



**HAL**  
open science

# Structures multi-contextuelles et logiques modales intuitionnistes et hybrides

Yakoub Salhi

► **To cite this version:**

Yakoub Salhi. Structures multi-contextuelles et logiques modales intuitionnistes et hybrides. Autre [cs.OH]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2010. Français. NNT : 2010NAN10087 . tel-01746336

**HAL Id: tel-01746336**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01746336v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# STRUCTURES MULTI-CONTEXTUELLES ET LOGIQUES MODALES INTUITIONNISTES ET HYBRIDES

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 3 décembre 2010

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Henri Poincaré – Nancy 1  
(spécialité informatique)

par

Yakoub SALHI

### Composition du jury

*Président :*

Stéphane DEMRI

Directeur de recherche, CNRS, Cachan, France

*Rapporteurs :*

Valeria DE PAIVA

Directeur de recherche, Cuill Inc., Menlo Park, Cali-  
fornie, États-Unis d'Amérique

Andreas HERZIG

Directeur de recherche CNRS, Toulouse, France

*Examineurs :*

Patrick BLACKBURN

Directeur de recherche, INRIA, Nancy, France

Stéphane DEMRI

Directeur de recherche, CNRS, Cachan, France

Didier GALMICHE

Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy, France

Dominique LARCHEY-WENDLING

Chargé de recherche, CNRS, Nancy, France



*À mes parents et à ma famille.*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à la critique ainsi qu'à la soutenance de ma thèse :

- Mme. Valeria De Paiva, Directrice de recherche à *Cuil incorporation* en Californie, qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse, et dont les nombreuses remarques ont été très constructives ;
- M. Andreas Herzig, Directeur de recherche au CNRS à Toulouse, qui m'a fait lui aussi l'honneur et le plaisir d'accepter d'être rapporteur de ma thèse, et dont les différentes remarques et suggestions m'ont aidé dans la mise en valeur des idées présentées dans ce mémoire ;
- M. Patrick Blackburn, Directeur de recherche à l'INRIA Lorraine, que je remercie d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse ;
- Stéphane Demri, Directeur de recherche au CNRS à Cachan, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et que je remercie également pour l'intérêt qu'il a porté à ma thèse ;
- Dominique Larchey-Wendling, Chargé de recherche au CNRS à Nancy, qui a accepté d'être membre de mon jury, et avec qui j'ai eu des discussions très enrichissantes ;
- Didier Galmiche, Professeur à l'université Henri Poincaré à Nancy, qui n'a pas seulement été membre du jury mais surtout mon directeur de thèse. Je le remercie chaleureusement pour la patience dont il a fait preuve et pour l'énergie et le temps qu'il a consacré à me soutenir et me prodiguer des conseils sur tous les plans de ma vie thésard. Un grand merci Didier !

Je souhaite également remercier les membres de ma famille et mes proches de leur soutien sans faille. Mes pensées vont tout particulièrement à mes parents, mon petit frère Ayoub et ma petite soeur Djihane. Je tiens aussi à remercier tout mon groupe : Houda, Taha, Asma, Farhet et Khanssa pour leur aide, sans oublier mes grands amis Reda et Salim. Merci aux collègues qui m'ont aidé dans la préparation de ma soutenance : Mounira, Henri et Jean-René.

Je tiens ensuite à remercier vivement Noëlle Carbonell, professeur, pour les encouragements qu'elle a su me faire. C'était avec beaucoup de tristesse que j'ai appris son décès. Merci aussi à Dominique Mery, professeur, dont j'ai également apprécié les encouragements.

Enfin, je remercie tous ceux qui sont venus assister à la soutenance de ma thèse et au pot qui a suivi.





« *C'est avec la logique que nous prouvons et avec  
l'intuition que nous trouvons.* »  
Henri Poincaré (1854 – 1912)



# Résumé

En informatique, les logiques formelles ont une place centrale dans la représentation et le traitement des connaissances. Elles sont utilisées pour la modélisation et la vérification de systèmes informatiques et de leurs propriétés ainsi que pour la formalisation de différents types de raisonnement. Dans ce contexte il existe un large spectre de logiques non-classiques parmi lesquelles les logiques modales jouent un rôle important. Alors que les logiques modales classiques ont été largement étudiées, nous nous focalisons dans cette thèse sur les logiques modales intuitionnistes et aussi hybrides floues en abordant un certain nombre de questions principalement du point de vue de la théorie de la démonstration. Nous proposons pour ces logiques de nouveaux systèmes de preuve, notamment suivant les formalismes de déduction naturelle et de calcul des séquents, qui sont fondés sur de nouvelles structures multi-contextuelles généralisant la structure standard de séquent.

Ainsi dans le cadre des logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5, nous définissons des systèmes de preuve sans labels ayant de bonnes propriétés comme par exemple celle de la sous-formule. En outre, nous proposons des procédures de décision simples à partir de nos nouveaux calculs des séquents. Nous étudions également la première version intuitionniste de la logique hybride IHL et nous proposons son premier calcul des séquents à partir duquel nous donnons la première démonstration de sa décidabilité. Enfin, nous introduisons une nouvelle famille de logiques hybrides floues fondées sur les logiques modales de Gödel. Nous proposons pour ces logiques des procédures de décision avec génération de contre-modèles en utilisant un ensemble de règles de preuve fondées sur une structure multi-contextuelle adaptée.

**Mots-clés :** logiques modales intuitionnistes, logiques hybrides, structures multi-contextuelles, déduction naturelle, calcul des séquents, décidabilité, procédures de décision.

# Abstract

In computer science, formal logics are central for studying the representation and the treatment of knowledge. Indeed, they are widely used for modeling and verifying computer systems and their properties and also for formalizing different kinds of reasoning. In this context there exist many non-classical logics and among them modal logics play a key role. As classical modal logics have been deeply studied, we focus in this thesis on the intuitionistic modal logics and also on fuzzy hybrid logics by studying some important questions mainly from the viewpoint of proof theory. We define for these logics new proof systems, following natural deduction and sequent calculus formalisms, that are based on new multi-contextual structures generalizing the standard sequent structure.

Then in the framework of the intuitionistic modal logics obtained from the combinations of the axioms  $T$ ,  $B$ , 4 and 5, we define label-free proof systems having nice properties, like for instance the subformula property. Moreover we propose simple decision procedures from our new sequent calculi. We also study the first intuitionistic version of hybrid logic called IHL and define its first sequent calculus from which we provide the first proof of its decidability. Finally, we introduce a new family of fuzzy hybrid logics that are based on Gödel modal logics and we define for these logics some decision procedures with contermmodel generation by using a set of proof rules based on an appropriate multi-contextual structure.

**Keywords :** intuitionistic modal logics, hybrid logics, multi-contextual structures, natural deduction, sequent calculus, decidability, decision procedures.



# Table des matières

<b>Tables des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte . . . . .	1
Problématique . . . . .	3
Approche et Contributions . . . . .	4
Plan de la thèse . . . . .	6
<b>1 Dédution naturelle et calcul des séquents</b>	<b>11</b>
1.1 Systèmes de preuve . . . . .	12
1.2 Structures et systèmes de preuve . . . . .	13
1.3 Dédution naturelle . . . . .	15
1.3.1 Un système de déduction naturelle pour IPL . . . . .	16
1.3.2 Correction et complétude . . . . .	16
1.3.3 Normalisation . . . . .	18
1.3.4 Dédution naturelle et logique classique . . . . .	18
1.4 Calcul des séquents . . . . .	19
1.4.1 Un calcul des séquents pour IPL . . . . .	20
1.4.2 Correction et complétude . . . . .	21
1.4.3 Élimination de la coupure . . . . .	22
1.4.4 Propriété de la sous-formule et décidabilité . . . . .	24
1.4.5 Élimination de la contraction . . . . .	25
1.4.6 Génération contre-modèles . . . . .	26
<b>2 Logiques modales intuitionnistes</b>	<b>31</b>
2.1 Logiques modales classiques . . . . .	31
2.1.1 Syntaxe des formules . . . . .	32
2.1.2 Sémantique de Kripke . . . . .	32
2.1.3 Systèmes à la Hilbert . . . . .	34
2.1.4 Liens avec la logique classique de premier ordre . . . . .	35
2.2 Logiques modales intuitionnistes . . . . .	35
2.2.1 Approche de Simpson . . . . .	36
2.2.2 Sémantique de Kripke . . . . .	37
2.2.3 Systèmes à la Hilbert . . . . .	39
2.3 Théorie de la preuve et logiques modales intuitionnistes . . . . .	40
2.3.1 Dédution naturelle et logiques modales . . . . .	40
2.3.2 Calcul des séquents et logiques modales . . . . .	41

2.4	Notre approche et nos contributions . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Déduction naturelle et logiques modales intuitionnistes</b>	<b>47</b>
3.1	Structure de A-séquent . . . . .	48
3.2	Un système de déduction naturelle pour IK ( $DN_{IK}$ ) . . . . .	50
3.2.1	Correction de $DN_{IK}$ . . . . .	54
3.2.2	Complétude de $DN_{IK}$ . . . . .	57
3.2.3	Normalisation de $DN_{IK}$ . . . . .	60
3.3	Un système de déduction naturelle quasi-modulaire . . . . .	66
3.3.1	Normalisation . . . . .	70
3.3.2	Preuves en forme normale . . . . .	71
3.4	A-séquents et logiques modales classiques . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Calculs des séquents et logiques modales intuitionnistes</b>	<b>81</b>
4.1	Un calcul des séquents quasi-modulaire . . . . .	82
4.2	Calculs des séquents et décidabilité . . . . .	88
4.2.1	Admissibilité avec préservation de la hauteur et de la taille . . . . .	88
4.2.2	Dérivations redondantes . . . . .	89
4.2.3	Procédures de décision . . . . .	90
4.3	Le calcul des séquents $G_{IKTh}^2$ . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Systèmes de preuve pour la logique modale intuitionniste IS5</b>	<b>97</b>
5.1	Structure de MC-séquent . . . . .	97
5.2	Un système de déduction naturelle pour IS5 . . . . .	98
5.3	Normalisation . . . . .	104
5.4	Systèmes de déduction naturelle pour S5 et IM5 . . . . .	105
5.5	Un calcul des séquents pour IS5 . . . . .	106
5.6	Décidabilité de IS5 . . . . .	106
5.7	Le calcul des séquents $MCG_{IS5}^2$ . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Calculs des séquents pour une logique hybride intuitionniste</b>	<b>111</b>
6.1	Syntaxe et sémantique . . . . .	112
6.2	Déduction naturelle et séquents . . . . .	114
6.3	Calculs des séquents pour IHL . . . . .	116
6.3.1	Le calcul des séquents $G_{IHL}$ . . . . .	116
6.3.2	Élimination de la coupure . . . . .	118
6.3.3	Le calcul des séquents $G_{IHL}^2$ . . . . .	122
6.4	Décidabilité de IHL . . . . .	123
6.4.1	Problème de l'introduction de nouveaux nominaux . . . . .	123
6.4.2	Propriété de la quasi-sous-formule . . . . .	124
6.4.3	Séquents équivalides . . . . .	124
6.4.4	N-chaînes . . . . .	125
6.4.5	Arbres et squelettes . . . . .	126
6.4.6	Une procédure de décision pour IHL . . . . .	128

<b>7 Logiques hybrides de Gödel</b>	<b>131</b>
7.1 Logiques modales de Gödel . . . . .	132
7.2 Logiques hybrides de Gödel . . . . .	135
7.3 R-séquents et règles de preuve . . . . .	136
7.4 Décidabilité et propriété des modèles finis . . . . .	141
7.4.1 Terminaison et R-séquents irréductibles . . . . .	141
7.4.2 Procédure de décision pour les R-séquents irréductibles . . . . .	143
7.4.3 Procédures de décision pour $(GH_n)_{1 \leq n < \infty}$ et $WGH_\infty$ . . . . .	147
7.5 Un calcul des séquents pour $WGH_\infty$ . . . . .	148
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>151</b>
<b>Règles de réduction pour <math>DN_{IKTh}</math></b>	<b>163</b>





# Table des figures

1.1	Système de déduction naturelle $DN_{\text{IPL}}$ . . . . .	15
1.2	Calcul des séquents $G_{\text{IPL}}^1$ . . . . .	20
1.3	Calcul des séquents $G_{\text{IPL}}^2$ . . . . .	26
1.4	Calcul des séquents $G_{\text{CPL}}$ . . . . .	27
3.1	Système de déduction naturelle $DN_{\text{IK}}$ . . . . .	50
3.2	Règles modales . . . . .	67
4.1	Calcul des séquents $G_{\text{IK}}$ . . . . .	82
4.2	Règles modales . . . . .	83
5.1	Système de déduction naturelle $DN_{\text{IS5}}^2$ . . . . .	99
5.2	Calcul des séquents $MCG_{\text{IS5}}$ . . . . .	107
6.1	Système de déduction naturelle $DN_{\text{IHL}}$ . . . . .	113
6.2	Système de déduction naturelle $DNS_{\text{IHL}}$ . . . . .	115
6.3	Calcul des séquents $G_{\text{IHL}}$ . . . . .	117
7.1	Règles logiques pour $\text{GH}_n$ et $\text{WGH}_\infty$ . . . . .	136
7.2	Règles modales pour $\text{GH}_n$ et $\text{WGH}_\infty$ . . . . .	138
7.3	Règles de satisfaction pour $\text{GH}_n$ et $\text{WGH}_\infty$ . . . . .	139



# Introduction

## Contexte

De nos jours, l'informatique est une science qui joue un rôle important dans quasiment tous les domaines de la vie quotidienne (transport, médecine, opérations commerciales, etc). Ainsi, il est nécessaire d'utiliser des méthodes rigoureuses permettant de respecter les obligations exigées dans la conception des systèmes informatiques. Dans ce cadre, l'utilisation et la mise en oeuvre de certaines méthodes formelles actuelles reposent de façon importante sur des logiques formelles tant pour la représentation des connaissances que pour leur traitement [116]. Elles sont amplement utilisées pour la modélisation des systèmes informatiques et de leurs propriétés ainsi que pour la formalisation de nombreux types de raisonnement, ce en vue de certifier ces systèmes en démontrant leurs propriétés locales et globales [128].

Une logique (formelle) peut être vue comme un ensemble de théorèmes, à savoir des énoncés valides. Le langage d'une logique permet de modéliser des énoncés tandis que sa sémantique permet de distinguer les énoncés qui sont valides de ceux qui ne le sont pas. Une des questions centrales dans l'étude des logiques formelles concerne la conception de méthodes et d'outils logiques permettant de vérifier si un énoncé est valide ou pas. Si de tels énoncés logiques représentent des propriétés que doivent vérifier des systèmes informatiques on peut voir ces méthodes et outils comme des moyens de certifier de tels systèmes.

Dans ce contexte de vérification, les techniques et outils dits de « model-checking » (vérification de modèles) ont été développés ces dernières années avec succès pour de nombreuses logiques, notamment les logiques temporelles [33, 38]. Dans cette thèse nous considérons une autre approche fondée sur la *théorie de la preuve*, appelée également la *théorie de la démonstration*, avec comme concepts centraux ceux de *preuve* et de *prouvabilité*, et qui repose sur la définition et l'utilisation de *systèmes de preuve* (*systèmes formels*) qui sont des ensembles d'axiomes et de règles d'inférence [121]. Ici l'étude de la validité d'un énoncé se fait par la recherche et, si possible, la construction d'une preuve de cet énoncé dans un système de preuve  $S$  associé à la logique considérée et dont on a démontré la correction (tout énoncé qui a une preuve dans  $S$  est valide) et la complétude (tout énoncé qui est valide a une preuve dans  $S$ ).

Les principaux formalismes actuels d'expression de tels systèmes sont la *déduction naturelle* et le *calcul des séquents* introduits par Gentzen [71] et qui ont permis de définir des systèmes variés et utilisables pour différents types de logiques. Dans le cadre notamment des logiques classique et intuitionniste, ils sont à la base de nombreux travaux portant par exemple sur l'étude de l'automatisation de la construction de preuves mais aussi sur l'étude des fondements et de la mise en oeuvre de la programmation logique et de la programmation fonctionnelle. Pour cette dernière la déduction naturelle en logique intuitionniste est centrale et l'isomorphisme de Curry-Howard, qui établit une correspondance entre preuves et programmes

fonctionnels [82], rend crucial l'étude de la construction de preuves dans le développement de programmes sûrs et fiables [73, 87, 103].

De manière générale, pour une logique donnée, la définition d'un système de preuve pose un certain nombre de questions sur le système et ses propriétés. Quel type de formalisme est le plus approprié et pourquoi faire ? Un système à la Hilbert pour une description concise ? Une déduction naturelle pour ces liens avec la programmation ? Un calcul des séquents pour une présentation uniforme et une automatisation de la construction de preuves ? Même si le formalisme est fixé, on se demande aussi quelle structure doit-on utiliser dans la définition des règles d'inférence ? Est-ce par exemple celle de formule, celle de séquent ou bien celle d'hy-perséquent ? De plus, ces structures sont-elles avec ou sans labels ? Et si oui quelle est leur forme ? D'autres questions émergent alors : les règles qui manipulent ces structures ont-elles ou doivent-elles avoir des propriétés particulières ? Par exemple, sont-elles correctes, locales ou (fortement) inversibles ?

Suivant les logiques étudiées les réponses peuvent varier sachant que l'objectif principal est de définir des systèmes ayant des bonnes propriétés (correction et complétude par rapport à la sémantique, normalisation ou élimination de la coupure, propriété de la sous-formule). De plus, il paraît important qu'ils permettent de proposer des démonstrations d'autres propriétés importantes comme la décidabilité de la logique, la propriété des modèles finis, la terminaison de la recherche de preuves ainsi que l'automatisation de la construction de preuves et/ou de réfutations (contre-modèles). Il est clair que pouvoir proposer des procédures de décision utilisables, dans le contexte de la vérification de systèmes informatiques et de leurs propriétés modélisées dans une logique donnée, est essentielle.

Au delà de la logique classique de nombreuses logiques ont été proposées en vue de modéliser des concepts variés. Avant de parler des logiques modales on peut mentionner par exemple la logique linéaire [72, 74] qui est la première à aborder, au niveau logique, la notion de ressource et plus précisément la prise en compte explicite de la consommation de ressources [72, 74]. Alors qu'il existe un calcul des séquents simple pour cette logique, on peut noter que la définition de calculs pour la logique linéaire intuitionniste n'est pas un problème facile et a conduit à différentes propositions de formalismes plus ou moins satisfaisants au vu de leurs propriétés [14, 20].

Dans ce contexte de modélisation des ressources et de leurs propriétés, on peut aussi mentionner la logique BI [114] (*Bunched Implication logic*) qui capture elle les notions de partage et séparation de ressources. Du point de vue théorie de la preuve, cette logique a été proposée avec un calcul des séquents particulier fondé sur une structure de séquent avec « bunch », mais c'est grâce à la proposition d'un calcul des séquents avec labels que la décidabilité de BI a pu être démontrée [63]. Il n'est donc pas évident, suivant la logique étudiée, de définir les structures et les systèmes de preuve reposant sur ces dernières pour avoir les bonnes propriétés mentionnées précédemment. C'est ce que nous allons voir dans ce travail de thèse au travers principalement des logiques modales intuitionnistes.

La modélisation de systèmes informatiques requiert souvent la prise en compte d'aspects spécifiques (temporels, spatiaux, gestion de ressources, etc) qui peuvent s'exprimer en utilisant des modalités. Donc les logiques modales jouent un rôle important soit en tant que telles soit au travers d'extensions modales (avec des opérateurs modaux) de logiques non classiques existantes. On peut par exemple noter la proposition d'une logique linéaire étendue avec des modalités pour traiter de la distribution et de la mobilité de ressources [15]. De même une

logique modale étendant un fragment de la logique BI a été définie pour traiter de la modélisation et de la vérification de systèmes à base de ressources et de processus [113].

De façon générale, les logiques modales ont été proposées dans l'optique, entre autres, de capturer des notions telles que la nécessité, la possibilité, l'obligation, l'interdiction, etc [17] et ont connu un développement fort tant sur le plan théorique qu'applicatif (voir par exemple [81, 93, 39]). Nous nous intéressons ici essentiellement aux logiques modales intuitionnistes en référence aux logiques modales classiques avec comme perspectives possibles que nos travaux puissent avoir un impact du point de vue théorie de la preuve sur d'autres logiques avec modalités.

Les logiques modales classiques<sup>1</sup> étendent la logique classique avec des modalités [30, 17]. Du point de vue de la sémantique, dite de Kripke, les modalités sont interprétées dans un ensemble de mondes possibles avec une relation d'accessibilité. Dans ce cadre, deux logiques diffèrent par les propriétés associées à cette relation (réflexivité, transitivité, symétrie, etc). Par exemple, la proposition «  $\diamond$  il pleut » signifie qu'il existe un monde accessible où il pleut ( $\diamond$  est une modalité).

## Problématique

Dans cette thèse nous souhaitons étudier dans des logiques modales d'autres types de raisonnement que celui classique. Le premier type considéré est le raisonnement modal intuitionniste, qui peut être vu comme le remplacement des principes du raisonnement classique avec ceux du raisonnement intuitionniste dans les logiques modales classiques [119]. La logique intuitionniste correspond à la logique classique privée de la loi du tiers exclu. Dans cette logique, la proposition  $A \vee \neg A$  n'est valide que si on exhibe une preuve de  $A$  ou une preuve de  $\neg A$ . Par comparaison en la logique classique cette proposition est toujours vraie même en l'absence de telles preuves. Les logiques modales intuitionnistes, moins étudiées que les classiques, font l'objet d'études récentes et ont des applications prometteuses dans différents domaines en informatique, par exemple dans l'expression de propriétés de systèmes communicants [120], dans la vérification formelle de l'architecture du matériel informatique [48] et dans la définition de langages de programmation [37, 101, 83].

Le deuxième type de raisonnement considéré est le raisonnement modal flou. On l'aborde au travers de la logique de Gödel qui est une des logiques intermédiaires (entre la logique intuitionniste et celle classique) les plus étudiées car reconnue comme une logique floue [79]. Elle a été introduite par Gödel dans [75] et ensuite axiomatisée par Dummett dans [43]. Parmi les applications récentes en informatique de cette logique et de ses versions finies nous pouvons citer la limitation de consommation de ressources dans un calcul de processus [91]. Nous nous intéressons ici tout particulièrement à la logique modale floue de Gödel [28] et ses versions finies. Une logique modale floue est une logique fondée sur le principe qu'une proposition dans un monde peut avoir une valeur de vérité différente de « vrai » et « faux » [79]. Notons que dans la littérature, il existe de nombreux autres logiques modales floues fondées sur différentes logiques floues [57, 58, 78, 111]. Les différentes applications des logiques floues en informatique, notamment en termes de raisonnement sur des connaissances imprécises, ouvrent des perspectives intéressantes aux logiques modales floues.

Notre étude porte, principalement, sur les logiques modales intuitionnistes et floues du point de vue de la théorie de la preuve avec la conception de nouveaux systèmes de preuve

---

<sup>1</sup>Nous nous intéressons uniquement aux logiques modales dites normales ou de Kripke.

suivant les formalismes de déduction naturelle et de calcul des séquents. Ils doivent permettre d'introduire de nouvelles techniques de vérification efficaces, ainsi que d'interprétation de preuves et d'analyse de propriétés.

Le point clé est la définition et l'utilisation de nouvelles structures dites *multi-contextuelles*, généralisant celle standard de séquent, qui sont plus appropriées au traitement de ces logiques. Nous souhaitons ainsi définir des systèmes ayant les propriétés habituellement recommandées (normalisation, élimination de la coupure, sous-formule, etc), ce sans utiliser d'entités syntaxiques étrangères au langage des logiques modales. Ces systèmes doivent aussi conduire au développement de *procédures de décision* simples et efficaces.

Mais revenons au problème initial d'étudier la théorie de la preuve et de concevoir des systèmes de preuve dans les logiques modales. Une question importante est la possibilité d'avoir une représentation uniforme de systèmes de preuve ayant de bonnes propriétés. Or il n'existe pas une telle représentation pour les logiques modales classiques les plus importantes en utilisant le calcul des séquents avec la structure standard [126]. En particulier, beaucoup de difficultés apparaissent dans la définition d'un calcul des séquents avec la structure standard pour la logique modale classique **S5** qui vérifie l'élimination de la coupure.

L'utilisation de systèmes qui manipulent des séquents avec labels a permis de résoudre ces problèmes en définissant des calculs simples pour de nombreuses logiques modales classiques, y compris **S5** (voir par exemple [102]). Notons que les labels sont des entités syntaxiques n'appartenant pas au langage de la logique considérée et permettant l'ajout de certaines informations sémantiques aux systèmes de preuve [60]. Toutefois, il faut préciser que l'utilisation des labels provoque, en plus de la perte de la propriété importante de la sous-formule, des problèmes relatifs à l'interprétation des preuves contenant des entités syntaxiques non reconnues explicitement dans ces logiques.

Dans le cas des logiques modales intuitionnistes les problèmes décrits précédemment se trouvent accentués. Par exemple, l'unique calcul des séquents sans labels existant pour le fragment privé de l'opérateur  $\diamond$  de la logique **IS5** ne vérifie pas l'élimination de la coupure [104]. De plus, la définition de systèmes de déduction naturelle sans labels que cela soit pour les logiques modales classiques ou intuitionnistes présente beaucoup de difficultés [27, 119]. Les systèmes de déduction naturelle existants pour les logiques modales les plus importantes sont en effet *ad hoc* et concernent principalement les logiques **S4** et **S5** et des versions intuitionnistes de ces dernières [110, 13].

Il est important de noter que l'unique approche qui a permis de proposer des systèmes de déduction naturelle et des calculs des séquents pour toutes les logiques modales intuitionnistes que nous considérons est celle fondée sur l'utilisation de labels et proposée par Simpson [119]. Mais même dans ce cas des questions restent posées pour la déduction naturelle : une déduction naturelle avec des labels et contraintes entre labels est-elle vraiment une déduction naturelle ? quelle est l'interprétation des règles additionnelles qui traitent de l'accessibilité ? De plus, il n'y pas de procédure directe de normalisation et la propriété de la sous-formule n'est pas satisfaite.

## Approche et Contributions

Notre objectif dans cette thèse est de proposer des systèmes de preuve sans labels et ayant les propriétés habituellement recommandées pour principalement les logiques modales intuitionnistes. Pour cela notre approche repose sur la définition de nouvelles *structures multi-*

*contextuelles* adaptées à notre objectif pour différentes logiques.

La structure de séquent, qui est utilisée pour définir des systèmes de preuves dans de nombreuses logiques [121], est mono-contextuelle dans le sens où elle ne comporte qu'un seul champ pour les hypothèses et qu'un seul champ également pour les conclusions. Dans ce cadre, une structure est dite multi-contextuelle si elle comporte plusieurs champs pour les hypothèses ou les conclusions. Intuitivement, la structure permet ainsi une distribution spatiale des hypothèses et des conclusions. Parmi les structures multi-contextuelles les plus répandues, on peut mentionner celle introduite par Avron, appelée hyperséquent [4], qui n'est autre qu'un multi-ensemble de séquents.

Dans le cadre des logiques modales classiques, différentes structures multi-contextuelles ont été utilisées. Avec la structure d'hyperséquent Avron a proposé un calcul sans labels, simple et vérifiant l'élimination de la coupure pour la logique **S5** [4]. Avec une autre structure multi-contextuelle généralisant celle d'hyperséquent, appelée séquent profond (*deep sequent*), Brünnler a proposé des calculs sans labels vérifiant les propriétés habituellement exigées pour plusieurs logiques modales classiques, ce avec une présentation uniforme [22].

Sachant qu'il n'existe pas de tels calculs pour des logiques modales intuitionnistes, nous proposons dans cette thèse de définir et d'étudier des systèmes de preuve sans labels avec des structures multi-contextuelles adaptées pour différentes logiques modales intuitionnistes. Nous définissons ainsi des systèmes de déduction naturelle et des calculs des séquents fondés sur une nouvelle structure multi-contextuelle, dénommée *A-séquent*, pour toutes les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes *T* (réflexivité), *B* (symétrie), *4* (transitivité) et *5* (euclidianité). Après avoir démontré la correction et la complétude de ces systèmes, nous démontrons la normalisation pour tous nos systèmes de déduction naturelle et l'élimination de la coupure pour tous nos calculs des séquents. Nous démontrons également que tous ces systèmes vérifient la propriété de la sous-formule.

Nous définissons aussi des systèmes de déduction naturelle vérifiant la normalisation pour les logiques modales classiques formées à partir des combinaisons de *T*, *B*, *4* et *5*. En outre, en utilisant les calculs des séquents des logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de *T* et *B*, nous proposons des procédures de décision simples et efficaces. Ces contributions peuvent être considérées comme une généralisation des travaux d'Avron et Brünnler à la déduction naturelle d'une part et aux logiques modales intuitionnistes d'autre part.

Dans l'optique de définir des systèmes de preuve mieux adaptés à la logique **IS5**, en particulier pour démontrer sa décidabilité, nous introduisons une autre structure multi-contextuelle, appelée *MC-séquent*, qui n'est autre qu'une simplification de notre structure de *A-séquent*. Avec cette structure nous définissons un système de déduction naturelle et un calcul des séquents avec lequel nous démontrons syntaxiquement la décidabilité de **IS5**.

Comme nous l'avons déjà précisé, l'ajout d'informations sémantiques aux systèmes de preuve par l'utilisation de labels pose un certain nombre de problèmes. Une question se pose naturellement : que se passe-t-il lorsque l'on ajoute les labels au langage et non seulement aux systèmes ? La réponse est que cela revient, en général, à introduire de nouveaux types de logiques plus expressives que les logiques modales comme les *logiques hybrides*, qui ont essentiellement été introduites dans le but d'exprimer la relativité de la vérité à un monde dans un modèle [16, 2]. Les logiques hybrides sont obtenues par l'ajout aux logiques modales d'un nouveau type de symboles, nommés *nominaux*, et d'un nouvel opérateur, nommé *opérateur de*

*satisfaction*. Ce dernier permet de faire des sauts entre les mondes dénotés par les nominaux.

Dans nos travaux nous nous intéressons, tout particulièrement, à l'étude de la théorie de la preuve dans la logique hybride intuitionniste de Brauner et De Paiva [21] dont l'unique système de preuve existant est une déduction naturelle satisfaisant la normalisation. Ainsi nous définissons un calcul des séquents particulier mais sans structure multi-contextuelle, qui nous permet de proposer la première démonstration de décidabilité pour cette logique. L'ajout d'informations sémantiques au langage, via les nominaux et l'opérateur de satisfaction, nous a permis de définir un calcul simple fondé sur la structure standard de séquent. En fait, cela montre que ces entités syntaxiques ajoutées au langage rendent inutile l'utilisation de structures multi-contextuelles.

Après avoir abordé le raisonnement intuitionniste au sein des logiques modales, on s'intéresse au raisonnement flou dans ce contexte et donc aux logiques modales floues. Pour ces logiques les travaux en matière de systèmes de preuve sont peu nombreux. Ils concernent principalement les systèmes pour des logiques définies sur des algèbres finies qui ont été proposées par Fitting dans [57, 58]. Mais ces logiques sont fondées sur un langage contenant des symboles représentant les valeurs de vérité et donc un langage différent du langage standard des logiques modales. Metcalfe et Olivetti ont proposé dans [98] des systèmes sans labels ayant de bonnes propriétés pour le fragment privé de  $\diamond$  de la logique modale de Gödel [28].

Dans la littérature, nous constatons que des structures multi-contextuelles, telles que les hyperséquents et les séquents relationnels, sont appropriées pour la gestion des aspects multi-valués [4, 5, 6]. Cependant, face aux difficultés de la gestion des aspects modaux et aussi multi-valués des logiques modales de Gödel avec une structure multi-contextuelle, nous optons pour un compromis qui consiste à enrichir le langage pour gérer les aspects modaux et à utiliser une structure multi-contextuelle pour gérer les aspects multi-valués.

Dans ce contexte nous introduisons une nouvelle famille de logiques hybrides floues fondées sur les logiques modales de Gödel. En l'état de nos connaissances, l'unique logique hybride floue existante est celle introduite dans [80]. Dans cette logique, les valeurs de vérité sont prises dans une algèbre de Heyting finie et le langage contient des constantes représentant ces dernières. Dans notre famille de logiques, nous utilisons le langage standard des logiques hybrides et nous considérons le cas où les valeurs de vérité sont prises dans une algèbre infinie. Nous proposons tout d'abord des procédures de décision avec génération de contre-modèles en utilisant un ensemble de règles de preuve fondées sur une structure multi-contextuelle, appelée R-séquent. Cette dernière correspond à un enrichissement de la structure de séquent relationnel [6]. Ensuite, en ajoutant à notre ensemble de règles un axiome et des règles structurelles, nous définissons un calcul des séquents pour une de nos logiques définies sur une algèbre infinie.

## Plan de la thèse

Dans le chapitre 1, nous rappelons des notions générales relatives aux deux formalismes de preuve qui sont la déduction naturelle et le calcul des séquents. Ces derniers sont considérés comme les principaux formalismes dans la théorie de la preuve structurelle. Afin d'illustrer les notions les plus importantes, nous utilisons des systèmes de déduction naturelle et des calculs des séquents pour la logique propositionnelle intuitionniste.



Dans le chapitre 2, nous décrivons sémantiquement ainsi que syntaxiquement l'ensemble des logiques modales classiques et intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Dans notre description sémantique, nous utilisons la sémantique de Kripke qui rend bien compte des principes de raisonnement capturés par les logiques modales que nous considérons. En ce qui concerne notre description syntaxique, nous utilisons un formalisme connu sous le nom de système de Hilbert. Même si ce dernier ne revêt pas une grande importance dans la théorie de la preuve structurale, il permet néanmoins de décrire d'une manière simple et modulaire un grand nombre de logiques et, en particulier, les logiques modales. En outre, nous évoquons la situation de nos travaux pour essentiellement les logiques modales intuitionnistes dans la théorie de la preuve en matière de déduction naturelle et de calcul des séquents et leurs apports vis-à-vis des travaux existants.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la déduction naturelle pour principalement les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Dans ce cadre, nous introduisons une nouvelle structure multi-contextuelle, appelée A-séquent, qui est mise en œuvre dans la définition de systèmes de déduction naturelle pour toutes ces logiques. En adaptant l'approche de Prawitz [110] à notre structure, nous démontrons la propriété de normalisation pour ces systèmes. Ensuite, nous dérivons de la normalisation des propriétés importantes telles que celles de la sous-formule et de la séparation.

En outre, nous considérons aussi les logiques modales classiques formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Notre système de déduction naturelle pour chacune de ces logiques est obtenu par uniquement la modification de la règle associée à la constante  $\perp$  (faux) dans le système de sa version intuitionniste. Nous démontrons également la propriété de normalisation dans ce cas.

Dans le chapitre 4, nous définissons des calculs des séquents fondés sur la structure de A-séquent pour également les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. La correction et la complétude sont obtenues en établissant une équivalence entre ces calculs et les systèmes de déduction naturelle introduits précédemment. Partant de cette équivalence, nous démontrons l'élimination de la coupure en utilisant la propriété de normalisation. Les propriétés de la sous-formule et de la séparation sont obtenues comme des conséquences directes de l'élimination de la coupure.

Ensuite, en utilisant les calculs associés aux logiques formées à partir des combinaisons de  $T$  et  $B$ , nous proposons des procédures de décision simples pour ces dernières. Cette restriction à ces logiques est liée à l'absence de la propriété de la profondeur dans nos calculs pour les autres logiques. La structure de A-séquent étant arborescente, la propriété de la profondeur correspond à la présence d'une borne limitant les profondeurs des A-séquents dans les dérivations.

En outre, dans l'optique de restreindre l'application de la contraction, nous apportons des changements à nos calculs. En fait, la présence de la règle de contraction n'est pas explicite dans nos calculs, mais elle est internalisée dans toutes les règles gauches. Dans les calculs obtenus après amélioration, la contraction n'est internalisée que dans les règles gauches associées aux deux opérateurs  $\Box$  et  $\Diamond$ .

Dans le chapitre 5, nous introduisons une nouvelle structure multi-contextuelle, appelée MC-séquent. Intuitivement, elle correspond à un aplatissage de la structure de A-séquent et constitue une solution au problème, rencontré au chapitre 4, de la propriété de la profondeur

dans le cas de la logique **IS5**. En utilisant les MC-séquents, nous définissons un système de déduction naturelle ainsi qu'un calcul des séquents pour cette logique.

La propriété de normalisation est démontrée en se servant du fait que notre système pour **IS5** fondée sur les A-séquents vérifie cette propriété. De même que pour nos précédents calculs des séquents, l'élimination de la coupure est obtenue de la normalisation. La décidabilité de **IS5** est démontrée en utilisant notre nouveau calcul avec une procédure similaire à celles définies au chapitre 4. En fait, étant donné la forme plate des MC-séquents, la propriété de la profondeur peut être considérée dans le cas des calculs fondés sur les MC-séquents soit comme un concept inexistant, soit comme une propriété satisfaite quel que soit le calcul.

Dans le chapitre 6, nous étudions la logique hybride intuitionniste **IHL** [21] pour laquelle il existe un système de déduction naturelle vérifiant la propriété de normalisation, qui est l'unique système de preuve existant pour cette logique. En utilisant une structure standard de séquent, nous définissons un calcul des séquents pour **IHL**. L'élimination de la coupure est démontrée en utilisant une variante de l'approche syntaxique de Gentzen [121]. Contrairement aux précédents calculs, l'élimination de la coupure dans ce cas ne permet pas d'obtenir la propriété de la sous-formule. Toutefois, une propriété similaire, appelée propriété de la quasi-sous-formule, est vérifiée. En se servant de notre calcul, nous fournissons la première démonstration de décidabilité de **IHL**.

Dans le chapitre 7, nous introduisons une famille de logiques hybrides floues obtenues à partir des logiques modales de Gödel. Les modèles que nous utilisons sont les mêmes que ceux des logiques modales de Gödel. Ainsi, les opérateurs propositionnels sont interprétés comme dans les logiques de Gödel et les modalités  $\Box$  et  $\Diamond$  sont interprétées en utilisant l'infimum et le supremum. Concernant l'opérateur de satisfaction et les nominaux, ils sont interprétés comme dans les logiques hybrides standard. Cette famille se compose d'une séquence de logiques définies sur des algèbres finies  $(\mathbf{GH}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ( $\mathbf{GH}_n$  est  $(n + 1)$ -valuée) et deux autres définies sur des algèbres infinies qui sont  $\mathbf{GH}_\infty$  et  $\mathbf{WGH}_\infty$ .

Dans l'optique de définir des calculs pour ces logiques, nous introduisons une structure multi-contextuelle, appelée R-séquent, qui peut être considérée comme une variante de celle de séquent relationnel [6]. En utilisant cette structure, nous introduisons un ensemble de règles fortement correctes et fortement inversibles pour les logiques  $(\mathbf{GH}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{WGH}_\infty$ . Ensuite, nous proposons des procédures de décision avec génération de contre-modèles pour ces logiques. Elles consistent premièrement à réduire, en utilisant nos règles, un r-séquent en un ensemble de r-séquents plus simples, appelés r-séquents irréductibles. Ensuite, afin de décider ces derniers, nous associons à tout r-séquent irréductible un graphe bicolore fini, en adaptant la méthode développée pour les logiques de Gödel [92, 62], et nous donnons une caractérisation de la validité fondée sur la présence de chaînes particulières. Partant de ces procédures, nous démontrons que  $(\mathbf{GH}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{WGH}_\infty$  sont des logiques décidables qui vérifient la propriété des modèles finis. Enfin, nous définissons un calcul des séquents pour  $\mathbf{WGH}_\infty$  en ajoutant à notre précédent ensemble de règles un axiome et des règles structurelles.

Dans la conclusion, nous présentons une synthèse de nos résultats en mettant l'accent sur de nombreuses perspectives qui restent à explorer. Nous envisageons, en particulier, d'étendre nos résultats à d'autres logiques modales comme par exemple les logiques déontiques. Parmi les autres pistes importantes à étudier, nous pouvons citer la question ouverte qui concerne la décidabilité de certaines logiques que nous considérons et tout particulièrement **IS4**. En outre, il est intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser nos systèmes de preuve dans le cas

des logiques modales intuitionnistes pour définir des langages de programmation distribuée permettant de capturer des notions telles que la portabilité de code et la localité de ressources.



# Chapitre 1

## Déduction naturelle et calcul des séquents

### Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons essentiellement les formalismes de preuve de déduction naturelle et de calcul des séquents. Ils sont considérés comme les principaux formalismes dans l'étude des structures de preuves [121]. Nous illustrons toutes les notions que nous considérons avec le fragment propositionnel de la logique intuitionniste (IPL). Le but étant d'utiliser ces notions dans la description des systèmes de preuve que nous introduirons.

Rappelons donc quelques notions clés pour la logique IPL. Son langage contient les opérateurs logiques  $\wedge$  (conjonction),  $\vee$  (disjonction) et  $\supset$  (implication), une constante  $\perp$  (absurdité) et  $\mathbf{Prop}$  un ensemble dénombrable de variables, appelées *variables propositionnelles*, dont les éléments sont notés par les lettres  $p, q, r$  etc.

Les *formules* sont données par la grammaire suivante :

$$A ::= p \mid \perp \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \supset A$$

En guise d'exemple  $(p \wedge q) \supset r$  est une formule. Décrivons maintenant la sémantique de Kripke de IPL [86], qui est également appelée la *sémantique de mondes possibles* de part la possibilité d'avoir des modèles avec plusieurs mondes.

Un *modèle de Kripke* est défini comme un triplet  $(W, \leq, V)$  où  $W$  est un ensemble non vide de monde partiellement ordonné par  $\leq$ ,  $V$  est une fonction de  $W$  dans  $2^{\mathbf{Prop}}$  avec  $2^{\mathbf{Prop}}$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\mathbf{Prop}$  et  $w \leq w'$  implique  $V(w) \subseteq V(w')$ . Nous associons à tout modèle  $\mathcal{M}$  une relation  $\vDash_{\mathcal{M}}$ , appelée *relation de satisfaction*, entre l'ensemble  $W$  et l'ensemble des formules. En fait, l'expression  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  signifie que dans le modèle  $\mathcal{M}$  la formule  $A$  est vraie dans le monde  $w$ . Cette relation est définie par induction sur la structure des formules de la manière suivante :

- $w \vDash_{\mathcal{M}} p$  si et seulement si  $p \in V(w)$ ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} \perp$  jamais ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} A \wedge B$  si et seulement si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} A \vee B$  si et seulement si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  ou  $w \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} A \supset B$  si et seulement si pour tout  $w' \geq w$ , si  $w' \vDash_{\mathcal{M}} A$  alors  $w' \vDash_{\mathcal{M}} B$ .

Une formule  $A$  est *valide dans  $\mathcal{M}$*  si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  pour tout  $w$  dans  $W$ .  $A$  est *valide dans IPL* si et seulement si  $A$  est valide dans tout modèle.

Ces notions sur IPL étant rappelées, nous abordons maintenant le concept de système de preuve et des notions qui lui sont relatives en les illustrant dans cette logique.

## 1.1 Systèmes de preuve

Une **règle d'inférence** est une structure de la forme suivante :

$$\frac{P_1 \cdots P_n}{C} [R]$$

où  $[R]$  est le nom de la règle,  $P_1, \dots, P_n$  sont ses **prémisses** et  $C$  est sa **conclusion**. Lorsque  $n = 0$ , cette règle est appelée **axiome**. Une règle d'inférence exprime la connaissance que la validité des prémisses implique celle de la conclusion.

Dans la situation par exemple des systèmes à la Hilbert, les prémisses et les conclusions sont des formules. Toutefois, cela n'est pas toujours le cas dans la théorie de la preuve où des structures plus complexes sont également utilisées. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, la structure de Gentzen largement répandue appelée séquent. De telles structures ont parfois des formules correspondantes. Autrement dit, la validité d'une structure dans une logique donnée est définie par la validité de sa formule correspondante. Il est, néanmoins, possible d'utiliser des structures ne possédant aucune formule correspondante. Dans ce cas, la validité est, en général, définie via la sémantique de la logique en question.

Nous définissons un **système de preuve** comme un ensemble de règles d'inférence. Une **dérivation** de  $\mathcal{S}$  dans un système de preuve  $SP$  est un arbre, éventuellement infini, tel que la racine est étiquetée par  $\mathcal{S}$ , et les étiquettes des successeurs immédiats d'un nœud sont les prémisses d'une application d'une règle de  $SP$  dont la conclusion est l'étiquette de ce nœud. Une **preuve** de  $\mathcal{S}$  dans  $SP$  est une dérivation finie dont les feuilles sont étiquetées par des axiomes de  $SP$ .

Puisqu'il ne peut exister de preuve sans axiome, nous pouvons établir qu'un système de preuve n'a de sens que s'il comporte des axiomes. Notons que la notion de système de preuve que nous venons de définir n'est pas la plus générale. Par exemple, dans la présentation standard des systèmes de déduction naturelle, le concept d'axiome est absent [121].

Un système de preuve  $SP$  utilisant une structure  $\mathcal{S}$  est dit **correct** pour une logique  $L$ , si toute instance de  $\mathcal{S}$  possédant une preuve dans  $SP$  est valide dans  $L$ . D'une manière duale,  $SP$  est **complet** pour  $L$ , si toute instance de  $\mathcal{S}$  valide dans  $L$  a une preuve dans  $SP$ .

Dans ce qui suit, nous écrivons  $\vdash_{SP}\mathcal{S}$  lorsque  $\mathcal{S}$  a une preuve dans le système de preuve  $SP$ . De plus, nous écrivons  $\vdash_{SP}^n\mathcal{S}$  (resp.  $\vdash_{SP}^{s \leq n}\mathcal{S}$ ) si  $\mathcal{S}$  a une preuve dans  $SP$  de profondeur (resp. taille) plus petite ou égale à  $n$ . Étant donné qu'une preuve correspond à un arbre, sa profondeur (resp. sa taille) correspond à la profondeur (resp. au nombre de nœuds) de ce dernier.

Une règle  $[R]$  est dite **admissible** dans un système de preuve  $SP$ , si pour toute instance  $\frac{H_1 \cdots H_k}{C} [R]$  de  $[R]$ , si pour tout  $i \in [1, k]$  on a  $\vdash_{SP}H_i$ , alors  $\vdash_{SP}C$ .

$[R]$  est **admissible avec préservation de la profondeur** (resp. **la taille**) dans  $SP$ , si pour tout  $n$ , si pour tout  $i \in [1, k]$  on a  $\vdash_{SP}^n H_i$  (resp.  $\vdash_{SP}^{s \leq n} H_i$ ), alors  $\vdash_{SP}^n C$  (resp.  $\vdash_{SP}^{s \leq n} C$ ).

Afin d'illustrer la notion de système de preuve, nous considérons le formalisme de système à la Hilbert. Nous décrivons ici un système à la Hilbert, appelé  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$ , pour la logique IPL :

**Axiomes :**

1.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
2.  $A \supset (A \vee B)$
3.  $B \supset (A \vee B)$
4.  $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
5.  $A \supset (B \supset A)$
6.  $(A \wedge B) \supset A$
7.  $(A \wedge B) \supset B$
8.  $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
9.  $\perp \supset A$

avec la règle d'inférence connue sous le nom de **modus ponens** :  $\frac{A \supset B \quad A}{B}$   $[mp]$ .

Illustrons l'utilisation de ce système par une simple preuve de la formule  $B \supset (\perp \supset A)$  :

$$\frac{\frac{\text{---}}{\perp \supset A} \text{ [Axiome 9]} \quad \frac{\text{---}}{(\perp \supset A) \supset (B \supset (\perp \supset A))} \text{ [Axiome 5]}}{B \supset (\perp \supset A)} \text{ [mp]}$$

## 1.2 Structures et systèmes de preuve

Dans cette section, nous présentons deux structures largement utilisées dans la définition de systèmes de preuve. La première est celle introduite par Gentzen [70], appelée séquent, et la deuxième et celle introduite par Avron [4], appelée hyperséquent, qui est une généralisation de la structure de séquent. Notre objectif principal est de mettre en évidence le concept de structure multi-contextuelle.

Un **multi-ensemble**, appelé également ensemble avec multiplicité, est une liste d'éléments où l'ordre n'est pas considéré. En d'autres termes, un ensemble où des éléments peuvent apparaître plusieurs fois. Par exemple  $A, A, B$  et  $A, B, A$  dénotent le même multi-ensemble. Nous notons l'union des multi-ensembles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  par  $\Gamma, \Gamma'$ . Ainsi, le multi-ensemble  $\Gamma, A$  correspond à l'union de  $\Gamma$  et le multi-ensemble singleton contenant uniquement  $A$ . En outre, nous notons  $set(\Gamma)$  l'ensemble des éléments du multi-ensemble  $\Gamma$ .

Un **séquent** est une structure de la forme  $\Gamma \vdash \Delta$  où  $\Gamma$  est un multi-ensemble fini, éventuellement vide, de formules, appelé **contexte**, et  $\Delta$  est un multi-ensemble fini non vide de formules, appelé **conclusion**. Dans les cas où le contexte est vide, nous écrivons  $\vdash \Delta$  à la place de  $\emptyset \vdash \Delta$ .

En fait, la définition que nous venons de donner correspond à celle de séquent **multi-conclusion** de part le fait que la conclusion est définie comme un multi-ensemble de formules. Dans ce cadre, un séquent est dit **mono-conclusion** si sa conclusion contient uniquement une seule formule.

Une des propriétés importantes que peut avoir une structure dans une logique donnée consiste en la possession d'une formule correspondante. Cela signifie que si  $F$  est la **formule correspondante** à la structure  $S$  dans la logique  $L$ , alors  $S$  est valide dans  $L$  si et seulement si  $F$  l'est aussi. Dans la situation de la logique IPL, la formule correspondante à  $\Gamma \vdash \Delta$  est  $\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$  où  $\bigwedge \Gamma = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$  et  $\bigvee \Delta = B_1 \vee \dots \vee B_l$  lorsque  $\Gamma = A_1, \dots, A_n$  et  $\Delta = B_1, \dots, B_l$  ( $\bigwedge \Gamma = \top$ ). Autrement dit, chaque virgule à gauche correspond à une conjonction, tandis que chaque virgule à droite correspond à une disjonction.

Il est à noter qu'il existe des systèmes de preuve fondés sur des structures qui ne possèdent pas de formules correspondantes. Cela est principalement le cas des **systèmes avec labels** [60]. Les labels sont des entités syntaxiques étrangères au langage de la logique considérée permettant, en général, l'ajout d'informations sémantiques aux systèmes de preuve.

La structure de séquent est considérée comme **mono-contextuelle** par rapport à l'existence d'un unique champ pour les hypothèses (à gauche du symbole  $\vdash$ ) de même que pour les conclusions (à droite du symbole  $\vdash$ ). Nous considérerons qu'une structure est **multi-contextuelle** si elle correspond à un environnement dans lequel les hypothèses ainsi que les conclusions peuvent être situées dans plusieurs champs. Afin de clarifier ce concept, nous considérons la structure d'**hyperséquent**. Cette dernière correspond à un multi-ensemble de séquents, appelés composantes, séparés par le symbole  $|$  qui est équivalent à la disjonction :

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \mid \dots \mid \Gamma_n \vdash \Delta_n$$

Dans un hyperséquent, les hypothèses et les conclusions sont distribuées sur plusieurs champs correspondant aux composantes.

La notion de preuve occupe une place centrale en informatique de part l'utilisation des logiques formelles pour garantir que les systèmes informatiques respectent les normes établies par les concepteurs. La théorie de la preuve est une discipline qui s'occupe de l'étude de la notion de preuve et de prouvabilité à travers des formalismes dont les principaux sont les systèmes à la Hilbert, la déduction naturelle et le calcul des séquents.

Une des caractéristiques des systèmes à la Hilbert est le fait que la construction de preuves est fondée sur les axiomes plus que sur les règles d'inférence. Cela se révèle par la présence de très peu de règles. Ainsi, l'étude des systèmes à la Hilbert, contrairement à celle de la déduction naturelle et du calcul des séquents, ne revêt pas une grande importance d'un point de vue structurel car l'étude des structures des preuves est fondée principalement sur les règles d'inférence. En effet, la théorie de la preuve structurelle s'intéresse à l'étude des preuves en tant que structures combinatoires [121].

Parmi les principales motivations liées à l'étude de la théorie de la preuve structurelle, nous pouvons citer l'automatisation de la construction de preuves ainsi que la programmation logique et celle fonctionnelle. Dans cette dernière, par exemple, l'isomorphisme de Curry-



Howard qui établit une correspondance entre programmes et preuves [82], rend fondamentale la construction de preuves dans le développement de programmes sûrs et fiables[103].

### 1.3 Dédution naturelle

Dans cette section, nous décrivons le formalisme de déduction naturelle en nous focalisant essentiellement sur la description de certaines approches permettant de démontrer la correction et la complétude que nous utilisons pour démontrer ces propriétés dans le cas de nos systèmes de déduction naturelle.

Le formalisme de déduction naturelle a été introduit par Gentzen [70, 71] en proposant des systèmes pour les logiques classique et intuitionniste. Dans son approche, Gentzen utilise des règles d'inférence ayant comme prémisses et conclusions des formules. Néanmoins, d'autres approches utilisent d'autres structures dans la définition des règles. Le système de déduction naturelle pour IPL que nous décrivons ici utilise la structure de séquent mono-conclusion (*natural deduction in sequent-style*) [61, 121].

La principale spécificité de l'approche de Gentzen et également Prawitz [110], consiste en l'utilisation d'hypothèses (des formules), au départ *ouvertes*, qui peuvent être *closes* (*déchargées*) pendant le processus de la construction de la preuve. Plus précisément, un arbre de preuve est un arbre étiqueté par des formules dont les feuilles sont étiquetées par des hypothèses de sorte qu'un arbre ayant comme hypothèses ouvertes  $A_1, \dots, A_k$  et comme étiquette de la racine  $C$  correspond à une preuve de  $C$  sous les hypothèses  $A_1, \dots, A_k$ . Ainsi, l'utilisation des séquents n'est autre que le résultat de l'ajout d'un contexte contenant les hypothèses ouvertes à chaque étape de la construction de la preuve. Une preuve du séquent  $A_1, \dots, A_k \vdash C$  dans un système fondé sur la structure de séquent correspond à une preuve de  $C$  ayant comme hypothèses ouvertes  $A_1, \dots, A_k$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, A \vdash A} [id] \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} [\perp_i] \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} [\wedge_I] \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} [\wedge_E^1] \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} [\wedge_E^2] \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} [\vee_I^1] \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} [\vee_I^2] \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} [\vee_E] \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} [\supset_I] \quad \frac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} [\supset_E]
 \end{array}$$

FIG. 1.1 – Système de déduction naturelle  $DN_{IPL}$

### 1.3.1 Un système de déduction naturelle pour IPL

Un système de déduction naturelle est un système de preuve où à chaque opérateur, il n'est associé que des règles d'introduction et d'élimination. Considérons le système de déduction naturelle  $DN_{\text{IPL}}$  pour IPL décrit en figure 1.1. Dans ce dernier, les règles dont les noms sont de la forme  $[R_E]$  sont des règles d'élimination et celles dont les noms sont de la forme  $[R_I]$  sont celles d'introduction. Le fait que chaque opérateur possède des règles d'élimination et d'introduction reflète le principe de symétrie qui caractérise la déduction naturelle : pour tout opérateur logique, il existe des règles permettant de l'introduire et d'autres permettant de l'éliminer.

Commentons maintenant quelques règles du système  $DN_{\text{IPL}}$ . Nous précisons que les règles se lisent de haut en bas. La règle  $[\perp_i]$  exprime le fait que si des hypothèses impliquent l'absurde ( $\perp$ ), alors elles impliquent toute autre formule. La règle  $[\supset_I]$  exprime le fait que si des hypothèses avec la formule  $A$  permettent d'obtenir la formule  $B$ , alors ces hypothèses impliquent la formule  $A \supset B$ . Elle est considérée comme une règle introduisant l'implication car la formule  $B$  dans sa prémisse est substituée par  $A \supset B$  dans sa conclusion. Quant à la règle  $[\supset_E]$ , elle est similaire à celle de modus ponens et elle indique que si des hypothèses impliquent les deux formules  $A$  et  $A \supset B$ , alors elles impliquent forcément  $B$ .

Illustrons l'utilisation du système  $DN_{\text{IPL}}$  par une preuve du séquent  $(A \vee B) \supset C \vdash A \supset C$  :

$$\frac{\frac{\frac{}{A, (A \vee B) \supset C \vdash (A \vee B) \supset C} [id]}{A, (A \vee B) \supset C \vdash A \vee B} [\vee_I]}{A, (A \vee B) \supset C \vdash C} [\supset_E]}{(A \vee B) \supset C \vdash A \supset C} [\supset_I]$$

### 1.3.2 Correction et complétude

Un des procédés permettant de démontrer la correction de  $DN_{\text{IPL}}$  repose sur l'utilisation la sémantique de Kripke de la logique IPL. L'idée consiste à démontrer que pour chaque règle de  $DN_{\text{IPL}}$ , si sa conclusion a un contre-modèle dans cette sémantique, alors au moins une de ses prémisses en a également un. Si nous considérons la contraposée, alors démontrer la précédente propriété est équivalent à démontrer que pour chaque règle de  $DN_{\text{IPL}}$ , si chacune de ses prémisses est valide dans tout modèle, alors sa conclusion est aussi valide dans tout modèle. Ainsi, la correction de la sémantique de Kripke implique que si les prémisses sont valides dans IPL alors la conclusion l'est aussi.

En guise d'exemple, nous démontrons la correction de la règle  $[\vee_E]$ . Soit  $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$  un contre-modèle de  $\Gamma \vdash C$ . Cela indique qu'il existe  $w \in W$  tel que  $w \models \bigwedge \Gamma$  et  $w \not\models C$ . Si on a  $w \not\models A \vee B$ , alors  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\Gamma \vdash A \vee B$  qui est une des prémisses de  $[\vee_E]$ . Sinon, on a  $w \models A$  ou  $w \models B$ , ce qui signifie que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle soit de  $\Gamma, A \vdash C$  ( $w \models A$ ), soit de  $\Gamma, B \vdash C$  ( $w \models B$ ). Nous venons de démontrer que si la conclusion de  $[\vee_E]$  a un contre-modèle, alors au moins une de ses prémisses a aussi un contre-modèle.

En ce qui concerne la complétude de  $DN_{\text{IPL}}$ , nous pouvons la démontrer en considérant la validité dans IPL à travers son système à la Hilbert  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$  décrit dans la section 1.1. La première

étape de la démonstration de la complétude consiste à montrer que pour chaque axiome  $A$  de  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$ , le séquent  $\vdash A$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Nous ne démontrons ici cette propriété que pour une partie des axiomes :

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} [id]}{A \vdash A \vee B} [\vee_I^1]}{\vdash A \supset (A \vee B)} [\supset_I] \quad \frac{\frac{\frac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B} [id]}{A \wedge B \vdash A} [\wedge_E^1]}{\vdash (A \wedge B) \supset A} [\supset_I] \quad \frac{\frac{\frac{}{\perp \vdash \perp} [id]}{\perp \vdash A} [\perp_i]}{\vdash \perp \supset A} [\supset_I] \quad \frac{\frac{\frac{}{A, B \vdash A} [id]}{A \vdash B \supset A} [\supset_I]}{\vdash A \supset (B \supset A)} [\supset_I]$$

En utilisant la règle  $[\supset_E]$ , nous savons que si les deux séquents  $\vdash A \supset B$  et  $\vdash A$  ont des preuves dans  $DN_{\text{IPL}}$ , alors  $\vdash B$  en a aussi une. Ainsi, nous déduisons que si  $A$  est valide dans IPL (a une preuve dans  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$ ) alors le séquent  $\vdash A$  a une dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Le fait que toute formule valide a une preuve n'implique pas nécessairement que tout séquent valide a une preuve. Démontrons maintenant les deux propriétés suivantes :

1. si  $\Gamma \vdash A \supset B$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ , alors  $\Gamma, A \vdash B$  en a aussi une ; et
2. si  $\Gamma, A \wedge B \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ , alors  $\Gamma, A, B \vdash C$  en a aussi une.

Propriété (1). Nous pouvons aisément démontrer que si  $\Gamma \vdash A \supset B$  a une preuve, alors  $\Gamma, A \vdash A \supset B$  en a aussi une. En effet, il suffit d'ajouter  $A$  à tous les contextes des séquents dans une preuve quelconque de  $\Gamma \vdash A \supset B$  pour avoir une preuve de  $\Gamma, A \vdash A \supset B$ . Une preuve de  $\Gamma, A \vdash B$  est obtenue à partir d'une preuve quelconque  $\mathcal{D}$  de  $\Gamma, A \vdash A \supset B$  de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma, A \vdash A \supset B} \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash A} [id]}{\Gamma, A \vdash B} [\supset_E]$$

Propriété (2). Nous supposons que  $\Gamma, A \wedge B \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Alors  $\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash C$  a aussi une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . En utilisant une preuve quelconque  $\mathcal{D}$  de  $\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash C$ , une preuve de  $\Gamma, A, B \vdash C$  est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma, A \wedge B, A, B \vdash C} [\supset_I]}{\Gamma, A, B \vdash (A \wedge B) \supset C} [\supset_I] \quad \frac{\frac{\frac{}{\Gamma, A, B \vdash A} [id]}{\Gamma, A, B \vdash B} [id]}{\Gamma, A, B \vdash A \wedge B} [\wedge_I]}{\Gamma, A, B \vdash C} [\supset_E]$$

Soit  $\Gamma \vdash C$  un séquent valide dans IPL. Alors  $\bigwedge \Gamma \supset C$  est une formule valide dans IPL et par conséquent le séquent  $\vdash \bigwedge \Gamma \supset C$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . En utilisant la propriété (1), nous obtenons que  $\bigwedge \Gamma \vdash C$  a aussi une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Ensuite, en utilisant la propriété (2), nous déduisons que  $\Gamma \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Donc nous pouvons conclure que  $DN_{\text{IPL}}$  est un système complet pour IPL.

La démonstration de correction que nous avons décrite est sémantique car elle est obtenue à partir de la correction de la sémantique de Kripke pour IPL. Quant à celle de la complétude, elle est syntaxique car elle consiste simplement à générer syntaxiquement une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$  à partir de toute preuve dans  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$ . En réalité, il est aussi possible de démontrer la correction syntaxiquement en suivant le chemin inverse de celui de la complétude. Plus exactement, on démontre qu'il est possible de générer syntaxiquement une preuve dans  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$

à partir de toute preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . En outre, la complétude peut également être démontrée sémantiquement par génération de contre-modèles [88] : démontrer que tout séquent qui n'a pas de preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$  a un contre-modèle dans la sémantique de Kripke.

### 1.3.3 Normalisation

La normalisation est une des propriétés les plus importantes que peut vérifier un système de déduction naturelle. Elle vise principalement à éliminer les détours dans une dérivation. Un **détour** correspond à une introduction d'un opérateur dans l'unique but de l'éliminer tout de suite après. En fait, démontrer la normalisation consiste à proposer une procédure transformant toute preuve en une preuve sans détours en un temps fini. Dans le cas de  $DN_{\text{IPL}}$ , la preuve de normalisation est obtenue par simple adaptation aux séquents [61] de la preuve de Prawitz [110] pour son système de IPL. En guise d'exemple, les détours associés à l'opérateur  $\wedge$  sont éliminés de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\Gamma \vdash A_1 \quad \Gamma \vdash A_2} [\wedge_I]}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2} [\wedge_E^i] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathcal{D}_i}{\Gamma \vdash A_i} \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

Dans le cas de  $DN_{\text{IPL}}$ , la normalisation a comme conséquence importante la propriété de la sous-formule.

*Un système de preuve SP pour une logique L vérifie la **propriété de la sous-formule** si la validité de  $\mathcal{S}$  dans L implique que  $\mathcal{S}$  a une preuve dans SP où toutes les formules dans cette preuve sont des sous-formules des formules de  $\mathcal{S}$ .*

En plus du fait que cette propriété permet de démontrer la consistance, elle permet également de démontrer la très importante propriété de la séparation.

*Un système de preuve SP pour une logique L vérifie la **propriété de la séparation** si la validité de  $\mathcal{S}$  dans L implique que  $\mathcal{S}$  a une preuve dans SP où les règles utilisées sont uniquement celles associées aux opérateurs dans  $\mathcal{S}$ .*

Si nous considérons, par exemple, le fragment implicationnel (les formules qui ne contiennent que  $\supset$  comme opérateur), alors pour construire des preuves dans ce fragment nous n'avons besoin que de  $[id]$ ,  $[\perp_i]$ ,  $[\supset_I]$  et  $[\supset_E]$ .

### 1.3.4 Dédution naturelle et logique classique

Un système de déduction naturelle pour le fragment propositionnel de la logique classique CPL, appelé  $DN_{\text{CPL}}$ , est obtenu par le remplacement dans  $DN_{\text{IPL}}$  de la règle  $[\perp_i]$  par la règle suivante :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} [\perp_c]$$

Nous rappelons que  $\neg A = A \supset \perp$ . Il est à noter que la règle  $[\perp_c]$  est une généralisation de celle de  $[\perp_i]$ . En effet, si on a une preuve de  $\Gamma \vdash \perp$ , alors on a nécessairement une preuve de  $\Gamma, \neg A \vdash \perp$ . Par conséquent, en utilisant la prouvabilité de  $\Gamma \vdash \perp$  dans  $DN_{\text{CPL}}$ , on obtient celle de  $\Gamma \vdash A$ .

Puisque toute formule valide dans IPL est forcément valide dans CPL, toutes les règles communes à  $DN_{\text{CPL}}$  et  $DN_{\text{IPL}}$  sont correctes pour CPL. Ainsi, pour démontrer la correction

de  $DN_{\text{CPL}}$ , il suffit de démontrer la correction de la règle  $[\perp_c]$ . Supposons que  $\Gamma, \neg A \vdash \perp$  est valide dans CPL. En utilisant la règle  $[\supset_I]$ , on a  $\Gamma \vdash \neg\neg A$  est valide dans CPL ( $\neg\neg A = \neg A \supset \perp$ ). Par conséquent,  $\Gamma \vdash A$  est aussi valide car  $A \leftrightarrow \neg\neg A$ .

Quant à la complétude de  $DN_{\text{CPL}}$ , il suffit de démontrer que l'axiome  $\neg\neg A \supset A$  a une preuve dans  $DN_{\text{CPL}}$ . Effectivement, un système à la Hilbert pour CPL est obtenu par l'ajout de l'axiome  $\neg\neg A \supset A$  à  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$ . En outre, les axiomes de  $\mathcal{H}_{\text{IPL}}$  ont des preuves dans  $DN_{\text{CPL}}$  car ce dernier diffère de  $DN_{\text{IPL}}$  juste par  $[\perp_c]$  qui généralise  $[\perp_i]$ . Une preuve de  $\vdash \neg\neg A \supset A$  est donnée par :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg A, \neg\neg A \vdash \neg\neg A} [id]}{\neg A, \neg\neg A \vdash \neg A} [id]}{\neg A, \neg\neg A \vdash \perp} [\supset_E]}{\neg A, \neg\neg A \vdash \perp} [\perp_c]}{\neg\neg A \vdash A} [\perp_c]}{\vdash \neg\neg A \supset A} [\supset_I]}{\vdash \neg\neg A \supset A} [\supset_I]$$

De même que le système  $DN_{\text{IPL}}$ , la démonstration de la normalisation pour  $DN_{\text{CPL}}$  est obtenue par adaptation de la preuve de Prawitz pour son système pour CPL [110]. La normalisation dans cette situation ne permet pas d'obtenir la propriété de la sous-formule. Toutefois, elle permet d'obtenir une version affaiblie de cette propriété : toute formule apparaissant dans une preuve de  $\mathcal{S}$  en forme normale dans  $DN_{\text{CPL}}$  est soit une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ , soit  $\perp$ , soit une formule de la forme  $\neg A$  avec  $A$  une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ .

## 1.4 Calcul des séquents

Dans cette section, nous décrivons le formalisme de calcul des séquents. Nous nous concentrons sur l'étude de quatre principaux problèmes qui sont l'élimination de la coupure, l'élimination de la contraction, la décidabilité et la génération de contre-modèles. Les trois premiers sont illustrés par des calculs de IPL, tandis que le dernier est illustré par un calcul de CPL.

