



**HAL**  
open science

# Approximation de processus de diffusion à coefficients discontinus en dimension un et applications à la simulation

Pierre Etoré

► **To cite this version:**

Pierre Etoré. Approximation de processus de diffusion à coefficients discontinus en dimension un et applications à la simulation. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2006. Français. NNT : 2006NAN10160 . tel-01746567v1

**HAL Id: tel-01746567**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01746567v1>**

Submitted on 29 Mar 2018 (v1), last revised 13 Mar 2007 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THÈSE présentée par**

**Pierre ÉTORÉ**

**en vue d'obtenir le diplôme**

**de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY I**

**Spécialité: Mathématiques Appliquées.**

**Sujet: Approximation de processus de diffusion à coefficients discontinus en dimension un et applications à la simulation.**

Soutenue publiquement le 12 décembre 2006

devant le jury composé de Messieurs les Professeurs:

Bernard Lapeyre	Professeur à l'ENPC (Président du jury)
Antoine Lejay	Chargé de recherche INRIA (Examineur)
Dominique Lépingle	Professeur à l'Université d'Orléans (Rapporteur)
Bernard Roynette	Professeur à l'Université Nancy I (Directeur de thèse)
Thomas Kurtz	Professeur à l'Université du Wisconsin (Rapporteur)



# Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier Bernard Roynette d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse. Durant ces trois années passées en tant que doctorant à l'IECN j'ai pu compter sur sa disponibilité et son soutien. Je tiens ensuite bien sûr à remercier Antoine Lejay avec lequel j'ai travaillé pendant ces trois ans. Entièrement disponible, énergique, enthousiaste et clairvoyant, il est l'homme auquel je dois, je pense, d'être arrivé au terme du parcours de thésard, difficile, mais ô combien stimulant et passionnant... J'ai particulièrement apprécié son soutien dans les moments durs de la fin de thèse, et, sur la totalité du parcours, avoir eu l'occasion d'échanger avec lui des vues sur la discrétisation des processus de diffusion restera une expérience intellectuelle mémorable.*

*Je remercie Dominique Lépingle et Thomas G. Kurtz d'avoir rapporté cette thèse dans les meilleurs délais. J'ai grandement apprécié l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et le jugement très positif qu'il leur a inspiré.*

*Enfin je remercie Bernard Lapeyre d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse malgré la lourde charge de travail qui est la sienne.*

*Denis Talay de l'INRIA, directeur du projet OMEGA depuis renommé TOSCA, est pour beaucoup dans l'accomplissement de cette thèse, puisque c'est lui qui m'avait aiguillé en avril 2003 vers un stage de DEA à l'INRIA Lorraine. Je l'en remercie, ainsi que d'avoir suivi mon cas et de m'avoir soutenu durant ces trois ans.*

*Dans sa totalité je remercie l'équipe de probabilités de l'IECN pour son accueil et l'ambiance à la fois sérieuse et conviviale qui y règne. Globalement il a fait bon travailler en son sein. Un merci particulier à Pierre Vallois pour ses conseils avisés en diverses occasions, ainsi qu'à Madalina Deaconu et Samy Tindel. Une pensée particulière également pour Agnès Volpi, également collègue à l'ESSTIN en ce qui concerne l'enseignement, et sans qui décidément ça ne serait pas pareil!*

*Les circonstances ont fait que durant ces trois ans je n'ai pas eu de monitorat, contrairement à la plupart des thésards. Pour faire mes armes en matière d'enseignement et, plus prosaïquement, arrondir mes fins de mois, j'ai donc chaque année cherché à faire des*

*vacations. En 2003-2004 j'ai pu, grâce à Vincent Ries, effectuer des TD de probabilités à l'ENSEM. Je tiens donc à l'en remercier. En 2004-2005 c'est J.-R. Roche qui a fait appel à moi pour être l'enseignant en mathématiques d'un groupe de TD en deuxième année d'ESSTIN durant toute l'année. Il m'a renouvelé sa confiance pour la période 2005-2006, et je l'en remercie.*

*En outre j'ai trouvé d'une disponibilité et d'une gentillesse appréciables l'ensemble du personnel «non-mathématique» de l'IECN. Je tiens en particulier à remercier chaleureusement les secrétaires Hélène Zganic et Christelle Etienne du projet Oméga, les secrétaires Chantal Lecomte et Patricia Georges, les bibliothécaires Nathalie Pierache et Raymonde Michel, le technicien informatique Bernard Schorp, ainsi que Corinne.*

*J'aborde maintenant avec émotion la rubrique des remerciements plus personnels.*

*Honneur aux dames, je sais gré à Manon Didry et Anne de Roton d'avoir illuminé de quelque grâce féminine un environnement de travail que d'aucuns, et ils se reconnaîtront, auraient jugé sans leur présence par trop «poilu». Elles sont d'autant plus dignes de remerciements qu'elles ont eu la gentillesse de supporter mes sautes d'humeur et mes mauvaises manières. Bises.*

*L'année 2003 aura vu débiter en thèse à l'IECN de nombreux thésards, à la personnalité remarquable, dont certains sont devenus des amis, ce qui aura contribué au bon souvenir que me laisseront ces trois ans.*

*A tout seigneur tout honneur, Hermann Woehrel aura été le premier avec qui j'ai pu établir des relations extra-professionnelles, prenant appui au départ sur des discussions en matière d'arts, d'idées et de livres, que mon modeste esprit jugeait de haute volée, surtout en comparaison de la disette intellectuelle de mes précédentes années de faculté. Nos relations ont pu se détériorer ensuite, car j'étais trop bonne pâte et lui trop teigneux. Il a arrêté sa thèse en accord avec ses convictions profondes. Quoiqu'agaçant c'est quelqu'un de marquant, doté d'un fort caractère, qui réussira s'il évite l'esprit de contradiction. Poignée de main virile.*

*Dans un registre plus social, sociable, voire par moments sociomaniaque à mon goût, s'est illustrée une bande de joyeux drilles rassemblés autour de la personnalité rassembleuse de Marie-Amélie Paillusseau-Lawn : outre icelle, le fidèle Lars Schäfer, l'extra-fiable Pierre Le Gall, puis plus récemment Pierre Dreyfuss et l'inénarrable Piotr Karwasz. Si la dive bouteille est leur totem, l'amitié est leur grand principe fédérateur. Merci pour le «remontage du moral par le bourrage de la gueule». Merci pour la chaleur et l'humanité. Tchou.*

*Sergio Bezerra a commencé sa thèse en probabilités en même temps que moi. C'est*

*quelqu'un d'une profonde gentillesse. Je sais que sa fin de thèse a été très difficile. Je lui souhaite un avenir radieux. Braaaaazil!*

*Merci aussi à Sylvain Col, Simon Raulot, Julien Roth, Pierre Debs, et Blandine Bérard-Bergery.*

*Les Montpelliérains ne sont pas oubliés : Merci à Seb pour la hotline informatique, à Delphine pour le téléphone du coeur et à Christine pour le repeuplement.*

*Il m'est impossible d'évoquer l'IECN sans avoir une pensée émue pour la chorale reprise en main depuis septembre 2005 par Jean-François Grosjean : merci en particulier à Alex et Guillaume, et à Perrine, Claire et Florence. Vous me laisserez tous à votre manière de merveilleux souvenirs de mon passage par la Lorraine.*

*Enfin je me dois de remercier ma mère pour son soutien matériel et moral. C'est avec elle que je suis le pire dans mes moments de bas moral. Alors encore Merci.*





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 OFD, diffusions associées et EDSTL</b>	<b>15</b>
1.1 Notations . . . . .	15
1.2 OFD, semi-groupes et diffusions associés . . . . .	17
1.3 Résultats de convergence . . . . .	21
1.4 Fonction d'échelle et mesure de vitesse . . . . .	24
1.5 EDSTL . . . . .	27
<b>2 Un algorithme pour <math>d = 1</math> utilisant les EDSTL</b>	<b>31</b>
2.1 Lien entre OFD et EDSTL . . . . .	31
2.2 Une formule de changement d'échelle . . . . .	33
2.3 Approximation par marche aléatoire asymétrique . . . . .	36
2.3.1 Skew Brownian Motion . . . . .	36
2.3.2 L'idée de base du schéma . . . . .	36
2.3.3 L'algorithme . . . . .	40
2.4 Vitesse de convergence . . . . .	41
2.4.1 Estimation d'une erreur faible . . . . .	41
2.4.2 Estimation d'une erreur forte . . . . .	48
2.4.3 Preuve du Théorème 2.4.1 . . . . .	51
<b>3 Un théorème de Donsker pour le cas <math>d = 1</math></b>	<b>53</b>
3.1 Moments des temps de sortie et problèmes elliptiques . . . . .	53
3.2 L'algorithme . . . . .	61
3.3 Vitesse de convergence de l'algorithme . . . . .	64
3.4 Convergence en loi du processus approximant . . . . .	70
3.5 Construction d'un schéma numérique . . . . .	74
3.5.1 Choix des coefficients constants par morceaux . . . . .	74
3.5.2 Calculs des paramètres de la marche pour le processus engendré par des coefficients constants par morceaux . . . . .	75

<b>4</b>	<b>Construction d'une CM dans le cas <math>d = 2</math></b>	<b>79</b>
4.1	Problèmes elliptiques et probabilités de transition . . . . .	80
4.2	L'algorithme utilisé . . . . .	83
4.3	Estimation de l'erreur faible sur un coup . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>91</b>
5.1	Régulariser les coefficients est insatisfaisant . . . . .	91
5.2	Les algorithmes pour la dimension un . . . . .	95
5.3	Chaîne de Markov en dimension deux . . . . .	101
5.4	Remarque sur la programmation dynamique . . . . .	103
	<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>

# Introduction

## Position du problème

Les opérateurs sous forme divergence sont des opérateurs elliptiques du second ordre de la forme

$$L = \frac{\rho}{2} \nabla(a \nabla \cdot) + b \cdot \nabla. \quad (0.0.1)$$

Dans le cas où le coefficient à valeurs matricielles  $a$  est assez régulier l'opérateur  $L$  peut se mettre sous la forme non-divergence bien connue,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \rho a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j B_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (0.0.2)$$

avec  $B_j = \sum_i \frac{\rho}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + b_j$ .

Cependant la forme (0.0.1) est celle qui sort naturellement de la modélisation de bon nombre de phénomènes physiques, où les coefficients  $\rho$ ,  $a$  et  $b$  sont le plus souvent discontinus. Or, étant donné un coefficient  $a$  discontinu, la dynamique obtenue avec un opérateur du type (0.0.1), avec  $a$  dans la divergence, est différente de celle obtenue avec un opérateur du type (0.0.2).

Un premier exemple de modèle physique peut être fourni par la mécanique des fluides et la loi de Darcy. Cette loi, qui régit la pression  $p(t, x)$  d'un fluide dans un milieu poreux, intervient notamment en géologie, en hydrologie et en ingénierie pétrolière. On peut l'écrire sous la forme

$$\partial_t p(t, x) = \nabla(a(x) \nabla p(t, x)).$$

Le coefficient  $a$  reflète la perméabilité et la porosité du milieu. Si l'on pense à l'exemple du pétrole en milieu rocheux, ce milieu est fortement hétérogène (présence de fissures dans la roche, interfaces entre deux types de roches etc...). Cela se traduit par une grande irrégularité du coefficient  $a$  qui est discontinu et peut faire des sauts d'une grande amplitude (cf [Dag89]).

Dans le domaine médical on peut citer l'exemple des problèmes de modélisation rencontrés en EEG et MEG (électroencéphalographie et magnétoencéphalographie). Le cerveau est le siège d'une activité électromagnétique due à l'échange de neurotransmetteurs

entre les neurones. Mais il constitue un système d'une telle complexité que seule une approche macroscopique est envisageable en EEG et MEG. En faisant certaines hypothèses de modélisation et en utilisant les équations de Maxwell, on montre que le potentiel électrostatique  $V$  et la densité de courant  $\mathbf{J}$  globaux obéissent à l'équation

$$\nabla(\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J},$$

où  $\sigma$  est la conductivité du milieu cérébral. Ce paramètre  $\sigma$  est mal connu, et on fait en général l'hypothèse qu'il est constant sur des sous-domaines  $\Omega_i$  en lesquels on a découpé le domaine  $\Omega$  représentant le cerveau (voir [Fau99] sur ces questions).

En écologie certains modèles de dynamique des populations font intervenir des équations paraboliques mettant en jeu un opérateur du type (0.0.1) avec  $a$  discontinu. Ainsi dans [OC03] sont considérées entre autres des équations du type,

$$\partial_t v(t, x) = \nabla(a \nabla v(t, x)) - \nabla(b v(t, x)),$$

pour des populations dont la densité obéit à la loi de diffusion de Fick. Là encore le domaine  $\Omega$  est découpé en plusieurs sous-domaines  $\Omega_i$ 's. Aux interfaces entre les  $\Omega_i$ 's le coefficient  $a$  saute. En fait la valeur de ce saut permet de refléter la propension des individus de la population à passer d'un côté ou de l'autre des interfaces (voir aussi [Ova04]).

Ces exemples sont parmi les plus significatifs mais la liste en est loin d'être exhaustive (en sortant du domaine de la physique on peut penser à des exemples en finance, cf [DDG05]).

Dans cette thèse on étudie des schémas numériques pour la simulation de processus engendrés par des opérateurs sous la forme (0.0.1) avec coefficients discontinus. Ce cas est encore peu exploré, contrairement au cas des coefficients réguliers, où une fois l'opérateur mis sous la forme (0.0.2), on bénéficie de tous les schémas disponibles pour les opérateurs sous forme non-divergence (cf [KP92]).

On pourrait penser qu'une solution possible est de régulariser les coefficients, de faire un schéma pour le processus à coefficients régularisés, puis de faire s'approcher ces coefficients régularisés des vrais. Mais cette approche s'avère insatisfaisante : les résultats numériques sont imprécis, instables (cf Chapitre 5, Section 5.1).

Dans l'article [SZ97] l'existence d'une chaîne de Markov dont les trajectoires approchent celles de  $X$ , engendré par un opérateur du type (0.0.1) avec coefficients discontinus, est prouvée au moyen de la théorie des formes de Dirichlet. Mais cette approche ne fournit pas un moyen de calculer numériquement les probabilités de transition de cette chaîne.

C'est par contre le cas de travaux récents traitant le cas de coefficients discontinus dans le cadre unidimensionnel : la thèse de Miguel Martinez ([Mar04]), où un schéma d'Euler est étudié, et l'article d'Antoine Lejay et Miguel Martinez (voir [LM06] et à nouveau [Mar04]), où est construit un schéma qui peut être vu comme une variation de la marche aléatoire sur les sphères.

Ces travaux reposent tous deux sur une description en termes d'équations différentielles stochastiques avec temps local du processus engendré par (0.0.1) avec coefficients discontinus. Cela explique leur limitation au cas unidimensionnel. En effet dans le cas multidimensionnel et pour des coefficients discontinus on ne sait pas en général écrire l'Équation Différentielle Stochastique (EDS) dont le processus  $X$  engendré par (0.0.1) est solution. En revanche en dimension un on arrive à montrer que  $X$  est solution d'une EDS qui fait intervenir le temps local du processus inconnu, en les points de discontinuité du coefficient  $a$  (cf équation (0.0.3) ci-dessous).

Signalons en outre qu'il existe dans le cas multidimensionnel des résultats pour le cas des opérateurs sous forme non-divergence avec coefficients discontinus ([Jan84], [Cha98], [Yan02]). Mais même dans ce cas bon nombre de questions restent ouvertes (par exemple celle de la vitesse de convergence du schéma d'Euler proposé dans [Yan02]). Par ailleurs ces résultats ne sont pas en général applicables au cas des opérateurs sous forme divergence.

Cette thèse s'inscrit en partie dans le prolongement des travaux [Mar04] et [LM06] pour le cas unidimensionnel, mais on utilise des marches aléatoires, cette expression étant ici à comprendre dans un sens assez large : on utilise des chaînes de Markov sur une grille, à construire le cas échéant de façon ad hoc, à partir desquelles on construit un processus approximant en incrémentant le temps de façon adéquate. Par ailleurs on propose quelques pistes pour la construction d'une chaîne de Markov en dimension deux, qui, on l'espère, aideront à comprendre les problèmes qui se présentent dans ce cas.

## Plan de la thèse

Dans le Chapitre 1 on définit précisément les opérateurs sous forme divergence et on procède à des rappels sur les diffusions qui leur sont associées, ainsi que sur les équations différentielles stochastiques avec temps local.

On fait un usage intensif de ce type d'EDS dans le Chapitre 2, qui présente un premier algorithme pour le cas unidimensionnel, qui a fait l'objet de l'article [Éto06]. On montre que  $X$  engendré par (0.0.1) est solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sqrt{\rho a}(X_s) dW_s + \int_0^t \left[ \frac{\rho a'}{2} + b \right](X_s) ds + \sum_{x \in \mathcal{I}} \frac{a(x+) - a(x-)}{a(x+) + a(x-)} L_t^x(X), \quad (0.0.3)$$

où  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des points de discontinuité de  $a$ . Le schéma consiste alors à faire une approximation constante par morceaux des coefficients sur une grille  $\mathcal{G}^h = \{x_k^h\}_{k \in I}$ , et à obtenir une première approximation  $X^h$  de  $X$ . La grille  $\mathcal{G}^h$  est telle que pour une bijection en espace  $\Phi^h$  adéquate on ait,  $\Phi^h(\mathcal{G}^h) = \{kh\}_{k \in I}$ , et  $Y^h := \Phi^h(X^h)$  qui soit solution de

$$Y_t^h = Y_0^h + W_t + \sum_{k \in I} \beta_k^h L_t^{kh}(Y^h).$$

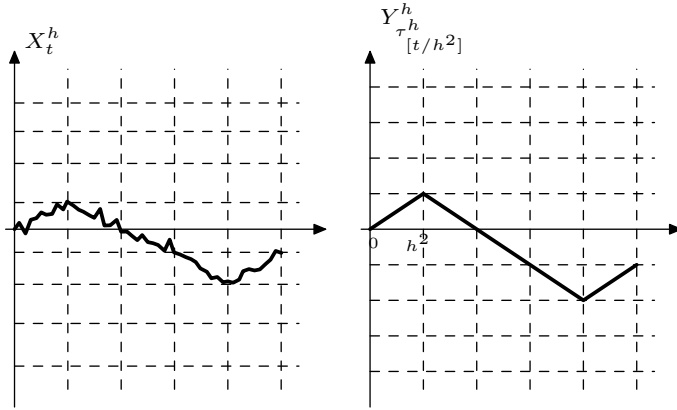


FIG. 1 – A gauche une trajectoire de  $X^h$  sur la grille  $\mathcal{G}^h$ . A droite l'interpolation linéaire de la trajectoire correspondante de  $Y_{\tau_{[t/h^2]}^h}^h$ , sur la grille uniforme  $\{kh\}_{k \in I}$  obtenue après transformation de  $\mathcal{G}^h$ .

Considérons les temps d'atteinte successifs  $(\tau_k^h)$  des points de la grille  $\{kh\}_{k \in I}$  par  $Y^h$ . On peut dire que  $Y^h$  se comporte localement comme un Skew Brownian Motion (cf Sous-section 2.3.1), ce qui donne les probabilités de transition sur  $\{kh\}_{k \in I}$  de la chaîne  $Y_{\tau_k^h}^h$ . On peut dire en outre que le temps moyen passé sur chaque cellule de la grille par  $Y^h$  est  $h^2$ . Ainsi on peut montrer que  $Y_{\tau_{[t/h^2]}^h}^h$  converge fortement vers  $Y_t^h$  à  $t$  fixé (voir Figure 1). En fin de compte on obtient un schéma  $\widehat{X}^h$  pour  $X$  dont on évalue la vitesse de convergence : elle est en  $\mathcal{O}(h^{1/2})$  ce qui correspond au théorème de Donsker.

La limitation principale de cet algorithme est que la grille construite  $\mathcal{G}^h$  dépend en fait de l'opérateur qui engendre  $X$ . En outre le fait de reposer sur la théorie des EDS avec temps local impose de restreindre les classes des coefficients de cet opérateur à des ensembles de fonctions grosso modo  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (cf Section 1.5). Or il suffit que ses coefficients soient mesurables et bornés, et, en ce qui concerne  $\rho$  et  $a$ , uniformément elliptiques, pour qu'un opérateur sous forme divergence engendre une diffusion (voir début du Chapitre 1).

Dans le Chapitre 3 on propose donc un théorème de Donsker général pour les processus engendrés par un opérateur sous forme divergence avec coefficients mesurables. Ce théorème énonce la convergence d'une marche aléatoire construite sur une grille quelconque de  $\mathbb{R}$ . Ce travail a fait l'objet de l'article [ÉL06], coécrit avec Antoine Lejay.

On n'utilise plus ici d'EDS avec temps local, mais une description purement analytique du processus engendré par un opérateur sous forme divergence.

L'idée est la suivante : soit  $\mathbf{g} = \{x_j\}_{j \in J}$  un ensemble de points sur  $\mathbb{R}$ , tel que pour tout  $j \in J$ ,  $x_j < x_{j+1}$ . Soit  $X$  le processus engendré par  $L$  défini par (0.0.1). Pour chaque point  $x_j$  de  $\mathbf{g}$ , conditionnellement au fait que  $X$  est en  $x_j$ , on se demande :

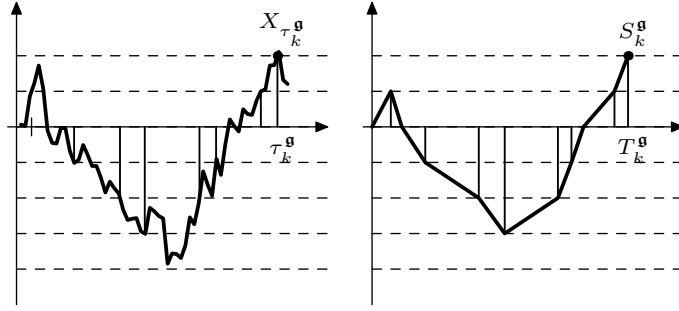


FIG. 2 – Un trajectoire de  $X_t$  et l'interpolation linéaire de la trajectoire correspondante de  $X_{\tau_{K^g(t)}^g}$ .

1) Quelle est la probabilité  $\pi(j, j+1)$  que le prochain point de  $\mathbf{g}$  atteint par  $X$  est  $x_{j+1}$  et pas  $x_{j-1}$  ?

2) Sachant que  $X$  est allé en  $x_{j+1}$  (respectivement en  $x_{j-1}$ ) quel est le temps moyen  $T(j, +)$  (respectivement  $T(j, -)$ ) passé par  $X$  sur la cellule  $(x_j, x_{j+1})$  (respectivement  $(x_j, x_{j-1})$ ) ?

On montre (Sections 3.1 et 3.2) qu'on peut relier les quantités  $T(j, +)$  et  $T(j, -)$  aux solutions de problèmes elliptiques ad hoc faisant intervenir l'opérateur  $L$ , en utilisant la formule de Feynman-Kac.

Supposons qu'on connaisse tous les  $\pi(j, j+1)$ 's,  $T(j, +)$ 's et  $T(j, -)$ 's. L'algorithme à mettre en oeuvre pour obtenir une approximation de  $X$  à l'instant  $t$  est alors très simple. On pose  $\hat{t} = 0$ , et on simule la trajectoire d'une chaîne de Markov  $\hat{S}^g$  sur  $\mathbf{g}$ , avec comme probabilités de transition les  $\pi(j, j+1)$ 's. Chaque fois que  $\hat{S}^g$  passe d'un point de  $\mathbf{g}$  à un autre on ajoute à  $\hat{t}$  la quantité  $T(j, \pm)$  correspondante. Le temps courant  $\hat{t}$  finit par dépasser  $t$ , on arrête l'algorithme et on retourne la position courante de  $\hat{S}^g$ .

On montre la convergence forte du processus approximant obtenu  $\hat{X}^g$  en considérant les temps d'atteinte successifs  $(\tau_k^g)$  des points de la grille  $\mathbf{g}$  par le processus à approcher  $X$ . La chaîne  $\hat{S}_k^g$  a la même loi que  $S_k^g := X_{\tau_k^g}$ . Et dans la construction de  $\hat{X}^g$  on remplace en fait les  $\tau_p^g - \tau_{p-1}^g$  par leurs moyennes  $T_p^g - T_{p-1}^g$  (voir Figure 2). On construit ainsi une application  $K^g(t)$  telle que  $\hat{X}_t^g$  a même loi que  $X_{\tau_{K^g(t)}^g}$ . On peut montrer que  $(T_{K^g(t)}^g, X_{\tau_{K^g(t)}^g})$  tend en loi vers  $(t, X_t)$  en tant que processus. En outre la vitesse de convergence forte à  $t$  fixé est encore en  $\mathcal{O}(h^{1/2})$ .

Notre théorème de Donsker permet de construire un schéma, qui est très facile à implémenter si les quantités  $\pi(j, j+1)$ 's,  $T(j, +)$ 's et  $T(j, -)$ 's sont faciles à calculer. Or c'est le cas si on fait d'abord une approximation constante par morceaux judicieuse des coefficients (cf discussion de la Section 3.5). On peut par exemple construire la grille à une échelle mésoscopique, si on construit des coefficients constants par morceaux qui correspondent à une moyennisation de vrais coefficients oscillant rapidement à petite

échelle, comme le montre la théorie de l'homogénéisation ([BLP78], [JKO94]).

L'approche du Chapitre 3 étant purement analytique on peut envisager de l'adapter au cas bidimensionnel. Dans le Chapitre 4 on donne quelques éléments de construction d'une chaîne de Markov dans le plan, qui fournit une méthode de Monte-Carlo pour approcher les solutions de problèmes elliptiques sans terme source, avec condition de Dirichlet non-homogène, impliquant l'opérateur  $L$ .

En effet soit une grille  $\mathcal{G}_h^2$  constituée d'une famille de cellules carrées  $(C_{m,n})_{(m,n) \in I}$  de taille  $h$ . Soit  $C$  de centre  $x$  un carré de  $\mathcal{G}_h^2$ , et soient ses arêtes, notées  $\Gamma^i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Supposons que  $X$  engendré par  $L$  parte de  $x$ , et soit  $\tau_C = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial C\}$ . Une application formelle de la formule de Feynman-Kac indique que  $\mathbb{P}^x[X_{\tau_C} \in \Gamma^i] = u_i(x)$  où  $u_i$  est solution de

$$\begin{cases} Lu_i = 0 & \text{dans } C \\ u_i = 1 & \text{sur } \Gamma^i \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma^j \text{ pour } j \neq i. \end{cases}$$

On peut prendre les quantités ainsi obtenues comme probabilités de transition d'une chaîne de Markov  $S$  sur la grille  $\mathcal{G}_h^2$ . Considérons un problème elliptique dans un domaine rectangulaire  $G$  du type

$$\mathcal{P}(G, \psi) \begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } G \\ u = \psi & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

Là encore en appliquant formellement Feynman-Kac on a  $u(x) = \mathbb{E}^x[\psi(X_{\tau_G})]$  pour tout  $x \in G$ . Considérons  $n^* = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid S_p \in \partial G\}$ . La quantité  $u^h(x) = \widehat{\mathbb{E}}_x[\psi(S_{n^*})]$  a vocation à approcher  $u(x)$ . En effet la chaîne  $S$  ne reflète pas l'aspect temps du comportement de  $X$ , mais c'est inutile pour simuler  $\psi(S_{n^*})$ . Heuristiquement, si  $S$  reflète bien les probabilités de transition de  $X$ , et si  $\psi(S_{n^*})$  tend en loi vers  $\psi(X_{\tau_G})$ , ça devrait marcher. Les essais numériques révèlent un comportement satisfaisant de cette approche sur un cas favorable où les coefficients sont constants de part et d'autre d'une seule discontinuité (Section 5.3).

