état dans le domaine fréquentiel, nous passons à un paramétrage fréquentiel des dynamiques de l'observateur d'ordre plein utilisé.

1.6.2 Observateur standard d'ordre plein

Partant du fait, qu'une commande par retour d'état est réalisable si et seulement si toutes les composantes du vecteur d'état sont mesurables. Un observateur doit donc être utilisé (dans le cas où $p < n$) pour reconstruire tout l'état. Le retour d'état basé sur l'estimée est appelé la commande basée-observateur souhaitée dans cette partie.

a. Expression temporelle de l'observateur

Nous considérons l'observateur donné par

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K_f(y(t) - \hat{y}(t)) + Bu(t) \tag{1.136}$$

où $K_f \in \mathbb{R}^{n\times p}$ est le gain de l'observateur, avec $\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t)$.

Ainsi cet observateur d'ordre plein est complètement déterminé dans le domaine temporel par la connaissance de la matrice de gain K_f.

b. Synthèse fréquentielle

Une description fréquentielle du système (1.118) considéré, est donnée par $y(s) = G(s)u(s)$, où une MFD copremière à gauche de la matrice de transfert $G(s)$ est donnée par :

$$G(s) = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s) \tag{1.137}$$

où $\bar{D}(s)$ est supposée de lignes réduites et $\bar{N}(s)$ est une matrice polynomiale.

Considérons aussi la MFD suivante :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_x(s) \tag{1.138}$$

avec

$$\bar{N}(s) = \bar{N}_x(s)B \tag{1.139}$$

L'erreur d'observation $\epsilon = y - \hat{y}$ est donnée par :

$$\epsilon(s) = y(s) - \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}[K_f\epsilon(s) + Bu(s)] \tag{1.140}$$

$$= y(s) - \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A + K_f \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix})^{-1}[K_f y(s) + Bu(s)] \tag{1.141}$$

D'autre part, une représentation fréquentielle de l'observateur d'ordre plein basé sur les MFDs proposées, peut être donnée par la figure (1.5).

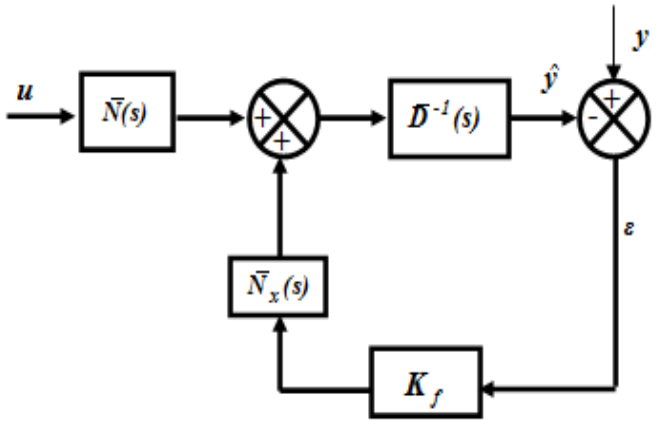


FIG. 1.5 – Observateur d'ordre plein dans le domaine fréquentiel

A partir de la figure (1.5), l'erreur d'estimation ϵ peut s'écrire comme suit :

$$\epsilon(s) = [\bar{N}_x(s)K_f + \bar{D}(s)]^{-1}(\bar{D}(s)y(s) - \bar{N}(s)u(s)) \tag{1.142}$$

Une comparaison entre (1.141) et (1.142), montre que la matrice polynomiale dénominateur

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \bar{N}_x(s)K_f + \bar{D}(s) \tag{1.143}$$

dans (1.142) caractérise bien la dynamique de l'observateur.

Nous aurons donc,

$$det\ \tilde{\bar{D}}(s) = det\ (sI - A + K_f \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}) \tag{1.144}$$

Remarque 4 *Étant donné un paramétrage fréquentiel de l'observateur caractérisé par la matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}(s)$, la relation* (1.143) *permet d'obtenir une représentation équivalente de l'observateur dans le domaine temporel caractérisée par la matrice de gain K_f et vice versa.*■

En multipliant (1.143) à gauche par $\bar{D}^{-1}(s)$ et en utilisant (1.138), nous obtenons

$$\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) = I_p + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}K_f \tag{1.145}$$

C'est la relation liant la représentation temporelle de l'observateur via son gain (K_f) à celle fréquentielle via sa matrice polynomiale ($\tilde{\bar{D}}(s)$).

De façon équivalente à $\tilde{D}(s)$ où nous avons pu construire cette matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ à partir de $D(s)$ (voir théorème (6)), intervenant dans la MFD du système donnée par (1.122), nous avons :

Théorème 7 [HD09] *La matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}(s)$ caractérisant la dynamique de l'observateur dans le domaine fréquentiel, doit obéir aux deux propriétés suivantes :*

$$\delta_{rj}[\tilde{\bar{D}}(s)] = \delta_{rj}[\bar{D}(s)],\ j = 1, 2, 3....p \tag{1.146}$$

$$\Gamma_r[\tilde{\bar{D}}(s)] = \Gamma_r[\bar{D}(s)] \tag{1.147}$$

et elle possède exactement le même nombre de paramètres libres que le gain K_f, à savoir $p \times n$. Avec δ_{rj} et Γ_r sont définies dans le premier chapitre (voir les définitions (13) *et* (14)*) et où $\bar{D}(s)$ est la matrice intervenant dans la MFD* (1.137) *du système linéaire considéré.*■

De manière analogue à la commande par retour d'état, le lemme suivant montre la possibilité de déterminer le gain K_f de l'observateur d'ordre plein synthétisé dans le domaine temporel, à partir de la matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}(s)$:

Lemme 3 *La représentation temporelle de l'observateur d'ordre plein peut être obtenue à partir de la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}(s)$ en résolvant l'equation diophantienne suivante d'inconnues $\bar{P}(s)$ et $\bar{Q}(s)$:*

$$\bar{N}_x(s)\bar{P}(s) + \bar{D}(s)\bar{Q}(s) = \tilde{\bar{D}}(s) \tag{1.148}$$

En comparant (1.148) *et* (1.143)*, une solution de cette équation est donnée par : $\bar{P}(s) = K_f$ et $\bar{Q}(s) = I$.*■

1.6.3 Méthode de synthèse directe d'un correcteur basé sur un observateur d'ordre plein dans le domaine fréquentiel

Le correcteur basé observateur que nous envisageons de déterminer est défini dans le domaine temporel par le gain de retour d'état K et le gain d'observation K_f, alors que dans le domaine fréquentiel, il est déterminé par les deux matrices polynomiales $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\bar{D}}(s)$, paramétrant respectivement dans le domaine fréquentiel, le retour d'état et les dynamiques de l'observateur d'ordre plein utilisé. Donc dans cette partie, le but est à partir des données disponibles, à savoir $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\bar{D}}(s)$, déterminer la MFD qui définit le correcteur basé observateur et par suite son comportement entrée-sortie.

a. Représentation fréquentielle du correcteur basé observateur

Notons qu'il existe deux representations fréquentielles du correcteur basé observateur (voir [HD09]), une qui reflète la propriété observateur et l'autre que nous utilisons, qui reflète le comportement entrée-sortie et qui principalement, permet de déterminer les matrices polynomiales intervenant dans la MFD du correcteur basé observateur à partir de $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\bar{D}}(s)$. Il est à noter qu'il a été démontré dans, [Hip76], [Hip06] et [HD09] qu'un choix judicieux dans la structure de réalisation permet d'obtenir une sensibilité réduite

aux erreurs dans les paramètres du correcteur basé observateur et aussi de prévenir les effets indésirables de la saturation des entrées de commande.

Le système à commander (1.118) est décrit dans le domaine fréquentiel par :

$$y(s) = G(s)u(s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}Bu(s) = N(s)D^{-1}(s)u(s) \quad (1.149a)$$

$$y_2(s) = C_2(sI - A)^{-1}Bu(s) = N_c(s)D^{-1}(s)u(s) \quad (1.149b)$$

où nous supposons que la pair $(N(s), D(s))$ est copremière à droite et la matrice dénominateur $D(s)$ est de colonnes réduites.

La représentation fréquentielle du correcteur basé observateur reflétant la propriété observateur, peut être obtenue en considérant le transfert en boucle ouverte reliant les entrées y et u du correcteur à sa sortie $\hat{\hat{u}}$, qui est définit par :

$$\hat{\hat{u}} = K\hat{x} \quad (1.150)$$

D'où, en utilisant (1.136), nous avons

$$\hat{\hat{u}}(s) = K\hat{x}(s) = K(sI - F)^{-1}K_f y(s) + K(sI - F)^{-1}Bu(s) \quad (1.151)$$

où $F = A - K_f \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$.

Cette représentation (1.151) caractérise le comportement fréquentiel du correcteur basé observateur, que nous allons écrire sous forme de matrices polynomiales. En effet, soit

$$K(sI - F)^{-1}K_f = \Delta^{-1}(s)N_C(s) \quad (1.152)$$

$$K(sI - F)^{-1}B = \Delta^{-1}(s)N_u(s) \quad (1.153)$$

où $\Delta(s)$ et $\begin{bmatrix} N_u(s) & N_C(s) \end{bmatrix}$ constituent une MFD copremière à gauche du correcteur basé observateur, avec $\Delta(s)$ est de lignes réduites.

Nous aurons :

$$\hat{\hat{u}}(s) = \Delta^{-1}(s) \begin{bmatrix} N_u(s) & N_C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (1.154)$$

Notons que, d'après les MFDs (1.152) et (1.153), nous avons

$$det(\Delta(s)) = det\ (sI - F) = det\ (sI - A + K_f \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}) \quad (1.155)$$

donc les pôles du correcteur basé observateur dans cette représentation, solutions de $det(\Delta(s)) = 0$ (voir (1.154)), coincident avec les valeurs propres de l'observateur, solutions de $det(sI - F) = 0$. Le correcteur basé observateur est dit alors dans une structure observateur.

D'autre part, le correcteur basé observateur peut être représenté comme un correcteur à retour de sortie, c'est à dire, c'est le comportement entrée-sortie du correcteur basé observateur, reliant dans cette configuration ses entrées y et r, (avec r est l'entrée de référence définit dans (1.119)), à sa sortie u.

En effet, le correcteur basé observateur résulte du remplacement de l'etat x dans (1.119) par son estimée $\hat{x}$, qui est donné par (1.136). Nous aurons,

$$u(s) = -(K(sI - F + BK)^{-1}K_f)\ y(s) + (-K(sI - F + BK)^{-1}BM + M)\ r(s) \quad (1.156)$$

Cette structure va nous être utile pour déterminer les matrices du correcteur ($N_C(s)$ et $D_C(s)$) à partir des deux matrices polynomiales $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\tilde{D}}(s)$ paramétrant respectivement une commande par retour d'état et la dynamique de l'observateur d'ordre plein proposé. Ils sont définis respectivement par (1.132) et (1.145).

En effet, en introduisant les relations suivantes (voir [HD09]) :

$$D_C(s) = N_u(s) + \Delta(s) \quad (1.157)$$

$$N_C^*(s) = \Delta^{-1}(s)N_C(s) \quad (1.158)$$

$$D_C^*(s) = \Delta^{-1}(s)D_C(s) \quad (1.159)$$

$$N_{Cr}(s) = \Delta(s)M \quad (1.160)$$

avec $N_C(s)$ et $D_C(s)$ sont les matrices polynomiales du correcteur à determiner. Les matrices $N_u(s)$, $\Delta(s)$ et M sont données par (1.153) et (1.119).

Nous avons :

$$u(s) = -G_C(s)y(s) + G_{Cr}(s)r(s) \quad (1.161)$$

avec

$$G_C(s) = D_C^{-1}(s)N_C(s) \quad (1.162)$$

où $G_C(s)$ est la matrice de transfert du correcteur, et

$$G_{Cr}(s) = D_C^{-1}(s)N_{Cr}(s) \quad (1.163)$$

qui peut être représenté selon la figure (1.6).

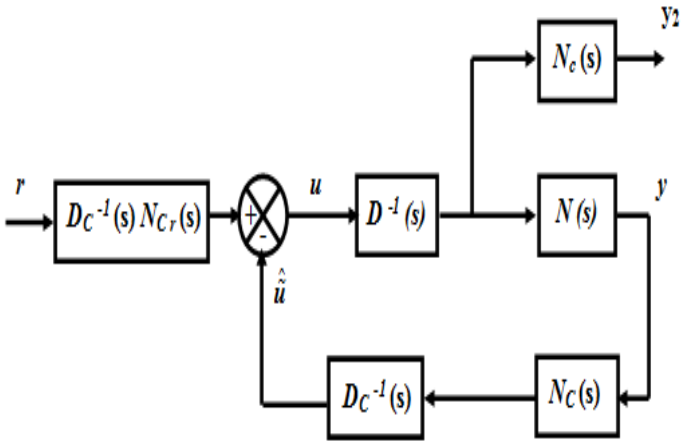


FIG. 1.6 – Système en boucle fermé avec un correcteur dans une structure en retour de sortie

Le système en boucle fermé dans la figure (1.6), contient les deux descriptions polynomiales, du système considéré ainsi que du correcteur. En effet, le système est défini par une MFD copremière à droite (voir $G(s)$ dans (1.149a)) alors que le correcteur par une MFD copremière à gauche (voir ($G_C(s)$ dans (1.162)).

D'autre part, d'après la figure (1.6), la matrice de transfert entre l'entrée $r(s)$ et sa sortie $y_2(s)$, est donnée par

$$y_2(s) = N_c(s)[N_C(s)N(s) + D_C(s)D(s)]^{-1}\Delta(s)Mr(s) \tag{1.164}$$

qui peut être décrite aussi (voir (1.130)), selon

$$y_2(s) = N_c(s)\tilde{D}^{-1}(s)Mr(s) \tag{1.165}$$

D'après (1.165), le transfert (1.164) montre que l'équation suivante

$$N_C(s)N(s) + D_C(s)D(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s) \tag{1.166}$$

est satisfaite par un correcteur basé observateur.

L'equation (1.166) n'est autre que l'équation diophantienne ; c'est l'equation polynomiale caractéristique du correcteur basé observateur, et il démontre directement le principe de séparation. En effet, les valeurs propres du système de commande en boucle fermé sont constituées des valeurs propres placées par le retour d'état (données par les zéros de $det\ \tilde{D}(s) = 0$, voir (1.131)) et par les valeurs propres de l'observateur (données par les zéros de $det\ \Delta(s) = det\tilde{\tilde{D}}(s)$=0) (voir (1.144) et (1.155)).

b. Calcul du correcteur basé observateur fréquentiel

Comme l'équation de diophantienne possède deux inconnues, qui sont les matrices polynomiales caractéristiques du correcteur basé observateur, à savoir $N_C(s)$ et $D_C(s)$, Hippe et Deutcher [HD09] ont proposé une méthode de résolution basé sur un observateur

d'ordre réduit que nous avons adapté au cas d'observateur d'ordre plein. Ces deux matrices polynomiales sont déterminées en fonction de la matrice paramétrant le retour d'état $\tilde{D}(s)$ et celle paramétrant l'observateur $\tilde{\bar{D}}(s)$.

Lemme 4 *Etant donné les deux matrices polynomiales $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\bar{D}}(s)$ (voir théorèmes* 6 *et* 7*), ainsi que les MFDs copremières à droite et à gauche du système (voir* (1.122) *et* (1.137))*, nous avons*

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s) \tag{1.167}$$

où $D(s)$ est de colonnes réduites et $\bar{D}(s)$ est de lignes réduites.

Comme $N(s)$ et $D(s)$ sont copremières à droite, il existe alors deux solutions $X(s)$ et $Y(s)$ de l'identité de Bezout

$$Y(s)N(s) + X(s)D(s) = I \tag{1.168}$$

et une matrice polynomiale $\bar{V}$ donnée par

$$\bar{V} = \Pi\{\tilde{D}(s)Y(s)\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)\} \tag{1.169}$$

avec $\Pi\{.\}$ est définie par la relation (1.18)*.*

Alors, les matrices de transfert $N_C^*(s)$ et $D_C^*(s)$ (voir (1.158) *et* (1.159)*) peuvent s'écrire de la manière suivante (voir*[*HD09*]*) :*

$$N_C^*(s) = \Delta^{-1}(s)N_C(s) = \tilde{D}(s)Y(s) - \bar{V}(s)\tilde{\bar{D}}^{-1}(s)\bar{D}(s) \tag{1.170}$$

$$D_C^*(s) = \Delta^{-1}(s)D_C(s) = \tilde{D}(s)X(s) + \bar{V}(s)\tilde{\bar{D}}^{-1}(s)\bar{N}(s) \tag{1.171}$$

En introduisant la conversion suivante,

$$\bar{V}(s)\tilde{\bar{D}}^{-1}(s) = \Delta^{-1}(s)V(s) \tag{1.172}$$

les matrices de transfert $N_C(s)$ et $D_C(s)$ caractérisant la MFD du correcteur basé observateur $G_C(s) = D_C^{-1}(s)N_C(s)$ (voir (1.162)*) sont données par*

$$N_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s)Y(s) - V(s)\bar{D}(s) \tag{1.173}$$

et

$$D_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s)X(s) + V(s)\bar{N}(s) \tag{1.174}$$

■

1.6.4 Résumé des étapes d'une synthèse fréquentielle directe du correcteur basé observateur

La première étape dans la synthèse du correcteur basé observateur dans le domaine fréquentiel est de déterminer les matrices polynomiales intervenant dans les MFDs copremières à droite et à gauche du système, à savoir

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s) \tag{1.175}$$

où $D(s)$ est de colonnes réduites et $\bar{D}(s)$ de lignes réduites. L'ordre du système est supposé égale à n.

1) **Synthèse de la loi de commande par retour d'état** :
Revient à déterminer la matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ de dimension $q \times q$, qui contient exactement le même nombre de paramètre libres $q \times n$ que celui du gain de retour d'état K dans le domaine temporel, telle que

$$\delta_{ci}[\tilde{D}(s)] = \delta_{ci}[D(s)],\ i = 1, 2, 3....q \tag{1.176}$$

$$\Gamma_c[\tilde{D}(s)] = \Gamma_c[D(s)] \tag{1.177}$$

Les valeurs propres du système en boucle fermé sont les solutions de ($det\ \tilde{D}(s) = 0$).

2) **Synthèse de l'observateur d'ordre plein** :
Revient à determiner la matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}(s)$, qui contient exactement le même nombre de paramètres libres $p \times n$ que celui du gain de l'observateur K_f, telle que

$$\delta_{rj}[\tilde{\bar{D}}(s)] = \delta_{rj}[\bar{D}(s)],\ j = 1, 2, 3....p \tag{1.178}$$

$$\Gamma_r[\tilde{\bar{D}}(s)] = \Gamma_r[\bar{D}(s)] \tag{1.179}$$

Les valeurs propres de l'observateur sont les solutions de ($det\ \tilde{\bar{D}}(s) = 0$).

3) **Déterminations de la MFD copremière à gauche du correcteur basé observateur** :
Dans une première étape, résoudre l'identité de Bezout

$$Y(s)N(s) + X(s)D(s) = I \tag{1.180}$$

Ensuite, calculer la matrice polynomiale

$$\bar{V} = \Pi\{\tilde{D}(s)Y(s)\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)\}, \tag{1.181}$$

et déterminer $V(s)$ en vérifiant la conversion (1.172) telle que $\Delta(s)$ soit de lignes réduites.
Les matrices polynomiales $N_C(s)$ et $D_C(s)$ caractérisant la MFD copremière à gauche $G_C(s) = D_C^{-1}(s)N_C(s)$ du correcteur basé observateur, sont alors données par

$$N_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s)Y(s) - V(s)\bar{D}(s) \tag{1.182}$$

et

$$D_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s)X(s) + V(s)\bar{N}(s) \tag{1.183}$$

Ceci montre donc qu'une synthèse complète d'un correcteur basé observateur peut être effectuée directement dans le domaine fréquentiel sans passer par le domaine temporel. Dans la suite, nous proposons une application numérique qui illustre cette méthode de synthèse fréquentielle.

1.6.5 Exemple d'application

Considérons un système dont la matrice de transfert est caractérisée par la double MFDs copremière à gauche et à droite (voir (1.122) et (1.137)) :

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & 1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = N(s)D^{-1}(s) \tag{1.184}$$

$$= \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s) \tag{1.185}$$

Utilisant la MFD copremière à droite (1.184) afin de déterminer la matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ paramétrant la loi de commande par retour d'état dans le domaine fréquentiel.

Les degrés des colonnes de la matrice polynomiale $D(s)$ sont $\delta_{c1}[D(s)] = 2$, $\delta_{c2}[D(s)] = 1$ avec $\Gamma_c[D(s)] = I$. Donc, en appliquant le théorème (6), la matrice polynomiale $\tilde{D}(s)$ obéit à la forme suivante :

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + \alpha s + \beta & \gamma \\ \delta s + \epsilon & s + \varphi \end{bmatrix} \tag{1.186}$$

où α, β, γ, δ, ϵ et φ sont les $q \times n = 6$ paramètres libres qui existent dans la synthèse fréquentielle.

Par exemple, si nous souhaitons que la loi de commande place tous les trois valeurs propres, notées $(\tilde{s}_i, i = 1, 2, 3)$, du système $(n = 3)$ à $\tilde{s}_i = -5$, nous avons plusieurs possibilités dans le choix des paramètres libres. En effet, soit

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 10s + 25 & 0 \\ 2s + 10 & s + 5 \end{bmatrix} \tag{1.187}$$

pour $\alpha = 10$, $\beta = 25$, $\gamma = 0$, $\delta = 2$, $\epsilon = 10$ et $\varphi = 5$, qui vérifie bien $det\ \tilde{D}(s) = (s+5)^3$.

Remarque 5 *Nous pouvons choisir une structure diagonale pour $\tilde{D}(s)$, de façon à avoir des degrés de libertés de plus, $(\gamma,\ \delta,\ \epsilon)$ par exemple, et les exploiter pour satisfaire des exigences supplémentaires sur le système en boucle fermé (Voir l'approche paramétriques (parametric approach) [HD09]).*

L'equivalent de la matrice dénominateur $\tilde{D}(s)$ donné par (1.187) dans le domaine temporel, peut être obtenu en appliquant le lemme (2), et nous aurons :

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 24 \\ -4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.188}$$

Dans une seconde étape, en utilisant la MFD copremière à gauche (1.185), nous cherchons à déterminer la forme de $\tilde{\bar{D}}(s)$ qui paramétrise l'observateur d'ordre plein dans le domaine fréquentiel. En appliquant le théorème (7), nous aurons la forme suivante :

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \begin{bmatrix} s+\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_1 & s+\epsilon_1 & \varphi_1 \\ \eta_1 & \lambda_1 & s+\mu_1 \end{bmatrix} \tag{1.189}$$

où α_1, β_1, γ_1, δ_1, ϵ_1, φ_1, η_1, λ_1, μ_1 sont les $p \times n = 9$ paramètres libres qui existent dans la synthèse fréquentielle.

En effet, les degrés des lignes de la matrice polynomiale $\bar{D}(s)$ sont $\delta_{r1}[\bar{D}(s)] = 1$, $\delta_{r2}[\bar{D}(s)] = 1$ et $\delta_{r3}[\bar{D}(s)] = 1$ avec $\Gamma_r[\bar{D}(s)] = I$, d'ou résulte la forme (1.189).

D'autre part, si nous souhaitons fixer les pôles de l'observateur à $\tilde{\bar{s}}_i = -4$, nous pouvons choisir $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -1$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 16$, $\epsilon_1 = 8$, $\varphi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 4$, qui vérifie bien $det\ \tilde{\bar{D}}(s) = (s+4)^3$ et nous aurons par la suite la matrice suivante :

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 16 & s+8 & 0 \\ 0 & 0 & s+4 \end{bmatrix} \tag{1.190}$$

De même, en appliquant le lemme (3), l'equivalent temporel de la matrice $\tilde{\bar{D}}(s)$, est

$$K_f = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 16 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.191}$$

Une fois nous avons déterminé les deux matrices polynomiales $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\bar{D}}(s)$, nous passons à la troisième étape du calcul du correcteur basé observateur, donnée dans la partie (1.6.4), et nous aurons :

$$Y(s) = \begin{bmatrix} -1 & s+2 & 0 \\ s+2 & -s-1 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad X(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.192}$$

Ensuite, d'après (1.181) nous aurons

$$\bar{V}(s) = \begin{bmatrix} 15s^2+167s+528 & s^3+19s^2+123s+297 & s^2+14s+64 \\ s^2+20s+108 & s^2+14s+60 & s+10 \end{bmatrix} \tag{1.193}$$

Une solution pour la conversion (1.172), tel que $\Delta(s)$ soit de lignes réduites, est

$$V(s) = \begin{bmatrix} v1(s) & v2(s) & v3(s) \\ v4(s) & v5(s) & v6(s) \end{bmatrix} \tag{1.194}$$

et

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} 0.45s + 1.8 & -s - 4 \\ s^2 + 8s + 16 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.195}$$

avec

$v1(s) = -1.45s^2 - 13.8s - 35.4$, $v2(s) = 0.45s^3 + 5.75s^2 + 24.1s + 32.4$,
$v3(s) = 0.45s^2 + 5.3s + 18.8$, $v4(s) = -s^3 - 17s^2 - 104s - 528$,
$v5(s) = s^4 + 19s^3 + 138s^2 + 464s + 528$ et $v6(s) = s^3 + 18s^2 + 120s + 256$.

Insérant ces résultats dans (1.182) et (1.183), nous aurons

$$N_C(s) = \begin{bmatrix} -9.6 & -2.4 & 13.6 \\ 272s + 128 & 128s + 272 & 88s + 272 \end{bmatrix} \tag{1.196}$$

et

$$D_C(s) = \begin{bmatrix} 0.45s + 3.4 & -s - 8 \\ s^2 + 16s - 272 & -400 \end{bmatrix} \tag{1.197}$$

Ainsi, le correcteur basé observateur est bien déterminé. Il place les trois valeurs propres $\tilde{s}_{i=1,2,3}$ du système à commandé, à $\tilde{s} = -5$ et les trois valeurs propres $\tilde{\tilde{s}}_{i=1,2,3}$ de l'observateur à $\tilde{\tilde{s}} = -4$.

En résumé, une synthèse complète d'un correcteur basé sur un observateur standard peut être effectuée directement dans le domaine fréquentiel et ceci sans passer par le domaine temporel.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques outils fondamentaux, nécessaires pour l'estimation d'état. En effet, nous avons commencé par rappeler quelques notions et définitions structurelles, pour passer après à l'étude du problème d'observation pour les systèmes linéaires sans perturbations. Dans un premier temps nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateurs standards, d'ordre plein et réduit. Dans un second temps, nous avons abordé l'estimation d'une fonctionnelle de l'état aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Ensuite, nous avons enchaîner par une extension du problème d'observation à la classe la plus générale des systèmes singuliers à savoir les systèmes singuliers, en traitant le cas d'ordre plein ainsi que l'ordre réduit. Enfin, nous avons clôturé le chapitre par une proposition d'une méthode de synthèse de correcteur basé sur un observateur d'ordre plein directement dans le domaine fréquentiel, sans passer par le domaine temporel, pour les systèmes linéaires standards. Le correcteur est caractérisé par une MFD copremière à gauche, et après avoir établi les relations nécessaires à cette synthèse, la correspondance entre le domaine temporel et fréquentiel est bien illustrée, ce qui permet de passer du domaine fréquentiel au domaine temporel et vice versa. Une application numérique qui illustre la méthode de synthèse fréquentiel directe du correcteur basé observateur est présentée.

Chapitre 2

Observateurs à entrées inconnues

2.1 Introduction

La recherche d'observateurs linéaires à entrées inconnues en temps continu ou discret, a suscité ces dernières années une abondante littérature, en raison d'applications potentielles dans divers domaines, comme le diagnostic ou la cryptographie. En effet, un processus physique est souvent exposé à des entrées à propos desquelles nous ne disposons d'aucune information. D'où l'importance de l'étude des observateurs à entrées inconnues, qui sont des observateurs permettant d'estimer l'état d'un système sujet à des entrées totalement inconnues (même pas la bornitude de l'énergie). Dans ce cas, nous cherchons à éliminer l'effet de ces entrées inconnues sur la dynamique de l'erreur d'estimation entre l'état réel et l'état reconstruit. Ces entrées inconnues, résultent essentiellement du bruit, des incertitudes de mesures ou des perturbations de quelque nature que ce soit... et imposer une bornitude aux amplitudes de ces entrées constitue des hypothèses irréalistes. Nous commençons par un positionnement du problème puis nous rappelons les conditions d'existences des observateurs à entrées inconnues. Ceci étant, et en se basant sur [Hay95], nous nous intéressons dans un premier volet aux observateurs fonctionnels à entrées inconnues aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Puis, dans un second temps nous proposons une méthode de synthèse d'observateurs d'ordre réduit relative aux systèmes singuliers sujets à des entrées inconnues. Nous terminerons le chapitre en traitant des systèmes descriptifs à retard constant sujet à ce type d'entrées, en proposant une méthode aussi bien temporel que fréquentiel de synthèse. En effet, pour la méthode temporelle de synthèse d'observateurs d'ordre réduit à entrées inconnues, et après avoir fait des transformations sur le système singulier initial dans le but d'extraire la partie des mesures libre des entrées inconnues, nous proposons de déterminer le gain paramétrant les matrices de l'observateur en appliquant l'approche Lyapunov-LMI. Ensuite, en proposant des MFDs judicieuses et en appliquant l'approche de factorisation, une description fréquentielle de l'observateur à entrées inconnues est alors obtenue. Un exemple numérique est proposé pour valider la méthode de synthèse. Enfin, nous avons traiter le cas des observateurs fonctionnels à entrées inconnues pour des systèmes singuliers à retard constant. La méthode temporelle est basée sur le non biais du filtre et les matrices de l'observateur fonctionnel sont déterminées en utilisant l'approche LMI, après avoir considérer

la fonction Lyapunov-Krasovskii. En suite une description fréquentielle de cet observateur fonctionnel est obtenue en utilisant les MFDs et en appliquant l'approche de factorisation relative aux matrices de transfert présentant un retard. Un exemple de simulation validant l'approche proposée est présenté.

Nous tenons à noter que nous avons fait le choix dans ce chapitre de traiter des situations différentes pour essayer de balayer le champ le plus vaste des observateurs. En effet, nous traitons ici le cas des observateurs d'ordre réduit, fonctionnels et des systèmes standards, singuliers, sujet à des entrées inconnues et aussi à retard.

2.2 Positionnement du problème

Considérons le système linéaire LTI perturbé suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_2 d(t) \tag{2.1}$$
$$y(t) = Cx(t) + E_3 d(t) \tag{2.2}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des mesures, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est la commande, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur contenant les entrées inconnues, E_2 *et* E_3 représentent les matrices de répartition de ces entrées inconnues sur l'état et sur les mesures.

En fait, un observateur à entrées inconnues est un observateur qui génére une erreur d'estimation $e(t)$ indépendante de l'entrée inconnue. En effet, nous aurons :

$$\dot{e}(t) = f(e(t)) \tag{2.3}$$

Les effets de l'état, de la commande et de l'entrée inconnue sont éliminés de la dynamique de l'erreur d'estimation.

Il existe dans la littérature plusieurs approches pour estimer l'état en présence de ces entrées inconnues, à savoir :

- Kudva et al.[KVR80] ont développé une approche algébrique,
- Bhattacharryya [Bha78] a utilisé une approche géométrique,
- Hautus [Hau83] a développé une approche fréquentielle,
- Darouach et al. [DZX94] ont proposé une méthode de synthèse d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein en utilisant les pseudo-inverses.

2.3 Conditions d'existence des observateurs à entrées inconnues

Dans ce qui suit, nous donnerons les deux conditions rapportées par Hautus [Hau83], elles assurent la stabilité et la causalité de l'observateur.

2.3.1 Condition de causalité

Considérons le système linéaire LTI (2.1)-(2.2), la condition de causalité donnée par Hautus [Hau83] est la suivante :

A1-

$$rang \begin{bmatrix} CE_2 & E_3 \\ E_3 & 0 \end{bmatrix} = rang\ E_3 + rang \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.3.2 Condition de stabilité

La condition de stabilité énoncée par Hautus [Hau83] est la suivante :

A2-

$$rang \begin{bmatrix} sI_n - A & -E_2 \\ C & E_3 \end{bmatrix} = n\ + rang \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}\ \forall\ s \in\ \mathbb{C}\ tel\ que\ Re(s) \geq 0. \tag{2.5}$$

Du fait de l'intérêt majeur ou de la diversité des observateurs fonctionnels, nous limitons notre rappel aux cas des observateurs fonctionnels à entrées inconnues. En effet, comme nous l'avons deja mentionné, nous essayons de traiter des situations différentes et de balayer le plus grand nombre de systèmes.

2.4 Synthèse d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues

Dans cette partie, nous proposons de rappeler une méthode de synthèse d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel [Hay95]. Pour le cas d'ordre plein, voir *Darouach et al* dans [DZX94].

2.4.1 Méthode de synthèse temporelle

Nous nous intéresserons dans cette partie, à estimer seulement une fonctionnelle de l'état donnée par $w_1(t) = P_1x(t)$ où P_1 est la matrice gain de retour d'état, indépendamment des entrées inconnues. Ceci est très utile surtout lorsque nous envisageons d'utiliser l'observateur pour la commande et aussi dans le cadre du diagnostic des défauts.

Cependant, plusieurs auteurs se sont intéressés au problème de synthèse d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues :

- Ding et al.[DFG90] ont proposé une méthode fréquentielle
- Bhattacharyya [Bha78] a utilisé une approche géométrique.

Ceci étant, considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + E_2d(t) \tag{2.6}$$

$$y(t) = Cx(t) + E_3d(t) \tag{2.7}$$

L'observateur fonctionnel à entrées inconnues se présente sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Ly(t) \tag{2.8}$$

$$\hat{w}_1(t) = Mz(t) + M_0 y(t) \tag{2.9}$$

avec

$$z(t) = T\hat{x}(t) \tag{2.10}$$

$$\hat{w}_1(t) = P_1\hat{x}(t) \tag{2.11}$$

Les matrices N, L, M *et* M_0 sont des matrices de dimensions appropriées, elles doivent être déterminées afin que $\hat{w}_1(t)$ (la sortie de l'observateur) converge asymptotiquement vers la fonctionnelle $w_1(t) = P_1x(t)$, indépendamment de l'entré inconnue $d(t)$. z représente la dynamique de l'observateur et $\hat{x}$ est l'estimé de l'état x avec $T \in \mathbb{R}^{j\times n}$ où j est l'ordre de l'observateur ($j \in [n-p,\ n]$).

Théorème 8 [Hay95] *L'observateur* (2.8)- (2.11) *converge asymptotiquement vers* $P_1x(t)$ *dans le sens,*

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{w}_1(t) - P_1x(t)) = 0 \tag{2.12}$$

si et seulement si :

$$TA - NT = LC \tag{2.13}$$

$$LE_3 = TE_2 \tag{2.14}$$

$$P_1 = MT + M_0C \tag{2.15}$$

$$M_0E_3 = 0 \tag{2.16}$$

avec

$$N \text{ est stable}$$

■

Preuve 2 *L'erreur d'observation est donnée par :*

$$e(t) = Tx(t) - z(t)$$

Alors sa dynamique est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (TA - NT - LC)x(t) + (TE_2 - LE_3)d(t)$$

donc l'existence de (2.13) *et* (2.14) *sont prouvées et l'erreur d'estimation converge si et seulement si, la matrice* N *est stable.*

D'autre part, l'equation (2.9) *peut s'écrire, si la fonctionnelle* $P_1x(t)$ *converge vers* $P_1\hat{x}(t)$*, comme suit :*

$$P_1\hat{x}(t) = (MT + M_0C)\ \hat{x}(t) + M_0E_3d(t)$$

Donc les deux conditions (2.15)*et* (2.16) *sont nécessaires afin d'avoir la convergence.*■

2.4.2 Méthode de synthèse fréquentielle

Dans ce cadre, nous présentons la méthodes de synthèse d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues basée sur la pseudo-inverse des systèmes linéaires [Hay95].

Cette synthèse d'observateur à entrées inconnues est intimement liées à un problème, très connus dans la littérature, appelé Model Matching Problem (MMP), où la technique de la pseudo-inverse est utilisée pour le résoudre. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la résolution du Model Matching, Vardulakis et al [VK85], Emre et al [EH80] ... En fait, le Model Matching Problem (MMP) est défini, dans le cas général, comme suit :

Etant données deux matrices rationnelles propres connues $P \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $T \in \mathbb{R}^{p\times q}$, trouver une matrice rationnelle propre M telle que $PM = T$. Le cas où P est propre, T est propre et stable, avec une matrice propre et stable M à déterminer, est appelé stable MMP ou (SMMP).

Reconsidérons le système régi par (2.6) et (2.7) et définissons $G(s)$, $R(s)$, $G_1(s)$ par :

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}E_2 + E_3 \tag{2.17}$$

$$R(s) = M(sI_j - N)^{-1}L + M_0 \tag{2.18}$$

$$G_1(s) = P_1(sI_n - A)^{-1}E_2 \tag{2.19}$$

où $G(s)$ la fonction de transfert du système (2.6) et (2.7), $R(s)$ la fonction de transfert de l'observateur à déterminée et $G_1(s)$ la fonction de transfert entre l'entrée inconnue d et la fonctionnelle d'état P_1x.

Le théorème suivant montre que la synthèse temporelle de l'observateur (2.8)- (2.11) est réduite dans le domaine fréquentiel à la résolution d'un Model Matching Problem (voir equation (2.24)).

Théorème 9 [HZD95]

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i)

$$TA - NT = LC \tag{2.20}$$

$$LE_3 = TE_2 \tag{2.21}$$

$$P_1 = MT + M_0C \tag{2.22}$$

$$M_0E_3 = 0 \tag{2.23}$$

ii) Il existe une matrice rationnelle R(s), propre et stable qui satisfait

$$R(s)G(s) = G_1(s) \tag{2.24}$$

■

D'après l'équation (2.24) dans le théorème (9), nous pouvons déterminer la fonction de transfert $R(s)$ de l'observateur à entrées inconnues (2.8)-(2.11), comme le montre le théorème suivant :

Théorème 10 [HZD95]

Si les hypothèses (2.4) *et* (2.5) *sont satisfaites pour le système* (2.6) *et* (2.7)*, alors l'observateur à entrées inconnues* (2.8)-(2.11) *existe et il est donné par*

$$R(s) = G_1(s)G(s)^+ \tag{2.25}$$

où $G(s)^+$ *est une pseudo-inverse de* $G(s)$ *qui vérifie* $G(s)^+G(s)=I_m$.