Comme la déduction naturelle, le formalisme de calcul des séquents a aussi été introduit par Gentzen [70, 71]. Il est présenté comme une alternative à celui de la déduction naturelle dont le but initial a été la démonstration de la consistance. En réalité, il est possible de démontrer la consistance via la déduction naturelle en utilisant la normalisation [110]. Toutefois, puisque Gentzen n'a pas découvert la normalisation, il a choisi de passer par le calcul des séquents en utilisant la propriété de l'élimination de la coupure. D'une certaine manière, la normalisation dans la déduction naturelle est équivalente à l'élimination de la coupure dans le calcul des séquents. En d'autres termes, si on arrive à démontrer la normalisation dans la déduction naturelle, alors on arrivera en général à éliminer la coupure dans le calcul des séquents. De plus, l'élimination de la coupure peut être considérée comme plus simple que la normalisation car elle correspond simplement à l'élimination d'une règle, tandis que la normalisation correspond à des restrictions sur la forme des preuves.

Dans la théorie de la preuve, le calcul des séquents joue un rôle central principalement par rapport à son élégance ainsi que son efficacité en terme d'automatisation de la construction de preuves [121]. Il a aussi une large influence sur la programmation logique [99, 36].

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, A \vdash A} [id] \quad \frac{}{\Gamma, \perp \vdash C} [\perp_L] \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} [\wedge_L] \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} [\wedge_R] \\
\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} [\vee_L] \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} [\vee_R^1] \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} [\vee_R^2] \\
\frac{\Gamma, A \supset B \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \supset B \vdash C} [\supset_L] \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} [\supset_R] \\
\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, A \vdash \Delta, C}{\Gamma \vdash \Delta, C} [Cut]
\end{array}$$

FIG. 1.2 – Calcul des séquents  $G_{\text{IPL}}^1$ 

Un calcul des séquents *standard* est un système de preuve dont les règles se divisent en axiomes, règles structurelles, règles gauches et règles droites. Les règles gauches agissent sur les formules à gauche du symbole  $\vdash$ , alors que celles droites agissent à droite de ce dernier. En fait, le principe de symétrie dans la déduction naturelle, à savoir la présence de règles d'introduction et d'élimination pour tout opérateur, possède son équivalent en calcul des séquents qui correspond à la présence de règles gauches et droites pour chaque opérateur. La principale caractéristique du calcul des séquents réside dans le fait que les règles s'appliquent de bas en haut. En d'autres termes, la construction d'une preuve se fait de bas en haut : du séquent à prouver vers les axiomes. Par calculs standard, nous voulons parler des calculs fondés sur la structure de séquent car, dans la littérature, le nom « calcul des séquents » est donné à des calculs fondés sur d'autres structures. qui abordent la construction de preuves dans le même esprit.

#### 1.4.1 Un calcul des séquents pour IPL

Considérons le calcul  $G_{\text{IPL}}^1$  proposé par Dyckhoff [45] décrit en figure 1.2. Comme dans le cas du système de déduction naturelle  $DN_{\text{IPL}}$ , la définition des règles de  $G_{\text{IPL}}^1$  est fondée sur l'utilisation des séquents mono-conclusions. Notons que les règles droites de ce calcul sont les mêmes que celles d'introduction dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Ce calcul peut être considéré comme une variante de celui introduit par Gentzen. En effet, il correspond à un calcul obtenu par absorption de la règle structurelle de l'affaiblissement ainsi que celle de la contraction dans les autres règles [121]. Les règles d'affaiblissement et de contraction sont respectivement :

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} [W] \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} [C]$$

L'absorption de ces règles structurelles vise à contrôler, dans une certaine mesure, leurs applications dans la construction des preuves. Cela a pour but de rendre la recherche de preuves plus efficace car, par exemple, la contraction est problématique parce que nous pouvons l'appliquer à l'infini sans simplifier aucune formule.

En vue d'illustrer l'utilisation de  $G_{\text{IPL}}^1$ , nous fournissons une preuve du séquent  $(A \vee B) \supset C \vdash A \supset C$  :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{A, (A \vee B) \supset C \vdash A} [id]}{A, (A \vee B) \supset C \vdash (A \vee B)} [V_R^1]}{A, (A \vee B) \supset C \vdash C} [\supset_L]}{\frac{A, (A \vee B) \supset C \vdash C}{(A \vee B) \supset C \vdash A \supset C} [\supset_R]} [id]$$

Précisons qu'il est possible d'avoir un calcul similaire en utilisant des séquents multi-conclusions. À ce propos, le calcul  $G_{\text{IPL}}^1$  n'est que la version mono-conclusion du calcul introduit par Dragalin [42].

### 1.4.2 Correction et complétude

La correction de  $G_{\text{IPL}}^1$  peut être démontrée en utilisant la sémantique de Kripke de la même manière que dans le cas de  $DN_{\text{IPL}}$  : démontrer que pour chaque règle de  $G_{\text{IPL}}^1$ , si sa conclusion a un contre-modèle, alors au moins une de ses prémisses en a aussi un. Il est également possible de la démontrer en utilisant la correction du système  $DN_{\text{IPL}}$ . Assurément, si tout séquent prouvable dans  $G_{\text{IPL}}^1$  a une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ , alors  $G_{\text{IPL}}^1$  est correct. Un des points importants d'une démonstration de cette manière est fondé sur l'admissibilité de la règle de coupure  $[Cut]$  dans  $DN_{\text{IPL}}$  : si les deux séquents  $\Gamma \vdash A$  et  $\Gamma, A \vdash C$  ont des preuves dans  $DN_{\text{IPL}}$ , alors  $\Gamma \vdash C$  en a aussi une. Une démonstration de l'admissibilité de la coupure peut être décrite de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \quad \cdots \frac{}{\Gamma, \Gamma_1, A \vdash A} [id] \quad \cdots \frac{}{\Gamma, \Gamma_k, A \vdash A} [id] \quad \cdots \\ \Gamma \vdash A \qquad \qquad \qquad \mathcal{D}_2 \\ \qquad \qquad \qquad \Gamma, A \vdash C \\ \downarrow \\ \mathcal{D}_1[\Gamma_1] \quad \mathcal{D}_1[\Gamma_k] \\ \cdots \Gamma, \Gamma_1 \vdash A \cdots \Gamma, \Gamma_k \vdash A \cdots \\ \mathcal{D}_2 - A \\ \Gamma \vdash C \end{array}$$

où  $\mathcal{D}_1[\Gamma_i]$  est obtenue par l'ajout de  $\Gamma_i$  à tous les contextes des séquents dans la preuve  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2 - A$  est obtenue par la suppression de  $A$  de tous les contextes des séquents dans  $\mathcal{D}_2$ . Nous faisons remarquer que chaque axiome dans toute preuve de  $\Gamma, A \vdash C$  est soit de la forme  $\Gamma, \Gamma', A, C \vdash C$ , soit de la forme  $\Gamma, \Gamma', A \vdash A$ . Cela vient du fait que dans toute règle de  $DN_{\text{IPL}}$  les contextes des prémisses contiennent plus de formules que le contexte de la conclusion.

Nous expliquons maintenant brièvement comment démontrer la correction de  $G_{\text{IPL}}^1$ . Soit  $\mathcal{D}$  une preuve d'un séquent  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IPL}}^1$ . Nous démontrons par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$  que  $\mathcal{S}$  a aussi une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$ . L'idée consiste à considérer tous les cas de la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$ . Ainsi, l'application de l'hypothèse d'induction permet de déduire la prouvabilité des prémisses de cette règle dans  $DN_{\text{IPL}}$ . Étant donné que les règles droites dans  $G_{\text{IPL}}^1$  sont les mêmes que celles d'introduction dans  $DN_{\text{IPL}}$ , la démonstration est obtenue par simple application de l'hypothèse d'induction dans le cas où  $\mathcal{D}$  se termine par une application

d'une règle droite. Quant aux règles gauches, nous ne développons que le cas intéressant de  $[\supset_L]$ , à savoir quand  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma, A \supset B \vdash A} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma, A \supset B \vdash C} [\supset_L]$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, les deux séquents  $\Gamma, A \supset B \vdash A$  et  $\Gamma, B \vdash C$  ont des preuves dans  $DN_{\text{IPL}}$ . L'ajout de la formule  $A \supset B$  à tous les contextes des séquents dans une preuve quelconque de  $\Gamma, B \vdash C$  permet d'obtenir une preuve de  $\Gamma, A \supset B, B \vdash C$ . Donc, vu que la coupure  $[Cut]$  est admissible dans  $DN_{\text{IPL}}$ , la prouvabilité de  $\Gamma, A \supset B \vdash C$  dans  $DN_{\text{IPL}}$  est démontrée de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, A \supset B \vdash A \supset B}}{\Gamma, A \supset B \vdash A \supset B} [id] \quad \Gamma, A \supset B \vdash A}{\Gamma, A \supset B \vdash B} [\supset_E] \quad \Gamma, A \supset B, B \vdash C}{\Gamma, A \supset B \vdash C} [Cut]$$

La complétude peut également être démontrée en utilisant le système  $DN_{\text{IPL}}$ . Pour cela, il suffit de démontrer que tout séquent ayant une preuve dans  $DN_{\text{IPL}}$  a aussi une preuve dans  $G_{\text{IPL}}^1$ . Soit  $\mathcal{D}$  une preuve d'un séquent  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{\text{IPL}}$ . De la même façon que dans le cas de la correction, la démonstration que  $\mathcal{S}$  a une preuve dans  $G_{\text{IPL}}^1$  peut être faite par induction sur la structure de la preuve  $\mathcal{D}$  en considérant les cas de la dernière règle appliquée. Par exemple, si cette règle est  $[\supset_E]$ , alors  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash A \supset B} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} [\supset_E]$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, les deux séquents  $\Gamma \vdash A \supset B$  et  $\Gamma \vdash A$  ont des preuves dans  $G_{\text{IPL}}^1$ . De plus, de la prouvabilité de  $\Gamma \vdash A$  on peut déduire celle de  $\Gamma, A \supset B \vdash A$ . Ainsi, la prouvabilité de  $\Gamma \vdash B$  dans  $G_{\text{IPL}}^1$  est démontrée de la manière suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma, A \supset B \vdash A}}{\Gamma, A \supset B \vdash A} [id] \quad \frac{\overline{\Gamma, B \vdash B}}{\Gamma, B \vdash B} [id]}{\Gamma, A \supset B \vdash B} [\supset_L]}{\Gamma \vdash B} [Cut]$$

### 1.4.3 Élimination de la coupure

Comme nous l'avons mentionné précédemment, une des propriétés centrales des calculs des séquents est l'élimination de la coupure : tout séquent valide a une preuve qui ne contient pas d'application de la règle de coupure. Dans la littérature, cette propriété a été démontrée de différentes manières sémantiques et syntaxiques. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, la première démonstration syntaxique proposée par Gentzen [71]. Nous décrivons ici une de ses variantes [46] en vue de démontrer l'élimination de la coupure pour  $G_{\text{IPL}}^1$ .



Nous définissons d'abord quelques notions relatives à l'application de la règle de coupure. Soit  $\alpha$  une application de la règle de coupure dans une dérivation donnée :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma, A \vdash C}}{\Gamma \vdash C} [Cut]$$

Nous appelons **cut-formule** de  $\alpha$  la formule  $A$  et **cut-profondeur** de  $\alpha$  la somme des profondeurs des arbres  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

La démonstration de l'élimination de la coupure consiste à transformer les applications de la coupure en des applications ayant des cut-formules ou des cut-profondeurs plus petites. Autrement dit, la démonstration est par induction sur la structure de la cut-formule ainsi que sur la valeur de la cut-profondeur. Notons que parmi les outils utilisés dans l'élimination de la coupures suivant cette approche, il y a l'admissibilité avec préservation de la profondeur de l'affaiblissement ainsi que l'admissibilité de la contraction. En guise d'exemple, nous montrons maintenant comment cette transformation est opérée dans certains cas.

Si une application de la coupure est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma, B \supset D \vdash B} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma, D \vdash A}}{\Gamma, B \supset D \vdash A} [\supset_L] \quad \frac{\mathcal{D}_3}{\Gamma, B \supset D, A \vdash C}}{\Gamma, B \supset D \vdash C} [Cut]$$

alors elle est transformée de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma, B \supset D \vdash B}}{\Gamma, B \supset D, B \supset D \vdash B} [W] \quad \frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma, D \vdash A}}{\Gamma, B \supset D, D \vdash A} [W] \quad \frac{\frac{\mathcal{D}_3}{\Gamma, B \supset D, A \vdash C}}{\Gamma, B \supset D, D, A \vdash C} [W]}{\Gamma, B \supset D, D \vdash C} [Cut]}{\frac{\Gamma, B \supset D, B \supset D \vdash C}{\Gamma, B \supset D \vdash C} [\supset_L]} [C]$$

[W] et [C] correspondent à l'application de respectivement l'admissibilité avec préservation de la profondeur de l'affaiblissement et l'admissibilité de la contraction. La valeur de cut-profondeur avant la transformation est égale à 1 plus la somme du maximum des profondeurs de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , plus la profondeur de  $\mathcal{D}_3$ . Après transformation, la valeur de la cut-profondeur est égale à la somme des profondeurs de  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ . Ainsi, l'hypothèse d'induction peut être appliquée.

Si une application de la coupure est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} [\wedge_R] \quad \frac{\mathcal{D}_3}{\Gamma, A, B \vdash C}}{\Gamma \vdash C} [\wedge_L] [Cut]$$

alors elle est transformée de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma, B \vdash A} [W] \quad \frac{\mathcal{D}_3}{\Gamma, A, B \vdash C}}{\Gamma \vdash B \quad \Gamma, B \vdash C} [Cut] \quad \frac{}{\Gamma \vdash C} [Cut]$$

Par cette transformation, nous avons remplacé une application de la coupure ayant comme cut-formule  $A \wedge B$  par deux applications ayant  $A$  et  $B$  comme cut-formules, ce qui rend l'application de l'hypothèse d'induction possible.

#### 1.4.4 Propriété de la sous-formule et décidabilité

De même que la normalisation, l'élimination de la coupure dans le cas de  $G_{\text{IPL}}^1$  permet d'avoir la propriété de la sous-formule ainsi que celle de la séparation. Effectivement, il suffit de voir que les formules dans les prémisses de chaque règle, excepté celle de coupure, sont des sous-formules de formules de sa conclusion.

Nous décrivons ici une procédure de décision pour IPL en utilisant le calcul des séquents  $G_{\text{IPL}}^1$ . L'idée consiste à introduire une notion de *redondance* sur les dérivations de telle manière que tout séquent valide a une preuve qui n'est pas redondante [44]. La procédure correspond à un algorithme recherchant une preuve non redondante. Concernant la terminaison, elle est une conséquence de la propriété de la sous-formule.

La notion de redondance repose sur l'utilisation de l'admissibilité avec préservation de la taille de la contraction et de l'affaiblissement. Il est facile de voir que le calcul  $G_{\text{IPL}}^1$  vérifie l'admissibilité avec préservation de la taille de l'affaiblissement. Quant au cas de la contraction, nous avons besoin d'associer une restriction à l'axiome  $[id]$  :

$$\frac{}{\Gamma, p \vdash p} [id](p \text{ formule atomique})$$

Une **formule atomique** est soit une variable propositionnelle, soit  $\perp$ . Nous appelons  $G_{\text{IPL}}^{1'}$  le calcul obtenu à partir de  $G_{\text{IPL}}^1$  sans la règle de coupure par l'ajout de cette restriction à  $[id]$ . Précisons que  $G_{\text{IPL}}^{1'}$  est également complet pour IPL. En effet, il suffit de démontrer que le séquent  $\Gamma, A \vdash A$  a une preuve dans  $G_{\text{IPL}}^{1'}$  pour une formule arbitraire  $A$  (démonstration par induction sur la structure de  $A$ ).

Soit  $\leq_s$  une relation de préordre sur les séquents définie par  $\Gamma \vdash C \leq_s \Gamma' \vdash C'$  si  $set(\Gamma) \subseteq set(\Gamma')$  et  $C = C'$ . Nous définissons une relation d'équivalence  $\simeq_s$  sur les séquents par  $\mathcal{S} \simeq_s \mathcal{S}'$  si  $\mathcal{S} \leq_s \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}' \leq_s \mathcal{S}$ . Une dérivation dans  $G_{\text{IPL}}^{1'}$  est dite redondante si elle possède une branche contenant deux différents séquents  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  tels que  $\mathcal{S}$  est au dessus de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S} \leq_s \mathcal{S}'$ . En utilisant l'admissibilité avec préservation de la taille de la contraction et de l'affaiblissement, on sait que tout séquent valide a une preuve qui n'est pas redondante dans  $G_{\text{IPL}}^{1'}$ .

#### Procédure de décision pour IPL :

Soit  $\mathcal{S}$  un séquent.

**Étape 1 :** On commence par la dérivation contenant uniquement  $\mathcal{S}$  qui est l'unique dérivation non redondante de taille 1. Si cette dérivation est une preuve, alors  $\mathcal{S}$  est valide. Sinon on passe à l'étape suivante.

**Étape  $i+1$  :** On construit l'ensemble de toutes les dérivations non redondantes dans  $G_{\text{IPL}}^1$  de taille  $i+1$ . Si cet ensemble contient une preuve alors  $\mathcal{S}$  est valide. Sinon, si cet ensemble est vide, alors  $\mathcal{S}$  n'est pas valide, sinon on passe à l'étape suivante.

La correction de cette procédure résulte de la correction et de la complétude de  $G_{\text{IPL}}^1$  ainsi que du fait que tout séquent valide a une preuve qui n'est pas redondante. Quant à la terminaison elle est une conséquence de la propriété de la sous-formule. En effet, cette propriété permet de démontrer que l'ensemble de tous les séquents appartenant aux dérivations dans  $G_{\text{IPL}}^1$  d'un séquent quelconque  $\mathcal{S}$  peut être partitionné en un ensemble fini de classes d'équivalence de  $\simeq_{\mathcal{S}}$ .

### 1.4.5 Élimination de la contraction

Bien que le calcul  $G_{\text{IPL}}^1$  ne contienne pas la règle de contraction, nous ne pouvons pas considérer qu'elle est totalement éliminée car elle persiste dans la règle  $[\supset_L]$ . En fait, nous pouvons considérer que dans la règle  $[\supset_L]$  la formule  $A \supset B$  est dupliquée par une règle de contraction interne avant sa décomposition. Cela est reflété par le fait que la formule  $A \supset B$  ne disparaît pas de toutes les prémisses de  $[\supset_L]$ . Le principal problème causé par cette règle est l'absence de terminaison en matière de construction de preuve. En d'autres termes, il existe des dérivations infinies dans  $G_{\text{IPL}}^1$ . Considérons, par exemple, la dérivation suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\cdot}{\Gamma, A \supset B \vdash A} \quad \frac{\frac{\cdot}{\Gamma, B \vdash A}}{\cdot} [\supset_L]}{\Gamma, A \supset B \vdash A} [\supset_L]}{\Gamma, A \supset B \vdash A} [\supset_L]}{\Gamma, A \supset B \vdash A} [\supset_L]}{\Gamma, A \supset B \vdash A} [\supset_L]$$

Ce problème a été résolu par Dyckhoff [45] en introduisant le calcul  $G_{\text{IPL}}^2$  décrit en figure 1.3 (le nom originel de ce calcul est  $LJT$ ). L'idée consiste à remplacer la règle problématique  $[\supset_L]$  par les quatre règles  $[\supset_L^1]$ ,  $[\supset_L^2]$ ,  $[\supset_L^3]$  et  $[\supset_L^4]$ . La correction et la complétude de ce calcul ont été obtenues en démontrant qu'un séquent a une preuve dans  $G_{\text{IPL}}^1$  si et seulement si il en a une dans  $G_{\text{IPL}}^2$  [45]. Par exemple, la correction de la règle  $[\supset_L^1]$  est démontrée de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\cdot}{\Gamma, A, A \supset B \vdash A} [id]}{\Gamma, A, A \supset B \vdash B} [\supset_L] \quad \frac{\frac{\cdot}{\Gamma, A, B \vdash B} [id]}{\Gamma, A, A \supset B, B \vdash C} [W]}{\Gamma, A, A \supset B \vdash C} [Cut]$$

En ce qui concerne la terminaison, nous pouvons l'obtenir en démontrant que pour toute règle de  $G_{\text{IPL}}^2$ , sa conclusion est plus complexe que ses prémisses en utilisant une relation de complexité sur les séquents [45]. En effet, la **terminaison** pour un système de preuve correspond à l'absence d'une dérivation infinie.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, A \vdash A} [id] \quad \frac{}{\Gamma, \perp \vdash C} [\perp_L] \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} [\wedge_L] \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} [\wedge_R] \\
\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} [\vee_L] \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} [\vee_R^1] \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} [\vee_R^2] \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A, A \supset B \vdash C} [\supset_L^1] \quad \frac{\Gamma, A \supset (B \supset C) \vdash D}{\Gamma, (A \wedge B) \supset C \vdash D} [\supset_L^2] \\
\frac{\Gamma, A \supset C, B \supset C \vdash D}{\Gamma, (A \vee B) \supset C \vdash D} [\supset_L^3] \quad \frac{\Gamma, A, B \supset C \vdash B \quad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma, (A \supset B) \supset C \vdash D} [\supset_L^4] \\
\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} [\supset_R]
\end{array}$$

FIG. 1.3 – Calcul des séquents  $G_{\text{IPL}}^2$ 

Nous définissons la mesure de complexité  $\alpha$  sur les formules par :

- $\alpha(p) = \alpha(\perp) = 1$  ( $p$  est une variable propositionnelle)
- $\alpha(A \vee B) = \alpha(A \supset B) = \alpha(A) + \alpha(B) + 1$
- $\alpha(A \wedge B) = \alpha(A) + \alpha(B) + 2$

Il est clair que la relation  $>$ , définie sur les formules par  $A > B$  si  $\alpha(A) > \alpha(B)$ , est une relation bien fondée. En outre, nous définissons la relation  $>_m$  sur les multi-ensembles de formules par  $\Gamma >_m \Delta$  si  $\Delta$  est obtenu à partir de  $\Gamma$  par le remplacement d'une ou plusieurs formules de  $\Gamma$  par un nombre fini de formules, de sorte que chacune de ces formules a une complexité plus petite que la formule qu'elle remplace. Cette relation est étendue aux séquents par  $\Gamma \vdash C >_m \Delta \vdash D$  si  $\Gamma \cup \{C\} >_m \Delta \cup \{D\}$ . Le fait que la relation  $>$  est bien fondée implique que  $>_m$  est également bien fondée [40]. L'utilisation de la relation  $>_m$  permet de démontrer que pour toute règle de  $G_{\text{IPL}}^2$ , sa conclusion est plus complexe que toutes ses prémisses. Par exemple, dans le cas de la règle  $[\supset_L^2]$ , nous avons  $\alpha((A \wedge B) \supset C) = \alpha(A) + \alpha(B) + \alpha(C) + 3 > \alpha(A \supset (B \supset C)) = \alpha(A) + \alpha(B) + \alpha(C) + 2$ , ce qui implique que  $\Gamma, (A \wedge B) \supset C \vdash D >_m \Gamma, A \supset (B \supset C) \vdash D$ .

### 1.4.6 Génération contre-modèles

Partant du fait qu'il n'existe pas de dérivation infinie dans  $G_{\text{IPL}}^2$ , certains travaux ont proposé des procédures de décision avec génération de contre-modèles pour IPL fondées sur  $G_{\text{IPL}}^2$  [106, 127, 88]. En prenant un séquent en entrée, ces procédures renvoient soit une preuve dans  $G_{\text{IPL}}^2$ , soit un contre-modèle dans la sémantique de Kripke. De telles procédures ont été utilisées pour démontrer la décidabilité ainsi que la propriété des modèles finis pour IPL. Une logique vérifie la **propriété des modèles finis** si toute formule qui n'est pas valide dans cette logique a un contre-modèle fini.

Pour simplifier notre présentation, nous utilisons la logique CPL plutôt que IPL dans la

description du concept de la génération de contre-modèles à partir d'un calcul des séquents. Considérons le calcul  $G_{\text{CPL}}$  de CPL proposé par Dragalin [42] décrit en figure 1.4. Notons que ce calcul diffère de ceux décrit précédemment pour IPL par l'utilisation de la structure de séquent multi-conclusion.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A} [id] \quad \frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} [\perp_L] \\
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} [\wedge_L] \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} [\wedge_R] \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} [\vee_L] \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} [\vee_R] \\
\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \supset B \vdash \Delta} [\supset_L] \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} [\supset_R]
\end{array}$$

FIG. 1.4 – Calcul des séquents  $G_{\text{CPL}}$ 

Le premier constat que nous pouvons faire est que dans toute règle de  $G_{\text{CPL}}$ , la conclusion est plus complexe que toutes les prémisses. Dans la règle  $[\wedge_L]$ , par exemple, la formule  $A \wedge B$  est remplacée par les deux formules moins complexes  $A$  et  $B$ . Cela nous permet de déduire qu'il n'existe pas de dérivation infinie dans  $G_{\text{CPL}}$ . Précisons qu'il est possible de définir tous les opérateurs via uniquement  $\supset$  et  $\perp$  en utilisant les lois de De Morgan. Ainsi, un calcul pour CPL peut se réduire à  $[id]$ ,  $[\perp]$ ,  $[\supset_L]$  et  $[\supset_R]$ .

Une manière très simple de démontrer la correction et la complétude consiste à utiliser la sémantique algébrique de CPL : algèbre de Boole. Rappelons qu'un modèle dans l'algèbre de Boole correspond à une fonction de Prop dans  $\{0, 1\}$ . L'extension d'un modèle  $\mathcal{B}$  aux formules est obtenue par  $\mathcal{B}(\perp) = 0$  ainsi que via les *tables de vérité* associées aux opérateurs :

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A$	$B$	$A \vee B$	$A$	$B$	$A \supset B$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

La table de l'implication nous renseigne, par exemple, que si  $\mathcal{B}(A) = 1$  et  $\mathcal{B}(B) = 0$ , alors  $\mathcal{B}(A \supset B) = 0$ . Une formule  $A$  est valide dans CPL, si pour tout modèle  $\mathcal{B}$  on a  $\mathcal{B}(A) = 1$ .

Nous décrivons maintenant une procédure de décision pour CPL avec génération de contre-modèles. L'idée repose sur le fait que les règles de  $G_{\text{CPL}}$  sont fortement inversibles.

Une règle est **inversible** si la non validité d'une de ses prémisses implique forcément la non validité de sa conclusion. Elle est **fortement inversible** si tout contre-modèle d'une quelconque prémisses et forcément un contre-modèle de la conclusion.

Nous démontrons, par exemple, la forte inversibilité de la règle  $[\wedge_R]$ . Soit  $\mathcal{B}$  un contre-modèle de  $\Gamma \vdash \Delta, A$  (resp.  $\Gamma \vdash \Delta, B$ ). Alors on a  $\mathcal{B}(A) = 0$  (resp.  $\mathcal{B}(B) = 0$ ). Par conséquent, on obtient  $\mathcal{B}(A \wedge B) = 0$  et on déduit que  $\mathcal{B}$  est un contre-modèle de  $\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B$ .

Nous appelons **séquent irréductible**, tout séquent qui ne peut être la conclusion d'aucune règles. Il est facile de démontrer que dans le cas de  $G_{\text{CPL}}$  un séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  est irréductible si et seulement si  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont des multi-ensembles de formules atomiques,  $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$  et  $\perp \notin \Gamma$ . Autrement dit, les séquents irréductibles sont les séquents qui ne sont pas des axiomes et qui ne contiennent que des formules atomiques. La spécificité des séquents irréductibles réside dans leur non validité dans CPL. En effet, soit  $\Gamma \vdash \Delta$  un séquent irréductible. Le modèle  $\mathcal{B}$  défini par :

$$\mathcal{B}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \Gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un contre-modèle de  $\Gamma \vdash \Delta$ .

Puisqu'il n'existe pas de dérivation infinie dans  $G_{\text{CPL}}$ , il est possible de construire en un temps fini pour tout séquent qui n'a pas de preuve, une dérivation finie dont au moins une feuille est étiquetée par un séquent irréductible. La forte inversibilité de toutes les règles implique que tout contre-modèle d'un séquent dans une dérivation de  $\mathcal{S}$  est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$ . En utilisant le fait que nous pouvons construire pour tout séquent irréductible un contre-modèle, nous obtenons une procédure de décision pour CPL avec génération de contre-modèles fondée sur  $G_{\text{CPL}}$ .

Considérons l'exemple du séquent non valide  $\mathcal{S} = p \supset q \vdash p \wedge q$  :

$$\frac{\frac{\frac{\vdash p, p \quad \vdash p, q}{\vdash p, p \wedge q} [\wedge_R] \quad \frac{\frac{\frac{\quad}{q \vdash p} [id] \quad q \vdash q}{q \vdash p \wedge q} [\wedge_R]}{q \supset q \vdash p \wedge q} [\wedge_R]}{p \supset q \vdash p \wedge q} [\wedge_R]}$$

Cette dérivation contient trois séquents irréductibles :  $\vdash p, p$ ,  $\vdash p, q$  et  $q \vdash p$ . Utilisons, par exemple, le séquent  $q \vdash p$  pour construire un contre-modèle de  $\mathcal{S}$ . Ce séquent nous fournit le contre-modèle  $\mathcal{B}$  défini par :  $\mathcal{B}(q) = 1$  et  $\mathcal{B}(r) = 0$  pour toute variable propositionnelle  $r \neq q$  ( $\mathcal{B}(p) = 0$ ).

## Conclusion

Dans ce chapitre dédié à la description des formalismes de déduction naturelle et de calcul des séquents, nous avons abordé différentes approches relatives aux démonstrations des propriétés importantes telles que la correction, la complétude, l'élimination de la coupure, la décidabilité, etc. Ces approches seront utilisées dans le cas de nos systèmes de preuve que nous définissons pour plusieurs logiques modales.

Dans nos travaux, nous nous intéressons à des logiques modales intuitionnistes et floues à travers le développement de systèmes de preuve suivant les formalismes de déduction naturelle et de calcul des séquents. L'idée repose sur l'utilisation de nouvelles structures *multi-contextuelles* généralisant celle de séquent qui sont plus appropriées au traitement de ces

logiques. Nous verrons en particulier que de telles structures permettront de définir des systèmes ayant les propriétés habituellement exigées (normalisation, élimination de la coupure, sous-formule, etc). En outre, nous utiliserons plusieurs de nos systèmes dans le développement de procédures de décision simples et efficaces.





## Chapitre 2

# Logiques modales intuitionnistes

### Introduction

Les logiques modales classiques jouent un rôle important en informatique. Elles sont, par exemple, un outil permettant de modéliser des systèmes informatiques comme les bases de données [32]. Il est à noter que nous nous intéressons uniquement aux logiques dites normales ou de Kripke. En fait, il existe un autre type de logiques modales classiques qui ne sont pas définies par une sémantique de mondes possibles [69].

Le développement en matière de modélisation et de formalisation logique ont fait émerger d'autres types de logiques modales, en particulier, celles intuitionnistes. Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement aux logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes connus sous les noms de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5.

Dans un premier temps, nous décrivons l'ensemble des logiques modales classiques formées à partir de toutes les combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Nous rappelons d'abord la syntaxe standard des formules dans les logiques modales. Ensuite, pour chaque logique modale classique que nous considérons, nous présentons sa sémantique de Kripke et également un système à la Hilbert. Puis nous montrons comment les énoncés de ces logiques se traduisent dans la logique classique de premier ordre.

Dans un deuxième temps, nous présentons l'approche utilisée dans l'introduction des versions intuitionnistes des logiques que nous considérons, ce qui nous mène à la sémantique de Kripke de chaque version. Nous terminons notre présentation de ces logiques modales intuitionnistes par la description d'un système à la Hilbert pour chaque logique.

Enfin, nous exposons les travaux existants dans la théorie de la preuve à travers les formalismes de déduction naturelle et de calcul des séquents en logiques modales classiques et intuitionnistes et nous positionnons nos contributions.

### 2.1 Logiques modales classiques

Dans cette section, nous décrivons un ensemble de logiques modales classiques. Après un rappel de la syntaxe des formules et de la sémantique de Kripke, nous abordons la théorie de la preuve à travers le formalisme de système à la Hilbert. Ensuite, nous exposons certains liens entre la logique classique de premier ordre et les logiques modales présentées.

### 2.1.1 Syntaxe des formules

Le langage des logiques modales est obtenu à partir de celui de la logique propositionnelle par l'ajout de deux opérateurs unaires, appelés modalités,  $\Box$  et  $\Diamond$ . Soit **Prop** un ensemble dénombrable de variables, appelées **variables propositionnelles**, dont les éléments seront notés par les lettres  $p, q, r$  etc. Les formules sont données par la grammaire suivante :

$$A ::= p \mid \perp \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \supset A \mid \Box A \mid \Diamond A$$

La négation, notée  $\neg$ , est définie en utilisant la constante  $\perp$  et l'opérateur  $\supset$  de la manière suivante :  $\neg A \triangleq A \supset \perp$ . Quant à l'équivalence, notée  $\leftrightarrow$ , elle est définie par  $A \leftrightarrow B \triangleq (A \supset B) \wedge (B \supset A)$ . En outre, la constante **vrai**, notée  $\top$ , est définie par  $\top \triangleq \perp \supset \perp$ .

Nous introduisons maintenant quelques notions syntaxiques qui seront utilisées dans la suite de ce document. Les sous-formules d'une formule donnée  $A$  sont définies comme suit :

- $A$  est une sous-formule de  $A$ ;
- si  $B \otimes C$  est une sous-formule de  $A$ , alors  $B$  et  $C$  le sont aussi, pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$ ;
- si  $\Box B$  est une sous-formule de  $A$ , alors  $B$  l'est aussi, pour  $\Box = \Box, \Diamond$ .

Nous définissons la fonction de degré d'imbrication, notée  $nest$ , comme suit :

- $nest(p) = nest(\perp) = 0$ ;
- $nest(A \otimes B) = \max(nest(A), nest(B))$ , pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$ ;
- $nest(\Box A) = nest(A) + 1$ , pour  $\Box = \Diamond, \Box$ .

En outre, nous définissons une mesure de complexité, notée  $|\cdot|$ , sur les formules par :

- $|p| = |\perp| = 1$ ;
- $|A \otimes B| = |A| + |B| + 1$ , pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$ ;
- $|\Box A| = |A| + 1$ , pour  $\Box = \Diamond, \Box$ .

### 2.1.2 Sémantique de Kripke

La sémantique de Kripke est également appelée la *sémantique de mondes possibles* de part la possibilité d'avoir des modèles avec plusieurs mondes. Ce dernier point traduit le fait que la valeur de vérité d'une proposition peut changer d'un monde à un autre. En d'autres termes, la notion de vérité est relative aux mondes. Par exemple, dans un ensemble de mondes correspondant aux villes de France, nous pouvons considérer que la proposition « il fait très froid » est vraie dans le monde « Nancy » et par contre fausse dans le monde « Marseille ». De plus, il existe une relation sur les mondes permettant d'exprimer le fait qu'un monde est accessible à partir d'un autre. Dans ce cadre, l'énoncé «  $\Box A$  est vraie dans un monde  $w$  » signifie que la proposition  $A$  est vraie dans tous les mondes accessibles à partir  $w$ . Tandis que l'énoncé «  $\Diamond A$  est vraie dans un monde  $w$  » signifie que  $A$  est vraie dans au moins un monde accessible à partir de  $w$ .

**Définition 2.1.1.** *Un modèle modal classique est un triplet  $(W, R, V)$  où  $W$  est un ensemble non vide de mondes,  $R$  est une relation binaire sur les mondes, appelée **relation d'accessibilité**, et  $V$  est une fonction de  $W$  dans  $2^{\text{Prop}}$  ( $2^{\text{Prop}}$  correspond à l'ensemble des sous-ensembles de **Prop**).*

À chaque modèle  $\mathcal{M} = (W, R, V)$ , on associe une relation  $\vDash_{\mathcal{M}}$ , appelée **relation de satisfaction**, entre  $W$  et l'ensemble des formules. En fait, l'expression  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  signifie que dans

le modèle  $\mathcal{M}$  la formule  $A$  est vraie dans le monde  $w$ . Cette relation est définie par induction sur la structure des formules de la manière suivante :

- $w \vDash_{\mathcal{M}} p$  si et seulement si  $p \in V(w)$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} \perp$  jamais ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} A \wedge B$  si et seulement si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} A \vee B$  si et seulement si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  ou  $w \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} A \supset B$  si et seulement si si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  alors  $w \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} \Box A$  si et seulement si pour tout  $w' \in W$ , si  $R(w, w')$  alors  $w' \vDash_{\mathcal{M}} A$  ;
- $w \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond A$  si et seulement si il existe  $w' \in W$  tel que  $R(w, w')$  et  $w' \vDash_{\mathcal{M}} A$ .

On dit qu'une formule  $A$  est valide dans  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  si  $w \vDash_{\mathcal{M}} A$  pour tout monde  $w$  dans  $W$ .

Les modèles modaux classiques définissent la validité dans la logique modale minimale  $K$  : une formule  $A$  est valide dans  $K$  si et seulement si  $A$  est valide dans tous les modèles modaux classiques [31].

Chaque nom dans l'ensemble  $\{T, B, 4, 5\}$  correspond à une propriété que doit satisfaire la relation d'accessibilité :

- ( $T$ ) Réflexivité :  $\forall w. R(w, w)$ .
- ( $B$ ) Symétrie :  $\forall w, w'. R(w, w') \supset R(w', w)$ .
- (4) Transitivité :  $\forall w, w', w''. (R(w, w') \wedge R(w', w'')) \supset R(w, w'')$ .
- (5) Euclidianité :  $\forall w, w', w''. (R(w, w') \wedge R(w, w'')) \supset R(w', w'')$ .

Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous définissons la classe de modèles  $\mathcal{C}_{\text{Th}}$  comme les modèles modaux classiques dont les relations d'accessibilité satisfont les propriétés associées aux éléments de  $\text{Th}$ . Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous appelons  $\text{KTh}$  la logique définie par la classe de modèles  $\mathcal{C}_{\text{Th}}$  : Une formule  $A$  est valide dans  $\text{KTh}$  si et seulement si  $A$  est valide dans tous les modèles de  $\mathcal{C}_{\text{Th}}$  [31].

Notons qu'il est possible d'avoir deux sous-ensembles différents de  $\{T, B, 4, 5\}$  définissant une même classes de modèles :

- $\mathcal{C}_{\{T,5\}}, \mathcal{C}_{\{T,B,4\}} = \mathcal{C}_{\{T,B,5\}} = \mathcal{C}_{\{T,4,5\}} = \mathcal{C}_{\{T,B,4,5\}}$
- $\mathcal{C}_{\{B,4\}} = \mathcal{C}_{\{B,5\}} = \mathcal{C}_{\{B,4,5\}}$

En effet, une relation d'équivalence, par exemple, peut être définie comme une relation réflexive, transitive et symétrique ou une relation réflexive et euclidienne. Rappelons que dans la littérature, les noms les plus répandus des logiques  $\text{K}\{T\}$ ,  $\text{K}\{T, 4\}$  et  $\text{K}\{T, 5\}$  sont respectivement  $\text{T}$ ,  $\text{S4}$  et  $\text{S5}$ .

Chaque logique  $\text{KTh}$  satisfait la **propriété des modèles finis** dans la sémantique de Kripke, à savoir que toute formule non valide a un contre-modèle avec un ensemble de mondes fini. Une des conséquences directes de cette propriété est que toutes ces logiques sont décidables [17].

Précisons que dans les logiques modales classiques, tous les opérateurs logiques peuvent être définis uniquement en fonction de  $\wedge$ ,  $\Box$  et  $\neg$  (lois de De Morgan) :

- $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \supset B = \neg A \vee B$
- $\diamond A = \neg \Box \neg A$

### 2.1.3 Systèmes à la Hilbert

Les systèmes à la Hilbert correspondent à un formalisme de preuve selon une forme proposée par le mathématicien David Hilbert. Dans ce formalisme, la notion de vérité dans un cadre logique donné est caractérisée par la présence d'une structure syntaxique appelée preuve (pour plus de détails voir chapitre 1). En dépit du manque d'efficacité en matière d'automatisation de la construction de preuves, les systèmes à la Hilbert possèdent le pouvoir de décrire simplement de nombreuses logiques, en particulier, les logiques modales. C'est donc dans cette optique que nous les utilisons ici dans la description des logiques que nous considérons.

Un système à la Hilbert pour la logique modale classique minimale  $\mathcal{K}$ , appelé  $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ , est défini comme suit :

1. les tautologies de la logique propositionnelle classique CPL.
2.  $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ .
3.  $\diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$ .

$$\frac{A \supset B \quad A}{B} [mp] \quad \frac{A}{\Box A} [nec]$$

$[mp]$  est la règle d'inférence connue sous le nom de **modus ponens** et  $[nec]$  est celle connue sous le nom de **nécessitation**. En guise d'exemple, nous fournissons une preuve de  $\Box p \supset \Box(q \supset p)$  :

$$\frac{\Box(p \supset (q \supset p)) \supset (\Box p \supset \Box(q \supset p)) \quad \frac{p \supset (q \supset p)}{\Box(p \supset (q \supset p))} [nec]}{\Box p \supset \Box(q \supset p)} [mp]$$

Nous faisons remarquer qu'un système à la Hilbert équivalent à  $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$  peut être obtenu en remplaçant (1) par un quelconque ensemble d'axiomes définissant CPL.

À chaque nom dans l'ensemble  $\{T, B, 4, 5\}$  on associe un axiome de la manière suivante :

- (T)  $\Box A \supset A$
- (B)  $A \supset \Box \diamond A$
- (4)  $\Box A \supset \Box \Box A$
- (5)  $\diamond A \supset \Box \diamond A$

Pour tout sous-ensemble  $\text{Th}$  de  $\{T, B, 4, 5\}$ , la logique  $\mathcal{K}\text{Th}$  est définie par le système à la Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{K}\text{Th}}$  obtenu par l'ajout des axiomes dont les noms sont dans  $\text{Th}$  à  $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$  [31].

La liste des logiques modales classiques que nous considérons est loin d'être exhaustive [17]. Par exemple, l'axiome de la confluence ( $\diamond \Box A \supset \Box \diamond A$ ) ainsi que celui de la sérialité ( $\Box A \supset \diamond A$ ) permettent de définir d'autres logiques.

### 2.1.4 Liens avec la logique classique de premier ordre

Maintenant, nous exposons brièvement des traductions simples des énoncés des précédentes logiques dans la logique classique de premier ordre CFO. Pour plus de détails sur les liens qui existent entre les logiques modales classiques et CFO voir [124, 17].

Le langage des logiques de premier ordre contient les opérateurs logiques  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\exists$  et  $\forall$ , un ensemble de variables, des symboles pour des relations  $n$ -aires pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et des symboles pour des fonctions  $n$ -aires pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La syntaxe des formules est donnée par la grammaire suivante :

$$\mathcal{F} = P(t_1, \dots, t_n) \mid \perp \mid \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \vee \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \supset \mathcal{F} \mid \exists x.\mathcal{F} \mid \forall x.\mathcal{F}$$

où  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes.

Afin de définir des traductions, on associe à chaque variable propositionnelle  $p$  un unique symbole de prédicat (symbole de relation) unaire  $P(\cdot)$ . Soient  $A$  une formule modale et  $x_i$  une variable avec  $i \in \mathbb{N}$ .

Nous définissons la formule  $Tr(A, x_i)$  ayant au maximum une seule variable libre comme suit :

$$\begin{aligned} Tr(\perp, x_i) &= \perp \\ Tr(p, x_i) &= P(x_i) \\ Tr(B \wedge C, x_i) &= Tr(B, x_i) \wedge Tr(C, x_i) \\ Tr(B \vee C, x_i) &= Tr(B, x_i) \vee Tr(C, x_i) \\ Tr(B \supset C, x_i) &= Tr(B, x_i) \supset Tr(C, x_i) \\ Tr(\diamond B, x_i) &= \exists x_{i+1}.R(x_i, x_{i+1}) \wedge Tr(B, x_{i+1}) \\ Tr(\square B, x_i) &= \forall x_{i+1}.R(x_i, x_{i+1}) \supset Tr(B, x_{i+1}) \end{aligned}$$

où  $R$  est un symbole de prédicat binaire qui a pour rôle la représentation de la relation d'accessibilité. L'indexation des variables avec des entiers naturels a pour but l'utilisation d'une variable fraîche pour chaque quantificateur. Par exemple,  $Tr(\square p \supset p, x_0) = (\forall x_1.R(x_0, x_1) \supset P(x_1)) \supset P(x_0)$ .

La fonction  $Tr$  est une traduction de la logique  $\mathbf{K}$  dans la logique classique de premier ordre. Effectivement, une formule  $A$  est valide dans  $\mathbf{K}$  si et seulement si  $Tr(A, x_0)$  est valide dans CFO. En ce qui concerne les autres logiques, on a pour tout  $\mathbf{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , une formule  $A$  est valide dans  $\mathbf{KTh}$  si et seulement si  $(P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \supset Tr(A, x_0)$  est valide dans CFO où  $P_1, \dots, P_k$  sont les propriétés associées aux axiomes dans  $\mathbf{Th}$ . En guise d'exemple, dans  $\mathbf{K}\{T\}$ , la traduction de  $\square p \supset p$  est  $(\forall x.R(x, x)) \supset ((\forall x_1.R(x_0, x_1) \supset P(x_1)) \supset P(x_0))$ .

Notons que toutes les logiques modales  $\mathbf{KTh}$  sont des extensions conservatives du fragment propositionnel de la logique classique CPL. Cela signifie que toutes les tautologies de CPL sont valides dans  $\mathbf{KTh}$ . Pour se convaincre, il suffit de constater que ces dernières sont des axiomes de  $\mathbf{KTh}$  dans les systèmes à la Hilbert que nous venons de décrire.

## 2.2 Logiques modales intuitionnistes

Avant d'aborder les logiques modales intuitionnistes, abordons quelques points essentiels sur la logique intuitionniste. Cette dernière peut être considérée comme une formalisation caractérisant les principes de raisonnement dans les mathématiques constructives de

Brouwer [8, 122, 123]. Une description simple de cette logique consiste à la présenter comme la logique classique moins la loi du tiers exclu ( $A \vee \neg A$ ). Dans la logique intuitionniste, la proposition  $A \vee \neg A$  n'est vraie que si on a une preuve de  $A$  ou une preuve de  $\neg A$ . En effet, dans cette logique, une proposition est vraie si elle a une preuve et fausse si elle n'en a aucune. Tandis que dans la logique classique, la proposition  $A \vee \neg A$  est toujours vraie même en l'absence d'une preuve de  $A$  et d'une preuve de  $\neg A$ .

La logique intuitionniste trouve son application principale en informatique dans l'isomorphisme de Curry-Howard [82]. Ce dernier établit une correspondance entre programmes informatiques dans des langages fonctionnels et preuves dans des systèmes formelles en considérant les formules comme des types de fonctions et les preuves comme des programmes [73, 87]. Cela place la logique intuitionniste au centre du développement de la sûreté et de la fiabilité de la programmation fonctionnelle.

Les logiques modales intuitionnistes peuvent être vues comme le résultat de l'association des principes du raisonnement intuitionniste aux logiques modales. Ces logiques ont des applications importantes en informatique. Par exemple, dans l'expression de propriétés sur des systèmes communicants [120], dans la vérification formelle de l'architecture du matériel informatique [48] et dans la définition de langages de programmation [37, 101, 83].

Dans cette partie, nous présentons les versions intuitionnistes des logiques modales décrites précédemment suivant l'approche de Simpson [119]. Dans un premier temps, nous décrivons brièvement cette approche. Ensuite, nous rappelons la sémantique de Kripke de chaque logique. Enfin, nous décrivons des systèmes à la Hilbert pour ces logiques.

### 2.2.1 Approche de Simpson

Dans son approche, Simpson définit un ensemble d'obligations que doit satisfaire toute logique modale intuitionniste. Ces obligations sont motivées par des liens entre la logique classique et les logiques modales classiques d'un côté, et d'un autre côté par certaines propriétés de la logique intuitionniste.

Étant donné que toutes les tautologies de CPL sont des axiomes pour les logiques modales classiques, une première obligation consiste à exiger que toutes les formules valides dans le fragment propositionnel de la logique intuitionniste IPL doivent être des axiomes pour toutes les logiques modales intuitionnistes.

Une deuxième obligation est que l'ajout de la loi du tiers exclu ( $A \vee \neg A$ ) à toute version intuitionniste d'une logique modale classique doit produire cette dernière. Cette obligation résulte du fait que l'ajout de la loi du tiers exclu à la logique intuitionniste produit la logique classique.

Rappelons qu'une logique (contenant a fortiori la disjonction) satisfait la **propriété de disjonction** si la validité de  $A \vee B$  implique celle de  $A$  ou celle de  $B$ . Cette propriété est satisfaite dans la logique intuitionniste, alors qu'elle ne l'est pas dans la logique classique car, par exemple, la formule  $A \vee \neg A$  est valide sans que forcément  $A$  et  $\neg A$  le soient. En fait, cette propriété traduit le fait que pour que  $A \vee B$  soit valide dans la logique intuitionniste, il faut exhiber soit une preuve de  $A$ , soit une preuve de  $B$ . Ainsi, la propriété de disjonction est une autre obligation que doivent satisfaire les logiques modales intuitionnistes.

Dans la logique classique, il est possible de définir le quantificateur  $\forall$  en fonction de  $\exists$  et vice versa ( $\forall x.A = \neg\exists x.\neg A$  et  $\exists x.A = \neg\forall x.\neg A$ ) ce qui n'est pas le cas dans la logique intuitionniste. Quand il n'est pas possible de définir un opérateur en fonction d'un autre, on dira qu'ils sont indépendants. Comme nous l'avons vu dans la traduction de logiques modales classiques dans la logique classique (voir section 2.1.4), l'opérateur  $\diamond$  coïncide avec un quantificateur existentiel et  $\square$  avec un quantificateur universel. Cela induit l'obligation que les opérateurs  $\square$  et  $\diamond$  doivent être indépendants dans les logiques modales intuitionnistes.

La dernière obligation de Simpson est informelle mais considérée comme la plus fondamentale. Elle exige que les modalités aient une explication compréhensible en terme de raisonnement intuitionniste suivant laquelle les logiques modales intuitionnistes sont correctes et complètes. En fait cette obligation exprime le fait que les liens entre les logiques modales intuitionnistes et la logique intuitionniste doivent être les mêmes que celles entre les logiques modales classiques et la logique classique. Par conséquent, nous pouvons dire que toutes les autres obligations découlent de cette dernière.

La première logique portant le nom de logique modale intuitionniste est celle proposée dans [53]. Cependant, elle ne respecte pas une des obligations de Simpson, car l'ajout de la loi du tiers exclu ne produit pas de logique modale classique. La première logique modale intuitionniste satisfaisant les obligations de Simpson a été introduite par Prior dans [112]. Elle correspond à la version intuitionniste de la logique **S5**. Plusieurs autres approches ont été utilisées dans la définition de logiques modales intuitionnistes [110, 49, 47, 51] et les versions intuitionnistes de chaque logique modale classique formée à partir d'une combinaison de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 qui en résultent sont souvent différentes. Toutefois, presque tous les fragments privés de  $\diamond$  de ces dernières sont les mêmes.

### 2.2.2 Sémantique de Kripke

Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous appelons **IKTh** la logique modale intuitionniste correspondant à la logique **KTh**. Nous utilisons parfois les noms **IT**, **IB4**, **IS4** et **IS5** pour les versions intuitionnistes de respectivement **T**, **K**{ $B, 4$ }, **S4**, **S5**.

**Définition 2.2.1.** *Un modèle modal intuitionniste est un quadruplet*

$$(W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$$

tel que

- $W$  est un ensemble non vide de **mondes de Kripke** ;
- $\leq$  est une relation d'ordre partiel sur  $W$  ;
- pour tout  $w \in W$ ,  $D_w$  est un ensemble non vide de **mondes modaux** tel que  $w \leq w'$  implique  $D_w \subseteq D_{w'}$  ;
- pour chaque  $w \in W$ ,  $R_w$  est une relation binaire sur  $D_w$ , appelée  **$w$ -relation d'accessibilité**, telle que  $w \leq w'$  implique  $R_w \subseteq R_{w'}$  ;
- pour chaque  $w \in W$ ,  $V_w$  est une fonction de  $D_w$  dans  $2^{\text{Prop}}$  telle que  $w \leq w'$  implique  $V_w(d) \subseteq V_{w'}(d)$ .

Notons la présence de deux types de mondes dans la structure de modèle modal intuitionniste, à savoir ceux de Kripke et ceux modaux. En ce qui concerne les mondes de Kripke, ils

correspondent à la base intuitionniste. Effectivement, la structure de modèle de Kripke pour la logique intuitionniste contient également un ensemble de mondes partiellement ordonné. Quant aux mondes modaux, ils correspondent à l'aspect modal comme dans la structure de modèle modal classique.

De la même façon que dans le cas classique, nous associons à chaque modèle modal intuitionniste une relation de satisfaction.

Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle modal intuitionniste,  $w \in W$ ,  $d \in D_w$  et  $A$  une formule. La relation  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  est définie par induction sur la structure de  $A$  comme suit :

- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} p$  si et seulement si  $d \in V_w(p)$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \perp$  jamais ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \wedge B$  si et seulement si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \vee B$  si et seulement si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  ou  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \supset B$  si et seulement si pour tout  $w' \geq w$ ,  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} A$  implique  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Box A$  si et seulement si pour tout  $w' \geq w$  et pour tout  $d' \in D_{w'}$ ,  $R_w(d, d')$  implique  $w', d' \vDash_{\mathcal{M}} A$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond A$  si et seulement si il existe  $d' \in D_w$  tel que  $R_w(d, d')$  et  $w, d' \vDash_{\mathcal{M}} A$ .

une formule  $A$  est valide dans un modèle  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  pour tout  $w \in W$  et pour tout  $d \in D_w$ .

Pour  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , un modèle  $(W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  est considéré comme faisant partie de la classe de modèles  $\mathcal{IC}_{\text{Th}}$  si pour tout  $w \in W$ ,  $R_w$  satisfait les propriétés associées aux éléments de  $\text{Th}$ . Une formule  $A$  est valide dans  $\text{IKTh}$  si et seulement si  $A$  est valide dans tous les modèles de  $\mathcal{IC}_{\text{Th}}$  [119].

De même que dans le cas de la logique intuitionniste, la relation de satisfaction vérifie la propriété de monotonie de Kripke :

**Proposition 2.2.1** (Monotonie). *Si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w \leq w'$ , alors  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} A$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . On suppose que  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w \leq w'$ . Le cas de  $A = \perp$  est trivial. Si  $A$  est une variable propositionnelle  $p$ , alors  $p \in V_{w'}(d)$  car  $w \leq w'$  implique  $V_w(d) \subseteq V_{w'}(d)$ . Donc, on obtient  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} p$ .

Si  $A = B \wedge C$  alors on a  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  et  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} C$ . En appliquant l'hypothèse d'induction, on a  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} B$  et  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} C$  ( $B$  et  $C$  sont structurellement moins complexe que  $B \wedge C$ ). Ainsi, on obtient  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} B \wedge C$ . Le cas de  $A = B \vee C$  est similaire.

Si  $A = B \supset C$  alors on a pour tout  $w'' \geq w$ ,  $w'', d \vDash_{\mathcal{M}} B \supset C$ . Par conséquent, on a  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} B \supset C$ . Le cas de  $A = \Box B$  est similaire.

Si  $A = \Diamond B$  alors il existe  $d' \in D_w$  tel que  $R_w(d, d')$  et  $w, d' \vDash_{\mathcal{M}} B$ . En utilisant  $w' \geq w$ , on obtient  $R_{w'}(d, d')$ . Par application de l'hypothèse d'induction, on a  $w', d' \vDash_{\mathcal{M}} B$ . Donc, on en déduit que  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond B$ .  $\square$

En ce qui concerne la propriété des modèles finis, aucune des logiques  $\text{IKTh}$  ne satisfait cette propriété dans la sémantique de Kripke [105, 119]. Dans ce qui suit nous utilisons la formule  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  pour démontrer l'absence de cette propriété.

**Proposition 2.2.2.**  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  est valide dans tout modèle modal intuitionniste fini.



*Démonstration.* On fait une démonstration par l'absurde. Rappelons au début que  $\neg p = p \supset \perp$ . Soit  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un contre-modèle fini ( $W$  fini) de  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$ . Cela signifie qu'il existe  $w \in W$  et  $d \in D_w$  tels que  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Box \neg \neg p$  et  $w, d \not\vDash_{\mathcal{M}} \neg \neg \Box p$ . On définit une  $w$ -feuille comme un monde  $w'$  supérieur à  $w$  tel qu'il n'existe pas de  $w'' \in W$  avec  $w'' > w'$ . Soit  $w'$  une  $w$ -feuille. Étant donné que  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Box \neg \neg p$ , on a pour tout  $d' \in D_{w'}$  tel que  $R_{w'}(d, d')$ ,  $w', d' \vDash_{\mathcal{M}} \neg \neg p$ . Par conséquent, pour tout  $d' \in D_{w'}$  tel que  $R_{w'}(d, d')$ ,  $w', d' \vDash_{\mathcal{M}} p$  car il n'existe pas de monde strictement supérieur à  $w'$ . Ainsi, on a  $w', d \vDash_{\mathcal{M}} \Box p$ , ce qui implique que  $w', d \not\vDash_{\mathcal{M}} \neg \Box p$ . En utilisant la monotonie de Kripke (proposition 2.2.1), pour tout  $w'' \geq w$  on a  $w'', d \not\vDash_{\mathcal{M}} \neg \Box p$ . On en déduit que  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \neg \neg \Box p$  et on obtient une contradiction.  $\square$

**Proposition 2.2.3.**  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  n'est valide dans aucune logique IKTh.

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que cette formule n'est pas valide dans IS5 car une conséquence directe de cela est que cette dernière n'est valide dans aucune autre logique IKTh.

Soit  $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \leq, \{D_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}})$  est un modèle modal intuitionniste où

- pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $D_i = \{d_0, \dots, d_i\}$ ;
- pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $d, d' \in D_i$ , on a  $R_i(d, d')$ ;
- pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $0 \leq j < i$ ,  $V_i(d_j) = \{p\}$ ;
- pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $V_i(d_i) = \emptyset$ .

$\mathcal{M}$  appartient à la classe des modèles associés à IS5 car toutes les relations d'accessibilité sont des relations d'équivalence.

Étant donné que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $d \in D_i$ , on a  $j, d \vDash_{\mathcal{M}} p$  pour tout  $j > i$ . On en déduit que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $d \in D_i$ ,  $i, d \not\vDash \neg p$ . Ainsi on a  $0, d_0 \not\vDash \Box \neg \neg p$ . De plus, on a pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i, d_i \not\vDash p$  ce qui implique que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i, d_0 \not\vDash \Box p$ . Par conséquent, on a  $0, d_0 \vDash \neg \Box p$ . Donc, on a  $0, d_0 \not\vDash \neg \neg \Box p$  et on en déduit que  $0, d_0 \not\vDash \Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$ .  $\square$

Cependant, dans d'autres sémantiques certaines des logiques IKTh satisfont la propriété des modèles finis. Dans la sémantique algébrique de IS5 proposée par Bull dans [24], la propriété des modèles finis a été démontrée par Fischer Servi dans [50]. En ce qui concerne les logiques IK, IT, IK $\{B\}$  et IK $\{T, B\}$ , la propriété des modèles finis dans la sémantique bi-relationnelle a été démontrée par Simpson dans [119].

Comme les logiques IK, IT, IK $\{B\}$ , IK $\{T, B\}$  et IS5 satisfont la propriété des modèles finis, elles sont toutes décidables. Quant aux autres logiques, le problème de décidabilité ainsi que celui de la propriété des modèles finis restent des questions ouvertes.

Notons que les logiques modales intuitionnistes présentées ici se traduisent dans la logique intuitionniste du premier ordre IFO de la même manière que celles classiques dans CFO (voir section 2.1.4). Par exemple, une formule  $A$  est valide dans IK si et seulement si  $Tr(A, x_0)$  est valide dans IFO [119].

### 2.2.3 Systèmes à la Hilbert

Un système à la Hilbert pour la logique IK, appelé  $\mathcal{H}_{IK}$ , est défini de la manière suivante :

- Les théorèmes du fragment propositionnel de la logique intuitionniste IPL.
- $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ .
- $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$ .
- $\Diamond \perp \supset \perp$ .

- $\diamond(A \vee B) \supset (\diamond A \vee \diamond B)$ .
- $(\diamond A \supset \Box B) \supset \Box(A \supset B)$ .

$$\frac{A \supset B \quad A}{B} [mp] \quad \frac{A}{\Box A} [nec]$$

Ce système a été proposé par Plotkin et Stirling dans [107]. Un autre système équivalent a été proposé par Fischer Servi dans [52].

Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , un système à la Hilbert pour la logique  $\text{IKTh}$ , appelé  $\mathcal{H}_{\text{IKTh}}$ , est obtenu par l'ajout à  $\mathcal{H}_{\text{IK}}$  des axiomes correspondant aux éléments de  $\text{Th}$  parmi les suivants [119] :

- (*T*)  $(\Box A \supset A) \wedge (A \supset \diamond A)$ .
- (*B*)  $(\diamond \Box A \supset A) \wedge (A \supset \Box \diamond A)$ .
- (4)  $(\Box A \supset \Box \Box A) \wedge (\diamond \diamond A \supset \diamond A)$ .
- (5)  $(\diamond \Box A \supset \Box A) \wedge (\diamond A \supset \Box \diamond A)$ .

Les axiomes *T*, *B*, 4 et 5 dans le cas intuitionniste ont la même forme, voire les mêmes, que ceux dans le cas classique. En guise d'exemple, considérons l'axiome *T* dans le cas classique  $\Box A \supset A$ . Cette axiome implique que la formule  $\Box \neg A \supset \neg A$  est valide. Comme on a  $\Box A \leftrightarrow \neg \diamond \neg A$  et  $\neg \neg A \leftrightarrow A$ , on obtient  $\neg \diamond A \supset \neg A$ , ce qui n'est que la contraposée de  $A \supset \diamond A$ . Cependant, l'ajout de  $A \supset \diamond A$  à l'axiome *T* dans le cas intuitionniste est la conséquence de l'indépendance des deux opérateurs  $\Box$  et  $\diamond$ .

Précisons que plusieurs des systèmes à la Hilbert que nous venons de décrire correspondent aux deux logiques **IB4** et **IS5** :

- **IS5** =  $\text{IK}\{T, 5\}, \text{IK}\{T, B, 4\}, \text{IK}\{T, B, 5\}, \text{IK}\{T, 4, 5\}, \text{IK}\{T, B, 4, 5\}$
- **IB4** =  $\text{IK}\{B, 4\}, \text{IK}\{B, 5\}, \text{IK}\{B, 4, 5\}$

## 2.3 Théorie de la preuve et logiques modales intuitionnistes

Dans cette section, nous exposons brièvement les travaux existants en matière de déduction naturelle et de calcul des séquents dans les logiques modales décrites précédemment. Cela est dans l'optique de situer nos travaux et leurs contributions.

### 2.3.1 Dédution naturelle et logiques modales

Des systèmes de déduction naturelle pour les logiques **S4** et **S5** ainsi que pour des versions intuitionnistes de ces dernières ont été proposés par Prawitz dans [110]. Ils sont obtenus par l'extension de ceux des logiques **IPL** et **CPL** avec des règles d'introduction et d'élimination pour les opérateurs  $\Box$  et  $\diamond$ . Notons que les logiques modales intuitionnistes de Prawitz ne sont autres que les logiques résultant du remplacement des règles de **CPL** par celles de **IPL** dans les systèmes de **S4** et **S5**. En réalité, aucune interprétation en matière de raisonnement intuitionniste n'a été fournie pour ces logiques. Par comparaison avec les logiques **IS4** et **IS5**, elles se rejoignent uniquement sur les fragments privés de  $\diamond$ . Une autre formulation de la déduction naturelle améliorant le système de Prawitz pour sa version intuitionniste de **S4** a été proposée par Bierman et De Paiva dans [12, 13]. De même, une formulation similaire a été

utilisée pour améliorer le système de **S4** dans [35].

Bull et Segerberg notent la difficulté d'étendre l'approche de Prawitz aux autres logiques modales dans [27]. Cette difficulté est mise en exergue dans le cas de la logique **K** dans [9]. Ainsi, d'autres approches plus adaptées aux logiques modales ont émergé. Nous pouvons citer l'approche qui correspond à la déduction naturelle dans le style de Fitch [54]. Cette dernière a permis de proposer des systèmes pour plusieurs logiques modales classiques [55, 118, 56]. À la différence du style de Gentzen où les preuves sont sous forme d'arbres, ces dernières sont linéaires dans le style de Fitch. Dans le cas propositionnel, la déduction naturelle dans ce style est fondée sur la notion de *preuve subordonnée* qui correspond à une preuve qui fait partie d'une autre preuve. Autrement dit, une preuve dans le style de Fitch correspond à une imbrication de preuves. Par exemple, en vue de prouver une formule  $A \supset B$ , on initie une preuve subordonnée dans le but de prouver  $B$  à partir de l'hypothèse  $A$ . Après que ce but soit atteint, on ajoute  $A \supset B$  à la preuve d'origine. L'extension à des logiques modales a été faite par l'ajout d'une nouvelle construction appelée *preuve subordonnée stricte* afin de traiter l'opérateur  $\Box$ . D'un point de vue sémantique, une preuve (subordonnée (stricte)) vise à prouver la vérité d'une formule dans un monde donné  $w$  et ses preuves subordonnées strictes sont des preuves de formules dans des mondes arbitraires accessibles à partir de  $w$ . En fait, la relation d'accessibilité est intégrée implicitement par l'imbrication des preuves subordonnées strictes. Dans le même esprit, une autre approche intègre explicitement la relation d'accessibilité soit à travers des préfixes (des entiers naturels) associés aux formules [11, 96, 97], soit par des expressions de la forme  $R(l, l')$  où  $l$  et  $l'$  sont des labels représentant des mondes [119].

Dans l'état de nos connaissances actuelles, de toutes les approches que nous venons de citer, l'intégration explicite de la relation d'accessibilité est la seule qui a permis de définir des systèmes de déduction naturelle pour toutes les logiques modales intuitionnistes décrites dans ce chapitre, cela dans les travaux de Simpson [119]. Effectivement, les autres approches n'ont permis de fournir que des systèmes pour les fragments privés de  $\Diamond$  de quelques unes de ces logiques. En fait, même si certains de ces systèmes contiennent des règles pour  $\Diamond$ , les logiques qui en résultent sont souvent différentes de celles que nous considérons. En réalité, comme le précise Simpson, les principaux problèmes de la déduction naturelle dans les logiques modales intuitionnistes résident dans le traitement de l'opérateur  $\Diamond$ .

### 2.3.2 Calcul des séquents et logiques modales

Considérons tout d'abord les logiques modales classiques. Il existe des calculs des séquents standard pour de nombreuses ces logiques (voir l'étude de Wansing [126]). Toutefois, comme le note Wansing, il n'existe pas de présentation uniforme connue des logiques modales les plus importantes via des calculs des séquents standard. L'uniformité correspond à la facilité de passer d'une logique à une autre par ajout, suppression ou modification de quelques règles. Ajoutons à cela l'absence de calculs standard pour certaines logiques satisfaisant les propriétés généralement exigées dans tout calcul. Ce dernier point est reflété par la difficulté de fournir un calcul standard satisfaisant la propriété de l'élimination de la coupure pour la logique **S5**. Une des solutions les plus significatives est celle présentée par Braüner [19] qui repose sur la traduction de **S5** dans le fragment monadique de la logique classique. Bien que le calcul de Braüner satisfait l'élimination de la coupure ainsi que la propriété de la sous-formule, il présente un problème car toutes les règles ne sont pas locales. Rappelons qu'une règle est locale si son application peut être décidée localement en considérant uniquement ses prémisses

et sa conclusion. Nous pouvons également citer la solution de Shvarts [117] qui consiste à traduire **S5** dans la logique  $K\{4, 5\}$  qui possède un calcul standard satisfaisant l'élimination de la coupure. Cette solution n'offre pas réellement un calcul pour **S5**.

Face aux problèmes que nous venons de citer, il y a eu l'apparition d'une approche fondée sur l'ajout d'informations sémantiques aux règles d'inférence (par exemple, Mints [100], Negri [102]). Comme dans le cas de la déduction naturelle, l'idée repose sur l'intégration explicite de la sémantique de Kripke à travers des labels dans le calcul. En conséquence de l'utilisation de labels, ce type de calculs ne vérifie pas, entre autres, la propriété de la sous-formule.

Un calcul simple sans labels pour **S5** satisfaisant la propriété de l'élimination de la coupure a été proposé par Avron dans [4]. Son approche est fondée sur l'utilisation la structure multi-contextuelle d'hyperséquent. Rappelons que cette structure n'est autre qu'un multi-ensemble de séquents appelés composantes. Intuitivement, chaque composante représente un monde sémantique. Il est à noter que des améliorations ont été apportées à ce calcul dans [115, 108].

