



**HAL**  
open science

# Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires

Ibrahima N'Doye

► **To cite this version:**

Ibrahima N'Doye. Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2011. Français. NNT : 2011NAN10007 . tel-01746396

**HAL Id: tel-01746396**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01746396v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 23 février 2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1  
et de l'Université Hassan II Aïn Chock – Casablanca  
(spécialité automatique)

par

**Ibrahima N'DOYE**

### Composition du jury

- Président :* M. DAROUACH Professeur, CRAN, Nancy Université, Nancy
- Rapporteurs :* A. BENZAOUIA Professeur, LAEP - U2RC, Université Cadi Ayyad de Marrakech  
N. EL ALAMI Professeur, LAII - EMI, Université Mohammed V de Rabat  
A. OUSTALOUP Professeur, ENSEIRB - MATMECA, Université de Bordeaux I
- Examineurs :* N. RADHY Professeur, LP2MT, Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca  
M. ZASADZINSKI Professeur, CRAN, Nancy Université, Nancy
- Invités :* A. BAALAL Professeur, LMACS, Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca  
A. BOUAZIZ Professeur, ESTC, Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et de Monsieur Nour-Eddine RADHY, Professeur à l'Université Hassan II Aïn Chock - Casablanca.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Abdellah BENZAOUIA, Professeur à l'Université Cadi Ayyad de Marrakech (LAEP-U2RC) et Monsieur Nour-Eddine EL ALAMI, Professeur à l'Université Mohammed V de Rabat (LAII-EMI). Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement Monsieur Alain OUSTALOUP, Professeur à l'Université de Bordeaux I (ENSEIRB-MATMECA) pour l'attention qu'il a manifesté à mes travaux de recherches et pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ce mémoire. De plus, je garde et garderai un très bon souvenir de mon passage à Bordeaux.

Je tiens à remercier, Monsieur Abdelhaq BOUAZIZ, Professeur à l'Ecole Supérieure de Technologie de Casablanca (ESTC) et Monsieur Azzedine BAALAL, Professeur à l'Université Hassan II Aïn Chock - Casablanca (LMACS) pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.

Que Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, pour m'avoir encouragé et aidé tout au long de mes recherches.

Je tiens à remercier vivement mes Directeurs de Thèse, Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN et Monsieur Nour-Eddine RADHY, Professeur à l'Université Hassan II Aïn Chock - Casablanca, pour leur disponibilité et leur soutien permanent. Leurs qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je leur en suis très reconnaissant.

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'équipe de Longwy du CRAN que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse : Harouna SOULEY ALI, Hugues RAFARALAHY, Mohamed BOUTAYEB, Latifa BOUTAT-BADDAS, Ali ZEMOUCHE, Cédric DELATTRE, Christophe FONTE, Benjamin GERARD, Boulaïd BOULKROUNE, Bertrand GRANDVALLET, Mohamed ZERROUGUI, Lama HASSAN, Arnaud KOEHL et Mohamed BENALLOUCH. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse.

Je tiens à remercier Madame Marie-Pascale SAINT MICHEL, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN et Madame Joëlle PINELLI, secrétaire à l'Institut Universitaire de Technologie Henri Poincaré de Longwy, pour leurs soutiens, sans oublier Allison BORDIER pour son aide dans l'organisation de la soutenance.

Je remercie également l'ensemble du personnel de l'Institut Universitaire de Technologie Henri Poincaré de Longwy, de l'Ecole Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy (ESSTIN), de la Faculté des Sciences Aïn Chock de Casablanca (FSAC) et de l'Ecole Supérieure de Technologie de Casablanca (ESTC).

Durant ces années, mes parents Moustapha et Khady Samba DIOUF, mes frères et sœurs FATOU, LAMINE (sa femme ANNA et ses enfants), N'DEYE KHADY, AÏDA, PAPIS, LAYE et ADJI, mon cousin AMETH (sa femme et ses enfants), mon homonyme, ainsi que mes ami(e)s BARO, BABOU, DIADJI, FALLOU, DEMBA, TITO, DADO, MAGUY, SAFIA, DINA, FATIM, AÏSSA, ont toujours été présents et m'ont apporté leur soutien. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Abdou DIOP, directeur associé du Cabinet Mazars Masnaoui de Casablanca et Monsieur Alioune GUEYE, président directeur général du groupe Afrique Challenge pour leur soutien durant ces trois années de thèse.

Mes remerciements vont aussi à l'égard de Monsieur Cheikh Tidiane SAL, Consul Général du Sénégal à Casablanca, pour sa disponibilité et pour m'avoir fait l'honneur d'assister à ma soutenance de thèse.

J'adresse également mes remerciements au Gouvernement du Sénégal, à l'Agence Marocaine de Coopération Internationale (AMCI) et à l'Institut Francophone d'Etudes et d'Analyses Systémiques (IFEAS).

Enfin, j'aimerais conclure en saluant tous ceux qui luttent, individuellement ou collectivement, pour vivre dignement aujourd'hui.

*À la mémoire de mon père.*

*À mes chers parents Moustapha et Khady Samba DIOUF,  
Ceci est le fruit de tant d'années de votre éducation, de votre attention et de vos efforts.  
Vous trouverez dans cet humble travail l'expression de ma reconnaissance et de mon éternelle  
gratitude.*

*Ku yàgg ci teen, baag fekk la fa.  
Qui attend longtemps au puits finira par y trouver un seau à puiser.  
Source : Léebu, proverbes wolof. CILF/edicef/ACCT. 1986*





# Table des matières

Liste des publications
------------------------

Symboles et abréviations
--------------------------

Introduction générale	1
-----------------------	---

Chapitre 1 Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes non linéaires	5
--	---

1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Description des systèmes non linéaires et stabilité des points d'équilibre . .	6
1.2.1	Les systèmes non linéaires affines . . . . .	7
1.2.2	Les systèmes bilinéaires . . . . .	7
1.2.3	Points d'équilibre et stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	9
1.2.3.1	Définitions . . . . .	9
1.2.3.2	Exemple : Commande par retour de sortie statique d'un système bilinéaire . . . . .	10
1.3	Rappels sur les systèmes linéaires . . . . .	14
1.3.1	Stabilité . . . . .	14
1.3.2	Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité . . . .	15
1.3.3	Norme $\mathcal{H}_\infty$ , gain $\mathcal{L}_2$ et lemme borné réel . . . . .	17
1.3.4	Systèmes linéaires incertains . . . . .	18
1.4	Présentation de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman .	21
1.4.1	Forme standard du lemme de Gronwall-Bellman . . . . .	21
1.4.2	Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un seul paramètre . . . . .	22

1.4.3	Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres . . . . .	23
1.5	Stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique . . .	23
1.5.1	Stabilisation par retour d'état statique . . . . .	24
1.5.2	Stabilisation par retour de sortie statique . . . . .	26
1.5.3	Justification de l'hypothèse 1.5.1 . . . . .	27
1.5.4	A propos du domaine d'attraction . . . . .	30
1.5.5	Exemple : Cas d'un système bilinéaire . . . . .	31
1.6	Stabilisation exponentielle avec la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres . . . . .	32
1.6.1	Stabilisation par retour d'état statique . . . . .	33
1.6.2	Stabilisation par retour de sortie statique . . . . .	35
1.7	Stabilisation robuste par retour de sortie statique des systèmes non linéaires	36
1.8	Commande basée sur un observateur . . . . .	39
1.9	Conclusion . . . . .	43

<b>Chapitre 2</b>
-------------------

<b>Les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire : Théorie et applications 45</b>
--

2.1	Introduction . . . . .	46
2.2	Historique . . . . .	46
2.3	Exemples d'applications des systèmes fractionnaires . . . . .	47
2.3.1	Automatique . . . . .	48
2.3.2	Thermique : Diffusion et équation de la chaleur . . . . .	49
2.3.3	Electricité . . . . .	52
2.3.4	Rhéologie . . . . .	53
2.3.5	Electrochimie . . . . .	54
2.4	Théorie de la dérivation non entière . . . . .	56
2.4.1	Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière . . . . .	56
2.4.1.1	La fonction Gamma . . . . .	56
2.4.1.2	La fonction Mittag-Leffler . . . . .	56
2.4.2	Définitions et propriétés . . . . .	58
2.4.2.1	Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov . . . . .	59
2.4.2.2	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	59
2.4.2.3	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	60
2.4.2.4	Propriétés . . . . .	62

---

2.4.3	Interprétations géométrique et physique . . . . .	62
2.4.4	Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier . . . . .	63
2.4.5	Méthodes opérationnelles fractionnaires . . . . .	63
2.4.5.1	Eléments sur la transformée de Laplace . . . . .	63
2.4.5.2	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire . . . . .	64
2.4.6	Equations différentielles fractionnaires . . . . .	65
2.4.6.1	Equation différentielle fractionnaire à un seul terme . . . . .	65
2.4.6.2	Equation différentielle fractionnaire à deux termes . . . . .	66
2.4.6.3	Equation différentielle fractionnaire à trois termes . . . . .	66
2.4.6.4	Equation différentielle fractionnaire à $n$ -termes . . . . .	67
2.4.7	Représentation dans l'espace d'état . . . . .	68
2.4.8	Systèmes fractionnaires d'ordres commensurable et non commensurable . . . . .	69
2.4.8.1	Systèmes fractionnaires d'ordre non commensurable . . . . .	70
2.4.8.2	Systèmes fractionnaires d'ordre commensurable . . . . .	71
2.4.8.3	Matrice de transition fractionnaire . . . . .	72
2.4.8.4	Solution de l'équation d'état fractionnaire . . . . .	73
2.4.9	Evaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles . . . . .	75
2.4.10	Solutions numériques des équations à dérivée fractionnaire . . . . .	77
2.4.10.1	Equation d'oscillation-relaxation à dérivée fractionnaire . . . . .	78
2.4.10.2	Equation de Bagley-Torvik à dérivée fractionnaire . . . . .	78
2.5	Etude des systèmes chaotiques fractionnaires . . . . .	79
2.5.1	Caractérisation du chaos . . . . .	81
2.5.2	Système chaotique fractionnaire de Lorenz . . . . .	81
2.6	Stabilité . . . . .	85
2.6.1	Stabilité des systèmes fractionnaires . . . . .	85
2.6.2	Stabilité des systèmes fractionnaires dans une région $\mathcal{GLMI}$ . . . . .	86
2.7	Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité . . . . .	89
2.8	Conclusion . . . . .	91

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires</b>
--

<b>93</b>
-----------

3.1	Introduction . . . . .	94
3.2	Stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires . . . . .	95

3.2.1	Approche par placement de pôles . . . . .	96
3.2.1.1	Stabilisation par retour d'état statique . . . . .	96
3.2.1.2	Stabilisation par retour de sortie . . . . .	96
3.2.1.3	Exemple . . . . .	97
3.2.2	Approche LMI . . . . .	99
3.2.2.1	Cas $1 < \alpha < 2$ . . . . .	99
3.2.2.2	Cas $0 < \alpha < 1$ . . . . .	100
3.2.2.3	Exemple . . . . .	101
3.3	Stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires . . . . .	103
3.3.1	Présence d'incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives . . . . .	103
3.3.2	Présence d'incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme	106
3.3.2.1	Stabilisation robuste du système fractionnaire (3.30) . . .	108
3.3.2.2	Stabilisation robuste du système fractionnaire (3.33) . . .	111
3.4	Commande basée sur un observateur pour les systèmes linéaires fractionnaires	113
3.5	Stabilité et stabilisation des systèmes singuliers linéaires fractionnaires . . .	115
3.5.1	Systèmes singuliers linéaires fractionnaires . . . . .	115
3.5.1.1	Régularité et modes impulsionnels . . . . .	116
3.5.1.2	Stabilité . . . . .	117
3.5.2	Stabilisation . . . . .	119
3.5.2.1	Forme canonique de Weierstrass . . . . .	119
3.5.2.2	Régularisation . . . . .	124
3.6	Stabilisation robuste des systèmes singuliers linéaires fractionnaires . . . .	130
3.6.1	Cas $1 < \alpha < 2$ . . . . .	130
3.6.2	Cas $0 < \alpha < 1$ . . . . .	132
3.6.3	Exemple . . . . .	135
3.7	Observateurs pour les systèmes linéaires fractionnaires . . . . .	135
3.7.1	Position du problème . . . . .	136
3.7.2	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $1 < \alpha < 2$ . . . . .	137
3.7.3	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $0 < \alpha < 1$ . . . . .	137
3.8	Observateurs pour les systèmes singuliers linéaires fractionnaires . . . . .	137
3.8.1	Position du problème . . . . .	138
3.8.2	Paramétrage des matrices et synthèse de l'observateur . . . . .	140
3.8.3	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $1 < \alpha < 2$ . . . . .	141

---

3.8.4	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $0 < \alpha < 1$ . . . . .	142
3.8.5	Algorithme de synthèse . . . . .	143
3.8.6	Synthèse d'observateurs d'ordre minimal, d'ordre réduit et d'ordre plein . . . . .	143
3.9	Conclusion . . . . .	144

<b>Chapitre 4</b>
-------------------

<b>Stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires</b>	<b>147</b>
--	------------

4.1	Introduction . . . . .	147
4.2	Présentation des systèmes affines non linéaires fractionnaires . . . . .	149
4.3	Stabilisation des systèmes non linéaires affines fractionnaires . . . . .	150
4.3.1	Approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est linéaire . . . . .	150
4.3.1.1	Retour d'état statique . . . . .	150
4.3.1.2	Retour de sortie statique . . . . .	153
4.3.1.3	Exemple . . . . .	154
4.3.2	Approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est non linéaire . . . . .	154
4.3.2.1	Stabilisation par retour d'état statique . . . . .	155
4.3.2.2	Stabilisation par retour de sortie statique . . . . .	156
4.3.3	Approche LMI lorsque la dérive est linéaire . . . . .	157
4.4	Commande basée sur un observateur pour les systèmes affines non linéaires fractionnaires . . . . .	158
4.5	Stabilisation robuste des systèmes non linéaires fractionnaires . . . . .	160
4.6	Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires . . . . .	162
4.6.1	Approche Mittag-Leffler . . . . .	162
4.6.2	Approche LMI . . . . .	163
4.7	Stabilisation robuste des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires . . . . .	164
4.8	Observateurs pour les systèmes non linéaires fractionnaires . . . . .	166
4.9	Observateurs pour les systèmes singuliers non linéaires fractionnaires . . . . .	169
4.9.1	Position du problème . . . . .	169
4.9.2	Paramétrage des matrices et synthèse de l'observateur . . . . .	171
4.9.3	Stabilité de l'erreur d'observation . . . . .	172
4.10	Conclusion . . . . .	173

<b>Conclusion générale</b>
----------------------------

<b>Annexe A</b>	
<b>Sur la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman</b>	<b>177</b>
A.1	Forme standard du lemme de Gronwall-Bellman . . . . . 177
A.2	Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un seul paramètre 178
A.3	Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres 179
<b>Annexe B</b>	
<b>Compléments mathématiques</b>	<b>183</b>
B.1	Produit de Kronecker . . . . . 183
B.2	Les inégalités matricielles linéaires (LMI) . . . . . 184
B.3	Lemme de Schur . . . . . 184
B.4	Rappels sur l'équation différentielle de Bernoulli . . . . . 185
B.5	Coefficients binomiaux . . . . . 185
B.5.1	Définitions et propriétés . . . . . 185
B.5.2	Extension aux nombres complexes . . . . . 186
<b>Annexe C</b>	
<b>Sur la stabilité des systèmes d'ordre non entier</b>	<b>187</b>
C.1	$\mathcal{D}$ -stabilité et inégalités matricielles linéaires généralisées $\mathcal{G}$ -LMI . . . . . 187
C.1.1	Définition d'une région $\mathcal{GLMI}$ . . . . . 187
C.1.2	Condition nécessaire et suffisante de stabilité dans une région $\mathcal{GLMI}$ 187
C.2	Application à la $\mathcal{D}$ -stabilité dans une union de sous-régions convexes . . . 188
C.2.1	Régions du premier ordre . . . . . 188
C.2.2	Formulation $\mathcal{GLMI}$ de l'union de sous-régions convexes du premier ordre . . . . . 189
C.2.3	Approche $\mathcal{GLMI}$ pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire si $0 < \alpha < 1$ . . . . . 190
<b>Bibliographie</b>	<b>193</b>
<b>Résumé</b>	<b>203</b>
<b>Abstract</b>	<b>204</b>

# Liste des publications

## Conférences internationales avec comité de lecture

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, N. E. Radhy and A. Bouaziz, "Robust controller design for linear fractional-order systems with nonlinear time-varying model uncertainties". In *17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09*, Thessaloniki, Greece, 2009.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, N. E. Radhy and A. Bouaziz, "Stabilization of a class of nonlinear affine fractional-order systems using generalizations of Bellman-Gronwall lemma". In *17th Mediter. Conf. on Control and Automation, MED'09*, Thessaloniki, Greece, 2009.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, N. E. Radhy and M. Darouach, "Exponential observer-based stabilization for a class of affine nonlinear systems". In *IFAC - IEEE Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR'09*, Miedzydroje, Poland, 2009.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Observer-based control for fractional-order continuous-time systems". In *IEEE Conference Decision and Control, CDC'09*, Shanghai, P.R. China, 2009.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Stabilization of a class of nonlinear affine fractional-order systems". In *IFAC - IEEE Conference Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR'09*, Miedzydroje, Poland, 2009.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, N. E. Radhy and M. Darouach, "Stabilisation des systèmes bilinéaires fractionnaires". In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'10* Nancy, France, 2010.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, N. E. Radhy and M. Darouach, "Stabilization of singular fractional-order systems : An LMI approach". In *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10* Marrakech, Morocco, 2010.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Robust stabilization of linear and nonlinear fractional-order systems with nonlinear uncertain parameters". In *49th IEEE Conference Decision and Control, CDC'10*, Atlanta, USA, 2010.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Regularization and stabilization of singular fractional-order systems". In *4th IFAC Workshop on Fractional Differential and Its Applications FDA'10*, Badajoz, Spain, 2010.

**I. N' Doye**, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Regularization and robust stabilization of uncertain singular fractional-order systems". In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.



# Symboles et abréviations

## Ensembles

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}^+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^*$	l'ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\mathcal{B}_r$	boule ouverte de centre zéro, de rayon $r > 0$

## Fonctions et sous-espaces de fonctions

$s$	variable de la transformée de Laplace d'un signal continu ( $s \in \mathbb{C}$ )
$\mathcal{L}$	transformée de Laplace
$\mathcal{L}_\infty[0, \infty)$	espace des signaux continus à amplitude finie sur $[0, \infty)$ vers $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}_2[0, \infty)$	espace des signaux continus carré-intégrables sur $[0, \infty)$ vers $\mathbb{R}^n$
$(f(\cdot))_i$	est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $f(\cdot)$
$\mathbf{K}$	fonction de classe $K$
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}; \mathbb{R})$	ensemble des fonctions $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables $k$ fois
$E_\alpha(\cdot)$	fonction de Mittag-Leffler à un paramètre
$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$	fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

## Matrices, opérations et relations matricielles

$P > 0, P \geq 0$	matrice $P$ hermitienne définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q, P \geq Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geq 0$ ) pour $P, Q$ hermitiennes $\in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\text{tr}(A)$	trace de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$(A)_{ik}$	$(i, k)$ <sup>ème</sup> élément de $A$
$\dim(A)$	dimension de la matrice $A$
$\text{Re}(A)$	partie réelle de $A$
$\text{Im}(A)$	partie imaginaire de $A$
$\lambda(A)$	valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$	valeur propre de module maximal (resp. minimal) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$A^*$	transposée hermitienne (transposée complexe conjuguée) de $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$
$\text{Sym}(A)$	$(A + A^*)$
$\text{spec}(A)$	spectre de la matrice $A$ : ensemble des valeurs propres de $A$
$A^T, A^{-T}$	transposée de $A$ (resp. de l'inverse de $A$ ) $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A^{-1}$	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(A) \neq 0$
$A^+$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifiant $AA^+A = A$
$I, 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n, 0_{n \times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$ )
$\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléments de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, p$
$\text{bdiag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \dots, A_p$ ( $A_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ), $i = 1, \dots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (1,2)^T & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée telle que le symbole $(1,2)^T$ représente le transposé du bloc $(1,2)$ , soit $A_{12}^T$
$\otimes$	produit de Kronecker

---

## Normes

$\ x\  = \sqrt{x^*x}$	norme euclidienne de vecteur
$\ A\  = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$	norme spectrale de matrice où $\lambda_{\max}(A^*A)$ est la valeur propre maximale de la matrice symétrique $A^*A$
$\ x\ _{\infty}$	norme $\mathcal{L}_{\infty}$ du signal $x \in \mathcal{L}_{\infty}[0, \infty)$
$\ x\ _2$	norme $\mathcal{L}_2$ du signal $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$
$\ G\ _{\infty}$	norme $\mathcal{H}_{\infty}$ du système continu $G(s)$

## Autres opérateurs mathématiques

*	produit de convolution
$\arg(\cdot)$	argument d'un nombre complexe
$[\cdot]$	partie entière d'un nombre complexe
$ \cdot $	module d'un nombre complexe
$n!$	factorielle $n$
$C_z^k = \binom{z}{k}$	coefficient binomial du complexe $z$ et de l'entier naturel $k$
$D^{\alpha}$	opérateur de dérivation fractionnaire

## Abréviations

CRONE	Commande Robuste d'Ordre Non Entier
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i> - Transformation Fractionnaire Linéaire
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i> - Linéaire à Paramètres Variants
LTI	<i>Linear Time Invariant</i> - Linéaire Invariant dans le Temps
LTV	<i>Linear Time Varying</i> - Linéaire à Variant dans le Temps
MIMO	<i>Multi Input Multi Output</i> - Multi-Entrée Multi-Sortie
SISO	<i>Single Input Single Output</i> - Mono-Entrée Mono-Sortie



# Introduction générale

La stabilisation et l'observation pour des systèmes non linéaires à dérivée d'ordre non entier restent des problèmes ouverts en automatique du fait de la nature fractionnaire et de la non linéarité de ces systèmes. En effet, la stabilisation est l'une des préoccupations majeures aussi bien des chercheurs que des ingénieurs. Les méthodes de stabilisation des systèmes linéaires sont nombreuses ; elles se basent en général sur les techniques de placement de pôles ou la minimisation d'un critère quadratique et conduisent à des retours d'état dont l'implantation nécessite le recours aux observateurs lorsque l'état est partiellement mesuré. La première méthode de Lyapunov permet d'utiliser ces résultats pour la commande des systèmes non linéaires à partir de leurs linéarisés et de l'utilisation d'observateurs.

Dans le cas des systèmes fractionnaires, l'absence d'une formulation adéquate de la méthode de Lyapunov ne permet pas d'utiliser efficacement cette approche dans la théorie du contrôle. Récemment, Trigeassou *et al.* [TMSO11] propose l'application de la méthode de Lyapunov aux systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires grâce à la définition d'une fonction spécifique de Lyapunov. Cette approche repose sur le concept d'un opérateur d'intégration fractionnaire caractérisé par une fréquence distribuée.

Beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre non entier, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non entier. L'étude de la stabilité des systèmes d'ordre non entier est plus délicate que pour leurs homologues, les systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales, et, d'autre part, ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe. Récemment, le problème de la synchronisation chaotique a été naturellement étendue aux systèmes fractionnaires en raison des applications nombreuses et potentielles en physique des lasers, des réacteurs chimiques, de la communication sécurisée et de la biomédecine.

Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [DN97], thermiques [BLB<sup>+</sup>00] et viscoélastiques [Ser01] sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non entières ont, à cet effet, été développés [COBB00].

La raison principale de l'usage des modèles d'ordre entier était l'absence des méthodes

de solution pour des équations fractionnaires ou d'ordre non entier. Actuellement, un bon nombre de méthodes pour l'approximation de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire ont été proposées et peuvent être employées dans diverses applications, notamment en théorie du contrôle (nouveaux contrôleurs et modèles de systèmes fractionnaires), en théorie de circuits électriques (fractances), etc ...

La dérivation fractionnaire a largement dépassé le stade de simple outil formel capable de condenser en une écriture plus compacte certaines propriétés purement analytiques ; c'est notamment par ses domaines d'application de plus en plus nombreux qu'elle a ouvert la voie à des questionnements scientifiques profonds.

Les opérateurs intégro-différentiels d'ordre fractionnaire font partie d'une plus large classe d'opérateurs pseudo-différentiels. L'élargissement du cadre ou la levée de la contrainte strictement fractionnaire s'avère très riche tant pour l'analyse que la synthèse et l'identification de modèles non standard. Il est important de comprendre que le mot "systèmes d'ordre fractionnaire" signifie tout simplement "systèmes qui sont mieux décrits par des modèles mathématiques d'ordre non entier", le système lui-même n'est pas fractionnaire au vrai sens du terme, c'est le modèle qui l'est.

Dans les dernières décennies, beaucoup d'auteurs ont affirmé que l'usage des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires est souhaitable pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme les polymères. La dérivée fractionnaire procure un excellent instrument pour la description de la propriété de mémoire de plusieurs matériaux et processus puisque, en effet, la dérivée fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée d'ordre entier. Les outils fractionnaires apparaissent aussi en automatique, notamment dans la commande des systèmes dynamiques où le système à contrôler et/ou le régulateur sont régis par des équations différentielles fractionnaires. L'introduction de ces outils fractionnaires est motivée par le caractère robuste que procure la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), introduite par A. Oustaloup [Ous91].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires. Les modèles envisagés dans le mémoire pour décrire les systèmes de manière temporelle sont dits modèles d'état linéaires invariants dans le temps. Dans le cas linéaire, l'étude de la dynamique passe par la notion de "pôles" du système. La dynamique du système dépend beaucoup de la localisation des pôles dans le plan de Laplace. Ces pôles sont choisis par une loi de commande. Cependant, lorsque le modèle est sujet à des incertitudes, il devient difficile de déterminer une loi de commande fixant avec précision la dynamique du système global : l'objectif du travail est donc de déterminer des lois de commande qui puissent garantir que les pôles du système bouclé sont dans une région du plan complexe de manière à assurer une stabilisation robuste par rapport aux incertitudes considérées. Si on ne dispose pas de la mesure de tous les états et des entrées du système, pour des raisons intrinsèques au système ou pour des coûts d'installation des capteurs très élevés, la démarche consiste donc à construire un correcteur performant en se basant sur l'estimation de l'état. Dans le cas des systèmes non linéaires fractionnaires, les méthodes de stabilisation proposées sont basées sur une généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. Pour les systèmes fractionnaires linéaires

---

et non linéaires, les résultats proposés dans ce mémoire ont été étendus aux cas des systèmes algébro-différentiels fractionnaires, aussi appelés systèmes singuliers fractionnaires.

Les développements résumés ci-dessus constituent les quatre chapitres de ce mémoire. Nous allons en décrire les principaux aspects.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, certains développements et démonstrations sont donnés en annexe.

## **Chapitre 1 : Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes non linéaires**

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires à dérivée d'ordre entier et à la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. La démonstration de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman sera établie dans l'annexe A afin de ne pas alourdir ce chapitre.

Dans ce chapitre, les systèmes non linéaires considérés sont présentés, en mettant l'accent sur les systèmes affines (bilinéaires et multilinéaires) avec quelques exemples. Cette nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman est utilisée pour la stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique des systèmes non linéaires [NZD<sup>+</sup>10]. Cette approche est mise en œuvre dans le chapitre 4 pour la stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires. Ensuite, la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman sera appliquée à la stabilisation robuste [NZD<sup>+</sup>10] et à la commande basée sur un observateur [NZRD09] pour les systèmes non linéaires.

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur la spécificité de cette nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman qui permet de prendre en compte une grande classe de non linéarités et qui est bien adaptée au contexte de la commande robuste en présence d'incertitudes paramétriques et de la commande basée sur un observateur.

## **Chapitre 2 : Les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire : Théorie et applications**

Ce chapitre est dédié à la présentation des systèmes à dérivée d'ordre non entier qui sont l'objet des développements des chapitres 3 et 4 et au rappel des principaux résultats de la littérature concernant ces systèmes. Des exemples de processus décrits par des équations différentielles avec une dérivation non entière sont présentés.

Un rappel historique et une description exhaustive de la théorie de la dérivation fractionnaire sont proposés : les différentes définitions de la dérivation fractionnaire proposées dans la littérature (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo), la transformation de Laplace, les fonctions de Mittag-Leffler, les critères de stabilité,... Les interprétations géométrique et physique de la dérivée fractionnaire sont mises en exergue.

L'analyse des solutions des équations différentielles fractionnaires linéaires est développée. La représentation d'état fractionnaire dans l'espace d'état est donnée (en réalité,

il faut plutôt parler de pseudo-état, voir remarque 2.4.3). Le choix de la dérivation au sens de Caputo pour la suite des développements dans ce manuscrit est justifié.

## **Chapitre 3 : Stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires**

Ce chapitre est consacré à la stabilisation des systèmes linéaires avec dérivation non entière. Nous nous intéressons particulièrement aux types de commandes suivants : le retour d'état statique, le retour de sortie statique et le retour de sortie via un observateur. L'approche est basée soit sur l'approche par placement de pôles, soit sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI) appliquées dans deux domaines du plan complexe : un domaine convexe où on peut naturellement caractériser une inégalité matricielle linéaire avec les résultats déjà connus dans la littérature (ordre de dérivation compris entre 1 et 2) et un domaine non convexe (ordre de dérivation compris entre 0 et 1).

Le domaine non convexe constitue un point délicat lorsque l'on souhaite exhiber des conditions non conservatrices pour la stabilisation. La méthodologie mise en œuvre dans ce chapitre est étendue à la stabilisation robuste en présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle.

Pour conclure ce chapitre, nous proposons une extension de nos résultats sur la stabilisation des systèmes singuliers fractionnaires. L'approche utilisée est basée sur la forme canonique de Weisstrass afin d'avoir une décomposition du système singulier fractionnaire en deux sous-systèmes (rapide et lent). Ainsi, le problème de la stabilité se résume alors à étudier la stabilité du sous-système lent sous l'hypothèse d'admissibilité [NZDR10c]. L'étude de la stabilisation des systèmes singuliers linéaires fractionnaires est également faite en intégrant des conditions de régularisation [NZDR10a].

## **Chapitre 4 : Stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires**

Ce chapitre est dédié à la stabilisation des systèmes non linéaires affines en la commande avec dérivation non entière. L'application de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à la fonction de Mittag-Leffler permet de proposer des stratégies de stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie en considérant deux cas : retour de sortie statique et retour de sortie basée sur un observateur.

Dans ce chapitre, des conditions pour la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires sont étudiés via une approche basée sur l'utilisation de la fonction de Mittag-Leffler et une formulation des conditions de stabilité basée sur des inégalités matricielles linéaires (LMI) [NZDR09b, NZRB09b, NZRD10].

La stabilisation robuste [NZRB09a] et la commande basée sur un observateur pour les systèmes non linéaires fractionnaires [NZDR09a] sont également traitées.

L'étude de la stabilisation et de la stabilisation robuste des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires est réalisée en intégrant des conditions de régularisation [NZDR10a].



# Chapitre 1

## Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes non linéaires

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Description des systèmes non linéaires et stabilité des points d'équilibre</b> . . . . .	<b>6</b>
1.2.1	Les systèmes non linéaires affines . . . . .	7
1.2.2	Les systèmes bilinéaires . . . . .	7
1.2.3	Points d'équilibre et stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	9
<b>1.3</b>	<b>Rappels sur les systèmes linéaires</b> . . . . .	<b>14</b>
1.3.1	Stabilité . . . . .	14
1.3.2	Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité . . . . .	15
1.3.3	Norme $\mathcal{H}_\infty$ , gain $\mathcal{L}_2$ et lemme borné réel . . . . .	17
1.3.4	Systèmes linéaires incertains . . . . .	18
<b>1.4</b>	<b>Présentation de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman</b> . . . . .	<b>21</b>
1.4.1	Forme standard du lemme de Gronwall-Bellman . . . . .	21
1.4.2	Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un seul paramètre . . . . .	22
1.4.3	Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres . . . . .	23
<b>1.5</b>	<b>Stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique</b> . . . . .	<b>23</b>
1.5.1	Stabilisation par retour d'état statique . . . . .	24
1.5.2	Stabilisation par retour de sortie statique . . . . .	26
1.5.3	Justification de l'hypothèse 1.5.1 . . . . .	27
1.5.4	A propos du domaine d'attraction . . . . .	30
1.5.5	Exemple : Cas d'un système bilinéaire . . . . .	31

<b>1.6</b>	<b>Stabilisation exponentielle avec la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres</b>	<b>32</b>
1.6.1	Stabilisation par retour d'état statique	33
1.6.2	Stabilisation par retour de sortie statique	35
<b>1.7</b>	<b>Stabilisation robuste par retour de sortie statique des systèmes non linéaires</b>	<b>36</b>
<b>1.8</b>	<b>Commande basée sur un observateur</b>	<b>39</b>
<b>1.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>

---

## 1.1 Introduction

La stabilisation des systèmes non linéaires représentent la principale problématique traitée dans la littérature en automatique. On peut distinguer quatre grandes classes de méthodes pour stabiliser ces systèmes : les approches basées sur les fonctions de Lyapunov, les méthodes de linéarisation, les techniques basées sur le théorème du petit gain et l'utilisation de majorations, cette dernière approche étant souvent couplée aux trois autres. Le but de cette introduction n'est pas de décrire ces différentes méthodes. Le lemme de Gronwall-Bellman, qui est le point fort de ce chapitre, appartient aux techniques de stabilisation basées sur des majorations.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires [NZD<sup>+</sup>10]. L'objectif est de montrer que l'application de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman, sous certaines hypothèses adéquates, permet d'assurer la stabilisation du système non linéaire par retour d'état statique ou par retour de sortie statique.

Le chapitre se décompose de la façon suivante. Après une présentation de la classe de systèmes non linéaires affines en la commande considérée, nous exposons tout d'abord la forme standard du lemme de Gronwall-Bellman. A partir de cette forme standard, nous présentons différentes versions de cette nouvelle généralisation du lemme : une version du lemme à un seul terme et une version à deux termes. Afin de ne pas trop alourdir ce chapitre, nous donnons la démonstration de ces différentes versions du lemme en annexe. Cette approche est utilisée dans le chapitre 4 pour la stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires. Ensuite, la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman est appliquée à la stabilisation robuste [NZD<sup>+</sup>10] et à la commande basée sur un observateur [NZRD09] pour la classe de systèmes non linéaires considérée.

## 1.2 Description des systèmes non linéaires et stabilité des points d'équilibre

De nombreux processus en biologie, en écologie et en économie [Moh73, Moh91] (modélisation d'un réacteur biologique dans [Wil77] ou d'échange commerciaux), ainsi qu'en mécanique [Rug81, Hać92, ZRMD98] (modélisation d'une suspension active), et en chimie (approximation du comportement d'une colonne à distiller dans [EL77]) peuvent être

modélisés par des systèmes non linéaires, en particulier des systèmes affines ou bilinéaires par rapport au contrôle.

On considère dans ce mémoire le système de contrôle suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes ; la fonction  $f : \mathbb{R}^{n \times m} \mapsto \mathbb{R}^n$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Dans de tels systèmes non linéaires, on retrouve en général les systèmes non linéaires affines ou bilinéaires.

### 1.2.1 Les systèmes non linéaires affines

Les systèmes affines étudiés dans ce mémoire sont de systèmes qui peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes (mesurées) et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des mesures, ce sera le cas dans tout ce mémoire.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

### 1.2.2 Les systèmes bilinéaires

Les systèmes bilinéaires étudiés tout au long de ce mémoire de thèse sont des systèmes pouvant s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_ix(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes (mesurées) et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des mesures, ce sera le cas dans tout ce mémoire.

Cette représentation englobe plusieurs types de systèmes bilinéaires étudiés tout au long de ce mémoire. Dans la partie robustesse, nous serons amené à nous intéresser aux systèmes bilinéaires avec des perturbations sur les paramètres. Les systèmes bilinéaires décrits constituent un cas particulier des systèmes non linéaires affines.

*Remarque 1.2.1* (Notations des bilinéarités). Dans ce mémoire, nous utilisons les notations suivantes, afin de mieux avoir une bonne harmonisation des systèmes bilinéaires à étudier :  $u_i(t)$  est la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée du vecteur des commandes  $u(t)$  et  $A_i$  est la matrice associée à la coordonnée  $u_i(t)$  dans le système (1.3). Ainsi la matrice  $A_0$  décrit la dynamique de la partie linéaire du système bilinéaire.  $\square$

A titre d'exemple pris dans la littérature, considérons le cas d'un actionneur électromécanique. Dans [Moh91, ZRMD98, Sou02, Gér08], les auteurs proposent un modèle bilinéaire pour un actionneur électromécanique constitué par un moteur à courant continu avec un accouplement élastique et une charge, décrit par la figure suivante.

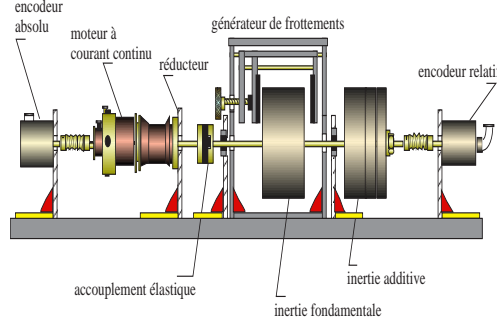


FIGURE 1.1: Actionneur électromécanique.

Ce processus peut être modélisé par le système bilinéaire sans perturbation suivant

$$\dot{x} = A_0 x + u_1 A_1 x + B u,$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_m}{J_m} & 0 & \frac{-k_r}{N J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k_r}{J_c} & \frac{-F_c}{J_c} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_a}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_a}{J_m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \\ \theta_m \\ \Delta_\Gamma \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_e \\ v_a \end{bmatrix},$$

où  $J_m$  et  $J_c$  sont les moments d'inertie du moteur et de la charge,  $F_m$  et  $F_c$  sont les coefficients de frottements visqueux du moteur et de la charge,  $k_a$  est la constante du couple du moteur,  $k_r$  est le coefficient de couplage rigide,  $R_a$  et  $L_a$  sont la résistance et l'inductance du rotor.

Le vecteur d'état  $x(t)$  est composé du courant du rotor  $i_a(t)$ , de la vitesse de rotation de l'arbre du moteur  $\omega_m(t)$ , de la position angulaire de l'arbre du moteur  $\theta_m(t)$ , de la rotation angulaire  $\Delta_\Gamma(t)$  entre les arbres du moteur et de la charge, due à l'accouplement élastique, et de la vitesse de rotation de l'arbre de la charge  $\omega_c(t)$ . Le vecteur des commandes  $u(t)$  est composé du courant du stator  $\dot{i}_e(t)$  et de la tension du rotor  $v_a(t)$ .

## 1.2.3 Points d'équilibre et stabilité des systèmes dynamiques

### 1.2.3.1 Définitions

Dans cette partie, nous rappelons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique consiste à étudier son comportement au voisinage d'un point d'équilibre. Cela passe par l'analyse de la trajectoire de l'état du système lorsque son état initial est proche d'un point ou d'une trajectoire d'équilibre [Vid93]. Les principales notions de stabilité sont présentées ici, à savoir la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et la stabilité au sens de Lyapunov.

On considère l'ensemble des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ , nous désignons  $x = 0$  comme point d'équilibre ( $f(0) = 0$ ). La fonction  $f(t, x)$  est Lipschitzienne par rapport à  $x$ . On pose  $t_0 = 0$  comme instant initial.

Soit  $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction continue. La dérivée de  $V(t, x)$  le long de la trajectoire du système (1.4) est

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x). \quad (1.5)$$

**Définition 1.2.1.** [Sas99, Vid93] *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est stable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \text{ t.q. } \|x_0\| < \eta(\varepsilon) \implies \|x(t, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

△

**Définition 1.2.2.** [Sas99, Vid93] *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est attractif si*

$$\exists \eta > 0 \text{ t.q. } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0. \quad (1.7)$$

△

**Définition 1.2.3.** [Sas99, Vid93] *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

△

**Définition 1.2.4.** [Sas99, Vid93] *Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est un point d'équilibre localement exponentiellement stable s'il existe deux constantes strictement positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :*

$$\|x(t, x_0)\| \leq \alpha \exp(-\beta t), \forall t \geq 0, \forall x_0 \in \mathcal{B}_r. \quad (1.8)$$

Lorsque  $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$ , on parle de stabilité exponentielle globale.

△

**Définition 1.2.5.** *Soit  $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction continue.  $V$  est dite propre et définie positive si :*

- $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad V(t, x) > 0 ;$
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, V(t, x) = 0 \implies x = 0 ;$

- $\forall t \in \mathbb{R}^+, \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x, t) = \infty$  ;
- il existe une constante  $d > 0$  et une fonction  $\phi$  de classe  $\mathbf{K}$  telles que

$$\phi(\|x\|) \leq V(t, x), \forall t \geq 0, \forall \|x\| \leq d. \quad (1.9)$$

△

**Définition 1.2.6.** Une fonction  $V(t, x)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est une fonction de Lyapunov locale (resp. globale) au sens large pour le système (1.4) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine  $\mathcal{V}_0$  tel que  $\forall x \in \mathcal{V}_0$ , (resp.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ) :

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x) \leq 0. \quad (1.10)$$

Si  $\dot{V}(t, x) < 0$ , alors  $V$  est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour le système (1.4). △

**Définition 1.2.7.** Si le système (1.4) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (resp. au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (resp. asymptotiquement stable). Si la fonction de Lyapunov est globale, on parle alors de stabilité globale (respectivement stabilité asymptotique globale). △

**Définition 1.2.8.** Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.4) est un point d'équilibre localement exponentiellement stable s'il existe des constantes  $\alpha, \beta, \gamma$ , un entier  $p \geq 0$  et une fonction  $V(t, x) : \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que,  $\forall x \in \mathcal{V}_0$  :

- $\alpha \|x\|^p \leq V(t, x) \leq \beta \|x\|^p$  ;
- $\dot{V}(t, x) < -\gamma V(t, x)$ .

Si  $\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^n$ , alors l'origine de (1.4) est globalement exponentiellement stable. △

Il n'existe, en général (sauf dans le cas linéaire), aucune méthode systématique pour trouver une fonction candidate de Lyapunov. Il est toutefois assez classique d'utiliser une fonction de Lyapunov quadratique, de type  $V(t, x) = x(t)^T P x(t)$ , où la matrice  $P$  est symétrique et définie positive. Ce choix présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre. Cependant, il induit généralement des conditions très conservatives. Par ailleurs, si aucune fonction convenable n'est trouvée, on ne peut rien dire quant à la stabilité éventuelle du point d'équilibre.

### 1.2.3.2 Exemple : Commande par retour de sortie statique d'un système bilinéaire

Considérons le système bilinéaire [Moh73, Moh91, Rug81]

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m \bar{A}_i u_i x + Bu = A_0 x + \sum_{j=1}^n A_j x_j u + Bu \quad (1.11a)$$

$$y = Cx \quad (1.11b)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$  et la relation suivante

$$A_j^{(k,i)} = \bar{A}_i^{(k,j)} \quad (1.12)$$

où  $A_j^{(k,i)}$  est l'élément de la  $k^{\text{ème}}$  ligne et de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A_j$ . La commande

$$u = -Ky \quad (1.13)$$

est appliquée au système (1.11), ce qui donne

$$\dot{x} = (A_0 - BKC)x + \sum_{j=1}^n (A_j KC)x_j x = \mathcal{A}_0 x + \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_j x_j x. \quad (1.14)$$

Posons  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$  et

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{01} & 0 \\ a_{03} & a_{04} \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{13} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{14} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Le système bouclé (1.14) devient

$$\dot{x} = \mathcal{A}_0 x + \mathcal{A}_1 x_1 x + \mathcal{A}_2 x_2 x = \begin{bmatrix} a_{01} & b_1 K \\ a_{03} & a_{04} + b_2 K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & a_{11} K \\ 0 & a_{13} K \end{bmatrix} x_1 x + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} K \\ 0 & a_{14} K \end{bmatrix} x_2 x. \quad (1.16)$$

Si on pose

$$b_1 = 0 \text{ et } x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

alors les solutions de l'équation différentielle (1.16) sont données par  $x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ z(t) \end{bmatrix}$  où  $z(t)$  est la solution de

$$\dot{z} = az + bz^2 \quad (1.18)$$

avec  $z(0) = z_0$ ,  $a = a_{04} + b_2 K$  et  $ba_{14} K$ .

### Système bilinéaire mono-variable : stabilité et points d'équilibre

Nous considérons l'équation (1.19) donnée par

$$\dot{x} = ax + bx^2 = x(a + bx) \quad (1.19)$$

avec  $x(0) = x_0$  et  $b \neq 0$ . Ce système possède deux points d'équilibre

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ et } \bar{x}_2 = \frac{-a}{b}. \quad (1.20)$$

Si on pose  $\bar{a}(t) = -a$ ,  $\bar{b}(t) = b$  et  $m = 2$  dans l'équation différentielle de Bernoulli (B.7) (voir annexe B), on obtient l'équation différentielle bilinéaire (1.19) dont la solution  $x(t)$  s'obtient à partir de (B.8) (voir annexe B) comme suit

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a ds} \left( 1 - x_0 \int_0^t b \left( e^{\int_0^s a dv} \right) ds \right)^{-1}$$

$$= \frac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 \frac{b}{a} (e^{at} - 1)} = \frac{x_0 a e^{at}}{a - x_0 b (e^{at} - 1)}. \quad (1.21)$$

Pour vérifier cette solution, on calcule (avec  $t \neq t_s$ , voir (1.26))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{x_0 a e^{at}}{a - x_0 b (e^{at} - 1)} \right) = \frac{x_0 a^2 e^{at} (a - x_0 b (e^{at} - 1)) - x_0 a e^{at} (-x_0 a b e^{at})}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2} \\ &= \frac{x_0 a^2 e^{at} (a + x_0 b + x_0 b e^{at} (1 - 1))}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2} = \frac{x_0 a^2 e^{at} (a + b x_0)}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2}, \\ ax &= \frac{x_0 a^2 e^{at}}{a - x_0 b (e^{at} - 1)} = \frac{x_0 a^2 e^{at} (a - x_0 b (e^{at} - 1))}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2} = \frac{x_0 a^2 e^{at} (a + x_0 b - x_0 b e^{at})}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2}, \\ bx^2 &= \frac{x_0^2 a^2 b e^{2at}}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2}, \\ ax + bx^2 &= \frac{x_0 a^2 e^{at} (a + x_0 b - x_0 b e^{at} + x_0 b e^{at})}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2} = \frac{x_0 a^2 e^{at} (a + b x_0)}{(a - x_0 b (e^{at} - 1))^2} = \dot{x}. \end{aligned}$$

Une autre expression de la solution est donnée par

$$x(t) = \frac{a}{c a e^{-at} - b} \quad (1.22)$$

où  $c$  est une constante. Si on pose  $t = 0$  dans (1.22), on obtient

$$x_0 = \frac{a}{c a - b} \longrightarrow c = \frac{a + x_0 b}{x_0 a} \quad (1.23)$$

et l'équation (1.23) devient

$$x(t) = \frac{a}{\frac{a + x_0 b}{x_0 a} a e^{-at} - b} = \frac{x_0 a^2}{(a + x_0 b) a e^{-at} - x_0 a b}. \quad (1.24)$$

Les solutions (1.21) et (1.24) sont équivalentes car

$$x_0 a e^{at} ((a + x_0 b) a e^{-at} - x_0 a b) = x_0 a^2 (a - x_0 b (e^{at} - 1)). \quad (1.25)$$

La relation (1.25) est vraie car, si on développe les 2 termes de cette équation, on obtient

$$x_0 a^3 + x_0^2 a^2 b - x_0^2 a^2 b e^{at} = x_0 a^3 - x_0^2 a^2 b e^{at} + x_0^2 a^2 b.$$

La solution  $x(t)$  n'est pas définie si  $a = x_0 b (e^{at} - 1)$ , c'est-à-dire si

$$t_s = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{a}{x_0 b} + 1 \right) \longrightarrow t_s > 0 \longrightarrow \begin{cases} -b x_0 < a < 0, \\ 0 < a \text{ et } 0 < b x_0 \end{cases}. \quad (1.26)$$

En effet, si  $t = t_s$ , la solution  $x(t_s)$  tend vers l'infini  $\longrightarrow$  la courbe  $x(t)$  présente une asymptote verticale à  $t = t_s$ .

### Stabilité asymptotique des deux points d'équilibre



Les deux points d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  et  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  sont attractifs car

$$a < 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0 = \bar{x}_1, \quad (1.27)$$

$$a > 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \frac{-a}{b} = \bar{x}_2. \quad (1.28)$$

Le point d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  est stable si et seulement si [Vid93] (voir définition 1.2.1)

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \eta_1(\varepsilon_1) > 0 \text{ t.q. } |x_0| < \eta_1(\varepsilon_1) \implies |x(t, x_0)| < \varepsilon_1, \forall t \geq 0 \quad (1.29)$$

et le point d'équilibre  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  est stable si et seulement si (voir définition 1.2.1)

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \eta_2(\varepsilon_2) > 0 \text{ t.q. } \left| x_0 + \frac{a}{b} \right| < \eta_2(\varepsilon_2) \implies \left| x(t, x_0) + \frac{a}{b} \right| < \varepsilon_2, \forall t \geq 0. \quad (1.30)$$

En utilisant (1.28), la relation (1.29) n'est jamais vérifiée si  $a > 0$ . Le point d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  est donc instable si  $a > 0$  et une condition nécessaire pour que le point d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  soit stable est  $a < 0$ .

En utilisant (1.27), la relation (1.30) n'est jamais vérifiée si  $a < 0$ . Le point d'équilibre  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  est donc instable si  $a < 0$  et une condition nécessaire pour que le point d'équilibre  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  soit stable est  $a > 0$ .

Le tableau 1.1 permet de résumer la stabilité des points d'équilibre en fonction du signe de  $a$  et de  $b$ .

En résumé :

- si  $a < 0$  et si  $-\left|\frac{a}{b}\right| < x_0 < \left|\frac{a}{b}\right|$ , le point d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  est asymptotiquement stable car il est stable et attractif,
- si  $a > 0$ , le point d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  est instable,
- si  $a > 0$ , si  $b < 0$  et si  $0 < x_0 < \frac{-2a}{b}$ , le point d'équilibre  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  est asymptotiquement stable car il est stable et attractif,
- si  $a > 0$ , si  $b > 0$  et si  $\frac{-2a}{b} < x_0 < 0$ , le point d'équilibre  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  est asymptotiquement stable car il est stable et attractif,
- si  $a < 0$ , le point d'équilibre  $\bar{x}_2 = \frac{-a}{b}$  est instable.

La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V(x) = x^2$  le long de la trajectoire de (1.19) est

$$\dot{V}(x) = 2(a + bx)x^2. \quad (1.31)$$

De plus, si  $a < 0$ , la fonction  $a + bx$  est définie négative si  $|x| < \left|\frac{a}{b}\right|$ , et vu les développements ci-dessus, la dérivée de la fonction de Lyapunov  $V(x) = x^2$  le long de la trajectoire de (1.19), donnée par (1.31), est définie strictement négative si  $|x_0| < \left|\frac{a}{b}\right|$ . Ainsi, la fonction de Lyapunov (1.31) permet de confirmer les conditions de stabilité asymptotique locale du point d'équilibre  $\bar{x}_1 = 0$  données ci-dessus.

	$a < 0$					
	$b < 0$			$b > 0$		
	$] -\infty \frac{-a}{b} [$	$] \frac{-a}{b} 0 [$	$] 0 +\infty [$	$] -\infty 0 [$	$] 0 \frac{-a}{b} [$	$] \frac{-a}{b} +\infty [$
$x$	-	-	+	-	+	+
$a + bx$	+	-	-	-	-	+
$\dot{x}$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$x(t)$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$
	$a > 0$					
	$b < 0$			$b > 0$		
	$] -\infty 0 [$	$] 0 \frac{-a}{b} [$	$] \frac{-a}{b} +\infty [$	$] -\infty \frac{-a}{b} [$	$] \frac{-a}{b} 0 [$	$] 0 +\infty [$
$x$	-	+	+	-	-	+
$a + bx$	+	+	-	-	+	+
$\dot{x}$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$x(t)$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$

TABLE 1.1: Stabilité des points équilibre.

### 1.3 Rappels sur les systèmes linéaires

Tout au long de ce mémoire, nous utilisons des résultats largement répandus dans la littérature sur la stabilité des systèmes linéaires continus, résultats qui sont rappelés dans cette partie.

#### 1.3.1 Stabilité

**Théorème 1.3.1.** [Vid93] *Le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.32}$$

est

- globalement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négatives, c'est-à-dire si et seulement si

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0, i = 1, \dots, n, \tag{1.33}$$

- globalement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle négatives au sens large, c'est-à-dire

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0, i = 1, \dots, n, \tag{1.34}$$

où  $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) = 0$  correspond à une valeur propre simple de  $A$ . ■

La relation (1.33) est équivalente à

$$\exists P = P^T > 0 > 0 \text{ t.q. } A^T P + P A < 0 \quad (1.35)$$

avec  $V(x) = x^T P x$ .

**Théorème 1.3.2.** [Vid93] Soit le système autonome

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.36)$$

avec  $f(x)$  Lipschitzienne par rapport à  $x$  et

$$f(0) = 0, \quad (1.37a)$$

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (1.37b)$$

Si  $x = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  alors  $x = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.36). ■

### 1.3.2 Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité

Pour l'étude de la commandabilité, de l'observabilité, de la stabilisabilité et de la détectabilité, nous considérons le système linéaire à temps invariant décrit par les équations suivantes

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.38a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.38b)$$

**Définition 1.3.1.** Le système linéaire (1.38a) est commandable (ou la paire  $(A, B)$  est commandable) si,  $\forall x_0, \forall t_f > 0$  et  $\forall x_f$ , il existe une commande  $u(t)$  continue par morceaux telle que la solution du système (1.38a) satisfasse  $x(t_f) = x_f$ .  $\triangle$

**Définition 1.3.2.** Le système linéaire (1.38) est observable (ou la paire  $(C, A)$  est observable) si,  $\forall t_f > 0$ , l'état initial  $x_0$  peut être déterminé de manière unique en utilisant la trajectoire de l'entrée  $u(t)$  et la trajectoire de la sortie  $y(t)$  pour  $0 \leq t \leq t_f$ .  $\triangle$

Pour vérifier si le système linéaire (1.38) est commandable et observable, il existe deux critères dits de Kalman et d'Hautus.

Le système linéaire (1.38a) est commandable (ou la paire  $(A, B)$  est commandable) si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

- Critère de Kalman

$$\operatorname{rang} \left( \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad (1.39)$$

- Critère d'Hautus

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.40)$$

Le système linéaire (1.38) est observable (ou la paire  $(C, A)$  est observable) si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

- Critère de Kalman

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad (1.41)$$

- Critère d'Hautus

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.42)$$

**Définition 1.3.3.** *Le système (1.38) est stabilisable (ou la paire  $(A, B)$  est stabilisable) si et seulement s'il existe une commande par retour d'état  $u = -Kx$  telle que le système bouclé soit stable, c'est-à-dire telle que les valeurs propres de  $A - BK$  soient stables.  $\triangle$*

**Définition 1.3.4.** *Le système (1.38) est détectable (ou la paire  $(C, A)$  est détectable) si et seulement s'il existe un gain  $L$  tel que les valeurs propres de  $A - LC$  soient stables.  $\triangle$*

Puisqu'on ne peut déplacer avec un retour d'état que les valeurs propres commandables de la paire  $(A, B)$  en passant de  $A$  à  $A - BK$  et qu'on ne peut déplacer avec une injection de sortie que les valeurs propres observables de la paire  $(C, A)$  en passant de  $A$  à  $A - LC$ , on peut reformuler la stabilisabilité et la détectabilité comme suit.

**Définition 1.3.5.** *Le système (1.38a) est stabilisable (ou la paire  $(A, B)$  est stabilisable) si toutes les valeurs propres instables de  $A$  sont commandables (donc si toutes les valeurs propres non commandables de  $A$  sont stables).  $\triangle$*

**Définition 1.3.6.** *Le système (1.38) est détectable (ou la paire  $(C, A)$  est détectable) si toutes les valeurs propres instables de  $A$  sont observables (donc si toutes les valeurs propres non observables de  $A$  sont stables).  $\triangle$*

Les critères de Hautus (1.40) et (1.42) donnent les pôles commandables et observables (et donc les pôles non commandables et non observables) et sont donc efficaces pour caractériser la stabilisabilité et la détectabilité.

**Définition 1.3.7.** *Le système (1.38a) est stabilisable (ou la paire  $(A, B)$  est stabilisable) si et seulement si le critère d'Hautus suivant est vérifié*

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \text{Re}(s) \geq 0. \quad (1.43)$$

$\triangle$

**Définition 1.3.8.** *Le système (1.38) est détectable (ou la paire  $(C, A)$  est détectable) si et seulement si le critère d'Hautus suivant est vérifié*

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \text{Re}(s) \geq 0. \quad (1.44)$$

△

### 1.3.3 Norme $\mathcal{H}_\infty$ , gain $\mathcal{L}_2$ et lemme borné réel

On considère désormais le système LTI décrit par

$$G := \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx + Dw \end{cases} \quad (1.45)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie et  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  celui de l'entrée.