Un paramétrage de tous les observateurs fonctionnels à entrées inconnues est donnée par :

$$R(s) = G_1(s)G(s)^+ + Y(s)(I_p - G(s)G(s)^+) \tag{2.26}$$

où Y(s) est une matrice rationnelle arbitraire de dimension appropriée.■

Le calcul de la pseudo-inverse $G(s)^+$ peut être réalisé à l'aide de l'algorithme dû à Patel [Pat82]. En effet, d'après [Hay95], en utilisant cet algorithme, la pseudo-inverse de $G(s)$ aura l'expression suivante :

$$G(s)^+ = \tilde{\Phi}(s)^T[G_q(s)^+]^T \tag{2.27}$$

où $G_q(s)$ est la fonction de transfert du système obtenu après q itérations et $\tilde{\Phi}$ est une matrice polynomiale. Par suite, l'observateur fonctionnel à entrées inconnues fréquentiel, donné par la relation (2.25), peut s'écrire en tenant compte de (2.27) sous la forme :

$$R(s) = G_1(s)\tilde{\Phi}(s)^T[G_q(s)^+]^T \tag{2.28}$$

2.5 Synthèse d'un observateur à entrée inconnues pour les systèmes singuliers

Dans cette partie, nous nous proposons de traiter le problème d'observation à entrées inconnues pour des systèmes descriptifs [ESDM09a] aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel, en traitant spécifiquement le cas réduit afin d'éviter certaines redondances dû au cas plein. La méthode de synthèse temporelle est tirée de [DZH96] où nous proposons une approche LMI pour déterminer le gain optimal intervenant dans les matrices de l'observateur. Ensuite, la méthode de synthèse fréquentielle est déduite de celle temporelle en utilisant les MFDs et surtout l'approche de factorisation permet de donner une description polynomiale de l'observateur d'ordre réduit. Finalement, un exemple numérique est donné pour valider notre approche.

2.5.1 Position du problème

Considérons le système singulier linéaire invariant dans le temps (LTI), donné par :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_2d(t) \tag{2.29a}$$
$$y(t) = Cx(t) + E_3d(t) \tag{2.29b}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont l'état du système, la commande et la sortie du système, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ représente l'entrée inconnue. $E \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$, A, B, E_2, C et E_3 sont des matrices connues de dimensions appropriées.

Hypothèse 1 [DZH96]

1) $rang \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = m \leq p$

2) $rang \begin{bmatrix} E & A & E_2 & 0 \\ 0 & E & 0 & E_2 \\ 0 & C & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} - rang \begin{bmatrix} E & E_2 \\ 0 & E_3 \end{bmatrix} = n + m$

Hypothèse 2 [DZH96]

1) $rang\ E = r < n$

2) $rang \begin{bmatrix} C & E_3 \end{bmatrix} = p$

2.5.2 Synthèse temporelle de l'observateur d'ordre réduit

Avant de passer à la synthèse temporelle, nous tenons à faire les transformations nécessaires sur le modéle initial (2.29), pour l'existence et la synthèse de cet observateur. En fait, ces transformations nous permettent de séparer la partie des mesures libres des entrées inconnues avec celle affectées par ces entrées.

a. Transformation du modèle initial

Comme $rang\ E = r$, il existe une matrice inversible P telque

$$PE = \begin{bmatrix} E^* \\ 0_{(n_1-r)\times n} \end{bmatrix},\ PA = \begin{bmatrix} A^* \\ A_1 \end{bmatrix}$$
$$PB = \begin{bmatrix} B^* \\ B_1 \end{bmatrix},\ PE_2 = \begin{bmatrix} F \\ F_1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

avec, $P \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $E^* \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et $rang\ E^* = r$, $A^* \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $B^* \in \mathbb{R}^{r\times q}$, $F \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{(n_1-r)\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n_1-r)\times q}$ et $F_1 \in \mathbb{R}^{(n_1-r)\times m}$.

Alors, le système (2.29) peut s'écrire de manière équivalente selon (2.31),

$$E^*\dot{x}(t) = A^*x(t) + B^*u(t) + Fd(t) \tag{2.31a}$$
$$y^*(t) = C^*x(t) + D^*d(t) \tag{2.31b}$$

où

$$y^* = \begin{bmatrix} -B_1u \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_1},\ C^* = \begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_1\times n},\ D^* = \begin{bmatrix} F_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_1\times m}. \tag{2.32}$$

avec $p_1 = n_1 + p - r$.

Soit $rang\ D^* = q_1 \leq m$, alors il existe deux matrices inversibles U et V telles que

$$UD^*V = \begin{bmatrix} I_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

En mettant

$$\begin{aligned} d &= V \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ FV &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.34}$$

l'équation (2.31a) s'écrit alors

$$E^*\dot{x}(t) = A^*x(t) + B^*u(t) + F_{11}d_1(t) + F_{12}d_2(t) \tag{2.35}$$

et en utilisant (2.33), avec

$$Uy^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$UC^* = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

(2.31b) devient,

$$y_1 = C_{11}x + d_1 \tag{2.38}$$

$$y_2 = C_{12}x \tag{2.39}$$

Par conséquent à partir de (2.35), (2.38) et (2.39), le système (2.31) devient

$$E^*\dot{x}(t) = \Phi x(t) + B^*u(t) + F_{11}y_1(t) + F_{12}d_2(t) \tag{2.40a}$$

$$y_1(t) = C_{11}x(t) + d_1(t) \tag{2.40b}$$

$$y_2(t) = C_{12}x(t) \tag{2.40c}$$

avec $\Phi = A^* - F_{11}C_{11}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{p_1-q_1=p_2}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$, $rang\, C_{12} = p_2 = p_1 - q_1$ ($rang \begin{bmatrix} C & E_3 \end{bmatrix} = p$) .

Selon [DZH96], un observateur d'ordre réduit pour le système singulier (2.29) est donné par :

$$\dot{z}(t) = \Pi z(t) + L_1y_1(t) + L_2y_2(t) + Hu(t) \tag{2.41a}$$

$$\hat{x}(t) = Mz(t) + Ny_2(t) \tag{2.41b}$$

$z \in \mathbb{R}^{n-p_2}$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimée de x et les matrices Π, L_1, L_2, H, M et N sont calculées telles que $\hat{x}$ converge vers x.

b. Procédure de synthèse de l'observateur d'ordre réduit

Le théorème suivant donne la procédure de synthèse de l'observateur à entrées inconnue d'ordre réduit.

Théorème 11 [DZH96]
Soit T une matrice de dimension $(n - p_2) \times r$ vérifiant

$$T\Phi - \Pi TE^* = L_2C_{12} \tag{2.42}$$

$$TF_{12} = 0 \tag{2.43}$$

où $det \begin{bmatrix} TE^* \\ C_{12} \end{bmatrix} \neq 0$. *Alors pour*

$$H = TB^* \tag{2.44}$$
$$L_1 = TF_{11} \tag{2.45}$$

et

$$\begin{bmatrix} TE^* \\ C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p_2} & 0 \\ 0 & I_{p_2} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

nous aurons

$$\hat{x}(t) - x(t) = Me^{\Pi t}(z(0) - TE^*x(0)) \tag{2.47}$$

La convergence de l'observateur d'ordre réduit est obtenue quand Π *est une matrice de stabilité.* ■

D'après [DZH96], la matrice de l'observateur Π peut être écrite comme suit

$$\Pi = \Omega + Z\,\Gamma \tag{2.48}$$

Ω et Γ sont données dans la suite et Z est le gain de l'observateur.

Nous utilisons dans la suite, une approche LMI pour assurer la stabilité de l'observateur. Il serait que l'approche LMI présente l'avantage d'être une méthode simple à mettre en oeuvre et qui permet de prendre en compte des critères supplémentaires telle que le placement de pôles, le rejet de perturbation, l'atténuation de perturbation [BEF94]. En effet, le lemme suivant permet de déterminer la matrice Z en utilisant l'approche LMI.

Lemme 5 [ESDM09a]

Le problème de l'observation d'ordre réduit est résolu pour le système descriptif (2.29) *avec l'observateur d'ordre réduit* (2.41) *s'il existe* $X = X^T > 0 \in I\!R^{(n-p_2)\times(n-p_2)}$ *et* $Y \in I\!R^{(n-p_2)\times(r+p_2)}$ *telque la LMI suivante est satisfaite.*

$$X\Omega + \Omega^T X + Y\Gamma + \Gamma^T Y^T < 0 \tag{2.49}$$

Dans ce cas, $Z = X^{-1}Y$.■

Preuve 3 *En tenant compte de* (2.42), (2.43), (2.44), (2.45) *et* (2.48), *la dynamique de l'erreur d'estimation* $(e(t) = z(t) - TE^*x(t))$ *s'écrit*

$$\dot{e}(t) = (\Omega + Z\Gamma)e(t) \tag{2.50}$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov $V(e,t)$ *suivante :*

$$V(e,t) = e^T(t)Xe(t) \tag{2.51}$$

où $X = X^T > 0$.

En dérivant cette fonction de Lyapunov, nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{V}(e,t) &= \dot{e}^T(t)Xe(t) + e^T(t)X\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)\ (\Omega + Z\Gamma)^T Xe(t) + e^T(t)X(\Omega + Z\Gamma)\ e(t) \\ &= e^T(t)\ ((\Omega + Z\Gamma)^T X + X(\Omega + Z\Gamma))\ e(t) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Donc, si $\dot{V}(e,t) < 0$ *quand* $e(t) \neq 0$*, alors* $e(t) \to 0$ *pout* $t \to \infty$ *et par suite l'observateur est asymptotiquement stable.*

Il vient de suite donc, que si $\dot{V}(e,t) < 0$ *alors*

$$(\Omega + Z\Gamma)^T X + X(\Omega + Z\Gamma) < 0 \tag{2.53}$$

et le lemme est immédiatement prouvé en mettant $Y = XZ$.■

La procédure proposée, est résumée par les étapes suivantes :

1) Choisir une matrice R de dimension $(n - p_2) \times n$ tel que $\begin{bmatrix} R \\ C_{12} \end{bmatrix}$ est inversible.

2) La matrice M est donnée par

$$M = \begin{bmatrix} R \\ C_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-p_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

3) Calcul de Δ, φ, α, Ω et Γ intervenant dans le calcul des matrices de l'observateur (voir [DZH96]) selon :

$$\begin{aligned}\Delta &= (\begin{bmatrix} E^* \\ C_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E^* \\ C_{12} \end{bmatrix})^{-1} \\ \varphi &= \begin{bmatrix} I_r - E^*\ \Delta\ (E^*)^T \\ -C_{12}\ \Delta\ (E^*)^T \end{bmatrix} \\ \alpha &= I_r - F_{12}\ (\varphi F_{12})^+\ \varphi \\ \Omega &= R\ \Delta\ (E^*)^T \alpha\ \Phi\ M \\ \Gamma &= \varphi\ \alpha\ \Phi\ M \end{aligned}$$

4) Résoudre la LMI (2.49) et déduire le gain Z vérifiant $\Pi = \Omega + Z\Gamma$ est stable. Alors la matrice T (voir théorème (11)) est donnée par $T = (R\Delta(E^*)^T + Z\varphi)\ \alpha$

5) N est obtenue à partir de

$$N = \begin{bmatrix} TE^* \\ C_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

6) Les matrices H, L_1 sont déterminés à partir de (2.44), (2.45) et L_2 telle que $L_2 = T\Phi N$.

2.5.3 Synthèse fréquentielle de l'observateur d'ordre réduit

Dans cette partie, nous proposons une description fréquentielle de l'observateur d'ordre réduit (2.41) synthétisé dans le domaine temporel lors la dernière section (2.5.2). Cette méthode est basée sur l'approche de factorisation présentée par M. Vidyasagar [Vid85]. En effet, un outil essentiel de l'approche des systèmes par la représentation fractionnaire est la factorisation doublement copremière d'une matrice de transfert (voir relation (1.12)). Cette technique, rendue populaire par le livre de M. Vidyasagar [Vid85], est à la base de la stabilisation interne des systèmes de dimension finie, du paramétrage de Youla-*Kucěra* des contrôleurs stabilisants...

Théorème 12 [ESDM09a]

Une description fréquentielle des états estimés obtenus à partir de l'observateur d'ordre réduit (2.41) *d'ordre* $n-p_1$ *, à l'aide des factorisation copremières entre elles caractérisées par les descriptions matricielles fractionnaires (MFDs) suivantes*

i)

$$M(sI-\Pi)^{-1}L_1 = \hat{M}_1^{-1}(s)\hat{N}_1(s) \tag{2.56}$$

ii)

$$M(sI-\Pi)^{-1}H = \hat{M}_2^{-1}(s)\hat{N}_2(s) \tag{2.57}$$

iii)

$$M(sI-\Pi)^{-1}L_2 + N = \hat{M}_3^{-1}(s)\hat{N}_3(s) \tag{2.58}$$

est donnée par,

$$\hat{x}(s) \;=\; \hat{M}_1^{-1}(s) \times \Big(\; [\hat{N}_1(s) \;\; \hat{N}_3(s)] \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} + \hat{N}_2(s)\; u(s) \; \Big) \tag{2.59}$$

■

Preuve 4 *En tenant compte de* (2.41a)*, sa transformée de Laplace pour la condition initiale* $z(0)=0$*, peut s'écrire comme suit :*

$$z(s) \;=\; (sI-\Pi)^{-1}L_1y_1(s) + (sI-\Pi)^{-1}L_2y_2(s) + (sI-\Pi)^{-1}Hu(s) \tag{2.60}$$

par conséquent, en remplaçant (2.60) *dans la transformée de Laplace de* (2.41b)*, nous aurons*

$$\begin{aligned} \hat{x}(s) \;&=\; M(sI-\Pi)^{-1}L_1\; y_1(s) + M(sI-\Pi)^{-1}H\; u(s) \\ &+\; [\; M(sI-\Pi)^{-1}L_2 + N\;]y_2(s) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Dans la suite, nous proposons de faire les factorisations suivantes ($voir section(1.2)$) :

a)

$$M(sI - \Pi)^{-1}L_1 = \hat{M}_1^{-1}(s)\hat{N}_1(s) \tag{2.62}$$

avec

$$\hat{M}_1(s) = \begin{bmatrix} \Pi_l & -L & M & I \end{bmatrix} \tag{2.63}$$
$$\hat{N}_1(s) = \begin{bmatrix} \Pi_l & L_1 & M & 0 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

$\Pi_l = \Pi - LM$ *où* L *est choisie telle que* Π_l *est stable.*

b)

$$M(sI - \Pi)^{-1}H = \hat{M}_2^{-1}(s)\hat{N}_2(s) \tag{2.65}$$

avec

$$\hat{M}_2(s) = \begin{bmatrix} \Pi_l & -L & M & I \end{bmatrix} = \hat{M}_1(s) \tag{2.66}$$
$$\hat{N}_2(s) = \begin{bmatrix} \Pi_l & H & M & 0 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

c)

$$M(sI - \Pi)^{-1}L_2 + N = \hat{M}_3^{-1}(s)\hat{N}_3(s) \tag{2.68}$$

avec

$$\hat{M}_3(s) = \begin{bmatrix} \Pi_l & -L & M & I \end{bmatrix}$$
$$= \hat{M}_2(s) = \hat{M}_1(s) \tag{2.69}$$
$$\hat{N}_3(s) = \begin{bmatrix} \Pi_l & L_{2l} & M & N \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

où $L_{2l} = L_2 - LN$.

En remplaçant (2.62), (2.65) *et* (2.68) *dans* (2.61), *le théorème est ainsi prouvé.*

Notons que les représentations (2.62), (2.63), (2.66), (2.67), (2.69) *et* (2.70) *sont déduites d'après la section* (1.2) *du premier chapitre.* ■

2.5.4 Exemple numérique

Considérons le système singulier (2.29) décrit par

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $E_3 = 0$

1 - Synthèse temporelle de l'observateur d'ordre réduit

Comme $rang\ E = 2$, il existe une matrice inversible P, nous choisissons $P = I_4$ telle que

$$PE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* \\ 0 \end{bmatrix}, PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ A_1 \end{bmatrix},$$

$$PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^* \\ B_1 \end{bmatrix} \text{ et } PE_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ F_1 \end{bmatrix}.$$

Alors, nous obtenons le système singulier (2.31) décrit par

$$E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ D^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ y \end{bmatrix}$$

En appliquant l'algorithme proposé (voir section (2.5.2)), avec

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nous obtenons,

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \Delta = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & -1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ -1.0000 & -0.5000 & 3.5000 & -2.0000 \\ 1.0000 & 0 & -2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix},$$

$\Omega = -1.5000$, et $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5000 \\ 0 \\ -0.0000 \\ -0.5000 \end{bmatrix}$.

Ensuite, la résolution de la LMI (2.49) donne

$$\begin{aligned} X &= 0.5676 \\ Y &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0108 & 0 & -0.0000 & 0.0108 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.71}$$

et nous déduisons,

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0467 & 0 & 0 & 0.0467 \end{bmatrix}$$

Ainsi, nous aurons

$$\Pi = -1.5467, T = \begin{bmatrix} 1 & -0.5467 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 & -1.8455 \end{bmatrix}$$

$H = 1$, et $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5467 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ -1.0000 & 1.0000 & -1.5467 \\ 1.0000 & 0 & 0.5467 \end{bmatrix}$.

Alors, l'observateur d'ordre réduit (2.41) est ainsi déterminé.

Les figures (2.1), (2.2), et (2.3) présentent l'évolution de trois des composantes de l'erreur d'estimation. La deuxième composante étant nulle puisque $\hat{x}_2(t) = y = x_2(t)$. En effet, comme toutes les mesures sont libres des entrées inconnues ($D^* = 0$), alors $q_1 = 0$, $C_{12} = C^*$ avec ($rang\ C_{12} = 3$) et nous avons $y^* = y_2$ (voir (2.31b) et (2.40)). D'autre part, d'après (2.41b) et l'égalité $y^* = y_2$, avec les valeurs obtenues des matrices M et N, la deuxième composante de l'etat $x(t)$, notée $\hat{x}_2$, s'écrit comme suit $\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y^* = y$ et nous vérifions que $\hat{x}_2(t) = y = x_2(t)$.

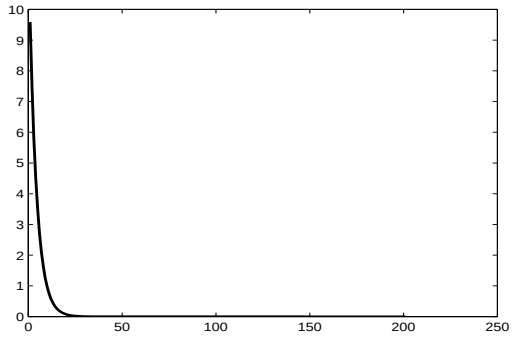


FIG. 2.1 – Evolution de la première composante de $e(t)$

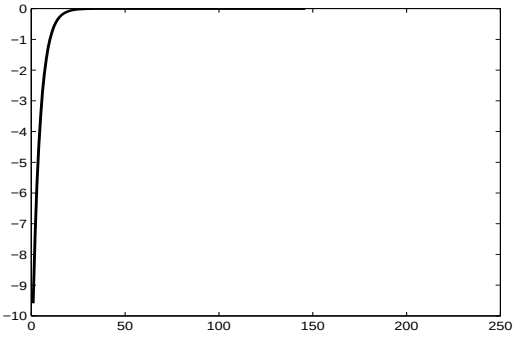


FIG. 2.2 – Evolution de la troisième composante de $e(t)$

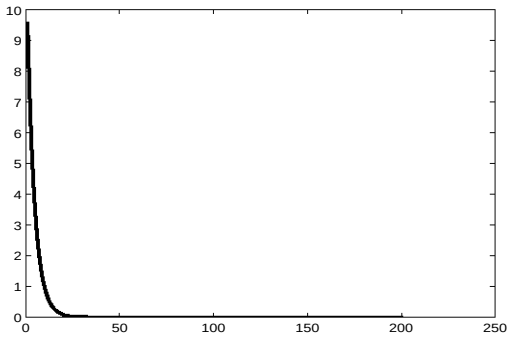


FIG. 2.3 – Evolution de la quatrième composante de $e(t)$

2 - Synthèse fréquentielle de l'observateur d'ordre réduit

Le problème de synthèse de l'observateur dans le domaine fréquentiel est réduit à déterminer les matrices polynomiales $\hat{M}_1(s), \hat{N}_2(s)$ et $\hat{N}_3(s)$ données par (2.56), (2.57) et (2.58).

Du fait que $(y_1 = 0)$, la matrice polynomiale $\hat{N}_1(s)$ ne sera par conséquent pas calculée. Il s'en suit d'après la section (2.5.3), en choisissant

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.72}$$

que les matrices utiles pour cette synthèse sont données comme suit.

D'abord, $\hat{M}_1(s)$ est

$$\hat{M}_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & -(s+0.5467)^{-1} & -(s+0.5467)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+0.5467)^{-1} & 1+(s+0.5467)^{-1} & 0 \\ 0 & -(s+0.5467)^{-1} & -(s+0.5467)^{-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

et alors son inverse nécessaire dans la synthèse de l'observateur , est donnée par

$$\hat{M}_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & (s+1.5467)^{-1} & (s+1.5467)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(s+1.5467)^{-1} & \frac{s+0.5467}{s+1.5467} & 0 \\ 0 & (s+1.5467)^{-1} & (s+1.5467)^{-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

d'autre part,

$$\hat{N}_2(s) = \begin{bmatrix} (s+0.5467)^{-1} \\ 0 \\ -(s+0.5467)^{-1} \\ (s+0.5467)^{-1} \end{bmatrix} \; et \; \hat{N}_3(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{0.5467s-0.9999}{s+0.5467} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{-1.5467s+0.4532}{s+0.5467} \\ 1 & 0 & \frac{0.5467s-0.9999}{s+0.5467} \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

Alors, selon (2.74) et (2.75), la description fréquentielle proposée (2.59) est satisfaite.

Dans le but de tracer la SVD de la réponse fréquentielle entre l'entrée inconnue $d(s)$ et l'erreur d'estimation $e(s)$, nous calculons dans la suite (pour $u(s) = 0$) l'erreur d'estimation fréquentielle $e(s)$.

En effet, du fait que $y_2(s) = y^*(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ u(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$

$$\hat{x}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.5467s^2-0.7010s-0.5466}{(s+0.5467)(s+1.5467)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1.5467s-0.5468}{s+1.5467} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0.5467s^2-0.7010s-0.5466}{(s+0.5467)(s+1.5467)} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(s) \; = M_0(s)\; x(s) \tag{2.76}$$

l'erreur d'estimation fréquentielle aura l'expression suivante

$$\begin{aligned} e(s) &= \hat{x}(s) - x(s) = (M_0(s) - I)x(s) && (2.77) \\ &= (M_0(s) - I)(sE - A)^{-1}E_2 d(s) && (2.78) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^3+1.5467s^2+1.5466s+0.5466}{s^4+3.0934s^3+3.9390s^2+2.9390s+0.8456} \\ 0 \\ \frac{-s^2-s-0.9999}{s^3+2.54676s^2+2.5467s+1.5467} \\ \frac{s^3+1.5467s^2+1.5466s+0.5466}{s^4+3.0934s^3+3.9390s^2+2.9390s+0.8456} \end{bmatrix} d(s) && (2.79) \end{aligned}$$

Finalement, nous traçons dans la figure (2.4) la représentation en SVD de la réponse fréquentielle entre $d(s)$ et $e(s)$ et nous concluions quand à l'efficacité de l'approche proposée.

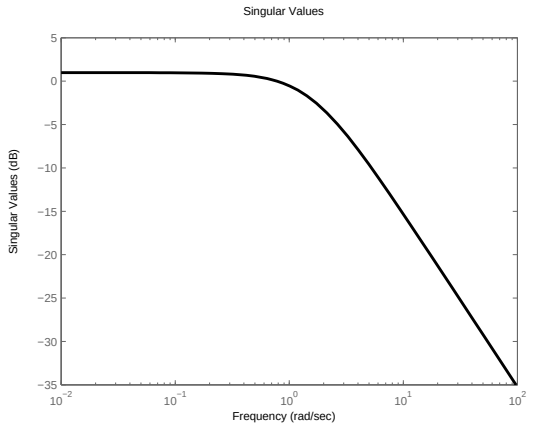


FIG. 2.4 – Représentation de la SVD du transfert entre $d(s)$ et $e(s)$

Dans la suite, et pour couvrir la classe la plus large possible des systèmes, nous proposons un observateur à entrées inconnues pour les systèmes singuliers à retard constant

[EDSM10b]. Il suffit d'éliminer les retards ou de rendre la matrice singulière non singulière pour retrouver le cas d'un système linéaire classique. Nous proposons un observateur fonctionnel pour permettre aussi de couvrir une large classe d'observateur car celui-ci peut se ramener à l'ordre plein.

2.6 Observateur à entrées inconnues pour les systèmes singuliers à retard constant

Les systèmes à retard se trouvent fréquemment dans diverses systèmes, tel que les processus chimiques, les systèmes pneumatiques et hydrauliques... (voir [Nic01], [MJ87], [HL93]). En fait, le retard impliqué dans un système provoque un rendement insatisfaisant et il est fréquemment une source d'instabilité s'il n'est pas pris en compte, d'où, l'intérêt de prendre en compte les retards lors de la synthèse d'une loi de commande pour ce genre de systèmes. Cette loi de commande est souvent réalisée avec l'hypothèse que toutes les composantes du vecteur d'état sont disponibles. Donc, du faite que cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée en pratique, il est nécessaire de construire des observateurs qui puissent estimer ce vecteur d'état.

La théorie de synthèse d'observateurs pour les systèmes à retard a été largement considérée et diverses méthodes ont été proposé (technique de transformation réduite, approche de changement de coordonnés, méthode LMI, ... [Pea89], [HZP02], [Dar01]. [Dar07], [FDS04]). D'autre part, les observateurs pour les systèmes à entrées inconnues sont de grandes importances dans la detection de défaut et dans la commande des systèmes en présence des perturbations (voir [DZX94]). Cependant, et à notre connaissance peu de recherches ont été centrées sur la synthèse des observateurs fonctionnels à entrées inconnues pour les systèmes singuliers à retard constant qui permettait de couvrir une classe plus large de systèmes.

Motivés par ces faits, une nouvelle méthode de synthèse temporelle et fréquentielle d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues pour les systèmes singuliers à retard est proposée [EDSM10b]. La méthode temporelle est basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov en considérant la fonction Lyapunov-Krasovskii, où nous donnons la condition d'existence de tels observateurs, et le gain implémenté dans la synthèse est obtenue en utilisant les LMIs. La méthode fréquentielle résulte de celle temporelle et ceci en proposant des descriptions matricielles fractionnaires judicieuses des matrices de l'observateur et surtout en appliquant l'approche de factorisation, nous obtenons une description polynomiale de l'observateur fonctionnel proposé. Un exemple numérique est proposé afin de valider l'approche proposée.

2.6.1 Position du problème

Considérons le système continu linéaire singulier à retard constant, décrit par :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_{d_1}x(t-d_1) + Bu(t) + E_2d(t) \tag{2.80a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{2.80b}$$
$$z(t) = L_zx(t) \tag{2.80c}$$

avec l'etat initial $x(\theta) = \phi(\theta)\ \forall\theta \in [-d_1, 0]$ où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la mesure, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des entrées, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur des entrées inconnues et $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est le vecteur à estimer, avec $m_z \leq n$. d_1 est le retard constant du système. Les matrices $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A, A_{d_1}, B, E_2, C et L_z sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées.

Dans la suite nous supposons que :

Hypothèse 3 [DB95]

1) $rang\ E = r_1 \leq n$

2) $rang \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

Remarque 6 *Le cas où les mesures sont affectées par des entrées inconnues a été aussi traité dans Ezzine et al.* [EDSM10c].■

2.6.2 Synthèse temporelle de l'observateur fonctionnel à entrées inconnues

Sous l'hypothèse 3, Il existe une matrice non singulière,

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

telle que,

$$a_0E + b_0C = I_n \tag{2.82}$$
$$c_0E + d_0C = 0_{p\times n} \tag{2.83}$$

Nous proposons de synthétiser un observateur fonctionnel d'ordre (m_z) pour le système singulier (2.80), de la forme :

$$\dot{\epsilon}(t) = N\epsilon(t) + N_d\ \epsilon(t - d_1) + Hu(t) + D_1\ y(t) + D_{21}\ y(t - d_1) \tag{2.84a}$$
$$\hat{z}(t) = \epsilon(t) + L_zb_0y(t) + L_zE_1d_0y(t) \tag{2.84b}$$

où $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est l'estimée de $z(t)$.

Problème 1 *: Etant donné le système (2.80), déterminer les matrices de l'observateur fonctionnel (2.84) N, N_d, H, D_1, D_{21} et E_1 telles que $\hat{z}$ converge asymptotiquement vers la fonctionnelle z.*

a. Conditions d'existences de l'observateur fonctionnel à entrées inconnues

Soit $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ l'erreur d'estimation, en utilisant (2.80c), (2.84b), (2.82) et (2.83), elle est donnée par

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) \tag{2.85a}$$
$$= L_z(I - b_0C - E_1d_0C)x(t) - \epsilon(t) \tag{2.85b}$$
$$= \psi_1Ex(t) - \epsilon(t) \tag{2.85c}$$

avec

$$\psi_1 = L_z(a_0 + E_1 c_0) \tag{2.86}$$

Les conditions d'existences de l'observateur *(2.84)* sont données dans le théorème suivant :

Théorème 13 *[EDSM10b]*

L'observateur fonctionnel (2.84) *est un observateur à entrées inconnues pour le système singulier à retard (2.80) si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites :*

i) $\dot{e}(t) = Ne(t) + N_d e(t - d_1)$ *est asymptotiquement stable.*

ii) $\psi_1 A - N\psi_1 E - D_1 C = 0$

iii) $\psi_1 A_{d_1} - N_d \psi_1 E - D_{21} C = 0$

iv) $\psi_1 E_2 = 0$

v) $H = \psi_1 B$

■

Preuve 5 *D'après* (2.80) *et* (2.84)*, la dynamique de l'erreur d'estimation donnée par* (2.85*c*)*, peut être écrite par*

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \psi_1 E\dot{x}(t) - \dot{\epsilon}(t) && \text{(2.87a)} \\ &= Ne(t) + N_d e(t - d_1) + \psi_1 E_1\ d(t) + (\psi_1 B - H)\ u(t) \\ &+ (\psi_1 A - N\psi_1 E - D_1 C)\ x(t) + (\psi_1 A_{d_1} - N_d \psi_1 E - D_{21} C)\ x(t - d_1) && \text{(2.87b)} \end{aligned}$$

avec la condition initiale $e(\theta) = z(\theta) - \hat{z}(\theta), \forall \theta \in [-d_1,\ 0]$.

Donc, si les cinq conditions $i)-v)$ *sont satisfaites, alors l'observateur fonctionnel à entrées inconnues* (2.84) *estimera asymptotiquement la fonctionnelle* $z(t)$*, indépendamment des conditions initiales et de* $u(t)$.■

b. Synthèse temporelle de l'observateur fonctionnel à entrées inconnues

Une nouvelle méthode est présentée pour synthétiser des observateurs fonctionnels à entrées inconnues de la forme (2.84) pour le système singulier à retard constant (2.80). En utilisant l'approche LMI, nous proposons une méthode de synthèse d'un observateur fonctionnel stable pour les systèmes singuliers à retard constant.

Utilisant la définition de ψ_1 (voir (2.86)) avec les equations (2.82) et (2.83), les conditions $ii) - iv)$ peuvent être écrites de la manière suivante :

$$NL_z a_0 E + K_1 C - L_z E_1 c_0 A = L_z a_0 A \tag{2.88}$$

$$N_d L_z a_0 E + K_2 C - L_z E_1 c_0 A_{d_1} = L_z a_0 A_{d_1} \tag{2.89}$$

$$-L_z E_1 c_0 E_2 = L_z a_0 E_2 \tag{2.90}$$

où

$$K_1 = D_1 - NL_zE_1d_0 \tag{2.91}$$

et

$$K_2 = D_{21} - N_dL_zE_1d_0 \tag{2.92}$$

Notons qu'une fois la matrice E_1 est déterminée, la matrice H est immédiatement déduite à partir de la condition v) du théorème (13).

Les équations (2.88)-(2.90) peuvent être transformées sous la forme matricielle suivante :

$$X\Sigma = \Theta \tag{2.93}$$

où,

$$[N \quad N_d \quad K_1 \quad K_2 \quad -L_zE_1] = X \tag{2.94}$$

$$\begin{bmatrix} L_za_0E & 0 & 0 \\ 0 & L_za_0E & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ c_0A & c_0A_{d_1} & c_0E_2 \end{bmatrix} = \Sigma \tag{2.95}$$

$$[L_za_0A \quad L_za_0A_{d_1} \quad L_za_0E_2] = \Theta \tag{2.96}$$

L'équation matricielle (2.93) a une solution X si et seulement si

$$rang \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = rang\ \Sigma \tag{2.97}$$

et une solution générale de (2.93) si elle existe pour, est donnée par

$$X = \Theta\Sigma^+ - Z(I - \Sigma\Sigma^+) \tag{2.98}$$

avec Σ^+ est l'inverse généralisée de Σ donnée par (2.95) et Z est une matrice arbitraire de dimensions appropriées, qui va être déterminée en utilisant une approche basée sur une fonction de Lyapunov de type Lyapunov krasovskii (voir [Dar07]).

Une fois la matrice Z est obtenue, la matrice X est directement déterminée (voir (2.98)) et les matrices inconnues de l'observateur fonctionnel N, N_d, K_1, K_2 et $-L_zE_1$ sont déduites facilement. En effet, nous avons

$$N = X \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.99}$$

$$= A_{11} - ZB_{11} \tag{2.100}$$

où

$$A_{11} = \Theta\Sigma^{+}\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B_{11} = (I - \Sigma\Sigma^{+})\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

La matrice N_d est donnée par,

$$N_d = X\begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.102}$$

$$= A_{22} - ZB_{22} \tag{2.103}$$

où

$$A_{22} = \Theta\Sigma^{+}\begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B_{22} = (I - \Sigma\Sigma^{+})\begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.104}$$

Ensuite,

$$K_1 = X\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.105}$$

$$= A_{33} - ZB_{33} \tag{2.106}$$

avec

$$A_{33} = \Theta\Sigma^{+}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B_{33} = (I - \Sigma\Sigma^{+})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.107}$$

La matrice K_2,

$$K_2 = X\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.108}$$

$$= A_{44} - ZB_{44} \tag{2.109}$$

où

$$A_{44} = \Theta\Sigma^{+}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\I\\0\end{pmatrix} \quad et \quad B_{44} = (I-\Sigma\Sigma^{+})\begin{pmatrix}0\\0\\0\\I\\0\end{pmatrix} \tag{2.110}$$

Enfin,

$$-L_z E_1 = X\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\I\end{pmatrix} \tag{2.111}$$

$$= A_{55} - ZB_{55} \tag{2.112}$$

avec

$$A_{55} = \Theta\Sigma^{+}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\I\end{pmatrix} \quad et \quad B_{55} = (I-\Sigma\Sigma^{+})\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\I\end{pmatrix} \tag{2.113}$$

Désormais toutes les matrices de l'observateur sont déterminées si et seulement si la matrice Z est connue.

Donc, d'après le théorème (13), après avoir vérifier la condition de rang (2.97) et en utilisant (2.99) et (2.102), la dynamique de l'erreur d'observation s'écrit

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + N_d e(t-d_1) \tag{2.114}$$

$$= (A_{11} - ZB_{11})e(t) + (A_{22} - ZB_{22})e(t-d_1) \tag{2.115}$$

Basé sur le théorème (13) et sur la théorie de stabilité de Lyapunov Krasovskii, nous donnons dans le théorème qui suit la solution (sous forme LMI) permettant d'obtenir le gain unique Z qui permette de trouver les différentes matrices de l'observateur fonctionnel (2.87) pour la classe de systèmes singuliers à retard considérée.

Théorème 14 [EDSM10b]

L'observateur fonctionnel de la forme (2.84) *est un observateur fonctionnel à entrées inconnues pour le système singulier à retard* (2.80) *s'il existe des matrices* $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ *et* Y *satisfaisant la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix} Q_1 & PA_{22} - YB_{22} \\ A_{22}^T P - B_{22}^T Y^T & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{2.116}$$

avec $Q_1 = PA_{11} + (PA_{11})^T + Q - YB_{11} - (YB_{11})^T$.

Alors le gain Z *est donné par* $Z = P^{-1}Y$.■

Preuve 6 *Considérons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :*

$$V(e,t) = e^T(t)Pe(t) + \int_{t-d}^{t} e^T(k)Qe(k)dk \tag{2.117}$$

où $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$.

En dérivant $V(e,t)$, *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} \dot{V}(e,t) &= e^T(t)[N^TP + PN + Q]e(t) - e^T(t-d_1)Qe(t-d_1) \\ &+ e^T(t)PN_de(t-d_1) + e^T(t-d_1)N_d^TPe(t) \end{aligned} \tag{2.118}$$

qui peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{V}(e,t) = \hat{e}^T(t) \times \begin{bmatrix} PN + (PN)^T + Q & PN_d \\ N_d^TP & -Q \end{bmatrix} \times \hat{e}(t) \tag{2.119}$$

avec, $\hat{e}^T(t) = \begin{bmatrix} e^T(t) & e^T(t-d_1) \end{bmatrix}$.

Si $\dot{V}(e,t) < 0$ *quand* $\hat{e}(t) \neq 0$, *alors* $e(t) \to 0$ *pour* $t \to \infty$, *et le point i) du théorème* (13) *est globalement asymptotiquement stable indépendamment du retard.*

A partir de (2.119), $\dot{V}(e,t) < 0$ *si*

$$\begin{bmatrix} PN + (PN)^T + Q & PN_d \\ N_d^TP & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{2.120}$$

en remplaçant donc (2.100) *et* (2.103) *dans* (2.120), *nous pouvons vérifier que* (2.120) *est bien équivalente à la LMI* (2.116), *en posant* $Y = PZ$.■

2.6.3 Synthèse fréquentielle de l'observateur fonctionnel à entrées inconnues

Dans cette partie, nous proposons une technique simple à mettre en oeuvre de synthèse d'un observateur fonctionnel à entrées inconnues décrite en appliquant l'approche de factorisation [Vid85] (voir aussi [DFG90]) et [YZK97]). Mais avant cela, nous tenons à faire un rappel sous forme de lemme, sur l'approche de factorisation dans le cas de matrices de transfert présentant un retard.