Regardons les temps d'atteinte successifs  $(\tau_k)$  des arêtes de la grille  $\mathcal{G}_h^2$  par  $X$ . Remarquons qu'on n'a plus l'égalité en loi de  $X_{\tau_k}$  et de  $S_k$ . En effet quand  $X$  atteint une arête il n'y a aucune raison que ce soit en son centre, or  $S$  est construite avec les probabilités de transition partant du centre. Pour calculer l'erreur faible du schéma on est ainsi conduit à introduire un changement de probabilité, qui fait intervenir à chaque étape  $p$  la position de la chaîne  $S_p$  et la position exacte de  $X_{\tau_p}$ . Mais on fait ainsi apparaître des quantités qui ne convergent pas vers 0 avec  $h$  dans le cas général. Cela suggère que pour obtenir un bon schéma il faudrait y introduire une seconde échelle, plus fine que celle de la grille  $\mathcal{G}_h^2$ , pour le calcul des probabilités de transition de la chaîne (discussion à la fin de la section 4.3).

Enfin, dans le Chapitre 5 on présente d'abord quelques tests numériques qui montrent que régulariser les coefficients n'est pas une bonne approche. Puis on présente divers essais numériques relatifs à tous les algorithmes présentés dans cette thèse.



# Chapitre 1

## Opérateurs sous forme divergence, diffusions associées et équations différentielles stochastiques avec temps local

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps des résultats sur les Opérateurs sous Forme Divergence (OFD) et les diffusions qui leurs sont associées. Ensuite on aborde la question des Equations Différentielles Stochastiques avec Temps Local (EDSTL) : ce sont des EDS unidimensionnelles dont la dérive fait intervenir le temps local symétrique du processus inconnu, qui ont été initialement étudiées par J.F. Le Gall dans [Leg85].

Tous les résultats présentés étant bien connus on ne s'apesantira pas sur les démonstrations, pour lesquelles on peut indiquer de nombreuses références. On se contentera d'indiquer les plus simples d'entre elles et les grandes lignes de certaines autres pour donner une cohérence à l'ensemble des définitions et résultats évoqués.

### 1.1 Notations

Soit  $G$  un ouvert connexe (borné ou non) de  $\mathbb{R}^d$ .

On définit d'abord des ensembles de fonctions dans lesquels seront pris les coefficients des OFD.

Soient  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  on note  $\mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f$  de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in G, \quad \lambda \leq f(x) \leq \Lambda.$$

Le coefficient  $\rho$  de l'OFD sera pris dans  $\mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$ .

Soient  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  on note  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $m = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$  de  $G$  dans l'espace des matrices symétriques à coefficients réels telles que,

$$\forall x \in G, \forall i, j = 1, \dots, d, \quad |m_{ij}(x)| \leq \Lambda,$$

et

$$\forall x \in G, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda |\xi|^2 \leq \xi^\top m(x) \xi.$$

Le coefficient  $a$  de l'OFD sera pris dans  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ .

**Remarque 1.1.1** Dans le cas  $d = 1$  l'ensemble  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  n'est autre que  $\mathfrak{Ell}(\lambda, \Lambda)$ .

Soit  $0 < \Lambda < \infty$  on note  $\mathfrak{B}(\Lambda)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f = (f_i)_{i=1,\dots,d}$  de  $G$  dans  $\mathbb{R}^d$  telles que

$$\forall x \in G, \forall i = 1, \dots, d, \quad |f_i(x)| \leq \Lambda.$$

Le coefficient  $b$  de l'OFD sera pris dans  $\mathfrak{B}(\Lambda)$ .

On précise ensuite quelques notations d'espaces fonctionnels qui serviront à définir les OFD.

Pour  $1 \leq p < \infty$  on note classiquement  $L^p(G)$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f$  de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\|f\|_p := \left( \int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Soit  $0 < T < \infty$  fixé. Pour  $1 \leq p, q < \infty$  on note  $L^q(0, T; L^p(G))$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f$  de  $(0, T) \times G$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\| \|f\|_{p,q} := \left( \int_0^T \|f\|_p^q dt \right)^{1/q} < \infty.$$

Pour  $u \in L^p(G)$  on note de façon abusive  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  la dérivée du premier ordre au sens des distributions de  $u$  par rapport à la variable  $x_i$ .

Notons que dans le cas  $d = 1$  on notera simplement  $\frac{du}{dx}$  la dérivée du premier ordre au sens des distributions de  $u$  par rapport à la variable  $x$ .

Il est standard de noter  $W^{1,p}(G)$  l'espace des fonctions  $u \in L^p(G)$  telles que pour tout  $i = 1, \dots, d$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(G)$ , et  $W_0^{1,p}(G)$  la fermeture de  $\mathcal{C}_c^\infty(G)$  dans  $W^{1,p}(G)$  muni de la norme

$$\left( \|u\|_p^p + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

On note  $H^1(G)$  l'espace  $W^{1,2}(G)$ , et  $H_0^1(G)$  l'espace  $W_0^{1,2}(G)$ .

Pour  $u \in L^2(0, T; L^2(G))$  on note  $\partial_t u$  la distribution telle que pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T) \times G)$  on a,  $\langle \partial_t u, \varphi \rangle = - \int_0^T \int_G u \partial_t \varphi$ .

On note toujours  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  la dérivée première de  $u$  par rapport à  $x_i$  au sens des distributions (et  $\frac{du}{dx}$  cette dérivée par rapport à  $x$  dans le cas  $d = 1$ ).

On notera  $\|\cdot\|_\infty$  et  $|||\cdot|||_{\infty, \infty}$  les normes uniformes.

Afin de définir une forme bilinéaire associée à un OFD du type (0.0.1), avec un coefficient  $\rho \in \mathbf{EII}(\lambda, \Lambda)$  différent de la fonction unité, on aura besoin d'introduire sur  $L^2(G)$  et  $H^1(G)$  les nouveaux produits scalaires respectifs suivants :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} := \int_G f(x)g(x)\rho^{-1}(x)dx,$$

$$\langle f, g \rangle_{H^1(G, \rho^{-1})} := \langle f, g \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} + \sum_{i=1}^d \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(G, \rho^{-1})}.$$

Notons que pour  $\rho = 1$  on retrouve les produits scalaires usuels  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G)}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(G)}$ .

Pour  $\rho \in \mathbf{EII}(\lambda, \Lambda)$  on désignera donc par  $L^2(G, \rho^{-1})$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f$  de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\langle f, f \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} < \infty$ , muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})}$ . Comme  $\rho^{-1} \in \mathbf{EII}(1/\Lambda, 1/\lambda)$  il est clair que  $L^2(G)$  et  $L^2(G, \rho^{-1})$  contiennent les mêmes éléments.

De même on désigne respectivement par  $H^1(G, \rho^{-1})$  et  $H_0^1(G, \rho^{-1})$  les espaces  $H^1(G)$  et  $H_0^1(G)$  munis du nouveau produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(G, \rho^{-1})}$ . On note  $H^{-1}(G, \rho^{-1})$  le dual de ces deux espaces.

## 1.2 OFD, semi-groupes et diffusions associés

Pour définir un OFD du type (0.0.1) on doit définir proprement son domaine, ce qui revient à se demander, selon la nature du terme source  $f$ , à quel ensemble appartiennent les solutions faibles de problèmes elliptiques du type :

$$\mathcal{P}(\alpha, L, \Psi) \begin{cases} (\alpha - L)u = f & \text{dans } G, \\ \Psi(u) = 0 & \text{sur } \partial G. \end{cases}$$

Dans ce problème la condition au bord  $\Psi$  peut-être de Dirichlet ( $\Psi(u) = u$ ) ou de Neumann ( $\Psi(u) = u'$ ) homogène, et  $\alpha \geq 0$  est une constante assez grande pour que  $(\alpha - L)$  soit inversible.

Soient donc  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ . Pour

$$\rho \in \mathbf{EII}(\lambda, \Lambda), \quad a \in \mathbf{Mell}(\lambda, \Lambda) \quad \text{et} \quad b \in \mathbf{B}(\Lambda), \quad (1.2.1)$$

on notera  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  l'opérateur  $(L, D(L))$  défini sur  $L^2(G, \rho^{-1})$  par

$$L = \frac{\rho}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

et

$$\begin{aligned} D(L) &= \{ f \in H_0^1(G), Lf \in L^2(G) \} \\ &= \{ f \in H_0^1(G), a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \in H^1(G), \forall i, j = 1, \dots, d \} \end{aligned}$$

dans le cas  $G$  infini ou  $G$  fini et conditions limite (c.l.) de Dirichlet, ou alors

$$\begin{aligned} D(L) &= \{ f \in H^1(G), Lf \in L^2(G) \} \\ &= \{ f \in H^1(G), a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \in H^1(G), \forall i, j = 1, \dots, d \} \end{aligned}$$

dans le cas  $G$  fini et c.l. de Neumann.

Notons que les hypothèses faites sur les coefficients dans (1.2.1) sont minimales puisque outre leur bornitude et le cas échéant leur uniforme ellipticité on ne demande que leur mesurabilité. Cela correspond au cas des coefficients discontinus qu'on cherche à traiter et est suffisant pour que l'opérateur  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  engendre un processus de Markov continu, comme le montrent les théorèmes suivants.

**Théorème 1.2.1** *Soient  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  et  $\rho, a$  et  $b$  vérifiant (1.2.1). Soit  $0 < T < \infty$ . L'OFD  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  est un opérateur fermé à domaine dense qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu de contraction  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  sur  $L^2(G, \rho^{-1})$ .*

**Preuve.** On donne ici les grandes lignes de la preuve, qui est classique en analyse fonctionnelle (pour plus de détails voir par exemple [Lej00]).

Mettons pour fixer les idées qu'on est dans le cas  $G \subset \mathbb{R}^d$  borné et c.l. de Dirichlet. Il s'agit de construire la résolvante de  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

Pour tout  $\alpha \geq 0$ , on définit, pour tout couple  $(u, \varphi) \in H_0^1(G, \rho^{-1}) \times \mathcal{C}_c^\infty(G)$ , la quantité  $\mathcal{E}_\alpha(u, \varphi)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha(u, \varphi) &= \langle (\alpha - L)u, \varphi \rangle_{H^{-1}(G, \rho^{-1}), H_0^1(G, \rho^{-1})} \\ &= \alpha \langle u, \varphi \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} + \sum_{i,j=1}^d \int_G \frac{a_{ij}}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \sum_{i=1}^d \int_G \frac{b_i}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx. \end{aligned}$$

Cela permet de définir sur  $L^2(G, \rho^{-1})$  la forme bilinéaire  $(\mathcal{E}_\alpha, D(\mathcal{E}_\alpha))$  avec  $D(\mathcal{E}_\alpha) = H_0^1(G, \rho^{-1})$ .

Il est possible de trouver  $\alpha_0(\lambda, \Lambda, d) > 0$  tel que pour  $\alpha > \alpha_0$  la forme  $(\mathcal{E}_\alpha, D(\mathcal{E}_\alpha))$  est continue et coercive sur  $H_0^1(G, \rho^{-1})$ . En effet notons que, bien qu'on dispose de l'inégalité de Poincaré (cf [Bre83]), la coercivité n'est pas vérifiée pour  $\alpha = 0$  dans le cas  $b \neq 0$ .

Le théorème de Lax-Milgram nous indique alors qu'il existe une famille d'opérateurs injectifs  $(G_\alpha)_{\alpha > \alpha_0}$  de  $H^{-1}(G, \rho^{-1})$  dans  $H_0^1(G, \rho^{-1})$  telle que

$$\forall (f, \varphi) \in H^{-1}(G, \rho^{-1}) \times H_0^1(G, \rho^{-1}), \quad \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}(G, \rho^{-1}), H_0^1(G, \rho^{-1})},$$

et qui vérifie en outre

- i/  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha G_\alpha f = f, \forall f \in L^2(G, \rho^{-1});$
- ii/  $\|\alpha G_\alpha f\|_{L^2(G, \rho^{-1})} \leq \|f\|_{L^2(G, \rho^{-1})};$
- iii/  $\forall \alpha, \beta > \alpha_0, G_\alpha - G_\beta = (\beta - \alpha)^{-1} G_\alpha G_\beta;$
- iv/  $\forall f \in H^{-1}(G, \rho^{-1}), \forall \alpha > \alpha_0, \|G_\alpha f\|_{H^{-1}(G, \rho^{-1})} \leq \theta_\alpha^{-1} \|f\|_{H^{-1}(G, \rho^{-1})},$  où  $\theta_\alpha$  ne dépend que de  $\alpha, \lambda$  et  $\Lambda$ .

Par construction on a pour tout  $\alpha > \alpha_0$ , toute fonction  $f \in G_\alpha^{-1}(D(L))$ , et toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ ,

$$\langle (\alpha - L)G_\alpha f, \varphi \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} = \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}(G, \rho^{-1}), H_0^1(G, \rho^{-1})},$$

c'est à dire que  $G_\alpha f \in D(L)$  est la solution faible unique de  $\mathcal{P}(\alpha, L, \Psi)$ , avec  $\Psi$  c.l. de Dirichlet. Pour tout  $\alpha > \alpha_0$ ,  $D(L)$  et  $G_\alpha^{-1}(D(L))$  sont en bijection et on a la relation  $G_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ . La famille  $(G_\alpha)_{\alpha > \alpha_0}$  est appelée la *résolvante* de  $(L, D(L))$ . En outre, par définition de  $D(L)$  on a, pour tout  $\alpha > \alpha_0$ , la relation  $D(L) = G_\alpha(L^2(G, \rho^{-1}))$ . A ce stade on peut donc dire que  $(L, D(L))$  est fermé à domaine dense.

On a donc montré que la résolvante  $(G_\alpha)_{\alpha > \alpha_0}$  de  $(L, D(L))$  vérifie i/ – iv/. Par le théorème d'Hille-Yosida (voir Théorème 1.2.6 de [EK86]) la preuve est alors terminée.  $\square$

**Remarque 1.2.1** Dans le cas  $G$  non borné, on peut aussi trouver  $\alpha$  assez grand tel que  $(\mathcal{E}_\alpha, D(\mathcal{E}_\alpha))$  est coercive. On construit donc la résolvante de la même manière pour appliquer Hille-Yosida.

Le Théorème 1.2.1 et quelques arguments classiques en EDP permettent d'affirmer que, pour un OFD  $(L, D(L))$ , les problèmes paraboliques du type

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu & \text{dans } [0, T] \times G \\ \Psi(u(t, \cdot)) = 0 & \text{sur } \partial G, \forall t \in [0, T] \\ u(0, \cdot) = f(\cdot) & \text{dans } G, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

ont, pour toute  $f \in L^2(G)$ , une solution faible unique dans  $\mathcal{C}([0, T], L^2(G, \rho^{-1})) \cap L^2(0, T; H_0^1)$ , qui est  $S_t f(x)$ . En étudiant la version continue de cette solution faible on montre que  $(L, D(L))$  engendre une diffusion. Pour cela on a besoin des fameuses estimations d'Aronson et de De Giorgi-Nash.

**Théorème 1.2.2 (Estimation d'Aronson)** *i) Dans le contexte du Théorème 1.2.1 il existe une fonction  $p$  de  $[0, T] \times G \times G$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que pour toute  $f \in L^2(G, \rho^{-1})$*

$$\int_G p(t, x, y) f(y) \rho^{-1}(y) dy$$

*est une version de  $S_t f(x)$ .*

*ii) Il existe une constante  $M$  ne dépendant que de  $\lambda, \Lambda, T$  et de la dimension  $d$  telle que pour tout  $(t, x, y) \in [0, T] \times G \times G$ ,*

$$\frac{1}{Mt^{d/2}} \exp\left(\frac{-M|x-y|^2}{t}\right) \leq p(t, x, y) \leq \frac{M}{t^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{Mt}\right).$$

**Preuve.** Voir [Aro68]. □

**Théorème 1.2.3 (Estimation de De Giorgi-Nash)** *i) Dans le contexte du Théorème 1.2.2 il existe des constantes  $C, \alpha \in (0, 1)$  dépendant de  $\lambda, \Lambda, d$  et  $T$  telles que pour tout  $\delta > 0$ ,*

$$|p(t', x', y') - p(t, x, y)| \leq \frac{C}{\delta^\alpha} \left( \frac{\sqrt{|t' - t|} \vee |x' - x| \vee |y' - y|}{\delta} \right)^\alpha$$

*pour tous  $(t', x', y'), (t, x, y) \in [\delta^2, \infty) \times G \times G$  avec  $|x' - x| \vee |y' - y| \leq \delta$ .*

*ii) En conséquence  $\int_G p(t, x, y) f(y) \rho^{-1}(y) dy$  est une version continue de  $S_t f(x)$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ .*

**Preuve.** Voir [Aro68] et [Str88]. □

**Théorème 1.2.4** *i) En fait, dans le contexte du Théorème 1.2.1, le semi-groupe  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est de Feller. L'opérateur  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  est donc le générateur d'un processus de Markov  $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ .*

*ii) Les trajectoires de  $(X_t, 0 \leq t \leq T)$  sont continues.*

**Preuve.** On donne ici les grandes lignes de la preuve (cf [Lej00] pour des détails).

Si  $f$  appartient à  $\mathcal{C}_0(G)$  il est clair grace aux Théorèmes 1.2.2 et 1.2.3 que la version continue de  $S_t f(x)$  appartient aussi à  $\mathcal{C}_0(G)$ . En outre par le principe du maximum on peut montrer que

$$\int_G p(t, x, y) \rho^{-1}(y) dy \leq 1, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times G,$$

ce qui implique que pour toute  $f \in \mathcal{C}_0(G)$ ,

$$\left\| \int_G p(t, x, y) f(y) \rho^{-1}(y) dy \right\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

c'est à dire que  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est semi-markovien, d'où le i).

Ensuite le ii) du Théorème 1.2.2 permet de montrer par exemple que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in G, \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, y) \rho^{-1}(y) dy = 0,$$

ce qui implique ii) (voir Proposition 2.9 du Chapitre 4 de [EK86]).  $\square$

### 1.3 Résultats de convergence

Dans cette thèse on fera un usage intensif de résultats de convergence sur les OFD et les diffusions qui leur sont associées.

On énonce d'abord des résultats généraux qui reposent sur la notion de  $G$ -convergence, initialement introduite par S. Spagnolo, et dont la théorie a été ensuite développée par V.V. Zhikov, S.M. Kozlov et O.A. Oleinik (voir [ZKOT79], [ZKO81]).

De façon générale soient  $V$  un espace de Hilbert séparable et  $V'$  son dual; Pour  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  on note  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$  l'ensemble des opérateurs  $A$  de  $V$  dans  $V'$  pour lesquels

$$\|Au\|_{V'} \leq \Lambda \|u\|_V \quad \text{et} \quad \langle -Au, u \rangle_{V',V} \geq \lambda \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V,$$

la condition de coercivité assurant ici l'inversibilité des éléments de  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$ . Soit une suite  $(A^n)$  dans  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$ ; soit enfin un opérateur  $A$  de  $V$  dans  $V'$  vérifiant  $\langle -Au, u \rangle_{V',V} \geq \lambda \|u\|_V^2$ . On dit que  $(A^n)$   $G$ -converge vers  $A$  si

$$\forall (f, v) \in V' \times V, \quad \langle v, (A^n)^{-1}f \rangle_{V',V} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle v, A^{-1}f \rangle_{V',V}.$$

Pour illustrer cette notion considérons  $G \subset \mathbb{R}^d$  borné et des problèmes elliptiques du type,

$$\mathcal{P}(L, f) \begin{cases} Lu = f & \text{dans } G \\ u = 0 & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

avec  $f$  dans  $H^{-1}(G)$ , et  $u$  à chercher dans  $H_0^1(G)$ . Considérons  $(a^n)$  une suite de  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  et  $(L^n)$  la suite des opérateurs  $\mathfrak{L}(1, a^n, 0)$ . Il est clair en utilisant l'inégalité de Poincaré que  $(L^n)$  est une suite de  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$  si on prend  $V = H_0^1(G)$  et  $V' = H^{-1}(G)$  dans la définition ci-dessus. Les problèmes  $\mathcal{P}(L^n, f)$  ont donc des solutions faibles  $u^n = (L^n)^{-1}f$ . Supposons que la suite  $(L^n)$   $G$ -converge vers un opérateur  $L$ . Cela signifie que la suite des  $u^n$  converge faiblement dans  $H_0^1(G)$  vers la solution  $u = L^{-1}f$  de  $\mathcal{P}(L, f)$ .

Signalons qu'il est possible de montrer que dans ce cas l'opérateur limite  $L$  est lui même un OFD de la forme  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$  pour  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  (cf [ZKOT79]).

On peut donc pour commencer énoncer un premier théorème concernant les problèmes elliptiques.

**Théorème 1.3.1** *Supposons  $G$  borné. Soient  $(L^n)$  une suite d'opérateurs de  $H_0^1(G)$  dans  $H^{-1}(G)$  qui soient dans  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$  et  $L$  un opérateur qui soit dans le même ensemble.*

*Supposons que la suite  $(L^n)$   $G$ -converge vers  $L$ .*

*Soit  $(f^n)$  une suite convergent dans  $H^{-1}(G)$  vers une certaine forme linéaire  $f \in H^{-1}(G)$ .*

*Soit  $u$  la solution du problème  $\mathcal{P}(L, f)$ , et pour chaque  $n$  soit  $u^n$  la solution de  $\mathcal{P}(L^n, f^n)$ .*

*Alors la suite  $(u^n)$  converge faiblement dans  $H_0^1(G)$  vers  $u$ .*

**Preuve.** Voir la preuve du Théorème 5 dans [ZKOT79] : on a  $u^n = (L^n)^{-1}(f + f^n - f)$ , et il est clair par définition de la  $G$ -convergence que  $(L^n)^{-1}f$  converge faiblement vers  $u$ . Par ailleurs il s'avère que  $\|(L^n)^{-1}\|_{H^{-1}, H_0^1} \leq 1/\Lambda$  pour tout  $n$  (cf Théorème 1 de [ZKOT79]). Donc  $(L^n)^{-1}(f^n - f)$  converge fortement vers zéro dans  $H_0^1(G)$ .  $\square$

Dans [ZKO81] les auteurs ont appliqué la théorie de la  $G$ -convergence aux problèmes paraboliques.

**Théorème 1.3.2** *Supposons  $G$  borné. Soit  $(L^n)$  une suite d'opérateurs de  $H_0^1(G)$  dans  $H^{-1}(G)$  qui soient dans  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$  et soit  $L$  un opérateur dans le même ensemble.*

*Soit  $0 < T < \infty$ . Supposons que  $L$  engendre un semi-groupe  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  et que pour tout  $n$  l'opérateur  $L^n$  engendre un semi-groupe  $(S_t^n)_{0 \leq t \leq T}$ .*

*Supposons que la suite  $(L^n)$   $G$ -converge vers  $L$ .*

*Alors pour tout  $f \in L^2(G)$  la suite des fonctions  $S_t^n f(x)$  converge faiblement dans  $L^2(0, T; H_0^1(G))$  vers  $S_t f(x)$ ,*

**Preuve.** Voir [ZKO81], où est étudiée une notion de  $G$ -convergence pour les opérateurs paraboliques du type  $\mathcal{P}_t = \partial_t - L$ , avec  $L$  un opérateur elliptique. Mais si  $(L^n)$   $G$ -converge en tant qu'opérateur elliptique vers  $L$ , la suite des opérateurs  $\mathcal{P}_t^n = \partial_t - L^n$   $G$ -converge vers  $\mathcal{P}_t$  pour cette nouvelle notion. Or, de façon analogue au cas elliptique, la  $G$ -convergence dans le cas parabolique correspond à la convergence faible des solutions faibles de problèmes paraboliques (Théorème 9 de [ZKO81]).  $\square$

Le cas qui nous intéresse est celui des OFD, qui engendrent des semi-groupes de Feller et des processus continus (cf section précédente). Il est naturel de se demander ce que l'on peut dire de la convergence des versions continues des  $S_t^n f(x)$ , et des processus  $X^n$  engendrés par les opérateurs  $(L^n, D(L^n))$ . C'est ce qu'a fait A. Rozkosz dans [Roz96].

**Théorème 1.3.3** *Soient  $(\rho^n)$ ,  $(a^n)$  et  $(b^n)$  respectivement des suites de  $\mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda)$ ,  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  et  $\mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soient  $\rho \in \mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda)$ ,  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ .*

*Pour tout  $n$  soient  $S^n$  et  $X^n$  respectivement le semi-groupe et le processus engendrés par  $(L^n, D(L^n))$ . Soient  $S$  et  $X$  respectivement le semi-groupe et le processus engendrés par  $(L, D(L))$ .*

*Supposons que, pour  $\alpha$  assez grand,  $(\alpha - L^n)$   $G$ -converge vers  $(\alpha - L)$ . Alors on a :*



i) La version continue de  $S_t^n f(x)$  converge uniformément sur tout compact de  $(0, T) \times G$  vers la version continue de  $S_t f(x)$ .

ii)

$$(X_t^n, 0 \leq t \leq T) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (X_t, 0 \leq t \leq T) \quad \text{en loi.}$$

**Preuve.** Voir [Roz96].

Notons que pour  $b \neq 0$  la coercivité de la forme  $\langle -Lu, v \rangle_{H^{-1}(G), H_0^1(G)}$  n'est pas assurée et que  $L$  n'est a priori pas dans  $\mathfrak{D}(\lambda', \Lambda')$ . Cependant, pour  $\alpha$  assez grand,  $(\alpha - L)$  y est, et on se place à horizon fini, ce qui permet de mener la démonstration (cf preuve du Théorème 1.2.1).  $\square$

On peut alors se demander quel type de convergence sur les coefficients entraîne la  $G$ -convergence des OFD. En dimension un on a le résultat suivant.

**Théorème 1.3.4** Soit  $\rho, a \in \mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soient  $(\rho^n)$  et  $(a^n)$  des suites de  $\mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda)$  et  $(b^n)$  une suite de  $\mathfrak{B}(\Lambda)$  telles que

$$\frac{1}{a^n} \frac{L_{loc}^2(G)}{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\rho^n} \frac{L_{loc}^2(G)}{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{b^n}{a^n \rho^n} \frac{L_{loc}^2(G)}{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a\rho}. \quad (1.3.1)$$

Alors la suite des opérateurs  $\mathfrak{L}(\rho^n, a^n, b^n)$   $G$ -converge vers  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

**Preuve.** Voir Théorème 17 dans [ZKOT79], [Roz96], ainsi que [LM06] pour l'ajout du coefficient  $\rho$ .  $\square$

**Remarque 1.3.1** Dans le cas unidimensionnel on peut toujours se ramener au cas d'un OFD sans dérive (cf Proposition 1.4.3 plus loin). Les opérateurs  $\mathfrak{L}(\rho^n, a^n, b^n)$  et  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  sont donc dans un certain  $\mathfrak{D}(\lambda', \Lambda')$  et on peut parler de leur  $G$ -convergence.

Signalons que pour avoir la  $G$ -convergence dans le cas de la dimension  $d > 1$ , il faut faire des hypothèses de convergence plus forte sur les coefficients que celles du Théorème 1.3.1. Par exemple, dans le cas d'opérateurs de la forme  $\mathfrak{L}(1, a^k, 0)$ , la convergence forte dans  $L^2(G)$  de chaque  $(a_{ij}^k)$  vers  $a_{ij}$  suffit pour avoir la  $G$ -convergence des  $\mathfrak{L}(1, a^k, 0)$  vers  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$  (cf [ZKOT79] p102).