**Définition 1.3.9** (Norme  $\mathcal{H}_\infty$ ). *[Fra87] La norme  $\mathcal{H}_\infty$  du système (1.45) est définie par*

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(G(j\omega)G^T(-j\omega)) \quad (1.46)$$

dans le cas où le système (1.45) est stable (pas de pôles à partie réelle positive ou nulle). △

**Définition 1.3.10.** *On définit l'énergie  $E$  d'un signal  $w(t)$  comme l'intégrale de sa puissance*

$$E = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt. \quad (1.47)$$

△

En d'autres termes, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert représente le maximum du module sur toute la bande de fréquence de la valeur singulière maximale de la réponse fréquentielle du système considéré à condition que ce dernier soit stable. Elle permet de spécifier des conditions de *pire cas*. Cette propriété en fait une norme très pertinente pour traiter les problèmes de robustesse.

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  est définie par (1.46), si le système est stable. En effet, les systèmes  $\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s-1} = 1$  ont le même module. Toutefois, pour une entrée bornée, le système  $\frac{1}{s+1}$  possède une sortie bornée, ce qui n'est pas vrai pour le système  $\frac{1}{s-1}$  sauf si cette entrée est stabilisante. Il est donc nécessaire de définir le gain  $\mathcal{L}_2$ .

**Définition 1.3.11** (Gain  $\mathcal{L}_2$ ). *[GL95] Si le système (1.45) est asymptotiquement stable, alors,  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  implique  $z(t) \in \mathcal{L}_2$  et, pour  $x(0) = 0$ , le gain  $\mathcal{L}_2$  du système (1.45) est donné par*

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad \|w\|_2 \neq 0. \quad (1.48)$$

△

Si ce gain est inférieur à 1, on dit que le système est contractif ou non expansif. Ainsi, la notion de gain  $\mathcal{L}_2$  est utile pour quantifier la façon dont le système rejette ou amplifie les perturbations externes.

*Remarque 1.3.1* (Norme  $\mathcal{H}_\infty$  et gain  $\mathcal{L}_2$ ). L'utilisation du théorème de Parseval permet d'interpréter (1.48) comme un gain fréquentiel ou temporel sur les signaux (la norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal temporel est la même que la norme  $\mathcal{L}_2$  de la transformée de Fourier de ce même signal). Ainsi, pour un système stable, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la fonction de transfert est la norme induite  $\mathcal{L}_2$  de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain  $\mathcal{L}_2$  du système. De plus, les équations (1.46) et (1.48) permettent de considérer  $\|G\|_\infty$  comme une généralisation de la norme spectrale des matrices constantes.  $\square$

*Remarque 1.3.2.* D'après la définition 1.3.11, la norme  $\|G\|_\infty$  est une norme induite, elle vérifie donc l'inégalité multiplicative

$$\|GF\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|F\|_\infty.$$

Cette propriété s'avère très utile pour les problèmes de robustesse.  $\square$

Le lemme borné réel est donné par le théorème suivant.

**Théorème 1.3.3** (Lemme borné réel). *Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

1.  $A$  est stable et  $\|G\|_\infty < \gamma$ .
2.  $\exists X = X^T > 0$  telle que [Wil71, AV73, SMN90]

$$R = \gamma^2 I_m - D^T D > 0, \tag{1.49}$$

$$A^T X + X A + C^T C + (X B + C^T D) R^{-1} (X B + C^T D)^T < 0. \tag{1.50}$$

3.  $\exists X = X^T > 0$  telle que [BEFB94, Sch90]

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I_m & D^T \\ C & D & -I_p \end{bmatrix} < 0. \tag{1.51}$$

■

Le lemme borné réel, qui fournit une majoration du gain  $\mathcal{L}_2$  entre l'entrée et la sortie d'un système, peut être utilisé pour quantifier l'atténuation des perturbations.

### 1.3.4 Systèmes linéaires incertains

Dans ce mémoire, nous considérons la classe de systèmes linéaires incertains dont la partie nominale (sans incertitudes) du système est affectée par des incertitudes non structurées pouvant varier dans le temps et bornées en norme.

Ce type d'incertitudes est l'un des plus utilisés dans la littérature.

Considérons le système suivant ayant des incertitudes bornées en norme

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\Delta(t)x + B_\Delta(t)w \\ z = C_\Delta(t)x + D_\Delta(t)w \end{cases} \tag{1.52}$$

où  $A_\Delta(t) = A + \Delta_A(t)$ ,  $B_\Delta(t) = B + \Delta_B(t)$ ,  $C_\Delta(t) = C + \Delta_C(t)$ ,  $D_\Delta(t) = D + \Delta_D(t)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$  représentant les perturbations exogènes et  $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  la sortie à réguler.

Nous supposons que les matrices des incertitudes peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \Delta_A(t) & \Delta_B(t) \\ \Delta_C(t) & \Delta_D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \underbrace{\bar{\Delta}(t)(I_j - E_3 \bar{\Delta}(t))^{-1}}_{\Delta(t)} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\Delta}^T(t) \bar{\Delta}(t) \leq I_j, \forall t \geq 0 \quad (1.53)$$

où  $\bar{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$  est une matrice que nous ne connaissons pas avec exactitude, mais dont tous les éléments sont mesurables au sens de Lebesgue. La matrice  $E_3 \in \mathbb{R}^{j \times i}$  est constante et nous devons avoir  $I_i - E_3^T E_3 > 0, \forall t \geq 0$ , pour assurer l'inversibilité de  $I_j - E_3 \bar{\Delta}(t)$ . Nous ne disposons d'aucune information sur  $\Delta(t)$  (ou sur  $\bar{\Delta}(t)$ ) si ce n'est sa borne supérieure. C'est pourquoi ce type d'incertitudes bornées est dite "non structurées". Cependant cela peut souvent se révéler très conservatif lorsque les incertitudes sont fortement structurées.

Le système incertain (1.52) peut être représenté par les deux figures 1.2 et 1.3 suivantes qui sont équivalentes où le système  $\Sigma(s)$  donné par

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} E_1 \\ C \end{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_3 & E_2 \\ H_2 & D \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

représente la fonction de transfert de la partie nominale et où  $\bar{\Delta}(t)$  représente les incertitudes.

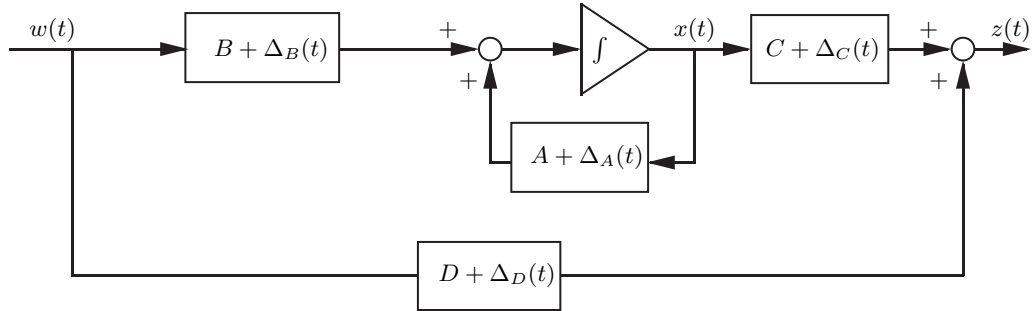


FIGURE 1.2: Système incertain avec des incertitudes non structurées.

Pour traiter de la stabilité et des performances des systèmes incertains qui peuvent varier dans le temps, nous allons utiliser une notion de stabilité, la stabilité quadratique [Gu94], qui permet donc de considérer le cas des systèmes avec incertitudes à temps variant pour lesquels on ne peut pas définir de fonction de transfert.

**Théorème 1.3.4. (Stabilité quadratique- $\mathcal{H}_\infty$ ).** [Gu94] Le système incertain (1.52)-(1.53) avec  $\|\bar{\Delta}(t)\| < \frac{1}{\gamma}$  est quadratiquement stable si et seulement s'il existe un paramètre

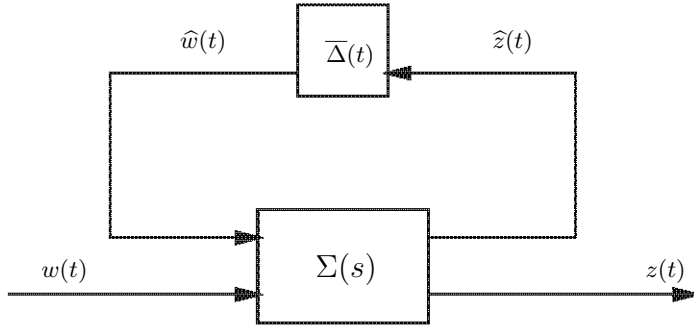


FIGURE 1.3: Système incertain avec des incertitudes non structurées bornées en norme représenté sous la forme d'une LFT haute.

scalaire  $\lambda > 0$  tel que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} B & \gamma\lambda H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \hat{w} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\lambda} E_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D & \gamma\lambda H_2 \\ \frac{1}{\lambda} E_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \hat{w} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.55)$$

soit stable et ait une norme  $\mathcal{H}_\infty$  inférieure à 1. ■

Une implication directe de ce théorème dans le cas d'un retour de sortie statique est donnée par le théorème suivant 1.3.5 (voir [Gu94]).

**Théorème 1.3.5.** [Gu94] On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta_A(t))x(t) + (B_u + \Delta_{B_u}(t))u(t) + (B_w + \Delta_{B_w}(t))w(t) \\ y(t) = (C_y + \Delta_{C_y}(t))x(t) + (D_{yu} + \Delta_{D_{yu}}(t))u(t) + (D_{yw} + \Delta_{D_{yw}}(t))w(t) \\ z(t) = (C_z + \Delta_{C_z}(t))x(t) + (D_{zu} + \Delta_{D_{zu}}(t))u(t) + (D_{zw} + \Delta_{D_{zw}}(t))w(t) \end{cases} \quad (1.56)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$  représentant les perturbations exogènes,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes et  $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  la sortie à réguler.

Nous supposons que les matrices des incertitudes peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \Delta_A(t) & \Delta_{B_u}(t) & \Delta_{B_w}(t) \\ \Delta_{C_y}(t) & \Delta_{D_{yu}}(t) & \Delta_{D_{yw}}(t) \\ \Delta_{C_z}(t) & \Delta_{D_{zu}}(t) & \Delta_{D_{zw}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} E_x & E_u & E_w \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Le système incertain (1.56)-(1.57) avec  $\|\bar{\Delta}(t)\| < \frac{1}{\gamma}$  contrôlé par un retour de sortie statique est quadratiquement stable si et seulement si il existe un paramètre scalaire  $\lambda > 0$  tel que le système



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + \begin{bmatrix} B_w & \gamma\lambda H_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \widehat{w}(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yu} u(t) + \begin{bmatrix} D_{yw} & \gamma\lambda H_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \widehat{w}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z(t) \\ \widehat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\lambda} E_x \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{zu} \\ \frac{1}{\lambda} E_y \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D_{zw} & \gamma\lambda H_z \\ \frac{1}{\lambda} E_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \widehat{w}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.58)$$

contrôlé par le retour de sortie  $u(t) = Ky(t)$  soit stable avec une norme  $\mathcal{H}_\infty$  inférieure à 1.  $\widehat{w}(t)$  et  $\widehat{z}(t)$  sont respectivement des “pseudo” perturbations exogènes et des “pseudo” sorties à contrôler décrivant l’interconnexion entre le modèle nominal et les incertitudes paramétriques (voir figure 1.3). ■

## 1.4 Présentation de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman

Dans ce mémoire, nous présentons une nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman qui constitue un élément clé dans la stabilisation des systèmes non linéaires considérés (affines et bilinéaires) qu’ils soient non linéaires à dérivée d’ordre entier ou non entier. Cette nouvelle généralisation permet d’élaborer une commande simple afin de stabiliser exponentiellement le système non linéaire considéré.

### 1.4.1 Forme standard du lemme de Gronwall-Bellman

La forme standard du lemme de Gronwall-Bellman est donnée dans le lemme suivant.

**Lemme 1.4.1.** [Vid93] (p 292) [DV75] (p 252) Soit

- i)  $f, g$  et  $k$ , fonctions intégrables et définies de  $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ ,
- ii)  $g \geq 0, k \geq 0$ ,
- iii)  $g \in \mathcal{L}_\infty$ ,
- iv)  $gk$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  satisfait

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau) u(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.59)$$

alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau) f(\tau) \exp\left(\int_\tau^t k(s) g(s) ds\right) d\tau. \quad (1.60)$$

□

**Corollaire 1.4.1.** [Vid93] (p 236) [DV75] (p 252) Soit  $k : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ , intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $k \geq 0$ . Si

$$u(t) \leq c + \int_0^t k(\tau)u(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.61)$$

alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t k(\tau) d\tau\right). \quad (1.62)$$

Des généralisations du lemme de Gronwall-Bellman ont été proposées dans plusieurs travaux, notamment par Pachpatte [Pac73, Pac75b, Pac75a] et N. El Alami [El 86, El 95]. Dans la suite de ce chapitre, nous nous appuyons sur la généralisation proposée par N. El Alami.

## 1.4.2 Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un seul paramètre

**Théorème 1.4.1** (1<sup>ère</sup> généralisation du lemme). [El 95] Considérons les réels  $a, b, n$  et  $k$  avec  $a < b$ ,  $n > 1$  et  $k > 0$ . Soit

i)  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction intégrable telle que, pour tout  $\alpha, \beta \in [a, b]$  avec  $\alpha < \beta$ , on ait

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds > 0, \quad (1.63)$$

ii)  $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction bornée telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait

$$x(t) \leq k + \int_a^t f(s)(x(s))^n ds, \quad (1.64)$$

alors, sous l'hypothèse suivante

$$1 - (n-1)k^{n-1} \int_a^b f(s) ds > 0 \quad (1.65)$$

nous avons l'inégalité suivante

$$x(t) \leq \frac{k}{\left(1 - (n-1)k^{n-1} \int_a^t f(s) ds\right)^{\frac{1}{n-1}}} \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.66)$$

■

Ce théorème a été utilisé pour la stabilisation et pour la stabilisation robuste des systèmes bilinéaires avec retour de sortie par J. El Alami [El 01] et avec retour d'état par A. Echchatbi [Ech04].

### 1.4.3 Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres

**Théorème 1.4.2.** *Soit*

- i)  $a, b, k \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq a < b$ ,  $k > 0$ , deux réels  $\ell > 1$  et  $p \geq 1$
- ii)  $f_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ ,  $f_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  deux fonctions intégrables telles que, pour tout  $\alpha, \beta \in [a, b]$  avec  $(0 \leq \alpha < \beta)$ , on ait

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(s) ds > 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_2(s) ds > 0,$$

- iii)  $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction bornée telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait

$$x(t) \leq k + \int_a^t (f_1(s)(x(s))^{\ell} + f_2(s)(x(s))^p) ds. \quad (1.67)$$

alors, sous l'hypothèse suivante

$$1 - (\ell + p - 2) \left( k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds \right) > 0 \quad (1.68)$$

nous avons l'inégalité suivante

$$x(t) \leq \frac{k}{\left( 1 - (\ell + p - 2) \left( k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds \right) \right)^{\frac{1}{\ell + p - 2}}}. \quad (1.69)$$

■

*Démonstration.* Afin de ne pas trop alourdir cette partie, les démonstrations des théorèmes 1.4.1 et 1.4.2 sont présentées dans l'annexe A. •

## 1.5 Stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique

Considérons maintenant le système non linéaire affine suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.70)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes (mesurées) et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des mesures, ce sera le cas dans tout ce mémoire.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

La fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.5.1.** *Le système non linéaire affine (1.70) satisfait aux conditions suivantes.*

1. *La fonction  $g_i(x(t))$  est mesurable avec  $g_i(0) = 0$  (pour tout  $i = 1, \dots, m$ ).*
2. *Pour tout  $i = 1, \dots, m$ , il existe un entier  $q \geq 1$ , tel que*

$$\|g_i(x(t))\| \leq \mu_i \|x(t)\|^q \quad (1.71)$$

*où  $\mu_i$  sont des constantes positives.*

3. *La paire  $(A, B)$  est stabilisable, c'est-à-dire toutes les valeurs propres instables de la matrice  $A$  sont commandables.*
4. *La paire  $(C, A)$  est détectable, c'est-à-dire toutes les valeurs propres instables de la matrice  $A$  sont observables.  $\square$*

Dans la suite de ce mémoire, nous définissons  $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$ .

### 1.5.1 Stabilisation par retour d'état statique

Nous considérons que l'état du système non linéaire est entièrement mesuré, c'est-à-dire la matrice  $C = I_n$  du système (1.70) et nous supposons que le système non linéaire (1.70) satisfait à l'hypothèse 1.5.1. On peut donner le théorème suivant sur la stabilisation exponentielle par retour d'état statique du système (1.70).

**Théorème 1.5.1.** *[NZD<sup>+</sup>10] En considérant  $C = I_n$  dans le système (1.70) et sous l'hypothèse 1.5.1, le système (1.70) contrôlé par le retour d'état statique suivant*

$$u(t) = Lx(t) \quad (1.72)$$

*est exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BL$  sont strictement à partie réelle négative et si*

$$0 < \|x_0\| \leq \varepsilon_0, \quad (1.73)$$

$$\varepsilon_0^q < \beta = \frac{|\omega|}{\mu M^{q+1} \|L\|}, \quad (1.74)$$

*où  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $M > 0$  et  $\omega < 0$  sont des réels donnés et satisfont la relation suivante*

$$\|e^{(A+BL)t}\| < Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \quad (1.75)$$

*De plus, il existe un réel strictement positif  $\varepsilon_1$  tel que l'état du système bouclé  $x(t)$  est borné en norme comme suit*

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 M e^{\omega t} \|x_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \mu \|L\| \varepsilon_1^q \|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (1.76)$$

■

*Démonstration.* Si  $C = I_n$ , la solution du système (1.70) contrôlé par le retour d'état (1.72) peut s'écrire

$$x(t) = e^{(A+BL)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BL)(t-s)} \sum_{i=1}^m g_i(x(s))(Lx(s))_i ds \quad (1.77)$$

où  $(Lx(t))_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $Lx(t)$ .

Sous l'hypothèse 1.5.1, la matrice de gain  $L$  est choisie telle que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BL$  soient à partie réelle négative.

Alors, il existe deux réels  $M > 0$  et  $\omega < 0$  tels que la relation (1.75) soit satisfaite, et sous l'hypothèse 1.5.1, l'état  $x(t)$  du système peut être borné comme suit

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq M e^{\omega t} \|x_0\| + M e^{\omega t} \int_0^t \mu e^{-\omega s} \|L\| \|x(s)\|^{q+1} ds \\ &\leq M e^{\omega t} \varepsilon_0 + M e^{\omega t} \int_0^t \mu e^{-\omega s} \|L\| \|x(s)\|^{q+1} ds \end{aligned} \quad (1.78)$$

où  $\varepsilon_0$  est un réel défini dans la relation (1.73), ce qui est équivalent à

$$\|x(t)\| e^{-\omega t} \leq M \varepsilon_0 + \mu M \|L\| \int_0^t e^{q\omega s} \|x(s)\|^{q+1} e^{-(q+1)\omega s} ds. \quad (1.79)$$

Puisque,  $\forall t > 0$ , on a

$$h(t) = 1 - q\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q \int_0^t e^{q\omega s} ds = 1 - \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|} (1 - e^{\omega t}) \geq 1 - \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|}, \quad (1.80)$$

si l'inégalité (1.74) est bien satisfaite, alors il existe un réel  $\varepsilon_2$  strictement positif tel que

$$0 < \varepsilon_2 \leq h(t). \quad (1.81)$$

Par conséquent, en utilisant les relations (1.80) et (1.81), et la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman donnée dans le théorème 1.4.1, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| e^{-\omega t} \leq \frac{M \varepsilon_0}{\left(1 - qM^{q+1} \mu \|L\| \varepsilon_0^q \int_0^t e^{q\omega s} ds\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (1.82)$$

En utilisant (1.80) et l'inégalité (1.82), l'inégalité suivante est bien satisfaite

$$\|x(t)\| \leq \frac{M e^{\omega t} \varepsilon_0}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \mu \|L\| \varepsilon_0^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{\varepsilon_1 M e^{\omega t} \|x_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \mu \|L\| \varepsilon_1^q \|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} \quad (1.83)$$

où  $\varepsilon_1$  est un réel strictement positif tel que  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \|x_0\|$ . •

### 1.5.2 Stabilisation par retour de sortie statique

On considère maintenant, le cas où l'état du système non linéaire est partiellement accessible à travers d'une équation de mesure considérée, c'est-à-dire la matrice  $C \neq I_n$  avec  $p < n$  dans le système (1.70).

Le retour de sortie statique est l'un des problèmes ouverts dans la communauté des automaticiens. Un bon nombre de travaux traitant de la synthèse d'un gain statique par retour de sortie ont été publiés. Comme indiqué dans [Fu04], la synthèse d'un gain  $K$  de retour de sortie tel que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BKC$  soient à partie réelle négative est souvent difficile à obtenir et conduit en général à des problèmes d'optimisation non convexe : il n'y a pas de conditions nécessaires et suffisantes sur des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  données telles qu'il existe une matrice de gain  $K$  garantissant que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BKC$  soient stables (voir [SADG97]).

Dans la littérature, beaucoup d'auteurs ont proposé des conditions suffisantes pour le problème de la stabilisation par retour de sortie statique des systèmes linéaires, malheureusement, la majorité de ces auteurs ne garantissent pas l'existence ou l'inexistence d'une solution lorsque leur algorithme de synthèse est défaillant (par exemple, voir [ISG94, EOA97, CLS98, GdS98, CT99, Sha03, Fuj04]). Tout au long de ce mémoire, nous utiliserons particulièrement une des deux approches suivantes Crusius *et al.* [CT99] ou Shaked [Sha03] pour trouver le gain de la commande par retour de sortie statique afin de garantir la stabilisation du système non linéaire considéré.

Notons que l'item 3 de l'hypothèse 1.5.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du gain  $L$  tel que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BL$  soient à partie réelle négative. Cependant, les items 3 et 4 de l'hypothèse 1.5.1 donnent des conditions nécessaires mais non suffisantes pour l'existence du gain  $K$  tel que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BKC$  soient à partie réelle négative.

La stabilisation exponentielle par retour de sortie statique du système (1.70) est une extension du théorème 1.5.1, elle est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.5.2.** [NZD<sup>+</sup>10] *On considère dans ce cas  $C \neq I_n$  avec  $p < n$ . Sous l'hypothèse 1.5.1, le système (1.70) contrôlé par le retour de sortie statique suivant*

$$u(t) = Ky(t) \tag{1.84}$$

*est exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BKC$  sont à partie réelle négative et si*

$$0 < \|x_0\| \leq \varepsilon_0, \tag{1.85}$$

$$\varepsilon_0^q < \beta = \frac{|\omega|}{\mu M^{q+1} \|KC\|}, \tag{1.86}$$

*où  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $M > 0$  et  $\omega < 0$  sont des réels donnés et satisfaisant*

$$\|e^{(A+BKC)t}\| < Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \tag{1.87}$$

*De plus, il existe un réel  $\varepsilon_1$  strictement positif tel que l'état  $x(t)$  du système bouclé soit*

borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_1 M e^{\omega t} \|x_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \mu \|KC\| \varepsilon_1^q \|x_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (1.88)$$

■

*Démonstration.* Si  $C \neq I_n$  avec  $p < n$ , la solution du système (1.70) contrôlé par le retour de sortie (1.84) est donnée par

$$x(t) = e^{(A+BKC)t} x_0 + \int_0^t e^{(A+BKC)(t-s)} \sum_{i=1}^m g_i(x(s))(KCx(s))_i ds \quad (1.89)$$

où  $(KCx(t))_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $KCx(t)$ . Nous supposons que le gain  $K$  existe car les items 3 et 4 de l'hypothèse 1.5.1 donnent des conditions nécessaires mais non suffisantes de l'existence du gain  $K$  tel que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BKC$  soit à partie réelle négative.

La suite de la preuve est omise car elle est déduite directement des relations (1.78) à (1.83) de la preuve du théorème 1.5.1, en remplaçant d'une part la matrice  $L$  par la matrice  $KC$  et d'autre part les relations (1.73) à (1.75) par les relations (1.85) à (1.87). •

### 1.5.3 Justification de l'hypothèse 1.5.1

La nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman proposée, permet de stabiliser exponentiellement de manière très simple une large classe de systèmes non linéaires affines. En effet, contrairement à la littérature où la plupart des systèmes non linéaires affines sont généralement Lipschitziens, les systèmes non linéaires affines considérés dans ce mémoire ne sont pas Lipschitziens lorsque le paramètre  $q$  de l'item 2 dans l'hypothèse 1.5.1 est strictement supérieur à 1. Par exemple, cette large classe de systèmes inclue les systèmes multilinéaires affines de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,j,k} x_j(t) x_k(t) x(t)}_{g_i(x(t))} u_i(t) + Bu(t) \quad (1.90)$$

où  $x_j(t)$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $x(t)$ . Dans ce cas,  $q = 3$  et les scalaires  $\mu_i$  de la relation (1.71) peuvent être écrits comme suit

$$\|g_i(x(t))\| \leq \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} A_{i,1,1} & \dots & A_{i,n,1} & \dots & A_{i,1,n} & \dots & A_{i,n,n} \end{bmatrix} \right\|}_{\mu_i} \|x(t)\|^3 \quad (1.91)$$

puisque

$$g_i(x(t)) = P \begin{bmatrix} A_{i,1,1} & \dots & A_{i,n,1} & \dots & A_{i,1,n} & \dots & A_{i,n,n} \end{bmatrix} (x(t) \otimes x(t) \otimes x(t)) \quad (1.92)$$

où  $P$  est une matrice de plein rang donnée et de dimension appropriée, satisfaisant  $\|P\| = 1$  avec toutes les composantes nulles, excepté un élément qui vaut 1 dans chaque ligne et, avec au plus un élément égal à 1 dans chaque colonne et où  $\otimes$  est le produit de Kronecker satisfaisant  $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$  et  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$  (voir [LT85], p. 408 et p. 439).

### Illustration avec deux exemples

Les deux exemples suivants montrent comment obtenir la condition (1.71) de l'hypothèse 1.5.1.

– Exemple 1 :  $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = A_1 x_1 x + A_2 x_2 x$ . On a

$$\begin{aligned} g(x) &= A_1 x_1 x + A_2 x_2 x = A_1 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} (x \otimes x). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &\leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \right\| \|x \otimes x\| = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{\|x\|^4} = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \right\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

car nous avons  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ .

– Exemple 2 :  $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = A_1 x_1^2 x + A_2 x_1 x_2 x + A_3 x_2^2 x$ . On a

$$\begin{aligned} g(x) &= A_1 x_1^2 x + A_2 x_1 x_2 x + A_3 x_2^2 x = A_1 \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{bmatrix} + A_3 \begin{bmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 x_2 \\ x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} P(x \otimes x \otimes x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} P \left( x \otimes \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2^2 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2^2 \\ x_1x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} P(x \otimes x \otimes x)
 \end{aligned}$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \|P\| = 1,$$

et donc (avec  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ )

$$\|g(x)\| \leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x \otimes x \otimes x\| = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x\|^3.$$

Si on n'utilise pas la relation  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ , la majoration obtenue est plus conservatrice car

$$\begin{aligned}
 \|g(x)\| &\leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x \otimes x \otimes x\| = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{x_1^6 + 3x_1^4x_2^2 + 3x_1^2x_2^4 + x_2^6} \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3)^2} \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1 + x_2)^2} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)^2} \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1 + x_2)^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^4} = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| |x_1 + x_2|^3 \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \right\|^3 \\
 &\leq 2\sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x\|^3
 \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
 \|g(x)\| &\leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{x_1^6 + 2x_1^4x_2^2 + 2x_1^2x_2^4 + x_2^6} \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)^2} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \sqrt{(x_1 + x_2)^2} \sqrt{(\|x\|^2 + x_1 x_2)^2} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| |x_1 + x_2| \left| \|x\|^2 + x_1 x_2 \right| \\
&\leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| |x_1 + x_2| (\|x\|^2 + |x_1 x_2|) \\
&= \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \right\| (\|x\|^2 + |x_1 x_2|) \\
&\leq \sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x\| (\|x\|^2 + |x_1 x_2|) \\
&= \sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x\| \left( \|x\|^2 + \left\| \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| \right) \\
&\leq \sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x\| (\|x\|^2 + 0.5 \|x\|^2) \\
&= 1.5\sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \right\| \|x\|^3. \tag{1.93}
\end{aligned}$$

Pour obtenir (1.93), nous avons utilisé la relation suivante

$$|x_1 x_2| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = |x_1 x_2| (a + b) \quad \text{avec} \quad a + b = 1,$$

Les réels  $a$  et  $b$  sont obtenus comme suit

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right\| = \max(|a|, |b|) \longrightarrow \min \left\| \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right\| = \min(\max(|a|, |b|)) \longrightarrow a = b = 0.5.$$

### 1.5.4 A propos du domaine d'attraction

Dans les théorèmes 1.5.1 et 1.5.2, on peut concevoir la matrice de gain  $L$  ou  $K$  afin de maximiser le rayon de convergence  $\beta$  de la boule et définir un domaine d'initialisation admissible donné par les relations (1.73) et (1.74) ou les relations (1.85) et (1.86). Cela peut se faire en réduisant au minimum  $\|L\|$  ou  $\|K\|$  et en imposant certaines contraintes afin d'obtenir un assez grand  $|\omega|$  (voir (1.75) ou (1.87)). Pour réduire au minimum  $\|L\|$  (ou  $\|K\|$ ), on peut ajouter l'optimisation LMI suivante dans la synthèse du gain

$$\min \alpha \quad \text{tel que} \quad \begin{bmatrix} \alpha I & L \\ L & \alpha I \end{bmatrix} > 0.$$

Puisqu'il existe un réel  $M$  tel que  $\|e^{At}\| \leq M e^{\omega t}$ ,  $\forall t > 0$ , où  $\omega < 0$  est la plus grande partie réelle des valeurs propres de la matrice  $A$ , nous pouvons ainsi maximiser  $|\omega|$  par la résolution de la LMI suivante (voir [BEFB94], p. 66))

$$\max \kappa \quad \text{tel que} \quad P = P^T > 0 \quad \text{and} \quad A^T P + P A + 2\kappa P \leq 0$$

où  $\kappa = -\omega$ . Cette dernière LMI sera ainsi incluse dans la synthèse du gain en remplaçant la matrice  $A$  par  $A + BL$  ou  $A + BKC$ .

### 1.5.5 Exemple : Cas d'un système bilinéaire

Considérons le système bilinéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + A_1ux + Bu \\ y = Cx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.94)$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0].$$

La matrice  $A_0$  a une valeur propre stable  $-3$  et une valeur propre instable  $1$ . Pour toute entrée  $u$  constante,  $A_0 + A_1u$  est instable. Par conséquent, le système bilinéaire (1.94) avec la commande  $u(t) = 0$  est instable, ceci est illustré dans la figure 1.4.

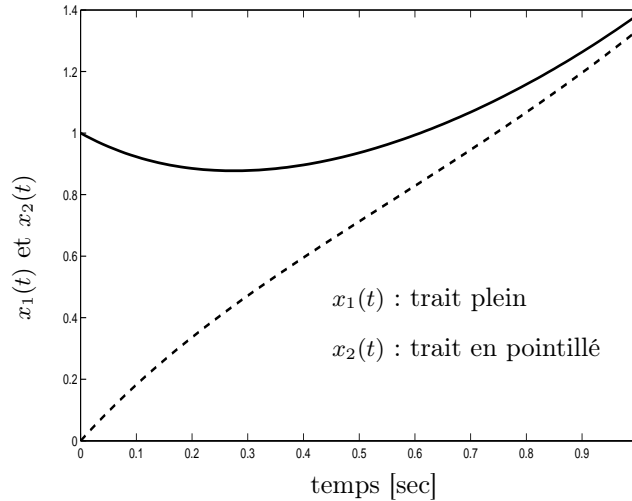


FIGURE 1.4: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = 0$ .

Avec le gain statique  $L = [-1 \ -1]$ , les valeurs propres de la matrice  $A_0 + BL$  sont  $(-1, -3)$ . Ainsi, il résulte du théorème 1.5.1, que le système bilinéaire contrôlé par le retour d'état statique  $u(t) = Lx(t)$  est exponentiellement stable. La réponse temporelle du système est indiquée sur la figure 1.5, avec  $M = 1, \omega = -5, \mu = 2, q = 1$  et  $x_0 = [1 \ 0]^T$ .

Dans la même optique, nous avons synthétisé un gain par retour de sortie statique. Le gain statique de sortie a été calculé par la méthode du W-problème (voir Crusius *et al.* [CT99]). Ainsi, en utilisant l'approche de [CT99], on obtient le gain statique par retour de sortie  $K = -16.0654$ , ce qui donne  $(-15.0654, -3)$  comme valeurs propres de la matrice  $A_0 + BKC$ . Ainsi, il résulte du théorème 1.5.2, que le système bilinéaire contrôlé par le retour de sortie statique  $u(t) = Ky(t)$  est exponentiellement stable. La réponse temporelle du système est indiquée sur la figure 1.6, avec  $M = 0.5, \omega = -15, \mu = 2, q = 1$  et  $x_0 = [1 \ 0]^T$ .

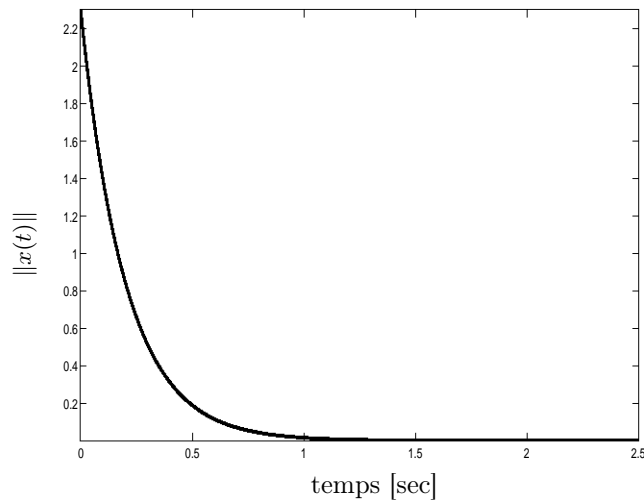


FIGURE 1.5: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$ .

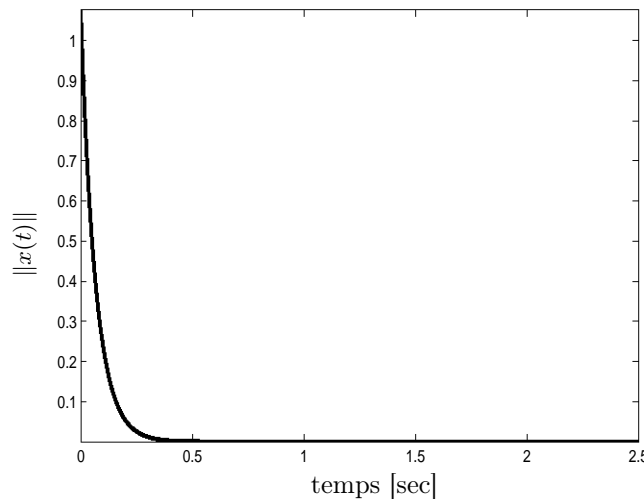


FIGURE 1.6: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Ky(t)$ .

## 1.6 Stabilisation exponentielle avec la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres

Dans cette section, nous proposons l'étude de la stabilisation exponentielle d'un système non linéaire par l'utilisation de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres. L'objectif est de montrer que, sous certaines hypothèses adéquates, nous pouvons stabiliser le système non linéaire considéré par retour d'état statique et par retour de sortie statique.

Le système non linéaire considéré est décrit par l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.95)$$

La fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (1.95) satisfait à l'hypothèse 1.5.1 et la fonction non linéaire  $\psi(x(t))$  vérifie l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.6.1.** *La fonction non linéaire  $\psi(x(t))$  est mesurable avec  $\psi(0) = 0$  et il existe un entier  $r > 0$ , tel que*

$$\|\psi(x(t))\| \leq \kappa \|x(t)\|^{r+1}, \quad (1.96)$$

où  $\kappa$  est une constante positive. □

### 1.6.1 Stabilisation par retour d'état statique

La stabilisation exponentielle du système (1.95) par retour d'état statique avec  $C = I_n$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.6.1.** *Sous les hypothèses 1.5.1 et 1.6.1, le système non linéaire (1.95) contrôlé par le retour d'état statique suivant*

$$u(t) = Lx(t) \quad (1.97)$$

*est exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A} = A + BL$  sont strictement à partie réelle négative et si*

$$0 < \|x_0\| \leq \varepsilon_0, \quad (1.98)$$

$$\max(\varepsilon_0^q, \varepsilon_0^r) \leq \beta = \frac{|\omega|}{(q+r) \left( \frac{\mu M^{q+1} \|L\|}{q} + \frac{\kappa M^{r+1}}{r} \right)}, \quad (1.99)$$

où  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $M > 0$  et  $\omega < 0$  sont des réels donnés et satisfont la relation suivante

$$\|e^{(A+BL)t}\| < Me^{\omega t} \quad \forall t > 0, \quad (1.100)$$

De plus, il existe un réel strictement positif  $\varepsilon_2$  tel que l'état du système bouclé  $x(t)$  est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_2 M e^{\omega t} \|x_0\|}{\left( 1 - (q+r) \left( \frac{\mu \varepsilon_2^q M^{q+1} \|L\| \|x_0\|^q}{q} + \frac{\kappa \varepsilon_2^r M^{r+1} \|x_0\|^r}{r} \right) \right)^{\frac{1}{q+r}}}, \quad \forall t \geq 0.$$

■

*Démonstration.* Si  $C = I_n$  la solution du système (1.95) contrôlé par le retour d'état (1.97) peut s'écrire

$$x(t) = e^{(A+BL)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BL)(t-s)} \left( \sum_{i=1}^m g_i(x(s))(Lx(s))_i + \psi(x(s)) \right) ds \quad (1.101)$$

où  $(Lx(t))_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $Lx(t)$ .

Sous l'hypothèse 1.5.1, la matrice de gain  $L$  est choisie telle que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BL$  soient à partie réelle négative.

Alors, il existe deux réels  $M > 0$  et  $\omega < 0$  tels que la relation (1.100) soit satisfaite, et sous les hypothèses 1.5.1 et 1.6.1, l'état  $x(t)$  du système peut être borné comme suit

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq M e^{\omega t} \|x_0\| + M e^{\omega t} \left( \int_0^t \mu e^{-\omega s} \|L\| \|x(s)\|^{q+1} + \kappa e^{-\omega s} \|x(s)\|^{r+1} \right) ds \\ &\leq M e^{\omega t} \varepsilon_0 + M e^{\omega t} \left( \int_0^t \mu e^{-\omega s} \|L\| \|x(s)\|^{q+1} + \kappa e^{-\omega s} \|x(s)\|^{r+1} \right) ds \end{aligned} \quad (1.102)$$

où  $\varepsilon_0$  est un réel défini dans la relation (1.98), ce qui est équivalent à

$$\|x(t)\| e^{-\omega t} \leq M \varepsilon_0 + M \left( \int_0^t \mu \|L\| e^{q\omega s} \|x(s)\|^{q+1} e^{-(q+1)\omega s} + \kappa e^{r\omega s} \|x(s)\|^{r+1} e^{-(r+1)\omega s} \right) ds. \quad (1.103)$$

Puisque,  $\forall t > 0$ , on a

$$\begin{aligned} j(t) &= 1 - (q+r) \left( \int_0^t \mu \varepsilon_0^q M^{q+1} \|L\| e^{q\omega s} + \kappa \varepsilon_0^r M^{r+1} e^{r\omega s} \right) ds \\ &= 1 - (q+r) \left( \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{q|\omega|} (1 - e^{q\omega t}) + \frac{\kappa M^{r+1} \varepsilon_0^r}{r|\omega|} (1 - e^{r\omega t}) \right) \\ &\geq 1 - (q+r) \left( \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{q|\omega|} + \frac{\kappa M^{r+1} \varepsilon_0^r}{r|\omega|} \right), \end{aligned} \quad (1.104)$$

si l'inégalité (1.99) est bien satisfaite, alors il existe un réel  $\varepsilon_3$  strictement positif tel que

$$0 < \varepsilon_3 \leq j(t). \quad (1.105)$$

Par conséquent, en utilisant les relations (1.104) et (1.105), et la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres donnée dans le théorème 1.4.2, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| e^{-\omega t} \leq \frac{M \varepsilon_0}{\left( 1 - (q+r) \left( \int_0^t \mu \varepsilon_0^q M^{q+1} \|L\| e^{q\omega s} + \kappa \varepsilon_0^r M^{r+1} e^{r\omega s} \right) ds \right)^{\frac{1}{q+r}}}. \quad (1.106)$$

En utilisant (1.104) et l'inégalité (1.106), l'inégalité suivante est bien satisfaite

$$\|x(t)\| \leq \frac{M e^{\omega t} \varepsilon_0}{\left( 1 - (q+r) \left( \frac{\mu M^{q+1} \|L\| \varepsilon_0^q}{q} + \frac{\kappa M^{r+1} \varepsilon_0^r}{r} \right) \right)^{\frac{1}{q+r}}}$$

$$= \frac{\varepsilon_2 M e^{\omega t} \|x_0\|}{\left(1 - (q+r) \left( \frac{\varepsilon_2^q \mu M^{q+1} \|L\| \|x_0\|^q}{q} + \frac{\varepsilon_2^r \kappa M^{r+1} \|x_0\|^r}{r} \right)\right)^{\frac{1}{q+r}}} \quad (1.107)$$

où  $\varepsilon_2$  est un réel strictement positif tel que  $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 \|x_0\|$ .

Ceci complète la preuve de ce théorème. •

## 1.6.2 Stabilisation par retour de sortie statique

Nous supposons dans ce cas que l'état du système non linéaire (1.95) est partiellement mesuré et nous considérons que la matrice  $C \neq I_n$  dans (1.95).

La stabilisation exponentielle du système (1.95) par retour de sortie statique est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.6.2.** *Sous les hypothèses 1.5.1 et 1.6.1, le système non linéaire (1.95) contrôlé par le retour de sortie statique suivant*

$$u(t) = Ky(t) \quad (1.108)$$

*est exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de la matrice  $\bar{A} = A + BKC$  sont strictement à partie réelle négative et si*

$$0 < \|x_0\| \leq \varepsilon_0, \\ \max(\varepsilon_0^q, \varepsilon_0^r) < \beta = \frac{|\omega|}{(q+r) \left( \frac{\mu M^{q+1} \|KC\|}{q} + \frac{\kappa M^{r+1}}{r} \right)},$$

où le scalaire  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $M > 0$  et  $\omega < 0$  sont des réels donnés et satisfaisant

$$\|e^{(A+BKC)t}\| < M e^{\omega t} \quad \forall t > 0,$$

*De plus, il existe un réel strictement positif  $\varepsilon_2$  tel que l'état du système bouclé  $x(t)$  est borné en norme comme suit*

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon_2 M e^{\omega t} \|x_0\|}{\left(1 - (q+r) \left( \frac{\mu \varepsilon_2^q M^{q+1} \|KC\| \|x_0\|^q}{q} + \frac{\varepsilon_2^r \kappa M^{r+1} \|x_0\|^r}{r} \right)\right)^{\frac{1}{q+r}}}, \quad \forall t \geq 0.$$

■

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est donnée par la preuve du théorème 1.6.1 en substituant respectivement les matrices  $\tilde{A} = A + BL$  et  $L$  par  $\bar{A} = A + BKC$  et  $KC$ . •

## 1.7 Stabilisation robuste par retour de sortie statique des systèmes non linéaires

Dans cette section, nous montrons que les deux théorèmes donnés dans la section 1.5 sont intrinsèquement robustes en présence d'incertitudes paramétriques [NZD<sup>+</sup>10]. Nous considérons le cas d'un retour de sortie statique, c'est-à-dire, l'état du système non linéaire est partiellement mesuré (voir section 1.5.2). Notons bien que les développements faits dans cette section peuvent être étendus dans le cas où tous les états du système sont accessibles comme décrit dans le théorème 1.5.1.

Considérons le système non linéaire affine incertain décrit par l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \Delta_A)x(t) + \sum_{i=1}^m g_{i\Delta}(x(t))u_i(t) + (B_0 + \Delta_B)u(t) \\ y(t) = (C_0 + \Delta_C)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.109)$$

où les vecteurs  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$ , les matrices constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont définis dans la relation (1.70).

Les matrices des incertitudes  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$  et  $\Delta_C$  sont constantes et peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_B \\ \Delta_C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} E_x & E_u \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

où  $\Delta$  est une matrice constante inconnue et satisfaisant  $\|\Delta\| \leq 1$  et où  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $E_x$  et  $E_u$  sont des matrices constantes données et de dimensions appropriées.

En procédant de la même manière dans l'hypothèse 1.5.1, nous supposons que les fonctions  $g_{i\Delta}(x(t))$  à paramètres inconnus vérifient  $g_{i\Delta}(0) = 0$  et sont bornées en norme comme suit

$$\|g_{i\Delta}(x(t))\| \leq \mu_{i\Delta} \|x(t)\|^q \quad (1.111)$$

où  $q \geq 1$  est un entier connu et  $\mu_{i\Delta}$  sont des constantes positives avec  $\mu_\Delta = \sum_{i=1}^m \mu_{i\Delta}$ . De

plus, les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  des items 3 et 4 de l'hypothèse 1.5.1 sont respectivement substituées par les matrices  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$ .

Le système non linéaire incertain donné par (1.109) et (1.110) avec  $g_{i\Delta}(x(t)) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + \lambda N_x \hat{w}(t) \\ y(t) = C_0x(t) + \lambda N_y \hat{w}(t) \\ \hat{z}(t) = \lambda^{-1} E_x x(t) + \lambda^{-1} E_u u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.112)$$

et avec

$$\hat{w}(t) = \Delta \hat{z}(t) \quad (1.113)$$



pour tout réel  $\lambda$  strictement positif.

Alors, il existe un gain de retour de sortie statique  $K$  tel que le système incertain donné par (1.109) et (1.110), avec  $g_{i_\Delta}(x(t)) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), soit quadratiquement stable si et seulement s'il existe un paramètre scalaire  $\lambda > 0$  tel que le système (1.112) contrôlé par le retour de sortie  $u(t) = Ky(t)$  soit quadratiquement stable avec une norme  $\mathcal{H}_\infty$  inférieure ou égale à 1 (voir théorème 1.3.5).

La stabilisation quadratique implique qu'il existe deux réels  $M > 0$  et  $\omega < 0$ , et un gain  $K$  tels qu'on ait

$$\|e^{(A+BKC)t}\| < Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad (1.114)$$

où  $A = A_0 + \Delta_A$ ,  $B = B_0 + \Delta_B$  et  $C = C_0 + \Delta_C$ .

En utilisant la relation (1.110), nous obtenons

$$\|B\| \leq \|B_0\| + \|N_x\| \|E_u\| = \rho_B \quad \text{et} \quad \|C\| \leq \|C_0\| + \|N_y\| \|E_x\| = \rho_C. \quad (1.115)$$

Puis, en utilisant les développements qui précèdent, nous pouvons appliquer le théorème 1.5.2 au système incertain (1.109)-(1.110) en remplaçant respectivement  $\mu$ ,  $\|B\|$  et  $\|KC\|$  par  $\mu_\Delta$ ,  $\rho_B$  et  $\|K\| \rho_C$ , et en utilisant le système (1.112) pour la synthèse du gain  $K$ .

### Exemple

Considérons le système non linéaire incertain suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ -0.1763 & -1.197 \end{bmatrix} + \Delta_A \right) x + \sum_{i=1}^2 g_{i_\Delta}(x) u_i + \left( \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix} + \Delta_B \right) u \\ y = \left( \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} + \Delta_C \right) x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.116)$$

avec

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_B = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_C = \begin{bmatrix} \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ g_{1_\Delta}(x) &= \begin{bmatrix} x_1^2(1 + \delta_4) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_{2_\Delta}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_2(1 + \delta_5) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où  $|\delta_1| \leq 0.3$ ,  $|\delta_2| \leq 0.25$ ,  $|\delta_3| \leq 0.2$ ,  $|\delta_4| \leq 0.2$  et  $|\delta_5| \leq 0.4$ .

La matrice  $A_0$  est instable puisque ses deux valeurs propres sont données par  $\lambda_1 = 0.0423$ , et  $\lambda_2 = -1.3393$ . La paire  $(A_0, B_0)$  est commandable et la paire  $(C_0, A_0)$  est observable.

Les matrices  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $E_x$  et  $E_u$  définies dans (1.110) sont données par

$$\begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_B \\ \Delta_C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} E_x & E_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.15 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\Delta$  est une matrice inconnue constante satisfaisant  $\|\Delta\| \leq 1$ .

Les paramètres  $\rho_B$  et  $\rho_C$  définis dans (1.115) sont donnés par

$$\rho_B = \|B_0\| + \|N_x\| \|E_u\| = 1.0062 \quad \text{et} \quad \rho_C = \|C_0\| + \|N_y\| \|E_x\| = 0.8.$$

Nous avons  $g_{1\Delta}(0) = g_{2\Delta}(0) = 0$  et en utilisant l'approche développée dans (1.90), (1.91) et (1.92), nous obtenons

$$g_{1\Delta}(x) = \begin{bmatrix} x_1^2(1 + \delta_4) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \delta_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (x \otimes x),$$

$$g_{2\Delta}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_2(1 + \delta_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \delta_5) & 0 & 0 \end{bmatrix} (x \otimes x),$$

et

$$\|g_{1\Delta}(x)\| \leq \left\| \begin{bmatrix} (1 + \delta_4) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \|x\|^2 \leq \sqrt{1 + |\delta_4|} \|x\|^2 = \sqrt{1.2} \|x\|^2 = \mu_{1\Delta} \|x\|^2,$$

$$\|g_{2\Delta}(x)\| \leq \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \delta_5) \end{bmatrix} \right\| \|x\|^2 \leq \sqrt{1 + |\delta_5|} \|x\|^2 = \sqrt{1.4} \|x\|^2 = \mu_{2\Delta} \|x\|^2.$$

On peut ainsi vérifier que la fonction non linéaire  $g_{\Delta}(x)$  satisfait à l'hypothèse 1.5.1.

Le système non linéaire (1.116) contrôlé par l'entrée  $u(t) = 0$  dans le cas nominal est instable, ceci est illustré dans la figure 1.7. Cependant, en utilisant le théorème 1.5.2, on montre bien que le système non linéaire incertain (1.116) contrôlé par le retour de sortie statique est stable. Le gain par retour de sortie est obtenu par la méthode du  $W$ -problème (voir théorème 2 dans [CT99])

$$K = \begin{bmatrix} -1.8908 & -57.2962 \end{bmatrix}$$

avec  $\lambda = 1$  et la norme  $\mathcal{H}_{\infty}$  du système (1.112) avec  $u(t) = Ky(t)$  est inférieure ou égale à 1. De plus les valeurs propres de la matrice  $A_0 + B_0KC_0$  sont  $(-0.5340, -1.8792)$ .

Ainsi, il résulte du théorème 1.5.2 que le système non linéaire incertain (1.116) contrôlé par le retour de sortie statique  $u(t) = Ky(t)$  est exponentiellement stable.

La réponse temporelle du système incertain est illustrée dans les figures 1.8 et 1.9 avec  $\delta_1 = 0.15$ ,  $\delta_2 = 0.20$ ,  $\delta_3 = 0.18$ ,  $\delta_4 = 0.12$  et  $\delta_5 = 0.38$ .

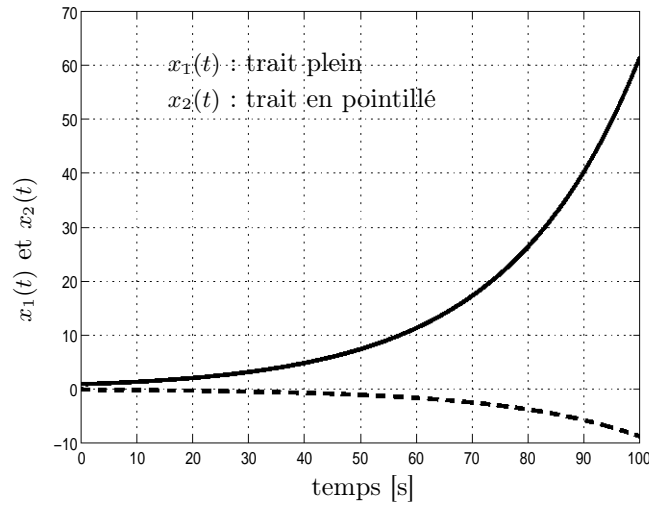


FIGURE 1.7: Réponse temporelle du système non linéaire avec  $u(t) = 0$  dans le cas nominal.

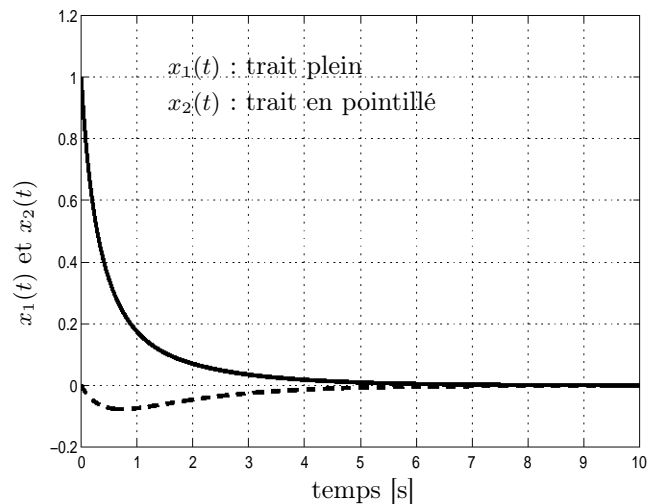


FIGURE 1.8: Réponse temporelle du système non linéaire incertain avec  $u(t) = Ky(t)$ .

## 1.8 Commande basée sur un observateur

L'étude des lois de commandes basées sur un observateur a fait l'objet de nombreux travaux jusqu'à nos jours (voir [KS72, ZDG96]). En effet, pour la plupart des systèmes physiques, seule une partie de l'état est accessible via des capteurs, c'est pourquoi l'utilisation d'un observateur permettant de palier le manque d'informations pour synthétiser la commande est devenue courante. Pour les systèmes linéaires, le principe de séparation a été établi et permet de calculer séparément l'observateur et la commande mais aussi de choisir indépendamment leur vitesse de convergence. Pour les systèmes non linéaires ceci n'est généralement pas possible.

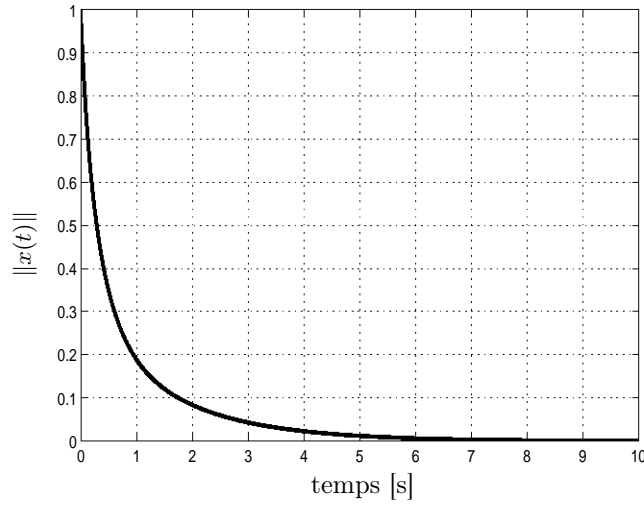


FIGURE 1.9: Réponse temporelle du système non linéaire incertain en norme avec  $u(t) = Ky(t)$ .

Nous considérons le système non linéaire affine suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.117)$$

où les vecteurs  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$ , les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et les fonctions non linéaires  $g_i$  sont définies dans la section 1.5 et vérifient l'hypothèse 1.5.1.

Le but de cette section est d'étudier le problème de la stabilisation exponentielle du système non linéaire par l'utilisation de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman via un observateur non linéaire de type "Luenberger" suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^m g_i(\hat{x}(t))u_i(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.118)$$

couplé à la commande par retour d'état estimé suivante

$$u(t) = L\hat{x}(t). \quad (1.119)$$

Nous supposons que le système non linéaire (1.117) satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.8.1.** La fonction  $\Delta g_i(X(t))$  définie dans (1.126) satisfait la relation suivante (pour  $i = 1, \dots, m$ )

$$\|\Delta g_i(X(t))\| \leq \rho_i \|X(t)\|^q \quad (1.120)$$

où  $q \geq 1$  et  $\rho_i$  sont des constantes positives.  $\square$

Dans la suite, nous définissons  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$ .

En utilisant la relation (1.71) dans l'hypothèse 1.5.1, les réels  $\rho_i$  s'obtiennent directement en utilisant les valeurs de  $\mu_i$ . De plus, en utilisant l'hypothèse 1.5.1, nous avons  $\Delta g_i(0) = 0$ .