Lemme 6 *Considérons une matrice de transfert* $G(s)$ *donnée par,*

$$G(s) = G_0(s)e^{-\tau s} \tag{2.121}$$

où $G_0 \in I\!R(s)$ *est une matrice de transfert rationnelle strictement propre, dont une réalisation dans l'espace d'état est donnée par :*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}Be^{-\tau s} \tag{2.122}$$

avec τ *est un retard constant.*

Une double factorisation de $G(s)$ peut être écrite ([YZK97]), voir aussi ([NK90]-[Nob92]), selon :

$$G(s) = G_1(s)G_2^{-1}(s) = \hat{G}_1^{-1}(s)\hat{G}_2(s) \tag{2.123}$$

Les quatre matrices intervenant dans (2.123) *peuvent être calculées de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} G_2(s) &= K(sI - A - BK)^{-1}B + I && (2.124)\\ G_1(s) &= C(sI - A - BK)^{-1}Be^{-\tau s} && (2.125)\\ \hat{G}_1(s) &= C(sI - A - L_1C)^{-1}L_1 + I && (2.126)\\ \hat{G}_2(s) &= C(sI - A - L_1C)^{-1}Be^{-\tau s} && (2.127) \end{aligned}$$

avec K et L_1 sont choisies telles que $(sI - A - BK)$ et $(sI - A - L_1C)$ sont stables.■

Remarque 7 *Notons que dans le cas sans retard, les matrices de transfert peuvent être déduites selon l'approche de factorisation donnée par [Vid85] et [DFG90] (voir section* (1.2) *du premier chapitre).*■

Le théorème suivant présente une description polynomiale de l'observateur fonctionnel proposé pour les systèmes singuliers à retard, qui est basée sur l'approche de factorisation.

Théorème 15 *[EDSM10b]*

Considérons la factorisation première à droite suivante basée sur les descriptions matricielles fractionnaires (MFDs)

i)

$$(sI - N_1(s))^{-1}D_{21}e^{-d_1 s} = N_2(s)M_2^{-1}(s) \tag{2.128}$$

avec

a) $N_1(s) = N + N_d e^{-d_1 s}$

b) Les deux matrices polynômiales $N_2(s)$ et $M_2(s)$ sont copremières à droite. Ces matrices de transfert peuvent être calculées à partir de l'approche de factorisation relative aux matrices de transferts à retard présentée dans le lemme (6).

ii)

$$(sI - N_1(s))^{-1}H = N_3(s)M_3^{-1}(s) \tag{2.129}$$

iii)

$$(sI - N_1(s))^{-1}D_1 + D_0 = N_4(s)M_4^{-1}(s) \tag{2.130}$$

avec $D_0 = L_z b_0 + L_z E_1 d_0$.

Notons que les matrices polynômiales, $N_3(s)$, $M_3(s)$, $N_4(s)$ et $M_4(s)$ peuvent être calculées selon la remarque (7).

Alors, une représentation dans le domaine fréquentiel de l'observateur fonctionnel (2.84) *d'ordre* m_z , $m_z \leq n$, *relative au système singulier à retard constant* (2.80) *est donnée par,*

$$\hat{z}(z) = N_3(s)M_3^{-1}(s)\ u(s) + \ [N_2(s)M_2^{-1}(s) + N_4(s)M_4^{-1}(s)]\ y(s) \quad (2.131)$$

avec

$$\begin{aligned} N_2(s) &= (sI - N_1(s) - D_{21}K)^{-1}D_{21}e^{-d_1 s} && (2.132)\\ M_2(s) &= K(sI - N_1(s) - D_{21}K)^{-1}D_{21} + I && (2.133)\\ N_3(s) &= (sI - N_{1K_1}(s))^{-1}H && (2.134)\\ M_3(s) &= K_3(sI - N_{1K_1}(s))^{-1}H + I && (2.135)\\ N_4(s) &= (I + D_0K_4)(sI - N_{1K_2}(s))^{-1}D_1 + D_0 && (2.136)\\ M_4(s) &= K_4(sI - N_{1K_2}(s))^{-1}D_1 + I && (2.137) \end{aligned}$$

K_3, K_4 et K sont telles que $N_{1K_1}(s) = N_1(s) + HK_3$, $N_{1K_2}(s) = N_1(s) + D_1K_4$ et $det(sI - N_1(s) - D_{21}K)$ sont stables .■

Preuve 7 *La transformée de Laplace de* (2.84*a*) *s'écrit*

$$\begin{aligned} \epsilon(s) &= (sI - N_1(s))^{-1}Hu(s) + (sI - N_1(s))^{-1}D_1y(s)\\ &+ (sI - N_1(s))^{-1}D_{21}e^{-d_1 s}y(s) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Donc, La transformée de Laplace de l'estimée $\hat{z}(s)$ (2.84*b*)*, s'écrit en tenant compte de* (2.138) *selon*

$$\begin{aligned} \hat{z}(z) &= (sI - N_1(s))^{-1}Hu(s) + (sI - N_1(s))^{-1}D_{21}e^{-d_1 s}y(s)\\ &+ [(sI - N_1(s))^{-1}D_1 + D_0]y(s) \end{aligned} \quad (2.139)$$

Par conséquent et en tenant compte des MFDs copremières à droite $(2.128) - (2.130)$*, la description fréquentielle* (2.131) *est bien démontrée.*■

2.6.4 Exemple numérique

Nous considérons le système singulier présenté dans la section (2.6.1), avec

$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$, $A_{d_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1 - Synthèse temporelle de l'observateur à entrées inconnues

En appliquant la procédure de synthèse proposée, nous obtenons les résultats suivants :
1)

$$a_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, c_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, d_0 = 0$$

2)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5000 & 0 & 1.0000 & 2.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) En utilisant la LMI Control Toolbox de Matlab, nous aurons

$$\begin{aligned} P &= 1.4144 \\ Q &= 1.0608 \\ Y &= \begin{bmatrix} 352.3960 & -70.9485 & 229.1736 & -142.2995 & -141.2222 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 249.1442 & -50.1606 & 162.0259 & -100.6058 & -99.8442 \end{bmatrix}$$

4)

$$N = -0.7500, \quad N_d = -0.5000, \quad H = 1$$

$$D_1 = 0.7500, \quad D_{21} = 1.5000, \quad L_z E_1 = -0.5000$$

2 - Synthèse fréquentielle de l'observateur à entrées inconnues

Soit $d_1 = 0.1$. En utilisant l'approche de factorisation selon la section (2.6.3), avec $K = -1$, $K_3 = -7.25$, $K_4 = -8$ et $N_1(s) = -0.75 - 0.5e^{-0.1s}$, les matrices polynomiales implémentées dans la synthèse fréquentielle de l'observateur à entrées inconnues sont alors données par :

$$N_2(s) = \frac{1.5e^{-0.1s}}{s + 0.5e^{-0.1s} + 2.25}, \; M_2(s) = \frac{s + 0.5e^{-0.1s} + 0.75}{s + 0.5e^{-0.1s} + 2.25}.$$

$$N_3(s) = \frac{1}{s + 0.5e^{-0.1s} + 8}, \; M_3(s) = \frac{s + 0.5e^{-0.1s} + 0.75}{s + 0.5e^{-0.1s} + 8}$$

$$N_4(s) = \frac{0.75}{s + 0.5e^{-0.1s} + 6.75}, \; M_4(s) = \frac{s + 0.5e^{-0.1s} + 0.75}{s + 0.5e^{-0.1s} + 6.75}$$

La description fréquentielle proposée (2.131) de l'observateur à entrées inconnues relative au système singulier à retard constant est alors obtenue.

Finalement, avec $e(0) = 1.5$ comme condition initiale, les figures (2.5) et (2.6) montrent le comportement temporel et fréquentiel de l'observateur à entrées inconnues du système singulier à retard (2.80).

Nous pouvons en conclure quand à l'efficacité de notre approche.

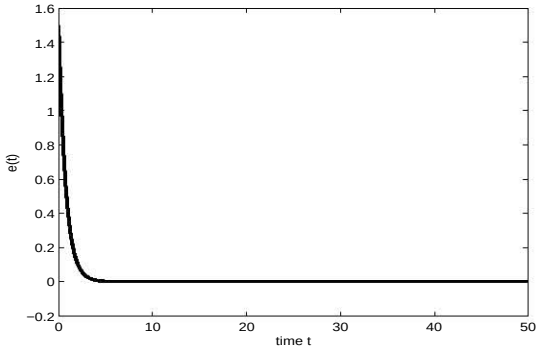


FIG. 2.5 – Evolution de l'erreur d'estimation $e(t)$

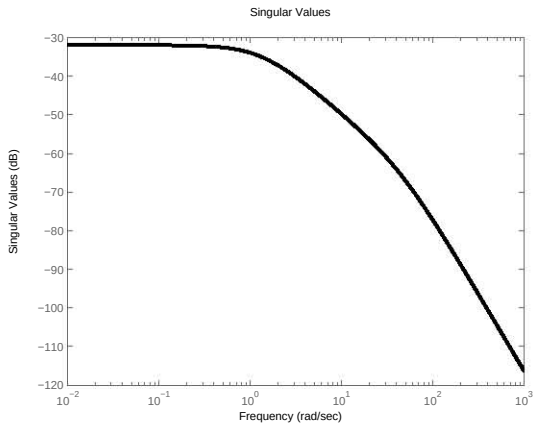


FIG. 2.6 – Représentation de la SVD du transfert entre $d(s)$ et $e(s)$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des méthodes de synthèses d'observateurs à entrées inconnues aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. L'intérêt de ce type d'observateurs réside dans le fait que nous estimons l'état du système sans aucune connaissance sur l'entrée inconnue. Dans une première étape nous avons rappelés les conditions d'existence de ces observateurs. Puis nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateurs fonctionnels à entrées inconnues dans le domaine temporel et fréquentiel. Ensuite, nous avons proposé deux méthodes de synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour le cas des systèmes singuliers. Une dans le domaine temporel, où nous avons fait des transformations sur le modèle initial afin d'extraire la partie des mesures libres des entrées inconnues, et nous avons appliqué l'approche Lyapunov afin de déterminer la matrice de gain Z paramétrant les matrices de l'observateur sous forme de LMI. La seconde approche

déduite de la première, utilise les MFDs et l'approche de factorisation, pour aboutir à une description fréquentielle de l'observateur à entrées inconnues. Un exemple numérique a été proposé pour valider notre approche. Enfin comme dernière partie du chapitre, nous avons porté notre attention sur les systèmes singuliers présentant un retard constant et ceci en proposant une méthode temporelle et une autre équivalente dans le domaine fréquentielle permettant de synthétiser des observateurs fonctionnels pour ce type de systèmes. La méthode temporelle est basée sur l'approche Lyapunov-krasovkii, et celle fréquentielle sur l'approche de factorisation relative aux matrices de transfert avec retard. Enfin, nous avons testé l'approche proposée sur un exemple numérique. Notons que nous avons juste choisis de traiter le retard dans ce chapitre et que nous pourrions impliquer ce retard pour le filtrage H_∞, objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Filtrage H_∞

3.1 Introduction

Le problème d'observation ou de filtrage (estimation tout en minimisant l'influence des perturbations sur l'erreur d'estimation) du vecteur d'état (ou d'une partie de ce vecteur) d'un système LTI déterministe ou stochastique, se résume dans l'estimation des états ou une combinaison linéaire des états d'un système en utilisant les entrées et les sorties disponibles. Deux critères de performances pour le problème de filtrage existent dans la littérature et ils sont très utilisés, à savoir les normes H_2 et H_∞ ; le filtrage H_∞ est choisi dans ce chapitre, du fait que contrairement au filtrage de Kalman, il nécessite aucune connaissance sur les perturbations à part qu'elles soient à énergie bornée : il procède par minimisation de l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation, et ceci contrairement au problème traité dans le chapitre précèdent où du fait que nous n'avons aucune information sur les entrées inconnues, nous avons choisi d'annuler leurs effets sur la dynamique de l'erreur d'estimation ; le découplage entre l'erreur d'estimation et les entrées inconnues peut se révéler d'ailleurs contraignant.

Il existe dans la littérature plusieurs approches pour résoudre le problème de l'estimation ou filtrage H_∞, nous citons :

- L'approche par l'équation de Riccati, (voir Nagpal et al.[NJ91] ...)
- L'approche par Lyapunov (LMI), (voir Darouach et al. [DZS01], Li [LF97], [NK91]...)
- L'approche polynomiale, (voir Ding et al. [DFG90], Deutscher [Deu02]...)
- Le lien entre l'approche polynomiale et celle de l'équation de Riccati (voir [Gri93]).

Dans la suite, nous proposons deux méthodes de synthèse de filtres d'ordre plein [EDSM10b] et [ESDM11b], de filtres fonctionnels [EDSM10a] ainsi qu'une extension du problème de filtrage aux systèmes singuliers [ESDM10a], aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Toutes les mesures du processus considéré sont affectées par des perturbations à énergie finie.

Le chapitre est organisé comme suit : dans la troisième paragraphe nous nous intéressons à la synthèse de filtre H_∞ d'ordre plein en utilisant l'equation de Riccati. Nous commençons par la position du problème de filtrage H_∞ puis nous procédons à la synthèse temporelle et nous terminons par une synthèse fréquentielle en utilisant les MFDs.

La même démarche sera adoptée dans les paragraphes 5 et 6 respectivement pour le filtrage fonctionnel H_∞ des systèmes non singuliers et singuliers. Pour la paragraphe 4 nous nous sommes intéressés à une synthèse fréquentielle directe des observateurs fonctionnels par rapport aux perturbations à énergie bornée. Ces différents types de filtres H_∞ ont été testé sur des exemples numériques et ont montré de très bons comportement.

3.2 Définitions et Rappel

Avant de commencer ce chapitre, nous donnons ici quelques définitions et un rappel qui nous seront utile dans la suite.

3.2.1 Définitions H_∞ et L_2

Considérons le système LTI décrit par

$$G := \left\{ \begin{array}{rcl} \sigma x & = & Ax + Bw \\ z & = & Cx + Dw \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $z(t) \in \mathbb{R}^p$, le vecteur de sortie et $w(t) \in \mathbb{R}^m$ celui de l'entrée.

Définition 19 (Norme H_∞) [Fra87]
La norme H_∞ du système (3.1)*, stable ou instable, est définie par*

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in I\!R} \lambda_{max}(G(j\omega)G^T(-j\omega)) \tag{3.2}$$

dans le cas où le système (3.1) *est continu et n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire, avec λ_{max} est la valeur propre du module maximale de $(G(j\omega)G^T(-j\omega))$, et par*

$$\|G\|_\infty := \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \bar{\sigma}\left(G\left(\exp(j\theta)\right) G^T\left(\exp(-j\theta)\right)\right) \tag{3.3}$$

dans le cas où le système (3.1) *est discret et n'a pas de pôle sur le cercle unité, avec $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de $(G(\exp(j\theta))\ G^T(\exp(-j\theta)))$.*

Définition 20 (Energie d'un signal) *L'énergie E_0 d'un signal $w(t)$ est l'intégrale de sa puissance, et il est donné par*

$$E_0 = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt \tag{3.4}$$

La norme H_∞ d'une fonction de transfert représente le maximum sur toute la bande de fréquence de la valeur singulière maximale ($\bar{\sigma}$) de la réponse fréquentielle du système considéré. Elle est recommander pour traiter les problèmes de robustesse.

Que ce soit le système est stable ou instable, la norme H_∞ est définie par (3.2), tant que le système ne possède pas de pôles sur l'axe imaginaire. En effet, $\|\frac{1}{s+1}\|_\infty = \|\frac{1}{s-1}\|_\infty = 1$, tandis que $\|\frac{1}{s}\|_\infty = \infty$. Toutefois, pour une entrée bornée, le système $\frac{1}{s+1}$ possède une sortie bornée, ce qui n'est pas vrai pour le système $\frac{1}{s-1}$. Il est donc nécessaire de définir le gain L_2.

Définition 21 (Gain L_2) [GNLC93]

Si le système (3.1) *est asymptotiquement stable, alors, $w(t) \in L_2$ implique $z(t) \in L_2$ et, pour $x(0) = 0$, le gain L_2 du système* (3.1) *est donné par*

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \ , \ \|w\|_2 \neq 0 \tag{3.5}$$

dans le cas continu et par

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \ , \ \|w\|_2 \neq 0 \tag{3.6}$$

dans le cas discret.

La notion de gain L_2 est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes. En effet, il sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système.

Remarque 8 (Norme H_∞ et gain L_2) *La relation (3.5) peut être vue comme un gain fréquentiel ou temporel sur les signaux (la norme L_2 d'un signal temporel est la même que la norme L_2 de la transformée de Laplace de ce même signal). Ainsi, pour un système stable, la norme H_∞ de la fonction de transfert est la norme induite L_2 de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain L_2 du système.*■

D'autre part, du faite que la majorité de nos résultats repose sur l'utilisation des LMIs, nous proposons dans la suite de rappeler un résultat utile relative à la résolution de ces inégalités matricielles linéaires à savoir le lemme de Shur.

3.2.2 Rappel : Lemme de Schur

Lemme 7 (Lemme de Schur) [BEF94]

Etant données trois matrices Q, R et S ($Q = Q^T$ et $S = S^T$), les deux propositions suivantes sont équivalentes

(i)

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix} < 0 \tag{3.7}$$

(ii)

$$S < 0 \ et \ Q - RS^{-1}R^T < 0. \tag{3.8}$$

La matrice $Q - RS^{-1}R^T$ est aussi appelée complément de Schur de S. Il faut remarquer également que l'inégalité peut changer de sens.■

3.3 Filtre H_∞ d'ordre plein en utilisant l'équation de Riccati et les MFDs

3.3.1 Position du problème

Considérons le système LTI multivariable suivant,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D_2 w(t) \tag{3.9}$$
$$y(t) = Cx(t) + D_3 w(t) \tag{3.10}$$
$$z(t) = L_z x(t) \tag{3.11}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de mesures, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ représente les perturbations, et $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est la sortie non mesurée à estimer. La matrice D_3 de dimension $(p,\ m_1)$ est telle que toutes les mesures $y(t)$ soient affectées par $w(t)$. De plus, nous supposons que :

Hypothèse 4 *i)* $R = D_3 D_3^T > 0$

ii) $\left[\begin{pmatrix} L_z \\ C \end{pmatrix},\ A\right]$ *est detectable, et* $(A,\ D_2)$ *est stabilisable.*

iii) La condition initiale $x(0)$ *est considérée être connue et, par souci de simplicité et sans perte de généralité, elle pourra être mise à zéro.*

Le but du filtrage H_∞ est de déterminer un filtre qui minimise l'erreur d'estimation du pire cas $\|e\|_2$ par rapport aux perturbations à énergie bornée w. Définissons le critère d'atténuation H_∞ suivant

$$\bar{J} = sup_{\ w \in\ L_2[0,\ \infty)} \frac{\|z - \hat{z}\|_2}{\|w\|_2} = \|F_{ew}\|_\infty \tag{3.12}$$

$\|w\|_2 \neq 0$ et $F_{ew}(s)$ est la matrice de transfert des perturbations w à l'erreur d'estimation $e = z - \hat{z}$.
Par conséquent le problème de filtrage est équivalent au problème de minimisation suivant :

Problème de filtrage H_∞ : Supposons que les hypothèses $(i - iii)$ soient satisfaites. Nous cherchons à déterminer, pour un scalaire $\gamma > 0$ fixé, un filtre stable tel que le critère (3.12) satisfait $\bar{J} < \gamma$.

Remarque 9 *Il faut noter que* γ *est une borne supérieure, donc le transfert entre les perturbations et l'erreur d'estimation est au plus égal à* γ*, très souvent il est inférieur.*■

3.3.2 Synthèse du filtre H_∞ dans le domaine temporel en utilisant l'approche Riccati

Parmi les techniques existantes dans la littérature pour résoudre le filtrage H_∞, nous utiliserons celle utilisant l'equation de Riccati (voir [Gri93]). Ainsi, nous considérons le

filtre d'ordre plein pour le système ((3.9)-(3.11)) donné par

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K_{f_1}(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3.13)$$
$$\hat{z}(t) = L_z\hat{x}(t) \quad (3.14)$$

avec

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (3.15)$$

L'erreur d'estimation (d'ordre plein) est donnée par

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.16)$$

Alors, la dynamique de l'erreur d'estimation (d'ordre plein) obéit à :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.17)$$
$$= (A - K_{f_1}C)\varepsilon(t) + (D_2 - K_{f_1}D_3)w(t) \quad (3.18)$$

Notre objectif, de minimiser l'effet des perturbations $w(t)$ sur $e(t)$, résolu par l'utilisation du filtre ((3.13)-(3.14)) où le gain K_{f_1} est donné par le lemme suivant :

Lemme 8 *[EDSM10b]*
Considérons le système $((3.9) - (3.11))$ *et supposons que l'hypothèse* 4 *du problème de filtrage* H_∞ *est satisfaite. Alors le problème de filtrage* H_∞ *est résolu par le filtre d'ordre plein* $((3.13) - (3.14))$ *avec le gain*

$$K_{f_1} = (YC^T + D_2D_3^T)R^{-1} \quad (3.19)$$

où $Y = Y^T \geq 0$ *est une solution stabilisante de l'équation de Riccati algébrique*

$$(A - D_2D_3^TR^{-1}C)Y + Y(A - D_2D_3^TR^{-1}C)^T + Y(\gamma^{-2}L_z^TL_z - C^TR^{-1}C)Y + D_2(I - D_3^TR^{-1}D_3)D_2^T = 0 \quad (3.20)$$

Le scalaire γ *représente une borne supérieure de la norme* H_∞ *de l'erreur de filtrage. La valeur minimale de* γ *correspond à la valeur optimale de la norme* H_∞ *et il est déterminé par itération.*■

Preuve 8 *Le gain du filtre* (3.19) *et l'équation de Riccati* (3.20) *sont déduites d'après Grimble* [Gri93].■

3.3.3 Synthèse du filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel en utilisant les MFDs

a. Descriptions matricielles fractionnaires (MFDs) du filtre

Une erreur fictive $(z(t)-\hat{z}(t))$, (avec $z(t)$ non mesurable), est utilisée (voir [EDSM10b]) afin de donner une description fréquentielle du filtre d'ordre plein ((3.13)-(3.14)). Notons

que du faite que $z(t)$ est non mesurable, nous appelons $(z(t)-\hat{z}(t))$ l'erreur fictive et le filtre contenant cette erreur fictive est appelée filtre fictif (voir (3.21)). De plus l'intérêt majeur de cette approche utilisant une erreur fictive, vient du faite qu'elle nous permette, comme nous le montrons dans la suite, de pouvoir développer une synthèse directe dans le domaine fréquentielle. De plus, nous l'utilisons lors du dernier chapitre pour une synthèse d'une commande via un filtre H_∞. Le paramétrage de la dynamique du filtre H_∞ (non fictif) dans le domaine fréquentiel est obtenue en deux étapes ; en déterminant dans une première étape, la matrice dénominateur (fictive) du filtre (fictif) via une equation matricielle (voir théorème (16)), ensuite en déduire la matrice dénominateur du filtre H_∞ (implémentable, non fictive) via l'equation (3.35), comme nous le montrons dans la suite.

Remarque 10 *Nous distinguons entre $(z(t) - \hat{z}(t))$ l'erreur fictive (non mesurable) et $(y(t) - \hat{y}(t))$ l'erreur non fictive (implémentable où mesurable). De plus, ces deux erreurs fictives induisent d'une part un gain de retour fictif K_{f_z} et d'autre part un gain de retour non fictif (implémentable) K_{f_1}. Donc,*

i) Un filtre fictif est un filtre possédant une erreur fictive $(z(t) - \hat{z}(t))$ associée à un gain de retour fictif K_{f_z} (voir (3.21)).

ii) Un filtre non fictif où implémentable est un filtre possédant une erreur non fictive $(y(t) - \hat{y}(t))$ associée avec un gain de retour fictif K_{f_1} (voir (3.13)).

iii) Il suffit de mettre le gain fictif $K_{f_z} = 0$ pour obtenir la représentation d'état du filtre non fictif (voir (3.21)).

D'autre part, ces deux filtres seront paramètrès dans le domaine fréquentiel comme suit :

a) Les dynamiques du filtre fictif sont paramétrées par la matrice polynomiale $\tilde{\tilde{D}}_f(s)$.

b) Les dynamiques du filtre non fictif sont paramétrées par la matrice polynomiale $\tilde{\tilde{D}}(s)$.

Une relation reliant ces deux matrices polynomiales est donnée dans la suite par le lemme (11).■

Donc, ((3.13)-(3.14)) peut être réécrit selon

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + [K_{f_z} \quad K_{f_1}] \begin{bmatrix} z(t) - \hat{z}(t) \\ y(t) - \hat{y}(t) \end{bmatrix} \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) &= L_z\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{3.21}$$

où de manière équivalente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - K_{f_z}L_z - K_{f_1}C)\hat{x}(t) + [K_{f_z} \quad K_{f_1}] \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ \hat{z}(t) &= L_z\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{3.22}$$

avec K_{f_z} est le gain fictif associé à l'erreur fictive $(z(t) - \hat{z}(t))$.

Ce gain de retour fictif est donné par :

$$K_{f_z} = -\gamma^{-2} Y L_z^T \tag{3.23}$$

En effet, comme Y est une solution stabilisante de l'equation Riccati (3.20) (voire lemme 2) et d'après l'hypothèse *ii)* $\left[\begin{pmatrix} L_z \\ C \end{pmatrix}, A\right]$ est détectable, alors Y assure la stabilité de la matrice suivante :

$$A - D_2 D_3^T R^{-1} C + Y(\gamma^{-2} L_z^T L_z - C^T R^{-1} C) = A - [-\gamma^{-2} Y L_z^T \quad K_{f_1}] \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}$$

avec K_{f_1} donné par (3.19). Il s'en suit alors l'existence de (3.23).

Et avant de continuer, nous donnons sous forme de lemme, la relation qui permet de relier le comportement dynamique d'un filtre d'ordre plein entre le domaine temporel et fréquentiel, déduite du cas réduit présenté dans (voir [Deu02]).

Lemme 9 *Considérons la MFD copremière à gauche suivante :*

$$\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} = \bar{D}^{-1}(s) \bar{N}_x(s) \tag{3.24}$$

où les deux matrices polynomiales $\bar{D}(s)$ et $\bar{N}_x(s)$ ont la spécificité d'être copremières à gauche et peuvent être déterminées selon la méthode présentée dans la section (1.2) *du premier chapitre.*

La relation paramétrant la dynamique du filtre fictif d'ordre plein entre le domaine temporel (via $[K_{f_z} \quad K_{f_1}]$) et le domaine fréquentiel (via la matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}_f(s)$)

$$\bar{D}^{-1}(s) \tilde{\bar{D}}_f(s) \;=\; I_{m_z+p} + \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [K_{f_z} \quad K_{f_1}] \tag{3.25}$$

où la matrice polynomiale $\bar{D}(s)$ est déduite à partir de (3.24) *et la matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ paramétrise la dynamique du filtre fictif* (3.22) *dans le domaine fréquentiel. Notons que cette relation est démontrée dans le chapitre* 4 (*voir section* (4.2.2)) *où nous l'utilisons pour une synthèse directe fréquentielle d'une commande via un filtre H_∞.*■

Remarque 11 *Le faite que les pôles du filtre implémentable (non fictif), définis par ($det(\tilde{\bar{D}}(s)) = 0$), appartiennent à la partie négatif du plan complexe assurent la stabilité du filtre* ((3.13) − (3.14)).■

Remarque 12 *Le filtre implémentable (non fictif) peut être retrouvé à partir du filtre fictif, en mettant $K_{f_z} = 0$ (voir* (3.21) *et* (3.13)). *Et par suite, la relation paramétrant les dynamiques du filtre implémentable (non fictif) d'ordre plein, est obtenue à partir de* (3.25) *avec $K_{f_z} = 0$ et en remplaçant $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ par $\tilde{\bar{D}}(s)$ (voir remarque* (10)).■

Alors, la description fréquentielle du transfert perturbation-sorties du système ((3.9)-(3.11)) peut être donnée par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} D_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ D_3 \end{bmatrix}\right) w(s) \\ &= \left(\bar{D}^{-1}(s) \bar{N}_w(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ D_3 \end{bmatrix}\right) w(s) \end{aligned} \tag{3.26}$$

avec $\bar{N}_w(s) = \bar{N}_x D_2$

La représentation fréquentielle du filtre implémentable ((3.13)-(3.14)), non fictif, est donnée par le lemme suivant :

Lemme 10 [*EDSM10b*]

Une description fréquentielle du filtre d'ordre plein $((3.13)-(3.14))$ *d'ordre n en termes de matrices polynomiales est donnée par*

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \tilde{\bar{D}}^{-1}(s)\ (\tilde{\bar{D}}(s)\ I_{m_z+p} - \bar{D}(s)) \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

avec $\hat{z}(s)$ *est l'estimée des sorties non mesurables,* $\hat{y}(s)$ *est l'estimée des mesures* $y(s)$ *et* $\tilde{\bar{D}}(s)$ *est la matrice dénominateur du filtre non fictif.*■

Preuve 9 *En tenant compte de* (3.21)*, et en mettant* $K_{f_z}=0$ *(En effet, il est le gain fictif de retour que nous pouvons mettre à zéro pour le filtre non fictif (implémentable)), nous avons*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + [0 \quad K_{f_1}] \begin{bmatrix} z(t) - \hat{z}(t) \\ y(t) - \hat{y}(t) \end{bmatrix} \\ &= A\hat{x}(t) + [0 \quad K_{f_1}](\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

où $\varphi(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$*, donc* $\hat{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} \hat{x}(t) = C_\varphi\ \hat{x}(t)$ *, et nous aurons*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(s) &= C_\varphi\ \hat{x}(s) \\ &= C_\varphi\ (sI - A)^{-1}[0 \quad K_{f_1}]\ \varphi(s) - C_\varphi\ (sI - A)^{-1}[0 \quad K_{f_1}]\ \hat{\varphi}(s) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Maintenant, considérons la MFD suivante

$$\bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_x(s) = \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} = C_\varphi\ (sI - A)^{-1} \tag{3.30}$$

La relation paramétrant le comportement dynamique entre le domaine temporel et fréquentiel, pour le filtre $((3.13) - (3.14))$ *est obtenue à partir de* (3.25) *pour* $K_{f_z} = 0$*. Alors,*

$$\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) = I_{m_z+p} + \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}[0 \quad K_{f_1}] \tag{3.31}$$

Donc, nous pouvons écrire que,

$$C_\varphi\ (sI - A)^{-1}[0 \quad K_{f_1}] = \bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) - I_{m_z+p} \tag{3.32}$$

En utilisant (3.32)*, la relation* (3.29) *devient*

$$\hat{\varphi}(s) = (\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) - I_{m_z+p})\varphi(s) - (\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) - I_{m_z+p})\hat{\varphi}(s) \tag{3.33}$$

mais avec $\varphi(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix}$ *du faite que* $z(s)$ *n'est pas mesurable.*

Et par suite, en résolvant (3.33) *pour* $\hat{\varphi}(s)$*, nous obtenons*

$$\hat{\varphi}(s) = \tilde{\bar{D}}^{-1}(s)(\tilde{\bar{D}}(s)I_{m_z+p} - \bar{D}(s)) \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix}$$

la relation (3.27) *est alors bien vérifiée.*■

De plus, nous montrons que la matrice dénominateur du filtre (implémentable) $\tilde{\bar{D}}(s)$ et la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ du filtre fictif (3.22), sont reliées selon le lemme suivant :

Lemme 11 [*EDSM10b*]

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \bar{D}(s) + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$= \tilde{\bar{D}}_f(s) \begin{bmatrix} 0_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} + \bar{D}(s) \begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

■

Preuve 10 *Selon* (3.31)*, nous pouvons écrire que*

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{D}}(s) &= \bar{D}(s) + \bar{D}(s) \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \\
&= \bar{D}(s) + \bar{D}(s)(\bar{D}^{-1}(s).\bar{N}_x(s)) \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \\
&= \bar{D}(s) + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \qquad (3.36) \\
&= \bar{D}(s) I_{m_{z+p}} + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \\
&= \bar{D}(s) \begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \\
&= \bar{D}(s) \left(\begin{bmatrix} 0_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \right) + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} 0 & K_{f_1} \end{bmatrix} \\
&= \bar{D}(s) \left(\begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \right) + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} 0_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \\
&= \left(\bar{D}(s) I_{m_z+p} + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} + \bar{D}(s) \begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \\
&= \tilde{\bar{D}}_f(s) \begin{bmatrix} 0_{m_z} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} + \bar{D}(s) \begin{bmatrix} I_{m_z} & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, le lemme est prouvé.■

Remarque 13 *Le lemme* (11) *montre bien que la matrice dénominateur (non fictif) du filtre implémentable peut être déterminée de deux manières. En effet, soit de déterminer le gain* K_{f_1} *et par suite utiliser la relation* (3.34)*, soit d'utiliser* (3.35) *et dans ce cas nous avons besoin de déterminer la matrice dénominateur fictive* $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ *du filtre. Une méthode de détermination de cette matrice fait l'objet du théorème* (16) *proposée dans la suite.*■

D'autre part, le transfert perturbation-erreur du filtre est bien caractérisé par le lemme suivant :

Lemme 12 *[EDSM10b]*
La description matricielle polynomiale du transfert perturbation-erreur du filtre (3.27) *s'écrit*

$$\begin{bmatrix} z(s)-\hat{z}(s) \\ y(s)-\hat{y}(s) \end{bmatrix} = \tilde{\bar{D}}^{-1}(s)(\bar{N}_w(s)+\bar{D}(s)\begin{bmatrix} 0 \\ D_3 \end{bmatrix})w(s) \tag{3.37}$$

■

Preuve 11 *Rappelons que l'erreur d'estimation (d'ordre plein) est donnée par*

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.38}$$

Donc, d'après (3.9) *et* (3.28) *sa dynamique obéit à l'équation suivante*

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) - [0 \quad K_{f_1}](\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)) + D_2 w(t) \tag{3.39}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi(t)-\hat{\varphi}(t) &= \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} \\ &= C_\varphi \varepsilon(t) + D_{\varphi w} w(t) \end{aligned} \tag{3.40}$$

où $D_{\varphi w} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_3 \end{bmatrix}$.

Nous pouvons écrire donc,

$$\begin{aligned} \varphi(s)-\hat{\varphi}(s) &= C_\varphi \varepsilon(s) + D_{\varphi w} w(s) \\ &= C_\varphi(-(sI-A)^{-1}\ [0 \ K_{f_1}](\varphi(s)-\hat{\varphi}(s)) \\ &+ \ (sI-A)^{-1}D_2\ w(s)\ + D_{\varphi w} w(s) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Alors, en utilisant les MFDs (3.30) *et* (3.32) *avec* $\bar{N}_x(s)D_2 = \bar{N}_w(s)$, (3.41) *devient*

$$\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)(\varphi(s)-\hat{\varphi}(s)) = (\bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_w(s) + D_{\varphi w})w(s) \tag{3.42}$$

Par conséquent,

$$\varphi(s)-\hat{\varphi}(s) = \tilde{\bar{D}}^{-1}(s)(\ \bar{N}_w(s) + \bar{D}(s)\begin{bmatrix} 0 \\ D_3 \end{bmatrix})w(s)$$

Ainsi le lemme est prouvé.■

Selon (3.34) et (3.35), la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}(s)$ du filtre peut être obtenue de deux manières : soit en résolvant (3.20) et par suite avoir le gain K_{f_1}, soit en calculant la matrice dénominateur fictif $\tilde{\bar{D}}_f(s)$.

Nous proposons alors dans la suite, une solution permettant de déterminer cette matrice polynomiale fictive via une équation matricielle polynomiale objet de la partie suivante, et qui sera aussi utilisée lors d'une synthèse fréquentielle d'une commande via un filtre H_∞, dans le dernier chapitre.

b. Equation matricielle polynomiale du filtre

Dans cette partie, nous donnons une équation matricielle polynomiale permettant de déterminer la matrice dénominateur fictif $\tilde{\bar{D}}_f(s)$. Cette relation peut être vue comme l'equivalent de l'equation de Riccati (3.20) dans le domaine temporel.

Dans la suite, nous adoptons les notations suivantes : $P^1(s) = P^T(-s)$ où P est une matrice polynomiale qui peut être égale à $P = (\bar{D},\ \bar{N}_w,\ \tilde{\bar{D}}_f \text{ et } \tilde{R}_\gamma)$.