Outre la propriété de fermeture déjà mentionnée, on connaît d'autres propriétés de la  $G$ -convergence. On peut évoquer notamment le caractère local de la  $G$ -convergence : si une suite d'OFD  $(L^k)$   $G$ -converge vers un OFD  $L$  sur  $G$ , alors elle  $G$ -converge également sur tout  $G' \subset G$ . On a aussi des propriétés de  $G$ -compacité de l'ensemble  $\mathfrak{D}(\lambda, \Lambda)$  (cf Théorèmes 2 et 3 de [ZKOT79]). On énonce dans le théorème suivant un résultat de  $G$ -compacité pour les OFD de la forme  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$ .

**Théorème 1.3.5** Soit  $(a^n)$  une suite de  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ . Il existe une sous-suite  $(a^{n'})$  et un élément  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ , tels que la suite des opérateurs  $\mathfrak{L}(1, a^{n'}, 0)$   $G$ -converge vers l'opérateur  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$ .

**Preuve.** Les opérateurs de la forme  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$  sont autoadjoints, on est donc dans le cadre du Théorème 3 dans [ZKOT79]. On fait de plus intervenir la fermeture de l'ensemble des opérateurs de la forme  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$  pour  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ .  $\square$

On aura besoin du résultat suivant sur la convergence des temps de sortie d'un ouvert d'une famille de processus.

**Proposition 1.3.1** *Soit  $G'$  une partie ouverte bornée de  $G$ . Supposons que tous les points de  $\partial G'$  sont réguliers. Soit  $(X^n)$  qui converge en loi vers  $X$ . Soit  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial G'\}$  et pour tout  $n$ ,  $\tau^n = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^n \in \partial G'\}$ . Alors pour tout  $T > 0$  et pour tout point de départ  $x \in G'$  on a,*

$$\mathbb{P}^x \circ (X^n, \tau^n)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}^x \circ (X, \tau)^{-1},$$

*par rapport à la topologie de  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ . En particulier  $X_{\wedge \tau^n}^n$  converge en loi vers  $X_{\wedge \tau}$  sous  $\mathbb{P}^x$  pour tout  $x$ .*

**Preuve.** Voir [Lej00] Chapitre 0, Section 6. Voir aussi dans [LM06] la fin de la preuve de la Proposition 3. Ces preuves utilisent le fait que tout point de départ  $x$  est régulier pour  $X$ . Notons que les points réguliers pour un processus engendrés par un OFD sont les mêmes que pour le Brownien (cf [GT83] p 206, voir également [KS91] pour une définition des points réguliers).  $\square$

## 1.4 Fonction d'échelle et mesure de vitesse dans le cas unidimensionnel

En dimension un un processus peut être totalement caractérisé par la donnée de sa fonction d'échelle et de sa mesure de vitesse. On commence donc par des rappels sur ces notions (on suit [Bre68] Chapitre 16), puis on donne la fonction d'échelle et la mesure de vitesse d'un processus engendré par un OFD du type  $\mathfrak{L}(\rho, a, 0)$ .

**Définition 1.4.1** *La fonction d'échelle d'un processus de Markov  $X$  sur  $G$  est la fonction strictement croissante  $s$ , unique à une transformation affine près, telle que pour tout  $[l, r] \subset G$ , et pour tout  $x \in [l, r]$ ,*

$$\mathbb{P}^x[X_\tau = r] = \frac{s(x) - s(l)}{s(r) - s(l)},$$

où  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \{l, r\}\}$ .

La fonction d'échelle du mouvement brownien est la fonction identité. On dit qu'un processus  $X$  est sur son *échelle naturelle* si sa fonction d'échelle est la fonction identité. Pour un processus  $X$  qui n'est pas sur son échelle naturelle il est facile de vérifier en appliquant la définition 1.4.1 que  $s(X)$  l'est.

**Définition 1.4.2** Soit  $X$  un processus de Markov sur  $G$  qui est sur son échelle naturelle. La mesure de vitesse de  $X$  est l'unique mesure  $m$  sur  $G$  telle que, pour tout  $[l, r] \subset G$ , et pour tout  $x \in [l, r]$ , avec  $\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t \in \{l, r\}\}$ , on ait,

$$\mathbb{E}^x[\tau] = \int_l^r G_{[l,r]}(x, z)m(dz), \quad (1.4.1)$$

où,

$$G_{[l,r]}(x, z) = \begin{cases} \frac{2(x-l)(r-z)}{r-l}, & \forall x, z \in [l, r], x \leq z, \\ \frac{2(z-l)(r-x)}{r-l}, & \forall x, z \in [l, r], x \geq z, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut se demander comment définir la fonction d'échelle d'un processus qui n'est pas sur son échelle naturelle.

**Lemme 1.4.1** Soit  $X$  un processus de Markov sur  $G$  et  $s$  sa fonction d'échelle. Supposons que le mesure de vitesse de  $s(X)$  est  $V(x)dx$ . On a pour tout  $[l, r] \subset G$ , et pour tout  $x \in [l, r]$ , avec  $\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t \in \{l, r\}\}$ ,

$$\mathbb{E}^x[\tau] = \int_l^r G_{[l,r]}(x, y)V(s(y))s'(y)dy,$$

où,

$$G_{[l,r]}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(s(x)-s(l))(s(r)-s(y))}{s(r)-s(l)}, & \forall x, y \in [l, r], x \leq y, \\ \frac{2(s(y)-s(l))(s(r)-s(x))}{s(r)-s(l)}, & \forall x, y \in [l, r], x \geq y, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4.2)$$

On appelle la mesure  $m(dx) = V(s(x))s'(x)dx$  la mesure de vitesse de  $X$ .

**Preuve.** On a  $\mathbb{E}^x[\tau] = \mathbb{E}^{s(x)}[\tilde{\tau}]$ , avec  $\tilde{\tau} = \inf\{t \geq 0 | s(X_t) \in \{s(l), s(r)\}\}$ . Comme  $s(X)$  est sur son échelle naturelle il suffit d'utiliser dans (1.4.1) le changement de variable  $z = s(y)$  pour achever la preuve.  $\square$

Introduire les notions de fonction d'échelle et de mesure de vitesse est en fait motivé par le fait qu'on voudra utiliser la proposition suivante.

**Proposition 1.4.1** Soit  $X$  un processus de Markov sur  $G$  et  $m(dx)$  sa mesure de vitesse. Soit  $[l, r] \subset G$ ,  $\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t \in \{l, r\}\}$  et  $G_{[l,r]}(x, y)$  la fonction correspondant à  $m(dx)$  dans le lemme 1.4.1; pour tout  $x \in [l, r]$ , et toute fonction  $f$  continue bornée on a,

$$\mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau f(X_s)ds \right] = \int_l^r G_{[l,r]}(x, y)f(y)m(dy).$$

**Preuve.** Voir Problème 10 dans la Section 16.6 de [Bre68].  $\square$

Cette proposition nous fournira un moyen simple d'estimer des quantités du type  $\mathbb{E}^x \left[ \int_0^T f(X_s) ds \right]$  dans la Section 3.1 du Chapitre 3 de cette thèse.

En effet pour le cas des OFD en dimension un on a le résultat suivant.

**Proposition 1.4.2** Soient  $a, \rho \in \mathfrak{C}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$ . Soit  $X$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(a, \rho, 0)$ . Soit  $x_0 \in G$ . La fonction d'échelle et la mesure de vitesse de  $X$  sont données par,

$$s(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{a(y)}, \quad (1.4.3)$$

$$\text{et } m(dx) = \frac{dx}{\rho(x)}. \quad (1.4.4)$$

**Preuve.** Voir [Lej00] Chapitre 5, où sont utilisés des résultats de convergence prouvés dans [FW94].  $\square$

**Remarque 1.4.1** Notons que, comme  $s$  est unique à une transformation affine près, le choix du point de référence  $x_0$  dans (1.4.3) est arbitraire. On peut choisir n'importe quel point dans  $G$ .

**Remarque 1.4.2** Il ne faut pas confondre la mesure de vitesse  $m(dx)$  de  $X$  engendré par un OFD, et la mesure  $m_Y(dy)$  du processus  $Y = s(X)$  mis sur son échelle naturelle. Cette dernière peut cependant parfois être utile.

En effet déterminons d'abord  $m_Y(dy) = V_Y(y)dy$ . En combinant le Lemme 1.4.1 et (1.4.4) dans la Proposition 1.4.2 on obtient

$$\frac{1}{\rho(x)} dx = V_Y(s(x)) s'(x) dx,$$

puis

$$V_Y(y) = \left( \frac{a}{\rho} \right) \circ s^{-1}(y).$$

Soit alors  $t \mapsto T_t$  le changement de temps défini par

$$t = \int_0^{T_t} \left( \frac{a}{\rho} \right) (X_s) ds.$$

Par le Théorème 16.51 dans [Bre68], si  $W$  est un mouvement brownien sur  $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^x)$ , le processus  $W_{T_t}$  est sur son échelle naturelle et a pour mesure de vitesse  $V_Y(y)dy$ . Donc  $W_{T_t}$  a la même loi que  $Y_t = s(X_t)$ , et donc  $s^{-1}(W_{T_t})$  la même loi que  $X_t$ . Cela donne une description possible de  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, 0)$ .

Comme le montre la Proposition 1.4.2 on obtient facilement  $s$  et  $m(dx)$  pour un processus engendré par un opérateur de la forme  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  avec  $b = 0$ . Mais que faire pour traiter le cas  $b \neq 0$ ? Grâce au fait qu'on est en dimension un on peut se ramener au cas  $b = 0$ , si on regarde un processus à valeurs dans un intervalle borné.

**Proposition 1.4.3** *Soient  $a, \rho \in \mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $[l, r] \subset G$ . Pour  $x_0 \in [l, r]$ , soit  $\Psi$  définie par*

$$\Psi(x) = 2 \int_{x_0}^x \frac{b(y)}{a(y)\rho(y)} dy, \quad \forall x \in [l, r]. \quad (1.4.5)$$

*Considérons sur  $[l, r]$  l'opérateur  $(\bar{L}, D(\bar{L})) = \mathfrak{L}(\rho e^{-\Psi}, a e^{\Psi}, 0)$ . La restriction sur  $[l, r]$  de  $(L, D(L))$  est égale à  $(\bar{L}, D(\bar{L}))$ .*

**Preuve.** Comme  $b$  est dans  $\mathfrak{B}(\Lambda)$  il est possible de montrer que  $a e^{\Psi}$  et  $\rho e^{-\Psi}$  sont dans  $\mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda', \Lambda')$  sur  $[l, r]$ , avec  $\lambda'$  et  $\Lambda'$  dépendant de  $\lambda, \Lambda$  et  $l - r$ .

Comme les fonctions  $e^{\pm\Psi}$  sont bornées et ont des dérivées classiques bornées il est clair qu'elles sont dans  $H^1([l, r])$ . Or pour toutes fonctions  $f, g \in H^1$  on a  $fg \in H^1$ , et  $\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$  (voir [Bre83] Corollaire VIII.9). Donc on peut affirmer que, sur  $[l, r]$ ,  $D(L) = D(\bar{L})$ , et que

$$\forall f \in D(L), \quad \frac{\rho e^{-\Psi}}{2} \frac{d}{dx} \left( a e^{\Psi} \frac{df}{dx} \right) = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left( a \frac{df}{dx} \right) + b \frac{df}{dx}.$$

□

Notons qu'en domaine non borné on perd l'uniforme ellipticité et la bornitude des coefficients  $a e^{\Psi}$  et  $\rho e^{-\Psi}$ , ce qui empêche d'utiliser la transformation de la Proposition 1.4.3.

## 1.5 EDSTL

On sait qu'un OFD du type  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  engendre une diffusion  $X$ , même si  $\rho, a$  et  $b$  sont discontinus, puisqu'en toute généralité ils ne vérifient que (1.2.1). Il est naturel de se demander quelle EDS ce processus  $X$  peut bien vérifier. Mais, comme évoqué en introduction, dans le cas de coefficients discontinus on ne peut mettre l'OFD sous la forme (0.0.2), et écrire l'EDS vérifiée par  $X$  devient problématique. On y arrive toutefois en dimension un grâce à la théorie des EDSTL, et en restreignant un peu la classe des fonctions dans laquelle on prend les coefficients. On présente donc dans cette section quelques résultats sur les EDSTL, établis par J.F. Le Gall dans [Leg85] (voir également [BC05] pour une extension de ces résultats). L'EDSTL vérifiée par  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ , avec  $\rho, a$  quelconques dans la nouvelle classe de coefficients introduite ci-dessous, et toujours dans  $\mathfrak{B}(\Lambda)$ , sera donnée au début du chapitre 2.

On introduit quelques notations supplémentaires.

Pour  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  on note  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $\mathbf{EII}(\lambda, \Lambda)$  qui vérifient :

- i/  $f$  est càd-làg.
- ii/  $f$  appartient à  $\mathcal{C}^1(G \setminus \mathcal{J})$ , où  $\mathcal{J}$  est un ensemble dénombrable sans point d'accumulation.

On notera  $\mathfrak{M}$  l'espace des mesures bornées  $\nu$  sur  $G$  telles que  $|\nu(\{x\})| < 1$  pour tout  $x$  dans  $G$ .

Pour  $f$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  on note  $f'(dx)$  la mesure bornée correspondant à la dérivée première de  $f$  au sens généralisé. On note  $f(x+)$  et  $f(x-)$  respectivement les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $x$ . On notera  $f'(x)$  la densité càd-làg de la partie absolument continue de  $f'(dx)$  (c'est à dire que  $f'(x)$  n'est autre que la dérivée à droite au sens classique de  $f$  en  $x$ ).

Pour  $\nu$  dans  $\mathfrak{M}$  on note  $\nu^c$  la partie absolument continue de  $\nu$ .

Pour  $\sigma$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  et  $\nu$  dans  $\mathfrak{M}$ , on appelle EDSTL de coefficients  $\sigma$  et  $\nu$ , et note  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu)$ , l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) L_t^x(X),$$

où  $L_t^x(X)$  est le temps local symétrique du processus inconnu  $X$ .

**Proposition 1.5.1 (Le Gall 1985)** *Soit  $\sigma$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  pour certaines constantes  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  et soit  $\nu$  dans  $\mathfrak{M}$ . L'EDSTL  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu)$  a une solution forte unique.*

On a besoin de deux lemmes.

**Lemme 1.5.1 (Le Gall 1985)** *Soit  $\sigma \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$ . L'EDSTL  $\mathbf{Sde}(\sigma, 0)$  a une solution forte unique.*

**Preuve.** Voir [Leg85]. C'est une belle preuve utilisant elle-même le temps local et qui étend un résultat de S. Nakao (cf [Nak72]).  $\square$

Le lemme suivant joue un grand rôle dans les calculs par la suite.

**Lemme 1.5.2** *Soit  $\nu$  dans  $\mathfrak{M}$ . Il existe une fonction  $f_\nu$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  (pour des constantes  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ ), unique à une constante multiplicative près, telle que :*

$$f'_\nu(dx) + (f_\nu(x+) + f_\nu(x-))\nu(dx) = 0. \quad (1.5.1)$$

**Preuve de la Proposition 1.5.1.** Voir [Leg85]. Il suffit de poser

$$\Phi_\nu(x) = \int_0^x f_\nu(y) dy. \quad (1.5.2)$$

En se servant de la formule d'Itô-Tanaka symétrique et du Lemme 1.5.2 on obtient que  $X$  est solution de  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu)$  si et seulement si  $Y := \Phi_\nu(X)$  est solution de  $\mathbf{Sde}((\sigma f_\nu) \circ \Phi_\nu^{-1}, 0)$ . En utilisant le Lemme 1.5.1 on achève la preuve.  $\square$

**Remarque 1.5.1** Pour des détails sur le calcul avec la formule d'Itô-Tanaka voir ci-après la preuve de la proposition 2.2.1 où on prouve une formule générale de changement d'échelle pour les EDSTL. Voir aussi Remarque 2.2.2.

On aura besoin de résultats de convergence sur les EDSTL. Le Gall a prouvé le résultat de consistance suivant.

**Théorème 1.5.1 (Le Gall 1985)** *Soient deux suites  $(\sigma^n)$  et  $(\nu^n)$  pour lesquelles il existe  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ ,  $0 < M < \infty$  et  $\delta > 0$  telles que*

$$(H1) \quad \sigma^n \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(H2) \quad |\nu^n(\{x\})| \leq 1 - \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in G.$$

$$(H3) \quad |\nu^n|(G) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de sorte que chaque  $\nu^n$  est dans  $\mathfrak{M}$ . Supposons qu'il existe deux fonctions  $\sigma$  et  $f$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda', \Lambda')$  (pour certaines constantes  $0 < \lambda' < \Lambda' < \infty$ ) telles que

$$\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_{loc}^1(\mathbb{R})} \sigma \quad \text{et} \quad f_{\nu^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_{loc}^1(\mathbb{R})} f,$$

et posons :

$$\nu(dx) = -\frac{f'(dx)}{f(x+) + f(x-)}. \quad (1.5.3)$$

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^x)$  un espace probabilisé filtré portant un mouvement brownien adapté  $W$ . Sur cet espace, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  soit  $X^n$  la solution forte de  $\mathbf{Sde}(\sigma^n, \nu^n)$ , et soit  $X$  la solution forte de  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu)$ . Alors :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^n - X_s| \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad (X_t^n, t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X_t, t \geq 0).$$

**Remarque 1.5.2** Dans ce théorème  $\nu^n$  approche  $\nu$  en ce sens que  $f_{\nu^n}$  tend vers  $f_\nu$  pour la convergence  $L_{loc}^1$ . Mais attention : on peut avoir  $\nu^n \rightharpoonup \nu_1$  faiblement, mais  $f_{\nu^n} \rightarrow f_{\nu_2}$  pour la convergence  $L_{loc}^1$ , avec  $\nu_1 \neq \nu_2$  (voir [Leg85] p 65 pour un exemple). Le Théorème 1.5.1 dit alors que  $X^n$  tend vers  $X$ , qui est solution de  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu_2)$  et non de  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu_1)$  !

Le Gall a aussi prouvé un théorème de Donsker pour les solutions d'EDSTL du type  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu)$  pour  $\sigma = 1$ , dont on reprendra une partie des idées de la démonstration pour prouver la convergence de l'algorithme présenté dans le Chapitre 2 de cette thèse. On évoque donc ici ce résultat.

Soit  $\mu$  dans  $\mathfrak{M}$  et  $Y$  la solution de  $\mathbf{Sde}(1, \mu)$ .

On définit des coefficients  $\beta_k^n$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :

$$\frac{1 - \beta_k^n}{1 + \beta_k^n} = \exp\left(-2\mu^c\left(\left\lfloor \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right\rfloor\right)\right) \prod_{\frac{k}{n} < y \leq \frac{k+1}{n}} \left(\frac{1 - \mu(\{y\})}{1 + \mu(\{y\})}\right) = \frac{f_\mu(\frac{k+1}{n})}{f_\mu(\frac{k}{n})}. \quad (1.5.4)$$

On définit une suite de mesures  $(\mu^n)$  dans  $\mathfrak{M}$  par

$$\mu^n = \sum \beta_k^n \delta_{\frac{k}{n}}, \quad (1.5.5)$$

et une suite  $(Y^n)$  de processus tels que chaque  $Y^n$  soit solution de  $\mathbf{Sde}(1, \mu^n)$ .

Finalement pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit une suite de temps d'arrêt  $(\tau_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$  par,

$$\begin{aligned} \tau_0^n &= 0 \\ \tau_{p+1}^n &= \inf\{t > \tau_p^n : |Y_t^n - Y_{\tau_p^n}^n| = \frac{1}{n}\}. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

On a le théorème suivant.

**Théorème 1.5.2 (Le Gall 1985)** *Dans le contexte précédent  $S_p^n := nY_{\tau_p^n}^n$  définit une suite de marches aléatoires sur les entiers telle que :*

i)

$$\begin{aligned} S_0^n &= 0, & \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \mathbb{P}[S_{p+1}^n = k+1 | S_p^n = k] &= \frac{1}{2}(1 + \beta_k^n), & \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{P}[S_{p+1}^n = k-1 | S_p^n = k] &= \frac{1}{2}(1 - \beta_k^n), & \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ii)

*La suite de processus définie par  $\tilde{Y}_t^n := (1/n)S_{[n^2t]}^n$ , où  $[\cdot]$  désigne la partie entière d'un réel positif, vérifie pour tout  $0 < T < \infty$  :*

$$\mathbb{E}|\tilde{Y}_t^n - Y_t| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{et} \quad (\tilde{Y}_t^n, t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (Y_t, t \geq 0).$$



# Chapitre 2

## Un algorithme en dimension un utilisant les équations différentielles stochastiques avec temps local

### Plan du Chapitre 2

Dans la Section 2.1 on établit le lien entre OFD et EDSTL en dimension un. Dans la Section 2.2 on donne une formule très générale de changement d'échelle pour les EDSTL. Dans la Section 2.3 on présente l'algorithme. Dans la Section 2.4 on montre la convergence de cet algorithme tout en évaluant la vitesse de cette convergence.

### 2.1 Lien entre OFD et EDSTL

Le lien entre OFD et EDSTL dans le cas  $d = 1$  est établi dans la proposition suivante.

**Proposition 2.1.1** *Soient  $a$  et  $\rho$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  pour certaines constantes  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ . Soit  $b$  dans  $\mathfrak{B}(\Lambda)$ . Notons  $\mathcal{I}$  l'ensemble des points de discontinuité de  $a$ . Alors  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  est le générateur infinitésimal de l'unique solution forte de  $\mathfrak{Sde}(\sqrt{a\rho}, \nu)$  avec*

$$\nu(dx) = \left( \frac{a'(x)}{2a(x)} + \frac{b(x)}{\rho(x)a(x)} \right) dx + \sum_{x_i \in \mathcal{I}} \frac{a(x_i+) - a(x_i-)}{a(x_i+) + a(x_i-)} \delta_{x_i}(dx). \quad (2.1.1)$$

Dans [LM06] les auteurs ont prouvé la proposition ci-dessus en utilisant les notions de forme de Dirichlet et de mesure de Revuz. On donne ici une preuve plus simple, basée sur les résultats de consistance des Sections 1.3 et 1.5 du chapitre précédent.

**Preuve de la Proposition 2.1.1.** Comme  $a$  et  $\rho$  sont dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  la fonction  $\sqrt{\rho a}$  est dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$ . De plus, comme  $|a - b|/|a + b| < 1$  pour tous  $a, b$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et comme  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ , la mesure  $\nu$  définie par (2.1.1) est dans  $\mathfrak{M}$ . Par la Proposition 1.5.1 il existe donc une solution forte unique  $X$  à  $\mathfrak{Sde}(\sqrt{a\rho}, \nu)$ .

Il s'agit maintenant d'identifier le générateur infinitésimal de  $X$ . On peut construire deux suites de fonctions  $(a^n)$  et  $(\rho^n)$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ , telles que

$$a^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \text{ p.p.} \quad \text{et} \quad \rho^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho \text{ p.p.}$$

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on note  $X^n$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(\rho^n, a^n, b)$ .

D'une part, par convergence dominée les hypothèses du Théorème 1.3.4 sont vérifiées, et par le Théorème 1.3.3 on a,

$$(X_t^n, t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (\tilde{X}_t, t \geq 0), \quad (2.1.2)$$

où le processus  $\tilde{X}$  est engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

D'autre part on va montrer en utilisant le Théorème 1.5.1 que

$$(X_t^n, t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X_t, t \geq 0). \quad (2.1.3)$$

Donc en prenant en compte (2.1.2) et (2.1.3) on conclura que le générateur infinitésimal de  $X$  est  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

Comme  $a^n$  est dans  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $(L^n, D(L^n)) = \mathfrak{L}(\rho^n, a^n, b)$  peut s'écrire,

$$L^n = \frac{\rho^n}{2} \left[ a^{n'} \frac{d}{dx} + a^n \frac{d^2}{dx^2} \right] + b \frac{d}{dx},$$

donc il est usuel de dire que  $X^n$  est solution de

$$X_t^n = x + \int_0^t \sqrt{\rho^n(X_s^n) a^n(X_s^n)} dW_s + \int_0^t \left[ \frac{\rho^n(X_s^n) a^{n'}(X_s^n)}{2} + b(X_s^n) \right] ds. \quad (2.1.4)$$

Comme  $d\langle X^n \rangle_s = \rho^n(X_s^n) a^n(X_s^n) ds$ , on peut réécrire (2.1.4) par la formule de densité de temps d'occupation et dire que

$$X_t^n = x + \int_0^t \sqrt{\rho^n(X_s^n) a^n(X_s^n)} dW_s + \int_{\mathbb{R}} \nu_n(dx) L_t^x(X^n),$$

où  $\nu_n(dx) = (a^{n'}(x)/2a^n(x) + b(x)/[\rho^n(x)a^n(x)])dx$ .

Des calculs élémentaires montrent alors que la fonction  $f_{\nu_n}$  associée à la mesure  $\nu_n$  par le Lemme 1.5.2 est de la forme

$$f_{\nu_n}(x) = K \frac{\exp\left(-2 \int_0^x \frac{b}{\rho^n a^n}(y) dy\right)}{a^n(x)}$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ .

Par convergence dominée  $f_{\nu_n}(x)$  tend vers

$$f(x) := K \frac{\exp\left(-2 \int_0^x \frac{b}{\rho a}(y) dy\right)}{a(x)}$$

pour la convergence  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ . Il suffit maintenant de déterminer la mesure  $\nu$  associée à  $f$  par (1.5.3).

On a

$$f'(dx) = f'(x)dx + \sum_{x_i \in \mathcal{I}} c_{x_i}^f \delta_{x_i}(dx)$$

et

$$\nu(dx) = \nu^c(dx) + \sum_{x_j \in \mathcal{J}} c_{x_j}^\nu \delta_{x_j}(dx)$$

avec  $\mathcal{J} = \{x \in G : \nu(\{x\}) \neq 0\}$ . D'après (1.5.1) on a

$$\nu^c(dx) = -\frac{f'(x)}{2f(x)}dx = \left( \frac{a'(x)}{2a(x)} + \frac{b(x)}{\rho(x)a(x)} \right) dx.$$

Ensuite il est clair que  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ , et que pour tout  $x \in \mathcal{I}$ ,

$$\nu(\{x\}) = c_x^\nu = -\frac{c_x^f}{f(x+) + f(x-)} = -\frac{f(x+) - f(x-)}{f(x+) + f(x-)} = \frac{a(x+) - a(x-)}{a(x+) + a(x-)}.$$

Ainsi la mesure  $\nu$  est bien celle définie par (2.1.1). Comme par ailleurs il est clair que

$$\sqrt{\rho^n a^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_{loc}^1(\mathbb{R})} \sqrt{\rho a},$$

et que les hypothèses (H1) – (H3) du Théorème 1.5.1 sont vérifiées, on peut dire qu'on a (2.1.3), ce qui achève la preuve.  $\square$

## 2.2 Une formule de changement d'échelle

On définit d'abord la classe des bijections dont il sera question dans ce changement d'échelle.

Pour  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$  on note  $\mathfrak{T}(\lambda, \Lambda)$  l'ensemble des fonctions  $\Phi$  sur  $G$  qui ont une dérivée première  $\Phi'$  qui appartient à  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$ . L'hypothèse faite sur la bijection est ainsi minimale et on peut énoncer une formule de changement d'échelle très générale.

**Proposition 2.2.1** *Soit  $\sigma$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  pour  $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ . Soit*

$$\nu(dx) = b(x)dx + \sum_{x_i \in \mathcal{I}} c_{x_i} \delta_{x_i}(dx),$$

dans  $\mathfrak{M}$  (en particulier  $b$  est mesurable et bornée et chaque  $|c_{x_i}| < 1$ ).

Soit  $\Phi$  dans  $\mathfrak{T}(\lambda', \Lambda')$  pour  $0 < \lambda' < \Lambda' < \infty$  et soit  $\mathcal{J}$  l'ensemble des points de discontinuité de  $\Phi'$ .

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

*i)* Le processus  $X$  est solution de  $\mathbf{Sde}(\sigma, \nu)$ .