L'approche qui nous intéresse tout particulièrement est similaire à celle d'Avron. Elle est fondée sur l'utilisation d'une structure multi-contextuelle généralisant celle d'hyperséquent. Elle a été introduite par Brünnler [22] comme un compromis entre le calcul de structures [77] et l'approche standard de Gentzen. Le lien avec le calcul de structures vient du fait que la structure utilisée, appelée séquent profond (*deep sequent*), est arborescente. Cette approche a permis de proposer des calculs avec une présentation uniforme pour plusieurs logiques modales classiques, y compris **S5**, ayant de bonnes propriétés comme l'élimination de la coupure et la propriété de la sous-formule.

Notons l'existence d'une approche similaire à celle d'Avron et Brünnler appelée *display calculus* [10, 125]. Néanmoins, puisqu'elle est formulée via le langage de la logique temporelle (*tense logic*), cette approche utilise des entités syntaxiques étrangères aux logiques modales que nous considérons. À cet effet, l'approche des séquents profonds est plus appropriée.

Abordons maintenant le cas des logiques modales intuitionnistes. En ce qui concerne l'utilisation du formalisme de calcul des séquents dans le cas intuitionniste, les travaux sont peu nombreux. Parmi les premiers calculs standards, nous citons ceux de Ono pour, essentiellement, des versions intuitionnistes de **S4** et **S5** [104]. Cependant, ces calculs ne considèrent que les fragments privés de l'opérateur  $\diamond$ . En outre, son calcul pour **IS5** ne satisfait pas la propriété de l'élimination de la coupure. D'autres calculs standards ont été proposés dans [41, 34, 13, 9]. En réalité, les problèmes liés à l'approche standard rencontrés dans le cas classique se trouvent accentués dans le cas intuitionniste. Par exemple, il n'existe pas de calcul standard satisfaisant l'élimination de la coupure pour **IS5** même pour son fragment privé de  $\diamond$ .

Quant à l'approche qui repose sur l'internalisation explicite de la sémantique de Kripke, Simpson propose, de même que dans le cas de la déduction naturelle, des calculs pour une large famille de logiques modales intuitionnistes, y compris toutes celles que nous avons décrites dans ce chapitre [119]. Une simplification dans le cas du fragment privé de  $\diamond$  de **IS5** est fournie dans [101].

Notons que l'approche d'Avron et Brünnler, avant nos travaux, n'a pas été appliquée aux logiques modales intuitionnistes. Toutefois dans des travaux récents, l'approche similaire de

*display calculus* citée précédemment a été utilisée dans la définition d'un calcul pour la logique IK [76]. En dépit du fait que ce calcul ne se limite pas au langage des logiques modales, il n'est qu'un effet de bord d'un calcul pour une logique temporelle bi-intuitionniste.

## 2.4 Notre approche et nos contributions

Nos travaux s'articulent essentiellement autour de l'utilisation de structures multi-contextuelles. Dans ce cadre, nous proposons différents systèmes de déduction naturelle et calculs des séquents en démontrant qu'ils vérifient les bonnes propriétés habituellement exigées : normalisation, élimination de la coupure, sous-formule, etc. Une des idées directrices repose sur la non utilisation des labels dans la construction de preuves.

Nous venons de voir que l'approche fondée sur les séquents profonds a permis de fournir des calculs des séquents, avec une présentation uniforme et sans labels, pour de nombreuses logiques modales classiques. Dans un sens, certaines de nos contributions peuvent être vues comme l'extension de cette approche à la déduction naturelle d'un côté, et au cas intuitionniste de l'autre. En effet, nous définissons des systèmes de déduction naturelle fondés sur une nouvelle structure multi-contextuelle arborescente, appelée A-séquent, pour de nombreuses logiques modales intuitionnistes et classiques en démontrant qu'ils vérifient la normalisation. Nous définissons également des calculs des séquents fondée sur les A-séquents pour toutes les logiques modales intuitionnistes que nous considérons. En utilisant certains de ces calculs, nous proposons des procédures de décision simples.

La structure de A-séquent diffère de celle de séquent profond sur deux aspects. Premièrement, on retrouve dans la structure de A-séquent, comme dans le cas de celle de séquent, la dichotomie hypothèses/conclusions. Alors qu'une telle distinction n'est pas faite entre les formules des séquents profonds. Deuxièmement, dans la définition de la formule correspondante de notre structure, nous combinons les deux opérateurs modaux  $\Box$  et  $\Diamond$ . En fait, l'absence de l'interdéfinissabilité de  $\Diamond$  et  $\Box$  dans les logiques modales intuitionnistes (cas classique :  $\Diamond A = \neg\Box\neg A$ ,  $\Box A = \neg\Diamond\neg A$ ) rend essentiel l'utilisation d'une structure ayant une formule correspondante définie avec ces deux opérateurs.

Notre calcul des séquents pour la logique IS5 fondé sur les A-séquents ne nous a pas permis de démontrer la décidabilité. En vue de traiter plus simplement cette logique et en particulier de démontrer sa décidabilité, nous introduisons une nouvelle structure multi-contextuelle, appelée MC-séquent. Cette dernière peut être considérée comme un cas particulier de celle de A-séquent car elle correspond tout simplement à un aplatissement de cette dernière. Dans ce cadre, nous définissons un système de déduction naturelle ainsi qu'un calcul des séquents pour IS5 que nous utilisons pour proposer une procédure de décisions pour cette logique.

Comme nous l'avons précisé avant, l'intégration explicite de la sémantique au calcul pose problème de part l'introduction d'entités syntaxiques étrangères au langage. La question que l'on peut se poser est : que se passerait-il lorsque l'on intègre de telles entités au langage ? En fait, cela reviendrait à introduire de nouveaux types de logiques plus expressives comme les *logiques hybrides*. Ces dernières ont été introduites dans le but d'exprimer la relativité de la vérité à un monde dans un modèle [16, 2]. Elles sont obtenue par l'ajout aux logiques modales d'un nouveau type de symboles appelés *nominaux*, et un nouvel opérateur, appelé *opérateur de*

*satisfaction*. Ce dernier permet de faire des sauts entre les mondes nommés par les nominaux.

Dans nos travaux, nous nous sommes intéressés à la première version intuitionniste de logique hybride IHL définie par Braüner et De Paiva [21]. Elle a été obtenue par une extension syntaxique de la logique modale intuitionniste IK avec les nominaux et l'opérateur de satisfaction. Lors de son introduction, Braüner et De Paiva ont fourni un système de déduction naturelle proche de celui de Simpson pour IK. Dans la suite de ce résultat, nous définissons un calcul des séquents pour IHL grâce auquel nous proposons la première démonstration de décidabilité pour cette logique.

La force des logiques hybrides réside dans la simplicité de leurs systèmes de preuve et aussi dans leur pouvoir d'expression par rapport aux logiques modales. Néanmoins, cela doit pas nous amener à considérer ces logiques comme des substituts aux logiques modales, mais juste comme un cadre logique plus expressif. En effet, même s'il est assez aisé de proposer des systèmes de preuve simples pour les logiques hybrides, la satisfaction de la propriété de la sous-formule est un problème très complexe. En guise d'illustration, notre calcul des séquents pour IK satisfait la propriété de la sous-formule, ce qui nous a permis de proposer une procédure de décision simple. Tandis que notre calcul pour IHL, en dépit du fait qu'il est plus simple dans sa présentation, il ne satisfait pas cette propriété. En conséquence, proposer une procédure de décision fondée sur ce calcul devient une tâche ardue. Cependant, nous pensons que les logiques hybrides peuvent jouer le rôle de compromis quand l'intégration de la sémantique au calcul paraît inéluctable, car dans ce cas les labels ne sont pas seulement utilisés pour construire des preuves, mais ils enrichissent également le pouvoir d'expressivité.

## Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre plusieurs logiques modales fondées sur deux différents cadres de raisonnement, à savoir classique et intuitionniste. Ces logiques ont été décrites d'un point de vue sémantique via la sémantique de Kripke, mais également d'un point de vue syntaxique via les systèmes à la Hilbert. En ce qui concerne la sémantique de Kripke, elle rend bien compte des principes de raisonnement que capture chacune des logiques que nous considérons. Quand au formalisme de système à la Hilbert, il nous a permis de décrire ces logiques d'une manière syntaxique simple. En outre, nous avons présenté la situation de nos travaux dans la théorie de la preuve en matière de déduction naturelle et de calcul des séquents et leurs apports vis-à-vis des travaux existants.

Dans les quatre chapitres qui vont suivre, nous présenterons nos systèmes de déduction naturelle ainsi que nos calcul des séquents pour principalement les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Dans un premier temps, nous décrirons nos systèmes de déduction naturelle pour ces logiques en se concentrant particulièrement sur la propriété de normalisation et ses conséquences. Des systèmes similaires sont proposés dans le cas de logiques modales classiques. Dans un deuxième temps, nous dérivons de nos systèmes pour les logiques modales intuitionnistes que nous considérons des calculs des séquents en nous attachant à présenter des variantes dans l'optique d'apporter des améliorations en matière d'automatisation de la construction de preuves. Dans un troisième temps, nous considérerons le cas particulier de la logique IS5 qui possède des caractéristiques permettant de la traiter plus simplement que les autres logiques. Enfin, nous étudierons la logique hybride in-

tuitionniste IHL et nous proposerons un calcul des séquents permettant de fournir la première démonstration de décidabilité pour cette logique.





## Chapitre 3

# Déduction naturelle et logiques modales intuitionnistes

### Introduction

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur l'étude de la théorie de la preuve dans principalement les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 via le formalisme de déduction naturelle. Notre objectif consiste à définir des systèmes sans labels satisfaisant les propriétés habituellement exigées (normalisation, sous-formule, etc). Il existe plusieurs systèmes dans le cas classique [110, 55, 118, 56], mais ils sont rares dans le cas intuitionniste à cause de la difficulté de gérer la modalité  $\diamond$  [119]. Autant que nous sachions, l'unique approche qui a permis de définir des systèmes pour toutes les logiques que nous considérons est celle suivie par Simpson [119]. Elle est fondée sur l'utilisation de labels intégrant explicitement certaines informations sémantiques, comme la relation d'accessibilité, aux systèmes. Elle a permis de définir des systèmes simples du point de vue de la présentation pour une large famille de logiques modales intuitionnistes, mais ils ne vérifient pas certaines propriétés importantes, comme celle de la sous-formule, ce à cause de l'utilisation d'entités syntaxiques étrangères au langage.

Des travaux fondés sur une structure multi-contextuelle et arborescente, appelée séquent profond (*deep sequent*), ont fourni des calculs des séquents sans labels pour plusieurs logiques modales classiques ayant de bonnes propriétés comme l'élimination de la coupure et la propriété de la sous-formule [22, 23]. Cela peut être vu comme une généralisation de l'approche d'Avron fondée sur la structure d'hyperséquent dans le cas de  $S5$  [4]. Cependant, les structures de séquent profond et d'hyperséquent ne sont pas adaptées au formalisme de déduction naturelle ainsi qu'aux logiques modales intuitionnistes. Nous résolvons ce problème ici en introduisant une nouvelle structure multi-contextuelle plus appropriée qui nous permet de définir des systèmes de déduction naturelle pour toutes les logiques modales intuitionnistes et classiques formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 en démontrant qu'ils satisfont et la normalisation, et la propriété de la sous-formule dans le cas intuitionniste.

Dans un premier temps, nous introduisons notre structure multi-contextuelle, appelée A-séquent (A pour arbre), qui est arborescente comme celle de séquent profond (pour plus de détails sur les structures arborescentes, voir par exemple [26, 84, 22, 23, 109]). Cela dit, les A-séquents possèdent certaines spécificités qui les différencient des séquents profonds. En effet, dans la structure de séquent profond, il n'y a pas de formule jouant le rôle d'hypothèses

et d'autres formules celui de conclusion comme dans le cas des séquents standard et des A-séquents. De plus, dans la définition des formules correspondantes des séquents profonds, l'unique opérateur modal utilisé est  $\Box$ , alors que dans la structure de A-séquent, les deux opérateurs modaux  $\Diamond$  et  $\Box$  sont utilisés.

Dans un deuxième temps, nous mettons en œuvre la structure de A-séquent pour définir un système de déduction naturelle pour la logique IK. Nous commençons par démontrer la correction et la complétude. Ensuite, nous démontrons la propriété de normalisation. Les techniques utilisées dans la démonstration de la normalisation peuvent être vues comme une adaptation aux A-séquents de celles utilisées par Prawitz [110].

Dans un troisième temps, nous définissons des systèmes de déduction naturelle pour les logiques modales intuitionnistes formées à partir de toutes les combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Chacun de ces systèmes est obtenu soit par l'ajout de règles modales à celui de IK, soit par le remplacement de deux règles modales dans ce dernier. Nous démontrons ensuite la normalisation pour tous ces systèmes. Puis, nous étudions la structure des preuves en forme normale, ce qui nous amène à démontrer des propriétés comme celles de la sous-formule et de la séparation.

Enfin, nous définissons aussi des systèmes de déduction naturelle pour les logiques modales classiques formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 en changeant uniquement la règle associée à  $\perp$  dans nos systèmes pour les logiques modales intuitionnistes.

### 3.1 Structure de A-séquent

Dans cette section, nous introduisons notre nouvelle structure, appelée A-séquent.

**Définition 3.1.1** (A-environnement). *Un A-environnement est une structure définie par induction comme suit :*

- Si  $A_1, \dots, A_n$  est un multi-ensemble de formules, alors  $A_1, \dots, A_n$  est un A-environnement.
- Si  $A_1, \dots, A_n$  est un multi-ensemble de formules et  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  est un multi-ensemble de A-environnements, alors  $A_1, \dots, A_n, \langle \Gamma_1 \rangle, \dots, \langle \Gamma_l \rangle$  est un A-environnement.

Où le symbole virgule dans les A-environnements est commutatif et associatif.

Nous appelons *formule marquée* toute expression de la forme  $A^\dagger$  où  $A$  est une formule.

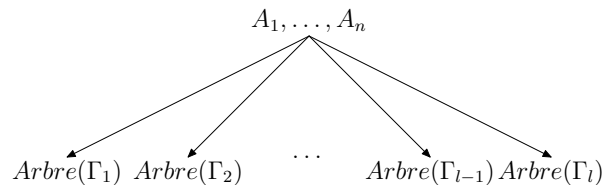
**Définition 3.1.2** (A-séquent). *Un A-séquent est une structure définie par induction comme suit :*

- Si  $\Gamma$  est un A-environnement, alors  $\Gamma, A^\dagger$  est un A-séquent.
- Si  $\mathcal{S}$  est un A-séquent et  $\Gamma$  un A-environnement, alors  $\Gamma, \langle \mathcal{S} \rangle$  est un A-séquent.

Où le symbole virgule est commutatif et associatif.

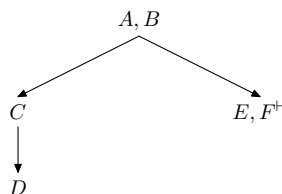
Un A-séquent peut être considéré comme un A-environnement contenant une et une seule occurrence de formule marquée que nous appelons **conclusion**.

Il est possible de représenter graphiquement sous forme d'arbre les A-environnements et les A-séquents de la manière suivante :



où  $Arbre(\Gamma_1), \dots, Arbre(\Gamma_k)$  sont les arbres correspondant respectivement à  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ . Nous notons que nous ne ferons pas toujours la distinction entre les A-séquents ainsi que les A-environnements et les arbres qui leurs sont associés. Ainsi, quand nous parlerons de *racine*, de *feuille*, de *profondeur* ou de *sous-arbre* d'un A-séquent ou d'un A-environnement, nous nous référerons à l'arbre qui lui est associé.

À titre d'exemple, nous donnons l'arbre représentant le A-séquent  $A, B, \langle C, \langle D \rangle \rangle, \langle E, F^+ \rangle$  :



**Définition 3.1.3** (*n*-situation). Une *n*-situation, avec  $n \geq 0$ , est un A-environnement ou un A-séquent contenant exactement *n* occurrences du symbole  $\{\}$ , appelé trou.

Nous notons par  $\Gamma \overbrace{\{\} \cdots \{\}}^{n \text{ fois}}$  les *n*-situations en considérant implicitement qu'il existe une bijection qui associe à chaque occurrence du symbole  $\{\}$  suivant cette notation, une occurrence de  $\{\}$  dans la *n*-situation. La structure  $\Gamma\{\Delta_1\} \cdots \{\Delta_n\}$  est obtenue par la substitution du trou associé à la *i*-ème occurrence de  $\{\}$  dans  $\Gamma\{\} \cdots \{\}$  par  $\Delta_i$ , pour tout  $i \in [1, n]$ . Ainsi, tout A-séquent est de la forme  $\Gamma\{C^+\}$  où  $\Gamma\{\}$  est une 1-situation qui ne contient pas de formule marquée.

Dans ce qui suit, nous appelons le A-environnement de  $\Gamma\{C^+\}$  le A-environnement  $\Gamma\{\emptyset\}$ . En général, les trous sont substitués par des A-environnements, des A-séquents ou des *n*-situations. Considérons, par exemple, le A-séquent  $\Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A, B^+ \rangle$ . Ce dernier correspond à  $\Gamma\{B^+\}$  tel que  $\Gamma\{\} = \Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A, \{\} \rangle$ .

La structure de A-séquent est considérée comme une structure multi-contextuelle dans le sens où la valeur de vérité d'un A-séquent peut changer en fonction de la position de sa conclusion dans l'arbre représentant son A-environnement. Autrement dit, chaque nœud du A-environnement est considéré comme un contexte.

**Définition 3.1.4** (Profondeur). La profondeur d'une 1-situation  $\Gamma\{\}$ , notée  $prof(\Gamma\{\})$ , est définie de la manière suivante :

- $prof(\Gamma, \{\}) = 0$  ;
- $prof(\Gamma, \langle \Delta \{\} \rangle) = 1 + prof(\Delta\{\})$ .

**Définition 3.1.5** (Relation *sp*). La relation unaire *sp* sur les A-séquents est définie par  $sp(\mathcal{S})$  si et seulement si la profondeur de l'arbre correspondant à  $\mathcal{S}$  est strictement supérieure à 0.

**Définition 3.1.6** (Degré d'imbrication). Le degré d'imbrication d'un A-séquent  $\mathcal{S}$  est défini par  $nest(\mathcal{S}) = \max\{nest(A) \mid A \text{ formule dans } \mathcal{S}\}$  où *max* signifie le maximum.

Rappelons que la notion de degré d'imbrication sur les formules est définie au chapitre 2.

En vue de définir les formules correspondantes des A-séquents, nous définissons par induction la fonction  $\mathcal{F}$  qui associe à tout A-environnement une formule :

- $\mathcal{F}(\emptyset) = \top$  ;

$$- \mathcal{F}(A_1, \dots, A_k, \langle \Gamma_1 \rangle, \dots, \langle \Gamma_l \rangle) = A_1 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \diamond(\mathcal{F}(\Gamma_1)) \wedge \dots \wedge \diamond(\mathcal{F}(\Gamma_k)).$$

L'extension de  $\mathcal{F}$  aux A-séquents se fait en fonction de leurs formes de la manière suivante :

- $\mathcal{F}(\Gamma, A^+) = \mathcal{F}(\Gamma) \supset A$  ( $\Gamma$  est un A-environnement) ;
- $\mathcal{F}(\Gamma, \langle \mathcal{S} \rangle) = \mathcal{F}(\Gamma) \supset \square(\mathcal{F}(\mathcal{S}))$  ( $\Gamma$  est un A-environnement et  $\mathcal{S}$  un A-séquent).

$$\text{Par exemple, } \mathcal{F}(\square(A \supset B), \diamond A, \langle A, B^+ \rangle) = (\square(A \supset B) \wedge (\diamond A)) \supset \square(A \supset B).$$

La **validité d'un A-séquent**  $\mathcal{S}$  dans une logique modale  $L$  est définie par la validité de sa formule correspondante  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  dans  $L$ .

### 3.2 Un système de déduction naturelle pour IK ( $DN_{IK}$ )

Dans cette partie, nous proposons un système de déduction naturelle, appelé  $DN_{IK}$ , pour la logique IK en utilisant la structure de A-séquent. Ce système est décrit en figure 3.1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma\{A, A^+\}} [id] \quad \frac{\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}} [\perp] \\
 \\
 \frac{\Gamma\{A^+\} \quad \Gamma\{B^+\}}{\Gamma\{A \wedge B^+\}} [\wedge_I] \quad \frac{\Gamma\{A \wedge B^+\}}{\Gamma\{A^+\}} [\wedge_E^1] \quad \frac{\Gamma\{A \wedge B^+\}}{\Gamma\{B^+\}} [\wedge_E^2] \\
 \\
 \frac{\Gamma\{A^+\}}{\Gamma\{A \vee B^+\}} [\vee_I^1] \quad \frac{\Gamma\{B^+\}}{\Gamma\{A \vee B^+\}} [\vee_I^2] \\
 \\
 \frac{\Gamma\{A \vee B^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{A\}\{C^+\} \quad \Gamma\{B\}\{C^+\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\vee_E] \\
 \\
 \frac{\Gamma\{A, B^+\}}{\Gamma\{A \supset B^+\}} [\supset_I] \quad \frac{\Gamma\{A \supset B^+\} \quad \Gamma\{A^+\}}{\Gamma\{B^+\}} [\supset_E] \\
 \\
 \frac{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta, \diamond A^+ \rangle\}} [\diamond_I] \quad \frac{\Gamma\{\diamond A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{\langle A \rangle\}\{C^+\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\diamond_E] \\
 \\
 \frac{\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\square A^+\}} [\square_I] \quad \frac{\Gamma\{\langle \Delta, \square A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}} [\square_E]
 \end{array}$$

FIG. 3.1 – Système de déduction naturelle  $DN_{IK}$

Un des premiers constats que l'on peut faire est que les règles du système  $DN_{IK}$  sont toutes de la forme suivante :

$$\frac{\Gamma\{\Delta_1^1\} \dots \{\Delta_k^1\} \quad \dots \quad \Gamma\{\Delta_1^l\} \dots \{\Delta_k^l\}}{\Gamma\{\Delta_1\} \dots \{\Delta_k\}} [R]$$

Cette forme traduit le fait que dans une règle, chaque prémisses est obtenue par la modification de certains sous-arbres de la conclusion.

Commentons maintenant les règles de  $DN_{IK}$ . Concernant les règles associées aux opérateurs intuitionnistes habituels, elles sont similaires à celles du système  $DN_{IPL}$  décrit au chapitre 1 excepté la prise en compte de la présence de plusieurs contextes. Par exemple, la règle  $[\perp]$  exprime le fait que si les hypothèses de la prémisse implique l'absurde, alors elles impliquent n'importe quelle formule dans n'importe quel contexte. Cette idée est capturée par l'utilisation d'une 2-situation.

Concentrons-nous maintenant sur les règles associées aux opérateurs modaux. On dit qu'un contexte  $\mathcal{C}'$  est accessible à partir d'un contexte  $\mathcal{C}$  dans un A-séquent  $\mathcal{S}$  si  $\mathcal{C}'$  est le fils de  $\mathcal{C}$  dans le A-environnement de  $\mathcal{S}$ . Dans ce cadre, la règle  $[\Box_I]$  internalise le fait que si une formule  $A$  est vraie dans un contexte vide accessible à partir d'un contexte  $\mathcal{C}$ , alors la formule  $\Box A$  est vraie dans le contexte  $\mathcal{C}$ . Quant à la règle  $[\Box_E]$ , elle internalise le fait que si une formule  $\Box A$  est vraie dans un contexte  $\mathcal{C}'$  à partir duquel un contexte  $\mathcal{C}$  est accessible, alors la formule  $A$  est vraie dans  $\mathcal{C}$ . La règle  $[\Diamond_I]$  internalise le fait que si une formule  $A$  est vraie dans un contexte  $\mathcal{C}'$  accessible à partir d'un contexte  $\mathcal{C}$ , alors la formule  $\Diamond A$  est vraie dans  $\mathcal{C}$ . Enfin, la règle  $[\Diamond_E]$  est similaire à une règle de coupure. Cela est le résultat du fait que si la formule  $\Diamond A$  est vraie dans un contexte  $\mathcal{C}$ , alors on ne peut pas nécessairement savoir dans quel contexte, accessible à partir de  $\mathcal{C}$ , la formule  $A$  est vraie. Ainsi, l'élimination de  $\Diamond A$  passe par l'utilisation d'un contexte contenant uniquement  $A$ , ce qui correspond à la formule  $\Diamond A$ .

Dans une application d'une règle d'élimination, nous appelons **prémisse majeure** la prémisse contenant l'opérateur éliminé. En outre, les autres prémisses sont appelées **prémisses mineures**. Autrement dit, dans le cas d'une applications de  $[\vee_E]$  ou de  $[\Diamond_E]$ , la prémisse majeure est celle à gauche. Quant au cas des autres règles, vu qu'elles ne possèdent qu'une unique prémisse, la prémisse majeure d'une application d'une de ces règles est tout simplement sa prémisse et il n'y a pas de prémisse mineure.

Nous avons vu au chapitre 1 que si on a une preuve  $\mathcal{D}$  dans  $DN_{IPL}$  pour un séquent  $\Gamma \vdash A$ , une preuve de  $\Gamma, \Gamma' \vdash A$  est obtenue tout simplement par l'ajout de  $\Gamma'$  à tous les séquents composant  $\mathcal{D}$ . En fait, cela reflète l'admissibilité de la règle structurelle d'affaiblissement dans le système  $DN_{IPL}$ . Étendons maintenant cette idée à notre système  $DN_{IK}$ . Notons que la règle d'affaiblissement dans ce cas correspond à :

$$\frac{\Gamma\{C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{C^+\}\{A\}} [W]$$

Nous définissons la relation d'affaiblissement, notée  $\rightarrow_w$ , sur les A-séquents par  $\Gamma\{C^+\}\{\emptyset\} \rightarrow_w \Gamma\{C^+\}\{\Sigma\}$  où  $\Sigma$  est un A-environnement. Sa clôture réflexive et transitive est notée  $\rightarrow_w^*$ .

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux A-séquents tels que  $\mathcal{S} \rightarrow_w \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IK}$ . Nous définissons la preuve  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w$  de  $\mathcal{S}'$  par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w = \left\{ \frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\Sigma\}]_w & & \mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\Sigma\}]_w \\ \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\Sigma\} & \cdots & \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\Sigma\} \end{array}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\Sigma\}} [R] \right.$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\Sigma\}$  et

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\} \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_l \\ \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\} \end{array}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\emptyset\}} [R]$$

Nous étendons maintenant cette définition à la relation  $\rightarrow_w^*$ . Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux A-séquents tels que  $\mathcal{S} \rightarrow_w^n \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{\text{IK}}$ . La preuve  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w$  de  $\mathcal{S}'$  est définie par induction sur la valeur de  $n$  comme suit :

- si  $n = 0$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w = \mathcal{D}$  ;
- sinon, on a  $\mathcal{S} \rightarrow_w \mathcal{S}'' \rightarrow_w^{n-1} \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w = (\mathcal{D}[\mathcal{S}'']_w)[\mathcal{S}']_w$ .

En guise d'exemple, considérons la preuve suivante :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\square(A \supset B), \square A, \langle \emptyset \rangle, \square(A \supset B)^{\vdash}} [id]}{\square(A \supset B), \square A, \langle A \supset B^{\vdash} \rangle} [\square E]}{\square(A \supset B), \square A, \langle B^{\vdash} \rangle} [\supset E]}{\square(A \supset B), \square A, \langle \emptyset \rangle, \square A^{\vdash}} [id]}{\square(A \supset B), \square A, \langle A^{\vdash} \rangle} [\square E]}{\square(A \supset B), \square A, \langle B^{\vdash} \rangle} [\supset E]$$

Dans ce cas, la preuve  $\mathcal{D}[C, \square(A \supset B), \square A, \langle D, B^{\vdash} \rangle]_w$  est égale à :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{C, \square(A \supset B), \square A, \langle D \rangle, \square(A \supset B)^{\vdash}} [id]}{C, \square(A \supset B), \square A, \langle D, A \supset B^{\vdash} \rangle} [\square E]}{C, \square(A \supset B), \square A, \langle D, B^{\vdash} \rangle} [\supset E]}{\frac{\frac{\overline{C, \square(A \supset B), \square A, \langle D \rangle, \square A^{\vdash}} [id]}{C, \square(A \supset B), \square A, \langle D, A^{\vdash} \rangle} [\square E]}{C, \square(A \supset B), \square A, \langle D, B^{\vdash} \rangle} [\supset E]}$$

Nous nous intéressons également à une autre règle structurale relative à l'utilisation de structures multi-contextuelles, appelée **règle de fusion** :

$$\frac{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \langle \Delta' \rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta, \Delta' \rangle\}} [M]$$

Comme dans le cas de l'affaiblissement, nous définissons la relation de fusion, notée  $\rightarrow_m$ , par  $\Gamma\{\langle \Delta_1 \rangle, \langle \Delta_2 \rangle\} \rightarrow_m \Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle\}$  et nous notons  $\rightarrow_m^*$  sa clôture réflexive et transitive.

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux A-séquents tels que  $\mathcal{S} \rightarrow_m \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{\text{IK}}$ . D'une manière similaire à la définition de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w$ , nous définissons la preuve  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_m$  par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{D}$  est égale à :

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\langle \Sigma_1^1 \rangle, \langle \Sigma_2^1 \rangle\} \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_l \\ \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\langle \Sigma_1^l \rangle, \langle \Sigma_2^l \rangle\} \end{array}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\langle \Sigma_1^0 \rangle, \langle \Sigma_2^0 \rangle\}} [R]$$

et  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\langle \Sigma_1^0, \Sigma_2^0 \rangle\}$ , alors la preuve  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_m$  est égale à :

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\langle \Sigma_1^1, \Sigma_2^1 \rangle\}]_m \\ \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\langle \Sigma_1^1, \Sigma_2^1 \rangle\} \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\langle \Sigma_1^l, \Sigma_2^l \rangle\}]_m \\ \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\langle \Sigma_1^l, \Sigma_2^l \rangle\} \end{array}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\langle \Sigma_1^0, \Sigma_2^0 \rangle\}} [R]$$

L'extension de cette définition à la relation  $\rightarrow_m^*$  est faite de la même manière que dans le cas de  $\rightarrow_w^*$ .

Par exemple, considérons la preuve suivante :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\frac{\frac{\overline{\langle A, A^+ \rangle}, \langle B \rangle} [id] \quad \frac{\overline{\langle A \rangle}, \langle B, B^+ \rangle} [id]}{\langle A \rangle, \langle B \rangle, \diamond A^+} [\diamond_I] \quad \frac{\overline{\langle A \rangle}, \langle B \rangle, \diamond B^+} [\diamond_I]}{\langle A \rangle, \langle B \rangle, \diamond A \wedge \diamond B^+} [\wedge_I]} \right.$$

Dans ce cas, la preuve  $\mathcal{D}[\langle A, B \rangle, \diamond A \wedge \diamond B^+]_m$  est égale à :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\langle A, B, A^+ \rangle} [id] \quad \frac{\overline{\langle A, B, B^+ \rangle} [id]}{\langle A, B \rangle, \diamond A^+} [\diamond_I] \quad \frac{\overline{\langle A, B, B^+ \rangle} [id]}{\langle A, B \rangle, \diamond B^+} [\diamond_I]}{\langle A, B \rangle, \diamond A \wedge \diamond B^+} [\wedge_I]}{\langle A, B \rangle, \diamond A \wedge \diamond B^+} [\wedge_I]}$$

Nous démontrons maintenant certaines propositions qui nous aideront à démontrer la complétude de  $DN_{\mathbb{IK}}$ .

**Proposition 3.2.1.**  $\Gamma\{A \supset B^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$  ssi  $\Gamma\{A, B^+\}$  en a aussi une.

*Démonstration.* Partant de la règle  $[\supset_I]$ , si  $\Gamma\{A, B^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$  alors  $\Gamma\{A \supset B^+\}$  en a aussi une.

Supposons maintenant que  $\Gamma\{A \supset B^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . En utilisant  $\Gamma\{A \supset B^+\} \rightarrow_w \Gamma\{A, A \supset B^+\}$ , le A-séquent  $\Gamma\{A, A \supset B^+\}$  a également une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . En utilisant une preuve quelconque  $\mathcal{D}$  de  $\Gamma\{A, A \supset B^+\}$ , une preuve de  $\Gamma\{A, B^+\}$  est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{A, A \supset B^+\}} \quad \frac{\overline{\Gamma\{A, A^+\}} [id]}{\Gamma\{A, A^+\}} [\supset_E]}{\Gamma\{A, B^+\}} [\supset_E]$$

□

**Proposition 3.2.2.**  $\Gamma\{\Box A^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$  ssi  $\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}$  en a aussi une.

*Démonstration.* En utilisant la règle  $[\Box_I]$ , on a si  $\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}$  a une preuve, alors  $\Gamma\{\Box A^+\}$  en a aussi une.

Supposons maintenant que  $\Gamma\{\Box A^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . Le A-séquent  $\Gamma\{\langle \emptyset \rangle, \Box A^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$  car  $\Gamma\{\langle A^+ \rangle\} \rightarrow_w \Gamma\{\langle \emptyset \rangle, \Box A^+\}$ . À partir d'une preuve quelconque  $\mathcal{D}$  de  $\Gamma\{\langle \emptyset \rangle, \Box A^+\}$  une preuve de  $\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}$  est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle \emptyset \rangle, \Box A^+\}}}{\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}} [\Box_E]$$

□

**Proposition 3.2.3.** Si  $\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$  alors  $\Gamma\{A, B\}\{C^+\}$  en a aussi une.

*Démonstration.* Par induction sur la structure de la preuves de  $\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}$ . Nous développons ici uniquement le cas où  $\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}$  est une instances de  $[id]$ . On distingue deux cas possible.

**Cas 1 :** il existe une 2-situation  $\Gamma'\{\}\{\}$  telle que  $\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\} = \Gamma'\{A \wedge B\}\{C, C^+\}$ . Dans ce cas, il est facile de voir que  $\Gamma\{A, B\}\{C^+\}$  est également une instance de  $[id]$ .

**Cas 2 :** la formule  $C$  est égale à  $A \wedge B$  et  $\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\} = \Gamma\{A \wedge B, A \wedge B^+\}\{\emptyset\}$ . Dans ce cas une preuve de  $\Gamma\{A, B, A \wedge B^+\}\{\emptyset\}$  est donnée par :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma\{A, B, A^+\}\{\emptyset\}} [id] \quad \frac{}{\Gamma\{A, B, B^+\}\{\emptyset\}} [id]}{\Gamma\{\Delta, A, B, A \wedge B^+\}\{\emptyset\}} [\wedge_I]}{\Gamma\{\Delta, A, B, A \wedge B^+\}\{\emptyset\}} [\wedge_I]$$

La démonstration dans les autres cas est tout simplement obtenue par application de l'hypothèse d'induction aux prémisses de la dernière règle appliquée dans la preuve de  $\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}$ .  $\square$

**Proposition 3.2.4.** *si  $\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{K}}$  alors  $\Gamma\{\langle A \rangle\}\{C^+\}$  en a aussi une.*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de la preuve de  $\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}$ .  $\square$

### 3.2.1 Correction de $DN_{\mathbb{K}}$

Dans cette section, nous démontrons la correction du système  $DN_{\mathbb{K}}$  en utilisant la sémantique de  $\mathbb{K}$ . L'approche est la même que celle décrite au chapitre 1 pour démontrer la correction du système  $DN_{\text{IPL}}$  : démontrer que pour chaque règle, si sa conclusion a un contre-modèle, alors au moins une de ses prémisses a aussi un contre-modèle. Cela revient à démontrer que pour chaque règle, si ses prémisses sont valides alors sa conclusion l'est aussi (contraposée).

Dans un premier temps, nous introduisons les deux notions de *prédécesseurs* et de  $(w, k)$ -*chaîne* que nous utilisons pour exprimer d'une manière simple qu'un A-séquent a un contre-modèle. Ensuite, nous démontrons quelques propositions qui nous permettrons de simplifier la démonstration de la correction.

**Définition 3.2.1** (Prédécesseurs). *Soit  $\Gamma\{\}$  une 1-situation. La valeur de  $\text{pred}^i(\Gamma\{\})$ , avec  $i \in [0, \text{prof}(\Gamma\{\})]$ , est définie par induction sur la valeur de  $i$  de la manière suivante :*

- $\text{pred}^0(\Gamma\{\}) = \Delta$  où  $\Delta, \{\}$  est un sous-arbre de  $\Gamma\{\}$ . Puisque  $\Gamma\{\}$  ne contient qu'une seule occurrence de  $\{\}$ , ce sous-arbre est unique.
- Pour  $\text{prof}(\Gamma\{\}) > 0$  et  $0 \leq j < \text{prof}(\Gamma\{\})$ ,  $\text{pred}^{j+1}(\Gamma\{\}) = \text{pred}^j(\Gamma'\{\})$  où  $\Gamma'\{\} = \Gamma'\{\langle \Delta, \{\} \rangle\}$ .

La notion de prédécesseurs peut être décrite avec le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccc} \Gamma\{\} = \Delta_n, \langle \Delta_{n-1}, \langle \dots \langle \Delta_1, \langle \Delta_0, \{\} \rangle \rangle \dots \rangle \rangle & & & \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{pred}^n(\Gamma\{\}) & \text{pred}^{n-1}(\Gamma\{\}) & \text{pred}^1(\Gamma\{\}) & \text{pred}^0(\Gamma\{\}) \end{array}$$

**Définition 3.2.2.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle modal intuitionniste et  $w$  un élément de  $W$ . Une  $(w, k)$ -*chaîne* dans  $\mathcal{M}$  est une séquence de la forme  $d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$ , telle que pour tout  $m \in [0, k - 1]$ , on a  $R_w(d_m, d_{m+1})$ .*



Rappelons que la définition de modèle modal intuitionniste est fournie au chapitre 2. Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle de Kripke,  $w \in W$ ,  $\Gamma\{\}$  une 1-situation et  $c = d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  une  $(w, k)$ -chaîne dans  $\mathcal{M}$  avec  $k = \text{prof}(\Gamma\{\})$ . Nous écrivons  $w, c \vDash \Gamma\{\}$  si pour tout  $i \in [0, k]$ ,  $w, d_i \vDash \mathcal{F}(\text{pred}^{k-i}(\Gamma\{\}))$ .

**Proposition 3.2.5.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle modal intuitionniste,  $w \in W$ ,  $d \in D_w$ ,  $\Gamma\{\}$  une 1-situation ne contenant pas de formule marquée et  $c$  une  $(w, k)$ -chaîne avec  $k = \text{prof}(\Gamma\{\})$ . Si  $w, c \vDash \Gamma\{\}$  et  $w \leq w'$ , alors  $w', c \vDash \Gamma\{\}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $k$  (dans le cas  $k = 0$ , on utilise la monotonie de Kripke donnée dans la proposition 2.2.1).  $\square$

Les trois propositions suivantes ont pour objectif de capturer des propriétés qui seront utilisées dans la démonstration de la correction.

**Proposition 3.2.6.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle modal intuitionniste,  $w \in W$ ,  $d \in D_w$ ,  $\Gamma\{\}$  une 1-situation ne contenant pas de formule marquée.  $w, d \vDash \mathcal{F}(\Gamma\{\emptyset\})$  ssi  $(\Leftrightarrow)$  il existe une  $(w, k)$ -chaîne  $c = d \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  telle que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\})$  et  $w, c \vDash \Gamma\{\}$ .*

*Démonstration.* Partie  $(\Rightarrow)$ . Par induction sur la valeur de  $k$ . Si  $k = 0$  alors  $c = d$  et il existe un A-environnement  $\Delta$  tel que  $\Gamma = \Delta, \{\}$ . Puisque l'on a  $w, d \vDash \mathcal{F}(\Delta)$  ( $\Gamma\{\emptyset\} = \Delta$ ), on déduit que  $w, c \vDash \Gamma\{\}$ . Maintenant, on suppose que  $k = n + 1$  avec  $n \geq 0$ , ce qui implique qu'il existe une 1-situation  $\Gamma'\{\}$  et un A-environnement  $\Delta$  tels que  $\Gamma = \Delta, \langle \Gamma'\{\} \rangle$  et  $\text{prof}(\Gamma'\{\}) = n$ . Étant donné que  $w, d \vDash \mathcal{F}(\Gamma\{\emptyset\})$ , il existe  $d' \in D_w$  tel que  $R_w(d, d')$  et  $w, d' \vDash \mathcal{F}(\Gamma'\{\emptyset\})$ . En utilisant l'hypothèse d'induction, il existe une  $(w, n)$ -chaîne  $c = d' \rightarrow d'_1 \rightarrow \dots \rightarrow d'_n$  telle que  $w, c \vDash \Gamma'\{\}$ . Par conséquent, la  $(w, n + 1)$ -chaîne  $c' = d \rightarrow d' \rightarrow d'_1 \rightarrow \dots \rightarrow d'_n$  vérifie la propriété  $w, c' \vDash \Delta, \langle \Gamma'\{\} \rangle$ , ce qui correspond à  $w, c' \vDash \Gamma\{\}$ .

La partie  $(\Leftarrow)$  est également démontrée par une simple induction sur la valeur de  $k$  en utilisant la définition de  $\mathcal{F}(\Gamma\{\emptyset\})$ .  $\square$

**Proposition 3.2.7.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle modal intuitionniste,  $\Gamma\{C^+\}$  un A-séquent,  $w \in W$  et  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  une  $(w, k)$ -chaîne dans  $\mathcal{M}$  avec  $k = \text{prof}(\Gamma\{\})$ . Si  $w, c \vDash \Gamma\{\}$  et  $w, d_k \not\vDash C$ , alors  $w, d_0 \not\vDash \mathcal{F}(\Gamma\{C^+\})$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $k$ . Si  $k = 0$  alors on a  $c = d_0$  et il existe un A-environnement  $\Delta$  tel que  $\Gamma\{C^+\} = \Delta, C^+$ . En utilisant  $w, c \vDash \Gamma\{\}$  et  $w, d_k \not\vDash C$ , on a  $w, d_0 \vDash \mathcal{F}(\Delta)$  et  $w, d_0 \not\vDash C$ . Donc,  $w, d_0 \not\vDash \mathcal{F}(\Gamma\{C^+\})$ . On suppose maintenant que  $k = n + 1$  avec  $n \geq 0$ . Cela implique qu'il existe une 1-situation  $\Gamma'\{\}$  et A-environnement  $\Delta$  tels que  $\Gamma\{C^+\} = \Delta, \langle \Gamma'\{C^+\} \rangle$  et  $\text{prof}(\Gamma'\{\}) = n$ . En se servant de  $w, c \vDash \Gamma\{\}$  et  $\Gamma\{C^+\} = \Delta, \langle \Gamma'\{C^+\} \rangle$ , on obtient  $w, c' \vDash \Gamma'\{\}$  et  $w, d_0 \vDash \Delta$  avec  $c' = d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_{n+1}$  (une  $(w, n)$ -chaîne). En utilisant l'hypothèse d'induction, on a  $w, d_1 \not\vDash \mathcal{F}(\Gamma'\{C^+\})$ . Étant donné que  $w, d_0 \vDash \Delta$ , on obtient  $w, d_0 \not\vDash \mathcal{F}(\Delta) \supset \square(\mathcal{F}(\Gamma'\{C^+\}))$ . Comme  $\mathcal{F}(\Gamma\{C^+\}) = \mathcal{F}(\Delta) \supset \square(\mathcal{F}(\Gamma'\{C^+\}))$ , on a  $w, d_0 \not\vDash \mathcal{F}(\Gamma\{C^+\})$ .  $\square$

**Proposition 3.2.8.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un modèle modal intuitionniste,  $w \in W$ ,  $d_0 \in D_w$  et  $\Gamma\{C^+\}$  un A-séquent. Si  $w, d_0 \not\vDash \mathcal{F}(\Gamma\{C^+\})$  alors il existe  $w' \in W$  et une  $(w', k)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  tels que  $w \leq w'$ ,  $k = \text{prof}(\Gamma\{\})$ ,  $w', c \vDash \Gamma\{\}$  et  $w', d_k \not\vDash C$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $k$ . Si  $k = 0$  alors il existe un A-environnement  $\Delta$  tel que  $\Gamma\{C^+\} = \Delta, C^+$ . Ainsi, on a  $w, d_0 \models \mathcal{F}(\Delta)$  et  $w, d_0 \not\models C$ . Par conséquent, on a  $w, c \models \Gamma\{\}$  et  $w, d_0 \not\models C$  avec  $c = d_0$ . On suppose maintenant que  $k = n + 1$  avec  $n \geq 0$ , ce qui implique qu'il existe  $\Gamma'\{\}$  et  $\Delta$  tels que  $\Gamma\{C^+\} = \Delta, \langle \Gamma'\{C^+\} \rangle$  et  $\text{prof}(\Gamma'\{\}) = n$ . En utilisant  $w, d_0 \not\models \mathcal{F}(\Delta, \langle \Gamma'\{C^+\} \rangle)$  et la monotonie de Kripke (proposition 2.2.1), il existe  $w_1 \in W$  et  $d_1 \in D_{w_1}$  tels que  $w \leq w_1$ ,  $R_{w_1}(d_0, d_1)$ ,  $w_1, d_0 \models \mathcal{F}(\Delta)$  et  $w_1, d_1 \not\models \mathcal{F}(\Gamma'\{C^+\})$ . En utilisant l'hypothèse d'induction, il existe  $w' \in W$  et une  $(w', n)$ -chaîne  $c' = d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_{n+1}$  tels que  $w_1 \leq w'$ ,  $w', c' \models \Gamma'\{\}$  et  $w', d_{n+1} \not\models C$ . Ensuite, en se servant de  $w_1, d_0 \models \mathcal{F}(\Delta)$  et la monotonie de Kripke, on obtient  $w', d_0 \models \mathcal{F}(\Delta)$ . Par conséquent, on a  $w', c \models \Gamma\{\}$  et  $w', d_{n+1} \not\models C$  avec  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_{n+1}$ .  $\square$

**Théorème 3.2.1** (Correction). *Si un A-séquent a une preuve dans  $DN_{\text{IK}}$  alors il est valide dans  $\text{IK}$ .*

*Démonstration.* Nous ne développons que les cas de quelques règles. Les autres cas sont similaires ou plus simples.

Cas  $[\perp]$ . On suppose que  $\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}$  n'est pas valide dans  $\text{IK}$ . En utilisant la proposition 3.2.8, il existe un modèle de Kripke  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\emptyset\}\{\})$  et  $w, c \models \Gamma\{\emptyset\}\{\}$ . En utilisant la proposition 3.2.6, on a  $w, d_0 \models \mathcal{F}(\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\})$ . En se servant de la même proposition, on sait qu'il existe  $c' = d_0 \rightarrow d'_1 \rightarrow \dots \rightarrow d'_l$  tel que  $l = \text{prof}(\Gamma\{\}\{\emptyset\})$  et  $w, c' \models \Gamma\{\}\{\emptyset\}$ . En utilisant la proposition 3.2.7 et  $w, d'_l \not\models \perp$ , on obtient  $w, d_0 \not\models \mathcal{F}(\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\})$ .

Cas  $[\diamond_I]$ . On suppose que  $\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \diamond A^+\}$  n'est pas valide dans  $\text{IK}$ . En utilisant la proposition 3.2.8, il existe un modèle  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \{\}\})$ ,  $w, c \models \Gamma\{\langle \Delta \rangle, \{\}\}$  et  $w, d_k \not\models \diamond A$ . En utilisant  $w, c \models \Gamma\{\langle \Delta \rangle, \{\}\}$  et  $w, d_k \not\models \diamond A$ , il existe  $d_{k+1} \in D_w$  tel que  $R_w(d_k, d_{k+1})$ ,  $w, d_{k+1} \models \mathcal{F}(\Delta)$  et  $w, d_{k+1} \not\models A$ . Cela permet d'obtenir  $w, c' \models \Gamma\{\langle \Delta \rangle, \{\}\}$  et  $w, d_{k+1} \not\models A$  où  $c'$  est la  $(w, k + 1)$ -chaîne définie par  $c' = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k \rightarrow d_{k+1}$ . La proposition 3.2.7 permet de conclure que  $w, d_0 \not\models \mathcal{F}(\Gamma\{\langle \Delta \rangle, A^+\})$ .

Cas  $[\diamond_E]$ . On suppose que  $\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  n'est pas valide dans  $\text{IK}$ . Donc, il existe un modèle  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\emptyset\}\{\})$ ,  $w, c \models \Gamma\{\emptyset\}\{\}$  et  $w, d_k \not\models C$  (proposition 3.2.8). Si  $w, c \not\models \Gamma\{\diamond A\}\{\}$ , alors  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\Gamma\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}$ . Sinon, on a  $w, c \models \Gamma\{\diamond A\}\{\}$ , ce qui implique que  $w, c \models \Gamma\{\langle A \rangle\}\{\}$ . Étant donné que  $w, d_k \not\models C$ , on déduit que  $w, d_0 \not\models \mathcal{F}(\Gamma\{\langle A \rangle\}\{C^+\})$  (proposition 3.2.7).

Cas  $[\square_I]$ . On suppose que  $\Gamma\{\square A^+\}$  n'est pas valide dans  $\text{IK}$ . Donc, il existe un modèle  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\}\{\})$ ,  $w, c \models \Gamma\{\}\{\}$  et  $w, d_k \not\models \square A$  (proposition 3.2.8). En utilisant  $w, d_k \not\models \square A$ , il existe  $w' \in W$  et  $d_{k+1} \in D_w$  tels que  $w \leq w'$ ,  $R_{w'}(d_k, d_{k+1})$  et  $w', d_{k+1} \not\models A$ . Soit  $c'$  la  $(w', k + 1)$ -chaîne définie par  $c' = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k \rightarrow d_{k+1}$ . En utilisant la proposition 3.2.5 et  $w, c \models \Gamma\{\}\{\}$ , on a  $w', c' \models \Gamma\{\}\{\}$ . Cela permet de déduire que  $w, d_0 \not\models \mathcal{F}(\Gamma\{\langle A^+\})$  car  $w', d_{k+1} \not\models A$  (proposition 3.2.7).

Cas  $[\square_E]$ . On suppose que  $\Gamma\{\langle \Delta \rangle, A^+\}$  n'est pas valide dans  $\text{IK}$ . Donc il existe un modèle  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k + 1)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_{k+1}$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\}\{\})$ ,  $w, c \models \Gamma\{\langle \Delta \rangle, \{\}\}$  et  $w, d_{k+1} \not\models A$  (proposition 3.2.8). On a  $w, d_{k+1} \not\models A$  implique  $w, d_k \not\models \square A$ .



1.  $(\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B))^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\Box(A \supset B), \Box A, \langle \emptyset \rangle, \Box(A \supset B)^{\vdash}}{[id]} \quad \frac{}{\Box(A \supset B), \Box A, \langle \emptyset \rangle, \Box A^{\vdash}}{[id]}}{\Box(A \supset B), \Box A, \langle A \supset B^{\vdash} \rangle} [\Box_E] \quad \frac{}{\Box(A \supset B), \Box A, \langle A^{\vdash} \rangle} [\Box_E]}{\Box(A \supset B), \Box A, \langle B^{\vdash} \rangle} [\Box_E]}{\Box(A \supset B), \Box A, \Box B^{\vdash}} [\Box_I]}{\Box(A \supset B), \Box A \supset \Box B^{\vdash}} [\supset_I]}{\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)^{\vdash}} [\supset_I]$$

2.  $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \Diamond A^{\vdash}}{[id]} \quad \mathcal{D}}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \Diamond B^{\vdash}} [\Diamond_E]}{\Box(A \supset B), \Diamond A \supset \Diamond B^{\vdash}} [\supset_I]}{\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)^{\vdash}} [\supset_I]$$

avec

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\frac{\frac{}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A \rangle, \Box(A \supset B)^{\vdash}}{[id]} \quad \frac{}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A, A^{\vdash} \rangle} [\Box_E]}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A, B^{\vdash} \rangle} [\Box_E]}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A \rangle, \Diamond B^{\vdash}} [\Diamond_I]}{\Box(A \supset B), \Diamond A, \langle A \rangle, \Diamond B^{\vdash}} [\Diamond_I]} \right.$$

3.  $\Diamond \perp \supset \perp^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Diamond \perp, \Diamond \perp^{\vdash}}{[id]} \quad \frac{\frac{}{\Diamond \perp, \langle \perp, \perp^{\vdash} \rangle} {[\perp]} \quad \frac{}{\Diamond \perp, \langle \perp \rangle, \perp^{\vdash}} {[\perp]}}{\Diamond \perp, \langle \perp \rangle, \perp^{\vdash}} [\Diamond_E]}{\Diamond \perp, \perp^{\vdash}} [\Diamond_E]}{\Diamond \perp \supset \perp^{\vdash}} [\supset_I]$$

4.  $\Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B)^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B), \Diamond(A \vee B)^{\vdash}}{[id]} \quad \frac{\frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B), \langle A \vee B, A \vee B^{\vdash} \rangle} {[id]} \quad \mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}}{\Diamond(A \vee B), \langle A \vee B \rangle, \Diamond A \vee \Diamond B^{\vdash}} [\vee_E]}{\Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \Diamond B^{\vdash}} [\Diamond_E]}{\Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B)^{\vdash}} [\supset_I]$$

avec

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, A, A^+ \rangle}}}}{\overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, A \rangle, \diamond A^+}}} [id] \\ \overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, A \rangle, \diamond A^+}} [\diamond_I] \\ \overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, A \rangle, \diamond A \vee \diamond B^+}} [\vee_I^1] \end{array} \right.$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, B, B^+ \rangle}}}}{\overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, B \rangle, \diamond B^+}}} [id] \\ \overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, B \rangle, \diamond B^+}} [\diamond_I] \\ \overline{\overline{\langle \diamond(A \vee B), \langle A \vee B, B \rangle, \diamond A \vee \diamond B^+}} [\vee_I^2] \end{array} \right.$$

5.  $(\diamond A \supset \square B) \supset \square(A \supset B)^+$  :

$$\frac{\overline{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A \rangle, \diamond A \supset \square B^+}}} [id] \quad \frac{\overline{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A, A^+ \rangle}}}}{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A \rangle, \diamond A^+}}} [id] \quad \overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A \rangle, \diamond A^+}} [\diamond_I]}{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A \rangle, \square B^+}}} [\supset_E]} [\square_E]$$

$$\frac{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A \rangle, \square B^+}}} [\square_E]}{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \langle A, B^+ \rangle}}} [\supset_I]} [\supset_I]$$

$$\frac{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B^+, \langle A \supset B^+ \rangle}}} [\supset_I]}{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \square(A \supset B)^+}}} [\square_I]} [\square_I]$$

$$\frac{\overline{\overline{\langle \diamond A \supset \square B, \square(A \supset B)^+}}} [\square_I]}{(\diamond A \supset \square B) \supset \square(A \supset B)^+} [\supset_I]$$

□

La règle de *modus ponens* est admissible dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ , car elle n'est autre qu'un cas particulier de la règle  $[\supset_E]$ . Dans la proposition suivante nous démontrons l'admissibilité de la règle de nécessité.

**Proposition 3.2.11.** *Si  $A^+$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$  alors  $\square A^+$  en a aussi une.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent valide dans  $\mathbb{IK}$  et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . Par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ , on peut démontrer que le A-séquent  $\langle \mathcal{S} \rangle$  a aussi une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . En étendant une preuve quelconque de  $\langle A^+ \rangle$  par une application de la règle  $[\square_I]$ , on obtient une preuve pour  $\square A^+$ . □

**Théorème 3.2.2.** *Si  $A$  est une formule valide dans  $\mathbb{IK}$  alors le A-séquent  $A^+$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ .*

*Démonstration.* On considère la validité dans  $\mathbb{IK}$  à travers son axiomatisation décrite au chapitre 2. La démonstration est par induction sur la structure de la preuve de  $A$  dans cette dernière.

En utilisant les propositions 3.2.9 et 3.2.10, si  $A$  est un axiome alors  $A^+$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . Sinon, on considère les deux cas de la dernière règle appliquée, à savoir  $[mp]$  et  $[nec]$ .

Si cette règle est  $[mp]$  :  $\frac{A \supset B \quad A}{B}$ , alors en utilisant l'hypothèse d'induction, les deux

A-séquents  $A \supset B^+$  et  $A^+$  ont des preuves dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . Ensuite, en appliquant la règle  $[\supset_E]$  avec comme prémisses  $A \supset B^+$  et  $A^+$ , on obtient une preuve de  $B^+$  dans  $DN_{\mathbb{IK}}$ . Sinon, la dernière règle appliquée est  $[nec]$  :  $\frac{A}{\square A}$ . En utilisant l'hypothèse d'induction, le A-séquent  $A^+$  a une

preuve dans  $DN_{\mathbb{K}}$ . L'utilisation de la proposition 3.2.11 permet de déduire que  $\Box A^\dagger$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{K}}$ .  $\square$

**Théorème 3.2.3** (Complétude). *Si un A-séquent est valide dans  $\mathbb{K}$  alors il a une preuve dans  $DN_{\mathbb{K}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}$  un A-séquent valide dans  $\mathbb{K}$ . Alors sa formule correspondante  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  est également valide dans  $\mathbb{K}$ . En utilisant le théorème 3.2.2, on sait que le A-séquent  $\mathcal{F}(\mathcal{S})^\dagger$  a une preuve dans  $DN_{\mathbb{K}}$ . L'utilisation des propositions 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4 permet de déduire que  $\mathcal{S}$  a aussi une preuve dans  $DN_{\mathbb{K}}$ .  $\square$

### 3.2.3 Normalisation de $DN_{\mathbb{K}}$

Après avoir démontré la correction et la complétude, nous étudions maintenant la normalisation dans le système  $DN_{\mathbb{K}}$ . Dans un premier temps, nous définissons des outils qui nous permettront de présenter les étapes de la normalisation d'une façon claire et compacte. Ensuite, nous décrivons le procédé de normalisation en fournissant les règles qui la composent. Enfin, nous démontrons le théorème de normalisation, à savoir que toute preuve peut être réécrite en une preuve en forme normale.

Nous savons que le A-environnement d'un A-séquent peut contenir plusieurs occurrences d'une même formule. Dans la procédure de normalisation, il est important de différencier ces occurrences. Afin de parvenir à cela, nous indexons toute occurrence de formule dans les A-environnements par une variable de sorte que si  $x : A$  et  $y : B$  sont deux différentes occurrences dans un A-environnement, alors  $x \neq y$ . Nous notons  $Var(\mathcal{S})$  l'ensemble des variables indexant les formules de  $\mathcal{S}$ .

Pointons maintenant certains problèmes posés par cette indexation. Soient  $\mathcal{S} = A \supset A^\dagger$  et  $\mathcal{S}' = x : B, A \supset A^\dagger$  deux A-séquents et  $\mathcal{D}$  la preuve suivante de  $\mathcal{S}$  :

$$\frac{\frac{}{x : A, A^\dagger} [id]}{A \supset A^\dagger} [\supset_I]$$

La preuve  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w$  de  $\mathcal{S}'$  est :

$$\frac{\frac{}{x : B, x : A, A^\dagger} [id]}{x : B, A \supset A^\dagger} [\supset_I]$$

Nous remarquons que  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_w$  contient un A-séquent avec un A-environnement contenant deux occurrences de formules différentes indexées par la même variable  $x$ . Pour éviter ce problème, nous associons une fonction de renommage à l'affaiblissement.

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux A-séquents tels que  $\mathcal{S} \rightarrow_w^* \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$ . Nous notons  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_r$  toute preuve de  $\mathcal{S}$  obtenue à partir de  $\mathcal{D}$  en renommant toutes les variables qui sont dans  $Var(\mathcal{S}') \setminus Var(\mathcal{S})$  par des variables fraîches en respectant la contrainte qui consiste à ne pas renommer deux variables différentes avec une même variable. Ensuite, nous définissons  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{rw}$  comme toute preuve correspondant à  $(\mathcal{D}[\mathcal{S}']_r)[\mathcal{S}']_w$ . Illustrons cette solution sur le précédent exemple :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\overline{x : A, A^\perp} [id]}{A \supset A^\perp} [\supset_I] \quad \mathcal{D}[S']_r = \left\{ \frac{\overline{y : A, A^\perp} [id]}{A \supset A^\perp} [\supset_I] \quad \mathcal{D}[S']_{rw} = \left\{ \frac{\overline{x : B, y : A, A^\perp} [id]}{x : B, A \supset A^\perp} [\supset_I] \right. \right. \right.$$

Soient  $\mathcal{S} = \Gamma\{\Delta\}\{C^\perp\}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$ . Nous notons  $\mathcal{D} - \{\Delta\}$  l'arbre obtenu à partir de  $\mathcal{D}$  par la suppression de  $\Delta$  de tous les A-séquents de  $\mathcal{D}$ . Cet arbre est une preuve de  $\Gamma\{\emptyset\}\{C^\perp\}$  uniquement dans le cas où ses feuilles sont toutes étiquetées par des instances de  $[id]$ .

Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux preuves de respectivement  $\mathcal{S} = \Gamma\{x : A\}\{C^\perp\}$  et  $\mathcal{S}' = \Gamma\{A^\perp\}\{\emptyset\}$ . Nous pouvons voir que toute feuille de  $\mathcal{D}$  est étiquetée par un A-séquent qui est soit de la forme  $\Gamma\{x : A, A^\perp\}$  telle que  $\Gamma\{A^\perp\}\{\emptyset\} \rightarrow_w \Gamma\{A^\perp\}$ , soit de la forme  $\Gamma\{x : A\}\{y : D, D^\perp\}$ . Nous notons  $\mathcal{D}[\mathcal{D}'/x]$  l'arbre construit comme suit :

- (i) remplacer toute feuille étiquetée par un A-séquent de la forme  $\Gamma\{x : A, A^\perp\}$  par  $\mathcal{D}'[\Gamma\{A^\perp\}]_{rw}$  ;
- (ii) supprimer  $x : A$  de tous les A-séquents de l'arbre résultant.

Nous pouvons aisément démontrer que  $\mathcal{D}[\mathcal{D}'/x]$  est une preuve de  $\Gamma\{\emptyset\}\{C^\perp\}$ . Cela vient principalement du fait que les instances de  $[id]$  de la forme  $\Gamma\{x : A\}\{y : C, C^\perp\}$  restent des axiomes même après la suppression de  $x : A$ .

Dans ce qui suit, nous utilisons le terme *règles de déchargement* pour parler des règles  $[\supset_I]$ ,  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$ . En fait, il n'y a pas de déchargement d'hypothèses tel que nous le connaissons dans les systèmes standard de déduction naturelle car les prémisses et les conclusions de nos règles ne sont pas de simples formules. Cependant, les règles  $[\supset_I]$ ,  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$  internalisent des déchargements d'hypothèses. Effectivement, cela se traduit par le fait que dans chacune de ces règles, il y a des formules apparaissant dans les A-environnements de certaines prémisses mais pas dans celui de la conclusion. Ce que nous déchargeons, dans le cas de notre système, ce sont des A-séquents étiquetant des feuilles. En réalité, nous considérons que chaque application de  $[\supset_I]$ ,  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$  décharge les A-séquents qui sont à l'origine de l'introduction des formules apparaissant dans les A-environnements de certaines de ses prémisses mais pas dans celui de sa conclusion.

**Définition 3.2.3.** Soient  $\mathcal{D}$  une preuve dans  $\mathbb{IK}$ ,  $f$  une feuille de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{S}$  le A-séquent étiquetant  $f$  et  $\alpha$  une application d'une règle de déchargement dans  $\mathcal{D}$ . On dit que  $\mathcal{S}$  est déchargé par  $\alpha$  si  $\mathcal{S}$  n'est pas déchargé par une autre règle appliquée avant  $\alpha$ ,  $f$  et la conclusion de  $\alpha$  sont dans une même branche et une des propriétés suivantes est satisfaite :

1.  $\alpha$  est une application de  $[\supset_I]$  et il existe deux 1-situations  $\Gamma\{\}$  et  $\Gamma'\{\}$ , deux formules  $A$  et  $B$ , et une variable  $x$  telles que  $\mathcal{S} = \Gamma'\{x : A, A^\perp\}$ ,  $\Gamma\{x : A, B^\perp\}$  est la prémisses de  $\alpha$  et  $\Gamma\{A \supset B^\perp\}$  est la conclusion de  $\alpha$ .
2.  $\alpha$  est une application de  $[\vee_E]$  et il existe une 2-situation  $\Gamma\{\}\{\}$ , une 1-situations  $\Gamma'\{\}$ , trois formules  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et une variable  $x$  telles que  $\mathcal{S} = \Gamma'\{x : A, A^\perp\}$ ,  $\Gamma\{F^\perp\}\{\emptyset\}$  est la prémisses majeure de  $\alpha$  avec  $F$  égale à  $A \vee B$  ou  $B \vee A$  et  $\Gamma\{x : A\}\{C^\perp\}$  est une des deux prémisses mineures de  $\alpha$  (cette prémisses appartient forcément à la même branche que  $f$ ).
3.  $\alpha$  est une application de  $[\diamond_E]$  et il existe une 2-situation  $\Gamma\{\}\{\}$ , une 1-situations  $\Gamma'\{\}$ , deux formules  $A$  et  $C$ , et une variable  $x$  telles que  $\mathcal{S} = \Gamma'\{x : A, A^\perp\}$ ,  $\Gamma\{\diamond A^\perp\}\{\emptyset\}$  est la

prémisse majeure de  $\alpha$  et  $\Gamma\{x : A\}\{C^{\perp}\}$  est la prémisse mineure de  $\alpha$  (cette prémisse appartient forcément à la même branche que  $f$ ).

Illustrons cette définition par un exemple. Soit  $\mathcal{D}$  la preuve suivante :

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A \rangle, \Box(A \supset B)^{\perp}} [id]}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A, A \supset B^{\perp} \rangle} [\Box_E]}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A, A^{\perp} \rangle} [id]}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \Diamond A^{\perp}} [id] \\
\frac{\frac{\frac{}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A, B^{\perp} \rangle} [\Diamond_I]}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A \rangle, \Diamond B^{\perp}} [\Diamond_E]}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \Diamond B^{\perp}} [\Diamond_E]}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \Diamond B^{\perp}} [\supset_I] \\
\frac{\frac{}{x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \Diamond B^{\perp}} [\supset_I]}{x : \Box(A \supset B), \Diamond A \supset \Diamond B^{\perp}} [\supset_I] \\
\frac{}{\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)^{\perp}} [\supset_I]
\end{array}$$

Dans cette preuve, le A-séquent  $x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \Diamond A^{\perp}$  est déchargé par la première application de  $[\supset_I]$ . Quant au A-séquent  $x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A \rangle, \Box(A \supset B)^{\perp}$ , il est déchargé par la deuxième application de  $[\supset_I]$ . L'application de  $[\Diamond_E]$  décharge le A-séquent  $x : \Box(A \supset B), y : \Diamond A, \langle z : A, A^{\perp} \rangle$ .

Rappelons qu'un détour dans une preuve correspond une application d'une règle introduisant un opérateur suivie immédiatement par une application de règle éliminant ce dernier. En outre, le but principal de la normalisation est l'élimination de tous les détours dans une preuve.

En vue de démontrer la propriété de normalisation pour le système  $DN_{\text{IK}}$ , nous suivons une approche similaire à celle de Prawitz [110] (voir également [121]). Dans un premier temps, nous introduisons la notion de segment qui correspond à une adaptation de la notion de Prawitz portant le même nom. Ensuite, nous définissons la notion de coupure qui est un cas particulier de celle de segment. En fait, les détours sont des cas particuliers de coupures et la normalisation consiste à éliminer toutes les coupures d'une preuve. Après avoir introduit la notion de segment ainsi que celle de coupure, nous présentons les règles de notre procédure de normalisation. Enfin, nous démontrons le théorème de normalisation.

**Définition 3.2.4** (Segment). *Un segment de longueur  $n$  dans une preuve  $\mathcal{D}$  dans  $DN_{\text{IK}}$  est une séquence  $\Gamma_1\{A^{\perp}\}, \dots, \Gamma_n\{A^{\perp}\}$  d'occurrences consécutives de A-séquents dans  $\mathcal{D}$  telle que*

- pour  $n > 1$  et  $n > i$ ,  $\Gamma_i\{A^{\perp}\}$  est une prémisse mineure d'une application de  $[\vee_E]$  ou de  $[\Diamond_E]$  dans  $\mathcal{D}$  ayant comme conclusion  $\Gamma_{i+1}\{A^{\perp}\}$ ,
- $\Gamma_1\{A^{\perp}\}$  n'est pas la conclusion d'une application de  $[\vee_E]$  ou de  $[\Diamond_E]$ ,
- $\Gamma_n\{A^{\perp}\}$  n'est pas une prémisse mineure d'une application de  $[\vee_E]$  ou de  $[\Diamond_E]$ .