Lemme 13 *[EDSM10b]*

L'équation algébrique de Riccati nécessaire pour l'obtention de l'équation matricielle polynomiale utilisée pour le calcul de la matrice dénominateur fictif $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ est donnée par

$$YA^T + AY - [K_{f_z} \quad K_{f_1}] \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_{mz} & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{f_z}^T \\ K_{f_1}^T \end{bmatrix} + D_2 D_2^T = 0 \tag{3.43}$$

■

Preuve 12 *Selon* (3.20)*, nous avons*

$$\begin{aligned}(A - D_2 D_3^T R^{-1} C)Y + Y(A - D_2 D_3^T R^{-1} C)^T + Y(\gamma^{-2} L_z^T L_z - C^T R^{-1} C)Y \\ + D_2(I - D_3^T R^{-1} D_3) D_2^T = 0\end{aligned} \tag{3.44}$$

Alors,

$$\begin{aligned}YA^T + AY + D_2 D_2^T - [Y(D_2 D_3^T R^{-1} C)^T + D_2 D_3^T R^{-1} CY - \gamma^{-2} Y L_z^T L_z Y \\ + YC^T R^{-1} CY + D_2 D_3^T R^{-1} D_3 D_2^T] = 0\end{aligned} \tag{3.45}$$

Donc, en tenant compte de (3.19), (3.23) *et* $R = D_3 D_3^T$*, la relation* (3.43) *est bien démontrée .*■

Par conséquent, l'équation matricielle polynomiale permettant l'obtention de $\tilde{\bar{D}}_f(s)$, est présentée dans le théorème suivant :

Théorème 16 *[ESDM11a]*

Considérons le système (3.9)−(3.11) *avec les MFDs* (3.24), (3.26) *et que les hypothèses du problème de filtrage H_∞ sont bien satisfaites* (*voir hypothèse* (4)). *Supposons qu'il existe*

une matrice dénominateur fictive $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ liée au filtre H_∞ d'ordre plein ((3.13) − (3.14)) solution de l'équation matricielle polynomiale

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{D}}_f(s)\tilde{R}_\gamma\tilde{\bar{D}}_f^1(s) &= \bar{D}(s)\tilde{R}_\gamma\bar{D}^1(s) + \bar{N}_w(s)\bar{N}_w^1(s) + \bar{N}_w(s)\ [0 \quad D_3^T]\ \bar{D}^1(s) \\ &+ \bar{D}(s)\begin{bmatrix} 0 \\ D_3 \end{bmatrix}\bar{N}_w^1(s) \end{aligned} \tag{3.46}$$

telles que les solutions de $(\det\ \tilde{\bar{D}}_f(s) = 0)$ et $(\det\ \tilde{\bar{D}}(s) = 0)$ appartiennent à la partie négative du plan complexe, avec

$$\tilde{R}_\gamma = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_{mz} & 0 \\ 0 & D_3 D_3^T \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Alors le filtre (non fictif) correspondant, solution du problème de filtrage H_∞, est donné par (3.27) où la matrice dénominateur est déterminée à partir de (3.35).■

Preuve 13 *En utilisant (3.23), la relation (3.43) peut s'écrire comme suit*

$$-AY - YA^T - \gamma^{-2}YL_z^TL_zY + K_{f_1}RK_{f_1}^T = D_2D_2^T \tag{3.48}$$

alors, en ajoutant $sY - sY$ à (3.48), nous avons

$$(sI - A)Y + Y(-sI - A^T) - \gamma^{-2}YL_z^TL_zY + K_{f_1}RK_{f_1}^T = D_2D_2^T \tag{3.49}$$

Si nous multiplions cette relation, à gauche par $\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}(sI - A)^{-1}$ et à droite par $(-sI - A^T)[L_z^T \quad C^T]$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} Y(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \quad C^T] + \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}(sI - A)^{-1}Y[L_z^T \quad C^T] - \\ &\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}(sI - A)^{-1}\gamma^{-2}YL_z^TL_zY \times (-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \quad C^T] + \\ &\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}(sI - A)^{-1}K_{f_1}RK_{f_1}^T \times (-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \quad C^T] = \\ &\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}(sI - A)^{-1}D_2D_2^T \times (-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \quad C^T] \end{aligned} \tag{3.50}$$

Du fait que,

1.

$$[K_{f_z} \quad K_{f_1}]\ \tilde{R}_\gamma \quad = \quad Y[L_z^T \quad C^T] + [0 \quad D_2D_3^T] \tag{3.51}$$

2.

$$\begin{aligned} & - \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1}\gamma^{-2} Y L_z^T L_z \times Y(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] \\ & + \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1} K_{f_1} \; R \times K_{f_1}^T(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] \\ & = \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1}[K_{f_z} \;\; K_{f_1}] \times \tilde{R}_\gamma \; [K_{f_z} \;\; K_{f_1}]^T \times (-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] \end{aligned} \tag{3.52}$$

3.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] Y(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] &= \tilde{R}_\gamma \; [K_{f_z} \;\; K_{f_1}]^T(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] \\ &- \left[\begin{array}{c} 0 \\ D_3 \end{array} \right] D_2^T(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] \end{aligned} \tag{3.53}$$

4.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1} Y [L_z^T \;\; C^T] &= \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1} \; (\; [K_{f_z} \;\; K_{f_1}] \; \tilde{R}_\gamma \\ &- [0 \;\; D_2 D_3^T] \;) \end{aligned} \tag{3.54}$$

la relation (3.50) *peut être écrite de la manière suivante*

$$\begin{aligned} & (\left\{ \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1}[K_{f_z} \;\; K_{f_1}] \right\} \tilde{R}_\gamma + \tilde{R}_\gamma) \times \\ & (\left\{ \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1}[K_{f_z} \;\; K_{f_1}] \right\} \tilde{R}_\gamma^1 + \tilde{R}_\gamma^1) = \\ & \tilde{R}_\gamma + \left[\begin{array}{c} 0 \\ D_3 \end{array} \right] D_2^T(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] + \\ & \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1}[0 \;\; D_2 D_3^T] + \\ & \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1} D_2 D_2^T(-sI - A^T)^{-1}[L_z^T \;\; C^T] \end{aligned} \tag{3.55}$$

Introduisant la MFD (3.24) *avec* $\bar{N}_w(s) = \bar{N}_x D_2$, *nous aurons*

$$\begin{aligned} \bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}_f(s)\tilde{R}_\gamma \tilde{\bar{D}}_f^1(s)(\bar{D}^1(s))^{-1} &= \tilde{R}_\gamma + \left[\begin{array}{c} 0 \\ D_3 \end{array} \right] \bar{N}_w^1(s)(\bar{D}^1(s))^{-1} + \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_w(s)[0 \;\; D_3^T] \\ &+ \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_w(s)\bar{N}_w^1(s)(\bar{D}^1(s))^{-1} \end{aligned} \tag{3.56}$$

En multipliant à gauche par $\bar{D}(s)$ *et à droite par* $\bar{D}^1(s)$, *l'équation matricielle polynomiale* (3.46) *est vérifiée. Ce qui complète la démonstration.*■

Remarque 14 *Notons que l'intérêt de cette équation matricielle polynômiale vient du fait qu'elle nous permette de déterminer directement la matrice dénominateur du filtre fictif $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ dans le domaine fréquentiel, à partir des matrices polynomiales du système considéré, et ceci sans passer par le domaine temporel, c'est à dire sans avoir à déterminer la matrice gain de l'observateur K_{f_1}. Donc, à partir de* (3.35) *nous pouvons déduire directement la matrice dénominateur du filtre implémentable $\tilde{\bar{D}}(s)$, sans avoir à utiliser l'equation* (3.34)*. Cette équation matricielle polynômiale va être utiliser lors d'une synthèse fréquentielle d'une commande via un filtre H_∞.*■

Dans la suite, nous testons notre approche sur un exemple numérique.

3.3.4 Application numérique

Nous considérons le problème de filtrage H_∞ pour le système suivant :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} -4 \\ -7 \end{array}\right] w(t) \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] x(t) + w(t) \\ z(t) & = & \left[\begin{array}{cc} 0 & -0.5 \end{array}\right] x(t) \end{array} \tag{3.57}$$

Comme $R = D_3 D_3^T = 1 > 0$ est vérifiée et que $\left[\left(\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array}\right), A\right]$ est détectable, le problème de filtrage H_∞ est résolu dans le domaine temporel, par le filtre d'ordre plein suivant

$$\begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & A\hat{x}(t) + K_{f_1}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{z}(t) & = & L_z \hat{x}(t) \end{array} \tag{3.58}$$

Une représentation fréquentielle du filtre (3.58) d'ordre 2 est donnée par

$$\left[\begin{array}{c} \hat{z}(s) \\ \hat{y}(s) \end{array}\right] = \tilde{\bar{D}}^{-1}(s)\ (\tilde{\bar{D}}(s)\ I_2 - \bar{D}(s)) \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ y(s) \end{array}\right] \tag{3.59}$$

D'après (3.24), nous avons

$$\left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array}\right] (sI - A)^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{-0.5}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \end{array}\right] \tag{3.60}$$

qui peut être réécrite de la manière équivalente suivante :

$$\begin{array}{rcl} \left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array}\right] (sI - A)^{-1} & = & \left[\begin{array}{cc} s+2 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{array}\right]^{-1} \\ & \times & \left[\begin{array}{cc} 0 & -0.5 \\ s+2 & s-1 \end{array}\right] \end{array} \tag{3.61}$$

Nous avons donc,

$$\bar{D}(s) = \left[\begin{array}{cc} s+2 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{array}\right] \tag{3.62}$$

et

$$\bar{N}_x(s) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ s+2 & s-1 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Notre but maintenant est déterminer la matrice dénominateur (non fictive) du filtre implémentable $\tilde{\bar{D}}(s)$. Nous choisissons de déterminer la matrice K_{f_1}, vérifiant

$$K_{f_1} = (YC^T + D_2 D_3^T)R^{-1} \tag{3.64}$$

avec $Y = Y^T \geq 0$ est une solution stabilisante de (3.20) et ensuite utiliser (3.34) pour déterminer la matrice dénominateur du filtre. Pour se faire nous avons besoin de déterminer γ.

En effet, nous essayons calculer $\bar{J}$ (voir (3.12)) pour plusieurs valeurs de γ et nous obtenons la caractéristique 3.1, $\bar{J} = f(\gamma)$.

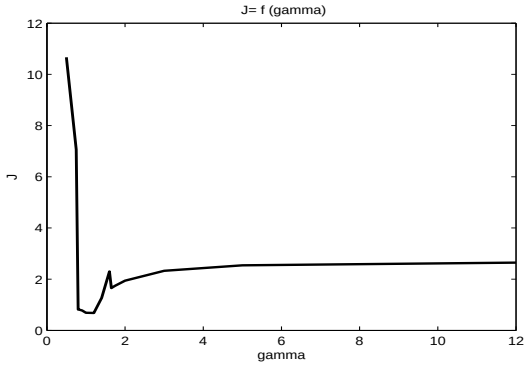


FIG. 3.1 – La caractéristique $\bar{J} = f(\gamma)$

Nous en déduisons que la valeur optimale de γ est égale à 1.71 ; en effet, pour cette valeur le filtre est stable et $\bar{J}$= 1.7094. Par conséquent, soit $\gamma = 1.71$, nous obtenons

$$Y = \begin{bmatrix} 61.9871 & -43.0607 \\ -43.0607 & 43.8864 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

donc,

$$K_{f_1} = \begin{bmatrix} 14.9264 \\ -6.1743 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Alors, la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}(s)$ est donnée par

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 3.087 \\ 0 & s^2 + 11.75s + 38.03 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

et la représentation fréquentielle correspondante du filtre, solution du problème H_∞ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s^2+11.75s+38.03)} \begin{bmatrix} s^2+11.75s+38.03 & -3.087 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 3.087 \\ 0 & 8.752s+36.03 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix}$$

Finalement, les figures 3.3, 3.4 et 3.5 montrent le comportement aussi bien temporel que fréquentiel du filtre et par conséquent, l'efficacité de notre approche.

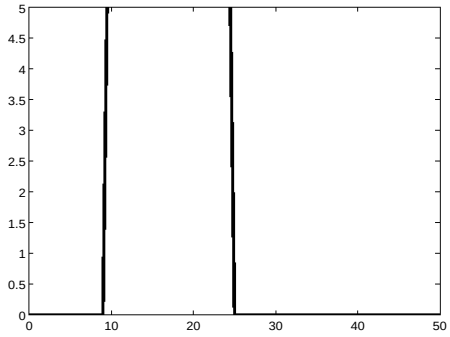


FIG. 3.2 – Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$

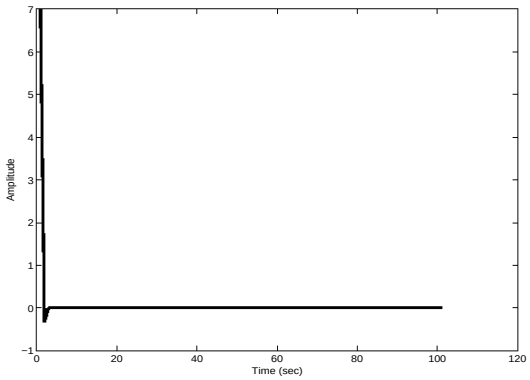


FIG. 3.3 – Evolution de la première composante de $e(t)$

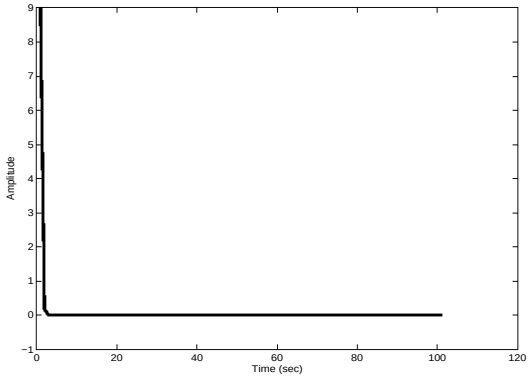


FIG. 3.4 – Evolution de la de deuxième composante de $e(t)$

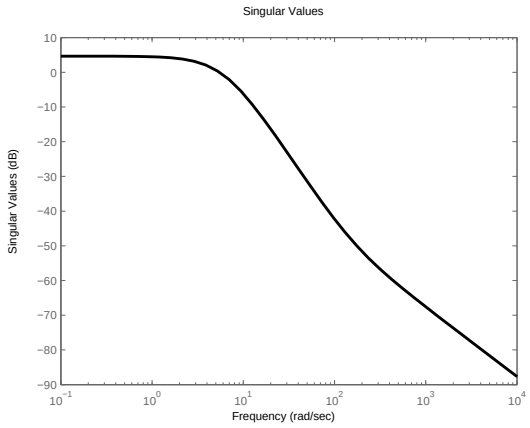


FIG. 3.5 – Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$

3.4 Synthèse de filtres fonctionnels H_∞

Après avoir proposé un filtre H_∞ se basant sur l'equation algébrique de Riccati, notre but dans cette partie est de fournir un filtre fonctionnel H_∞ plus général (ordre plein ou réduit), en utilisant l'approche LMI (Lyapunov), qui donne plus de souplesse dans la résolution que la méthode par équation de Riccati. De plus cela nous permet de prendre éventuellement en compte d'autres critères tel que le H_2 (L_2/L_∞,...).

Le filtrage fonctionnel trouve son intérêt dans le fait qu'il permet d'estimer une partie ou une combinaison linéaire de l'état d'un système sans avoir à estimer l'état entier. Ce filtre dont l'ordre est égale à la dimension du vecteur à estimer, présente plusieurs avantages par rapport au filtre d'ordre plein. Ces avantages peuvent être le temps de calcul et son utilisation possible pour les systèmes de grande dimension.

Un des points importants dans le filtrage que nous considérons est la non dépendance explicite de la dynamique de l'erreur d'observation avec l'état du système et de l'entrée $u(t)$; cette propriété est appelée le non biais du filtre [Sou02] et [Dar00].

Dans ce cadre, une nouvelle approche de synthèse de filtre H_∞ de dimension égale à la fonctionnelle à estimer est proposée, et ceci aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel [EDSM10a].

3.4.1 Position du problème

Considérons le système LTI multivariable, décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_2 w(t) \tag{3.68a}$$
$$z(t) = L_z x(t) \tag{3.68b}$$
$$y(t) = Cx(t) + D_3 w(t) \tag{3.68c}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et la mesure, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ représente les perturbations, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est l'entrée de commande du système

et $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est la sortie non mesurée à estimer (la fonctionnelle). Les matrices A, B, D_2, L_z, C et D_3 sont connues et de dimension appropriées.

De plus, nous supposons que :

Hypothèse 5

1) *rang* $L_z = m_z$ *et rang* $C = p$
2) D_3 *est telle que toutes les mesures* $y(t)$ *sont affectées par* $w(t)$
3) *La condition initiale* $x(0)$ *est considérée être connue et, par souci de simplicité et sans perte de généralité, elle pourra être mise à zéro.*

Le problème de filtrage fonctionnel H_∞ à traiter est donné par :

Problème 2 *Nous proposons de donner deux nouvelles méthodes de synthèse de filtres fonctionnels, une temporelle et une autre fréquentielle, qui vont générer en utilisant les entrées et sorties disponibles* $u(t)$ *et* $y(t)$*, les estimées* $\hat{z}(t)$ *et* $\hat{z}(s)$ *de* $z(t)$*, où l'ordre du filtre* (m_z) *est égale à la dimension du vecteur à estimer. Le filtre temporel devra donner une erreur non biaisée, indépendante explicitement de l'état* $x(t)$ *et sera construit en utilisant les LMI. Le filtre fréquentiel sera déduit du temporel. En plus de la stabilité, nous considérons comme critère la minimisation du transfert entre les perturbations* w *et l'erreur d'estimation* $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$*.*

3.4.2 Synthèse temporelle du filtre fonctionnel H_∞

Notre but est de synthétiser un filtre fonctionnel d'ordre (m_z), de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= N\varphi(t) + Jy(t) + Hu(t) && (3.69a)\\ \hat{z}(t) &= \varphi(t) + Ey(t) && (3.69b) \end{aligned}$$

avec $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est l'estimée de $z(t)$.

L'erreur d'estimation est donnée par

$$\begin{aligned} e(t) &= z(t) - \hat{z}(t) && (3.70a)\\ &= \psi x(t) - \varphi(t) - ED_3 w(t) && (3.70b) \end{aligned}$$

avec

$$\psi = L_z - EC \tag{3.71}$$

Donc, sa dynamique s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \psi\dot{x}(t) - \dot{\varphi}(t) - ED_3\dot{w}(t) && (3.72a)\\ &= Ne(t) + (\psi A - JC - N\psi)x(t) + (\psi B - H)u(t) \\ &+ (\psi D_2 - JD_3 + NED_3)w(t) - ED_3\dot{w}(t) && (3.72b) \end{aligned}$$

Le problème de cette synthèse temporelle se réduit alors à déterminer N, J, H et E telles que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) le filtre (3.69) est non biaisé si $w(t) = 0$, c'est à dire il ne depend pas explicitement de l'état $x(t)$ et de $u(t)$.

ii) le filtre (3.69) est stable, c'est à dire N est Hurwitz.

iii) La minimisation du transfert entre les perturbations w et l'erreur d'estimation $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$

Le non biais du filtre est assuré si et seulement si l'équation suivante de Sylvester est satisfaite

$$\psi A - JC - N\psi = 0 \tag{3.73}$$

avec

$$H = \psi B \tag{3.74}$$

L'équation de Sylvester (3.73) peut être écrite en tenant compte de (3.71) comme suit

$$-NL_z + (NE - J)C + L_z A - ECA \;\; = \;\; 0 \tag{3.75}$$

Soit,

$$L = J - NE \tag{3.76}$$

la relation (3.75) peut être transformée selon

$$[N \;\; L \;\; E] \begin{bmatrix} L_z \\ C \\ CA \end{bmatrix} = L_z A \tag{3.77}$$

Pour la résolution de (3.77), nous adoptons la méthode suivante :

Soit

$$[N \;\; L \;\; E] = X \tag{3.78}$$

$$\begin{bmatrix} L_z \\ C \\ CA \end{bmatrix} = \Sigma \tag{3.79}$$

$$L_z A = \Theta \tag{3.80}$$

alors (3.77) devient

$$X\Sigma = \Theta \tag{3.81}$$

Cette équation possède une solution unique X si et seulement si

$$rang \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = rang \; \Sigma \tag{3.82}$$

et une solution générale pour (3.81), si elle existe, est donnée par

$$X = \Theta\Sigma^+ - Z(I - \Sigma\Sigma^+) \tag{3.83}$$

avec Σ^+ est l'inverse généralisée de la matrice Σ donnée par (3.79) et Z est une matrice arbitraire de dimension appropriée, qui sera déterminée dans la suite en utilisant une approche Lyapunov aboutissant à des LMI.

Une fois la matrice X est déterminée, N, L et E en découlent immédiatement. En effet,

$$N = X \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{11} - ZB_{11} \tag{3.84}$$

où I est la matrice identité de dimensions appropriées, avec

$$A_{11} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

$$B_{11} = (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

La matrice L est donnée par :

$$L = X \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} = A_{22} - ZB_{22} \tag{3.87}$$

avec

$$A_{22} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.88}$$

$$B_{22} = (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

et la matrice E est obtenue par :

$$E = X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} = A_{33} - ZB_{33} \tag{3.90}$$

où

$$A_{33} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \tag{3.91}$$

$$B_{33} = (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

Désormais toutes les matrices des filtres sont déterminées si et seulement si Z est connue.

Nous avons ainsi transformé la recherche des différentes matrices du filtre en la recherche d'un unique gain Z qui sera déterminé en utilisant les LMI.

Alors, la dynamique de l'erreur d'estimation (3.72b) s'écrit

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + \alpha\ w(t) + \beta\ \dot{w}(t) \tag{3.93}$$

avec

$$\alpha \ = \ \psi D_2 - JD_3 + NED_3 = \ \alpha_1 - Z\alpha_2 \tag{3.94}$$

où

$$\alpha_1 \ = \ L_z D_2 - \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ D_3 \\ CD_2 \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

$$\alpha_2 \ = \ (I - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ D_3 \\ CD_2 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

et

$$\beta \ = \ -ED_3 \tag{3.97}$$

$$= \ \beta_1 - Z\beta_2 \tag{3.98}$$

avec

$$\beta_1 \ = \ -A_{33}D_3 \tag{3.99}$$

$$\beta_2 \ = \ -B_{33}D_3 \tag{3.100}$$

Notons que la dynamique d'erreur (3.93) contient la dérivée de $w(t)$ qui n'est pas accessible. Ce problème est généralement résolu par l'ajout d'une contrainte supplémentaire sur les matrices du filtre (voir [DZS01]) ou bien en choisissant un nouveau type de norme intégrant la norme de la dérivée pour le système. Ces deux méthodes ajoutent donc des contraintes pour la résolution du problème. Notre contribution ici, est que nous proposons une autre méthode qui consiste à réécrire le système d'erreur sous forme d'un système singulier. Alors d'après (3.93), ce nouveau système singulier est donné par :

$$\begin{pmatrix} I & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\rho}_1(t) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w(t) \tag{3.101a}$$

$$e(t) \ = \ (I \ \ 0) \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \tag{3.101b}$$

où $e(t)$ est l'erreur d'estimation (voir (3.70a)), avec $\rho_1(t) = w(t)$.

Notre problème se ramène donc à un problème de stabilité et d'atténuation de perturbation pour le système singulier (3.101). Il nous suffit donc d'utiliser les résultats existant dans ce domaine pour déduire le gain Z. Dans cette optique, nous rappelons le résultat suivant sur les systèmes singuliers. c'est une sorte de lemme borné réel pour ce type de système :

Lemme 14 [MKOS97]
Considérons le système singulier de la forme

$$F_0\dot{x} = A_0x + B_0w \tag{3.102}$$
$$z = C_0x \tag{3.103}$$

où x est l'état du système, w les perturbations à énergie bornée et z est la sortie ; les matrices A_0, B_0 et C_0 sont connues. La paire $(F_0,\ A_0)$ est admissible et $\|G\|_\infty < \gamma$ $(G = C_0(sF_0 - A_0)^{-1}B_0)$ si et seulement s'il existe $X \in I\!R^{n\times n}$ vérifiant

1)

$$F_0^TX = X^TF_0 \geq 0 \tag{3.104}$$

2)

$$A_0^TX + X^TA_0 + C_0^TC_0 + \frac{1}{\gamma^2}X^TB_0B_0^TX < 0 \tag{3.105}$$

■

Notre but est d'appliquer le résultat précédent sur le système (3.101). Mais avant cela, considérons que le gain Z satisfait la relation

$$Z\beta_2 = 0 \tag{3.106}$$

La relation (3.106) permet d'éviter d'avoir une matrice de gain Z inconnue (à determiner) dans la matrice singulière $\begin{pmatrix} I & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ du système (3.101).

Donc, il existe une matrice Z_1 satisfaisant

$$Z = Z_1(I - \beta_2\beta_2^+) \tag{3.107}$$

Soit,

$$\rho_{20} = \begin{pmatrix} I & -\beta_1 - Z_1(I - \beta_2\beta_2^+)\beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - Z_1(I - \beta_2\beta_2^+)B_{11} & \alpha_1 - Z_1(I - \beta_2\beta_2^+)\alpha_2 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

$$\beta_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

et

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \tag{3.111}$$

le système singulier (3.101) peut s'écrire alors comme suit

$$\begin{aligned} \rho_{20}\ \dot{\chi}(t) &= A_{20}\ \chi(t) + \beta_{20}\ w(t) && \text{(3.112a)} \\ e(t) &= (I \quad 0)\ \chi(t) && \text{(3.112b)} \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, le lemme (14) est utilisé pour déterminer la matrice Z paramétrant toutes les matrices du filtre (3.69) et résolvent le problème (2) grâce à la résolution de LMI.

Théorème 17 [EDSM10a]
La paire $(\rho_{20},\ A_{20})$ *est admissible et*

$$\|W(s) = (I \quad 0)(s\rho_{20} - A_{20})^{-1}\beta_{20}\|_\infty < \gamma$$

si et seulement s'il existe $X_1 \in I\!R^{m_z \times m_z}$, $X_2 \in I\!R^{m_1 \times m_1}$ *et* $Y \in I\!R^{m_z+2p \times m_z}$ *telles que les LMIs suivantes soient satisfaites*

1)

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ -\beta_1^T X_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T & -X_1^T\beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (3.113)$$

2)

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & I \\ P_{13} & P_{14} & X_2^T & 0 \\ 0 & X_2 & -\gamma^2 I & 0 \\ I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.114)$$

avec $\theta_0 = (I - \beta_2\beta_2^+)^T$ *et*

$$\begin{aligned} P_{11} &= A_{11}^T X_1 + X_1^T A_{11} - B_{11}^T\theta_0^T Y - Y^T\theta_0 B_{11} \\ P_{12} &= X_1^T\alpha_1 - Y^T\theta_0\alpha_2 \\ P_{13} &= \alpha_1^T X_1 - \alpha_2^T\theta_0^T Y \\ P_{14} &= -X_2 - X_2^T \end{aligned}$$

Le gain Z_1 *est alors donnée par* $Z_1^T = Y X_1^{-1}$.■

Preuve 14 *En appliquant le lemme* (14) *et le lemme de Schur* [BEF94] (*voir lemme* (7)) *sur le système singulier* (3.112), *nous obtenons*

1)

$$\Phi_1 = \Phi_1^T \geq 0 \quad \text{avec } \Phi_1 = \rho_{20}^T\mathcal{X} \qquad (3.115)$$

2)

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 + \Phi_2^T & \Phi_3^T & (I \quad 0)^T \\ \Phi_3 & -\gamma^2 I & 0 \\ (I \quad 0) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.116)$$

avec

$$\Phi_2 = A_{20}^T \mathcal{X} \tag{3.117}$$

$$\Phi_3 = \beta_{20}^T \mathcal{X} \tag{3.118}$$

où $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$. *En utilisant* (3.108), *la relation* (3.115) *est équivalente à* (3.113).

Puis en remplaçant A_{20} *et* β_{20} *dans* (3.116) *par leurs expressions* (3.109) *et* (3.110), *en utilisant* (3.107), *la LMI* (3.114) *est obtenue où* $\theta_0 = (I - \beta_2\beta_2^+)^T$ *et* $Y = Z_1^T X_1$.■

Nous donnons alors ci-dessous un algorithme pour la synthèse du filtre fonctionnel H_∞ qui résume les différentes étapes traitées dans cette partie.

Algorithme de Synthèse temporelle du filtre fonctionnel H_∞

1) Calculer Σ et Θ à partir de (3.79), (3.80), et vérifier que la condition(3.82) d'existence de la solution est vérifiée.
2) Toutes les matrices connues intervenant dans les LMIs proposées à savoir A_{11}, B_{11}, α_1, α_2, B_{33}, β_2 , A_{33} et β_1 sont calculées respectivement selon (3.85), (3.86), (3.95), (3.96), (3.92), (3.100), (3.91) et (3.99). Alors, θ_0 est connue.
3) La résolution des LMIs ((3.113) et (3.114)) donne le gain Z_1, donc à partir de (3.107), le gain Z est déterminée.
4) La matrice N est calculée à partir de (3.84).
5) E est obtenue à partir de (3.90). Par conséquent, d'après (3.71) ψ est connue et la matrice H est déterminée selon (3.74)
6) Finalement, la description temporelle du filtre fonctionnel (3.69) est déterminée. En effet après le calcul de A_{22} et B_{22} à partir de (3.88) et (3.89), L peut être calculée selon (3.87) et par conséquent la matrice J implémentée dans la synthèse temporelle est calculée en utilisant (3.76).

3.4.3 Synthèse fréquentielle du filtre fonctionnel H_∞

Nous proposons dans cette partie, une nouvelle description du filtre fonctionnel H_∞ dans le domaine fréquentiel. Pour cela, nous définissons des descriptions matricielles fractionnaires utiles basées sur des factorisations copremières à gauche et principalement, nous établissons la forme équivalente de la relation reliant le comportement dynamique du filtre entre le domaine temporel et fréquentiel ; Relation donnée par Deutcher [Deu02] pour le cas de l'observateur d'ordre réduit.

Théorème 18 [EDSM10a]

Considérons les descriptions matricielles fractionnaires (MFDs) suivantes

i)

$$\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \end{bmatrix} (sI - N)^{-1} = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_x(s) \tag{3.119}$$

où

a) *M_0 et M_1 sont des matrices arbitraires de dimensions respectives $(m_z \times m_z)$ et $(p \times m_z)$ telles que $\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \end{bmatrix}$ est de rang plein colonnes.*

b) *N est la matrice du filtre d'ordre m_z et les deux matrices polynomiales $\bar{D}(s)$ et $\bar{N}_x(s)$ sont de dimensions respectives $((m_z + p) \times (m_z + p))$ et $((m_z + p) \times m_z)$. Elles ont la spécificité d'être copremières à gauche. Ces matrices de transfert peuvent être calculées à partir de l'approche de factorisation présentée par* [Fra87] *ou bien en utilisant* [DFG90] *.*

ii)

$$\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \end{bmatrix} (sI - N)^{-1} H = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_u(s) \tag{3.120}$$

où

$$\bar{N}_u(s) = \bar{N}_x(s)H \tag{3.121}$$

iii)

$$\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) \;=\; I_{m_z+p} + \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \end{bmatrix} (sI - N)^{-1}[0 \quad J] \tag{3.122}$$

Alors, une représentation dans le domaine fréquentiel du filtre H_∞ fonctionnel (3.69) *d'ordre m_z ($m_z \leq n$) est donnée par,*

$$\begin{aligned} \hat{z}(s) \;&=\; \tilde{\bar{D}}^{-1}(s)\ [\ \tilde{\bar{D}}(s)\ \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \end{bmatrix}^{+} (\ (\bar{D}^{-1}(s)\ \tilde{\bar{D}}(s) - I) \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix} \\ &+\; \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_u(s)\ u(s)\ ) + \tilde{\bar{D}}(s)\ E\ \times y(s)\ ] \end{aligned} \tag{3.123}$$

où la matrice dénominateur du filtre $\tilde{\bar{D}}(s)$ satisfait

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \bar{D}(s) + \bar{N}_x(s)\ [0_{m_z \times m_z} \quad J\ ] \tag{3.124}$$

■

Remarque 15 *La relation* (3.122) *proposée peut être vue comme une généralisation de la relation paramétrant la dynamique du filtre fonctionnel* (3.69) *entre le domaine temporel et fréquentiel, donnée par Hippe* [Hip89] *pour la synthèse d'un filtre d'ordre réduit.*■

Preuve 15 *: La transformée de Laplace de* (3.69a) *obéit à*

$$\varphi(s) \;=\; (sI - N)^{-1}Jy(s) + (sI - N)^{-1}Hu(s) \tag{3.125}$$

$$\;=\; (sI - N)^{-1}[0_{m_z \times m_z} \quad J] \begin{bmatrix} 0_{m_z \times 1} \\ y(s) \end{bmatrix} + (sI - N)^{-1}Hu(s) \tag{3.126}$$

Donc, la transformée de Laplace du vecteur à estimer $\hat{z}(t)$ (3.69b)*, peut être écrite en tenant compte de* (3.126) *selon*

$$\hat{z}(s) \;=\; (sI-N)^{-1}[0_{m_z\times m_z}\quad J]\begin{bmatrix} 0_{m_z\times 1} \\ y(s)\end{bmatrix} + (sI-N)^{-1}Hu(s)+Ey(s) \quad (3.127)$$

d'autre part, en tenant compte de la MFD copremière à gauche proposée (3.122)*, nous aurons*

$$(sI-N)^{-1}[0_{m_z\times m_z}\quad J] \;=\; \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1\end{bmatrix}(\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)-I_{m_z+m}) \quad (3.128)$$

et d'après (3.120)*, nous avons*

$$(sI-N)^{-1}H = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1\end{bmatrix}^{+}\bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_u(s) \quad (3.129)$$

L'estimée de la fonctionnel à estimer s'écrit alors

$$\begin{aligned}\hat{z}(s) \;&=\; \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1\end{bmatrix}^{+}\times(\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)-I_{m_z+m})\begin{bmatrix} 0_{m_z\times 1} \\ y(s)_{p\times 1}\end{bmatrix} \\ &+\; \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1\end{bmatrix}^{+}\bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_u(s)\;u(s)+E\;y(s)\end{aligned} \quad (3.130)$$

par conséquent et selon ,

$$\tilde{\bar{D}}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) = I_{m_z+p} \quad (3.131)$$

la description fréquentielle (3.123) *est satisfaite. La matrice dénominateur du filtre* (3.124) *s'en suit directement à partir de* (3.122) *avec* (3.119).■

Dans la suite, nous testons l'approche de filtrage fonctionnel H_∞ proposée en simulation numérique.

3.4.4 Application numérique

Nous Considérons en simulation le système présenté dans la section 3.4.1, avec

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}-4\\-7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\ L_z=\begin{bmatrix}0 & 0.067\end{bmatrix}$$

a) - Synthèse temporel du filtre fonctionnel

Appliquons l'algorithme proposé dans la section (3.4.2), nous obtenons les résultats suivants :

1)

$$\Sigma=\begin{bmatrix}0 & 0.0670\\ 1 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix},\ \Theta=\begin{bmatrix}0 & -0.1340\end{bmatrix} \quad (3.132)$$

2)

$$A_{11} = -0.0112,\ B_{11} = \begin{bmatrix} 0.9944 \\ 0.0666 \\ 0.0333 \end{bmatrix} \tag{3.133}$$

$$\alpha_1 = 0.1306,\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} -0.2998 \\ -0.0201 \\ -0.0100 \end{bmatrix} \tag{3.134}$$

$$B_{33} = \begin{bmatrix} 0.0333 \\ 0.0022 \\ 0.0011 \end{bmatrix},\ \beta_2 = \begin{bmatrix} -0.0333 \\ -0.0022 \\ -0.0011 \end{bmatrix} \tag{3.135}$$

$$A_{33} = 0.0666,\ \beta_1 = -0.0666 \tag{3.136}$$

3) Pour $\gamma = 12$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1.0698 & -80.6126 & 158.7342 \end{bmatrix} \tag{3.137}$$

et par conséquent

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0890 & -80.6783 & 158.7013 \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

4)

$$N = -0.0112 \tag{3.139}$$

5)

$$E = 0.0666\ ,\ \psi = \begin{bmatrix} -0.0666 & 0.0004 \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

$$H = -0.0663 \tag{3.141}$$

6)

$$A_{22} = 0.1333 \tag{3.142}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 0.06660.00450.0022 \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

$$L = 0.1333 \tag{3.144}$$

et alors

$$J = 0.1325 \tag{3.145}$$

Pour $(e(0) = 3.5)$, la figure (3.7) montre le comportement temporel du filtre fonctionnel H_∞ proposé.

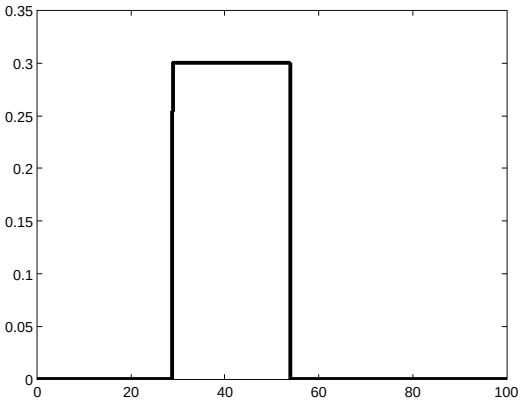


FIG. 3.6 – Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$

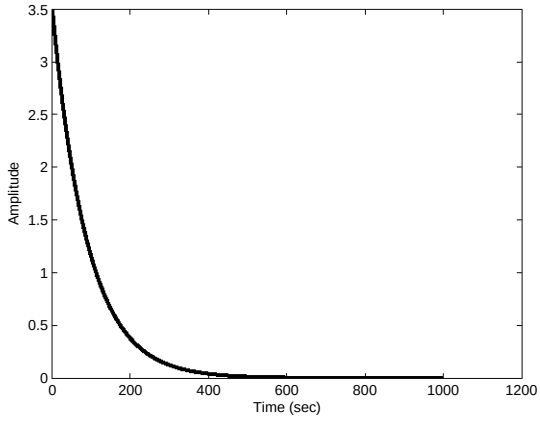


FIG. 3.7 – Evolution de l'erreur d'estimation temporelle $e(t)$

b) - Synthèse fréquentielle du filtre fonctionnel H_∞

Soit, $M_0 = 1$ et $M_1 = 0$ telles que $\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \end{bmatrix}$ est de rang plein colonnes. En utilisant l'approche de factorisation [Vid85] et les algorithmes de [Fra87] présenté dans la section (1.2) du premier chapitre, nous obtenons

$$\bar{D}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0.0112}{s+2.0112} & \frac{-1}{s+2.0112} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.146}$$

et

$$\bar{N}_x(s) = \begin{bmatrix} (s+2.0112)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.147}$$

Nous pouvons vérifier que (3.119) est satisfaite.

D'après (3.121), nous avons

$$\bar{N}_u(s) = \begin{bmatrix} -0.0663(s+2.0112)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.148}$$

donc, à partir de (3.124) la matrice dénominateur du filtre est donnée par

$$\tilde{\bar{D}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0.0112}{s+2.0112} & \frac{-0.8675}{s+2.0112} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

Par conséquent, en utilisant (3.130) , et en tenant compte de (3.146), (3.148) et (3.149), l'estimée $\hat{z}(s)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{z}(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.1325}{s+0.0112} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{1\times 1} \\ y(s)_{1\times 1} \end{bmatrix} \\ &- \frac{0.0663}{s+0.0112}\, u(s) + 0.0666\, y(s) \end{aligned} \tag{3.150}$$

donc, la description fréquentielle proposée du filtre fonctionnel (3.123) est déterminée.