La stabilisation exponentielle du système (1.117) est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.8.1.** [NZRD09] *Sous les hypothèses 1.5.1 et 1.8.1, le système (1.117) contrôlé par la commande par retour d'état estimé (1.119) via l'observateur non linéaire (1.118) est exponentiellement stable si toutes les valeurs propres des matrices  $A + BL$  et  $A - KC$  sont strictement à partie réelle négative, et si l'état initial  $X_0$  satisfait*

$$\|X_0\| < \left( \frac{|\omega|}{\rho M^{q+1} \|L\|} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.121)$$

où  $M > 0$  et  $\omega < 0$  sont des réels donnés et satisfont la relation suivante

$$\|e^{\tilde{A}t}\| < M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \quad (1.122)$$

De plus, l'état  $X(t)$  est borné en norme comme suit

$$\|X(t)\| \leq \frac{M e^{\omega t} \|X_0\|}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \rho \|L\| \|X_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}} \quad (1.123)$$

où

$$X(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) - x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}.$$

■

*Démonstration.* Soit  $e$  l'erreur du signal

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t),$$

alors le système bouclé est donné par

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - KC)e(t) + \sum_{i=1}^m (g_i(\hat{x}(t)) - g_i(x(t)))(L\hat{x}(t))_i \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + BL)\hat{x}(t) - KCe(t) + \sum_{i=1}^m g_i(\hat{x}(t))(L\hat{x}(t))_i \end{cases} \quad (1.124)$$

où  $(L\hat{x}(t))_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $L\hat{x}(t)$ .

Le système (1.124) peut s'écrire

$$\dot{X}(t) = \tilde{A}X(t) + \sum_{i=1}^m \Delta g_i(X(t)) ([0 \ L]X(t))_i \quad (1.125)$$

avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A - KC & 0 \\ -KC & A + BL \end{bmatrix}, \Delta g_i(X(t)) = \begin{bmatrix} g_i(\hat{x}(t)) - g_i(\hat{x}(t) - e(t)) \\ g_i(\hat{x}(t)) \end{bmatrix}. \quad (1.126)$$

La solution du système (1.125) est donnée par

$$X(t) = e^{\tilde{A}t} X_0 + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-s)} \left( \sum_{i=1}^m \Delta g_i(X(s)) ([0 \ L] X(s))_i \right) ds. \quad (1.127)$$

Sous l'hypothèse 1.5.1, les matrices de gain  $L$  et  $K$  sont respectivement choisies telles que toutes les valeurs propres de la matrice  $A + BL$  et  $A - KC$  soient à partie réelle négative.

Alors, il existe deux réels  $M > 0$  et  $\omega < 0$  tels que la relation (1.122) soit satisfaite.

En utilisant la norme des deux côtés de l'équation (1.127) avec l'hypothèse 1.8.1, nous pouvons borner l'état  $X(t)$  comme suit

$$\|X(t)\| \leq M e^{\omega t} \|X_0\| + \int_0^t M e^{\omega(t-s)} \left( \|L\| \|X(s)\| \sum_{i=1}^m \|\Delta g_i(X(s))\| \right) ds. \quad (1.128)$$

A partir de l'inégalité (1.120), nous avons

$$\frac{\|X(t)\| e^{-\omega t}}{\|X_0\|} \leq M + \rho M \int_0^t e^{q\omega s} \|L\| \|X_0\|^q \frac{\|X(s)\|^{q+1}}{\|X_0\|^{q+1}} e^{-(q+1)\omega s} ds. \quad (1.129)$$

Si la condition (1.121) est vérifiée, alors l'inégalité suivante est satisfaite

$$1 - qM^{q+1} \rho \|L\| \|X_0\|^q \int_0^t e^{q\omega s} ds > 0 \quad (1.130)$$

En appliquant la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman donnée dans le théorème 1.4.1, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\frac{\|X(t)\| e^{-\omega t}}{\|X_0\|} \leq \frac{M}{\left( 1 - q\rho M^{q+1} \|X_0\|^q \|L\| \int_0^t e^{q\omega s} ds \right)^{\frac{1}{q}}} \quad (1.131)$$

ce qui est équivalent à

$$\|X(t)\| \leq \frac{M \|X_0\| e^{\omega t}}{\left( 1 - q\rho M^{q+1} \|X_0\|^q \|L\| \int_0^t e^{q\omega s} ds \right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (1.132)$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini, le dénominateur dans l'expression (1.132) est minimal, ainsi nous obtenons

$$\|X(t)\| \leq \frac{M \|X_0\| e^{\omega t}}{\left( 1 - qM^{q+1} \rho \|L\| \|X_0\|^q \int_0^t e^{q\omega s} ds \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{M \|X_0\| e^{\omega t}}{\left( 1 - qM^{q+1} \rho \|L\| \|X_0\|^q \int_0^\infty e^{q\omega s} ds \right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leq \frac{M \|X_0\| e^{\omega t}}{\left(1 - \frac{M^{q+1} \rho \|L\| \|X_0\|^q}{|\omega|}\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (1.133)$$

Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème. •

## 1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'intérêt de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires, en particulier les systèmes non linéaires affines (bilinéaires et multilinéaires). L'utilisation de cette nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman permet de montrer, sous certaines conditions adéquates, qu'on peut stabiliser le système par retour d'état statique et par retour de sortie statique.

L'approche proposée dans ce chapitre est une méthodologie qui permet de considérer les systèmes multilinéaires pour la synthèse de correcteurs stabilisants.

Un avantage de cette technique de stabilisation est la caractérisation d'un domaine d'attraction à l'intérieur duquel la stabilité est garantie.

Cette méthodologie est étendue au problème de stabilisation robuste dans le cas des systèmes avec des incertitudes paramétriques et à la commande basée sur un observateur pour les systèmes non linéaires affines dont l'état est partiellement mesuré.





# Chapitre 2

## Les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire : Théorie et applications

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>46</b>
<b>2.2</b>	<b>Historique</b>	<b>46</b>
<b>2.3</b>	<b>Exemples d'applications des systèmes fractionnaires</b>	<b>47</b>
2.3.1	Automatique	48
2.3.2	Thermique : Diffusion et équation de la chaleur	49
2.3.3	Electricité	52
2.3.4	Rhéologie	53
2.3.5	Electrochimie	54
<b>2.4</b>	<b>Théorie de la dérivation non entière</b>	<b>56</b>
2.4.1	Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière	56
2.4.2	Définitions et propriétés	58
2.4.3	Interprétations géométrique et physique	62
2.4.4	Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier	63
2.4.5	Méthodes opérationnelles fractionnaires	63
2.4.6	Equations différentielles fractionnaires	65
2.4.7	Représentation dans l'espace d'état	68
2.4.8	Systèmes fractionnaires d'ordres commensurable et non commensurable	69
2.4.9	Evaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles	75
2.4.10	Solutions numériques des équations à dérivée fractionnaire	77
<b>2.5</b>	<b>Etude des systèmes chaotiques fractionnaires</b>	<b>79</b>
2.5.1	Caractérisation du chaos	81
2.5.2	Système chaotique fractionnaire de Lorenz	81
<b>2.6</b>	<b>Stabilité</b>	<b>85</b>
2.6.1	Stabilité des systèmes fractionnaires	85
2.6.2	Stabilité des systèmes fractionnaires dans une région $\mathcal{GLMI}$	86

<b>2.7 Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité</b>	<b>89</b>
<b>2.8 Conclusion . . . . .</b>	<b>91</b>

---

## 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur la théorie du calcul fractionnaire et des systèmes à dérivée d'ordre non entier sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans les chapitres 3 et 4.

La première partie de ce chapitre, nous rappelons l'histoire et nous présentons plusieurs exemples de systèmes fractionnaires, s'inscrivant dans les disciplines variées des sciences de l'ingénieur et des sciences physiques. Nous rappellerons également le travail du groupe CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) sur la commande des systèmes fractionnaires.

Dans la deuxième partie, on expose de manière exhaustive la théorie de la dérivation fractionnaire tout en passant par les différentes définitions de la dérivation fractionnaire. Une évaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles et une analyse des solutions numériques des équations différentielles fractionnaires sont développées grâce à l'utilisation d'une approximation de la définition de Grünwald-Letnikov.

Nous présentons une interprétation géométrique et physique de la dérivation non entière donnée dans [Pod99, Pod02]. Pour clôturer cette deuxième partie de ce chapitre, l'analyse des solutions des équations différentielles fractionnaires linéaires à coefficients constants est développée.

Dans la troisième partie, une étude des systèmes chaotiques fractionnaires est présentée. Les modèles mathématiques de ces systèmes dynamiques non linéaires contiennent des dérivées fractionnaires. L'ordre de dérivation total de ces systèmes est inférieur à trois, cependant, dans de tels systèmes chaotiques fractionnaires, on observe également les mêmes phénomènes liés aux attracteurs étranges que pour les systèmes chaotiques à dérivée entière.

La quatrième partie aborde les concepts de stabilité, de commandabilité, d'observabilité, de stabilisabilité et de détectabilité des systèmes linéaires fractionnaires qui sont utilisés dans la suite de ce mémoire.

## 2.2 Historique

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe.

Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul

fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre  $n$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$ , où  $n$  est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir  $n$  dans  $\mathbb{Q}$ . Il posa la question : et si  $n = \frac{1}{2}$  ? En 1695, dans une lettre à l'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que  $d^{\frac{1}{2}}x$  sera égal à  $x\sqrt{dx} : x$ , un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au XVIII<sup>e</sup> siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832, 1837) ou Riemann (1847) au XIX<sup>e</sup> siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pour plus de détails historiques, nous renvoyons à [Dug94], [MR93], [OS74a], [Ros75a]. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.

## 2.3 Exemples d'applications des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherche. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes et les applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés.

A titre d'exemples, nous citerons quelques uns de ces champs d'applications et quelques résultats expérimentaux dans les domaines de l'électrochimie [KHLS81a, KHLS81b] et de la biologie qui mettent en évidence l'utilité d'une approche fractionnaire pour souligner leur importance, motiver notre travail et plus particulièrement pour modéliser des phénomènes de viscoélasticité et de diffusion ou, plus généralement, pour tenir compte de dynamiques de dimension élevée ou non linéaires.

Ils sont issus de la littérature, mais il nous paraît utile de les reprendre de manière claire et détaillée. Les exemples présentés dans ce chapitre montrent que nombre d'applications utilisent le calcul fractionnaire, soit comme un outil de commande, soit comme un outil de modélisation. Les travaux sur la commande d'un système qui est fractionnaire par sa nature physique sont peu nombreux et se limitent souvent à un système spécifique. A titre d'exemples, on peut Skaar *et al.* [SMM88] qui modélisent une structure viscoélastique monodimensionnelle par un système fractionnaire qu'ils stabilisent par une loi de commande faisant également intervenir des opérateurs d'ordre non entier. Ainsi que Matignon [Mat94] qui considère la transmission d'ondes acoustiques à travers un tuyau sonore et large pour les fluides viscothermiques. Comme application des systèmes fractionnaires à l'automatique, on peut évoquer Matignon et Andréa-Novel [MAN97, MAN96] qui présentent une stabilisation basé sur un observateur généralisant l'approche polynomiale des systèmes d'ordre entier, toutefois sans discuter des difficultés de l'implantation d'un intégrateur fractionnaire.

### 2.3.1 Automatique

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [Pod94], Chen *et al.* [CPX09] et Caponetto *et al.* [CDFP10] ont montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Ils proposent une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Mbodje et Montseny [MM95] et Matsuda et Fuji [MF93] ont appliqué avec succès des lois de commande fractionnaires à des systèmes à paramètres distribués. Cependant, nous ne pouvons aborder le sujet de contrôle fractionnaire sans invoquer l'approche CRONE, introduite par Oustaloup [Ous91]. La commande CRONE est le travail d'un groupe de chercheurs au Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS) de Bordeaux sous la direction d'Alain Oustaloup. Elle fait l'objet de nombreuses publications et de plusieurs ouvrages. Nous donnerons ici un aperçu succinct de l'approche et renvoyons à [Ous91] et [Ous95] pour plus de détails. Cette approche s'inscrit au cœur du problème de synthèse de régulateurs robustes vis-à-vis des incertitudes paramétriques d'un procédé donné. La méthodologie CRONE permet la synthèse dans le domaine fréquentiel de commandes dynamiques robustes par retour de sortie pour des systèmes linéaires stationnaires (LTI), incertains, monovariables (SISO) [OML95] ou multivariables (MIMO) [LOS96]. Les performances auxquelles elle conduit s'expliquent autant par la prise en compte aussi peu pessimiste que possible des incertitudes portant sur les systèmes commandés, que par l'efficacité des paramètres de réglage utilisés. Cette stratégie de contrôle a été appliquée à la suspension automobile, suspension qui porte d'ailleurs le même nom. Cependant, il est utile de souligner que le compensateur implanté est d'ordre entier et synthétisé physiquement par des composants classiques. Le qualificatif non entier est tout de même justifié dans la mesure où le comportement d'un opérateur non entier authentique peut être approché avec un écart arbitrairement petit sur une bande fréquentielle donnée. Il existe aujourd'hui trois générations de CRONE. Les deux premières se servent du calcul fractionnaire d'un ordre réel. La deuxième génération atteint un degré de robustesse remarquable grâce à la réalisation d'une droite verticale dans le plan de Black du système contrôlé en boucle ouverte. La troisième génération, inspirée par l'intégration d'ordre complexe, généralise cette propriété par une droite de pente souhaitée autour de la fréquence à gain unité.

Le régulateur proposé par Oustaloup [Ous91] à la forme suivante (dans l'une de ses versions)

$$C_m(s) = C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m \quad (2.1)$$

où les réels  $C_0$ ,  $\omega_b > 0$ ,  $\omega_h > 0$ , et  $m > 0$  sont des paramètres du régulateur,  $m$  étant non entier. Oustaloup [Ous91] met en relief l'apport des contrôleurs fractionnaires dont CRONE constitue un cas particulier, mais aussi puissant quant à la robustesse du système aussi bien vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres, que vis-à-vis des non linéarités présentes dans la boucle de commande. Une étude comparative avec des régulateurs PID ou CRONE dans un procédé linéaire monovariante stationnaire du deuxième ordre commandé conformément au schéma fonctionnel de la figure 2.1 a été menée dans [Ous91].

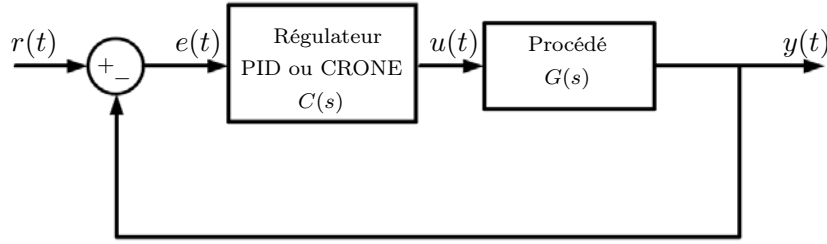


FIGURE 2.1: Boucle de commande par régulateur PID ou CRONE

La fonction de transfert du procédé est donné par

$$G(s) = \frac{K_0}{1 + 2\zeta_0 \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (2.2)$$

où  $K_0$  désigne la gain statique,  $\zeta_0$  et  $\omega_0$  désignent respectivement, le facteur d'amortissement et la pulsation propre non amortie. L'étude comparative d'un contrôleur de type PID, approximé par le régulateur avance-retard de phase donné par la fonction de transfert suivante

$$C(s) = C_0 \frac{(1 + \frac{s}{\omega'_1})(1 + \frac{s}{\omega'_2})}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})} \quad (2.3)$$

et d'un régulateur CRONE réalisé à partir de quatre zéros et de quatre pôles, caractérisé par la fonction de transfert suivante

$$C(s) = C_0 \frac{(1 + \frac{s}{\omega'_1})(1 + \frac{s}{\omega'_2})(1 + \frac{s}{\omega'_3})(1 + \frac{s}{\omega'_4})}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})(1 + \frac{s}{\omega_3})(1 + \frac{s}{\omega_4})} \quad (2.4)$$

L'approximation des opérateurs fractionnaires peut se faire est à l'aide d'une distribution récursive de pôles et de zéros comme dans notre cas, ou encore, d'une distribution de fréquences transitionnelles.

Les performances obtenues sont intéressantes dans le cas de la commande CRONE puisqu'il ne s'agit pas seulement de maintenir la stabilité comme dans le cas de l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  (robustesse de la stabilité), mais encore mieux, de satisfaire des considérations de robustesse plus sévères : il s'agit de la robustesse du degré de stabilité et du coup, l'objectif est le maintien de la performance dynamique nominale fixée par le facteur d'amortissement nominal.

### 2.3.2 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur

L'exemple le plus simple de système fractionnaire est l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En choisissant bien la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d'ordre  $\frac{1}{2}$ . A partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une déviation d'ordre  $\frac{3}{2}$ . Cet exemple a été traité dans [BT84] et repris dans [Hot98], [Mra04], [Pod99].

On rappelle que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.5)$$

où  $t$  est une variable scalaire libre, symbolisant le temps,  $x$  une variable libre scalaire ou vectorielle, représentant l'espace et  $c$  une constante positive. Nous nous intéressons ici à l'équation de la chaleur à une dimension spatiale ; où la variable libre  $x$  est scalaire. Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes

$$v(0, x) = 0 \quad \text{pour } x < 0 \quad (2.6a)$$

$$v(t, 0) = u(t) \quad \text{pour } x = 0 \quad (2.6b)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0 \quad \text{pour } t > 0 \quad (2.6c)$$

Nous supposons que  $u$  est une fonction de type exponentielle avec une variation bornée presque partout (ceci garantit l'existence de la transformée de Laplace de  $v$  et la validité de la formule intégrale de la transformée inverse). Ainsi, le problème peut être résolu par passage dans la plan opérationnel. En utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial x^2}(s, x) = \frac{s}{c} \widehat{v}(s, x) \quad \text{pour } x > 0, \quad (2.7a)$$

$$\widehat{v}(s, 0) = \widehat{u}(s) \quad (2.7b)$$

La solution formelle de (2.7a) est

$$\widehat{v}(s, x) = c_1(s) \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{c}}\right) + c_2 \exp\left(x \sqrt{\frac{s}{c}}\right) \quad (2.8)$$

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites  $\widehat{v}(s, 0) = \widehat{u}(s)$ , on obtient

$$\widehat{v}(s, x) = \widehat{u}(s) \exp\left(x \sqrt{\frac{s}{c}}\right) \quad (2.9)$$

Pour  $x > 0$ ,

$$\exp\left(x \sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \mathcal{L} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right) \right\} \quad (2.10)$$

soit

$$v(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4c\tau}\right) u(t - \tau) d\tau. \quad (2.11)$$

D'une part, on vérifie bien que (2.11) est une solution de l'équation différentielle (2.5), d'autre part, à partir de (2.9), on en déduit

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}(s, x) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \widehat{v}(s, x)$$

et en particulier,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \widehat{u}(s).$$

Si nous définissons comme variable de sortie

$$y(t) \triangleq \sqrt{c} \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) \quad (2.12)$$

nous obtenons le transfert suivant

$$\widehat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}} \widehat{u}(s). \quad (2.13)$$

Ce qui nous permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  est donc un dérivateur d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

Cet exemple peut être interprété physiquement comme le mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide dont le rapport entre la viscosité  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  est égal à  $c = \frac{\mu}{\rho}$  (voir figure 2.2). Le mouvement de la plaque est unidirectionnel suivant l'axe  $z$ . La direction normale à la plaque est repérée par la coordonnée  $x$ . Les deux variables  $u(t)$  et  $v(t, x)$  désignent respectivement, la vitesse de la plaque et la vitesse des particules du fluide situés à la distance  $x$  de la plaque.

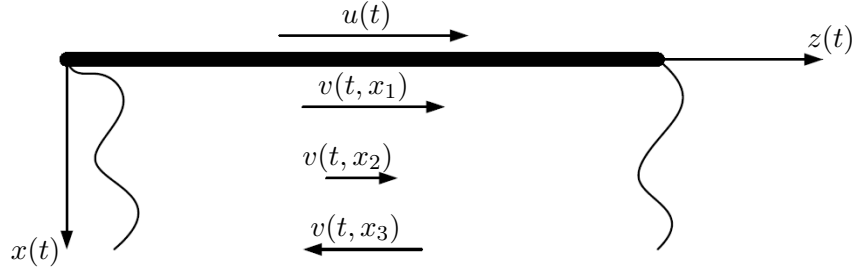


FIGURE 2.2: Mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide

Considérons maintenant une plaque mince rigide de masse  $M$  et de surface  $S$  immergée dans un fluide d'une étendue infinie et reliée par un ressort sans masse de constante de raideur  $K$  (voir figure 2.3). Nous supposons que le ressort ne perturbe pas le liquide et qu'une force  $f(t)$  est appliquée sur la plaque alors la coordonnée  $z$  d'un point de référence sur la plaque obéit à l'équation fractionnaire de mouvement suivante [BT84]

$$M\ddot{z}(t) = f(t) - Kz(t) - 2Sv(t, 0) \quad (2.14)$$

qui peut s'écrire, en tenant compte des relations précédentes, comme suit

$$A\ddot{z}(t) + B {}_0D_t^{\frac{3}{2}} z(t) + Cz(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (2.15)$$

où

$$A = M, \quad B = 2S\sqrt{\mu\rho}, \quad C = K, \quad (2.16)$$

et avec les conditions initiales décrivant l'état initial du système

$$z(0) = 0, \quad \dot{z} = 0. \quad (2.17)$$

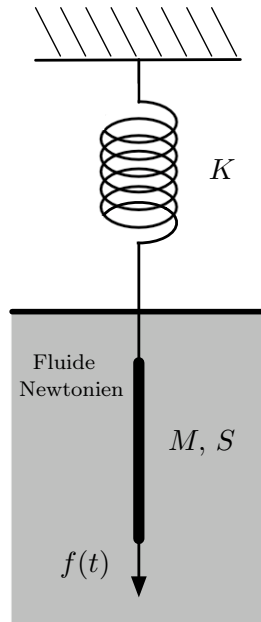


FIGURE 2.3: Plaque immergée dans un fluide Newtonien

Le système (2.15) ainsi décrit ne reflète pas rigoureusement la réalité, mais une version idéalisée de celle-ci. En effet, les conditions aux bords (2.6a) et (2.6b) correspondent à une plaque de surface infinie, et une profondeur de bassin infinie. On peut cependant s'attendre à ce que le modèle soit une bonne approximation du système réel si la plaque et le bassin sont grands par rapport à la vitesse de la plaque. Ainsi, l'introduction des opérateurs fractionnaires dans la modélisation de phénomène de viscosité ou de diffusion est désormais permise. Il faut noter aussi, qu'à travers cet exemple, il a été montré qu'une intégration d'ordre  $\frac{1}{2}$  peut être engendrer par diffusion.

### 2.3.3 Electricité

Grâce à des données expérimentales, Schmidt et Drumheller (voir [SD71]) montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé ( $LiN_2H_5SO_4$ ) et en procédant à des mesures que sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique  $\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon''$  sont très grandes ( $\varepsilon' \approx \varepsilon'' \approx 10^6$ ) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance  $\frac{1}{2}$  (avec  $\varepsilon' \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon'' \in \mathbb{R}$ ).

Dans [SD71, Las95, Las99, Mra04], nous trouvons la relation suivante, valable pour un composé ( $LiN_2H_5SO_4$ )

$$\varepsilon = \varepsilon' \omega^{-\frac{1}{2}} (1 - j) = \varepsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad j = \sqrt{-1} \quad (2.18)$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la



relation suivante

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon} \quad (2.19)$$

où  $C_e$  est une constante. En substituant la relation (2.18) dans (2.19), on a

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon' \sqrt{2}(j\omega)^{-\frac{1}{2}}} \quad (2.20)$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{où} \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}C_e \varepsilon'} \quad (2.21)$$

où encore, en fonction de la variable de Laplace  $s$

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}} \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme de "Fractor", par analogie au terme anglais "Capacitor", pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance.  $K$  désigne alors la constante du "Fractor" (capacité fractionnaire). Un axe de recherche intéressant dans la physique des matériaux qui permettra de mettre en évidence les propriétés de tels matériaux via des bandes de fréquences et de températures. La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

### 2.3.4 Rhéologie

En rhéologie, lorsque des solides viscoélastiques sont employés comme matériaux isolateurs ou amortisseurs de vibrations, la dérivation fractionnaire est un moyen approprié pour décrire fidèlement l'amortissement dans les équations de mouvement [Bag79] et [BT86]. L'introduction de la dérivation non entière dans la modélisation réduit le nombre de paramètres du modèle [Sou96]. On peut voir cela sur l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide pour lequel l'équation de mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n}{dt^n} \varepsilon(t) \quad (2.23)$$

où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  désignent respectivement la contrainte et la déformation, et où  $b_m$ ,  $E_0$ ,  $M$ ,  $N$  et  $E_n$  sont des paramètres du modèle. Maintenant, en utilisant la dérivation fractionnaire, on n'a plus besoin que d'un seul terme de dérivation agissant respectivement sur la contrainte et la déformation. Ce qui produit un modèle compact à quatre ou cinq paramètres maximum [Bag89], au lieu d'une dizaine dans le cas de l'équation (2.23)

$$(1 + bD_t^\alpha)\sigma(t) = (E_0 + E_1 D_t^\alpha)\varepsilon(t) \quad (2.24)$$

Dans (2.24), les paramètres sont  $b$ ,  $E_0$ ,  $E_1$  et  $\alpha$ . Ce modèle reflète fidèlement les propriétés mesurées de plusieurs matériaux. Le bon comportement de cette modélisation fractionnaire s'explique notamment par le fait que les théories moléculaires "classiques" produisent des relations entre contrainte et déformation contenant des puissances fractionnaires de la fréquence. Des manipulations mathématiques de ces théories mettent ces relations sous forme de dérivées fractionnaires [BT83].

$$\sigma(t) = K D_t^\alpha \varepsilon(t) \quad (2.25)$$

### 2.3.5 Electrochimie

Dans l'exemple décrit dans cette section, les systèmes fractionnaires sont utilisés pour obtenir une approximation d'un phénomène physique.

Le principe d'une cellule électrolytique est esquissée à la figure 2.4.

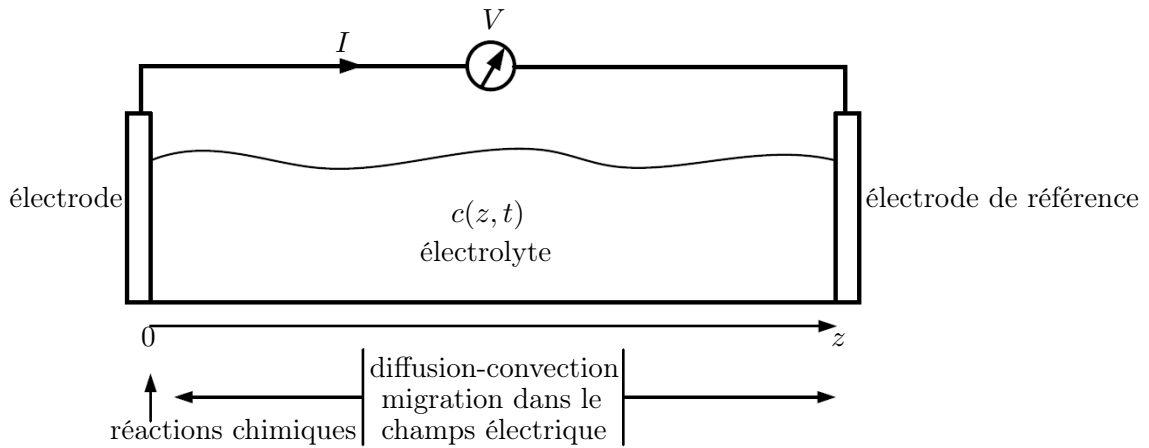


FIGURE 2.4: Cellule électrolytique

La relation entre la tension  $V$  et le courant  $I$  est non linéaire ; toutefois, pour de faibles variations autour d'un point de fonctionnement, le linéarisé de la relation représente une bonne approximation du système. Ainsi, en identifiant les grandeurs électriques avec leurs transformées de Fourier, on peut écrire

$$I(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} V(\omega) \quad (2.26)$$

où  $Z(\omega)$  est appelée l'impédance de la cellule au point opérationnel donné.

Afin de parvenir à une solution analytique, des hypothèses simplificatrices sont introduites. Nous nous intéressons ici particulièrement au modèle connu sous le nom de "circuit équivalent de Randles", décrit dans la figure 2.5.

Grâce à une motivation basée sur les données expérimentales, Karunathilaka *et al.* [KHLS81a, KHLS81b] apportent une modification du "circuit équivalent de Randles" appelé ici "circuit équivalent de Karunathilaka" (voir figure 2.6).

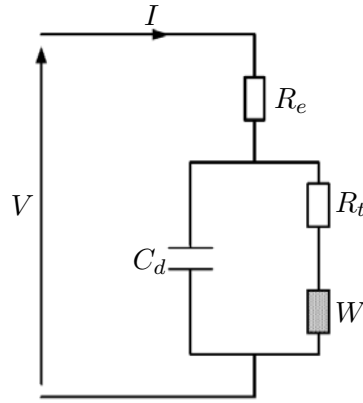


FIGURE 2.5: Circuit équivalent de Randles

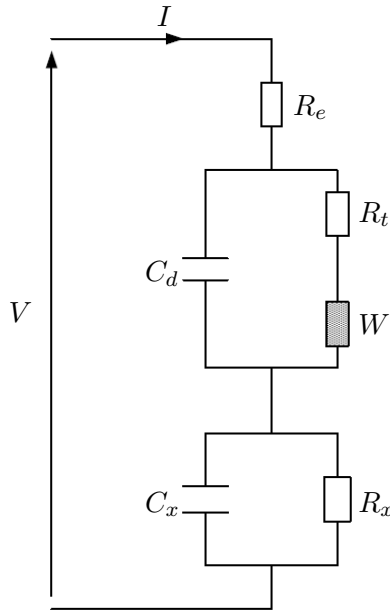


FIGURE 2.6: Circuit équivalent de Karunathilaka

L'élément  $W$  qui apparaît dans les deux circuits est appelé "*impédance de Warburg*" et représente le transfert [Las99]

$$Z_W(\omega) \triangleq \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{i\omega}} \quad (2.27)$$

où  $\sigma$  est une constante réelle, appelée le coefficient de Warburg. La présence de  $W$  est due aux effets de diffusion au sein de l'électrolyte. L'impédance du circuit équivalent de Randles est donnée par

$$\begin{aligned} Z_r(\omega) &= R_r(\omega) - iX_r(\omega) \\ R_r(\omega) &= R_e + \frac{R_t\omega^{\frac{1}{2}} + \sigma}{\omega^{\frac{1}{2}} \times D(\omega)} \\ X_r(\omega) &= \frac{1}{C_d\omega} - \frac{\sigma C_d\omega^{\frac{1}{2}} + 1}{C_d\omega \times D(\omega)} \end{aligned}$$

où

$$D(\omega) = (1 + \sigma C_d \omega^{\frac{1}{2}})^2 + C_d^2 \omega (R_t \omega^{\frac{1}{2}} + \sigma)^2$$

et celui du circuit équivalent de Karunathilaka *et al.* [KHLS81a, KHLS81b] par

$$\begin{aligned} Z_k(\omega) &= R_k(\omega) - iX_k(\omega) \\ R_k(\omega) &= R_e + \frac{R_t \omega^{\frac{1}{2}} + \sigma}{\omega^{\frac{1}{2}} \times D(\omega)} + \frac{R_x}{1 + C_x^2 R_x^2 \omega^2} \\ X_k(\omega) &= \frac{1}{C_d \omega} - \frac{\sigma C_d \omega^{\frac{1}{2}} + 1}{C_d \omega \times D(\omega)} + \frac{1}{C_x \omega} - \frac{1}{C_x \omega (1 + C_x^2 R_x^2 \omega^2)} \end{aligned}$$

Le circuit équivalent de Karunathilaka *et al.* [KHLS81a, KHLS81b] a été validé expérimentalement.

## 2.4 Théorie de la dérivation non entière

### 2.4.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation non entière

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma Euler et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

#### 2.4.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Euler  $\Gamma(z)$ . La fonction de Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.28)$$

avec  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(0_+) = +\infty$ ,  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ . Une propriété importante de la fonction de Gamma  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.29)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad (2.30)$$

La fonction de Gamma Euler généralise la factorielle car  $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 2.4.1.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle,  $e^z$ , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [ML03, ML05] et désignée par la fonction

suivante [Erd55a, Erd55b, Erd55c]

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.31)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres à été introduite par Argawal [Arg53] et elle est définie par un développement en série suivant [Erd55a, Erd55b, Erd55c]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0). \quad (2.32)$$

Pour  $\beta = 1$ , on retrouve la relation (2.31) car

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z).$$

A partir de la relation (2.32) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (2.33)$$

Pour les équations différentielles d'ordre non entier, La fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle. La figure 2.7 ci-dessous montre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

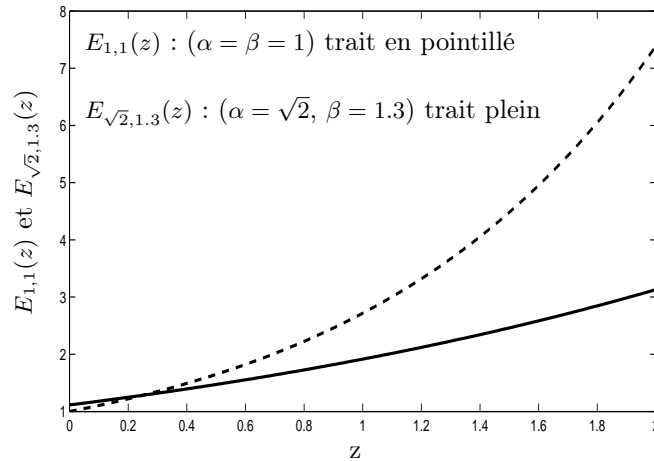


FIGURE 2.7: La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres peut s'écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha - \beta} k!}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad (2.34)$$

où

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \frac{d(k)}{dt^k} E_{\alpha,\beta}.$$

Le lemme 2.4.1 suivant proposé par Podlubny [Pod99], décrit d'une manière générale le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Ce lemme a été généralisé par Wu *et al.* [WWL08] sous forme du corollaire 2.4.1 dans le cas d'une matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et va jouer un rôle très important pour la stabilisation des systèmes fractionnaires. Nous allons souvent s'en servir en le combiner avec la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires.

**Lemme 2.4.1.** [Pod99] *Si  $\alpha < 2$ ,  $\beta$  un nombre réel choisi arbitrairement,  $\gamma$  est tel que  $0.5\alpha\pi < \gamma < \min[\pi, \pi\alpha]$  et  $C_0 > 0$  est un réel constant, alors*

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C_0}{1+z}, \quad \gamma \leq |\arg(z)| \leq \pi, \quad z \neq 0.$$

□

Pour une matrice de dimension- $n$ , nous obtenons le corollaire suivant.

**Corollaire 2.4.1.** [WWL08] *Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\alpha < 2$ ,  $\beta$  est un nombre réel choisi arbitrairement,  $\gamma$  est tel que  $\frac{\alpha\pi}{2} < \gamma < \min[\pi, \pi\alpha]$  et  $\theta > 0$  est un réel constant, alors*

$$\|E_{\alpha,\beta}(A)\| \leq \frac{\theta}{1 + \|A\|}, \quad \gamma \leq |\arg(\lambda_i(A))| \leq \pi, \quad i = 1 \dots n \quad (2.35)$$

où  $\theta = \max(C, \|P\| \|P^{-1}\| C)$ ,  $\lambda_i(A)$  est la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice  $A$ ,  $P$  est une matrice de transformation non singulière donnée par la forme canonique de Jordan de la matrice  $A$ ,  $\frac{C}{1 + \|A\|} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{C_{0_i}}{1 + \lambda_i(A)} \right|$ , où  $C$  et  $C_{0_i}$  sont des constantes positives.

## 2.4.2 Définitions et propriétés

Nous utiliserons dans ce mémoire la notation proposée par Davis [Dav36], à savoir

$${}_a D_t^\alpha f(t) \quad (2.36)$$

où les réels  $a$  et  $t$  désignent respectivement la condition initiale et la variable par rapport à laquelle on applique l'opérateur de dérivation fractionnaire.

- “L'équation différentielle fractionnaire” est une équation qui contient une ou des dérivées fractionnaires,
- “Le système fractionnaire” est un système qui est décrit par une équation différentielle fractionnaire.

*Remarque 2.4.1.* L'initialisation appropriée est également cruciale dans la résolution et la compréhension des équations ou systèmes fractionnaires. Ainsi, on adopte généralement la notation pour la causalité de la fonction ou du système [Das08, LH01] (pour tout  $0 \leq \alpha < 2$ )

$${}_c D_t^\alpha f(t) = {}_a d_t^\alpha f(t) + {}_a d_0^\alpha f(t), \quad \text{avec } a \leq (c = 0) < t \quad (2.37)$$

où  ${}_a d_t^\alpha f(t)$  est la dérivée d'ordre  $\alpha$  qui peut s'écrire sous la forme suivante

$${}_a d_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right) \quad (2.38)$$

et où  ${}_a d_0^\alpha f(t) = \Psi(\alpha, f, a, 0, t)$  est une fonction initiale définie par

$${}_a d_0^\alpha f(t) = \Psi(\alpha, f, a, 0, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^0 \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right) \quad (2.39)$$

□

Nombreuses sont les définitions de cet opérateur de dérivation fractionnaire, malheureusement toutes les définitions proposées ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie celles qui sont les plus utilisées.

#### 2.4.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est basée sur une approche aux différences finies fractionnaires où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma Euler [OS74a], [Pod99]. La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'une fonction  $f(t)$  est définie par la relation suivante

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.40)$$

où  $\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor$  désigne la partie entière et  $\binom{\alpha}{j}$  sont des coefficients binomiaux que nous définirons dans la section 2.4.9 sur l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles et plus largement dans l'annexe B.5. Cette définition de Grünwald-Letnikov sera utilisée tout au long du mémoire pour la simulation et l'évaluation numériques de la dérivée fractionnaire (voir section 2.4.9).

#### 2.4.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et la plus répandue. Cette définition est basée sur la primitive ou intégrale  $k^{\text{ème}}$  d'une fonction, qui peut naturellement s'étendre au réel  $\beta$  et lorsque ce réel est piégé entre  $(n-1) < \alpha < n$ , on l'appelle dans ce cas dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville [OS74a], [Pod99]. Une primitive  $k$ -ième ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) de  $f(t)$  donnée par

$${}_a D_t^{-k} f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau$$

s'étend naturellement aux réels  $\beta > 0$ , comme suit

$${}_a D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

et la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  s'obtient en remplaçant  $n - \alpha = -\beta$

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (n - 1) < \alpha < n \quad (2.41)$$

### 2.4.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans le développement de la théorie de l'intégration et de la dérivation fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes physiques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie. Nous avons vu dans la première partie 2.3 de ce chapitre 2 que plusieurs travaux sont apparus, notamment en diffusion et en électricité où la dérivation fractionnaire est utilisée pour mieux décrire certaines propriétés physiques. En rhéologie, les modèles mathématiques adoptés conduisent en générale à des équations différentielles fractionnaires. Nous avons pu constater également qu'on pouvait obtenir des systèmes fractionnaires issus directement de l'identification, particulièrement en électrochimie, en mécanique et dans les systèmes biomédicales. Ainsi, la nécessité d'une formulation adéquate des conditions initiales pour de telles équations différentielles fractionnaires est fondamentale.

En générale, les applications requièrent des définitions permettant l'utilisation de conditions initiales interprétables physiquement. Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales de type fractionnaires qui sont difficiles à interpréter physiquement. En dépit du fait qu'un tel problème de valeur ou condition initiale peut être bien résolu en utilisant une représentation diffusive [SMMO10]. Cependant, Sabatier *et al.* [SMMO10] montrent que ni l'approche Riemann-Liouville, ni l'approche Caputo ne peuvent être utiliser pour prendre en compte les conditions initiales d'une manière commode d'un point de vue physique. Pour éventuellement pallier à cette situation, Caputo dans [Cap67] propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par Caputo et Mainardi [CM71] dans leurs travaux en viscoélasticité. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction  $f(t)$  est définie par la relation suivante [Pod02, Pod99]

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad n - 1 \leq \alpha < n \quad (2.42)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction Gamma Euler.

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

*Remarque 2.4.2.* On a les relations suivantes entre les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo [KST06] (p. 91)

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a^c D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t - a_+)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=a_+} \quad (2.43)$$



$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{t=a_+} \frac{t^k}{k!} \right) \quad (2.44)$$

où  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$ . La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville avec  $0 < \alpha < 1$  est donnée par

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left( {}_a D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left( \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right), \quad (2.45)$$

la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^{-(1-\alpha)} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{df(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2.46)$$

et on a les relations suivantes [KST06] (corollaire 2.2, p. 73 et p. 91)

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t \frac{df(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}^c D_t^\alpha f(t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

et [KST06] (p. 91)

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha (f(t) - f(a)). \quad (2.48)$$

Pour  $t > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta + 1 > 0$ , on a [KST06] (propriété 2.1 p. 71)

$${}_a D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \quad (2.49)$$

(il s'agit de la propriété 1 dans [LCP10] avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) et [KST06] (propriété 2.16 p. 95)

$${}^c D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^\beta. \quad (2.50)$$

Puisque la relation (2.49) ne satisfait pas la relation (2.47) (ou (2.43)), on la remplace par

$${}^c D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.51)$$

Pour  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  avec  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $m-1 < \beta \leq m$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $\alpha + \beta < n$ , on a [KST06] (propriété 2.4, p. 75)

$${}_a D_t^\alpha {}_a D_t^\beta f(t) = {}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}_a D_t^{\beta-j} f(t)]_{t=a_+} \frac{(t-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (2.52)$$

□

#### 2.4.2.4 Propriétés

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes

1. Si  $f(z)$  est une fonction analytique en  $z$  alors sa dérivée fractionnaire  ${}_0D_z^\alpha f(z)$  est une fonction analytique en  $z$  et  $\alpha$ .
2. Pour  $\alpha = n$ , où  $n$  est un nombre entier, l'opération  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
3. Pour  $\alpha = 0$ , l'opérateur  ${}_0D_t^\alpha$  est l'opérateur identité, ainsi

$${}_0D_0^\alpha f(t) = f(t)$$

4. La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires

$$D_t^\alpha (\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma D_t^\alpha f(t) + \delta D_t^\alpha g(t)$$

5. La loi de l'exposant au sens de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}_0D_t^{\beta-j} f(t)]_{t=0} \frac{t^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \quad (2.53)$$

La relation (2.53) est donnée dans la propriété 3 dans [LCP10] avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . Dans [Pet08b], la relation (2.53) est remplacée par

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.54)$$

avec des “contraintes raisonnables” sur  $f(t)$ . Dans [Das08] (p. 14), il est rajouté que “[cette propriété est] valide sous la causalité; c'est-à-dire que la fonction est intégro-différentiable au point initial de la fonction (l'initialisation de la fonction étant zéro)”.

Afin d'alléger les notations, nous considérons dans la suite de ce mémoire que  ${}_0D^\alpha = D^\alpha$ .

### 2.4.3 Interprétations géométrique et physique

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs, ce qui a priori permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la différentiation fractionnaire. Le manque ou l'absence de telles interprétations a été fortement abordé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire qui a eu lieu à New Haven (USA) en 1974 où la question a été classée parmi les problèmes ouverts et est restée sans réponse [Ros75b], [Ros75a], et ce malgré les rencontres internationales qui ont suivi, notamment en 1984, 1989 et en 1996. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés à cette question et différentes approches ont été adoptées, parmi celles-ci nous citerons celle de Podlubny qui se base sur l'intégrale de Riemann-Liouville et pour une introduction à la matière, nous renvoyons à [Pod02].

### 2.4.4 Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier

Comparons les deux systèmes suivants pour tout,  $0 < \lambda < 1$  et  $x(0) = x_0$  pris comme condition initiale.

$$\dot{x}(t) = \lambda t^{\lambda-1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = t^\lambda + x(0) \quad (2.55)$$

$$D^\alpha x(t) = \lambda t^{\lambda-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{\lambda \Gamma(\alpha) t^{\lambda+\alpha-1}}{\Gamma(\lambda + \alpha)} + x(0) \quad (2.56)$$

On remarque en effet, que le système d'ordre entier (2.55) est instable quel que soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . Le système d'ordre non entier où fractionnaire (2.56) est stable quel que soit  $0 < \lambda < 1 - \alpha$ . Ceci montre en général que les systèmes fractionnaires possèdent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier.

### 2.4.5 Méthodes opérationnelles fractionnaires

Le calcul opérationnel est un outil souvent utilisé pour la résolution des problèmes d'ingénierie. Il s'avère être puissant et indispensable notamment dans l'étude des systèmes fractionnaires. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base de la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite étendre au cas fractionnaire.

#### 2.4.5.1 Éléments sur la transformée de Laplace

Soit  $F(s)$ , la transformée de Laplace de  $f(t)$  définie par

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (2.57)$$

$f(t)$  est la fonction originale qui peut être obtenue par la transformée de Laplace inverser de  $F(s)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0, \quad (2.58)$$

où  $c_0$  est l'indice de convergence de l'intégrale (2.58). Le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  est donné par

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.59)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t); s) = F(s)G(s), \quad (2.60)$$

sous l'hypothèse que les fonctions  $F(s)$  et  $G(s)$  existent. Nous utiliserons cette propriété de la transformée de Laplace du produit de convolution pour évaluer l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(t)$  peut s'écrire

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} f^{(k)} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}. \quad (2.61)$$

### 2.4.5.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \quad (2.62)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $g(t) = t^{\alpha-1}$  est donnée par [Pod99]

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}. \quad (2.63)$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville <sup>1</sup>

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{{}^{GL}D_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (2.64)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f(t)$ , posons

$$D^\alpha = g^{(n)}(t) \quad (2.65)$$

ce qui entraîne

$$g(t) = D^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (2.66)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (2.67)$$

où

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s). \quad (2.68)$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t). \quad (2.69)$$

---

1. Elle reste vraie au sens de Grünwald-Letnikov aussi, car les deux intégrales sont équivalentes

En substituant (2.68) et (2.69) dans (2.67), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t)\Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (2.70)$$

En résumé, soit  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $f(t)$ . On a les relations suivantes

- transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{D_t^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.71)$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t)\Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.72)$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$\mathcal{L}\{{}^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k}\Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (2.73)$$

## 2.4.6 Equations différentielles fractionnaires

### 2.4.6.1 Equation différentielle fractionnaire à un seul terme

Considérons le système décrit par l'équation différentielle fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante

$$a {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t), \quad (2.74)$$

dont la transformée de Laplace donne

$$as^\alpha Y(s) = F(s), \quad (2.75)$$

d'où

$$Y(s) = \frac{1}{as^\alpha} F(s), \quad (2.76)$$

et comme

$$G_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as^\alpha}\right\} = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.77)$$

La fonction  $G_1(t)$  est appelée fonction fractionnaire de Green à un seul terme [Pod99].

Sous des conditions initiales homogènes, la solution  $y(t)$  de l'équation (2.74) est immédiatement obtenue par la convolution

$$y(t) = \int_0^t G_1(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} {}_0D_t^{-\alpha} f(t) \quad (2.78)$$

### 2.4.6.2 Equation différentielle fractionnaire à deux termes

On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante

$$a {}_0D_t^\alpha y(t) + by(t) = f(t), \quad (2.79)$$

dont la transformée de Laplace est donnée par

$$as^\alpha Y(s) + bY(s) = F(s) \quad (2.80)$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$Y(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}} F(s), \quad (2.81)$$

et comme

$$G_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}} \right\} = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (2.82)$$

La fonction  $G_2(t)$  est appelée fonction fractionnaire de Green à deux termes [Pod99]. La solution  $y(t)$  de l'équation (2.79) est immédiatement obtenue par la convolution

$$y(t) = \int_0^t G_2(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.83)$$

### 2.4.6.3 Equation différentielle fractionnaire à trois termes

Considérons le système décrit par l'équation différentielle fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante

$$a {}_0D_t^\beta y(t) + b {}_0D_t^\alpha y(t) + cy(t) = f(t), \quad (2.84)$$

la solution de l'équation (2.84) est obtenue à l'aide de la transformée de Laplace inverse de l'expression suivante [Pod99]

$$g_3(s) = \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c} \quad (2.85)$$

Supposons que  $\beta > \alpha$ , on peut donc écrire  $g_3(s)$  sous la forme

$$\begin{aligned} g_3(s) &= \frac{1}{c} \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b} \frac{1}{1 + \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b}} \\ &= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{c}{a} \right)^{k+1} \frac{s^{-(\alpha k + \alpha)}}{\left( s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a} \right)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

La transformée inverse de Laplace terme à terme de l'équation (2.86) conduit à

$$G_3(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \frac{c}{a} \right)^k t^{\beta(k+1)-1} E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)} \left( -\frac{b}{a} t^{\beta-\alpha} \right), \quad (2.87)$$

où  $E_{\lambda,\mu}$  est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, avec

$$E_{\lambda,\mu}^{(k)} \equiv \frac{d^k}{dz^k} E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ce qui permet d'avoir la solution  $y(t)$  de l'équation (2.84) par le biais de l'intégrale de convolution suivante

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.88)$$

#### 2.4.6.4 Equation différentielle fractionnaire à $n$ -termes

Les résultats précédents peuvent être généralisés. En effet, considérons l'équation différentielle fractionnaire à coefficients constants à  $n$ -termes suivante

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = f(t), \quad (2.89)$$

qui correspond à la fonction de transfert suivante

$$g_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}}. \quad (2.90)$$

Sans pertes de généralités, supposons que  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0$  et écrivons  $g_n(s)$  sous la forme

$$\begin{aligned} g_n(s) &= \frac{1}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}}} \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\alpha_k}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}}}} \\ &= \frac{a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}}}{s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}} \frac{1}{1 + \frac{a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\alpha_k}}{s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}}}{\left( s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}} \left( \sum_{k=0}^{n-2} \left( \frac{a_k}{a_n} \right) s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}}}{\left( s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \\ &\quad \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} s^{(\alpha_i - \alpha_{n-1}) k_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \\
 &\quad \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \frac{s^{-\alpha_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (\alpha_i - \alpha_{n-1}) k_i}}{\left( s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{m+1}}
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

où  $(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$  sont des coefficients (voir [Pod99]). L'application de la transformée de Laplace terme par terme de l'équation (2.91) donne [Pod99], p. 158)

$$\begin{aligned}
 G_n(t) &= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \\
 &\quad \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} t^{(\alpha_n - \alpha_{n-1})m + \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\alpha_{n-1} - \alpha_j) k_{j-1}} \\
 &\quad \times E_{\alpha_n - \alpha_{n-1}, \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\alpha_{n-1} - \alpha_j) k_j}^{(m)} \left( -\frac{a_{n-1}}{a_n} t^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

ce qui permet d'obtenir la solution  $y(t)$  de l'équation (2.89) par le biais de l'intégrale de convolution suivante

$$y(t) = \int_0^t G_n(t - \tau) f(\tau) d\tau. \tag{2.93}$$

### 2.4.7 Représentation dans l'espace d'état

La description interne d'un système d'ordre entier cherche toujours à lui faire correspondre un système d'équation appelé représentation d'état de forme générale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \tag{2.94}$$

où,  $u$  et  $y$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Pour un système à temps invariant, les équations (2.94) deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{2.95}$$

et pour un système linéaire invariant, la représentation d'état est donnée sous la forme matricielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.96}$$



où  $x(t)$  est le vecteur d'état,  $u(t)$  est le vecteur d'entrée,  $y(t)$  est le vecteur de sortie et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Le transfert entrée - sortie d'un système fractionnaire décrit par un modèle continu peut être écrit comme suit

$$H(D^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m})(u_1, u_2, \dots, u_l) \quad (2.97)$$

où  $y_l$  et  $u_l$  sont des fonctions du temps, respectivement la sortie et l'entrée du système décrit par le modèle (2.97),  $H$  et  $G$  sont des combinaisons (pas nécessairement linéaires) d'opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire et  $(\alpha_i$  et  $\beta_j)$  sont les ordres de dérivation fractionnaire relatifs respectivement à la sortie et à l'entrée du système. Pour le cas d'un système fractionnaire linéaire invariant monovarié, le modèle suivant peut être obtenu

$$H(D^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n})y(t) = G(D^{\beta_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m})u(t) \quad (2.98)$$

avec

$$H(D^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}) = \sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k}, \quad G(D^{\beta_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad (2.99)$$

où explicitement

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_n D^{\beta_n} u(t) + b_{n-1} D^{\beta_{n-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t). \quad (2.100)$$

Dans l'équation (2.100), qui décrit la dynamique d'un système linéaire invariant monovarié d'ordre fractionnaire, deux cas se présentent et conduisent à deux types de systèmes : les systèmes commensurables ou d'ordres commensurables et les systèmes non commensurables ou d'ordres non commensurables.

### 2.4.8 Systèmes fractionnaires d'ordres commensurable et non commensurable

Un système est dit commensurable si tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle fractionnaire qui le régit sont des multiples entiers d'un ordre de base  $\alpha$ . C'est à dire dans l'équation (2.100), la condition suivante est remplie

$$\alpha_k, \beta_k = k\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.101)$$

L'équation (2.100) peut alors être écrite sous la forme

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t). \quad (2.102)$$

Un système est dit non commensurable si la condition (2.101) n'est pas remplie.

### 2.4.8.1 Systèmes fractionnaires d'ordre non commensurable

A présent, nous allons essayer d'étendre cette notion de représentation d'état aux systèmes fractionnaires. Considérons l'équation (2.100) régissant la dynamique d'un système fractionnaire linéaire monovarié.

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_n D^{\beta_n} u(t) + b_{n-1} D^{\beta_{n-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.103)$$

qu'on écrit sous la forme semi-condensée

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} u(t).$$

On obtient donc la relation suivante

$$D^{\alpha_n} y(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\alpha_{n-1}} y(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} D^{\alpha_0} y(t) + \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_n} D^{\beta_k} u(t)$$

qui peut être réécrite en introduisant des variables d'état (voir remarque 2.4.3) sous la forme

$$x_n^{\alpha_n - \alpha_{n-1}}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_n} D^{\beta_k} u(t) \quad (2.104)$$

dont la représentation matricielle est donnée comme suit

$$\begin{bmatrix} x_1^{\alpha_1 - \alpha_0}(t) \\ x_2^{\alpha_2 - \alpha_1}(t) \\ x_3^{\alpha_3 - \alpha_2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{\alpha_n - \alpha_{n-1}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \frac{b_0}{a_n} & \dots & \frac{b_m}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\beta_0} u(t) \\ \vdots \\ D^{\beta_m} u(t) \end{bmatrix}$$

ou sous la forme condensée

$$x^{(\bar{\alpha})} = Ax(t) + Bu^{(\beta)} \quad (2.105)$$

avec  $\bar{\alpha} = (\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_{n-1})$  et  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ .

Avec la donnée de l'excitation  $u(t)$ , on peut déterminer le deuxième terme du membre de droite dans (2.100), conduisant ainsi à une nouvelle représentation d'état où la matrice  $B$  serait une simple matrice colonne de même dimension que le vecteur d'état  $x(t)$ . En effet, en posant

$$\sum_{k=0}^m \frac{b_k}{a_n} D^{\beta_k} u(t) = e(t) \quad (2.106)$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} x_1^{\alpha_1 - \alpha_0}(t) \\ x_2^{\alpha_2 - \alpha_1}(t) \\ x_3^{\alpha_3 - \alpha_2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{\alpha_n - \alpha_{n-1}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \quad (2.107)$$

ou encore sous forme condensée

$$x^{(\bar{\alpha})} = Ax(t) + Be(t), \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

En considérant un système fractionnaire de type

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = e(t) \quad (2.108)$$

où  $e(t)$  est la nouvelle variable d'entrée, le choix légitime  $\alpha_0 = 0$  de l'ordre de dérivation de la sortie correspondant au coefficient  $a_0$  nous permet d'établir une équation d'état augmentée par une équation de sortie de la forme  $y(t) = Cx(t)$ , d'où la réalisation suivante

$$\begin{cases} x^{(\bar{\alpha})} = Ax(t) + Be(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.109)$$

### 2.4.8.2 Systèmes fractionnaires d'ordre commensurable

Dans le cas des systèmes commensurables, très intéressants en pratique, on peut obtenir une représentation d'état analogue à celle des systèmes d'ordre entier. Les ordres de dérivation  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  relatifs à l'entrée et à la sortie étant tous deux des multiples d'un ordre non entier  $\alpha$ , on peut toujours établir une relation entre les variables d'états fractionnaires équivalente à celle obtenue pour les systèmes entiers, de la forme

$$D^\alpha x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

En introduisant les variables d'états  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  définis ci-dessus (voir remarque 2.4.3), on obtient la représentation d'état augmentée suivante

$$D^\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.110)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & \dots & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.111)$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.112)$$

La représentation (2.112) correspond à une réalisation propre dans le cas fractionnaire lorsque  $m < n$ . Dans un cas contraire, un transfert direct entrée-sortie via une matrice  $D$  apparaîtra dans l'équation de sortie de la réalisation d'état, comme dans le cas linéaire classique

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.113)$$

Grâce à la propriété de linéarité de l'opérateur de dérivation fractionnaire  $D^\alpha$ , on peut toujours obtenir plusieurs réalisations d'état, comme par exemple, la forme canonique d'observabilité ou la forme modale etc...

*Remarque 2.4.3.* Pour les systèmes fractionnaires, il convient de parler de "pseudo-état" et non d'état car "l'historique" de l'état initial peut influencer sur le comportement du système [FMS10, LH01] (voir remarque 2.4.1).  $\square$

### 2.4.8.3 Matrice de transition fractionnaire

Considérons un système monovarié commensurable dont la représentation d'état est de la forme

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.114)$$

L'application de la transformée de Laplace nous permet d'écrire

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2.115a)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.115b)$$

A partir de cette représentation d'état matricielle dans le domaine de Laplace, on peut obtenir la fonction de transfert du système pour des conditions initiales nulles comme suit

$$Y(s) = [C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D]U(s) = H(s)U(s) \quad (2.116)$$

où  $H(s) = [C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D]$  est la fonction de transfert du système.