Il est important de noter que les A-séquents d'un segment ont tous la même conclusion. Nous appelons cette dernière la conclusion du segment et nous la notons  $C(\sigma)$  où  $\sigma$  est le segment en question. On dit qu'un segment est une prémisse (resp. la conclusion) d'une application de règle si son dernier élément (resp. premier élément) est une prémisse (resp. la conclusion) de cette application. De plus, on dit qu'un segment  $\sigma$  est une sous-formule d'un segment  $\sigma'$  si  $C(\sigma)$  est une sous-formule de  $C(\sigma')$ .

Un segment est une **coupure** si  $\Gamma_n\{A^{\perp}\}$  est la prémisse majeure d'une application d'une



règle d'élimination, et soit  $n > 1$ , soit  $n = 1$  et  $\Gamma_1\{A^+\}$  est la conclusion d'une application d'une règle d'introduction ou de la règle  $[\perp]$ . Le **rang d'une coupure**  $\sigma$ , noté  $cr(\sigma)$ , est défini par la valeur de la complexité de sa conclusion  $|C(\sigma)|$ . En outre, le **rang d'une preuve**  $\mathcal{D}$ , noté  $cr(\mathcal{D})$ , est le maximum des rangs des coupures de  $\mathcal{D}$  (0 si  $\mathcal{D}$  ne contient aucune coupure). Une **coupure critique** dans une preuve  $\mathcal{D}$  est une coupure dont le rang est égal à celui de  $\mathcal{D}$ . Une preuve est dite en **forme normale** si elle ne contient aucune coupure.

Nous présentons maintenant les règles qui seront utilisées pour démontrer la normalisation. Dans un premier temps, nous décrivons les règles de **réduction**. Ces dernières servent à éliminer les coupures de longueur égale à 1 (détours). Ensuite, nous décrivons les règles de **permutation** qui servent à diminuer les longueurs des coupures ayant des longueurs supérieures à 1. Enfin, nous décrivons les règles de **simplification** qui ne sont pas nécessaires pour démontrer la normalisation, toutefois, elles permettent d'éliminer certaines applications de règles inutiles.

Les règles de réduction sont :

–  $\wedge$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{A_1^+\}} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{A_2^+\}}}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2^+\}} [\wedge_I] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}_i}{\Gamma\{A_i^+\}} \text{ pour } i \in \{1, 2\}.$$

$$\frac{\Gamma\{A_1 \wedge A_2^+\}}{\Gamma\{A_i^+\}} [\wedge_E^i]$$

–  $\vee$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{A_i^+\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{A_1 \vee A_2^+\}\{\emptyset\}} [\vee_I^i] \quad \frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{x : A_1\}\{C^+\}} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{x : A_2\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\vee_E]$$

$$\sim \quad \frac{\mathcal{D}_i[x/\mathcal{D}]}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} \text{ pour } i \in \{1, 2\}.$$

–  $\supset$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{x : A, B^+\}}}{\Gamma\{A \supset B^+\}} [\supset_I] \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{A^+\}}}{\Gamma\{B^+\}} [\supset_E] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}_1[x/\mathcal{D}_2]}{\Gamma\{B^+\}}$$

–  $\Box$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \langle A^+\rangle\}}}{\frac{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \Box A^+\}}{\Gamma\{\langle\Delta, A^+\rangle\}} [\Box_E]} [\Box_I] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{\langle\Delta, A^+\rangle\}]_m}{\Gamma\{\langle\Delta, A^+\rangle\}}$$

–  $\diamond$ -réduction :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\langle\Delta, A^+\rangle\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \diamond A^+\}\{\emptyset\}} [\diamond_I] \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \langle x : A \rangle\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle\}\{C^+\}} [\diamond_E]}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle\}\{C^+\}} \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{\langle\Delta, x : A \rangle\}\{C^+\}]_m$ .

Les règles de permutation sont :

–  $\vee$ -permutation :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{A \vee B^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{x : A\}\{C^+\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{y : B\}\{C^+\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}\{\emptyset\}} [\vee_E] \quad \mathcal{D}'}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [R_E] \quad \sim$$

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{A \vee B^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{x' : A\}\{C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{x' : A\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [\mathcal{D}'_1] [R_E] \quad \frac{\frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{y' : B\}\{C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{y' : B\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [\mathcal{D}'_2] [R_E]}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [\vee_E]}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [R_E] \quad \sim$$

où  $[R_E]$  est une règle d'élimination,  $\mathcal{D}'$  est une séquence de preuves éventuellement vide et  $\mathcal{D}'_1$  (resp.  $\mathcal{D}'_2$ ) est la séquence de preuves obtenue par l'ajout de  $x' : A$  (resp.  $y' : B$ ) aux A-séquents des preuves dans  $\mathcal{D}'$  avec  $x'$  (resp.  $y'$ ) est une variable fraîche qui n'apparaît pas dans  $\mathcal{D}'$ . L'utilisation de variables fraîches vient du fait que  $x$  et  $y$  peuvent apparaître dans  $\mathcal{D}'$ .

–  $\diamond$ -permutation :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\langle x : A \rangle\}\{C^+\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}\{\emptyset\}} [\diamond_E] \quad \mathcal{D}'}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [R_E]$$

$$\sim \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{x:A\}\{C^+\}\{\emptyset\}} \quad \mathcal{D}''}{\Gamma\{x:A\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [R_E]}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{D^+\}} [\diamond_E]$$

où  $[R_E]$  est une règle d'élimination,  $\mathcal{D}'$  est une séquence de preuves éventuellement vide et  $\mathcal{D}''$  est la séquence de preuves obtenue par l'ajout de  $x' : A$  aux A-séquents des preuves dans  $\mathcal{D}'$  avec  $x'$  est une variable fraîche qui n'apparaît pas dans  $\mathcal{D}'$ .

–  $\perp$ -permutation :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}} [\perp] \quad \mathcal{D}'}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}\{\emptyset\}} [R_E - \perp] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}} [\perp] \quad \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}} [\perp]$$

où  $[R_E - \perp]$  est une règle d'élimination ou  $[\perp]$ .

**Les règles de simplification sont :**

–  $\vee$ -simplification :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{A_1 \vee A_2^+\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{x:A_1\}\{C^+\}} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{x:A_2\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\vee_E] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}_i - \{x:A_i\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} \text{ pour } i \in \{1, 2\}$$

où il n'y a aucun A-séquent déchargé par  $[\vee_E]$  dans  $\mathcal{D}_i$ . L'absence de A-séquent déchargé reflète l'inutilité de la présence de  $x : A_i$  dans les A-séquents de  $\mathcal{D}_i$ .

–  $\diamond$ -simplification :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{x:A_1\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\diamond_E] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}' - \{x:A\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}}$$

où il n'y a aucun A-séquent dans  $\mathcal{D}'$  contenant un sous-arbre de la forme  $x : A, \Delta$  avec  $\Delta \neq \emptyset$ . Dans le cas de la disjonction, la règle de simplification élimine uniquement une occurrence de formule, alors que dans le cas de  $\diamond$  la simplification correspond à

l'élimination du A-environnement  $\langle x : A \rangle$ . La précédente condition imposée sur  $\mathcal{D}'$  pour appliquer la simplification exprime le fait que non seulement l'occurrence de formule  $x : A$  qui est inutile mais tout le A-environnement  $\langle x : A \rangle$ .

**Théorème 3.2.4** (Normalisation). *Toute preuve  $\mathcal{D}$  dans  $DN_{\text{IK}}$  se réduit à une preuve en forme normale.*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de la paire  $(n, m)$  où  $n = cr(\mathcal{D})$  et  $m$  est la somme des longueurs de toutes les coupures critiques de  $\mathcal{D}$ . On dit que la paire  $(n', m')$  est plus petite que  $(n, m)$  si soit  $n' < n$ , soit  $n' = n$  et  $m' < m$ .

Soit  $\sigma$  la coupure critique la plus à droite n'ayant aucune autre coupure critique au-dessus d'elle dans  $\mathcal{D}$ . L'application d'une règle de réduction, de permutation ou de simplification à  $\sigma$  dans  $\mathcal{D}$  produit une preuve  $\mathcal{D}'$  où  $cr(\mathcal{D}') < n$  ou la somme des longueurs de toutes les coupures critiques de  $\mathcal{D}'$  est plus petite que  $m$ . Assurément, si  $\sigma$  est l'unique coupure critique dans  $\mathcal{D}$  ayant une longueur 1, alors par application de la règle de réduction correspondante, on obtient forcément une preuve de rang plus petit que  $n$ . Sinon, l'application d'une règle permutation ou de réduction à  $\sigma$  dans  $\mathcal{D}$  produit une preuve où la somme des longueurs de toutes les coupures critiques est plus petite que  $m$ .

En guise d'exemple, considérons le cas de  $\diamond$ -réduction :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \diamond A^+ \}\{\emptyset\}} [\diamond_I] \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \langle x : A \rangle\}\{C^+\}} [\diamond_E]}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle\}\{C^+\}} \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{\langle \Delta, x : A \rangle\}\{C^+\}]_m$ .

Étant donné que  $\sigma$  est la coupure critique la plus à droite,  $\mathcal{D}_2$  ne contient aucune coupure critique. Par conséquent,  $\mathcal{D}'_2$  n'en contient aucune également. De plus,  $\mathcal{D}_1$  n'en contient aucune car il n'y a aucune coupure critique au-dessus de  $\sigma$ . On voit aussi que si une coupure est introduite par l'application de  $\diamond$ -réduction, alors cette dernière a forcément comme conclusion  $A$ . Ainsi, la valeur de son rang est plus petite que  $n$ . Tout cela nous permet de déduire que  $\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]$  ne contient aucune coupure de rang supérieur ou égal à  $n$ .  $\square$

### 3.3 Un système de déduction naturelle quasi-modulaire

Dans cette partie, nous proposons un système de déduction naturelle quasi-modulaire pour les logiques modales intuitionnistes formées à partir de toutes les combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. La notion de *modularité* est fondée sur l'association de règles aux axiomes. Ainsi, dans le cas des logiques traitées ici, on dirait qu'un système est modulaire si nous avons un système pour  $\text{IK}$  tel que pour tout sous-ensemble  $\text{Th}$  de  $\{T, B, 4, 5\}$ , l'ajout des règles associées aux axiomes dans  $\text{Th}$  au système de  $\text{IK}$  fournit un système pour la logique  $\text{IKTh}$ .

Par exemple, dans le cas des logiques modales classiques formées à partir de ces mêmes axiomes, un calcul des séquents modulaire fondé sur la structure de séquent profond a été proposé dans [22]. Nous qualifions notre système de *quasi-modulaire* car les logiques  $\text{IB4}$  et  $\text{IS5}$  sont traitées séparément. Autrement dit, la modularité nous ne l'avons que pour les logiques

différentes de ces deux dernières.

$\frac{\Gamma\{\Box A^+\}}{\Gamma\{A^+\}} \quad [\Box_E^T]$	$\frac{\Gamma\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}} \quad [\Diamond_I^T]$
$\frac{\Gamma\{\langle \Delta, \Box A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}} \quad [\Box_E^B]$	$\frac{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta, \Diamond A^+ \rangle\}} \quad [\Diamond_I^B]$
$\frac{\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \Box A^+\}}{\Gamma\{\Delta\{A^+\}\}} \quad [\Box_E^4](\text{prof}(\Delta\{\}) > 1)$	$\frac{\Gamma\{\Delta\{A^+\}\}}{\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \Diamond A^+\}} \quad [\Diamond_I^4](\text{prof}(\Delta\{\}) > 1)$
$\frac{\Gamma\{\Box A^+\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}} \quad [\Box_E^5](\text{prof}(\Gamma\{\}\{\emptyset\}) > 0 \text{ et } \text{prof}(\Gamma\{\emptyset\}\{\}) > 0)$	
	$\frac{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Diamond_I^5](\text{prof}(\Gamma\{\}\{\emptyset\}) > 0 \text{ et } \text{prof}(\Gamma\{\emptyset\}\{\}) > 0)$
$\frac{\Gamma\{\Box A^+\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}} \quad [\Box_E^{\text{IB4}}](\text{sp}(\Gamma\{\Box A^+\}\{\emptyset\}))$	$\frac{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Diamond_I^{\text{IB4}}](\text{sp}(\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}\{\}))$
$\frac{\Gamma\{\Box A^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}} \quad [\Box_E^{\text{IS5}}]$	$\frac{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Diamond_I^{\text{IS5}}]$

FIG. 3.2 – Règles modales

À chaque logique  $\text{IKTh}$ , avec  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous associons le système  $DN_{\text{IKTh}}$  obtenu en utilisant les règles décrites en figure 3.2 de la manière suivante :

- si  $\text{IKTh}$  est **IS5** alors  $DN_{\text{IKTh}}$  est obtenu à partir de  $DN_{\text{IK}}$  en remplaçant les règles  $[\Box_E]$  et  $[\Diamond_I]$  par les règles  $[\Box_E^{\text{IS5}}]$  et  $[\Diamond_I^{\text{IS5}}]$ ;
- si  $\text{IKTh}$  est **IB4** alors  $DN_{\text{IKTh}}$  est obtenu à partir de  $DN_{\text{IK}}$  en remplaçant les règles  $[\Box_E]$  et  $[\Diamond_I]$  par les règles  $[\Box_E^{\text{IB4}}]$  et  $[\Diamond_I^{\text{IB4}}]$ ;
- sinon  $DN_{\text{IKTh}}$  est obtenu en ajoutant à  $DN_{\text{IK}}$  les règles  $[\Box_E^x]$  et  $[\Diamond_I^x]$  pour tout  $x \in \text{Th}$ .

Précisons que les six règles  $[\Box_E^4]$ ,  $[\Diamond_I^4]$ ,  $[\Box_E^5]$ ,  $[\Diamond_I^5]$ ,  $[\Box_E^{\text{IB4}}]$  et  $[\Diamond_I^{\text{IB4}}]$  ne peuvent être appliquées que si un certain nombre de conditions sont satisfaites. Par exemple, nous ne pouvons appliquer la règle  $[\Box_E^{\text{IB4}}]$  que dans le cas où elle satisfait la condition  $\text{sp}(\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\})$ .

Comme nous l'avons noté précédemment, dans le cas de la logique **IK**, nous considérons qu'un contexte  $\mathcal{C}'$  est accessible à partir d'un autre contexte  $\mathcal{C}$  dans un séquent  $\mathcal{S}$  si  $\mathcal{C}'$  est un fils de  $\mathcal{C}$  dans le A-environnement de  $\mathcal{S}$ . Dans ce cadre, les règles modales décrites en figure 3.2 internalisent les propriétés de la relation d'accessibilité associées aux axiomes **T**, **B**, **4** et **5**. Par exemple, la paire de règles  $[\Box_E^4]$  et  $[\Diamond_I^4]$  internalise la propriété de transitivité. Effectivement, si un contexte  $\mathcal{C}'$  est le fils d'un contexte  $\mathcal{C}$  dans le A-environnement d'un A-séquent  $\mathcal{S}$ , alors tous les contextes se trouvant dans le sous-arbre  $sb$  ayant comme racine  $\mathcal{C}'$  sont accessibles à partir de  $\mathcal{C}$ . Cela est reflété par le fait que si une formule  $\Box A$  est vraie dans  $\mathcal{C}$  alors, via les règles  $[\Box_E]$  et  $[\Box_E^4]$ , la formule  $A$  est vraie dans n'importe quel contexte dans  $sb$ . De plus, en utilisant les règles  $[\Diamond_I]$  et  $[\Diamond_I^4]$ , si une formule  $A$  est vraie dans un quelconque contexte dans

*sb*, alors  $\diamond A$  est vraie dans  $\mathcal{C}$ .

Il est à noter que pour tout sous-ensemble  $\text{Th}$  de  $\{T, B, 4, 5\}$ , le système obtenu en ajoutant les règles  $[\Box^x_E]$  et  $[\Diamond^x_I]$  pour tout  $x \in \text{Th}$  à  $DN_{\text{IK}}$  est un système correct et complet pour la logique  $\text{IKTh}$ . Cependant, tous les systèmes définis de cette manière ne vérifient pas la propriété de normalisation. Ceci est le cas des deux logiques **IB4** et **IS5**. Par exemple, considérons la preuve suivante dans le cas où  $\text{Th} = \{T, 5\}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\Box A, \Box A^+} [\text{id}]}{\Box A, \Box A^+} [\Diamond^T_I]}{\Box A, \Diamond \Box A^+} [\Diamond^T_I]}{\Box A, \Box \Box A^+} [\Diamond_E]}{\Box A, \langle \Box A, \Box A^+ \rangle, \langle \langle \rangle \rangle} [\text{id}]}{\Box A, \langle \Box A \rangle, \langle \langle A^+ \rangle \rangle} [\Box^5_E]}{\Box A, \langle \Box A \rangle, \langle \Box A^+ \rangle} [\Box_I]}{\Box A, \langle \Box A \rangle, \Box \Box A^+} [\Box_I]}{\Box A, \Box \Box A^+} [\Diamond_E]}{\Box A \supset \Box \Box A^+} [\supset_I]$$

Nous remarquons qu'il existe une application d'une règle d'introduction ( $[\Diamond^T_I]$ ) ayant comme conclusion la prémisse majeure d'une application d'une règle d'élimination ( $[\Diamond_E]$ ). Comme nous l'avons vu précédemment, la normalisation consiste, en partie, à éliminer ce genre de détours. Dans le cas de la précédente preuve, il est impossible d'éliminer ce détour en utilisant seulement les règles du système obtenu par l'ajout uniquement des règles associées aux axiomes  $T$  et  $5$ .

**Théorème 3.3.1** (Correction). *Si un  $A$ -séquent a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ , alors il est valide dans  $\text{IKTh}$ .*

*Démonstration.* Les règles correctes dans  $\text{IK}$  le sont forcément dans toutes les logiques  $\text{IKTh}$  avec  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ . Ainsi, il suffit de démontrer uniquement la correction des autres règles. La démarche suivie est la même que celle décrite dans la démonstration du théorème 3.2.1. On note que les propositions 3.2.6, 3.2.7 et 3.2.8 sont aussi vraies dans le cas de toutes les logiques formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ ,  $4$  et  $5$ . Nous ne développons ici que les cas des règles  $[\Diamond^4_I]$  et  $[\Box^4_E]$ . Soit  $L$  une des logiques  $\text{IKTh}$  où l'axiome 4 est un théorème.

**Cas de  $[\Diamond^4_I]$ .** On suppose que  $\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \diamond A^+\}$  ( $\text{prof}(\Delta\{\}) > 1$ ) n'est pas valide dans  $L$ . Ainsi, il existe un modèle  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots d_k$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \{\}\})$ ,  $w, c \Vdash \Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \{\}\}$  et  $w, d_k \not\vdash \diamond A$ . On a  $w, c \Vdash \Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \{\}\}$  implique  $w, d_k \Vdash \mathcal{F}(\Delta\{\emptyset\})$ . Donc, il existe une  $(w, l)$ -chaîne  $c' = d_k \rightarrow d_{k+1} \rightarrow \dots d_{k+l}$  telle que  $l = \text{prof}(\Delta\{\})$  et  $w, c' \Vdash \Delta\{\}$ . Par conséquent, on a  $w, c' \Vdash \Gamma\{\Delta\{\}\}$  où  $c' = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots d_{k+l}$ . Étant donné que  $R_w$  est relation transitive, on a  $w, d_{k+l} \not\vdash A$  car  $w, d_k \not\vdash \diamond A$ . Cela permet de déduire que  $w, d_0 \not\vdash \mathcal{F}(\Gamma\{\Delta\{A^+\})$ .

**Cas de  $[\Box^4_E]$ .** On suppose que  $\Gamma\{\Delta\{A^+\}$  ( $\text{prof}(\Delta\{\}) > 1$ ) n'est pas valide dans  $L$ . Ainsi, il existe un modèle  $\mathcal{M}$ ,  $w \in W$  et une  $(w, k+l)$ -chaîne  $c = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots d_{k+l}$  tels que  $k = \text{prof}(\Gamma\{\})$ ,  $l = \text{prof}(\Delta\{\})$ ,  $w, c \Vdash \Gamma\{\Delta\{\}\}$  et  $w, d_{k+l} \not\vdash A$ . Étant donné que la relation  $R_w$  est transitive, on a  $w, d_{k+l} \not\vdash A$  implique  $w, d_k \not\vdash \Box A$ . De plus, on a  $w, c \Vdash \Gamma\{\Delta\{\}\}$  implique  $w, c' \Vdash \Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \{\}\}$  où  $c' = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots d_k$ . Par conséquent, on a  $w, d_0 \not\vdash \mathcal{F}(\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \Box A^+\})$ .  $\square$

**Théorème 3.3.2** (Complétude). *Si un A-séquent est valide dans IKTh, alors il a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ .*

*Démonstration.* De même que le système  $DN_{\text{IK}}$ , la démonstration de la complétude de  $DN_{\text{IKTh}}$  peut être obtenue en considérant la validité dans IKTh à travers son axiomatisation. Nous fournissons ici uniquement des preuves pour les axiomes dans Th. Notons que la règle  $[\square_E^{\text{B4}}]$  (resp.  $[\diamond_I^{\text{B4}}]$ ) est une généralisation des règles  $[\square_E]$ ,  $[\square_E^{\text{B}}]$ ,  $[\square_E^{\text{4}}]$ ,  $[\square_E^{\text{5}}]$  (resp.  $[\diamond_I]$ ,  $[\diamond_I^{\text{B}}]$ ,  $[\diamond_I^{\text{4}}]$ ,  $[\diamond_I^{\text{5}}]$ ). En outre, les règles  $[\square_E^{\text{IS5}}]$  et  $[\diamond_I^{\text{IS5}}]$  généralisent toutes les autres règles d'élimination de  $\square$  et d'introduction de  $\diamond$ . Cela nous permet de dire que pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , si un A-séquent a une preuve dans le système obtenu en ajoutant les règles  $[\square_E^x]$  et  $[\diamond_I^x]$  à  $DN_{\text{IK}}$  pour tout  $x \in \text{Th}$ , alors il a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ . En utilisant cette propriété, nous ne traitons pas les cas des systèmes  $DN_{\text{IB4}}$  et  $DN_{\text{IS5}}$  dans les preuves des axiomes que nous donnons.

–  $(\square A \supset A) \wedge (A \supset \diamond A)^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\square A, \square A^{\vdash}} [id]}{\square A, A^{\vdash}} [\square_E^T] \quad \frac{\overline{A, A^{\vdash}} [id]}{A, \diamond A^{\vdash}} [\diamond_I^T]}{\square A \supset A^{\vdash}} [\supset_I] \quad \frac{\overline{A, A^{\vdash}} [id]}{A \supset \diamond A^{\vdash}} [\supset_I]}{(\square A \supset A) \wedge (A \supset \diamond A)^{\vdash}} [\wedge_I]$$

–  $(\diamond \square A \supset A) \wedge (A \supset \square \diamond A)^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\diamond \square A, \langle \square A, \square A^{\vdash} \rangle} [id]}{\diamond \square A, \langle \square A \rangle, A^{\vdash}} [\diamond_I^B] \quad \frac{\overline{A, \langle \emptyset \rangle, A^{\vdash}} [id]}{A, \langle \diamond A^{\vdash} \rangle} [\diamond_I^B]}{\diamond \square A, A^{\vdash}} [\diamond_E] \quad \frac{\overline{A, \langle \emptyset \rangle, A^{\vdash}} [id]}{A, \square \diamond A^{\vdash}} [\square_I]}{\diamond \square A \supset A^{\vdash}} [\supset_I] \quad \frac{\overline{A, \langle \diamond A^{\vdash} \rangle} [\diamond_I^B]}{A \supset \square \diamond A^{\vdash}} [\supset_I]}{(\diamond \square A \supset A) \wedge (A \supset \square \diamond A)^{\vdash}} [\wedge_I]$$

–  $(\square A \supset \square \square A) \wedge (\diamond \diamond A \supset \diamond A)^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\square A, \square A^{\vdash}, \langle \langle \rangle \rangle} [id]}{\square A, \langle \langle A^{\vdash} \rangle \rangle} [\square_E^4] \quad \frac{\overline{\square A, \langle \square A^{\vdash} \rangle} [\square_I]}{\square A, \square \square A^{\vdash}} [\square_I]}{\square A \supset \square \square A^{\vdash}} [\supset_I] \quad \mathcal{D}}{(\square A \supset \square \square A) \wedge (\diamond \diamond A \supset \diamond A)^{\vdash}} [\wedge_I]$$

avec

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\frac{\overline{\diamond \diamond A, \langle \diamond A, \langle A, A^{\vdash} \rangle \rangle} [id]}{\diamond \diamond A, \langle \diamond A, \langle A \rangle, \diamond A^{\vdash} \rangle} [\diamond_I^4] \quad \frac{\overline{\diamond \diamond A, \langle \diamond A, \langle A, A^{\vdash} \rangle \rangle} [id]}{\diamond \diamond A, \langle \diamond A, \langle A \rangle, \diamond A^{\vdash} \rangle} [\diamond_I^4]}{\diamond \diamond A, \langle \diamond A \rangle, \diamond A^{\vdash}} [\diamond_E] \quad \frac{\overline{\diamond \diamond A, \langle \diamond A, \langle A, A^{\vdash} \rangle \rangle} [id]}{\diamond \diamond A, \langle \diamond A \rangle, \diamond A^{\vdash}} [\diamond_I^4]}{\diamond \diamond A \supset \diamond A^{\vdash}} [\supset_I]$$

–  $(\diamond\Box A \supset \Box A) \wedge (\diamond A \supset \Box\diamond A)^{\vdash}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\diamond\Box A, \diamond\Box A^{\vdash}} [id]}{\diamond\Box A, \langle\Box A, \Box A^{\vdash}\rangle} [\Box_E^5]}{\diamond\Box A, \langle\Box A, \Box A^{\vdash}\rangle} [\Box_I]}{\diamond\Box A, \Box A^{\vdash}} [id] \quad \frac{\frac{\frac{\frac{}{\diamond A, \langle A, A^{\vdash}\rangle} [id]}{\diamond A, \langle A, A^{\vdash}\rangle} [\Diamond_I^5]}{\diamond A, \langle A, \langle\diamond A^{\vdash}\rangle} [\Diamond_I]}{\diamond A, \langle A, \Box\diamond A^{\vdash}\rangle} [\Diamond_E]}{\diamond A, \Box\diamond A^{\vdash}} [id]}{\diamond A \supset \Box\diamond A^{\vdash}} [\supset_I]}{\frac{(\diamond\Box A \supset \Box A) \wedge (\diamond A \supset \Box\diamond A)^{\vdash}} [^{\wedge}_I]} [\wedge_I]}$$

□

### 3.3.1 Normalisation

 tant donn e que  $DN_{\text{IK}}$  et  $DN_{\text{IKTh}}$  contiennent les mêmes règles  $[\supset_I]$ ,  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$ , nous considérons que les notions de règles de déchargement et de A-séquent d echarg e dans le cas de  $DN_{\text{IKTh}}$  sont les mêmes que dans le cas de  $DN_{\text{IK}}$  (Définition 3.2.3). Concernant les notions de segment et de coupure ainsi que toutes les autres notions qui leurs sont relatives, nous leurs donnons dans le cas de  $DN_{\text{IKTh}}$  les mêmes définitions que celles données dans le cas de  $DN_{\text{IK}}$ .

Les règles décrites en figure 3.2 sont des règles d'introduction et d'élimination. Ainsi, nous devons définir des règles de réduction afin d'éliminer les détours contenant des applications de ces règles. La définition de ces règles de réduction n'est pas compliquée, toutefois, elle est fastidieuse. Nous ne donnons ici que les règles de réduction dans le cas du système  $DN_{\text{IB4}}$  (les autres cas sont trait es en annexe A).

Nous définissons la relation  $\rightarrow_{\text{IB4}}$  par  $\Gamma\{\langle\Delta\rangle\}\{\emptyset\} \rightarrow_{\text{IB4}} \Gamma\{\emptyset\}\{\Delta\}$  où  $sp(\Gamma\{\emptyset\}\{\Delta\})$  et nous notons  $\rightarrow_{\text{IB4}}^*$  sa clôture réflexive et transitive. Nous montrons maintenant comment construire la preuve  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IB4}}$  de  $\mathcal{S}'$    partir d'une preuve  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{S}$  où  $\mathcal{S} \rightarrow_{\text{IB4}} \mathcal{S}'$ . La définition de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IB4}}$  est étendue à la relation  $\rightarrow_x^n$  par induction sur la valeur de  $n$  comme suit :

- si  $n = 0$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IB4}} = \mathcal{D}$  ;
- sinon,  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IB4}} = (\mathcal{D}[\mathcal{S}'' ]_w)[\mathcal{S}']_{\text{IB4}}$  tel que  $\mathcal{S} \rightarrow_w \mathcal{S}'' \rightarrow_{\text{IB4}}^{n-1} \mathcal{S}'$ .

Comme dans le cas des relations  $\rightarrow_w$  et  $\rightarrow_m$ , la construction de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IB4}}$  est par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$  :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\langle\Delta^1\rangle\}\{\emptyset\}} \quad \cdots \quad \frac{\mathcal{D}_l}{\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\langle\Delta^l\rangle\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\langle\Delta\rangle\}\{\emptyset\}} \right. [R]$$

alors

$$\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IB4}} = \left\{ \frac{\frac{\mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta^1\}]_{\text{IB4}}}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta^1\}} \quad \cdots \quad \frac{\mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\}\{\Delta^l\}]_{\text{IB4}}}{\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\}\{\Delta^l\}}}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta\}} \right. [R]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta\}$ .

Maintenant, nous introduisons les règles de réduction que nous utilisons dans le cas des détours contenant des applications de  $[\Box_E^{\text{IB4}}]$  et  $[\Diamond_I^{\text{IB4}}]$  :



–  $\square^{\text{IB4}}$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}\{\emptyset\}}}{\frac{\Gamma\{\square A^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}} \begin{matrix} [\square_I] \\ [\square_E^{\text{IB4}}] \end{matrix} \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}]_{\text{IB4}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}$$

–  $\diamond^{\text{IB4}}$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}} \begin{matrix} [\diamond_I^{\text{IB4}}] \\ [\diamond_E] \end{matrix} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\emptyset\}\{x : A\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}} \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{x : A\}\{\emptyset\}\{C^+\}]_{\text{IB4}}$

**Théorème 3.3.3** (Normalisation). *Toute preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$  se réduit à une preuve en forme normale.*

*Démonstration.* Elle est similaire à celle du théorème 3.2.4. Effectivement, il suffit de faire une preuve par induction sur la valeur de la paire  $(n, m)$  où  $n$  est le rang de la preuve et  $m$  est la somme des longueurs de toutes les coupures critiques.  $\square$

Au chapitre 1, nous avons noté que la normalisation dans le formalisme de déduction naturelle est équivalente à l'élimination de la coupure dans celui de calcul des séquents. Dans la proposition suivante nous montrons que la règle de coupure est admissible dans  $DN_{\text{IKTh}}$ .

**Proposition 3.3.1.** *La règle suivante est admissible dans  $DN_{\text{IKTh}}$  :*

$$\frac{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{A\}\{C^+\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} \text{ [Cut]}$$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{D}_1$  une preuve de  $\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}$  et  $\mathcal{D}_2$  une preuve de  $\Gamma\{x : A\}\{C^+\}$ . Une preuve de  $\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  est donnée par  $\mathcal{D}_2[x/\mathcal{D}_1]$ .  $\square$

### 3.3.2 Preuves en forme normale

Après avoir démontré normalisation, nous étudions maintenant la structure des preuves en forme normale. Cette étude nous permet, en particulier, de démontrer la propriété de la sous-formule, à savoir que toutes les formules appartenant à une preuve en forme normale sont des sous-formules des formules de sa racine.

En premier lieu, nous définissons la notion de *chemin* qui est une séquence particulière de A-séquents apparaissant dans une preuve. L'idée est que tout A-séquent apparaissant dans une preuve appartient à au moins un chemin. Ensuite, nous démontrons que tout chemin dans une preuve en forme normale peut être décomposé en trois parties ayant certaines spécificités. Cette décomposition permet de démontrer que toutes les formules d'un chemin dans une preuve en forme normale sont des sous-formules de formules de la racine. Par conséquent, nous

obtenons la propriété de la sous-formule. Enfin, nous démontrons que nos systèmes vérifient certaines propriétés intéressantes qui seront utilisées plus loin.

**Définition 3.3.1** (Chemin). *Un chemin dans une preuve  $\mathcal{D}$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$  est une séquence d'occurrences de A-séquents  $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n$  telle que :*

- $\mathcal{S}_0$  est l'étiquette d'une feuille de  $\mathcal{D}$  qui n'est pas déchargée par une application de  $[\vee_E]$  ou  $[\diamond_E]$  ;
- $\mathcal{S}_i$  pour  $i < n$  n'est pas une prémisses mineure d'une application de  $[\supset_E]$  et
  - (i)  $\mathcal{S}_i$  n'est pas une prémisses majeure d'une application de  $[\vee_E]$  ou  $[\diamond_E]$  et  $\mathcal{S}_{i+1}$  est le A-séquent qui vient directement en dessous de  $\mathcal{S}_i$ , ou
  - (ii)  $\mathcal{S}_i$  est une prémisses majeure d'une application  $\alpha$  de  $[\vee_E]$  ou  $[\diamond_E]$  et  $\mathcal{S}_{i+1}$  est une occurrence d'un A-séquent déchargée par  $\alpha$  ;
- $\mathcal{S}_n$  est une prémisses mineur de  $[\supset_E]$ , la racine de  $\mathcal{D}$ , ou une prémisses majeure d'une application de  $[\vee_E]$  ou  $[\diamond_E]$  qui ne décharge aucun A-séquent.

**Proposition 3.3.2.** *Tout A-séquent appartenant à une preuve  $\mathcal{D}$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$  appartient à un chemin de  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{D}$  est un axiome (une instance de  $[id]$ ), alors il est trivial que ce A-séquent appartient au chemin qui ne contient que lui-même. Maintenant, on considère les cas de la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  :

- Si cette règle est différente de  $[\supset_E]$ ,  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$ , alors sa conclusion ajoutée à n'importe quel chemin se terminant par une de ses prémisses (l'existence d'un tel chemin est obtenue en utilisant l'hypothèse d'induction) forme un chemin.
- Si cette règle est  $[\supset_E]$ , alors sa conclusion ajoutée à un chemin se terminant par sa prémisses majeure (hypothèse d'induction) forme un chemin.
- Si cette règle est  $[\vee_E]$  :

$$\frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \Gamma\{A_1 \vee A_2^+\}\{\emptyset\} & \Gamma\{x : A_1\}\{C^+\} & \Gamma\{y : A_2\}\{C^+\} \end{array}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\vee_E]$$

Par hypothèse d'induction, on sait qu'il existe un chemin  $\pi_1$  dans  $\mathcal{D}_1$  se terminant par  $\Gamma\{x : A_1\}\{C^+\}$ . Si ce chemin ne commence pas par une occurrence de A-séquent déchargée par l'application de cette règle, alors  $\pi_2, \Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  est un chemin dans  $\mathcal{D}$ . Sinon, par hypothèse d'induction, il existe un chemin  $\pi$  dans  $\mathcal{D}$  se terminant par  $\Gamma\{A_1 \vee A_2^+\}\{\emptyset\}$ . Dans ce cas,  $\pi, \pi_1, \Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  est un chemin dans  $\mathcal{D}$ .

- Le cas de la règle  $[\diamond_E]$  est similaire à celui de  $[\vee_E]$ .

□

Dans la proposition suivante, nous décrivons certaines des caractéristiques des chemins dans une preuve en forme normale.

**Proposition 3.3.3.** *Soient  $\mathcal{D}$  une preuve en forme normale dans  $DN_{\text{IKTh}}$  et  $\pi = \sigma_0, \dots, \sigma_n$  un chemin dans  $\mathcal{D}$ . Il existe un segment  $\sigma_i$  dans  $\pi$ , appelé le segment minimum, séparant deux parties de  $\pi$ , appelées E-partie et I-partie, vérifiant les propriétés suivantes :*

- pour chaque  $\sigma_j$  dans la E-partie ( $j < i$ ),  $\sigma_j$  est la prémisses majeure d'une règle d'élimination ( $\sigma_{j+1}$  est une sous-formule de  $\sigma_j$ ) ;
- pour chaque  $\sigma_j$  dans la I-partie ( $i < j$ ), si  $j \neq n$  alors  $\sigma_j$  est la prémisses d'une règle d'introduction ( $\sigma_j$  est une sous-formule de  $\sigma_{j+1}$ ) ;

- si  $i \neq n$  alors  $\sigma_i$  est une prémissse d'une règle d'introduction ou une prémissse de  $[\perp]$  ( $\sigma_i$  est une sous-formule de  $\sigma_0$ ).

*Démonstration.* Soit  $\sigma_i$  le premier segment qui n'est pas une prémissse d'une application d'une règle d'élimination. Si  $i = n$  alors il est facile de voir que cette proposition est vraie dans ce cas. Sinon  $\sigma_i$  est une prémissse d'une application de soit une règle d'introduction, soit la règle  $[\perp]$ . Si  $\sigma_i$  est une prémissse de  $[\perp]$ , alors soit  $i + 1 = n$ , soit  $\sigma_{i+1}$  est une prémissse d'une application d'une règle d'introduction ( $\perp$ -permutation). De plus, on sait que  $\pi$  ne contient aucun segment qui est la conclusion d'une application d'une règle d'introduction et au même temps une prémissse d'une application d'une règle d'élimination ou de  $[\perp]$  (règles de réduction et de permutation). Ainsi, pour tout  $i < j < n$ ,  $\sigma_j$  est une prémissse d'une application d'une règle d'introduction. Le cas où  $\sigma_i$  est une prémissse d'une application d'une règle d'introduction est traité d'une façon similaire.  $\square$

Dans l'optique de faire une démonstration pas induction sur les chemins composant une preuve en forme normale, on assigne aux chemins un ordre.

**Définition 3.3.2.** *Dans une preuve en forme normale  $\mathcal{D}$ , un chemin est d'ordre 0, s'il satisfait une des deux propriétés suivantes :*

- il se termine par la conclusion de  $\mathcal{D}$  ;
- il débute par un A-séquent qui n'est déchargé par aucune règle et il se termine par la prémissse majeure d'une application de  $[\diamond_E]$ .

*Un chemin est d'ordre  $n + 1$ , s'il satisfait une des deux propriétés suivantes :*

- il se termine par la prémissse mineure d'une application de  $[\supset_E]$ , ayant la prémissse majeure qui appartient à un chemin d'ordre  $n$  ;
- il se termine par la prémissse majeure d'une application de  $[\diamond_E]$  et son début est déchargé par une application de  $[\supset_I]$  appartenant à un chemin d'ordre  $n$ .

La proposition suivante a pour objectif de nous permettre de dire que si toutes les conclusions des A-séquents apparaissant dans une preuve sont des sous-formules de formules de la racine, alors toutes les formules de cette preuve sont des sous-formules des formules de la racine.

**Proposition 3.3.4.** *Soient  $\mathcal{S} = \Gamma\{C^+\}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IKTh}$ . Pour tout A-séquent  $\Gamma'\{C'^+\}$  dans  $\mathcal{D}$ , si  $A$  est une formule dans  $\Gamma'\{\emptyset\}$ , alors  $A$  est soit dans  $\Gamma\{\emptyset\}$ , soit il existe un A-séquent  $\Gamma''\{C''^+\}$  dans  $\mathcal{D}$  tel que  $A$  est une sous-formule de  $C''$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

**Théorème 3.3.4** (Propriété de la sous-formule). *Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve en forme normale de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IKTh}$ . Alors toute formule dans  $\mathcal{D}$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer par induction sur la valeur de  $n$  que pour les chemins d'ordre  $n$ , les conclusions des segments qui les composent sont des sous-formules de formules de  $\mathcal{S}$ . Effectivement, la proposition 3.3.4 nous permet d'étendre cette propriété à toutes les formules de  $\mathcal{D}$ .

Soient  $\pi = \sigma_0, \dots, \sigma_k$  un chemin d'ordre  $n$  dans  $\mathcal{D}$  et  $\sigma_i$  le segment minimum de  $\pi$ .

**Cas  $n = 0$ .** On sait que  $\sigma_k$  se termine soit par  $\mathcal{S}$ , soit par la prémissse majeure d'une application de  $[\diamond_E]$ .

-  $\sigma_k$  se termine par  $\mathcal{S}$ . Alors on a  $C(\sigma_k)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ . En utilisant la proposition 3.3.3, on a pour tout  $j \in [i+1, k]$ ,  $C(\sigma_j)$  est une sous-formule d'une formule  $\mathcal{S}$ . De plus, on sait que  $\sigma_0$  débute soit par un A-séquent qui n'est pas déchargé, soit par un A-séquent déchargé par une application de  $[\supset_I]$  appartenant à la I-partie de  $\pi$ . Par conséquent,  $C(\sigma_0)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ . En utilisant aussi la proposition 3.3.3, on déduit que pour tout  $j \in [0, i]$ ,  $C(\sigma_j)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ .

-  $\sigma_k$  se termine par la prémisse majeure d'une application de  $[\diamond_E]$ . Alors pour tout  $j \in [0, k]$ ,  $\sigma_j$  est la prémisse majeure d'une application d'une règle d'élimination (proposition 3.3.3). On sait que  $\sigma_0$  débute par un A-séquent qui n'est pas déchargé. Par conséquent,  $C(\sigma_0)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ . En utilisant la proposition 3.3.3, on déduit que pour tout  $j \in [0, k]$ ,  $C(\sigma_j)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ .

**Cas  $n = m + 1$  ( $m \geq 0$ ).** On sait que  $\sigma_k$  se termine soit par la prémisse mineure d'une application de  $[\supset_E]$ , soit par la prémisse majeure d'une application de  $[\diamond_E]$ .

-  $\sigma_k$  se termine par la prémisse mineure d'une application de  $[\supset_E]$ . Alors en utilisant l'hypothèse d'induction et la proposition 3.3.3, on a pour tout  $j \in [i+1, k]$ ,  $C(\sigma_j)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ . De plus,  $\sigma_0$  débute soit par un A-séquent qui n'est pas déchargé, soit par un A-séquent déchargé par une application de  $[\supset_I]$  appartenant à la I-partie de  $\pi$  ou d'un chemin d'ordre inférieur ou égal à  $m$ . On en déduit que pour tout  $j \in [0, i]$ ,  $C(\sigma_j)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ .

-  $\sigma_k$  est la prémisse majeure d'une application de  $[\diamond_E]$ . Alors pour tout  $j \in [0, k]$ ,  $\sigma_j$  est la prémisse majeure d'une règle d'élimination (proposition 3.3.3). On sait que  $\sigma_0$  débute par un A-séquent qui est déchargé par une application de  $[\supset_I]$  appartenant à un chemin d'ordre  $m$ . En utilisant l'hypothèse d'induction et la proposition 3.3.3, on déduit que pour tout  $j \in [0, k]$ ,  $C(\sigma_j)$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Une conséquence directe de la propriété de la sous-formule est celle de la séparation :

**Corollaire 3.3.1** (Propriété de la séparation). *Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve en forme normale de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IKTh}$ . Alors  $\mathcal{D}$  ne contient que des applications des règles associées aux opérateurs apparaissant dans  $\mathcal{S}$ .*

Dans le cas de  $DN_{IKTh}$  avec  $Th \in \{\emptyset, \{T\}, \{B\}, \{T, B\}\}$ , il existe une autre propriété importante que nous pouvons obtenir à partir de la propriété de la sous-formule. Cette propriété concerne la valeur délimitant les profondeurs des A-séquents apparaissant dans une preuve en forme normale.

**Corollaire 3.3.2** (Propriété de la profondeur). *Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve en forme normale de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IKTh}$  avec  $Th \in \{\emptyset, \{T\}, \{B\}, \{T, B\}\}$ . Si  $\mathcal{S}'$  est un A-séquent dans  $\mathcal{D}$ , alors sa profondeur est inférieure ou égale à la profondeur de  $\mathcal{S}$  plus la valeur de  $nest(\mathcal{S})$ .*

*Démonstration.* Les seules règles possédant des prémisses ayant des profondeurs supérieures à celles des conclusions sont  $[\supset_I]$  et  $[\diamond_E]$ . Si la profondeur de  $\mathcal{S}'$  est supérieure à celle de  $\mathcal{S}$  plus  $nest(\mathcal{S})$ , alors  $\mathcal{D}$  contient une formule  $A$  avec  $nest(A) > nest(\mathcal{S})$ , ce qui nous fournit une contradiction car toutes les formules dans  $\mathcal{D}$  sont des sous-formules des formules de  $\mathcal{S}$ . Formellement, la démonstration est par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

L'absence de cette propriété dans des systèmes comme  $DN_{IS5}$  est à cause des règles d'élimination de  $\square$  et d'introduction de  $\diamond$ . En effet, dans ces dernières, il n'y a pas de valeur limitant

la différence de profondeurs entre la position de la formule marquée dans la prémisse et sa position dans la conclusion. Illustrons ce point avec une preuve du séquent  $\mathcal{S} = \Box\Diamond A, \Diamond A^\perp$  dans  $DN_{\mathcal{IS}5}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A, \langle A \rangle \rangle}, \Box\Diamond A^\perp} [id]}{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A, \langle A \rangle \rangle}, \Box\Diamond A^\perp} [\Box_E^{\mathcal{IS}5}]}{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A, \langle A \rangle \rangle}, \Diamond A^\perp} [\Diamond_E]}{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A \rangle \rangle, \Diamond A^\perp} [\Diamond_E]}{\Box\Diamond A, \langle A \rangle, \Diamond A^\perp} [\Diamond_E]}{\Box\Diamond A, \Diamond A^\perp} [\Diamond_E]$$

où

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A \rangle \rangle}, \Box\Diamond A^\perp} [id] \\ \frac{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A, \langle A \rangle \rangle}, \Box\Diamond A^\perp} [\Box_E^{\mathcal{IS}5}] \end{array} \right. \quad \mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\Box\Diamond A, \langle A \rangle}, \Box\Diamond A^\perp} [id] \\ \frac{\Box\Diamond A, \langle A, \langle A \rangle \rangle}, \Box\Diamond A^\perp} [\Box_E^{\mathcal{IS}5}] \end{array} \right.$$

$$\mathcal{D}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\Box\Diamond A, \Box\Diamond A^\perp} [id]}{\Box\Diamond A, \Box\Diamond A^\perp} [\Box_E^{\mathcal{IS}5}] \\ \frac{\Box\Diamond A, \Box\Diamond A^\perp} [\Box_E^{\mathcal{IS}5}] \end{array} \right.$$

Nous pouvons facilement voir que cette preuve est en forme normale. On a  $nest(\mathcal{S}) = 2$ , tandis que la profondeur du A-séquent  $\Box\Diamond A, \langle A, \langle A, \langle A \rangle \rangle, \Box\Diamond A^\perp$  est égale à 3. Cela fournit un contre-exemple contredisant l'énoncé du corollaire de la profondeur dans le cas de  $DN_{\mathcal{IS}5}$ .

Nous introduisons maintenant la notion de branche principale qui sera utilisé dans l'études des calculs des séquents introduits plus loin. Cette notion est similaire à celle introduite par Martin-Löf dans [94].

**Définition 3.3.3.** *Une branche d'une preuve dans  $DN_{\mathcal{IKTh}}$  est dite principale si elle commence par une feuille et se termine par la racine en passant uniquement par des prémisses d'applications de règles d'introduction et des prémisses majeures d'applications de règles d'élimination.*

Notons que si une preuve en forme normale se termine par une application d'une règle d'élimination, alors elle ne contient qu'une unique branche principale. Effectivement, cela est la conséquence du fait qu'une telle preuve ne peut contenir que des applications de règles d'élimination. En réalité, toute preuve en forme normale ne contenant pas d'application de  $[\wedge_I]$  possède une unique branche principale. Cela vient du fait que  $[\wedge_I]$  est l'unique règle d'introduction possédant deux prémisses.

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $\mathcal{D}$  une preuve en forme normale dans  $DN_{\mathcal{IKTh}}$  se terminant par une application d'une règle d'élimination. Si la branche principale de  $\mathcal{D}$  contient une application de  $[\vee_E]$  ou  $[\Diamond_E]$ , alors elle est l'unique application de ces règles et, en plus, elle est la dernière dans  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration.* Si une application de  $[\vee_E]$  ou  $[\Diamond_E]$  est suivie d'une application d'une règle d'élimination, alors il est possible d'appliquer une règle de permutation. Dans ce cas,  $\mathcal{D}$  n'est pas une preuve en forme normale, ce qui nous fournit une contradiction.  $\square$

### 3.4 A-séquents et logiques modales classiques

Dans cette section, nous proposons des systèmes de déduction naturelle pour toutes les logiques modales classiques formées à partir des combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. Pour

chacune de ces logiques, un système est obtenu par le remplacement de la règle  $[\perp]$  par une nouvelle règle dans le système de sa version intuitionniste : pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous définissons le système de déduction naturelle  $DN_{\text{KTh}}$  comme étant le système obtenu à partir de  $DN_{\text{IKTh}}$  par le remplacement de la règle  $[\perp]$  avec la règle suivante :

$$\frac{\Gamma\{\neg A\}\{\perp^\vdash\}}{\Gamma\{A^\vdash\}\{\emptyset\}} \quad [\perp_c]$$

Nous pouvons voir que cette règle est une généralisation de celle de  $[\perp]$  : si  $\Gamma\{\emptyset\}\{\perp^\vdash\}$  a une preuve dans  $DN_{\text{KTh}}$ , alors  $\Gamma\{A^\vdash\}\{\emptyset\}$  en a également une. En effet, par l'ajout de  $\neg A$  a tous les  $A$ -séquents d'une preuve quelconque de  $\Gamma\{\emptyset\}\{\perp^\vdash\}$  dans  $DN_{\text{KTh}}$  on obtient une preuve de  $\Gamma\{\neg A\}\{\perp^\vdash\}$ . Ensuite, il suffit d'appliquer la règle  $[\perp_c]$  pour l'obtention d'une preuve de  $\Gamma\{A^\vdash\}\{\emptyset\}$ .

Nous savons que toute règle correcte dans  $\text{IKTh}$  est forcément correcte dans  $\text{KTh}$ . Par conséquent, toutes les règles communes à  $DN_{\text{KTh}}$  et  $DN_{\text{IKTh}}$  sont correctes dans  $\text{KTh}$ . Nous démontrons maintenant la correction de  $[\perp_c]$  dans  $\text{KTh}$ . Étant donné que  $[\perp]$  est correcte dans  $DN_{\text{IKTh}}$ , elle l'est aussi dans  $\text{KTh}$ . Soit  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\Gamma\{\neg A\}\{\perp^\vdash\}$ . En utilisant les règles  $[\perp]$  et  $[\supset_I]$ , on obtient à partir de  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\Gamma\{\neg\neg A^\vdash\}\{\emptyset\}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\neg A\}\{\perp^\vdash\}} \quad [\perp]}{\Gamma\{\neg A, \perp^\vdash\}\{\emptyset\}} \quad [\supset_I]}{\Gamma\{\neg\neg A^\vdash\}\{\emptyset\}} \quad [\supset_I]$$

Vu que  $\neg\neg A$  est équivalent à  $A$  dans  $\text{KTh}$ , on déduit que le  $A$ -séquent  $\Gamma\{A^\vdash\}\{\emptyset\}$  est valide dans  $\text{KTh}$ .

Afin de démontrer la complétude de  $DN_{\text{KTh}}$ , nous utilisons le fait que l'ajout de l'axiome  $\neg\neg A \supset A$  à  $\text{IKTh}$  donne  $\text{KTh}$ . Étant donné que la règle  $[\perp_c]$  est une généralisation de  $[\perp]$ , il suffit de démontrer que  $\neg\neg A \supset A$  a une preuve dans  $DN_{\text{KTh}}$  :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\perp^\vdash}{\neg\neg A, \neg A, \neg\neg A^\vdash} \quad [id]}{\neg\neg A, \neg A, \perp^\vdash} \quad [\supset_E]}{\neg\neg A, \neg A, \perp^\vdash} \quad [\perp_c]}{\neg\neg A, A^\vdash} \quad [\supset_I]}{\neg\neg A \supset A^\vdash} \quad [\supset_I]}$$

Dans notre démonstration de la normalisation, les principaux problèmes que nous avons rencontrés étaient relatifs aux deux règles  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$ . Dans le cas des logiques modales classiques, ils peuvent être contournés via les lois de De Morgan. En effet, étant donné que les opérateurs  $\vee$  et  $\diamond$  peuvent être exprimés en fonction des opérateurs  $\wedge$ ,  $\supset$  et  $\Box$ , nous pouvons se limiter à des systèmes ne contenant que les règles associées à ces derniers. En outre, un point important dans la démonstration de la propriété de normalisation dans le cas classique réside dans la restriction de la règle  $[\perp_c]$  aux formules atomiques :

$$\frac{\Gamma\{\neg p\}\{\perp^\vdash\}}{\Gamma\{p^\vdash\}\{\emptyset\}} \quad [\perp'_c](p \text{ est atomique})$$

Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous appelons  $DN'_{\text{KTh}}$  le système composé de la règles  $[\perp'_c]$  ainsi que les règles associées aux opérateurs  $\wedge$ ,  $\supset$  et  $\square$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$ . Pour démontrer la complétude de  $DN'_{\text{KTh}}$ , il suffit de démontrer l'admissibilité de la règle  $[\perp_c]$ . Pour cela nous avons besoin de démontrer l'admissibilité de la règle de coupure :

**Proposition 3.4.1.** *La règle suivante est admissible dans  $DN'_{\text{KTh}}$  :*

$$\frac{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{A\}\{C^+\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} \text{ [Cut]}$$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{D}_1$  une preuve de  $\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}$  et  $\mathcal{D}_2$  une preuve de  $\Gamma\{x : A\}\{C^+\}$ . Une preuve de  $\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  est donnée par  $\mathcal{D}_2[x/\mathcal{D}_1]$  où la preuve  $\mathcal{D}_2[x/\mathcal{D}_1]$  est définie de la même manière que dans le cas de  $DN_{\text{IKTh}}$ .  $\square$

**Théorème 3.4.1.** *Si  $\Gamma\{\neg A\}\{\perp^+\}$  a une preuve dans  $DN'_{\text{KTh}}$ , alors  $\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}$  en a aussi une.*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . Si  $A$  est une formule atomique, alors une preuve de  $\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}$  est obtenue par une application de  $[\perp'_c]$  à  $\Gamma\{\neg A\}\{\perp^+\}$ . Considérons maintenant les autres cas :

- **Cas  $A = B \wedge C$ .** En utilisant l'affaiblissement, les deux A-séquents  $\Gamma\{\neg(B \wedge C), \neg B\}\{\perp^+\}$  et  $\Gamma\{\neg(B \wedge C), \neg C\}\{\perp^+\}$  ont des preuves dans  $DN'_{\text{KTh}}$ . La preuve de  $\Gamma\{B^+\}\{\emptyset\}$  est obtenue comme suit :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, \neg B^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, B^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]} \quad \frac{\frac{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, B \wedge C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, B^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]} \quad \frac{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, \perp^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, B^+\}\{\emptyset\}} \text{ [\wedge^1_E]} \quad \frac{\Gamma\{B \wedge C, \neg B, \perp^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\neg B, \neg(B \wedge C)^+\}\{\emptyset\}} \text{ [\supset_E]} \quad \frac{\Gamma\{\neg(B \wedge C), \neg B\}\{\perp^+\}}{\Gamma\{\neg B\}\{\perp^+\}} \text{ [Cut]} \quad \frac{\Gamma\{\neg B\}\{\perp^+\}}{\Gamma\{B^+\}\{\emptyset\}} \text{ [H.I.]}}{\Gamma\{B^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]}$$

où  $[H.I.]$  correspond à l'application de l'hypothèse d'induction. Une preuve de  $\Gamma\{C^+\}\{\emptyset\}$  est obtenue de la même manière. Ainsi, en appliquant la règle  $[\wedge_I]$  avec comme prémisses  $\Gamma\{B^+\}\{\emptyset\}$  et  $\Gamma\{C^+\}\{\emptyset\}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma\{B \wedge C^+\}\{\emptyset\}$ .

- **Cas  $A = B \supset C$ .** En utilisant l'affaiblissement, le A-séquent  $\Gamma\{\neg(B \supset C), B, \neg C\}\{\perp^+\}$  a une preuve dans  $DN'_{\text{KTh}}$ . Une preuve de  $\Gamma\{B \supset C^+\}\{\emptyset\}$  est obtenue de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\frac{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, B \supset C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, C^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]} \quad \frac{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, B^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, C^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]} \quad \frac{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \neg C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, C^+\}\{\emptyset\}} \text{ [\supset_E]} \quad \frac{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \neg C^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \perp^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]} \quad \frac{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \perp^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B, \neg C, \neg(B \supset C)^+\}\{\emptyset\}} \text{ [\supset_E]} \quad \frac{\Gamma\{B, \neg C, \neg(B \supset C)^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \perp^+\}\{\emptyset\}} \text{ [\supset_I]} \quad \frac{\Gamma\{\neg(B \supset C), B, \neg C\}\{\perp^+\}}{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \perp^+\}\{\emptyset\}} \text{ [Cut]} \quad \frac{\Gamma\{B \supset C, B, \neg C, \perp^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C^+\}\{\emptyset\}} \text{ [H.I.]}}{\Gamma\{B \supset C^+\}\{\emptyset\}} \text{ [id]}$$

- **Cas**  $A = \Box B$ . En utilisant l'affaiblissement, le A-séquent  $\Gamma\{\neg\Box B, \langle\neg B\rangle\}\{\perp^+\}$  a une preuve dans  $DN'_{\text{KTh}}$ . Une preuve de  $\Gamma\{\Box B^+\}\{\emptyset\}$  est obtenue de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \neg B^+\rangle, \neg\perp\}\{\emptyset\} \quad [id]}{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \neg B^+\rangle, \neg\perp\}\{\emptyset\}} \quad [id] \quad \frac{\frac{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \Box B^+, \neg\perp\}\{\emptyset\} \quad [id]}{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, B^+\rangle, \neg\perp\}\{\emptyset\}} \quad [\Box_E^*]}{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \perp^+\rangle, \neg\perp\}\{\emptyset\}} \quad [\supset_E]}{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \perp^+\rangle, \neg\perp\}\{\emptyset\}} \quad [\perp'_c]} \\ \frac{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \perp^+\rangle, \neg\perp\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\Box B, \langle\neg B, \perp^+\rangle\}\{\emptyset\}} \quad [\supset_I]}{\Gamma\{\langle\neg B\rangle, \Box B^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Box_I]} \\ \\ \frac{\mathcal{D} \quad \Gamma\{\neg\Box B, \langle\neg B\rangle\}\{\perp^+\}}{\Gamma\{\langle\neg B\rangle\}\{\perp^+\}} \quad [Cut]}{\frac{\Gamma\{\langle\neg B\rangle\}\{\perp^+\}}{\Gamma\{\langle B^+\rangle\}\{\emptyset\}} \quad [H.I]}{\Gamma\{\Box B^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Box_I]} \end{array} \right.$$

$[\Box_E^*]$  correspond à une application de  $[\Box_E]$ ,  $[\Box_E^{\text{B4}}]$  ou  $[\Box_E^{\text{S5}}]$  suivant celle qui est dans  $DN'_{\text{KTh}}$ . □

**Théorème 3.4.2** (Normalisation). *Toute preuve dans  $DN'_{\text{KTh}}$  se réduit à une preuve en forme normale.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}$  une preuve dans  $DN'_{\text{KTh}}$ . Étant donné que  $DN'_{\text{KTh}}$  ne contient pas les règles  $[\vee_E]$  et  $[\diamond_E]$ , toutes les coupures dans  $\mathcal{D}$  sont forcément de longueur égale à 1. En outre, la restriction sur l'application de  $[\perp'_c]$  permet de déduire que toutes ces coupures sont des détours. La démonstration de la normalisation est similaire à celle du théorème 3.2.4 : une preuve par induction sur la valeur de la paire  $(n, m)$  où  $n = cr(\mathcal{D})$  et  $m$  est la somme des longueurs de toutes les coupures critiques. Dans le cas de  $DN'_{\text{KTh}}$ , la somme des longueurs de toutes les coupures critiques correspond à leur nombre. □

Notons que la normalisation ici ne permet pas d'obtenir la propriété de la sous-formule. Toutefois, nous avons la propriété suivante : si  $\mathcal{D}$  est une preuve en forme normale d'un A-séquent  $\mathcal{S}$  dans  $DN'_{\text{KTh}}$ , alors toute formule dans  $\mathcal{D}$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ ,  $\perp$  ou une formule de la forme  $\neg A$  telle que  $A$  est une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ . La démonstration de cette propriété est plus simple que celle de la proposition 3.3.4

## Conclusion

Dans ce chapitre dédié à la déduction naturelle, après avoir introduit une nouvelle structure multi-contextuelle, nous avons défini des systèmes de déduction naturelle pour les logiques modales intuitionnistes et classiques formées à partir de toutes les combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. En outre, nous avons démontré qu'ils vérifient tous la normalisation. Nos systèmes sont simples et sans labels, ce qui reflète l'adéquation qu'il y a entre notre structure et les logiques modales.

Dans le chapitre suivant, nous utiliserons la structure de A-séquent pour définir aussi des calculs des séquents pour les logiques modales intuitionnistes considérées ici. Nous verrons



que la normalisation sera à la base de la démonstration de l'élimination de la coupure dans ces calculs.



## Chapitre 4

# Calculs des séquents et logiques modales intuitionnistes

### Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre au formalisme de calcul des séquents dans le cas des logiques modales intuitionnistes. Comme les systèmes de déduction naturelle, les calculs des séquents dans ce cas sont peu nombreux [104, 119, 34, 13, 9]. En ce qui concerne les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5, de même que la déduction naturelle, l'unique approche qui a permis de définir des calculs pour toutes ces logiques est celle de Simpson [119] qui est fondée sur l'intégration d'informations sémantiques à travers des labels. Dans ce contexte, nous définissons des calculs pour les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 en utilisant la structure de A-séquent définie au chapitre 3, donc sans labels. En outre, pour les logiques formées à partir des combinaisons de  $T$  et  $B$ , nous proposons des procédures de décision simples fondées sur nos calculs pour ces logiques.

Dans un premier temps, nous définissons des calculs qui peuvent être vus comme des calculs dans le style de Kleene [85]. Une des principales caractéristiques de ce dernier réside dans l'internalisation de la contraction dans toutes les règles gauches. Pour l'élimination de la coupure, nous exploitons la normalisation suivant une approche similaire à celle de Prawitz [110]. Une des propriétés importantes de nos calculs résultant de l'élimination de la coupure est celle de la sous-formule.

Dans un deuxième temps, nous proposons des procédures de décision en utilisant les calculs des logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$  et  $B$ . L'approche que nous adoptons repose sur l'introduction d'une notion de redondance sur les dérivations de sorte que tout A-séquent valide a une preuve non redondante. Nos procédures sont tout simplement des algorithmes recherchant des preuves non redondantes. Cette approche est similaire à celle utilisée dans le cas de la logique intuitionniste [44]. Nous nous restreignons à une partie de nos calculs car les autres ne vérifient pas la propriété de la profondeur. Cette propriété combinée avec celle de la sous-formule forment les points clés dans la démonstration de la terminaison de nos procédures. En effet, ces deux propriétés impliquent l'absence d'une dérivation infinie non redondante.

Enfin, nous apportons des changements à nos calculs dans le but de limiter l'utilisation de la contraction. Dans les nouveaux calculs, la contraction est internalisée uniquement dans les

règles gauches associées aux deux opérateurs  $\supset$  et  $\Box$ .

## 4.1 Un calcul des séquents quasi-modulaire

Dans le cas des calculs standard, les règles associées à chaque opérateur se divisent en règles gauches et règles droites. Les règles gauches agissent à gauche du symbole  $\vdash$ , tandis que celles droites agissent à sa droite. Dans le cas de nos calculs, nous considérons qu'une règle est gauche si elle agit sur le A-environnement, et elle est droite si elle agit sur la formule marquée (la conclusion). Comme dans le cas de la déduction naturelle, les deux logiques IB4 et IS5 sont traitées séparément. Ainsi, nous considérons que l'ensemble de règles que nous fournissons forment un calcul quasi-modulaire.

$$\boxed{
\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma\{A, A^+\}} [id] \qquad \frac{}{\Gamma\{\perp\}\{C^+\}} [\perp_L] \\
\frac{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i\}\{C^+\}}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} [\wedge_L^i] \qquad \frac{\Gamma\{A^+\} \quad \Gamma\{B^+\}}{\Gamma\{A \wedge B^+\}} [\wedge_R] \\
\frac{\Gamma\{A \vee B, A\}\{C^+\} \quad \Gamma\{A \vee B, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \vee B\}\{C^+\}} [\vee_L] \qquad \frac{\Gamma\{A_i^+\}}{\Gamma\{A_1 \vee A_2^+\}} [\vee_R^i] \\
\frac{\Gamma\{A \supset B, A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{A \supset B, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \supset B\}\{C^+\}} [\supset_L] \qquad \frac{\Gamma\{A, B^+\}}{\Gamma\{A \supset B^+\}} [\supset_R] \\
\frac{\Gamma\{\langle A \rangle, \diamond A\}\{C^+\}}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} [\diamond_L] \qquad \frac{\Gamma\{\langle \Delta, A^+\rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \diamond A^+\}} [\diamond_R] \\
\frac{\Gamma\{\langle \Delta, A \rangle, \Box A\}}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \Box A\}} [\Box_L] \qquad \frac{\Gamma\{\langle A^+\rangle\}}{\Gamma\{\Box A^+\}} [\Box_R] \\
\frac{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{A\}\{C^+\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [Cut]
\end{array}
}$$

FIG. 4.1 – Calcul des séquents  $G_{IK}$

Le calcul des séquents  $G_{IK}$  associé à la logique IK est décrit en figure 4.1. Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous définissons le calcul  $G_{IK\text{Th}}$  en utilisant les règles décrites en figure 4.2 de la manière suivante :

- si  $\text{IKTh}$  est IS5 alors  $G_{IK\text{Th}}$  est obtenu à partir de  $G_{IK}$  en remplaçant les règles  $[\Box_L]$  et  $[\diamond_R]$  par les règles  $[\Box_L^{\text{IS5}}]$  et  $[\diamond_R^{\text{IS5}}]$ ;
- si  $\text{IKTh}$  est IB4 alors  $G_{IK\text{Th}}$  est obtenu à partir de  $G_{IK}$  en remplaçant les règles  $[\Box_L]$  et  $[\diamond_R]$  par les règles  $[\Box_L^{\text{IB4}}]$  et  $[\diamond_R^{\text{IB4}}]$ ;
- sinon  $G_{IK\text{Th}}$  est obtenu en ajoutant à  $G_{IK}$  les règles  $[\Box_L^x]$  et  $[\diamond_R^x]$  pour tout  $x \in \text{Th}$ .

Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous appelons  $G_{IK\text{Th}}^-$  le calcul qui correspond à  $G_{IK\text{Th}}$  privé de la règle de coupure.

$\frac{\Gamma\{\Box A, A\}}{\Gamma\{\Box A\}} \quad [\Box_L^T]$	$\frac{\Gamma\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}} \quad [\Diamond_R^T]$
$\frac{\Gamma\{\langle \Delta, \Box A \rangle, A\}}{\Gamma\{\langle \Delta, \Box A \rangle\}} \quad [\Box_L^B]$	$\frac{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, A^+\}}{\Gamma\{\langle \Delta, \Diamond A^+ \rangle\}} \quad [\Diamond_R^B]$
$\frac{\Gamma\{\Delta\{A\}, \Box A\}}{\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \Box A\}} \quad [\Box_L^4](prof(\Delta\{\}) > 1)$	$\frac{\Gamma\{\Delta\{A^+\}}}{\Gamma\{\Delta\{\emptyset\}, \Diamond A^+\}} \quad [\Diamond_R^4](prof(\Delta\{\}) > 1)$
$\frac{\Gamma\{\Box A\}\{A\}}{\Gamma\{\Box A\}\{\emptyset\}} \quad [\Box_L^5](prof(\Gamma\{\}\{\emptyset\}) > 0 \text{ et } prof(\Gamma\{\emptyset\}\{\}) > 0)$	$\frac{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Diamond_R^5](prof(\Gamma\{\}\{\emptyset\}) > 0 \text{ et } prof(\Gamma\{\emptyset\}\{\}) > 0)$
$\frac{\Gamma\{\Box A\}\{A\}}{\Gamma\{\Box A\}\{\emptyset\}} \quad [\Box_L^{B4}](sp(\Gamma\{\Box A^+\}\{\emptyset\}))$	$\frac{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Diamond_R^{B4}](sp(\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}))$
$\frac{\Gamma\{\Box A\}\{A\}}{\Gamma\{\Box A\}\{\emptyset\}} \quad [\Box_L^{S5}]$	$\frac{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}{\Gamma\{\Diamond A^+\}\{\emptyset\}} \quad [\Diamond_R^{S5}]$

FIG. 4.2 – Règles modales

Nous démontrons la correction et la complétude pour chaque calcul  $G_{\text{IKTh}}$  en considérant la validité dans  $\text{IKTh}$  à travers le système de déduction naturelle  $DN_{\text{IKTh}}$  défini au chapitre 3. Pour démontrer la correction, nous démontrons que tout A-séquent ayant une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$  a aussi une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ . Quant à la complétude, nous démontrons que si un A-séquent a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ , alors il a aussi une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$ .