L'erreur d'estimation fréquentielle obéit donc à

$$e(s) = z(s) - \hat{z}(s) \tag{3.151}$$

$$= \frac{-0.0666s + 0.4184}{s + 0.9655}\, w(s) \tag{3.152}$$

Finalement, la figure (3.8) montrent le comportement fréquentiel du filtre et donc, l'efficacité de notre approche.

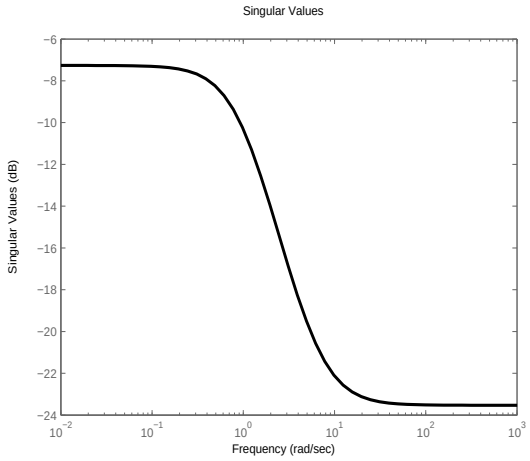


FIG. 3.8 – Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$

3.5 Synthèse d'un observateur fonctionnel robuste utilisant une méthode polynomiale

Cette partie est en faite la suite de la synthèse d'un observateur fonctionnel fréquentiel, traité dans la section (1.4.2) du premier chapitre où nous nous sommes intéressés à synthétiser un observateur $\hat{w}_1(s)$ donné par (1.48) pour la fonctionnelle $w_1(t) = P_1x(t)$ dans le sens de (1.49), c'est à dire, si $w = 0$ (mais à énergie bornée).

Or, en réalité, dans les cas pratiques, les bruits ou les perturbations sont inévitables. C'est pourquoi, les observateurs robustes par rapport aux perturbations sont souvent désirés et ils ont fait l'intérêt de plusieurs travaux. Parmi ces travaux, nous pouvons citer *Ding et al* [DFG90] où les auteurs ont traité le cas où $w \neq 0$.

En effet, la forme générale d'observateurs donnée par (1.48) pour la fonctionnelle $P_1x(t)$, serait dans ce cas (où $w \neq 0$), dans le sens de la minimisation suivante :

$$\|P_1x(s) - \hat{w}_1(s)\|_2 \ \rightarrow \ min \tag{3.153}$$

L'idée de synthèse est d'exprimer l'ensemble de toutes les matrices de transfert entre les perturbations $w(t)$ et l'erreur d'estimation $(P_1x(s) - \hat{w}_1(s))$, en terme de matrices RH_∞. Ensuite, le problème de synthèse d'observateurs fonctionnels robustes est transformé en un problème de model matching.

En effet, soit $\Delta r(s)$ l'erreur d'estimation, elle est donnée par :

$$\Delta r(s) = P_1x(s) - \hat{w}_1(s) \tag{3.154}$$

or, d'après (1.55) et (1.48), nous pouvons écrire

$$\Delta r(s) = P_1(s)\xi(s) + F_d(s)w(s) - (F(s)u(s) + F_1(s)y(s)) \tag{3.155}$$

Si nous remplaçons maintenant $F(s)$ et $F_1(s)$ par leurs expressions (1.60) et (1.61) et en tenant compte que,

$$P_1(s)\xi(s) - P_1(s)Y_u(s)u(s) - P_1(s)X_u(s)G_u(s)u(s) = 0 \tag{3.156}$$

nous obtenons,

$$\Delta r(s) = (F_d(s) - P_1(s)X_u(s)G_d(s) - Q_1(s)\hat{M}_u(s)G_d(s))w(s) \tag{3.157}$$

avec $G_d(s)$ est définie dans (1.47) et elle est factorisée selon $G_d(s) = \hat{M}_u^{-1}(s)\hat{N}_d(s)$. Les matrices $X_u(s)$ et $Y_u(s)$ résultent de la factorisation copremière à gauche de la matrice de transfert $G_u(s) = \hat{M}_u^{-1}(s)\hat{N}_u(s)$ définie dans (1.46) (voir lemme (1)).

En suivant la même démarche que celle dans [DFG90], l'erreur d'estimation satisfait :

$$\Delta r(s) = (T_1(s) - Q_1(s)T_2)\ w(s),\ Q_1(s) \in RH_\infty \tag{3.158}$$

où

$$T_1(s) \ = \ P_1\ \hat{Y}_2(s)\ \hat{N}_3(s) - P_1(s)\ X_u(s)\ D_2 \ \in RH_\infty \tag{3.159}$$

$$T_2(s) \ = \ \hat{N}_d(s) = [A - LC,\ D_2 - LD_3,\ C,\ D_3] \ \in RH_\infty \tag{3.160}$$

où la matrice $\hat{N}_d(s)$ est obtenue à partir de (1.15), avec

$$\begin{aligned} \hat{Y}_2(s) &= I + (sI - A_k)^{-1}LC & (3.161)\\ \hat{N}_3(s) &= (sI - A + LC)^{-1}D_2 \in RH_\infty & (3.162)\\ P_1(s) &= P_1(sI - A_k)^{-1}B \ \in RH_\infty & (3.163) \end{aligned}$$

avec A_k est définie dans (1.53), il a été déterminée en utilisant (1.14). La matrice L est telle que $(A - LC)$ est stable. D'autre part, nous rappelons que le problème de synthèse d'observateurs fonctionnels robustes par rapport aux perturbations à énergie bornée, revient à chercher les matrices de transfert RH_∞, $F(s)$ et $F_1(s)$ telles que pour tout $u(s)$, nous avons :

i) $P_1(s)\xi(s) - \hat{w}_1(s) = 0$, si $w(s) = 0$ et nous l'avons déjà traité (voir théorème (3.20)).

ii) $\|P_1(s)\xi(s) + F_d(s)w(s) - \hat{w}_1(s)\|_2 \rightarrow \ min.$

Notons que cette relation *ii)* en découle de (3.153) avec $w_1(s) = P_1x(s)$ est donné par (1.55).

Nous en déduisons, qu'un observateur de la forme (1.48), donnant la meilleure estimée de la fonctionnelle $P_1x(t)$ dans le sens de (3.153) où de *ii)*, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

a) Les deux matrices polynomiales $F(s)$ et $F_1(s)$ intervenant dans la forme (1.48) de l'observateur fonctionnel, sont données par (1.60) et (1.61).

b) D'après (3.158), la matrice $Q_1(s)$ paramétrant les matrices de l'observateur fonctionnel $F(s)$ et $F_1(s)$, est la solution optimale du problème de minimisation : $\|T_1(s) - Q_1(s)T_2\|_\infty \rightarrow \ min$, avec $T_1(s)$, $Q_1(s)$, et $T_2 \in RH_\infty$.

De plus, nous pouvons conclure que

$$min_{F(s),F_1(s)\in RH_\infty} \ \|\Delta r(s)\|_2 = min_{Q_1(s)\in RH_\infty} \ \|T_1(s) - Q_1(s)T_2\|_\infty \qquad (3.164)$$

Algorithme de synthèse d'observateurs fonctionnels robuste par rapport aux perturbations à énergie bornée :

1. Déterminer $\hat{N}_u(s)$, $\hat{M}_u(s)$, $X_u(s)$, $Y_u(s)$ et $\hat{N}_d(s)$ selon (1.14) - (1.16) et (3.160).
2. Déterminer $P_1(s)$, $\hat{Y}_2(s)$ et $\hat{N}_3(s)$ d'après (3.163), (3.161) et (3.162).
3. Définir

$$\begin{aligned} T_1(s) &= P_1\hat{Y}_2(s)\hat{N}_3(s) - P_1(s)X_u(s)D_3\\ T_2(s) &= \hat{N}_d(s) \end{aligned}$$

et trouver la solution optimale du problème "model matching"

$$min_{Q_1(s)\in RH_\infty} \ \|T_1(s) - Q_1(s)T_2\|_\infty.$$

4. Définir

$$F(s) = P_1(s)Y_u(s) - Q_1(s)\hat{N}_u(s).$$

$$F_1(s) = P_1(s)X_u(s) + Q_1(s)\hat{M}_u(s).$$

et soit donc,

$$r(s) = F(s)u(s) + F_1(s)y(s)$$

Remarque 16 *Une application de cet algorithme relative à une synthèse fréquentielle d'un observateur fonctionnel robuste par rapport aux perturbations à énergie bornée est développée dans [DFG90].*■

Nous proposons dans la suite, d'étendre notre résultat relatif au filtrage H_∞ objet de la section (3.4), au cas des systèmes descriptifs.

3.6 Synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes singuliers

Du fait de l'intérêt croissant accordé à l'étude des systèmes descriptifs ou singuliers ; qui sont la classe la plus générale des systèmes linéaires, nous proposons d'étendre les méthodes de synthèse de filtres H_∞ deja proposées, au cas des systèmes singuliers. Nous proposons donc deux nouvelles méthodes de synthèse, une temporelle et une autre fréquentielle de filtres H_∞ d'ordre plein où un système singulier est considéré [ESDM10a]. Notons que cette approche peut être étendu au cas du fonctionnel, plus général.

3.6.1 Position du problème

Considérons le système descriptif LTI multivariable, régi par la représentation d'état suivante :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_2w(t) \quad (3.165a)$$
$$y(t) = Cx(t) + D_3w(t) \quad (3.165b)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et la mesure, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ représente les perturbations et $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est l'entrée de commande du processus. $E \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$, A, B, D_2, C et D_3 sont des matrices connues de dimensions appropriées. De plus, nous supposons que :

Hypothèse 6

1) *rang* $E = r_1$, *E est de rang plein lignes*

2) *rang* $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

Nous sommes alors en mesure de donner la problématique que nous proposons de résoudre dans la suite :

Problème 3 *Donner deux nouvelles méthodes de synthèses de filtres H_∞ d'ordre plein pour la classe la plus générale des systèmes, à savoir les systèmes singuliers. La méthode temporelle devra générer l'estimée $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ et la méthode fréquentielle doit donner l'estimée $\hat{x}(s)$ de $x(t)$, en utilisant les entrées et sorties disponibles $u(t)$ et $y(t)$. Le filtre doit être non biaisé, et en plus de la stabilité, l'erreur d'estimation $e(t)$ doit satisfaire le critère d'atténuation H_∞ suivant*

$$\bar{J} = sup_{\ w\in\ L_2[0,\ \infty)} \frac{\|x-\hat{x}\|_2}{\|w\|_2} = \|F_{ew}\|_\infty < \gamma \tag{3.166}$$

où $\|w\|_2 \neq 0$ et $F_{ew}(s)$ est la matrice de transfert des perturbations w à l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$, pour un scalaire $\gamma > 0$ donné.

3.6.2 Synthèse du filtre H_∞ pour les systèmes singuliers dans le domaine temporel

Du fait que, $rang \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$, il peut toujours exister, en appliquant la décomposition en valeurs singulières (SVD) (voir remarque (2)), une matrice inversible $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ telle que

$$a_0E + b_0C = I_n \tag{3.167}$$
$$c_0E + d_0C = 0_{(r_1+p-n)\times n} \tag{3.168}$$

Notre but est de synthétiser le filtre H_∞ d'ordre n suivant, pour le système singulier (3.165) :

$$\dot{\varphi}(t) = N\varphi(t) + L_1y(t) + Gu(t) \tag{3.169a}$$
$$\hat{x}(t) = \varphi(t) + b_0y(t) + Kd_0y(t) \tag{3.169b}$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimée de $x(t)$.

Remarque 17 *Notons que le le filtre H_∞ proposé est indépendant du choix de la matrice $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$, comme nous le démontrons dans la remarque (24) du dernier chapitre.*■

En utilisant (3.167), l'erreur d'estimation obéit à l'équation suivante :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.170a}$$
$$= \psi_1Ex(t) - \varphi(t) - \psi_2w(t) \tag{3.170b}$$

avec

$$\psi_1 = a_0 + Kc_0 \tag{3.171}$$
$$\psi_2 = (b_0 + Kd_0)D_3 \tag{3.172}$$

La dynamique de l'erreur peut être alors écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \psi_1 E\dot{x}(t) - \dot{\varphi}(t) - \psi_2\dot{w}(t) && \text{(3.173a)} \\ &= Ne(t) + (\psi_1 A - L_1 C - N\psi_1 E)x(t) + (\psi_1 B - G)u(t) \\ &+ (\psi_1 D_2 - L_1 D_3 + N\psi_2)w(t) - \psi_2\dot{w}(t) && \text{(3.173b)} \end{aligned}$$

Le problème de synthèse du filtre est réduit alors à déterminer les matrices N, L_1, G et K telles que

i) le filtre (3.169) soit non biaisé.

ii) le filtre (3.169) est stable c'est-à-dire N est de Hurwitz (stable).

iii) le critère d'atténuation de perturbation (3.166) soit vérifié.

Le non biais du filtre est assuré si et seulement si l'équation de Sylvester suivante est vérifiée

$$\psi_1 A - L_1 C - N\psi_1 E = 0 \tag{3.174}$$

De plus, nous considérons que

$$\psi_1 B - G = 0 \tag{3.175}$$

D'autre part, l'equation de Sylvester (3.174), s'écrit en tenant compte de (3.165a), (3.171), (3.172) et (3.168) comme suit

$$Na_0 E - Kc_0 A + (L_1 - NKd_0)C = a_0 A \tag{3.176}$$

Avant de continuer, posons

$$J = (L_1 - NKd_0) \tag{3.177}$$

L'équation (3.176) peut être alors réécrite sous la forme matricielle suivante

$$[N \quad -K \quad J] \begin{bmatrix} a_0 E \\ c_0 A \\ C \end{bmatrix} = a_0 A \tag{3.178}$$

Afin de résoudre (3.178), soit

$$[N \quad -K \quad J] = X \tag{3.179}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 E \\ c_0 A \\ C \end{bmatrix} = \Sigma \tag{3.180}$$

$$a_0 A = \Theta \tag{3.181}$$

donc l'equation (3.178) devient

$$X\Sigma = \Theta \tag{3.182}$$

Une fois la matrice X connue (voir (3.83)), après verification de la condition de rang (3.82),

$$X\Sigma = \Theta \tag{3.183}$$

nous pouvons facilement extraire les expressions des matrices N, L_1, G et K.

En effet, nous avons

$$N = X \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{11} - ZB_{11} \tag{3.184}$$

où

$$A_{11} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.185}$$

$$B_{11} = (I_{r_1+2\times p} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.186}$$

La matrice J est donnée par :

$$J = X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} = A_{22} - ZB_{22} \tag{3.187}$$

avec

$$A_{22} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} \tag{3.188}$$

$$B_{22} = (I_{r_1+2\times p} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} \tag{3.189}$$

et la matrice $(-K)$ par :

$$-K = X \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r_1+p-n} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{33} - ZB_{33} \tag{3.190}$$

avec

$$A_{33} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r_1+p-n} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.191}$$

$$B_{33} = (I_{r_1+2\times p} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ I_{r_1+p-n} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.192}$$

Une fois que les matrices N et K sont obtenues, nous trouvons L_1 à partir de l'équation (3.177).

D'après (3.175), la matrice G est donnée par

$$G = \psi_1 B = (a_0 + Kc_0)B \tag{3.193}$$

Alors toutes les matrices intervenant dans la synthèse du filtre sont maintenant connues, si et seulement si la matrice Z est connue .

D'autre part, la dynamique de l'erreur d'estimation (3.173b) s'écrit

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + \alpha w(t) - \psi_2 \dot{w}(t) \tag{3.194}$$

avec

$$\alpha = \psi_1 D_2 + N\psi_2 - L_1 D_3 = \alpha_1 - Z\alpha_2 \tag{3.195}$$

où

$$\alpha_1 = a_0 D_2 - \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} -b_0 D_3 \\ c_0 D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \tag{3.196}$$

$$\alpha_2 = (I_{r+2m} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} b_0 D_3 \\ -c_0 D_2 \\ -D_3 \end{pmatrix} \tag{3.197}$$

et

$$\psi_2 = (Kd_0 + b_0)D_3 \tag{3.198}$$

$$= \psi_{21} - Z\psi_{22} \tag{3.199}$$

avec

$$\psi_{21} = -A_{33} d_0 D_3 + b_0 D_3 \tag{3.200}$$

$$\psi_{22} = -B_{33} d_0 D_3 \tag{3.201}$$

Comme c'était le cas lors de la synthèse de filtre H_∞ pour les systèmes non singuliers (voir (3.93)), la dynamique d'erreur (3.194) contient la dérivée de $w(t)$. En adoptant alors la même démarche proposée, le système d'erreur peut s'écrire sous la forme (3.101) avec $\beta = -\psi_2$.

De plus nous considérons ici aussi que le gain Z satisfait la relation suivante (voir (3.106))

$$Z\psi_{22} = 0 \tag{3.202}$$

Donc, il existe une matrice $Z_1 \in \Re^{n\times(r_1+2p)}$ satisfaisant

$$Z = Z_1(I - \psi_{22}\psi_{22}^{+}) \tag{3.203}$$

En posant,

$$\rho_{21} \;=\; \begin{pmatrix} I & \psi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \psi_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.204}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - ZB_{11} & \alpha_1 - Z\alpha_2 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{3.205}$$

$$\beta_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \tag{3.206}$$

avec

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \tag{3.207}$$

le système d'erreur (3.194) peut s'écrire sous la forme singulière suivante :

$$\rho_{21}\ \dot{\chi}(t) \;=\; A_{21}\ \chi(t) + \beta_{21}\ w(t) \tag{3.208a}$$

$$e(t) \;=\; (I \quad 0)\ \chi(t) \tag{3.208b}$$

Dans le théorème suivant, le lemme (14) est utilisé pour déterminer la matrice Z paramétrant toutes les matrices du filtre grâce à la résolution de LMI.

Théorème 19 [ESDM10a]
La paire $(\rho_{21},\ A_{21})$ *est admissible et*

$$\|W(s) = (I \quad 0)(s\rho_{21} - A_{21})^{-1}\beta_{21}\|_\infty < \gamma$$

pour un réel positif γ *donné si et seulement s'il existe des matrices* $X_1 = X_1^T > 0 \in I\!R^{n\times n}$, $X_2 = X_2^T > 0 \in I\!R^{m_1\times m_1}$, $Y \in I\!R^{(r_1+2p)\times n}$ *telles que les LMI suivantes soient satisfaites pour un réel* $\gamma > 0$ *donné*

1)

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ \psi_{21}^T X_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T & X_1^T\psi_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.209}$$

2)

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0_{n\times m_1} & I_n \\ P_{12}^T & P_{14} & X_2^T & 0_{m_1\times n} \\ 0_{m_1\times n} & X_2 & -\gamma^2 I_{m_1\times m_1} & 0_{m_1\times n} \\ I_n & 0_{n\times m_1} & 0_{n\times m_1} & -I_n \end{bmatrix} < 0 \tag{3.210}$$

avec $\theta_1 = (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)^T$, $Y = Z_1^T X_1$ *et*

$$\begin{aligned} P_{11} &= A_{11}^T X_1 + X_1^T A_{11} - B_{11}^T \theta_1 Y - Y^T \theta_1^T B_{11} \\ P_{12} &= X_1^T \alpha_1 - Y^T \theta_1^T \alpha_2 \\ P_{14} &= -X_2 - X_2^T \end{aligned}$$

Le gain Z_1 *est alors donné par*

$$Z_1 = X_1^{-1} Y^T \tag{3.211}$$

et Z *est déduit à partir de la relation* (3.203).■

Preuve 16 *Appliquons le lemme* (14) *et le lemme de Schur* [BEF94] (*voir remarque* (7)) *sur le système singulier* (3.208)*, nous obtenons*

1)

$$\Phi_{10} = \Phi_{10}^T \geq 0 \quad \textit{with } \Phi_{10} = \rho_{21}^T \mathcal{X} \tag{3.212}$$

2)

$$\begin{bmatrix} \Phi_{20} + \Phi_{20}^T & \Phi_{30}^T & (I \;\; 0)^T \\ \Phi_{30} & -\gamma^2 I & 0 \\ (I \;\; 0) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.213}$$

avec

$$\Phi_{20} = A_{21}^T \mathcal{X} \tag{3.214}$$

$$\Phi_{30} = \beta_{21}^T \mathcal{X} \tag{3.215}$$

En posant $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ *et en utilisant* (3.204)*, la relation* (3.212) *est bien équivalente à* (3.209)*. Puis, en remplaçant* A_{21} *et* β_{21} *dans* (3.213) *par leurs expressions* (3.205) *et* (3.206)*, en utilisant* (3.203)*, la LMI* (3.210) *est obtenue, avec* $\theta_1 = (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)^T$ *et* $Y = Z_1^T X_1$.■

Nous résumons dans la suite, les différentes étapes de synthèse d'un filtre H_∞ pour les systèmes singuliers.

Algorithme de Synthèse du filtre H_∞ pour les systèmes singuliers :

Les différentes démarches nécessaires pour le calcul du filtre H_∞ (3.169) se résument suivant les étapes suivantes :

1) Déterminer les matrices a_0, b_0, c_0 et d_0 en faisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$.

2) Calculer Σ et Θ à partir de (3.180), (3.181), et vérifier que la condition de rang (3.183) est satisfaite.

3) Toutes les matrices connues qui interviennent dans les LMI (3.209) et (3.210), à savoir A_{11}, B_{11}, α_1, α_2, B_{33}, ψ_{22} , A_{33} et ψ_{21} sont calculés respectivement par (3.185), (3.186), (3.196), (3.197), (3.192), (3.201), (3.191) et (3.200). Donc θ_1 est bien déterminée.

4) La résolution des LMI (3.209) et (3.210) donne le gain Z_1, et donc à partir de (3.203), la matrice Z est déterminée.

5) Calculer la matrice du filtre N à partir de (3.184).

6) Puis la matrice K est obtenue grâce à (3.190). Donc d'après (3.171) ψ_1 est connue et G est donnée par (3.193)

7) Finalement, la représentation temporelle du filtre H_∞ d'ordre plein (3.169) est déterminée. En effet après le calcul des matrices A_{22} et B_{22} à partir de (3.188), (3.189), J peut être calculée (3.187) et par conséquent L_1 qui intervienne dans la synthèse temporelle est calculée en utilisant (3.177).

3.6.3 Synthèse du filtre H_∞ pour les systèmes singuliers dans le domaine fréquentiel

Dans cette partie, nous proposons une technique simple à mettre en oeuvre pour la synthèse de filtres H_∞ pour des systèmes singuliers dans le domaine fréquentiel en appliquant l'approche de factorisation [Vid85]. Le théorème suivant donne la solution au problème de filtrage H_∞ d'ordre plein dans le domaine fréquentiel pour le système singulier (3.165).

Théorème 20 [ESDM10a] *Considérons les descriptions matricielles fractionnaires copremières à gauche suivantes (MFDs) obtenues à partir de la représentation temporelle du filtre H_∞ d'ordre n* (3.169)

i)

$$(sI - N)^{-1}G = \hat{M}_1^{-1}(s)\hat{N}_1(s) \tag{3.216}$$

ii)

$$(sI - N)^{-1}L_1 + (b_0 + Kd_0) = \hat{M}_2^{-1}(s)\hat{N}_2(s) \tag{3.217}$$

Une description fréquentielle des états à estimer $x(t)$ est alors donnée par,

$$\hat{x}(s) \quad = \quad \hat{M}_1^{-1}(s) \times [\ \hat{N}_2(s)y(s) + \hat{N}_1(s) \times u(s)\ ] \tag{3.218}$$

■

Preuve 17 *En appliquant la transformée de Laplace à* (3.169a)*, nous avons*

$$\varphi(s) \;=\; (sI-N)^{-1}L_1 y(s) + (sI-N)^{-1}Gu(s) \tag{3.219}$$

En remplaçant alors (3.219) *dans la transformée de Laplace de* (3.69b)*, nous obtenons*

$$\hat{x}(s) \;=\; \left[(sI-N)^{-1}L_1 + (b_0+Kd_0)\right]\, y(s) + (sI-N)^{-1}G\; u(s) \tag{3.220}$$

Posons alors les factorisations suivantes (voir section (1.2) *du premier chapitre) :*

a)

$$(sI-N)^{-1}G = \hat{M}_1^{-1}(s)\hat{N}_1(s) \tag{3.221}$$

avec

$$\hat{M}_1(s) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_l & -L & I & I \end{array}\right] \tag{3.222}$$

$$\hat{N}_1(s) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_l & G_l & I & 0 \end{array}\right] \tag{3.223}$$

$N_l = N - L$ *et* $G_l = G$, L *est choisie telle que* N_l *est stable.*

b)

$$(sI-N)^{-1}L_1 + (b_0+Kd_0) = \hat{M}_2^{-1}(s)\hat{N}_2(s) \tag{3.224}$$

avec

$$\hat{M}_2(s) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_l & -L & I & I \end{array}\right] = \hat{M}_1(s) \tag{3.225}$$

$$\hat{N}_2(s) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_l & H_l & I & b_0+Kd_0 \end{array}\right] \tag{3.226}$$

où $H_l = L_1 - L(b_0+Kd_0)$.

Il suffit maintenant de remplacer les équations (3.221), (3.224) *dans* (3.220)*, en tenant compte de* (3.225) *pour que le théorème soit immédiatement démontré.*■

Dans la suite, nous proposons de tester la méthode de synthèse proposée d'un filtre H_∞ d'ordre plein, pour des systèmes singuliers sujet à des perturbations à énergie bornée.

3.6.4 Application numérique

Soit le système singulier (3.165), avec :

$$E = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right],\; A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0.59 \\ 0 & -1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.09 \end{array}\right],\; B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right],\; D_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right],$$

$$C = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ et } \; D_3 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right].$$

2.1 - Synthèse temporelle du filtre H_∞ d'ordre plein

Notons que $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ est de rang plein colonnes et en appliquant l'algorithme proposé , nous obtenons :

$$a_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, c_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, d_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

et par suite, les matrices du filtre H_∞ d'ordre plein sont données par

$$N = \begin{bmatrix} -3.0907 & 8.5030 & -6.1584 & 1.9923 \\ -6.4362 & -0.5543 & -2.0438 & -0.0971 \\ 12.3010 & 2.6952 & 2.2864 & 2.8438 \\ -2.9510 & 0.4782 & -1.4661 & -0.6407 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 25.6105 & 45.5703 & 22.8362 \\ -4.5506 & -4.2095 & -4.8835 \\ 12.6537 & 23.7190 & 21.5077 \\ 2.0121 & 1.4333 & -1.9229 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -2.1113 \\ -2.6054 \\ 4.4491 \\ -0.7465 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -0.6766 & -0.7322 \\ 0.6170 & -2.1857 \\ 0.2028 & 2.4273 \\ -0.3329 & -0.7061 \end{bmatrix}$$

La représentation temporelle (3.169) du filtre H_∞ d'ordre plein est ainsi déterminée. Il est à noter que la LMI (3.210) est résolue pour $\gamma = 11$.

2.2 - Synthèse fréquentielle du filtre H_∞ d'ordre plein

En choisissant L égale à la matrice identité, nous pouvons vérifier facilement que la matrice N_l, utilisée dans la synthèse fréquentielle, qui est égale à $(N - L)$ est bien stable. La description fréquentielle (3.218) est alors obtenue après le calcul des matrices $\hat{M}_1(s)$, $\hat{N}_1(s)$ et $\hat{N}_2(s)$ selon (3.222), (3.223) et (3.226).

L'erreur d'estimation fréquentielle $e(s)$ est alors donnée par

$$e(s) = \frac{1}{s^4 + 1.9735s^3 + 2.0671s^2 + 1.0788s + 0.2555} \times \begin{bmatrix} -0.1237s^4 + 2.0465s^3 + 3.1626s^2 + 1.3462s + 0.0005 \\ -1.4678s^4 - 4.4885s^3 - 3.5898s^2 - 1.3737s - 0.0002 \\ 1.1887s^4 - 6.7057s^3 - 7.6605s^2 - 2.8732s - 0.0008 \\ -3.6685s^4 - 5.0912s^3 - 2.9157s^2 - 0.4458s + 0.0005 \end{bmatrix} w(s)$$

Nous pouvons vérifier que cette erreur d'estimation est bien stable.

Finalement, les figure (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14), montrent le comportement temporel et fréquentiel du filtre H_∞ obtenu et par suite l'efficacité de notre approche.

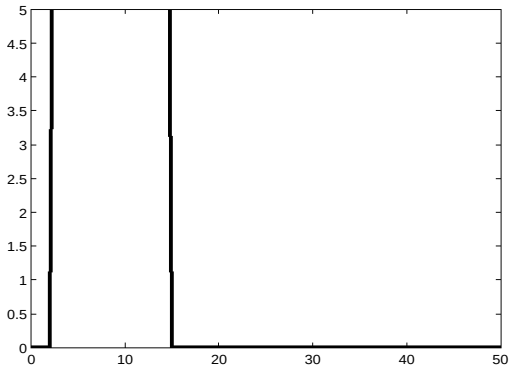


FIG. 3.9 – Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$

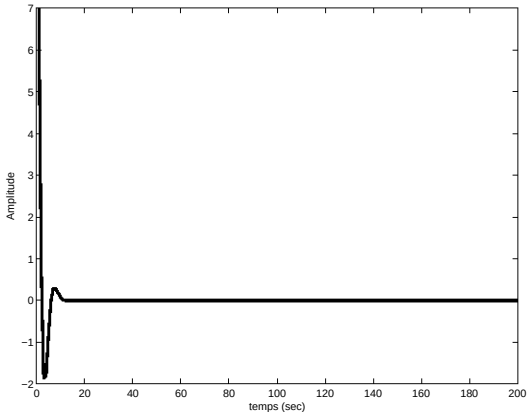


FIG. 3.10 – Evolution de la première composante de $e(t)$

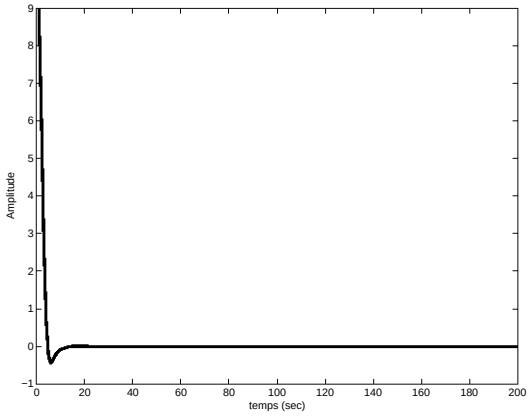


FIG. 3.11 – Evolution de la deuxième composante de $e(t)$

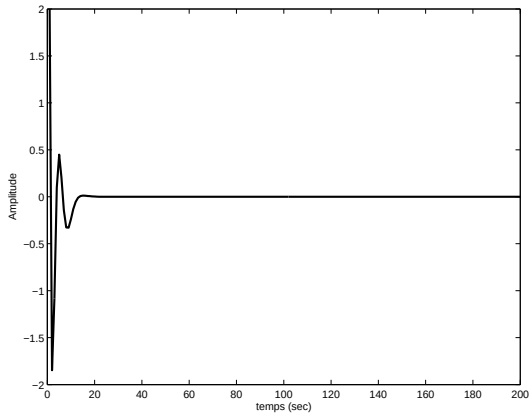


FIG. 3.12 – Evolution de la troisième composante de $e(t)$

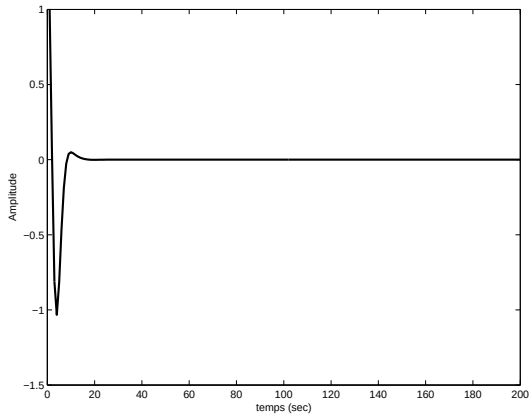


FIG. 3.13 – Evolution de la quatrième composante de $e(t)$

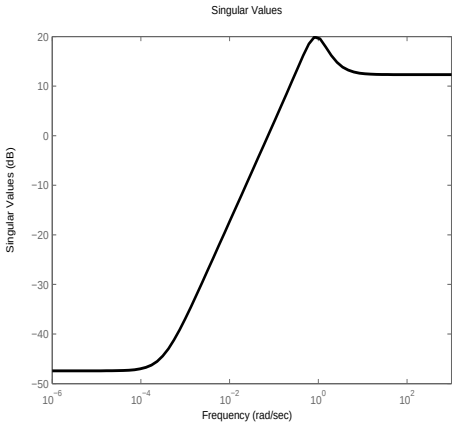


FIG. 3.14 – Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de filtrage H_∞ du faite que nous estimons l'état (ou une combinaison linéaires) sans aucune connaissance sur les perturbations à part qu'elles soient à énergie bornée. En effet, nous avons dans un premier volet proposé deux méthodes pour la synthèse de filtres H_∞ d'ordre plein. Une dans le domaine temporel basé sur l'equation algébrique de Riccati, une autre fréquentielle basé sur les MFDs et surtout sur la relation reliant les dynamiques du filtre H_∞ entre le domaine temporel et fréquentiel. Et pour permettre une meilleure souplesse dans la synthèse du filtre, nous avons proposé une méthode LMI (Lyapunov) qui assure aussi bien la stabilité que l'atténuation des perturbations. En effet, nous nous sommes penché sur des filtres fonctionnels H_∞ aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel, en utilisant les LMIs et les MFDs. Ensuite, nous avons présenté une méthode polynomiale, basée sur la résolution d'un problème model matching, de synthèse de filtre robuste par rapport aux perturbations à énergie bornée. Cette méthode opère directement dans le domaine fréquentiel. Et, comme dernière partie nous avons étendu nos travaux sur le domaine temporel et fréquentiel aux cas des systèmes singuliers toujours en utilisant l'approche Lyapunov-lemme borné réel, en proposant aussi une nouvelle écriture de la dynamique d'erreur d'estimation afin de contourner le problème de l'apparition de la dérivée de bruit dans cette dynamique, et en utilisant l'approche de factorisation et les LMIs. Il faut noter que nous aurions pu traiter le cas des systèmes discrets linéaires singuliers, ou non dans cette partie. Mais du fait de la similitude de l'approche avec le cas continu, nous avons préféré traiter le cas discret dans le cadre de la commande basée-observateur.

Chapitre 4

Synthèse de commande via un filtre H_∞ pour les systèmes linéaires

4.1 Introduction

Le but premier de l'automatique reste la commande des systèmes. Celle-ci est très souvent basée sur la connaissance de l'état du système à commander. Lorsque une partie ou la totalité de l'état est inaccessible, une commande basée sur les composantes du vecteur d'état devient problématique. Pour remédier à cette limitation, nous sommes contraints de reconstruire la partie de l'état manquante ou tout l'état en utilisant les observateurs. La commande ainsi synthétisée sera dénommée commande basée-observateur.

Le problème de la commande basée-observateur a été le sujet de nombreuses recherches jusqu'à nos jours. En effet, pour la plupart des systèmes physiques, seule une partie de l'état (voir [AA99] − [HYYB94]) est accessible, c'est pourquoi l'utilisation d'un observateur, permettant de palier le manque d'informations pour synthétiser la commande, est devenue courante. La stratégie de commande adoptée dans ce chapitre est celle utilisant un retour d'état où la commande résulte d'une multiplication du vecteur d'état réel par une matrice de gain. Dans le cas où une ou plusieurs composantes du vecteur d'état réel est indisponible, nous nous trouvons amené à estimer les composantes manquantes puis déterminer des lois de commande par retour d'état qui garantissent la stabilité du système ainsi corrigé, lors de l'utilisation des composantes estimées de l'état au lieu des composantes réelles.

Dans le premier volet du chapitre, et comme suite de l'approche fréquentielle pour des systèmes linéaires sans perturbations proposée dans la section (1.6) du premier chapitre, nous proposons une synthèse directe d'une commande basée sur un filtre H_∞ directement dans le domaine fréquentiel pour des systèmes linéaires standards sujet à des perturbations à énergie bornée. C'est une alternative à la synthèse qui découle de la structure temporelle du correcteur via un filtre. Elle est basée sur l'approche de [HD09] et permet de prendre en compte directement des critères dans le domaine fréquentiel. Notons que cette nouvelle méthode de commande basée sur un filtre H_∞ d'ordre, peut être vu comme un extension du problème d'estimation H_∞ d'ordre plein par méthode de Riccati et MFD présenté dans la section (3.3) du troisième chapitre, à la commande basée sur un filtre H_∞. De plus,

cette méthode peut être aussi appliquée dans le chapitre 3 pour une nouvelle synthèse fréquentielle directe des filtres H_∞.

En effet, dans ce premier volet, nous nous intéressons à la synthèse d'un correcteur basé sur un filtre H_∞ d'ordre plein pour des systèmes linéaires standards sujet à des perturbations à énergie bornée, et nous montrons bien que nous pouvons passer du domaine fréquentiel au domaine temporel et vice versa. En effet, après la détermination des deux matrices polynomiales paramétrant dans le domaine fréquentiel d'une part une commande par retour d'état (qui correspond au gain de retour d'état dans le domaine temporel) et d'autre part les dynamiques de l'observateur utilisé (qui correspond à la matrice gain de l'observateur dans le domaine temporel), nous calculons la MFD copremière à gauche caractérisant le correcteur basé observateur et ceci en résolvant une équation diophantienne. Un algorithme résumant les différents étapes de synthèse est alors donné. Les matrices du correcteur basé observateur sont alors déterminées sans passer par le domaine temporel. Notons aussi que la relation paramétrant la dynamique du filtre H_∞ d'ordre plein entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel présentée dans le chapitre 3 (voir equation (3.25)) est bien démontrée.

Dans le second volet du chapitre, nous nous focalisons plus particulièrement sur les systèmes singuliers aussi bien dans le cas continu que discret et nous proposons (voir [ESDM10d]) de déterminer les lois de commande en utilisant un filtre fonctionnel qui satisfait un critère de performance H_∞ et où la perturbation est supposée être inconnue mais d'énergie bornée. L'étude est menée aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Notons que nous avons choisi de considérer les systèmes singuliers pour couvrir la classe la plus générale des systèmes et nous pouvons obtenir le cas standard en mettant la matrice non singulière $E = I$.