D'autre part, en appliquant la transformée de Laplace inverse à (2.115a) on obtient l'expression de l'état du système

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}x(0)]. \quad (2.117)$$

On peut définir ainsi une matrice de transition dans le cas des systèmes fractionnaires, par analogie avec les systèmes d'ordre entier. On définit ainsi  $\Phi(t)$  : la matrice de transition généralisée aussi appelée la matrice de transition fractionnaire, comme étant la transformée de Laplace inverse de  $s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}$ , c'est-à-dire

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}]. \quad (2.118)$$

Il suffit donc de calculer (2.118) pour avoir l'expression de  $\Phi(t)$ .

Le calcul de  $\mathcal{L}^{-1} [s^{\alpha-1}(s^\alpha - a)^{-1}]$  donne

$$\mathcal{L}^{-1} [s^{\alpha-1}(s^\alpha - a)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a^k s^{-k\alpha-1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_\alpha(at^\alpha).$$

On peut donc en déduire dans le cas matriciel que

$$\mathcal{L}^{-1} [s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_\alpha(At^\alpha).$$

On remarque donc que cette matrice de transition relative au système (2.114) n'est rien d'autre que la fonction de Mittag-Leffler généralisée  $E_\alpha(At^\alpha)$

$$E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = \Phi(t).$$

#### 2.4.8.4 Solution de l'équation d'état fractionnaire

En utilisant les propriétés de la transformation de Laplace, l'expression du vecteur d'état  $x(t)$  est immédiatement obtenue à partir de (2.117)

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \mathcal{L}^{-1} [(s^\alpha I - A)^{-1}] * [Bu(t)]. \quad (2.119)$$

Puisque

$$\mathcal{L}^{-1} [(s^\alpha I - A)^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha}}{\Gamma(k(\alpha + 1) + 1)}$$

la relation (2.119) permet d'établir

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t - \tau)^\alpha) Bu(\tau) d\tau. \quad (2.120)$$

#### Cas particuliers

1. Pour un régime libre, le vecteur d'état s'écrit

$$x(t) = E_\alpha(at^\alpha)x(0) = \Phi(t)x(0). \quad (2.121)$$

2. Dans le cas d'un état désiré  $x(t_f)$  nul, on considère un instant initial  $t_0$  et un état désiré  $x(t_f) = 0$  (l'origine de l'espace des états), on peut écrire à partir de (2.119)

$$x(t_f) = 0 = \Phi(t_f - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (t_f - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t_f - \tau)^\alpha) Bu(\tau) d\tau.$$

Cette équation est utile dans l'étude de la commandabilité des systèmes fractionnaires. Compte tenu de l'équation (2.117), l'expression explicite de la solution  $x(t)$  est immédiate. A titre de comparaison, on adopte la même procédure que pour les

systèmes entiers pour la recherche de la solution. Rappelons que dans le cas linéaire invariant classique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.122)$$

En développant suivant la base polynomiale  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , en dérivant par rapport à  $t$  et en tenant compte des conditions initiales, on aboutit à la solution suivante

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k x(0) = e^{At} x_0 \quad (2.123)$$

Nous allons ainsi adopter la même démarche pour généraliser le calcul dans le cas fractionnaire. On considère pour cela, l'équation d'état homogène fractionnaire suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) & 0 < \alpha < 2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.124)$$

**Hypothèse 2.4.1.** *Supposons que la solution de l'équation d'état sans second membre (2.122) a pour expression*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k = A_0 + A_1 t^\alpha + A_2 t^{2\alpha} + \dots + A_k t^{k\alpha} + \dots \quad (2.125)$$

En suivant la démarche rappelée ci-dessus dans la cas des systèmes d'ordre entier, on a :  $x(0) = A_0$  pour  $t = 0$ .

En dérivant au sens de Caputo à l'ordre  $\alpha$  l'expression (2.125), on obtient

$$D^\alpha x(t) = 0 + A_1 \Gamma(1+\alpha) + \frac{A_2 \Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha + \dots + \frac{A_k \Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} t^{(k-1)\alpha} + \dots = Ax(t) \quad (2.126)$$

Pour  $t = 0$ , on a

$$A_1 = \frac{Ax(0)}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

En répétant successivement la dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de l'expression (2.125), on obtient finalement toutes les matrices  $A_k$

$$A_k = \frac{A^k x(0)}{\Gamma(1+k\alpha)}$$

d'où la solution cherchée

$$\begin{aligned} x(t) &= I + \frac{Ax(0)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha + \frac{A^2 x(0)}{\Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha} + \dots + \frac{A^k x(0)}{\Gamma(1+k\alpha)} t^{k\alpha} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x_0}{\Gamma(1+k\alpha)} t^{k\alpha}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Cette équation n'est rien d'autre que le produit de la fonction de Mittag-Leffler de la matrice par le vecteur d'état initial. Compte tenu de (2.121) et (2.127) on peut écrire

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0. \quad (2.128)$$

Pour  $\alpha = 1$ , la relation (2.128) devient

$$E_1(At) = e^{At}.$$

Il est donc clair que la fonction de Mittag-Leffler ou fonction exponentielle généralisée joue ici le même rôle que la fonction exponentielle dans le cas des systèmes d'ordre entier. Elle constitue donc la matrice de transition pour les systèmes fractionnaires.

### 2.4.9 Évaluation numérique de la dérivée fractionnaire de quelques fonctions usuelles

Nous décrivons dans cette partie une méthode simple et efficace pour l'évaluation des dérivées fractionnaires. Cette approche est basée sur une approximation de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov. Nous pouvons ainsi utiliser cette approximation pour l'évaluation numérique des fonctions usuelles et des équations différentielles fractionnaires. Rappelons la définition de Grünwald-Letnikov (voir section 2.4.2.1)

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{{}_a\Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh). \quad (2.129)$$

Nous utilisons l'approximation suivante, résultant de la définition de Grünwald-Letnikov [Pod99], [Dor94]

$${}_aD_t^\alpha f(t) \equiv \frac{{}_a\Delta_h^\alpha f(t_k)}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f_{k-j} \quad (2.130)$$

avec  $(-1)^j \binom{\alpha}{j} = c_j^\alpha$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) où  $\binom{\alpha}{j}$  sont des coefficients binomiaux. Pour le calcul de ces coefficients, on utilise souvent l'expression suivante [Dor94, Pod99]

$$c_0^\alpha = 1, \quad c_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^\alpha. \quad (2.131)$$

Cette méthode numérique est appelée développement en série entière d'une fonction génératrice. Cette approximation de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov est d'une part équivalente à la définition de Riemman-Liouville pour une large classe de fonctions [Pod99], d'autre part, elle est bien adaptée à la définition de Caputo car elle ne nécessite que les conditions initiales et a clairement un sens physique. Une collection de

différents algorithmes pour l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire a été également présentée dans [DFFL95]. Les figures suivantes (2.8 - 2.9 - 2.10 - 2.11) représentent, respectivement, les résultats des simulations de quelques fonctions usuelles ( $\sin(t)$ ,  $\ln(t)$ ,  $\cos(t)$  et  $Heaviside(t)$ ), réalisées en utilisant l'approximation de Grünwald-Letnikov pour un ordre de dérivation  $\alpha$  compris entre 0 et 1. Les dérivées fractionnaires de la fonction  $\cos(t)$  et de la fonction Heaviside  $H(t)$  ne sont pas bornées à  $t = 0$ . Ceci est bien en accord avec le comportement asymptotique bien connue de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction bornée non nulle au point initial  $t = 0$  [Pod99], [MR93], [OS74b]. Puisque la fonction  $\ln(t)$  et ses dérivées fractionnaires sont infinies à  $t = 0$ , ses valeurs au voisinage de  $t = 0$  ne sont pas représentées dans la figure 2.9.

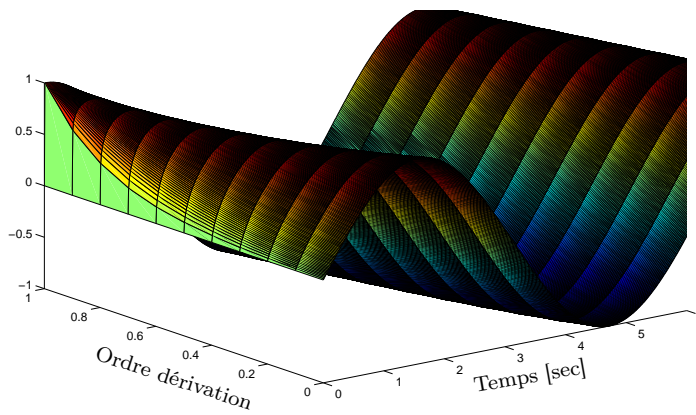


FIGURE 2.8: Dérivée fractionnaire de la fonction  $\sin(t)$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

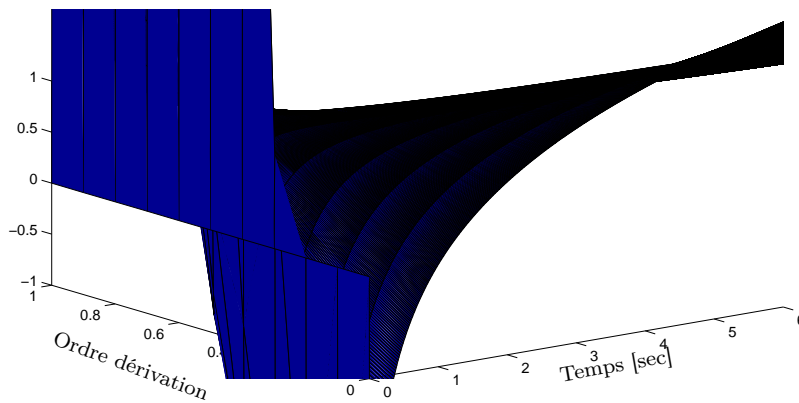
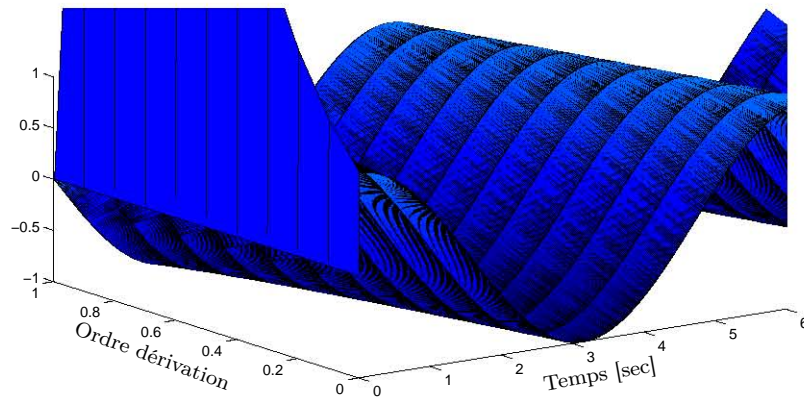
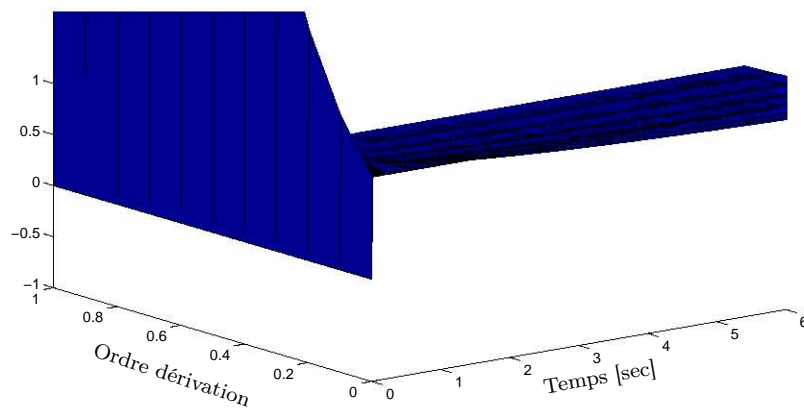


FIGURE 2.9: Dérivée fractionnaire de la fonction  $\ln(t)$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .



FIGURE 2.10: Dérivée fractionnaire de la fonction  $\cos(t)$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .FIGURE 2.11: Dérivée fractionnaire de la fonction Heaviside  $H(t)$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

### 2.4.10 Solutions numériques des équations à dérivée fractionnaire

La solution numérique des équations différentielles d'ordre entier est un sujet bien documenté en calcul numérique. Toutefois, dans le cas des équations différentielles fractionnaires, en dépit d'un grand nombre de problèmes récemment formulés, l'état de l'art est moins bien avancé.

A titre d'exemples, nous proposons quelques solutions numériques des équations différentielles fractionnaires d'oscillation-relaxation et de Bagley-Torvik afin de présenter l'approche numérique mise en œuvre. Nous nous concentrons sur la description de la méthode sans étudier la convergence de cette méthode du point de vue théorique.

### 2.4.10.1 Equation d'oscillation-relaxation à dérivée fractionnaire

Prenons l'exemple suivant du problème de valeurs initiales pour l'une des équations différentielles fractionnaires apparaissant dans beaucoup de problèmes (voir [Ous88])

$${}_0D_t^\alpha y(t) + Ay(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (2.132a)$$

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.132b)$$

où  $n-1 < \alpha \leq n$ . Dans la cas où l'ordre de dérivation  $\alpha$  est compris entre  $]0, 2]$ , cette équation est appelée "équation d'oscillation-relaxation". L'approximation du premier ordre de l'équation (2.132a) en utilisant la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov donne

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^m \omega_j^{(\alpha)} y_{m-j} + Ay_m = f_m, \quad (m = 1, 2, \dots); \quad y_0 = 0, \quad (2.133)$$

où

$$t_m = mh, \quad y_m = y(t_m) \quad f_m = f(t_m), \quad (m = 1, 2, \dots);$$

et

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

En utilisant l'approximation (2.133), nous obtenons l'algorithme suivant, donnant ainsi la solution numérique de l'équation (2.132a)

$$y_m = -Ah^\alpha y_{m-1} - \sum_{j=0}^m \omega_j^{(\alpha)} y_{m-j} + h^\alpha f_m, \quad (m = n, n+1, \dots) \quad (2.134a)$$

$$y_k = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.134b)$$

Les résultats de simulation pour différentes valeurs de  $\alpha$ , ( $\alpha = 0.3, \alpha = 1.8$ ),  $A = 1$  et  $f(t) = H(t)$ , où  $H(t)$  est la fonction Heaviside, sont donnés dans les figures 2.12 et 2.13. Ces résultats de simulations sont en parfait accord avec la solution analytique obtenue grâce à la définition de la fonction fractionnaire de Green (voir section 2.4.6) [Pod99, OS74b, MR93]

$$y(t) = \int_0^t G_2(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.135)$$

où

$$G_2(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-At^\alpha). \quad (2.136)$$

### 2.4.10.2 Equation de Bagley-Torvik à dérivée fractionnaire

On considère l'équation de Bagley-Torvik [BT84] où le modèle a été décrit dans ce chapitre 2, dans la section 2.3.2.

$$A\ddot{z}(t) + B {}_0D_t^{\frac{3}{2}} z(t) + Cz(t) = f(t), \quad t > 0 \quad (2.137a)$$

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (2.137b)$$

L'approximation au premier ordre de l'équation (2.137a) donne

$$Ah^{-2}(z_m - 2z_{m-1} + z_{m-2}) + Bh^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=0}^m \omega_j^{\frac{3}{2}} z_{m-j} + Cz_m = f_m, \quad (m = 2, 3, \dots), \quad (2.138)$$

où

$$z_0 = 0, \quad \frac{z_1 - z_0}{h} = 0, \quad z_m = z(mh) \quad f_m = f(mh), \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

En utilisant l'approximation (2.138), nous obtenons l'algorithme suivant, donnant ainsi la solution numérique de l'équation (2.137a)

$$z_m = \frac{h^2(f_m - Cz_{m-1}) + A(2z_{m-1} - z_{m-2}) - B\sqrt{h} \sum_{j=1}^m \omega_j^{\frac{3}{2}} z_{m-j}}{A + B\sqrt{h}} \quad (2.139a)$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (2.139b)$$

Les résultats de simulation sont donnés par la figure 2.14 avec

$$f(t) = H(t), \quad A = 1, \quad B = 0.5, \quad C = 0.5$$

où  $H(t)$  est la fonction Heaviside.

Ces résultats de simulations sont en parfait accord avec la solution analytique obtenue grâce à la définition de la fonction fractionnaire de Green (voir section 2.4.6) [Pod99, OS74b, MR93]

$$z(t) = \int_0^t G_3(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.140)$$

où

$$G_3(t) = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2k+1} E_{\frac{1}{2}, 2+\frac{3k}{2}}^{(k)} \left(-\frac{B}{A}\sqrt{t}\right) \quad (2.141)$$

et

$$E_{\lambda, \mu}^{(k)} \equiv \frac{d^k}{dz^k} E_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

## 2.5 Etude des systèmes chaotiques fractionnaires

L'une des applications importantes du calcul fractionnaire est la théorie du chaos [CDFP10], [Pet10], [Pet08a]. Cette partie est ainsi dédiée à l'étude des systèmes chaotiques fractionnaires, dont les propriétés intrinsèques peuvent être utilisées dans les schémas de synchronisation et de cryptographie. Une étude approfondie du chaos dépassant largement le cadre de ce mémoire, nous nous contenterons de définir brièvement la notion de chaos et présenter le concept des systèmes chaotiques fractionnaires à partir de l'exemple de l'attracteur fractionnaire de Lorenz.

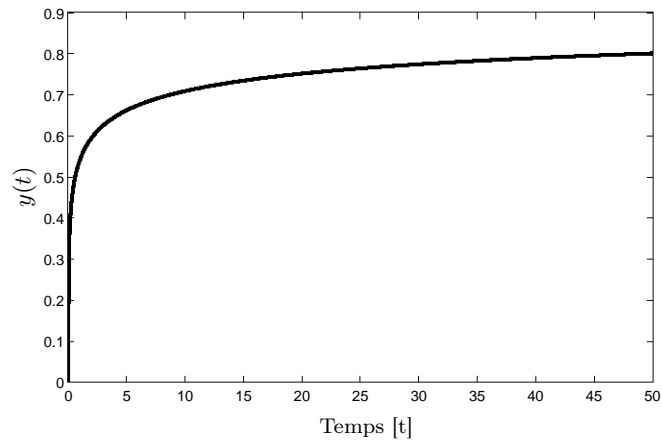


FIGURE 2.12: Solution de l'équation d'oscillation-relaxation pour  $\alpha = 0.3$ .

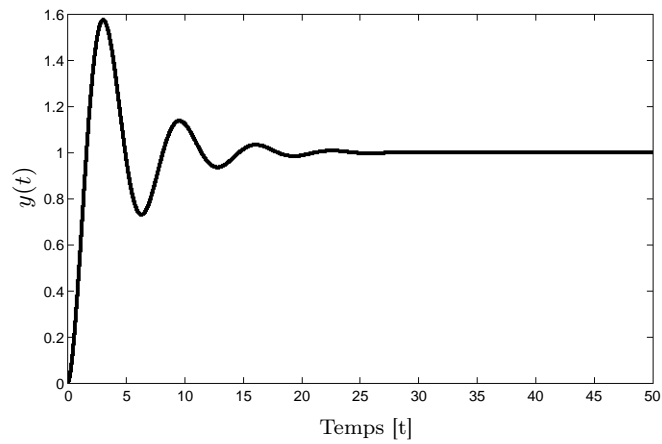


FIGURE 2.13: Solution de l'équation d'oscillation-relaxation pour  $\alpha = 1.8$ .

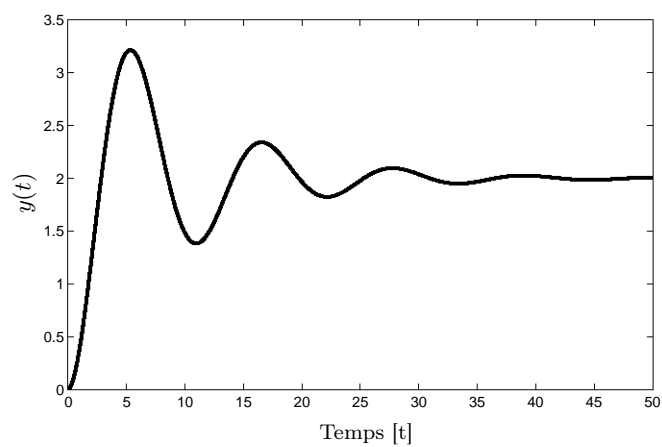


FIGURE 2.14: Solution numérique de l'équation Bagley-Torvik.

### 2.5.1 Caractérisation du chaos

«Une cause très petite, et qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la Nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire la situation de ce même Univers à l'instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que les petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.»

Henri Poincaré, 1908

Il est très délicat de définir ce qu'est un système chaotique, étant donné qu'il n'existe pas une définition précise. En pratique, on peut dire qu'un système chaotique a un comportement borné en régime permanent qui ne correspond pas à un point d'équilibre, qu'il n'est ni périodique, ni quasi-périodique. Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les trois suivantes :

1. un système chaotique est un système déterministe ;
2. il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales ;
3. il présente un comportement asymptotique apériodique.

En général, les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur étrange. Ce dernier est caractérisé par

- i) un volume nul ;
- ii) une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches ;
- iii) une dimension souvent fractale (non entière) caractérisant le concept de système chaotique fractionnaire.

La naissance d'un attracteur étrange est liée à l'existence de deux processus, à savoir l'*étirement*, responsable de l'instabilité et de la sensibilité aux conditions initiales, et le *repliement*, responsable du côté étrange, fractal de l'attracteur.

En pratique, la vérification de quelques propriétés d'un système dynamique suffit pour pouvoir le considérer comme chaotique :

- vérifier la sensibilité aux conditions initiales ;
- tracer les trajectoires des états et leur spectre de puissance ;
- tracer différents attracteurs ;
- tracer un diagramme de bifurcations.

### 2.5.2 Système chaotique fractionnaire de Lorenz

Le chaos ne peut se produire dans les systèmes dynamiques continus lorsque l'ordre total est inférieur à trois [CDFP10]. Cette affirmation est basée sur les concepts habituels

d'ordre, tels que le nombre d'états dans un système ou le nombre total d'intégrations ou de différentiations dans le système. Le modèle d'un système peut être réorganisé en trois équations différentielles simples, où les équations contiennent des dérivées fractionnaires. L'ordre total du système sera dans ce cas, la somme de l'ordre de chaque dérivée fractionnaire de l'état du système, qui par conséquent sera inférieur à 3. Ce qui nous amène à dire qu'on peut observer le phénomène du chaos dans un système dynamique fractionnaire où l'ordre total du système est inférieur à 3.

En général, on considère les systèmes non linéaires fractionnaires suivants

$${}_0D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \quad (2.142a)$$

$$x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.142b)$$

où les variables  $c_i$  désignent les conditions initiales. On peut également représenter le système (2.142) sous la forme suivante

$$D^\alpha x = f(x), \quad (2.143)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_i = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$  et  $0 < \alpha_i < 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Les points d'équilibre du système (2.143) sont calculés par l'équation suivante

$$f(x) = 0 \quad (2.144)$$

où  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  est un point d'équilibre du système (2.143).

Le problème majeur de l'étude des phénomènes de convection résidait dans les calculs : soit les scientifiques établissaient des modèles précis à l'aide des lois d'écoulement des fluides et des lois de la convection, mais qui comportaient des milliers de variables, soit ils simplifiaient les équations, en privilégiant la compréhension du processus, au détriment de prévisions exactes. Lorenz a choisi cette seconde voie pour présenter un modèle très simplifié, auquel il a donné son nom

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (2.145)$$

Comme la plupart des systèmes physiques sont non linéaires, les travaux de Lorenz sont d'une importance cruciale : certains phénomènes non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales, bien qu'étant régi par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, que toute prévision de leur comportement est impossible.

En 1972, Lorenz fait une conférence à l'American Association for the Advancement of Science intitulée (malgré lui) : "*Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tempête au Texas ?*". Cette métaphore, qui n'a pas été voulue par Lorenz, est devenue emblématique du phénomène de la sensibilité aux conditions initiales. Elle est souvent interprétée à tort de façon causale : ce serait le battement d'aile du papillon qui déclencherait la tempête. A l'issue de cette conférence, Lorenz précise sa pensée en écrivant : « De crainte que le seul fait de demander, suivant le titre de cet article, "un battement d'aile de papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas?", fasse douter de mon sérieux, sans même parler d'une réponse affirmative, je mettrai cette question en perspective en avançant les deux propositions suivantes

- si un seul battement d’ailes d’un papillon peut avoir pour effet le déclenchement d’une tornade, alors il en va ainsi également de tous les battements précédents et subséquents de ses ailes, comme ceux de millions d’autres papillons, pour ne pas mentionner les activités d’innombrables créatures plus puissantes, en particulier de notre espèce ;
- si le battement d’ailes d’un papillon peut déclencher une tornade, il peut aussi l’empêcher. »

L’attracteur de Lorenz non fractionnaire est tracé à la figure 2.15, les paramètres étant fixés aux valeurs suivantes :  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$ . les conditions initiales sont  $x_0 = (0.1 \ 0.1 \ 0.1)$ , et l’intégration numérique est réalisée par la méthode de Runge-Kutta de pas 0.005s.

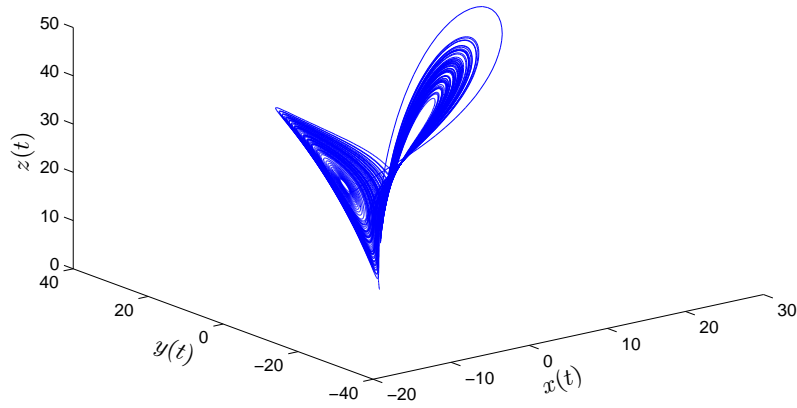


FIGURE 2.15: Attracteur de Lorenz

Maintenant, nous considérons le système chaotique de Lorenz à dérivée fractionnaire, où les dérivées d’ordre entier sont remplacées par des dérivées fractionnaires commensurables ou non commensurables.

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha_1}(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ {}_0D_t^{\alpha_2}(t) = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ {}_0D_t^{\alpha_3}(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (2.146)$$

Les attracteurs fractionnaires commensurables et non commensurables de Lorenz sont tracés, respectivement, sur les figures 2.16 et 2.17, les paramètres étant fixés aux valeurs suivantes :  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$  et les conditions initiales sont  $x_0 = (0.1 \ 0.1 \ 0.1)$ . L’intégration numérique est réalisée par la méthode d’approximation de Grünwald-Letnikov (2.130), de pas  $h = 0.005s$ .

$$\begin{cases} x_k = [\sigma(y_{k-1} - x_{k-1})]h^{\alpha_1} - \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_1)} x_{k-j} \\ y_k = [x_{1,k}(\rho - z_{k-1}) - y_{k-1}]h^{\alpha_2} - \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_2)} y_{k-j} \\ z_k = [x_k y_k - \beta z_{k-1}]h^{\alpha_3} - \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_3)} z_{k-j} \end{cases} \quad (2.147)$$

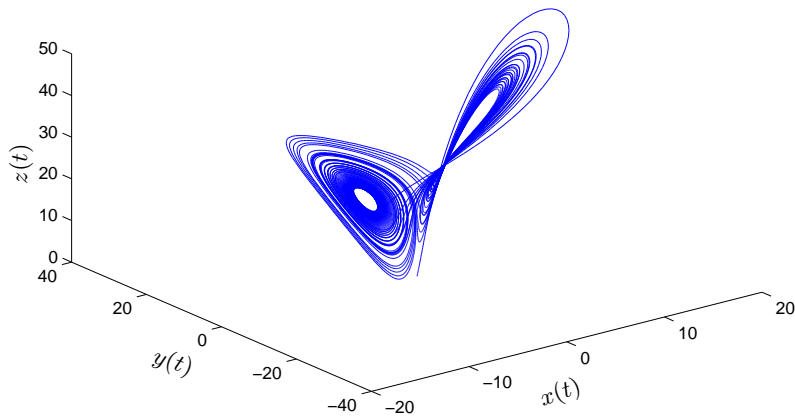


FIGURE 2.16: Attracteur fractionnaire de Lorenz d'ordre commensurable  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.991$

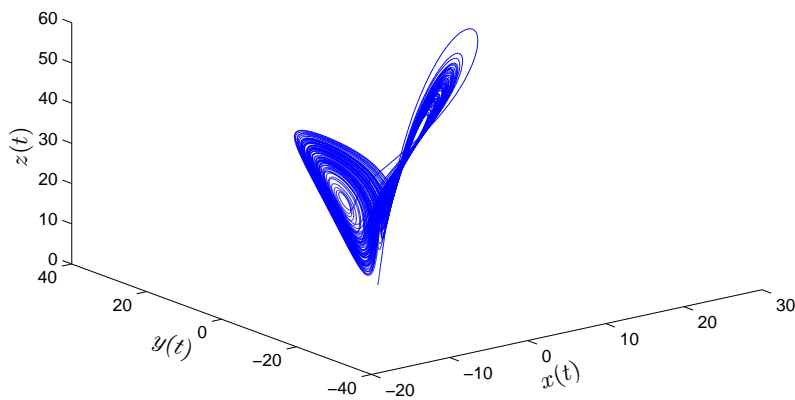


FIGURE 2.17: Attracteur fractionnaire de Lorenz d'ordre non commensurable  $\alpha_1 = 0.89$ ,  $\alpha_2 = 1.10$ ,  $\alpha_3 = 0.99$



## 2.6 Stabilité

### 2.6.1 Stabilité des systèmes fractionnaires

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

La stabilité des systèmes fractionnaires a été étudiée dans [Mat96b, Mat96a], où des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues donnant lieu au théorème suivant.

**Théorème 2.6.1.** [Mat96b, SMF08] *Considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.148)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ . Soit  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , le système (2.148) avec comme entrée  $u(t) = 0$  est stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1 \dots n \quad (2.149)$$

■

D'après ce théorème sur la stabilité, il en découle les différentes régions stables et instables, voir figures 2.18 et 2.19.

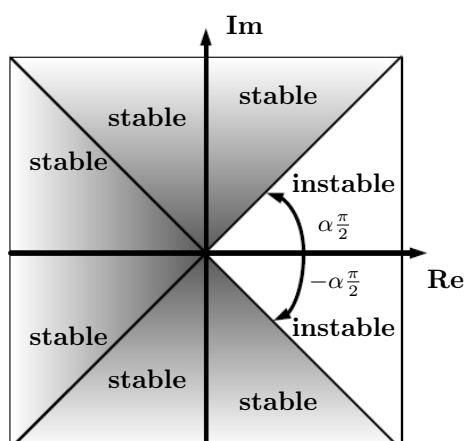


FIGURE 2.18: Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec  $0 < \alpha < 1$ .

L'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire a été largement traitée dans [AC08, ACP07, MSO05] dans le cas où  $1 < \alpha < 2$ .

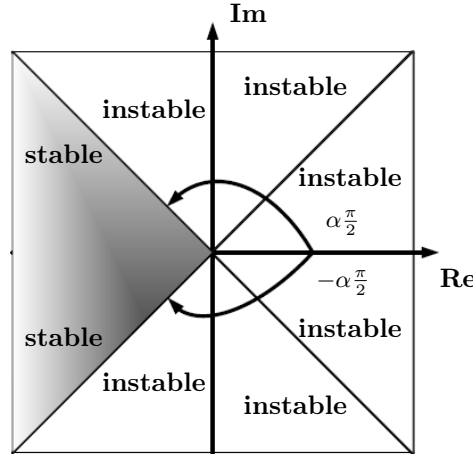


FIGURE 2.19: Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec  $1 < \alpha < 2$ .

Si  $1 < \alpha < 2$ , alors la relation (2.149) décrit une région convexe du plan complexe comme le montre la figure 2.19. Une solution de problème passe par l'utilisation des régions LMI [Chi96]. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système fractionnaire (2.148) sous forme LMI est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 2.6.1.** [MSO05] *Le système d'ordre fractionnaire (2.148) avec  $1 < \alpha < 2$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que*

$$\begin{bmatrix} (AP + PA^T) \sin \theta & (AP - PA^T) \cos \theta \\ (PA^T - AP) \cos \theta & (AP + PA^T) \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (2.150)$$

où  $\theta = \pi - \alpha \frac{\pi}{2}$ . □

## 2.6.2 Stabilité des systèmes fractionnaires dans une région $\mathcal{GLMI}$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité des systèmes fractionnaires dans une région  $\mathcal{GLMI}$ . La figure 2.18 montre que le domaine de stabilité  $D_s$  du système fractionnaire est non convexe lorsqu'on a  $0 < \alpha < 1$  dans la relation (2.149). Le formalisme introduit par [Chi96] et développée par Bachelier [Bac98] permet de traiter ce cas particulier en utilisant le concept de régions  $\mathcal{GLMI}$ , initialement étendu dans le cas des systèmes d'ordre fractionnaire par [SMF10] ([Bac98], p. 72). Afin de ne pas trop alourdir cette partie, la présentation de la région  $\mathcal{GLMI}$ , l'application à la  $\mathcal{D}$ -stabilité dans une union de sous-régions convexes et la mise en œuvre l'approche  $\mathcal{GLMI}$  pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire si  $0 < \alpha < 1$  ont été développées dans l'annexe C

Ainsi, en utilisant les relations (C.21) et (C.22) de l'annexe C, le théorème C.1.1 présenté l'annexe C correspond au théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ .

**Théorème 2.6.2.** [SMF08, SMF10, FMS10] *Le système d'ordre fractionnaire (2.148) avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux matrices*

$X_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  vérifiant  $X_1 = X_1^* > 0$  et  $X_2 = X_2^* > 0$  et

$$rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T < 0 \quad (2.151)$$

où  $r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$  et  $\bar{r} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$ . ■

**Lemme 2.6.2.** [LT85] (p. 219) Soit  $A = B + jC$  avec  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et

$$R = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

On a les propriétés suivantes.

- i) Si la matrice  $A$  est normale, alors la matrice  $R$  est normale.
- ii) Si la matrice  $A$  est hermitienne, alors la matrice  $R$  est symétrique.
- iii) Si la matrice  $A$  est définie positive, alors la matrice  $R$  est définie positive.
- iv) Si la matrice  $A$  est unitaire, alors la matrice  $R$  est orthogonale.

□

En utilisant le lemme 2.6.2, on réécrit le théorème 2.6.2 afin de remplacer la LMI complexe (2.151) par une LMI réelle.

**Lemme 2.6.3.** Le système d'ordre fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe quatre matrices  $X_{R_1} = X_{R_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{I_1} = -X_{I_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{R_2} = X_{R_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_{I_2} = -X_{I_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , vérifiant

$$\begin{bmatrix} X_{R_1} & -X_{I_1} \\ X_{I_1} & X_{R_1} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.152)$$

$$\begin{bmatrix} X_{R_2} & -X_{I_2} \\ X_{I_2} & X_{R_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \right. \\ & \left. (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + (X_{R_1}A^T - AX_{R_1} - X_{R_2}A^T + AX_{R_2}) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \right. \\ & \left. (AX_{R_1} - X_{R_1}A^T - AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) - (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) \right] < 0. \\ & \left. (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \right] < 0. \end{aligned} \quad (2.154)$$

□

*Démonstration.* Si  $X_{R_1} = X_{R_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{I_1} = -X_{I_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{R_2} = X_{R_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_{I_2} = -X_{I_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , alors  $X_1 = X_{R_1} + jX_{I_1}$  et  $X_2 = X_{R_2} + jX_{I_2}$  vérifient  $X_1 = X_1^*$  et  $X_2 = X_2^*$ . En utilisant le lemme 2.6.2,  $X_1 = X_1^* > 0$  et  $X_2 = X_2^* > 0$  si et seulement si les LMI (2.152) et (2.153) sont satisfaites.

En remplaçant dans l'inégalité (2.151) du théorème 2.6.2, les expressions de  $X_1 = X_{R_1} + jX_{I_1}$ ,  $X_2 = X_{R_2} + jX_{I_2}$  et  $r = \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$ , on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} & \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) (X_{R_1} + jX_{I_1})A^T + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) A(X_{R_1} + jX_{I_1}) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) A(X_{R_2} + jX_{I_2}) + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) A^T(X_{R_2} + jX_{I_2}) < 0 \end{aligned} \quad (2.155)$$

qui peut s'écrire sous cette forme

$$\begin{aligned} & \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_1}A^T - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_1}A^T \right) + j \left( \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_1}A^T + \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_1}A^T \right) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_1} + \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_1} \right) + j \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_1} - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_1} \right) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_2} - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_2} \right) + j \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_2} + \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_2} \right) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_2}A^T + \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_2}A^T \right) + j \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_2}A^T - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_2}A^T \right) < 0. \end{aligned} \quad (2.156)$$

En regroupant la partie réelle et la partie imaginaire de l'inégalité (2.156), on obtient

$$\begin{aligned} & \left( (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) \\ & + j \left( (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + (X_{R_1}A^T - AX_{R_1} + AX_{R_2} - X_{R_2}A^T) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) < 0. \end{aligned} \quad (2.157)$$

En utilisant le lemme 2.6.2, on obtient la LMI (2.154). •

Le lemme suivant 2.6.4 proposé par Lu et *et al.* dans [LC10] présente une autre version du théorème 2.6.2, ce lemme 2.6.4 est juste une écriture condensée du théorème 2.6.2 grâce à l'utilisation du produit de Kronecker.

**Lemme 2.6.4.** [LC10] *Le système d'ordre fractionnaire (2.148) avec  $0 < \alpha < 1$  est stable si et seulement s'il existe deux matrices réelles symétriques  $P_{k1}$ ,  $k = 1, 2$  et deux matrices antisymétriques  $P_{k2}$ ,  $k = 1, 2$  telles que*

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (AP_{ij})\} < 0 \quad (2.158)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.159)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \begin{bmatrix} \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & -\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}, & \Gamma_{12} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{21} &= \begin{bmatrix} \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ -\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}, & \Gamma_{22} &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & -\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.160)$$

□

Un résultat récent paru en octobre 2010 sur la stabilité des systèmes linéaires fractionnaires basé sur une formulation LMI a été proposé par Farges *et al.* [FMS10]. Cette LMI est une réécriture de la LMI (2.151) du théorème 2.6.2 et est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.6.3.** [FMS10] *Le système d'ordre fractionnaire (2.148) avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  vérifiant  $X = X^* > 0$  et*

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\bar{X}) < 0 \quad (2.161)$$

où  $r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$ ,  $\bar{r} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$  et  $\bar{X} = \text{Re}(X) - j \text{Im}(X)$ . ■

*Remarque 2.6.1.* Du fait de sa nouveauté, ce théorème n'a pas été utilisé dans ce mémoire. L'intérêt du théorème 2.6.3 par rapport au théorème 2.6.2 réside dans le fait que la matrice  $(rX + \bar{r}\bar{X})$  est réelle, ce qui permet de synthétiser aisément des commandes par retour d'état statique  $u = Lx$  avec une matrice de gain  $L$  réelle. □

## 2.7 Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité

Les notions ou concepts de commandabilité et d'observabilité des systèmes fractionnaires ont été introduites de manière tant analytique qu'algébrique dans [Mat96b], [MAN96], [VMC02]. Elles étendent naturellement celles du cas entier dues à Kalman [Kal63] : le critère algébrique de rang de matrice de commandabilité et d'observabilité est exactement le même.

Afin d'étudier la commandabilité, l'observabilité, la stabilisabilité et la détectabilité, nous considérons le système linéaire fractionnaire décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.162)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .

Pour vérifier si le système linéaire (2.162) est commandable ou observable, il existe deux critères dits de Kalman et d'Hautus.

**Définition 2.7.1.** [Mat96b, MAN96, MAN97, VMC02] *Le système fractionnaire (2.162) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est commandable (ou la paire  $(A, B)$  est commandable) si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée*

- Critère de Kalman

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n = \dim(x) \quad (2.163)$$

- Critère d'Hautus

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \sigma I_n - A & B \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad (2.164)$$

△

**Définition 2.7.2.** [Mat96b, MAN96, MAN97, VMC02] Le système fractionnaire (2.162) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est observable (ou la paire  $(C, A)$  est observable) si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée

- Critère de Kalman

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad (2.165)$$

- Critère d'Hautus

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \sigma I_n - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad (2.166)$$

△

**Définition 2.7.3.** Le système fractionnaire (2.162) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est stabilisable (ou la paire  $(A, B)$  est stabilisable) s'il existe une commande par retour d'état  $u = -Kx$  telle que le système bouclé soit stable, c'est-à-dire telle que les valeurs propres de  $A - BK$  vérifient  $|\arg(\text{spec}(A - BK))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ . △

**Définition 2.7.4.** Le système fractionnaire (2.162) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est détectable (ou la paire  $(C, A)$  est détectable) s'il existe un gain  $L$  tel que les valeurs propres de  $A - LC$  vérifient  $|\arg(\text{spec}(A - LC))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ . △

Puisqu'on ne peut déplacer avec un retour d'état que les valeurs propres commandables de la paire  $(A, B)$  en passant de  $A$  à  $A - BK$  et qu'on ne peut déplacer avec une injection de sortie que les valeurs propres observables de la paire  $(C, A)$  en passant de  $A$  à  $A - LC$ , la stabilisabilité et la détectabilité, définies ci-dessus, sont des notions fondamentales pour commander et observer un système d'ordre fractionnaire. Ces deux concepts peuvent aussi se formuler à l'aide des deux définitions suivantes.

**Définition 2.7.5.** Le système fractionnaire (2.162) est stabilisable (ou la paire  $(A, B)$  est stabilisable) si et seulement si toutes les valeurs propres instables de  $A$  sont commandables (donc si et seulement si toutes les valeurs propres non commandables de  $A$  vérifient  $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ ), c'est-à-dire si et seulement si le critère suivant est vérifié

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \sigma I_n - A & B \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad |\arg(\sigma)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (2.167)$$

△

**Définition 2.7.6.** *Le système fractionnaire (2.162) est détectable (ou la paire  $(C, A)$  est détectable) si et seulement si toutes les valeurs propres instables de  $A$  sont observables (donc si et seulement si toutes les valeurs propres non observables de  $A$  satisfont  $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ ), c'est-à-dire si et seulement si le critère suivant est vérifié*

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \sigma I_n - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad |\arg(\sigma)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (2.168)$$

△

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'état de l'art sur les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire. Nous avons exhibé quelques exemples d'applications des systèmes fractionnaires, notamment en automatique avec la commande CRONE, en thermique dans l'équation de la chaleur, en électricité dans l'impédance fractionnaire d'un circuit type intégrateur fractionnaire, en rhéologie dans l'exemple du comportement "contrainte-déformation" d'un solide et en électrochimie (modélisation d'une cellule électrolytique).

La théorie de la dérivation non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma Euler et Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et propriétés de la dérivée fractionnaire. Nous avons présenté une méthode numérique s'appuyant sur l'approximation de la définition de Grünwald-Letnikov afin d'évaluer numériquement la dérivée fractionnaire des fonctions et de résoudre les équations à dérivée fractionnaire (telles que les équations d'oscillation-relaxation et de Bagley-Torvik). Nous avons aussi décrit, les systèmes chaotiques fractionnaire de Lorenz.

Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté les résultats fondamentaux sur la stabilité des systèmes linéaires fractionnaires dans le cas où le domaine de stabilité est un domaine convexe (c'est-à-dire lorsque l'ordre de dérivation  $\alpha$  est compris entre  $1 < \alpha < 2$ ) et dans le cas où le domaine de stabilité est un domaine non convexe (avec  $0 < \alpha < 1$ ). Ces résultats de stabilité sur les systèmes fractionnaires seront utilisés, dans les chapitres 3 et 4, pour obtenir des conditions de stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires. Les concepts de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires fractionnaires ont été également présentés avec leur extension à la stabilisabilité et à la détectabilité.





# Chapitre 3

## Stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>94</b>
<b>3.2</b>	<b>Stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires</b>	<b>95</b>
3.2.1	Approche par placement de pôles	96
3.2.2	Approche LMI	99
<b>3.3</b>	<b>Stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires</b>	<b>103</b>
3.3.1	Présence d'incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives	103
3.3.2	Présence d'incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme	106
<b>3.4</b>	<b>Commande basée sur un observateur pour les systèmes linéaires fractionnaires</b>	<b>113</b>
<b>3.5</b>	<b>Stabilité et stabilisation des systèmes singuliers linéaires fractionnaires</b>	<b>115</b>
3.5.1	Systèmes singuliers linéaires fractionnaires	115
3.5.2	Stabilisation	119
<b>3.6</b>	<b>Stabilisation robuste des systèmes singuliers linéaires fractionnaires</b>	<b>130</b>
3.6.1	Cas $1 < \alpha < 2$	130
3.6.2	Cas $0 < \alpha < 1$	132
3.6.3	Exemple	135
<b>3.7</b>	<b>Observateurs pour les systèmes linéaires fractionnaires</b>	<b>135</b>
3.7.1	Position du problème	136
3.7.2	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $1 < \alpha < 2$	137
3.7.3	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $0 < \alpha < 1$	137
<b>3.8</b>	<b>Observateurs pour les systèmes singuliers linéaires fractionnaires</b>	<b>137</b>
3.8.1	Position du problème	138

3.8.2	Paramétrage des matrices et synthèse de l'observateur . . . . .	140
3.8.3	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $1 < \alpha < 2$ . . . . .	141
3.8.4	Stabilité de l'erreur d'observation : cas $0 < \alpha < 1$ . . . . .	142
3.8.5	Algorithme de synthèse . . . . .	143
3.8.6	Synthèse d'observateurs d'ordre minimal, d'ordre réduit et d'ordre plein . . . . .	143
<b>3.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>144</b>

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre propose des méthodes de synthèse de lois de commande par retour d'état statique et par retour de sortie statique, ainsi que par retour d'état observé pour les systèmes linéaires à dérivée d'ordre non entière.

Comme pour les systèmes avec dérivée d'ordre entier, la stabilité d'un système linéaire fractionnaire dépend de l'emplacement des valeurs propres de sa matrice dynamique dans le plan complexe [Mat96b, Mat96a] (voir section 2.6.1).

Récemment, beaucoup de travaux se sont intéressés à l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires à dérivée d'ordre non entier [MSO05, Tar07, Pet08b, SMF08, FMS10, SMF10].

Très peu de travaux ont abordé la commande basée sur un observateur pour les systèmes linéaires fractionnaires. Matignon *et al.* [MAN97] ont proposé une commande basée sur un observateur sous forme d'espace d'état et sous forme de représentation polynomiale.

Le problème de la stabilité et de la stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 1$  et  $1 < \alpha < 2$  en présence d'incertitudes linéaires paramétriques a été récemment traité dans [LC10, LC09, XL09]. La question de la stabilité robuste des systèmes linéaires fractionnaires sur des intervalles d'incertitudes paramétriques a été examinée en premier lieu dans [PCV04] et ensuite dans [PCVP05]. Dans [PCV04, PCVP05], les résultats sont basés sur une procédure de type "Kharitonov" dans le cas uniquement des systèmes linéaires fractionnaires SISO (mono - entrée mono sortie).

La stabilité robuste pour les systèmes linéaires fractionnaires avec des intervalles d'incertitudes paramétriques décrits dans l'espace d'état a été également abordé dans [CAP06] où la théorie des perturbations matricielles a été utilisée pour déterminer les marges de variation des valeurs propres. Cependant, comme décrit dans [ACP07], le résultat dans [CAP06] est plutôt conservateur car la méthode proposée calcule séparément les marges des parties réelles et imaginaires des valeurs propres.

Cependant, si l'intervalle d'incertitudes du système linéaire fractionnaire considéré est de grande ampleur, la méthode proposée dans [CAP06] peut ne pas fonctionner comme relevé dans [ACP07]. Une nouvelle méthode de stabilité robuste pour les systèmes linéaires fractionnaires incertains a été proposé dans [ACP07] où l'inégalité de "Lyapunov" est utilisée pour trouver la valeur propre de la matrice hermitienne.

Concernant les approches de commande robuste des systèmes d'ordre non entier dans le domaine fréquentiel, on peut citer la commande CRONE [Ous94] qui s'intéresse à la robustesse via le degré de stabilité. Cette approche a fait l'objet de plusieurs sophistications de la part de ses concepteurs appelés "générations". L'idée première est de considérer

un régulateur en cascade avec un procédé et de faire en sorte que la marge de phase du système résultant dans le plan de Bode ne soit pas trop altérée lorsque la fonction de transfert du procédé est incertaine (les auteurs parlent de reparamétrage du procédé plutôt que d'incertitude). Cette approche a l'intérêt d'envisager la robustesse en raisonnant sur des indicateurs de stabilité et de performances fréquentielles des systèmes monovariables sans avoir à modéliser finement les incertitudes. Le revers de la médaille est la difficulté d'envisager la commande pour les systèmes multivariables même si des efforts sont faits dans cette direction.

Notons que tous les résultats mentionnés ci-dessus sur la stabilité robuste des systèmes linéaires fractionnaires avec des intervalles d'incertitudes ne donnent que des conditions suffisantes et que le problème de stabilisation robuste dans le cas des systèmes fractionnaires reste toujours ouvert. Par conséquent, il est important de chercher des conditions simples, effectives, moins conservatrices pour garantir la stabilité robuste.

Dans la première partie de ce chapitre, la stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires est traitée via, d'une part, une approche par placement de pôles avec  $0 < \alpha < 2$  et, d'autre part, par une approche LMI dans le cas où  $1 < \alpha < 2$  et d'une méthode *GLMI* dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ . Les conditions de stabilisation sont nécessaires et suffisantes.

Une extension de ces résultats à la stabilisation asymptotique robuste des systèmes linéaires fractionnaires en présence des incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme et en présence des incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives sont proposées dans la deuxième partie de ce chapitre.

La troisième partie de ce chapitre concerne la commande basée sur un observateur dans le cas d'un système linéaire fractionnaire. Ce résultat est basé sur le principe de séparation et sur les propriétés de la fonction de Mittag-Leffler.

La quatrième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la stabilisation et de la stabilisation robuste des systèmes linéaires singuliers à dérivée d'ordre non entier. Des conditions suffisantes de stabilité, de stabilisation asymptotique et de stabilisation asymptotique robuste des systèmes linéaires singuliers fractionnaires dérivant, d'une part, de la décomposition sous la forme canonique de Weierstrass et, d'autre part, de la régularisation de ces systèmes sont présentées.

Dans la cinquième partie de ce chapitre, nous proposons une synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires fractionnaires et singuliers linéaires fractionnaires. Cette approche est basée sur la résolution d'un système d'équations Sylvester.

Tout au long de ce chapitre, des exemples de simulation sont présentés pour illustrer la faisabilité des différentes approches proposées.

## 3.2 Stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires

Nous considérons le système linéaire fractionnaire décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions appropriées.

### 3.2.1 Approche par placement de pôles

Le but de cette section est d'étudier le problème de la stabilisation asymptotique par retour d'état statique et par retour de sortie du système fractionnaire (3.1).

#### 3.2.1.1 Stabilisation par retour d'état statique

La stabilisation asymptotique du système linéaire fractionnaire (3.1) avec  $C = I_n$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.2.1.** *Le système linéaire fractionnaire (3.1) avec  $C = I_n$  et  $0 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état statique suivant*

$$u(t) = Lx(t) \tag{3.2}$$

*est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A} = (A+BL)$  satisfont la relation (2.149) en remplaçant la matrice  $A$  par la matrice  $\tilde{A}$ .* ■

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est donnée directement en remplaçant la matrice  $A$  par  $\tilde{A} = A+BL$  dans le théorème 2.6.1. •

#### 3.2.1.2 Stabilisation par retour de sortie

Nous supposons maintenant que l'état du système linéaire fractionnaire (3.1) est partiellement accessible et nous considérons toujours le système décrit par l'équation (3.1).

La stabilisation asymptotique du système linéaire fractionnaire (3.1) est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.2.2.** *Le système linéaire fractionnaire (3.1) avec  $0 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour de sortie statique suivant*

$$u(t) = Ky(t) \tag{3.3}$$

*est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice  $\bar{A} = (A+BKC)$  satisfont la relation (2.149) en remplaçant la matrice  $A$  par la matrice  $\bar{A}$ .* ■

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est donnée directement en remplaçant la matrice  $A$  par  $\bar{A} = (A+BKC)$  dans le théorème 2.6.1. •

Pour la synthèse du gain  $K$  de retour de sortie, nous renvoyons à la section 1.5.2 du chapitre 1 donnant différentes méthodes permettant de résoudre ce problème.

### 3.2.1.3 Exemple

Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.4)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont  $\{-1, 0, 0, 3\}$ , le système est donc instable en boucle ouverte. En construisant, le gain statique

$$L = \begin{bmatrix} -8.3895 & -3.4556 & -13.1535 & -12.0280 \\ -2.7979 & -6.6105 & -8.4921 & -8.4513 \end{bmatrix}$$

tel que

$$\left| \arg(\lambda_i(\tilde{A})) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

alors les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A} = A + BL$  sont  $\{-1, -6, -4, -2\}$ . Ainsi, il résulte du théorème 3.2.1, que le système linéaire fractionnaire (3.4) contrôlé par le retour d'état statique  $u(t) = Lx(t)$  est asymptotiquement stable. Les réponses temporelles du système pour  $\alpha = 0.7$  et  $\alpha = 1.8$  sont indiquées respectivement sur les figures 3.1 et 3.2 avec  $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

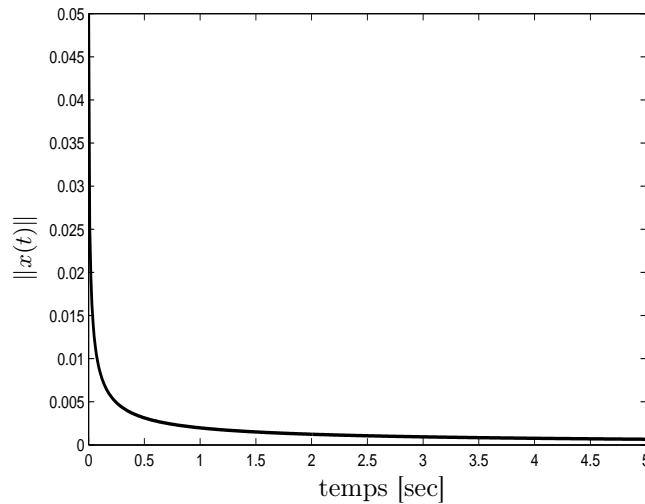


FIGURE 3.1: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$  et  $\alpha = 0.7$ .

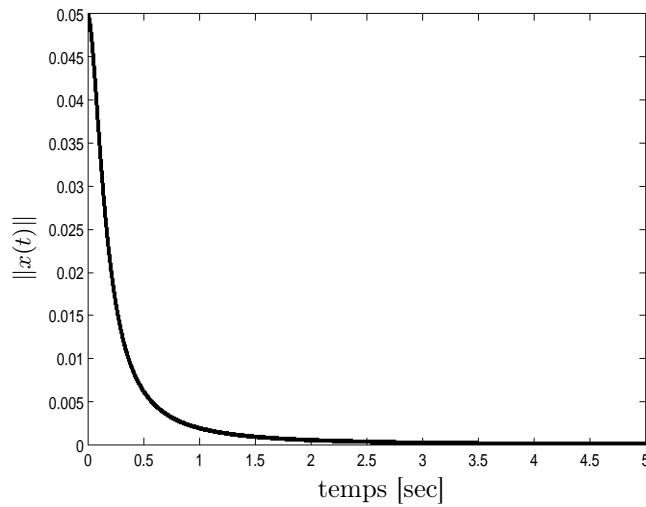


FIGURE 3.2: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$  et  $\alpha = 1.8$ .