**Théorème 4.1.1** (Correction). *Si un A-séquent a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$ , alors il a aussi une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IKTh}}$ . Pour démontrer que  $\mathcal{S}$  a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$ , on fait une preuve par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ . Les cas où  $\mathcal{D}$  se termine par une application d'une règle droite sont triviaux car les règles droites de  $G_{\text{IKTh}}$  et les règles d'introduction de  $DN_{\text{IKTh}}$  sont les mêmes. Étant donné que la règle  $[Cut]$  est admissible dans  $DN_{\text{IKTh}}$  (proposition 3.3.1), le cas où  $\mathcal{D}$  se termine par une application de  $[Cut]$  est également trivial. En ce qui concerne les cas des règles gauches, nous ne développons que les cas de  $[\wedge_L]$  et  $[\Diamond_L]$ . Les autres cas sont similaires. Dans ce qui suit, on note  $[H.I]$  toute application de l'hypothèse d'induction.

– **Cas de  $[\wedge_L]$  :**

$$\frac{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i\}\{C^+\}}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} \quad [\wedge_L]$$

Une preuve de  $\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$  est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2^+\}\{\emptyset\}} [id]}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i^+\}\{\emptyset\}} [\wedge E]}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} \frac{\frac{}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i\}\{C^+\}} [H.I]}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} [Cut]$$

– Cas de  $[\diamond_L]$  :

$$\frac{\Gamma\{\langle A \rangle, \diamond A\}\{C^+\}}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} [\diamond_L]$$

Une preuve de  $\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$  est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma\{\diamond A, \diamond A^+\}\{\emptyset\}} [id]}{\Gamma\{\diamond A, \diamond A^+\}\{\emptyset\}} [\wedge E]}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} \frac{\frac{}{\Gamma\{\langle A \rangle, \diamond A\}\{C^+\}} [H.I]}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} [\diamond E]$$

□

La proposition suivante exprime l'admissibilité de la règle  $[\perp]$  de  $DN_{\text{IKTh}}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Elle sera utilisée dans la démonstration de la complétude.

**Proposition 4.1.1** (Admissibilité de  $[\perp]$ ). *Si  $\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  alors  $\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}$  en a une aussi.*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de la preuve  $\mathcal{D}$  de  $\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\}$ . Si  $\Gamma\{\perp^+\}\{\emptyset\}$  est un axiome, alors  $\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}$  l'est aussi (une instance de  $[\perp_L]$ ). Sinon, une preuve de  $\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}$  est obtenue par simple application de l'hypothèse d'induction sur les prémisses ayant  $\perp$  comme conclusion dans la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$ . Par exemple, si cette règle est  $[\supset_L]$  :

$$\frac{\Gamma\{B \supset C, B^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{B \supset C, C\}\{\perp^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{B \supset C\}\{\perp^+\}\{\emptyset\}} [\supset_L]$$

Par hypothèse d'induction, on sait que  $\Gamma\{B \supset C, C\}\{\emptyset\}\{A^+\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . En appliquant la règle  $[\supset_L]$  avec comme prémisses  $\Gamma\{B \supset C, B^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}$  et  $\Gamma\{B \supset C, C\}\{\emptyset\}\{A^+\}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma\{B \supset C\}\{\emptyset\}\{A^+\}$ . □

**Théorème 4.1.2** (Complétude). *Si un A-séquent a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$  alors il a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}$  un séquent valide dans  $\text{IKTh}$ . En utilisant le théorème 3.2.4, on sait que tout A-séquent valide dans  $\text{IKTh}$  a une preuve en forme normale dans  $DN_{\text{IKTh}}$ . Soit  $\mathcal{D}$  une preuve en forme normale de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$ . Pour démontrer que  $\mathcal{S}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$  ( $G_{\text{IKTh}}^-$ ), on procède par induction sur la valeur du nombre d'applications de règles  $n$  dans  $\mathcal{D}$ . Si  $n = 1$  alors  $\mathcal{S}$  est une instance de  $[id]$  dans  $DN_{\text{IKTh}}$  et, par conséquent, il est aussi une instance de  $[id]$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Les cas dans lesquels la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  est une règle d'introduction sont simples car les règles d'introduction de  $DN_{\text{IKTh}}$  et les règles droites de  $G_{\text{IKTh}}^-$  sont les mêmes. Considérons, en guise d'exemple, le cas de  $[\Box_I]$  :

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \Gamma\{\langle A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\Box A^+\}} [\Box_I]$$

En utilisant l'hypothèse d'induction,  $\Gamma\{A^+\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Par conséquent, l'extension de toute preuve de  $\Gamma\{A^+\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  par une application de  $[\Box_R]$  fournit une preuve de  $\Gamma\{\Box A^+\}$ . En ce qui concerne le cas de  $[\perp]$ , la preuve est obtenue à partir de la proposition 4.1.1 comme dans le cas des règles d'introduction.

Considérons maintenant les cas dans lesquels la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  est une règle d'élimination. Soit  $\alpha$  la branche principale de  $\mathcal{D}$  (définition 3.3.3). Étant donné que  $\alpha$  ne contient pas de prémisses mineures, le A-environnement du A-séquent au début  $\mathcal{S}_0$  est le même que celui de  $\mathcal{S}$ . Effectivement,  $\mathcal{S}_0$  n'est déchargé par aucune règle et par voie de conséquence son A-environnement ne contient d'autres formules que celle dans le A-environnement du A-séquent à la racine, à savoir  $\mathcal{S}$ . Ainsi, il existe une 2-situation  $\Gamma\{\}\{\}$  et deux formules  $A$  et  $C$  telles que  $\mathcal{S}_0 = \Gamma\{A, A^+\}\{\emptyset\}$  et  $\mathcal{S} = \Gamma\{A\}\{C^+\}$ .

Dans ce qui suit, nous considérons les cas de la structure de  $A$ . Notons que  $A$  ne peut être en aucun cas une formule atomique, car autrement  $\mathcal{S}_0$  est une prémisses d'une règle d'introduction ou de  $[\perp]$  ce qui contredit le fait que  $\mathcal{D}$  est en forme normale.

**Cas  $A = A_1 \wedge A_2$  :**

dans ce cas  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i^+\}\{\emptyset\}} \begin{array}{l} [id] \\ [\wedge_E^i] \end{array}}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} \mathcal{D}'$$

Étant donné que le nombre d'applications de règles dans  $\mathcal{D}'$  est plus petit que celui dans  $\mathcal{D}$ , l'application de l'hypothèse d'induction nous permet de dire que  $\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i\}\{C^+\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . En appliquant la règle  $[\wedge_L^i]$  avec comme prémisses le précédent A-séquent, on obtient une preuve de  $\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .

**Cas  $A = A_1 \supset A_2$  :**

dans ce cas  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\Gamma\{A_1 \supset A_2, A_1 \supset A_2^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{A_1 \supset A_2, A_2^+\}\{\emptyset\}} \begin{array}{l} [id] \\ \mathcal{D}_1 \end{array}}{\Gamma\{A_1 \supset A_2\}\{C^+\}} \begin{array}{l} \Gamma\{A_1 \supset A_2, A_1^+\}\{\emptyset\} \\ [\supset_E] \\ \mathcal{D}_2 \end{array}$$

Le nombre d'applications de règles dans  $\mathcal{D}_1$  ainsi que celui dans  $\mathcal{D}_2$  sont plus petits que celui dans  $\mathcal{D}$ . Donc, en utilisant l'hypothèse d'induction,  $\Gamma\{A_1 \supset A_2, A_1^+\}\{\emptyset\}$  et  $\Gamma\{A_1 \supset A_2, A_2\}\{C^+\}$  ont des preuves dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . En appliquant la règle  $[\supset_L]$  avec comme prémisses  $\Gamma\{A_1 \supset A_2, A_1^+\}\{\emptyset\}$  et  $\Gamma\{A_1 \supset A_2, A_2\}\{C^+\}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma\{A_1 \supset A_2\}\{C^+\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .

**Cas  $A = A_1 \vee A_2$  :**

en utilisant la proposition 3.3.5,  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma\{A_1 \vee A_2, A_1 \vee A_2^+\}\{\emptyset\}} [id]}{\Gamma\{A_1 \vee A_2, A_1\}\{C^+\}} \mathcal{D}_1 \quad \frac{\overline{\Gamma\{A_1 \vee A_2, A_2\}\{C^+\}} \mathcal{D}_2}{\Gamma\{A_1 \vee A_2, A_2\}\{C^+\}}}{\Gamma\{A_1 \vee A_2\}\{C^+\}} [\vee_E]$$

En utilisant l'hypothèse d'induction,  $\Gamma\{A_1 \vee A_2, A_1\}\{C^+\}$  et  $\Gamma\{A_1 \vee A_2, A_2\}\{C^+\}$  ont des preuves dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Ainsi, en appliquant la règle  $[\vee_L]$  avec comme prémisses les deux précédents A-séquents, on obtient une preuve de  $\Gamma\{A_1 \vee A_2\}\{C^+\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .

**Cas  $A = \diamond A'$  :**

en utilisant la proposition 3.3.5,  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma\{\diamond A', \diamond A'^+\}\{\emptyset\}} [id]}{\Gamma\{\diamond A', \langle A' \rangle\}\{C^+\}} \mathcal{D}_1}{\Gamma\{\diamond A'\}\{C^+\}} [\diamond_E]$$

En utilisant l'hypothèse d'induction,  $\Gamma\{\diamond A', \langle A' \rangle\}\{C^+\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . En appliquant la règle  $[\diamond_L]$  avec comme prémisses le A-séquent  $\Gamma\{\diamond A', \langle A' \rangle\}\{C^+\}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma\{\diamond A'\}\{C^+\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .

**Cas  $A = \Box A'$  :**

si  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante ( $[\Box_E]$ ) :

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, \Box A', \Box A'^+\}} [id]}{\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, A'^+, \Box A'\}} \mathcal{D}'}{\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, \Box A'\}} [\Box_E]$$

où  $\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, \Box A'\} = \Gamma\{\Box A'\}\{C^+\}$ . En utilisant l'hypothèse d'induction,  $\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, A', \Box A'\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . En appliquant la règle  $[\Box_L]$  avec comme prémisses  $\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, A', \Box A'\}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma'\{\langle \Delta \rangle, \Box A'\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .

Si  $\mathcal{D}$  est de la forme suivante ( $[\Box_E^T]$ ) :

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma'\{\Box A', \Box A'^+\}} [id]}{\Gamma'\{A'^+, \Box A'\}} \mathcal{D}'}{\Gamma'\{\Box A'\}} [\Box_E^T]$$

où  $\Gamma'\{\Box A'\} = \Gamma\{\Box A'\}\{C^+\}$ . En utilisant l'hypothèse d'induction,  $\Gamma'\{A', \Box A'\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . En appliquant la règle  $[\Box_L^T]$  avec comme prémisses  $\Gamma'\{A', \Box A'\}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma'\{\Box A'\}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .

Les cas de  $[\Box_E^B]$ ,  $[\Box_E^4]$ ,  $[\Box_E^5]$ ,  $[\Box_E^{\text{IB}4}]$  et  $[\Box_E^{\text{IS}5}]$  sont démontrés de la même façon en utilisant respectivement  $[\Box_L^B]$ ,  $[\Box_L^4]$ ,  $[\Box_L^5]$ ,  $[\Box_L^{\text{IB}4}]$  et  $[\Box_L^{\text{IS}5}]$ .  $\square$



Dans la démonstration de la complétude, nous venons de démontrer grâce à la normalisation que si un A-séquent a une preuve dans  $DN_{\text{IKTh}}$  alors il a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$  sans aucune application de la règle de coupure. Par conséquent, nous obtenons le théorème de l'élimination de la coupure :

**Théorème 4.1.3** (Élimination de la coupure). *Si un A-séquent a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$ , alors il en a également une dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .*

Maintenant, nous fournissons certaines propriétés intéressantes résultant de l'élimination de la coupure.

**Théorème 4.1.4** (Propriété de la sous-formule). *Si  $\mathcal{S}$  est un A-séquent valide dans  $\text{IKTh}$ , alors toute preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  ne contient que des sous-formules des formules de  $\mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* Ce théorème découle du fait que dans toute règle de  $G_{\text{IKTh}}^-$ , les prémisses ne contiennent que des sous-formules de formules de la conclusion.  $\square$

**Corollaire 4.1.1** (Propriété de la séparation). *Si  $\mathcal{S}$  est un A-séquent valide dans  $\text{IKTh}$ , alors toute preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  ne contient que des applications des règles associées aux opérateurs apparaissant dans  $\mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* Une conséquence directe de la propriété de la sous-formule.  $\square$

Comme dans le cas de la déduction naturelle, la propriété de la sous-formule permet d'obtenir celle de la profondeur dans le cas de  $G_{\text{IKTh}}^-$  pour  $\text{Th} \in \{\emptyset, \{T\}, \{B\}, \{T, B\}\}$ .

**Corollaire 4.1.2** (Propriété de la profondeur). *Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une dérivation de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Si  $\mathcal{S}'$  est un A-séquent dans  $\mathcal{D}$ , alors sa profondeur est inférieure ou égale à la profondeur de  $\mathcal{S}$  plus la valeur de  $\text{nest}(\mathcal{S})$ .*

*Démonstration.* Les règles qui ont des prémisses avec des profondeurs supérieures à celles des conclusions sont  $[\square_R]$  et  $[\diamond_L]$ . Intuitivement, si la profondeur de  $\mathcal{S}'$  est supérieure à celle de  $\mathcal{S}$  plus  $\text{nest}(\mathcal{S})$ , alors  $\mathcal{D}$  contient une formule  $A$  avec  $\text{nest}(A) > \text{nest}(\mathcal{S})$ . Cela contredit le fait que toutes les formules dans  $\mathcal{D}$  sont des sous-formules des formules de  $\mathcal{S}$ . La démonstration est par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$  en considérant les cas de la dernière règle appliquée.  $\square$

Montrons avec un contre-exemple que cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas de  $G_{\text{IS5}}$  :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A, \diamond A, \langle A, \diamond A, \langle A \rangle \rangle \rangle\}}{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A, \diamond A, \langle A, \diamond A \rangle \rangle\}} [\diamond_L] \\
 \frac{\Gamma\{\square\diamond A, \langle A, \diamond A, \langle A \rangle \rangle\}}{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A, \diamond A \rangle \rangle\}} [\square_{\text{L}}^{\text{IS5}}] \\
 \frac{\Gamma\{\square\diamond A, \langle A, \diamond A, \langle A \rangle \rangle\}}{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A, \diamond A \rangle \rangle\}} [\diamond_L] \\
 \frac{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A \rangle \rangle\}}{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A, \diamond A \rangle \rangle\}} [\square_{\text{L}}^{\text{IS5}}] \\
 \frac{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A, \langle A \rangle \rangle\}}{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A \rangle \rangle\}} [\diamond_L] \\
 \frac{\Gamma\{\square\diamond A, \diamond A \rangle \rangle\}}{\Gamma\{\square\diamond A \rangle \rangle\}} [\square_{\text{L}}^{\text{IS5}}] \\
 \Gamma\{\square\diamond A \rangle \rangle\}
 \end{array}$$

Le problème est lié à certaines règles associées aux opérateurs modaux dans le cas de  $G_{\text{IKTh}}$  avec  $4 \in \text{Th}$  ou  $5 \in \text{Th}$  comme la règle  $[\Box_L^{\text{IS5}}]$ . Cela est le résultat de l'absence dans ces règles de borne limitant la différence entre la position de la formule marquée dans la prémisse et sa position dans la conclusion.

## 4.2 Calculs des séquents et décidabilité

Dans cette section, nous démontrons la décidabilité des logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$  et  $B$  en utilisant leurs calculs des séquents que nous venons de définir. Nous nous limitons à ces logiques car nous avons besoin de la propriété de la profondeur pour démontrer la terminaison.

Le point clé de nos procédures de décision réside dans l'introduction d'une notion de *redondance* sur les dérivations de sorte que tout A-séquent valide a une preuve non redondante. En fait, nos procédures de décision peuvent être décrites comme étant des algorithmes de recherche de preuves passant uniquement par des dérivations qui ne sont pas redondantes.

### 4.2.1 Admissibilité avec préservation de la hauteur et de la taille

Nous démontrons maintenant que les règles structurelles d'affaiblissement, de fusion et de contraction sont admissibles avec préservation de la hauteur ainsi que la taille dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Cela sera à la base de la définition de notre notion de redondance sur les dérivations.

**Proposition 4.2.1** (Admissibilité de l'affaiblissement). *Pour tous  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ ,*

1. *si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{\Delta\}\{C^+\}$ ; et*
2. *si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \Gamma\{\Delta\}\{C^+\}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ . Il suffit de considérer les cas de la dernière règle appliquée dans la preuve de  $\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$ . Dans un premier temps, on applique l'hypothèse d'induction aux prémisses. Ensuite, on applique cette même règle pour obtenir une preuve de  $\Gamma\{\Delta\}\{C^+\}$ .  $\square$

La règle de fusion correspond à la fusion de deux contextes. Elle est donnée par :

$$\frac{\Gamma\{\langle \Delta, \Delta' \rangle\}}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle, \langle \Delta' \rangle\}} [m]$$

**Proposition 4.2.2** (Admissibilité de la fusion). *Pour tous  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ ,*

1. *si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{\langle \Delta \rangle, \langle \Delta' \rangle\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{\langle \Delta, \Delta' \rangle\}$ ; et*
2. *si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \Gamma\{\langle \Delta \rangle, \langle \Delta' \rangle\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \Gamma\{\langle \Delta, \Delta' \rangle\}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$  comme dans le cas de la proposition 4.2.1.  $\square$

**Proposition 4.2.3** (Admissibilité de la contraction). *Pour tous  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ ,*

1. *si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{\Delta, \Delta\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{\Delta\}$ ; et*
2. *si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \Gamma\{\Delta, \Delta\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \Gamma\{\Delta\}$ .*

*Démonstration.* Les deux propriétés sont démontrées de la même façon, ainsi nous ne considérons que le cas de la première. En se servant de la proposition 4.2.2, il suffit de démontrer la propriété suivante : (1') si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{A, A\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \Gamma\{A\}$ , pour toute formule  $A$ . Effectivement, la propriété de fusion permet de passer de la situation critique de  $\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \langle\Delta, \Delta'\rangle\}$  à celle de  $\Gamma\{\langle\Delta, \Delta, \Delta'\rangle\}$  sans augmenter la profondeur. En guise d'exemple, Considérons la dérivation suivante :

$$\frac{\mathcal{D}' \quad \Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta'\rangle\rangle, \langle\Delta, \langle\Delta'\rangle, C^+\}}{\Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta'\rangle\rangle, \langle\Delta, \langle\Delta'\rangle\rangle, \diamond C^+\}} [\diamond_R]$$

où  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont des multi-ensembles de formules. Une preuve de  $\Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta'\rangle\rangle, \diamond C^+\}$  peut être construite en utilisant la propriété (1') ainsi que l'admissibilité de la fusion de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta'\rangle\rangle, \langle\Delta, \langle\Delta'\rangle, C^+\}}{\Gamma\{\langle\Delta, \Delta, \langle\Delta', \Delta'\rangle, C^+\}} [fusion]}{\Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta'\rangle, C^+\}} [(1')]}{\Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta\rangle\rangle, \diamond C^+\}} [\diamond_R]$$

La démonstration de la propriété (1') est par induction sur la valeur de  $n$ . Si  $n = 0$  alors  $\Gamma\{A, A\}$  est un axiome et, par conséquent,  $\Gamma\{A\}$  l'est aussi. Sinon, soit  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\Gamma\{A, A\}$  de profondeur égale à  $n > 0$ . Étant donné que la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  ne modifie aucune des deux occurrences de  $A$ , pour obtenir une preuve de  $\Gamma\{A\}$  on applique l'hypothèse d'induction aux prémisses et ensuite on applique cette même règle pour l'obtention d'une preuve de profondeur inférieure ou égale à  $n$ .  $\square$

#### 4.2.2 Dérivations redondantes

Nous définissons la relation de contraction, notée  $\rightarrow_c$ , sur les A-séquents par  $\Gamma\{\Delta, \Delta\} \rightarrow_c \Gamma\{\Delta\}$ . En outre, nous rappelons que les deux relations  $\rightarrow_w$  et  $\rightarrow_m$  sont définies par respectivement  $\Gamma\{C^+\}\{\emptyset\} \rightarrow_w \Gamma\{C^+\}\{\Sigma\}$  ( $\Sigma$  est un A-environnement) et  $\Gamma\{\langle\Delta_1\rangle, \langle\Delta_2\rangle\} \rightarrow_m \Gamma\{\langle\Delta_1, \Delta_2\rangle\}$ .

Nous définissons une relation de préordre, notée  $\lesssim$ , sur les A-séquents par :  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$  si et seulement si  $\mathcal{S}(\rightarrow_c + \rightarrow_w + \rightarrow_m)^* \mathcal{S}'$  où  $(\rightarrow_c + \rightarrow_w + \rightarrow_m)^*$  est la clôture réflexive et transitive de l'union des trois relations  $\rightarrow_c$ ,  $\rightarrow_w$  et  $\rightarrow_m$ . Nous notons  $\cong$  la relation sur les A-séquents définie par :  $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$  si et seulement si  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}' \lesssim \mathcal{S}$ . Nous pouvons facilement voir que cette relation est une relation d'équivalence.

**Proposition 4.2.4.** *Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux A-séquents. Si  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$  alors*

1. si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \mathcal{S}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^n \mathcal{S}'$ ; et
2. si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}'$ .

*Démonstration.* Conséquence des propositions 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3.  $\square$

**Définition 4.2.1.** *Une dérivation est dite redondante si elle a une branche contenant deux différentes occurrences de A-séquents  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  telle que  $\mathcal{S}$  est au dessus de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$ .*

**Proposition 4.2.5.** *Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , si un A-séquent est valide dans  $\text{IKTh}$ , alors il a une preuve qui n'est pas redondante dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ . On démontre maintenant que  $\mathcal{S}$  a une preuve qui n'est pas redondante par induction sur la taille  $s$  de  $\mathcal{D}$ . Si la preuve  $\mathcal{D}$  n'est pas redondante, alors on a la propriété recherchée. Ce cas inclus le cas où la taille est égal à 1. Sinon,  $s = n + 1$  avec  $n \geq 1$  et  $\mathcal{D}$  est redondante. Ainsi,  $\mathcal{D}$  contient deux différentes occurrences de A-séquents  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  telle que  $\mathcal{S}_1$  est au dessus de  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_1 \lesssim \mathcal{S}_2$ . Soit  $n_1$  la taille de la preuve de  $\mathcal{S}_1$  dans  $\mathcal{D}$ . Il est clair que la taille de la preuve  $\mathcal{D}_2$  de  $\mathcal{S}_2$  dans  $\mathcal{D}$  est strictement plus grande que  $n_1$ . En utilisant la proposition 4.2.4,  $\mathcal{S}_2$  a une preuve  $\mathcal{D}'_2$  ayant une taille inférieure ou égale à  $n_1$ . Le remplacement de  $\mathcal{D}_2$  par  $\mathcal{D}'_2$  dans  $\mathcal{D}$  fournit une preuve de  $\mathcal{S}$  de taille inférieure ou égale à  $n$ . Par conséquent, en appliquant l'hypothèse d'induction, on déduit que  $\mathcal{S}$  a une preuve qui n'est pas redondante.  $\square$

### 4.2.3 Procédures de décision

Dans la proposition suivante, nous introduisons le point clé de la démonstration de terminaison de nos procédures de décision. Pour qu'elle soit vraie, cette proposition nécessite non seulement la propriété de la sous-formule mais aussi celle de la profondeur.

**Proposition 4.2.6.** *Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\text{Th} \subseteq \{T, B\}$ . L'ensemble de tous les A-séquents appartenant aux dérivations de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  peut être partitionné en un ensemble fini de classes d'équivalence de  $\cong$ .*

*Démonstration.* Une conséquence des propriétés de la sous-formule (proposition 4.1.1) et de la profondeur (proposition 4.1.2).  $\square$

Maintenant, nous fournissons une procédure de décision pour chaque logique  $\text{IKTh}$  avec  $\text{Th} \subseteq \{T, B\}$ . Ces procédures ne diffèrent que par le calcul utilisé, à savoir que pour la logique  $\text{IKTh}$  on utilise le calcul  $G_{\text{IKTh}}^-$ . Elles consistent en une recherche d'une preuve non redondante.

#### Procédure de décision pour $\text{IKTh}$ ( $\text{Th} \subseteq \{T, B\}$ ) :

Soit  $\mathcal{S}$  un A-séquent.

##### Étape 1 :

On commence par la dérivation contenant uniquement  $\mathcal{S}$  qui est l'unique dérivation non redondante de taille 1.

Si cette dérivation est une preuve, alors  $\mathcal{S}$  est valide et on renvoie cette preuve.

Sinon on passe à l'étape suivante.

##### Étape $i+1$ :

On construit l'ensemble de toutes les dérivations non redondantes dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  de taille  $i + 1$ .

Si cet ensemble contient une preuve alors  $\mathcal{S}$  est valide et on renvoie cette preuve.

Sinon, si cet ensemble est vide, alors  $\mathcal{S}$  n'est pas valide, sinon on passe à l'étape suivante.

La correction des procédures de décision fournies ici découle de la correction et la complétude de nos calculs ainsi que la proposition 4.2.5. Concernant la terminaison, elle est une conséquence de la proposition 4.2.6 en plus du fait que le nombre d'applications possibles de règles permettant d'étendre une dérivation de taille  $i$  en une de taille  $i + 1$  est fini. Cela nous conduit à déduire la décidabilité :

**Théorème 4.2.1.** *Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B\}$ , la logique  $\text{IKTh}$  est décidable.*

Dans l'exemple donné ici, nous illustrons nos procédures en démontrant que la formule  $\diamond \Box A \supset A$  n'est pas valide dans  $\text{IK}\{T\}$ .

Nous appelons  $Der_i$  l'ensemble des dérivations non redondantes de taille  $i$ .

**Étape 1 :**  $Der_1 = \{\diamond \Box A \supset A^+\}$

**Étape 2 :**  $Der_2 = \left\{ \frac{\diamond \Box A, A^+}{\diamond \Box A \supset A^+} [\supset_R] \right\}$

**Étape 3 :**  $Der_3 = \left\{ \frac{\frac{\frac{\diamond \Box A, \langle \Box A \rangle, A^+}{\diamond \Box A, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A \supset A^+} [\supset_R]}{\diamond \Box A \supset A^+} \right\}$

**Étape 4 :**  $Der_4 = \left\{ \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+}{\diamond \Box A, \langle \Box A \rangle, A^+} [\Box_L^T]}{\diamond \Box A, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A \supset A^+} [\supset_R]}{\diamond \Box A \supset A^+} \right\}$

Les seules dérivations de taille 5 que l'on peut obtenir de la dérivation qui est dans  $Der_4$  sont :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\diamond \Box A, \langle \Box A, A, A \rangle, A^+}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\Box_L^T]}{\diamond \Box A, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A \supset A^+} [\supset_R]}{\diamond \Box A, \langle \Box A \rangle, A^+} [\Box_L^T]}{\diamond \Box A, \langle \Box A \rangle, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\Box_L^T]}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\supset_R]}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\Box_L^T]}{\diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+} [\diamond_L]}{\diamond \Box A \supset A^+} [\supset_R]}{\diamond \Box A \supset A^+} [\supset_R]}$$

Ces dernières sont redondantes car on a

- $\diamond \Box A, \langle \Box A, A, A \rangle, A^+ \lesssim \diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+$  et
- $\diamond \Box A, \langle \Box A \rangle, \langle \Box A, A \rangle, A^+ \lesssim \diamond \Box A, \langle \Box A, A \rangle, A^+$ .

Par conséquent, à l'étape 5, on a  $Der_5 = \emptyset$ . Donc,  $\diamond \Box A \supset A$  n'est pas valide dans  $\text{IK}\{T\}$ .

### 4.3 Le calcul des séquents $G_{\text{IKTh}}^2$

Rappelons que la règle de contraction est problématique car sa prémisse est plus complexe que sa conclusion du fait de la duplication de formules. Même si la règle de contraction est absente de  $G_{\text{IKTh}}$ , nous ne pouvons pas considérer qu'elle est éliminée. Effectivement, elle est internalisée dans toutes les règles gauches. Cela se traduit par la persistance des formules sur lesquelles ces règles agissent dans leurs prémisses. Dans cette section, nous apportons des modifications à  $G_{\text{IKTh}}$  dans le but de limiter l'application de la contraction.

Le calcul  $G_{\text{IKTh}}^2$  est obtenu en remplaçant dans  $G_{\text{IKTh}}^-$  les règles  $[\wedge_L]$ ,  $[\vee_L]$ ,  $[\supset_L]$  et  $[\diamond_L]$

par les règles suivantes :

$$\frac{\Gamma\{A, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}} [\wedge_L] \qquad \frac{\Gamma\{A\}\{C^+\} \quad \Gamma\{B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \vee B\}\{C^+\}} [\vee_L]$$

$$\frac{\Gamma\{A \supset B, A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \supset B\}\{C^+\}} [\supset_L] \qquad \frac{\Gamma\{\langle A \rangle\}\{C^+\}}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} [\diamond_L]$$

**Théorème 4.3.1** (Correction). *Si un A-séquent a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^2$  alors il a aussi une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer la correction de  $G_{\text{IKTh}}^2$ , il suffit de démontrer l'admissibilité des règles  $[\wedge_L]$ ,  $[\vee_L]$ ,  $[\supset_L]$  et  $[\diamond_L]$  de  $G_{\text{IKTh}}^2$  dans  $G_{\text{IKTh}}$ .  $[W]$  correspond à l'application de la règle d'affaiblissement dont on a démontré l'admissibilité (proposition 4.2.1).

– Cas de  $[\wedge_L]$  :

$$\frac{\Gamma\{A, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \wedge B, A, B\}\{C^+\}} [W]$$

$$\frac{\Gamma\{A \wedge B, A, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \wedge B, B\}\{C^+\}} [\wedge_L]$$

$$\frac{\Gamma\{A \wedge B, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}} [\wedge_L]$$

– Cas de  $[\vee_L]$  :

$$\frac{\Gamma\{A\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \vee B, A\}\{C^+\}} [W] \quad \frac{\Gamma\{B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \vee B, B\}\{C^+\}} [W]$$

$$\frac{\Gamma\{A \vee B, A\}\{C^+\} \quad \Gamma\{A \vee B, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \vee B\}\{C^+\}} [\vee_L]$$

– Cas de  $[\supset_L]$  :

$$\frac{\Gamma\{B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \supset B, B\}\{C^+\}} [W]$$

$$\frac{\Gamma\{A \supset B, A^+\}\{\emptyset\} \quad \Gamma\{A \supset B, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \supset B\}\{C^+\}} [\supset_L]$$

– Cas de  $[\diamond_L]$  :

$$\frac{\Gamma\{\langle A \rangle\}\{C^+\}}{\Gamma\{\diamond A, \langle A \rangle\}\{C^+\}} [W]$$

$$\frac{\Gamma\{\diamond A, \langle A \rangle\}\{C^+\}}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} [\diamond_L]$$

□

Les calculs que nous utiliserons pour démontrer la complétude sont des versions légèrement modifiées de ceux que nous venons d'introduire. Pour tout  $\text{Th} \subseteq \{T, B, 4, 5\}$ , nous appelons  $G_{\text{IKTh}}^{2'}$  le calcul obtenu à partir de  $G_{\text{IKTh}}^2$  par l'ajout d'une restriction à  $[id]$  :

$$\frac{}{\Gamma\{p, p^+\}} [id](p \text{ est atomique})$$

L'ajout de cette restriction vise la satisfaction d'une propriété importante dans notre démarche pour démontrer la complétude (proposition 4.3.3). Notons que cette restriction ne rend pas nos calculs incomplets :

**Proposition 4.3.1.** *Le A-séquent  $\Gamma\{A, A^+\}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^{2'}$  pour toute formule  $A$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . Le cas où  $A$  est une formule atomique est trivial. Nous ne développons ici que le cas  $A = \Box B$  car les autres cas sont similaires ou plus simples :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma\{\Box B, \langle B, B^+\rangle\}} [H.I]}{\Gamma\{\Box B, \langle B^+\rangle\}} [\Box_L]}{\Gamma\{\Box B, \Box B^+\}} [\Box_R]$$

où  $[H.I]$  correspond à l'application de l'hypothèse d'induction.  $\square$

La proposition précédente nous permet de dire que les deux calculs  $G_{\text{IKTh}}^{2'}$  et  $G_{\text{IKTh}}^2$  sont équivalents dans le sens où si un A-séquent a une preuve dans l'un, alors il en a forcément une dans l'autre. Par conséquent, si une règle est admissible dans l'un, alors elle l'est dans l'autre.

**Proposition 4.3.2** (admissibilité de l'affaiblissement). *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\Delta\}\{C^+\}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ .  $\square$

La proposition suivante est utilisée pour démontrer l'admissibilité de la contraction avec préservation de la profondeur. Elle est similaire à la proposition connue sous le nom de **lemme d'inversion** [121]. Son énoncé dit que pour certaines règles, si la conclusion a une preuve avec une profondeur égale à  $n$ , alors certaines des prémisses ont des preuves avec des profondeurs inférieures ou égales à  $n$ .

**Proposition 4.3.3** (Lemme d'inversion).

1. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A \wedge B\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A, B\}\{C^+\}$ .*
2. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A_1 \vee A_2\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A_i\}\{C^+\}$ , pour  $i = 1, 2$ .*
3. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A_1 \wedge A_2^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A_i^+\}$ , pour  $i = 1, 2$ .*
4. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A \supset B^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A, B^+\}$ .*
5. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{A \supset B\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{B\}\{C^+\}$ .*
6. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\Box A^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\langle A^+\rangle\}$ .*
7. *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\langle A \rangle\}\{C^+\}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ . Nous ne développons que le cas de (6). Les autres cas sont similaires.

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve permettant d'avoir  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2'}}^n \Gamma\{\Box A^+\}$ . Si  $n = 0$  alors  $\Gamma\{\Box A^+\}$  est une instance de  $[\perp_L]$ , ce qui signifie que  $\Gamma\{\langle A^+\rangle\}$  est également une instance de  $[\perp_L]$ . Notons que sans la restriction associée à  $[id]$ ,  $\Gamma\{\Box A^+\}$  aurait pu être une instance de  $[id]$ , ce qui n'est pas le cas de  $\Gamma\{\langle A^+\rangle\}$ . On suppose maintenant que  $n > 0$ . Si  $\Gamma\{\Box A^+\}$  est une instance d'un axiome, alors on revient au précédent cas. Sinon, si la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  n'est pas  $[\Box_R]$ , alors il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction aux prémisses et ensuite utiliser cette même règle. Sinon, étant donné que  $\Gamma\{\langle A^+\rangle\}$  est la prémisses de la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  ( $[\Box_R]$ ), on a une preuve de  $\Gamma\{\langle A^+\rangle\}$  avec une profondeur strictement inférieure à celle de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

**Proposition 4.3.4** (Admissibilité de la fusion). *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n}} \Gamma\{\langle\Delta\rangle, \langle\Delta'\rangle\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^n} \Gamma\{\langle\Delta, \Delta'\rangle\}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ .  $\square$

**Proposition 4.3.5** (Admissibilité de la contraction). *Si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n}} \Gamma\{\Delta, \Delta\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^n} \Gamma\{\Delta\}$ .*

*Démonstration.* Comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition 4.2.3, il suffit de démontrer la propriété suivante : (1') si  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n}} \Gamma\{A, A\}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^n} \Gamma\{A\}$ , car la proposition 4.3.4 permet d'étendre cette propriété à cette proposition.

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve permettant d'avoir  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n}} \Gamma\{A, A\}$ . La preuve est par induction sur la valeur de  $n$ . Si  $n = 0$  alors  $\Gamma\{A, A\}$  est une instance d'un axiome et, par conséquent,  $\Gamma\{A\}$  l'est aussi. On suppose maintenant que  $n > 0$ . Si  $\Gamma\{A, A\}$  est une instance d'un axiome, alors on revient au cas précédent. Sinon, si la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  ne modifie aucune des deux occurrences de  $A$ , alors pour obtenir une preuve de  $\Gamma\{A\}$  on applique l'hypothèse d'induction aux prémisses et ensuite on applique cette même règle. Sinon, une preuve de  $\Gamma\{A\}$  est obtenue en utilisant principalement la proposition 4.3.3. Par exemple, considérons le cas où la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  est  $[\diamond_L]$  ( $A = \diamond B$ ) :

$$\frac{\mathcal{D}' \quad \Gamma\{\langle B \rangle, \diamond B\}}{\Gamma\{\diamond B, \diamond B\}} [\diamond_L]$$

En utilisant la proposition 4.3.3, on a  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n-1}} \Gamma\{\langle B \rangle, \langle B \rangle\}$ . Ensuite, en utilisant la proposition 4.3.4, on a  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n-1}} \Gamma\{\langle B, B \rangle\}$ . L'application de l'hypothèse d'induction permet d'obtenir  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n-1}} \Gamma\{\langle B \rangle\}$ . Enfin, en appliquant la règle  $[\diamond_L]$ , on obtient  $\vdash_{G_{\text{IKTh}}^{2n}} \Gamma\{\diamond B\}$ .  $\square$

**Théorème 4.3.2** (Complétude). *Si  $\mathcal{S}$  a une preuve dans  $G_{\text{IKTh}}^-$ , alors il en a aussi une dans  $G_{\text{IKTh}}^{2n}$  ( $G_{\text{IKTh}}^2$ ).*

*Démonstration.* Pour démontrer la complétude de  $G_{\text{IKTh}}^{2n}$ , il suffit de démontrer l'admissibilité des règles  $[\wedge_L]$ ,  $[\vee_L]$ ,  $[\supset_L]$  et  $[\diamond_L]$  de  $G_{\text{IKTh}}^-$  dans  $G_{\text{IKTh}}^{2n}$ .  $[W]$  et  $[C]$  correspondent aux applications de respectivement l'affaiblissement (proposition 4.3.2) et la contraction (proposition 4.3.5).

– Cas de  $[\wedge_L]$  :

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i\}\{C^+\}}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_i, A_{(i+1) \bmod 2}\}\{C^+\}} [W]}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} [\wedge_L]}{\Gamma\{A_1 \wedge A_2\}\{C^+\}} [C]$$

– Cas de  $[\vee_L]$  :

$$\frac{\frac{\Gamma\{A \vee B, A\}\{C^+\} \quad \Gamma\{A \vee B, B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \vee B, A \vee B\}\{C^+\}} [\vee_L]}{\Gamma\{A \vee B\}\{C^+\}} [C]$$



– Cas de  $[\supset_L]$  :

$$\frac{\frac{\Gamma\{A \supset B, A^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{A \supset B, A \supset B, A^+\}\{\emptyset\}} [W] \quad \Gamma\{A \supset B, B\}\{C^+\}}{\frac{\Gamma\{A \supset B, A \supset B\}\{C^+\}}{\Gamma\{A \supset B\}\{C^+\}} [C]} [\supset_L]$$

– Cas de  $[\diamond_L]$  :

$$\frac{\frac{\Gamma\{\diamond A, \langle A \rangle\}\{C^+\}}{\Gamma\{\diamond A, \diamond A\}\{C^+\}} [\diamond_L]}{\Gamma\{\diamond A\}\{C^+\}} [C]$$

□

Notons que dans  $G_{\text{IKTh}}^2$ , la contraction persiste encore dans les règles gauches associées aux deux opérateurs  $\square$  et  $\supset$ . Il en résulte l'absence de terminaison dans la construction de preuves. L'approche de Dyckhoff de l'élimination de la contraction [45], décrite au chapitre 1, peut permettre d'apporter des améliorations à  $G_{\text{IKTh}}^2$ . Toutefois, cela ne nous a pas permis de résoudre totalement le problème de l'élimination de la contraction. En fait, les difficultés que nous avons rencontrées sont similaires à celles pointées par Dyckhoff dans le cas de la logique intuitionniste de premier ordre. En effet, les principales formules problématiques dans notre cas sont celles de la forme  $\square A \supset B$  et dans le cas de la logique intuitionniste de premier ordre sont celles de la forme  $\forall x.A(x) \supset B$ .

## Conclusion

Nous avons défini dans ce chapitre des calculs des séquents pour les logiques modales intuitionnistes formées à partir de toutes les combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. La correction, la complétude et l'élimination de la coupure pour chaque calcul  $G_{\text{IKTh}}$  sont obtenues de respectivement la correction, la complétude et la normalisation du système de déduction naturelle  $DN_{\text{IKTh}}$ . En utilisant nos calculs pour les logiques formées à partir des combinaisons de  $T$  et  $B$ , nous démontrons la décidabilité de ces dernières. Les cas des autres logiques n'ont pas été considérés à cause de l'absence de la propriété de la profondeur dans leurs calculs qui est nécessaire dans notre approche pour démontrer la décidabilité. En outre, nous avons apporté des améliorations à nos calculs visant à limiter l'application de la contraction dans la construction de preuves.

Dans le chapitre suivant, nous introduirons une nouvelle structure multi-contextuelle qui peut être considérée comme un aplatissement de la structure de A-séquent. Cette structure est mieux adaptée à la logique IS5, en particulier à démontrer sa décidabilité, que celle de A-séquent.



## Chapitre 5

# Systèmes de preuve pour la logique modale intuitionniste IS5

### Introduction

Au chapitre 4, nous avons vu que notre calcul pour la logique IS5 ne nous permet pas de démontrer la décidabilité de cette logique à cause de l'absence de la propriété de la profondeur. Notons que Simpson aussi n'a pas réussi à démontrer la décidabilité de IS5 en utilisant son calcul avec labels [119]. En vue de définir des calculs sans labels plus appropriés à cette logique, permettant en particulier de démontrer sa décidabilité, nous introduisons une nouvelle structure multi-contextuelle, appelée MC-séquent. Intuitivement, elle peut être considérée comme la version mono-conclusion de celle d'hyperséquent [4]. En fait, elle correspond à une forme aplatie de la structure de A-séquent.

Dans un premier temps, nous définissons un système de déduction naturelle pour IS5. La normalisation est démontrée via le système  $DN_{IS5}$  introduit au chapitre 3. Nous proposons également des systèmes de déduction naturelle utilisant la structure de MC-séquent pour les logiques S5 et IM5. Cette dernière est une logique intermédiaire entre IS5 et S5 [59].

Dans un deuxième temps, nous définissons un calcul des séquents pour IS5 fondé sur les MC-séquents. Sa correction et sa complétude sont démontrées à partir de son équivalence avec le système de déduction naturelle introduit précédemment. De plus, l'élimination de la coupure est obtenue à partir de la normalisation. Cela nous permet de démontrer que notre calcul satisfait la propriété de la sous-formule.

Enfin, nous démontrons la décidabilité de IS5 en utilisant notre calcul des séquents. Dans ce dernier, partant du fait que la forme des MC-séquents est plate, la propriété de la profondeur peut être considérée soit comme satisfaite par tout calcul fondé sur les MC-séquents, soit comme un concept inexistant. Ainsi, le problème posé par l'absence de cette propriété est éliminé grâce à la structure de MC-séquent et par conséquent nous avons la terminaison de notre procédure de décision. Nous notons que certains des travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication [67].

### 5.1 Structure de MC-séquent

Nous rappelons que dans le cas des séquents standard, un contexte est un multi-ensemble fini de formules et qu'un séquent mono-conclusion est une structure de la forme  $\Gamma \vdash C$  où  $\Gamma$

est un contexte et  $C$  une formule.

**Définition 5.1.1.** *Un MC-séquent est une structure de la forme suivante :*

$$\Gamma_1; \dots; \Gamma_k \vdash \Gamma \vdash C$$

où  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$  est un multi-ensemble de contextes, appelé *LL-contexte*, et  $\Gamma \vdash C$  est un séquent *mono-conclusion*, appelé *conclusion contextuelle*. Nous appelons  $\Gamma$  le *contexte courant* et  $C$  *conclusion*.

Si le contexte courant est vide  $\emptyset$ , alors nous écrivons  $G \vdash \vdash C$  plutôt que  $G \vdash \emptyset \vdash C$ .

En fait, la structure de MC-séquent correspond à un aplatissement de celle de A-séquent. En d'autres termes, elle correspond à une structure de A-séquent dans laquelle la distinction est faite uniquement entre le contexte contenant la formule marquée d'un coté, et les autres contextes de l'autre.

Nous associons à chaque MC-séquent  $\Gamma_1; \dots; \Gamma_k \vdash \Gamma \vdash C$  une formule définie par  $(\diamond(\bigwedge \Gamma_1) \wedge \dots \wedge \diamond(\bigwedge \Gamma_k)) \supset ((\bigwedge \Gamma) \supset C)$ . Ainsi, nous définissons la validité d'un MC-séquent dans une logique modale par la validité de sa formule correspondante.

Rappelons que la structure d'hyperséquent correspond à un multi-ensemble de séquents, appelés composantes, séparés par un symbole dénotant la disjonction [4]. Notre structure est similaire à celle d'hyperséquent dans le sens où toutes les deux sont multi-contextuelles ayant une forme plate. Cependant, les MC-séquents sont plus adaptés aux cadres logiques intuitionnistes du fait de la présence de la propriété de disjonction dans ces derniers. La propriété de disjonction correspond au fait que si  $A \vee B$  est valide alors  $A$  est valide ou  $B$  est valide. En réalité, dans les cadres logiques intuitionnistes la structure d'hyperséquent n'enrichit pas réellement celle de séquent. Effectivement, la validité d'un hyperséquent dans une logique intuitionniste implique par la propriété de disjonction la validité d'une de ses composantes, à savoir un séquent.

## 5.2 Un système de déduction naturelle pour IS5

Le système de déduction naturelle  $DN_{IS5}^2$  est décrit en figure 5.1. Notons que si on considère l'ensemble de règles obtenu à partir de  $DN_{IS5}^2$  par la suppression des règles modales ainsi que  $[\vee_E^2]$  et  $[\perp^2]$  et par le remplacement de chaque MC-séquent dans les règles restantes par sa conclusion contextuelle, alors on obtient le système de déduction naturelle  $DN_{IPL}$  décrit en figure 1.1. Par conséquent, nous obtenons la proposition suivante :

**Proposition 5.2.1.** *Si  $A$  est valide dans IPL alors  $\vdash \vdash A$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ .*

Comme nous venons de le préciser, la structure de MC-séquent n'est autre qu'une forme aplatie de celle de A-séquent. En réalité, la seule chose qui change dans  $DN_{IS5}^2$  par rapport à  $DN_{IS5}$  est que nous considérons maintenant que tous les contextes sont accessibles les uns des autres. Par exemple, les règles  $[\Box_E^1]$  et  $[\Box_E^2]$  capturent le fait que si une formule  $\Box A$  est vraie dans un contexte donné, alors la formule  $A$  est vraie dans tout contexte. Tandis que dans  $DN_{IS5}$ , la règle  $[\Box_E]$  capture le fait que si  $\Box A$  est vraie dans un contexte  $\mathcal{C}$ , alors  $A$  est vraie dans tout contexte accessible à partir de  $\mathcal{C}$ .

Dans la sémantique de Kripke décrite au chapitre 2, la logique IS5 est définie par la

$$\begin{array}{c}
\frac{}{G \vdash \Gamma, A \vdash A} [id] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash \perp}{G \vdash \Gamma \vdash A} [\perp^1] \quad \frac{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash \perp}{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash A} [\perp^2] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A_i}{G \vdash \Gamma \vdash A_1 \vee A_2} [\vee_I^i] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash A \vee B \quad G \vdash \Gamma, A \vdash C \quad G \vdash \Gamma, B \vdash C}{G \vdash \Gamma \vdash C} [\vee_E^1] \\
\frac{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash A \vee B \quad G; \Gamma, A \vdash \Gamma' \vdash C \quad G; \Gamma, B \vdash \Gamma' \vdash C}{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash C} [\vee_E^2] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A \quad G \vdash \Gamma \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash A \wedge B} [\wedge_I] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{G \vdash \Gamma \vdash A_i} [\wedge_E^i] \\
\frac{G \vdash \Gamma, A \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash A \supset B} [\supset_I] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash A \supset B \quad G \vdash \Gamma \vdash A}{G \vdash \Gamma \vdash B} [\supset_E] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A}{G \vdash \Gamma \vdash \diamond A} [\diamond_I] \quad \frac{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash A}{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash \diamond A} [\diamond_I^2] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash \diamond A \quad G; A \vdash \Gamma \vdash C}{G \vdash \Gamma \vdash C} [\diamond_E^1] \\
\frac{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash \diamond A \quad G; \Gamma, A \vdash \Gamma' \vdash C}{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash C} [\diamond_E^2] \\
\frac{G; \Gamma \vdash A}{G \vdash \Gamma \vdash \square A} [\square_I] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash \square A}{G \vdash \Gamma \vdash A} [\square_E^1] \quad \frac{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash \square A}{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash A} [\square_E^2]
\end{array}$$

FIG. 5.1 – Système de déduction naturelle  $DN_{IS5}^2$ 

classe des modèles modaux intuitionnistes dont les relations d'accessibilité sont des relations d'équivalence. Ainsi, la relation d'accessibilité peut être supprimée des modèles en organisant les mondes modaux sous-forme de classes d'équivalence. Même plus, une autre sémantique où dans tout modèle, tous les mondes sont accessibles les uns à partir des autres (une seule classe d'équivalence) définit également IS5 :

**Définition 5.2.1.** *Un IS5-modèle est un quadruplet  $(W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  où*

- $W$  est un ensemble non vide partiellement ordonné par  $\leq$  ;
- pour  $w \in W$ ,  $D_w$  est un ensemble non vide tel que  $w \leq w'$  implique  $D_w \subseteq D_{w'}$  ; et
- pour chaque  $w \in W$ ,  $V_w$  est une fonction de  $D_w$  dans  $2^{\text{Prop}}$  telle que  $w \leq w'$  implique  $V_w(d) \subseteq V_{w'}(d)$ .

Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un IS5-modèle,  $w \in W$ ,  $d \in D_w$  et  $A$  une formule. La relation de satisfaction  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  est définie par induction sur la structure de  $A$  comme suit :

- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} p$  si et seulement si  $p \in V_w(d)$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \perp$  jamais ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \wedge B$  si et seulement si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \vee B$  si et seulement si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  ou  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \supset B$  si et seulement si pour tout  $v \geq w$ ,  $v, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  implique  $v, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \square A$  si et seulement si pour tout  $v \geq w$ ,  $d' \in D_v$ ,  $v, d' \vDash_{\mathcal{M}} A$  ;

- $w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond A$  si et seulement s'il existe  $d' \in D_w$  tel que  $w, d' \vDash_{\mathcal{M}} A$ .

Une formule  $A$  est valide dans  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  si  $w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  pour tout  $w \in W$  et tout  $d \in D_w$ .  $A$  est valide dans IS5 si et seulement si  $A$  est valide dans tout IS5-modèle.

Une manière simple de démontrer la correction et la complétude de cette sémantique consiste à utiliser la traduction de IS5 dans le fragment monadique de la logique intuitionniste de premier ordre proposée par Bull [25]. Dans cette traduction, notée  $(\cdot)^*$ , on associe à chaque variable propositionnelle  $p$  un prédicat unaire  $P(\cdot)$  et on utilise une seule variable  $x$ . Elle est définie comme suit :

- $(\perp)^* = \perp$  ;
- $(p)^* = P(x)$  ;
- $(A \otimes B)^* = (A)^* \otimes (B)^*$ , pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$  ;
- $(\Box A)^* = \forall x.(A)^*$  ;
- $(\Diamond A)^* = \exists x.(A)^*$ .

Ainsi, pour démontrer la correction et la complétude de la sémantique que nous venons de définir, il suffit d'utiliser la sémantique de la logique intuitionniste de premier ordre et le fait que la traduction ne comporte aucun prédicat représentant la relation d'accessibilité.

Illustrons maintenant notre système en considérant la formule  $\Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B)$ . Une preuve de cette formule dans  $DN_{\text{IS5}}^2$  est donnée par :

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond(A \vee B)}}{[id]} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B) \vdash A \vee B \vdash A \vee B}}{[id]} \quad \mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}}{A \vee B \vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B} [\vee E2]}}{\vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B} [\Diamond E1]}$$

avec

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B) \vdash A \vee B, A \vdash A}}{[id]} \quad \frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A}}{[\Diamond I2]}}{A \vee B, A \vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A} [\vee I1]}{\frac{}{A \vee B, A \vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B}}{[\vee I1]}} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B) \vdash A \vee B, B \vdash B}}{[id]} \quad \frac{\frac{}{\Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond B}}{[\Diamond I2]}}{A \vee B, B \vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond B} [\vee I2]}{\frac{}{A \vee B, B \vdash \Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B}}{[\vee I2]}} \end{array} \right.$$

**Théorème 5.2.1** (Correction). *Si un MC-séquent a une preuve dans  $DN_{\text{IS5}}^2$ , alors il est valide dans IS5.*

*Démonstration.* Pour chaque règle, on suppose que sa conclusion n'est pas valide et on démontre qu'au moins une de ses prémisses n'est pas valide. Nous ne considérons ici que les cas des règles  $[\Box I]$ ,  $[\Box E^2]$  et  $[\Diamond E^1]$ .

- **Cas de  $[\Box I]$ .** Soit  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un contre-modèle de  $G \vdash \Gamma \vdash \Box A$ .

Alors il existe  $w_0$  dans  $W$  et  $d_0 \in D_{w_0}$  tels que pour tout  $\Gamma' \in G$  on a  $w_0, d_0 \models \Diamond \wedge \Gamma'$ ,  $w_0, d_0 \not\models \wedge \Gamma$  et  $w_0, d_0 \not\models \Box A$ . En utilisant  $w_0, d_0 \not\models \Box A$ , il existe  $w_1 \in W$  et  $d_1 \in D_{w_1}$  tels que  $w_0 \leq w_1$  et  $w_1, d_1 \not\models A$ . En utilisant la monotonie de Kripke, on a pour tout  $\Gamma' \in G \cup \{\Gamma\}$ ,  $w_1, d_1 \models \Diamond \wedge \Gamma'$ . Par conséquent, on déduit que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $G; \Gamma \vdash A$ .

- **Cas de  $[\Box_E^2]$ .** Soit  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un contre-modèle de  $G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash A$ . Alors il existe  $w_0$  dans  $W$  et  $d_0 \in D_{w_0}$  tels que pour tout  $\Gamma'' \in G \cup \{\Gamma\}$  on a  $w_0, d_0 \models \Diamond \wedge \Gamma''$ ,  $w_0, d_0 \models \wedge \Gamma'$  et  $w_0, d_0 \not\models A$ . En utilisant  $w_0, d_0 \models \Diamond \wedge \Gamma$ , il existe  $d_1$  dans  $D_{w_0}$  tel que  $w_0, d_1 \models \wedge \Gamma$ . En utilisant  $w_0, d_0 \models \wedge \Gamma'$ , on a  $w_0, d_1 \not\models \Diamond \wedge \Gamma'$ . En utilisant  $w_0, d_0 \not\models A$ , on a  $w_0, d_1 \not\models \Box A$ . Par conséquent, on déduit que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash \Box A$ .

- **Cas de  $[\Diamond_E^1]$ .** Soit  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un contre-modèle de  $G \vdash \Gamma \vdash C$ . Alors il existe  $w_0$  dans  $W$  et  $d_0 \in D_{w_0}$  tels que pour tout  $\Gamma' \in G$  on a  $w_0, d_0 \models \Diamond \wedge \Gamma'$ ,  $w_0, d_0 \models \wedge \Gamma$  et  $w_0, d_0 \not\models C$ . Si  $w_0, d_0 \not\models \Diamond A$  alors  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $G \vdash \Gamma \vdash \Diamond A$ . Sinon,  $w_0, d_0 \models \Diamond A$  et ainsi  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $G; A \vdash \Gamma \vdash C$ .  $\square$

**Proposition 5.2.2.** *Les MC-séquents suivants ont des preuves dans  $DN_{IS5}^2$  :*

- 1)  $\vdash \vdash \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$
- 2)  $\vdash \vdash \Diamond \perp \supset \perp$
- 3)  $\vdash \vdash \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$
- 4)  $\vdash \vdash \Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B)$
- 5)  $\vdash \vdash (\Diamond A \supset \Box B) \supset \Box(A \supset B)$
- 6)  $\vdash \vdash (\Box A \supset A) \wedge (A \supset \Diamond A)$
- 7)  $\vdash \vdash (\Diamond \Box A \supset \Box A) \wedge (\Diamond A \supset \Box \Diamond A)$

*Démonstration.* En ce qui concerne le MC-séquent (4), la preuve a été donnée comme exemple précédemment.

- 1) :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\emptyset \vdash \Box(A \supset B), \Box A \vdash \Box(A \supset B)}}{\Box(A \supset B), \Box A \vdash A \supset B} [id]}{\Box(A \supset B), \Box A \vdash A \supset B} [\Box_E^2]}{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\emptyset \vdash \Box(A \supset B), \Box A \vdash \Box A}}{\Box(A \supset B), \Box A \vdash A} [id]}{\Box(A \supset B), \Box A \vdash A} [\Box_E^2]}{\Box(A \supset B), \Box A \vdash B} [\supset_E]}{\Box(A \supset B), \Box A \vdash B} [\Box_I]}{\vdash \Box(A \supset B), \Box A \vdash \Box B} [\supset_I]}{\vdash \Box(A \supset B) \vdash \Box A \supset \Box B} [\supset_I]}{\vdash \vdash \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)} [\supset_I]$$

- 2) :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\vdash \Diamond \perp \vdash \Diamond \perp} [id]}{\vdash \Diamond \perp \vdash \Diamond \perp} [id]}{\vdash \Diamond \perp \vdash \Diamond \perp} [\Diamond_E^1]}{\frac{\frac{\frac{}{\Diamond \perp \vdash \perp \vdash \perp} [id]}{\perp \vdash \Diamond \perp \vdash \perp} [\perp^2]}{\perp \vdash \Diamond \perp \vdash \perp} [\Diamond_E^1]}{\vdash \Diamond \perp \vdash \perp} [\supset_I]}{\vdash \vdash \Diamond \perp \supset \perp} [\supset_I]$$

- 3) :

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash \Box(A \supset B), \Diamond A \vdash \Diamond A} [id]}{\vdash \Box(A \supset B), \Diamond A \vdash \Diamond B} [\Diamond_E^1]}{\vdash \Box(A \supset B) \vdash \Diamond A \supset \Diamond B} [\supset_I]}{\vdash \vdash \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)} [\supset_I]$$

avec

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{\frac{}{A \vdash \Box(A \supset B), \Diamond A \vdash \Box(A \supset B)} [id]}{\Box(A \supset B), \Diamond A \vdash A \vdash A \supset B} [\Box_E^2]}{\Box(A \supset B), \Diamond A \vdash A \vdash A} [id]}{\Box(A \supset B), \Diamond A \vdash A \vdash B} [\supset_E]} \\ \frac{\frac{}{A \vdash \Box(A \supset B), \Diamond A \vdash \Diamond B} [\Diamond_I^2]}{A \vdash \Box(A \supset B), \Diamond A \vdash \Diamond B} [\Diamond_I^2]} \end{array} \right.$$

- 5) :

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash \Diamond A \supset \Box B \vdash \Diamond A \supset \Box B} [id]}{A \vdash \Diamond A \supset \Box B \vdash \Diamond A} [\Diamond_I^2]}{A \vdash \Diamond A \supset \Box B \vdash \Box B} [\supset_E]}{\frac{\frac{\frac{}{\Diamond A \supset \Box B \vdash A \vdash A} [id]}{\Diamond A \supset \Box B \vdash A \vdash B} [\Diamond_I^2]}{\Diamond A \supset \Box B \vdash \vdash A \supset B} [\supset_I]}{\vdash \Diamond A \supset \Box B \vdash \Box(A \supset B)} [\Box_I]}{\vdash \vdash (\Diamond A \supset \Box B) \supset \Box(A \supset B)} [\supset_I]$$

- 6) :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\vdash \Box A \vdash \Box A} [id]}{\vdash \Box A \vdash A} [\Box_E^1]}{\vdash \vdash \Box A \supset A} [\supset_I]}{\frac{\frac{\frac{}{\Diamond A \supset \Box B \vdash A \vdash A} [id]}{A \vdash \Diamond A \supset \Box B \vdash \Diamond A} [\Diamond_I^2]}{\vdash A \vdash A} [id]}{\vdash A \vdash \Diamond A} [\Diamond_I^1]}{\vdash \vdash A \supset \Diamond A} [\supset_I]}{\vdash \vdash (\Box A \supset A) \wedge (A \supset \Diamond A)} [\wedge_I]$$

- 7) :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\emptyset; \vdash \Diamond A \vdash \Diamond A} [id]}{\emptyset; \vdash \Diamond A \vdash A \vdash A} [\Diamond_E^2]}{\frac{\frac{\frac{}{\emptyset; \Diamond A \vdash A \vdash A} [id]}{\Diamond A; A \vdash \vdash \Diamond A} [\Diamond_I^2]}{\Diamond A \vdash \vdash \Diamond A} [\Diamond_E^2]}{\frac{\frac{}{\Diamond A \vdash \vdash \Diamond A} [\Box_I]}{\vdash \Diamond A \vdash \Box \Diamond A} [\Box_I]}{\vdash \vdash \Diamond A \supset \Box \Diamond A} [\supset_I]}{\vdash \vdash (\Diamond \Box A \supset \Box A) \wedge (\Diamond A \supset \Box \Diamond A)} [\wedge_I]$$



avec

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{\frac{}{\emptyset; \diamond \Box A \vdash \Box A \vdash \Box A} [id]}{\Box A; \diamond \Box A \vdash \vdash A} [\Box_E^2]}{\vdash \diamond \Box A \vdash \diamond \Box A} [id] \quad \frac{\frac{}{\Box A \vdash \diamond \Box A \vdash \Box A} [\Box_I]}{\vdash \diamond \Box A \vdash \Box A} [\diamond_E^1]}{\vdash \vdash \diamond \Box A \supset \Box A} [\supset_I] \end{array} \right.$$

□

**Proposition 5.2.3** (Admissibilité de l'affaiblissement).

1. Si  $G \vdash \Gamma \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G \vdash \Gamma, A \vdash C$  en a aussi une.
2. Si  $G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G; \Gamma', A \vdash \Gamma \vdash C$  en a aussi une.
3. Si  $G \vdash \Gamma \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C$  en a aussi une.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}$  une preuve de  $G \vdash \Gamma \vdash C$  dans  $DN_{IS5}^2$ . La preuve obtenue par l'ajout de  $A$  à tous les contextes correspondant à  $\Gamma$  dans  $\mathcal{D}$  est une preuve de  $G \vdash \Gamma, A \vdash C$ . Les cas des autres propriétés sont similaires. □

**Théorème 5.2.2.** Si une formule  $A$  est valide dans IS5 alors  $\vdash \vdash A$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ .

*Démonstration.* On identifie la validité dans IS5 à travers son système à la Hilbert décrit au chapitre 2. La démonstration est par induction sur la structure de la preuve de  $A$  dans ce système.

Si  $A$  est un axiome, alors  $\vdash \vdash A$  est prouvable dans  $DN_{IS5}^2$  (propositions 5.2.1 et 5.2.2). Considérons maintenant les deux cas de la dernière règle appliquée.

- Si cette règle est  $[mp]$ , alors en appliquant l'hypothèse d'induction, les MC-séquents  $\vdash \vdash A \supset B$  et  $\vdash \vdash A$  ont des preuves dans  $DN_{IS5}^2$ . Ainsi, en utilisant la règle  $[\supset_E]$ , on déduit que  $\vdash \vdash B$  a également une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ .
- Sinon, cette règle est  $[nec]$ . En appliquant l'hypothèse d'induction, on a une preuve de  $\vdash \vdash A$  dans  $DN_{IS5}^2$ . En utilisant la proposition 5.2.3,  $\emptyset \vdash \vdash A$  a aussi une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ . Ainsi, en utilisant la règle  $[\Box_I]$ , on déduit que  $\vdash \vdash \Box A$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ . □

**Proposition 5.2.4.**

1. Si  $G \vdash \Gamma \vdash A \supset B$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G \vdash \Gamma, A \vdash B$  en a aussi une.
2. Si  $G \vdash \Gamma, A \wedge B \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G \vdash \Gamma, A, B \vdash C$  en a aussi une.
3. Si  $G; \Gamma, A \wedge B \vdash \Gamma' \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G; \Gamma, A, B \vdash \Gamma' \vdash C$  en a aussi une.
4. Si  $G \vdash \Gamma, \diamond A \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G; A \vdash \Gamma \vdash C$  en a aussi une.
5. Si  $G; \Gamma, \diamond A \vdash \Gamma' \vdash C$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $G; \Gamma; A \vdash \Gamma' \vdash C$  en a aussi une.

*Démonstration.* Cas de la propriété 1. En utilisant la proposition 5.2.3,  $G \vdash \Gamma, A \vdash A \supset B$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ . Donc,  $G \vdash \Gamma, A \vdash B$  en a également une en utilisant la règle  $[\supset_E]$  comme suit :

$$\frac{G \vdash \Gamma, A \vdash A \supset B \quad \frac{}{G \vdash \Gamma, A \vdash A} [id]}{G \vdash \Gamma, A \vdash B} [\supset_E]$$

Les propriétés 2 et 3 sont démontrées ensemble par induction sur les structures des preuves de  $G \vdash \Gamma, A \wedge B \vdash C$  et  $G; \Gamma, A \wedge B \vdash \Gamma' \vdash C$ . Les propriétés 4 et 5 sont démontrées de la même manière.  $\square$

**Théorème 5.2.3** (Complétude). *Si un MC-séquent est valide dans IS5 alors il a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S} = \Gamma_1; \dots; \Gamma_k \vdash \Gamma \vdash C$  un MC-séquent valide dans IS5. Alors  $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = (\diamond \wedge \Gamma_1 \wedge \dots \wedge \diamond \wedge \Gamma_k \wedge \wedge \Gamma) \supset C$  est valide dans IS5. En utilisant le theorem 5.2.2,  $\vdash \vdash \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$  a une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ . En utilisant la proposition 5.2.4, on déduit que  $\mathcal{S}$  a aussi une preuve dans  $DN_{IS5}^2$ .  $\square$

### 5.3 Normalisation

Dans cette section, nous démontrons que le système  $DN_{IS5}^2$  vérifie la propriété de normalisation en se basant sur le fait que  $DN_{IS5}$  la vérifie. En fait, la normalisation pour  $DN_{IS5}^2$  peut être obtenue de la même manière que pour  $DN_{IS5}$  en utilisant de simples adaptations des règles de réduction, de permutation et de simplification de  $DN_{IS5}$ .

À chaque A-séquent  $\mathcal{S}$ , nous associons un MC-séquent, noté  $\mathcal{MC}(\mathcal{S})$ , égal à  $\Gamma_1; \dots; \Gamma_k \vdash \Gamma \vdash C$  où

- $C^+$  est la formule marquée de  $\mathcal{S}$ ,
- $\Gamma$  est le contexte (nœud du A-environnement) de  $\mathcal{S}$  associé à  $C^+$ , et
- $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$  est le multi-ensemble de tous les autres contextes de  $\mathcal{S}$ .

Par exemple, le MC-séquent associé à  $A, B, \langle C, B \rangle, \langle \langle A, C \rangle, D, C^+ \rangle$  est  $A, B; C, B; A, C \vdash D \vdash C$ .