Notons que notre approche diffère de la commande basée observateur classique. Ici il s'agit d'exploiter les résultats de filtrage fonctionnel présenté dans le chapitre 3 à la commande. Nous sommes obligé de procéder en deux étapes mais l'avantage est de construire un filtre qui a la même dimension que la commande, donc d'ordre réduit généralement. Il s'agit d'abord de trouver la commande qui permet d'atteindre les objectifs de commande, ensuite nous avons construit un observateur (filtre) qui estime cette loi de commande.

Le but de notre approche est tout d'abord d'utiliser les filtres fonctionnels que nous avons synthétisés dans le cadre d'une commande où ils permettaient de reconstruire la commande dans le cas d'un retour d'état. En effet, dans ce cas la commande est justement une fonctionnelle dans le sens où nous avons $u = Kx$.

Notre démarche se fera en deux étapes. En effet, nous cherchons d'abord à calculer le gain de retour d'état qui nous permet de remplir les spécifications du système bouclé (stabilité, atténuation de perturbation...). Puis dans un second temps, nous synthétisons un filtre qui a pour but de fournir en sortie une estimée de ce retour d'état.

En effet pour la synthèse temporelle, après l'usage de la condition du non-biais du filtre, nous utilisons la méthode que nous avons développé dans le chapitre 3 relatif à la synthèse des filtres H_∞ pour le cas continu et nous proposons une autre méthode pour le cas discret. Par suite, en adoptant la même demarche que le chapitre 3 pour traiter la dynamique de l'erreur d'observation, nous utilisons l'approche LMI afin de déterminer le gain de retour d'état précédemment calculé et qui permet de remplir les spécifications de commande du système bouclé. La synthèse fréquentielle est déduite à partir des résultats temporels (

que ce soit dans le cas continu ou discret), en définissant des descriptions matricielles fractionnaires (MFDs) et en appliquant l'approche de factorisation. Un paramétrage du correcteur basé-observateur en termes de matrices polynomiales est ainsi obtenue. Il faut noter que l'intérêt majeur de l'approche proposée est qu'elle utilise un filtre fonctionnel qui estime la loi de commande sans toutefois estimer tous les états du système. Elle permet donc de réduire l'ordre du correcteur via un filtre H_∞ du fait que le filtre fonctionnel synthétisé est de même ordre que la fonctionnelle à estimer, c'est à dire la dimension de l'entrée de commande $u(t)$. Une validation de cette méthode sera testé sur un exemple numérique.

4.2 Commande basée sur un filtre H_∞ pour les systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel

Soit le système linéaire continu dans le temps, décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_2 w(t) \tag{4.1a}$$
$$y(t) = Cx(t) + D_3 w(t) \tag{4.1b}$$
$$z(t) = L_z x(t) + D_z u(t) \tag{4.1c}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de mesures et $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est la sortie non mesurée à contrôlées. $u \in \mathbb{R}^q$ $(q \leq m_z)$ est l'entrée de commande du système et $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ sont les perturbations $(m_1 \geq p)$. A, B, D_2, C, D_3, L_z et D_z sont des matrices connues de dimensions appropriées. De plus nous supposons que la paire (A, D_2) est stabilisable.

Dans la suite et en adoptant une démarche similaire à celle proposée dans le premier chapitre (voir section (1.6)), relative à la synthèse d'une commande basée observateur dans le domaine fréquentiel pour des systèmes sans perturbations, nous ambitionnons (en utilisant un retour fictif $(z(t) - \hat{z}(t))$) deja utilisé dans le chapitre 3 (voir equation (3.21))), de déterminer d'une part la matrice polynomiale paramétrant dans le domaine fréquentiel une commande H_∞ par retour d'état et d'autre part, de déterminer l'equation matricielle polynomiale du correcteur par retour d'état H_∞, comme c'était le cas pour le filtre H_∞ d'ordre plein (voir equation (3.46)), utile pour une synthèse fréquentielle directe.

4.2.1 Commande H_∞ par retour d'état

a. Formulation du problème

Considérons le sous-système $(4.1a)$-$(4.1c)$, bouclé avec le retour d'état suivant :

$$u(t) = -Kx(t) + Mr(t) \tag{4.2}$$

où $r(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'entrée ou consigne de référence nécessaire pour le bouclage, la matrice M est supposée fixée et la matrice $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$ est le gain de retour d'état, qui doit satisfaire un critère de performance H_∞ donné par :

$$J = sup_{\ w \in\ L_2[0,\ \infty)} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_{zw}\|_\infty \tag{4.3}$$

$\|w\|_2 \neq 0$ et $F_{zw}(s)$ est la matrice de transfert des perturbations w à la sortie z du système (4.1) bouclé avec le retour d'état (4.2).

Par conséquent le problème de commande H_∞ par retour d'état est équivalent au problème de minimisation suivant :

Problème de commande H_∞ par retour d'état :

Supposons que $D_z^T D_z > 0$. Nous cherchons à déterminer, pour un scalaire $\gamma > 0$ fixé, un retour d'état stabilisant $u(t)$ donné par (4.2) tel que le critère (4.3) satisfait $J < \gamma$.

b. Expression dans le domaine temporel

Une solution au problème de commande H_∞ par retour d'état peut être obtenue en utilisant le lemme suivant (voir [Gri93]) :

Lemme 15 *Considérons le système* (4.1) *avec l'hypothèse $D_z^T D_z > 0$ est satisfaite. Une solution pour le problème de commande H_∞ par retour d'état est donnée par*

$$K = X^{-1}(B^T P + D_z^T L_z) \tag{4.4}$$

où $K \in I\!R^{q\times n}$ avec $X = D_z^T D_z$ et $P = P^T \geq 0$ est une solution stabilisante de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} &P(A - BX^{-1}D_z^T L_z) + (A - BX^{-1}D_z^T L_z)^T P + \\ &P(\gamma^{-2}D_2 D_2^T - BX^{-1}B^T)P + L_z^T L_z - L_z D_z X^{-1} D_z^T L_z = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

■

c. Synthèse fréquentielle

Le problème de synthèse fréquentielle d'une commande par retour d'état H_∞ est effectué en considérant l'existence d'un retour fictif, comme c'était le cas pour la synthèse du filtre H_∞ (voir section (3.3) dans le chapitre 3). Le but est de pouvoir obtenir l'équation matricielle polynomiale permettant de déterminer la matrice polynomiale paramétrant une commande par retour d'état dans le domaine fréquentiel.

Donc, une loi de commande par retour d'état (fictive) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} r(t) \tag{4.6}$$

En effet, le gain de retour d'état fictif K_w est l'équivalent du gain fictif K_{f_z} intervenant dans le synthèse du filtre H_∞ dans le chapitre 3 (voir equation (3.22)) et qui est donné par (3.23). L'existence du gain fictif K_w est motivé par le faite que P est une solution stabilisante de (4.5), ce qui implique la stabilité de la quantité suivante $((A - BX^{-1}D_z^T L_z) + (\gamma^{-2}D_2 D_2^T - BX^{-1}B^T)P)$ de l'equation de Riccati.

Cette dernière quantité peut s'écrire de manière équivalente, en utilisant (4.4), sous la forme suivante

$$(A - BX^{-1}D_z^T L_z) + (\gamma^{-2}D_2 D_2^T - BX^{-1}B^T)P = \tag{4.7}$$

$$A - D_2(-\gamma^{-2}D_2^T P) - D_2 X^{-1}(B^T P + D_z^T L_z) = A - D_2 K_w - BK \tag{4.8}$$

Nous en déduisons que le gain de retour d'état fictif $K_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ est défini par :

$$K_w = -\gamma^{-2} D_2^T P \tag{4.9}$$

D'autre part, nous allons montrer dans la suite, qu'une commande par un retour d'état (fictive) (4.6) est paramétrée dans le domaine fréquentiel par une matrice polynomiale $\tilde{D}_f(s)$.

En effet, soit

$$(sI - A)^{-1} \left[\begin{array}{cc} D_2 & B \end{array} \right] = N_x(s) D^{-1}(s) \tag{4.10}$$

avec $D(s)$ et $N_x(s)$ des matrices polynomiales copremières à droite où $D(s)$ est supposée de colonnes réduites.

De plus nous supposons que,

$$N_z(s) = L_z N_x(s) \tag{4.11}$$

et

$$L_z(sI - A)^{-1} \left[\begin{array}{cc} D_2 & B \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & D_z \end{array} \right] = N_{z1}(s) D^{-1}(s) \tag{4.12}$$

Donc, en utilisant (4.10) la transformée de Laplace de l'etat $x(t)$ du système (4.1) obéit à

$$x(s) = (sI - A)^{-1} \left[\begin{array}{cc} D_2 & B \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array} \right] = N_x(s) D^{-1}(s) \left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array} \right] \tag{4.13}$$

et en utilisant (4.12), la transformée de Laplace de $z(t)$ peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} z(s) &= \left(L_z(sI - A)^{-1} \left[\begin{array}{cc} D_2 & B \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & D_z \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array} \right] \\ &= N_{z_1}(s) D^{-1}(s) \left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array} \right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

A partir de ces MFDs, le comportement fréquentiel du système de commande bouclé (par un retour fictif), peut être donné par la figure (4.1).

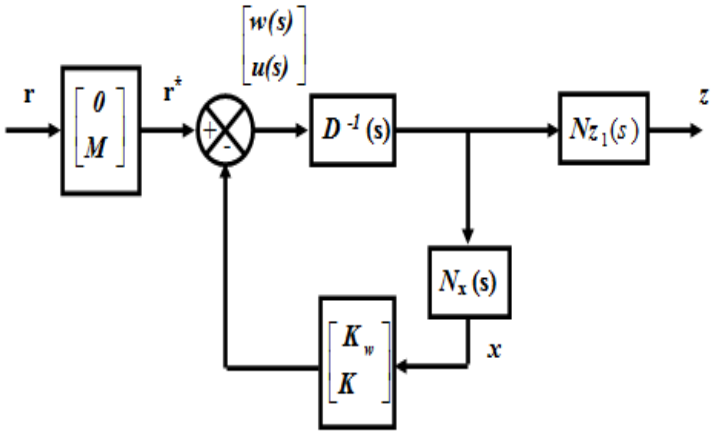


FIG. 4.1 – Commande H_∞ par retour d'état fictif dans le domaine fréquentiel

D'autre part, d'après la figure (4.1), nous avons :

$$\begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = (I + \begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix} N_x(s)D^{-1}(s))^{-1} r^*(s) \tag{4.15}$$

avec $r^* = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} r$, et la sortie à contrôler $z(s)$ vérifie alors :

$$z(s) = N_{z_1}(s)[D(s) + \begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix} N_x(s)]^{-1} r^*(s) \tag{4.16}$$

En posant,

$$\tilde{D}_f(s) = D(s) + \begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix} N_x(s) \tag{4.17}$$

la relation (4.16) est équivalente à

$$z(s) = N_{z_1}(s)\tilde{D}_f^{-1}(s) r^*(s) \tag{4.18}$$

D'autre part, en utilisant les représentations temporelles du système (4.1c) et (4.1a), avec (4.6), la sortie à contrôler $z(s)$ vérifie :

$$\begin{aligned} z(s) \;=\; & ((L_z - D_z K)(sI - A + \begin{bmatrix} D_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} D_2 & B \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & D_z \end{bmatrix}) \, r^*(s) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Il s'en suit donc, en comparant les deux descriptions temporelle et fréquentielle données par (4.19) et (4.18), que

$$det(\tilde{D}_f(s)) = det(sI - A + \begin{bmatrix} D_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix}) \tag{4.20}$$

Alors, la matrice polynomiale $\tilde{D}_f(s)$ dans la MFD (4.18), est la matrice dénominateur du système de commande H_∞ bouclé par un retour d'état fictif et caractérise ainsi sa dynamique.

En multipliant (4.17) à droite par $D^{-1}(s)$ et en utilisant (4.10), nous obtenons la relation liant la représentation temporelle (via $\begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix}$ pour un retour d'état fictif) à celle fréquentielle (via $\tilde{D}_f(s)$) d'une commande par retour d'état, donnée par

$$\tilde{D}_f(s)D^{-1}(s) = I + \begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} D_2 & B \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Afin que cette matrice polynômiale ($\tilde{D}_f(s)$) joue le rôle correspondant au gain de retour d'état dans le domaine fréquentiel, elle doit vérifier le lemme suivant :

Lemme 16 *La matrice polynomiale $\tilde{D}_f(s)$ caractérisant les dynamiques de la boucle de commande par retour d'état (fictif) dans le domaine fréquentiel, doit obéir aux deux propriétés suivantes :*

$$\delta_{ci}[\tilde{D}_f(s)] = \delta_{ci}[D(s)], i = 1, 2, 3....m_1 + q \tag{4.22}$$

$$\Gamma_c[\tilde{D}_f(s)] = \Gamma_c[D(s)] \tag{4.23}$$

et elle possède exactement le même nombre de paramètres libre que le gain $\begin{bmatrix} K_w \\ K \end{bmatrix}$, à savoir $(m_1 + q) \times n$. Avec δ_{ci} et Γ_c sont données respectivement par les définitions (10) *et* (11)*.*

Remarque 18 *Nous tenons à noter que pour un retour d'état implémentable non fictif ($K_w = 0$), donné par* (4.2)*, la relation* (4.21) *devient*

$$\tilde{D}(s)D^{-1}(s) = I + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} D_2 & B \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

et dans ce cas, $\tilde{D}(s)$ est la matrice polynomiale dénominateur du système de commande H_∞ bouclé par un retour d'état implémentable (non fictif).■

De façon analogue au filtre H_∞ (voir (3.34) et (3.35)), les deux matrices dénominateurs $\tilde{D}_f(s)$ et $\tilde{D}(s)$, sont reliées selon le lemme suivant

Lemme 17

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= D(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} N_x(s) && (4.25) \\ &= \begin{bmatrix} 0_{m_1} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \tilde{D}_f(s) + \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0_q \end{bmatrix} D(s) && (4.26) \end{aligned}$$

■

D'autre part, l'équation matricielle polynomiale relative à la matrice dénominateur fictive $\tilde{D}_f(s)$, du système de commande H_∞ bouclé par un retour d'état fictif, est donnée par le lemme suivant (voir [Deu02]) :

Lemme 18 *Considérons le sous système* (4.1*a*) *et* (4.1*c*) *avec la MFD* (4.10) *et la relation* (4.11). *Supposons que,*

a) L'hypothèse du problème de commande par retour d'état est satisfaite, c'est à dire $D_z^T D_z > 0$.

b) Il existe une matrice dénominateur fictif $\tilde{D}_f(s)$ *solution de l'équation matricielle polynomiale*

$$\begin{aligned} \tilde{D_f}^{-1}(s) R_\gamma \tilde{D}_f(s) &= D^{-1}(s) R_\gamma D(s) + N_z^{-1}(s) N_z(s) \\ &+ N_z^{-1}(s) [0 \quad D_z] D(s) + D^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ D_z^T \end{bmatrix} N_z(s) \end{aligned} \tag{4.27}$$

telles que les solutions de $(\det \tilde{D}_f(s) = 0)$ *et* $(\det \tilde{D}(s) = 0)$ *appartiennent à la partie négative du plan complexe, avec*

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & D_z^T D_z \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Alors la matrice polynomiale dénominateur paramétrant la loi de commande par retour d'état implémentable (4.2)*, solution du problème de commande H_∞ par retour d'état, est donnée par* (4.26).■

4.2.2 Filtre H_∞ d'ordre plein

Dans cette partie nous allons rappeler ce que nous avons déjà développé dans la section (3.3) du troisième chapitre où nous allons démontrer la relation (3.25) paramétrant la dynamique du filtre (fictif) H_∞ entre le domaine temporel et fréquentiel.

a. Expression temporelle

Un filtre H_∞ d'ordre plein (non fictif) pour le système (4.1) est donné par

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K_{f_1}(y(t) - \hat{y}(t)) + Bu(t) \tag{4.29}$$

$$\hat{z}(t) = L_z \hat{x}(t) + D_z u(t) \tag{4.30}$$

avec

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{4.31}$$

et le gain K_{f_1} vérifiant le critère de performance H_∞ (3.12), il est donné par (voir (3.19))

$$K_{f_1} = (YC^T + D_2 D_3^T) R^{-1} \tag{4.32}$$

où $R = D_3 D_3^T > 0$ et $Y = Y^T \geq 0$ est une solution stabilisante de l'équation de Riccati algébrique

$$\begin{aligned} (A &- D_2 D_3^T R^{-1} C) Y + Y (A - D_2 D_3^T R^{-1} C)^T \\ &+ Y(\gamma^{-2} L^T L - C^T R^{-1} C) Y + D_2 (I - D_3^T R^{-1} D_3) D_2^T = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Remarque 19 *Un filtre H_∞ fictif pour le système* (4.1) *peut être représenté dans le domaine temporel par* (3.21) *où le gain fictif K_{f_z} associé au retour fictif $(z(t) - \hat{z}(t))$ est donné par* (3.23)*. Noter que cette représentation* (3.21) *sera utilisé dans dans la suite pour une synthèse fréquentielle.*■

Notons qu'une équation matricielle polynomiale relative à la matrice dénominateur fictive $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ du filtre H_∞ fictif est donné par le théorème (16), déjà proposé dans le chapitre 3. De plus, les matrices dénominateur du filtre fictif $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ et non fictif $\tilde{\bar{D}}(s)$ sont reliées selon (3.34) et (3.35).

b. Synthèse fréquentielle
Soit,

$$\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_x(s) \tag{4.34}$$

une MFD copremière à gauche où $\bar{D}(s)$ est supposée de lignes réduites et $\bar{N}_x(s)$ est une matrice polynomiale. Considérons aussi la MFD suivante :

$$\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_{u_1}(s) \tag{4.35}$$

et que

$$\bar{N}_w(s) = \bar{N}_x(s)D_2 \tag{4.36}$$

En définissant $\varphi(t)$ (déjà utilisé dans la preuve (9)), comme suit

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

L'erreur d'observation $\epsilon = \varphi(s) - \hat{\varphi}(s)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \epsilon(s) &= \varphi(s) - (\begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} K_{f_s} & K_{f_1} \end{bmatrix} \epsilon(s) \\ &+ \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \qquad (4.38) \\ &= \varphi(s) - (\bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \epsilon(s) \\ &+ \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}_{u_1}(s)) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}) \qquad (4.39) \end{aligned}$$

Par suite, le filtre H_∞ peut être représenté dans le domaine fréquentiel par la figure (4.2).

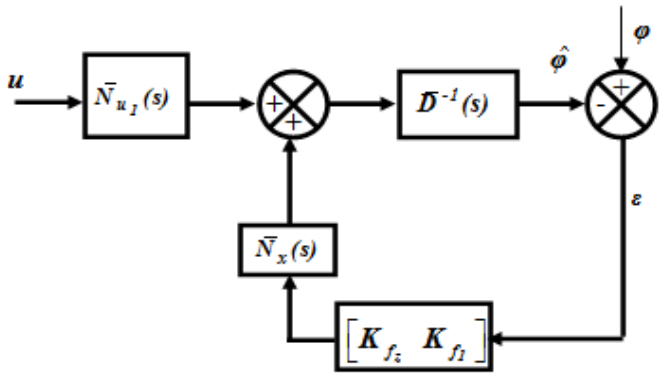


FIG. 4.2 – Filtre H_∞ fictif dans le domaine fréquentiel

De plus, d'après la figure (4.2), l'erreur ϵ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\epsilon(s) = [\bar{D}(s) + \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix}]^{-1}(\bar{D}(s)\varphi(s) - \bar{N}_{u_1}(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}) \tag{4.40}$$

D'autre part, en utilisant les représentations temporelles (4.1b), (4.1c) et (3.21), cette erreur satisfait

$$\begin{aligned} \epsilon(s) &= \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A + \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix})^{-1} \times (\begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \varphi(s) \\ &+ \left(\begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & D_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Une comparaison entre (4.41) et (4.40) montre que

$$\tilde{\bar{D}}_f(s) = \bar{N}_x(s) \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} + \bar{D}(s) \tag{4.42}$$

dans (4.40) caractérise bien les dynamiques du filtre H_∞ fictif dans le domaine fréquentiel. Nous avons donc

$$det\ \tilde{\bar{D}}_f(s) = det\ (sI - A + \begin{bmatrix} K_{f_z} & K_{f_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix}) \tag{4.43}$$

En multipliant (4.42) à gauche par $\bar{D}^{-1}(s)$ et en utilisant la MFD (4.34), nous obtenons

$$\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}_f(s) = I_{m_z+p} + \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}[K_{f_z} \quad K_{f_1}] \tag{4.44}$$

Nous retrouvons bien la relation (3.25) liant la représentation temporelle du filtre H_∞ fictif à travers son gain ($[K_{f_z} \quad K_{f_1}]$) à celle fréquentielle à travers sa matrice polynomiale ($\tilde{\bar{D}}_f(s)$).

De façon équivalente à $\tilde{D}_f(s)$ (voir lemme (16)), nous avons :

Lemme 19 *La matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ caractérisant les dynamiques du filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel, doit obéir aux deux propriétés suivantes :*

$$\delta_{rj}[\tilde{\bar{D}}_f(s)] = \delta_{rj}[\bar{D}(s)],\ j = 1, 2, 3....m_z + p \tag{4.45}$$

$$\Gamma_r[\tilde{\bar{D}}_f(s)] = \Gamma_r[\bar{D}(s)] \tag{4.46}$$

et elle possède exactement le même nombre de paramètres libre que le gain $[K_{f_z}\ \ K_{f_1}]$, à savoir $(m_z + p) \times n$. Avec δ_r et Γ_r sont données respectivement par les définitions (13) *et* (14).■

Remarque 20 *Nous tenons à noter que pour le filtre H_∞ implémentable (non fictif) $(K_{f_z} = 0)$, la relation* (4.44) *devient*

$$\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s) \ = \ I_{m_z+p} + \begin{bmatrix} L_z \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1}[0 \ \ K_{f_1}] \tag{4.47}$$

où $\tilde{\bar{D}}(s)$ est, dans ce cas, la matrice polynomiale dénominateur du filtre H_∞ implémentable (non fictif).■

Remarque 21 *La matrice dénominateur du filtre implémentable (non fictif) $\tilde{\bar{D}}(s)$ (obtenue pour $K_{f_z} = 0$) et la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ du filtre fictif ($K_{f_z} \neq 0$), sont reliées selon les équations* (3.34) *et* (3.35).■

De plus une équation matricielle polynomiale permettant de déterminer la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ du filtre H_∞ fictif est donnée par (3.46).

Ainsi, les deux matrices polynomiales paramétrant la commande H_∞ par retour d'état et celle du filtre H_∞ fictif peuvent être calculés dans la domaine fréquentiel. En effet, $\tilde{D}_f(s)$ et $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ peuvent être déterminées en résolvant les deux équations matricielles polynomiales proposées (4.27) et (3.46). Ensuite, en utilisant (4.26) et (3.35), les deux matrices $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\bar{D}}(s)$ paramétrant la commande H_∞ par retour d'état et le filtre H_∞, non fictif, dans le domaine fréquentiel sont obtenues.

4.2.3 Synthèse de correcteur basé sur un filtre H_∞ d'ordre plein directement dans le domaine fréquentiel

Définissons le critère de performance donné par :

$$\tilde{J} = sup_{\ w \in\ L_2[0,\ \infty)} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_{zw}\|_\infty \tag{4.48}$$

$\|w\|_2 \neq 0$ et $F_{zw}(s)$ est la matrice de transfert des perturbations w à la sortie z du système (4.1) bouclé avec un correcteur de la forme :

$$\begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = -G_C(s) \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix} + G_{Cr}(s)r(s) \tag{4.49}$$

Par conséquent le problème de commande H_∞ est équivalent au problème de minimisation suivant :

Problème de commande H_∞ : Supposons que $D_z^T D_z > 0$ et $D_3 D_3^T > 0$. Nous cherchons à déterminer, pour un scalaire $\gamma > 0$ fixé, un correcteur stabilisant $(G_C(s), G_{Cr}(s))$ tel que le critère (4.48) satisfait $\tilde{J} < \gamma$.

En posant la MFD copremière à droite suivante,

$$\left[\begin{array}{c} L_z \\ C \end{array}\right](sI - A)^{-1}\left[\begin{array}{cc} D_2 & B \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & D_z \\ D_3 & 0 \end{array}\right] = N_{y_1}(s)D^{-1}(s) \tag{4.50}$$

et en utilisant (4.37), (4.1) et (4.14), le système à commander est décrit dans le domaine fréquentiel par :

$$\varphi(s) = N_{y_1}(s)D^{-1}(s)\left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array}\right] \tag{4.51a}$$

$$z(s) = N_{z_1}(s)D^{-1}(s)\left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array}\right] \tag{4.51b}$$

La représentation fréquentiel du correcteur basé sur un filtre reflétant la propriété "filtre" (voir paragraphe (1.6.3) du premier chapitre), peut être obtenue en considérant le transfert en boucle ouverte reliant les entrées φ et $\left[\begin{array}{c} w \\ u \end{array}\right]$ du correcteur à sa sortie $\hat{\hat{u}}$ définie par :

$$\hat{\hat{u}} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}\right]\hat{x} \tag{4.52}$$

où nous supposons que $K_{f_z} = 0$ (nous utilisons un filtre non fictif).

En utilisant (4.29), la relation (4.52) peut s'écrire comme suit :

$$\hat{\hat{u}}(s) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}\right]\hat{x}(s) \tag{4.53}$$

$$= \left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}\right](sI - A + K_{f_1}C)^{-1}\left[\begin{array}{cc} 0 & K_{f_1} \end{array}\right]\varphi(s) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}\right](sI - A + K_{f_1}C)^{-1}\left[\begin{array}{cc} 0 & B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array}\right] \tag{4.54}$$

cette représentation (4.54) caractérise le comportement fréquentiel du correcteur basé sur un filtre H_∞, que nous allons l'écrire sous forme de matrices polynomiales :

soit,

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}\right](sI - A + K_{f_1}C)^{-1}\left[\begin{array}{cc} 0 & K_{f_1} \end{array}\right] = \Delta^{-1}(s)N_C(s) \tag{4.55}$$

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}\right](sI - A + K_{f_1}C)^{-1}\left[\begin{array}{cc} 0 & B \end{array}\right] = \Delta^{-1}(s)N_{u_1}(s) \tag{4.56}$$

nous aurons :

$$\hat{\tilde{u}}(s) = \Delta^{-1}(s) \left[\begin{array}{cc} N_{u_1}(s) & N_C(s) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \\ \varphi(s) \end{array} \right] \tag{4.57}$$

où $\Delta(s)$ et $\left[\begin{array}{cc} N_{u_1}(s) & N_C(s) \end{array} \right]$ constitue une MFD copremière à gauche du correcteur basé sur un filtre H_∞, avec $\Delta(s)$ est de lignes réduites.

Notons que,

$$det(\Delta(s)) \;\; = \;\; det\ (sI - A + K_{f_1}C) \tag{4.58}$$

donc les pôles du correcteur basé sur un filtre H_∞ dans cette représentation, solutions de $det(\Delta(s)) = 0$ (voir (4.58)), coincident avec les valeurs propres du filtre, solutions de $det(sI - A + K_{f_1}C) = 0$. Le correcteur est dit alors dans une structure "filtre".

Si nous remplaçons maintenant l'etat x dans (4.6) par son estimé $\hat{x}$ avec $K_w = 0$ (nous considérons aussi un retour non fictif comme c'est le cas pour le filtre, $(K_{f_z} = 0)$), nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array} \right] & = & -(\left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array} \right] (sI - A + K_{f_1}C + BK)^{-1} \left[\begin{array}{cc} 0 & K_{f_1} \end{array} \right])\varphi(s) \\ & + & (-\left[\begin{array}{c} 0 \\ K \end{array} \right] (sI - A + K_{f_1}C + BK)^{-1}BM + \left[\begin{array}{c} 0 \\ M \end{array} \right])\ r(s) \end{array} \tag{4.59}$$

Le correcteur basé sur le filtre H_∞ est décrit alors comme un correcteur à retour de sortie.

A partir de cette structure les matrices du correcteurs $D_C(s) \in \mathbb{R}^{(m_1+q)\times(m_1+q)}$ et $N_C(s) \in \mathbb{R}^{(m_1+q)\times(m_z+p)}$ sont déterminées à partir des deux matrices polynomiales $\tilde{D}(s)$ et $\tilde{\tilde{D}}(s)$ paramétrant respectivement une commande H_∞ par retour d'état et les dynamiques du filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel.

En effet, par analogie à la paragraphe (1.6.3), en posant

$$D_C(s) = N_{u_1}(s) + \Delta(s) \tag{4.60}$$

$$N_C^*(s) = \Delta^{-1}(s)N_C(s) \tag{4.61}$$

$$D_C^*(s) = \Delta^{-1}(s)D_C(s) \tag{4.62}$$

$$N_{Cr}(s) = \Delta(s) \left[\begin{array}{c} 0 \\ M \end{array} \right] \tag{4.63}$$

avec $N_{Cr}(s) \in \mathbb{R}^{(m_1+q)\times n}$, la relation (4.59) est équivalente à

$$\left[\begin{array}{c} w(s) \\ u(s) \end{array} \right] = -G_C(s)\varphi(s) + G_{Cr}(s)r(s) \tag{4.64}$$

avec

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

du fait que la sortie z est non mesurable,

$$G_C(s) = D_C^{-1}(s)N_C(s) \tag{4.66}$$

et

$$G_{Cr}(s) = D_C^{-1}(s)N_{Cr}(s) \tag{4.67}$$

A partir de ces MFDs, le système en boucle fermé avec un correcteur dans une structure en retour de sortie peut être représenté selon la figure (4.3).

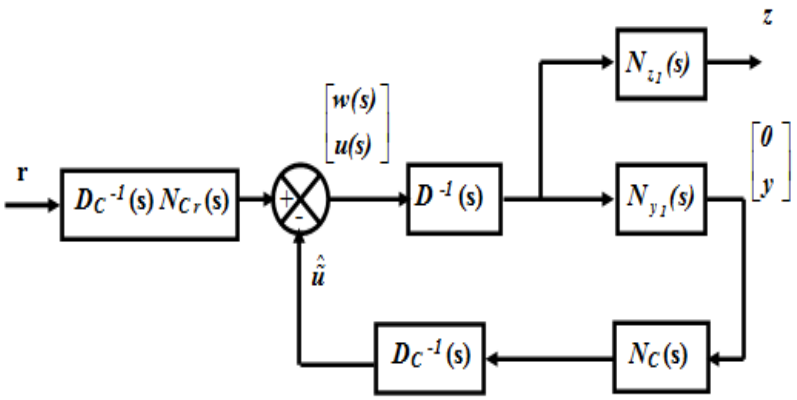


FIG. 4.3 – Système de commande H_∞ en boucle fermé

Il s'en suit immédiatement de la figure (4.3) que la sortie à contrôler satisfait

$$z(s) = N_{z_1}(s)[N_C(s)N_{y_1}(s) + D_C(s)D(s)]^{-1}N_{Cr}(s)r(s) \tag{4.68}$$

qui peut être décrit aussi (voir (4.18), mais avec un retour d'état non fictif dans ce cas, ($\tilde{D}_f(s)$ devient $\tilde{D}(s)$), voir aussi remarque (18)), selon

$$z(s) = N_{z_1}(s)\tilde{D}^{-1}(s)r^*(s) \tag{4.69}$$

avec $r^*(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} r(s)$.

D'après (4.69), le transfert (4.68) montre que l'équation

$$N_C(s)N_{y_1}(s) + D_C(s)D(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s) \tag{4.70}$$

est satisfaite par un correcteur basé sur un filtre H_∞ où $N_C(s)$ et $D_C(s)$ sont les matrices du correcteur à déterminer.

Nous montrons bien, que dans le cas d'un système avec ou sans perturbation, nous sommes amenés à résoudre une équation diophantienne caractéristique du système correcteur basé sur un filtre ou observateur.

En adoptant la même méthode de résolution développé dans la section (1.6.3) du premier chapitre, nous arrivons à

$$N_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s)Y(s) - V(s)\bar{D}(s) \tag{4.71}$$

et

$$D_C(s) = \Delta(s)\tilde{D}(s)X(s) + V(s)\bar{N}_{u_1}(s) \tag{4.72}$$

où $X(s)$ et $Y(s)$ résultent de la MFD copremière à droite (4.50), ils sont deux solutions de l'identité de Bezout

$$Y(s)N_{y_1}(s) + X(s)D(s) = I_{m_1+q} \tag{4.73}$$

la matrice $\bar{N}_{u_1}(s)$ est déterminée de la MFD (4.35) et la matrice $V(s)$ vérifie la conversion

$$\bar{V}(s)\tilde{\bar{D}}^{-1}(s) = \Delta^{-1}(s)V(s) \tag{4.74}$$

où $\bar{V}(s) \in \mathbb{R}^{(m_1+q)\times(m_z+p)}$ donnée par

$$\bar{V} = \Pi\{\tilde{D}(s)Y(s)\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)\} \tag{4.75}$$

avec $\Pi\{.\}$ est donnée par la définition (16).

4.2.4 Résumé des étapes d'une synthèse fréquentielle directe d'un correcteur basé sur un filtre H_∞ d'ordre plein

La première étape dans la synthèse du correcteur basé un filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel, à partir de la représentation d'état du système considéré (sans faire de calcul dans le domaine temporel), est de déterminer les matrices polynomiales $\bar{D}(s)$, $D(s)$, $\bar{N}_{u_1}(s)$ et $N_{y_1}(s)$ intervenant dans les MFDs copremières à droite et à gauche (4.35) et (4.50) où $D(s)$ est de colonnes réduites et $\bar{D}(s)$ de lignes réduites. Ensuite, respecter les étapes de synthèse suivantes :

1) **Synthèse de la loi de commande H_∞ par retour d'état** :
   Revient à déterminer la matrice polynomiale (implémentable) $\tilde{D}(s)$ de dimension $(m_1 + q) \times (m_1 + q)$, après avoir :
   a. Déterminer la matrice $N_z(s)$ à partir de (4.11).
   b. Déterminer la matrice dénominateur fictif $\tilde{D_f}(s)$ solution de l'équation matricielle polynomiale (4.27).
   c. Déduire la matrice dénominateur $\tilde{D}(s)$ paramétrant la loi de commande H_∞ par retour d'état à partir de (4.26).

2) **Synthèse du filtre H_∞ d'ordre plein** :

Revient à determiner la matrice polynomiale $\tilde{\bar{D}}(s)$ de dimension $(m_z+p)\times(m_z+p)$, après avoir :

a. Déterminer la matrice $\bar{N}_w(s)$ à partir de (4.36).

b. Déterminer la matrice dénominateur fictif $\tilde{\bar{D}}_f(s)$ solution de l'équation matricielle polynomiale (3.46).

c. Déduire la matrice dénominateur $\tilde{\bar{D}}(s)$ paramétrant les dynamiques du filtre H_∞ d'ordre plein à partir de (3.35).

3) **Déterminations de la MFD copremière à gauche du correcteur basé sur un filtre H_∞** :

Dans une première étape, résoudre l'identité de Bezout

$$Y(s)N_{y_1}(s) + X(s)D(s) = I_{m_1+q} \tag{4.76}$$

Ensuite, calculer la matrice polynomiale

$$\bar{V} = \Pi\{\tilde{D}(s)Y(s)\bar{D}^{-1}(s)\tilde{\bar{D}}(s)\}, \tag{4.77}$$

et déterminer $V(s)$ en vérifiant la conversion (4.74) tel que $\Delta(s)$ soit de lignes réduites.

Les matrices polynomiales $N_C(s)$ et $D_C(s)$ caractérisant la MFD copremière à gauche $G_C(s) = D_C^{-1}(s)N_C(s)$ du correcteur basé sur un filtre H_∞, sont alors données par (4.71) et (4.72).

Ainsi, nous avons proposé une nouvelle synthèse fréquentielle d'un correcteur basé sur un filtre H_∞ pour le cas des systèmes linéaires affectés par des perturbations à énergie bornée. Nous constatons que que ce soit pour le cas des systèmes linéaires sans perturbations (traité dans le premier chapitre) où avec perturbations, les matrices polynomiales intervenant dans la MFD du correcteur peuvent être obtenues à travers la résolution d'une équation diophantienne.

Remarque 22 *La différence que nous pouvons déduire dans une synthèse directe dans le domaine fréquentiel, entre le cas sans perturbation et avec perturbation, c'est que pour le premier cas nous partons d'une seule matrice de transfert caractéristique du système considéré (voir*(1.175)*), tandis que pour le cas avec perturbation, nous partons de la représentation d'état du système (juste pour avoir les matrices intervenant dans la représentation d'état) et des deux matrices de transferts données par* (4.35) *et* (4.50)*. Si $w = 0$, nous pourrons partir d'une seule matrice de transfert ; En effet, dans ce cas les matrices D_2 et D_3 disparaissent de la représentation d'état* (4.1) *et nous aurons une égalité entre les deux descriptions* (4.35) *et* (4.50).■

Remarque 23 *Il est à noter que du fait que nous cherchons à faire une synthèse directe dans le domaine fréquentiel sans faire de calcul dans le domaine temporel, nous sommes contraint à choisir comme forme d'observateur celle de "Luenberger". En effet, cette forme fait intervenir les mêmes matrices du système initial considéré. De ce fait, pour le cas sans*

perturbations nous partirons de la matrice de transfert régissant le processus et à partir des deux descriptions matricielles fractionnaires (MFDs) copremière à droite et à gauche de cette matrice de transfert, nous déterminons les deux matrices polynomiales paramétrant la commande par retour d'état et l'observateur dans le domaine fréquentiel. Pour le cas avec perturbation, nous partons de la représentation d'état du système sans faire de calcul dans le domaine temporel (juste pour avoir les matrices A, B, D_2, L_z, D_z, C et D_3), nous déterminons les matrices paramétrant la loi de commande H_∞ par retour d'état et les dynamiques du filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel. Ensuite, dans une dernière étape, en utilisant ces deux matrices polynomiales le correcteur basé sur le filtre H_∞, défini dans notre cas par une MFD copremière à gauche, est alors déterminé.

Si nous changeons la forme de l'observateur ou du filtre H_∞, c'est à dire l'observateur ou le filtre fait intervenir des matrices autres que celle du systèmes initial considéré, nous sommes alors contraint à determiner ces matrices et par suite faire une synthèse temporelle de l'observateur ou du filtre H_∞ ; ce qui ne fera pas l'affaire puisque dans ce cas nous passons par le domaine temporel.■

Dans le dernier volet du chapitre, nous proposons une nouvelle méthode relative à la synthèse d'une loi de commande via un filtre fonctionnel H_∞ pour des systèmes descriptifs sujet à des perturbations à énergie bornée, en traitant aussi bien le cas continu que discret (voir [ESDM10d]).