Nous avons également synthétisé un gain par retour de sortie statique. Ce gain statique de sortie a été calculé par la méthode du  $W$ -problème (voir Crusius *et al.* [CT99]). Ainsi, en utilisant l'approche de [CT99], on obtient le gain statique par retour de sortie

$$K = \begin{bmatrix} -8.9619 & -14.1132 \\ -12.5836 & -22.6869 \end{bmatrix}$$

ce qui donne  $\{-2.3467 + 1.7017i, -2.3467 - 1.7017i, -4.2754 + 8.2119i, -4.2754 - 8.2119i\}$  comme valeurs propres de la matrice  $\bar{A} = A + BKC$ . Il résulte du théorème 3.2.2, que le système linéaire fractionnaire contrôlé par le retour de sortie statique  $u(t) = Ky(t)$  est asymptotiquement stable. Les réponses temporelles du système pour  $\alpha = 0.7$  et  $\alpha = 1.8$  sont indiquées respectivement sur les figures 3.3 et 3.4 avec  $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

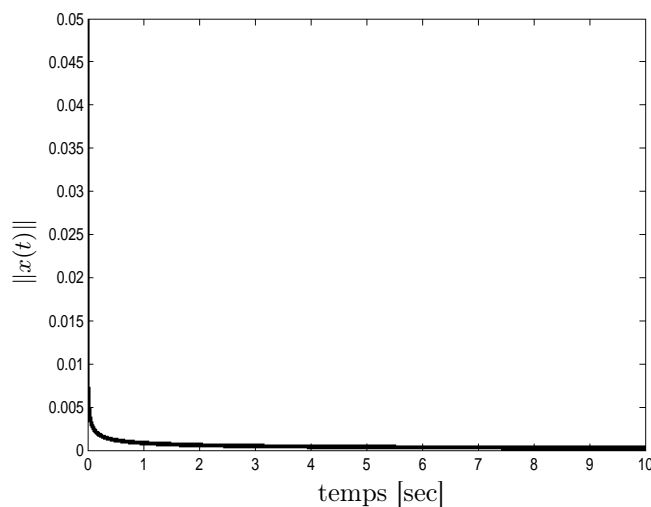
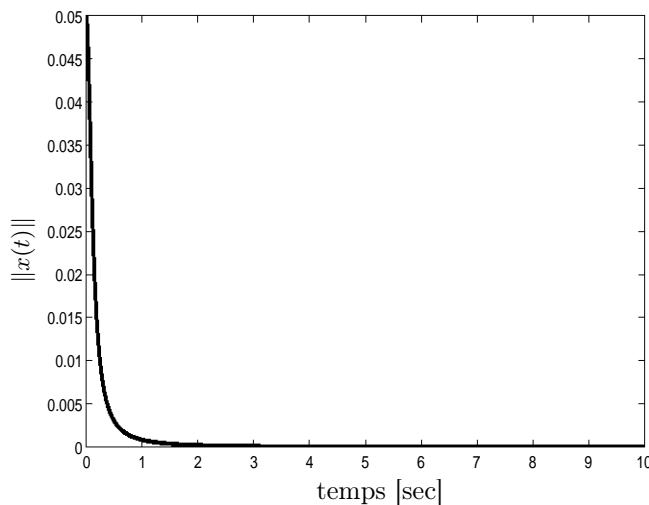


FIGURE 3.3: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$  et  $\alpha = 0.5$ .


 FIGURE 3.4: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$  et  $\alpha = 1.9$ .

### 3.2.2 Approche LMI

Nous avons vu dans la section 2.6.1 du chapitre 2 qu'il y a deux conditions LMI du système linéaire non entier d'ordre  $0 < \alpha < 2$ . Ce qui nous amène ainsi à étudier la stabilisation du système (3.1) selon que  $1 < \alpha < 2$  ou  $0 < \alpha < 1$ . Nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande par retour d'état statique de la forme  $u(t) = Lx(t)$  où  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est un gain matriciel constant. En appliquant la loi de commande (3.2) au système (3.1), l'équation dynamique du système bouclé s'écrit

$$D^\alpha x(t) = (A + BL)x(t) = \tilde{A}x(t). \quad (3.5)$$

où  $\tilde{A} = A + BL$ .

D'après le théorème 2.6.1, synthétiser des correcteurs stabilisants revient à résoudre le problème suivant.

**Problème 3.2.1.** *Pour une paire de matrices donnée  $(A, B)$ , trouver une matrice  $L$  telle que*

$$\left| \arg(\lambda_i(\tilde{A})) \right| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad i = 1 \dots n. \quad (3.6)$$

#### 3.2.2.1 Cas $1 < \alpha < 2$

Le problème où l'ordre de dérivation non entier  $1 < \alpha < 2$  est un problème LMI bien connu. Une solution de ce problème passe par l'utilisation des régions LMI [Chi96].

**Théorème 3.2.3.** *Le système non entier (3.1) d'ordre  $1 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état statique (3.2) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que*

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

avec

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = (AP + PA^T + BX + X^T B^T) \sin \theta$$

$$\Omega_{12} = (AP - PA^T + BX - X^T B^T) \cos \theta$$

où le gain assurant la stabilité par retour d'état statique est donné par

$$L = XP^{-1}$$

■

*Démonstration.* Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que la relation (3.7) soit vérifiée c'est-à-dire que le système fractionnaire bouclé (3.5) soit asymptotiquement stable. Alors d'après la relation (3.6) et le lemme 2.6.1, on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\tilde{A}P + P\tilde{A}^T) \sin \theta & (\tilde{A}P - P\tilde{A}^T) \cos \theta \\ (P\tilde{A}^T - \tilde{A}P) \cos \theta & (\tilde{A}P + P\tilde{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} AP \sin \theta & AP \cos \theta \\ -AP \cos \theta & AP \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} BX \sin \theta & BX \cos \theta \\ -BX \cos \theta & BX \sin \theta \end{bmatrix} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\tilde{A} = A + BL$  et  $L = XP^{-1}$ .

L'inégalité (3.8) est équivalente à l'inégalité (3.7), ceci complète ainsi la preuve de ce théorème 3.2.3. ●

### 3.2.2.2 Cas $0 < \alpha < 1$

L'extension des résultats précédents au cas  $0 < \alpha < 1$  est traitée dans [SMF08, SMF10] où l'approche utilisée est basée sur une analyse de la décomposition du domaine de stabilité (voir théorème 2.6.2 et annexe C).

Le théorème 2.6.2 utilise des matrices complexes. Une version équivalente avec des matrices réelles est donnée dans les lemmes 2.6.3 et 2.6.4 (voir [LC10]).

**Théorème 3.2.4.** *Le système fractionnaire (3.1) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique (3.2) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que*

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (AQ + BX)\} < 0 \quad (3.9)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160), le gain assurant la stabilité par retour d'état statique est donné par

$$L = XQ^{-1}$$

■



*Démonstration.* Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que la relation (3.9) soit vérifiée c'est-à-dire que le système fractionnaire bouclé (3.5) soit asymptotiquement stable. Alors d'après le lemme 2.6.4 et la relation (3.6), nous avons

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\tilde{A}Q_{ij})\} < 0 \quad (3.10)$$

où  $\tilde{A} = A + BL$  et les matrices  $\Gamma_{ij}(i, j = 1, 2)$  sont données par (2.160).

Posons  $Q_{11} = Q_{21} = Q$ ,  $Q_{12} = Q_{22} = 0$  dans (3.10), nous obtenons la relation suivante

$$\text{Sym}\{\Gamma_{11} \otimes (\tilde{A}Q)\} + \text{Sym}\{\Gamma_{21} \otimes (\tilde{A}Q)\} < 0 \quad (3.11)$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\tilde{A}Q)\} < 0. \quad (3.12)$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que la LMI (3.9) soit satisfaite.

En substituant  $\tilde{A} = A + BL$  dans (3.12) et en prenant  $X = LQ$ , nous obtenons l'inégalité suivante

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (AQ + BX)\} < 0 \quad (3.13)$$

Cette dernière inégalité (3.13) est équivalente à l'inégalité (3.9), ceci complète ainsi la preuve de ce théorème 3.2.4. •

### 3.2.2.3 Exemple

Considérons le système linéaire fractionnaire (3.1) avec les valeurs numériques suivantes

$$\begin{cases} D^\alpha x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.14)$$

En utilisant la LMI toolbox de Matlab pour le système linéaire fractionnaire (3.14) avec comme entrée  $u(t) = 0$ , on constate que les LMIs des deux théorèmes 3.2.3 et 3.2.4 ne sont pas faisables (les valeurs propres de la matrice dynamique  $A$  sont réelles et strictement positives). Par conséquent, le système linéaire fractionnaire (3.14) avec une entrée  $u(t) = 0$  est instable.

En outre, en utilisant la méthodologie proposée au théorème 3.2.3 dans le cas où  $1 < \alpha < 2$  et en prenant comme entrée un retour d'état statique  $u(t) = Lx(t)$ , nous pouvons ainsi calculer le gain stabilisant pour le système (3.14). L'environnement YALMIP permet ainsi de déterminer les matrices  $X$  et  $P$  suivantes, solutions du problème pour  $\alpha = 1.98$ .

La figure 3.5 montre la réponse temporelle du système linéaire fractionnaire (3.14) d'ordre  $\alpha = 1.98$  contrôlé par le retour d'état statique  $u(t) = Lx(t)$ .

$$P = \begin{bmatrix} 4.7565 & -2.1843 & 1.7712 \\ -2.1843 & 1.7723 & -1.8548 \\ 1.7712 & -1.8548 & 3.4003 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -22.4272 & 20.0859 & -66.5246 \end{bmatrix}.$$

Pour  $\alpha = 1.98$ , on en déduit le gain  $L$  suivant l'équation

$$L = XP^{-1} = \begin{bmatrix} -7.2894 & -32.9785 & -33.7566 \end{bmatrix}.$$

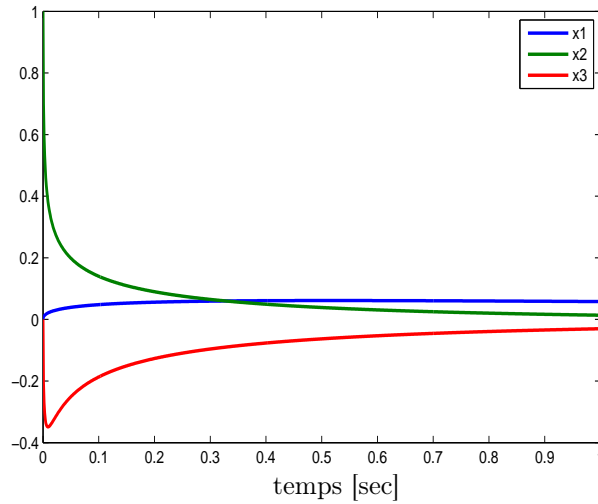


FIGURE 3.5: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$  pour  $\alpha = 1.98$ .

En utilisant la LMI proposée au théorème 3.2.4 dans le cas où  $0 < \alpha < 1$  et en prenant comme entrée un retour d'état statique  $u(t) = Lx(t)$ , nous pouvons ainsi calculer le gain stabilisant pour le système (3.14). De la même manière, l'environnement YALMIP permet ainsi de déterminer les matrices  $X$  et  $Q$  solutions du problème pour  $\alpha = 0.7$ .

La réponse temporelle du système linéaire fractionnaire (3.14) d'ordre  $\alpha = 0.7$  contrôlé par le retour d'état statique  $u(t) = Lx(t)$  est donnée par la figure 3.6.

$$Q = \begin{bmatrix} 1.1894 & -0.3094 & -0.3767 \\ -0.3094 & 0.4360 & -0.3094 \\ -0.3767 & -0.3094 & 1.1894 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -0.6107 & 2.1015 & -5.9523 \end{bmatrix}.$$

Pour  $\alpha = 0.7$ , on en déduit le gain  $L$  suivant l'équation

$$L = XQ^{-1} = \begin{bmatrix} -3.0857 & -1.9791 & -6.4963 \end{bmatrix}.$$

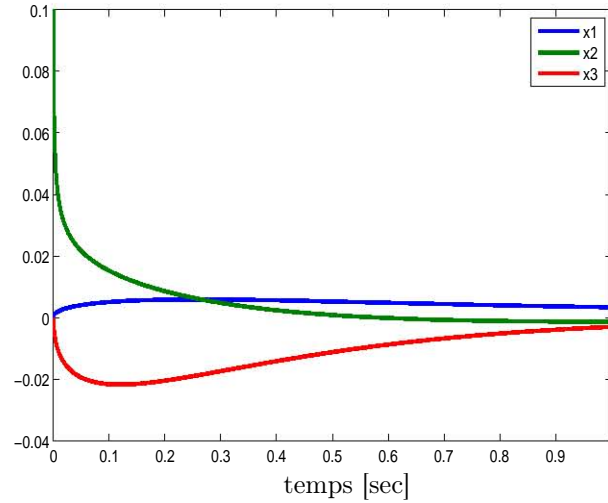


FIGURE 3.6: Evolution dans le temps du système avec une entrée  $u(t) = Lx(t)$  pour  $\alpha = 0.7$ .

### 3.3 Stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires

Dans cette section, nous proposons une étude du problème de la stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 1$  en présence de deux types d'incertitudes non linéaires paramétriques (des modèles d'incertitudes non linéaires paramétriques présentant une double action : “additive” et “multiplicative”) et (des modèles d'incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme).

#### 3.3.1 Présence d'incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives

Nous considérons le système linéaire incertain fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = (I + \Delta_m) [(A + \Delta_a)x(t) + Bu(t)] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.15)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $A$  et  $B$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Le système (3.15) est extrait du système non linéaire fractionnaire incertain (4.52) où la fonction non linéaire  $\bar{g}_i(\cdot) = 0$ .

Les incertitudes paramétriques  $\Delta_m$  et  $\Delta_a$  satisfont (voir (4.55))

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{ms} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix} = \bar{D}_m, \quad (3.16a)$$

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_a^1 & \cdots & \Delta_a^n \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_a^1 & \cdots & d_a^n \end{bmatrix} = \bar{D}_a. \quad (3.16b)$$

avec

$$\Delta_{ms} < d_m, \quad \Delta_a^i < d_a^i \quad (3.17)$$

où  $d_m, d_a^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (pour tout  $i = 1, \dots, n$ ).

Notons que le modèle des incertitudes paramétriques décrit dans (3.16) a été utilisé dans [XD98] dans le cas des systèmes linéaires d'ordre entier et dans [XL09] dans le cas des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre  $1 \leq \alpha < 2$ .

La stabilisation asymptotique du système (3.15) est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1.** [NZDR10b] *Le système linéaire incertain fractionnaire (3.15) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique suivant*

$$u(t) = Lx(t) \quad (3.18)$$

*est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , une matrice symétrique  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie positive et des scalaires  $\delta_i > 0$  et  $\ell_i > 0$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12}^T & \Lambda_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (AN + BY)\} + \sum_{i=1}^2 \delta_i (I_2 \otimes \hat{D}_m) + \sum_{i=1}^2 \ell_i (I_2 \otimes \hat{D}_{ma}) \\ \Lambda_{12} &= \begin{bmatrix} I_2 \otimes (AN + BY)^T & I_2 \otimes (AN + BY)^T & I_2 \otimes N^T & I_2 \otimes N^T \end{bmatrix} \\ \Lambda_{22} &= -\text{diag}(\delta_1, \delta_2, \ell_1, \ell_2) \otimes I_{2n}. \end{aligned}$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160),  $\Delta_m$  et  $\Delta_a$  vérifient (3.16). En outre, le gain assurant la stabilité est donné par

$$L = YN^{-1}. \quad (3.20)$$

■

*Démonstration.* Le système linéaire incertain fractionnaire (3.15) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique (3.18) peut s'écrire

$$D^\alpha x(t) = \tilde{A}x(t) \quad (3.21)$$

où  $\tilde{A} = (I + \Delta_m) [(A + \Delta_a) + BL] = (A + BL) + \Delta_m(A + BL) + \Delta_a + \Delta_a \Delta_m$ .

A partir de la relation (3.17) (voir [XL09]), on a

$$\Delta_m \Delta_m^T \leq \hat{D}_m \quad \text{et} \quad \Delta_{ma} \Delta_{ma}^T \leq \hat{D}_{ma} \quad (3.22)$$

où  $\Delta_{ma} = \Delta_a + \Delta_m \Delta_a$  et  $\widehat{D}_m, \widehat{D}_{ma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Le système linéaire incertain fractionnaire (3.15) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si le système linéaire incertain fractionnaire (3.21) l'est également, alors il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\widetilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui entraîne qu'il existe deux matrices réels symétriques  $P_{k1}$ ,  $k = 1, 2$  et deux matrices antisymétriques  $P_{k2}$ ,  $k = 1, 2$  telles que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\widetilde{A}P_{ij})\} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\overline{A}P_{ij})\} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\Delta_m \overline{A}P_{ij} + \Delta_{ma} P_{ij})\} < 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\overline{A} = A + BL$  et les matrices  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sont données (2.160).

Posons maintenant  $P_{11} = P_{21} = N$  et  $P_{12} = P_{22} = 0$  dans (3.23), nous obtenons la relation suivante

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\widetilde{A}P_{ij})\} = \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\overline{A}N)\} + \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\Delta_m \overline{A}N + \Delta_{ma} N)\} < 0 \quad (3.24)$$

Notons que  $\Gamma_{i1} \Gamma_{i1}^T = I_2$  ( $i = 1, 2$ ), il résulte ainsi de la relation (3.24) et du lemme 3.6.1 qu'il existe deux réels scalaires  $\delta_i > 0$  et  $\ell_i > 0$ , ( $i = 1, 2$ ) tels que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\Delta_m \overline{A}N + \Delta_{ma} N)\} &= \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\Delta_m \overline{A}N)\} + \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\Delta_{ma} N)\} \\ &= \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{(\Gamma_{i1} \otimes \Delta_m)(I_2 \otimes \overline{A}N)\} + \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{(\Gamma_{i1} \otimes \Delta_{ma})(I_2 \otimes N)\} \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \delta_i (\Gamma_{i1} \otimes \Delta_m) (\Gamma_{i1} \otimes \Delta_m)^T + \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1} (I_2 \otimes \overline{A}N)^T (I_2 \otimes \overline{A}N) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \ell_i (\Gamma_{i1} \otimes \Delta_{ma}) (\Gamma_{i1} \otimes \Delta_{ma})^T + \sum_{i=1}^2 \ell_i^{-1} (I_2 \otimes N)^T (I_2 \otimes N) \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \delta_i (I_2 \otimes \Delta_m \Delta_m^T) + \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1} (I_2 \otimes \overline{A}N)^T (I_2 \otimes \overline{A}N) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \ell_i (I_2 \otimes \Delta_{ma} \Delta_{ma}^T) + \sum_{i=1}^2 \ell_i^{-1} (I_2 \otimes N)^T (I_2 \otimes N). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En utilisant la relation (3.22), l'inégalité (3.25) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\Delta_m \overline{A}N + \Delta_{ma} N)\} \leq \sum_{i=1}^2 \delta_i (I_2 \otimes \widehat{D}_m) + \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1} (I_2 \otimes \overline{A}N)^T (I_2 \otimes \overline{A}N)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \ell_i(I_2 \otimes \widehat{D}_{ma}) + \sum_{i=1}^2 \ell_i^{-1}(I_2 \otimes N)^T(I_2 \otimes N). \quad (3.26)$$

En substituant l'équation (3.26) dans (3.24), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\widetilde{A}P_{ij})\} &\leq \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\overline{A}N)\} + \sum_{i=1}^2 \delta_i(I_2 \otimes \widehat{D}_m) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1}(I_2 \otimes \overline{A}N)^T(I_2 \otimes \overline{A}N) + \sum_{i=1}^2 \ell_i(I_2 \otimes \widehat{D}_{ma}) + \sum_{i=1}^2 \ell_i^{-1}(I_2 \otimes N)^T(I_2 \otimes N) < 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Posons  $Y = LN$  et remplaçons  $\overline{A} = A + BL$  dans (3.27), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\widetilde{A}P_{ij})\} &\leq \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (AN + BY)\} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1}(I_2 \otimes (AN + BY))^T(I_2 \otimes (AN + BY)) + \sum_{i=1}^2 \delta_i(I_2 \otimes \widehat{D}_m) + \sum_{i=1}^2 \ell_i(I_2 \otimes \widehat{D}_{ma}) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \ell_i^{-1}(I_2 \otimes N)^T(I_2 \otimes N) < 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Par le complément du lemme de Schur (voir [LT85, BEFB94] et annexe B.3), l'inégalité (3.28) est équivalente à l'inégalité (3.19). Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème. •

### 3.3.2 Présence d'incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme

Dans cette section, le lemme standard de Gronwall-Bellman est utilisé pour étudier le problème de la stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 1$  en présence d'incertitudes paramétriques bornées en norme. Cette approche a été proposée dans le cas des systèmes linéaires incertains d'ordre entier [CW87]. Ainsi, ce résultat de stabilisation robuste des systèmes linéaires fractionnaires est une extension de l'approche proposée par Chen *et al.* [CW87]. Le travail de synthèse du gain est simplifié pour choisir les paramètres du contrôleur dynamique afin de satisfaire à l'exigence de la stabilisation robuste.

Le lemme suivant est indispensable dans la preuve de nos théorèmes.

**Lemme 3.3.1.** [LT85] Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$  est le rayon spectral de  $A$ , alors la norme de la matrice  $A$  satisfait à la condition suivante

$$\|A\| \geq \rho(A) \quad (3.29)$$

□

Considérons le système linéaire incertain fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu + \Delta A(x) + \Delta B(u) \\ y = Cx + Du + \Delta C(x) + \Delta D(u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.30)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions appropriées.  $\Delta A(x)$ ,  $\Delta B(u)$ ,  $\Delta C(x)$  et  $\Delta D(u)$  sont des incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme comme suit

$$\begin{aligned} \|\Delta A(x)\| &\leq \delta_1 \|x\|, & \|\Delta B(u)\| &\leq \delta_2 \|u\|, \\ \|\Delta C(x)\| &\leq \delta_3 \|x\|, & \|\Delta D(u)\| &\leq \delta_4 \|u\| \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  et  $\delta_4$  sont des constantes positives.

A partir du système (3.30), on dérive le système dynamique nominal suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.32)$$

Sans perte de généralités, nous supposons que la paire  $(A, B)$  est stabilisable et la paire  $(C, A)$  est détectable (voir définitions 2.7.5 et 2.7.6).

Nous considérons aussi le cas où les incertitudes ne sont pas exprimées comme des incertitudes paramétriques (3.31) mais comme des incertitudes qui peuvent être décrites sous la forme d'entrées - sorties comme une erreur du modèle structurel avec une limite supérieure

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du + \Delta h(u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.33)$$

où l'incertitude du modèle  $\Delta h$  est non linéaire et bornée comme suit

$$\|\Delta h(u(t))\| \leq r \|u(t)\| \quad (3.34)$$

où  $r$  est une constante positive donnée.

Le contrôleur dynamique a la structure suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x_\ell = A_\ell x_\ell + B_\ell y \\ u(t) = L_\ell x_\ell \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.35)$$

où  $x_\ell \in \mathbb{R}^{n_2}$  et  $A_\ell, B_\ell$  et  $L_\ell$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Ainsi, le problème revient à traiter les deux problèmes suivants.

1. **Problème - I : stabilisation robuste du système fractionnaire (3.30).** Le premier problème de synthèse consiste à choisir les paramètres  $A_\ell, B_\ell$  et  $L_\ell$  du contrôleur dynamique (3.35) tel que le système (3.30) en bouclé avec le système (3.35) soit asymptotiquement stable.

2. **Problème - II : stabilisation robuste du système fractionnaire (3.33).** De même, le second problème de synthèse consiste à choisir le contrôleur dynamique (3.35) tel que le système (3.32) en bouclé avec le système (3.35) soit asymptotiquement stable.

### 3.3.2.1 Stabilisation robuste du système fractionnaire (3.30)

Le système incertain fractionnaire (3.30) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  combiné avec le système (3.35) se formule ainsi

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x \\ D^\alpha x_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BL_\ell \\ B_\ell C & A_\ell + B_\ell DL_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(x) + \Delta B(u) \\ B_\ell(\Delta C(x) + \Delta D(u)) \end{bmatrix} \quad (3.36a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & DL_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\ell \end{bmatrix} + \Delta C(x) + \Delta D(u) \quad (3.36b)$$

où  $0 < \alpha < 1$ .

Posons

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_\ell \end{bmatrix}, \quad D^\alpha \bar{x} = \begin{bmatrix} D^\alpha x \\ D^\alpha x_\ell \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & BL_\ell \\ B_\ell C & A_\ell + B_\ell DL_\ell \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\Delta \bar{A}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Delta A(x) + \Delta B(u) \\ B_\ell(\Delta C(x) + \Delta D(u)) \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & DL_\ell \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{C}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Delta C(x) + \Delta D(u) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Ainsi, le système incertain fractionnaire en boucle fermée peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} D^\alpha \bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \Delta \bar{A}(\bar{x}) \\ y = \bar{C}\bar{x} + \Delta \bar{C}(\bar{x}) \end{cases} \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{\ell_0} \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.39)$$

et le système nominal est donné en boucle fermée par

$$\begin{cases} D^\alpha \bar{x} = \bar{A}\bar{x} \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{\ell_0} \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.40)$$

Le théorème suivant donne une solution du **problème - I** du système incertain fractionnaire (3.30) d'ordre  $0 < \alpha < 1$ .

**Théorème 3.3.2.** [NZRB09a] *Supposons que les incertitudes non linéaires paramétriques vérifient la relation (3.31) et que la matrice  $A$  soit remplacée par  $\bar{A}$  telle que la relation (2.35) du corollaire 2.4.1 soit satisfaite avec  $\beta = 1$ , c'est-à-dire*

$$|\arg(\lambda_i(\bar{A}))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$



pour tout  $i = 1, \dots, (n + n_2)$  et  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n+n_2) \times (n+n_2)}$ . Si nous choisissons les paramètres du contrôleur (3.35) tel que le système nominal (3.40) bouclé avec le système (3.35) soit asymptotiquement stable et que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\|\bar{x}_0\| < \epsilon_1 \quad (3.41)$$

alors, le système incertain fractionnaire (3.39) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable. ■

*Démonstration.* En utilisant la transformée de Laplace du système (3.39), nous obtenons

$$\bar{X}(s) = (I_n s^\alpha - \bar{A})^{-1} (s^{\alpha-1} \bar{x}_0 + \mathcal{L}(\Delta \bar{A}(\bar{x}))). \quad (3.42)$$

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (3.42), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, on obtient l'égalité suivante

$$\bar{x}(t) = E_{\alpha,1}(\bar{A}t^\alpha) \bar{x}_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\bar{A}(t-\tau)^\alpha) \Delta \bar{A}(\bar{x}(\tau)) d\tau. \quad (3.43)$$

En utilisant la norme des deux côtés de l'équation (3.43) et à partir du corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\bar{A}$ , nous pouvons borner en norme l'état du système comme suit

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\bar{A}(t-\tau)^\alpha\|} \|\Delta \bar{A}(\bar{x}(\tau))\| d\tau. \quad (3.44)$$

A partir de la relation (3.38) et des propriétés bien connues des normes matricielles, nous avons

$$\|\Delta \bar{A}(\bar{x}(\tau))\| \leq \|\Delta A(x(\tau)) + \Delta B(u(\tau))\| + \|B_\ell(\Delta C(x(\tau)) + \Delta D(u(\tau)))\|.$$

Puis en utilisant (3.31), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Delta \bar{A}(\bar{x}(\tau))\| &\leq \delta_1 \|x(\tau)\| + \delta_2 \|u(\tau)\| + \|B_\ell\|(\delta_3 \|x(\tau)\| + \delta_4 \|u(\tau)\|) \\ &\leq (\delta_1 + \delta_3 \|B_\ell\|) \|x(\tau)\| + (\delta_2 + \delta_4 \|B_\ell\|) \|0 \quad L_\ell\| \|\bar{x}(\tau)\| \\ &\leq (\delta_1 + \delta_3 \|B_\ell\| + (\delta_2 + \delta_4 \|B_\ell\|) \|L_\ell\|) \|\bar{x}(\tau)\|. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En substituant (3.45) dans (3.44), nous avons

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\bar{A}(t-\tau)^\alpha\|} (\delta_1 + \delta_3 \|B_\ell\| + (\delta_2 + \delta_4 \|B_\ell\|) \|L_\ell\|) \|\bar{x}(\tau)\| d\tau$$

ce qui est équivalent à

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha} (\delta_1 + \delta_3 \|B_\ell\| + (\delta_2 + \delta_4 \|B_\ell\|) \|L_\ell\|) \|\bar{x}(\tau)\| d\tau.$$

Posons

$$K = (\delta_1 + \delta_3 \|B_\ell\| + (\delta_2 + \delta_4 \|B_\ell\|) \|L_\ell\|).$$

Ainsi en utilisant d'une part la forme standard du lemme de Gronwall-Bellman [Vid93, DV75, Pac73] donnée dans le lemme 1.4.1 et d'autre part le lemme 3.3.1, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta\|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau. \quad (3.46)$$

L'intégrale dans (3.46) peut être décomposer en une somme de deux intégrales par la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau &= \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau \\ &+ \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Puisque  $0 < \alpha < 1$  et  $(t-\tau) \geq \tau$  quand  $\tau \in [0, \frac{t}{2}]$ , nous avons

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau \leq \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau. \quad (3.48)$$

De même, puisque  $\alpha < 1$  et  $(t-\tau) \leq \tau$  quand  $\tau \in [\frac{t}{2}, t]$ , nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{t}{2}}^t \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau \\ &\leq \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 + \|\bar{A}\|\eta^\alpha)} \frac{\eta^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|\eta^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\eta, \end{aligned} \quad (3.49)$$

en substituant  $t-\tau$  par  $\eta$  dans (3.49) et en combinant les deux équations (3.48) et (3.49), l'inégalité (3.46) peut s'écrire sous la forme

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta\|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{K\theta^2\|\bar{x}_0\|\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)^{2-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau \quad (3.50)$$

ce qui est équivalent à

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{2K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{\alpha\|\bar{A}\| - 1} + \frac{\theta\|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \frac{2K\theta^2\|\bar{x}_0\|}{(1 - \alpha\|\bar{A}\|)(1 + \|\bar{A}\|(\frac{t}{2})^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}}. \quad (3.51)$$

Pour un réel  $\epsilon_1$  donné arbitrairement petit, nous avons

$$\|\bar{x}_0\| < \epsilon_1$$

Ainsi, à partir de l'équation (3.51), on montre que

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \frac{2K\theta^2\epsilon_1}{\alpha\|\bar{A}\| - 1} + \frac{\theta\epsilon_1}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \frac{2K\theta^2\epsilon_1}{(1 - \alpha\|\bar{A}\|)(1 + \|\bar{A}\|(\frac{t}{2})^\alpha)^{1 - (\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} \\ &\leq \frac{2K\theta^2\epsilon_1}{\alpha\|\bar{A}\| - 1} < \infty, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

ce qui implique la stabilité de la solution. A partir de la relation (3.39), nous avons

$$y = \bar{C}\bar{x} + \Delta\bar{C}(\bar{x}) \quad (3.53)$$

$$\|y(t)\| \leq (\|\bar{C}\| + (\delta_3 + \delta_4\|L_\ell\|)) \|\bar{x}(t)\|$$

En utilisant la relation (3.39), nous obtenons

$$\|y(t)\| \leq (\|\bar{C}\| + (\delta_3 + \delta_4\|L_\ell\|)) \frac{2K\theta^2\epsilon_1}{\alpha\|\bar{A}\| - 1}$$

ce qui est équivalent à

$$\|y(t)\| \leq \frac{2K\theta^2 (\|\bar{C}\| + (\delta_3 + \delta_4\|L_\ell\|)) \epsilon_1}{\alpha\|\bar{A}\| - 1}$$

Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème. •

*Remarque 3.3.1.*

1. L'inégalité (3.41) est une condition suffisante mais pas nécessaire. Autrement dit, même si l'inégalité (3.41) n'est pas satisfaite, on ne peut pas affirmer si le contrôleur (3.35) est stabilisant ou non.
2. Lorsque les incertitudes paramétriques ayant une borne indépendante de  $x(t)$  et  $u(t)$  dans le **problème-I**, c'est-à-dire si les incertitudes  $\Delta A(x)$ ,  $\Delta B(u)$ ,  $\Delta C(x)$  et  $\Delta D(u)$  sont bornées par les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|\Delta A(x)\| &\leq \delta_1, & \|\Delta B(u)\| &\leq \delta_2, \\ \|\Delta C(x)\| &\leq \delta_3, & \|\Delta D(u)\| &\leq \delta_4. \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi prouver que si nous choisissons les matrices  $A_\ell$ ,  $B_\ell$  et  $L_\ell$  telles que le système nominal en boucle fermée (3.40) soit asymptotiquement stable et la relation (3.41) soit satisfaite, alors le système linéaire incertain en boucle fermée est asymptotiquement stable. □

### 3.3.2.2 Stabilisation robuste du système fractionnaire (3.33)

Le système linéaire fractionnaire incertain (3.33) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  combiné avec le correcteur (3.35) conduit à la relation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha \bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\ell \Delta h(u) \end{bmatrix} & \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{\ell_0} \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ y = \bar{C}\bar{x} + \Delta h(u) \end{cases} \quad (3.54)$$

Le théorème suivant donne une solution du **problème-II**.

**Théorème 3.3.3.** [NZRB09a] Supposons que l'incertitude non linéaire  $\Delta h(u)$  vérifie la relation (3.34) et que la matrice  $A$  soit remplacée par  $\bar{A}$  telle que la relation (2.35) du corollaire 2.4.1 soit satisfaite avec  $\beta = 1$ , c'est-à-dire

$$|\arg(\lambda_i(\bar{A}))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

pour tout  $i = 1, \dots, (n + n_2)$  et  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n+n_2) \times (n+n_2)}$ .

Si nous choisissons le contrôleur dynamique (3.35) tel que le système nominal (3.40) bouclé avec le contrôleur (3.35) soit asymptotiquement stable et que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\|\bar{x}_0\| < \epsilon_1 \quad (3.55)$$

alors le système incertain fractionnaire bouclé (3.54) est également asymptotiquement stable. ■

*Démonstration.* En utilisant la transformée de Laplace du système (3.54), nous obtenons

$$\bar{X}(s) = (I_n s^\alpha - \bar{A})^{-1} \left( s^{\alpha-1} \bar{x}_0 + \mathcal{L} \begin{bmatrix} 0 \\ B_\ell \Delta h(u(t)) \end{bmatrix} \right). \quad (3.56)$$

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (3.56), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, on obtient l'égalité suivante

$$\bar{x}(t) = E_{\alpha,1}(\bar{A}t^\alpha) \bar{x}_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\bar{A}(t-\tau)^\alpha) \times \begin{bmatrix} 0 \\ B_\ell \Delta h(u(\tau)) \end{bmatrix} d\tau. \quad (3.57)$$

En utilisant la norme des deux côtés de l'équation (3.57) et à partir du corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\bar{A}$ , l'état du système s'écrit comme suit

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\theta (t-\tau)^{\alpha-1} \|B_\ell\| \|\Delta h(u(\tau))\|}{1 + \|\bar{A}(t-\tau)^\alpha\|} d\tau \quad (3.58)$$

en utilisant l'inégalité (3.34) sur l'incertitude non linéaire, nous avons

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{r\theta (t-\tau)^{\alpha-1} \|B_\ell\|}{1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha} \|u(\tau)\| d\tau \quad (3.59)$$

ce qui est équivalent à

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{r\theta^2 \|L_\ell\| (t-\tau)^{\alpha-1} \|B_\ell\|}{1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau. \quad (3.60)$$

Ainsi en utilisant d'une part la forme standard du lemme de Gronwall-Bellman [Vid93, DV75, Pac73] donnée dans le lemme 1.4.1 et d'autre part le lemme 3.3.1, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\theta \|\bar{x}_0\|}{1 + \|\bar{A}\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{r\theta^2 \|L_\ell\| \|B_\ell\| \|\bar{x}_0\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\bar{A}\|\tau^\alpha)(1 + \|\bar{A}\|(t-\tau)^\alpha)^{1-(\alpha\|\bar{A}\|)^{-1}}} d\tau. \quad (3.61)$$

En utilisant la relation (3.41) et les calculs faits dans la section 3.3.2.1, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \frac{2r\theta^2 \|L_\ell\| \|B_\ell\| \epsilon_1}{\alpha \|\bar{A}\| - 1} + \frac{\theta \epsilon_1}{1 + \|\bar{A}\| t^\alpha} + \frac{2r\theta^2 \|L_\ell\| \|B_\ell\| \epsilon_1}{(1 - \alpha \|\bar{A}\|)(1 + \|\bar{A}\| (\frac{t}{2})^\alpha)^{1 - (\alpha \|\bar{A}\|)^{-1}}} \\ &\leq \frac{2r\theta^2 \|L_\ell\| \|B_\ell\| \epsilon_1}{\alpha \|\bar{A}\| - 1} < \infty, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

ceci implique la stabilisation asymptotique du système incertain fractionnaire.

A partir de la relation (3.54), nous avons

$$y = \bar{C}\bar{x} + \Delta h(u) \quad (3.63)$$

$$\|y(t)\| \leq \|\bar{C}\| \|\bar{x}(t)\| + \|\Delta h(u(t))\|$$

$$\|y(t)\| \leq (\|\bar{C}\| + r\|L_\ell\|) \|\bar{x}(t)\|.$$

En utilisant (3.62), nous obtenons

$$\|y(t)\| \leq (\|\bar{C}\| + r\|L_\ell\|) \frac{2r\theta^2 \|L_\ell\| \|B_\ell\| \epsilon_1}{\alpha \|\bar{A}\| - 1} < \infty$$

ce qui est équivalent à

$$\|y(t)\| \leq \frac{2r(\|\bar{C}\| + r\|L_\ell\|) \theta^2 \|L_\ell\| \|B_\ell\| \epsilon_1}{\alpha \|\bar{A}\| - 1} < \infty.$$

Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème. •

### 3.4 Commande basée sur un observateur pour les systèmes linéaires fractionnaires

La commande basée sur un observateur asymptotique pour les systèmes linéaires fractionnaires a été présentée dans Matignon et Andréa-Novel [MAN97] où il est prouvé que le principe de séparation s'applique. Dans [MAN97], la paramétrisation du contrôleur due à Youla-Jabr-Bongiorno a été également utilisée pour tirer partie des degrés de liberté supplémentaires afin de rejeter asymptotiquement des perturbations plus générales, et pas seulement des perturbations de type échelon ou rampe.

Dans cette section, nous présenterons une nouvelle approche basée sur la stabilité asymptotique au sens de Mittag-Leffler et sur le principe de séparation pour la stabilisation asymptotique de la commande à base d'observateur pour les systèmes linéaires à dérivée d'ordre non entier d'ordre  $0 < \alpha < 2$ .

Considérons le système linéaire fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.64)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Le but de cette section est d'étudier le problème de stabilisation asymptotique du système linéaire fractionnaire (3.64) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  via un observateur linéaire de type "Luenberger" décrit par l'équation suivante

$$D^\alpha \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (3.65)$$

couplé à la commande par retour d'état estimé suivante

$$u(t) = L\hat{x}(t). \quad (3.66)$$

Notons  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  l'erreur du signal alors le système bouclé est donné par

$$\begin{cases} D^\alpha e(t) = (A - KC)e(t) \\ D^\alpha \hat{x}(t) = (A + BL)\hat{x}(t) - KCe(t) \end{cases} \quad (3.67)$$

ce qui équivalent à

$$D^\alpha X(t) = \tilde{A}X(t) \quad (3.68)$$

avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A - KC & 0 \\ -KC & A + BL \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

La stabilisation asymptotique du système linéaire fractionnaire (3.64) est donné par le théorème suivant.

**Théorème 3.4.1.** [NZDR09a] *Le système linéaire fractionnaire (3.64) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état estimé (3.66) via l'observateur linéaire (3.65) est asymptotiquement stable si les matrices  $A - KC$  et  $A + BL$  vérifient*

$$|\arg(\lambda_i(A - KC))| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\arg(\lambda_i(A + BL))| > \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (3.70)$$

De plus, l'état du système  $X(t)$  est borné comme suit

$$\|X(t)\| \leq \frac{\theta}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha} \|X_0\| \quad \forall t \geq 0. \quad (3.71)$$

où

$$X(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) - x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A - KC & 0 \\ -KC & A + BL \end{bmatrix}$$

et où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ . ■

*Démonstration.* En utilisant la transformée de Laplace du système linéaire fractionnaire (3.68), nous obtenons

$$X(s) = (I_n s^\alpha - \tilde{A})^{-1} s^{\alpha-1} X_0 \quad (3.72)$$

où la matrice  $\tilde{A}$  est donnée par (3.69) avec les matrices de gains  $L$  et  $K$  vérifiant (3.70).

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (3.72), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, on obtient l'égalité suivante

$$X(t) = E_{\alpha,1}(\tilde{A}t^\alpha)X_0. \quad (3.73)$$

En appliquant ensuite la norme des deux côtés de l'équation (3.73) et en utilisant le corollaire 2.4.1 en remplaçant la matrice  $A$  par la matrice  $\tilde{A}$ , on obtient l'inégalité suivante

$$\|X(t)\| \leq \frac{\theta}{1 + \|\tilde{A}t^\alpha\|} \|X_0\|, \quad (3.74)$$

ce qui est équivalent à (3.71) d'où  $\|X(t)\|$  converge asymptotiquement vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. •

## 3.5 Stabilité et stabilisation des systèmes singuliers linéaires fractionnaires

### 3.5.1 Systèmes singuliers linéaires fractionnaires

Nous considérons dans cette section une nouvelle famille de systèmes dits systèmes singuliers à dérivée d'ordre non entier ou systèmes singuliers fractionnaires. Ces systèmes sont décrits par l'équation différentielle à dérivée fractionnaire suivante

$$ED^\alpha x(t) = Ax(t) \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.75)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état, la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . La matrice  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est singulière avec  $\text{rang } E = \bar{r} < n$ .

Les modèles de systèmes de la forme (3.75), qui sont appelés systèmes singuliers fractionnaires [NZDR10c, NZDR10a], sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme leurs homologues les systèmes singuliers linéaires de la forme  $(E\dot{x}(t) = Ax(t))$ . Ces derniers se rencontrent par exemple dans l'étude des systèmes interconnectés [RP74], les réseaux électriques [DN79], la robotique et plus généralement les structures mécaniques [Mül06], ou peuvent également servir à approcher des systèmes dits "singulièrement perturbés" [KOS76].

A l'instar des modèles conventionnels pour lesquels  $E = I_n$  (ou tout simplement pour lesquels  $E$  est inversible), l'étude de la stabilité du système (3.75) est importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier la stabilité asymptotique. A la différence du cas non singulier, la localisation des valeurs propres finies du faisceau  $sE - A$  est insuffisante pour caractériser la stabilité lorsque  $\det(E) \neq 0$ .

D'autres propriétés doivent être vérifiées. La première est la "régularité", c'est-à-dire l'existence d'une solution unique à l'équation d'état généralisée, la seconde est l'absence de modes impulsionnels c'est-à-dire l'absence de valeurs propres infinies dans faisceau  $sE - A$ . Quand ces deux propriétés s'ajoutent à la stabilité des modes finis du faisceau  $sE - A$  (où même  $\mathcal{D}$ -stabilité), le modèle est dit admissible. Il faut signaler qu'il y a très peu de contributions qui traitent de l'analyse et de la commande des systèmes singuliers fractionnaires, la seule référence qu'on a noté actuellement est issue d'une présentation dans un workshop (voir [Ahn07]).

### 3.5.1.1 Régularité et modes impulsionnels

**Définition 3.5.1.** *Le système singulier fractionnaire (3.75) est régulier s'il existe une solution unique  $x(t)$  pour des conditions initiales données.*  $\triangle$

Comme dans [Dai89], nous donnons les deux lemmes suivants qui généralisent les résultats bien connus sur les systèmes linéaires singuliers à dérivée d'ordre entier aux systèmes singuliers à dérivée d'ordre non entier.

**Lemme 3.5.1.** [NZDR10c] *La paire  $(E, A)$  est régulière si et seulement si  $\det(\lambda^\alpha E - A)$  est non identiquement nul où  $\lambda \in \mathbb{C}$ , c'est-à-dire  $\det(\lambda^\alpha E - A) \neq 0$ .*  $\square$

*Démonstration.* En utilisant la transformée de Laplace de l'équation (3.75), nous avons

$$(s^\alpha E - A)X(s) = s^{\alpha-1}Ex_0 \quad (3.76)$$

où  $X(s)$  est la transformée de Laplace de  $x(t)$ . Alors, la solution  $x(t)$  existe et est unique si et seulement si  $\det(\lambda^\alpha E - A) \neq 0$  avec  $\lambda = s$ .  $\bullet$

**Lemme 3.5.2.** [NZDR10c] *Supposons que le lemme 3.5.1 soit satisfait, alors*

*i) il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  (avec  $\det(P) \neq 0$  et  $\det(Q) \neq 0$ ) telles qu'on ait*

$$PEQ = \text{diag}(I_r, N), \quad PAQ = \text{diag}(A_1, I_{n-r}) \quad (3.77)$$

*où  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  est une matrice nilpotente,*

*ii) si  $\deg(\det(\beta E - A)) = \text{rang } E \ \forall \beta \in \mathbb{C}$ , alors il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  satisfaisant*

$$PEQ = \text{diag}(I_r, 0), \quad PAQ = \text{diag}(A_1, I_{n-r}) \quad (3.78)$$

*où  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $\text{rang } E = r$ .*  $\square$

*Démonstration.* Supposons que  $\text{rang } E = r < n$ . Si le lemme 3.5.1 est satisfait, alors  $\det(\beta E - A) \neq 0$  où  $\beta \in \mathbb{C}$ .

Puis, à partir de [Dai89], il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  (avec  $\det(P) \neq 0$  et  $\det(Q) \neq 0$ ) telles que l'équation (3.75) s'écrit comme suit

$$PEQQ^{-1}D^\alpha x = PAQQ^{-1}x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

De plus, à partir de [Dai89], nous avons  $N = 0$  dans (3.79) si  $\deg(\det(\beta E - A)) = \text{rang } E$ .  $\bullet$



L'équation (3.79) donne la forme canonique de Weierstrass du système (3.75). Dans l'équation (3.79), le sous-système fractionnaire lent est donné par

$$D^\alpha x_1 = A_1 x_1 \quad (3.80)$$

tandis que, le sous-système fractionnaire rapide par

$$ND^\alpha x_2 = x_2 \quad (3.81)$$

où  $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  est une matrice nilpotente,  $PEQ = \text{diag}(I_r, N)$ ,  $PAQ = \text{diag}(A_1, I_{n-r})$ ,  
 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}x$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^r$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)}$ .

### 3.5.1.2 Stabilité

Pour les systèmes linéaires singuliers à dérivée "d'ordre entier", la stabilité est définie comme suit [MKOS97]

- a) la paire  $(E, A)$  est régulière, c'est-à-dire  $\det(\lambda E - A) \neq 0$ ,
- b) la paire  $(E, A)$  est causale "pas de modes impulsions", c'est-à-dire  $\deg(\det(\lambda E - A)) = \text{rang } E \quad \forall \beta \in \mathbb{C}$ ,
- c) les modes finis de la paire  $(E, A)$  sont strictement à partie réelle négative.

Notons bien que les modes finis de la paire  $(E, A)$  correspondent aux valeurs propres de la matrice  $A_1$  dans (3.79).

Si  $0 < \alpha < 2$ , l'item c) doit être remplacé par  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ ,  $i = 1 \dots r$ , où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $A_1$  [Mat96b, ACP07, SMF10]. Ainsi, on généralise l'approche de Masubuchi *et al.* [MKOS97], nous obtenons le lemme suivant.

**Lemme 3.5.3.** [NZDR10c, NZDR10a] *Le système singulier fractionnaire (3.75) est asymptotiquement stable si*

- 1) la paire  $(E, A)$  est régulière c'est-à-dire  $\det(\lambda^\alpha E - A) \neq 0$  où  $\lambda \in \mathbb{C}$
- 2) la paire  $(E, A)$  est causale c'est-à-dire  $\deg(\det(\beta E - A)) = \text{rang } E \quad \forall \beta \in \mathbb{C}$
- 3) les modes finis de la paire  $(E, A)$  qui sont les valeurs propres  $(\lambda_i)$  de la matrice  $A_1$  du système (3.79) satisfont  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$  pour  $i = 1 \dots r$ . □

*Démonstration.* En utilisant le lemme 3.5.1, la solution  $x(t)$  existe et est unique si l'item 1) est satisfait et le système (3.75) peut s'écrire sous la forme (3.79) en utilisant les matrices  $P$  and  $Q$  (voir item i) du lemme 3.5.2). De plus, si l'item 2) est satisfait, alors la relation (3.79) devient (voir item ii du lemme 3.5.2)

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

où  $\text{rang } E = r < n$ . La stabilité asymptotique du système singulier fractionnaire (3.82) dépend entièrement de l'état  $x_1(t)$  et indépendamment de  $x_2(t)$ . Ainsi, à partir de [Mat96b], on vérifie bien la stabilité asymptotique si l'item 3) est bien sûr satisfait. •

**Cas  $1 < \alpha < 2$**

Nous supposons que le système (3.75) satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.5.1.** *Le système (3.75) satisfait aux items 1) et 2) du lemme 3.5.3.*  $\square$

La stabilité du système singulier fractionnaire (3.75)  $1 < \alpha < 2$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.5.1.** *[NZDR10c] Sous l'hypothèse 3.5.1, le système singulier fractionnaire (3.75) d'ordre  $1 < \alpha < 2$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telle que*

$$\begin{bmatrix} (A_1 P_0 + P_0 A_1^T) \sin \theta & (A_1 P_0 - P_0 A_1^T) \cos \theta \\ (P_0 A_1^T - A_1 P_0) \cos \theta & (A_1 P_0 + P_0 A_1^T) \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (3.83)$$

où  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est définie dans relation (3.79) et  $r = \text{rang } E$ .  $\blacksquare$

*Démonstration.* En utilisant l'item ii) du lemme 3.5.2, le système (3.75) peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x_1(t) = A_1 x_1(t) \quad (3.84a)$$

$$0 = x_2(t) \quad (3.84b)$$

si l'hypothèse 3.5.1 est satisfaite pour l'équation (3.75) avec

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

où  $P$  et  $Q$  sont des matrices données. Il est facile de voir que  $r = \text{rang } E$ .

Ainsi, en utilisant le lemme 2.6.1, l'existence de la matrice  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telle que la LMI (3.83) soit satisfaite est équivalent à l'item 3) du lemme 3.5.3.

Ceci complète la preuve de ce théorème 3.5.1.  $\bullet$

**Cas  $0 < \alpha < 1$**

Supposons que le système (3.75) satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.5.2.** *Le système (3.75) satisfait aux items 1) et 2) du lemme 3.5.3.*  $\square$

La stabilité du système (3.75) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.5.2.** *Sous l'hypothèse 3.5.2, le système singulier fractionnaire (3.75) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux matrices symétriques  $P_{k1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k = 1, 2$  et deux matrices antisymétriques  $P_{k2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $k = 1, 2$ , telles que*

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (A_1 P_{ij})\} < 0 \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.86)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160) et la matrice  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est définie dans (3.79) et  $r = \text{rang } E$ .  $\blacksquare$

*Démonstration.* En utilisant l'item ii) du lemme 3.5.2, le système (3.75) peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x_1(t) = A_1 x_1(t) \quad (3.87a)$$

$$0 = x_2(t) \quad (3.87b)$$

si l'hypothèse 3.5.2 est satisfaite pour l'équation (3.75) avec

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

où  $P$  et  $Q$  sont de matrices données. Il est facile de voir que  $r = \text{rang } E$ .

Ainsi, en utilisant le lemme 2.6.4, l'existence de deux matrices symétriques  $P_{k1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $k = 1, 2$ , et de deux matrices antisymétriques  $P_{k2} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $k = 1, 2$ , telles que la LMI (3.85) soit satisfaite, ce qui est équivalent à l'item 3) du lemme 3.5.3.

Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème 3.5.2. •

### 3.5.2 Stabilisation

Dans cette section, les deux théorèmes 3.5.1 et 3.5.2 précédemment sont utilisés afin de donner des conditions suffisantes de stabilisation du système singulier fractionnaire (3.75) via la forme canonique de Weierstrass. Nous considérons dans cette section, le système singulier fractionnaire décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.88)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $A$  et  $B$  sont des matrices de dimensions appropriées. La matrice  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est singulière avec  $\text{rang } E = \bar{r} < n$ .

Nous supposons que le système (3.88) satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.5.3.** *Le système (3.88) satisfait aux items 1) et 2) du lemme 3.5.3.* □

#### 3.5.2.1 Forme canonique de Weierstrass

La première méthode de stabilisation est basée sur l'utilisation de la forme canonique de Weierstrass, c'est-à-dire la décomposition du système singulier fractionnaire en deux sous-systèmes, un sous-système lent et un sous-système rapide. En utilisant le lemme 3.5.3, on montre que la stabilisation du système singulier fractionnaire est assurée uniquement par la partie causale.

**Cas**  $1 < \alpha < 2$

**Théorème 3.5.3.** *[NZDR10c] Sous l'hypothèse 3.5.3, le système singulier fractionnaire ou d'ordre non entier (3.88) avec  $1 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état statique*

$$u(t) = -Kx(t) = [-XP_0^{-1} \ 0]Q^{-1}x(t)$$

est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{m \times r}$  et une matrice  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , telles que

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.89)$$

où

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = (A_1 P_0 + P_0 A_1^T - B_1 X - X^T B_1^T) \sin \theta$$

$$\Gamma_{12} = (A_1 P_0 - P_0 A_1^T + X^T B_1^T - B_1 X) \cos \theta$$

la matrice  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est définie dans la relation (3.79) et  $r = \text{rang } E$ . ■

*Démonstration.* En utilisant l'item ii) du lemme 3.5.2, le système (3.88) peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \quad (3.90a)$$

$$0 = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (3.90b)$$

si l'hypothèse 3.5.3 est satisfaite pour l'équation (3.88), avec

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

où  $P$  et  $Q$  sont des matrices données. On vérifie bien que  $r = \text{rang } E$ .

Supposons maintenant qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times r}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telles que la LMI (3.89) soit satisfaite.

Il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A}P_0 + P_0\tilde{A}^T) \sin \theta & (\tilde{A}P_0 - P_0\tilde{A}^T) \cos \theta \\ (P_0\tilde{A}^T - \tilde{A}P_0) \cos \theta & (\tilde{A}P_0 + P_0\tilde{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} = \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 P_0 \sin \theta & A_1 P_0 \cos \theta \\ -A_1 P_0 \cos \theta & A_1 P_0 \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \\ + \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} -B_1 X \sin \theta & -B_1 X \cos \theta \\ B_1 X \cos \theta & -B_1 X \sin \theta \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (3.91)$$

où  $\tilde{A} = A_1 - B_1 X P_0^{-1}$ .

Cette dernière inégalité (3.91) est équivalente à l'inégalité (3.89), ceci complète ainsi la preuve de ce théorème 3.5.3. ●

**Cas**  $0 < \alpha < 1$

**Théorème 3.5.4.** [NZDR10a] *Sous l'hypothèse 3.5.3, le système singulier fractionnaire ou d'ordre non entier (3.88) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique*

$$u(t) = -Kx(t) = [-X P_0^{-1} \quad 0] Q^{-1} x(t)$$

où  $X \in \mathbb{R}^{m \times r}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est asymptotiquement stable si et seulement si la LMI suivante est satisfaite

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym} \{ \Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 - B_1 X) \} < 0 \quad (3.92)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160), la matrice  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est définie dans la relation (3.79) et  $r = \text{rang } E$ . ■

*Démonstration.* En utilisant l'item ii) du lemme 3.5.2, le système (3.88) peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \quad (3.93a)$$

$$0 = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (3.93b)$$

si l'hypothèse 3.5.3 est satisfaite pour l'équation (3.88), avec

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

où  $P$  et  $Q$  sont des matrices données. On vérifie bien que  $r = \text{rang } E$ .

Supposons maintenant qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times r}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telles que la LMI (3.92) soit satisfaite.

Il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\tilde{A}P_{ij})\} < 0 \quad (3.94)$$

où  $\tilde{A} = A_1 - B_1 K_1$ , les matrices  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sont données par (2.160), la matrice  $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est définie dans la relation (3.79),  $r = \text{rang } E$  et  $K_1 = X P_0^{-1}$ . Posons  $P_{11} = P_{21} = P_0$  et  $P_{12} = P_{22} = 0$  dans (3.94), nous obtenons la relation suivante

$$\text{Sym}\{\Gamma_{11} \otimes (\tilde{A}P_0)\} + \text{Sym}\{\Gamma_{21} \otimes (\tilde{A}P_0)\} < 0. \quad (3.95)$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times r}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telles que

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\tilde{A}P_0)\} < 0, \quad (3.96)$$

alors en substituant  $\tilde{A} = A_1 - B_1 K_1$  dans (3.96) et en prenant  $X = K_1 P_0$ , nous obtenons

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 - B_1 X)\} < 0. \quad (3.97)$$

L'inégalité (3.97) est équivalente à (3.92). Ceci complète la preuve de ce théorème. •

### Exemple

Considérons le système singulier fractionnaire (3.88) avec les valeurs numériques suivantes

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système (3.88) est régulier et causal, mais il n'est pas asymptotiquement stable car il a un mode fini à  $s = 0$ , en effet

$$\det(s^\alpha E - A) = \det \begin{bmatrix} s^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & s^\alpha + 1 & 0 \end{bmatrix} = s^\alpha(s^\alpha + 1) \neq 0.$$

En utilisant les deux matrices non singulières  $P$  et  $Q$  suivantes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nous obtenons

$$PEQ = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad PAQ = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et le système (3.88) est équivalent à

$$D^\alpha x_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \quad (3.98a)$$

$$0 = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (3.98b)$$

où  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  et  $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . On vérifie bien l'hypothèse 3.5.3.

La matrice  $A_1$  du système singulier fractionnaire (3.98) a une valeur propre stable  $-1$  et une valeur propre instable  $0$ , ainsi les deux LMIs (3.89) et (3.92) des théorèmes respectifs 3.5.3 et 3.5.4 du système singulier fractionnaire lorsque l'entrée  $u(t) = 0$  ne sont pas faisables pour tout  $0 < \alpha < 2$ . Ceci entraîne donc que le système singulier fractionnaire (3.98) n'est pas asymptotiquement stable lorsque  $u(t) = 0$  pour tout  $0 < \alpha < 2$ .

En effet, les réponses temporelles du système singulier fractionnaire (3.98) d'ordre  $\alpha = 1.98$  et  $\alpha = 0.96$  en boucle ouverte ( $u(t) = 0$ ) sont respectivement illustrées par les figures 3.7 et 3.8 pour la condition initiale  $x_1(0) = [1 \ 0]^T$ .