*ii)* Le processus  $Y := \Phi(X)$  est solution de  $\mathbf{Sde}(\gamma, \mu)$  avec

$$\gamma(y) = (\sigma\Phi') \circ \Phi^{-1}(y),$$

et

$$\mu(dy) = \frac{\Phi'b + \frac{1}{2}(\Phi')'}{(\Phi')^2} \circ \Phi^{-1}(y)dy + \sum_{x_i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} \beta_{x_i} \delta_{\Phi(x_i)}(dy),$$

où,

$$\beta_x = \frac{\Phi'(x+)(1+c_x) - \Phi'(x-)(1-c_x)}{\Phi'(x+)(1+c_x) + \Phi'(x-)(1-c_x)},$$

avec  $c_x = 0$  si  $x \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ .

**Remarque 2.2.1** Notons que  $\gamma$  appartient à  $\mathbf{Coeff}(\lambda'', \Lambda'')$  pour certaines constantes  $0 < \lambda'' < \Lambda'' < \infty$ , et que  $\mu$  est dans  $\mathfrak{M}$ , donc parler de  $\mathbf{Sde}(\gamma, \mu)$  a un sens.

On peut dire que la classe des EDSTL est stable par transformation par une bijection appartenant à  $\mathfrak{T}(\lambda, \Lambda)$ .

**Preuve de la Proposition 2.2.1.** On prouve *i*)  $\Rightarrow$  *ii*). La preuve de la réciproque emploie des techniques similaires mais est plus compliquée.

On notera  $L_t^{x^-}(X)$  et  $L_t^{x^+}(X)$  les temps locaux de  $X$  respectivement à gauche et à droite de  $x$ .

On rappelle la formule d'Itô-Tanaka symétrique, obtenue en formant la moyenne des formules d'Itô-Tanaka à gauche et à droite (cf Exercice VI.1.25 dans [RY91]) : pour  $f$  fonction réelle différence de deux fonctions convexes, et  $X$  semi-martingale on a,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{f'(X_s+) + f'(X_s-)}{2} dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f''(da) L_t^a(X), \quad (2.2.1)$$

où  $f''$  est la mesure correspondant à la dérivée seconde au sens généralisé de  $f$  et  $L_t^a(X)$  est le temps local symétrique de  $X$  en  $a$  à l'instant  $t$ . En utilisant (2.2.1) et la formule de densité de temps d'occupation il vient,

$$\begin{aligned} Y_t = \Phi(X_t) &= \Phi(X_0) + \int_0^t (\sigma\Phi')(X_s) dW_s + \int_0^t (\sigma^2 b\Phi')(X_s) ds \\ &\quad + \sum_{x_i \in \mathcal{I}} \frac{\Phi'(x_i+) + \Phi'(x_i-)}{2} c_{x_i} L_t^{x_i}(X) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma^2 (\Phi')'](X_s) ds + \sum_{x_i \in \mathcal{J}} \frac{\Phi'(x_i+) - \Phi'(x_i-)}{2} L_t^{x_i}(X) \\ &= \Phi(X_0) + \int_0^t (\sigma\Phi') \circ \Phi^{-1}(Y_s) dW_s \\ &\quad + \int_0^t [\sigma^2 (\Phi'b + \frac{1}{2}(\Phi')')] \circ \Phi^{-1}(Y_s) ds + \sum_{x_i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} K_{x_i} L_t^{x_i}(X), \end{aligned}$$

avec  $K_x = c_x(\Phi'(x+) + \Phi'(x-))/2 + (\Phi'(x+) - \Phi'(x-))/2$ .

On doit maintenant exprimer  $L_t^x(X)$  en fonction de  $L_t^{\Phi(x)}(Y)$  pour  $x \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ .

On sait (voir par exemple le Corollaire VI.1.9 de [RY91]) que

$$L_t^{x+}(X) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{x \leq X_s \leq x+\varepsilon\}} d\langle X \rangle_s,$$

et on a une formule analogue pour  $L_t^{x-}(X)$ . Combiné au fait que  $d\langle Y \rangle_s = (\Phi'(X_s))^2 d\langle X \rangle_s$ , cela permet de montrer que

$$L_t^{\Phi(x)\pm}(Y) = \Phi'(x\pm) L_t^{x\pm}(X). \quad (2.2.2)$$

De plus le Théorème VI.1.7 de [RY91] indique que

$$L_t^{x+}(X) - L_t^{x-}(X) = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} dX_s.$$

Comme  $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} dW_s = 0$  et  $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=x\}} ds = 0$ , on a ici

$$(L_t^{x+}(X) - L_t^{x-}(X))/2 = c_x L_t^x(X).$$

Comme, par définition  $(L_t^{x+}(X) + L_t^{x-}(X))/2 = L_t^x(X)$ , on obtient

$$L_t^{x+}(X) = (1 + c_x) L_t^x(X). \quad (2.2.3)$$

De la même manière on a  $(L_t^{\Phi(x)+}(Y) - L_t^{\Phi(x)-}(Y))/2 = K_x L_t^x(X)$  et on obtient

$$K_x L_t^x(X) + L_t^{\Phi(x)}(Y) = L_t^{\Phi(x)+}(Y).$$

Ainsi en combinant (2.2.2) et (2.2.3) on obtient

$$L_t^{\Phi(x)}(Y) = (\Phi'(x+)(1 + c_x) - K_x) L_t^x(X),$$

et la formule est prouvée. □

**Remarque 2.2.2** C'est ce type de calcul qui est utilisé dans [Leg85] pour la preuve de la Proposition 1.5.1 énoncée dans le chapitre 1 de cette thèse (cf Remarque 1.5.1). Remarquons qu'il suffit d'utiliser la Proposition 2.2.1 pour trouver que  $Y := \Phi_\nu(X)$ , avec  $\Phi_\nu$  définie par (1.5.2), est solution de  $\mathbf{Sde}((\sigma f_\nu) \circ \Phi_\nu^{-1}, 0)$ . En effet comme  $\Phi'_\nu = f_\nu$  et qu'on a (1.5.1), on a, en particulier

$$\Phi'_\nu b + \frac{1}{2}(\Phi'_\nu)' = f_\nu b + \frac{1}{2}(-2f_\nu b) = 0$$

et

$$\Phi'_\nu(x+)(1 + c_x) - \Phi'_\nu(x-)(1 - c_x) = f_\nu(x+) - f_\nu(x-) + (f_\nu(x+) + f_\nu(x-))c_x = 0.$$

## 2.3 Approximation par marche aléatoire asymétrique

### 2.3.1 Skew Brownian Motion

On va construire notre schéma en construisant dans un premier temps un processus qui se comporte localement comme un Skew Brownian Motion (SBM). On commence donc par rappeler quelques propriétés du SBM, introduit par K. Itô et H.P. McKean en 1975 (voir [IM74], Problème 1 p115, voir aussi [Wal78], [HS81], [Lej06]).

Le SBM de paramètre  $\beta \in (-1, 1)$  partant de  $y$ , qu'on notera  $Y^{\beta,y}$ , vérifie (voir [HS81]),

$$Y_t^{\beta,y} = y + W_t + \beta L_t^y(Y^{\beta,y}), \quad (2.3.1)$$

i.e.  $Y^{\beta,y}$  est solution forte de  $\mathfrak{Sde}(1, \beta\delta_0)$ .

Dans [IM74] le SBM est construit en tirant des excursions d'un brownien standard, qui sont ensuite affectées des signes  $+1$  ou  $-1$ , tirés eux-même de façon indépendante selon une Bernoulli de paramètre  $\alpha = (\beta + 1)/2$ .

Le SBM se comporte comme un brownien standard, excepté en  $y$  où son comportement est perturbé de sorte que

$$\mathbb{P}^y(Y_t^{\beta,y} > y) = \alpha, \quad \forall t > 0. \quad (2.3.2)$$

On note  $\mathcal{T}(\Delta)$  la loi du temps d'arrêt  $\tau = \inf\{t \geq 0, |W_t| = \Delta\}$  où  $W$  est un mouvement brownien standard partant de zero. Pour le SBM  $Y^{\beta,0}$  et  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  on définit le temps d'arrêt  $\tau_\Delta = \inf\{t \geq 0, Y_t^{\beta,0} \in \{\Delta, -\Delta\}\}$ . Le symbole  $\cong$  désignera l'égalité en loi jusqu'à la fin de cette thèse. Notre approche repose sur le lemme suivant.

**Lemme 2.3.1** *Soient  $y$  et  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\beta$  dans  $(-1, 1)$ . Posons  $\alpha = (\beta + 1)/2$ . Alors*

$$i) Y^{\beta,y} + x \cong Y^{\beta,y+x} \quad \text{et} \quad ii) (\tau_\Delta, Y_{\tau_\Delta}^{\beta,0}) \cong \mathcal{T}(\Delta) \otimes \text{Ber}(\alpha).$$

**Preuve.** C'est une conséquence directe de la construction du SBM dans [IM74].  $\square$

### 2.3.2 L'idée de base du schéma

La Proposition 2.1.1 donne l'EDSTL vérifiée par  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  en dimension un. La Proposition 2.2.1 nous fournit un moyen de transformer cette EDSTL en une autre, en faisant subir à  $X$  une transformation en espace. L'idée est donc de trouver une bijection qui transforme  $X$  en  $Y$  se comportant localement comme un SBM, puis d'utiliser le Lemme 2.3.1 pour construire une chaîne de Markov, à partir de laquelle on pourra construire un processus  $\tilde{Y}^h$  qui approche  $Y$ . Ce processus est une marche aléatoire asymétrique en ce sens que ses probabilités de transition ne seront pas partout  $1/2$ .

On peut comparer cette approche à celles utilisées dans les travaux récents cités en introduction.

Dans [Mar04] M. Martinez utilise comme dans la Proposition 1.5.1 la transformation bijective  $\Phi(x) = \int_0^x f_\nu(y)$ , de telle sorte que  $Y = \Phi(X)$  est solution de  $\mathfrak{Sde}(\gamma, 0)$  avec

$\gamma \in \mathbf{Coeff}(m, M)$ . Il construit ensuite un schéma d'approximation d'Euler de  $Y$ , dont la vitesse de convergence n'est pas facile à évaluer car  $\gamma$  n'est a priori pas Lipschitz.

Dans l'article [LM06], A. Lejay et M. Martinez construisent d'abord des approximations constantes par morceaux  $\rho^h$  et  $a^h$  des coefficients  $\rho$  et  $a$  (ils traitent le cas  $b = 0$  sans perte de généralité, cf Proposition 1.4.3). Le processus  $X^h$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho^h, a^h, 0)$  vérifie alors  $\mathfrak{Sde}(\sqrt{a^h \rho^h}, \nu^h)$  avec  $(\nu^h)^c = 0$ . Ils construisent alors une bijection  $\Phi^h$  telle que  $Y^h = \Phi^h(X^h)$  vérifie  $\mathfrak{Sde}(1, \mu^h)$  avec  $\mu^h = \sum \beta_k \delta_{y_k}$ , i.e.  $Y^h$  se comporte localement comme un SBM. Ils proposent alors un schéma pour  $Y^h$  basé sur le Lemme 2.3.1 et la simulation des temps de sortie du brownien d'un intervalle.

Le schéma proposé ici peut être vu comme une variation de cette dernière méthode, mais on utilisera des marches aléatoires plutôt que le schéma proposé dans [LM06], et les temps de sortie qui sont exactement calculés dans [LM06] sont ici remplacés par leur moyenne.

On introduit encore une nouvelle classe de coefficients : Soit  $\mathfrak{Bc}(\Lambda)$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathfrak{B}(\Lambda)$  qui sont continues sauf sur un ensemble dénombrable de points de  $G$ .

Soient  $\rho, a \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{Bc}(\Lambda)$ . On note  $\mathcal{G} = \{x_i\}_{i \in I}$  l'ensemble des points de discontinuité de  $\rho$ ,  $a$  ou  $b$  (l'ensemble  $\mathcal{I}$  des points de discontinuité de  $a$  en jeu dans (2.1.1) est donc inclus dans  $\mathcal{G}$ ).

On appelle  $X$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

On suppose que  $G = (l, r)$  est borné. On tue le processus quand il atteint  $\partial G = \{l, r\}$ . Cela signifie d'un point de vue EDP que  $\mathbb{E}^x f(X_t)$  est une solution continue de (1.2.2) avec condition de Dirichlet uniforme.

On cherche à construire  $\widehat{X}^h$  qui approche en loi  $X$ , quand  $h$  tend vers zéro.

**ÉTAPE 1 : Construction de la grille et des coefficients constants par morceaux.**

Soit le pas en espace  $h \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

Soit la fonction  $\Psi$  définie par (1.4.5). On sait par la Proposition 1.4.3 que  $X$  est engendré par  $\mathfrak{L}(\rho e^{-\Psi}, a e^{\Psi}, 0)$ .

On construit  $(\rho^h, a^h)$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda) \times \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  tels que :

i) Les fonctions  $\rho^h$  et  $a^h$  sont constantes par morceaux. Les points de discontinuité de  $\rho^h$  ou  $a^h$  sont inclus dans un certain ensemble  $\mathcal{G}^h$ . On suppose que  $\mathcal{G}^h = \{x_k^h\}_{k \in I^h}$  pour  $I^h = \{0 \leq k \leq k_1^h\} \subset \mathbb{Z}$  fini et  $x_k^h < x_{k+1}^h, \forall k \in I^h$ .

ii) Pour chaque  $x_k^h \in \mathcal{G}^h$  on a  $a^h(x_k^h) = a(x_k^h)$  et  $\rho^h(x_k^h) = \rho(x_k^h)$ .

iii) Considérons la fonction

$$\Phi^h(x) = \sum_{k=0}^{k_{h,x}-1} \frac{x_{k+1}^h - x_k^h}{\sqrt{a(x_k^h)\rho(x_k^h)}} + \frac{x - x_{k_{h,x}}^h}{\sqrt{a(x_{k_{h,x}}^h)\rho(x_{k_{h,x}}^h)}}, \quad (2.3.3)$$

où l'entier  $k_{h,x}$  vérifie  $x_{k_{h,x}}^h \leq x \leq x_{k_{h,x}+1}^h$ .

La grille  $\mathcal{G}^h$  est construite pour vérifier  $\Phi^h(\mathcal{G}^h) = \{kh, k \in \mathbb{Z}\} \cap \Phi^h(G)$ . On considérera que  $x_k^h$  est le point de  $\mathcal{G}^h$  tel que  $\Phi^h(x_k^h) = kh$ .

**Remarque 2.3.1** En fait la première chose à faire est de construire la grille  $\mathcal{G}^h$  vérifiant iii). C'est très facile et ne requiert que la connaissance des coefficients  $a$  et  $\rho$  (voir point 1 de l'algorithme, Sous-section 2.3.3). C'est alors que  $a^h$  et  $\rho^h$  peuvent être construits.

**Remarque 2.3.2** Les ensembles  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^h$  peuvent ne pas avoir de points communs.

On construit également  $b^h$  constante par morceaux vérifiant  $b^h(x) = b(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{G}^h$ . Considérons alors  $\Psi^h$  définie par (1.4.5) avec  $\rho, a, b$  remplacés par  $\rho^h, a^h, b^h$ . Cette fonction n'est a priori pas constante par morceaux. Définissons donc  $\widehat{\Psi}^h$  constante par morceaux vérifiant  $\widehat{\Psi}^h(x) = \Psi^h(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{G}^h$ . On peut alors dire que les coefficients  $\widehat{\rho}^h := \rho^h e^{-\widehat{\Psi}^h}$  et  $\widehat{a}^h := a^h e^{\widehat{\Psi}^h}$  sont constants par morceaux.

On note  $X^h$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(\widehat{\rho}^h, \widehat{a}^h, 0)$ .

**Remarque 2.3.3** Notons que, si on remplace dans (2.3.3)  $\rho$  et  $a$  par  $\widehat{\rho}^h$  et  $\widehat{a}^h$ , on obtiendra la même grille  $\mathcal{G}^h$ . C'est bien le but recherché : la bijection  $\Phi^h$  envoie la grille  $\mathcal{G}^h$  «vue» par  $X$  et  $X^h$  sur la grille régulière  $\{kh, k \in \mathbb{Z}\}$ . On verra que l'uniformité de la grille joue un grand rôle dans la démonstration de la convergence du schéma (cf Lemme 2.4.2).

**Remarque 2.3.4** A ce stade on pourrait déjà montrer par le Théorème 1.3.3 que  $X^h$  converge en loi vers  $X$ .

### ÉTAPE 2 : Transformation en espace.

Par la Proposition 2.1.1 le processus  $X^h$  est solution de  $\mathfrak{Sde}(\sqrt{\widehat{\rho}^h \widehat{a}^h}, \nu^h)$  avec

$$\nu^h = \sum_{x_k^h \in \mathcal{G}^h} \frac{\widehat{a}^h(x_k^h+) - \widehat{a}^h(x_k^h-)}{\widehat{a}^h(x_k^h+) + \widehat{a}^h(x_k^h-)} \delta_{x_k^h}.$$

La fonction  $\Phi^h$  définie par (2.3.3) appartient à  $\mathfrak{T}(1/\Lambda, 1/\lambda)$ . Les points de discontinuité de  $\Phi^{h'}$  sont ceux dans  $\mathcal{G}^h$ , et  $(\Phi^{h'})' = 0$ , donc par la Proposition 2.2.1 le processus  $Y^h = \Phi^h(X^h)$  est solution de

$$Y_t^h = Y_0^h + W_t + \sum_{k \in I^h} \beta_k^h L_t^{kh}(Y^h), \quad (2.3.4)$$

où



$$\begin{aligned}
\beta_k^h &= \frac{\sqrt{\widehat{a}^h(x_k^h+)/\widehat{\rho}^h(x_k^h+)} - \sqrt{\widehat{a}^h(x_k^h-)/\widehat{\rho}^h(x_k^h-)}}{\sqrt{\widehat{a}^h(x_k^h+)/\widehat{\rho}^h(x_k^h+)} + \sqrt{\widehat{a}^h(x_k^h-)/\widehat{\rho}^h(x_k^h-)}} \\
&= \frac{\sqrt{a(x_k^h)/\rho(x_k^h)} - \sqrt{a(x_{k-1}^h)/\rho(x_{k-1}^h)} \exp\left[\frac{-2(x_k^h - x_{k-1}^h)b(x_{k-1}^h)/\rho(x_{k-1}^h)a(x_{k-1}^h)}{\sqrt{a(x_k^h)/\rho(x_k^h)} + \sqrt{a(x_{k-1}^h)/\rho(x_{k-1}^h)}}\right]}{\sqrt{a(x_k^h)/\rho(x_k^h)} + \sqrt{a(x_{k-1}^h)/\rho(x_{k-1}^h)} \exp\left[\frac{-2(x_k^h - x_{k-1}^h)b(x_{k-1}^h)/\rho(x_{k-1}^h)a(x_{k-1}^h)}{\sqrt{a(x_k^h)/\rho(x_k^h)} + \sqrt{a(x_{k-1}^h)/\rho(x_{k-1}^h)}}\right]}.
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Pour écrire ces coefficients on a utilisé le fait que  $a^h$ ,  $\rho^h$  et  $b^h$  sont càd-làg et que par exemple  $a^h(x_k^h+) = a(x_k^h)$  et  $a^h(x_k^h-) = a(x_{k-1}^h)$ .

### ÉTAPE 3 : Marche aléatoire asymétrique.

Comme dans (1.5.6) on définit une suite de temps d'arrêt  $(\tau_p^h)_{p \in \mathbb{N}}$  par,

$$\tau_0^h = 0, \quad \text{et} \quad \tau_{p+1}^h = \inf\{t > \tau_p^h : |Y_t^h - Y_{\tau_p^h}^h| = h\}.$$

On a le lemme suivant.

**Lemme 2.3.2** *i) Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(Y_{\tau_{p+u}^h}^h - Y_{\tau_p^h}^h, 0 \leq u \leq \tau_{p+1}^h - \tau_p^h)$  sachant que  $\{Y_{\tau_p^h}^h = kh\}$  a même loi que  $(Y_t^{\beta_k^h, 0}, 0 \leq t \leq \tau_h)$ .*

*ii) On a, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(\tau_p^h - \tau_{p-1}^h) \cong \mathcal{T}(h^2)$ .*

**Preuve.** Le point i) est une conséquence simple du point i) du Lemme 2.3.1 et de la comparaison entre (2.3.1) et (2.3.4).

Par le point i) qu'on vient de montrer et le point ii) du Lemme 2.3.1, on a pour tout  $p$ ,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (\tau_p^h - \tau_{p-1}^h) / \{Y_{\tau_{p-1}^h}^h = kh\} \cong \mathcal{T}(h^2), \tag{2.3.6}$$

ce qui amène ii).  $\square$

Le Gall a utilisé ce lemme dans sa preuve du Théorème 1.5.2. En effet il est clair, par le Lemme 2.3.2 et le ii) du Lemme 2.3.1 que  $S_p^h := (1/h)Y_{\tau_p^h}^h$  vérifie

$$\begin{aligned}
S_0^h &= 0, \\
\mathbb{P}[S_{p+1}^h = k + 1 | S_p^h = k] &= \frac{1}{2}(1 + \beta_k^h) =: \alpha_k^h, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in I^h, \\
\mathbb{P}[S_{p+1}^h = k - 1 | S_p^h = k] &= \frac{1}{2}(1 - \beta_k^h) = 1 - \alpha_k^h, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in I^h.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Donc, compte tenu du point ii) du Lemme 2.3.2, l'idée est de prendre

$$\widehat{X}_t^h := (\Phi^h)^{-1}(h\widehat{S}_{\lfloor t/h^2 \rfloor}^h), \tag{2.3.8}$$

où  $\widehat{S}^h$  est une chaîne de Markov sur les entiers définie par (2.3.7). Le processus  $\widehat{X}^h$  est une marche aléatoire sur la grille  $\mathcal{G}^h$ . Remarquons que la grille  $\mathcal{G}^h$  est donc en fait construite de telle sorte que  $X^h$  passe un temps moyen de  $h^2$  sur chacune de ses cellules.

En combinant la Remarque 2.3.4 et une variation de la preuve du Théorème 1.5.2 on obtient la convergence de ce schéma. Pour résumer cette section on écrit le schéma sous forme algorithmique.

### 2.3.3 L'algorithme

Notons que par construction  $(\Phi^h)^{-1}(kh) = x_k^h$  pour tout  $k \in I^h$ .

On définit une fonction **ALGO** de la manière suivante :

**DONNÉES D'ENTRÉE** : les coefficients  $\rho, a$ , et  $b$ , le point de départ  $x$ , le pas  $h$  et le temps final  $t$ .

**DONNÉES DE SORTIE** : une approximation en loi  $\widehat{X}^h$  de  $X$  à l'instant  $t$ .

1. On pose  $x_0^h \leftarrow l$ .

**tant-que**  $x_k^h \leq r$

On pose  $x_k^h \leftarrow \sqrt{a(x_k^h)\rho(x_k^h)} \times h + x_k^h$  et  $k \leftarrow k + 1$ .

**fin-tant-que**

2. On calcule les  $\alpha_k^h = (1 + \beta_k^h)/2$  avec les  $\beta_k^h$  définis par (2.3.5).

3. On pose  $y \leftarrow \Phi^h(x)$ .

**si**  $(y/h - \lfloor y/h \rfloor) < 0.5$

On pose  $s_0 \leftarrow \lfloor y/h \rfloor$ .

**sinon**

On pose  $s_0 \leftarrow \lfloor y/h \rfloor + 1$ .

**fin-si**

4. **de**  $i = 0$  **à**  $i = \lfloor t/h^2 \rfloor =: N$

**si**  $x_{s_i}^h \in \mathbb{R} \setminus (l, r)$

On retourne  $x_{s_i}^h$ .

**fin-si**

On a  $s_i = k$  pour un certain  $k \in I^h$ . On tire une réalisation  $B$  de  $Ber(\alpha_k^h)$ .

On pose alors  $s_i \leftarrow s_i + B$ .

**fin-de-à**

5. On retourne  $x_{s_N}^h$ .

## 2.4 Vitesse de convergence

Dans cette section on prouve le théorème suivant.

**Théorème 2.4.1** *Soient  $\rho$  et  $a$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  pour  $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$  et soit  $b$  dans  $\mathbf{Bc}(\Lambda)$ . Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $X$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .*

*Pour tout  $h \in \mathbb{R}_+^*$  le processus  $\widehat{X}^h$  partant de  $x$  est défini par,*

$$\forall t \in [0, T], \quad \widehat{X}_t^h = \mathbf{ALGO}(\rho, a, b, x, h, t).$$

*Pour toute  $f \in W_0^{1,\infty}(G) \cap \mathcal{C}_0(G)$ , tout  $\varepsilon > 0$ , et tout  $\gamma \in (0, 1/2)$ , il existe une constante  $C$  dépendant de  $\varepsilon, \gamma, T, \lambda, \Lambda, G, \|a'\|_\infty, \|\rho'\|_\infty, \|f\|_\infty, \|df/dx\|_2, \|df/dx\|_\infty, \sup_{i \in I} 1/(x_{i+1} - x_i)$ , et des deux premiers moments de  $\mathcal{T}(1)$  telle que, pour tout  $h$  suffisamment petit,*

$$\sup_{(t,x) \in [\varepsilon, T] \times \bar{G}} \left| \mathbb{E}^x f(X_t) - \mathbb{E}^x f(\widehat{X}_t^h) \right| \leq Ch^\gamma.$$

Soient  $X^h$  et  $Y^h$  les processus définis respectivement dans les Étapes 1 et 2 de la Sous-section 2.3.2. Compte tenu de l'Étape 3 du schéma il est clair que le processus défini par  $(\Phi^h)^{-1}(Y_{\tau_{[t/h^2]}^h}^h)$  a la même loi que  $\widehat{X}^h$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}^x f(X_t) - \mathbb{E}^x f(\widehat{X}_t^h) \right| &\leq \left| \mathbb{E}^x f(X_t) - \mathbb{E}^x f(X_t^h) \right| \\ &+ \left| \mathbb{E}^x f[(\Phi^h)^{-1}(Y_t^h)] - \mathbb{E}^x f[(\Phi^h)^{-1}(Y_{\tau_{[t/h^2]}^h}^h)] \right| \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Le plan de la preuve est donc le suivant : les quantités  $\mathbb{E}^x f(X_t)$  et  $\mathbb{E}^x f(X_t^h)$  pouvant être vues comme les solutions de deux problèmes d'EDP paraboliques impliquant des opérateurs différents, on va évaluer la première partie de l'erreur faible par des techniques purement analytiques. La deuxième partie met en jeu le processus  $Y^h$  pris à des instants différents. On l'évaluera donc en calculant une erreur forte, par des méthodes probabilistes très simples.

### 2.4.1 Estimation d'une erreur faible

Dans cette sous-section on notera  $\mathcal{P}(\rho, a, f)$  le problème parabolique du type (1.2.2) avec condition aux limites de Dirichlet homogène, condition initiale  $f$ , et mettant en jeu l'opérateur  $\mathfrak{L}(\rho, a, 0)$ .

Dans le contexte de la Sous-section 2.3.2 notons  $\widehat{a} = ae^\Psi$  et  $\widehat{\rho} = \rho e^{-\Psi}$  et remarquons que  $\widehat{a}, \widehat{\rho}, \widehat{a}^h$  et  $\widehat{\rho}^h$  sont dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda_G, \Lambda_G)$  avec des constantes  $\lambda_G$  et  $\Lambda_G$  dépendant de  $\lambda, \Lambda$  et  $G$ . En outre notons que  $\widehat{\rho}^h$  et  $\widehat{a}^h$  sont càd-làg, constants par morceaux d'ensemble de points de discontinuité  $\mathcal{G}^h$ , et que  $\forall x \in \mathcal{G}^h, \widehat{\rho}^h(x) = \widehat{\rho}(x)$  et  $\widehat{a}^h(x) = \widehat{a}(x)$ .