4.3 Synthèse de commande via un filtre fonctionnel H_∞ pour les systèmes singuliers

4.3.1 Position du problème

Dans cette partie, nous considérons le système singulier linéaire multivariable suivant

$$\begin{aligned} E\sigma x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D_2 w(t) && \text{(4.78a)} \\ z(t) &= L_z x(t) && \text{(4.78b)} \\ y(t) &= Cx(t) + D_3 w(t) && \text{(4.78c)} \end{aligned}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ la sortie à contrôler, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la mesure, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est l'entré de commande du système et $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ représente les perturbations à énergie bornée. $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A, B, D_2, L_z, C et D_3 sont des matrices connues de dimension appropriées.

Nous représentons les deux types de systèmes continues et discret par (4.78) avec les notations suivantes :

$t \in \mathbb{N}$, $\sigma x(t) = x(t+1)$ pour le système à temps discret.

$t \in \mathbb{R}$, $\sigma x(t) = \dot{x}(t)$ pour le système à temps continu.

Dans ce qui suit, nous supposons que

Hypothèse 7 [*DB95*]

1) *rang* $E = r \leq n$

2) *rang* $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

Sous l'hypothèse 7, il existe une matrice inversible (voir remarque (2)),

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

telle que,

$$a_0 E + b_0 C = I_n \tag{4.80}$$
$$c_0 E + d_0 C = 0_{m \times n} \tag{4.81}$$

avec a_0, b_0, c_0 et d_0 sont de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(p \times n)$ et $(p \times p)$.

Nous nous proposons de synthétiser un correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ obéissant à la structure suivante :

$$\sigma\varphi(t) = N\varphi(t) + L_1 y(t) + Gu(t) \tag{4.82a}$$
$$u(t) = \varphi(t) + K_1 b_0 y(t) + K d_0 y(t) \tag{4.82b}$$

où $\varphi(t) \in \mathbb{R}^q$ (avec $q \leq n$) est l'état du filtre et les matrices N, L_1, G, K_1 et K sont à déterminées.

Dans la suite nous discutons du choix de la matrice non singulière $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ sur la structure du filtre et montrer que le filtre est indépendant de ce choix.

Remarque 24 ***(Unicité du Filtre*** H_∞)

A partir de (1.86) *de la remarque* (2) *sur la décomposition en SVD, nous pouvons déduire que* U^T *et* V *ne sont pas unique, par conséquent* $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ *n'est pas unique. Soit,* $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ *une autre matrice inversible tel que*

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.83}$$

il existe toujours une matrice inversible R *de dimension appropriée tel que*

$$R \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

D'autre part, considérant le correcteur via un filtre fonctionnel (4.82)*, à partir de* (4.82*b*) *nous avons*

$$u(t) = \varphi(t) + \begin{bmatrix} K_1 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0 \end{bmatrix} y(t) \tag{4.85}$$

si nous considérons $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, *alors* (4.82b) *peut être réécrite suivant*

$$u(t) = \varphi(t) + \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0 \end{bmatrix} y(t) \tag{4.86}$$

avec, $\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & \bar{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K \end{bmatrix} R$, *et le problème est réduit à determiner* K_1 *et* K, *ce qui montre que le filtre est indépendant du choix de la matrice* $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$.■

Hypothèse 8 ***(Critères de Performances)***

Nous utilisons les deux critères de performances H_∞ *donnés par :*

1)

$$J_{zw}^1 = \int_0^\infty (z^T z - \gamma_c^2 w^T w) dt \tag{4.87}$$

avec $\gamma_c > 0$, *pour le cas continu* ($t \in I\!R$).

2)

$$J_{zw}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (z^T z - \gamma_d^2 w^T w) \tag{4.88}$$

avec $\gamma_d > 0$, *pour le cas discret* ($t \in I\!N$).

Définition 22 *Le système linéaire proposé* (4.78) *est admissible via un filtre fonctionnel, s'il existe une loi de commande donnée par* (4.82) *vérifiant*

i) Si $w(t) = 0$,

$$\lim_{t \to \infty} (u(t) - K_1 x(t)) = 0 \tag{4.89}$$

ii) Le vecteur d'état du système et l'erreur d'observation sont admissibles.

Alors, le problème à étudier peut être énoncé comme suit :

Problème 4 *Notre objectif principal est de construire un correcteur via un filtre fonctionnel* H_∞ (4.82), *dans le domaine temporel et son équivalent dans le domaine fréquentiel, tel que*

i) Si $w(t) = 0$,

$$\lim_{t \to \infty} (u(t) - K_1 x(t)) = 0 \tag{4.90}$$

ii) Le vecteur d'état du système et l'erreur d'observation ($e = K_1 x - u$) *sont admissibles et satisfont un critère de performance* H_∞ *;* $J_{zw}^1 < 0$ *pour le cas continu et* $J_{zw}^2 < 0$ *pour le cas discret, avec* $\gamma_c > 0$ *et* $\gamma_d > 0$ *donnés* (*voir* (4.87) *et* (4.88)).

Notons que nous utilisons les notations suivantes, pour la synthèse de retour d'état :

1) $K_1 = K_c$, pour le cas temps continu.

2) $K_1 = K_d$, pour le cas temps discret.

4.3.2 Synthèse d'un retour d'état H_∞ : cas continu et cas discret

Nous proposons de résoudre le problème de commande via un filtre H_∞ en deux étapes. Dans une première étape, nous cherchons à determiner un gain de retour d'état K_1 pour la synthèse d'une loi de commande vérifiant le point i) de la définition (22) pour le sous-système (4.78a)-(4.78b). Ensuite, nous cherchons à déterminer dans une seconde étape, un correcteur via un filtre fonctionnel (4.82) permettant de reconstruire cette loi de commande et donc d'estimer uniquement une fonctionnelle de l'état utile pour la commande.

a. Synthèse de retour d'état : cas continu

a1. Résultats préliminaires :
Considérons le système singulier LTI multivariable

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + D_2 w(t) \tag{4.91a}$$
$$z(t) = L_z x(t) \tag{4.91b}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $z(t) \in \mathbb{R}^{m_z}$ est la sortie, et $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ représente les perturbations à énergie bornée. E, A, D_2 et L_z sont des matrices connues de dimensions appropriées.

Nous donnons la définition suivante qui assure les conditions d'admissibilité pour un système singulier.

Définition 23 *I) La matrice $(sE - A)$ (ou une paire (E, A)) est régulière si $det(sE - A)$ n'est pas nulle.*

II) Pour une matrice $(sE-A)$ régulière, les valeurs propres finis de $sE-A$ sont dites être les modes finies de (E, A). Supposons que $Ev_1 = 0$. Alors les valeurs propres infinies associés avec aux vecteurs principales généralisés v_k satisfaisant $Ev_k = Av_{k-1}, k = 1, 2, 3, ...$, sont les modes impulsive de (E, A).

III) Une paire (E, A) est admissible si elle est régulière et ne possède ni des modes impulsifs ni des modes finis instables.

Dans le but d'assurer l'admissibilité et l'atténuation du critère de performance H_∞ du système (4.91), nous considérons le lemme suivant :

Lemme 20 *Le système* (4.91) *est admissible et satisfait le critère de performance H_∞ $J^1_{zw} < 0$ pour un $\gamma_c > 0$ donné s'il existe $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que*

1)

$$YE^T = EY^T \geq 0 \tag{4.92}$$

2)

$$\begin{bmatrix} YA^T + AY^T & YL_z^T & D_2 \\ (YL_z^T)^T & -\gamma_c^2 I & 0 \\ D_2^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.93}$$

■

Preuve 18 *Appliquant [MKOS97] sur le système descriptif* (4.91)*, l'admissibilité et le critère de performance H_∞ sont satisfaits s'il existe $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tel que*

1)

$$YE^T = EY^T \geq 0 \tag{4.94}$$

2)

$$YA^T + AY^T + D_2D_2^T + F_2 < 0 \tag{4.95}$$

avec,
$F_2 = (YL_z^T)(\gamma_c^{-2}I)(YL_z^T)^T$

En appliquant le lemme de Schur [BEF94], la relation (4.95) *est équivalente à* (4.93) *et le lemme est par conséquent démontré.*■

a2. Synthèse du gain de retour d'état :
Dans cette partie, nous remplaçons u par $K_c x$ dans ((4.78a)-(4.78b)), nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + BK_c)x(t) + D_2w(t) && \text{(4.96a)} \\ z(t) &= L_z x(t) && \text{(4.96b)} \end{aligned}$$

Notons que système (4.96) est similaire à (4.91) de la partie 4.3.2. Par conséquent, le lemme (20) peut être appliqué sur (4.96) afin de pouvoir déterminer le gain de retour d'état K_c assurant l'admissibilité mais aussi l'atténuation du critère de performance H_∞ :

Théorème 21 *[ESDM10d] Le système* (4.96) *est admissible et satisfait le critère de performance H_∞ $J_{zw}^1 < 0$ pour un $\gamma_c > 0$ donné s'il existe des matrices Y et X telles que*

1)

$$YE^T = EY^T \geq 0 \tag{4.97}$$

2)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & YL_z^T & D_2 \\ (YL_z^T)^T & -\gamma_c^2 I & 0 \\ D_2^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.98}$$

où
$(1,1) = AY^T + YA^T + BX + X^TB^T$

Alors le gain K_c est donné par

$$K_c = X(Y^T)^{-1} \tag{4.99}$$

■

Preuve 19 *La LMI* (4.98) *est obtenue en remplaçant A par* $A+BK_c$ *(comparer le système* (4.96) *avec* (4.91)*) dans la LMI* (4.93) *et en supposant que* $X = K_cY^T$*. Alors le théorème est bien démontré.*■

b. Synthèse de retour d'état : cas discret

Cette partie concerne la synthèse d'un correcteur tel que le système en boucle fermé est stable et la norme de la fonction de transfert de la boucle fermé est minimisée.

Pour cela, nous considérons le sous-système ((4.78a)-(4.78b)) (pour $t \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} Ex(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + D_2w(t) && \text{(4.100a)} \\ z(t) &= L_zx(t) && \text{(4.100b)} \end{aligned}$$

Alors, en appliquant le correcteur $u(t) = K_d\ x(t)$ au système (4.100), le système en boucle fermé est donné par

$$\begin{aligned} Ex(t+1) &= (A + BK_d)x(t) + D_2w(t) && \text{(4.101a)} \\ z(t) &= L_zx(t) && \text{(4.101b)} \end{aligned}$$

Par conséquent la matrice de transfert du système en boucle fermé $G_{zw}(z)$ d'entrées les perturbations $w(t)$ et de sorties $z(t)$, est donnée par

$$G_{zw}(z) = L_z(zE - A - BK_d)^{-1}D_2 \tag{4.102}$$

La solution du problème de commande H_∞ relative au cas discret, c'est à dire la détermination du gain de retour d'état K_d tel que la contrainte H_∞, $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma_d$, pour un γ_d positif donné est vérifiée, est donnée par le lemme suivant :

Lemme 21 [*XY00*]

Il existe un correcteur par retour d'état $u(t) = K_d\ x(t)$ *telles que la contrainte* H_∞, $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma_d$*, soit satisfaite, s'il existe une matrice* Φ *de dimension appropriée, une matrice symétrique inversible* Q*, un scalaire* $\epsilon > 0$ *satisfaisant* $\varphi_1 = Q^{-1} + \gamma_d^{-2}D_2D_2^T$*,* $\Psi = B^TQB + \epsilon I$ *sont inversibles et les inégalités suivantes sont satisfaites*

$$\begin{aligned} E^T\varphi_1^{-1}E &\geq 0 && \text{(4.103a)} \\ A^TQA - A^TQB\Psi^{-1}B^TQA + L_z^TL_z - E^T\varphi_1^{-1}E - \Phi^T\Gamma\Phi &< 0 && \text{(4.103b)} \\ \gamma_d^2I - D_2^T\varphi_1^{-1}D_2 &> 0 && \text{(4.103c)} \end{aligned}$$

avec Γ *résulte de la décomposition de* Ψ *selon la forme suivante*

$$\Psi = V^T \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{bmatrix} \tag{4.104}$$

V *est une matrice orthogonale,* Θ *et* Γ *sont des matrices diagonales symétriques définies positives de dimensions appropriées. Dans ce cas, un correcteur par retour d'état judicieux* $u(t) = K_d\ x(t)$ *peut être choisie tel que le gain de retour d'état est donné par*

$$K_d = V^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} - \Psi^{-1}B^TQA \tag{4.105}$$

■

Jusqu' à cette étape nous disposons des deux gains de retour d'état relative aux deux cas continu et discret. Mais, nous supposons dés le départ que les états ne sont pas tous accessibles. Nous proposons alors dans la suite, un correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ permettant de reconstruire les lois de commandes obtenues.

4.3.3 Synthèse de correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ dans le domaine temporel : cas continu et cas discret

En utilisant le point i) relatif à la definition (22), nous définissons l'erreur d'observation suivante

$$\begin{aligned} e(t) &= K_1 x(t) - u(t) && (4.106a)\\ &= \psi_1 E x(t) - \varphi(t) - \psi_2 w(t) && (4.106b)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_1 &= K_1 a_0 + K c_0 && (4.107)\\ \psi_2 &= (K_1 b_0 + K d_0) D_3 && (4.108)\end{aligned}$$

Alors, sa dynamique peut être écrite en utilisant (4.78)) et (4.82)) comme suit

$$\begin{aligned} \sigma e(t) &= \psi_1 E \sigma x(t) - \sigma\varphi(t) - \psi_2 \sigma w(t) && (4.109a)\\ &= Ne(t) + (\psi_1 A - L_1 C - N\psi_1 E)x(t) \\ &+ (\psi_1 B - G)u(t) + (\psi_1 D_2 - L_1 D_3 + N\psi_2)w(t) - \psi_2 \sigma w(t) && (4.109b)\end{aligned}$$

Le problème de synthèse du filtre fonctionnel H_∞ revient à déterminer les matrices N, L_1, G et K telles que

i) le filtre (4.82) est non biaisé si $w(t) = 0$, c'est à dire il ne dépend pas explicitement de l'état $x(t)$ et de $u(t)$.

ii) le filtre (4.82) est stable, i.e N est de Hurwitz.

iii) le critère de performance H_∞ est satisfait .

Le non biais du filtre est assuré si et seulement si l'equation de Sylvester suivante est vérifiée

$$\psi_1 A - L_1 C - N\psi_1 E = 0 \tag{4.110}$$

avec

$$\psi_1 B - G = 0 \tag{4.111}$$

Afin de déterminer les matrices du filtre, nous appliquons la même approche que dans le chapitre 3 relative à l'estimation H_∞ d'une fonctionnelle de l'état.

L'équation de Sylvester (4.110) peut être écrite, en tenant compte de (4.107), (4.80) et (4.81) comme suit

$$NK_1a_0E - Kc_0A + (L_1 - NKd_0)C = K_1a_0A \tag{4.112}$$

Posons

$$J = (L_1 - NKd_0) \tag{4.113}$$

l'équation (4.112) peut se transformer en

$$[N \quad -K \quad J] \begin{bmatrix} K_1a_0E \\ c_0A \\ C \end{bmatrix} = K_1a_0A \tag{4.114}$$

Pour la résolution de (4.114), posons

$$[N \quad -K \quad J] = X \tag{4.115}$$

$$\begin{bmatrix} K_1a_0E \\ c_0A \\ C \end{bmatrix} = \Sigma \tag{4.116}$$

$$K_1a_0A = \Theta \tag{4.117}$$

donc (4.114) devient

$$X\Sigma = \Theta \tag{4.118}$$

Une fois la matrice X déterminée (voir (3.83)), après avoir vérifier l'equation de rang (3.82), nous pouvons extraire les expressions des matrices du filtre fonctionnel N, L_1, G et K.

En effet,

$$N = X \begin{pmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{11} - ZB_{11} \tag{4.119}$$

où

$$A_{11} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.120}$$

$$B_{11} = (I_{2p+q} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.121}$$

$$J = X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} = A_{22} - ZB_{22} \tag{4.122}$$

avec

$$A_{22} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} \tag{4.123}$$

$$B_{22} = (I_{2p+q} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} \tag{4.124}$$

et,

$$-K = X \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \end{pmatrix} = A_{33} - ZB_{33} \tag{4.125}$$

avec

$$A_{33} = \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.126}$$

$$B_{33} = (I_{2p+q} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.127}$$

Une fois les matrices N, J et K sont obtenues, la matrice L_1 est déduite à partir de (4.113). D'autre part, d'après (4.111) et (4.107), la matrice G satisfait

$$G = \psi_1 B = (K_1 a_0 + K c_0) B \tag{4.128}$$

Alors toutes les matrices intervenant dans la synthèse du filtre fonctionnel sont maintenant connues, si et seulement si la matrice Z est connue. D'autre part, la dynamique de l'erreur d'estimation (4.109b) s'écrit

$$\sigma e(t) = Ne(t) + \alpha w(t) - \psi_2 \sigma w(t) \tag{4.129}$$

avec

$$\alpha = \psi_1 D_2 + N\psi_2 - L_1 D_3 = \alpha_1 - Z\alpha_2 \tag{4.130}$$

où

$$\alpha_1 = K_1 a_0 D_2 - \Theta\Sigma^+ \begin{pmatrix} -K_1 b_0 D_3 \\ c_0 D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \tag{4.131}$$

$$\alpha_2 = (I_{2p+q} - \Sigma\Sigma^+) \begin{pmatrix} K_1 b_0 D_3 \\ -c_0 D_2 \\ -D_3 \end{pmatrix} \tag{4.132}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_2 &= (Kd_0 + K_1 b_0) D_3 && (4.133) \\ &= \psi_{21} - Z\psi_{22} && (4.134) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_{21} &= -A_{33} d_0 D_3 + K_1 b_0 D_3 && (4.135) \\ \psi_{22} &= -B_{33} d_0 D_3 && (4.136) \end{aligned}$$

Nous remarquons que la dynamique d'erreur (4.129) contient la dérivée (pour le cas continu) $\dot{w}(t)$ ou le vecteur de perturbation avancé (pour le cas discret) $w(t+1)$. Pour contourner ce problème de dérivée de la perturbation, nous proposons de réécrire le système d'erreur sous la forme d'un système descriptif. En effet, à partir de (4.129), nous obtenons ce nouveau système singulier équivalent :

$$\begin{pmatrix} I & \psi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma e(t) \\ \sigma \rho_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w(t) \quad (4.137a)$$

$$e(t) = (I \quad 0) \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \quad (4.137b)$$

où $e(t)$ est l'erreur d'estimation et $\rho_1(t)$ est tel que $\rho_1(t) = w(t)$.
Soit,

$$\rho_{20} = \begin{pmatrix} I & \psi_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.138)$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} N & \alpha \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - ZB_{11} & \alpha_1 - Z\alpha_2 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

$$\beta_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

$$C = (I \quad 0) \quad (4.141)$$

et

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix} \quad (4.142)$$

Par conséquent, le système singulier (4.137) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho_{20}\ \sigma\chi(t) &= A_{20}\ \chi(t) + \beta_{20}\ w(t) && (4.143a) \\ e(t) &= C\ \chi(t) && (4.143b) \end{aligned}$$

A ce stade, nous pouvons donner les deux méthodes de synthèse du correcteur via un filtre fonctionnel H_∞.

Notons que nous utilisons les notations suivantes :

1) $Z = Z_c$, pour le cas continu.

2) $Z = Z_d$, pour le cas discret.

a. Synthèse de correcteur via un filtre fonctionnel : cas continu

Avant d'appliquer le lemme (20) sur le système singulier (4.143), nous considérons que le gain Z_c satisfait la relation suivante

$$Z_c\psi_{22} = 0 \tag{4.144}$$

et ceci dans le but d'éviter (comme pour la synthèse du filtre fonctionnel du chapitre 3) une matrice inconnue à déterminer Z_c dans la matrice singulière ρ_{20} (voir (4.138) et (4.134)), dans le système (4.143).

Alors il existe toujours une matrice $Z_{c_1} \in \mathbb{R}^{q\times(2p+q)}$ telle que

$$Z_c = Z_{c_1}(I - \psi_{22}\psi_{22}^+) \tag{4.145}$$

Dans le théorème suivant, le lemme 20 est utilisé pour determiner la matrice Z_c paramétrant toutes les matrices du correcteur via un filtre H_∞ grâce à la resolution de LMI.

Théorème 22 *[ESDM10d]*

La paire $(\rho_{20},\ A_{20})$ *est admissible et*

$$\|W(s) = (I \quad 0)(s\rho_{20} - A_{20})^{-1}\beta_{20}\|_\infty < \gamma_{c_1}$$

pour un $\gamma_{c_1} > 0$ *si et seulement s'il existe* $X_1 = X_1^T > 0 \in I\!R^{q\times q}$, $X_2 = X_2^T > 0 \in I\!R^{m_1\times m_1}$, $Y_1 \in I\!R^{(2p+q)\times q}$ *telles que les LMIs suivantes soient satisfaites*

1)

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_1L^T \\ P_{01} & P_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T & P_{01}^T \\ LX_1^T & P_{00}^T \end{pmatrix} \geq 0 \tag{4.146}$$

avec $P_{00} = \psi_{21}^T X_1 L^T$, $P_{01} = \psi_{21}^T X_1$

2)

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & X_1^T L^T & I_p \\ P_{12}^T & P_{14} & X_2^T & 0 \\ LX_1 & X_2 & -\gamma_{c_1}^2 I_{m_1\times m_1} & 0 \\ I_p & 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix} < 0 \tag{4.147}$$

avec $L^T = K_1 b_0 D_3$, $\theta_0 = (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)^T$, *et*

$$\begin{aligned}
P_{11} &= A_{11}^T X_1 + X_1^T A_{11} - B_{11}^T\theta_0 Y_1 - Y_1^T\theta_0^T B_{11} \\
P_{12} &= X_1^T\alpha_1 - Y_1^T\theta_0^T\alpha_2 - X_1^T L^T + A_{11}^T X_1 L^T + P_{02} \\
P_{02} &= -B_{11}^T\theta_0 Y_1 L^T \\
P_{14} &= -X_2 - X_2^T + \alpha_1^T X_1 L^T + LX_1^T\alpha_1 + P_{03} \\
P_{03} &= -\alpha_2^T\theta_0 Y_1 L^T - LY_1^T\theta_0^T\alpha_2
\end{aligned}$$

Le gain Z_{c_1} est alors donné par

$$Z_{c_1} = X_1^{-1} Y_1^T \tag{4.148}$$

et le gain Z_c est déduit à partir de la relation (4.145).■

Preuve 20 *En appliquant le lemme* (20) *sur le système singulier* (4.143) *avec le complément de Schur* [BEF94]*, nous obtenons*

1)

$$\Phi_1 = \Phi_1^T \geq 0 \tag{4.149}$$

avec $\Phi_1 = \rho_{20}^T X$

2)

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 + \Phi_2^T & (\beta_{20}^T X)^T & (I \;\; 0)^T \\ \beta_{20}^T X & -\gamma_{c_1}^2 I & 0 \\ (I \;\; 0) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.150}$$

avec $\Phi_2 = A_{20}^T X$

En posant

$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_1 L^T \\ L X_1 & X_2 \end{pmatrix}$ *avec* $X_1 = X_1^T > 0 \in I\!R^{q \times q}$ *et* $X_2 = X_2^T > 0 \in I\!R^{m_1 \times m_1}$ *à déterminés.*

Notons que la matrice X n'est pas diagonale, ce qui n'est pas très utilisé dans la littérature. La structure diagonale est conservative et nous relaxons cette condition ici en choisissant une structure non diagonale.

Utilisant (4.138)*, la relation* (4.149) *est équivalente à* (4.146)*. Alors, remplaçant A_{20} et β_{20} dans* (4.150)*, par leurs expressions* (4.139), (4.140) *et en utilisant* (4.145)*, la LMI* (4.147) *est satisfaite, avec $\theta_0 = (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)^T$ et $Y_1 = Z_{c_1}^T X_1$.*■

Une fois Z_c est obtenue, les matrices du correcteur basé sur un filtre fonctionnel H_∞ (4.82) sont alors calculées. En effet, N, G, K_1, K, b_0, d_0 et L_1 sont données respectivement par (4.119), (4.111), (4.99), (4.125), (4.80), (4.81) et (4.122) après calculé J à partir de (4.113).

b. Synthèse de correcteur via un filtre fonctionnel : cas discret

Avant de continuer, nous tenons à rappeler ces nouveaux résultats sur le système singulier discret dans le temps de la forme :

$$Ex(t+1) = Ax(t) + D_2 w(t) \tag{4.151a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{4.151b}$$

pour $t \in \mathbb{N}$, où x est l'état, y est la mesure, et w est la perturbation ; les matrices A, B et C sont connues.

Lemme 22 [*ZXS08*]
La paire $(E,\ A)$ *est admissible, si et seulement s'il existe une matrice définie positive* P *et une matrice symétrique* S *tel que*

$$A^T(P - E^{\perp T}SE^{\perp})A - E^TPE < 0 \tag{4.152}$$

■

Lemme 23 [*ZXS08*]
La paire $(E,\ A)$ *est admissible et* $\|T_{yw}(z)\|_\infty < \gamma_{d_1}$ $(T_{yw}(z) = C(zE - A)^{-1}D_2)$*, où le système singulier est considéré régulier, si et seulement s'il existe une matrice définie positive* P *et une matrice symétrique* S *telles que*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.153}$$

avec

$$\Phi_{11} = A^T(P - E^{\perp T}SE^{\perp})A - E^TPE + C^TC \tag{4.154a}$$
$$\Phi_{12} = A^T(P - E^{\perp T}SE^{\perp})D_2 \tag{4.154b}$$
$$\Phi_{22} = -\gamma_{d_1}^2 I_{m_1} + D_2^T(P - E^{\perp T}SE^{\perp})D_2. \tag{4.154c}$$

■

En définissant les matrices singulières suivante :

$$\Omega = \begin{bmatrix} I & -N\psi_2 + \alpha \\ 0 & -I \end{bmatrix} \text{ and } \Phi = \begin{bmatrix} I & -\psi_2 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

Nous obtenons, le système descriptif équivalent au (4.143), donné par

$$\rho_{21}\ \chi(k+1) = A_{21}\ \chi(k) + \beta_{21}\ w(k) \tag{4.155a}$$
$$e(k) = C_1\ \chi(k) \tag{4.155b}$$

avec

$$\rho_{21} = \Omega\ \rho_{20}\ \Phi = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.156}$$
$$A_{21} = \Omega\ A_{20}\ \Phi = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} \tag{4.157}$$
$$\beta_{21} = \Omega\ \beta_{20} = \begin{bmatrix} -N\psi_2 + \alpha \\ -I_{m_1} \end{bmatrix} \tag{4.158}$$
$$C_1 = C\ \Phi = \begin{bmatrix} I_q & -\psi_2 \end{bmatrix} \tag{4.159}$$

Nous remarquons que la matrice β_{21}, voir (4.158), contient le terme $-N\psi_2$ qui est non linéaire par rapport à Z_d. Afin d'éviter ce problème et de manière analogue au cas

continu, nous supposons que $Z_d\psi_{22} = 0$; Ce qui implique l'existence d'une matrice Z_{d_1} telle que la relation suivante est vérifiée.

$$Z_d = Z_{d_1}(I - \psi_{22}\psi_{22}^+) \tag{4.160}$$

Dans ce cas les matrices N, α et ψ_2 implémentées dans la synthèse du filtre fonctionnel, voir (4.119), (4.153) et (4.134), deviennent

$$\begin{aligned} N &= A_{11} - Z_{d_1}\bar{g} && (4.161a)\\ \alpha &= \alpha_1 - Z_{d_1}\bar{g_1} && (4.161b)\\ \psi_2 &= \psi_{21} && (4.161c) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{g} &= (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)B_{11} && (4.162)\\ \bar{g_1} &= (I - \psi_{22}\psi_{22}^+)\alpha_2 && (4.163) \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, une approche LMI est utilisée permettant d'obtenir la matrice de gain Z_d paramétrant les matrices du filtre :

Théorème 23 [*ESDM10d*]
La paire $(\rho_{21},\ A_{21})$ est admissible et $\|T_{we}(z)\|_\infty = \|C_1(z\rho_{21} - A_{21})^{-1}\beta_{21}\|_\infty < \gamma_{d_1}$ s'il existe $Y \in \mathbb{R}^{q\times(2p+q)}$, des matrices définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$ et une matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$ telles que la LMI suivante est satisfaite pour un $\gamma_{d_1} > 0$ donné

$$\begin{bmatrix} -P_1 + I_q & -\psi_{21} & 0 & P_{110} & P_{130} \\ (-\psi_{21})^T & P_{04} & S & LP_1^T & P_2^T \\ 0 & S & P_{05} & P_{120} & P_{140} \\ P_{110}^T & P_1L^T & P_{120}^T & -P_1 & -P_1L^T \\ P_{130}^T & P_2 & P_{140}^T & -LP_1^T & -P_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.164}$$

avec

$$\begin{aligned} P_{04} &= -S + \psi_{21}^T\psi_{21} && (4.165)\\ P_{05} &= -S - \gamma_{d_1}^2 I_{m_1} && (4.166)\\ P_{110} &= A_{11}^T P_1^T - \bar{g}^T Y^T && (4.167)\\ P_{130} &= A_{11}^T P_1^T L^T - \bar{g}^T Y^T L^T && (4.168)\\ P_{120} &= -\psi_{21}^T A_{11}^T P_1^T + \psi_{21}^T\bar{g}^T Y^T + P_{06} && (4.169)\\ P_{06} &= \alpha_1^T P_1^T - \bar{g_1}^T Y^T - LP_1^T && (4.170)\\ P_{140} &= -\psi_{21}^T A_{11}^T P_1^T L^T + \psi_{21}^T\bar{g}^T Y^T L^T + P_{07} && (4.171)\\ P_{07} &= \alpha_1^T P_1^T L^T - \bar{g_1}^T Y^T L^T - P_2^T && (4.172) \end{aligned}$$

Le gain Z_{d_1} est alors donné par $Z_{d_1} = P_1^{-1}Y$.■

Preuve 21 *En appliquant le lemma* (23) *au système* (4.155)*, le problème de filtrage H_∞ est résolu, i.e, $\|T_{we}(z)\|_\infty = \|C_1(z\rho_{21} - A_{21})^{-1}\beta_{21}\|_\infty < \gamma_{d_1}$ où $T_{we}(z)$ est la matrice de transfert discrete entre $w(z)$ et $e(z)$, s'il existe une matrice définie positive P et une matrice symétrique S tel que*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.173}$$

avec,

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_{21}^T(P - \rho_{21}^{\perp T} S \rho_{21}^{\perp})A_{21} - \rho_{21}^T P \rho_{21} + C_1^T C_1 \\ \Phi_{12} &= A_{21}^T(P - \rho_{21}^{\perp T} S \rho_{21}^{\perp})\beta_{21} \\ \Phi_{22} &= -\gamma_{d_1}^2 I_q + \beta_{21}^T(P - \rho_{21}^{\perp T} S \rho_{21}^{\perp})\beta_{21}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les expressions des matrices A_{21}, β_{21} et ρ_{21} données respectivement par (4.157)*,* (4.158) *et* (4.156)*, nous pouvons écrire que :*

$$\rho_{21}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0_{m_1 \times q} & I_{m_1} \end{bmatrix} = \rho_{21}^{\perp} A_{21} \tag{4.174}$$

et

$$\rho_{21}^{\perp}\ \beta_{21} = -I_{m_1} \tag{4.175}$$

Alors, les matrices Φ_{11}, Φ_{12} et Φ_{22} deviennent

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_{21}^T P A_{21} - \rho_{21}^{\perp T} S \rho_{21}^{\perp} - \rho_{21}^T P \rho_{21} + C_1^T C_1 \\ \Phi_{12} &= A_{21}^T P \beta_{21} + \rho_{21}^{\perp T} S \\ \Phi_{22} &= -\gamma_{d_1}^2 I_q + \beta_{21}^T P \beta_{21} - S. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant le lemme de Schur (voir [BEF94]), la relation (4.173) *peut être écrite de manière analogue selon*

$$\begin{bmatrix} -\rho_{21}^{\perp T} S \rho_{21}^{\perp} - \rho_{21}^T P \rho_{21} + C_1^T C_1 & \rho_{21}^{\perp T} S & A_{21}^T P \\ S\rho_{21}^{\perp} & -S - \gamma_{d_1}^2 I_{m_1} & \beta_{21}^T P \\ P A_{21} & P\beta_{21} & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{4.176}$$

En supposant $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_1 L^T \\ L P_1 & P_2 \end{bmatrix}$ où $L^T = K_1 b_0 D_3$ et $\rho_{21}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, il vient de suite que la LMI proposée (4.164) *est satisfaite en remplaçant les matrices ρ_{21}, A_{21}, β_{21} et C_1 avec leurs expressions respectives* (4.156)*,* (4.157)*,* (4.158) *et* (4.159) *en tenant compte de* (4.161) *avec $Y = P_1 Z_{d_1}$.*■

4.3.4 Synthèse de correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ dans le domaine fréquentiel : cas continu et cas discret

Dans cette section, nous proposons de donner une description fréquentielle du correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ synthétisée dans le domaine temporel, en appliquant l'approche de factorisation (voir [Vid85]) (voir aussi [DFG90]).

Notons que dans cette partie, nous utilisons les notations suivantes :

$$\sigma_1 = \left\{ \begin{array}{ll} s, & \textit{pour le cas continu} \\ z, & \textit{pour le cas discret} \end{array} \right\} \tag{4.177}$$

Le théorème suivant donne une description fréquentielle du correcteur via le filtre fonctionnel (4.82). Cette représentation entrée-sortie pourra permettre une implémentation plus aisée dans le domaine fréquentiel lorsque nous nous trouvons dans une situation où celle-ci est indiquée. (De plus elle donne l'opportunité d'avoir plus de degrés de liberté dans la synthèse.)

Théorème 24 *[ESDM10d]*

Une représentation dans le domaine fréquentiel du correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ (4.82), obtenue à partir du domaine temporel (continu et discret), en utilisant les factorizations (MFDs) copremières entre elles, suivantes :

i)

$$(\sigma_1 I_p - N)^{-1} G = \hat{M}_1^{-1}(\sigma_1)\hat{N}_1(\sigma_1) \tag{4.178}$$

ii)

$$(\sigma_1 I_p - N)^{-1} L_1 + F_2 = \hat{M}_2^{-1}(\sigma_1)\hat{N}_2(\sigma_1) \tag{4.179}$$

avec $F_2 = K_1 b_0 + K d_0$.

est donnée par,

$$u(\sigma_1) \;=\; [\; (I_p - \hat{M}_1^{-1}(\sigma_1)\hat{N}_1(\sigma_1))^{-1} \times \hat{M}_1^{-1}(\sigma_1)\hat{N}_2(\sigma_1) \;] \times y(\sigma_1) \tag{4.180}$$

avec,

$$\hat{M}_1(\sigma_1) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_R & -R & I & I \end{array} \right],$$

$$\hat{N}_1(\sigma_1) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_R & G_R & I & 0 \end{array} \right],$$

et

$$\hat{N}_2(\sigma_1) \;=\; \left[\begin{array}{cccc} N_R & H_R & I & F_2 \end{array} \right]$$

où $N_R = N - R$, $G_R = G$, $H_R = L_1 - RF_2$, R est telle que N_R est stable.■

Preuve 22 *En prenant la transformée de (Laplace ou z) de (4.82a), nous obtenons*

$$\varphi(\sigma_1) \;=\; (\sigma_1 I - N)^{-1} L_1 \; y(\sigma_1) + (\sigma_1 I - N)^{-1} G \; u(\sigma_1) \tag{4.181}$$

alors, en remplaçant (4.181) dans la transformée de Laplace ou transformée en z (4.82b), nous aurons

$$u(\sigma_1) \;=\; [(\sigma_1 I - N)^{-1} L_1 + (K_1 b_0 + K d_0)] \; y(\sigma_1) + (\sigma_1 I - N)^{-1} G \; u(\sigma_1) \tag{4.182}$$

En se basant sur la paragraphe (1.2) du premier chapitre, nous proposons de faire les factorisations suivantes :

a)

$$(\sigma_1 I - N)^{-1} G = \hat{M}_1^{-1}(\sigma_1)\hat{N}_1(\sigma_1) \tag{4.183}$$

avec

$$\hat{M}_1(\sigma_1) = \begin{bmatrix} N_R & -R & I & I \end{bmatrix} \tag{4.184}$$

$$\hat{N}_1(\sigma_1) = \begin{bmatrix} N_R & G_R & I & 0 \end{bmatrix} \tag{4.185}$$

$N_R = N - R$ *et* $G_R = G$, *la matrice* R *est telle que* N_R *est stable.*

b)

$$(\sigma_1 I - N)^{-1} L_1 + F_2 = \hat{M}_2^{-1}(\sigma_1)\hat{N}_2(\sigma_1) \tag{4.186}$$

avec

$$\hat{M}_2(\sigma_1) = \begin{bmatrix} N_R & -R & I & I \end{bmatrix} = \hat{M}_1(\sigma_1) \tag{4.187}$$

$$\hat{N}_2(\sigma_1) = \begin{bmatrix} N_R & H_R & I & F_2 \end{bmatrix} \tag{4.188}$$

où $H_R = L_1 - RF_2$.

En remplaçant les équations (4.183), (4.186) *dans* (4.182), *et en tenant compte que nous avons à partir de* (4.187), $\hat{M}_2(\sigma_1) = \hat{M}_1(\sigma_1)$, *le théorème est bien démontré.*■

Dans la suite nous présentons une application numérique permettant de valider l'approche proposée. Notons que nous avons considéré uniquement le cas continu en simulation.

4.3.5 Exemple d'application

Soit le système présenté dans la section (4.3.1), avec

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$L_z = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$ et $D_3 = 0.1$.