Par ailleurs, la LMI (3.89) du théorème 3.5.3 est faisable, ceci implique donc que le système singulier fractionnaire (3.98) d'ordre  $1 < \alpha < 2$  est asymptotiquement stabilisable.

Une solution faisable de la LMI (3.89) pour  $\alpha = 1.98$  est donnée par

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.0758 & 0.0548 \\ 0.0548 & 1.2209 \end{bmatrix}, \quad X = [17.4078 \ 1.1283].$$

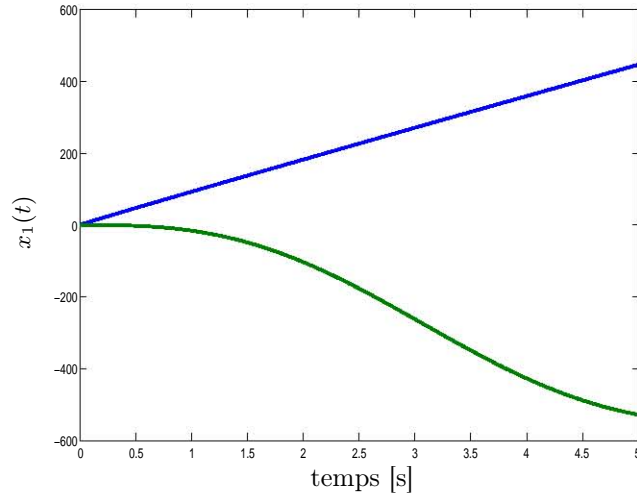


FIGURE 3.7: Réponse temporelle de  $x_1(t)$  en boucle ouverte pour  $\alpha = 1.98$ .

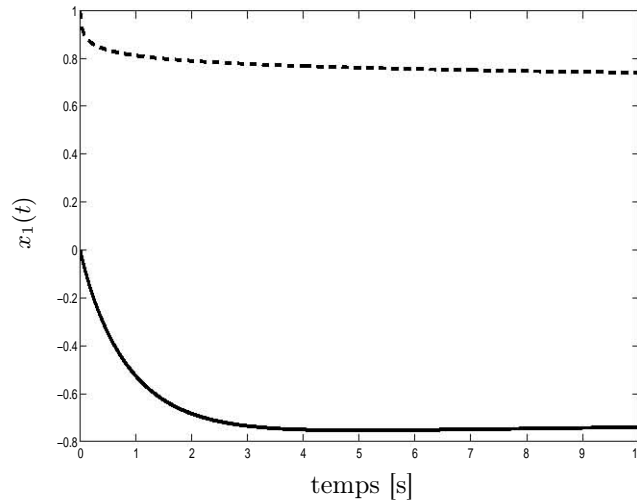


FIGURE 3.8: Réponse temporelle de  $x_1(t)$  en boucle ouverte pour  $\alpha = 0.96$ .

Nous obtenons ainsi le gain assurant la stabilité par retour d'état pour  $\alpha = 1.98$

$$K = [XP_0^{-1} \ 0]Q^{-1} = [16.1718 \ 0.1989 \ 0].$$

La réponse temporelle du système singulier fractionnaire (3.98) d'ordre  $\alpha = 1.98$  contrôlé par le retour d'état statique  $u(t) = -Kx(t)$  pour la condition initiale  $x_1(0) = [1 \ 0]^T$  est illustrée à la figure 3.9, ce qui montre que le système (3.98) est asymptotiquement stable.

De même, la LMI (3.92) du théorème 3.5.4 est faisable, ceci implique donc que le système singulier fractionnaire (3.98) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stabilisable.

Une solution faisable de la LMI (3.92) pour  $\alpha = 0.96$  est donnée par

$$P_0 = \begin{bmatrix} 87.1222 & -20.8922 \\ -20.8922 & 45.3377 \end{bmatrix}, \quad X = [21.8236 \ 0].$$

Nous obtenons ainsi le gain assurant la stabilité par retour d'état pour  $\alpha = 0.96$

$$K = [XP_0^{-1} \ 0]Q^{-1} = [0.2816 \ 0.1298 \ 0].$$

La réponse temporelle du système singulier fractionnaire (3.98) d'ordre  $\alpha = 0.96$  contrôlé par le retour d'état statique  $u(t) = -Kx(t)$  pour la condition initiale  $x_1(0) = [1 \ 0]^T$  est illustrée à la figure 3.10, ce qui montre que le système (3.98) est asymptotiquement stable. Ces deux simulations confirment l'efficacité de la méthode.

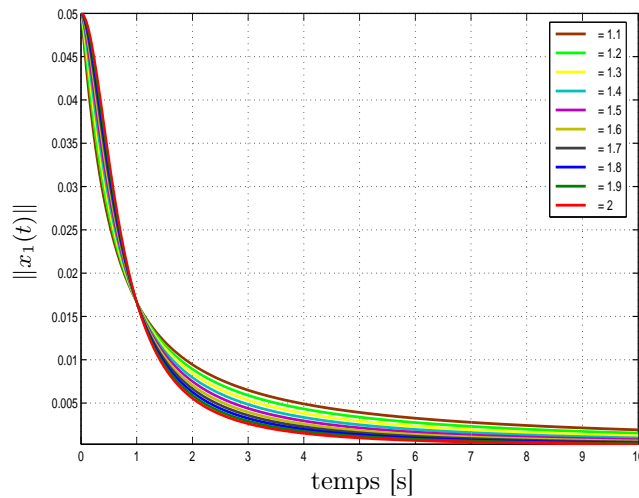


FIGURE 3.9: Réponse temporelle du système en boucle fermée pour  $1 < \alpha < 2$ .

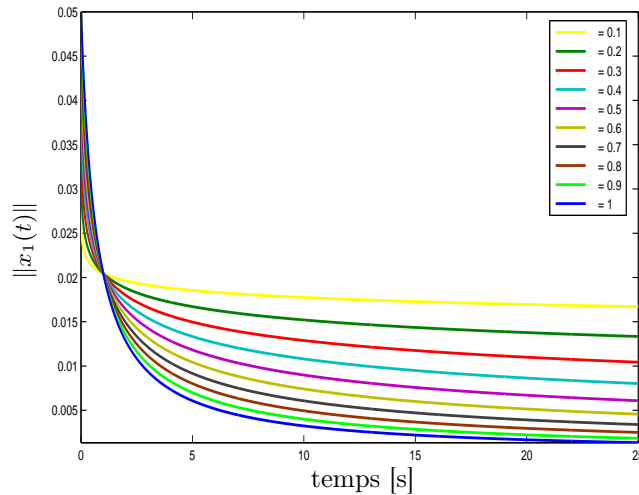


FIGURE 3.10: Réponse temporelle du système en boucle fermée pour  $0 < \alpha < 1$ .

### 3.5.2.2 Régularisation

Une loi de commande décrite dans la littérature sur les systèmes singuliers consiste en “un retour d'état proportionnel dérivé” (voir [CH99, Ibr09]). Ce retour d'état est décrit



par

$$u(t) = -LD^\alpha x(t) + v(t) \quad (3.99)$$

Les systèmes singuliers causaux comportent dans leurs présentations non seulement des relations dynamiques (systèmes standard) mais aussi des relations algébriques, le processus d'élimination des contraintes algébriques est appelé un problème de régularisation. L'élimination de ces contraintes est assurée par la commande (3.99), cette dernière n'est pas toujours facile à réaliser du point de vue pratique. Dans cette section, le problème de stabilisation asymptotique via le retour d'état proportionnel dérivé (3.99) du système singulier fractionnaire (3.88) avec  $0 < \alpha < 2$  est traité par des conditions LMIs suffisantes.

Nous commençons à étudier les conditions d'existence du gain  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que le système (3.88) contrôlé par le retour d'état (3.99) soit équivalent au système régulier fractionnaire suivant

$$E_1 D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (3.100)$$

où  $E_1 = E + BL$  est une matrice inversible, c'est-à-dire  $\det(E_1) \neq 0$ . Le retour d'état  $-LD^\alpha x(t)$  permet de régulariser le système (3.88) et la nouvelle commande  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  est utilisée ultérieurement pour assurer la stabilité. Le calcul du gain  $L$  s'obtient via la solution d'une inégalité matricielle linéaire.

Une condition nécessaire et suffisante de l'existence du gain de retour d'état  $L$  est telle que  $\det(E + BL) \neq 0$  (voir [Dai89]), c'est-à-dire

$$\text{rang}[E \ B] = n. \quad (3.101)$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour régulariser le système (3.88) par le retour d'état proportionnel dérivé (3.99).

**Théorème 3.5.5.** [Ibr09] *S'il existe deux matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que la LMI suivante soit satisfaite*

$$\begin{bmatrix} PE^T + EP + Y^T B^T + BY & P \\ & P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.102)$$

alors le système singulier fractionnaire (3.88) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est régularisé par le retour d'état proportionnel dérivé (3.99) avec  $L = YP^{-1}$ . ■

*Démonstration.* La matrice  $E_1 = E + BYP^{-1}$  est de plein rang si et seulement si  $E_1^T E_1 > 0$ . Cela signifie que  $(E_1^T E_1)^{-1}$  existe et par conséquent  $E_1^{-1}$  existe. Si  $E_1^T E_1 > 0$ , alors

$$E_1^T P^{-1} P P^{-1} E_1 > 0. \quad (3.103)$$

En remplaçant  $E_1$  by  $E + BYP^{-1}$  dans (3.103), nous avons

$$(E^T P^{-1} + P^{-1} Y^T B^T P^{-1}) P (P^{-1} E + P^{-1} B Y P^{-1}) > 0.$$

Pour les deux matrices  $M$  et  $N$  données, nous avons la relation suivante

$$M^T N + N^T M \leq M^T P M + N^T P^{-1} N$$

puis, si nous prenons  $M^T = E^T P^{-1} + P^{-1} Y^T B^T P^{-1}$  et  $N = I_n$ , nous obtenons

$$(E^T P^{-1} + P^{-1} Y^T B^T P^{-1}) P (P^{-1} E + P^{-1} B Y P^{-1}) \geq E^T P^{-1} + P^{-1} Y^T B^T P^{-1} + P^{-1} E + P^{-1} B Y P^{-1} - P^{-1}.$$

Si l'inégalité suivante est satisfaite

$$E^T P^{-1} + P^{-1} Y^T B^T P^{-1} + P^{-1} E + P^{-1} B Y P^{-1} - P^{-1} > 0$$

alors en multipliant à gauche et à droite de l'inégalité précédente, nous obtenons

$$P E^T + E P + Y^T B^T + B Y - P > 0 \quad (3.104)$$

et l'inégalité  $E_1^T P^{-1} E_1 > 0$  est vérifiée. La matrice  $E_1$  donc est inversible. Par le lemme de Schur (voir annexe B.3), l'inégalité (3.104) est équivalente à (3.102). Ceci complète la preuve de ce théorème. •

### Stabilisation du système fractionnaire régularisé

La synthèse du contrôleur  $v(t)$  permet d'assurer que le retour d'état (3.99) stabilise asymptotiquement le système singulier fractionnaire (3.88). Le gain  $L$  assure l'inversibilité de la matrice  $E + B L$ , ensuite la synthèse du gain  $v(t)$  est considérée comme un problème de stabilisation du système régulier fractionnaire de la forme

$$D^\alpha x(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

où  $A_1$  et  $B_1$  sont des matrices données dans les théorèmes 3.5.6 et 3.5.7. Les théorèmes suivants rassemblent les résultats de la régularisation et de la stabilisation du système singulier fractionnaire (3.88) avec  $0 < \alpha < 2$ .

**Cas**  $1 < \alpha < 2$

**Théorème 3.5.6.** [NZDR10a] *Le système singulier fractionnaire (3.88) avec  $1 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé*

$$u(t) = -Y P^{-1} D^\alpha x(t) + X P_0^{-1} x(t)$$

*est asymptotiquement stable s'il existe quatre matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que les deux LMIs suivantes soient satisfaites*

$$\begin{bmatrix} P E^T + E P + Y^T B^T + B Y & P \\ & P \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21}^T \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.105)$$

où

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = (A_1 P_0 + P_0 A_1^T + B_1 X + X^T B_1^T) \sin \theta$$

$$\Gamma_{21} = (P_0 A_1^T - A_1 P_0 + X^T B_1^T - B_1 X) \cos \theta$$

$A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$  et  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$ . ■

*Démonstration.* Le système singulier fractionnaire (3.88) avec  $1 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé

$$u(t) = -LD^\alpha x(t) + v(t)$$

peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x(t) = A_1 x(t) + B_1 v(t) \quad (3.106)$$

où  $A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$ ,  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$  et  $L = Y P^{-1}$ .

Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que la LMI (3.105) soit satisfaite et remplaçons  $v(t) = X P_0^{-1} x(t)$  dans (3.106).

Alors il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\tilde{A}P_0 + P_0\tilde{A}^T) \sin \theta & (\tilde{A}P_0 - P_0\tilde{A}^T) \cos \theta \\ (P_0\tilde{A}^T - \tilde{A}P_0) \cos \theta & (\tilde{A}P_0 + P_0\tilde{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 P_0 \sin \theta & A_1 P_0 \cos \theta \\ -A_1 P_0 \cos \theta & A_1 P_0 \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} B_1 X \sin \theta & B_1 X \cos \theta \\ -B_1 X \cos \theta & B_1 X \sin \theta \end{bmatrix} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

où  $\tilde{A} = A_1 + B_1 X P_0^{-1}$ .

L'inégalité (3.107) est équivalente à la LMI (3.105). •

*Remarque 3.5.1.* La LMI (3.102) doit être résolue d'abord par rapport à  $P$  et  $Y$  avant de résoudre la LMI (3.105). Bien entendu, les matrices dans la LMI (3.105) sont fonction de la solution de la LMI (3.102). □

**Cas**  $0 < \alpha < 1$

**Théorème 3.5.7.** *Le système singulier fractionnaire (3.88) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé*

$$u(t) = -Y P^{-1} D^\alpha x(t) + X P_0^{-1} x(t)$$

*est asymptotiquement stable s'il existe quatre matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que les deux LMIs suivantes soient satisfaites*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P E^T + E P + Y^T B^T + B Y & P \\ & P \end{bmatrix} &> 0 \\ \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 + B_1 X)\} &< 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160),  $A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$  et  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$ . ■

*Démonstration.* Le système singulier fractionnaire (3.88) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé

$$u(t) = -LD^\alpha x(t) + v(t)$$

peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x(t) = A_1 x(t) + B_1 v(t) \quad (3.109)$$

où  $A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$ ,  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$  et  $L = Y P^{-1}$ .

Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que la LMI (3.108) soit satisfaite et remplaçons  $v(t) = X P_0^{-1} x(t)$  dans (3.109).

Alors il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\tilde{A} P_{ij})\} < 0 \quad (3.110)$$

où  $\tilde{A} = A_1 + B_1 X P_0^{-1}$ , les matrices  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sont données par (2.160).

Posons  $P_{11} = P_{21} = P_0$  et  $P_{12} = P_{22} = 0$  dans (3.110), nous obtenons la relation suivante

$$\text{Sym}\{\Gamma_{11} \otimes (\tilde{A} P_0)\} + \text{Sym}\{\Gamma_{21} \otimes (\tilde{A} P_0)\} < 0. \quad (3.111)$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\tilde{A} P_0)\} < 0, \quad (3.112)$$

alors, en substituant  $\tilde{A} = A_1 + B_1 X P_0^{-1}$  dans (3.112), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 + B_1 X)\} < 0. \quad (3.113)$$

L'inégalité (3.113) est équivalente à (3.108). Ceci complète la preuve de ce théorème. •

*Remarque 3.5.2.* La remarque 3.5.1 s'applique également dans ce théorème 3.5.7. La LMI (3.102) doit être résolue d'abord par rapport à  $P$  et  $Y$  avant de résoudre la LMI (3.108). Bien entendu, les matrices dans la LMI (3.108) sont fonction de la solution de la LMI (3.102). □

### Exemple

Considérons le système singulier fractionnaire (3.88) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  avec les valeurs numériques suivantes tirées de [CBM07]

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3.2 & -1.6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0.8 & 2.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Les valeurs propres du système en boucle ouverte sont 2.9612 et  $-2.1612$ , ceci implique que le système (3.114) d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est instable en boucle ouverte.

La solution de la LMI (3.102) par rapport à  $P$  et  $Y$  est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0.5986 & -0.0460 & 0 \\ -0.0460 & 0.5065 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5065 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.1842 & 0.4144 & 0 \\ 0.0460 & -0.5065 & 0.5065 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi les nouvelles matrices suivantes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.2000 & -1.6000 & 1.0000 \\ -0.9912 & -0.4956 & -0.9469 \\ 0.8000 & 2.4000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.2566 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

**Cas**  $\alpha = 1.4$

Une solution faisable de la LMI (3.105) du théorème 3.5.6 pour  $\alpha = 1.4$  est donnée par

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.5508 & -0.4288 & 0.2680 \\ -0.4288 & 0.9854 & 0.1601 \\ 0.2680 & 0.1601 & 1.1415 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0.4782 & -0.4396 & 1.1347 \\ 0.5800 & -2.0218 & -1.3660 \end{bmatrix}.$$

A partir du théorème 3.5.6, le gain par retour d'état asymptotique stabilisant est obtenu par

$$K = XP_0^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2987 & -0.7665 & 1.1717 \\ 0.0541 & -1.8745 & -0.9464 \end{bmatrix}.$$

**Cas**  $\alpha = 0.5$

Une solution faisable de la LMI (3.108) du théorème 3.5.7 pour  $\alpha = 0.5$  est donnée par

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.3262 & -0.2498 & 0.1561 \\ -0.2498 & 1.3255 & 0 \\ 0.1561 & 0 & 1.3255 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1.3280 & -0.0472 & 23.3410 \\ -0.4873 & -30.9017 & -0.5935 \end{bmatrix}.$$

A partir du théorème 3.5.6, le gain par retour d'état asymptotique stabilisant est obtenu par

$$K = XP_0^{-1} = \begin{bmatrix} -5.4847 & -1.0693 & 18.2553 \\ -23.9342 & -27.8242 & 2.3715 \end{bmatrix}.$$

## 3.6 Stabilisation robuste des systèmes singuliers linéaires fractionnaires

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de la stabilisation asymptotique robuste via le retour d'état proportionnel dérivé pour les systèmes singuliers fractionnaires incertains avec une dérivée d'ordre  $0 < \alpha < 2$ . Le paramètre incertain supposé constant apparaît dans la matrice dynamique et est borné en norme.

Un exemple est également présenté pour valider l'efficacité de la méthode. Le problème de la stabilisation asymptotique robuste des systèmes singuliers fractionnaires reste un problème ouvert.

La structure de l'incertitude a été largement utilisée dans de nombreux documents pour traiter le problème de la stabilisation robuste dans le cas des systèmes linéaires non fractionnaires à temps continu ou discret (voir [Xd90, XYNL01]). Les conditions suffisantes pour la stabilisation asymptotique robuste des systèmes singuliers fractionnaires incertains d'ordre  $0 < \alpha < 2$  données dans cette section sont basées sur des inégalités matricielles linéaires (LMIs).

Nous considérons le système singulier fractionnaire incertain suivant

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = (A + \Delta_A)x(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.115)$$

où  $\Delta_A$  est la matrice contenant les paramètres incertains, elle est invariante et bornée en norme. Nous supposons que  $\Delta_A$  peut s'écrire sous la forme suivante

$$\Delta_A = M_A \Delta N_A \quad (3.116)$$

où  $M_A$  et  $N_A$  sont des matrices connues constantes. La matrice d'incertitudes paramétriques est notée  $\Delta$  et satisfait

$$\Delta \Delta^T \leq I. \quad (3.117)$$

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve de nos théorèmes.

**Lemme 3.6.1.** [KPZ90] *Pour toutes matrices  $X$  et  $Y$  de dimensions appropriées, nous avons*

$$X^T Y + Y^T X \leq \delta X^T X + \delta^{-1} Y^T Y \quad \forall \delta > 0. \quad (3.118)$$

□

Les deux théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes pour la stabilisation robuste des systèmes singuliers fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 2$ .

### 3.6.1 Cas $1 < \alpha < 2$

**Théorème 3.6.1.** [NZDR11] *Le système singulier fractionnaire incertain (3.115) d'ordre  $1 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé (3.99) où  $v(t) = Kx(t)$ , est asymptotiquement stable s'il existe quatre matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,*

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un réel scalaire  $\delta > 0$  tels que les deux LMIs suivantes soient satisfaites

$$\begin{bmatrix} PE^T + EP + Y^T B^T + BY & P \\ & P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.119)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \bullet & \bullet \\ N_A P_0 & 0 & -\delta I & \bullet \\ 0 & N_A P_0 & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.120)$$

où

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = (A_1 P_0 + P_0 A_1^T + B_1 X + X^T B_1^T) \sin \theta + \delta E_1^{-1} M_A (E_1^{-1} M_A)^T$$

$$\Gamma_{21} = (P_0 A_1^T - A_1 P_0 + X^T B_1^T - B_1 X) \cos \theta$$

$A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$ ,  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$  et  $L = Y P^{-1}$ .

En outre, le gain assurant la stabilité est donné par

$$K = X P_0^{-1} \quad (3.121)$$

■

*Démonstration.* Le système singulier fractionnaire incertain (3.115) contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé

$$u(t) = -L D^\alpha x(t) + K x(t)$$

peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x(t) = (A_1 + B_1 K) x(t) + E_1^{-1} \Delta_A x(t) \quad (3.122)$$

ce qui est équivalent à

$$D^\alpha x(t) = (A_1 + B_1 K + E_1^{-1} \Delta_A) x(t) = \tilde{A} x(t) \quad (3.123)$$

où  $\tilde{A} = A_1 + B_1 K + E_1^{-1} \Delta_A$ ,  $E_1 = (E + B Y P^{-1})$ ,  $A_1 = E_1^{-1} A$ ,  $B_1 = E_1^{-1} B$  et  $L = Y P^{-1}$ .

Supposons qu'il existe une matrice  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un réel scalaire constant  $\delta > 0$  tels que la LMI (3.120) soit satisfaite.

Alors il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A} P_0 + P_0 \tilde{A}^T) \sin \theta & (\tilde{A} P_0 - P_0 \tilde{A}^T) \cos \theta \\ (P_0 \tilde{A}^T - \tilde{A} P_0) \cos \theta & (\tilde{A} P_0 + P_0 \tilde{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{A} P_0 + P_0 \bar{A}^T) \sin \theta & (\bar{A} P_0 - P_0 \bar{A}^T) \cos \theta \\ (P_0 \bar{A}^T - \bar{A} P_0) \cos \theta & (\bar{A} P_0 + P_0 \bar{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} \\ + \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} E_1^{-1} \Delta_A P_0 \sin \theta & E_1^{-1} \Delta_A P_0 \cos \theta \\ -E_1^{-1} \Delta_A P_0 \cos \theta & E_1^{-1} \Delta_A P_0 \sin \theta \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (3.124)$$

où  $\bar{A} = A_1 + B_1K$ .

En substituant  $\Delta_A = M_A\Delta N_A$  dans (3.124) et en appliquant le lemme 3.6.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} E_1^{-1}\Delta_A P_0 \sin \theta & E_1^{-1}\Delta_A P_0 \cos \theta \\ -E_1^{-1}\Delta_A P_0 \cos \theta & E_1^{-1}\Delta_A P_0 \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} E_1^{-1}M_A\Delta N_A P_0 \sin \theta & E_1^{-1}M_A\Delta N_A P_0 \cos \theta \\ -E_1^{-1}M_A\Delta N_A P_0 \cos \theta & E_1^{-1}M_A\Delta N_A P_0 \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} E_1^{-1}M_A \sin \theta & E_1^{-1}M_A \cos \theta \\ -E_1^{-1}M_A \cos \theta & E_1^{-1}M_A \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix} \right\} \\
 &\leq \delta \begin{bmatrix} E_1^{-1}M_A \sin \theta & E_1^{-1}M_A \cos \theta \\ -E_1^{-1}M_A \cos \theta & E_1^{-1}M_A \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{-1}M_A \sin \theta & E_1^{-1}M_A \cos \theta \\ -E_1^{-1}M_A \cos \theta & E_1^{-1}M_A \sin \theta \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \delta^{-1} \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix}. \quad (3.125)
 \end{aligned}$$

Substituons (3.125) dans (3.124) pour tout  $\Delta\Delta^T \leq I$  et  $\delta > 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} (\tilde{A}P_0 + P_0\tilde{A}^T) \sin \theta & (\tilde{A}P_0 - P_0\tilde{A}^T) \cos \theta \\ (P_0\tilde{A}^T - \tilde{A}P_0) \cos \theta & (\tilde{A}P_0 + P_0\tilde{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} (\bar{A}P_0 + P_0\bar{A}^T) \sin \theta & (\bar{A}P_0 - P_0\bar{A}^T) \cos \theta \\ (P_0\bar{A}^T - \bar{A}P_0) \cos \theta & (\bar{A}P_0 + P_0\bar{A}^T) \sin \theta \end{bmatrix} \\
 &+ \delta \begin{bmatrix} E_1^{-1}M_A \sin \theta & E_1^{-1}M_A \cos \theta \\ -E_1^{-1}M_A \cos \theta & E_1^{-1}M_A \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{-1}M_A \sin \theta & E_1^{-1}M_A \cos \theta \\ -E_1^{-1}M_A \cos \theta & E_1^{-1}M_A \sin \theta \end{bmatrix}^T \\
 &\quad + \delta^{-1} \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix} < 0. \quad (3.126)
 \end{aligned}$$

Posons  $X = KP_0$  et substituons  $\bar{A} = A_1 + B_1K$  dans (3.126), nous avons

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21}^T \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} + \delta^{-1} \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_A P_0 & 0 \\ 0 & N_A P_0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.127)$$

Par le lemme de Schur (voir [BEFB94] et annexe B.3), l'inégalité (3.126) est équivalente à l'inégalité (3.120). Ceci complète ainsi la preuve du théorème 3.6.1. •

### 3.6.2 Cas $0 < \alpha < 1$

**Théorème 3.6.2.** [NZDR11] *Le système singulier fractionnaire incertain (3.115) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé (3.99) où  $v(t) = Kx(t)$  est asymptotiquement stable s'il existe quatre matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un réel scalaire  $\delta > 0$  tels que les deux LMIs suivantes soient satisfaites*



$$\begin{bmatrix} PE^T + EP + Y^T B^T + BY & P \\ & P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.128)$$

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.129)$$

où

$$\begin{aligned} W_{11} &= \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 + B_1 X)\} + \sum_{i=1}^2 \delta_i \{I_2 \otimes (E_1^{-1} M_A)(E_1^{-1} M_A)^T\} \\ W_{12} &= \begin{bmatrix} I_2 \otimes (N_A P_0)^T & I_2 \otimes (N_A P_0)^T \end{bmatrix} \\ W_{22} &= -\text{diag}(\delta_1, \delta_2) \otimes I_{2n} \\ A_1 &= (E + B Y P^{-1})^{-1} A \\ B_1 &= (E + B Y P^{-1})^{-1} B \\ L &= Y P^{-1}. \end{aligned}$$

Le gain assurant la stabilité est donné par

$$K = X P_0^{-1}. \quad (3.130)$$

■

*Démonstration.* Le système singulier fractionnaire incertain (3.115) contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé

$$u(t) = -L D^\alpha x(t) + K x(t)$$

peut s'écrire sous la forme

$$D^\alpha x(t) = (A_1 + B_1 K)x(t) + E_1^{-1} \Delta_A x(t) \quad (3.131)$$

ce qui est équivalent à

$$D^\alpha x(t) = (A_1 + B_1 K + E_1^{-1} \Delta_A)x(t) = \bar{A}x(t) \quad (3.132)$$

où  $\bar{A} = A_1 + B_1 K + E_1^{-1} \Delta_A$ ,  $E_1 = (E + B Y P^{-1})$  et  $L = Y P^{-1}$ .

Supposons qu'il existe une matrice  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un réel scalaire constant  $\delta > 0$  tels que la LMI (3.129) soit satisfaite.

Alors il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(\bar{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (\bar{A} P_{ij})\} < 0 \quad (3.133)$$

où  $\bar{A} = A_1 + B_1 K + E_1^{-1} \Delta_A$  et les matrices  $\Gamma_{ij} (i = 1, 2)$  sont données par (2.160).

Posons  $P_{11} = P_{21} = P_0$  et  $P_{12} = P_{22} = 0$  dans (3.133), nous obtenons la relation suivante

$$\text{Sym}\{\Gamma_{11} \otimes (\bar{A}P_0)\} + \text{Sym}\{\Gamma_{21} \otimes (\bar{A}P_0)\} < 0. \quad (3.134)$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\bar{A}P_0)\} < 0, \quad (3.135)$$

alors en substituant  $\bar{A} = A_1 + B_1K + E_1^{-1}\Delta_A$  avec  $K = XP_0^{-1}$  dans (3.135), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1P_0 + B_1X)\} + \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}\Delta_AP_0)\} < 0. \quad (3.136)$$

La condition  $\Delta\Delta^T \leq I$  implique que

$$(I_2 \otimes \Delta)(I_2 \otimes \Delta)^T = (I_2 \otimes \Delta)(I_2 \otimes \Delta^T) = (I_2 \otimes \Delta\Delta^T) < I. \quad (3.137)$$

D'autre part avec  $\Gamma_{ij}\Gamma_{ij}^T (i = 1, 2) = I_2$ , il résulte de la relation (3.137) et du lemme 3.6.1 que, pour tout réel scalaire  $\delta > 0$ , nous avons

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}\Delta_AP_0)\} = \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}M_A\Delta N_AP_0)\} \quad (3.138)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{(\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}M_A))(I_2 \otimes \Delta)(I_2 \otimes N_AP_0)\} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^2 \delta_i (\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}M_A))(I_2 \otimes \Delta)(I_2 \otimes \Delta)^T (\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}M_A))^T \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1} (I_2 \otimes N_AP_0)^T (I_2 \otimes N_AP_0). \end{aligned} \quad (3.140)$$

En utilisant la relation (3.137), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (E_1^{-1}\Delta_AP_0)\} &\leq \sum_{i=1}^2 \delta_i \{I_2 \otimes (E_1^{-1}M_A)(E_1^{-1}M_A)^T\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1} (I_2 \otimes N_AP_0)^T (I_2 \otimes N_AP_0). \end{aligned} \quad (3.141)$$

En substituant l'inégalité (3.141) dans (3.136), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\bar{A}P_0)\} &\leq \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1P_0 + B_1X)\} + \sum_{i=1}^2 \delta_i \{I_2 \otimes (E_1^{-1}M_A)(E_1^{-1}M_A)^T\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \delta_i^{-1} (I_2 \otimes N_AP_0)^T (I_2 \otimes N_AP_0). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Par le complément de Schur (voir [BEFB94] et annexe B.3), l'inégalité (3.142) est équivalente à (3.129). Ce qui montre que le système singulier fractionnaire incertain (3.115) contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé (3.99) est asymptotiquement stable. •

### 3.6.3 Exemple

Considérons le système singulier fractionnaire incertain (3.115) avec les valeurs numériques suivantes

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}, M_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.32 \end{bmatrix}, N_A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.21 \end{bmatrix}$$

où  $0 < \alpha < 2$  avec  $\Delta\Delta^T \leq I$ .

La paire  $(E, A)$  n'est pas régulière. Le but de cet exemple est la synthèse d'un gain de retour d'état (3.99) tel que le système singulier fractionnaire résultant de la régularisation soit asymptotiquement stable.

La solution de la LMI (3.119) par rapport à  $P$  et  $Y$  est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0.5700 & 0 \\ 0 & 0.5700 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.1425 & -0.0570 \\ -0.0570 & 1.8240 \end{bmatrix}.$$

Cela signifie par ailleurs que le système peut être régularisé par le retour d'état proportionnel dérivé, nous obtenons les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.3100 & 0.6550 \\ -0.1747 & -0.0873 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1.3974 & 0.0437 \\ 0.4803 & 0.3275 \end{bmatrix}.$$

Une solution faisable de la LMI (3.120) du théorème 3.6.1 pour  $\alpha = 1.8$  est donnée par

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1660 & -0.0586 \\ -0.0586 & 0.4535 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -0.7483 & -0.2914 \\ -0.2914 & -3.4438 \end{bmatrix}, \delta = 0.0297.$$

A partir du théorème 3.6.1, le gain par retour d'état assurant la stabilité asymptotique est obtenu par

$$K = XP_0^{-1} = \begin{bmatrix} -4.9624 & -1.2840 \\ -4.6508 & -8.1943 \end{bmatrix}.$$

## 3.7 Observateurs pour les systèmes linéaires fractionnaires

La synthèse d'observateur a reçu une attention particulière et a été largement traitée dans la littérature en automatique et en traitement du signal depuis quelques décennies. Elle a un intérêt théorique considérable et présente des applications dans beaucoup de domaines tels que les problèmes de détection et de diagnostic de défauts, de synchronisation etc... Dans cette section, nous proposons la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires fractionnaires. L'approche utilisée est basée sur la résolution d'un système d'équations Sylvester.

### 3.7.1 Position du problème

Nous considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 2$  suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.143)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la mesure,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices connues de dimensions appropriées.

Dans le cas d'un système linéaire à dérivée d'ordre entier, il existe un observateur pour le système linéaire à dérivée d'ordre entier si et seulement si ce système est détectable (voir définition 1.3.4). Ce résultat se généralise naturellement dans le cas des systèmes d'ordre fractionnaire (3.143) car l'ordre de dérivation n'atteint pas les matrices  $A$  et  $C$  [Mat96b, MAN96, MAN97], c'est-à-dire si et seulement si (voir définition 2.7.6)

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \sigma I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \sigma \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad |\arg(\sigma)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (3.144)$$

L'observateur d'ordre plein suivant ( $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ )

$$\begin{cases} D^\alpha \hat{x}(t) = N\hat{x}(t) + Ly(t) + Gu(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.145)$$

a pour erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.146)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= D^\alpha x(t) - D^\alpha \hat{x}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - N\hat{x}(t) - Ly(t) - Gu(t) \\ &= Ne(t) + (A - N - LC)x(t) + (B - G)u(t) \end{aligned} \quad (3.147)$$

Il faut donc qu'il existe des matrices  $N$ ,  $L$  et  $G$  telles que

$$A - N - LC = 0 \quad (3.148)$$

$$B = G \quad (3.149)$$

La matrice  $N$  permettant d'assurer la stabilité de l'équation différentielle fractionnaire (3.150), et la dynamique de l'erreur d'observation (3.146) devient

$$D^\alpha e(t) = Ne(t). \quad (3.150)$$

Cette erreur d'observation est donc indépendante de  $x(t)$  et  $u(t)$  si

$$N = A - LC \quad (3.151a)$$

$$B = G \quad (3.151b)$$

### 3.7.2 Stabilité de l'erreur d'observation : cas $1 < \alpha < 2$

La stabilité asymptotique de l'erreur d'observation fractionnaire avec  $1 < \alpha < 2$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.7.1.** *Il existe un observateur fractionnaire avec  $1 < \alpha < 2$  de la forme (3.145) assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation si et seulement si le théorème 3.2.3 est vérifié en remplaçant respectivement les matrices  $A$ ,  $B$  et  $L$  par  $A^T$ ,  $C^T$  et  $-L^T$ .*

*Par ailleurs, la gain assurant la stabilité asymptotique est donné par (voir théorème 3.2.3)*

$$L^T = -XP^{-1}.$$

■

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est donnée directement en remplaçant respectivement les matrices  $A$ ,  $B$  et  $L$  par  $A^T$ ,  $C^T$  et  $-L^T$  dans le théorème 3.2.3. •

### 3.7.3 Stabilité de l'erreur d'observation : cas $0 < \alpha < 1$

La stabilité asymptotique de l'erreur d'observation fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.7.2.** *Il existe un observateur fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$  de la forme (3.145) assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation si et seulement si le théorème 3.2.4 est vérifié en remplaçant respectivement les matrices  $A$ ,  $B$  et  $L$  par  $A^T$ ,  $C^T$  et  $-L^T$ .*

*Par ailleurs, la gain assurant la stabilité asymptotique est donné par (voir théorème 3.2.4)*

$$L^T = -XQ^{-1}.$$

■

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est donnée directement en remplaçant respectivement les matrices  $A$ ,  $B$  et  $L$  par  $A^T$ ,  $C^T$  et  $-L^T$  dans le théorème 3.2.4. •

## 3.8 Observateurs pour les systèmes singuliers linéaires fractionnaires

Dans cette section, nous proposons la synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers linéaires à dérivée d'ordre non entier. L'approche utilisée est basée sur la résolution d'un système d'équations Sylvester. Les gains de l'observateur sont obtenus par la résolution des inégalités matricielles linéaires LMI. L'avantage de cette méthode est que d'une part l'erreur d'observation ne dépend pas explicitement de l'état et de la commande du système, et d'autre part, qu'elle unifie la synthèse d'observateurs de différents ordres (observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal) pour cette classe de systèmes singuliers fractionnaires.

### 3.8.1 Position du problème

Nous considérons le système singulier linéaire fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 2$  suivant

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.152)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la mesure,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices connues de dimensions appropriées. La matrice  $E \in \mathbb{R}^{n_E \times n}$  et lorsque  $n_E = n$  la matrice  $E$  est singulière ( $\det(E) = 0$ ).

Soit la matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{r_1 \times n_E}$  de rang plein lignes, telle que

$$\Phi E = 0 \quad (3.153)$$

alors, à partir de l'équation (3.152), nous obtenons

$$\Phi Bu(t) = -\Phi Ax(t).$$

**Hypothèse 3.8.1.** *Supposons que*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = n.$$

□

Comme dans [DZH96, DBB08, Dar09], on constate que l'hypothèse 3.8.1 est équivalente à l'observabilité impulsionnelle, c'est-à-dire [Dai89]

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} + \text{rang } E = n + \text{rang } E.$$

Considérons l'observateur d'ordre réduit pour le système (3.152)

$$\begin{cases} D^\alpha \eta(t) = N\eta(t) + Jy(t) + Hu(t) \\ \hat{x}(t) = P\eta(t) - Q\Phi Bu(t) + Fy(t) \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.154)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^k$  est le vecteur d'état de l'observateur avec  $k \leq n$  et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  l'estimé de  $x(t)$ . Les matrices  $N$ ,  $J$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $Q$ , et  $F$  sont des matrices de dimensions appropriées à déterminer pour que  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$ .

La proposition suivante donne les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur (3.154).

**Proposition 3.8.1.** *Sous l'hypothèse 3.8.1, le système (3.154) est un observateur asymptotique, c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{x}(t) - x(t) = 0$  avec  $0 < \alpha < 2$ , s'il existe une matrice  $T$  telle que*

- I)  $D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t)$  soit asymptotiquement stable,
- II)  $NTE - TA + JC = 0$ ,
- III)  $H = TB$ ,

$$IV) \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = I_n. \quad \square$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon(t) = \eta(t) - TE x(t)$ , l'erreur entre  $\eta(t)$  et  $TE x(t)$  alors en appliquant la dérivée fractionnaire, nous obtenons

$$D^\alpha \varepsilon(t) = D^\alpha \eta(t) - TED^\alpha x(t) \quad (3.155)$$

ce qui est équivalent à

$$D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) + (NTE + JC - TA)x(t) + (H - TB)u(t). \quad (3.156)$$

D'autre part, en utilisant la définition de  $\varepsilon(t)$ , nous avons

$$\widehat{x}(t) = P\varepsilon(t) + \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} x(t). \quad (3.157)$$

Si les items (I) – (III) de la proposition 3.8.1 sont satisfaits alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) - TE x(t) = 0$ . De plus si l'item (IV) est satisfait, alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{x}(t) - x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\varepsilon(t) = 0$ .

Ainsi l'erreur d'observation est indépendante de  $u(t)$  et  $x(t)$  et nous obtenons l'erreur d'observation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) \\ e(t) = P\varepsilon(t) \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.158)$$

Les items (II) – (IV) de la proposition 3.8.1 correspondent à un système d'équations de Sylvester. Soit  $\Psi$  une matrice arbitraire de dimension appropriée et définissons la matrice suivante  $T' = T - \Psi\Phi$ , alors le système d'équations de Sylvester devient [DBB08]

$$\begin{bmatrix} N & -\Psi & J \\ P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'A \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\Phi E = 0$ . L'équation (3.159) a une solution si et seulement

si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} T'E \\ \Phi A \\ C \\ T'A \\ I_n \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} T'E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = n = \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}. \quad (3.160)$$

La synthèse de l'observateur de dimension  $q$  se réduit ainsi à déterminer les matrices  $T'$ ,  $N$ ,  $\Psi$ ,  $J$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $F$  telles que l'équation (3.159) et les items (I) – (III) de la proposition 3.8.1 soient satisfaits. •

*Remarque 3.8.1.* Nous pourrions remarquer que la dimension de l'observateur (3.154) est  $k \leq n$ , ainsi la présente approche unifie la synthèse des observateurs d'ordre plein ( $k = n$ ) et d'ordre réduit ( $k = n - p$ ). □

### 3.8.2 Paramétrage des matrices et synthèse de l'observateur

Le lemme suivant montre, sous l'hypothèse 3.8.1, comment nous pouvons résoudre le système d'équations de Sylvester (3.159), c'est-à-dire obtenir les matrices  $T'$ ,  $N$ ,  $\Psi$ ,  $J$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $F$  solutions de l'équation (3.159).

**Lemme 3.8.1.** [DBB08, Dar09] Soit  $R \in \mathbb{R}^{k \times n}$  une matrice de rang plein lignes et

définissons la matrice  $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$  telle que  $\text{rang} \Sigma = n$ , alors sous l'hypothèse 3.8.1, la

solution générale de l'équation (3.159) est donnée par

$$N = \mathbb{A} - Z_1 \mathbb{B} - Y_1 \mathbb{C} \quad (3.161)$$

$$T = T' + \Psi \Phi \quad (3.162)$$

$$P = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} - Y_2 \mathbb{C} \quad (3.163)$$

et

$$\begin{bmatrix} -\Psi & J \\ Q & F \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} T'A \\ I_n \end{bmatrix} \Omega^+ - \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} (I_{k+r_1+p} - \Omega \Omega^+) \begin{bmatrix} K \\ I_{r_1+p} \end{bmatrix} \right) \quad (3.164)$$

où  $T' = \Lambda_1 - Z_1 \Delta_1$ ,  $K = \Lambda_2 - Z_1 \Delta_2$ ,  $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda_1 = R \Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda_2 = R \Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n+p} \end{bmatrix}$ ,

$\Delta_1 = -(I_{n+r_1+p} - \Omega \Omega^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta_2 = -(I_{n+r_1+p} - \Omega \Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n+p} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A} = \Lambda_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$ ,



$\mathbb{B} = \Lambda_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{C} = (I_{k+p+r_1} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$  et avec  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Z_1$  sont des matrices arbitraires de dimensions appropriées.  $\square$

Les conditions d'existence des matrices paramétriques  $Y_1$  et  $Z_1$  sont telles que l'observateur (3.154) avec  $1 \leq \alpha < 2$  ou  $0 < \alpha < 1$  soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire que la condition (I) de la proposition 3.8.1 soit satisfaite.

Le problème revient alors à étudier la stabilité asymptotique du système fractionnaire  $D^\alpha \varepsilon(t) = N \varepsilon(t)$  d'ordre  $0 < \alpha < 2$  car quand  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , l'erreur d'observation  $e(t) \rightarrow 0$ , ceci assure ainsi la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (3.158).

### 3.8.3 Stabilité de l'erreur d'observation : cas $1 < \alpha < 2$

Sous l'hypothèse 3.8.1, la stabilité asymptotique du système fractionnaire  $D^\alpha \varepsilon(t) = N \varepsilon(t)$  avec  $1 < \alpha < 2$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.8.1.** *Sous l'hypothèse 3.8.1, il existe un observateur asymptotiquement stable de la forme (3.154) où  $1 < \alpha < 2$ , c'est-à-dire la condition (I) de la proposition 3.8.1 est satisfaite, si et seulement s'il existe les matrices  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que*

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.165)$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \Pi_{22} = (P_0 \mathbb{A} + \mathbb{A}^T P_0 - W \mathbb{X} - \mathbb{X}^T W^T) \sin \theta \\ \Pi_{12} &= (\mathbb{A}^T P_0 - P_0 \mathbb{A} + W \mathbb{X} - \mathbb{X}^T W^T) \cos \theta \end{aligned}$$

$$W_1 = W P_0^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Y_1 \end{bmatrix}, \mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix} \text{ et } \theta = \pi - \alpha \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

*Démonstration.* A partir de la définition 2.7.6, nous pouvons vérifier que la condition nécessaire telle que la condition (I) de la proposition 3.8.1 soit satisfaite en utilisant la relation (3.161) est que la paire  $\left( \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}, \mathbb{A} \right)$  soit détectable. Supposons maintenant qu'il existe les matrices  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que la LMI (3.165) soit satisfaite. Il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(N))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (P_0 N + N^T P_0) \sin \theta & -(P_0 N - N^T P_0) \cos \theta \\ (P_0 N - N^T P_0) \cos \theta & (P_0 N + N^T P_0) \sin \theta \end{bmatrix} &= \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} P_0 \mathbb{A} \sin \theta & -P_0 \mathbb{A} \cos \theta \\ P_0 \mathbb{A} \cos \theta & P_0 \mathbb{A} \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} -W \mathbb{X} \sin \theta & W \mathbb{X} \cos \theta \\ -W \mathbb{X} \cos \theta & -W \mathbb{X} \sin \theta \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (3.166) \end{aligned}$$

où  $W_1 = WP_0^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Y_1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}$  et  $\theta = \pi - \alpha \frac{\pi}{2}$ .

L'inégalité (3.166) est équivalente à (3.165). La matrice  $Y_2$  n'influe ni sur la stabilité, ni sur l'existence des solutions de la relation (3.159). Pour déterminer les autres matrices de l'observateur, on choisit une matrice  $Y_2$  arbitraire et on utilise la relation (3.164).

Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème. •

### 3.8.4 Stabilité de l'erreur d'observation : cas $0 < \alpha < 1$

Sous l'hypothèse 3.8.1, la stabilité asymptotique du système fractionnaire  $D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t)$  avec  $0 < \alpha < 1$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.8.2.** *Sous l'hypothèse 3.8.1, il existe un observateur de la forme (3.154) où  $0 < \alpha < 1$  assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (c'est-à-dire la condition (I) de la proposition 3.8.1 est satisfaite) si et seulement s'il existe les matrices  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que*

$$\sum_{i=1}^2 (\text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\mathbb{A}^T P_0)\} - \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\mathbb{X}^T L)\}) < 0 \quad (3.167)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160),  $W_1^T = LP_0^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Y_1 \end{bmatrix}^T$  et  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}$ . ■

*Démonstration.* A partir de la définition 2.7.6, nous pouvons vérifier que la condition nécessaire telle que la condition (I) de la proposition 3.8.1 soit satisfaite en utilisant la relation (3.161) est que la paire  $\left( \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}, \mathbb{A} \right)$  soit détectable.

Supposons qu'il existe les matrices  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que (3.167) soit satisfaite.

Il résulte du théorème 2.6.1 que  $|\arg(\text{spec}(N))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ , ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{ij} \otimes (N^T P_{ij})\} < 0 \quad (3.168)$$

où  $N = \mathbb{A} - W_1 \mathbb{X}$ ,  $W_1 = \begin{bmatrix} Z_1 & Y_1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}$  et les matrices  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sont données par (2.160).

En prenant  $P_{11} = P_{21} = P_0$ ,  $P_{12} = P_{22} = 0$  dans (3.168), nous pouvons ainsi conclure si

$$\text{Sym}\{\Gamma_{11} \otimes (N^T P_0)\} + \text{Sym}\{\Gamma_{21} \otimes (N^T P_0)\} < 0 \quad (3.169)$$

alors le système fractionnaire  $D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t)$  d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable.

Substituons  $N = \mathbb{A} - W_1 \mathbb{X}$  dans (3.169) et posons  $L = W_1^T P_0$ , nous obtenons

$$\sum_{i=1}^2 (\text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\mathbb{A}^T P_0)\} - \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\mathbb{X}^T L)\}) < 0. \quad (3.170)$$

L'inégalité (3.170) est équivalente à (3.167). La matrice  $Y_2$  n'influe ni sur la stabilité, ni sur l'existence des solutions de la relation (3.159). Pour déterminer les autres matrices de l'observateur, on choisit une matrice  $Y_2$  arbitraire et on utilise la relation (3.164). Ceci complète la preuve de ce théorème •

L'algorithme de synthèse de cet observateur est donné comme suit (voir [DBB08, Dar09]).

### 3.8.5 Algorithme de synthèse

Sous l'hypothèse 3.8.1, la synthèse de l'observateur (3.154) peut être obtenue comme suit.

- étape 1 : Trouver une matrice  $R$  telle que  $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$  est de rang plein colonnes.
- étape 2 : Calculer  $\Lambda_1, \Delta_1, \Lambda_2, \Delta_2, \mathbb{A}, \mathbb{B}, P$  et  $\mathbb{C}$ .
- étape 3 : Résoudre la LMI (3.165) ou (3.167) selon l'ordre de dérivation, en déduire les matrices paramétriques  $Z_1$  et  $Y_1$ .
- étape 4 : Calculer  $T' = \Lambda_1 - Z_1 \Delta_1, K = \Lambda_2 - Z_1 \Delta_2, N$  et en déduire  $[-\Phi \ J]$  et  $[Q \ F]$  après avoir choisi  $Y_2$ .
- étape 5 : Calculer  $T = T' + \Psi \Phi$ , alors en déduire  $H = TB$ .

### 3.8.6 Synthèse d'observateurs d'ordre minimal, d'ordre réduit et d'ordre plein

Dans cette section, nous utilisons les résultats ci-dessus pour dériver les observateurs d'ordre minimal, d'ordre réduit et d'ordre plein.

- 1) **Observateurs d'ordre minimal** : Soit  $\text{rang } E = r$  et  $\Phi \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$  une matrice de rang plein lignes telle que  $\Phi E = 0$  avec  $\text{rang } \Phi = r_1 = n - r = \text{rang } \Phi A$ . Alors la dimension de l'observateur d'ordre minimal est  $k = n - r_1 - p$  et nous obtenons dans ce cas

$$\Sigma^+ = \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ainsi, d'après les résultats ci-dessus, nous avons  $\mathbb{C} = 0$  et la matrice  $N$  devient

$$N = \mathbb{A} - Z_1 \mathbb{B}$$

$$\text{où } \mathbb{A} = \Lambda_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbb{B} = \Lambda_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La synthèse de l'observateur revient à la détermination de la matrice paramétrique  $Z_1$  telle que la condition (I) de la proposition 3.8.1 soit satisfaite. Cette matrice peut être déterminée en résolvant la LMI (3.165) ou (3.167) selon l'ordre de dérivation avec la contrainte  $\mathbb{C} = 0$  et le reste de la synthèse peut être obtenu à partir de l'algorithme donné dans la section 3.8.5.

- 2) **Observateurs d'ordre réduit** : Ce cas correspond à l'observation de l'état complet à l'aide d'un observateur d'ordre  $k = n - p$ . Il peut être obtenu lorsque  $\Phi = 0$  et dans ce cas l'hypothèse 3.8.1 devient  $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ . Ceci implique que les

matrices  $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  et  $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix}$  sont non singulières et  $\Omega^+ = \Omega^{-1}$ . La synthèse de l'observateur d'ordre réduit peut ainsi être obtenue comme dans le cas minimal présenté ci-dessus.

- 3) **Observateurs d'ordre plein** : Ce cas correspond à l'estimation de l'état complet à l'aide d'un observateur d'ordre plein, ce qui correspond à  $k = n$  et la matrice

$$R = I_n, \text{ ainsi nous obtenons sous l'hypothèse 3.8.1, } \text{rang } \Omega = n \text{ avec } \Omega = \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \\ 0 \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$$

$$\text{et les résultats suivants } \Sigma^+ = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}^+ = [I_n \ 0], \mathbb{A} = \Lambda_1 A, \mathbb{B} = \Delta_1 A, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$$

et  $P = I_n$ .

$$\text{Avec } \Lambda_1 = \Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_1 = -(I_{n+r_1+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_2 = \Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r_1+p} \end{bmatrix}, \Delta_2 =$$

$$-(I_{n+r_1+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r_1+p} \end{bmatrix}, [Q \ F] = \begin{bmatrix} R \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K \\ I_{r_1+p} \end{bmatrix} \text{ et } K = \Lambda_2 - Z_1 \Delta_2.$$

Comme dans le cas ci-dessus, la synthèse de l'observateur peut être obtenu par l'algorithme donné dans la section 3.8.5.

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la synthèse de lois de commande par retour d'état statique et par retour de sortie statique pour les systèmes linéaires fractionnaires. Pour cela, deux approches ont été considérées : la première dérive d'un placement de pôles et la deuxième donne une condition nécessaire et suffisante grâce à l'utilisation d'une LMI dans le cas où  $1 < \alpha \leq 2$  et d'une  $\mathcal{GLMI}$  dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ .

Un résultat sur la commande basée sur un observateur dans le cas d'un système linéaire

---

non entier a été présenté, ce résultat dérive du principe de séparation et des propriétés de la fonction de Mittag-Leffler.

Nous avons proposé des conditions suffisantes de stabilisation asymptotique robuste en présence des incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives et des conditions suffisantes de stabilisation asymptotique robuste en présence des incertitudes non linéaires paramétriques bornées en norme pour les systèmes linéaires fractionnaires.

Des conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation des systèmes singuliers fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 2$  ont été proposées dans ce chapitre. Les conditions de stabilité de ces systèmes singuliers fractionnaires sont obtenues grâce à une décomposition du système en deux sous-systèmes lent et rapide par la forme canonique de Weierstrass. La stabilité du système se résume au fait que la stabilité du sous-système lent grâce notamment aux conditions de régularité et de causalité. Les résultats de la stabilisation sont obtenus par des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs).

La deuxième approche utilisée pour la stabilisation des systèmes singuliers fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 2$  est basée sur la technique de régularisation. On régularise dans un premier temps le système via une loi de commande par retour d'état proportionnel et dérivé, cette même loi de commande permet de stabiliser le système. Le seul inconvénient c'est que la commande utilisée est une commande singulière qui fait appel à la dérivée fractionnaire de l'état qui n'est pas souvent accessible.

Nous nous sommes intéressés également au problème de la stabilisation asymptotique robuste via un retour d'état proportionnel dérivé pour les systèmes singuliers fractionnaires incertains d'ordre  $0 < \alpha < 2$ . Les paramètres incertains, supposés constants, apparaissent dans la matrice dynamique et sont bornés en norme. La stabilisation et la stabilisation robuste des systèmes singuliers linéaires fractionnaires ont été abordées comme une extension de systèmes linéaires fractionnaires.

Enfin, nous avons proposé des observateurs pour les systèmes linéaires fractionnaires et les systèmes singuliers linéaires fractionnaires.



# Chapitre 4

## Stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>147</b>
<b>4.2</b>	<b>Présentation des systèmes affines non linéaires fractionnaires</b>	<b>149</b>
<b>4.3</b>	<b>Stabilisation des systèmes non linéaires affines fractionnaires</b>	<b>150</b>
4.3.1	Approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est linéaire	150
4.3.2	Approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est non linéaire	154
4.3.3	Approche LMI lorsque la dérive est linéaire	157
<b>4.4</b>	<b>Commande basée sur un observateur pour les systèmes affines non linéaires fractionnaires</b>	<b>158</b>
<b>4.5</b>	<b>Stabilisation robuste des systèmes non linéaires fractionnaires</b>	<b>160</b>
<b>4.6</b>	<b>Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires</b>	<b>162</b>
4.6.1	Approche Mittag-Leffler	162
4.6.2	Approche LMI	163
<b>4.7</b>	<b>Stabilisation robuste des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires</b>	<b>164</b>
<b>4.8</b>	<b>Observateurs pour les systèmes non linéaires fractionnaires</b>	<b>166</b>
<b>4.9</b>	<b>Observateurs pour les systèmes singuliers non linéaires fractionnaires</b>	<b>169</b>
4.9.1	Position du problème	169
4.9.2	Paramétrage des matrices et synthèse de l'observateur	171
4.9.3	Stabilité de l'erreur d'observation	172
<b>4.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>173</b>

---

### 4.1 Introduction

Récemment, le calcul fractionnaire a été introduit à l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires [LCP09, LCP10]. La méthode de Lyapunov fractionnaire directe basée

sur la stabilité au sens de Mittag-Leffler, généralisée ou non, [LCPC08, LCP09, LCP10] et sur la définition d'une fonction spécifique de Lyapunov reposant sur le concept d'un opérateur d'intégration fractionnaire caractérisé par une fréquence distribuée [TMSO11] a été proposée. Ce sujet reste ouvert.

Dans [WWL08], Wen *et al.* ont donné des conditions de stabilisation asymptotique d'une classe de systèmes non linéaires fractionnaires par l'utilisation du lemme standard de Gronwall-Bellman et des propriétés de la fonction de Mittag-Leffler.

L'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires fractionnaires a été traitée dans l'une des applications importantes du calcul fractionnaire : la théorie du chaos [CDFP10, Pet10, Pet08a]. Ainsi, beaucoup de travaux ont abordé la stabilisation ou la synchronisation des systèmes non linéaires fractionnaires chaotiques [HLQ95a, HLQ95b, AS03, LC04, AEA04].