On montre la proposition suivante.

**Proposition 2.4.1** Soit  $f \in H_0^1 \cap C_0(G)$ . Soient  $u(t, x)$  et  $u^h(t, x)$  respectivement les solutions de  $\mathcal{P}(\hat{\rho}, \hat{a}, f)$  et  $\mathcal{P}(\hat{\rho}^h, \hat{a}^h, f)$ , avec  $\hat{\rho}^h$  et  $\hat{a}^h$  comme à l'Étape 1 de la Sous-section 2.3.2. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $C_1$  dépendant de  $\varepsilon, T, \lambda, \Lambda, G, \|f\|_\infty, \|df/dx\|_2, \|\hat{a}'\|_\infty, \|\tilde{\rho}'\|_\infty$ , et  $\sup_{i \in I} 1/(x_{i+1} - x_i)$  telle que pour  $h$  suffisamment petit,

$$\sup_{(t,x) \in [\varepsilon, T] \times \bar{G}} |u(t, x) - u^h(t, x)| \leq C_1 h^{1/2}.$$

La Proposition 2.4.2 ci-dessous montre qu'on a pour  $\|u - u^h\|_{\infty, \infty}$  une borne supérieure de la forme  $K(\|\hat{a} - \hat{a}^h\|_\infty^2 + \|\hat{\rho} - \hat{\rho}^h\|_\infty)^{1/2}$ . Si on avait  $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^h$  on aurait par exemple  $\|\hat{a} - \hat{a}^h\|_\infty \leq K \|\hat{a}'\|_\infty h$ . Mais ce n'est pas nécessairement le cas (voir Remarque 2.3.2). Cependant il est possible de modifier  $\hat{a}$  and  $\hat{\rho}$  pour se retrouver dans une telle situation, ce qui permettra de montrer la Proposition 2.4.1.

**Proposition 2.4.2** Soit  $f \in H_0^1 \cap C_0(G)$ . Soient  $a_1, \rho_1, a_2, \rho_2 \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$ . Soit  $u_1(t, x)$  la solution faible de  $\mathcal{P}(\rho_1, a_1, f)$  et  $u_2(t, x)$  la solution faible de  $\mathcal{P}(\rho_2, a_2, f)$ . Il existe une constante  $\tilde{C}_1$  dépendant de  $T, \lambda, \Lambda, G, \|f\|_\infty$ , et  $\|df/dx\|_2$ , telle que,

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty, \infty} \leq \tilde{C}_1 \left( \|a_1 - a_2\|_\infty^2 + \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \right)^{1/2}.$$

On a besoin d'un lemme énonçant des estimées standard.

**Lemme 2.4.1** Soient  $\rho$  et  $a$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$ . On a :

i) Soit  $f \in H_0^1$ . Soit  $u(t, x)$  la solution faible de  $\mathcal{P}(\rho, a, f)$ . Alors  $\partial_t u$  est en fait dans  $L^2(0, T; L^2(G))$  et plus précisément,

$$\|\partial_t u\|_{2,2} \leq \frac{\Lambda}{2} \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2. \quad (2.4.2)$$

ii) Soit  $f \in L^2(G)$ . Soit  $u(t, x)$  la solution faible de  $\mathcal{P}(\rho, a, f)$ . Alors  $\frac{du}{dx}$  est en fait dans  $L^2(0, T; L^2(G))$  et plus précisément,

$$\left\| \frac{du}{dx} \right\|_{2,2} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_2. \quad (2.4.3)$$

**Preuve. i) Étape 1.** On suppose que  $a$  et  $\rho$  sont dans  $C^\infty(G)$  et que  $f$  est dans  $C_c^\infty(G)$  de sorte que  $u(t, x)$  est elle-même dans  $C^\infty((0, T) \times G)$ . Dans ces conditions  $u, Lu$  et  $\partial_t u$  sont de classe  $C^\infty$ , et comme  $u(t, x)$  est une solution faible de  $\mathcal{P}(\rho, a, f)$ , en utilisant  $\partial_t u$  comme une fonction test et en intégrant par parties par rapport à  $x$  il vient,

$$\int_0^T \int_G |\partial_t u|^2 \rho^{-1} dx dt = \int_0^T \int_G \partial_t u Lu \rho^{-1} dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_G a \frac{du}{dx} \frac{d(\partial_t u)}{dx} dx dt.$$

En utilisant alors le théorème de Fubini, en intervertissant les dérivées partielles, et en intégrant par rapport à  $t$ , on obtient

$$2 \int_0^T \int_G |\partial_t u|^2 \rho^{-1} dx dt = \frac{1}{2} \int_G a \left| \frac{du(0, x)}{dx} \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_G a \left| \frac{du(T, x)}{dx} \right|^2 dx,$$

ce qui mène à (2.4.2).

*Étape 2.* Dans le cas général où  $\rho, a \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  et  $f \in H_0^1$ , on peut construire des suites de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  ( $a^k$ ), ( $\rho^k$ ) et ( $f^k$ ) telles que

$$\frac{1}{a^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2(G)} \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\rho^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2(G)} \frac{1}{\rho}, \quad f^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2(G)} f \quad \text{et} \quad \left\| \frac{df^k}{dx} \right\|_2 \leq \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2, \quad \forall k.$$

Soit  $u^k(t, x)$  la suite des solutions des  $\mathcal{P}(\rho^k, a^k, f^k)$ . Par les Théorèmes 1.3.2 et 1.3.4, et la continuité du semi-groupe  $(S_t)_{t \geq 0}$  associé à  $\mathfrak{L}(\rho, a, 0)$ , on peut montrer que,

$$u^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2(0, T; L^2(G))} u. \quad (2.4.4)$$

Par ailleurs par l'Étape 1 on a :

$$\left\| \partial_t u^k \right\|_{2,2} \leq \frac{\Lambda}{2} \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2. \quad (2.4.5)$$

Par un argument de compacité il existe une sous-suite  $(\partial_t u^{k'})$  et une fonction  $w$  dans  $L^2(0, T; L^2(G))$  telle que

$$\partial_t u^{k'} \xrightarrow[k' \rightarrow \infty]{L^2(0, T; L^2(G))} w. \quad (2.4.6)$$

Pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T) \times G)$ , une intégration par parties montre que  $\int_0^T \int_G \partial_t u^{k'} \varphi = - \int_0^T \int_G u^{k'} \partial_t \varphi$ . En combinant (2.4.4) et (2.4.6), on obtient donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T) \times G), \quad \int_0^T \int_G w \varphi = - \int_0^T \int_G u \partial_t \varphi.$$

Cela signifie que  $\partial_t u \in L^2(0, T; L^2(G))$ , et en passant à la limite dans (2.4.5) on obtient (2.4.2).

**ii)** Grâce au point i) on a  $Lu(t, \cdot) \in L^2(G)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  et on peut écrire

$$\int_\delta^T \langle \partial_t u, u \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} dt = \int_\delta^T \langle Lu, u \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} dt, \quad (2.4.7)$$

pour tout  $\delta > 0$ . Or  $u$  est dans  $\mathcal{C}^1([\delta, T], L^2(G, \rho^{-1}))$  et on a (voir [Bre83]),

$$2 \langle \partial_t u, u \rangle_{L^2(G, \rho^{-1})} = \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(G, \rho^{-1})}^2, \quad \forall t \in [\delta, T]. \quad (2.4.8)$$

Donc en utilisant une intégration par parties par rapport à  $x$  dans le membre droit de (2.4.7), et en faisant tendre  $\delta$  vers 0 on obtient,

$$\frac{\lambda}{2} \left\| \left\| \frac{du}{dx} \right\| \right\|_{2,2}^2 \leq \frac{1}{2} \left( \|u(0, \cdot)\|_{L^2(G, \rho^{-1})}^2 - \|u(T, \cdot)\|_{L^2(G, \rho^{-1})}^2 \right),$$

ce qui mène à (2.4.3).  $\square$

**Preuve de la Proposition 2.4.2.** *Étape 1.* On introduit la norme suivante sur l'espace  $\mathcal{C}(0, T; L^2(G)) \cap L^2(0, T; H_0^1)$  :

$$|v|_{G,T} := \left( \sup_{t \in [0, T]} \|v(t, \cdot)\|_2^2 + \left\| \left\| \frac{dv}{dx} \right\| \right\|_{2,2}^2 \right)^{1/2}.$$

On a l'estimée suivante :

$$\|v\|_{\infty, \infty} \leq K |v|_{G,T}, \quad (2.4.9)$$

où la constante  $K$  ne dépend que de  $T$  et  $G$  (voir [LSU68], II.§.3 inégalité (3) p 74 avec  $r = \infty$  et  $q = \infty$ ).

On pose  $v := u_2 - u_1$ . On va maintenant estimer  $|v|_{G,T}$ .

*Étape 2.* On pose  $(L_2, D(L_2)) = \mathfrak{L}(\rho_2, a_2, 0)$ . On sait que pour  $i = 1, 2$  on a  $\partial_t u_i \in L^2(0, T; L^2(G))$  (Lemme 2.4.1), et des calculs élémentaires montrent alors que pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T) \times G)$  on a,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_G \partial_t v \varphi \rho_2^{-1} dx dt &= - \int_0^T \int_G \frac{a_2}{2} \frac{dv}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx dt \\ &+ \int_0^T \left\langle \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dx} \left( (a_2 - a_1) \frac{du_1}{dx} \right) + \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \partial_t u_1, \varphi \right\rangle_{H^{-1}(G, \rho_2^{-1}), H_0^1(G, \rho_2^{-1})} dx dt, \\ &= - \int_0^T \int_G \frac{a_2}{2} \frac{dv}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx dt \\ &+ \int_0^T \int_G \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{du_1}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx dt + \int_0^T \int_G \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \partial_t u_1 \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Notons que cela signifie que  $v(t, x)$  est solution faible de

$$\partial_t v(t, x) = L_2 v(t, x) + \frac{\rho_2(x)}{2} \frac{d}{dx} \left( (a_2(x) - a_1(x)) \frac{du_1(t, x)}{dx} \right) + \left( \frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} - 1 \right) \partial_t u_1(t, x).$$

On prend  $v$  comme fonction test dans (2.4.10). En utilisant (2.4.8) avec  $v$ , une intégration par parties, l'inégalité  $ab \leq (\lambda/2)a^2 + (2/\lambda)b^2$ , et le fait que  $a_2, \rho_2 \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$ , on obtient finalement,

$$|v|_{G,T}^2 \leq \frac{\kappa'}{\kappa} \left( \int_0^T \int_G (a_1 - a_2)^2 \left( \frac{du_1}{dx} \right)^2 dx dt + \int_0^T \int_G \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \partial_t u_1 v dx dt \right), \quad (2.4.11)$$

où  $\kappa = \min(1/\Lambda, 3\lambda/4)$  et  $\kappa' = \max(4/\lambda, 2)$ .

*Étape 3.* Comme  $f \in \mathcal{C}_0(G)$  et que les semi-groupes  $(S_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(S_t^2)_{t \geq 0}$  engendrés respectivement par  $(L_1, D(L_1)) = \mathfrak{L}(\rho_1, a_1, 0)$  et  $(L_2, D(L_2))$  sont de Feller, on peut considérer que

$$\forall t \in [0, T], \quad \|v(t, \cdot)\|_\infty \leq \|u_2(t, \cdot)\|_\infty + \|u_1(t, \cdot)\|_\infty \leq 2 \|f\|_\infty.$$

Donc  $\|v\|_{\infty, \infty} \leq 2 \|f\|_\infty$ ; de plus  $f \in H_0^1$  donc en utilisant le point i) du Lemme 2.4.1 et l'inégalité de Hölder il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_G \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \partial_t u_1 v dx dt &\leq 2 \left\| \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right\|_\infty \|f\|_\infty \| \partial_t u_1 \|_{1,1} \\ &\leq \frac{2}{\lambda^2} \sqrt{T|G|} \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \|f\|_\infty \| \partial_t u_1 \|_{2,2}. \\ &\leq \frac{\Lambda}{\lambda^2} \sqrt{T|G|} \|f\|_\infty \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2 \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Pour finir on a,

$$\int_0^T \int_G (a_1 - a_2)^2 \left( \frac{du_1}{dx} \right)^2 dx dt \leq \|a_1 - a_2\|_\infty^2 \left\| \left\| \frac{du_1}{dx} \right\| \right\|_{2,2}^2,$$

et le point ii) du Lemme 2.4.1 achève la preuve car  $f \in L^2(G)$ . □

On est alors prêt à prouver la Proposition 2.4.1.

**Preuve de la Proposition 2.4.1.** L'idée est de construire une bijection  $\phi_h$  telle que les points de discontinuité de  $\rho \circ \phi_h$ ,  $a \circ \phi_h$  et  $b \circ \phi_h$  sont inclus dans  $\mathcal{G}^h$ .

*Étape 1.* On construit une bijection affine par morceaux  $\phi_h$  telle que  $\phi_h^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}^h$  de la manière suivante :

On définit d'abord une projection  $\pi_h : G \rightarrow \mathcal{G}^h$  par,

$$\pi_h(x) = \begin{cases} x_{k_h, x}^h & \text{si } (x - x_{k_h, x}^h) / (x_{k_h, x+1}^h - x_{k_h, x}^h) < 1/2, \\ x_{k_h, x+1}^h & \text{si } (x - x_{k_h, x}^h) / (x_{k_h, x+1}^h - x_{k_h, x}^h) \geq 1/2. \end{cases}$$

On pose alors

$$\phi_h(x) = \begin{cases} \frac{x_0-l}{\pi_h(x_0)-l}(x-l) + l & \text{si } x \in [l, \pi_h(x_0)], \\ \frac{x_{i+1}-x_i}{\pi_h(x_{i+1})-\pi_h(x_i)}(x-\pi_h(x_i)) + x_i & \text{si } x \in [\pi_h(x_i), \pi_h(x_{i+1})], \\ & \text{pour } 0 < i < k_1 - 1, \\ \frac{r-x_{k_1}}{r-\pi_h(x_{k_1})}(x-\pi_h(x_{k_1})) + x_{k_1} & \text{si } x \in [\pi_h(x_{k_1}), r]. \end{cases}$$

Notons qu'on a pour tout  $i \in I$ ,  $\phi_h(\pi_h(x_i)) = x_i$ .

*Étape 2.* On pose  $\tilde{u}^h(t, x) := u(t, \phi_h(x))$ . Si  $\hat{a}$  and  $\hat{\rho}$  sont lisses des calculs simples montrent que  $\tilde{u}^h(t, x)$  est solution de  $\mathcal{P}(\tilde{a}^h, \tilde{\rho}^h, f \circ \phi_h)$  avec,

$$\tilde{a}^h(x) = \frac{\hat{a} \circ \phi_h(x)}{\phi_h'(x)}, \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}^h(x) = \hat{\rho} \circ \phi_h(x).$$

On peut montrer que c'est encore le cas pour  $\hat{a}$  et  $\hat{\rho}$  dans  $\mathbf{Coeff}(\lambda_G, \Lambda_G)$ , en utilisant un argument de régularisation et à nouveau les Théorèmes 1.3.2 et 1.3.4.

On définit en outre  $\bar{u}^h(t, x)$  comme étant la solution de  $\mathcal{P}(\tilde{a}^h, \tilde{\rho}^h, f)$ .

*Étape 3.* Pour tout  $(t, x) \in [\varepsilon, T] \times \bar{G}$  on a,

$$|u(t, x) - \tilde{u}^h(t, x)| \leq |u(t, x) - u(t, \phi_h(x))| + \|\tilde{u}^h - \bar{u}^h\|_{\infty, \infty} + \|\bar{u}^h - u^h\|_{\infty, \infty}.$$

Par la Proposition 2.4.2 il existe une constante  $\tilde{C}_1$  ne dépendant pas de  $h$  telle que

$$\|\bar{u}^h - u^h\|_{\infty, \infty} \leq \tilde{C}_1 \left( \|\tilde{a}^h - \hat{a}^h\|_{\infty}^2 + \|\tilde{\rho}^h - \hat{\rho}^h\|_{\infty} \right)^{1/2}. \quad (2.4.13)$$

Par ailleurs pour chaque  $h$  le semi-groupe  $(\tilde{S}_t^h)_{0 \leq t \leq T}$  engendré par  $\mathfrak{L}(\tilde{\rho}^h, \tilde{a}^h, 0)$  est de Feller. On a donc

$$\|\tilde{u}^h - \bar{u}^h\|_{\infty, \infty} \leq \|f - f \circ \phi_h\|_{\infty} \leq \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2 \sqrt{\|id - \phi_h\|_{\infty}}. \quad (2.4.14)$$

Enfin, on sait que  $u(t, x)$  est continue sur  $[0, T] \times \bar{G}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur chaque  $[\varepsilon, T] \times (x_i, x_{i+1})$  (voir dans [LRU68] les Théorèmes 6 et 7). Donc si  $x$  et  $\phi_h(x)$  appartiennent au même intervalle  $(x_i, x_{i+1})$  on a,

$$|u(t, x) - u(t, \phi_h(x))| \leq \sup_{(t, x) \in [\varepsilon, T] \times (x_i, x_{i+1})} \left| \frac{du}{dx}(t, x) \right| \cdot |x - \phi_h(x)|.$$

Posons

$$M = \sup_{i \in I} \sup_{(t, x) \in [\varepsilon, T] \times (x_i, x_{i+1})} \left| \frac{du}{dx}(t, x) \right|. \quad (2.4.15)$$



Maintenant si par exemple  $x \in (x_{i-1}, x_i)$  tandis que  $\phi_h(x) \in (x_i, x_{i+1})$  on a tout de même,

$$|u(t, x) - u(t, \phi_h(x))| \leq |u(t, x) - u(t, x_i)| + |u(t, x_i) - u(t, \phi_h(x))| \leq 2M \|id - \phi_h\|_\infty. \quad (2.4.16)$$

Mais on verra plus loin que  $\|id - \phi_h\|_\infty \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ , donc pour  $h$  assez petit on peut supposer qu'on est au moins dans cette dernière situation.

*Étape 4.* Par construction (voir point 1 de l'algorithme) la grille  $\mathcal{G}^h$  vérifie  $|x_{k+1}^h - x_k^h| \leq \Lambda h$ , pour tout  $k \in I^h$ .

Donc des calculs élémentaires montrent que

$$\|id - \phi_h\|_\infty \leq 3\Lambda h \quad \text{et} \quad \left\| 1 - \frac{1}{\phi_h'} \right\|_\infty \leq 2\Lambda \sup_{i \in I} \frac{h}{x_{i+1} - x_i}.$$

Comme on l'a dit plus haut, pour  $h$  suffisamment petit (2.4.16) est vérifiée et on a donc,

$$|u(t, x) - u(t, \phi_h(x))| \leq 6M\Lambda h. \quad (2.4.17)$$

Il reste à évaluer  $\|\tilde{a}^h - \hat{a}^h\|_\infty$  et  $\|\tilde{\rho}^h - \hat{\rho}^h\|_\infty$ , ce que va nous permettre le fait que les points de discontinuité de  $\tilde{a}^h$  et  $\tilde{\rho}^h$  appartiennent à  $\mathcal{G}^h$ .

Sur chaque  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $\hat{a}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , sauf éventuellement en un nombre dénombrable de points, et  $\hat{a}'$  est càd-làg, grâce au fait que  $a \in \mathbf{Coeff}(\lambda, \Lambda)$  et que  $b \in \mathbf{Bc}(\Lambda)$ . Donc on peut donner un sens à  $\|\hat{a}'\|_\infty$  en le définissant comme le maximum de  $|\hat{a}'|$  sur tous les intervalles où cette fonction est continue.

Par construction chaque intervalle  $\phi_h([x_k^h, x_{k+1}^h])$  est inclus dans un intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  qui contient  $x_k^h$ , donc on a,

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}^h - \hat{a}^h\|_\infty &\leq \sup_{k \in I^h} \sup_{x \in [x_k^h, x_{k+1}^h]} |\hat{a}(\phi_h(x)) / \phi_h'(x) - \hat{a}^h(x)| \\ &\leq \|\hat{a}'\|_\infty \sup_{k \in I^h} \sup_{x \in [x_k^h, x_{k+1}^h]} |\phi_h(x) - x_k^h| \\ &\quad + \Lambda \left\| 1 - \frac{1}{\phi_h'} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

On a que  $|\phi_h(x) - x_k^h| \leq |\phi_h(x) - x| + |x - x_k^h| \leq 4\Lambda h$ , pour tout  $x \in [x_k^h, x_{k+1}^h]$ , donc finalement il existe  $K_1$  dépendant de  $\Lambda$ ,  $\|\hat{a}'\|_\infty$ , et  $\sup_{i \in I} 1/(x_{i+1} - x_i)$  telle que

$$\|\tilde{a}^h - \hat{a}^h\|_\infty \leq K_1 h. \quad (2.4.18)$$

De la même manière on obtient  $K_2$  dépendant de  $\Lambda$  et  $\|\hat{\rho}'\|_\infty$  telle que,

$$\|\tilde{\rho}^h - \hat{\rho}^h\|_\infty \leq K_2 h. \quad (2.4.19)$$

Donc en combinant (2.4.13), (2.4.14), (2.4.17), (2.4.18) et (2.4.19), et comme  $M$  définie par (2.4.15) dépend de  $\lambda$ ,  $\Lambda$ ,  $\|f\|_\infty$  et  $G$ , on peut achever la preuve.  $\square$

## 2.4.2 Estimation d'une erreur forte

On prouve maintenant la proposition suivante.

**Proposition 2.4.3** *Dans le contexte de la Sous-section 2.3.2, pour tout  $\gamma \in (0, 1/2)$  il existe une constante  $C_2$  dépendant de  $\lambda$ ,  $\Lambda$ ,  $G$ ,  $T$ ,  $\gamma$  et des deux premiers moments de  $\mathcal{T}(1)$  telle que,*

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}|Y_{\tau_{\lfloor t/h^2 \rfloor}^h}^h - Y_t^h| \leq C_2 h^\gamma.$$

Dans cette sous-section on ne fera plus référence au point de départ  $x$  dans la notation des espérances. En effet tous les calculs seront uniformes par rapport à cette variable.

La preuve de la Proposition 2.4.3 suivra des lemmes ci-dessous. Le premier est très simple et sa démonstration repose sur l'uniformité de la grille  $\{kh, k \in \mathbb{Z}\}$  (cf Remarque 2.3.3).

**Lemme 2.4.2** *Soit  $(\tau_p^h)$  la suite de temps d'arrêt définie à l'étape 3 de la Sous-section 2.3.2. On a :*

i)

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sigma_p^h := \frac{1}{h^2} (\tau_p^h - \tau_{p-1}^h) \cong \mathcal{T}(1),$$

ii) *Les  $\sigma_p^h$ 's sont indépendants.*

**Preuve.** Le point i) s'obtient à partir du point ii) du Lemme 2.3.2 par scaling.

Soient  $\Gamma, \Theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et soient les évènements respectivement  $\mathcal{F}_{\tau_p^h}$  et  $\mathcal{F}_{\tau_{p-1}^h}$ -mesurables  $A = \{\sigma_p^h \in \Gamma\}$  et  $B = \{\sigma_{p-1}^h \in \Theta\}$ . On va montrer que  $\mathbb{E}\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbb{E}\mathbf{1}_A \mathbb{E}\mathbf{1}_B$ . Par la propriété de Markov forte il vient,

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B \mathbb{E}[\mathbf{1}_A / \mathcal{F}_{\tau_{p-1}^h}]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B \mathbb{E}[\mathbf{1}_A / X_{\tau_{p-1}^h}]].$$

Notons  $\widehat{\mathbb{P}}$  la loi du brownien réfléchi. Par les mêmes arguments qui ont donné (2.3.6) on peut dire que pour tout  $k$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A / X_{\tau_{p-1}^h} = kh] = \widehat{\mathbb{P}}(A), \tag{2.4.20}$$

D'où

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A / X_{\tau_{p-1}^h}] = \widehat{\mathbb{P}}(A) \sum_k \mathbf{1}_{\{X_{\tau_{p-1}^h} = kh\}} = \widehat{\mathbb{P}}(A).$$

Mais (2.4.20) donne aussi  $\mathbb{E}\mathbf{1}_A = \widehat{\mathbb{P}}(A)$ . On a donc  $\mathbb{E}\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbb{E}\mathbf{1}_A \cdot \mathbb{E}\mathbf{1}_B$ . On a montré que  $\sigma_p^h$  et  $\sigma_{p-1}^h$  sont indépendants. De la même façon on pourrait montrer que tous les  $\sigma_p^h$ 's sont deux à deux indépendants, d'où le ii).  $\square$

**Lemme 2.4.3** *Il existe une constante  $K$  dépendant de  $T$  et des deux premiers moments de  $\mathcal{T}(1)$  telle que :*

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}|\tau_{[t/h^2]}^h - t|^2 \leq K h^2. \quad (2.4.21)$$

**Preuve.** On remarque d'abord que si  $t < h^2$  alors (2.4.21) est vérifiée avec  $K = 1$ . On suppose désormais que  $t \geq h^2$ . Pour tout  $t \in [0, T]$  et avec les  $\sigma_p^h$ 's définis dans le Lemme 2.4.2 on pose  $\sigma_p^{h,t} := t\sigma_p^h$ . Soit  $T_1 \cong \mathcal{T}(1)$ .

En utilisant,

$$(v_1 + \dots + v_k)^2 \leq k(v_1^2 + \dots + v_k^2), \quad (2.4.22)$$

on obtient

$$\mathbb{E}|\tau_{[t/h^2]}^h - t|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\tau_{[t/h^2]}^h - \frac{1}{[t/h^2]} \sum_{p=1}^{[t/h^2]} \sigma_p^{h,t}\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\frac{1}{[t/h^2]} \sum_{p=1}^{[t/h^2]} \sigma_p^{h,t} - t\right|^2. \quad (2.4.23)$$

On a  $(\tau_p^h - \tau_{p-1}^h) \cong \mathcal{T}(h^2)$  (Lemme 2.4.2) donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\tau_{[t/h^2]}^h - \frac{1}{[t/h^2]} \sum_{p=1}^{[t/h^2]} \sigma_p^{h,t}\right|^2 &= \mathbb{E}\left|\sum_{p=1}^{[t/h^2]} (\tau_p^h - \tau_{p-1}^h) \left(\frac{[t/h^2] - t/h^2}{[t/h^2]}\right)\right|^2 \\ &\leq \frac{1}{[t/h^2]} \sum_{p=1}^{[t/h^2]} \mathbb{E}(\tau_p^h - \tau_{p-1}^h)^2 \\ &\leq \mathbb{E}(T_1^2)h^4. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Pour le second terme dans (2.4.23), comme  $\mathbb{E}T_1 = 1$  (voir [Bre68] par exemple), et que les  $\sigma_p^h$ 's sont indépendants (Lemme 2.4.2), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\frac{1}{[t/h^2]} \sum_{p=1}^{[t/h^2]} \sigma_p^{h,t} - t\right|^2 &= \frac{t^2}{[t/h^2]^2} \mathbb{E}\left|\sum_{p=1}^{[t/h^2]} (\sigma_p^h - 1)\right|^2 \\ &= \frac{t^2}{[t/h^2]^2} \sum_{p=1}^{[t/h^2]} \mathbb{V}(\sigma_p^h) \\ &\leq 2T\mathbb{V}(T_1)h^2. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Prenant en compte (2.4.24), (2.4.25) et (2.4.23) on achève la preuve.  $\square$

On aura besoin de contrôler uniformément par rapport à  $h$  le module de régularité hölderienne des  $Y^h$ .