Sous l'hypothèse 7, nous obtenons :

$$a_0 = \begin{bmatrix} -0.3000 & 0.0000 & 0 \\ 0.0334 & -1.1111 & 0 \\ 1.0000 & -0.0000 & 0 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -0.1111 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, c_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \text{ et } d_0 = 0.$$

1.1 - Synthèse du gain de retour d'état

Nous nous proposons maintenant de donner le gain de retour d'état K_c assurant l'admissibilité et l'atténuation du critère H_∞ selon théorème (21). Pour $\gamma_c = 7$, ce gain est donné par

$$K_c = \begin{bmatrix} -2.6096 & 1.2465 & 3.4183 \\ 2.2092 & -5.4217 & -5.1172 \end{bmatrix} \tag{4.189}$$

où,

$$Y = \begin{bmatrix} 351.5048 & -186.7470 & 365.3948 \\ -186.7470 & 86.0821 & -176.5940 \\ 365.3948 & -176.5940 & 358.3305 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 98.9852 & -9.0267 & 51.2458 \\ -80.7541 & 24.3871 & -68.9651 \end{bmatrix}$$

1.2 - Synthèse du correcteur basé sur un filtre

Il s'agit ici de chercher un filtre fonctionnel H_∞ qui va permettre d'entirer le retour d'état $K_c x$. En appliquant la procédure proposée dans la paragraphe (4.3.3), nous obtenons :

1)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.1385 & 1.2465 & 4.2428 \\ -0.6024 & -5.4216 & -5.9610 \\ 0.1000 & -0.5000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0 & 0.3000 \end{bmatrix} \tag{4.190}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 4.2428 & 4.7968 & 4.2428 \\ -5.9610 & -8.3707 & -5.9610 \end{bmatrix} \tag{4.191}$$

2)

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0.7317 & -1.0504 \\ 1.4626 & 1.8464 \end{bmatrix} \tag{4.192}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0.2039 & 0.0828 \\ 0.0828 & 0.0336 \\ -0.3896 & -0.1582 \\ 0.0606 & 0.0246 \end{bmatrix} \tag{4.193}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -0.3099 \\ 1.1248 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.0781 \\ 0.0317 \\ -0.1492 \\ 0.0232 \end{bmatrix} \tag{4.194}$$

$$B_{33} = \begin{bmatrix} -0.3896 \\ -0.1582 \\ 0.7445 \\ -0.1158 \end{bmatrix}, A_{33} = \begin{bmatrix} -0.0283 \\ 0.3663 \end{bmatrix} \tag{4.195}$$

3) Alors, en résolvant les LMIs proposés (4.146) et (4.147), pour un $\gamma_{c_1} = 5$, le gain Z_c est donné par

$$Z_c = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1.6234 & 1.9198 & -0.2597 & 1.2847 \\ 3.0087 & -3.5579 & 0.4810 & -2.3810 \end{bmatrix}$$

d'où, les matrices du filtre sont données par

$$N = \begin{bmatrix} -70.9893 & -29.5850 \\ 130.4818 & 54.2467 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} -17.1705 \\ 33.2642 \end{bmatrix}, G = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.1314 & -1.0413 \\ 0.2462 & 1.9278 \end{bmatrix}$$

et $K = \begin{bmatrix} -134.2307 \\ 246.1834 \end{bmatrix}$.

Donc, la description temporel proposée du correcteur basé via un filtre fonctionnel H_∞ d'ordre 2 est obtenue.

Les figures ((4.4) - (4.6)) montrent le comportement temporel du correcteur via un filtre H_∞ proposé.

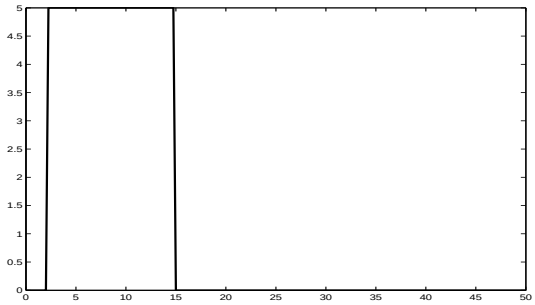


FIG. 4.4 – Le comportement de la perturbation utilisée $w(t)$

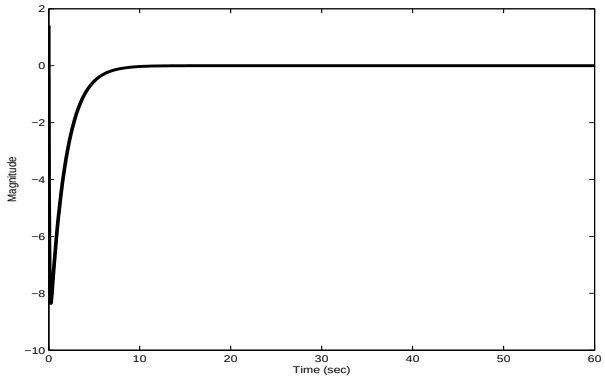


FIG. 4.5 – Le comportement de la première composante de l'erreur d'estimation $e(t)$

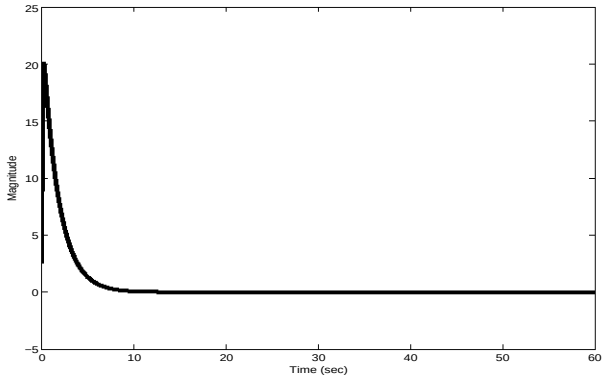


FIG. 4.6 – Le comportement de la seconde composante de l'erreur d'estimation $e(t)$

2 - Synthèse fréquentielle du correcteur basé sur un filtre fonctionnel

D'après la section (4.3.4), la description fréquentielle, équivalente, à celle obtenue dans le domaine temporel du correcteur via un filtre fonctionnel est réduite à déterminer les matrices polynomiales $\hat{M}_1(s)$, $\hat{N}_1(s)$ et $\hat{N}_2(s)$ tel que les MFDs copremières à gauche (4.178), (4.179) sont satisfaites.

En utilisant l'approche de factorisation (voir [DFG90]), où nous choisissons $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nous obtenons

1)

$$\hat{M}_1(s) = \frac{1}{s^2 + 18.7426s + 27.11139} \times \begin{bmatrix} s^2 + 17.7426s + 80.358 & 29.585 \\ -130.4818 & s^2 + 17.7426s - 44.8779 \end{bmatrix}$$

2)

$$\hat{N}_1(s) = \frac{1}{s^2 + 18.7426s + 27.11139} \times \begin{bmatrix} -131.4s - 287.21062 & -1041.3s - 1588.174 \\ 246.2s + 578.4571 & 1927.8s + 2910.27 \end{bmatrix}$$

3)

$$\hat{N}_2(s) = \frac{1}{s^2 + 18.7426s + 27.11139} \times \begin{bmatrix} -2.7481s^2 - 65.929s - 207.5027 \\ 2.8116s^2 + 83.14939s + 386.634 \end{bmatrix}$$

Donc, il vient de suite que la description fréquentielle proposée (4.180) du correcteur via un filtre fonctionnel H_∞ est déterminée.

L'erreur d'estimation fréquentiel, noté $e(s)$, obéit donc à

$$\begin{aligned} e(s) &= K_c\, x(s) - u(s) \\ &= \frac{1}{s^2 + 16.7426s + 9.4} \begin{bmatrix} 0.2748s^2 - 33.8021s - 18.68 \\ -0.2812s^2 + 66.4256s + 36.2119 \end{bmatrix} w(s) \end{aligned}$$

L'erreur d'estimation fréquentiel est bien stable.

Finalement, la figure (4.7) montrent le comportement fréquentiel du correcteur via un filtre H_∞ synthétisé dans le domaine temporel, et alors l'efficacité de notre approche.

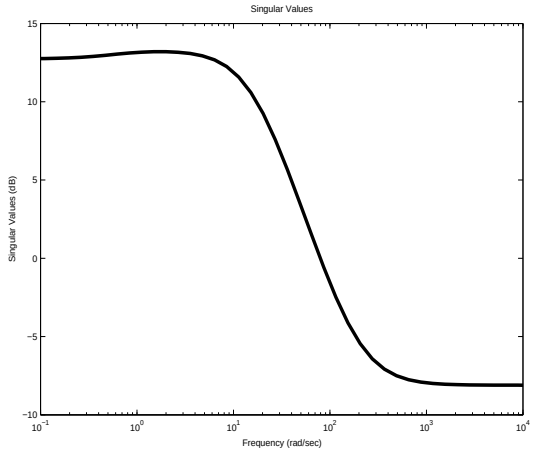


FIG. 4.7 – Représentation de la SVD du transfert entre $w(s)$ et $e(s)$

4.4 Conclusion

Nous avons proposé dans le premier volet du chapitre, une méthode de synthèse d'une commande via un filtre H_∞ d'ordre plein directement dans le domaine fréquentiel, pour des systèmes linéaires standards sujet à des perturbations à énergie bornée. En effet, la description polynomiale du correcteur est obtenue après la détermination des deux matrices polynomiales paramétrant dans le domaine fréquentiel, une commande par retour d'état ainsi que les dynamiques de l'observateur. La MFD copremière à gauche caractérisant le correcteur via un filtre H_∞ est déterminée en résolvant une équation diophantine caractéristique du système de commande en boucle fermée. Un algorithme résumant les différents étapes de synthèse est alors proposé.

Dans le second volet du chapitre, nous avons considéré le problème de la commande via un filtre H_∞ aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. De plus, nous avons considéré les deux cas continu et discret. Il s'agit ici en fait d'une validation des méthodes d'estimation déjà proposées. En effet, nous avons appliqué les résultats relatif au filtrage fonctionnel H_∞ développés dans le chapitre 3 à la commande via un filtre aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Pour la synthèse temporelle, et après avoir construit un retour d'état adéquat pour une commande H_∞, nous utilisons l'approche filtrage fonctionnel, pour proposer des correcteurs via un filtre H_∞ qui permet de reconstruire ce retour d'état. Nous tenons à noter que la sortie du filtre est bien la commande à estimer, d'où l'avantage d'utiliser filtres fonctionnels (l'ordre est réduit). Ensuite, en utilisant l'approche de factorisation et en proposant des descriptions matricielles fractionnaires copremières à gauche adéquates, une description fréquentielle du correcteur via un filtre H_∞ synthétisé dans le domaine temporel est bien déterminée. La dernière partie du chapitre est consacré à une application numérique permettant d'illustrer l'efficacité de notre approche.

Conclusion Générale

Nous nous sommes intéressés tout au long de nos travaux, à l'estimation mais aussi à la commande basée-observateur dans les domaines temporel et fréquentiel des systèmes linéaires et plus généralement des systèmes linéaires algèbro-différentiels (singuliers) dans le cas continu et discret.

Le fil conducteur de notre démarche a été de proposer des résultats facilement implémentables et de couvrir la classe la plus large possible des systèmes linéaires. Ainsi nous avons commencé à traiter le cas où le système linéaire considéré n'est pas soumis à l'effet des perturbations extérieures, nous parlons dans ce cas d'observateurs standards. Et ceci, par rappeler quelques notions et définitions structurelles utiles pour l'observation d'état dans les domaines temporel et fréquentiel, pour passer après à l'étude du problème d'observation pour les systèmes linéaires. Nous nous sommes intéressés d'abord, à la synthèse d'observateurs standards, d'ordre plein et réduit. Ensuite, nous avons abordé le problème d'observation d'une fonctionnelle de l'état aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Puis, nous avons étendu le problème d'observation à la classe la plus générale des systèmes linéaires appelés systèmes singuliers, en traitant le cas d'ordre plein ainsi que l'ordre réduit. Enfin, nous avons présenté une méthode de synthèse d'un correcteur basé sur un observateur standard d'ordre plein directement dans le domaine fréquentiel, pour les systèmes linéaires standards, caractérisé par une MFD copremière à gauche, sans passer par le domaine temporel, en établissant les relations nécessaires à cette synthèse et qui permettent de passer du domaine fréquentiel à celui temporel et vice versa. Une application numérique qui illustre la méthode de synthèse fréquentiel directe du correcteur basé observateur est donnée.

Ensuite, nous avons proposé des résultats sur la synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes sans et avec retard, en utilisant des LMIs pour obtenir le gain de l'observateur. Nous cherchons ici à éliminer l'effet des entrées inconnues sur la dynamique de l'erreur d'observation. La majorité de nos résultats sont basées sur la résolution de LMI et s'adressent aussi bien aux systèmes linéaires standards qu'aux systèmes plus généraux appelés singuliers ou descriptifs. L'approche LMI est en fait déduite des différents lemmes bornés qui eux mêmes se basent sur l'approche Lyapunov. Pour le cas avec retard, une fonction de Lyapunov de type Lyapunov krasovskii est utilisée permettant de déterminer la matrice de gain paramétrant toutes les matrices de l'observateurs à entrées inconnues. Une description fréquentielle de cet observateur à entrées inconnues est obtenue en utilisant l'approche de factorisation relative aux matrices de transfert présentant un retard. Un exemple numérique est proposé, permettant de valider l'approche proposée.

Puis, nous avons proposé des filtres qui permettent d'assurer, en plus de la stabilité,

une performance H_∞ c'est à dire une atténuation des perturbations entre les perturbations à énergie bornée considérées et les différentes erreurs d'estimation. L'approche H_∞ nous permet d'éviter la contrainte de découplage entre les entrées inconnues et l'erreur d'estimation. Ainsi, en utilisant la condition de non biais, c'est à dire que la dynamique de l'erreur du filtre ne dépend pas explicitement de l'etat $x(t)$ du système et de l'entrée $u(t)$, et par suite de résoudre une équation de Sylvester sous contrainte, nous arrivons dans le cas du filtrage, comme dans le cas d'observateurs à entrées inconnues, à réécrire cette équation sous une forme compacte qui admet une solution, à condition de vérifier une relation de rang. Lorsque cette relation est remplie, toutes les matrices du filtre sont alors paramétrées via une matrice de gain unique. Cependant la réécriture de la dynamique de l'erreur d'estimation en utilisant ce gain fait apparaître la dérivée de la perturbation qui était traitée antérieurement en imposant une contrainte sur les matrices du filtre ou en introduisant une nouvelle norme plus conservative.

L'un des principaux apports de notre travail a été de proposer une nouvelle réécriture de la dynamique de l'erreur d'estimation pour relaxer ces contraintes en mettant le système d'erreur sous forme singulière. Nous avons alors utilisé des lemmes bornés réels pour les systèmes singuliers, eux même déduites de l'approche fonction de Lyapunov, pour mettre la solution du problème (gain Z) sous forme de la résolution de LMI. Toutes les matrices du filtre sont alors déduites une fois le gain déterminée. Puis différents exemples numériques nous ont permis de valider nos résultats. Ensuite nous nous sommes fixés comme objectif de mettre (ces observateurs et) filtre H_∞ sous forme fréquentielle. En effet, souvent, notamment lorsque l'implémentation l'exige et aussi pour pouvoir éventuellement utiliser les degrés de libertés en plus fournis par l'approche fréquentielle, cette représentation peut être la mieux indiquée (représentation entrée-sortie). Ainsi, nous avons utilisée des MFDs judicieuses des matrices du filtres, la relation qui permet de relier le comportement dynamique d'un filtre entre le domaine temporel et fréquentiel et en utilisant l'approche de factorisation, une description polynomiale du filtre est ainsi obtenue. Les approches proposées ont été testées sur des exemples de simulation.

Enfin, la dernière partie de ce rapport, est consacrée à la synthèse de commande-basée observateur en appliquant les méthodes d'estimation et de filtrage de l'état déjà proposées. En se basant sur les travaux de Hippe et Deutcher [HD09], une proposition d'une méthode de synthèse directe d'une commande basée sur un filtre H_∞ dans le domaine fréquentiel pour des systèmes linéaires sujet à des perturbations à énergie bornée, sans passer par le domaine temporel, est présentée. Le correcteur est caractérisé par une MFD copremière à gauche et les matrices polynomiales intervenant dans cette factorisation sont déterminées à partir des données disponibles, à savoir les deux matrices polynomiales paramétrant la commande par retour d'état ainsi que la dynamique de l'observateur utilisé, en résolvant un équation diophantienne. Et dans la dernière partie du chapitre nous nous sommes intéressés plus particulièrement au cas de systèmes singuliers, où nous avons appliqué nos résultats relatif au filtrage fonctionnel à la commande via un filtre H_∞. Ainsi, après avoir construit un retour d'état adéquat pour une commande de type H_∞, nous utilisons l'approche filtrage fonctionnel pour proposer des correcteurs via un filtre H_∞ qui permettent de reconstruire ce retour d'état. Notre approche permet de réduire l'ordre du correcteur via un filtre H_∞ du fait que le filtre fonctionnel synthétisé est de même ordre que la fonctionnelle à estimer, c'est à dire la dimension de l'entrée de commande $u(t)$. Les

résultats ont été fournis aussi bien pour les systèmes à temps continu que discret dans le domaine temporel. Puis à la suite de chaque approche temporelle nous avons proposé aussi une approche fréquentielle de synthèse de ces différents observateurs ou correcteurs via un filtre H_∞ basée sur l'approche de factorisation et ceci en proposant des descriptions matricielles fractionnaires (MFDs) adéquates.

L'utilisateur dispose ainsi de deux approches à sa disposition selon ses besoins. Cela est d'autant plus important que nous savons que l'approche fréquentielle est celle qui traduit le mieux le comportent entrée-sortie d'un système caractérisé par sa matrice de transfert. De plus cette approche offre des degrés de liberté additionnels qui peuvent être utilisés pour d'autres spécifications telles que la robustesse par exemple.

Nos travaux de thèse sont, à notre connaissance, parmi les premiers travaux de thèse à essayer de faire un lien direct entre les approches temporelles et fréquentielles. Nous avons ainsi de nombreux sujets de recherche. En effet, comme perspectives, nous proposons de rajouter d'autres critères (placement de pôle, rapidité...) dans la synthèse des filtres H_∞ et aussi considérer des incertitudes paramétriques. Il serait intéressant aussi d'essayer de voir dans quelles conditions elles seraient équivalentes. Comparer la méthode de synthèse fréquentielle directe à celle obtenue à partir de la méthode temporelle. Un autre point serait d'exploiter les degrés de liberté additionnels apportées par le domaine fréquentiel. Enfin, penser à une méthode de synthèse fréquentielle directe d'une commande basée sur un observateur ou filtre fonctionnel.

Bibliographie

[AA99] D. Alazard et P. Apkarian. « Exact observer-based structures for arbitrary compensators ». Int. J. Robust and Nonlinear Contr. 9 (1999), 101-118.

[AK85] B. D. O. Anderson et *V.Kučera*. « Matrix fraction construction of linear compensators ». IEEE Transaction on Automatic Control. Processing, 30, 1112-1114 1985.

[Bha78] S.P. Bhattacharyya. « Observer design for linear systems with unknown inputs ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-23, pp 483-484, 1978.

[Bla90] F. Blanchini. « Computation of the transfer function for singular systems ». International journal of systems science,vol. 21, no 2, pp. 407-414, 1990.

[BEF94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. « Linear Matrix Inequality in systems and control theory ». SIAM, Philadelphia, USA, 1994.

[BM92] G. Bazile et G. Marro. « Controlled and Conditioned invariants in Linear system Theory ». Prentice Hall, 1992.

[CMR76] G. C. Campbell, C. D. Meyer and N. J. Rose. « Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients ». SIAM J. appl. Math., Vol. 31, p. 411, 1976.

[Cob81] D. Cobb. « Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems ». Int.Journal of Control, Vol.33, pp. 1135-1146,1981.

[Cob83] D. Cobb. « Descriptor Variable System and Optimal State Regulation ». IEEE Trans.on Automatic Control, Vol.28, pp.601-611,1983.

[Dar00] M. Darouach. « Existence and Design of Functional Observers for Linear Systems ». IEEE Transaction on Automatic Control.Processing, 45, 940-943 2000.

[Dar01] M. Darouch. « Linear functional observers for systems with delays in state variables ». IEEE Trans. on Automatic. Control, vol. 46, no. 3, pp. 491-496, March 2001.

[Dar07] M. Darouch. « Unknown inputs observers design for delay systems ». Asian Journal of Control, Vol. 9, No. 4, pp. 426-434, December 2007

[Deu02] J. Deutscher. « Frequency domain design of reduced order observer based H_∞ controllers - a polynomial approach ». Int. J. Control, Vol 75. No.15, pp 1196-1212, 2002.

[Dra58] M. P. Drazin. « Pseudoinverses in a associative rings and semigroups ». Am. math. Mon., Vol. 65, p. 506, 1958.

[DB95] M.Darouach et M.Boutayeb. « Design of Observers for descriptor Systems ». IEEE Trans.on Automatic Control, Vol.40, pp.1323-1327,1995.

[DZH96] M. Darouach, M. Zasadzinski et M. Hayar. « Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs ». 41th IEEE Transaction on Automatic Control, 1068-1072, 1996.

[DFG90] X. Ding X, M. P. Frank et L. Guo. « Robust observer design via factorisation approach ». Conference on Decision and Control, Hawaii , pp 3623-3628, 1990.

[DGF94] X. Ding X, L. Guo et M. P. Frank. « Parametrization of Linear Observers and Its Application to Observers Design ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, No.8, pp 1648-1652, 1994.

[DZ09] M. Darouach et M. Zasadzinski. « Optimal unbiased reduced order filtering for discrete-time descriptor systems via LMI ». Systems and Control Letters 58, 436-444, 2009.

[DZS01] M. Darouach, M. Zasadzinski et H. Souley Ali. « Robust reduced order unbiased filtering via LMI ». Proceedings of the 6th European Control Conference, Porto, Portugal, September 2001.

[DZX94] M. Darouach, M. Zasadzinski et S. J. Xu. « Full- order observers for linear systems with unknown inputs ». IEEE Transaction on Automatic Control, vol AC. 39, pp. 606-609, 1994.

[EH80] E. Emre, M.L.J. Hautus. « A polynomial characterization of (A, B)-invariant and rechability subspaces ». SIAM Journal of Optimization, Vol 18, pp 420-436, 1980.

[EDSM10a] M. Ezzine, M. Darouach, H. Souley Ali et H. Messaoud. « Time and Frequency domain design of Functional Filters ». American Control Conference - ACC, USA, June 30 - July 2, Baltimore, Maryland,2010.

[EDSM10b] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « Design of a full order H_∞ filter using a polynomial approach ». American Control Conference - ACC, USA, June 30 - July 2, Baltimore, Maryland,2010.

[ESDM11a] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « Unknown Inputs Functional Observers Designs For Descriptor Systems with Constant Time Delay ». 18th IFAC world congress, Italy, August 28 - September 2, Milano,2011.

[EDSM10c] M. Ezzine, M. Darouach, H. Souley Ali et H. Messaoud. « Time and Frequency Domain Designs of Unknown Inputs Functional Observers for Delay Descriptor Systems ». Submitted to European Journal of Control by 12 /2010.

[ESDM10a] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « Synthèse temporelle et fréquentielle de filtres H_∞ d'ordre plein pour les systèmes singuliers ». Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, 2-4 juin 2010, Nancy, France.

[ESDM10b] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « Functional Observer-Based Controller Design for Discrete-Time Linear systems : Time and Frequency Domain Approaches ». International Review of Automatic Control, Vol. 3, N 2, Mars 2010.

[ESDM09a] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « Reduced-order unknown input observer design via a factorization approach ». The 10 th international conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, Hammmet 20-22, Tunisia, 2009.

[ESDM11b] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « Full order H_∞ filtering for linear systems in the frequency domain ». International Journal of Control, Automation, and Systems, Vol. 9, No. 3, June 2011.

[ESDM10c] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « A controller design based on function observer for singular linear systems : time and frequency domains approaches ». 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, 23-25 June, 2010, Marrakech, Morocco.

[ESDM10d] M. Ezzine, H. Souley Ali, M. Darouach et H. Messaoud. « A controller design based on functional H_∞ filter for descriptor systems : the time and frequency domains cases ». A paraître dans Automatica.

[Fra87] B. A. Francis. « A Course in H_∞ Control Theory ». Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.

[FDS04] Y.M. Fu, G.R. Duan et S.M. Song. « Design of Unknown Input Observer for Linear Time-delay Systems ». International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 2, no. 4, pp. 530-535, December 2004.

[GNLC93] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. Laub, et M. Chilali. « LMI Control Toolbox ». The Mathworks Inc,1995.

[Gri93] M. J. Grimble. « Polynomial matrix solution of the H_∞ filtering problem and the relationship to Riccati equation state-space results ». IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41, pp 67-18, 1993.

[Hau83] M. L. J. Hautus. « Strong detectability and observers ». Linear Algebra and its applications, Vol 50, pp 353-368,1983.

[Hay95] M. Hayar. « Contribution à la Synthése d'observateurs et de correcteurs robustes ». Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I , 1995.

[Hip76] P. Hippe. « The design of observer- based controllers in view of a reduced sensitivity to errors in its realization parameters (in German) Windup in Control- Its effects and Their Prevention ». PH.D, Thesis, Erlangen-Nurnberg, 1976.

[Hip06] P. Hippe. « Windup in Control- Its effects and Their Prevention ». Springer, Berlin Heidelberg New York London, 2006.

[Hip89] P. Hippe. « Design of reduced-order optimal estimators directly in the frequency domain ». Int.J.Control, Vol 50,pp 2599-2614, 1989.

[HD09] P. Hippe and J. Deutscher. « Design of observer-based compensators : From the time to the frequency domain ». Springer-Verlag, London, 2009.

[HL93] K. J. Hale et V. M. S. Lunel. « Introduction to functional differential equations ». New York : Springer-Verlag, 1993.

[HM95] M.Hou et P.C.Muller. « Observer design for descriptor systems ». IEEE Trans.on Automatic Control, Vol.AC-44, no.1, pp.164-168,1995.

[HW90] P. Hippe.P et CH. Wurmthaler. « Optimal reduced-order estimators in the frequency domain : the discrete-time case ». Int. J . Control, Vol 52, pp 1051-1064, 1990.

[HYYB94] C. Hsu, X. Yu, H. Yeh et S. Banda. « H_∞ compensator design with minimal order observers ». IEEE Trans. Aut. Contr. 39 (1994) 1679-1681.

[HZD95] M. Hayar, M. Zasadzinski et M. Darouach. « A frequential approach to the unknown input observer design ». Conference on Decision and Control, New Orleans,LA , pp 3594-3595, 1995.

[HZP02] M. Hou, P. Zitek et J. R. Patton. « An observer design for linear time-delay systems ». IEEE Trans. on Automatic. Control, vol. 47, no. 1, pp. 121-125, January 2002.

[IS95] T. Iwasaki et R. Skelton. « All fixed order H1 controllers : observer-based structure and covariance bounds ». IEEE Trans. Aut. Contr. 40 (1995) 512-516.

[ISF02] L. Imsland, O. Slupphaug et B. Foss. « Robust observer-based output feedback for nonlinear discrete-time systems with constraints ». In : Proc. Triennal IFAC World Congress, Barcelona, Spain (2002).

[JBA90] D. John, F. Bruce et T. Allen. « Feedback Control Theory ». Book. Macmillan Publishing Co.pp. 150-160, 1990.

[JZ02] F. Jun'e et C. Zhaolin. « Observer-based stability controller design for linear systems with delayed state » . In : Proc. Triennal IFAC World Congress, Barcelona, Spain (2002).

[Kaw90] S. Kawaji. « Design of Observer for Linear Descriptor Systems ». Proc. of IFAC W70rld Congress, Tallinn, No.2, pp. 202-206, 1990.

[KK95] S. Kawaji et H. S. Kim. « Full Order Observer for Linear Descriptor Systems with Unknown-Inputs ». Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control, New Orleans ,pp.2366-2368,1995.

[KVR80] P. Kudva , N. Viswanadham et A. Ramakrishna. « Observers for linear systems with unknown inputs ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-25, pp 113-115, 1980.

[LT85] P. Lancaster et M. Tismenetsky. « The Theory of Matrices ». Academic Press, Orlando, USA, 2nd édition, 1985.

[Lue66] D. G. Luenberger. « Observers for multivariable systems ». IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 11, pp. 190-197, 1966.

[Lue71] D. G. Luenberger. « An introduction to observers ». IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 16, pp. 596-602, 1971.

[LF97] H. Li et M. Fu. « A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering ». IEEE Transactions on Signal Processing, 45, 2338.2350, 1997.

[Mar03] H. J. Marquez. « A frequency domain approach to state estimation ». 340, pp. 147-157, 2003.

[Mas98] I. Masubuchi, A. Ohara et N. Suda. « State-Space and Multivariable Theory ». International journal of robust and nonlinear control, 8, 669-686, 1998.

[MHMZ98] T. Mita, M. Hirita, K. Murata et H. Zhang. « H_∞ control versus disturbance observer-based control ». IEEE Trans. Ind. Elect. 45 (1998) 488-495.

[MJ87] M. Malek-Zavarei, M. Jamshidi. « Time delay systems : analysis, optimization and applications ». North-Holland Systems and Control, Amesterdem, Holland, 1987.

[MKOS97] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara et N. Suda. « H_∞ Control for descriptor Systems : A Matrix Inequalities Approach ». Automatica, pp. 669-673, 1997.

[ML75] B. J. Moora. et F.G. Ledwich. « Minimal-order observers for estimating linear functions of a state vector ». IEEE Transaction on Automatic Control.Processing, 20, 623-632 1975.

[Nob92] E. Nobuyama. « Robust stabilization of time-delay systems via reduction to delay-free model matching problems ». Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control 1992, Tucson, Arizona, U.S.A. : 357-358.

[Nic01] I. S. Niculescu. « Delay effects on stability, A robust control approach ». springer Verlag, 2001.

[NJ91] K. M. Nagpal, P. P. JKhargonekar. « Filtering and smoothing in H_∞ setting ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-36 ,pp 152-166, 1991.

[NK91] K. Nagpal and P. P. Khargonekar. « Filtering and smoothing in an H_∞ setting ». IEEE Transactions on Automatic Control, 36, 152.166, 1991.

[NK90] E. Nobuyama et T. Kitamori. « Spectrum assignment and parametrization of all stabilizing compensators for time-delay systems ». Proceedings of the 29 th Conference on Decision and Control 1990, Honolulu, Hawaii, U.S.A., 3629-3634.

[ORe83] J. O'Reilly. « Observers for Linear Systems ». Mathematics in science and engineering, Vol.170, New York, NY : Academic press , 1983.

[Pat82] R. V. Patel. « Construction of stable inverses for linear systems ». International Journal of Systems Sciences,Vol 13, No 5, pp 499-515, 1982.

[Pop69] V. M. Popov. « Some properties of control systems with irreductible matrice transfer functions ». In Lecture Notes in Mathematics 144, springer- Verlag, Berlin, 1969, 169-180.

[Pea89] E. A. Pearson et A. Y. Fiagbedzi. « An observer for time lag systems ». IEEE Trans. on Automatic. Control, vol. 34, no. 4, pp. 775-777, July 1989.

[PC84] P. N. Paraskevopoulos and M. A. Christodoulou. « On the computation of the transfer function matrix of singular systems ». Journal of the Frnaklin Institute, vol. 317, no. 6, pp. 403-411, june 1984.

[PK92] P. N. Paraskevopoulos et F . N. Koumboulis. « Observers for Singular Systems». IEEE Trans.on Automatic Control, ,Vol 37, no.8, pp.1211-1215, 1992.

[Ros70] H. Rosenbrock. « LMI-Based controller synthesis : a unified formulation and solution ». Nelson. London, 1970.

[RB77] W. D. Russell et E. T. Bullock. « A Frequency Domain Approach to Minimal-Order Observer Design for Several Linear Functions of the State ». IEEE Transaction on Automatic Control.Processing, 22, 600-603 1977.

[Sou02] H. Souley Ali. « Observateurs robustes d'ordre réduit pour les systèmes linéaires et bilinéaires incertains ». Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I , 2002.

[SSC94] A. Stoorvogel, A. Saberi et B. Chen. « A reduced order observer based controller design for H1 optimization ». IEEE Trans. Aut. Contr. 39 (1994) 355-360.

[Vid85] M. Vidyasagar. « Control Systems Synthesis : A Factorization Approach ». M.I.T, Press, Cambridge, MA, 1985.

[VK85] A. I. G. Vardulakis et N. Karcanias. « On the stable exact model matrching problem ». System and Control Letters, pp 242-2273, 1985.

[Wan03] Q. G. Wang. « Decoupling Control». LNCIS 285, pp.11-64, Springer- Verlag Berlin Heidelberg 2003.

[Won79] W. M. Wonham. « Linear Multivariable Control : A Geometric Approach ». Springer-Verlag, 1979.

[XY00] S. Xu et C. Yang. « H_∞ State Feedback Control for Discrete Singular Systems ». IEEE Transaction on Automatic Control. Vol. 45, (1405–1409), 2000.

[YZK97] X. Y. Yao, M. Y. Zhang et R. Kovacvic. « Functional observer and state feedback for input time-delay systems ». Internation Journal of Control 1997 ; 66 : 603-617.

[Zha87] S. Zhang. « Functional observer and state feedback ». International Journal of Control, vol.46, pp 1295-1305, 1987.

[ZDH95] M. Zasadzinski, M. Darouach et M. Hayar. « Loop transfer recovery designs with an unknown input reduced-order observer-based controller ». Int. J. Robust and Nonlinear Contr. 5 (1995) 627-648

[ZXS08] G. Zhang, Y. Xia et P. Shi. « New bounded real lemma for discrete-time singular systems ». Automatica. Vol. 44, 886–890, 2008.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'estimation, de filtrage H_∞ mais aussi à la commande via un observateur dans les domaines temporel et fréquentiel, aussi bien pour les systèmes linéaires standards que pour les systèmes algèbro-différentiels plus généraux appelés systèmes singuliers.

Le fil conducteur de notre démarche a été de proposer des résultats facilement implémentables et de couvrir la classe la plus large possible des systèmes linéaires. Ainsi, nous avons commencé notre travail en proposant des méthodes de synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour des systèmes sans et avec retard, sujet à des entrées totalement inconnues. Nous cherchons ici à éliminer l'effet des entrées inconnues sur la dynamique de l'erreur d'observation. La synthèse temporelle est basée sur des LMIs permettant de déterminer la matrice de gain paramétrant toutes les matrices de l'observateur. L'approche LMI est en fait déduite de différents lemmes bornés qui eux mêmes se basent sur l'approche Lyapunov. La synthèse fréquentielle est déduite de celle temporelle en proposant des MFDs judicieuses et en utilisant l'approche de factorisation.

Ensuite, nous avons proposé des filtres qui permettent d'assurer, en plus de la stabilité, un critère de performance H_∞, c'est à dire que nous cherchons à atténuer l'effet des perturbations, supposées être inconnues mais à énergie bornée, sur la dynamique de l'erreur d'estimation. L'un des principaux apports de nos travaux, a été de proposer une nouvelle écriture de la dynamique de l'erreur d'estimation sous forme singulières afin de contourner le problème de l'apparition de la dérivée des perturbations dans la dynamique de l'erreur d'estimation. Ainsi, nous sommes arrivés à relaxer les contraintes qui existent généralement sur les matrices des filtres non biaisés synthétisés ; c'est à dire, des filtres dont la dynamique de l'erreur d'estimation ne dépend pas explicitement de l'état $x(t)$ du système et de l'entrée $u(t)$. La méthode fréquentielle est déduite de celle temporelle en utilisant l'approche de factorisation. Il est à noter que cette description fréquentielle, entrée-sortie, pourra permettre une implémentation aisée dans le domaine fréquentiel lorsque nous nous trouvons dans une situation où celle-ci est la plus indiquée.

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'application des méthodes d'estimation proposées dans le cadre de la commande. En effet, dans un premier temps, nous proposons une synthèse directe d'une commande basée sur un filtre H_∞ directement dans le domaine fréquentiel pour des systèmes linéaires standards. Ensuite, nous nous focalisons sur les systèmes singuliers aussi bien dans le cas continu que discret et nous proposons de déterminer des lois de commande en utilisant un filtre fonctionnel qui satisfait un critère de performance H_∞. En effet, nous cherchons d'abord à calculer le gain de retour d'état qui nous permet de remplir les spécifications du système bouclé (stabilité,...). Puis, nous synthétisons un filtre qui a pour but de fournir en sortie une estimée de ce retour d'état.

Mots-clés: Observation, Filtrage H_∞, Non biais, Système linéaire, Domaine temporel, Domaine fréquentiel, LMIs, MFDs.

Abstract

In this dissertation, we investigated the problems of the estimation but also the controller based-observer design in the time and frequency domains, for both standard linear systems and more general systems algebro-differentials ones also called singular systems.

The goal of our approach is to propose easily implementable results and to cover the largest possible class of linear systems. So, we began to propose methods for unknown inputs observers design for linear systems without and with delay, subject to unknown inputs which can result from noise, sensors and actuators faults ... We search here to decouple the unknown inputs and the dynamics of the observation error. The time domain method is based on LMIs permitting to find the gain matrix implemented in the observer matrices. The LMI approach is deduced from various bounded lemmas which themselves are based on Lyapunov approach. The frequency domain synthesis is derived from time domain results by defining suitable MFDs and using the factorization approach.

We then propose, filters that permits to ensure, in addition to the stability, an H_∞ performance criteria, i.e we search to attenuate the perturbations effect, supposed unknown but of bounded energy, on the dynamics of the estimation error. One of the main contributions of our work, is to propose a new writing of the error dynamics in a singular form in order to avoid the time derivative of the disturbance in the error dynamics. So, the constraints that generally exist on the matrices of synthesized unbiased filters can be relaxed, i.e filters, that they do not depend explicitly on the state $x(t)$ of the system and on the input $u(t)$. The frequency method is deduced from time domain approach by using the factorisation approach. It should be noted that this frequency domain description, (input-output) representation, may allow an easy implementation in the frequency domain when it is recommended.

Finally, we apply the proposed estimation methods to control purpose. In fact, in a first part, we propose a new direct synthesis of a controller based on a H_∞ filter directly in the frequency domain for standard linear systems. Then, we focus our attention on singular systems for both continuous and discrete cases and we propose to search for a linear control law using a functional filter which ensures an H_∞ performance criteria. Our approach is obtained into two steps. In fact, first, we search for a linear control law which ensures some specifications for the closed loop system (stability,...). The state feedback is seen as a functional of the state and is then estimated using our previous results on the H_∞ filtering.

Keywords: Observation, H_∞ Filter, Unbiasedness, Linear system, Time domain, Frequency domain, LMIs, MFDs.