Nous proposons dans ce chapitre une méthode de stabilisation pour une classe de systèmes non linéaires fractionnaires par l'utilisation de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. Ce dernier permet, sous certaines conditions adéquates, d'assurer la stabilisation asymptotique du système non linéaire fractionnaire considéré par retour d'état statique et par retour de sortie statique.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les systèmes non linéaires affines fractionnaires étudiés (bilinéaires et multilinéaires). Puis nous proposons :

- la stabilisation asymptotique de ces systèmes par l'approche Mittag-Leffler dans deux cas : le cas où la dérive est linéaire avec  $0 < \alpha < 1$  et le cas où la dérive est non linéaire avec  $0 < \alpha < 2$  en utilisant respectivement la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un paramètre et la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres.
- la stabilisation asymptotique de ces systèmes non linéaires fractionnaires avec une dérive linéaire via l'approche *GLMI* avec  $0 < \alpha < 1$ .

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la commande basée sur un observateur pour une classe de systèmes non linéaires fractionnaires. L'approche utilisée est basée sur le principe de la séparation et sur les propriétés de la fonction de Mittag-Leffler.

Dans la troisième partie de ce chapitre, des conditions suffisantes de stabilisation robuste pour cette classe de systèmes non linéaires fractionnaires en présence d'incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives ont été proposées via une approche LMI combinée avec la généralisation de lemme de Gronwall-Bellman.

La stabilisation asymptotique et la stabilisation asymptotique robuste des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires sont traitées dans la quatrième partie de ce chapitre grâce aux propriétés de la fonction de Mittag-Leffler. Une méthode basée sur la régularisation de ces systèmes est proposée.

Enfin, la cinquième partie de ce chapitre est dédiée à l'étude des observateurs dans le cas des systèmes non linéaires fractionnaires et des systèmes non linéaires singuliers fractionnaires. Des conditions suffisantes sont données pour garantir la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation. L'approche utilisée est basée sur la résolution d'un système d'équations de Sylvester et sur l'utilisation de la nouvelle généralisation de lemme de Gronwall-Bellman. L'avantage de cette approche est que l'observateur obtenu unifie la synthèse d'observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal.



## 4.2 Présentation des systèmes affines non linéaires fractionnaires

Les systèmes affines fractionnaires étudiés dans ce mémoire sont de systèmes qui peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des commandes (mesurées) et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des mesures,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées et  $D^\alpha$  est l'opérateur de dérivée fractionnaire défini dans (2.36).

La fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 4.2.1.** *Le système affine non linéaire fractionnaire (4.1) satisfait aux conditions suivantes*

1. La fonction  $g_i(x(t))$  est mesurable avec  $g_i(0) = 0$  (pour tout  $i = 1, \dots, m$ ).
2. Pour tout  $i = 1, \dots, m$ , il existe un entier  $q \geq 1$ , tel que

$$\|g_i(x(t))\| \leq \mu_i \|x(t)\|^q \quad (4.2)$$

où  $\mu_i$  sont des constantes positives.

3. La paire  $(A, B)$  est stabilisable (voir définition 2.7.5), c'est-à-dire toutes les valeurs propres instables de la matrice  $A$  sont commandables.
4. La paire  $(C, A)$  est détectable (voir définition 2.7.6), c'est-à-dire toutes les valeurs propres instables de la matrice  $A$  sont observables.  $\square$

Dans la suite de ce mémoire, nous définissons  $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$ .

Dans le système (4.1), la dérive est linéaire. Dans la section 4.3.2, nous étendrons les résultats de stabilisation du système (4.1) au cas où la dérive est non linéaire comme dans le système suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + \psi(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (4.3)$$

où la fonction non linéaire  $\psi(x(t))$  est bornée.

Les simulations numériques seront faites avec les systèmes bilinéaires fractionnaires donnés par

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m u_i A_i x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.4)$$

qui correspondent à une classe particulière des systèmes affines non linéaires fractionnaires décrite par (4.1).

Pour le système affine non linéaire fractionnaire (4.1), on ne considère que le cas où  $0 < \alpha < 1$ . En effet, cette contrainte sur l'ordre de dérivation  $\alpha$  permet de borner explicitement la norme de l'état initial  $x_0$  dans les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 afin que la contrainte (4.16) due à la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un paramètre soit vérifiée. Par contre, pour le système non linéaire fractionnaire (4.3), nous devons majorer les fonctions non linéaires  $g_i(x(t))$  et  $\psi(x(t))$ , ce qui nécessite l'utilisation de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman avec deux paramètres. Il s'ensuit que dans les théorèmes 4.3.3 et 4.3.4, on ne peut pas borner explicitement la norme de l'état initial  $x_0$  afin de garantir que  $\Phi(t) > 0$  dans les théorèmes 4.3.3 et 4.3.4.

## 4.3 Stabilisation des systèmes non linéaires affines fractionnaires

Dans cette section, nous traitons la stabilisation des systèmes non linéaires affines fractionnaires (4.1) et (4.3).

### 4.3.1 Approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est linéaire

#### 4.3.1.1 Retour d'état statique

Le but de cette section est d'étudier le problème de la stabilisation asymptotique du système non linéaire affine fractionnaire (4.1) avec une dérivée d'ordre  $0 < \alpha < 1$  par un retour d'état statique avec  $C = I_n$ .

La fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (4.1) satisfait à l'hypothèse 4.2.1.

La stabilisation asymptotique par retour d'état statique du système affine fractionnaire (4.1) est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.3.1.** [NZDR09b, NZRB09b] *Sous l'hypothèse 4.2.1, le système non linéaire affine fractionnaire (4.1) avec  $0 < \alpha < 1$  et  $C = I_n$  contrôlé par le retour d'état suivant*

$$u(t) = Lx(t) \tag{4.5}$$

*est asymptotiquement stable si la matrice  $W = A + BL$  vérifie  $|\arg(\lambda_i(W))| > \alpha \frac{\pi}{2}$  et si l'état initial  $x_0$  satisfait*

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|W\|}{2\mu \|L\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.6}$$

*De plus, l'état du système est borné en norme comme suit*

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| t^\alpha} \left( \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.7}$$

et où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $W$ . ■

*Démonstration.* En utilisant la relation (4.5) et en appliquant la transformée de Laplace du système (4.1) avec  $C = I_n$ , nous obtenons

$$X(s) = (I_n s^\alpha - W)^{-1} \left( s^{\alpha-1} x_0 + \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m g_i(x(t))(Lx(t))_i \right) \right) \quad (4.8)$$

où  $W = (A + BL)$ . L'item (3) de l'hypothèse 4.2.1 garantit qu'il existe un gain  $L$  tel que  $|\arg(\lambda_i(W))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ .

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (4.8), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, nous obtenons l'égalité suivante

$$x(t) = E_{\alpha,1}(Wt^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(W(t-\tau)^\alpha) \left( \sum_{i=1}^m g_i(x(\tau))(Lx(\tau))_i \right) d\tau. \quad (4.9)$$

En appliquant la norme des deux côtés de l'équation (4.9) et en utilisant le corollaire 2.4.1 (en remplaçant  $A$  par  $W$ ) et l'hypothèse 4.2.1, nous avons

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|Wt^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\mu\theta \|L\| \|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|W(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau \quad (4.10)$$

ce qui est équivalent à

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{\mu\theta \|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W\|(t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau. \quad (4.11)$$

En posant

$$r(t) = \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\|t^\alpha}, \quad f(\tau) = \frac{\mu\theta \|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W\|(t-\tau)^\alpha}, \quad (4.12)$$

où  $r(t)$  est une fonction positive et décroissante, nous pouvons vérifier que l'inégalité (1.65) de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman 1.4.2 est bien vérifiée, c'est-à-dire

$$1 - (\ell - 1) \int_a^b (r(s))^{\ell-1} f(s) ds > 0. \quad (4.13)$$

L'inégalité (4.13) peut s'écrire sous la forme

$$1 - q\mu \|L\| \int_0^t \frac{(\theta \|x_0\|)^q}{(1 + \|W\|\tau^\alpha)^q} \frac{\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W\|(t-\tau)^\alpha} d\tau > 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.14)$$

Cette dernière peut également s'écrire comme suit

$$1 - q\mu \|L\| \int_0^t \left( \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\|\tau^\alpha} \right)^q \frac{\theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|W\|(t-\tau)^\alpha} d\tau > 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.15)$$

Nous devons vérifier si l'inégalité suivante est bien satisfaite

$$1 - q\mu \|L\| \theta^{q+1} \|x_0\|^q \Phi(t) > 0, \quad \forall t > 0 \quad (4.16)$$

où

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau. \quad (4.17)$$

L'intégrale dans (4.17) peut être décomposée en une somme de deux intégrales par la relation de Chasles

$$\Phi(t) = \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau. \quad (4.18)$$

Puisque  $0 < \alpha < 1$  et  $(t - \tau) \geq \tau$  quand  $\tau \in [0, \frac{t}{2}]$ , nous avons

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau \leq \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)} d\tau. \quad (4.19)$$

De même,  $0 < \alpha < 1$  et  $(t - \tau) \leq \tau$  quand  $\tau \in [\frac{t}{2}, t]$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau &\leq \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|W\| (\eta)^\alpha)^q} \frac{\eta^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| \eta^\alpha)} d\eta, \end{aligned} \quad (4.20)$$

en substituant  $(t - \tau)$  par  $\eta$  dans (4.20), nous obtenons

$$\int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| (t - \tau)^\alpha)} d\tau \leq \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|W\| (\eta)^\alpha)^q} \frac{\eta^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| \eta^\alpha)} d\eta. \quad (4.21)$$

A partir des équations (4.19) et (4.21), l'équation (4.17) peut s'écrire sous la forme

$$\Phi(t) = 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^q} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)} d\tau = 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|W\| \tau^\alpha)^{q+1}} d\tau \quad (4.22)$$

ce qui est équivalent à

$$\Phi(t) = \frac{2}{q\alpha \|W\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|W\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right). \quad (4.23)$$

L'équation (4.23) montre bien que  $\Phi(t) > 0$  lorsque  $t > 0$ , ce qui entraîne que l'expression suivante dans (4.16)

$$1 - q\mu \|L\| \theta^{q+1} \|x_0\|^q \Phi(t)$$

est minimale lorsque  $t$  tend vers l'infini, d'où l'inégalité (4.16) est satisfaite si l'état initial  $x_0$  vérifie la condition (4.6).

Ainsi, à partir de l'inégalité (4.11), nous pouvons appliquer la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman donnée dans le théorème 1.4.2, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| t^\alpha}}{(1 - q\mu\theta^{q+1} \|L\| \|x_0\|^q \Phi(t))^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.24)$$

Cette dernière inégalité est équivalent à (4.7). On vérifie bien que lorsque  $t$  tends vers l'infini, l'état du système converge vers zéro, ce qui assure la stabilisation asymptotique du système non linéaire fractionnaire (4.1). •

#### 4.3.1.2 Retour de sortie statique

Nous supposons dans ce cas que l'état du système non linéaire fractionnaire (4.1) est partiellement mesuré, c'est-à-dire que la matrice  $C \neq I_n$  dans (4.1).

La stabilisation asymptotique du système affine fractionnaire (4.1) par un retour de sortie statique est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.3.2.** [NZDR09b, NZRB09b] *Sous l'hypothèse 4.2.1, le système non linéaire fractionnaire (4.1) contrôlé par le retour de sortie statique suivant*

$$u(t) = Ky(t) \quad (4.25)$$

*est asymptotiquement stable si la matrice  $Q = A + BKC$  vérifie  $|\arg(\lambda_i(Q))| > \alpha \frac{\pi}{2}$  et si l'état initial  $x_0$  satisfait*

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|Q\|}{2\mu \|KC\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.26)$$

*De plus, l'état du système  $x(t)$  est borné en norme comme suit*

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|Q\| t^\alpha}}{\left( 1 - \frac{2\mu\theta^{q+1} \|KC\| \|x_0\|^q}{\alpha \|Q\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|Q\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right) \right)^{\frac{1}{q}}} \quad (4.27)$$

*et où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $Q$ .* ■

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est donnée par la preuve du théorème 4.3.1 en remplaçant respectivement les matrices  $W = A + BL$  et  $L$  par  $Q = A + BKC$  et  $KC$ . •

### 4.3.1.3 Exemple

Considérons le système bilinéaire fractionnaire instable suivant [NZRD10]

$$\begin{cases} D^\alpha x = A_0 x + A_1 u x + B u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.28)$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec le contrôleur d'état linéaire  $L = [-1 \quad -1]$ , nous avons

$$\left| \arg(\lambda_i(\tilde{A})) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

puisque les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A} = A_0 + BL$  sont égales à  $(-1, -2)$ . Ainsi, la condition du théorème 4.3.1 étant satisfaite. On conclut donc que la solution du système bilinéaire fractionnaire contrôlé par ce retour d'état statique est asymptotiquement stable. Les résultats de la simulation sont donnés par la figure 4.1 avec  $x_0 = [1 \ 0]^T$  et  $0 < \alpha < 1$ .

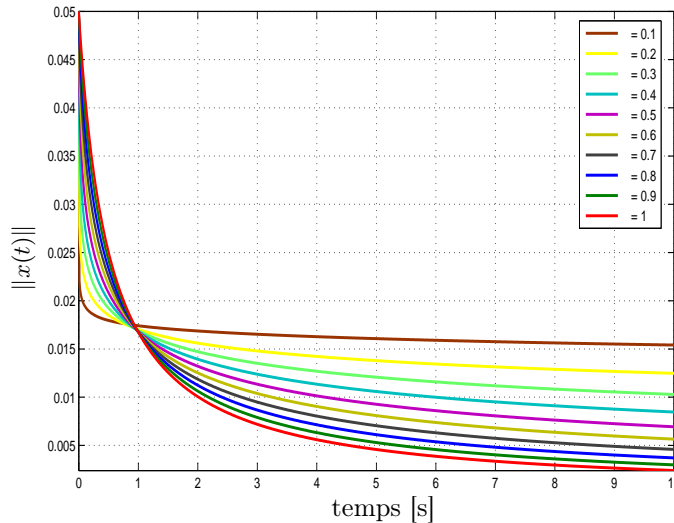


FIGURE 4.1: Stabilisation par retour d'état statique du système bilinéaire fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$

### 4.3.2 Approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est non linéaire

Nous considérons le système affine non linéaire fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + \psi(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (4.29)$$

La fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (4.29) satisfait à l'hypothèse 4.2.1 et la fonction non linéaire  $\psi(x(t))$  vérifie l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 4.3.1.** La fonction non linéaire  $\psi(x(t))$  est mesurable avec  $\psi(0) = 0$  et il existe un entier  $r > 0$ , tel que

$$\|\psi(x(t))\| \leq \kappa \|x(t)\|^{r+1}, \quad (4.30)$$

où  $\kappa$  est une constante positive. □

#### 4.3.2.1 Stabilisation par retour d'état statique

La stabilisation asymptotique du système (4.29) par retour d'état statique est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.3.3.** [NZRB09b] Sous les hypothèses 4.2.1 et 4.3.1, le système (4.29) avec  $0 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour d'état statique suivant

$$u(t) = Lx(t) \quad (4.31)$$

est asymptotiquement stable si la matrice  $\tilde{A} = A + BL$  vérifie  $|\arg(\lambda_i(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$  et si l'état initial  $x_0$  vérifie  $0 < \|x_0\| \leq \varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0 > 0$  est un scalaire positif tel que

$$\Phi(t) = 1 - (q+r) \int_0^t \left( (\varphi(\tau))^q \frac{\mu \|L\| \theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} d\tau + (\varphi(\tau))^r \frac{\kappa \theta (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} d\tau \right) > 0, \quad \forall t > 0, \quad (4.32)$$

où  $\varphi(t) = \frac{\theta \varepsilon_0}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha}$  et où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ .

De plus, il existe deux réels  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\varepsilon_2 > 0$  tels que l'état du système est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varphi(t)}{(\Phi(t))^{\frac{1}{q+r}}} = \frac{\frac{\theta \|x_0\| \varepsilon_2}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha}}{\varepsilon_1^{\frac{1}{q+r}}}, \quad \forall t \geq 0. \quad \blacksquare$$

*Démonstration.* En utilisant le retour d'état statique (4.31) et en appliquant la transformée de Laplace du système (4.29), nous obtenons

$$X(s) = (I_n s^\alpha - \tilde{A})^{-1} \left( s^{\alpha-1} x_0 + \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m g_i(x(t)) (Lx(t))_i + \psi(x(t)) \right) \right). \quad (4.33)$$

avec  $\tilde{A} = A + BL$ . L'item (3) de l'hypothèse 4.2.1 garantit qu'il existe un gain  $L$  tel que  $|\arg(\lambda_i(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ .

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (4.8), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, nous obtenons l'égalité suivante

$$x(t) = E_{\alpha,1}(\tilde{A}t^\alpha)x(0) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tilde{A}(t-\tau)^\alpha) \left( \sum_{i=1}^m g_i(x(\tau))(Lx(\tau))_i + \psi(x(\tau)) \right) d\tau. \quad (4.34)$$

en appliquant la norme des deux côtés de l'équation (4.34) et en utilisant le corollaire 2.4.1 (en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ ) et les hypothèses 4.2.1 et 4.3.1, nous avons

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta\|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\mu\theta\|L\| \|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau + \int_0^t \frac{\kappa\theta\|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}(t-\tau)^\alpha\|} \|x(\tau)\|^{r+1} d\tau, \quad (4.35)$$

ce qui est équivalent à

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{A}\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{\mu\theta\|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau + \int_0^t \frac{\kappa\theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^{r+1} d\tau. \quad (4.36)$$

Si la relation (4.32) est vérifiée, il existe un réel  $\varepsilon_1$  strictement positif tel que

$$0 < \varepsilon_1 \leq \Phi(t)$$

En posant  $\varphi(t) = \frac{\theta\varepsilon_0}{1 + \|\tilde{A}\|t^\alpha}$  et en utilisant la seconde généralisation du lemme de

Gronwall-Bellman à deux paramètres donnée dans le théorème 1.4.2, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varphi(t)}{(\Phi(t))^{\frac{1}{q+r}}} = \frac{\frac{\theta\|x_0\|\varepsilon_2}{1 + \|\tilde{A}\|t^\alpha}}{\varepsilon_1^{\frac{1}{q+r}}}, \quad \forall t > 0 \quad (4.37)$$

car il existe un réel  $\varepsilon_2 > 0$  tel que  $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 \|x_0\|$ .

Ceci complète ainsi la preuve de ce théorème. •

#### 4.3.2.2 Stabilisation par retour de sortie statique

Dans cette section, nous supposons que l'état du système non linéaire fractionnaire (4.29) est partiellement mesuré, c'est-à-dire que la matrice  $C \neq I_n$  dans (4.29).

La stabilisation asymptotique du système (4.29) par retour de sortie statique est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.3.4.** [NZRB09b] *Sous les hypothèses 4.2.1 et 4.3.1, le système non linéaire fractionnaire (4.29) avec  $0 < \alpha < 2$  contrôlé par le retour de sortie statique suivant*

$$u(t) = Ky(t) \quad (4.38)$$



est asymptotiquement stable si la matrice  $\bar{A} = A + BKC$  vérifie  $|\arg(\lambda_i(\bar{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$  et si l'état initial  $x_0$  vérifie  $0 < \|x_0\| \leq \varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0 > 0$  est un scalaire positif tel que

$$\Phi(t) = 1 - (q+r) \int_0^t \left( (\varphi(\tau))^q \frac{\mu \|L\| \theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\bar{A}\| (t-\tau)^\alpha} d\tau + (\varphi(\tau))^r \frac{\kappa \theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\bar{A}\| (t-\tau)^\alpha} d\tau \right) > 0, \quad \forall t > 0, \quad (4.39)$$

où  $\varphi(t) = \frac{\theta \varepsilon_0}{1 + \|\bar{A}\| t^\alpha}$  et où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\bar{A}$ .

De plus, il existe deux réels  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\varepsilon_2 > 0$  tels que l'état du système est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\varphi(t)}{(\Phi(t))^{\frac{1}{q+r}}} = \frac{\frac{\theta \|x_0\| \varepsilon_2}{1 + \|\bar{A}\| t^\alpha}}{\varepsilon_1^{\frac{1}{q+r}}}, \quad \forall t \geq 0$$

■

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est donnée par la preuve du théorème 4.3.3 en remplaçant respectivement les matrices  $\tilde{A} = A + BL$  et  $L$  par  $\bar{A} = A + BKC$  et  $KC$ . •

### 4.3.3 Approche LMI lorsque la dérive est linéaire

Dans cette section, nous utiliserons le théorème déjà établi dans la section 3.2.2 du chapitre 3 avec la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman donnée dans le chapitre 1 afin de donner des conditions suffisantes de stabilisation des systèmes non linéaires affines fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha < 1$  définis par (4.1). Nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande par retour d'état statique de la forme

$$u(t) = Lx(t). \quad (4.40)$$

La fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (4.1) satisfait à l'hypothèse 4.2.1.

**Théorème 4.3.5.** *Sous l'hypothèse 4.2.1, le système non linéaire affine fractionnaire (4.1) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique (4.40) est asymptotiquement stable et a une solution unique  $x(t)$  si*

1. *il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telles que*

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (AQ + BX)\} < 0 \quad (4.41)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i=1, 2$ ) sont données par la relation (2.160) et où le gain assurant la stabilité asymptotique est donné par

$$L = XQ^{-1}$$

2. l'état initial  $x_0$  satisfait

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|W\|}{2\mu \|L\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.42)$$

où  $W = A + BL$  et où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $W$ .

De plus, l'état du système est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|W\| t^\alpha}}{\left( 1 - \frac{2\mu \theta^{q+1} \|L\| \|x_0\|^q}{\alpha \|W\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|W\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right) \right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.43)$$

■

*Démonstration.* La preuve de ce théorème s'appuie sur les démonstrations des théorèmes 3.2.4 et 4.3.1. •

## 4.4 Commande basée sur un observateur pour les systèmes affines non linéaires fractionnaires

Cette partie est consacrée à l'étude de la stabilisation asymptotique des systèmes non linéaires affines à dérivée d'ordre non entier par une loi de commande basée sur un observateur. La nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman présentée dans le premier chapitre permet de concevoir cette loi de commande basée sur un observateur pour la stabilisation des systèmes affines fractionnaires.

Nous considérons la fonction non linéaire affine fractionnaire (4.1) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  où la fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (4.1) satisfait à l'hypothèse 4.2.1.

L'observateur non linéaire proposé est un observateur de type "Luenberger" défini par

$$D^\alpha \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^m g_i(\hat{x}(t))u_i(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4.44)$$

couplé à la commande par retour d'état estimé suivante

$$u(t) = L\hat{x}(t). \quad (4.45)$$

Soit  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  l'erreur du signal, alors le système bouclé est donné par

$$\begin{cases} D^\alpha e(t) = (A - KC)e(t) + \sum_{i=1}^m (g_i(\hat{x}(t)) - g_i(x(t)))(L\hat{x}(t))_i \\ D^\alpha \hat{x}(t) = (A + BL)\hat{x}(t) - KCe(t) + \sum_{i=1}^m g_i(\hat{x}(t))(L\hat{x}(t))_i \end{cases} \quad (4.46)$$

#### 4.4. Commande basée sur un observateur pour les systèmes affines non linéaires fractionnaires

où  $(Lx(t))_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $Lx(t)$ .

Le système (4.46) est équivalent à

$$D^\alpha X(t) = \widehat{A}X(t) + \sum_{i=1}^m \Delta g_i(X(t)) ([0 \ L]X(t))_i \quad (4.47)$$

avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \widehat{x}(t) \end{bmatrix}, \widehat{A} = \begin{bmatrix} A - KC & 0 \\ -KC & A + BL \end{bmatrix}, \Delta g_i(X(t)) = \begin{bmatrix} g_i(\widehat{x}(t)) - g_i(\widehat{x}(t) - e(t)) \\ g_i(\widehat{x}(t)) \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Nous supposons que le système non linéaire fractionnaire (4.1) d'ordre  $0 < \alpha < 1$  satisfait à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 4.4.1.** *La fonction non linéaire  $\Delta g_i(X(t))$  définie dans (4.48) satisfait la relation suivante pour tout  $i = 1, \dots, m$*

$$\|\Delta g_i(X(t))\| \leq \rho_i \|X(t)\|^q \quad (4.49)$$

où  $q \geq 1$  est donné dans l'item (2) de l'hypothèse 4.2.1 et où  $\rho_i$  est une constante positive.  $\square$

Dans la suite, nous définissons  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$ .

En utilisant la relation (4.2) de l'hypothèse 4.2.1, les réels  $\rho_i$  peuvent être déterminés à l'aide des valeurs des réels  $\mu_i$ . De plus l'hypothèse 4.2.1 permet de montrer que  $\Delta g_i(0) = 0$ . La stabilisation asymptotique du système affine fractionnaire (4.1) avec  $0 < \alpha < 1$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.4.1.** *[NZDR09a] Sous les hypothèses 4.2.1 et 4.4.1, le système non linéaire affine fractionnaire (4.1) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état estimé (4.45) via l'observateur non linéaire (4.44) est asymptotiquement stable si les matrices  $A - KC$  et  $A + BL$  vérifient*

$$|\arg(\lambda_i(A - KC))| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\arg(\lambda_i(A + BL))| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

et si l'état initial  $X_0$  satisfait

$$\|X_0\| < \left( \frac{\alpha \|\widehat{A}\|}{2\rho \|L\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.50)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\widehat{A}$ .

De plus, l'état du système est borné en norme comme suit

$$\|X(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|X_0\|}{1 + \|\widehat{A}\| t^\alpha}}{\left(1 - \frac{2\rho\theta^{q+1}\|L\|\|X_0\|^q}{\alpha \|\widehat{A}\|} \left(1 - \frac{1}{1 + \|\widehat{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.51)$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème se déduit de la démonstration du théorème 4.3.1 en remplaçant  $W$  par  $\widehat{A}$ . •

## 4.5 Stabilisation robuste des systèmes non linéaires fractionnaires

Considérons le système non linéaire fractionnaire incertain suivant

$$(A_n + \Delta_n)D_t^{n\alpha}q + \dots + (A_1 + \Delta_1)D_t^\alpha q + (A_0 + \Delta_0)q = \overline{B}u + \sum_{i=1}^m \overline{g}_i(q, D_t^\alpha q, \dots, D_t^{(n-1)\alpha} q)u_i \quad (4.52)$$

où  $n$  est un entier,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $q$  est un vecteur  $\in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\overline{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices connues, le vecteur  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $\overline{g}_i(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteur connu.  $q^{(i)} = (q_1^{(i)} q_2^{(i)} \dots q_n^{(i)})^T$  représente l' $i$ ème ordre de différentiation du vecteur  $q$ .  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $i = 0 \dots n$ ) est une matrice inconnue constante décrivant les paramètres incertains. Notons que le modèle (4.52) dans le cas où la fonction non linéaire  $\overline{g}_i(\cdot) = 0$  a été utilisé dans [XD98] avec  $\alpha = 1$  et dans [XL09] avec  $1 \leq \alpha < 2$ .

Nous supposons que la matrice  $(A_n + \Delta_n)$  est inversible [XL09, XD98] (ce qui est vrai pour la plupart de systèmes dynamiques), alors l'équation (4.52) peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = (I + \Delta_m) \left[ (A + \Delta_a)x(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \right] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.53)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ -A_n^{-1}A_0 & -A_n^{-1}A_1 & \dots & -A_n^{-1}A_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta_m = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)n \times (n-1)n} & 0 \\ 0 & -(A_n + \Delta_n)^{-1}\Delta_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)n \times m} \\ A_n^{-1} \bar{B} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} q \\ D_t^\alpha q \\ \vdots \\ D_t^{(n-1)\alpha} q \end{bmatrix}, \quad \Delta_a = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)n \times n} & \cdots & 0_{(n-1)n \times n} \\ -A_n^{-1} \Delta_0 & \cdots & -A_n^{-1} \Delta_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$g_i(x) = \begin{bmatrix} 0_{(n-1)n \times m} \\ A_n^{-1} \bar{g}_i(x) \end{bmatrix},$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$  est le vecteur d'état et la fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (4.53) satisfait à l'hypothèse 4.2.1.

**Hypothèse 4.5.1.** [XL09] Considérons le système non linéaire fractionnaire (4.53) avec  $0 < \alpha < 1$  avec les incertitudes non linéaires paramétriques  $\Delta_m$  et  $\Delta_a$  où  $\Delta_{ms} = -(A_n + \Delta_n)^{-1} \Delta_n$  et  $\Delta_a^i = -A^{-1} \Delta_{i-1}$  (pour tout  $i = 1, \dots, n$ ). Supposons que

$$\Delta_{ms} < d_m, \quad \Delta_a^i < d_a^i \quad (4.54)$$

où  $d_m, d_a^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (pour tout  $i = 1, \dots, n$ ), alors  $\Delta_m$  et  $\Delta_a$  satisfont

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{ms} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix} = \bar{D}_m, \quad (4.55a)$$

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_a^1 & \cdots & \Delta_a^n \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_a^1 & \cdots & d_a^n \end{bmatrix} = \bar{D}_a. \quad (4.55b)$$

□

La stabilisation asymptotique robuste du système fractionnaire (4.53) est donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.5.1.** [NZDR10b] Considérons que les hypothèses 4.2.1 et 4.5.1 sont satisfaites. Le système non linéaire incertain fractionnaire (4.53) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique suivant

$$u(t) = Lx(t) \quad (4.56)$$

est asymptotiquement stable et a une solution unique  $x(t)$  si

1. il existe une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , une matrice symétrique  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie positive et des scalaires  $\delta_i > 0$  et  $\ell_i > 0$ , ( $i = 1, 2$ ) telle que la LMI (3.19) soit satisfaite,
2. l'état initial  $x_0$  satisfait

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|\tilde{A}\|}{2\mu \|L\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.57)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ .

De plus, l'état du système  $x(t)$  est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha}}{\left(1 - \frac{2\mu\theta^{q+1}\|L\|\|x_0\|^q}{\alpha \|\tilde{A}\|} \left(1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)^q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.58)$$

Le gain assurant la stabilité asymptotique par retour d'état statique est donné par

$$L = YN^{-1}.$$

■

*Démonstration.* Considérons que les hypothèses 4.2.1 et 4.5.1 sont satisfaites.

1. Si  $g_i(x(t)) = 0$ , la preuve de la stabilisation asymptotique du système fractionnaire (4.53) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état statique (4.56) est donnée par le théorème 3.3.1.
2. Si  $g_i(x(t)) \neq 0$  sauf si  $x(t) = 0$ , avec la LMI (3.19) satisfaite et le gain  $L = YN^{-1}$  donné par le théorème 3.3.1, alors, la démonstration de la stabilisation asymptotique du système fractionnaire (4.53) avec  $0 < \alpha < 1$  se fait de façon similaire à celle du théorème 4.3.1.

•

## 4.6 Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires

Dans cette section, le problème de la stabilisation asymptotique via le retour d'état proportionnel dérivé (3.99) est traité par l'utilisation, d'une part, de l'approche sur la stabilité au sens de Mittag-Leffler et, d'autre part, de conditions LMIs suffisantes. Ces deux approches sont combinées avec la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman afin d'assurer la stabilisation du système non linéaire singulier fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$ .

Considérons le système non linéaire singulier à dérivée d'ordre non entier suivant

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.59)$$

### 4.6.1 Approche Mittag-Leffler

La stabilisation asymptotique du système singulier non linéaire fractionnaire (4.59) avec  $0 < \alpha < 1$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.6.1.** [NZDR10a] Sous l'hypothèse 4.2.1, le système non linéaire singulier à dérivée d'ordre non entier (4.59) contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé est asymptotiquement stable et a une solution unique  $x(t)$  si

1. il existe deux matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que la LMI (3.102) soit satisfaite,
2. l'état initial  $x_0$  satisfait

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|\tilde{A}\|}{2\mu\|K\|\theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.60)$$

où  $L = YP^{-1}$ ,  $v(t) = Kx(t)$ ,  $\tilde{A} = A_1 + B_1K$ ,  $A_1 = (E + BYP^{-1})^{-1}A$  et  $B_1 = (E + BYP^{-1})^{-1}B$ .

De plus, l'état du système  $x(t)$  vérifie

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta\|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\|t^\alpha}}{\left( 1 - \frac{2\mu\theta^{q+1}\|K\|\|x_0\|^q}{\alpha\|\tilde{A}\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\|\left(\frac{t}{2}\right)^q} \right) \right)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall t \geq 0, \quad (4.61)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ . ■

*Démonstration.* La démonstration se fait de façon similaire à celle du théorème 4.3.1. ●

## 4.6.2 Approche LMI

Dans cette partie, l'étude de la stabilisation d'une classe de systèmes singuliers non linéaires fractionnaires est réalisée par l'approche LMI couplée avec la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un paramètre. Des conditions suffisantes permettant d'assurer la stabilisation du système singulier non linéaire fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$  sont ainsi obtenues via une approche LMI.

Les résultats de stabilisation pour cette classe de systèmes non linéaires singuliers fractionnaires (4.59) avec  $0 < \alpha < 1$  sont déduits du chapitre 3 dans le cas linéaire.

**Théorème 4.6.2.** Sous l'hypothèse 4.2.1, le système non linéaire singulier fractionnaire (4.59) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé

$$u(t) = -LD^\alpha x(t) + v(t) = -YP^{-1}D^\alpha x(t) + XP_0^{-1}x(t)$$

est asymptotiquement stable si

1. il existe quatre matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que

$$\begin{bmatrix} PE^T + EP + Y^T B^T + BY & P \\ & P \end{bmatrix} > 0$$

$$\sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 + B_1 X)\} < 0 \quad (4.62)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160),  $A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$  et  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$ ,

2. l'état initial  $x_0$  satisfait

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|\tilde{A}\|}{2\mu \|K\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.63)$$

où  $L = Y P^{-1}$ ,  $K = X P_0^{-1}$ ,  $v(t) = K x(t)$ ,  $\tilde{A} = A_1 + B_1 K$ ,  $A_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} A$  et  $B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B$ .

De plus, l'état du système  $x(t)$  vérifie

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha} \left( \frac{1}{1 - \frac{2\mu \theta^{q+1} \|K\| \|x_0\|^q}{\alpha \|\tilde{A}\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.64)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ . ■

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème s'appuie directement sur la démonstration des théorèmes 3.5.7 et 4.3.1. •

## 4.7 Stabilisation robuste des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires

Dans cette section, nous proposons d'étendre nos résultats de la stabilisation robuste du chapitre 3 aux systèmes non linéaires singuliers fractionnaires. Un exemple de simulation est présenté pour illustrer la faisabilité de l'approche proposée.

Nous considérons le système non linéaire singulier incertain fractionnaire suivant.

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = (A + \Delta_A)x(t) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.65)$$

La matrices des incertitudes paramétriques  $\Delta_A$  est définie dans (3.116) de la section 3.6. Nous supposons également que la fonction non linéaire  $g_i(x(t))$  dans (4.65) satisfait à l'hypothèse 4.2.1.

Ainsi, sous l'hypothèse 4.2.1 et la condition (3.116) sur l'incertitude paramétrique  $\Delta_A$ , nous pouvons énoncer le théorème suivant



**Théorème 4.7.1.** *Supposons que l'hypothèse 4.2.1 et la relation (3.116) soient vérifiées, le système non linéaire singulier fractionnaire incertain (4.65) avec  $0 < \alpha < 1$  contrôlé par le retour d'état proportionnel dérivé*

$$u(t) = -LD^\alpha x(t) + v(t) = -YP^{-1}D^\alpha x(t) + Kx(t)$$

est asymptotiquement stable si

1. *il existe quatre matrices  $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un réel scalaire  $\delta > 0$  tels que les deux LMIs suivantes soient satisfaites*

$$\begin{bmatrix} PE^T + EP + Y^T B^T + BY & P \\ & P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.66)$$

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.67)$$

où

$$\begin{aligned} W_{11} &= \sum_{i=1}^2 \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (A_1 P_0 + B_1 X)\} + \sum_{i=1}^2 \delta_i \{I_2 \otimes (E_1^{-1} M_A)(E_1^{-1} M_A)^T\} \\ W_{12} &= \begin{bmatrix} I_2 \otimes (N_A P_0)^T & I_2 \otimes (N_A P_0)^T \end{bmatrix} \\ W_{22} &= -\text{diag}(\delta_1, \delta_2) \otimes I_{2n} \\ A_1 &= (E + B Y P^{-1})^{-1} A, \quad B_1 = (E + B Y P^{-1})^{-1} B, \quad L = Y P^{-1}, \end{aligned}$$

2. *l'état initial  $x_0$  satisfait*

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|\tilde{A}\|}{2\mu \|K\| \theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.68)$$

où  $L = Y P^{-1}$ ,  $K = X P_0^{-1}$ ,  $v(t) = Kx(t)$  et  $\tilde{A} = A_1 + B_1 K$ .

De plus, l'état du système  $x(t)$  vérifie

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha} \left( \frac{1 - \frac{2\mu \theta^{q+1} \|K\| \|x_0\|^q}{\alpha \|\tilde{A}\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right)}{\left( 1 - \frac{2\mu \theta^{q+1} \|K\| \|x_0\|^q}{\alpha \|\tilde{A}\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right) \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall t \geq 0 \quad (4.69)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $\tilde{A}$ . ■

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème s'appuie directement sur la démonstration des théorèmes 3.6.2 et 4.3.1. ●

## 4.8 Observateurs pour les systèmes non linéaires fractionnaires

Dans cette section, nous considérons la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires fractionnaires. Pour assurer la stabilité de l'erreur d'observation, nous avons utilisé la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman.

Nous considérons le système non linéaire fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + \Psi(x(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.70)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la mesure,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices connues de dimensions appropriées.

La fonction non linéaire  $\Psi(x(t))$  vérifie la condition suivante

$$\|\Psi(x_1(t)) - \Psi(x_2(t))\| \leq \lambda \|x_1(t) - x_2(t)\|^{q+1} \quad (4.71)$$

où  $q \geq 1$  est un entier et  $\lambda > 0$ . L'observateur est donné par ( $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ )

$$\begin{cases} D^\alpha \hat{x}(t) = N\hat{x}(t) + \Psi(\hat{x}(t)) + Ly(t) + Gu(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.72)$$

a pour erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.73)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= D^\alpha x(t) - D^\alpha \hat{x}(t) \\ &= Ax(t) + \Psi(x(t)) + Bu(t) - N\hat{x}(t) - \Psi(\hat{x}(t)) - Ly(t) - Gu(t) \\ &= Ne(t) + (A - N - LC)x(t) + (\Psi(x(t)) - \Psi(\hat{x}(t))) + (B - G)u(t) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Il faut donc qu'il existe des matrices  $N$ ,  $L$  et  $G$  telles que

$$0 = A - N - LC \quad (4.75a)$$

$$G = B \quad (4.75b)$$

et que la matrice  $N$  permette d'assurer la stabilité de l'équation différentielle fractionnaire. Ainsi la dynamique de l'erreur d'observation devient

$$D^\alpha e(t) = Ne(t) + (\Psi(x(t)) - \Psi(\hat{x}(t))) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.76)$$

La stabilité de l'erreur d'observation est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.8.1.** *Sous la condition (4.71), il existe un observateur fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$  de la forme (3.145) assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation si*

1. le théorème 3.2.4 est vérifié en remplaçant respectivement les matrices  $A$ ,  $B$  et  $L$  par  $A^T$ ,  $C^T$  et  $-L^T$ ,

2. l'état initial  $x_0$  satisfait

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|N\|}{2\lambda\theta^{q+1}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.77)$$

De plus, l'état du système  $x(t)$  vérifie

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta\|x_0\|}{1 + \|N\|t^\alpha}}{\left( 1 - \frac{2\lambda\theta^{q+1}\|x_0\|^q}{\alpha\|N\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|N\|\left(\frac{t}{2}\right)^q} \right) \right)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall t \geq 0, \quad (4.78)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $N$ . ■

*Démonstration.* La démonstration de l'item 1 de ce théorème est donné directement dans la démonstration du théorème 3.2.4.

En appliquant la transformée de Laplace du système (4.76), nous obtenons

$$X(s) = (I_n s^\alpha - N)^{-1} (s^{\alpha-1} x_0 + \mathcal{L}(\Psi(x(t)) - \Psi(\hat{x}(t)))). \quad (4.79)$$

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (4.79), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, nous obtenons l'égalité suivante

$$x(t) = E_{\alpha,1}(Nt^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(N(t-\tau)^\alpha) (\Psi(x(t)) - \Psi(\hat{x}(t))) d\tau. \quad (4.80)$$

En appliquant la norme des deux côtés de l'équation (4.80) et en utilisant le corollaire 2.4.1 (en remplaçant la matrice  $A$  par  $N$ ) et la condition (4.71), nous avons

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta\|x_0\|}{1 + \|N\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{\lambda\theta\|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|N\|(t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau \quad (4.81)$$

ce qui est équivalent à

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta\|x_0\|}{1 + \|N\|t^\alpha} + \int_0^t \frac{\lambda\theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|N\|(t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^{q+1} d\tau. \quad (4.82)$$

Posons

$$r(t) = \frac{\theta\|x_0\|}{1 + \|N\|t^\alpha}, \quad f(\tau) = \frac{\lambda\theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|N\|(t-\tau)^\alpha} \quad (4.83)$$

où  $r(t)$  est une fonction positive et décroissante.

Nous pouvons ainsi vérifier que l'inégalité (1.65) de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman est bien vérifiée, c'est-à-dire

$$1 - (\ell - 1) \int_a^b (r(s))^{\ell-1} f(s) ds > 0. \quad (4.84)$$

L'inégalité (4.82) peut s'écrire sous la forme

$$1 - q\lambda \int_0^t \frac{(\theta \|x_0\|)^q}{(1 + \|N\| \tau^\alpha)^q} \frac{\theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|N\| (t-\tau)^\alpha} d\tau > 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.85)$$

Cette dernière peut également s'écrire comme suit

$$1 - q\lambda \int_0^t \left( \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|N\| \tau^\alpha} \right)^q \frac{\theta(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|N\| (t-\tau)^\alpha} d\tau > 0, \quad \forall t > 0 \quad (4.86)$$

Nous devons vérifier si l'inégalité suivante est bien satisfaite

$$1 - q\lambda\theta^{q+1} \|x_0\|^q \Phi(t) > 0, \quad \forall t > 0 \quad (4.87)$$

où

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{(1 + \|N\| \tau^\alpha)^q} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|N\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau = \frac{2}{q\alpha \|N\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|N\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right). \quad (4.88)$$

Le calcul de l'intégrale dans (4.88) est donné dans la preuve du théorème 4.3.1.

L'équation (4.88) montre bien que  $\Phi(t) > 0$  lorsque  $t > 0$ , ce qui entraîne que l'expression suivante dans (4.87)

$$1 - q\lambda\theta^{q+1} \|x_0\|^q \Phi(t)$$

est minimale lorsque  $t$  tend vers l'infini, d'où l'inégalité (4.87) est satisfaite si l'état initial  $x_0$  vérifie la condition (4.77).

Ainsi, à partir de l'inégalité (4.82), nous pouvons appliquer la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman donnée dans le théorème 1.4.2, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|N\| t^\alpha}}{(1 - q\lambda\theta^{q+1} \|x_0\|^q \Phi(t))^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.89)$$

Cette inégalité est équivalente à (4.78). On vérifie bien que lorsque  $t$  tends vers l'infini, l'état du système converge vers zéro, ce qui assure la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation fractionnaire (4.76) avec  $0 < \alpha < 1$ . •

## 4.9 Observateurs pour les systèmes singuliers non linéaires fractionnaires

Nous présentons dans cette partie, la synthèse d'observateur pour une classe de systèmes singuliers non linéaires fractionnaires. L'approche utilisée est basée sur la résolution d'un système d'équations de Sylvester et sur l'application de la généralisation de lemme de Gronwall-Bellman pour assurer la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation. L'avantage de cette méthode est que l'observateur obtenu unifie la synthèse d'observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal comme le montre la section 3.8.6.

### 4.9.1 Position du problème

Considérons le système singulier non linéaire fractionnaire d'ordre  $0 < \alpha < 1$  suivant

$$\begin{cases} ED^\alpha x(t) = Ax(t) + V\Psi(x(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.90)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la mesure,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices connues de dimensions appropriées. La matrice  $E \in \mathbb{R}^{n_E \times n}$  et lorsque  $n_E = n$  la matrice  $E$  est dite singulière ( $\det(E) = 0$ ).

La fonction non linéaire  $\Psi(x(t))$  vérifie la condition suivante

$$\|\Psi(x_1(t)) - \Psi(x_2(t))\| \leq \lambda \|x_1(t) - x_2(t)\|^{q+1} \quad (4.91)$$

où  $q \geq 1$  est un entier et  $\lambda > 0$ .

Soit la matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{r_1 \times n_E}$  de rang plein lignes telle que

$$\Phi \begin{bmatrix} E & V \end{bmatrix} = 0 \quad (4.92)$$

alors, à partir du système (4.90), nous obtenons

$$\Phi Bu(t) = -\Phi Ax(t).$$

**Hypothèse 4.9.1.** *Supposons que*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = n.$$

□

Comme dans [DZH96, Dar09, DBB08], on constate que l'hypothèse 4.9.1 est équivalente à l'observabilité impulsionnelle, c'est-à-dire [Dai89]

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} + \text{rang } E = n + \text{rang } E.$$

Considérons maintenant l'observateur d'ordre réduit pour le système (4.90)

$$\begin{cases} D^\alpha \eta(t) = N\eta(t) + Jy(t) + Hu(t) + TV\Psi(\hat{x}(t)) \\ \hat{x}(t) = P\eta(t) - Q\Phi Bu(t) + Fy(t) \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.93)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^k$  est le vecteur d'état de l'observateur avec ( $k \leq n$ ) et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  l'estimé de  $x(t)$ . Les matrices  $N, J, H, T, P, Q$ , et  $F$  sont des matrices de dimensions appropriées à déterminer pour que  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$ .

La proposition suivante donne les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur (4.93).

**Proposition 4.9.1.** *Sous l'hypothèse 4.9.1, le système (4.90) est un observateur asymptotique, c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) - x(t) = 0$  avec  $0 < \alpha < 1$ , s'il existe une matrice  $T$  telle que*

- 1)  $D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) + TV[\Psi(\hat{x}(t)) - \Psi(x(t))]$  soit asymptotiquement stable,
- 2)  $NTE - TA + JC = 0$ ,
- 3)  $H = TB$ ,

$$4) \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = I_n. \quad \square$$

*Démonstration.* Définissons  $\varepsilon(t) = \eta(t) - TE x(t)$ , l'erreur entre  $\eta(t)$  et  $TE x(t)$  alors en appliquant la dérivée fractionnaire, nous obtenons

$$D^\alpha \varepsilon(t) = D^\alpha \eta(t) - TED^\alpha x(t) \quad (4.94)$$

ce qui est équivalent à

$$D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) + (NTE + JC - TA)x(t) + (H - TB)u(t) + TV[\Psi(\hat{x}(t)) - \Psi(x(t))] \quad (4.95)$$

D'autre part, en utilisant la définition de  $\varepsilon(t)$ , nous avons

$$\hat{x}(t) = P\varepsilon(t) + \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} x(t). \quad (4.96)$$

Si les items (1) – (3) de la proposition 4.9.1 sont satisfaits alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) - TE x(t) = 0$ . De plus si l'item (4) est satisfait, alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) - x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\varepsilon(t) = 0$ .

Ainsi l'erreur d'observation est indépendante de  $u(t)$  et  $x(t)$  et nous obtenons l'erreur d'observation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) + TV[\Psi(\hat{x}(t)) - \Psi(x(t))] \\ e(t) = P\varepsilon(t) \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.97)$$

Les items (2) – (4) de la proposition 4.9.1 correspondent à un système d'équations de Sylvester. Soit  $\Upsilon$  une matrice arbitraire de dimension appropriée et définissons la matrice suivante  $T' = T - \Upsilon\Phi$ , alors le système d'équations de Sylvester devient [DBB08]

$$\begin{bmatrix} N & -\Upsilon & J \\ P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'A \\ I_n \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\Phi[E \ V] = 0$ . L'équation (4.98) a une solution si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} T'E \\ \Phi A \\ C \\ T'A \\ I_n \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} T'E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix} = n = \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}. \quad (4.99)$$

La synthèse de l'observateur de dimension  $q$  se réduit ainsi à déterminer les matrices  $T', N, \Upsilon, J, H, P, Q$  et  $F$  telles que l'équation (4.98) et les items (1) – (3) de la proposition 4.9.1 soient satisfaits. •

## 4.9.2 Paramétrage des matrices et synthèse de l'observateur

Sous l'hypothèse 4.9.1, le lemme suivant montre comment nous pouvons résoudre d'une part le système d'équations de Sylvester (4.98), c'est-à-dire obtenir les matrices  $T', N, \Upsilon, J, H, P, Q$  et  $F$  solutions de l'équation (4.98).

**Lemme 4.9.1.** [DBB08, Dar09] Soit  $R \in \mathbb{R}^{k \times n}$  une matrice de rang plein lignes et définissons la matrice  $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$  telle que  $\text{rang} \Sigma = n$ , alors sous l'hypothèse 4.9.1, la solution générale de l'équation (4.98) est donnée par

$$N = \mathbb{A} - Z_1\mathbb{B} - Y_1C \quad (4.100)$$

$$T = T' + \Upsilon\Phi \quad (4.101)$$

$$P = \begin{bmatrix} R \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} - Y_2C \quad (4.102)$$

et

$$\begin{bmatrix} -\Upsilon & J \\ Q & F \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} T'A \\ I_n \end{bmatrix} \Omega^+ - \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} (I_{k+r_1+p} - \Omega\Omega^+) \right) \begin{bmatrix} K \\ I_{r_1+p} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

où  $T' = \Lambda_1 - Z_1 \Delta_1$ ,  $K = \Lambda_2 - Z_1 \Delta_2$ ,  $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ \Phi A \\ C \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda_1 = R\Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda_2 = R\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n+p} \end{bmatrix}$ ,  
 $\Delta_1 = -(I_{n+r_1+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta_2 = -(I_{n+r_1+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n+p} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A} = \Lambda_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $\mathbb{B} = \Lambda_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{C} = (I_{k+p+r_1} - \Sigma\Sigma^+) \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$  et où  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Z_1$  sont des matrices arbitraires de dimensions appropriées.  $\square$

Les conditions d'existence des matrices paramétriques  $Y_1$  et  $Z_1$  sont telles que l'observateur (4.93) fractionnaire avec  $0 < \alpha < 1$  soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire que la condition (1) de la proposition 4.9.1 soit satisfaite.

Le problème revient alors à étudier la stabilité asymptotique du système fractionnaire

$$D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) + TV[\Psi(\hat{x}(t)) - \Psi(x(t))] \quad 0 < \alpha < 1$$

car, quand  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , l'erreur d'observation  $e(t) \rightarrow 0$ , ce qui assure la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (4.97).

### 4.9.3 Stabilité de l'erreur d'observation

Sous l'hypothèse 4.9.1, la stabilité asymptotique du système fractionnaire

$$D^\alpha \varepsilon(t) = N\varepsilon(t) + TV[\Psi(\hat{x}(t)) - \Psi(x(t))]$$

avec  $0 < \alpha < 1$  est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 4.9.1.** *Sous l'hypothèse 4.9.1 et la condition (4.91), il existe un observateur de la forme (4.93) où  $0 < \alpha < 1$  assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (c'est-à-dire la condition (1) de la proposition 4.9.1 est satisfaite) si*

1. *il existe les matrices  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P_0 = P_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que*

$$\sum_{i=1}^2 (\text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\mathbb{A}^T P_0)\} - \text{Sym}\{\Gamma_{i1} \otimes (\mathbb{X}^T L)\}) < 0 \quad (4.104)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par (2.160),  $W_1^T = LP_0^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Y_1 \end{bmatrix}^T$

$$\text{et } \mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix},$$

2. *l'état initial  $x_0$  satisfait*

$$\|x_0\| < \left( \frac{\alpha \|N\|}{2\lambda\theta^{q+1} \|T\| \|V\|} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.105)$$



De plus, l'état du système  $x(t)$  vérifie

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|N\| t^\alpha} \left( 1 - \frac{2\lambda\theta^{q+1} \|x_0\|^q \|T\| \|V\|}{\alpha \|N\|} \left( 1 - \frac{1}{1 + \|N\| \left(\frac{t}{2}\right)^q} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall t \geq 0, \quad (4.106)$$

où  $\theta$  est défini dans le corollaire 2.4.1 en remplaçant  $A$  par  $N$ . ■

*Démonstration.* La preuve de ce théorème s'appuie sur les démonstrations des théorèmes 3.8.2 et 4.8.1. ●

## 4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche originale pour la stabilisation des systèmes non linéaires à dérivée d'ordre non entier.

Dans un premier temps, nous avons proposé des conditions suffisantes de stabilisation pour les systèmes non linéaires affines fractionnaires par l'utilisation des généralisations du lemme de Gronwall-Bellman. La stabilisation de ces systèmes non linéaires fractionnaires est basée sur deux approches différentes :

- la première utilise la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un seul paramètre et est également basée sur l'utilisation de l'approche Mittag-Leffler lorsque la dérive du système non linéaire fractionnaire est linéaire,
- la seconde est basée sur la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres couplée avec l'approche Mittag-Leffler lorsque la dérive est non linéaire.

Dans ces deux approches des conditions suffisantes sont proposées pour assurer la stabilisation asymptotique par retour d'état statique et par retour de sortie statique de cette classe de systèmes non linéaires fractionnaires. Un exemple numérique illustre la méthode proposée.

La deuxième approche est basée sur des inégalités matricielles linéaires généralisées  $\mathcal{GLMI}$  combinées avec la nouvelle généralisation de lemme de Gronwall-Bellman permettant ainsi de garantir des conditions suffisantes de stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique pour cette classe de systèmes non linéaires fractionnaires.

L'approche basée sur la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman a été étendue aux cas de la commande basée sur un observateur et de la stabilisation asymptotique robuste en présence d'incertitudes non linéaires paramétriques additives et multiplicatives pour les systèmes affines non linéaires fractionnaires.

Nous avons proposé également une méthode de stabilisation asymptotique basée sur une approche utilisant, d'une part, les propriétés de la fonction de Mittag-Leffler et, d'autre part, sur des inégalités matricielles linéaires couplées avec la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un paramètre.

Des conditions suffisantes ont été obtenues via ces deux approches permettant de garantir la stabilisation asymptotique d'une classe de systèmes singuliers non linéaires fractionnaires avec  $0 < \alpha < 1$ .

Pour la stabilisation asymptotique robuste des systèmes singuliers non linéaires fractionnaires incertains, nous avons considéré que les paramètres incertains, supposés constants, apparaissent dans la matrice dynamique et sont bornés en norme. Pour un retour d'état proportionnel dérivé, nous avons établi des conditions suffisantes de stabilisation asymptotique robuste pour cette classe de systèmes singuliers fractionnaires incertains avec  $0 < \alpha < 1$ .

Finalement, nous avons proposé des observateurs pour les systèmes non linéaires fractionnaires et les systèmes singuliers non linéaires fractionnaires. L'approche utilisée est basée sur la résolution d'un système d'équations de Sylvester et sur l'application de la nouvelle généralisation de lemme de Gronwall-Bellman pour assurer la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons proposé une méthode de stabilisation des systèmes non linéaires à dérivée d'ordre entier et des systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires. L'approche utilisée est basée sur la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman permettant de garantir des conditions suffisantes de stabilisation.

Ce travail s'inscrit dans un des axes de la théorie de la commande des systèmes complexes non linéaires, la complexité étant dans l'ordre non entier de la dérivation des équations différentielles décrivant une classe de processus non linéaires.

Ce mémoire peut se décomposer en deux grandes étapes principales :

- développer une approche originale et pertinente pour la stabilisation de systèmes non linéaires d'ordre entier,
- adapter cette méthodologie aux systèmes avec dérivation non entière.

Nos contributions apparaissent à partir du premier chapitre de ce mémoire consacré à une nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. Cette généralisation peut se présenter sous deux variantes, une première variante qui ne tient compte d'un seul paramètre et une deuxième variante qui ne prend en compte que deux paramètres. La démonstration de cette généralisation est établie en annexe A. Cette généralisation du lemme de Gronwall-Bellman est appliquée à la stabilisation par retour d'état et de sortie statique des systèmes non linéaires affines en la commande. L'accent est mis sur la spécificité de cette approche qui permet de prendre en compte une grande classe de non linéarités et qui est bien adaptée au contexte de la commande robuste en présence d'incertitudes paramétriques.

Le deuxième chapitre du mémoire est dédié aux systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles d'ordre non entier et au rappel des principaux résultats de la littérature concernant ces systèmes. Dans un premier temps, nous présentons des exemples de processus décrits par équations différentielles avec une dérivation non entière. Puis nous exposons la théorie de la dérivation non entière : différents types de dérivation non entière (Grünwald-Leitnikov, Riemann-Liouville et Caputo), transformation de Laplace, fonctions de Mittag-Leffler, critères de stabilité, ...

Nous justifions également le choix de la dérivation au sens de Caputo pour la suite des développements présentés dans ce manuscrit.

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à la stabilisation des systèmes linéaires avec dérivation non entière. Nous nous sommes intéressés à la commande par retour d'état statique et par retour de sortie statique, ainsi qu'à la commande par retour de sortie via un observateur. L'approche est basée soit sur la fonction de Mittag-Leffler, soit

sur des inégalités matricielles linéaires (LMI) appliquées dans un domaine (convexe ou non) du plan complexe. La méthodologie mise en œuvre dans ce chapitre est étendue à la stabilisation robuste en présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle. Pour conclure ce chapitre, nous proposons une extension de ces résultats au cas des systèmes singuliers fractionnaires.