**Lemme 2.4.4** *Soit  $(\mu^h)$  une famille d'éléments dans  $\mathfrak{M}$  et soit  $(Y^h)$  la famille de processus telle que chaque  $Y^h$  est solution de  $\mathfrak{Sde}(1, \mu^h)$ . Supposons qu'il existe deux constantes positives  $m$  et  $M$  telles que,*

$$\forall h, f_{\mu^h} \in \mathbf{Coeff}(m, M). \quad (2.4.26)$$

*Alors pour tout  $\gamma \in (0, 1/2)$ , tout  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $0 < \gamma < 1/2 - 1/(2k)$ , et tout  $T > 0$ , il existe une constante positive  $C_k^{\gamma, T}$ , ne dépendant pas de  $h$ , qui vérifie,*

$$\forall h, \left( \mathbb{E} \left[ \sup_{s \neq t, s, t \in [0, T]} \frac{|Y_t^h - Y_s^h|}{|t - s|^\gamma} \right]^{2k} \right)^{1/2k} \leq C_k^{\gamma, T} < \infty. \quad (2.4.27)$$

**Preuve.** Il s'agit d'utiliser le Théorème de Kolmogorov-Čentsov. Soit  $\gamma \in (0, 1/2)$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $0 < \gamma < 1/2 - 1/(2k)$ . Pour tout  $h$  on définit

$$F_h(x) := \int_0^x f_{\mu^h}(y) dy,$$

et

$$\sigma_h := f_{\mu^h} \circ F_h^{-1}$$

Évaluons  $\mathbb{E}|Y_t^h - Y_s^h|^{2k}$  pour  $h$  quelconque et  $t, s > 0$ . On a

$$\mathbb{E}|Y_t^h - Y_s^h|^{2k} = \mathbb{E}|F_h^{-1}(Z_t^h) - F_h^{-1}(Z_s^h)|^{2k}, \quad (2.4.28)$$

où  $Z^h := F_h(Y^h)$  est solution de  $\mathfrak{Sde}(\sigma_h, 0)$  d'après la Proposition 2.2.1.

D'après (2.4.26) on a que  $\|(F_h^{-1})'\|_\infty \leq 1/m$ , donc le théorème des accroissement finis mène de (2.4.28) à,

$$\mathbb{E}|Y_t^h - Y_s^h|^{2k} \leq \frac{1}{m^{2k}} \mathbb{E}|Z_t^h - Z_s^h|^{2k} = \frac{1}{m^{2k}} \mathbb{E} \left| \int_s^t \sigma_h(Y_r^h) dW_r \right|^{2k}.$$

En utilisant maintenant les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et la majoration contenue dans la condition (2.4.26) on obtient

$$\mathbb{E}|Y_t^h - Y_s^h|^{2k} \leq \frac{1}{m^{2k}} C_k \mathbb{E} \left( \int_s^t \sigma_h^2(Y_r^h) ds \right)^k = \left( \frac{M}{m} \right)^{2k} C_k (t - s)^{1+(k-1)},$$

où  $C_k$  est une constante ne dépendant pas de  $h$ . La constante  $\left( \frac{M}{m} \right)^{2k} C_k$  ne dépend pas de  $h$  et on a  $2k > 1$ . Ainsi, en examinant la preuve du théorème de Kolmogorov-Čentsov dans [RY91] (par exemple), et en identifiant chaque  $Y^h$  avec sa modification  $\gamma$ -Hölder on peut affirmer qu'il existe une constante positive  $C_k^{\gamma, T}$  telle que (2.4.27) est vérifiée.  $\square$

**Preuve de la Proposition 2.4.3.** Soit  $\gamma \in (0, 1/2)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $0 < \gamma < 1/2 - 1/(2k)$ , et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . Par l'inégalité de Hölder on a pour  $p$  et  $q$  conjugués

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}|Y_{\tau_{[t/h^2]}^h} - Y_t^h| \leq \left[ \mathbb{E} \left( \sup_{s \neq t, s, t \in [0, T]} \frac{|Y_t^h - Y_s^h|}{|t - s|^\gamma} \right)^p \right]^{1/p} \cdot \left[ \mathbb{E} |\tau_{[h^2 t]}^h - t|^{\gamma q} \right]^{1/q}. \quad (2.4.29)$$

Fixons  $q = 2/\gamma$ . On a  $1 < p < 4/3$ . Chaque  $Y^h$  est solution de  $\mathfrak{Sde}(1, \mu^h)$  avec  $\mu^h = \sum_{k \in I^h} \beta_k^h \delta_{kh}$  avec les  $\beta_k^h$  définis par (2.3.5). La fonction  $f_{\mu^h}$  est unique à une constante multiplicative près. Si on impose la condition  $f_{\mu^h}(l) = 1$  de simples calculs montrent que

$$f_{\mu^h}(x) = \prod_{kh \leq x, k \in I^h} \frac{1 - \beta_k^h}{1 + \beta_k^h} = \frac{\sqrt{\widehat{\rho}(x_{kh, x}^h)}}{\sqrt{\widehat{a}(x_{kh, x}^h)}}.$$

Donc chaque  $f_{\mu^h}$  est dans  $\mathfrak{Coeff}(\sqrt{\Lambda_G/\lambda_G}, \sqrt{\lambda_G/\Lambda_G})$  et par le Lemme 2.4.4, il existe  $C_k^{\gamma, T}$  qui vérifie (2.4.27).

Comme  $p < 2k$  par l'inégalité de Jensen il existe  $K_\gamma$  ne dépendant pas de  $h$  telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left[ \mathbb{E} \left( \sup_{s \neq t, s, t \in [0, T]} \frac{|Y_t^h - Y_s^h|}{|t - s|^\gamma} \right)^p \right]^{1/p} < K_\gamma < \infty. \quad (2.4.30)$$

Mais par le Lemme 2.4.3 il existe  $K$  telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0, T], \quad \left[ \mathbb{E} |\tau_{[t/h^2]}^h - t|^{\gamma q} \right]^{1/q} = \left[ \mathbb{E} |\tau_{[t/h^2]}^h - t|^2 \right]^{1/2} \leq K h^{2/q} = K h^\gamma. \quad (2.4.31)$$

En combinant (2.4.29), (2.4.30) et (2.4.31) on achève la preuve. □

### 2.4.3 Preuve du Théorème 2.4.1

En combinant les résultats des deux précédentes sous-sections il est maintenant très simple de prouver le Théorème 2.4.1.

**Preuve du Théorème 2.4.1.** On a  $|\mathbb{E}^x f(X_t) - \mathbb{E}^x f(X_t^h)| = |u(t, x) - u^h(t, x)|$ , où les fonctions  $u(t, x)$  et  $u^h(t, x)$  sont celles de la Proposition 2.4.1, ce qui permet d'évaluer la première partie de l'erreur dans (2.4.1).

Par ailleurs  $\|\nabla(\Phi^h)^{-1}\|_\infty \leq 1/\Lambda$ , donc on a

$$\left| \mathbb{E}^x f[(\Phi^h)^{-1}(Y_t^h)] - \mathbb{E}^x f[(\Phi^h)^{-1}(Y_{\tau_{[t/h^2]}^h}^h)] \right| \leq \frac{\|df\|_\infty}{\Lambda} \mathbb{E}^x |Y_t^h - Y_{\tau_{[t/h^2]}^h}^h|.$$

Donc en utilisant la Proposition 2.4.3 on achève la preuve. □

On a ainsi prouvé une convergence forte à  $t$  fixé. On pourrait prouver qu'il y a outre convergence faible du schéma  $\widehat{X}^h$  vers  $X$  en tant que processus (cf Remarque 3.4.1 plus loin).

# Chapitre 3

## Un théorème de Donsker général pour le cas de la dimension un et des coefficients mesurables

### Plan du Chapitre 3

Dans la Section 3.1 on établit le lien entre les moments conditionnels des temps de sortie d'un processus  $X$  et les solutions de problèmes elliptiques mettant en jeu son générateur. Dans la Section 3.2 on présente la construction de la marche aléatoire  $\widehat{X}^{\mathfrak{g}}$  destinée à approcher  $X$ . Dans la Section 3.3 on évalue la vitesse de convergence de  $\widehat{X}_t^{\mathfrak{g}}$  vers  $X_t$  à  $t$  fixé. Dans la Section 3.4 on montre la convergence en loi du processus  $(\widehat{X}_t^{\mathfrak{g}}, 0 \leq t \leq T)$  vers  $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ . Enfin, dans la Section 3.5, on discute de la façon de construire un schéma numérique pertinent en utilisant le théorème de Donsker ainsi obtenu.

### 3.1 Lien entre moments conditionnels des temps de sortie du processus et solutions de problèmes d'EDP elliptiques

Pour construire l'algorithme on aura besoin des valeurs des moments des temps sortie du processus approché  $X$  d'un intervalle  $(l, r) \subset G$ . Pour prouver sa convergence on aura également besoin d'estimées sur ces valeurs. Pour obtenir ces quantités on établit dans cette section le lien entre ces moments et les solutions de problèmes d'EDP elliptiques ad hoc, posés dans le domaine  $(l, r)$  et faisant intervenir le générateur  $(L, D(L))$  de  $X$ .

Quand on ne mentionne pas explicitement le contraire, on entendra par solution  $u$  d'un problème d'EDP elliptique impliquant l'opérateur  $(L, D(L))$ , la version continue de cette solution. En effet c'est nécessaire si on veut identifier  $u(x)$  avec l'espérance partant de  $x$  d'une fonctionnelle du processus engendré par  $(L, D(L))$ .

Comme on est dans un domaine borné en dimension un, et qu'on dispose de la Proposition 1.4.3, on peut toujours avoir la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire  $\langle -Lu, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$  en jeu dans les problèmes elliptiques qu'on considère. Il y a donc toujours existence d'une solution faible, au moins dans  $H_0^1$ , dans le cas général d'un terme source dans  $H^{-1}$ . Or en dimension un toute fonction de  $H_0^1$  a une version continue (cf [Bre83] Théorème VIII.2).

Les intervalles  $(l, r)$  en jeu dans les énoncés des propositions ci-dessous seront par la suite les cellules de la grille sur  $G$  qu'on utilisera pour construire l'algorithme. Comme leur taille est destinée à tendre vers zéro, on fait d'ores et déjà dans cette section l'hypothèse raisonnable que

$$r - l \leq 2. \quad (3.1.1)$$

On veut principalement prouver la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1** *Soient  $a, \rho \in \mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $X$  le processus engendré par  $(L, D(L))$ . Soit  $(l, r) \subset G$ . Soit  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \{l, r\}\}$ . Pour tout  $x \in (l, r)$  on a  $\mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] = v_1(x)$ , où  $v_1$  est solution de*

$$\mathcal{P}_1([l, r], +) \begin{cases} Lv_1 = -v_0 & \text{dans } (l, r) \\ v_1 = 0 & \text{sur } \{l, r\}, \end{cases}$$

où  $v_0$  est elle-même la solution de

$$\mathcal{P}_0([l, r], +) \begin{cases} Lv_0 = 0 & \text{dans } (l, r) \\ v_0(l) = 0, \\ v_0(r) = 1. \end{cases}$$

De la même manière  $\mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=l\}}] = v_1(x)$ , où  $v_1$  est solution de  $\mathcal{P}_1([l, r], -)$ , qui s'écrit comme  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  mais avec  $v_0$  la solution de

$$\mathcal{P}_0([l, r], -) \begin{cases} Lv_0 = 0 & \text{dans } (l, r) \\ v_0(l) = 1, \\ v_0(r) = 0. \end{cases}$$

Pour prouver la Proposition 3.1.1 on a besoin d'une série de lemmes.

**Lemme 3.1.1** *Pour  $\rho, a \in \mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ , soit l'opérateur  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . La solution de  $\mathcal{P}_0([l, r], +)$  est donnée par*

$$v_0(x) = \frac{\int_l^x e^{-\Psi(y)}/a(y)dy}{\int_l^r e^{-\Psi(y)}/a(y)dy} \quad \text{avec} \quad \Psi(x) = 2 \int_l^x \frac{b(y)}{a(y)\rho(y)} dy.$$



**Preuve.** Cette fonction résout  $\mathcal{P}_0([l, r], +)$  dont la solution est unique.  $\square$

**Remarque 3.1.1** La fonction  $v_0$  est la fonction d'échelle du processus engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$  (voir Propositions 1.4.3 et 1.4.2). En fait on peut construire la fonction d'échelle en résolvant des problèmes elliptiques tels que  $\mathcal{P}_0([l, r], +)$ .

**Lemme 3.1.2** Soient  $a, \rho \in \mathfrak{EII}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $X$  le processus de Markov engendré par  $(L, D(L))$ . Soient  $(l, r) \subset G$  et  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \{l, r\}\}$ . Pour tout  $x \in (l, r)$  on a  $\mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] = v_1(x)$ , où  $v_1$  est la solution de  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  tel que défini dans la Proposition 3.1.1.

**Preuve.** Notons tout d'abord que  $\tau$  a des moments de tout ordre. En effet c'est vrai pour le brownien, et donc aussi pour  $X$ , si on considère la représentation  $X_t = s^{-1}(W_{T_t})$  discutée dans la Remarque 1.4.2 et le fait qu'on est sur un intervalle borné.

Comme  $a, \rho$  et  $b$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $L$  peut s'écrire,

$$L = \frac{\rho a}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left[ \frac{\rho a'}{2} + b \right] \frac{d}{dx},$$

et on peut donc dire que  $X$  est solution de,

$$dX_t = \sqrt{a\rho}(X_t)dW_t + \left[ \frac{\rho a'}{2} + b \right](X_t)dt.$$

En outre, dans ces conditions, la solution  $v_0$  du problème  $\mathcal{P}_0([l, r], +)$  décrit dans la Proposition 3.1.1 est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (Lemme 3.1.1).

Remarquons d'abord que grâce aux conditions aux limites dans  $\mathcal{P}_0([l, r], +)$  on a  $\tau v_0(X_\tau) = \tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}$ .

Ensuite, pour  $0 \leq t \leq \tau$ , en appliquant la formule d'Itô à  $\tau v_0(X_t)$ , et en utilisant  $Lv_0 = 0$  on obtient

$$\begin{aligned} \tau v_0(X_t) &= \int_0^t v_0(X_s)ds + M_t + \int_0^t sLv_0(X_s)ds \\ &= \int_0^t v_0(X_s)ds + M_t, \end{aligned}$$

où  $M_t = \int_0^{t \wedge \tau} s v_0'(X_s) \sqrt{a\rho}(X_s) dW_s$  est une martingale locale. Comme  $v_0'$  est bornée sur  $[l, r]$  on montre facilement que  $\mathbb{E}\langle M \rangle_\infty < \infty$ , et donc  $M$  est une vraie martingale. Donc, en prenant l'espérance il vient,

$$\mathbb{E}^x[\tau v_0(X_\tau)] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau v_0(X_s)ds \right].$$

Enfin, encore grâce à la régularité des coefficients, la solution  $v_1$  du problème  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  est aussi  $\mathcal{C}^2$  sur  $(l, r)$  et continue que  $[l, r]$ . Donc en utilisant la formule de Feynman-Kac on obtient

$$\mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau v_0(X_s)ds \right] = v_1(x) \quad \forall x \in (l, r).$$

$\square$

**Lemme 3.1.3** Soient  $a$  et  $\rho$  dans  $\mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  et  $b$  dans  $\mathfrak{B}(\Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $X$  le processus de Markov engendré par l'opérateur  $(L, D(L))$ . Soient  $(l, r) \subset G$  et  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \{l, r\}\}$ . Pour tout  $x \in (l, r)$  on a la représentation  $\mathbb{E}^x[\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] = v_2(x)$ , où  $v_2$  est la solution de

$$\mathcal{P}_2([l, r], +) \begin{cases} Lv_2 = -2v_1 & \text{in } (l, r) \\ v_2 = 0 & \text{on } \{l, r\}, \end{cases}$$

où  $v_1$  est la solution de  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$ .

De la même manière  $\mathbb{E}^x[\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=l\}}] = v_2(x)$ , où  $v_2$  est la solution de  $\mathcal{P}_2([l, r], -)$ , qui s'écrit comme  $\mathcal{P}_2([l, r], +)$  mais avec  $v_1$  la solution du problème  $\mathcal{P}_1([l, r], -)$ .

**Preuve.** On traite le cas  $\mathbb{E}^x[\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}]$ , ce qui signifie qu'on considère les problèmes  $\mathcal{P}_i([l, r], +)$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

Comme  $a, \rho$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  les fonctions  $v_0, v_1$  et  $v_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $(l, r)$  et continues sur  $[l, r]$ .

Premièrement on note que  $\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}} = \tau^2 v_0(X_\tau)$ .

Deuxièmement, pour tout  $0 \leq t < \tau$ , la formule d'Itô appliquée à  $t^2 v_0(X_t)$  mène à

$$\begin{aligned} t^2 v_0(X_t) &= 2 \int_0^t s v_0(X_s) ds + M_t + \int_0^t s^2 Lv_0(X_s) ds \\ &= -2 \int_0^t s Lv_1(X_s) ds + M_t, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

avec  $M$  une martingale locale de crochet  $\langle M \rangle_t = \int_0^{t \wedge \tau} s^4 [(v'_0)^2 a \rho](X_s) ds$ .

Troisièmement, en appliquant la formule d'Itô à  $t v_1(X_t)$  pour tout  $0 \leq t < \tau$ , il vient

$$t v_1(X_t) = \int_0^t v_1(X_s) ds + N_t + \int_0^t s Lv_1(X_s) ds,$$

avec  $N$  une autre martingale locale de crochet  $\langle N \rangle_t = \int_0^{t \wedge \tau} s^2 [(v'_1)^2 a \rho](X_s) ds$ . Prenant en compte (3.1.2) on obtient pour tout  $0 \leq t < \tau$ ,

$$t^2 v_0(X_t) = M_t + 2 \left( \int_0^t v_1(X_s) ds + N_t - t v_1(X_t) \right)$$

Comme  $v'_0$  et  $v'_1$  sont bornées sur  $[l, r]$ , on montre comme dans la preuve du Lemme 3.1.2 que  $M$  et  $N$  sont des vraies martingales. En prenant l'espérance on a donc,

$$\mathbb{E}^x[t^2 v_0(X_t)] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^t 2v_1(X_s) ds \right] - \mathbb{E}^x[t v_1(X_t)].$$

En faisant tendre  $t$  vers  $\tau$  et en utilisant les c.l. dans  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  on a

$$\mathbb{E}^x[\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] = \mathbb{E}^x[\tau^2 v_0(X_\tau)] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau 2v_1(X_s) ds \right].$$

En utilisant Feynman-Kac pour le problème  $\mathcal{P}_2([l, r], +)$  on obtient finalement

$$\mathbb{E}^x[\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau 2v_1(X_s) ds \right] = v_2(x), \quad \forall x \in (l, r).$$

□

**Lemme 3.1.4** Soient  $\rho$  et  $a$  dans  $\mathfrak{EU}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  et  $b$  dans  $\mathfrak{B}(\Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $(l, r) \subset G$ . Pour toute fonction  $f$  continue et bornée, la solution de

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} Lu = -f & \text{dans } (l, r) \\ u = 0 & \text{sur } \{l, r\}, \end{cases}$$

vérifie  $\|u\|_\infty \leq C \|f\|_\infty (r-l)^2$ , où  $C$  est une constante dépendant seulement de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

**Preuve.** Notons d'abord que  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho e^{-\Psi}, a e^\Psi, 0)$  où la fonction  $\Psi$  est définie par  $\Psi(x) = 2 \int_l^x \frac{b(y)}{a(y)\rho(y)} dy$ .

Soit  $f$  continue et bornée et  $u$  la solution de  $(\mathcal{P})$ . La fonction  $u$  est  $\mathcal{C}^2$  et par Feynman-Kac on a  $u(x) = \mathbb{E}^x[\int_0^\tau f(X_s) ds]$ . Mais d'après les Propositions 1.4.1 et 1.4.2 on a  $\mathbb{E}^x[\int_0^\tau f(X_s) ds] = \int_l^r G_{[l,r]}(x, y) f(y) \exp(\Psi(y)) \rho^{-1}(y) dy$ , avec  $G_{[l,r]}$  définie par (1.4.2) avec  $s(x) = \int_l^x \exp(-\Psi(y))/a(y) dy$ . Donc,

$$u(x) = \int_l^r G_{[l,r]}(x, y) f(y) \exp(\Psi(y)) \rho^{-1}(y) dy, \quad (3.1.3)$$

et on a une expression explicite de  $G_{[l,r]}$ . Quelques calculs simples et la condition (3.1.1) mènent à

$$\forall x \in [l, r], \quad \exp(\pm\Psi(x)) \leq \kappa, \quad (3.1.4)$$

où  $\kappa = \max(1, e^{4\Lambda/\lambda^2})$  et donc,

$$\forall x, y \in [l, r] \quad G_{[l,r]} \leq 2 \frac{\kappa}{\lambda} (r-l) \quad \text{et} \quad \forall y \in [l, r], \quad \exp(\Psi(y)) \rho^{-1}(y) \leq \frac{\kappa}{\lambda},$$

En utilisant ceci dans (3.1.3) on achève la preuve.

□

**Lemme 3.1.5** Soient  $\rho$  et  $a$  dans  $\mathfrak{EU}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  et  $b$  dans  $\mathfrak{B}(\Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $(l, r) \subset G$ . Soient  $v_1$  et  $v_2$  respectivement les solutions de  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  et  $\mathcal{P}_2([l, r], +)$  impliquant  $(L, D(L))$ . On a les estimées suivantes,

$$\|v_1\|_\infty \leq C(r-l)^2, \quad (3.1.5)$$

$$\|v_2\|_\infty \leq K(r-l)^4, \quad (3.1.6)$$

où  $C$  et  $K$  sont des constantes positives dépendant seulement de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

**Preuve.** On a  $\|v_0\|_\infty \leq 1$ . Donc (3.1.5) suit du Lemme 3.1.4. Alors (3.1.6) suit de (3.1.5) et du même lemme.  $\square$

**Preuve la Proposition 3.1.1.** On prouve le lien entre  $\mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}]$  et la solution de  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$ . Le lien entre  $\mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=l\}}]$  et  $\mathcal{P}_1([l, r], -)$  se prouve de la même manière.

*Étape 1.* On construit deux suites  $(a^k)$  et  $(\rho^k)$  dans  $\mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ , et une suite  $(b^k)$  dans  $\mathfrak{B} \cap \mathcal{C}^\infty(G)$ , telles que

$$a^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a, \quad \rho^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho \text{ et } b^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b \quad \text{p.p.} \quad (3.1.7)$$

Pour tout  $k$  soit  $(L^k, D(L^k)) := \mathfrak{L}(\rho^k, a^k, b^k)$ . On a  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho e^{-\Psi}, a e^\Psi, 0)$  et  $(L^k, D(L^k)) = \mathfrak{L}(\rho^k e^{-\Psi^k}, a^k e^{\Psi^k}, 0)$  avec  $\Psi(x) = 2 \int_l^x \frac{b(y)}{a(y)\rho(y)} dy$  et  $\Psi^k(x) = 2 \int_l^x \frac{b^k(y)}{a^k(y)\rho^k(y)} dy$ .

On appelle  $v_0^k$  la solution de  $\mathcal{P}_0^k([l, r], +)$  qui s'écrit comme  $\mathcal{P}_0([l, r], +)$  mais avec  $L$  remplacé par  $L^k$ . On appelle  $v_1^k$  la solution du problème  $\mathcal{P}_1^k([l, r], +)$  qui s'écrit comme  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  mais avec  $L$  remplacé par  $L^k$  et  $v_0$  remplacé par  $v_0^k$ . Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  soit  $X^k$  le processus engendré par  $(L^k, D(L^k))$  et  $\tau^k = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^k \in \{l, r\}\}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  on peut appliquer le Lemme 3.1.2 et on obtient

$$\mathbb{E}^x[\tau^k \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k=r\}}] = v_1^k(x) \quad \forall x \in (l, r). \quad (3.1.8)$$

*Étape 2.* On montre que  $v_1^k(x) \rightarrow v_1(x)$  quand  $k \rightarrow \infty$ , pour tout  $x \in (l, r)$ .

Notons  $\hat{\rho}^k = \rho^k e^{-\Psi^k}$ ,  $\hat{a}^k = a^k e^{\Psi^k}$ ,  $\hat{\rho} = \rho e^{-\Psi}$  et  $\hat{a} = a e^\Psi$ . Les solutions faibles  $v_1^k$  et  $v_1$  sont des éléments de  $H_0^1((l, r))$  qui vérifient respectivement,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \hat{a}^k \frac{d}{dx} \right) v_1^k = -\frac{v_0^k}{\hat{\rho}^k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \hat{a} \frac{d}{dx} \right) v_1 = -\frac{v_0}{\hat{\rho}}. \quad (3.1.9)$$

Par le Lemme 3.1.1,

$$v_0^k(x) = \frac{\int_l^x e^{-\Psi^k(y)}/a^k(y) dy}{\int_l^r e^{-\Psi^k(y)}/a^k(y) dy}, \quad \text{et} \quad v_0(x) = \frac{\int_l^x e^{-\Psi(y)}/a(y) dy}{\int_l^r e^{-\Psi(y)}/a(y) dy}.$$

Donc, par convergence dominée, on obtient d'abord que  $v_0^k$  converge simplement vers  $v_0$ . A nouveau par convergence dominée on obtient alors que  $v_0^k/\hat{\rho}^k$  tend vers  $v_0/\hat{\rho}$  dans  $L^2((l, r))$ , et donc dans  $H^{-1}((l, r))$  (cf Proposition IX.20 dans [Bre83]). Notons que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|v_0^k\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{v_0^k}{\hat{\rho}^k} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda'}, \quad (3.1.10)$$

où  $\lambda'$  dépend de  $\lambda, \Lambda, l$  et  $r$ .

Encore une fois par convergence dominée il est clair que,

$$\frac{1}{\hat{a}^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\hat{a}},$$

faiblement dans  $L^2((l, r))$ . Donc les Théorèmes 1.3.4 et 1.3.1 assurent que  $v_1^k$  converge vers  $v_1$  faiblement dans  $H_0^1((l, r))$ .

On considère maintenant les versions continues des  $v_1^k$ 's et de  $v_1$ . Par le Lemme 3.1.5,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|v_1^k\|_\infty \leq C(r-l)^2 \quad (3.1.11)$$

avec  $C$  dépendant de  $\lambda, \Lambda$ , mais pas de  $k$ . On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall u, \varphi \in H_0^1((l, r)), \quad \langle -L^k u, \varphi \rangle_{H^{-1}((l, r), (\hat{\rho}^k)^{-1}), H_0^1((l, r), (\hat{\rho}^k)^{-1})} = \int_l^r \frac{\hat{a}^k}{2} \frac{du}{dx} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Les  $v_1^k$ 's sont solutions faibles de  $L^k v_1^k = -v_0^k$ . Donc en utilisant  $v_1^k$  comme fonction test, (3.1.10) et (3.1.11), et l'inégalité de Poincaré, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|v_1^k\|_{H^1((l, r))} \leq C',$$

avec  $C'$  dépendant de  $\lambda, \Lambda$ , et  $r-l$  mais pas de  $k$ . Par un argument d'injection compacte il existe une sous-suite  $(v_1^{k'})$  qui converge uniformément sur  $[l, r]$  (cf Théorème VIII.7 dans [Bre83]). Mais sa limite est nécessairement  $v_1$ , à cause de la convergence faible dans  $H_0^1((l, r))$  de  $v_1^k$  vers  $v_1$ . Donc  $v_1^k$  converge uniformément sur  $[l, r]$  vers  $v_1$ , donc simplement, et  $v_1^k(x)$  converge bien vers  $v_1(x)$ .

*Étape 3.* On montre que  $\mathbb{E}^x[\tau^k \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k = r\}}] \rightarrow \mathbb{E}^x[\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau = r\}}]$  quand  $k \rightarrow \infty$ , pour tout  $x \in (l, r)$ .