**Proposition 5.3.1.** *Soient  $\mathcal{S}$  un A-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IS5}$ . Alors l'arbre obtenu à partir de  $\mathcal{D}$  par le remplacement de tous les A-séquents avec leurs MC-séquents associés est une preuve de  $\mathcal{MC}(\mathcal{S})$  dans  $DN_{IS5}^2$ .*

*Démonstration.* La preuve est par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ .  $\square$

Soient  $\mathcal{S}$  un MC-séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $DN_{IS5}^2$ . Pour tout A-séquent  $\mathcal{S}'$  ayant comme MC-séquent associé  $\mathcal{S}$ , une preuve dans  $DN_{IS5}$  peut être obtenue à partir de  $\mathcal{D}$ . La construction de cette preuve est par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$  de la manière suivante :

- Si  $\mathcal{S}$  est une instance de  $[id]$  dans  $DN_{IS5}^2$ , alors  $\mathcal{S}'$  est forcément une instance de  $[id]$  dans  $DN_{IS5}$ .
- Si la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  est  $[\supset_I]$  :

$$\frac{G \vdash \Gamma, A \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash A \supset B} [\supset_I]$$

Puisque  $\mathcal{MC}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$ , il existe une 1-situation  $\Gamma'\{\}$  tel que  $\mathcal{S}' = \Gamma'\{A \supset B^+\}$ . En appliquant l'hypothèse d'induction, une preuve de  $\Gamma'\{A, B^+\}$  peut être obtenue à partir de celle de  $G \vdash \Gamma, A \vdash B$  car  $\mathcal{MC}(\Gamma'\{A, B^+\}) = G \vdash \Gamma, A \vdash B$ . Ainsi, en appliquant la règle  $[\supset_I]$  de  $DN_{IS5}$ , on obtient une preuve de  $\mathcal{S}'$ .

- Si la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  est  $[\square_I]$  :

$$\frac{G; \Gamma \vdash \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash \square B} [\square_I]$$



La correction et la complétude de nos systèmes pour S5 et IM5 sont obtenues en utilisant la correction et la complétude de  $DN_{IS5}^2$  pour IS5 et le fait qu'elle sont obtenues en ajoutant respectivement  $\neg A \vee A$  et  $\neg \diamond \neg A \supset \Box A$  à IS5.

## 5.5 Un calcul des séquents pour IS5

Nous définissons dans cette section un calcul des séquents  $MCG_{IS5}$  pour IS5 en utilisant la structure de MC-séquent. Les règles de ce dernier sont décrites en figure 5.2. La correction et la complétude sont démontrées en considérant la validité dans IS5 à travers le système de déduction naturelle  $DN_{IS5}^2$  d'une manière similaire à celle du cas de  $G_{IS5}$  et  $DN_{IS5}$  (chapitre 4).

Il est à noter que  $MCG_{IS5}$  contient deux types de règles gauches. Le premier type est celui des LL-règles agissant à gauche du premier symbole  $\vdash$  dont les noms sont de la forme  $[R_{LL}]$ . Le second est celui des L-règles agissant entre les deux occurrences du symbole  $\vdash$  dont les noms sont de la forme  $[R_L]$ .

La présence de deux règles de coupure est liée à la forme de la structure que nous utilisons. Dans la règle  $[Cut^1]$ , le contexte courant ( $\Gamma$ ) est utilisé pour éliminer la formule de coupure. Tandis que dans  $[Cut^2]$  l'élimination de cette dernière est réalisée en utilisant deux différents contextes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . L'élimination de la coupure est obtenue de la propriété de normalisation du système de déduction naturelle  $DN_{IS5}^2$  de la même manière que la normalisation dans  $DN_{IS5}$  a permis de démontrer l'élimination de la coupure dans  $G_{IS5}$  (voir la preuve du théorème 4.1.2). Nous appelons  $MCG_{IS5}^-$  le calcul  $MCG_{IS5}$  privé des règles de coupure.

## 5.6 Décidabilité de IS5

Nous pouvons facilement voir que le calcul  $MCG_{IS5}^-$  satisfait la propriété de la sous-formule. De plus, vu la forme plate des MC-séquents, nous pouvons considéré que la propriété de la profondeur soit comme une propriété satisfaite, soit comme un concept inexistant. Ainsi, une procédure de décision qui termine pour IS5 peut être définie en utilisant la structure des procédures définies au chapitre 4 avec le calcul  $MCG_{IS5}^-$ . Effectivement, nous avons vu que les propriétés de la sous-formule et de la profondeur sont les points clés permettant de démontrer la terminaison.

De même que le calcul  $G_{IS5}^-$ , la contraction et l'affaiblissement sont admissibles avec préservation de la taille dans  $MCG_{IS5}^-$ . Les démonstrations sont similaires à celles des propositions 4.2.3 et 4.2.1. Notons que dans le cas de  $MCG_{IS5}^-$ , la contraction et l'affaiblissement correspondent aux règles suivantes :

– les règles de contraction :

$$\frac{G \vdash \Gamma, A, A \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \vdash C} [C_I^1] \quad \frac{G; \Gamma', A, A \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \vdash \Gamma \vdash C} [C_I^2]$$

$$\frac{G; \Gamma \vdash \Gamma \vdash C}{G \vdash \Gamma \vdash C} [C_E^1] \quad \frac{G; \Gamma'; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C} [C_E^2]$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{G \vdash \Gamma, A \vdash A} [id] \quad \frac{}{G \vdash \Gamma, \perp \vdash C} [\perp^1] \quad \frac{}{G; \Gamma', \perp \vdash \Gamma \vdash C} [\perp^2] \\
\frac{G \vdash \Gamma, A_1 \wedge A_2, A_i \vdash C}{G \vdash \Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash C} [\wedge_L^i] \quad \frac{G; \Gamma', A_1 \wedge A_2, A_i \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A_1 \wedge A_2 \vdash \Gamma \vdash C} [\wedge_{LL}^i] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A \quad G \vdash \Gamma \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash A \wedge B} [\wedge_R] \quad \frac{G \vdash \Gamma, A \vee B, A \vdash C \quad G \vdash \Gamma, A \vee B, B \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \vee B \vdash C} [\vee_L] \\
\frac{G; \Gamma', A \vee B, A \vdash \Gamma \vdash C \quad G; \Gamma', A \vee B, B \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \vee B \vdash \Gamma \vdash C} [\vee_{LL}] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A}{G \vdash \Gamma \vdash A \vee B} [\vee_R^1] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash A \vee B} [\vee_R^2] \\
\frac{G \vdash \Gamma, A \supset B \vdash A \quad G \vdash \Gamma, A \supset B, B \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \supset B \vdash C} [\supset_L] \\
\frac{G; \Gamma \vdash \Gamma', A \supset B \vdash A \quad G; \Gamma', A \supset B, B \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \supset B \vdash \Gamma \vdash C} [\supset_{LL}] \\
\frac{G \vdash \Gamma, A \vdash B}{G \vdash \Gamma \vdash A \supset B} [\supset_R] \\
\frac{G \vdash \Gamma, \Box A, A \vdash C}{G \vdash \Gamma, \Box A \vdash C} [\Box_L^1] \quad \frac{G; \Gamma', A \vdash \Gamma, \Box A \vdash C}{G; \Gamma' \vdash \Gamma, \Box A \vdash C} [\Box_L^2] \\
\frac{G; \Gamma', \Box A \vdash \Gamma, A \vdash C}{G; \Gamma', \Box A \vdash \Gamma \vdash C} [\Box_{LL}^1] \quad \frac{G; \Gamma', \Box A, A \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', \Box A \vdash \Gamma \vdash C} [\Box_{LL}^{2a}] \\
\frac{G; \Gamma'', A; \Gamma', \Box A \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma''; \Gamma', \Box A \vdash \Gamma \vdash C} [\Box_{LL}^{2b}] \quad \frac{G; \Gamma \vdash \vdash A}{G \vdash \Gamma \vdash \Box A} [\Box_R] \\
\frac{G; A \vdash \Gamma, \Diamond A \vdash C}{G \vdash \Gamma, \Diamond A \vdash C} [\Diamond_L] \quad \frac{G; A; \Gamma', \Diamond A \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', \Diamond A \vdash \Gamma \vdash C} [\Diamond_{LL}] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A}{G \vdash \Gamma \vdash \Diamond A} [\Diamond_R^1] \quad \frac{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash A}{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash \Diamond A} [\Diamond_R^2] \\
\frac{G \vdash \Gamma \vdash A \quad G \vdash \Gamma, A \vdash C}{G \vdash \Gamma \vdash C} [Cut^1] \quad \frac{G; \Gamma \vdash \Gamma' \vdash A \quad G; \Gamma', A \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C} [Cut^2]
\end{array}$$

FIG. 5.2 – Calcul des séquents  $MCG_{IS5}$

– les règles d'affaiblissement :

$$\frac{G \vdash \Gamma \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \vdash C} [W_I^1] \quad \frac{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \vdash \Gamma \vdash C} [W_I^2] \quad \frac{G \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C} [W_E]$$

Nous définissons une relation de préordre, notée  $\lesssim$ , sur les MC-séquents par  $\Gamma_1; \dots; \Gamma_k \vdash \Gamma \vdash A \lesssim \Delta_1; \dots; \Delta_l \vdash \Delta \vdash B$  si  $A = B$ ,  $set(\Gamma) \subseteq set(\Delta)$  et pour tout  $i \in [1, k]$  il existe  $j \in [1, l]$  tel que  $set(\Gamma_i) \subseteq set(\Delta_j)$ . En outre, nous définissons la relation d'équivalence  $\cong$  par  $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$  si  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}' \lesssim \mathcal{S}$ .

**Proposition 5.6.1.** *Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux MC-séquents. Si  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$  alors  $\vdash_{MCG_{IS5}^-}^n \mathcal{S}$  implique  $\vdash_{MCG_{IS5}^-}^n \mathcal{S}'$ .*

*Démonstration.* En utilisant l'admissibilité avec préservation de la taille de l'affaiblissement et de la contraction.  $\square$

**Proposition 5.6.2.** *L'ensemble de tous les MC-séquents appartenant aux dérivations d'un MC-séquent  $\mathcal{S}$  dans  $MCG_{IS5}^-$  peut être partitionné en un ensemble fini de classes d'équivalence de  $\cong$ .*

*Démonstration.* En utilisant la propriété de la sous-formule.  $\square$

Une dérivation est dite redondante si elle a une branche contenant deux différentes occurrences de MC-séquents  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  telle que  $\mathcal{S}$  est au dessus de  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}'$ . Comme dans la proposition 4.2.5, nous pouvons démontrer d'une manière similaire en utilisant la proposition 5.6.1 que si un MC-séquent est valide, alors il a une preuve qui n'est pas redondante dans  $MCG_{IS5}^-$ .

### Procédure de décision pour IS5 :

Soit  $\mathcal{S}$  un MC-séquent.

#### Étape 1 :

Si  $\mathcal{S}$  est un axiome, alors  $\mathcal{S}$  est valide.

Sinon on passe à l'étape suivante.

#### Étape $i+1$ :

On construit l'ensemble de toutes les dérivations non redondantes dans  $MCG_{IS5}^-$  de taille  $i+1$ .

Si cet ensemble contient une preuve alors  $\mathcal{S}$  est valide.

Sinon, si cet ensemble est vide, alors  $\mathcal{S}$  n'est pas valide. Sinon on passe à l'étape suivante.

La correction de cette procédure est obtenue à partir de la correction et de la complétude de  $MCG_{IS5}^-$  et du fait que tout MC-séquent valide a une preuve non redondante. La terminaison est une conséquence de la proposition 5.6.2 et du fait que le nombre d'applications possibles de règles permettant d'étendre une dérivation de taille  $i$  en une de taille  $i+1$  est fini. Cela conduit au théorème suivant :

**Théorème 5.6.1.** *La logique IS5 est décidable.*

## 5.7 Le calcul des séquents $MCG_{IS5}^2$

Nous pouvons voir que la contraction est internalisée dans toutes les règles gauches de  $MCG_{IS5}$ . Nous rappelons que nous avons été confrontés au même problème dans le cas de

$G_{\text{IKTh}}$ . L'approche utilisée pour améliorer  $G_{\text{IKTh}}$  peut également être utilisée dans le cas présent. Le calcul  $MCG_{\text{IS5}}^2$  est obtenue en remplaçant dans  $MCG_{\text{IS5}}^-$  les règles gauches associées aux connecteurs  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\supset$  et  $\diamond$  par les règles suivantes :

$$\frac{G \vdash \Gamma, A, B \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \wedge B \vdash C} [\wedge_L] \qquad \frac{G; \Gamma', A, B \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \wedge B \vdash \Gamma \vdash C} [\wedge_{LL}]$$

$$\frac{G \vdash \Gamma, A \vdash C \quad G \vdash \Gamma, B \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \vee B \vdash C} [\vee_L] \qquad \frac{G; \Gamma', A \vdash \Gamma \vdash C \quad G; \Gamma', B \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \vee B \vdash \Gamma \vdash C} [\vee_{LL}]$$

$$\frac{G \vdash \Gamma, A \supset B \vdash A \quad G \vdash \Gamma, B \vdash C}{G \vdash \Gamma, A \supset B \vdash C} [\supset_L]$$

$$\frac{G; \Gamma \vdash \Gamma', A \supset B \vdash A \quad G; \Gamma', B \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', A \supset B \vdash \Gamma \vdash C} [\supset_{LL}]$$

$$\frac{G; A \vdash \Gamma \vdash C}{G \vdash \Gamma, \diamond A \vdash C} [\diamond_L] \qquad \frac{G; A; \Gamma' \vdash \Gamma \vdash C}{G; \Gamma', \diamond A \vdash \Gamma \vdash C} [\diamond_{LL}]$$

La correction et la complétude de  $MCG_{\text{IS5}}^2$  sont obtenues en démontrant qu'un MC-séquent a une preuve dans  $MCG_{\text{IS5}}^2$  si et seulement s'il en a une dans  $MCG_{\text{IS5}}$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une structure, appelé MC-séquent, plus adaptée que celle de A-séquent au cas particulier de la logique IS5. En effet, l'utilisation de cette structure nous a permis de définir un calcul sans labels ayant les bonnes propriétés et, surtout, approprié pour démontrer la décidabilité. Précisons que ce calcul ainsi que le calcul  $G_{\text{IS5}}$  décrit au chapitre 4 sont les premiers calculs sans labels vérifiant l'élimination de la coupure pour IS5.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons la question de l'intégration de la sémantique au langage via l'étude d'une logique hybride intuitionniste qui est obtenue par une extension syntaxique de IK. Nous verrons que cette intégration permet de définir des systèmes de preuve plus simples, néanmoins, elle fait perdre la propriété importante de la sous-formule.





## Chapitre 6

# Calculs des séquents pour une logique hybride intuitionniste

### Introduction

Dans les sémantiques de Kripke des logiques modales que nous considérons, un modèle correspond à un système de transition où la valeur de vérité d'une formule peut différer d'un monde à l'autre. Les logiques hybrides ont principalement été introduites dans le but d'exprimer cette relativité de la vérité en ajoutant aux logiques modales de nouveaux symboles propositionnels, appelés *nominaux*, et aussi un nouvel opérateur, appelé *opérateur de satisfaction*. Ce dernier permet de voyager entre les mondes nommés par les nominaux [16, 2]. Intuitivement, cela peut être considéré comme un ajout de labels (nominaux) au langage des logiques modales.

La motivation principale des logiques hybrides réside dans leur pouvoir d'expressivité supérieur à celui des logiques modales. En outre, comme dans le cas des systèmes de preuve avec labels [119, 102], l'intégration de la sémantique dans le langage à travers les nominaux et l'opérateur de satisfaction rend inutile l'utilisation de structures multi-contextuelles, ce qui a comme conséquence la simplicité des systèmes de preuve avec l'absence d'éléments syntaxiques étrangers au langage. Toutefois, nous notons qu'aucun système de preuve pour une logique hybride que nous connaissons ne satisfait la propriété de la sous-formule.

Dans ce chapitre, nous étudions la logique hybride intuitionniste IHL introduite par Braüner et De Paiva dans [21]. Elle a été obtenue en étendant syntaxiquement avec les nominaux et l'opérateur de satisfaction la logique IK. Mentionnons l'existence d'une autre version intuitionniste de logique hybride [83, 29]. Cependant, cette dernière ne peut pas être considérée comme une logique hybride complète car les nominaux (appelés *places* dans l'article originel) ne sont pas considérés comme des formules. Dans certains de nos travaux, nous avons proposé des calculs des séquents dédiés à la construction de preuves et de contre-modèles pour cette logique [64].

Lors de l'introduction de IHL, Braüner et De Paiva ont proposé un système de déduction naturelle pour lequel la normalisation a été démontrée. Il est l'unique système de preuve existant pour IHL. Notre première contribution est la définition du premier calcul des séquents pour IHL vérifiant l'élimination de la coupure. En utilisant ce calcul, nous définissons une

procédure de décision pour IHL qui nous permet de fournir la première démonstration de décidabilité pour cette logique. La structure de cette procédure est similaire à celle de nos procédures définies aux chapitres 4 et 5. Nous notons que certains des travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de l'article [68] qui est en cours de révision.

## 6.1 Syntaxe et sémantique

Soit  $\text{Nom}$  un ensemble dénombrable de nominaux, disjoint de  $\text{Prop}$ , dont les éléments sont notés par les lettres  $a, b, c$ , etc. Nous notons  $\text{Nom}(S)$  l'ensemble des nominaux apparaissant dans l'objet syntaxique  $S$ . Les formules sont données par la grammaire suivante :

$$A ::= p \mid a \mid \perp \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \supset A \mid \Box A \mid \Diamond A \mid a : A$$

**Définition 6.1.1.** *Un IHL-modèle est un quintuplet*

$$(W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$$

où

- $W$  est un ensemble non vide partiellement ordonné par  $\leq$  ;
- pour chaque  $w \in W$ ,  $D_w$  est un ensemble non vide tel que  $w \leq w'$  implique  $D_w \subseteq D_{w'}$  ;
- pour chaque  $w \in W$ ,  $\sim_w$  est une relation d'équivalence sur  $D_w$  telle que  $w \leq w'$  implique  $\sim_w \subseteq \sim_{w'}$  ;
- pour chaque  $w \in W$ ,  $R_w$  est une relation binaire sur  $D_w$  telle que  $w \leq w'$  implique  $R_w \subseteq R_{w'}$  ;
- pour chaque  $w \in W$ ,  $V_w$  est une fonction de  $D_w$  dans  $2^{\text{Prop}}$  telle que  $w \leq w'$  implique  $V_w(d) \subseteq V_{w'}(d)$ .

De plus,

- si  $d \sim_w d'$ ,  $e \sim_w e'$  et  $R_w(d, e)$ , alors  $R_w(d', e')$  ;
- si  $d \sim_w d'$  et  $p \in V_w(d)$ , alors  $p \in V_w(d')$ .

Soient  $(W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un IHL-modèle et  $w$  un élément de  $W$ , une  $w$ -**assignation** est une fonction qui assigne à chaque nominal un élément de  $D_w$ .

**Définition 6.1.2.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un IHL-modèle,  $w \in W$ ,  $g$  une  $w$ -assignation,  $d \in D_w$  et  $A$  une formule. La relation de satisfaction  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  est définie par induction sur la structure de  $A$  comme suit :*

- $g, w, d \vDash p$  ssi  $p \in V_w(d)$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} a$  ssi  $g(a) \sim_w d$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} \perp$  jamais ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \wedge B$  ssi  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \vee B$  ssi  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  ou  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A \supset B$  ssi pour tout  $v \geq w$ ,  $g, v, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  implique  $g, v, d \vDash_{\mathcal{M}} B$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Box A$  ssi pour tout  $v \geq w$ ,  $d' \in D_v$ ,  $R_v(d, d')$  implique  $g, v, d' \vDash_{\mathcal{M}} A$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} \Diamond A$  ssi il existe  $d' \in D_w$  tel que  $R_w(d, d')$  et  $g, w, d' \vDash_{\mathcal{M}} A$  ;
- $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} a : A$  ssi  $g, w, g(a) \vDash_{\mathcal{M}} A$ .

Soit  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W})$  un IHL-modèle. Une formule  $A$  est valide dans  $\mathcal{M}$  si  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  pour tout  $w \in W$ , toute  $w$ -assignation  $g$  et tout  $d \in D_w$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{a : A \quad a : B}{a : A \wedge B} [\wedge_I] \qquad \frac{a : A \wedge B}{a : A} [\wedge_E^1] \qquad \frac{a : A \wedge B}{a : B} [\wedge_E^2] \\
 \\
 \frac{a : A}{a : A \vee B} [\vee_I^1] \quad \frac{a : B}{a : A \vee B} [\vee_I^2] \quad \frac{\begin{array}{c} [a : A] \\ \vdots \\ [a : B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} [\vee_E] \\
 \\
 \frac{a : A}{a : A \supset B} [\supset_I] \quad \frac{\begin{array}{c} [a : A] \\ \vdots \\ a : B \end{array}}{a : B} [\supset_E] \\
 \\
 \frac{a : A}{c : a : A} [:] \quad \frac{c : a : A}{a : A} [:_E] \\
 \\
 \frac{e : A \quad a : \diamond e}{a : \diamond A} [\diamond_I] \quad \frac{\begin{array}{c} [a : \diamond c] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} [\diamond_E^*] \\
 \\
 \frac{c : A}{a : \Box A} [\Box_I^{**}] \quad \frac{a : \Box A \quad a : \diamond e}{e : A} [\Box_E] \\
 \\
 \frac{a : \perp}{C} [\perp_E] \quad \frac{}{a : a} [Ref] \quad \frac{a : c \quad a : A}{c : A} [Nom]
 \end{array}$$

\*  $c$  n'apparaît ni dans  $a : \diamond A$ , ni dans  $C$ , ni dans quelque hypothèse déchargée autre que les occurrences spécifiées de  $c : A$  et  $a : \diamond c$ .  
 \*\*  $c$  n'apparaît ni dans  $a : \Box A$ , ni dans quelque hypothèse déchargée autre que les occurrences spécifiées de  $a : \diamond c$ .

FIG. 6.1 – Système de déduction naturelle  $DN_{\text{IHL}}$ 

$A$  est valide dans IHL si  $A$  est valide dans tout IHL-modèle.

Les IHL-modèles diffèrent des modales modaux intuitionnistes par l'association à chaque monde  $w$  d'une relation d'équivalence  $\sim_w$  sur l'ensemble de mondes modaux  $D_w$ . Afin d'illustrer les raisons qui ont motivé l'ajout de cette relation d'équivalence, considérons la formule  $a : b \vee a : \neg b$ . Étant donné que la principale caractéristique des cadres logiques intuitionnistes est l'absence de la loi du tiers exclu, cette formule ne doit pas être valide dans IHL. Si nous définissons la relation de satisfaction dans le cas des nominaux comme dans la logique hybride classique :

$g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} a$  si et seulement si  $g(a) = d$

alors la formule  $a : b \vee a : \neg b$  est valide dans la logique IHL. Cependant, si nous considérons un IHL-modèle  $\mathcal{M}$  contenant deux mondes  $w$  et  $w'$  et une  $w$ -assignation  $g$  tels que  $w < w'$ ,  $g(a)$  et  $g(b)$  ne sont pas équivalents avec  $\sim_w$  et  $g(a) \sim_{w'} g(b)$ , alors nous avons  $g, w, g(a) \not\vDash_{\mathcal{M}} a : b \vee a : \neg b$  et par conséquent  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $a : b \vee a : \neg b$ . Cette exemple traduit la nécessité d'utiliser une relation d'équivalence plutôt que l'égalité.

Nous appelons *état de satisfaction* toute formule de la forme  $a : A$ . Il est à noter que pour toute formule  $A$  et tout IHL-modèle  $\mathcal{M}$ ,  $A$  est valide dans  $\mathcal{M}$  si et seulement si  $a : A$  est aussi valide dans  $\mathcal{M}$  où  $a \notin \text{Nom}(A)$ . Ainsi, il n'y a pas de perte de généralité en considérant uniquement les états de satisfaction.

**Proposition 6.1.1** (Monotonie). *Si  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $w \leq w'$ , alors  $g, w', d \vDash_{\mathcal{M}} A$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . □

**Proposition 6.1.2** (Équivalence). *Si  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} A$  et  $d \sim_w d'$ , alors  $g, w, d' \vDash_{\mathcal{M}} A$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . □

Les premiers résultats pour IHL traitent certains aspects dans la théorie de la preuve qui sont fondés sur un système de déduction naturelle comme la normalisation [21]. Ce système est décrit en figure 6.1. Aucun calcul des séquents n'a été proposé pour cette logique. De plus, la décidabilité de IHL est une question ouverte.

## 6.2 Déduction naturelle et séquents

Dans cette section, nous introduisons un système de déduction naturelle utilisant la structure de séquent. Ce système est obtenu à partir de celui décrit en figure 6.1. La particularité des séquents que nous utilisons est qu'il ne contiennent que des états de satisfaction.

Un séquent est une structure de la forme  $\Gamma \vdash C$  où  $\Gamma$  est un multi-ensemble fini d'états de satisfaction et  $C$  est un état de satisfaction. La formule correspondante d'un séquent  $\Gamma \vdash C$  est  $(\bigwedge \Gamma) \supset C$ . Dans ce qui suit, nous écrivons  $g, w \vDash_{\mathcal{M}} \Gamma$  si  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} \bigwedge \Gamma$  pour  $d \in D_w$  (le choix de  $d$  n'a aucune importance car  $\Gamma$  ne contient que des états de satisfaction).

Notre système de déduction naturelle  $DNS_{\text{IHL}}$  est décrit en figure 6.2. En réalité, il n'est rien d'autre que le système  $DN_{\text{IHL}}$  avec séquents. Notons que comme dans  $DN_{\text{IHL}}$  nous utilisons des formules de la forme  $a : \diamond c$  pour représenter la relation d'accessibilité. Effectivement, nous pouvons facilement voir que  $g, w, d \vDash_{\mathcal{M}} a : \diamond c$  si et seulement si  $R(g(a), g(c))$ .

Considérons, par exemple, la formule  $F = a : ((A \vee B \supset c : C) \supset (A \supset c : C))$ . Une preuve de  $F$  dans  $DNS_{\text{IHL}}$  est donnée par :

$$\frac{\frac{\frac{}{a : (A \vee B \supset c : C), a : A \vdash a : (A \vee B \supset c : C)}{[id]} \quad \frac{\frac{}{a : (A \vee B \supset c : C), a : A \vdash a : A}}{[id]} \quad \frac{}{a : (A \vee B \supset c : C), a : A \vdash a : (A \vee B)}}{[V_I^1]} \quad \frac{}{a : (A \vee B \supset c : C), a : A \vdash a : c : C}}{[id]} \quad \frac{}{a : (A \vee B \supset c : C), a : A \vdash a : (A \vee B)}}{[E]} \quad \frac{}{a : (A \vee B \supset c : C), a : A \vdash a : c : C}}{[D_I]} \quad \frac{}{a : (A \vee B \supset c : C) \vdash a : (A \supset c : C)}}{[D_I]} \quad \frac{}{\vdash a : ((A \vee B \supset c : C) \supset (A \supset c : C))}}{[D_I]}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma \vdash a : a} [Ref] \qquad \frac{}{\Gamma, a : A \vdash a : A} [id] \\
\frac{\Gamma \vdash a : \perp}{\Gamma \vdash C} [\perp E] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : c \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash c : A} [Nom] \\
\\
\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash a : B}{\Gamma \vdash a : A \wedge B} [\wedge I] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \wedge B}{\Gamma \vdash a : A} [\wedge E^1] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \wedge B}{\Gamma \vdash a : B} [\wedge E^2] \\
\\
\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a : A \vee B} [\vee I^1] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : B}{\Gamma \vdash a : A \vee B} [\vee I^2] \\
\\
\frac{\Gamma \vdash a : A \vee B \quad \Gamma, a : A \vdash C \quad \Gamma, a : B \vdash C}{\Gamma \vdash C} [\vee E] \\
\\
\frac{\Gamma, a : A \vdash a : B}{\Gamma \vdash a : A \supset B} [\supset I] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \supset B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a : B} [\supset E] \\
\\
\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash c : a : A} [:I] \qquad \frac{\Gamma \vdash c : a : A}{\Gamma \vdash a : A} [:E] \\
\\
\frac{\Gamma \vdash c : A \quad \Gamma \vdash a : \diamond c}{\Gamma \vdash a : \diamond A} [\diamond I] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : \diamond A \quad \Gamma, a : \diamond c, c : A \vdash C}{\Gamma \vdash C} [\diamond E^*] \\
\\
\frac{\Gamma, a : \diamond c \vdash c : A}{\Gamma \vdash a : \Box A} [\Box I^{**}] \qquad \frac{\Gamma \vdash a : \Box A \quad \Gamma \vdash a : \diamond c}{\Gamma \vdash c : A} [\Box E]
\end{array}$$

\*  $c$  n'apparaît ni dans  $a : \diamond A$ , ni dans  $C$ , ni dans quelconque formule dans  $\Gamma$ .  
\*\*  $c$  n'apparaît ni dans  $a : \Box A$ , ni dans quelconque formule de  $\Gamma$ .

FIG. 6.2 – Système de déduction naturelle  $DNS_{\text{IHL}}$ 

Afin d'illustrer les différences avec le système initial  $DN_{\text{IHL}}$ , nous donnons une preuve de  $F$  dans ce dernier :

$$\frac{\frac{\frac{[a : A]}{a : A \vee B} [\vee I^1]}{[a : A \vee B \supset c : C]} [\supset E]}{c : C} [\supset E]}{a : A \supset c : C} [\supset I]}{a : ((A \vee B \supset c : C) \supset (A \supset c : C))} [\supset I]$$

**Théorème 6.2.1** (Correction). *Le système  $DNS_{\text{IHL}}$  est correct.*

*Démonstration.* Pour chaque règle, on suppose que la conclusion n'est pas valide et on démontre qu'au moins une des prémisses n'est également pas valide. Nous développons uniquement le cas de  $[\Box I]$ .

Soient  $\mathcal{S} = \Gamma \vdash a : \Box A$  un séquent qui n'est pas valide et  $\mathcal{M} = (W, \leq, \{D_w\}_{w \in W}, \{\sim_w$

$\}_{w \in W}, \{R_w\}_{w \in W}, \{V_w\}_{w \in W}$ ) un contre-modèle de  $\mathcal{S}$ . Alors, il existe  $w_0 \in W$  et une  $w_0$ -assignation  $g$  tels que  $g, w_0 \vDash_{\mathcal{M}} \Gamma$  et  $g, w_0 \not\vDash_{\mathcal{M}} a : \Box A$ . Étant donné que  $g, w_0 \not\vDash_{\mathcal{M}} a : \Box A$ , il existe  $w_1 \geq w_0$  et  $d \in D_{w_1}$  tels que  $R_{w_1}(g(a), d)$  et  $g, w_1, d \not\vDash_{\mathcal{M}} A$ . Soit  $c$  un nominal qui n'est pas dans  $Nom(\mathcal{S})$ . On définit la  $w_1$ -assignation  $g'$  par  $g'(c) = d$  et pour tout nominal  $b \neq c$ ,  $g'(b) = g(b)$ . En utilisant la proposition 6.1.1, on a  $g', w_1 \vDash_{\mathcal{M}} \Gamma$ . En outre, comme  $R_{w_1}(g(a), d)$ , on a  $g', w_1 \vDash_{\mathcal{M}} a : \Diamond c$ . En utilisant  $g, w_1 \not\vDash_{\mathcal{M}} c : A$ , on déduit que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\Gamma, a : \Diamond c \vdash c : A$ .  $\square$

**Théorème 6.2.2** (Complétude). *Le système  $DNS_{\text{IHL}}$  est complet.*

*Démonstration.* La complétude est démontrée à partir du système  $DN_{\text{IHL}}$  en utilisant l'approche proposée dans [121]. Intuitivement, les hypothèses ouvertes dans une preuve dans  $DN_{\text{IHL}}$  sont représentées dans les parties gauches des séquents. Voyons que si nous définissons un système similaire à  $DNS_{\text{IHL}}$  où on remplace le déchargement d'une unique hypothèses par le déchargement de toutes les hypothèses de la même forme (*Complete Discharge Convention*), alors on obtient un système équivalent à  $DN_{\text{IHL}}$ . Par exemple dans ce système la règle  $[\supset_I]$  devient

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash a : B}{\Gamma' \vdash a : A \supset B} [\supset_I]$$

où  $\Gamma' = \Gamma \setminus \{a : A\}$ . Maintenant, pour démontrer la complétude de  $DNS_{\text{IHL}}$ , il suffit de démontrer que si un séquent a une preuve dans le précédent système, alors il en a une dans  $DNS_{\text{IHL}}$ .  $\square$

### 6.3 Calculs des séquents pour IHL

Dans cette section, nous définissons un calcul des séquents pour IHL, appelé  $G_{\text{IHL}}$ . La correction et la complétude sont obtenues en considérant la validité dans IHL à travers le système  $DNS_{\text{IHL}}$ .

#### 6.3.1 Le calcul des séquents $G_{\text{IHL}}$

Notre calcul  $G_{\text{IHL}}$  est décrit en figure 6.3. Notons que l'utilisation d'une structure contenant uniquement des états de satisfaction nous a permis d'absorber facilement toutes les règles structurelles dans les autres règles. De plus, comme dans  $DN_{\text{IHL}}$  les prémisses et les conclusions de toutes les règles sont des états de satisfaction, nous pouvons lier les preuves dans  $G_{\text{IHL}}$  à celles dans  $DN_{\text{IHL}}$ . Cela facilite, par exemple, l'étude de la relation entre l'élimination de la coupure et la normalisation. Rappelons que la normalisation a été démontrée pour  $DN_{\text{IHL}}$  dans [21]. Cette démonstration peut être facilement adaptée au cas du système  $DNS_{\text{IHL}}$ .

Soient  $\mathcal{S} = \Gamma \vdash C$  un séquent et  $R$  la relation sur  $Nom(\mathcal{S})$  définie par  $aRb$  si  $a : b$  est un élément de  $\Gamma$ . Nous notons  $\sim$  La clôture réflexive et transitive de  $R$ . Quand nous associons une condition de la forme  $a \sim b$  à une règle, cela signifie que  $\sim$  est la clôture réflexive et transitive de la relation obtenue à partir de la conclusion de cette dernière.

Illustrons le calcul  $G_{\text{IHL}}$  avec la preuve suivante :

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, a : p \vdash a' : p} [id](a \sim a' \text{ et } p \text{ atomique}) \\
\frac{}{\Gamma, a : \perp \vdash C} [\perp] \quad \frac{}{\Gamma \vdash a' : a} [Ref](a \sim a') \\
\frac{\Gamma, a : A, a : B \vdash C}{\Gamma, a : A \wedge B \vdash C} [\wedge_L] \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash a : B}{\Gamma \vdash a : A \wedge B} [\wedge_R] \\
\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a : A \vee B} [\vee_{R1}] \quad \frac{\Gamma \vdash a : B}{\Gamma \vdash a : A \vee B} [\vee_{R2}] \\
\frac{\Gamma, a : A \vdash C \quad \Gamma, a : B \vdash C}{\Gamma, a : A \vee B \vdash C} [\vee_L] \\
\frac{\Gamma, a : A \supset B \vdash a : A \quad \Gamma, a : B \vdash C}{\Gamma, a : A \supset B \vdash C} [\supset_L] \quad \frac{\Gamma, a : A \vdash a : B}{\Gamma \vdash a : A \supset B} [\supset_R] \\
\frac{\Gamma, a : A \vdash C}{\Gamma, c : a : A \vdash C} [:\!_L] \quad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash c : a : A} [:\!_R] \\
\frac{\Gamma, a' : \diamond c, a : \Box A, c : A \vdash C}{\Gamma, a' : \diamond c, a : \Box A \vdash C} [\Box_L](a \sim a') \quad \frac{\Gamma, a : \diamond c \vdash c : A}{\Gamma \vdash a : \Box A} [\Box_R^{**}] \\
\frac{\Gamma, a : \diamond c, c : A \vdash C}{\Gamma, a : \diamond A \vdash C} [\diamond_L^*] \quad \frac{\Gamma, a' : \diamond c \vdash c : A}{\Gamma, a' : \diamond c \vdash a : \diamond A} [\diamond_R](a \sim a') \\
\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma, a : A \vdash C}{\Gamma \vdash C} [Cut]
\end{array}$$

\*  $c$  n'apparaît ni dans  $\Gamma, a : \diamond A \vdash C$  et  $A \notin \text{Nom}$ .  
\*\*  $c$  n'apparaît pas dans  $\Gamma \vdash a : \Box A$ .

FIG. 6.3 – Calcul des séquents  $G_{\text{IHL}}$ 

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{a : \Box(b \supset c), b : (b \supset c), a : \diamond b \vdash b : b} [Ref]}{a : \Box(b \supset c), a : \diamond b, d : b, b : c \vdash b : c} [Ref]}{a : \Box(b \supset c), b : (b \supset c), a : \diamond b \vdash b : c} [\diamond_R]}{a : \Box(b \supset c), b : (b \supset c), a : \diamond b \vdash a : \diamond c} [\Box_L]}{a : \Box(b \supset c), a : \diamond b \vdash a : \diamond c} [\supset_R]}{a : \Box(b \supset c) \vdash a : \diamond b \supset \diamond c} [\supset_L]$$

**Théorème 6.3.1** (Correction). *Si un séquent a une preuve dans  $G_{\text{IHL}}$ , alors il en a une dans  $DNS_{\text{IHL}}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de la preuve dans  $G_{\text{IHL}}$ . □

**Théorème 6.3.2** (Complétude). *Si un séquent a une preuve dans  $DNS_{\text{IHL}}$ , alors il en a une dans  $G_{\text{IHL}}$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de la preuve dans  $DNS_{\text{IHL}}$ . □

### 6.3.2 Élimination de la coupure

Nous avons vu au chapitre 4 qu'il est possible de démontrer l'élimination de la coupure à travers la normalisation dans la déduction naturelle. Dans cette section, nous utilisons une autre approche syntaxique pour démontrer l'élimination de la coupure pour  $G_{\text{IHL}}$ . Elle est similaire à celle décrite au chapitre 1.

Avant de démontrer l'élimination de la coupure, nous démontrons l'admissibilité de l'affaiblissement ainsi que la contraction avec préservation de la profondeur dans le calcul  $G_{\text{IHL}}^-$  correspondant à  $G_{\text{IHL}}$  sans la règle de coupure. Notons que l'admissibilité de ces règles avec préservation de la taille peut être démontrée de la même manière.

**Proposition 6.3.1** (Affaiblissement).

*Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \vdash C$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\Gamma \vdash C$  dans  $G_{\text{IHL}}^-$ . En ajoutant la formule  $a : A$  à tous les contextes des séquents dans  $\mathcal{D}$ , on obtient une preuve de  $\Gamma, a : A \vdash C$ . Cette preuve a la même profondeur et la même taille. □

**Proposition 6.3.2** (Lemme d'inversion).

1. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \wedge B \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A, a : B \vdash C$ .*
2. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A_1 \vee A_2 \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A_i \vdash C$ , for  $i = 1, 2$ .*
3. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a : A_1 \wedge A_2$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a : A_i$ , pour  $i = 1, 2$ .*
4. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a : A \supset B$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \vdash a : B$ .*
5. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \supset B \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : B \vdash C$ .*
6. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, c : a : A \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \vdash C$ .*
7. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash c : a : A$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a : A$ .*
8. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a : \Box A$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : \Diamond c \vdash c : A$  ( $c \notin \text{Nom}(\Gamma \vdash a : \Box A)$ ).*
9. *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : \Diamond A \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : \Diamond c, c : A \vdash C$ ,  $c \notin \text{Nom}(\Gamma, a : \Diamond A \vdash C)$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$  d'une manière similaire à la démonstration de la proposition 4.3.3. □

Dans l'optique de démontrer l'admissibilité de la contraction, nous avons besoin de démontrer que si un séquent  $\mathcal{S}$  a une preuve dans  $G_{\text{IHL}}^-$ , alors tout séquent obtenu à partir de  $\mathcal{S}$  par un renommage de certains nominaux a aussi une preuve dans  $G_{\text{IHL}}^-$ .

**Définition 6.3.1.** *Une fonction de renommage  $f$  est une fonction de  $N$  dans  $M$  où  $N, M \subset \text{Nom}$ . Elle est étendue aux formules dont les nominaux sont dans  $N$  de la manière suivante :*

- $f(p) = p$ ;
- $f(A \otimes B) = f(A) \otimes f(B)$ , pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$ ;
- $f(\Box A) = \Box f(A)$ , pour  $\Box = \Box, \Diamond$ ;



–  $f(a : A) = f(a) : f(A)$ .

Nous utiliserons la notation  $f(\Gamma)$  pour  $f(a_1 : A_1), \dots, f(a_k : A_k)$  lorsque  $\Gamma = a_1 : A_1, \dots, a_k : A_k$ . En outre, nous écrivons  $f(\Gamma \vdash C)$  pour  $f(\Gamma) \vdash f(C)$ .

**Proposition 6.3.3** (Renommage). *Soient  $\mathcal{S}$  un séquent et  $f : \text{Nom}(\mathcal{S}) \rightarrow M$  une fonction de renommage. Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \mathcal{S}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n f(\mathcal{S})$ .*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer par induction sur la valeur de  $n$  que si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \mathcal{S}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \mathcal{S}[c/a]$  pour des nominaux arbitraires  $a$  et  $c$ , où  $\mathcal{S}[c/a]$  correspond au renommage de  $a$  par  $c$  dans  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Proposition 6.3.4** (Contraction). *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A, a : A \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \vdash C$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ . Si  $\Gamma, a : A, a : A \vdash C$  est une instance d'un axiome ( $n = 0$ ), alors  $\Gamma, a : A \vdash C$  est également un axiome. Sinon, supposons que  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{n+1} \Gamma, a : A, a : A \vdash C$  par une preuve  $\mathcal{D}$ . Si la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  ne modifie pas les deux occurrences de  $a : A$ , alors pour obtenir une preuve de  $\Gamma, a : A \vdash C$  de profondeur inférieure ou égale à  $n+1$  on applique l'hypothèse d'induction aux prémisses de cette application de règle et ensuite on applique cette dernière. Sinon, une preuve de  $\Gamma, a : A \vdash C$  de profondeur inférieure ou égale à  $n+1$  est obtenue en utilisant principalement la proposition 6.3.2. Considérons, par exemple, le cas où la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}$  est  $[\diamond_L]$  ( $A \equiv \diamond B$ ) :

$$\frac{\Gamma, a : \diamond B, a : \diamond c, c : B \vdash C}{\Gamma, a : \diamond B, a : \diamond B \vdash C} [\diamond_L]$$

En utilisant la proposition 6.3.2, on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : \diamond c, a : \diamond c', c : B, c' B \vdash C$ . Ensuite, en utilisant la proposition 6.3.3, on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : \diamond c, a : \diamond c, c : B, c : B \vdash C$  ( $c$  et  $c'$  sont de nouveaux nominaux). En appliquant l'hypothèse d'induction, on a  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : \diamond c, c : B \vdash C$ . Ainsi, en utilisant la règle  $[\diamond_L]$ , on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{n+1} \Gamma, a : \diamond B \vdash C$ .  $\square$

La proposition suivante est plus forte que celle de l'admissibilité de la contraction avec préservation de la profondeur. Cependant, elle ne couvre pas toutes les formules.

**Proposition 6.3.5.** *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A, a' : A \vdash C$  et  $a \sim a'$  dans  $\Gamma, a : A \vdash C$ , alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a : A \vdash C$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$  d'une manière similaire à la démonstration de la proposition 6.3.4.  $\square$

**Proposition 6.3.6.** *Soient  $\Gamma \vdash C$  un séquent et  $a, a' \in \text{Nom}(\Gamma \vdash C)$  avec  $a \sim a'$ . Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma, a' : a \vdash C$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash C$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ .  $\square$

**Proposition 6.3.7.** *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a : A$  et  $a \sim a'$ , alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma \vdash a' : A$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\Gamma \vdash C$ , nous notons  $\mathcal{D}[\Gamma']$  la preuve de  $\Gamma, \Gamma' \vdash C$  obtenue à partir de  $\mathcal{D}$  en appliquant l'admissibilité avec préservation de la profondeur de l'affaiblissement.

**Théorème 6.3.3** (Élimination de la coupure). *Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}} \mathcal{S}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* L'approche que l'on suit pour démontrer l'élimination de la coupure consiste à transformer les applications de la règle de coupure en des applications ayant des cut-formules ou des cut-profondeurs plus petites. Il suffit de supposer que  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \Gamma \vdash a : A$  et  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \Gamma, a : A \vdash C$ , et ensuite démontrer que  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \Gamma \vdash C$ . Cette démonstration est par induction sur la structure de  $A$  et sur la valeur de la cut-profondeur.

Soient  $\mathcal{D}_1$  une preuve de  $\Gamma \vdash a : A$  dans  $G_{\text{IHL}}^-$  de profondeur  $n_1$  et  $\mathcal{D}_2$  une preuve de  $\Gamma, a : A \vdash C$  dans  $G_{\text{IHL}}^-$  de profondeur  $n_2$ . Il y a quatre principaux cas à considérer :

1.  $\Gamma \vdash a : A$  est une instance d'un axiome ;
2.  $\Gamma, a : A \vdash C$  est une instance d'un axiome ;
3.  $\Gamma \vdash a : A$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  ne sont pas des instances d'axiome et  $a : A$  n'est pas modifié par la dernière application de règle dans  $\mathcal{D}_1$  ou  $\mathcal{D}_2$  ;
4.  $a : A$  est modifié par la dernière application de règle dans  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

**Cas 1.**  $\Gamma \vdash a : A$  est une instance d'un axiome.

- **1a.** Si  $\Gamma \vdash a : A$  est une instance de  $[id]$ , alors il est de la forme  $\Gamma', a' : p \vdash a : p$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  est de la forme  $\Gamma', a' : p, a : p \vdash C$  où  $a \sim a'$  dans ces séquents. En utilisant la proposition 6.3.5, on a si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma', a' : p, a : p \vdash C$  avec  $a \sim a'$ , alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^n \Gamma', a' : p \vdash C$ . Ainsi, on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{n_2} \Gamma, a' : p \vdash C$ .

- **1b.** Si  $\Gamma \vdash a : A$  est une instance de  $[\perp]$ , alors il est de la forme  $\Gamma', a' : \perp \vdash a : A$ . Donc,  $\Gamma \vdash C$  est de la forme  $\Gamma', a' : \perp \vdash C$  et il est une instance de  $[\perp]$ .

- **1c.** Si  $\Gamma \vdash a : A$  est une instance de  $[Ref]$ , alors il est de la forme  $\Gamma \vdash a : a'$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  est de la forme  $\Gamma, a : a' \vdash C$  où  $a \sim a'$  dans ces séquents. En utilisant la proposition 6.3.6, on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \Gamma \vdash C$ .

**Cas 2.**  $\Gamma, a : A \vdash C$  est une instance d'un axiome.

- **2a.** Si  $\Gamma, a : A \vdash C$  est une instance de  $[id]$ . Si ce séquent est de la forme  $\Gamma, a : p \vdash a' : p$ , alors  $\Gamma \vdash a : A$  est de la forme  $\Gamma \vdash a : p$  avec  $a \sim a'$ . En utilisant la proposition 6.3.7, on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \Gamma \vdash a' : p$ . Maintenant, on traite le cas où  $\Gamma, a : A \vdash C$  est de la forme  $\Gamma, a : A, a' : p \vdash a'' : p$  avec  $a' \sim a''$ . Si  $a' \sim a''$  dans  $\Gamma \vdash C$ , alors on a  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-} \Gamma \vdash C$ . Sinon,  $a : A$  est de la forme  $a : c$ . Si  $\Gamma \vdash a : c$  est une instance d'un axiome, alors il est de la forme  $\Gamma', d : \perp \vdash a : c$  et on déduit que  $\Gamma \vdash C$  est une instance de  $[\perp]$ . On distingue maintenant les cas de la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}_2$ . Si cette règle est  $[\supset_L]$ , alors  $\mathcal{D}_2$  est de la forme :

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}'_1 \\ \Gamma \vdash e : B \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}'_2 \\ \Gamma', e : D \vdash a : c \end{array}}{\Gamma', e : B \supset D \vdash a : c} [\supset_L]$$

Étant donné que  $\Gamma, a : c \vdash C$  est une instance de  $[id]$ ,  $\Gamma', e : D, a : c \vdash C$  est aussi une instance de  $[id]$ . En utilisant l'hypothèse d'induction, on obtient une preuve de  $\Gamma \vdash C$  de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'_1}{\Gamma \vdash e : B} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}''_1}{\Gamma', e : D \vdash a : c} \quad \frac{}{\Gamma', e : D, a : c \vdash C} [id]}{\Gamma', e : D \vdash C} [Cut]}{\Gamma \vdash C} [\supset_L]$$

$[Cut]$  correspond à l'application de l'hypothèse d'induction.

Sinon, la dernière règle appliquée dans  $\mathcal{D}_1$  est différente de  $[\supset_L]$ . Nous considérons uniquement le cas où cette règle a deux prémisses (l'autre cas est plus simple) :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'_1}{\Gamma' \vdash a : c} \quad \frac{\mathcal{D}''_1}{\Gamma'' \vdash a : c}}{\Gamma \vdash a : c} [R]$$

On peut facilement voir que  $\Gamma', a : c \vdash C$  et  $\Gamma'', a : c \vdash C$  sont des instances de  $[id]$ . Par application de l'hypothèse d'induction, on obtient une preuve de  $\Gamma \vdash C$  de la manière suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}'_1}{\Gamma' \vdash a : c} \quad \frac{}{\Gamma', a : c \vdash C} [id]}{\Gamma' \vdash C} [Cut] \quad \frac{\frac{\mathcal{D}''_1}{\Gamma'' \vdash a : c} \quad \frac{}{\Gamma'', a : c \vdash C} [id]}{\Gamma'' \vdash C} [Cut]}{\Gamma \vdash C} [R]$$

Les sous-cas où  $\Gamma, a : A \vdash C$  est une instance de  $[Ref]$  ou  $[\perp]$  sont similaires à ce sous-cas.

**Cas 3.**  $\Gamma \vdash a : A$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  ne sont pas des instances d'axiome et  $a : A$  n'est pas modifié par la dernière application de règle dans  $\mathcal{D}_1$  ou  $\mathcal{D}_2$ .

- **3a.**  $\Gamma \vdash a : A$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  ne sont pas des instances d'axiome et  $a : A$  n'est pas modifié par la dernière application de règle dans  $\mathcal{D}_1$ . On considère uniquement le cas où cette règle possède deux prémisses :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'_1}{\Gamma' \vdash C'} \quad \frac{\mathcal{D}''_1}{\Gamma'' \vdash a : A}}{\Gamma \vdash a : A} [R]$$

Si  $[R] \neq [\supset_L]$  alors on a  $C' = a : A$ . Par application de l'hypothèse d'induction et l'admissibilité avec préservation de la profondeur de l'affaiblissement et de la contraction (proposition 6.3.1 et proposition 6.3.4), on obtient une preuve de  $\Gamma \vdash C$  comme suit :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}'_1[\Gamma]}{\Gamma, \Gamma' \vdash a : A} \quad \frac{\mathcal{D}_2[\Gamma']}{\Gamma, \Gamma', a : A \vdash C}}{\Gamma, \Gamma' \vdash C} [Cut] \quad \frac{\frac{\mathcal{D}''_1[\Gamma]}{\Gamma, \Gamma'' \vdash a : A} \quad \frac{\mathcal{D}_2[\Gamma'']}{\Gamma, \Gamma'', a : A \vdash C}}{\Gamma, \Gamma'' \vdash C} [Cut]}{\frac{\Gamma, \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C} [C]} [R]$$

Si  $[R] = [\supset_L]$  alors une preuve de  $\Gamma \vdash C$  est obtenue comme suit :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'_1[\Gamma]}{\Gamma, \Gamma' \vdash C'} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}''_1[\Gamma]}{\Gamma, \Gamma'' \vdash a : A} \quad \frac{\mathcal{D}_2[\Gamma'']}{\Gamma, \Gamma'', a : A \vdash C}}{\Gamma, \Gamma'' \vdash C} [Cut]}{\Gamma, \Gamma' \vdash C} [\supset_L]}{\Gamma, \Gamma \vdash C} [C]}{\Gamma \vdash C} [C]$$

- **3b.**  $\Gamma \vdash a : A$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  ne sont pas des instances d'axiome et  $a : A$  n'est pas modifié par la dernière application de règle dans  $\mathcal{D}_2$ . Ce sous-cas est similaire au sous-cas 3a.

**Case 4.**  $a : A$  est modifié par les deux dernières applications de règle dans  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . On développe ici le cas où  $A = \Box B$  car les autres cas sont similaires.  $\Gamma \vdash a : A$  et  $\Gamma, a : A \vdash C$  sont respectivement de la forme  $\Gamma', a' : \diamond c' \vdash a : \Box B$  et  $\Gamma', a : \Box B, a' : \diamond c' \vdash C$  avec  $a \sim a'$  dans ces séquents. De plus,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont respectivement de la forme :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'_1}{\Gamma', a : \diamond c, a' : \diamond c' \vdash c : B}}{\Gamma', a' : \diamond c' \vdash a : \Box B} [\Box_R] \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\mathcal{D}'_2}{\Gamma', a : \Box B, a' : \diamond c', c' : B \vdash C}}{\Gamma', a : \Box B, a' : \diamond c' \vdash C} [\Box_L]$$

En utilisant les propositions 6.3.5 et 6.3.3, on obtient  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^{-n_1-1}} \Gamma', a' : \diamond c' \vdash c' : B$ . Ainsi, en utilisant l'hypothèse d'induction et la proposition 6.3.1, une preuve de  $\Gamma \vdash C$  est obtenue comme suit :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1[c' : B]}{\Gamma, a' : \diamond c', c' : B \vdash a : \Box B} \quad \frac{\mathcal{D}'_2}{\Gamma', a : \Box B, a' : \diamond c', c' : B \vdash C}}{\Gamma, a' : \diamond c' \vdash c' : B} [Cut]}{\Gamma, a' : \diamond c' \vdash C} [Cut]}{\Gamma, a' : \diamond c' \vdash C} [Cut]$$

□

### 6.3.3 Le calcul des séquents $G_{\text{IHL}}^2$

Dans cette section, nous proposons un autre calcul des séquents pour IHL sans utiliser des conditions de la forme  $a \sim b$ . Nous appelons  $G_{\text{IHL}}^2$  le calcul obtenu à partir de  $G_{\text{IHL}}^-$  par l'ajout de la règle suivante :

$$\frac{\Gamma[a/c] \vdash C[a/c]}{\Gamma, c : a \vdash C} [S]$$

et par le remplacement des règles  $[id]$ ,  $[Ref]$ ,  $[\Box_L]$  et  $[\diamond_R]$  avec les nouvelles règles suivantes :

$$\frac{}{\Gamma, a : A \vdash a : A} [id] \quad \frac{}{\Gamma \vdash a : a} [Ref]$$

$$\frac{\Gamma, a : \diamond c, a : \Box A, c : A \vdash C}{\Gamma, a : \diamond c, a : \Box A \vdash C} [\Box_L] \quad \frac{\Gamma, a : \diamond c \vdash c : A}{\Gamma, a : \diamond c \vdash a : \diamond A} [\diamond_R]$$

**Théorème 6.3.4.** *Le calcul  $G_{\text{IHL}}^2$  est correcte et complet.*

*Démonstration.* En montrant qu'un séquent a une preuve dans  $G_{\text{IHL}}^2$  ssi il en a une dans  $G_{\text{IHL}}^-$ . □

## 6.4 Décidabilité de IHL

Dans cette section, nous proposons une procédure de décision pour IHL en utilisant le calcul des séquents  $G_{\text{IHL}}^-$ . De même que les procédures proposées aux chapitre 4 et 5, le point clé réside dans l'introduction d'une notion de redondance sur les dérivations. La terminaison est obtenue en utilisant une propriété similaire à celle de la sous-formule, appelée *propriété de la quasi-sous-formule*.

### 6.4.1 Problème de l'introduction de nouveaux nominaux

En vue de démontrer la décidabilité de IHL en utilisant  $G_{\text{IHL}}^-$ , nous devons résoudre le problème de l'introduction de nouveaux nominaux par les règles  $[\diamond_L]$  et  $[\square_R]$ . Ce problème est similaire à celui de l'introduction de nouveaux labels dans les calculs des séquents de Simpson [119]. Notons que l'introduction de nouveaux nominaux ou labels ne pose pas de problème de le cas des logiques modales et hybrides classiques. Cela vient du fait qu'il possible de définir des calculs avec uniquement des règles inversibles permettant de faire de la recherche de preuves qui termine [102, 18].

Dans le cas des calculs de Simpson, le problème de l'introduction de nouveaux labels a été résolu en utilisant la propriété suivante :

*Pour toute dérivation, il existe un entier naturelle strictement positif  $n$  tel qu'il n'existe pas de séquent contenant une chaîne de longueur plus grande que  $n$ . Une chaîne est une séquence de la forme  $x_0 R x_1, \dots, x_{m-1} R x_m$  où  $R$  correspond à la relation d'accessibilité,  $x_0$  n'est pas un nouveau label et  $x_{i+1}$  est un nouveau label pour tout  $i \in [0, m-1]$ .*

Nous pouvons dire que toute dérivation infinie est redondante car il y a nécessairement deux séquents dans la même branche où un peut être obtenu de l'autre en renommant certains nouveaux nominaux (pour plus de détail voir [119]).

D'une manière similaire, dans  $G_{\text{IHL}}^-$  une chaîne est une séquence de la forme  $a_0 : \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, \dots, a_{m-1} : \diamond a_m$  où  $a_0$  n'est pas un nouveau nominal et  $a_{i+1}$  est un nouveau nominal pour tout  $i \in [0, m-1]$ . Maintenant, nous donnons un exemple afin de démontrer que la précédente propriété n'est pas vérifiée dans le cas de  $G_{\text{IHL}}^-$  :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \vdots \\
 a_0 : \diamond a_1, \dots, a_i : \diamond a_{i+1}, a_1 : a_0, \dots, a_i : a_0, a_2 : p, \dots, a_{i+1} : p, a_0 : \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a_0 \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, a_2 : \diamond a_3, a_1 : a_0, a_2 a_0, a_2 : p, a_3 : p, a_0 : \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \\
 \hline
 a_0 : \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, a_1 : a_0, a_2 : a_0, a_2 : p, a_2 : \diamond p, a_0 : \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \quad [\diamond_L] \\
 \hline
 a_0 : \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, a_1 : a_0, a_2 : p, a_2 : a_0 \wedge \diamond p, a_0 \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \quad [\wedge_L] \\
 \hline
 a_0 \diamond a_1, a_1 \diamond a_2, a_1 : a_0, a_2 : p, a_0 \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \quad [\square_L] \\
 \hline
 a_0 : \diamond a_1, a_1 : a_0, a_1 : \diamond p, a_0 \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \quad [\diamond_L] \\
 \hline
 a_0 : \diamond a_1, a_1 : a_0, a_1 : \diamond p, a_0 \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \quad [\wedge_L] \\
 \hline
 a_0 : \diamond a_1, a_1 : a_0 \wedge \diamond p, a_0 : \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp \quad [\square_L] \\
 \hline
 a_0 : \diamond a_1, a_0 : \square(a_0 \wedge \diamond p) \vdash a_0 : \perp
 \end{array}$$

Nous pouvons voir que dans cette dérivation infinie, il n'existe pas deux séquents distincts tels que l'un peut être obtenu de l'autre par un renommage de nouveaux nominaux. Pour résoudre ce problème, nous associons à tout séquent  $\mathcal{S}$  appartenant à une dérivation un séquent particulier, appelé séquent équivalide de  $\mathcal{S}$ . Ce dernier satisfait la précédente propriété. En plus, un séquent a une preuve si et seulement si son séquent équivalide a une preuve de la même taille. Les séquents équivalides sont obtenus par un simple renommage de certains nouveaux nominaux.

### 6.4.2 Propriété de la quasi-sous-formule

La notion de quasi-sous-formule que nous utilisons est similaire à celle de sous-formule faible introduite dans [102] et celle de quasi-sous-formule introduite dans [21].

**Définition 6.4.1** (Quasi-sous-formule). *Soit  $A$  une formule, les quasi-sous-formules de  $A$  sont définies par induction sur la structure de  $A$  comme suit :*

- pour tout  $\otimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$ , les quasi-sous-formules de  $a : A \otimes B$  sont  $a : A \otimes B$  et toutes les quasi-sous-formules de  $a : A$  et  $a : B$  ;
- pour tout  $\boxtimes \in \{\diamond, \square\}$ , les quasi-sous-formules de  $a : \boxtimes A$  sont  $a : \boxtimes A$  et toutes les quasi-sous-formules de  $c : A$  pour un nominal arbitraire  $c$ .

**Théorème 6.4.1** (Propriété de la quasi-sous-formule). *Soient  $\mathcal{S}$  un séquent et  $\mathcal{D}$  une dérivation de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IHL}}^-$ . Toute occurrence de formule dans  $\mathcal{D}$  est soit une quasi-sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ , soit une formule de la forme  $a : \diamond c$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$  en distinguant les cas de la dernière application de règle. □

### 6.4.3 Séquents équivalides

**Proposition 6.4.1** (Renommage). *Soient  $\mathcal{S}$  un séquent et  $f : \text{Nom}(\mathcal{S}) \rightarrow M$  une fonction de renommage. Si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} f(\mathcal{S})$ .*

*Démonstration.* Par induction sur la valeur de  $n$  d'une manière similaire à la démonstration de la proposition 6.3.3. □

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  appartient à une dérivation de  $\mathcal{S}$ ,  $\sim$  la relation d'équivalence associée à  $\mathcal{S}'$  et  $c \in \text{Nom}(\mathcal{S}') \setminus \text{Nom}(\mathcal{S})$ . Nous définissons l'ensemble de nominaux  $N(c, \mathcal{S}')$  par  $a \in N(c, \mathcal{S}')$  si  $a \in \text{Nom}(\mathcal{S})$  et  $a \sim c$ .

**Définition 6.4.2** (Séquent équivalide). *Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  appartient à une dérivation  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{S}$  et  $N = \text{Nom}(\mathcal{S})$  avec un ordre fixé sur les éléments de  $N$ . Nous définissons le séquent équivalide de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{D}$ ,  $\text{Eq}(\mathcal{S}')$ , comme le séquent  $f(\mathcal{S}')$  où  $f$  est la fonction de renommage définie comme suit :*

$$f(c) = \begin{cases} c & \text{si } c \in N \text{ ou } N(c, \mathcal{S}') = \emptyset \\ c' & \text{sinon, avec } c' = \max(N(c, \mathcal{S}')) \end{cases}$$

Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  appartient à une dérivation  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{S}$ . Nous pouvons voir que toute formule du séquent équivalide de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{D}$  est soit une quasi-sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ , soit une formule de la forme  $a : \diamond c$ . Cela est une conséquence de la propriété de la quasi-sous-formule.

**Proposition 6.4.2.** *Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  appartient à une dérivation  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{S}$ .  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}'$  ssi  $(\Leftrightarrow) \vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \text{Eq}(\mathcal{S}')$ .*

*Démonstration.* La partie  $\Rightarrow$  est une conséquence de la proposition 6.4.1. La démonstration de la partie  $\Leftarrow$  est par induction sur la valeur de  $n$ . Il suffit de démontrer que pour tous deux nominaux  $a$  et  $b$  dans  $\text{Nom}(\mathcal{S})$  tels que  $a \sim b$ , si  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}'[a/b]$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}'$ .  $\square$

#### 6.4.4 N-chaînes

Intuitivement, les N-chaînes correspondent à des séquences de formules de la forme  $a : \diamond c$  que nous utiliserons dans la description de l'arrangement des nouveaux nominaux introduits par les règles  $[\square_R]$  et  $[\diamond_L]$ . Le point clé est que dans les séquents équivalides les longueurs de ces séquences sont bornées.

**Définition 6.4.3** (N-chaîne). *Soient  $\mathcal{S} = \Gamma \vdash C$  un séquent et  $N$  un ensemble fini de nominaux.*

*Une N-chaîne est une séquence de la forme  $a_0 : \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, \dots, a_{k-1} : \diamond a_k$  ( $a_0$  si  $k = 0$ ) où*

- $a_{i-1} : \diamond a_i \in \Gamma$  pour tout  $i = 1, \dots, k$  ;
- $a_0 \in N$  ;
- $a_i \notin N$  pour tout  $i = 1, \dots, k-1$  ;
- si  $a_k \in N$  et  $k \neq 0$  alors  $k > 1$  ; et
- si  $a_k \notin N$  alors il n'existe pas de nominal  $a$  tel que  $a_k : \diamond a \in \Gamma$ .

Nous étendons la notion de degré d'imbrication (chapitre 2) aux formules des logiques hybrides par  $\text{nest}(a : A) = \text{nest}(A)$ .

**Proposition 6.4.3.** *Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}' = \Gamma \vdash C$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  est le séquent équivalide d'un séquent dans une dérivation de  $\mathcal{S}$ . Pour toute formule  $a : \diamond b \in \Gamma$  telle que  $a \notin \text{Nom}(\mathcal{S})$  ou  $b \notin \text{Nom}(\mathcal{S})$ ,  $a : \diamond b$  appartient à une  $\text{Nom}(\mathcal{S})$ -chaîne de  $\mathcal{S}'$ . En outre, la longueur de toute  $\text{Nom}(\mathcal{S})$ -chaîne dans  $\mathcal{S}'$  est inférieure ou égale à  $\text{nest}(\mathcal{S}) + 1$ .*

*Démonstration.* La première propriété est obtenue à partir des règles introduisant de nouveaux nominaux ( $[\square_L]$  et  $[\diamond_R]$ ) ainsi qu'à partir de la définition des séquents équivalides où uniquement certains nouveaux nominaux introduits par les précédentes règles sont renommés par des nominaux dans  $\text{Nom}(\mathcal{S})$ .

La deuxième propriété résulte du fait que s'il existe une  $\text{Nom}(\mathcal{S})$ -chaîne de longueur supérieure à  $\text{nest}(\mathcal{S})$  dans  $\mathcal{S}'$ , alors il existe un nominal  $b \notin \text{Nom}(\mathcal{S})$  dans cette  $\text{Nom}(\mathcal{S})$ -chaîne et un autre nominal  $a \in \text{Nom}(\mathcal{S})$  tels que  $a \sim b$  et  $b$  est renommé par  $a$  dans la construction du séquent équivalide  $\mathcal{S}'$ .  $\square$

Nous définissons une relation de préordre, notée  $\lesssim_{\mathcal{S}}$ , sur les séquents appartenant aux dérivations de  $\mathcal{S}$  par :  $\mathcal{S}_1 \lesssim_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_2$  s'il existe une fonction de renommage  $f$  telle que  $\text{set}(f(\Gamma_1)) \subseteq \text{set}(\Gamma_2)$  et  $f(C_1) = C_2$  avec  $\text{Eq}(\mathcal{S}_1) = \Gamma_1 \vdash C_1$  et  $\text{Eq}(\mathcal{S}_2) = \Gamma_2 \vdash C_2$ . Rappelons que  $\text{set}(\Gamma)$  correspond à l'ensemble des éléments de  $\Gamma$ . En plus, nous utiliserons  $\text{set}(\Gamma \vdash C)$  pour  $\text{set}(\Gamma) \vdash C$ .

**Proposition 6.4.4.** *Soient  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  trois séquents tels que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  appartiennent à une dérivation de  $\mathcal{S}$ . Si  $\mathcal{S}_1 \lesssim_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_2$  alors  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}_1$  implique  $\vdash_{G_{\text{IHL}}^-}^{s \leq n} \mathcal{S}_2$ .*

*Démonstration.* En utilisant l'admissibilité de l'affaiblissement et de la contraction avec préservation de la taille ainsi que la proposition 6.4.1.  $\square$

### 6.4.5 Arbres et squelettes

Nous utilisons maintenant la notion de  $N$ -chaîne pour représenter tout séquent équivalide par un ensemble d'arbres. Ensuite nous dérivons de tels arbres d'autres arbres, appelés squelettes. Ces structures nous permettront de démontrer que toute dérivation infinie est forcément redondante.

**Définition 6.4.4** (Arbre). Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}' = \Gamma \vdash c : C$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  est le séquent équivalide d'un séquent dans une dérivation de  $\mathcal{S}$  et  $a \in \text{Nom}(\mathcal{S})$ . Nous définissons l'arbre associé à  $a$  dans  $\mathcal{S}'$ , noté  $T(a, \mathcal{S}')$ , comme suit :

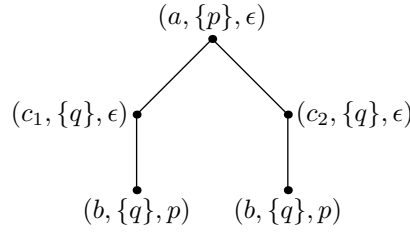
- les nœuds sont étiquetés par des triplets de la forme  $(b, \Gamma(b), \alpha(b))$  où  $b \in \text{Nom}(\mathcal{S}')$ ,  $\Gamma(b) = \{A \mid b : A \in \Gamma\}$  et

$$\alpha(b) = \begin{cases} C & \text{si } b = c \\ \epsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\epsilon$  un symbole qui n'appartient ni à  $\text{Nom}$ , ni à  $\text{Prop}$ .