Enfin, le quatrième chapitre du mémoire est dédié à la stabilisation asymptotique des systèmes non linéaires affines en la commande avec dérivation non entière. L'application de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à la fonction de Mittag-Leffler a permis de proposer des stratégies de stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique, ainsi que par retour de sortie basée sur un observateur. Comme dans le chapitre précédent, nous nous sommes attachés à étendre ces résultats aux systèmes non linéaires fractionnaires avec des incertitudes non linéaires paramétriques et aux systèmes singuliers non linéaires fractionnaires.

## Perspectives

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements sur les systèmes non linéaires fractionnaires qui restent ouverts. Cependant, des extensions peuvent être apportées à notre travail. Nous pouvons notamment proposer les perspectives suivantes :

1. la recherche de nouvelles fonctions de Lyapunov adaptées aux systèmes non linéaires fractionnaires et permettant également de réduire le conservatisme des approches actuellement disponibles dans la littérature.
2. la recherche d'une structure d'observateurs robustes (extension au filtrage  $\mathcal{H}_\infty$ ) au cas des systèmes à dérivée d'ordre non entier comportant des bruits dans la dynamique et la sortie du système.
3. la commande basée sur un observateur des systèmes non linéaires fractionnaires pour la synchronisation chaotique avec, par exemple, des applications aux communications sécurisées.
4. l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité (régularité, causalité et stabilité) pour les systèmes singuliers fractionnaires.

Ces perspectives constituent des orientations possibles pour des travaux futurs qui trouverons leurs place à la fois dans un cadre théorique du calcul fractionnaire mais aussi dans un cadre industriel demandeurs de telles investigations.

Enfin, il serait intéressant de valider les résultats présentés dans ce mémoire sur des processus réels.

# Annexe A

## Sur la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman

Nous allons démontrer quelques théorèmes relatifs à la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman qui sont utilisées dans ce mémoire.

### A.1 Forme standard du lemme de Gronwall-Bellman

**Lemme A.1.1.** [Vid93] (p 292) [DV75] (p 252) Soit

- i)  $f, g$  et  $k$ , fonctions intégrables et définies de  $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ ,
- ii)  $g \geq 0, k \geq 0$ ,
- iii)  $g \in \mathcal{L}_\infty$ ,
- iv)  $gk$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  satisfait

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau)u(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{A.1})$$

alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau)f(\tau) \exp\left(\int_\tau^t k(s)g(s) ds\right) d\tau. \quad (\text{A.2})$$

□

**Corollaire A.1.1.** [Vid93] (p 236) [DV75] (p 252) Soit  $k : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ , intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $k \geq 0$ . Si

$$u(t) \leq c + \int_0^t k(\tau)u(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{A.3})$$

alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t k(\tau) d\tau\right). \quad (\text{A.4})$$

Les généralisations suivantes du lemme de Gronwall-Bellman sont des extensions des travaux de N. El Alami [El 86, El 95].

## A.2 Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à un seul paramètre

**Théorème A.2.1** (1<sup>ère</sup> généralisation du lemme). [El 95] *Considérons les réels  $a, b, n$  et  $k$  avec  $a < b, n > 1$  et  $k > 0$ . Soit*

i)  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction intégrable telle que, pour tout  $\alpha, \beta \in [a, b]$  avec  $\alpha < \beta$ , on ait

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds > 0, \quad (\text{A.5})$$

ii)  $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction bornée telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait

$$x(t) \leq k + \int_a^t f(s)(x(s))^n ds, \quad (\text{A.6})$$

alors, sous l'hypothèse suivante

$$1 - (n - 1)k^{n-1} \int_a^b f(s) ds > 0 \quad (\text{A.7})$$

nous avons l'inégalité suivante

$$x(t) \leq \frac{k}{\left(1 - (n - 1)k^{n-1} \int_a^t f(s) ds\right)^{\frac{1}{n-1}}} \quad \forall t \in [a, b] \quad (\text{A.8})$$

■

*Démonstration.* La relation (A.6) peut s'écrire

$$x(t) \leq k + \int_a^t (f(s)(x(s))^{\ell-1}) x(s) ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

et en utilisant A.1.1, nous obtenons

$$x(t) \leq k \exp\left(\int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right)$$

cette dernière inégalité est équivalente à

$$(x(t))^{\ell-1} \leq k^{\ell-1} \exp\left((\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right). \quad (\text{A.9})$$

Multiplions l'inégalité (A.9) précédente par  $-(\ell - 1)f(t)$ , nous obtenons

$$-(\ell - 1)f(t)(x(t))^{\ell-1} \geq -(\ell - 1)k^{\ell-1}f(t) \exp\left((\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right)$$

qui peut s'écrire

$$-(\ell - 1)f(t)(x(t))^{\ell-1} \exp\left(-(\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \geq -(\ell - 1)k^{\ell-1}f(t)$$

En utilisant la primitive de la fonction exponentielle, l'inégalité précédente donne

$$\frac{d}{dt} \left( \exp\left(-(\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \right) \geq -(\ell - 1)k^{\ell-1}f(t)$$

et en intégrant de  $a$  à  $t$ , nous obtenons

$$\exp\left(-(\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \geq 1 - (\ell - 1)k^{\ell-1} \int_a^t f(s) ds.$$

Notons que la constante d'intégration est égale à 1 (ceci se démontre lorsque  $t = a$ ). Si l'inégalité (A.7) est satisfaite, nous obtenons

$$\exp\left((\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \leq \frac{1}{1 - (\ell - 1)k^{\ell-1} \int_a^t f(s) ds}. \quad (\text{A.10})$$

Les inégalités (A.9) et (A.10) impliquent

$$(x(t))^{\ell-1} k^{-(\ell-1)} \leq \frac{1}{1 - (\ell - 1)k^{\ell-1} \int_a^t f(s) ds}$$

ce qui est équivalent à

$$x(t) \leq \frac{k}{\left(1 - (\ell - 1)k^{\ell-1} \int_a^t f(s) ds\right)^{\frac{1}{\ell-1}}}. \quad (\text{A.11})$$

•

## A.3 Nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à deux paramètres

**Théorème A.3.1.** *Soit*

- i)  $a, b, k \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq a < b$ ,  $k > 0$ , deux réels  $\ell > 1$  et  $p \geq 1$
- ii)  $f_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ ,  $f_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  deux fonctions intégrables telles que, pour tout  $\alpha, \beta \in [a, b]$  avec  $(0 \leq \alpha < \beta)$ , on ait

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_1(s) ds > 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_2(s) ds > 0,$$

iii)  $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction bornée telle que, pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait

$$x(t) \leq k + \int_a^t (f_1(s)(x(s))^\ell + f_2(s)(x(s))^p) ds. \quad (\text{A.12})$$

alors, sous l'hypothèse suivante

$$1 - (\ell + p - 2) \left( k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds \right) > 0 \quad (\text{A.13})$$

nous avons l'inégalité suivante

$$x(t) \leq \frac{k}{\left( 1 - (\ell + p - 2) \left( k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds \right) \right)^{\frac{1}{\ell + p - 2}}}. \quad (\text{A.14})$$

■

*Démonstration.* La relation (A.12) peut s'écrire sous la forme

$$x(t) \leq k + \int_a^t (f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1}) x(s) ds$$

et en utilisant le corollaire A.1.1, nous obtenons

$$x(t) \leq k \exp \left( \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right) \quad (\text{A.15})$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{cases} (x(t))^{\ell-1} \leq k^{\ell-1} \exp \left( (\ell-1) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right), \\ (x(t))^{p-1} \leq k^{p-1} \exp \left( (p-1) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right), \end{cases}$$

Comme  $\ell > 1$  et  $p > 1$ , les inégalités précédentes peuvent être remplacées par

$$\begin{cases} (x(t))^{\ell-1} \leq k^{\ell-1} \exp \left( (\ell+p-2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right), \\ (x(t))^{p-1} \leq k^{p-1} \exp \left( (\ell+p-2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right). \end{cases}$$

Multiplions la première inégalité par  $-(\ell + p - 2)f_1(t)$  et la seconde inégalité par  $-(\ell + p - 2)f_2(t)$ , nous obtenons les inégalités suivantes

$$\begin{cases} -(x(t))^{\ell-1} f_1(t) (\ell + p - 2) \exp \left( -(\ell + p - 2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right) \\ \quad \geq -k^{\ell-1} (\ell + p - 2) f_1(t), \\ -(x(t))^{p-1} f_2(t) (\ell + p - 2) \exp \left( -(\ell + p - 2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds \right) \\ \quad \geq -k^{p-1} (\ell + p - 2) f_2(t) \end{cases}$$



En ajoutant membre à membre et en utilisant la primitive de la fonction exponentielle sur les deux inégalités précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \exp\left(-((\ell+p-2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds)\right) \\ & \geq -k^{\ell-1}((\ell+p-2)f_1(t) - k^{p-1}(\ell+p-2)f_2(t)) \end{aligned}$$

en intégrant de  $a$  à  $t$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \exp\left(-(\ell+p-2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds\right) \\ & \geq 1 - k^{\ell-1}(\ell+p-2) \int_a^t f_1(s) ds - k^{p-1}(\ell+p-2) \int_a^t f_2(s) ds. \end{aligned}$$

Notons que la constante d'intégration est égale à 1 (ceci se démontre lorsque  $t = a$ ). Si l'inégalité (A.13) est satisfaite, nous avons

$$\begin{aligned} & \exp\left((\ell+p-2) \int_a^t f_1(s)(x(s))^{\ell-1} + f_2(s)(x(s))^{p-1} ds\right) \\ & \leq \frac{1}{1 - (\ell+p-2) \left(k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds\right)}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Les deux inégalités (A.15) et (A.16) impliquent

$$\begin{aligned} & (x(t))^{\ell+p-2} k^{-(\ell+p-2)} \\ & \leq \frac{1}{1 - (\ell+p-2) \left(k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds\right)} \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$x(t) \leq \frac{k}{\left(1 - (\ell+p-2) \left(k^{\ell-1} \int_a^t f_1(s) ds + k^{p-1} \int_a^t f_2(s) ds\right)\right)^{\frac{1}{\ell+p-2}}}.$$

•



# Annexe B

## Compléments mathématiques

Nous donnons dans cette annexe quelques rappels de définitions et de compléments mathématiques qui sont utilisés dans ce mémoire.

### B.1 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est une opération portant sur les matrices. Il s'agit d'un cas particulier du produit tensoriel. Il est ainsi dénommé en hommage au mathématicien allemand Léopold Kronecker.

Soit deux matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ , leur produit de Kronecker est la matrice  $A \otimes B$  de dimension  $\mathbb{R}^{mk \times n\ell}$ , en d'autres termes

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où  $A_{ij}$  est l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  colonne et de la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ .

Sous réserve de compatibilité dans les dimensions des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  nous avons les équations suivantes

- $1 \otimes A = A = A \otimes 1$
- $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
- $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$
- En général :  $A \otimes B \neq B \otimes A$
- $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$

## B.2 Les inégalités matricielles linéaires (LMI)

**Définition B.2.1.** Une LMI est une inégalité matricielle de la forme

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^n x_i A_i + B > 0 \quad (\text{B.2})$$

où les matrices  $A_i$ , ( $i = 1 \dots n$ ) et  $B$  sont des matrices symétriques de dimension  $n$ , et  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

On peut remarquer que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n / \mathcal{A}(x) > 0\}$  est un ensemble convexe. C'est pourquoi une LMI peut être considérée comme une contrainte convexe.

Dans ce mémoire, nous devons résoudre à plusieurs reprises un des problèmes d'optimisation convexe exprimés sous la forme de LMI, à savoir le "problème de réalisabilité".

**Définition B.2.2.** (Problème de réalisabilité). Il s'agit de trouver un vecteur  $x$  tel que la contrainte  $\mathcal{A}(x) > 0$  soit satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur  $x$  minimisant le scalaire  $t$  de telle sorte que :

$$-\mathcal{A}(x) < tI_n \quad (\text{B.3})$$

Si la valeur minimale de  $t$  est négative, alors le problème (B.2.1) est réalisable.

Il existe plusieurs algorithmes de résolution numérique de telles LMI. La technique que nous avons utilisée pour résoudre nos problèmes est celle exploitée par le logiciel Matlab (plus précisément "YALMIP").

## B.3 Lemme de Schur

Le lemme de Schur est l'exemple le plus classique de contraintes de type LMI rencontré tout au long de ce mémoire.

**Lemme B.3.1 (Lemme de Schur).** [BEFB94] Etant données trois matrices  $Q$ ,  $R$  et  $S$  ( $Q = Q^T$  et  $S = S^T$ ), les deux propositions suivantes sont équivalentes

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.4})$$

$$S < 0 \text{ et } Q - RS^{-1}R^T < 0 \quad (\text{B.5})$$

□

La matrice  $Q - RS^{-1}R^T$  est aussi appelée complément de Schur de  $S$ . Ce lemme reste vérifié lorsque l'on remplace " $<$ " par " $\leq$ ", et " $>$ " par " $\geq$ ".

**Lemme B.3.2 (Complément de Schur).** [LT85] Pour une matrice  $A$  inversible, le complément de Schur de  $A$ , dans la matrice  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

## B.4 Rappels sur l'équation différentielle de Bernoulli

L'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre de la forme

$$\dot{y} + \bar{a}(t)y = \bar{b}(t)y^m \quad (\text{B.7})$$

avec  $m \neq 0$ ,  $m \neq 1$  ( $m > 0$ ),  $\bar{a}(t) \in \mathbb{R}$  et  $\bar{b}(t) \in \mathbb{R}$ . En posant

$$u = \frac{1}{y^{m-1}}$$

on obtient une équation différentielle linéaire

$$\frac{1}{1-m} \dot{u} + \bar{a}(t)u = \bar{b}(t)$$

dont la solution générale est ( $c$  est une constante)

$$u(t) = e^{-(1-m) \int \bar{a}(s) ds} \left( c + (1-m) \int \bar{b}(s) e^{-(1-m) \int \bar{a}(v) dv} ds \right)$$

ce qui donne pour la fonction  $y = u^{\frac{1}{1-m}}$

$$y(t) = e^{\int \bar{a}(s) ds} \left( c + (1-m) \int \bar{b}(s) e^{-(1-m) \int \bar{a}(v) dv} ds \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Si la fonction  $y$  passe par le point  $y_0$  en  $t = 0$ , alors la solution devient

$$y(t) = y_0 e^{\int_0^t \bar{a}(s) ds} \left( 1 + (1-m) y_0^{m-1} \int_0^t \bar{b}(s) \left( e^{\int_0^s \bar{a}(v) dv} \right)^{m-1} ds \right)^{\frac{1}{1-m}}. \quad (\text{B.8})$$

## B.5 Coefficients binomiaux

### B.5.1 Définitions et propriétés

Le coefficient binomial de l'entier naturel  $n$  et de l'entier naturel  $k$  est défini comme étant l'entier naturel

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } n \geq k \geq 0 \quad (\text{B.9})$$

et

$$C_n^k = \binom{n}{k} = 0 \quad \text{si } k < 0 \quad \text{ou } k > n \quad (\text{B.10})$$

Ici  $k!$  désigne la factorielle de  $k$ . On remarque qu'il existe deux notations : le coefficient binomial de  $n$  et  $k$  s'écrit

- $C_n^k$  ou  $C(n, k)$  et se lit "combinaison de  $k$  parmi  $n$ ",

- ou encore  $\binom{n}{k}$  et se lit “ $k$  parmi  $n$ ”.

Ces nombres sont des coefficients qui apparaissent en développant la puissance  $n^{\text{ème}}$  de  $x + y$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}. \quad (\text{B.11})$$

La relation (B.11) permet de définir des coefficients binomiaux généralisés car elle est vérifiée si l'exposant  $n$  est négatif ou non entier.

Une importante relation, la formule de Pascal, lie les coefficients binomiaux

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (\text{B.12})$$

Cette formule donne lieu au triangle de Pascal, lequel contient les nombres  $C_n^k$  à la  $n^{\text{ème}}$  ligne.

### B.5.2 Extension aux nombres complexes

Dans (B.9), l'écriture de  $C_n^k$  pour tout entier  $n$  et tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$  peut se mettre sous la forme

$$C_n^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!}, \quad (\text{B.13})$$

ce qui permet d'envisager une extension possible aussi pour tout entier  $n$  négatif et tout entier  $k$  strictement positif en utilisant (B.13).

Si l'on pose  $n = -m$ , on a la relation suivante

$$C_{-m}^k = (-1)^k C_{m+k-1}^k.$$

C'est cette forme des coefficients binomiaux qui est utilisée dans la formule du binôme négatif ainsi que dans la définition de la loi binomiale négative.

Le coefficient binomial  $C_z^k$  peut être défini pour tout nombre complexe  $z$  et tout entier naturel  $k$  de manière suivante

$$C_z^k = \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-k+1)}{k!}. \quad (\text{B.14})$$

Cette relation est utilisée dans la formulation du théorème du binôme et satisfait à la propriété (B.12).

Pour tout entier  $k$ , l'expression  $C(z, k)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $k$  à coefficients rationnels. Tout polynôme  $p(z)$  de degré  $d$  peut être écrit sous la forme

$$p(z) = \sum_{k=0}^d a_k C_z^k \quad (\text{B.15})$$

où  $a_k$  sont des constantes.

# Annexe C

## Sur la stabilité des systèmes d'ordre non entier

### C.1 $\mathcal{D}$ -stabilité et inégalités matricielles linéaires généralisées $\mathcal{G}$ -LMI

#### C.1.1 Définition d'une région $\mathcal{GLMI}$

**Définition C.1.1.** [Chi96, Bac98] Un sous ensemble  $\mathcal{D}$  du plan complexe est appelé région  $\mathcal{GLMI}$  d'ordre  $\ell$  (pour "Generalized LMI") s'il existe  $\theta_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ ,  $\psi_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ ,  $H_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$  and  $J_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$  tels que

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \omega = [\omega_1 \dots \omega_m]^T \in \mathbb{C}^m, f_{\mathcal{D}}(z, \omega) < 0, g_{\mathcal{D}}(\omega) = 0_{\ell, \ell}\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{C.1})$$

où

$$f_{\mathcal{D}}(z, \omega) = \sum_{i=1}^m (\theta_k \omega_k + \theta_k^* \bar{\omega}_k + \psi_k z \omega_k + \psi_k^* \bar{\omega}_k \bar{z}) \quad (\text{C.2})$$

et

$$g_{\mathcal{D}}(\omega) = \sum_{i=1}^m (H_k \omega_k + J_k \bar{\omega}_k). \quad (\text{C.3})$$

#### C.1.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité dans une région $\mathcal{GLMI}$

**Définition C.1.2.** [Chi96, Bac98, CGA99] Une matrice  $A$  est dit  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement localisées dans cette région  $\mathcal{D}$  du plan complexe.

Dans le cas où cette région  $\mathcal{D}$  est une région  $\mathcal{GLMI}$  de la forme (C.1), le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de  $\mathcal{D}$ -stabilité pour la matrice  $A$  ([Bac98], pp. 72 et 73).

**Théorème C.1.1.** [Chi96, Bac98] Soit une matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\mathcal{D}$  une région  $\mathcal{GLMI}$  définie par (C.1), (C.2) et (C.3).  $A$  est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement s'il existe un ensemble de  $m$  matrices  $X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ , tel que

$$M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\}) = \sum_{i=1}^m (\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) < 0, \quad (\text{C.4})$$

$$N_{\mathcal{D}}(\{X_k\}) = \sum_{i=1}^m (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = 0_{\ell, \ell}. \quad (\text{C.5})$$

*Démonstration.* Voir [Chi96, Bac98]. •

*Remarque C.1.1.* Les matrices  $M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\})$  et  $N_{\mathcal{D}}(\{X_k\})$  dans le théorème C.1.1 peuvent être immédiatement déduites de l'écriture de  $f_{\mathcal{D}}(z, \omega)$  et  $g_{\mathcal{D}}(\omega)$  dans la définition C.1.1 en effectuant les substitutions suivantes [Bac98]

$$(\omega_k, \bar{\omega}_k, z\omega_k, \bar{\omega}_k \bar{z}) \longleftrightarrow (\otimes X_k, \otimes X_k^*, \otimes (AX_k), \otimes (AX_k)^*). \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Application à la $\mathcal{D}$ -stabilité dans une union de sous-régions convexes

Ce paragraphe est consacré au moyen par lequel nombre de régions simples polynomiales peuvent être formulées comme des régions  $\mathcal{GLMI}$ . En effet, ces régions résultent en réalité d'unions de sous-régions convexes polynomiales convexes, pas nécessairement symétriques par rapport à l'axe réel.

Nous décrivons ici des régions polynomiales, souvent utilisées dans les problèmes de placement de pôles, et qui peuvent être également décrites par une formulation  $\mathcal{GLMI}$ .

### C.2.1 Régions du premier ordre

Les régions de premier ordre sont décrites de manière cartésienne par ([Bac98], pp. 158 et 159)

$$\mathcal{D} = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + d_1 x + d_2 y < 0\}. \quad (\text{C.7})$$

Puisque l'on a

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j}, \quad (\text{C.8})$$

on peut déduire

$$\mathcal{D} = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + d_1 \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + d_2 \left(\frac{z - \bar{z}}{2j}\right) < 0\}, \quad (\text{C.9})$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{D} = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + \frac{d_1 - jd_2}{2} z + \frac{d_1 + jd_2}{2} \bar{z} < 0\}. \quad (\text{C.10})$$



Cette formulation est identifiable avec la formulation polynomiale d'une région de premier ordre

$$\mathcal{D} = \{(z = x + iy) \in \mathbb{C} \mid \beta_0 + \beta_{,1} z + \beta_2 \bar{z} < 0\} \quad (\text{C.11})$$

en posant

$$\beta_0 = d_0, \quad \beta_1 = \frac{d_1 - jd_2}{2}, \quad \beta_2 = \frac{d_1 + jd_2}{2} = \beta_1^*. \quad (\text{C.12})$$

### C.2.2 Formulation $\mathcal{GLMI}$ de l'union de sous-régions convexes du premier ordre

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité d'une matrice lorsque  $\mathcal{D}$  est une union de certaines sous-régions convexes. Nous montrons que de nombreuses régions de ce type peuvent être décrites par une formulation  $\mathcal{GLMI}$  ([Bac98], pp. 79 et 80).

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des régions  $\mathcal{D}$  pouvant être décrites par

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^m \mathcal{D}_k \quad (\text{C.13})$$

où les sous-régions  $\mathcal{D}_k$  peuvent être définies de la manière suivante (avec  $p = m$  car on se limite aux régions du premier ordre)

$$\mathcal{D}_k \in \mathcal{C}_1 \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{C.14})$$

et où  $\mathcal{C}_1$  est l'ensemble des régions du premier ordre, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{C} \mid f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0\} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (\text{C.15})$$

En réalité, la région  $\mathcal{D}$  peut être exprimée comme en (C.1), (C.2) et (C.3) avec  $\ell = m+1$  et

$$\theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & -\varepsilon_k^m \end{bmatrix}, \quad \psi_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Psi_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_m \end{bmatrix}, \quad H_k = -J_k = \varepsilon_{k+1}^{m+1} \quad (\text{C.16})$$

où les matrices  $\varepsilon_j^i \in \mathbb{R}^{j \times j}$  ont toutes leurs composantes nulles à l'exception d'un "1" à la position  $(i, i)$ , avec

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (\text{C.17})$$

Dans ce qui suit, on se limitera uniquement à l'ensemble  $\mathcal{C}_1$  des régions polynomiales du premier ordre.

### C.2.3 Approche $\mathcal{GLMI}$ pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire si $0 < \alpha < 1$

Le résultat de stabilité des systèmes linéaires fractionnaires établi [SMF10] dans le cas où  $0 < \alpha < 1$  et donné par le théorème 2.6.2 est basé sur une analyse par décomposition de domaine de stabilité. Cette analyse est basée sur l'union de deux sous-régions convexes de premier ordre  $\mathcal{D}_{s_1}$  et  $\mathcal{D}_{s_2}$  et ces régions résultent d'une rotation de la moitié gauche des angles  $\varphi_1 = \varphi$  et  $\varphi_2 = -\varphi$  où  $\varphi = (1 - \alpha)\frac{\pi}{2}$  (figure C.1).

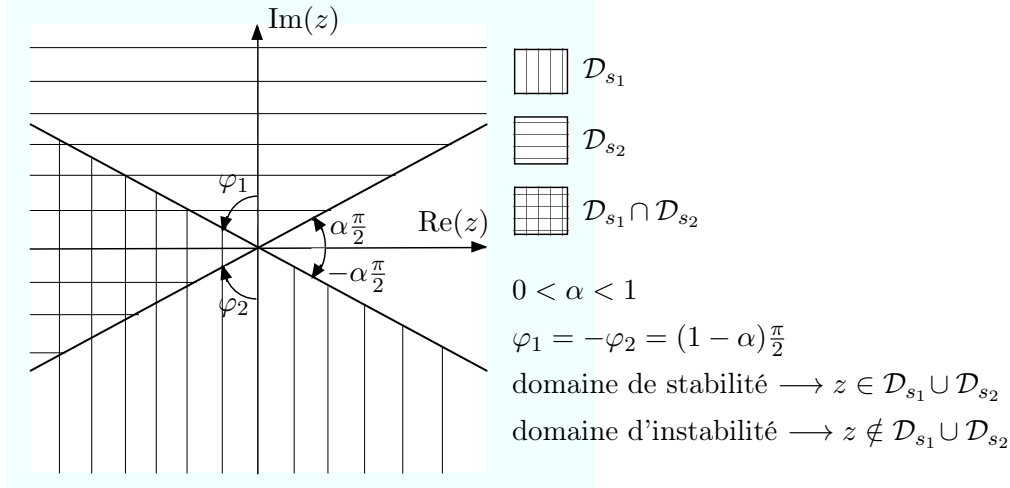


FIGURE C.1: Région de stabilité pour  $0 < \alpha < 1$  considérée comme l'union de 2 régions convexes

Le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  est défini par

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_{s_1} \cup \mathcal{D}_{s_2} \quad (\text{C.18})$$

avec

$$\mathcal{D}_{s_k} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_k}) < 0\}, \quad \forall k \in \{1, 2\}. \quad (\text{C.19})$$

où  $\mathcal{D}_{s_1}$  est la région située au-dessous de la droite ayant une pente négative et  $\mathcal{D}_{s_2}$  est la région située au-dessus de la droite ayant une pente positive.

#### Définition des régions $\mathcal{D}_{s_i}$

Supposons que  $\mathcal{D}_{s_i}$  est le demi-plan complexe situé au-dessus de la droite  $y = a_i x + b_i$  avec  $a_i = -\cot(\varphi_i)$  et  $\varphi_i = -0.5\pi + \arctan(a_i)$ . On a donc  $z \in \mathcal{D}_{s_i}$  si et seulement si

$$a_i x + b_i - y_i < 0$$

et on a les équivalences suivantes (en utilisant les relations (C.7) à (C.12) et (C.15))

$$\begin{aligned} a_i x + b_i - y_i < 0 &\iff -\cot(\varphi_i)x + b_i - y < 0 \\ &\iff b_i + 0.5(-\cot(\varphi_i) + j)z + 0.5(-\cot(\varphi_i) - j)\bar{z} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \frac{2b_i}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} + \frac{-\cot(\varphi_i) + j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}z + \frac{-\cot(\varphi_i) - j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}\bar{z} < 0 \\ &\iff \alpha_i + \beta_i z + \beta_i^* \bar{z} < 0 \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_i = \frac{2b_i}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}, \quad \beta_i = \frac{-\cot(\varphi_i) + j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} \quad \text{et} \quad |\beta_i| = 1$$

où  $x = 0.5(z + \bar{z})$  et  $y = 0.5(z - \bar{z})$ . Avec  $\tan(a_i) = 0.5\alpha\pi$ , on obtient

$$\varphi_i = -(1 - \alpha)0.5\pi \quad \text{et} \quad e^{j\varphi_i} = \frac{a - j}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{-\cot(\varphi_i) - j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} = \beta_i^*.$$

Si les calculs se font par rapport au demi-plan complexe en dessous de la droite, alors on effectue les remplacements suivants

$$\begin{aligned} a_i x + b_i - y_i < 0 &\longrightarrow -a_i x - b_i + y_i < 0, & a_i = -\cot(\varphi_i) &\longrightarrow a_i = -\cot(\varphi_i) \\ \varphi_i = -0.5\pi + \arctan(a_i) &\longrightarrow \varphi_i = 0.5\pi - \arctan(a_i) \\ 0.5(-\cot(\varphi_i) + j)z &\longrightarrow 0.5(\cot(\varphi_i) - j)z, & 0.5(-\cot(\varphi_i) - j)\bar{z} &\longrightarrow 0.5(\cot(\varphi_i) + j)\bar{z} \\ \varphi_i = -(1 - \alpha)0.5\pi &\longrightarrow \varphi_i = (1 - \alpha)0.5\pi, & e^{j\varphi_i} = \frac{a - j}{\sqrt{a^2 + 1}} &\longrightarrow e^{j\varphi_i} = \frac{-a + j}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ e^{j\varphi_i} = \frac{-\cot(\varphi_i) - j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} = \beta_i^* &\longrightarrow e^{j\varphi_i} = \frac{\cot(\varphi_i) + j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} = \beta_i^*. \end{aligned}$$

On obtient  $e^{j\varphi_i} = \beta_i^*$ . □

### Définition des régions $\mathcal{D}_{s_i}$ avec la relation (C.19)

La relation (C.19) avec  $b_i = \alpha_i = 0$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{s_1} &\longrightarrow -x \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) > y \iff \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_1}) = \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi}) = x \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ \mathcal{D}_{s_2} &\longrightarrow x \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < y \iff \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_2}) = \operatorname{Re}(ze^{j\varphi}) = x \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) - y \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < 0 \end{aligned}$$

avec  $\tan(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$ ,  $\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$  et  $\varphi = \varphi_1 = -\varphi_2 = (1 - \alpha)\frac{\pi}{2}$ . □

En utilisant (C.15), (C.16), (C.17) et (C.19), les paramètres intervenant dans les relations (C.4) et (C.5) du théorème C.1.1 sont (avec  $\varphi = (1 - \alpha)\frac{\pi}{2}$ )

$$H_1 = -J_1 = -\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = -J_2 = -\theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.20a})$$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_1 = \psi_2^* \quad (\text{C.20b})$$

dans le cas où  $0 < \alpha < 1$  qui correspond à la région  $\mathcal{D}_{s_1} \cup \mathcal{D}_{s_2}$  dans figure C.1. Les relations (C.4) et (C.5) du théorème C.1.1 deviennent

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1^* + \begin{bmatrix} e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (AX_1) + \begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (X_1^* A^T) \\
 + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes X_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes X_2^* + \begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (AX_2) + \begin{bmatrix} e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (X_2^* A^T) \\
 = & \begin{bmatrix} e^{j\varphi}(AX_2 + X_1^* A^T) + e^{-j\varphi}(AX_1 + X_2^* A^T) & 0 & 0 \\ 0 & -(X_1 + X_1^*) & 0 \\ 0 & 0 & -(X_2 + X_2^*) \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{C.21}) \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1^* + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes X_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes X_2^* \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 - X_1^* & 0 \\ 0 & 0 & X_2 - X_2^* \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.22})
 \end{aligned}$$

Puisque les matrices  $X_1$  et  $X_2$  sont hermitiennes, la relation (C.22) implique que  $X_1 = X_1^*$  et  $X_2 = X_2^*$ . La relation (C.21) implique que les matrices complexes  $X_1$  et  $X_2$  sont définies positives ( $X_1 > 0$  et  $X_2 > 0$ ).

En effet, puisque  $X_1 = X_1^*$  et  $X_2 = X_2^*$  alors les valeurs propres de  $X_1$  et  $X_2$  sont réelles [LT85] et  $X_1 + X_1^* = 2X_1$ ,  $X_2 + X_2^* = 2X_2$ . De plus, on a la relation suivante [Vid93] (p. 22, 23 et 26)

$$-0.5\lambda_{\max}(-X - X^*) \leq \text{Re}(\lambda_i(X)) \leq 0.5\lambda_{\max}(X + X^*) \quad (\text{C.23})$$

qui se réécrit ainsi

$$0 \leq \lambda_{\min}(X_1) \leq \lambda_i(X_1) \leq \lambda_{\max}(X_1) \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_{\min}(X_2) \leq \lambda_i(X_2) \leq \lambda_{\max}(X_2) \quad (\text{C.24})$$

car

$$-0.5\lambda_{\max}(X_k - X_k^*) = -\lambda_{\max}(-X_k) = -1 \times (-\lambda_{\min}(X_k)) = \lambda_{\min}(X_k) \quad \text{avec} \quad k = 1, 2. \quad (\text{C.25})$$

On obtient donc bien  $X_1 > 0$  et  $X_2 > 0$ .

# Bibliographie

- [AC08] H.S. Ahn and Y.Q. Chen. Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems. *Automatica*, 44 :2985–2988, 2008.
- [ACP07] H.S. Ahn, Y.Q. Chen, and I Podlubny. Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality. *Applied Mathematics and Computation*, 187 :27–34, 2007.
- [AEA04] W.M. Ahmad, R. El-Khazali, and Y. Al-Assaf. Stabilization of generalized fractional order chaotic systems using state feedback control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22 :141–150, 2004.
- [Ahn07] H.S. Ahn. Feedback stabilization of singular fractional-order linear systems. In *Workshop USU FO-Day*, Gwangju, Korea, 2007.
- [Arg53] R.P. Argarwal. A propos d’une note de M. Pierre Humbert. *C. R. Académie des Sciences*, 236 :2031–2032, 1953.
- [AS03] W.M. Ahmad and J.C. Sprott. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16 :339–351, 2003.
- [AV73] B.D.O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis : A Modern Theory Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [Bac98] O. Bachelier. *Commande des Systèmes Linéaires Incertains : Placement de Pôles Robuste en  $\mathcal{D}$ -Stabilité*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1998.
- [Bag79] R.L. Bagley. *Application of Generalized Derivatives to Viscoelasticity*. PhD thesis, Air Force Institute of Technology, 1979.
- [Bag89] R.L. Bagley. The initial value problem for fractional order differential equations with constant coefficients. Technical Report AFIT-TR-88-1, Air Force Institute of Technology, 1989.
- [BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [BLB<sup>+</sup>00] J. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Heat flux stimulation through inverted non integer identification models. *International Journal of Thermal Science*, 39 :374–389, 2000.
- [BT83] R.L. Bagley and P.J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27 :201–210, 1983.

- [BT84] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On the appearance of the fractional derivatives in the behaviour of real materials. *J. Applied Mechanics*, 41 :294–298, 1984.
- [BT86] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On fractional calculus models of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 23 :918–925, 1986.
- [Cap67] M. Caputo. Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13 :529–539, 1967.
- [CAP06] Y.Q. Chen, H.S. Ahn, and I. Podlubny. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. *Signal Processing*, 86 :2611–2618, 2006.
- [CBM07] M. Chaabane, O. Bachelier, and D. Mehdi. Admissibility and state feedback admissibilization of discrete singular systems : an LMI approach. Technical Report 20070208DM, LAII-ESIP, Poitiers, France, 2007.
- [CDFP10] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, and I. Petráš. *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*. World scientific series on nonlinear science, Series A. World scientific, Singapore, 2010.
- [CGA99] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44 :2257–2270, 1999.
- [CH99] D.L. Chu and D.W.C. Ho. Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44 :405–412, 1999.
- [Chi96] M. Chilali. *Méthodes LMI pour l'Analyse et la Synthèse Multi-critère*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1996.
- [CLS98] Y.Y. Cao, J. Lam, and Y.X. Sun. Static output feedback stabilization : an ILMI approach. *Automatica*, 34 :1641–1645, 1998.
- [CM71] M. Caputo and F. Mainardi. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91 :134–137, 1971.
- [COBB00] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. In *Proc. IFAC Symposium on System Identification*, Santa Barbara, USA, 2000.
- [CPX09] Y.Q. Chen, I. Petráš, and D. Xue. Fractional order control - a tutorial. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, St-Louis, USA, 2009.
- [CT99] C.A.R. Crusius and A. Trofino-Neto. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44 :1053–1057, 1999.
- [CW87] B.S. Chen and C.C. Wong. Robust linear controller design : time domain approach. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 32 :161–164, 1987.
- [Dai89] L. Dai. *Singular Control Systems*, volume 118 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Dar09] M. Darouach.  $\mathcal{H}_\infty$  unbiased filtering for linear descriptor systems via LMI. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 53 :1966–1972, 2009.

- 
- [Das08] S. Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, Heidelberg, 2008.
- [Dav36] H.T. Davis. *The Theory of Linear Operators*. Principia Press, Bloomington, USA, 1936.
- [DBB08] M. Darouach and L. Boutat-Baddas. Observers for a class of nonlinear singular systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 53 :2627–2633, 2008.
- [DFFL95] K. Diethelm, N. Ford, A. Freed, and Y. Luchko. Algorithms for the fractional calculus : a selection for numerical methods. *Comput. Methods Appl. Mech Eng*, 194 :743–773, 1995.
- [DN79] B. Dziurla and R. Newcomb. The Drazin inverse and semi-state equations. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, pages 283–289, Delft, Netherlands, 1979.
- [DN97] R. Darling and J. Newman. On the short behaviour of porous interaction electrodes. *J. of the Electrochemical Society*, 144 :3057–3063, 1997.
- [Dor94] L. Dorckák. Numerical models for simulation the fractional-order control systems. Technical Report UEF-04-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovak, 1994.
- [Dug94] S. Dugowson. *Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation*. PhD thesis, Université de Paris XIII, Villetaneuse , France, 1994.
- [DV75] C.A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems Input-Output Properties*. Electrical Sciences. Academic Press, New York, 1975.
- [DZH96] M. Darouach, M. Zasadzinski, and M. Hayar. Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41 :1068–1072, 1996.
- [Ech04] A. Echchatbi. *Observation et Stabilisation Robuste par Retour d'Etat des Systèmes Bilinéaires non Homogènes et Application aux Machines Tournantes*. PhD thesis, Ecole Mohammedia d'Ingénieurs, Rabat, Morocco, 2004.
- [El 86] N. El Alami. *Analyse et Commande Optimale des Systèmes Bilinéaires Distribués. Applications aux Procédés Energétiques*. PhD thesis, Univesité de Perpignan, France, 1986. Doctorat d'Etat.
- [El 95] N. El Alami. A generalization of Gronwall's lemma. In *Conférence Internationale sur les Equations Différentielles*, Marrakesh, Morocco, 1995.
- [El 01] J. El Alami. *Stabilisation Robuste par Retour de Sortie des Systèmes Bilinéaires et Application à un Bioréacteur*. PhD thesis, Ecole Mohammedia d'Ingénieurs, Rabat, Morocco, 2001. Doctorat d'Etat.
- [EL77] M. España and I.D. Landau. Reduced order bilinear models for distillations columns. *Automatica*, 14 :345–355, 1977.
- [EOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aït Rami. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 42 :1171–1176, 1997.

- [Erd55a] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [Erd55b] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 2. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [Erd55c] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 3. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [FMS10] C. Farges, M. Moze, and J. Sabatier. Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. *Automatica*, 46 :1730–1734, 2010.
- [Fra87] B.A. Francis. *A course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Fu04] M. Fu. Pole placement via static output feedback is NP-hard. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 49 :855–857, 2004.
- [Fuj04] A. Fujimori. Optimization of static output feedback using substitutive LMI formulation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 49 :995–999, 2004.
- [GdS98] J.C. Geromel, C.C. de Souza, and R.E. Skelton. Static output feedback controllers : stability and convexity. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 43 :120–125, 1998.
- [Gér08] B. Gérard. *Observateurs et Commande Basée sur un Observateur pour les Systèmes Bilinéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 2008.
- [GL95] M. Green and D.N.J. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [Gu94] K. Gu.  $\mathcal{H}_\infty$  control of systems under norm bounded uncertainties in all systems matrices. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39 :1320–1322, 1994.
- [Hać92] A. Hać. Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 114 :556–562, 1992.
- [HLQ95a] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, and H.K. Qammer. Chaos in a fractional order Chua’s system. *IEEE Trans. Circ. Syst. I : Fund. Theory & Appli.*, 42 :485–490, 1995.
- [HLQ95b] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, and H.K. Qammer. Chaos in a fractional order chua’s system. *IEEE Trans. Circ. Syst. I : Fund. Theory & Appli.*, 42 :485–490, 1995.
- [Hot98] R. Hotzel. *Contribution à la Théorie Structurelle et à la Commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires*. PhD thesis, Université de Paris XI, Orsay, France, 1998.
- [Ibr09] S. Ibrir. LMI approach to regularization and stabilization of linear singular systems : the discrete-time case. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 52 :276–279, 2009.
- [ISG94] T. Iwasaki, R.E. Skelton, and J.C. Geromel. Linear quadratic suboptimal control with static output feedback. *Syst. & Contr. Letters*, 23 :421–430, 1994.



- 
- [Kal63] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM J. Contr.*, 1 :152–192, 1963.
- [KHLS81a] S.A.G.R. Karunathilaka, N.A. Hampson, R. Leek, and T.J. Sinclair. The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. i. variation with state of charge. *Journal of Applied Electrochemistry*, 11 :365–372, 1981.
- [KHLS81b] S.A.G.R. Karunathilaka, N.A. Hampson, R. Leek, and T.J. Sinclair. The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. ii. an interpretation of the data. *Journal of Applied Electrochemistry*, 11 :715–721, 1981.
- [KOS76] P.V. Kokotovic, R.E. O'Malley Jr, and P. Sannuti. Singular perturbations and order reduction in control theory - An overview. *Automatica*, 12 :123–132, 1976.
- [KPZ90] P.P. Khargonakar, I.R. Petersen, and K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems : quadratic stability and  $\mathcal{H}_\infty$  control theory. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 35 :356–361, 1990.
- [KS72] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control*. Wiley Interscience, New York, USA, 1972.
- [KST06] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [Las95] A. Lasia. Impedance of porous electrodes. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 397 :27–33, 1995.
- [Las99] A. Lasia. *Modern Aspects of Electrochemistry*. Kluwer Academic/Plenum, New York, 1999.
- [LC04] C. Li and G. Chen. Chaos in the fractional order Chen system and its control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22 :549–554, 2004.
- [LC09] J.G. Lu and G. Chen. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems : an LMI approach. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 54 :1294–1299, 2009.
- [LC10] J.G. Lu and Y.Q. Chen. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional-order  $\alpha$  : The  $0 < \alpha < 1$  case. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 55 :152–158, 2010.
- [LCP09] Y. Li, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45 :1965–1969, 2009.
- [LCP10] Y. Li, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 :1810–1821, 2010.
- [LCPC08] Y. Li, Y.Q. Chen, I. Podlubny, and Y. Cao. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. In *Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application*, Ankara, Turkey, 2008.
- [LH01] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley. Initialization in fractional order systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Porto, Portugal, 2001.

- [LOS96] P. Lanusse, A. Oustaloup, and D. Sutter. Multi-scalar CRONE control of multivariable plants. In *Wsc'96-Isiac*, Montpellier, France, 1996.
- [LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, Orlando, USA, 2nd edition, 1985.
- [MAN96] D. Matignon and B. Andréa-Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, Lille, France, 1996.
- [MAN97] D. Matignon and B. Andréa-Novel. Observer-based for fractional differential systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, San Diego, USA, 1997.
- [Mat94] D. Matignon. *Représentation en Variables d'État de Modèles de Guides d'Ondes avec Dérivation Fractionnaire*. PhD thesis, Université de Paris XI, Orsay, France, 1994.
- [Mat96a] D. Matignon. Recent results in fractional differential systems theory. Technical Report 96C004, École Nationale Supérieure des Télécommunications, France, 1996.
- [Mat96b] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Proc. IEEE-IMACS Syst. Man Cyber. Conf.*, Lille, France, 1996.
- [MF93] K. Matsuda and H. Fuji.  $\mathcal{H}_\infty$  optimized wave-absorbing control : analytical and experimental results. *J. Guidance, Contr. & Dynamics*, 16 :1146–1153, 1993.
- [MKOS97] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda.  $\mathcal{H}_\infty$  control for descriptor systems : a matrix inequality approach. *Automatica*, 33 :669–672, 1997.
- [ML03] G.M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ . *C. R. Académie des Sciences*, 137 :554–558, 1903.
- [ML05] G.M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. *Acta Mathematica*, 29 :101–182, 1905.
- [MM95] B. Mbodje and G. Montseny. Boundary fractional derivative control of the wave equation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 40 :378–382, 1995.
- [Moh73] R.R. Mohler. *Bilinear Control Processes*, volume 106 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York, 1973.
- [Moh91] R.R. Mohler. *Nonlinear systems : Applications to Bilinear Control*, volume 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [MR93] K.S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [Mra04] N. Mrani. *Contribution à l'Étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications*. PhD thesis, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc, 2004.
- [MSO05] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In *Proc. ASME IDET/CIE conferences*, Long-Beach, USA, 2005.

- 
- [Mül06] P.C. Müller. Modified Lyapunov equations for LTI descriptor systems. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Engineering*, 28 :448–452, 2006.
- [NZD<sup>+</sup>10] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, N.E. Radhy, and A. Bouaziz. Exponential stabilization of a class of nonlinear systems : A generalized Bellman-Gronwall lemma approach. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, xx :xx–xx, 2010. soumis.
- [NZDR09a] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Observer-based control for fractional-order continuous-time systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Shanghai, P.R. China, 2009.
- [NZDR09b] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Stabilization of a class of nonlinear affine fractional-order systems. In *Proc. Int. IFAC-IEEE Conf. Methods and Models in Automation and Robotics*, Miedzyzdroje, Poland, 2009.
- [NZDR10a] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Regularization and stabilization of singular fractional-order systems. In *Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application*, Badajoz, Spain, 2010.
- [NZDR10b] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Robust stabilization of linear and nonlinear fractional-order systems with nonlinear uncertain parameters. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Atlanta, USA, 2010.
- [NZDR10c] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Stabilization of singular fractional-order systems : an LMI approach. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Marrakesh, Morocco, 2010.
- [NZDR11] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Regularization and robust stabilization of uncertain singular fractional-order systems. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
- [NZRB09a] I. N’Doye, M. Zasadzinski, N.E. Radhy, and A. Bouaziz. Robust controller design for linear fractional-order systems with nonlinear time-varying model uncertainties. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Thessaloniki, Greece, 2009.
- [NZRB09b] I. N’Doye, M. Zasadzinski, N.E. Radhy, and A. Bouaziz. Stabilization of a class of nonlinear affine fractional-order systems using generalizations of Bellman-Gronwall lemma. In *Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. & Aut.*, Thessaloniki, Greece, 2009.
- [NZRD09] I. N’Doye, M. Zasadzinski, N.E. Radhy, and M. Darouach. Exponential observer-based stabilization for a class of affine nonlinear systems. In *Proc. Int. IFAC-IEEE Conf. Methods and Models in Automation and Robotics*, Miedzyzdroje, Poland, 2009.
- [NZRD10] I. N’Doye, M. Zasadzinski, N.E. Radhy, and M. Darouach. Stabilisation des systèmes bilinéaires fractionnaires. In *Proc. Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, Nancy, France, 2010.
- [OML95] A. Oustaloup, B. Mathieu, and P. Lanusse. The CRONE control of resonant plants : application to a flexible transmission. *European J. Contr.*, 1 :113–121, 1995.

- [OS74a] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [OS74b] K.B. Oldham and J.S. Spanier. *The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New York, 1974.
- [Ous88] A. Oustaloup. From fractality to non integer derivation through recursivity, a property common to these two concepts : a fundamental idea for a new process control strategy. In *Proc. 15th IMACS World Congress*, Paris, France, 1988.
- [Ous91] A. Oustaloup. *La Commande CRONE*. Hermes, Paris, 1991.
- [Ous94] A. Oustaloup. *La Robustesse - Analyse et Synthèse de Commandes Robustes*. Hermes, Paris, 1994.
- [Ous95] A. Oustaloup. *La Dérivation Non Entière*. Hermes, Paris, 1995.
- [Pac73] B.G. Pachpatte. A note on Gronwall-Bellman inequality. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 44 :758–762, 1973.
- [Pac75a] B.G. Pachpatte. On some generalizations of Bellman’s lemma. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 51 :141–150, 1975.
- [Pac75b] B.G. Pachpatte. On some integral inequalities similar to Bellman-Bihari inequalities. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 49 :794–802, 1975.
- [PCV04] I. Petráš, Y. Chen, and B.M. Vinagre. *Unsolved problems in the mathematics of systems and control*, volume 38, chapter Robust stability test for interval fractional-order linear systems, pages 208–210. Princeton University Press, Princeton, 2004. Ed. V. Blondel and A. Megretski.
- [PCVP05] I. Petráš, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Stability of linear time invariant systems with interval fractional-order and interval coefficients. In *Proc. Int. Conf. on Computation Cybernetics*, Austria, 2005.
- [Pet08a] I. Petráš. A note on the fractional-order Chua’s system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 38 :140–147, 2008.
- [Pet08b] I. Petráš. Stability of fractional-order systems with rational order. arXiv, 2008. 0811.4102v2.
- [Pet10] I. Petráš. A note on the fractional-order Volta system. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 15 :384–393, 2010.
- [Pod94] I. Podlubny. Fractional-order system and fractional-order controllers. Technical Report UEF-03-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia, 1994.
- [Pod99] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic, New York, 1999.
- [Pod02] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 5 :367–386, 2002.
- [Ros75a] B. Ross. *Fractional Calculus and its Applications*, volume 457 of *Lecture Notes in Mathematics*, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, pages 1–36. Springer-Verlag, New York, 1975.

- 
- [Ros75b] B. Ross. *Fractional Calculus and its Applications*, volume 457 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [RP74] H.H. Rosenbrock and A.C. Pugh. Contributions to a hierarchical theory of systems. *Int. J. Contr.*, 19 :845–867, 1974.
- [Rug81] W.J. Rugh. *Nonlinear System Theory*. Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [SADG97] V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, and K.M. Grigoriadis. Static output feedback : a survey. *Automatica*, 33 :125–137, 1997.
- [Sas99] S. Sastry. *Nonlinear Systems : Analysis, Stability and, Control*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Sch90] C.W. Scherer. *The Riccati Inequality and State-Space  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control*. PhD thesis, Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der Bayerischen Julius Maximilians-Universität Würzburg, 1990.
- [SD71] V. H. Schmidt and J. E. Drumheller. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B*, 4 :4582–4597, 1971.
- [Ser01] C.R. Serment. *Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, France, 2001.
- [Sha03] U. Shaked. An LPD approach to robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  static output-feedback design. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 48 :866–872, 2003.
- [SMF08] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. On stability of fractional order systems. In *Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application*, Ankara, Turkey, 2008.
- [SMF10] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. LMI conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 :1594–1609, 2010.
- [SMM88] S.B. Skaar, A.N. Michel, and R.K. Miller. Stability of viscoelastic control systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 33 :348–357, 1988.
- [SMMO10] J. Sabatier, M. Merveillaut, R. Malti, and A. Oustaloup. How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system? *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 10 :1318–1326, 2010.
- [SMN90] M. Sampei, M. Mita, and M. Nakamichi. An algebraic approach to  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control problems. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :13–24, 1990.
- [Sou96] M. Soula. *Étude du Comportement Mécanique des Matériaux Viscoélastiques par les Dérivées Fractionnaires*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, 1996.
- [Sou02] H. Souley Ali. *Observateurs Robustes d'Ordre Réduit pour les Systèmes Linéaires et Bilinéaires Incertains*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 2002.
- [Tar07] V.E. Tarasov. Fractional stability. arXiv, 2007. 0711.211v1.

- [TMSO11] J.C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup. A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, 91 :437–445, 2011.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.
- [VMC02] B.M. Vinagre, C.A. Monje, and A.J. Caldero. Fractional order systems and fractional order actions, tutorial workshop. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Las Vegas, USA, 2002.
- [Wil71] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equations. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :621–634, 1971.
- [Wil77] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.
- [WWL08] X.J. Wen, Z.M. Wu, and J.G. Lu. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems. *IEEE Trans. Circ. Syst. II : Express Briefs*, 55 :1178–1182, 2008.
- [Xd90] L. Xie and C.E. de Souza. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :389–396, 1990.
- [XD98] S.J. Xu and M. Darouach. On the robustness of linear systems with nonlinear uncertain parameters. *Automatica*, 34 :1005–1008, 1998.
- [XL09] S.Y. Xing and J.G. Lu. Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with nonlinear uncertain parameters : an LMI approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42 :1163–1169, 2009.
- [XYNL01] S. Xu, C. Yang, Y. Niu, and J. Lam. Robust stabilization for uncertain discrete singular systems. *Automatica*, 37 :769–774, 2001.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [ZRMD98] M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach. On disturbance decoupled observer for a class of bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 120 :371–377, 1998.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons proposé une méthode basée sur l'utilisation de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour garantir des conditions suffisantes de stabilisation asymptotique pour une classe de systèmes non linéaires fractionnaires. Nous avons étendu ces résultats dans la stabilisation asymptotique des systèmes non linéaires singuliers fractionnaires et proposé des conditions suffisantes de stabilité asymptotique de l'erreur d'observation dans le cas de l'étude des observateurs pour les systèmes non linéaires fractionnaires et singuliers fractionnaires.

Pour les systèmes non linéaires à dérivée d'ordre entier, nous avons proposé par l'application de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman des conditions suffisantes pour :

- la stabilisation exponentielle par retour d'état statique et par retour de sortie statique,
- la stabilisation exponentielle robuste en présence d'incertitudes paramétriques,
- la commande basée sur un observateur.

Nous avons étudié la stabilisation des systèmes linéaires fractionnaires avec les lois de commande suivantes : retour d'état statique, retour de sortie statique et retour de sortie basé sur un observateur. Puis, nous avons proposé des conditions suffisantes de stabilisation lorsque le système linéaire fractionnaire est affecté par des incertitudes non linéaires paramétriques. Enfin, nous avons traité la synthèse d'un observateur pour ces systèmes. Les résultats proposés pour les systèmes linéaires fractionnaires ont été étendus au cas où ces systèmes fractionnaires sont singuliers.

La technique de stabilisation basée sur l'utilisation de la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman est étendue aux systèmes non linéaires fractionnaires et aux systèmes non linéaires singuliers fractionnaires. Des conditions suffisantes de stabilisation asymptotique, de stabilisation asymptotique robuste et de commande basée sur un observateur ont été obtenues pour les classes de systèmes non linéaires fractionnaires et non linéaires singuliers fractionnaires.

Par ailleurs, une méthode de synthèse d'observateurs pour ces systèmes non linéaires fractionnaires et non linéaires singuliers fractionnaires est proposée. Cette approche est basée sur la résolution d'un système d'équations de Sylvester. L'avantage de cette méthode est que, d'une part, l'erreur d'observation ne dépend pas explicitement de l'état et de la commande du système et, d'autre part, qu'elle unifie la synthèse d'observateurs de différents ordres (observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal).

**Mots-clés :** Systèmes non linéaires affines, systèmes bilinéaires, généralisation du lemme de Gronwall-Bellman, systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires, stabilité, stabilisation, stabilisation robuste, commande basée sur un observateur, systèmes singuliers linéaires et non linéaires fractionnaires, observateurs.

# Abstract

In this dissertation, we proposed sufficient conditions for the asymptotical stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems based on the generalization of Gronwall-Bellman lemma. We extended these results for the asymptotical stabilization of nonlinear singular fractional-order systems and proposed sufficient conditions for the existence and asymptotic stability of the observation error for the nonlinear fractional-order systems and nonlinear singular fractional-order systems.

For the nonlinear integer-order systems, the proposed generalization of Gronwall-Bellman lemma allowed us to obtain sufficient conditions for :

- the static state feedback and the static output feedback exponential stabilizations,
- the robust exponential stabilization with regards to parameter uncertainties,
- the observer-based control.

We treated three cases for the asymptotical stabilization of linear fractional-order systems : the static state feedback, the static output feedback and the observer-based output feedback. Then, we proposed sufficient conditions for the asymptotical stabilization of linear fractional-order systems with nonlinear uncertain parameters. Finally, we treated the observer design for the linear and nonlinear fractional-order systems and for the linear and nonlinear singular fractional-order systems.

The stabilization technique based on the generalization of Gronwall-Bellman lemma is extended to nonlinear fractional-order systems and nonlinear singular fractional-order systems. Sufficient conditions for the asymptotical stabilization, the robust asymptotical stabilization and the observer-based control of a class of nonlinear fractional-order systems and nonlinear singular fractional-order systems were obtained.

Furthermore, the observer design for the nonlinear fractional-order systems and nonlinear singular fractional-order systems is proposed. This approach is based on a parameterization of the solutions of generalized Sylvester equations. The conditions for the existence of these observers are given and sufficient conditions for their stability are derived using linear matrix inequalities (LMIs) formulation and the generalization of Gronwall-Bellman lemma. The advantage of this method is that, firstly, the observation error does not depend explicitly on the state and control system and, secondly, this method unifies the design of full, reduced and minimal orders observers.

**Keywords :** Linear and nonlinear affine systems, Linear and nonlinear fractional-order systems, Linear and nonlinear singular fractional-order systems, Generalization of Gronwall-Bellman lemma, Stability, Stabilization, Robust stabilization, Observer-based control, Observers.