En considérant (3.1.7) il est clair qu'on a (1.3.1). Donc en combinant les Théorèmes 1.3.4 et 1.3.3 et la Proposition 1.3.1 on a que  $\tau^k \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k = r\}}$  converge en loi vers  $\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau = r\}}$ .

Or par le Lemme 3.1.3 et l'estimée (3.1.6) dans le Lemme 3.1.5,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}^x \left[ \left( \tau^k \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k = r\}} \right)^2 \right] \leq K(r-l)^4,$$

avec  $K$  dépendant de  $\lambda$  et  $\Lambda$  mais pas de  $k$ . Cela assure que les  $\tau^k \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k = r\}}$ 's sont uniformément intégrables (voir dans [Bil68] la discussion entre les Théorèmes 5.3 et 5.4). Donc l'Étape 3 est prouvée, et compte tenu des Étapes 2 et 3 la preuve est terminée.  $\square$

**Remarque 3.1.2** Notons que comme  $v_0 \in L^2((l, r))$ , la solution faible  $v_1$  de  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  appartient bien à  $D(L)$  et pas seulement à  $H_0^1((l, r))$ .

On énonce maintenant des estimées sur  $v_1$  qui serviront à prouver notre théorème de Donsker.

**Proposition 3.1.2** Soit l'opérateur  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$  avec  $\rho$  et  $a$  dans  $\mathfrak{E}\mathfrak{ll}(\lambda, \Lambda)$  et  $b$  dans  $\mathfrak{B}(\Lambda)$ . La solution  $v_1$  de  $\mathcal{P}_1([l, r], +)$  vérifie :

$$i) \quad \|v_1\|_\infty \leq C(r-l)^2, \quad (3.1.12)$$

où  $C$  est une constante positive dépendant uniquement de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

ii) Pour tout  $x \in (l, r)$  et avec  $\delta := \min(r-x, x-l)$ ,

$$v_1(x) \geq C' \frac{\delta^4}{(r-l)^2}, \quad (3.1.13)$$

où  $C'$  est une constante positive dépendant uniquement de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

On a des estimées similaires pour la solution de  $\mathcal{P}_1([l, r], -)$ .

**Preuve.** Dans la preuve de la Proposition 3.1.1 on a vu dans l'Étape 2 que pour tout  $x \in (l, r)$ ,  $v_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_1^k(x)$ , avec les  $v_1^k$ 's définis à l'Étape 1.

i) Dans cette preuve on a aussi vu que les  $v_1^k$ 's vérifient (3.1.11). Par passage à la limite on obtient  $|v_1(x)| \leq C(r-l)^2$  pour tout  $x \in (l, r)$  et (3.1.12) est prouvée.

ii) Soit  $x \in (l, r)$  fixé. Comme dans la preuve du Lemme 3.1.4 on a pour chaque  $v_1^k$  la représentation

$$\int_l^r G_{[l,r]}^k(x, y) v_0^k(y) \exp(\Psi^k(y)) (\rho^k)^{-1}(y) dy,$$

avec les fonctions  $G_{[l,r]}^k$  et  $\Psi^k$  adéquates. Grâce à (3.1.4),  $\exp(\pm\Psi^k) \geq 1/\kappa$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et tout  $y \in (l, r)$ ,

$$\exp(\Psi^k(y)) (\rho^k)^{-1}(y) \geq \frac{1}{\Lambda\kappa},$$

$$v_0^k(y) \geq \frac{\lambda}{\Lambda\kappa^2} \frac{y-l}{r-l}, \quad (3.1.14)$$

$$G_{[l,r]}^k(x, y) \geq 2 \frac{\lambda}{\Lambda^2\kappa^3} \frac{\delta}{r-l} (y-l) \quad \text{si } y \leq x,$$

$$\text{et } G_{[l,r]}^k(x, y) \geq 2 \frac{\lambda}{\Lambda^2\kappa^3} \frac{\delta}{r-l} (r-y) \quad \text{si } y \geq x.$$

On obtient finalement  $v_1^k(x) \geq (2\lambda^2/5\Lambda^4\kappa^6)(\delta^4/(r-l)^2)$  pour tout  $k$ , et en passant à la limite on prouve (3.1.13). □

**Remarque 3.1.3** On pourrait se servir des arguments de régularisation dans les preuves des Propositions 3.1.1 et 3.1.2 pour prouver que, dans le cas général de fonctions mesurables  $a$ ,  $\rho$  et  $b$ , la fonction de Green associée à la mesure  $\exp(\Psi(y))\rho^{-1}(y)dy$  pour les problèmes elliptiques sur  $(l, r)$  impliquant  $(L, D(L))$  est  $G_{[l,r]}$  (avec  $\Psi$  et  $G_{[l,r]}$  comme dans la preuve du Lemme 3.1.4).

On énonce enfin une estimée concernant le moment d'ordre deux.

**Proposition 3.1.3** *Soient  $\rho, a \in \mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $X$  le processus engendré par  $(L, D(L))$ . Soit  $(l, r) \subset G$ . Soit  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \{l, r\}\}$ . Pour tout  $x \in (l, r)$ ,*

$$\mathbb{E}^x [\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] \leq K (r - l)^4, \quad (3.1.15)$$

où  $K$  est une constante positive dépendant de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

On a une estimée similaire à (3.1.15) pour  $\mathbb{E}^x [\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=l\}}]$ .

**Preuve.** Comme dans la preuve de la Proposition 3.1.1, on peut construire une suite  $(X^k)$  de processus engendrés par des coefficients réguliers, telle que  $(\tau^k)^2 \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k=r\}}$  converge en loi vers  $\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}$ . Mais, comme dans l'Étape 3 de la preuve de la Proposition 3.1.1, les Lemmes 3.1.3 et 3.1.5, assurent que pour tout  $x \in (l, r)$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}^x [(\tau^k)^2 \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k=r\}}] \leq K (r - l)^4,$$

avec  $K$  dépendant de  $\lambda$  et  $\Lambda$ . Donc par le Théorème 5.3 dans [Bil68] il vient,

$$\forall x \in (l, r), \quad \mathbb{E}^x [\tau^2 \mathbf{1}_{\{X_\tau=r\}}] \leq \liminf_k \mathbb{E}^x [(\tau^k)^2 \mathbf{1}_{\{X_{\tau^k}^k=r\}}] \leq K (r - l)^4.$$

□

## 3.2 L'algorithme

Soient  $\rho, a \in \mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soit  $X$  le processus engendré par  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

On décrit maintenant la construction de la marche aléatoire. L'algorithme, outre les coefficients  $\rho, a$  et  $b$ , a comme arguments d'entrée le point de départ  $x$  et le temps  $t$  auquel on veut une approximation de  $X$ .

### ÉTAPE 1. Construction de la grille et initialisation.

On se donne d'abord une grille  $\mathbf{g} = \{x_j\}_{j \in J}$  sur  $G$ , avec  $x_j \leq x_{j+1}$  pour tout  $j \in J$ .

On suppose que  $\mathbf{g}$  a une taille de cellule minimum  $h$  et une taille maximum  $H$ . Comme  $h$  et  $H$  ont vocation à tendre vers zéro, on suppose que  $H \leq 1$ . Cela correspond à la condition (3.1.1) de la Section 3.1.

Pour une telle grille  $\mathbf{g}$  on définit  $R := H/h$  et on appelle le couple  $(h, R)$  la *caractéristique* de  $\mathbf{g}$ .

On initialise alors l'algorithme en posant  $\hat{t} \leftarrow 0$  et  $S \leftarrow x_j$  où  $x_j$  est le point de  $\mathbf{g}$  qui est le plus près de  $x$ .

**ÉTAPE 2. Calcul des probabilités de transition et des espérances conditionnelles des temps de sortie.**

Soient  $(\tau_p^{\mathfrak{g}})_{p \in \mathbb{N}}$  la suite de temps d'arrêt définie par,

$$\begin{aligned} \tau_0^{\mathfrak{g}} &= 0, \\ \tau_p^{\mathfrak{g}} &= \inf \{t \geq \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} \mid X_t \in \mathfrak{g} \setminus \{X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}\}\}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

La seconde étape consiste à calculer pour chaque  $x_j \in \mathfrak{g}$  :

i) les probabilités de transition

$$\pi(j, j+1) := \mathbb{P}[X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j+1} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j],$$

ii) les espérances conditionnelles

$$\begin{aligned} T(j, +) &:= \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} \mid X_{p-1} = x_j; X_p = x_{j+1}] \\ &= \mathbb{E}[(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j+1}\}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j] / \pi(j, j+1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T(j, -) &:= \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} \mid X_{p-1} = x_j; X_p = x_{j-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j-1}\}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j] / (1 - \pi(j, j+1)). \end{aligned}$$

C'est possible grâce à la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1** *Soit  $x_j \in \mathfrak{g}$ . On a pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :*

i)

$$\mathbb{P}[X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j+1} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j] = \frac{\int_{x_{j-1}}^{x_j} e^{-\Psi(y)} / a(y) dy}{\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} e^{-\Psi(y)} / a(y) dy},$$

où,

$$\Psi(x) = 2 \int_{x_{j-1}}^x \frac{b(y)}{a(y)\rho(y)} dy, \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_{j+1}].$$

ii)

$$\mathbb{E}[(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j+1}\}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j] = v_1(x_j),$$

où  $v_1$  est la solution de  $\mathcal{P}_1([x_{j-1}, x_{j+1}], +)$  défini dans la Proposition 3.1.1, et

$$\mathbb{E}[(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j-1}\}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j] = v_1(x_j),$$

où  $v_1$  est la solution de  $\mathcal{P}_1([x_{j-1}, x_{j+1}], -)$  défini dans la Proposition 3.1.1.



**Preuve.** Par la propriété de Markov forte on a pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}[X_{\tau_p^{\mathbf{g}}} = x_{j+1} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}} = x_j] = \mathbb{P}^{x_j}[X_{\tau_1^{\mathbf{g}}} = x_{j+1}]$$

et

$$\mathbb{E}[(\tau_p^{\mathbf{g}} - \tau_{p-1}^{\mathbf{g}})\mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathbf{g}}} = x_{j+1}\}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}} = x_j] = \mathbb{E}^{x_j}[\tau_1^{\mathbf{g}}\mathbf{1}_{\{X_{\tau_1^{\mathbf{g}}} = x_{j+1}\}}].$$

Le Point i) est une conséquence des Propositions 1.4.3 et 1.4.2 et de la Définition 1.4.1. On applique la Proposition 3.1.1 pour obtenir le Point ii).  $\square$

**Remarque 3.2.1** Notons que  $\mathbb{P}[X_{\tau_p^{\mathbf{g}}} = x_{j+1} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}} = x_j] = v_0(x_j)$  où  $v_0$  est solution de  $\mathcal{P}_0([x_{j-1}, x_{j+1}], +)$ .

Il est clair que si on définit  $(S_p^{\mathbf{g}})_{p \in \mathbb{N}} = (X_{\tau_p^{\mathbf{g}}})_{p \in \mathbb{N}}$  on obtient une chaîne de Markov sur la grille  $\mathbf{g}$  avec probabilités de transition  $\mathbb{P}[S_p^{\mathbf{g}} = x_{j+1} \mid S_{p-1}^{\mathbf{g}} = x_j] = \pi(j, j+1)$ .

**ÉTAPE 3. Simulation de la chaîne de Markov en temps et en espace, et construction du processus approchant  $X$ .**

Après l'initialisation de l'Étape 1, l'algorithme à mettre en oeuvre est le suivant :

**Boucle principale.**

♠. **Partie A.**

On a  $S = x_j$  pour un certain  $x_j \in \mathbf{g}$ .

On tire une v.a.r. de loi  $Ber(\pi(j, j+1))$ .

Si on obtient le succès

Alors on pose  $S \leftarrow x_{j+1}$  et  $\hat{t} \leftarrow \hat{t} + T(j, +)$ .

Sinon

Alors on pose  $S \leftarrow x_{j-1}$  et  $\hat{t} \leftarrow \hat{t} + T(j, -)$ .

♠. **Partie B.**

Si  $\hat{t} < t$

Alors on continue dans la boucle principale.

Sinon  $\hat{t} \geq t$

Alors on arrête et on **retourne**  $(\hat{t}, S)$ .

Les valeurs successives prises par le couple  $(\hat{t}, S)$  dans la Partie A de la boucle principale constituent en fait une chaîne de Markov que l'on notera  $(\widehat{T}_k^{\mathbf{g}}, \widehat{S}_k^{\mathbf{g}})$ .

La Partie B de la boucle définit quant à elle une fonction déterministe  $\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)$  des trajectoires de  $(\widehat{T}_k^{\mathbf{g}}, \widehat{S}_k^{\mathbf{g}})$  de la façon suivante :

$$\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t) = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid \widehat{T}_k^{\mathbf{g}} \geq t\}.$$

Quand l'algorithme s'arrête il retourne en fait  $(\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, \widehat{S}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}})$ .

On définit  $\widehat{X}_t^{\mathfrak{g}} := \widehat{S}_{\widehat{K}^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}$ . C'est l'approximation obtenue de  $X_t$ .

Dans la section suivante on évalue la vitesse de convergence de cette marche aléatoire.

### 3.3 Vitesse de convergence de l'algorithme

**Théorème 3.3.1** *Soient  $\rho, a \in \mathfrak{C}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soit  $X$  le processus engendré par  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Soit  $0 < T < \infty$ .*

*Pour toute grille  $\mathfrak{g}$  sur  $G$ , soit  $(\tau_p^{\mathfrak{g}})$  la suite de temps d'arrêt décrite dans la Section 3.2 à l'Étape 2. Soient aussi*

$$T_k^{\mathfrak{g}} = \sum_{p=1}^k \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}],$$

et

$$K^{\mathfrak{g}}(t) = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid T_k^{\mathfrak{g}} \geq t\}.$$

*Le processus  $(T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}, X_{\tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}})$  a la même loi que le processus  $(\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}, \widehat{X}_t^{\mathfrak{g}})$  décrit dans la Section 3.2.*

*De plus, pour tout  $t \in [0, T]$  il y a convergence en probabilité du couple  $(T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}, X_{\tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}})$  vers  $(t, X_t)$ , quand le paramètre  $h$  de la caractéristique de  $\mathfrak{g}$  tend vers zéro.*

On va d'abord prouver le théorème suivant, qui donne la vitesse de convergence forte de  $X_{\tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}}$  vers  $X_t$  à  $t$  fixé.

**Théorème 3.3.2** *Dans le contexte du Théorème 3.3.1, pour tout  $\gamma \in (0, 1/2)$  il existe une constante  $K_0$  dépendant de  $\gamma, T, \lambda$  et  $\Lambda$  telle que pour toute grille  $\mathfrak{g}$  sur  $G$  de caractéristique  $(h, R)$ ,*

$$\forall t \in [0, T], \forall x \in G, \quad \mathbb{E}^x |X_{\tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}} - X_t| \leq K_0 C_0(R) h^\gamma,$$

où  $C_0(\cdot)$  est une fonction positive et croissante de  $R$ .

Pour prouver le Théorème 3.3.2 on a besoin de quelques lemmes qui permettent de prouver d'abord la convergence de  $\tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}$  vers  $t$ .

Pour toute grille  $\mathfrak{g}$  on appelle  $S^{\mathfrak{g}}$  la chaîne sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $S_p^{\mathfrak{g}} = X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 3.3.1** *Dans le contexte du Théorème 3.3.1, les  $(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}})$ 's sont deux à deux indépendants conditionnellement aux trajectoires de  $S^{\mathfrak{g}}$ .*

**Preuve.** Pour tous entiers  $0 \leq k \leq l$  on désigne par  $S_{k,l}^{\mathfrak{g}}$  la portion de chemin fait par la marche  $S^{\mathfrak{g}}$  du  $k^{\text{ième}}$  au  $l^{\text{ième}}$  pas. Ces portions de chemin sont à valeurs dans un ensemble

de listes de sites contigus de  $\mathbf{g}$ , listes qu'on notera par exemple  $c_{k,l}$ . On notera aussi parfois  $c_i$  le  $i^{\text{ième}}$  site du chemin seul.

Soient  $0 \leq i \leq j-1 < n$ . Evaluons  $\mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}})(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) | S_{0,n}^{\mathbf{g}} = c_{0,n}]$ . En utilisant la propriété de Markov forte il vient pour tout  $c_{0,n}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}})(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) | S_{0,n}^{\mathbf{g}} = c_{0,n}] \\
&= \frac{\mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}\}} (\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n}\}}]}{\mathbb{P}[S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}; S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n}]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}\}}] \mathbb{E}[(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n}\}} | \mathcal{F}_{\tau_i^{\mathbf{g}}}]]}{\mathbb{P}[S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}] \mathbb{P}[S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n} | \mathcal{F}_{\tau_i^{\mathbf{g}}}]]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}\}}] \mathbb{E}[(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n}\}} | X_{\tau_i^{\mathbf{g}}}]]}{\mathbb{P}[S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}] \mathbb{P}[S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n} | X_{\tau_i^{\mathbf{g}}}]]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}\}}] \mathbb{E}[(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n}\}} | S_i^{\mathbf{g}} = c_i]}{\mathbb{P}[S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}] \mathbb{P}[S_{i+1,n}^{\mathbf{g}} = c_{i+1,n} | S_i^{\mathbf{g}} = c_i]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}\}}] \mathbb{E}[(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{S_{i,n}^{\mathbf{g}} = c_{i,n}\}}] / \mathbb{P}[S_i^{\mathbf{g}} = c_i]}{\mathbb{P}[S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}] \mathbb{P}[S_{i,n}^{\mathbf{g}} = c_{i,n}] / \mathbb{P}[S_i^{\mathbf{g}} = c_i]} \\
&= \mathbb{E}[(\tau_i^{\mathbf{g}} - \tau_{i-1}^{\mathbf{g}}) | S_{0,i}^{\mathbf{g}} = c_{0,i}] \cdot \mathbb{E}[(\tau_j^{\mathbf{g}} - \tau_{j-1}^{\mathbf{g}}) | S_{i,n}^{\mathbf{g}} = c_{i,n}],
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

**Remarque 3.3.1** Remarquons la différence avec le Lemme 2.4.2. Dans ce lemme l'uniformité de la grille  $\{kh, k \in \mathbb{Z}\}$ , sur laquelle on regardait les temps d'arrêt  $\tau_p^h$  de  $Y^h$ , faisait que les  $\tau_p^h - \tau_{p-1}^h$ 's avaient tous la même loi, ce qui entraînait in fine leur indépendance. Dans le Lemme 3.3.1 la grille  $\mathbf{g}$  n'est plus uniforme et la loi de  $\tau_p^{\mathbf{g}} - \tau_{p-1}^{\mathbf{g}}$  dépend des sites où se trouve  $X$  aux instants  $\tau_p^{\mathbf{g}}$  et  $\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}$ . Il n'y a donc plus en général indépendance si on ne conditionne pas par rapport au chemin de la chaîne  $S_p^{\mathbf{g}} = X_{\tau_p^{\mathbf{g}}}$ . Cependant grâce au contrôle que l'on a sur les moments conditionnels des  $\tau_p^h - \tau_{p-1}^h$ 's on va pouvoir montrer le Théorème 3.3.2.

**Lemme 3.3.2** *Il existe des constantes  $M, M'$  et  $M''$  dépendant de  $\lambda$  et  $\Lambda$  telles que, pour toute grille  $\mathbf{g}$  sur  $G$  de caractéristique  $(h, R)$ , on a dans le contexte du Théorème 3.3.1,*

$$i) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall x_j \in \mathbf{g}, \frac{M'}{R^2} h^2 \leq \mathbb{E}[\tau_p^{\mathbf{g}} - \tau_{p-1}^{\mathbf{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}} = x_j; X_{\tau_p^{\mathbf{g}}} = x_{j+1}] \leq M R^3 h^2.$$

$$ii) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall x_j \in \mathfrak{g}, \quad \text{Var}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j; X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j \pm 1}] \leq M'' R^4 h^4.$$

**Preuve.** Rappelons que pour tout  $x_j \in \mathfrak{g}$ ,  $h \leq x_{j+1} - x_j \leq Rh$ . Pour prouver le Point i) il suffit alors d'utiliser les Propositions 3.1.2 et 3.2.1, la Remarque 3.2.1 et la seconde ligne de (3.1.14). Le Point ii) est une conséquence directe de (3.1.15) dans la Proposition 3.1.3. □

**Lemme 3.3.3** *Dans le contexte du Théorème 3.3.1 on a pour toute grille  $\mathfrak{g}$  de caractéristique  $(h, R)$ ,*

$$\sup_{t \in [0, T]} |T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} - t| \leq MR^3 h^2 \quad \text{p.s.}$$

**Preuve.** Soit  $\mathfrak{g}$  une grille de caractéristique  $(h, R)$ . Par définition de  $K^{\mathfrak{g}}(t)$  et par le Point i) du Lemme 3.3.2 il est clair que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} |T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} - t| \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - t \right| \\ &\leq \max_{x_j \in \mathfrak{g}} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j \pm 1}] \\ &\leq MR^3 h^2 \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.3.4** *Dans le contexte du Théorème 3.3.1 il existe une constante  $K$  dépendant de  $T$ ,  $\lambda$  et  $\Lambda$  telle que pour toute grille  $\mathfrak{g}$  de caractéristique  $(h, R)$ ,*

$$\mathbb{E}|T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} - t|^2 \leq KC_1(R) h^2,$$

où  $C_1(\cdot)$  est une fonction positive et croissante de  $R$ .

**Preuve.** Soit  $\mathfrak{g}$  une grille de caractéristique  $(h, R)$ . En utilisant  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} - t|^2 &\leq 2 \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - t \right|^2 \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - T_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} \right|^2. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Par le Lemme 3.3.3 on a une estimation du premier terme à droite du signe d'inégalité dans (3.3.1) :

$$\mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - t \right|^2 \leq M^2 R^6 h^4. \quad (3.3.2)$$

On estime maintenant le second terme. On a,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - \tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} \right|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} - \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] \right|^2. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Pour certains entiers  $k \in \mathbb{N}$  il y a des chemins pris par  $S^{\mathfrak{g}}$  tels que  $K^{\mathfrak{g}}(t) = k$  et  $\mathbb{P}[c] \neq 0$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} - \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{K^{\mathfrak{g}}(t)=k\}} \left| \sum_{p=1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} - \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Mais pour chaque  $k$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{K^{\mathfrak{g}}(t)=k\}} \left| \sum_{p=1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} - \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] \right|^2 \right] \\ &= \sum_{\text{chemins t.q. } K^{\mathfrak{g}}(t)=k} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{\text{chemin}\}} \left| \sum_{p=1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} - \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] \right|^2 \right] \\ &= \sum_{\text{chemins t.q. } K^{\mathfrak{g}}(t)=k} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{\text{chemin}\}} \text{Var} \left[ \sum_{p=1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}) | \text{chemin} \right] (\text{chemin}) \right]. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le Lemme 3.3.1, qui permet d'affirmer que  $\text{Var}[\sum_{p=1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}) | \text{chemin}] = \sum_{p=1}^k \text{Var}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | \text{chemin}]$ , et le ii) du Lemme 3.3.2. Cela donne,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{K^{\mathfrak{g}}(t)=k\}} \left| \sum_{p=1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} - \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] \right|^2 \right] \\ & \leq \sum_{\text{chemins t.q. } K^{\mathfrak{g}}(t)=k} k M'' R^4 h^4 \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\text{chemin}\}}] \\ & = M'' R^4 h^4 k \mathbb{P}[K^{\mathfrak{g}}(t) = k]. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

En considérant (3.3.3), (3.3.4) et (3.3.5) on a alors,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - \tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} \right|^2 \leq M'' R^4 h^4 \mathbb{E}[K^{\mathfrak{g}}(t)]. \quad (3.3.6)$$

Il reste à évaluer  $\mathbb{E}[K^{\mathfrak{g}}(t)]$ . Mais, par définition de  $K^{\mathfrak{g}}(t)$  et le i) du Lemme 3.3.2, pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} K^{\mathfrak{g}}(t) &\leq \left\lfloor \frac{t}{\min_{x_j \in \mathfrak{g}} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}} = x_j, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}} = x_{j\pm 1}]} \right\rfloor + 1 \\ &\leq \frac{T}{M'} \frac{R^2}{h^2} + 1 \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

Utilisant ceci et (3.3.6) on a,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{p=1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} \mathbb{E}[\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}, X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}] - \tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} \right|^2 \leq \frac{TM''}{M'} R^6 h^2 + M'' R^4 h^4. \quad (3.3.7)$$

Prenant en compte (3.3.2) et (3.3.7) et le fait que  $h \leq 1$  (voir (3.1.1) et l'Étape 1 dans la Section 2.3.3) on achève la preuve.  $\square$

On a maintenant besoin d'un contrôle de la régularité höldérienne des trajectoires de  $X$ . Pour cela on a d'abord besoin d'un résultat dû à D.W. Stroock.

**Lemme 3.3.5 (Stroock 1988)** *Soient  $\rho, a \in \mathfrak{E}\mathfrak{U}(\lambda, \Lambda)$  et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ . Soit  $T > 0$ . Soit  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, b)$ . Il existe une constante  $A$  dépendant de  $\lambda, \Lambda$  et  $T$ , telle que, pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times G$  et tout  $d > 0$ ,*

$$\mathbb{P}^x \left[ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - x| \geq d \right] \leq A \exp \left( - \frac{Ad^2}{t} \right).$$

**Preuve.** Dans [Str88] ce lemme est prouvé pour  $\rho = 1$  et  $b = 0$ . Cependant la preuve est basée sur l'estimée d'Aronson (cf Théorème 1.2.2) qui reste vraie pour tout  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ , pourvu qu'on soit à un horizon fini  $T$ . De plus dans la cas  $\rho = 1$  l'estimée d'Aronson concerne la densité de probabilité de transition par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx$ . Dans le cas  $\rho \neq 1$ , on a l'estimée par rapport à la mesure  $\rho^{-1}(x)dx$ , et comme  $\rho^{-1} \in \mathfrak{E}\mathfrak{U}(1/\Lambda, 1/\lambda)$ , on obtient finalement le même résultat.  $\square$

Dans [Lej05] A. Lejay a utilisé le Lemme 3.3.5 pour montrer le résultat suivant.

**Lemme 3.3.6** *Pour tout  $\gamma \in (0, 1/2)$  et tout  $1 < p < 4/3$  il existe une constante  $C_p^\gamma$  dépendant de  $\gamma, p, \lambda, \Lambda$  et  $T$ , telle que*

$$\mathbb{E} \left( \sup_{s \neq t, s, t \in [0, T]} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} \right)^p \leq C_p^\gamma < \infty.$$

**Preuve.** *Étape 1.* On prouve que pour tout  $\alpha > 2$  il existe une constante  $B$  dépendant de  $\lambda$ ,  $\Lambda$  et  $T$  telle que pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$\sup_{x \in G} \mathbb{E}^x \left[ \sup_{r \in [s, t]} |X_r - X_s|^\alpha \right] \leq B |t - s|^{\alpha/2}.$$

Par la propriété de Markov,

$$\sup_{x \in G} \mathbb{E}^x \left[ \sup_{r \in [s, t]} |X_r - X_s|^\alpha \right] = \sup_{x \in G} \mathbb{E}^x \left[ \sup_{r \in [0, t-s]} |X_r - x|^\alpha \right].$$

Soit  $\alpha > 2$  et  $t \in [0, T]$  fixé. Pour  $x \in G$  et  $d > 0$  soit le temps de sortie  $\tau = \inf\{r \geq 0 | X_r \notin (x - d, x + d)\}$ . En utilisant  $(a + b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$  et la propriété de Markov forte il vient,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \mathbb{E}^x [\sup_{r \in [0, t]} |X_r - x|^\alpha] &\leq d^\alpha + \sup_{x \in G} \mathbb{E}^x [\sup_{r \in [0, t]} |X_r - x|^\alpha \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}] \\ &\leq d^\alpha + \sup_{x \in G} \mathbb{E}^x [\sup_{r \in [\tau, t]} |X_r - x|^\alpha \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}] \\ &\leq d^\alpha + 2^{\alpha-1} (d^\alpha + \sup_{x \in G} \mathbb{E}^x [\sup_{r \in [\tau, t]} |X_r - X_\tau|^\alpha \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}]) \\ &\leq (2^{\alpha-1} + 1) d^\alpha + 2^{\alpha-1} \sup_{x \in G} \mathbb{E}^x [\sup_{r \in [0, t]} |X_r - x|^\alpha] \sup_{x \in G} \mathbb{P}^x [t > \tau]. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 3.3.5 on a  $\sup_{x \in G} \mathbb{P}^x [t > \tau] \leq A \exp(-Ad^2/t)$ . Donc l'Étape 1 est prouvée si on prend  $d$  égal à  $\mu\sqrt{t}$  avec  $\mu$  assez grand pour que  $2^{\alpha-1}A \exp(-A\mu^2) \leq 1/2$ , et si on remplace finalement  $t$  par  $t - s$ .