- La racine est étiquetée par  $(a, \Gamma(a), \alpha(a))$ .
- Un nœud étiqueté avec  $(b', \Delta', \alpha')$  est un successeur immédiat d'un nœud étiqueté avec  $(b, \Delta, \alpha)$  si  $b : \diamond b'$  appartient à une  $\text{Nom}(\mathcal{S})$ -chaîne de  $\mathcal{S}'$  débutant avec  $a$ .

Illustrons cette notion avec  $\mathcal{S}' = a : p, c_1 : q, c_2 : q, b : q, a : \diamond c_1, a : \diamond c_2, c_1 : \diamond b, c_2 : \diamond b \vdash b : p$  et  $\text{Nom}(\mathcal{S}) = \{a, b\}$ .  $T(a, \mathcal{S}')$  correspond à l'arbre suivant :



Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  est le séquent équivalide d'un séquent dans une dérivation de  $\mathcal{S}$ . Nous représentons  $\mathcal{S}'$  par l'ensemble d'arbres  $T_{\mathcal{S}'} = \{T(a, \mathcal{S}') \mid a \in \text{Nom}(\mathcal{S})\}$ , appelé l'ensemble d'arbres caractérisant  $\mathcal{S}'$ . Il est facile de voir qu'à partir de cette ensemble, nous pouvons retrouver la valeur de  $\text{set}(\mathcal{S}')$ .

Nous définissons la relation d'équivalence  $\cong_N$ , avec  $N$  un ensemble fini de nominaux, sur les arbres par  $T_1 \cong_N T_2$  si  $T_1 = f_1(T_2)$  et  $T_2 = f_2(T_1)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions de renommage telles que pour tout  $a \in N$ ,  $f_1(a) = f_2(a) = a$ . Autrement dit, deux arbres sont équivalentes si et seulement si chacun de ces arbres peut être obtenu de l'autre en renommant certains nominaux qui ne sont pas dans  $N$ .

Dans ce qui suit, nous représentons chaque arbre par une expression de la forme  $(r, L)$  où  $r$  est la racine et  $L$  est une liste d'arbres éventuellement vide. L'ensemble des sous-arbres d'un arbre  $\mathcal{T}$  est défini par :  $\mathcal{T}$  est un sous-arbre de  $\mathcal{T}$  ; si  $(r, L)$  est un sous-arbre de  $\mathcal{T}$ , alors les éléments de  $L$  le sont aussi. Nous notons  $dp(\mathcal{T})$  la profondeur de  $\mathcal{T}$ .

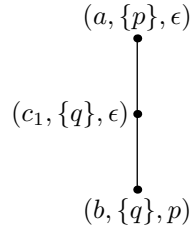
**Définition 6.4.5** (Squelette). Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux séquents tels que  $\mathcal{S}'$  est le séquent équivalide d'un séquent dans une dérivation de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  un élément de l'ensemble d'arbres caractérisant  $\mathcal{S}'$ . Un squelette de  $\mathcal{T}$ , noté  $Sk(\mathcal{T})$ , est un arbre construit de la manière suivante :

- Étape 0 : on initialise la valeur de  $Sk(\mathcal{T})$  avec  $\mathcal{T}$ .



- Étape  $i+1$  : pour tout sous-arbre  $\mathcal{ST} = (r, L)$  de  $Sk(\mathcal{T})$  de profondeur égale à  $(i+1)$ , on remplace  $\mathcal{ST}$  dans  $Sk(\mathcal{T})$  par  $(r, L')$  où  $L'$  est une sous-liste de  $L$  obtenue comme suit : on commence par  $L' = [ ]$ ; ensuite pour tout  $\mathcal{T}_0 \in L$ , s'il n'existe pas d'arbre  $\mathcal{T}_1$  dans  $L'$  tel que  $\mathcal{T}_0 \cong_{Nom(\mathcal{S})} \mathcal{T}_1$ , alors on ajoute  $\mathcal{T}'$  à  $L'$ .

Un squelette de l'arbre donné dans le précédent exemple :



Il n'existe pas toujours un seul squelette pour un arbre. Toutefois, tous les squelettes associés à un arbre sont équivalents. Notons que si  $\{T_1, \dots, T_k\}$  est l'ensemble d'arbres caractérisant  $\mathcal{S} = \Gamma \vdash C$  et  $\mathcal{S}' = \Gamma' \vdash C$  est le séquent obtenu à partir de  $\{Sk(T_1), \dots, Sk(T_k)\}$  alors  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  et  $set(\mathcal{S}')$  peut être obtenu à partir de  $set(\mathcal{S})$  par un renommage de certains nouveaux nominaux.

**Proposition 6.4.5.** *Soient  $\mathcal{S}$  un séquent et  $\mathcal{D}$  une dérivation de  $\mathcal{S}$ . Il existe une constante  $K$  telle que pour tout séquent  $\mathcal{S}'$  équivalide à un séquent dans  $\mathcal{D}$ , si  $\mathcal{T}$  est dans l'ensemble d'arbres caractérisant  $\mathcal{S}'$ , alors le nombre de nœuds de  $Sk(\mathcal{T})$  est nécessairement inférieur ou égal à  $K$ .*

*Démonstration.* On sait que la profondeur de  $\mathcal{T}$  est égale à celle de  $\mathcal{T}' = Sk(\mathcal{T})$  et inférieure ou égale à  $nest(\mathcal{S}) + 1$  (Proposition 6.4.3). Soient  $\Phi$  l'ensemble des sous-formules des formules de  $\mathcal{S}$  et  $\phi$  sa taille. La taille de l'ensemble des sous-ensembles de  $\Phi$  est  $2^\phi$ . En utilisant la propriété de la quasi-sous-formule (théorème 6.4.1), on obtient que pour tout  $n$  un nœud de  $\mathcal{T}'$  de profondeur  $dp(\mathcal{T}') - 1$ ,  $n$  a au plus  $K_1 = (N+1) \times 2^\phi \times 2$  successeurs où  $N$  est la taille de  $Nom(\mathcal{S})$ . D'une manière similaire, le nombre de successeurs de tout nœud dans  $\mathcal{T}$  de profondeur  $dp(\mathcal{T}') - 2$  est au plus  $K_2 = (N+1) \times 2^{K_1} \times 2$ . On continue ainsi jusqu'à la racine ( $K_{dp(\mathcal{T})}$ ). Par conséquent, nous pouvons prendre une constante  $K$  égale à

$$1 + \sum_{i=0}^{dp(\mathcal{T})-1} \prod_{j=0}^i K_{dp(\mathcal{T})-j}$$

□

**Proposition 6.4.6.** *Soient  $\mathcal{S}$  un séquent et  $\mathcal{D}$  une dérivation de  $\mathcal{S}$ . L'ensemble de tous les squelettes obtenus à partir des séquents équivalides aux séquents de  $\mathcal{D}$  peut être partitionné en un ensemble fini de classes d'équivalence de  $\cong_{Nom(\mathcal{S})}$ .*

*Démonstration.* Une conséquence de la proposition 6.4.5. □

**Proposition 6.4.7.** *Soit  $\mathcal{S}$  un séquent et  $\mathcal{D}$  une dérivation de  $\mathcal{S}$  avec une branche infinie  $\mathcal{B} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_k, \dots)$ . Alors, il existe  $i$  et  $j$  tels que  $i < j$  et  $\mathcal{S}_j \lesssim_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_i$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}' = (\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \dots, \mathcal{S}'_1, \dots)$  où  $\mathcal{S}'_i = Eq(\mathcal{S}_i)$ . Nous associons à chaque séquent  $\mathcal{S}'_i$  dans  $\mathcal{B}'$  l'ensemble d'arbres  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'_i} = \{Sk(\mathcal{T}(a, \mathcal{S}'_i)) \mid a \in Nom(\mathcal{S})\}$ . En utilisant la proposition 6.4.6, on déduit qu'il existe deux séquents  $\mathcal{S}'_i = \Gamma'_i \vdash C'_i$  et  $\mathcal{S}'_j = \Gamma'_j \vdash C'_j$  tels

que  $i < j$  et pour tout  $T_j \in T_{\mathcal{S}'_j}$ , il existe  $T_i \in T_{\mathcal{S}'_i}$  avec  $T_i \cong_{Nom(\mathcal{S})} T_j$ . Soient  $\Gamma''_i \vdash C''_i$  et  $\Gamma''_j \vdash C''_j$  les deux séquents obtenus respectivement à partir de  $T_{\mathcal{S}'_i}$  et  $T_{\mathcal{S}'_j}$ . Il existe une fonction de renommage  $f$  telle que  $f(\Gamma''_j) = \Gamma''_i$  et  $f(C''_j) = C''_i$ . De plus, on a  $\Gamma''_i \subseteq \Gamma'_i$  et  $C''_i = C'_i$ . Étant donné qu'il existe une fonction de renommage  $g$  telle que  $set(g(\Gamma'_j)) = \Gamma''_j$  et  $g(C'_j) = C''_j$ , on obtient  $set((f \circ g)(\Gamma'_j)) \subseteq set(\Gamma'_i)$  et  $(f \circ g)(C'_j) = C'_i$ . Par conséquent, on déduit  $\mathcal{S}_j \lesssim_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_i$ .  $\square$

#### 6.4.6 Une procédure de décision pour IHL

Nous introduisons maintenant la notion de redondance sur les dérivations de  $G_{\text{IHL}}^-$ .

**Définition 6.4.6.** *Un dérivation de  $\mathcal{S}$  est dite redondante si elle a une branche contenant deux occurrences de séquents  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}''$  tels que  $\mathcal{S}'$  est au dessus de  $\mathcal{S}''$  et  $\mathcal{S}' \lesssim_{\mathcal{S}} \mathcal{S}''$ .*

**Proposition 6.4.8.** *Si un séquent est valide dans IHL alors il a une preuve qui n'est pas redondante dans  $G_{\text{IHL}}^-$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{S}$  un séquent et  $\mathcal{D}$  une preuve de  $\mathcal{S}$  dans  $G_{\text{IHL}}^-$  de taille  $s$ . La démonstration est par induction sur la valeur de  $s$ . Si  $\mathcal{D}$  n'est pas redondante, alors  $\mathcal{S}$  a une preuve qui n'est pas redondante dans  $G_{\text{IHL}}^-$ . Sinon,  $s = n + 1$  avec  $n \geq 0$  et  $\mathcal{D}$  est redondante. Étant redondante,  $\mathcal{D}$  a une branche contenant deux occurrences de séquents  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}''$  tels que  $\mathcal{S}'$  est au dessus de  $\mathcal{S}''$  et  $\mathcal{S}' \lesssim_{\mathcal{S}} \mathcal{S}''$ . Soient  $n_1$  et  $n_2$  les tailles de respectivement la preuve de  $\mathcal{S}'$  et celle de  $\mathcal{S}''$  dans  $\mathcal{D}$ . Étant donné que  $\mathcal{S}'$  est au dessus de  $\mathcal{S}''$ , on a  $n_1 < n_2$ . En utilisant la proposition 6.4.4,  $\mathcal{S}''$  a une preuve  $\mathcal{D}_2$  de taille inférieure ou égale à  $n_1$ . Ainsi, en remplaçant dans  $\mathcal{D}$  la preuve de  $\mathcal{S}''$  avec  $\mathcal{D}_2$  on obtient une preuve de  $\mathcal{S}$  de taille inférieure ou égale à  $n$ . Par conséquent, en appliquant l'hypothèse d'induction, on déduit que  $\mathcal{S}$  a une preuve qui n'est pas redondante.  $\square$

Notre procédure de décision pour IHL est la même que celles définies au chapitre 4 excepté l'utilisation de  $G_{\text{IHL}}^-$  plutôt que  $G_{\text{IKTh}}^-$ . La correction est le résultat de la correction et la complétude de  $G_{\text{IHL}}^-$  ainsi que la proposition 6.4.8. Quant à la terminaison, elle est une conséquence de la proposition 6.4.7. Cela conduit à déduire la décidabilité de IHL :

**Théorème 6.4.2.** *La logique IHL est décidable.*

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini le premier calcul des séquents pour la logique hybride intuitionniste IHL [21] qui est approprié à la recherche de preuves grâce à l'absence de règles structurelles. Après avoir démontré les principales propriétés qui sont la correction, la complétude et l'élimination de la coupure, nous avons défini une procédure de décision pour cette logique qui nous a permis de fournir la première démonstration de décidabilité de cette dernière.

Une des perspectives est de considérer des extensions de notre calcul avec des règles correspondant à des conditions sur la relation d'accessibilité comme la réflexivité, la transitivité et la symétrie. On souhaite pouvoir définir un calcul dans lequel chaque condition sur la relation d'accessibilité possède une règle correspondante et chaque combinaison de ces règles est complète pour la logique avec les conditions correspondantes (modularité). Une autre perspective consiste à étudier la complexité de IHL en se basant sur les travaux développés dans [1] dans le cas classique.





## Chapitre 7

# Logiques hybrides de Gödel

### Introduction

La logique de Gödel et ses versions finies sont des logiques intermédiaires, à savoir entre la logique classique et celle intuitionniste, ayant une sémantique fondée sur des modèles de Kripke linéaires [43]. Elle a été introduite par Gödel dans [75] et axiomatisée par Dummett dans [43] : elle correspond à l'ajout de l'axiome  $A \supset B \vee B \supset A$  à la logique intuitionniste. Une des caractéristiques les plus importantes de la logique de Gödel réside dans le fait qu'elle a été reconnues comme une logique floue [79].

Nous avons vu précédemment qu'une logique modale intuitionniste correspond à une combinaison de la logique intuitionniste avec une logique modale. De la même manière une logique modale floue est une combinaison d'une logique floue avec une logique modale. Le principe est que dans un monde donné une formule peut avoir une valeur de vérité autre que « vrai » (1) ou « faux » (0). Dans la littérature, il existe différentes versions de logiques modales floues. En guise d'exemple, il y a celle fondée sur la logique floue basique [78], celles fondées sur des versions finies de logiques floues [57, 58, 111] et celle fondée sur la logique de Gödel [28].

Dans ce chapitre, nous définissons une famille de logiques hybrides floues qui correspondent à des extensions syntaxiques de la logique modale de Gödel et ses versions finies. Parmi nos motivations, il y a la capacité de telles logiques de raisonner sur des connaissances imprécises. En l'état de nos connaissances, l'unique logique hybride floue existante est celle introduite dans [80]. Dans cette logique, les valeurs de vérité sont prises dans une algèbre de Heyting finie et le langage contient des constantes représentant ces dernières. Tandis que dans notre famille de logiques, il existe des logiques construites sur des algèbres infinies et le langage que nous utilisons est celui standard des logiques hybrides.

Nous considérons des modèles où la relation d'accessibilité entre les mondes est multi-valuée. Les opérateurs propositionnels sont interprétés comme dans les logiques de Gödel et les modalités  $\Box$  et  $\Diamond$  sont interprétées en utilisant respectivement l'*infimum* et le *supremum* dans l'ensemble des nombres réels. L'infimum (resp. le supremum) d'un ensemble de nombres réels correspond à la borne inférieure (resp. supérieure) de ce dernier, qui ne lui appartient pas nécessairement. L'opérateur de satisfaction et les nominaux sont interprétés comme dans les logiques hybrides standard. La famille de nos logiques est composée de deux logiques définies sur une algèbre infinie qui sont  $\text{GH}_\infty$  et  $\text{WGH}_\infty$ , et une séquence de logiques définies sur des algèbres finies  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$  ( $\text{GH}_n$  est une logique  $(n+1)$ -valuée).  $\text{WGH}_\infty$  est différente de  $\text{GH}_\infty$

par le fait que nous ne considérons que les modèles où l'infimum et le supremum correspondent respectivement au minimum et au maximum.

Après une présentation de la logique de Gödel et ses versions finies ainsi que la logique modale de Gödel et ses versions finies, nous introduisons nos nouvelles logiques hybrides. Ensuite, nous étudions la décidabilité et la théorie de la preuve dans  $\text{WGH}_\infty$  et  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$ . Dans ce contexte, nous introduisons une structure multi-contextuelle similaire à celle de séquent relationnel [6]. En utilisant cette dernière, nous proposons un ensemble de règles de preuve fortement correctes et fortement inversibles. Il est important de noter que nous définissons le même ensemble de règles pour  $\text{WGH}_\infty$  et  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$ . Ensuite, nous fournissons des procédures de décision pour  $\text{WGH}_\infty$  et  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$  permettant la génération de contre-modèles. À partir de ces procédures, nous démontrons que  $\text{WGH}_\infty$  et  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$  sont décidables et satisfont la propriété des modèles finis. Enfin, nous définissons un calcul des séquents pour  $\text{WGH}_\infty$  en étendant notre ensemble de règles avec un axiome et des règles structurelles. Nous notons que certains des travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication [66].

## 7.1 Logiques modales de Gödel

Nous considérons la famille des logiques propositionnelles de Gödel  $\mathbf{G}_n$ . La valeur  $n$  appartient à l'ensemble  $\overline{\mathbb{N}^*} = \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  des entiers naturels strictement positif en plus du plus grand élément  $\infty$ . Dans le cas où  $n = \infty$ , la logique  $\mathbf{G}_\infty$  est également notée  $\mathbf{G}$ . Elle correspond à la logique standard de Gödel.

La syntaxe est la même que celle de la logique propositionnelle. Rappelons qu'une *logique intermédiaire* est un ensemble de formules  $\mathcal{L}$  satisfaisant la propriété  $\text{IPL} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \text{CPL}$  et clos sous la règle de modus ponens et sous une substitution arbitraire des variables propositionnelles (pour plus de détails voir [3]). La famille des logiques propositionnelles de Gödel satisfait la propriété suivante :

$$\text{IPL} \subset \mathbf{G} = \mathbf{G}_\infty \subset \dots \subset \mathbf{G}_i \subset \dots \subset \mathbf{G}_1 = \text{CPL}$$

Décrivons maintenant la sémantique algébrique caractérisant les logiques  $\mathbf{G}_n$  [5]. Nous appelons  $S_n$  l'ensemble de **valeurs de vérité** défini comme suit :

$$S_n = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } n = \infty \\ \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous notons  $\rightarrow$  la fonction définie comme suit :

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Une  $n$ -évaluation des variables propositionnelles  $V : \text{Prop} \rightarrow S_n$  est étendue aux formules par induction de la manière suivante :

- $V(\perp) = 0$
- $V(A \wedge B) = \min(V(A), V(B))$
- $V(A \vee B) = \max(V(A), V(B))$
- $V(A \supset B) = V(A) \rightarrow V(B)$

où  $\min$  et  $\max$  correspondent respectivement au minimum et au maximum. Une formule  $A$  est valide pour une  $n$ -évaluation  $V$  si  $V(A) = 1$ . Une formule est valide dans  $\mathbf{G}_n$  si et seulement si elle est valide pour toute  $n$ -évaluation.

Toutes les composantes de la famille de logiques présentée ici sont décidables. Une des plus intéressante procédure de décision est celle basée sur l'utilisation de graphes bicolores [89, 90, 92]. Le principe consiste à caractériser la validité par l'existence de chaînes particulières dans des graphes bicolores.

Nous nous intéresserons maintenant aux logiques modales floues fondée sur la famille des logiques de Gödel. Dans un premier temps, nous décrivons les logiques modales floues  $\mathbf{GM}_n$  pour  $n \in \overline{\mathbb{N}^*}$ . Ensuite, nous définissons une logique particulière que nous appelons  $\mathbf{WGM}_\infty$ .

**Définition 7.1.1.** *Un  $n$ -modèle modal flou, avec  $n \in \overline{\mathbb{N}^*}$ , est un triplet  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  où  $W$  est un ensemble non vide de mondes,  $R$  est une fonction de  $W \times W$  dans  $S_n$  et  $V$  une fonction de valuation de  $W \times \mathbf{Prop}$  dans  $S_n$ .*

Les valuations sont étendues aux formules de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V(w, \perp) &= 0 \\ V(w, A \wedge B) &= \min\{V(w, A), V(w, B)\} \\ V(w, A \vee B) &= \max\{V(w, A), V(w, B)\} \\ V(w, A \supset B) &= V(w, A) \rightarrow V(w, B) \\ V(w, \Box A) &= \inf\{R(w, w') \rightarrow V(w', A) \mid w' \in W\} \\ V(w, \Diamond A) &= \sup\{\min(R(w, w'), V(w', A)) \mid w' \in W\} \end{aligned}$$

où *inf* et *sup* correspondent respectivement aux fonctions infimum et supremum.

Une formule  $A$  est valide dans  $(W, R, V)$  si  $V(w, A) = 1$  pour tout  $w \in W$ . Une formule est valide dans  $\mathbf{GM}_n$  si elle est valide dans tout  $n$ -modèle modal flou. La logique  $\mathbf{GM}_1$  correspond à la logique modale classique  $\mathbf{K}$ . Notons que lorsque  $n > 1$ , les opérateurs  $\Box$  et  $\Diamond$  sont indépendants.

Dans le cas particulier de  $\mathbf{GM}_\infty$ , des systèmes à la Hilbert pour le fragment privé de  $\Box$  ainsi que celui privé de  $\Diamond$  ont été proposés dans [28]. Ils sont obtenus par l'extension des systèmes de Hilbert de la logique de Gödel  $\mathbf{G}$  avec les règles et les axiomes suivants :

$$\left. \begin{array}{l} K_\Box : \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B) \\ Z_\Box : \neg\neg\Box A \supset \Box\neg\neg A \\ \frac{A}{\Box A} \quad [RN_\Box] \end{array} \right| \begin{array}{l} D_\Diamond : \Diamond(A \vee B) \supset (\Diamond A \vee \Diamond B) \\ Z_\Diamond : \Diamond\neg\neg A \supset \neg\neg\Diamond A \\ F_\Diamond : \neg\Diamond\perp \\ \frac{A \supset B}{\Diamond A \supset \Diamond B} \quad [RN_\Diamond] \end{array}$$

Nous pouvons facilement voir que dans le cas  $n \neq \infty$ , les fonctions infimum et supremum utilisées dans la définition des  $n$ -modèles flous correspondent respectivement aux fonctions minimum et maximum, ce qui n'est pas le cas quand  $n = \infty$ . Effectivement, il se peut que la valeur de  $V(w, \Box A)$  (resp.  $V(w, \Diamond A)$ ) soit différente de  $R(w, w') \rightarrow V(w', A)$  (resp.  $\min(R(w, w'), V(w', A))$ ) quel que soit  $w'$ . Par exemple l'ensemble  $S = \{x \mid x > 0 \text{ et } x \in [0, 1]\}$  a 0 comme infimum mais  $0 \notin S$ . En fait, il existe une autre logique modale de Gödel obtenue par la restriction de la notion de validité aux modèles où chaque infimum (resp. supremum) est un minimum (resp. maximum). Cela signifie que pour chaque  $V(w, \Box A)$  (resp.  $V(w, \Diamond A)$ ), il existe un monde **témoin**  $w'$  tel que  $V(w, \Box A) = R(w, w') \rightarrow V(w', A)$  (resp.  $V(w, \Diamond A) = \min(R(w, w'), V(w', A))$ ). Cette logique est appelée la logique modale de Gödel avec témoins  $\mathbf{WGM}_\infty$  [78].

**Définition 7.1.2.** *Un  $w$ -modèle modal flou  $(W, R, V)$  est un  $\infty$ -modèle modal flou où pour toutes formules  $\Box A$  et  $\Diamond A$  et pour tout  $w \in W$ , on a  $V(w, \Box A) = R(w, w') \rightarrow V(w', A)$  et  $V(w, \Diamond A) = R(w, w'') * V(w'', A)$  pour des mondes  $w'$  et  $w''$  dans  $W$ .*

Une formule est valide dans  $\text{WGM}_\infty$  si et seulement si elle est valide dans tout  $w$ -modèle modal flou. Nous démontrons maintenant que les logiques  $\text{WGM}_\infty$  et  $\text{GM}_\infty$  sont différentes.

**Proposition 7.1.1.**  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  est valide dans  $\text{WGM}_\infty$ .

*Démonstration.* On fait une démonstration par l'absurde. On suppose que  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  n'est pas valide dans  $\text{WGM}_\infty$ . Soit  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un contre-modèle de  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$ . Alors, il existe un monde  $w \in W$  tel que  $V(w, \Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p) < 1$ . Ainsi, on a  $V(w, \Box \neg \neg p) > V(w, \neg \neg \Box p)$ . Rappelons que  $V(w, \neg \neg \Box p) = (V(w, \Box p) \rightarrow 0) \rightarrow 0$ . Étant donné que  $V(w, \neg \neg \Box p) < 1$ , on a  $V(w, \Box p) = 0$ . Donc, il existe  $w_0 \in W$  tel que  $R(w, w_0) \rightarrow V(w_0, p) = 0$  ( $V(w_0, p) = 0$ ). On a  $V(w, \Box \neg \neg p) = \min\{R(w, w') \rightarrow ((V(w', p) \rightarrow 0) \rightarrow 0)\} \geq 0$ . En utilisant  $R(w, w_0) \rightarrow ((V(w_0, p) \rightarrow 0) \rightarrow 0) = 0$ , on a  $V(w, \Box \neg \neg p) = 0$ . Comme  $V(w, \Box \neg \neg p) > V(w, \neg \neg \Box p)$ , on obtient une contradiction.  $\square$

**Proposition 7.1.2.**  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  n'est pas valide dans  $\text{GM}_\infty$ .

*Démonstration.* Un contre-modèle  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  de  $\Box \neg \neg p \supset \neg \neg \Box p$  dans  $\text{GM}_\infty$  a été proposée dans [28], avec  $W = \mathbb{N}$ , pour tout  $n, m \in W$ ,  $R(n, m) = 1$  et pour tout  $n \in W$ ,  $V(n, p) = \frac{1}{n+1}$ .  $\square$

**Théorème 7.1.1.**  $\text{GM}_\infty \subset \text{WGM}_\infty$ .

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence des deux propositions 7.1.1 et 7.1.2.  $\square$

Nous pouvons aisément démontrer que  $\text{IK} \subset \text{GM}_\infty$  en démontrant que tous les axiomes de  $\text{IK}$  sont valide dans  $\text{GM}_\infty$ . En fait, les logiques modales de Gödel présentées dans cette section satisfont la propriété suivante :

$$\text{IK} \subset \text{GM}_\infty \subset \text{WGM}_\infty \subset \dots \subset \text{GM}_i \subset \dots \subset \text{GM}_1 = \text{K}$$

Chacune des logiques modales de Gödel, excepté  $\text{GM}_\infty$ , satisfait la propriété des modèles finis et par conséquent elle est décidable [28, 57, 58, 78]. Concernant la logique  $\text{GM}_\infty$ , elle ne satisfait pas cette propriété, néanmoins, le fragment privé de  $\Box$  la satisfait [28].

Des calculs pour une variété de logiques modales floues défini sur des algèbres finies ont été proposés par Fitting [57, 58]. Le problème de ces calculs se situe dans l'intégration des valeurs de vérité au langage. Des calculs pour le fragment privé de  $\Diamond$  de  $\text{GM}_\infty$  ont été fournis par Metcalfe et Olivetti dans [98]. Ils utilisent principalement une structure multi-contextuelle introduite dans [7], appelée séquent relationnel. Cette structure peut être considérée comme une variante de celle d'hyperséquent plus adaptée au traitement des logiques modales floues.

Précisons qu'il existe une manière d'étendre ses logiques par des conditions sur les relations d'accessibilité [28]. Par exemple, un  $n$ -modèle modal flou  $(W, R, V)$  est réflexive si  $R(w, w) = 1$  pour tout  $w \in W$ ; il est transitive si  $R(w, w') \times R(w', w'') \leq R(w, w'')$  pour tout  $w, w', w'' \in W$ ; et il est symétrique si  $R(w, w') = R(w', w)$  pour tout  $w, w' \in W$ .



## 7.2 Logiques hybrides de Gödel

Dans cette partie, nous introduisons une famille de logiques hybrides floues obtenue à partir de la famille de logiques modales de Gödel. La syntaxe des formules est la même que celle de la logique IHL décrite au chapitre 6 :

$$A ::= p \mid a \mid \perp \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \supset A \mid \Box A \mid \Diamond A \mid a : A$$

À chaque logique modale de Gödel  $\text{GM}_n$ , nous associons une logique hybride appelée  $\text{GH}_n$ , pour  $n \in \overline{\mathbb{N}^*} = \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ . De même, à la logique  $\text{WGM}_\infty$ , nous associons une logique appelée  $\text{WGH}_\infty$ .

Nous définissons maintenant la sémantiques de ces logiques hybrides en utilisant les mêmes notions de modèles dans le cas des logiques modales de Gödel : la définition d'un  $\text{GH}_n$ -modèle (resp.  $\text{WGH}_\infty$ -modèle) est la même que celle de  $n$ -modèle modal flou ( $w$ -modèle modal flou).

Soit  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un modèle, nous définissons une  $\mathcal{M}$ -**assignation** comme étant une fonction qui assigne à chaque nominal un élément de  $W$ .

**Définition 7.2.1.** Soient  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation. L'extension de la valuation  $V$  via  $g$ , notée  $V_g$ , est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V_g(w, \perp) &= 0 \\ V_g(w, A \wedge B) &= \min\{V_g(w, A), V_g(w, B)\} \\ V_g(w, A \vee B) &= \max\{V_g(w, A), V_g(w, B)\} \\ V_g(w, A \supset B) &= V_g(w, A) \rightarrow V_g(w, B) \\ V_g(w, \Box A) &= \inf\{R(w, w') \rightarrow V_g(w', A) \mid w' \in W\} \\ V_g(w, \Diamond A) &= \sup\{R(w, w') * V_g(w', A) \mid w' \in W\} \\ V_g(w, a) &= \begin{cases} 1 & \text{si } g(a) = w \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ V_g(w, a : A) &= V_g(g(a), A) \end{aligned}$$

Une formule  $A$  est valide dans  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  si pour toute  $\mathcal{M}$ -assignation  $g$  et pour tout  $w \in W$ ,  $V_g(w, A) = 1$ .  $A$  est valide dans  $\text{GH}_n$  (resp.  $\text{WGH}_\infty$ ) si  $A$  est valide dans tout  $\text{GH}_n$ -modèle (resp.  $\text{WGH}_\infty$ -modèle). À partir de cette définition de la validité, il est clair que toute logique que nous venons de définir est une extension conservatrice de la logique modale de Gödel correspondante.

Des structures multi-contextuelles, telles que les hyperséquents et les séquents relationnels, se sont révélées très adaptées au traitement des logiques floues et en particulier la famille des logiques de Gödel [4, 5, 6]. Effectivement, la présence de plusieurs contextes permet de gérer les aspects multi-valués de ces logiques. De même, nous avons vu que la gestion des aspects modaux, en l'absence de labels, se fait à travers des structures multi-contextuelles. S'agissant des logiques modales floues, nous sommes face au problème de la gestion des aspects modaux ainsi que multi-valués. Devant la difficulté de pouvoir traiter ces deux types d'aspects uniquement via une structure multi-contextuelle, nous avons opté pour une solution médiane basée sur le compromis « logiques hybrides ». Ainsi, en la présence des nominaux et de l'opérateur de satisfaction, les aspects modaux peuvent être gérés sans avoir besoin d'utiliser une structure multi-contextuelle. Cependant, la structure que nous utilisons est multi-contextuelle afin de gérer les aspects multi-valués.

Dans ce qui suit, nous définissons une nouvelle structure qui peut être vue comme version enrichie de celle de séquent relationnel. En utilisant cette structure, nous introduisons un ensemble de règles d'inférence qui nous permet de fournir des procédure de décision avec génération de contre-modèles pour toutes nos logiques hybrides, excepté la version hybride de  $\text{GM}_\infty$ . Enfin, nous définissons un calcul des séquents pour la version hybride de  $\text{WGM}_\infty$  par l'ajout d'un axiome et des règles structurelles à notre ensemble de règles.

### 7.3 R-séquents et règles de preuve

Dans cette section, nous introduisons une structure multi-contextuelle, appelée R-séquent, et un ensemble de règles fortement correctes et fortement inversibles pour les logiques  $\text{GH}_n$ , avec  $n \neq \infty$ , ainsi que la logique  $\text{WGH}_\infty$ . Cet ensemble de règles est divisé en trois parties : la première partie, décrite en figure 7.1, contient les *règles logiques* permettant de décomposer les formules de la forme  $a : A \otimes B$ , pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$  ; la deuxième, décrite en figure 7.2, contient les *règles modales* qui agissent sur les formule de la forme  $a : \boxtimes A$ , pour  $\boxtimes = \diamond, \square$  ; et la troisième partie, décrite en figure 7.3, contient les *règles de satisfaction* qui agissent sur les formules de la forme  $a : c$ , pour  $a$  et  $c$  des nominaux. À partir de maintenant, quand nous écrivons  $\text{GH}_n$ , cela signifie toutes les versions finies des logiques hybrides de Gödel ( $n \neq \infty$ ).

$$\begin{array}{c}
\frac{W; [G \mid C \triangleleft a : A] \quad W; [G \mid C \triangleleft a : B]}{W; [G \mid C \triangleleft a : A \wedge B]} \quad [\wedge_R] \qquad \frac{W; [G \mid a : A \triangleleft C \mid a : B \triangleleft C]}{W; [G \mid a : A \wedge B \triangleleft C]} \quad [\wedge_L] \\
\frac{W; [G \mid a : A \triangleleft C] \quad W; [G \mid a : B \triangleleft C]}{W; [G \mid a : A \vee B \triangleleft C]} \quad [\vee_L] \qquad \frac{W; [G \mid C \triangleleft a : A \mid A \triangleleft a : B]}{W; [G \mid C \triangleleft a : A \vee B]} \quad [\vee_R] \\
\frac{W; [G \mid a : B < a : A] \quad W; [G \mid a : B < C]}{W; [G \mid a : A \supset B < C]} \quad [\supset_L^<] \\
\frac{W; [G \mid a : A \leq a : B \mid C < a : B] \quad W; [G \mid C < \top]}{W; [G \mid C < a : A \supset B]} \quad [\supset_R^<] \\
\frac{W; [G \mid \top \leq C \mid a : B < a : A] \quad W; [G \mid a : B \leq C]}{W; [G \mid a : A \supset B \leq C]} \quad [\supset_L^{\leq}] \\
\frac{W; [G \mid a : A \leq a : B \mid C \leq a : B]}{W; [G \mid C \leq a : A \supset B]} \quad [\supset_R^{\leq}]
\end{array}$$

FIG. 7.1 – Règles logiques pour  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$

Rappelons que la structure d'hyperséquent  $\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_k \vdash \Delta_k$  a été introduite comme une généralisation de la structure de séquent [4, 5]. Elle correspond à un multi-ensemble de séquents, appelés composantes. Nous nous intéressons ici à une variante de cette structure, appelée *séquent relationnel*, qui est mieux adaptée à la recherche de preuves dans les logiques de Gödel [6]. Dans des travaux récents, des calculs des séquents utilisant cette structure ainsi que celle d'hyperséquent pour le fragment privé de  $\diamond$  ont été définis dans [98]. La structure que

nous utilisons correspond à celle de séquent relationnel augmentée d'une nouvelle construction syntaxique, appelée *contexte témoin*.

**Définition 7.3.1** (R-séquent). *Un R-séquent est une structure de la forme suivante :*

$$W; [A_1 \triangleleft_1 B_1 \mid A_2 \triangleleft_2 B_2 \mid \cdots \mid A_k \triangleleft_k B_k]$$

où  $W$ , appelé contexte témoin, est un ensemble de paires de la forme  $(c, a : \boxtimes A)$  avec  $c, a \in \text{Nom}$  et  $\boxtimes \in \{\square, \diamond\}$ ; et pour  $i = 1, 2, \dots, k$ , le symbole  $\triangleleft_i$  est soit  $\leq$ , soit  $<$ , et  $A_i$  et  $B_i$  sont des états de satisfaction, à savoir des formules de la forme  $a : A$ , ou des constantes ( $\perp$  et  $\top$ ).

Nous définissons  $\text{Form}(\mathcal{S})$ , avec  $\mathcal{S}$  un R-séquent, comme l'ensemble des formules de  $\mathcal{S}$ . En outre, nous définissons  $V_g(A)$  par

$$V_g(A) = \begin{cases} V_g(g(a), B) & \text{si } A = a : B \\ 0 & \text{si } A = \perp \\ 1 & \text{si } A = \top \end{cases}$$

**Définition 7.3.2.** *Un R-séquent  $\mathcal{S} = W; [A_1 \triangleleft_1 B_1 \mid \cdots \mid A_k \triangleleft_k B_k]$  est valide dans  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  via la  $\mathcal{M}$ -assignation  $g$ , noté  $\mathcal{M}, g \models \mathcal{S}$ , si et seulement si si*

- pour tout  $(c, a : \square A) \in W$ ,  $V_g(g(a), \square A) = R(g(a), g(c)) \rightarrow V_g(g(c), A)$ ; et
- pour tout  $(c, a : \diamond A) \in W$ ,  $V_g(g(a), \diamond A) = R(g(a), g(c)) * V_g(g(c), A)$ ,

alors il existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que l'inégalité  $V_g(A_i) \triangleleft_i V_g(B_i)$  est vraie.

Un R-séquent  $\mathcal{S}$  est valide dans  $\mathcal{M} = (U, R, V)$ , noté  $\mathcal{M} \models \mathcal{S}$ , si pour toute  $\mathcal{M}$ -assignation  $g$ , on a  $\mathcal{M}, g \models \mathcal{S}$ .  $\mathcal{S}$  est valide dans  $\text{GH}_n$  (resp.  $\text{WGH}_\infty$ ), noté  $\text{GH}_n \models \mathcal{S}$  (resp.  $\text{WGH}_\infty \models \mathcal{S}$ ), si  $\mathcal{S}$  est valide dans tout  $\text{GH}_n$ -modèle (resp.  $\text{WGH}_\infty$ -modèle).

**Proposition 7.3.1.** *Une formule  $A$  est valide dans un modèle  $\mathcal{M}$  ssi  $a : A$  est valide dans  $\mathcal{M}$  avec  $a \notin \text{Nom}(A)$ .*

*Démonstration.* Partie  $\Rightarrow$ . La démonstration est directement obtenue de la définition de la validité. Partie  $\Leftarrow$ . On suppose que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $A$ . Ainsi, en assignant à  $a$  le monde dans lequel la formule  $A$  n'est pas vraie, on déduit que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $a : A$ .  $\square$

À partir de la proposition 7.3.1 et la définition de la validité d'un R-séquent dans  $\text{GH}_n$  (resp.  $\text{WGH}_\infty$ ), on déduit qu'une formule  $A$  est valide dans  $\text{GH}_n$  (resp.  $\text{WGH}_\infty$ ) si et seulement si  $\text{GH}_n \models \emptyset; [\top \leq a : A]$  (resp.  $\text{WGH}_\infty \models \emptyset; [\top \leq a : A]$ ) où  $a \notin \text{Nom}(A)$ .

Rappelons qu'une règle est *correcte* si la validité de ses prémisses implique la validité de sa conclusion. Elle est *fortement correcte* si, pour tout modèle  $\mathcal{M}$ , si  $\mathcal{M}$  est un modèle de toutes les prémisses, alors il est également un modèle de la conclusion. En outre, elle est *inversible* si la non validité d'au moins une prémisses implique la non validité de la conclusion. Elle est *fortement inversible* si, pour tout modèle  $\mathcal{M}$ , si  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle d'au moins une prémisses, alors  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de la conclusion. Nous pouvons observer que la forte correction (resp. la forte inversibilité) implique la correction (resp. l'inversibilité).

**Proposition 7.3.2.** *Soient  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation. Pour tous deux nominaux  $a$  et  $c$ ,  $V_g(g(a), \diamond c) = R(g(a), g(c))$ .*

$$\begin{array}{c}
\frac{W; [G \mid a : \Box A < C \mid b : A < a : \Diamond b] \quad W; [G \mid a : \Box A < C \mid b : A < C]}{W; [G \mid a : \Box A < C]} \quad [\Box_L^<(1)] \\
\frac{W; [G \mid a : \Box A \leq C \mid \top \leq C \mid b : A < a : \Diamond b] \quad W; [G \mid a : \Box A \leq C \mid b : A \leq C]}{W; [G \mid a : \Box A \leq C]} \quad [\Box_L^{\leq}(1)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid C < c : A] \quad W; [G \mid C < \top]}{W; [G \mid C < a : \Box A]} \quad [\Box_{R1}^<(2)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid C \leq c : A]}{W; [G \mid C \leq a : \Box A]} \quad [\Box_{R1}^{\leq}(2)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid C < c : A] \quad W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid C < \top]}{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid C < a : \Box A]} \quad [\Box_{R2}^<(2)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : B \mid C \leq c : A]}{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid C \leq a : \Box A]} \quad [\Box_{R2}^{\leq}(2)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid a : \Box A < c : A] \quad W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Box A < \top]}{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G]} \quad [W_{\Box}^1] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid c : A < a : \Diamond c] \quad W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid c : A < a : \Box A]}{W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G]} \quad [W_{\Box}^2] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G \mid a : \Diamond c \triangleleft C \mid c : A \triangleleft C]}{W; [G \mid a : \Diamond A \triangleleft C]} \quad [\Diamond_{L1}(3)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G \mid a : \Diamond c \triangleleft C \mid c : A \triangleleft C]}{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G \mid a : \Diamond A \triangleleft C]} \quad [\Diamond_{L2}] \\
\frac{W; [G \mid C \triangleleft a : \Diamond A \mid C \triangleleft a : \Diamond b] \quad W; [G \mid C \triangleleft a : \Diamond A \mid C \triangleleft b : A]}{W; [G \mid C \triangleleft a : \Diamond A]} \quad [\Diamond_{R}(4)] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G \mid a : \Diamond A < a : \Diamond c] \quad W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G \mid a : \Diamond A < c : A]}{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G]} \quad [W_{\Diamond}^1] \\
\frac{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G \mid a : \Diamond c < a : \Diamond A \mid c : A < a : \Diamond A]}{W \cup \{(c, a : \Diamond A)\}; [G]} \quad [W_{\Diamond}^2]
\end{array}$$

(1)  $a : \Diamond b \in \text{Form}(W; [G \mid a : \Box A \triangleleft C])$ .

(2)  $c \notin \text{Nom}(W; [G \mid C \triangleleft a : \Box A])$  et il n'existe pas de pair dans  $W$  contenant  $a : \Box A$ .

(3)  $c \notin \text{Nom}(W; [G \mid a : \Diamond A \triangleleft C])$  et  $A \notin \text{Nom}$ .

(4)  $a : \Diamond b \in \text{Form}(G \mid C \triangleleft a : \Diamond A)$  et  $B \notin \text{Nom}$ .

FIG. 7.2 – Règles modales pour  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$

*Démonstration.* On a  $V_g(g(a), \Diamond c) = \sup\{R(g(a), w') * V_g(w', c)\}$ . Étant donné que  $V_g(w', c) > 0$  si et seulement si  $g(c) = w'$ , on déduit que  $V_g(g(a), \Diamond c) = R(g(a), g(c))$ .  $\square$

**Proposition 7.3.3.** Soient  $A$  une formule,  $a$  et  $b$  deux nominaux,  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation. Si  $g(a) = g(b)$  alors, pour tout  $w \in W$ ,  $V_g(w, A) = V_g(w, A[a/b])$ .

$\frac{W; [G \mid b : A \triangleleft C]}{W; [G \mid a : b : A \triangleleft C]} \quad [ :_L ]$	$\frac{W; [G \mid A \triangleleft b : B]}{W; [G \mid A \triangleleft a : b : B]} \quad [ :_R ]$	$\frac{W; [G \mid \top \triangleleft C]}{W; [G \mid a : a \triangleleft C]} \quad [ id_L ]$
$\frac{W; [G \mid A \triangleleft \top]}{W; [G \mid A \triangleleft a : a]} \quad [ id_R ]$	$\frac{W; [G \mid \perp \triangleleft C]}{W; [G \mid a : \perp \triangleleft C]} \quad [ \perp_L ]$	$\frac{W; [G \mid A \triangleleft \perp]}{W; [G \mid A \triangleleft a : \perp]} \quad [ \perp_R ]$
$\frac{W; [G \mid \top \triangleleft C]}{W; [G \mid a : \top \triangleleft C]} \quad [ \top_L ] \qquad \frac{W; [G \mid A \triangleleft \top]}{W; [G \mid A \triangleleft a : \top]} \quad [ \top_R ]$		
$\frac{(W; [G \mid \top < C])[a/b] \quad W; [G \mid \perp < C \mid \top \leq a : b]}{W; [G \mid a : b < C]} \quad [ sub_L^1 ]$		
$\frac{(W; [G \mid A < \top])[a/b] \quad W; [G \mid \top \leq a : b]}{W; [G \mid A < a : b]} \quad [ sub_R^1 ]$		
$\frac{(W; [G \mid \top \leq C])[a/b]}{W; [G \mid a : b \leq C]} \quad [ sub_L^2 ] \qquad \frac{W; [G \mid A \leq \perp \mid \top \leq a : b]}{W; [G \mid A \leq a : b]} \quad [ sub_R^2(*) ]$		
<p>(*) <math>A \neq \top</math>.</p>		

FIG. 7.3 – Règles de satisfaction pour  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$ 

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . □

**Théorème 7.3.1.** *Toutes les règles logiques, modales et de satisfaction pour  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$  sont fortement correctes.*

*Démonstration.* On sait que les  $\text{GH}_n$ -modèles et  $\text{WGH}_\infty$ -modèles sont des modèles dans lesquels l'infimum et le supremum correspondent respectivement au minimum et au maximum. En utilisant cette propriété, nous traitons les logiques  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$  sans les distinguer. Soit  $L \in \{\text{GH}_n \mid n \in \overline{\mathbb{N}}^* \text{ et } n \neq \infty\} \cup \{\text{WGH}_\infty\}$ . Nous développons ici les cas de  $[\sup_L^<]$ ,  $[\sup_R^<]$ ,  $[\inf_L^<]$ ,  $[\inf_R^<]$ ,  $[W_\square^1]$ ,  $[W_\square^2]$  et  $[sub_L^1]$ , les autres cas étant similaires.

- Cas  $[\sup_L^<]$ . Soient  $\mathcal{S} = W; [G \mid a : A \supset B < C]$  un R-séquent,  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$  et  $V_g(g(a), A \supset B) \geq V_g(C)$ . Si  $V_g(g(a), A) \leq V_g(g(a), B)$  alors  $\mathcal{M}, g \not\models a : B < a : A$  et on obtient  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid a : B < a : A]$ . Sinon, on a  $V_g(g(a), A) > V_g(g(a), B)$ . Donc,  $V_g(g(a), A \supset B) = V_g(g(a), B) \vee V_g(g(a), A) \geq V_g(C)$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{M}, g \not\models a : B < C$  et on déduit que  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid a : B < C]$ .

- Cas  $[\inf_R^<]$ . Soient  $\mathcal{S} = W; [G \mid C \leq a : A \supset B]$  un R-séquent,  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$  et  $V_g(C) > V_g(g(a), A \supset B)$ . Si  $V_g(g(a), A) \leq V_g(g(a), B)$  alors  $V_g(g(a), A \supset B) = 1 < V_g(C)$  et on obtient une contradiction. Donc, on a  $V_g(g(a), A) > V_g(g(a), B)$  et  $V_g(C) > V_g(g(a), B) = V_g(g(a), A \supset B)$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{M}, g \not\models a : A \leq a : B \mid C \leq a : B$  et on déduit que  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid a : A \leq a : B \mid C \leq a : B]$ .

- Cas  $[\Box_L^<]$ . Soient  $\mathcal{S} = W; [G \mid a : \Box A < C]$  un R-séquent tel que  $a : \Diamond b \in \text{Form}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$  et  $V_g(g(a), \Box A) \geq V_g(C)$ . On a  $V_g(g(a), \Box A) = \min\{R(g(a), w') \rightarrow V_g(w', A) \mid w' \in U\}$ . En utilisant la proposition 7.3.2, on a  $V_g(g(a), \Diamond b) = R(g(a), g(b))$ . Donc,  $V_g(g(a), \Box A) \leq R(g(a), g(b)) \rightarrow V_g(g(b), A) = V_g(g(a), \Diamond b \supset b : A)$  et  $V_g(g(a), \Diamond b \supset b : A) \geq V_g(C)$ . On obtient ainsi  $\mathcal{M}, g \not\models a : \Diamond b \supset (b : A) < C$ . En utilisant les mêmes arguments du cas  $[\supset_L^<]$ , on déduit que  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid a : \Box A < C \mid b : A < a : \Diamond b]$  ou  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid a : \Box A < C \mid b : A < C]$ .

- Case  $[\Box_{R1}^{\leq}]$ . Soient  $\mathcal{S} = W; [G \mid C \leq a : \Box A]$  un R-séquent,  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$  et  $V_g(C) > V_g(g(a), \Box A)$ . On a  $V_g(C) > \min\{R(g(b), w') \rightarrow V_g(w', B) \mid w' \in U\}$ . Donc, il existe  $w' \in U$  tel que  $V_g(g(a), \Box A) = R(g(b), w') \rightarrow V_g(w', B) < V_g(C)$ . Soit  $c$  un nouveau nominal ( $c \notin \text{Nom}(\mathcal{S})$ ). Nous définissons la nouvelle  $\mathcal{M}$ -assignation  $g'$  comme suit :

$$g'(n) = \begin{cases} w' & \text{si } n = c \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, on a  $\mathcal{M}, g' \not\models W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid C \leq a : \Diamond c \supset (c : A)]$ . En utilisant les mêmes arguments du cas  $[\supset_R^{\leq}]$ , on déduit que  $\mathcal{M}, g' \not\models W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid C \leq c : A]$ .

- Case  $[\Box_{R2}^{\leq}]$ . Soient  $\mathcal{S} = W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid C \leq a : \Box A]$  un R-séquent,  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G]$  et  $V_g(C) > V_g(g(a), \Box A)$ . Ainsi, on a  $V_g(C) > R(g(a), g(c)) \rightarrow V_g(g(c), A) = V_g(g(a), \Diamond c \supset c : A)$ . Donc,  $\mathcal{M}, g \not\models W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid C \leq a : \Diamond c \supset (c : A)]$ . En utilisant les mêmes arguments du cas  $[\supset_R^{\leq}]$ , on déduit que  $\mathcal{M}, g \not\models W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid C \leq c : A]$ .

- Cas  $[W_{\Box}^1]$  et  $[W_{\Box}^2]$ . La forte correction de ces deux règles vient du fait que si  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  via  $g$  satisfait le contexte témoin, alors pour toute pair  $(c, a : \Box A)$  dans ce contexte, on a  $V_g(a : \Box A) = V_g(a : \Diamond c \supset c : A)$ .

- Cas  $[\text{sub}_L^1]$ . Soient  $\mathcal{S} = W; [G \mid a : b < C]$  un R-séquent,  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$  et  $V_g(g(a), b) \geq V_g(C)$ . Si  $g(a) = g(b)$  alors  $V_g(g(a), b) = 1 \geq V_g(C)$  et, en utilisant la proposition 7.3.3, on a  $\mathcal{M}, g \not\models (W; [G \mid \top < C])[a/b]$ . Sinon, à partir de  $g(a) \neq g(b)$ , on a  $1 > V_g(g(a), b) = 0$  et  $0 \geq V_g(C)$ . Ainsi, on déduit que  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid \perp < C \mid \top \leq a : b]$ .  $\square$

**Théorème 7.3.2.** *Toutes les règles logiques, modales et de satisfaction pour  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$  sont fortement inversibles.*

*Démonstration.* Pour les mêmes raisons que dans la démonstration du théorème 7.3.1, Nous traitons  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$  sans distinction. Soit  $L \in \{\text{GH}_n \mid n \in \bar{\mathbb{N}}^* \text{ et } n \neq \infty\} \cup \{\text{WGH}_\infty\}$ . Nous développons les cas de  $[\Box_{R1}^{\leq}]$  et  $[\text{sub}_L^1]$ , les autres cas étant similaires.

- Cas  $[\Box_{R1}^{\leq}]$ . Soient  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models W \cup \{(c, a : \Box A)\}; [G \mid a : \Diamond c \leq c : A \mid C \leq c : A]$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$ ,  $V_g(g(a), \Diamond c) > V_g(g(c), A)$  et  $V_g(C) > V_g(g(c), A)$ . On a  $V_g(g(a), \Box A) = V(g(a), \Diamond c \supset (c : A))$ . Étant donné que  $V_g(g(a), \Diamond c) > V_g(g(c), A)$ , on a  $V(g(a), \Diamond c \supset (c : A)) = V_g(g(c), A)$  et  $V_g(C) > V(g(a), \Box A)$ . Ainsi, on déduit que  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid C \leq a : \Box A]$ .

- Cas  $[sub_L^1]$ .

Sous-cas de la prémisse gauche. Soient  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models (W; [G \mid \top < C])[a/b]$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models (W; [G])[a/b]$ . On définit une nouvelle  $\mathcal{M}$ -assignation  $g'$  comme suit :

$$g'(n) = \begin{cases} g(b) & \text{si } n = a \\ g(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut facilement démontrer que  $\mathcal{M}, g' \not\models W; [G]$  et  $V_g'(g'(a), b) = 1$ . Par conséquent, on obtient  $\mathcal{M}, g' \not\models W; [G \mid a : b < C]$ .

Sous-cas de la prémisse droite. Soient  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $L$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid \perp < C \mid \top \leq a : b]$ . Alors on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G]$ ,  $V_g(C) = 0$  et  $1 > V_g(g(a), b)$ . En utilisant  $1 > V_g(g(a), b)$ , on obtient  $g(a) \neq g(b)$  et donc  $V_g(g(a), b) = 0$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{M}, g \not\models W; [G \mid a : b < C]$ .  $\square$

## 7.4 Décidabilité et propriété des modèles finis

Dans cette section, nous définissons une procédure de décision avec génération de contre-modèles pour chacune des logiques  $\text{GH}_n$  et  $\text{WGH}_\infty$ . Notre approche est fondée sur les deux étapes suivantes :

1. en utilisant nos règles, on réduit tout r-séquent en un ensemble de R-séquents moins complexes appelés *R-séquents irréductibles*;
2. on décide les R-séquents irréductibles via une procédure spécifique.

Le principal problème réside dans l'absence de terminaison dans la première étape. Afin de le résoudre, nous introduisons la notion de *dérivation normale* où le nombre des applications des règles problématiques est fini. La procédure de décision pour les R-séquents irréductibles est obtenue en utilisant une technique développée pour les logiques de Gödel dans [92, 62]. Elle repose sur la construction d'un graphe sémantique, appelé *graphe bicolore*, et la validité est caractérisée par la présence de chaînes particulières dans de tels graphes.

### 7.4.1 Terminaison et R-séquents irréductibles

Il est facile de voir que l'application de nos règles à un R-séquent ne termine pas toujours. Cela vient principalement des règles  $[\Box_L^<]$ ,  $[\Box_L^{\leq}]$ ,  $[\Diamond_R]$ ,  $[W_\Box^1]$ ,  $[W_\Box^2]$ ,  $[W_\Diamond^1]$  et  $[W_\Diamond^2]$  où dans chacune de ces dernières les prémisses sont plus complexes que la conclusion. Nous appelons ces règles les *règles de contraction*. Nous définissons maintenant une dérivation particulière dans laquelle nous supprimons les applications qui ne sont pas nécessaires des règles de contraction.

**Définition 7.4.1.** *Une dérivation est dite normale si chacune de ses branches satisfait les conditions suivantes :*

- pour chaque pair de formules principales  $(a : \Box A, a : \Diamond b)$  et chaque composante  $a : \Box A \triangleleft C$ , la règle  $[\Box_L^<]$  est appliquée une fois seulement;
- pour chaque pair de formules principales  $(a : \Diamond A, a : \Diamond b)$  et chaque composante  $C \triangleleft a : \Diamond A$ , la règle  $[\Diamond_R]$  est appliquée une fois seulement;
- pour chaque pair  $(c, a : \Box A)$  dans le contexte témoin, la règle  $[W_\Box^1]$  (resp.  $[W_\Box^2]$ ) est appliquée une fois seulement;

- pour chaque pair  $(c, a : \diamond A)$  dans le contexte témoin, la règle  $[W_{\diamond}^1]$  (resp.  $[W_{\diamond}^2]$ ) est appliquée une fois seulement ;
- une branche est finie uniquement dans le cas où les précédentes conditions sont satisfaites et aucune règle différente de celles de contraction ne peut être appliquée.

Dans l'optique de démontrer que les dérivations normales sont finies, nous introduisons la notion de  $N$ -sous-formules où  $N$  est un ensemble de nominaux.

**Définition 7.4.2.** Soient  $N$  un ensemble fini de nominaux et  $a : A$  une formule. Les  $N$ -sous-formules de  $a : A$  sont définies de la manière suivante :

- $a : A$  est une  $N$ -sous-formule de  $a : A$  ;
- si  $b : B$  est une  $N$ -sous-formule de  $a : A$  alors  $(b : B)[c_1/c_2]$  l'est aussi, pour  $c_1 \in \text{Nom}$  et  $c_2 \in N$  ;
- si  $b : B \otimes C$  est une  $N$ -sous-formule de  $a : A$  alors  $b : B$  et  $b : C$  le sont aussi, pour  $\otimes = \wedge, \vee, \supset$  ;
- si  $b : \boxtimes B$  est une  $N$ -sous-formule de  $a : A$  alors  $c : B$  l'est aussi, pour  $c \in \text{Nom}$  et  $\boxtimes = \square, \diamond$ .

**Proposition 7.4.1.** Si  $b : B$  est une  $N$ -sous-formule de  $a : A$ , alors la formule  $B$  est obtenue à partir d'une sous-formule de  $a : A$  en substituant certains de ses nominaux, éventuellement aucun, par des nominaux dans  $N$ .

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $A$ . □

**Théorème 7.4.1.** Soient  $\mathcal{S}$  un R-séquent,  $N = \text{Nom}(\mathcal{S})$  et  $\mathcal{D}$  une dérivation de  $\mathcal{S}$ . Toute formule dans  $\mathcal{D}$  est soit une  $N$ -sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$ , soit une formule de la forme  $a : \diamond c$ , soit une constante.

*Démonstration.* Par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ . □

**Proposition 7.4.2.** Soient  $\mathcal{S}$  un R-séquent et  $\mathcal{D}$  une dérivation normale de  $\mathcal{S}$ . L'ensemble des formules de la forme  $a : \diamond c$  dans  $\mathcal{D}$  est fini.

*Démonstration.* On commence par démontrer que pour tout nominal  $a$ , l'ensemble des formules de la forme  $a : \diamond c$  dans  $\mathcal{D}$  est fini. On a pour tout  $a : \diamond c$  dans  $\mathcal{D}$ ,  $c \in N$  ( $N = \text{Nom}(\mathcal{S})$ ) ou  $c$  est introduit par une application de  $[\square_{R1}^<]$ ,  $[\square_{R1}^{\leq}]$  ou  $[\diamond_{L1}]$  avec une formule principale  $a : \boxtimes A$  ( $\boxtimes = \square$  ou  $\diamond$ ). De la définition des dérivations normales, chaque formule  $a : \boxtimes A$  introduit au maximum un seul nouveau nominal. En utilisant la proposition 7.4.1 et le théorème 7.4.1,  $\boxtimes A$  est obtenue à partir d'une sous-formule d'une formule de  $\mathcal{S}$  en substituant certains nominaux par des éléments de  $N$ . Étant donné que  $N$  ainsi que l'ensemble des sous-formules des formules de  $\mathcal{S}$  sont finis, on déduit que pour tout nominal  $a$ , l'ensemble des formules de la forme  $a : \diamond c$  dans  $\mathcal{D}$  est fini.

Il est possible de démontrer par induction sur la valeur de  $k = \max\{\text{nest}(a : A) \mid a : A \in \text{Form}(\mathcal{S})\}$  que pour chaque R-séquent dans  $\mathcal{D}$ , il n'existe pas de chaîne de la forme  $a : \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, \dots, a_{n-1} : \diamond a_n$  avec  $a_1, \dots, a_n \notin N$  et  $n > k$ . Ainsi, on déduit qu'il n'y a pas de chaîne  $a_0 : \diamond a_1, a_1 : \diamond a_2, \dots, a_{n-1} : \diamond a_n$  où  $n > \text{nest}(\mathcal{S}) \times \#N$ , et pour  $i, j = 0, \dots, n$ ,  $a_i \neq a_j$ . Donc, l'ensemble des formules de la forme  $a : \diamond c$  dans  $\mathcal{D}$  est fini. Effectivement, les formules de la forme  $a : \diamond c$  dans tout R-séquent dans  $\mathcal{D}$  forment un graphe où les nœuds et les arcs sont respectivement les nominaux et les formules de la forme  $a : \diamond c$  dans ce R-séquent. Dans ce graphe, le nombre de successeurs de tout nœud est borné par un nombre  $n$ . En outre,



toute chaîne de nœuds distincts est de longueur plus petite que  $k = \text{nest}(\mathcal{S}) \times \#N$ . De tels graphes ont un nombre de nœuds plus petit que  $\frac{n^{k+1}-1}{n-1}$  (le nombre de nœud d'un arbre  $n$ -aire complet de profondeur  $k$ ).  $\square$

**Théorème 7.4.2.** *Toutes les dérivations normales sont finies.*

*Démonstration.* En utilisant la proposition 7.4.2 et les condition associées à l'application des règles de contraction, on déduit que le nombre des applications des règles modales dans une dérivation normale est fini. En outre, dans chacune des règles logiques et de satisfaction, la conclusion est plus complexe que les prémisses. Soit  $\alpha$  une mesure de complexité définie par :

- $\alpha(p) = 1$  où  $p \in \mathbf{Var} \cup \mathbf{Nom} \cup \{\perp, \top\}$  ;
- $\alpha(A \otimes B) = \alpha(A) + \alpha(B) + 1$  où  $\otimes \in \{\wedge, \vee, \supset\}$  ;
- $\alpha(\boxtimes A) = \alpha(A) + 1$  où  $\boxtimes \in \{\square, \diamond\}$  ;
- $\alpha(a : A) = 1 + \alpha(A)$ .

À partir de  $\alpha$ , on définit une mesure de complexité sur les composantes  $\beta$  :

$$\beta(A \triangleleft C) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \equiv \top, \triangleleft = \leq \text{ et } C \equiv a : b \\ \alpha(A) + \alpha(B) & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit aussi une relation d'ordre sur les composante par  $C_1 > C_2$  si  $\beta(C_1) > \beta(C_2)$ . Cette relation est bien fondée. On définit maintenant une relation d'ordre sur les multi-ensembles de composantes :  $M_1 >_m M_2$  si  $M_2$  est obtenu à partir de  $M_1$  par le remplacement d'une ou plusieurs composantes avec un nombre fini de composantes de sorte que si la composante  $C_2$  fait partie des composantes qui remplacent  $C_2$ , alors  $\beta(C_1) > \beta(C_2)$ . Étant donné que la relation d'ordre sur les composantes est bien fondée,  $>_m$  est également bien fondée [40]. En utilisant la relation  $>_m$ , dans chacune des règles logiques et de satisfaction, la conclusion est plus complexe que les prémisses.  $\square$

**Définition 7.4.3.** *Un R-séquent irréductible est un R-séquent étiquetant une feuille d'une dérivation normale.*

**Proposition 7.4.3.** *Dans tout R-séquent irréductible, toute composante est d'une des formes suivantes :*

- $a : \square A \triangleleft b : \diamond B$  où  $B \notin \mathbf{Nom}$  ;
- $a : \square A \triangleleft b : p$  où  $p \in \mathbf{Prop}$  ;
- $a : \square A \triangleleft C$  où  $C \in \{\perp, \top\}$  ;
- $a : p \triangleleft b : \diamond A$  où  $p \in \mathbf{Prop}$  ;
- $C \triangleleft \diamond A$  où  $C \in \{\perp, \top\}$  ;
- $C_1 \triangleleft C_2$  où pour  $i = 1, 2$ ,  $C_i \in \{\perp, \top\}$ ,  $C_i \equiv a : p$  avec  $p \in \mathbf{Prop}$ , ou  $C_i \equiv a : \diamond b$  avec  $a, b \in \mathbf{Nom}$  ;
- $\top \leq a : b$  où  $a, b \in \mathbf{Nom}$ .

*Démonstration.* Il y a toujours une règle qui peut être appliquée à un R-séquent contenant une composante qui n'est pas des précédentes formes.  $\square$

## 7.4.2 Procédure de décision pour les R-séquents irréductibles

Nous venons de démontrer que toute dérivation normale est finie et ses feuilles sont étiquetées par des R-séquents irréductibles. Par conséquent, à partir de la forte correction et inversibilité de nos règles, si nous possédons une procédure de décision pour les R-séquents

irréductibles, alors nous obtenons une procédure pour les R-séquents.

Décrivons maintenant certains concepts qui ont été développés pour les logiques de Gödel [92].

**Définition 7.4.4.** *Un graphe bicolore est un graphe fini orienté avec deux types flèches, celles vertes représentées par  $\rightarrow$  et celles rouges représentées par  $\Rightarrow$ .*

Nous utilisons  $\rightarrow$  et  $\Rightarrow$  pour dénoter les relations correspondantes dans le graphe. Par exemple  $\rightarrow\Rightarrow$  correspond à la composition et  $u\rightarrow\Rightarrow w$  signifie qu'il existe un chemin  $u\rightarrow v\Rightarrow w$  dans le graphe. La relation  $\rightarrow^*$  est la clôture réflexive et transitive de  $\rightarrow$ . De plus,  $\rightarrow + \Rightarrow$  correspond à l'union.

**Définition 7.4.5.** *Soit  $\mathcal{G}$  un graphe bicolore, un  $\Rightarrow$ -cycle de  $\mathcal{G}$  est une chaîne de la forme  $u(\rightarrow + \Rightarrow)^* \Rightarrow u$  et une  $k$ -chaîne de  $\mathcal{G}$  est une chaîne de la forme  $(\rightarrow^* \Rightarrow)^k$ .*

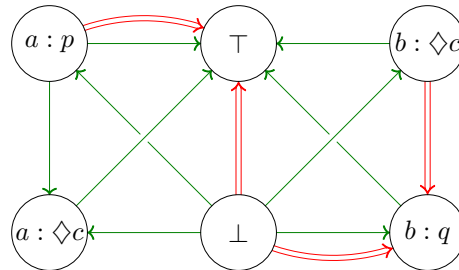
À partir de ces notions, le point clé consiste à associer à tout R-séquent irréductible un graphe bicolore et lier sa validité à l'existence de  $\Rightarrow$ -cycles ou  $k$ -chaînes.

**Définition 7.4.6.** *Soit  $\mathcal{S} = W; [Cp_1 \mid Cp_2 \mid \dots \mid Cp_k]$  un R-séquent irréductible, le graphe bicolore  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  associé à  $\mathcal{S}$  est construit comme suit :*

- L'ensemble des nœuds  $\mathcal{N}$  est l'union des ensembles suivants :
  - $\{a : p \mid p \in \text{Prop et } a : p \text{ est une formule dans } \mathcal{S}\}$
  - $\{a : \diamond b \mid b \in \text{Nom et } a : \diamond b \text{ est une formule dans } \mathcal{S}\}$
  - $\{\perp, \top\}$
- L'ensemble des flèches  $\mathcal{A}$  est l'union de l'ensemble  $\mathcal{B}$  et les ensembles  $\mathcal{A}_{i=1,\dots,k}$  définis comme suit :
  - $\mathcal{B} = \{\perp \rightarrow n \mid n \in \mathcal{N} \text{ et } n \neq \top\} \cup \{n \rightarrow \top \mid n \in \mathcal{N} \text{ et } n \neq \perp\} \cup \{\perp \Rightarrow \top\}$
  - $\mathcal{A}_i$  est obtenu à partir de la composante  $Cp_i$  :
    - si  $Cp_i = a : \Box A \triangleleft b : \diamond B$  tel que  $B \notin \text{Nom}$  alors  $\mathcal{A}_i = \emptyset$ ;
    - sinon si  $Cp_i = \top \triangleleft a : b$  alors  $\mathcal{A}_i = \emptyset$ ;
    - sinon si  $Cp_i = a : \Box A < C$  alors  $\mathcal{A}_i = \emptyset$ ;
    - sinon si  $Cp_i = C < a : \diamond A$  alors  $\mathcal{A}_i = \emptyset$ ;
    - sinon si  $Cp_i = a : \Box A \leq C$  ( $C \in \mathcal{N}$ ) alors  $\mathcal{A}_i = \{C \Rightarrow \top\}$ ;
    - sinon si  $Cp_i = C \leq a : \diamond A$  tel que  $A \notin \text{Nom}$  ( $C \in \mathcal{N}$ ) alors  $\mathcal{A}_i = \{\perp \Rightarrow C\}$ ;
    - sinon si  $Cp_i = C_1 \triangleleft C_2$  ( $C_1, C_2 \in \mathcal{N}$ ) alors si  $\triangleleft = \leq$  alors  $\mathcal{A}_i = \{C_2 \Rightarrow C_1\}$ ; sinon  $\mathcal{A}_i = \{C_2 \rightarrow C_1\}$ .

Illustrons cette construction avec le R-séquent suivant :

$\emptyset; [a : \Box(p \wedge q) \leq a : p \mid a : \diamond c < a : p \mid b : q \leq b : \diamond c \mid b : q \leq a : \diamond(p \wedge q)] :$



**Proposition 7.4.4.** *Soient  $\mathcal{S}$  un R-séquent irréductible et  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  son graphe bicolore associé. Si  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$  via la  $\mathcal{M}$ -assignation  $g$  et  $\mathcal{CH} = C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \Rightarrow C_{k+1}$  est une chaîne dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ , alors  $V_g(C_1) \leq \dots \leq V_g(C_k) < V_g(C_{k+1})$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $C_i \rightarrow C_{i+1}$  dans  $\mathcal{CH}$ , on a soit  $C_{i+1} < C_i$  est une composante de  $\mathcal{S}$ , soit  $C_{i+1} = \top$ , soit  $C_i = \perp$ . Ainsi, étant donné que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$  via  $g$ , on déduit que pour tout  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $V_g(C_i) \leq V_g(C_{i+1})$ .

En outre, vu que la flèche  $C_k \Rightarrow C_{k+1}$  est dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ , alors on a

- soit  $C_{k+1} = \top$  et  $a : \Box A \leq C_k$  est une composante de  $\mathcal{S}$ ,
- soit  $C_k = \perp$  et  $C_{k+1} \leq a : \Diamond A$  est une composante de  $\mathcal{S}$ ,
- soit  $C_k = \perp$  et  $C_{k+1} = \top$ ,
- soit  $C_{k+1} \leq C_k$  est une composante de  $\mathcal{S}$ .

Par conséquent, étant donné que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$  via  $g$ , on a  $V_g(C_k) < V_g(C_{k+1})$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{G}$  un graphe bicolore, une **bi-hauteur**  $h$  est une fonction  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tous  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{G}$ , si  $u \rightarrow v \in \mathcal{G}$  alors  $h(u) \leq h(v)$  et si  $u \Rightarrow v \in \mathcal{G}$  alors  $h(u) < h(v)$ . La bi-hauteur peut être utilisée dans la génération de contre-modèles en se basant sur la propriété suivante : si un graphe bicolore ne contient pas de  $\Rightarrow$ -cycle (resp.  $k$ -chaîne), alors il existe une bi-hauteur  $h$  (resp. qui satisfait  $h(v) < k$  pour tout nœud  $v$ ). En outre, on peut décider si un graphe contient un  $\Rightarrow$ -cycle et aussi calculer une bi-hauteur en temps linéaire (pour plus de détails voir [92]).

**Théorème 7.4.3.** *Un  $R$ -séquent irréductible  $\mathcal{S}$  a un contre-modèle dans  $\mathbf{GH}_n$  si et seulement si son graphe bicolore  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  ne contient pas de  $(n+1)$ -chaîne.*

*Démonstration.* Partie  $\Rightarrow$ . Soient  $\mathcal{M} = (U, R, V)$  un  $\mathbf{GH}_n$ -modèle et  $g$  une  $\mathcal{M}$ -assignation tels que  $\mathcal{M}, g \not\models \mathcal{S}$ . On suppose qu'il existe une chaîne de la forme  $(\rightarrow^* \Rightarrow)^{n+1}$  dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  :  $C_0 \rightarrow^* \Rightarrow C_1 \rightarrow^* \Rightarrow C_2 \rightarrow^* \Rightarrow \dots \rightarrow^* \Rightarrow C_n \rightarrow^* \Rightarrow C_{n+1}$ . Donc, en utilisant la proposition 7.4.4, il existe une séquence strictement croissante de  $n+2$  éléments dans l'ensemble des valeurs de vérité. Comme cet ensemble ne contient que  $n+1$  éléments, on obtient une contradiction.

Partie  $\Leftarrow$ . Soit  $\mathcal{D}$  la dérivation normale contenant  $\mathcal{S} = W; [Cp_1 \mid \dots \mid Cp_k]$ . On suppose que  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  ne contient pas de chaîne de la forme  $(\rightarrow^* \Rightarrow)^{n+1}$ . Alors il existe une bi-hauteur  $h : \mathcal{G}_{\mathcal{S}} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ . Soit  $h'$  la fonction de  $\{a : p \mid a \in \text{Nom}(\mathcal{S}) \text{ et } p \in \text{Prop}\} \cup \{a : \Diamond b \mid a, b \in \text{Nom}(\mathcal{S})\}$  dans  $\{0, \dots, n\}$  définie à partir de  $h$  comme suit :

$$h'(A) = \begin{cases} n & \text{si } A \in \mathcal{N} \text{ et } h(A) = h(\top) \\ h(A) & \text{si } A \in \mathcal{N}, h(A) \neq h(\top) \text{ et } h(A) \neq h(\perp) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit maintenant le  $\mathbf{GH}_n$ -modèle  $M = (U, R, V)$  comme suit :

- $U = \text{Nom}(\mathcal{S})$ ;
- pour tout  $a, a' \in U$ ,  $R(a, a') = \frac{h'(a : \Diamond a')}{n}$ ;
- pour tout  $p \in \text{Prop}$  et  $a \in U$ ,  $V(a, p) = \frac{h'(a : p)}{n}$ .

En outre, on définit la  $\mathcal{M}$ -assignation  $g$  comme suit :

$$g(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \in \text{Nom}(\mathcal{S}) \\ b & \text{sinon, avec } b \in U \end{cases}$$

Soit  $nest'$  la fonction obtenue en changeant la définition de degré d'imbrication dans le cas de  $\Diamond A$  de la manière suivante :

$$nest'(\Diamond A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \in \text{Nom} \\ 1 + nest'(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

On démontre maintenant que  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$ . On commence par démontrer que, pour toute composante  $Cp_i = C_1 \triangleleft C_2$ , on a  $V_g(C_1) \not\leq V_g(C_2)$ .

Dans le cas d'une composante  $Cp_i = C_1 \triangleleft C_2$  où  $nest'(C_1) = nest'(C_2) = 0$ , la démonstration est simple. Dans le cas, par exemple, des composantes de la forme  $\top \leq a : b$  ( $a \neq b$ ), étant donné que  $g(a) = a \neq b = g(b)$ , on a  $V_g(a : b) = 0$  et, ainsi, on déduit que  $V_g(\top) > V_g(a : b)$ . On traite maintenant les autres cas. L'idée consiste à démontrer que, pour toute composante  $Cp' = C'_1 \triangleleft C'_2$  dans la branche  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{D}$  contenant  $\mathcal{S}$ , on a  $V_g(C'_1) \not\leq V_g(C'_2)$ . Cette démonstration est par induction sur la valeur de  $nest'(C'_1) + nest'(C'_2)$  ainsi que sur la longueur de la sous-branche  $\mathcal{SB}$  délimitée par le R-séquent contenant  $C'_p$  et  $\mathcal{S}$ . Si  $nest'(C'_1) + nest'(C'_2) = 0$  alors la propriété est démontrée par simple induction sur la longueur de  $\mathcal{SB}$ .

Si cette longueur est égale à 0, alors cela correspond au précédent cas où les composantes de  $\mathcal{S}$  ne contiennent aucune formule de la forme  $a : \Box A$  ou de la forme  $a : \Diamond A$  avec  $A \notin \text{Nom}$ . Dans le cas où la longueur de  $\mathcal{SB}$  est supérieure à 0, la propriété est démontrée par application de l'hypothèse d'induction.

Si la longueur de  $\mathcal{SB}$  est égale à 0 et  $nest'(C'_1) + nest'(C'_2) > 0$ , alors on est dans un des cas suivants :

- $Cp' = a : \Box A \triangleleft C$  où  $C \equiv c : p$  ou  $C \in \{\top, \perp\}$ ;
- $Cp' = C \triangleleft a : \Diamond A$  où  $C \equiv c : p$  ou  $C \in \{\top, \perp\}$  ( $A \notin \text{Nom}$ );
- $Cp' = a : \Box A \triangleleft b : \Diamond B$ .

On développe le cas de  $Cp' = a : \Box A \leq c : p$ , les autres cas étant similaires. À partir de la définition de  $\mathcal{M}$ , on a  $V_g(c : p) < 1$ . Si  $\mathcal{S}$  ne contient pas de formule de la forme  $a : \Diamond b$ , alors on a  $V_g(a : \Box A) = 1$  et donc  $V_g(a : \Box A) > V_g(c : p)$ . Sinon, pour tout  $a : \Diamond b$  dans  $\mathcal{S}$ , il existe un R-séquent dans  $\mathcal{B}$  contenant soit  $Cp'_1 = b : A < a : \Diamond b$ , soit  $Cp'_2 = b : A \leq c : p$ . Ainsi, en appliquant l'hypothèse d'induction ( $nest'(b : A) + nest'(a : \Diamond b) = nest'(b : A) + nest'(c : p) < nest'(a : \Box A) + nest'(c : p)$ ), on déduit que  $V_g(a : \Box A) > V_g(c : p)$ .

Dans le cas où la longueur de  $\mathcal{SB}$  et la valeur  $nest'(C_1) + nest'(C_2)$  sont strictement positives, la démonstration est obtenue par simple application de l'hypothèse d'induction.

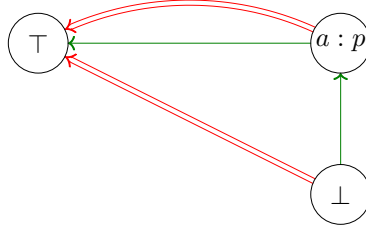
On démontre maintenant que  $\mathcal{M}$  via  $g$  satisfait  $W$ . Pour tout  $(c, a : \Box A) \in W$ , il existe un R-séquent dans  $\mathcal{B}$  contenant soit  $a : \Box A < \top$ , soit  $a : \Diamond c \leq c : A$  et  $a : \Box A < c : A$  ( $[W_{\Box}^1]$ ). On sait que, pour toute composante  $Cp' = C'_1 \triangleleft C'_2$  dans  $\mathcal{B}$ , on a  $V_g(C'_1) \not\leq V_g(C'_2)$ . Ainsi, on déduit que, pour toute pair  $(c, a : \Box A) \in W$ , on a  $V_g(a : \Box A) \geq R(g(a), g(c)) \rightarrow V_g(c : A)$ . De plus, En utilisant la règle  $[W_{\Box}^2]$ , pour toute pair  $(c, a : \Box A) \in W$ , on a  $V_g(a : \Box A) \leq R(g(a), g(c)) \rightarrow V_g(c : A)$ . Ainsi, pour toute pair  $(c, a : \Box A) \in W$ , on a  $V_g(a : \Box A) = R(g(a), g(c)) \rightarrow V_g(c : A)$ . Le cas des pairs de la forme  $(c, a : \Diamond A)$  est similaire (à partir des règles  $[W_{\Diamond}^1]$  et  $[W_{\Diamond}^2]$ ). Donc,  $\mathcal{M}$  via  $g$  satisfait  $W$ . Par conséquent,  $\mathcal{M}$  est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$  □

**Théorème 7.4.4.** *Un R-séquent irréductible  $\mathcal{S}$  a un contre-modèle dans  $\text{WGH}_{\infty}$  si et seulement si son graphe bicolore  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  ne contient pas de  $\Rightarrow$ -cycle.*

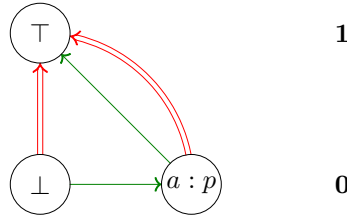
*Démonstration.* Partie  $\Rightarrow$ . L'existence d'une chaîne  $C \rightarrow^* \Rightarrow \rightarrow^* \dots \rightarrow^* \Rightarrow \rightarrow^* \Rightarrow C$  implique qu'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $x < x$  (proposition 7.4.4). On a ainsi une contradiction. Partie  $\Leftarrow$ . Si  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  ne contient pas de  $\Rightarrow$ -cycle, alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  telle que  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  ne contient pas de  $(n + 1)$ -chaîne. Ainsi, en utilisant le théorème 7.4.3,  $\mathcal{S}$  a un contre-modèle dans  $\text{GH}_n$ . Par conséquent,  $\mathcal{S}$  a un contre-modèle dans  $\text{WGH}_{\infty}$ . □

Considérons l'exemple du R-séquent  $\mathcal{S} = \emptyset; [a : \Box p \leq a : p]$ . Il est facile de voir qu'aucune règle ne peut être appliquée au R-séquent  $\mathcal{S}$  car il est irréductible. La graphe bicolore associé

à  $\mathcal{S}$  est :



Ce graphe ne contient pas de  $\Rightarrow$ -cycle. En vu d'extraire un contre-modèle, nous modifions ce dernier de sorte que les flèches  $\Rightarrow$  vont toujours vers le haut et les flèches  $\rightarrow$  ne vont jamais vers le bas :



Ainsi, on déduit que  $\mathcal{M} = (\{a\}, R, V)$ , où  $R(a, a) = 0$  et  $V(a, p) = 0$ , est un contre-modèle de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbf{GH}_1$  et par conséquent dans toutes les logiques  $\mathbf{GH}_n$  et  $\mathbf{WGH}_\infty$ .

La recherche de  $n$ -chaînes dans des graphes bicolores dans le cas des logiques de Gödel peut être caractérisée comme un problème de limitation de consommation de ressources dans un certain calcul de processus [91]. Intuitivement, les flèche  $\Rightarrow$  représentent la consommation de ressources.

### 7.4.3 Procédures de décision pour $(\mathbf{GH}_n)_{1 \leq n < \infty}$ et $\mathbf{WGH}_\infty$

Maintenant, nous utilisons les résultats obtenus précédemment pour proposer une procédure de décision avec génération de contre-modèles pour toute logique  $L \in \{(\mathbf{GH}_n)_{0 < n < \infty}, \mathbf{WGH}_\infty\}$ . Le point clé est que, pour tout R-séquent  $\mathcal{S}$ , on peut construire un ensemble  $\mathcal{IR}$  de R-séquents irréductibles tel que  $\mathcal{S}$  est valide dans  $L$  ssi, pour tout  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{IR}$ ,  $\mathcal{S}'$  est valide dans  $L$ .

#### Procédure de décision pour $L$ :

Soit  $\mathcal{S}$  un R-séquent.

**Étape 1 :** On construit à partir de  $\mathcal{S}$  l'ensemble  $\mathcal{IR}$  à travers l'utilisation de nos règles de preuve. En utilisant le théorème 7.4.2, cette étape est finie.

**Étape 2 :** Pour chaque R-séquent irréductible  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{IR}$ , on construit le graphe bicolore  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'}$ .

- Si  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'}$  contient un  $\Rightarrow$ -cycle (resp. une  $(n + 1)$ -chaîne), alors  $\mathcal{S}'$  est valide dans  $\mathbf{WGH}_\infty$  (resp.  $\mathbf{GH}_n$ ).
- Sinon,  $\mathcal{S}'$  a un contre-modèle dans  $L$  obtenu de  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'}$  de la manière suivante :
  - On modifie  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  de telle manière que les flèches  $\Rightarrow$  vont toujours vers le haut et les flèches  $\rightarrow$  ne vont jamais vers le bas. Ceci est possible car  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'}$  ne contient pas de  $\Rightarrow$ -cycle.

- Ensuite, on extrait de ce graphe modifié une bi-hauteur  $h : \mathcal{N} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  où
  - pour tout  $C_1 \rightarrow C_2$  dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'}$ , on a  $h(C_1) \leq h(C_2)$  ;
  - pour tout  $C_1 \Rightarrow C_2$  dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}'}$ , on a  $h(C_1) < h(C_2)$ .
 Un algorithme efficace permettant de calculer une bi-hauteur quand il n'y a pas de  $\Rightarrow$ -cycle a été proposé dans [92].
- À partir de  $h$ , on définit une nouvelle fonction  $h' : \{a : p \mid a \in \text{Nom}(\mathcal{S}) \text{ et } p \in \text{Prop}\} \cup \{a : \diamond b \mid a, b \in \text{Nom}(\mathcal{S})\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  par :

$$h'(A) = \begin{cases} n & \text{si } A \in \mathcal{N} \text{ et } h(A) = h(\top) \\ h(A) & \text{si } A \in \mathcal{N}, h(A) \neq h(\top) \text{ et } h(A) \neq h(\perp) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un contre-modèle  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  de  $\mathcal{S}'$  dans  $L$  est obtenu comme suit (théorèmes 7.4.4 et 7.4.3) :

- $W = \text{Nom}(\mathcal{S}')$  ;
- pour tout  $a, a' \in W$ ,  $R(a, a') = \frac{h'(a : \diamond a')}{n}$  ;
- pour tout  $p \in \text{Prop}$  et tout  $a \in W$ ,  $V(a, p) = \frac{h'(a : p)}{n}$ .

Si tous les éléments de  $\mathcal{IR}$  sont valides, alors en utilisant la correction des règles de preuve (théorème 7.3.1), on déduit que  $\mathcal{S}$  est valide. Sinon, il existe un R-séquent irréductible dans  $\mathcal{IR}$  qui a un contre-modèle  $\mathcal{M}$ . En utilisant la forte inversibilité des règles (théorème 7.3.2),  $\mathcal{M}$  est également un un contre-modèle de  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 7.4.5.**  $\text{WGH}_\infty$  et  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$  sont décidables et vérifient la propriété des modèles finis.

Rappelons que nos procédures sont fondées sur le fait que l'infimum et le supremum dans nos modèles correspondent respectivement au minimum et au maximum. Cela n'est pas le cas dans  $\text{GH}_\infty$ .

## 7.5 Un calcul des séquents pour $\text{WGH}_\infty$

Dans cette section, nous proposons un calcul des séquents  $\text{WGH}$  pour  $\text{WGH}_\infty$  qui défini par les règles en figure 7.1, figure 7.2, figure 7.3 et les règles suivantes :

$$\begin{array}{c} \frac{}{W; [G \mid A \leq A]} \text{ [id]} \\ \frac{W; [G \mid A < \perp]}{W; [G]} \text{ [EW}_2\text{]} \\ \frac{W; [G \mid A \leq C]}{W; [G \mid A \leq B \mid B \triangleleft C]} \text{ [com}_1\text{]} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{W; [G \mid \top \leq \perp]}{W; [G]} \text{ [EW}_1\text{]} \\ \frac{W; [G \mid \top < A]}{W; [G]} \text{ [EW}_3\text{]} \\ \frac{W; [G \mid A \leq C]}{W; [G \mid A \triangleleft B \mid B \leq C]} \text{ [com}_2\text{]} \end{array}$$

où dans les règles  $[\text{EW}_2]$  et  $[\text{EW}_3]$ ,  $A \in \text{Form}(G)$ . Toutefois, cette condition n'est pas nécessaire pour avoir la correction et la complétude.

**Théorème 7.5.1** (Correction). *Toutes les règles de  $\text{WGH}$  sont correctes.*

*Démonstration.* En utilisant le théorème 7.3.1, les règles en figure 7.2, figure 7.2 et figure 7.3 sont correctes. Avec des arguments similaires à ceux dans la démonstration du théorème 7.3.1, on peut démontrer la correction des autres règles.  $\square$

**Théorème 7.5.2** (Complétude). *Si un R-séquent est valide dans  $\text{WGH}_\infty$ , alors il a une preuve dans  $\text{WGH}$ .*

*Démonstration.* On a seulement à démontrer que, pour tout R-séquent irréductible, si son graphe bicolore contient un  $\Rightarrow$ -cycle, alors il a une preuve en utilisant uniquement les nouvelles règles. On sait que toute flèche dans le graphe correspond à une inégalité. En effet,  $A \Rightarrow B$  et  $A \rightarrow B$  correspondent respectivement à  $B \leq A$  et  $B < A$ . On démontre maintenant que, pour tout R-séquent irréductible  $\mathcal{S}$ , en utilisant uniquement les nouvelles règles, on peut obtenir un R-séquent contenant toutes les composantes associées aux flèches de  $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ .

- Cas de  $C \Rightarrow \top$  obtenu à partir de la composante  $a : \Box A \leq C$  dans  $\mathcal{S}$ . Puisque la composante  $a : \Box A \leq C$  introduit une unique flèche, il suffit de la remplacer par  $\top \leq C$  de la manière suivante :

$$\frac{\frac{W; [G \mid \top \leq C]}{W; [G \mid \top < a : \Box A \mid a : \Box A \leq C]} [com_2]}{W; [G \mid a : \Box A \leq C]} [EW_3]$$

- Cas de  $\perp \Rightarrow C$  obtenu à partir de la composante  $C \leq a : \Diamond A$  dans  $\mathcal{S}$  de la manière suivante :

$$\frac{\frac{W; [G \mid C \leq \perp]}{W; [G \mid C \leq a : \Diamond A \mid a : \Diamond A < \perp]} [com_1]}{W; [G \mid C \leq a : \Diamond A]} [EW_2]$$

Les composantes associées aux flèches dans  $\mathcal{B}$  sont directement obtenues en utilisant les règles  $[EW_1]$ ,  $[EW_2]$  et  $[EW_3]$ . Les composantes associées aux autres flèches de  $\mathcal{G}_\mathcal{S}$  sont dans  $\mathcal{S}$ . Clairement, si  $\mathcal{G}_\mathcal{S}$  contient un  $\Rightarrow$ -cycle, alors par une succession d'applications des règles  $[com_1]$  et  $[com_2]$  au R-séquent contenant toutes les composantes associées aux flèches de  $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ , on obtient une instance de  $[id]$ .  $\square$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini une famille de logiques hybrides floues fondées sur la logique de Gödel et ses versions finies. Le point clé consiste à remplacer la logique classique dans la logique hybride par la logique de Gödel et ses versions finies. Cette famille est composée de deux logiques construites sur une algèbre infinie, à savoir  $\text{GH}_\infty$  et  $\text{WGH}_\infty$ , et une séquence de versions finies  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$ . Pour  $\text{WGH}_\infty$  et  $(\text{GH}_n)_{0 < n < \infty}$  nous avons défini des procédures de décision avec génération de contre-modèles. L'idée repose sur l'utilisation de règles fortement inversibles permettant la transmission de contre-modèles. En utilisant ces procédures, nous avons démontré que ces logiques sont décidables et vérifient la propriété des modèles finis. Une autre contribution est la définition d'un calcul des séquents pour  $\text{WGH}_\infty$ .

Parmi les perspectives, il y a l'étude de la décidabilité de même que la définition de systèmes de preuve pour  $\text{GH}_\infty$ . Rappelons que les résultats obtenus pour les autres logiques sont obtenus grâce au fait que chaque infimum (resp. supremum) correspond au minimum (resp. maximum), ce qui n'est pas le cas de la logique  $\text{GH}_\infty$ . Ainsi, le traitement de cette dernière doit passer par le développement d'autres techniques.





# Conclusion et perspectives

Au cours des travaux développés dans cette thèse, nous avons défini des systèmes de déduction naturelle et des calculs des séquents pour principalement plusieurs logiques modales (hybrides) non-classiques. Notre idée centrale réside dans l'utilisation de structures multi-contextuelles permettant de construire des preuves sans passer par l'utilisation d'entités syntaxiques étrangères au langage. En outre, nous avons montré comment des procédures de décision simples peuvent être obtenues à partir de nos calculs des séquents.

Dans le cas des logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons des axiomes  $T$ ,  $B$ , 4 et 5, nous avons défini des systèmes de preuve quasi-modulaires en utilisant de nouvelles structures multi-contextuelles : A-séquent et MC-séquent. Nous avons démontré la normalisation pour tous nos systèmes de déduction naturelle et l'élimination de la coupure pour tous nos calculs des séquents. Nous avons également défini des systèmes de déduction naturelle pour les logiques modales classiques formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 en démontrant la normalisation.

Dans l'optique de présenter l'approche qui consiste à intégrer la sémantique au langage, nous nous sommes intéressés à une logique hybride intuitionniste pour laquelle nous avons défini le premier calcul des séquents permettant de fournir la première démonstration de sa décidabilité. De plus, nous avons introduit de nouvelles logiques hybrides floues qui correspondent à un enrichissement syntaxique des logiques modales de Gödel. En utilisant un ensemble de règles fondées sur une structure multi-contextuelle, appelée R-séquent, nous avons défini des procédures de décision avec génération de contre-modèles pour ces logiques, excepté une. Nous avons aussi montré que l'ajout d'un axiome et des règles structurelles à notre ensemble de règles permet de fournir un calcul des séquents pour une de ces logiques définie sur une algèbre infinie.

Une des questions ouvertes les plus importantes reste l'étude de la décidabilité de certaines des logiques modales intuitionnistes que nous considérons et tout particulièrement la logique IS4. Nous avons vu que dans l'approche que nous avons suivie, le fait que nos calculs des séquents pour ces logiques ne vérifient pas la propriété de la profondeur a empêché de les utiliser dans la définition de procédures permettant de démontrer la décidabilité. Ainsi, si nous arrivons à définir des calculs, avec notre structure de A-séquent, qui vérifient la propriété de la profondeur, alors nous obtiendrons facilement des démonstrations de la décidabilité de ces logiques. Une autre solution à cette question peut être l'utilisation de nouvelles structures multi-contextuelles. Effectivement, nous avons vu que notre premier calcul avec les A-séquents pour la logique IS5 ne vérifie pas la propriété de la profondeur et en conséquence il ne nous a pas permis de démontrer la décidabilité de cette logique. Néanmoins, nous avons résolu le problème posé par la propriété de la profondeur en utilisant notre nouvelle structure de MC-

séquent et ainsi nous avons réussi à démontrer la décidabilité de IS5.

Parmi les pistes à étudier, il y a également l'amélioration de nos calculs des séquents et, par conséquent, nos procédures de décision par l'élimination de la contraction persistant dans certaines règles. En effet, même si la règle de contraction n'est pas présente dans nos calculs d'une façon explicite, elle persiste toutefois dans certaines des règles gauches. Une des approches qui pourrait nous permettre de l'éliminer est celle proposée par Dyckhoff [45] dans le cas de la logique intuitionniste. Elle consiste à remplacer toute règle internalisant la contraction par plusieurs règles qui simplifient la formule principale mais qui ne préservent pas nécessairement la propriété de la sous-formule. Cependant, afin d'éviter que l'absence de la propriété de la sous-formule pose problème, nous devons faire en sorte que nos calculs vérifient une autre propriété plus faible mais qui permet de limiter l'ensemble des formules utilisées dans la construction de toute preuve.

Par nos procédures de décision, nous avons principalement voulu aborder l'automatisation de la construction de preuves et montrer comment nos calculs peuvent être à la base de la définition de procédures permettant de démontrer la décidabilité. Dans des travaux futurs, nous envisageons d'étudier la complexité de chacune de nos procédures et les possibles améliorations que nous pourrions apporter de ce point de vue. Notons que parmi les travaux très intéressants dans l'étude de la complexité des logiques modales, nous pouvons citer ceux développés dans [95]. En outre, en partant de nos résultats en termes d'automatisation de la construction de preuves dans nos procédures, nous projetons l'implantation de ces dernières.

Une autre perspective consiste en la définition de procédures combinant la recherche de preuves avec la construction de contre-modèles dans le cas des logiques modales intuitionnistes que nous considérons. Nous pensons que cela pourrait être réalisé avec une approche similaire à celle utilisée dans le cas de nos logiques hybrides floues. La principale difficulté que nous avons rencontré dans la définition de telles procédures est liée au fait que les logiques modales intuitionnistes formées à partir des combinaisons de  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 ne vérifient pas la propriété des modèles finis dans la sémantique de Kripke. Cependant, notons que dans d'autres sémantiques plus complexes certaines de ces logiques vérifient cette propriété. Par exemple, la logique IS5 vérifie la propriété des modèles finis dans sa sémantique algébrique introduite par Bull [25, 50] et les logiques IK, IT, IK $\{B\}$ , IK $\{T, B\}$  la vérifient dans la sémantique bi-relationnelle proposée par Simpson [119]. Ainsi, l'utilisation de telles sémantiques ou bien la proposition d'une sémantique plus simple pourraient être les clés dans la définition de procédures avec construction de contre-modèles.

L'extension de nos travaux à d'autres logiques modales constitue une perspective très intéressante. Dans certains de nos travaux, nous avons réussi à étendre une partie de nos résultats aux logiques déontiques intuitionnistes, à savoir les logiques modales intuitionnistes qui vérifient l'axiome  $(D) \diamond \top (\forall x. \exists y. R(x, y))$ . Effectivement, nous avons défini des systèmes de déduction naturelle corrects et complets pour toutes les logiques formées à partir des combinaisons de  $D$ ,  $T$ ,  $B$ , 4 et 5 en ajoutant à notre système quasi-modulaire la règle suivante :

$$\frac{\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\diamond A^+\}} [\diamond_I]$$

Cependant, nous avons rencontré des difficultés dans la démonstration de la normalisation.

Ainsi, nous envisageons d'étudier cette question dans des travaux futurs.

Il y a aussi une autre perspective qui concerne la question de modularité. Autrement dit, ne pas traiter les logiques **IB4** et **IS5** séparément comme nous l'avons fait. Dans des travaux récents [23], un calcul des séquents modulaire fondée sur la structure de séquent profond a été proposé pour les logiques modales classiques définies à partir de toutes les combinaisons des axiomes  $D$ ,  $T$ ,  $B$ , 4 et 5. L'idée repose sur l'association d'une règle structurelle à chaque axiome. En termes de calcul des séquents, nous pensons que l'utilisation de règles structurelles permettrait de définir également un calcul modulaire fondé sur la structure de A-séquent dans le cas intuitionniste.

En utilisant l'isomorphisme de Curry-Howard, nos systèmes de déduction naturelle pour les logiques modales intuitionnistes peuvent être à la base de la définition de calculs de termes (langages de programmation). L'idée consiste à considérer les formules comme des types de fonctions et les preuves comme des programmes [82]. En particulier, nos systèmes peuvent être utilisés comme base de langages de programmation distribuée permettant de capturer des notions telles que la portabilité de code et la localité de ressources comme, par exemple, des systèmes de déduction naturelle pour la logique **IS5** ont été utilisés dans la définition de langages de programmation distribuée dans [101, 83].

La logique de Łukasiewicz et ses versions finis font parties des logiques floues les plus étudiées [79]. Dans des travaux non développés dans cette thèse [65], nous avons défini des calculs des séquents ainsi que des procédures de décision avec constructions de contre-modèles pour ces logiques en utilisant une structure multi-contextuelle dérivée de celle d'hyperséquent, dénommée  $\mathbb{Z}$ -hyperséquent. Dans ce cadre, nous projetons d'introduire et d'étudier des logiques modales (hybrides) fondées sur les logiques de Łukasiewicz. En outre, nous pensons pouvoir définir des procédures de décisions avec construction de contre-modèles pour de telles logiques en se servant de notre structure de  $\mathbb{Z}$ -hyperséquent.



# Bibliographie

- [1] C. Areces, P. Blackburn, and M. Marx. A road-map on complexity for hybrid logics. In J. Flum and M. Rodríguez-Artalejo, editors, *Computer Science Logic*, number 1683 in Lecture Notes in Computer Science (LNCS), pages 307–321. Springer Verlag, 1999.
- [2] C. Areces and B. ten Cate. Hybrid Logics. In P. Blackburn, F. Wolter, and J. van Benthem, editors, *Handbook of Modal Logics*. Elsevier, 2006.
- [3] A. Avellone, M. Ferrari, and P. Miglioli. Duplication-free tableau calculi and related cut-free sequent calculi for the interpolable propositional intermediate logics. *Logic Journal of the IGPL*, 7(4) :447–480, 1999.
- [4] A. Avron. The method of hypersequents in the proof theory of propositional non-classical logics. In W. Hodges, M. Hyland, C. Steinhorn, and J. Truss, editors, *Logic : from foundations to applications*, pages 1–32. Oxford University Press, 1996.
- [5] A. Avron. A Tableau System for Gödel-Dummett Logic based on a Hypersequent Calculus. In *International Conference on Analytic Tableaux and Related Methods, TABLEAUX 2000*, volume 1847 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)*, pages 98–111. Springer Verlag, 2000.
- [6] M. Baaz, A. Ciabattoni, and C. G. Fermüller. Cut-Elimination in a Sequents-of-Relations Calculus for Gödel Logic. In *31st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL'01*, pages 181–186, Warsaw, Poland, 2001.
- [7] M. Baaz and C. G. Fermüller. Analytic Calculi for Projective Logics. In *International Conference on Analytic Tableaux and Related Methods, TABLEAUX'99*, volume 1617 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)*, pages 36–50. Springer Verlag, 1999.
- [8] M. J. Beeson. *Foundations of Constructive Mathematics : Metamathematical Studies*. Springer-Verlag, 1985.
- [9] G. Bellin, V. De Paiva, and E. Ritter. Extended Curry-Howard Correspondence for a Basic Constructive Modal Logic. In *Workshop of Methods for Modalities 2*, Amsterdam, Holland, 2001.
- [10] N. D. Belnap. Display Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 11(4) :2375–417, 1982.
- [11] M. R. F. Benevides and T. S. E. Maibaum. A Constructive Presentation for the Modal Connective of Necessity ( $\Box$ ). *Journal of Logic and Computation*, 2(1) :31–50, 1992.
- [12] G. M. Bierman and V. De Paiva. Intuitionistic Necessity Revisited. In *Proceedings of Applied Logic Conference*, Amsterdam, Holland, 1992.
- [13] G. M. Bierman and V. De Paiva. On an Intuitionistic Modal Logic. *Studia Logica*, 65 :383–416, 2000.
- [14] G.M. Bierman. A note on full intuitionistic linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 79 :281–287, 1996.

- [15] N. Biri and D. Galmiche. A modal linear logic for distribution and mobility. In *Workshop on Linear Logic, WLL'02*, Copenhagen, Denmark, 2002.
- [16] P. Blackburn. Internalizing Labelled Deduction. *Journal of Logic and Computation*, 10(1) :137–168, 2000.
- [17] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.
- [18] T. Bolander and P. Blackburn. Terminating Tableau Calculi for Hybrid Logics extending K. In *Workshop of Methods for Modalities 5*, Cachan, France, 2007.
- [19] T. Braüner. A Cut-Free Gentzen Formulation of the Modal Logic S5. *Logic Journal of the IGPL*, 8 :629–643, 2000.
- [20] T. Braüner and V. De Paiva. A Formulation of Linear Logic based on Dependency-Relations. In *Computer Science Logic, CSL'97*, volume 1414 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 129–148. Springer Verlag, 1997.
- [21] T. Braüner and V. De Paiva. Intuitionistic Hybrid Logic. *Journal of Applied Logic*, 4(3) :231–255, 2006.
- [22] K. Brünnler. Deep sequent systems for modal logic. *Archive for Mathematical Logic*, 48(6) :551–577, 2009.
- [23] K. Brünnler and L. Straßburger. Modular Sequent Systems for Modal Logic. In *International Conference on Analytic Tableaux and Related Methods, TABLEUX'09*, volume 5607 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 152–166. Springer Verlag, 2009.
- [24] R. A. Bull. A modal extension of intuitionistic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 6 :142–145, 1965.
- [25] R. A. Bull. MIPC as the formalization of an intuitionistic concept of modality. *Journal of Symbolic Logic*, 31 :609–616, 1966.
- [26] R. A. Bull. Cut elimination for propositional dynamic logic without \*. *Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 38 :85–100, 1992.
- [27] R. A. Bull and K. Segerberg. Basic Modal Logic. In D. Gabbay and F. Guenther, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, pages 1–88, Dordrecht, 1984. Reidel Publishing Company.
- [28] X. Caicedo and R. Rodríguez. Standard Gödel Modal Logics. *Studia Logica*, 94(2) :189–214, 2010.
- [29] R. Chadha, D. Macedonio, and V. Sassone. A Hybrid Intuitionistic Logic : Semantics and Decidability. *Journal of Logic and Computation*, 16(1) :27–59, 2006.
- [30] A. Chagrov and M. Zakharyashev. *Modal Logic*. Oxford University Press, 1996.
- [31] B. Chellas. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 1980.
- [32] L. Cholvy, F. Cuppens, and R. Demolombe. Logiques modales et bases de données. *Journal Techniques et Sciences Informatiques*, 17(3) :329–354, 1998.
- [33] E. M. Clarke, O. Grumberg, and D. A. Peled. *Model Checking*. The MIT Press, 1999.
- [34] M. J. Collinson, B. Hilken, and D. Rydeheard. Semantics and Proof Theory of an Intuitionistic Modal Sequent Calculus. Technical Report UMCS-99-6-1, University of Manchester, UK, 1999.

- [35] M. da Paz N. Medeiros. A new S4 classical modal logic in natural deduction. *Journal of Symbolic Logic*, 71(3) :799–809, 2006.
- [36] J. Darlington and Y. Guo. Constraint Logic Programming in the Sequent Calculus. In *International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning, LPAR'94*, volume 822 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 200–214. Springer Verlag, 1994.
- [37] R. Davies and F. Pfenning. A Modal Analysis of Staged Computation. *Journal of ACM*, 48(3) :555–604, 2001.
- [38] S. Demri and P. Gastin. Specification and Verification using Temporal Logics. In *Modern applications of automata theory*, IISc Research Monographs 2. World Scientific, 2010. To appear.
- [39] S. Demri and D. Lugiez. Complexity of modal logics with Presburger constraints. *Journal Applied Logic*, 8(3) :233–252, 2010.
- [40] N. Dershowitz and Z. Manna. Proving termination with multiset orderings. In *International Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP'79*, volume 71 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 188–202. Springer Verlag, 1979.
- [41] K. Dosen. Higher-level sequent-systems for intuitionistic modal logic. *Publications de l'Institut Mathématique*, 39(53) :3–12, 1986.
- [42] A. G. Dragalin. *Mathematical Intuitionism : Introduction to Proof Theory. Translation of Mathematical Monographs*, volume 67. American Mathematical Society, 1988.
- [43] M. Dummett. A Propositional Calculus with a Denumerable Matrix. *Journal of Symbolic Logic*, 24 :96–107, 1959.
- [44] M. Dummett. *Elements of Intuitionism*. Oxford University Press, Oxford, 1977.
- [45] R. Dyckhoff. Contraction-Free Sequent Calculi for Intuitionistic Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 57 :795–807, 1992.
- [46] R. Dyckhoff. Dragalin's proofs of cut-admissibility for the intuitionistic sequent calculi G3i and G3i'. Technical Report CS-97-8, School of Mathematical and Computational Sciences, St Andrews University, 1997.
- [47] W. B. Ewald. *Time, Modality and Intuitionism*. PhD thesis, University of Oxford, 1978.
- [48] M. Fairtlough and M. Mendler. An intuitionistic modal logic with applications to the formal verification of hardware. In *8th International Workshop on Computer Science Logic, CSL'94*, volume 933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 354–368. Springer-Verlag, 1995.
- [49] G. Fischer-Servi. On modal logic with an intuitionistic base. *Studia Logica*, 36 :141–149, 1977.
- [50] G. Fischer-Servi. The finite model property for MIPQ and some consequences. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XIX :687–692, 1978.
- [51] G. Fischer-Servi. Semantics for a class of intuitionistic modal calculi. *Italian Studies in the Philosophy of Science*, pages 59–72, 1981.
- [52] G. Fischer-Servi. Axiomatizations for some intuitionistic modal logics. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino*, 42 :179–194, 1984.
- [53] F. B. Fitch. Intuitionistic modal logic with quantifiers. *Portugaliae Mathematicae*, 7 :113–118, 1948.

- [54] F. B. Fitch. *Symbolic logic, an introduction*. The Ronald Press, New York, 1952.
- [55] F. B. Fitch. Natural deduction rules for obligation. *American Philosophical Quarterly*, 3 :27–38, 1966.
- [56] M. Fitting. *Proof methods for modal and intuitionistic logics*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.
- [57] M. Fitting. Many-valued modal logics. *Fundamenta Informaticae*, 15(3-4) :235–254, 1991.
- [58] M. Fitting. Many-valued modal logics II. *Fundamenta Informaticae*, 17 :55–73, 1992.
- [59] J. M. Font. Modality and Possibility in Some Intuitionistic Modal Logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 27 :533–546, 1986.
- [60] D. Gabby. *Labelled Deductive Systems : Volume I*, volume 33 of *Oxford Logic Guides*. Oxford Clarendon Press, 1996.
- [61] J. Gallier. Constructive Logics. Part I : A Tutorial on Proof Systems and Typed  $\lambda$ -Calculi. *Theoretical Computer Science*, 110 :249–339, 1993.
- [62] D. Galmiche, D. Larchey-Wendling, and Y. Salhi. Provability and Countermodels in Gödel-Dummett Logics. In *4th International Workshop on Disproving*, Bremen, Germany, 2007.
- [63] D. Galmiche, D. Méry, and D. Pym. The Semantics of BI and Resource Tableaux. *Math. Struct. in Comp. Science*, 15(6) :1033–1088, 2005.
- [64] D. Galmiche and Y. Salhi. Calculi for an Intuitionistic Hybrid Modal Logic. In *International Workshop on Intuitionistic Modal Logic and Applications, IMLA'08*, CMU, Pittsburg, USA, June 2008.
- [65] D. Galmiche and Y. Salhi. Labelled Calculi for Lukasiewicz Logics. In *Workshop on Logic, Language, Information and Computation, WoLLIC'08*, volume 5110 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 194–207. Springer Verlag, 2008.
- [66] D. Galmiche and Y. Salhi. A Family of Gödel hybrid logics. *Journal of Applied Logic*, In Press, Corrected Proof, 2010.
- [67] D. Galmiche and Y. Salhi. Label-free Proof Systems for Modal Intuitionistic Logic IS5. In *Int Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, LPAR 2010*, volume 6355 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)*, pages 255–271, 2010.
- [68] D. Galmiche and Y. Salhi. Proof-search in intuitionistic hybrid logic. *submitted to Journal of Information and Computation, in revision*, 2010.
- [69] O. Gasquet and A. Herzig. From Classical to Normal Modal Logics. In *Proof Theory of Modal Logic*, pages 293–311. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [70] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen I, II. *Mathematische Zeitschrift*, 39 :176–210,405–431, 1935.
- [71] G. Gentzen. Investigation into Logical Deduction. In M. E. Szabo, editor, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, pages 68–131. North-Holland, 1969.
- [72] J. Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–102, 1987.
- [73] J. Y. Girard, P. Taylor, and Y. Lafont. *Proofs and Types*. Cambridge University Press, 1989.



- [74] J.Y. Girard. Linear Logic : its Syntax and Semantics. In J.Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pages 1–42. Cambridge University Press, 1995.
- [75] K. Gödel. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger Akademie des Wissenschaften*, 69 :65–66, 1932.
- [76] R. Goré, L. Postniece, and A. Tiu. Cut-Elimination and Proof Search for Bi-Intuitionistic Tense Logic. *CoRR*, abs/1006.4793, 2010.
- [77] A. Guglielmi. A System of Interaction and Structure. *ACM Transactions on Computational Logic*, 8(1) :1–64, 2007.
- [78] Hájek. Making fuzzy description logic more general. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(1) :1–15, 2005.
- [79] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [80] J. Hansen, T. Bolander, and T. Braüner. Many-valued hybrid logic. In *Advances in Modal Logic*, pages 111–132, 2008.
- [81] A. Herzig. Modal Probability, Belief, and Actions. *Fundamenta Informaticae*, 57(2-4) :323–344, 2003.
- [82] W. A. Howard. The formulas-as-types notion of construction. In J. P. Seldin and J. R. Hindley, editors, *To H. B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism*, pages 479–490. Academic Press, 1980. Reprint of 1969 article.
- [83] L. Jia and D. Walker. Modal Proofs as Distributed Programs (Extended Abstract). In *European Symposium on Programming, ESOP*, volume 2986 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 219–233. Springer Verlag, 2004.
- [84] R. Kashima. Cut-free sequent calculi for some tense logics. *Studia Logica*, 53(1) :119–136, 1994.
- [85] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland, 1952.
- [86] S. A. Kripke. Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-Normal Modal Propositional Calculi. In J. W. Addison, A. Tarski, and L. Henkin, editors, *The Theory of Models*. North Holland, 1965.
- [87] J. L. Krivine. *Lambda-calcul, types et modèles*. Masson, 1990.
- [88] D. Larchey-Wendling. *Preuves, réfutations et contre-modèles dans des logiques intuitionnistes*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2000.
- [89] D. Larchey-Wendling. Combining proof-search and countermodel construction for deciding Gödel-Dummett logic. In *18th International Conference on Automated Deduction, CADE-18*, volume 2392 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)*, pages 94–110, 2002.
- [90] D. Larchey-Wendling. Counter-model search in Gödel-Dummett logics. In *2nd International Joint Conference IJCAR 2004*, volume 3097 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)*, pages 274–288, 2004.
- [91] D. Larchey-Wendling. Bounding Resource Consumption with Gödel-Dummett Logics. In *International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, LPAR'05*, volume 3835 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)*, pages 682–696, 2005.
- [92] D. Larchey-Wendling. Graph-based decision for Gödel-Dummett logics. *Journal of Automated Reasoning*, 38 :201–225, 2007.

- [93] E. Lorini, A. Herzig, and C. Castelfranchi. Introducing *ttempt* in a Modal Logic of Intentional action. In *Logics in Artificial Intelligence, 10th European Conference, JELIA 2006*, volume 4160 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 280–292. Springer Verlag, 2006.
- [94] P. Martin-Löf. Hauptsatz for the Intuitionistic Theory of Iterated Inductive Definitions. In J. Fenstand, editor, *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, pages 179–216. North Holland, 1971.
- [95] M. Marx. Complexity of modal logic. In J. Van Benthem P. Blackburn and F. Wolter, editors, *Handbook of Modal Logic*, volume 3 of *Studies in Logic and Practical Reasoning*, pages 139–179. Elsevier, 2007.
- [96] A. Masini. 2-sequent calculus : a proof theory of modalities. *Annals of Pure and Applied Logic*, 58 :229–246, 1992.
- [97] A. Masini. 2-sequent calculus : intuitionism and natural deduction. *Journal of Logic and Computation*, 3(5) :533–562, 1993.
- [98] G. Metcalfe and N. Olivetti. Proof Systems for a Gödel Modal Logic. In *International Conference on Analytic Tableaux and Related Methods, TABLEAUX'09*, volume 5607 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 265–279. Springer Verlag, 2009.
- [99] D. Miller, G. Nadathur, F. Pfenning, and A. Scedrov. Uniform Proofs as a Foundation for Logic Programming. *Annals of Pure and Applied Logic*, 51 :125–157, 1991.
- [100] G. Mints. Indexed systems of sequents and cut-elimination. *Journal of Philosophical Logic*, 26 :671–696, 1997.
- [101] T. Murphy VII, K. Crary, R. Harper, and F. Pfenning. A Symmetric Modal Lambda Calculus for Distributed Computing. In *Proceedings of the 19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 286–295. IEEE Press, 2004.
- [102] S. Negri. Proof analysis in modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, 34 :507–534, 2005.
- [103] B. Nordstrom, K. Petersson, and J. M. Smith. *Programming in Martin-Löf's Type Theory : An Introduction*, volume 7 of *Monographs on Computer Science*. Oxford University Press, 1990.
- [104] H. Ono. On some intuitionistic modal logics. *Publications of the Research Institute for Mathematical Science*, 13 :55–67, 1977.
- [105] H. Ono and N. Suzuki. Relations between intuitionistic modal logics and intermediate predicate logics. *Reports on Mathematical Logic*, 22 :65–87, 1988.
- [106] L. Pinto and R. Dyckhoff. Loop-Free Construction of Counter-Models for Intuitionistic Propositional Logic. In Behara, Fritsch, and Lintz, editors, *symposia Gaussiana*, pages 225–232, 1995.
- [107] G. Plotkin and C. Stirling. A framework for intuitionistic modal logics. In *Theoretical aspects of reasoning about knowledge*, pages 399–406. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1986.
- [108] F. Poggiolesi. A cut-free simple sequent calculus for modal logic S5. *Review of Symbolic Logic*, 1 :3–15, 2008.
- [109] F. Poggiolesi. The Method of Tree-Hypersequents for Modal Propositional Logic. In *Towards Mathematical Philosophy*, volume 28 of *Trends in Logic*, pages 31–51. Springer Verlag, 2009.

- [110] D. Prawitz. *Natural Deduction : A Proof-Theoretical Study*. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1965.
- [111] G. Priest. Many-valued modal logics : a simple approach. *Review of Symbolic Logic*, 1 :190–203, 2008.
- [112] A. Prior. *Time and Modality*. Clarendon Press, Oxford, 1957.
- [113] D. Pym and C. Tofts. A Calculus and Logic of Resources and Processes. *Formal Aspects of Computing*, 18 :495–517, 2006.
- [114] D.J. Pym. *The Semantics and Proof Theory of the Logic of Bunched Implications*, volume 26 of *Applied Logic Series*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [115] G. Restall. Proofnets for S5 : sequents and circuits for modal logic. In C. Dimitracopoulos, L. Newelski, and D. Normann, editors, *Logic Colloquium 2005, number 28, Lecture Notes in Logic*, pages 151–172. Cambridge University Press, 2007.
- [116] S. C. Shapiro. *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, volume 1 and 2. Wiley-Interscience, 1987.
- [117] G. F. Shvarts. Gentzen style systems for K45 and K45D. In A. R. Meyer and M. A. Taitslin, editors, *Logic at Botik'89*, volume 363 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 245–256. Springer Verlag, 1989.
- [118] D. F. Siemens. Fitch-style rules for many modal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 18 :631–636, 1977.
- [119] A. Simpson. *The proof theory and semantics of intuitionistic modal logic*. PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.
- [120] C. Stirling. Modal logics for communicating systems. *Theoretical Computer Science*, 49(2-3) :311–347, 1987.
- [121] A.S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*, volume 43 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1996.
- [122] A.S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics : an Introduction, Vol. I*, volume 121 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland Publishing Company, 1988.
- [123] A.S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics : an Introduction, Vol. II*, volume 121 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland Publishing Company, 1988.
- [124] J. van Benthem. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Naples, 1985.
- [125] H. Wansing. *Displaying Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [126] H. Wansing. Sequent systems for modal logics. In D. Gabby and F. Guenther, editors, *Handbook of Philosophical Logic, 2nd edition*, volume 8, pages 61–145. Kluwer, 2002.
- [127] K. Weich. Decision Procedures for Intuitionistic Propositional Logic by Program Extraction. In *International Conference on Analytic Tableaux and Related Methods, TABLEAUX'98*, volume 1397 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 292–306. Springer Verlag, 1998.
- [128] J. Woodcock, P. G. Larsen, J. Bicarregui, and J. Fitzgerald. Formal methods : Practice and experience. *ACM Computing Surveys*, 41(4) :1–36, 2009.



# Règles de réduction pour $DN_{IKTh}$

Dans un premier temps, nous introduisons les relations suivantes sur les A-séquents :

1.  $\rightarrow_T$  définie par  $\Gamma\{\langle\Delta\rangle\} \rightarrow_T \Gamma\{\Delta\}$  ;
2.  $\rightarrow_B$  définie par  $\Gamma\{\langle\Delta, \langle\Delta'\rangle\rangle\} \rightarrow_B \Gamma\{\langle\Delta\rangle, \Delta'\}$  ;
3.  $\rightarrow_4$  définie par  $\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle\Delta\rangle\} \rightarrow_4 \Gamma\{\Gamma'\{\Delta\}\}$  où  $prof(\Gamma'\{\}) > 1$  ;
4.  $\rightarrow_5$  définie par  $\Gamma\{\langle\Delta\rangle\}\{\emptyset\} \rightarrow_5 \Gamma\{\emptyset\}\{\Delta\}$  où  $prof(\Gamma\{\}\{\emptyset\}) \geq 1$  et  $prof(\Gamma\{\emptyset\}\{\}) \geq 1$  ;
5.  $\rightarrow_{IS5}$  définie par  $\Gamma\{\langle\Delta\rangle\}\{\emptyset\} \rightarrow_{IS5} \Gamma\{\emptyset\}\{\Delta\}$ .

Maintenant, nous prouvons que pour tout  $x \in \{T, 4, B, 5, IS5\}$ , si  $\mathcal{S} \rightarrow_x \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}$  a une preuve dans un système  $DN_{IKTh}$  contenant  $[\square_E^x]$  et  $[\diamond_I^x]$ , alors  $\mathcal{S}'$  a également une preuve dans  $DN_{IKTh}$ . Ceci en montrant comment réécrire une preuve  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{S}$  en une preuve de  $\mathcal{S}'$ , notée  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_x$ . La construction de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_x$  se fait par induction sur la structure de  $\mathcal{D}$ .

## Construction de $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_T$ :

- **Cas 1 :**  
 Si  $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\frac{\Gamma\{\langle\Delta, A^+\rangle\}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \diamond A^+\}}} [\diamond_I] \right\}$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Delta, A^+\}]_T}{\frac{\Gamma\{\Delta, A^+\}}{\Gamma\{\Delta, \diamond A^+\}}} [\diamond_I^T] \right\}$   
 où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta, \diamond A^+\}$ .
- **Cas 2 :**  
 Si  $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\frac{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \square A^+\}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, A^+\}}} [\square_E] \right\}$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Delta, \square A^+\}]_T}{\frac{\Gamma\{\Delta, \square A^+\}}{\Gamma\{\Delta, A^+\}}} [\square_E^T] \right\}$   
 où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta, A^+\}$ .
- **Cas 3 :**  
 Si  $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\frac{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, A^+\}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \diamond A^+\}}} [\diamond_I^B] \right\}$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Delta, A^+\}]_T}{\frac{\Gamma\{\Delta, A^+\}}{\Gamma\{\Delta, \diamond A^+\}}} [\diamond_I^T] \right\}$   
 où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta, \diamond A^+\}$ .
- **Cas 4 :**  
 Si  $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\frac{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, \square A^+\}}{\Gamma\{\langle\Delta\rangle, A^+\}}} [\square_E^B] \right\}$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Delta, \square A^+\}]_T}{\frac{\Gamma\{\Delta, \square A^+\}}{\Gamma\{\Delta, A^+\}}} [\square_E^T] \right\}$   
 où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta, A^+\}$ .

– Cas 5 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\langle \Delta_1, \langle \Delta_2, A^+ \rangle \rangle\}} \right\}_{[\diamond_I^4]} \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\mathcal{S}'' ]_T}{\mathcal{S}'} \right\}_{[\diamond_I]}$$

où  $\mathcal{S}'$  est égal à  $\Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle, \diamond A^+\}$  ou  $\Gamma\{\Delta_1, \langle \Delta_2 \rangle, \diamond A^+\}$  avec si  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle, \diamond A^+\}$  alors  $\mathcal{S}'' = \Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2, A^+ \rangle\}$  sinon  $\mathcal{S}'' = \Gamma\{\Delta_1, \langle \Delta_2, A^+ \rangle\}$ .

– Cas 6 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\langle \Delta_1, \langle \Delta_2 \rangle, \square A^+ \rangle\}} \right\}_{[\square_E^4]} \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\mathcal{S}'' ]_T}{\mathcal{S}'} \right\}_{[\square_E]}$$

où  $\mathcal{S}'$  est égal à  $\Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2, A^+ \rangle\}$  ou  $\Gamma\{\Delta_1, \langle \Delta_2, A^+ \rangle\}$  avec si  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2, A^+ \rangle\}$  alors  $\mathcal{S}'' = \Gamma\{\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle, \square A^+\}$  sinon  $\mathcal{S}'' = \Gamma\{\Delta_1, \langle \Delta_2 \rangle, \square A^+\}$ .

– Cas 7 : Ce cas englobe tous les cas qui n'ont pas été traités précédemment :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_l}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\Sigma\}} \right\}_{[R]} \text{ alors}$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{S}']_T = \left\{ \frac{\mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\} \{\Sigma^1\}]_T \quad \cdots \quad \mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\} \{\Sigma^l\}]_T}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\Sigma\}} \right\}_{[R]}$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\Sigma\}$ .

### Construction de $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_B$ :

– Cas 1 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\langle \Delta, \langle \Delta', A^+ \rangle \rangle\}} \right\}_{[\diamond_I]} \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_B = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\langle \Delta, \Delta', A^+ \rangle\}]_B}{\Gamma\{\langle \Delta, \Delta', A^+ \rangle\}} \right\}_{[\diamond_I^B]}$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\langle \Delta, \diamond A^+, \Delta' \rangle\}$ .

– Cas 2 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\langle \Delta, \square A^+, \langle \Delta' \rangle \rangle\}} \right\}_{[\square_E]} \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_B = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\langle \Delta, \square A^+, \Delta' \rangle\}]_B}{\Gamma\{\langle \Delta, \Delta', A^+ \rangle\}} \right\}_{[\square_E^B]}$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\langle \Delta, \Delta', A^+ \rangle\}$ .

– Cas 3 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+, \langle \Delta' \rangle \rangle\}} \right\}_{[\diamond_I^B]} \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_B = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\langle \Delta, A^+, \Delta' \rangle\}]_B}{\Gamma\{\langle \Delta, \Delta', \diamond A^+ \rangle\}} \right\}_{[\diamond_I]}$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\langle \Delta, \Delta', \diamond A^+ \rangle\}$ .

– Cas 4 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}'}{\Gamma\{\langle \Delta, \langle \Delta', \square A^+ \rangle \rangle\}} \right\}_{[\square_E^B]} \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_B = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\langle \Delta, \Delta', \square A^+ \rangle\}]_B}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+, \Delta' \rangle\}} \right\}_{[\square_E]}$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\langle \Delta, A^+, \Delta' \rangle\}$ .

- **Cas 5** : Ce cas englobe tous les cas qui n'ont pas été traités précédemment :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}_1 \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\} \{\langle \Sigma_1^1, \langle \Sigma_2^1 \rangle\} \quad \cdots \quad \mathcal{D}_l \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\} \{\langle \Sigma_1^l, \langle \Sigma_2^l \rangle\}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\langle \Sigma_1, \langle \Sigma_2 \rangle\}} \right\} [R] \text{ alors}$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{S}']_B = \left\{ \frac{\mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\} \{\langle \Sigma_1^1, \Sigma_2^1 \rangle\}]_B \quad \cdots \quad \mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\} \{\langle \Sigma_1^l, \Sigma_2^l \rangle\}]_B}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle\}} \right\} [R]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle\}$ .

Construction de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_4$  :

- **Cas 1** :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}' \Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle \Delta, A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle \Delta, \diamond A^+ \rangle\}} \right\} [\diamond_I] \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_4 = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Gamma'\{\Delta, A^+\}\}]_4}{\Gamma\{\Gamma'\{\Delta, \diamond A^+\}\}} \right\} [\diamond_I^4]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Gamma'\{\Delta, \diamond A^+\}\}$ .

- **Cas 2** :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}' \Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle \Delta, \square A^+ \rangle\}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle \Delta, A^+ \rangle\}} \right\} [\square_E] \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_4 = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Gamma'\{\Delta, \square A^+\}\}]_4}{\Gamma\{\Gamma'\{\Delta, A^+\}\}} \right\} [\square_E^4]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Gamma'\{\Delta, A^+\}\}$ .

- **Cas 3** : Ce cas englobe tous les cas qui n'ont pas été traités précédemment :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}_1 \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^1\} \cdots \{\Sigma_m^1\} \{\emptyset, \langle \Delta^1 \rangle\}\} \quad \cdots \quad \mathcal{D}_l \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^l\} \cdots \{\Sigma_m^l\} \{\emptyset, \langle \Delta^l \rangle\}\}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^0\} \cdots \{\Sigma_m^0\} \{\emptyset, \langle \Delta \rangle\}\}} \right\} [R]$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{S}']_4 = \left\{ \frac{\mathcal{D}_1[\mathcal{S}'^1]_4 \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^1\} \cdots \{\Sigma_m^1\} \{\Delta_1\}\} \quad \cdots \quad \mathcal{D}_l[\mathcal{S}'^l]_4 \Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^l\} \cdots \{\Sigma_m^l\} \{\Delta_l\}\}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^0\} \cdots \{\Sigma_m^0\} \{\Delta\}\}} \right\} [R]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^0\} \cdots \{\Sigma_m^0\} \{\Delta\}\}$  et, pour tout  $i \in [1, l]$ ,  $\mathcal{S}^i = \Gamma\{\Delta_1^i\} \cdots \{\Delta_k^i\} \{\Gamma'\{\Sigma_1^i\} \cdots \{\Sigma_m^i\} \{\Delta^i\}\}$ .

Construction de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}]_5$  :

- **Cas 1** :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}' \Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\} \{\emptyset\}}{\Gamma\{\langle \Delta, \diamond A^+ \rangle\} \{\emptyset\}} \right\} [\diamond_I] \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_5 = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\emptyset\} \{\Delta, A^+\}]_5}{\Gamma\{\diamond A^+\} \{\Delta\}} \right\} [\diamond_I^5]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\diamond A^+\} \{\Delta\}$ .

- **Cas 2** :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \left\{ \frac{\mathcal{D}' \Gamma\{\langle \Delta, \square A^+ \rangle\} \{\emptyset\}}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\} \{\emptyset\}} \right\} [\square_E] \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_5 = \left\{ \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\square A^+\} \{\Delta\}]_5}{\Gamma\{\emptyset\} \{\Delta, A^+\}} \right\} [\square_E^5]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\emptyset\} \{\Delta, A^+\}$ .

– Cas 3 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}'}{\frac{\Gamma\{\Gamma'\{\langle\Delta, A^+\rangle\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\Gamma'\{\langle\Delta\rangle\}, \diamond A^+\}\{\emptyset\}}} [\diamond_I^4] \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_5 = \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}\}\{\Delta, A^+\}]_5}{\frac{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}\}\{\Delta, A^+\}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \diamond A^+\}\{\Delta\}}} [\diamond_I^5]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \diamond A^+\}\{\Delta\}$ ,  $\text{prof}(\Gamma\{\emptyset\}) \geq 1$  et  $\text{prof}(\Gamma'\{\}) > 1$ .

– Cas 4 :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}'}{\frac{\Gamma\{\Gamma'\{\langle\Delta\rangle\}, \square A^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\Gamma'\{\langle\Delta, A^+\rangle\}\{\emptyset\}}} [\square_E^4] \text{ alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_5 = \frac{\mathcal{D}'[\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \square A^+\}\{\Delta\}]_5}{\frac{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \square A^+\}\{\Delta\}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}\}\{\Delta, A^+\}}} [\square_E^5]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}\}\{\Delta, A^+\}$ ,  $\text{prof}(\Gamma\{\emptyset\}) \geq 1$  et  $\text{prof}(\Gamma'\{\}) > 1$ .

– Cas 6 : Ce cas englobe tous les cas qui n'ont pas été traités précédemment :

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\langle\Delta^1\rangle\}\{\emptyset\}} \cdots \frac{\mathcal{D}_l}{\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\langle\Delta^l\rangle\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\langle\Delta\rangle\}\{\emptyset\}} [R]$$

$$\mathcal{D}[\mathcal{S}']_5 = \frac{\frac{\mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta^1\}]_5}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta^1\}} \cdots \frac{\mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\}\{\Delta^l\}]_5}{\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\}\{\Delta^l\}}}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta\}} [R]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta\}$ .

Construction de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IS5}}$  :

$$\text{Si } \mathcal{D} = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\langle\Delta^1\rangle\}\{\emptyset\}} \cdots \frac{\mathcal{D}_l}{\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\langle\Delta^l\rangle\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\Delta_1^0\} \cdots \{\Delta_k^0\}\{\langle\Delta\rangle\}\{\emptyset\}} [R]$$

$$\text{alors } \mathcal{D}[\mathcal{S}']_{\text{IS5}} = \frac{\frac{\mathcal{D}_1[\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta^1\}]_{\text{IS5}}}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta^1\}} \cdots \frac{\mathcal{D}_l[\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\}\{\Delta^l\}]_{\text{IS5}}}{\Gamma\{\Delta_1^l\} \cdots \{\Delta_k^l\}\{\emptyset\}\{\Delta^l\}}}{\Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta\}} [R]$$

où  $\mathcal{S}' = \Gamma\{\Delta_1^1\} \cdots \{\Delta_k^1\}\{\emptyset\}\{\Delta\}$ .

Pour tout  $x \in \{T, B, 4, 5, \text{IS5}\}$ , on note  $\rightarrow_x^*$  la clôture réflexive et transitive de  $\rightarrow_x$ . Soient  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux A-séquents tels que  $\mathcal{S} \rightarrow_x^n \mathcal{S}'$ . Nous étendons la définition de  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_x$  à la relation  $\rightarrow_x^*$  par induction sur la valeur de  $n$  comme suit :

- si  $n = 0$  alors  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_x = \mathcal{D}$ ;
- sinon,  $\mathcal{D}[\mathcal{S}']_x = (\mathcal{D}[\mathcal{S}''']_x)[\mathcal{S}']_x$  tel que  $\mathcal{S} \rightarrow_w \mathcal{S}'' \rightarrow_w^{n-1} \mathcal{S}'$ .

**Règles de réduction :**

–  $\square^T$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle A^+\rangle\}} [\square_I]}{\frac{\Gamma\{\square A^+\}}{\Gamma\{A^+\}}} [\square_E^T] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{A^+\}]_T}{\Gamma\{A^+\}}$$



–  $\diamond^T$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}} [\diamond_I^T] \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{x : A\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}} [\diamond_E] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\emptyset\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{x : A\}\{C^+\}]_T$

–  $\square^B$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle \Delta, \langle A^+ \rangle \rangle\}}}{\Gamma\{\langle \Delta, \square A^+ \rangle\}} [\square_I] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}]_B}{\Gamma\{A^+\}}}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}} [\square_E^B]$$

–  $\diamond^B$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\langle \Delta, A^+ \rangle\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\langle \Delta, \diamond A^+ \rangle\}\{\emptyset\}} [\diamond_I^B] \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\langle \Delta, \langle x : A \rangle \rangle\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle\}\{C^+\}} [\diamond_E] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\langle \Delta \rangle\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{\langle \Delta, x : A \rangle\}]_B$

–  $\square^4$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle A^+ \rangle\}}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \square A^+\}} [\square_I] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{\Gamma'\{A^+\}\}]_4}{\Gamma\{A^+\}}}{\Gamma\{\Gamma'\{A^+\}\}} [\square_E^4]$$

–  $\diamond^4$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{\Gamma\{A^+\}\}\{\emptyset\}}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \diamond A^+\}\{\emptyset\}} [\diamond_I^4] \quad \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}, \langle x : A \rangle\}\{C^+\}}}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}\}\{C^+\}} [\diamond_E] \quad \sim \quad \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\Gamma'\{\emptyset\}\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{\Gamma'\{x : A\}\}\{C^+\}]_4$

–  $\square^5$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}\{\emptyset\}}}{\frac{\Gamma\{\square A^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}} \begin{array}{l} [\square_I] \\ [\square_E^5] \end{array} \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}]_5}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}$$

–  $\diamond^5$ -réduction :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}} \begin{array}{l} [\diamond_I^5] \\ [\diamond_E] \end{array}}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}} \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\emptyset\}\{\langle x : A \rangle\}\{C^+\}} \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{x : A\}\{\emptyset\}\{C^+\}]_5$

–  $\square^{\text{IS5}}$ -réduction :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\Gamma\{\langle A^+ \rangle\}\{\emptyset\}}}{\frac{\Gamma\{\square A^+\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}} \begin{array}{l} [\square_I] \\ [\square_E^{\text{IS5}}] \end{array} \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}[\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}]_{\text{IS5}}}{\Gamma\{\emptyset\}\{A^+\}}$$

–  $\diamond^{\text{IS5}}$ -réduction :

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma\{A^+\}\{\emptyset\}\{\emptyset\}}{\Gamma\{\emptyset\}\{\diamond A^+\}\{\emptyset\}} \begin{array}{l} [\diamond_I^{\text{IS5}}] \\ [\diamond_E] \end{array}}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}} \frac{\mathcal{D}_2}{\Gamma\{\emptyset\}\{\langle x : A \rangle\}\{C^+\}} \rightsquigarrow \frac{\mathcal{D}'_2[x/\mathcal{D}_1]}{\Gamma\{\emptyset\}\{\emptyset\}\{C^+\}}$$

où  $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}[\Gamma\{x : A\}\{\emptyset\}\{C^+\}]_{\text{IS5}}$