*Étape 2.* Soit  $\gamma \in (0, 1/2)$ . Il existe  $\alpha > 2$  tel que  $0 < \gamma < 1/2 - 1/\alpha$ . En combinant l'Étape 1 et le théorème de Kolmogorov-Čentsov (voir [RY91]) il vient,

$$\mathbb{E} \left( \sup_{s \neq t, s, t \in [0, T]} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} \right)^\alpha \leq C_\alpha^\gamma < \infty,$$

avec  $C_\alpha^\gamma$  dépendant de  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda$  et  $T$ .

Comme  $\alpha > 2$  il suffit alors d'utiliser l'inégalité de Jensen pour achever la preuve.  $\square$

**Preuve du Théorème 3.3.2.** Soit  $\gamma \in (0, 1/2)$  et  $q = 2/\gamma$ . Soit  $p$  le conjugué de  $q$ . On a  $1 < p < 4/3$ . Par l'inégalité de Hölder on peut écrire pour toute grille  $\mathbf{g}$  de caractéristique  $(h, R)$ , et tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathbb{E} |X_{\tau_{K\mathbf{g}}(t)} - X_t| \leq \left( \mathbb{E} \left[ \sup_{s \neq t} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\gamma} \right]^p \right)^{1/p} \cdot \left( \mathbb{E} |\tau_{K\mathbf{g}}(t) - t|^2 \right)^{1/q},$$

et par le Lemme 3.3.6 et le Lemme 3.3.4 on obtient

$$\mathbb{E} |X_{\tau_{K\mathbf{g}}(t)} - X_t| \leq C(\gamma) (KC_1(R) h^2)^{1/q} = C(\gamma) K^{\gamma/2} (C_1(R))^{\gamma/2} h^\gamma,$$

où la constante  $C(\gamma) K^{\gamma/2}$  dépend de  $\gamma$ ,  $T$ ,  $\lambda$  et de  $\Lambda$  mais pas de la grille. La preuve est terminée.  $\square$

**Preuve du Théorème 3.3.1.** Par construction les chaînes de Markov  $S^{\mathbf{g}}$  et  $\widehat{S}^{\mathbf{g}}$  ont même loi. Or  $K^{\mathbf{g}}(t)$  et  $\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)$  s'obtiennent en appliquant la même fonction déterministe à leurs trajectoires. Il est donc clair que le couple  $(T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, X_{\tau_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}})$  a la même loi que  $(\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, \widehat{X}_t^{\mathbf{g}})$ . En combinant le Théorème 3.3.2, le Lemme 3.3.3, et l'inégalité de Tchebychev on obtient la convergence en probabilité annoncée.  $\square$

### 3.4 Convergence en loi du processus approximant

Dans cette section on considère que le paramètre  $R$  des caractéristiques des grilles  $\mathbf{g}$  en jeu est fixé une fois pour toutes. On indexe alors, par exemple, des familles de processus  $\widehat{X}^{\mathbf{g}}$  par le paramètre  $h$  de la grille  $\mathbf{g}$ .

Dans le contexte du Théorème 3.3.1 le processus  $(\widehat{X}_t^{\mathbf{g}}, 0 \leq t \leq T)$  est constant sur les intervalles  $[\widehat{T}_k^{\mathbf{g}}, \widehat{T}_{k+1}^{\mathbf{g}})$  (pour les  $k \leq \widehat{K}^{\mathbf{g}}(T) - 1$ ). Considérons son interpolé linéaire  $\bar{X}^{\mathbf{g}}$  défini par :

$$\bar{X}_t^{\mathbf{g}} = \widehat{S}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}} + \frac{t - \widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}}{\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}} - \widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}} (\widehat{S}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}} - \widehat{S}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}), \quad \forall t \in [\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, \widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}}). \quad (3.4.1)$$

On note  $D_T$  l'espace des fonctions càd-làg sur  $[0, T]$ . On note  $C_T$  l'espace  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$  muni de la topologie uniforme. On va montrer le théorème suivant.

**Théorème 3.4.1** *Dans le contexte du Théorème 3.3.1 et du début de la Section 3.4, on a la convergence en loi de variables aléatoires sur  $D_T \times C_T$ , muni de la topologie uniforme, suivante :*

$$((\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, \bar{X}_t^{\mathbf{g}}), 0 \leq t \leq T) \xrightarrow[h \downarrow 0]{} ((t, X_t), 0 \leq t \leq T) \quad \text{en loi.}$$

De façon analogue à l'interpolation (3.4.1), avec les notations du Théorème 3.3.1, on définit l'interpolation linéaire  $\widetilde{X}^{\mathbf{g}}$  de  $(X_{\tau_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}}, 0 \leq t \leq T)$  par

$$\widetilde{X}_t^{\mathbf{g}} = S_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}} + \frac{t - T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}}{T_{K^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}} - T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}} (S_{K^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}} - S_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}), \quad \forall t \in [T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, T_{K^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}}). \quad (3.4.2)$$

Les processus  $((\widehat{T}_{\widehat{K}^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, \bar{X}_t^{\mathbf{g}}), 0 \leq t \leq T)$  et  $((T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, \widetilde{X}_t^{\mathbf{g}}), 0 \leq t \leq T)$  ont même loi. Le Lemme 3.3.3 énonce une convergence presque sûre du processus  $(T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, 0 \leq t \leq T)$  vers  $(t, 0 \leq t \leq T)$ . On va montrer la proposition suivante.

**Proposition 3.4.1** *Pour tout  $x$  on a*

$$\mathbb{P}^x \circ (\widetilde{X}^{\mathbf{g}})^{-1} \xrightarrow[h \downarrow 0]{} \mathbb{P}^x \circ (X)^{-1},$$

*par rapport à la topologie de  $C_T$ .*



**Lemme 3.4.1** *La famille  $(\tilde{X}^{\mathfrak{g}})_h$  de variables aléatoires à valeurs dans l'espace  $C_T$  est tendue.*

**Preuve.** On introduit la notation  $\theta^{\mathfrak{g}}(t) = \tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}$ . On a donc  $S_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}} = X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)}$ .

Soient  $\varepsilon, \eta > 0$ , il s'agit de trouver  $\delta, h_0 > 0$  tels que

$$\forall 0 < h < h_0, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_t^{\mathfrak{g}} - \tilde{X}_s^{\mathfrak{g}}| \geq 3\varepsilon\right) \leq 3\eta,$$

pour avoir la tension (cf début du Chapitre 2 dans [Bil68]). En effet par ailleurs on peut sans problème trouver  $a$  tel que  $\mathbb{P}(|\tilde{X}_0^{\mathfrak{g}}| > a) \leq \eta$  pour tout  $h$ .

*Étape 1.* On a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_t^{\mathfrak{g}} - \tilde{X}_s^{\mathfrak{g}}| \geq 3\varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_t^{\mathfrak{g}} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)}| \geq \varepsilon\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(s)}| \geq \varepsilon\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_s^{\mathfrak{g}} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(s)}| \geq \varepsilon\right). \end{aligned}$$

En considérant (3.4.2) il est clair que  $\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_t^{\mathfrak{g}} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)}| \leq Rh$ , pour tout  $\delta > 0$ . On peut donc toujours trouver  $\delta$  et  $h$  assez petits pour avoir l'inégalité  $\mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_t^{\mathfrak{g}} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)}| \geq \varepsilon\right) \leq \eta$ . On raisonne de même pour  $\mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{X}_s^{\mathfrak{g}} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(s)}| \geq \varepsilon\right)$ .

*Étape 2.* Pour tout  $\varepsilon' > 0$  on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(s)}| \geq \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(s)}| \geq \varepsilon; \sup_{|s-t|<\delta} |\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)| \leq 3\varepsilon'\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |X_{\theta^{\mathfrak{g}}(t)} - X_{\theta^{\mathfrak{g}}(s)}| \geq \varepsilon; \sup_{|s-t|<\delta} |\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)| > 3\varepsilon'\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{|u-v|<3\varepsilon'} |X_u - X_v| \geq \varepsilon\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)| > 3\varepsilon'\right). \end{aligned}$$

Le module de régularité  $\gamma$ -höldérienne de  $X$  est contrôlé (Lemme 3.3.6). Par les inégalités de Hölder et de Tchebychev il est donc possible de trouver  $\varepsilon' > 0$  tel que  $\mathbb{P}\left(\sup_{|u-v|<3\varepsilon'} |X_u - X_v| \geq \varepsilon\right) \leq \eta/2$ .

*Étape 3.* Il s'agit de trouver  $\delta, h_0 > 0$  tels que

$$\forall 0 < h < h_0, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{|s-t|<\delta} |\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)| > 3\varepsilon'\right) \leq \eta/2. \quad (3.4.3)$$

On définit l'interpolé linéaire  $\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}$  de  $\theta^{\mathbf{g}}$  de la façon suivante,

$$\tilde{\theta}_t^{\mathbf{g}} = \theta^{\mathbf{g}} + \frac{t - T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}}{T_{K^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}} - T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}} (\tau_{K^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}} - \tau_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}), \quad \forall t \in [T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}, T_{K^{\mathbf{g}}(t)+1}^{\mathbf{g}}), \quad (3.4.4)$$

pour pouvoir faire intervenir plus loin le théorème de Kolmogorov-Čentsov. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\theta^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(s)| \geq 3\varepsilon') &\leq \mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)| \geq \varepsilon') \\ &\quad + \mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(s)| \geq \varepsilon') \\ &\quad + \mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(s) - \theta^{\mathbf{g}}(s)| \geq \varepsilon'). \end{aligned}$$

En considérant (3.4.4) et le Lemme 3.3.2 on peut montrer que, pour tout  $\delta > 0$ ,  $\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)| \leq \sup_t |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)| \leq MR^3h^2$ . On peut donc toujours trouver  $\delta$  et  $h$  assez petits pour avoir l'inégalité  $\mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)| \geq \varepsilon') \leq \eta/6$ . On raisonne de même pour  $\mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(s) - \theta^{\mathbf{g}}(s)| \geq \varepsilon')$ .

On va maintenant évaluer  $\mathbb{E}|\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(s)|^2$ , pour  $0 < s < t$ . Pour alléger les notations on note dans ce qui suit,  $t_r = T_{K^{\mathbf{g}}(t)}^{\mathbf{g}}$  et  $t_l = T_{K^{\mathbf{g}}(s)}^{\mathbf{g}}$ . On a

$$\mathbb{E}|\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(s)|^2 \leq 3\mathbb{E}[|\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)|^2 + |\theta^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(s)|^2 + |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)|^2]$$

et le terme de droite est égal à

$$3 \sum_{k,l} \sum_{\substack{\text{chemins t.q.} \\ K^{\mathbf{g}}(t)=k, K^{\mathbf{g}}(s)=l}} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\{\text{ch.}\}} \mathbb{E} [ |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)|^2 + |\theta^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(s)|^2 + |\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)|^2 | \text{ch.} ] \right].$$

On a, conditionnellement à un chemin tel que  $K^{\mathbf{g}}(t) = k, K^{\mathbf{g}}(s) = l$ ,

$$|\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)| = \frac{(t - t_r) \cdot (\tau_{k+1}^{\mathbf{g}} - \tau_k^{\mathbf{g}})}{T_{k+1}^{\mathbf{g}} - T_k^{\mathbf{g}}},$$

d'où, en utilisant le Lemme 3.3.2,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\tilde{\theta}^{\mathbf{g}}(t) - \theta^{\mathbf{g}}(t)|^2 | \text{chemin}] &= \frac{(t - t_r)^2}{(T_{k+1}^{\mathbf{g}} - T_k^{\mathbf{g}})^2} (\text{chemin}) \mathbb{E}[(\tau_{k+1}^{\mathbf{g}} - \tau_k^{\mathbf{g}})^2 | \text{chemin}] \\ &\leq \frac{M'' R^4 h^4}{(M' h^2 / R^2)^2} (t - t_r)^2 (\text{chemin}) \\ &= \frac{M'' R^8}{(M')^2} (t - t_r)^2 (\text{chemin}). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

De même on montre que

$$\mathbb{E}[|\tilde{\theta}^{\mathfrak{g}}(s) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)|^2 | \text{chemin}] \leq (M''R^8 / (M')^2)(s - t_l)^2(\text{chemin}).$$

Par ailleurs on a  $\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s) = \sum_{K^{\mathfrak{g}}(s)+1}^{K^{\mathfrak{g}}(t)} (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}})$ , donc, pour un chemin tel que  $K^{\mathfrak{g}}(t) = k, K^{\mathfrak{g}}(s) = l$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)|^2 | \text{chemin}] &= \mathbb{E}[(\sum_{p=l+1}^k (\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}))^2 | \text{chemin}]. \\ &\leq C(M, M'', R)h^4(k - l)^2, \end{aligned}$$

où, de façon analogue à la preuve du Lemme 3.3.4, on a fait intervenir les Lemmes 3.3.1 et 3.3.2. Mais, comme on considère un chemin tel que  $K^{\mathfrak{g}}(t) = k, K^{\mathfrak{g}}(s) = l$ , on peut montrer, en utilisant la partie minoration du Point i) du Lemme 3.3.4, que

$$k - l \leq \frac{R^2}{M'h^2}(t_r - t_l)(\text{chemin}).$$

Donc finalement

$$\mathbb{E}[|\theta^{\mathfrak{g}}(t) - \theta^{\mathfrak{g}}(s)|^2 | \text{chemin}] \leq C'(M, M', M'', R)(t_r - t_l)^2(\text{chemin}).$$

En considérant ceci, (3.4.5), et en raccordant tout, on montre que pour tout  $h$

$$\mathbb{E}|\tilde{\theta}^{\mathfrak{g}}(t) - \tilde{\theta}^{\mathfrak{g}}(s)|^2 \leq K(M, M', M'', R)(t - s)^2.$$

Donc, en utilisant le théorème de Kolmogorov-Čentsov et les inégalités de Hölder et de Tchebycheff, on peut trouver  $h$  et  $\delta$  assez petits pour avoir  $\mathbb{P}(\sup_{|s-t|<\delta} |\tilde{\theta}^{\mathfrak{g}}(t) - \tilde{\theta}^{\mathfrak{g}}(s)| \geq \varepsilon') \leq \eta/6$ , et le but de l'Étape 3 est atteint.

En prenant en compte les Étapes 1,2 et 3 on achève la preuve. □

**Preuve de la Proposition 3.4.1.** Le Théorème 3.3.1 indique en particulier que  $X_{\tau_{K^{\mathfrak{g}}(t)}^{\mathfrak{g}}}$  converge en probabilité vers  $X_t$  pour tout  $t$ . Par des techniques analogues à celles de l'Étape 1 de la preuve précédente, on obtient la convergence en probabilité de  $\tilde{X}_t^{\mathfrak{g}}$  vers  $X_t$  pour tout  $t$ . On peut ainsi obtenir la convergence en probabilité de  $(\tilde{X}_{t_1}^{\mathfrak{g}}, \dots, \tilde{X}_{t_p}^{\mathfrak{g}})$  vers  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$  pour tous  $0 < t_1 < \dots < t_p < T$ . On a donc la convergence en loi des lois fini-dimensionnelles de  $\tilde{X}^{\mathfrak{g}}$  vers celles de  $X$ . Avec la tension énoncée dans le Lemme 3.4.1, cela permet d'affirmer que la loi de  $\tilde{X}^{\mathfrak{g}}$  sur  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$  converge vers celle de  $X$  sur le même espace. □

**Preuve du Théorème 3.4.1.** Le Lemme 3.3.3 permet d'affirmer que la distance uniforme entre  $T_{K^{\mathfrak{g}}(\cdot)}^{\mathfrak{g}}$ , élément de  $D_T \setminus \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ , et la fonction identité sur  $[0, T]$ , tend vers

zéro presque sûrement. A fortiori on peut donc dire que la distance uniforme entre ces deux fonctions tend vers zéro en probabilité.

En utilisant la Proposition 3.4.1 et le Théorème 4.4 de [Bil68] on peut alors achever la preuve. □

**Remarque 3.4.1** Notons qu'on pourrait utiliser les résultats qui précèdent pour montrer que le schéma présenté dans le Chapitre 2 converge également en loi vers le processus à approcher.

## 3.5 Construction d'un schéma numérique

### 3.5.1 Choix des coefficients constants par morceaux

On peut se demander comment faire en pratique les calculs de l'ÉTAPE 2 de l'algorithme. En fait ces calculs sont faciles à faire (cf Sous-section 3.5.2) si on fait d'abord une approximation constante par morceaux des coefficients  $\rho e^{-\Psi}$  et  $ae^{\Psi}$  de l'opérateur (on se sert de la Proposition 1.4.3).

Dans la plupart des situations physiques  $G$  est borné et les coefficients  $\rho$ ,  $a$  et  $b$  peuvent en fait être considérés comme étant càd-làg, et de classe  $\mathcal{C}^1$  excepté sur un ensemble fini de points  $\mathcal{G}$ .

Donc on peut choisir la grille  $\mathbf{g}$  de caractéristique  $(h, R)$  de telle sorte que  $\mathcal{G} \subset \mathbf{g}$ , puis définir les coefficients constants par morceaux  $\rho^{\mathbf{g}}$ ,  $a^{\mathbf{g}}$ , et  $b^{\mathbf{g}}$ , ainsi qu'une fonction  $\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}$ , de façon analogue à l'Étape 1 de la Sous-section 2.3.2. On considère alors le processus  $X^{\mathbf{g}}$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho^{\mathbf{g}}e^{-\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}}, a^{\mathbf{g}}e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}}, 0)$ . Par ailleurs on a  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho e^{-\Psi}, ae^{\Psi}, 0)$ . Comme on a  $\mathcal{G} \subset \mathbf{g}$  on peut utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que par exemple  $\left\| ae^{\Psi} - a^{\mathbf{g}}e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}} \right\|_{\infty} \leq Ch$  où  $C$  est une constante dépendant de  $\|a'\|_{\infty}$ ,  $G$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda$  (voir Sous-section 2.4.1). La Proposition 2.4.2 permet alors de dire que l'erreur faible entre  $X$  et  $X^{\mathbf{g}}$  est d'ordre  $h^{1/2}$ , c'est à dire du même ordre que l'erreur dûe au Théorème de Donsker.

D'un autre côté, on peut envisager de construire la grille à une échelle mésoscopique, et de construire des coefficients constants par morceaux qui capturent directement un comportement à petite échelle du processus. En effet la théorie de l'homogénéisation permet d'appréhender le comportement local des coefficients. Dans l'article [OZ05] les auteurs construisent une chaîne de Markov qui approche une diffusion en dimension 2 ou 3 dans le cas de coefficients localement irréguliers, mais ils ont besoin de résoudre un problème de volumes finis sur tout l'espace. Dans notre cas plus simple, on construit la marche aléatoire en prenant en compte uniquement des informations locales.

Plus précisément, dans certaines situations, on peut avoir des coefficients très irréguliers mais localement périodiques avec des oscillations rapides. Dans ce cas la théorie de

la  $G$ -convergence peut nous aider à obtenir des coefficients homogénéisés constants par morceaux (voir [ZKOT79], et [BLP78] sur l'homogénéisation).

Par exemple soit  $\mathbf{g} = \{x_i\}_{i \in I}$  un ensemble de points de  $G$  et considérons  $\hat{a} \in \mathbf{C}\mathbf{U}(\lambda, \Lambda)$ , périodique sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . Soit le coefficient  $a$  défini par  $a(x) = \hat{a}(x/\varepsilon_i)$ , pour tout  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , avec un très petit coefficient  $\varepsilon_i$  sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . Le coefficient  $a$  oscille rapidement. Supposons qu'on veuille simuler les trajectoires du processus  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$ . On peut montrer que sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ ,

$$\frac{1}{\hat{a}(\cdot/\varepsilon_i)} \underset{\varepsilon_i \downarrow 0}{\xrightarrow{L^2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{\hat{a}(y)}.$$

Donc on définit un coefficient  $a^{\mathbf{g}}$ , constant sur chaque  $[x_i, x_{i+1})$ , par

$$a^{\mathbf{g}}(x_i) = \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{\hat{a}(y)} \right)^{-1},$$

de sorte que, sur chaque  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $1/\hat{a}(\cdot/\varepsilon_i)$  converge faiblement dans  $L^2$  vers  $(1/a^{\mathbf{g}})$ .

Comme les  $\varepsilon_i$  sont très petits, par les Théorèmes 1.3.2 et 1.3.4, on peut considérer que le processus  $X^{\mathbf{g}}$  engendré par  $\mathfrak{L}(1, a^{\mathbf{g}}, 0)$  est une bonne approximation faible de  $X$ .

On pourrait si besoin homogénéiser de la même manière les coefficients  $\rho$  et  $b$ .

### 3.5.2 Calculs des paramètres de la marche pour le processus engendré par des coefficients constants par morceaux

Une fois la grille  $\mathbf{g}$ , les coefficients constants par morceaux  $\rho^{\mathbf{g}}$ ,  $a^{\mathbf{g}}$ , et  $b^{\mathbf{g}}$ , ainsi que la fonction  $\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}$  construits, on a la proposition suivante, qui donne les valeurs explicites des probabilités de transitions  $\pi(i, i+1)$  et des quantités  $T(i, \pm)$  nécessaires pour simuler la marche.

**Proposition 3.5.1** *Soit  $X^{\mathbf{g}}$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(\rho^{\mathbf{g}}e^{-\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}}, a^{\mathbf{g}}e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}}, 0)$ . Soit  $x_j \in \mathbf{g}$ . Soient  $l = x_{j+1} - x_j$ ,  $l' = x_j - x_{j-1}$  et le coefficient  $c = \exp(2b^{\mathbf{g}}(x_{j-1})l' / [a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})\rho^{\mathbf{g}}(x_{j-1})])$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :*

i)

$$\mathbb{P}[X_{\tau_p^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_{j+1} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_j] = \frac{a^{\mathbf{g}}(x_j)l'}{a^{\mathbf{g}}(x_j)l' + a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})l/c}.$$

ii)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\tau_p^{\mathbf{g}} - \tau_{p-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_{j+1}\}} \mid X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_j] \\ &= \frac{1}{(a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})l + a^{\mathbf{g}}(x_j)l'c)^2} \left[ \frac{1}{3} \frac{a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})}{\rho^{\mathbf{g}}(x_j)} c l^3 l' + \frac{a^{\mathbf{g}}(x_j)}{\rho^{\mathbf{g}}(x_j)} c^2 l^2 (l')^2 + \frac{2}{3} \frac{a^{\mathbf{g}}(x_j)}{\rho^{\mathbf{g}}(x_{j-1})} c l (l')^3 \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\tau_p^{\mathbf{g}} - \tau_{p-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_{j-1}\}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_j] \\ &= \frac{1}{(a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})l + a^{\mathbf{g}}(x_j)l'c)^2} \left[ \frac{2}{3} \frac{a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})}{\rho^{\mathbf{g}}(x_j)} c l^3 l' + \frac{a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})}{\rho^{\mathbf{g}}(x_{j-1})} l^2 (l')^2 + \frac{1}{3} \frac{a^{\mathbf{g}}(x_j)}{\rho^{\mathbf{g}}(x_{j-1})} c l (l')^3 \right]. \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour prouver le Point i) il suffit de calculer

$$\frac{s(x_j) - s(x_{j-1})}{s(x_{j+1}) - s(x_{j-1})},$$

avec la fonction d'échelle  $s$  définie par (1.4.3) avec  $a$  remplacé par  $a^{\mathbf{g}} e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}}$ .

Pour prouver le Point ii) considérons le processus  $\bar{X}$  engendré par  $(\bar{L}, D(\bar{L})) := \mathfrak{L}(\bar{a}, \bar{\rho}, 0)$  avec

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} a^{\mathbf{g}}(x_{j-1}) e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}(x_{j-1})} & \text{si } x < 0 \\ a^{\mathbf{g}}(x_j) e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}(x_j)} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho^{\mathbf{g}}(x_{j-1}) e^{-\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}(x_{j-1})} & \text{si } x < 0 \\ \rho^{\mathbf{g}}(x_j) e^{-\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}(x_j)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Posons  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid \bar{X}_t \in \{-l', l\}\}$ . Par les définitions de  $X^{\mathbf{g}}$  et  $\bar{X}$  et la propriété de Markov forte il est clair que

$$\mathbb{E}^0[\tau \mathbf{1}_{\{\bar{X}_\tau = l\}}] = \mathbb{E}[(\tau_p^{\mathbf{g}} - \tau_{p-1}^{\mathbf{g}}) \mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_{j+1}\}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathbf{g}}}^{\mathbf{g}} = x_j].$$

Mais la Proposition 3.1.1 dit que  $\mathbb{E}^0[\tau \mathbf{1}_{\{\bar{X}_\tau = l\}}] = v_1(0)$  où  $v_1$  est une fonction dans  $D(\bar{L}) \cap \mathcal{C}$  qui est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{\mathbf{g}}(x_{j-1}) a^{\mathbf{g}}(x_{j-1})}{2} v_1''(x) = -v_0(x) \quad \text{pour } x \in [-l', 0) \\ \frac{\rho^{\mathbf{g}}(x_j) a^{\mathbf{g}}(x_j)}{2} v_1''(x) = -v_0(x) \quad \text{pour } x \in [0, l] \\ v_1(0-) = v_1(0+) \\ a^{\mathbf{g}}(x_{j-1}) e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}(x_{j-1})} v_1'(0-) = a^{\mathbf{g}}(x_j) e^{\widehat{\Psi}^{\mathbf{g}}(x_j)} v_1'(0+) \\ v_1(-l') = v_1(l) = 0, \end{array} \right.$$

où  $v_0$  est elle-même dans  $D(\bar{L}) \cap \mathcal{C}$  et est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{\mathfrak{g}}(x_{j-1})a^{\mathfrak{g}}(x_{j-1})}{2}v_0''(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [-l', 0) \\ \frac{\rho^{\mathfrak{g}}(x_j)a^{\mathfrak{g}}(x_j)}{2}v_0''(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, l] \\ v_0(0-) = v_0(0+) \\ a^{\mathfrak{g}}(x_{j-1})e^{\Psi^{\mathfrak{g}}(x_{j-1})}v_0'(0-) = a^{\mathfrak{g}}(x_j)e^{\Psi^{\mathfrak{g}}(x_j)}v_0'(0+) \\ v_0(-l') = 0 \\ v_0(l) = 1. \end{array} \right.$$

Notons que dans ces deux systèmes la troisième ligne traduit la continuité de la solution, tandis que la quatrième indique que cette solution appartient à  $D(\bar{L})$  et implique la continuité du flux (cf Remarque 3.1.2).

On calcule donc  $v_0$  et on obtient une fonction de la forme  $Ax + B$  sur  $[-l', 0)$  et  $Bx + C$  sur  $[0, l]$ . Ensuite on calcule  $v_1$ , et enfin  $v_1(0)$  qui nous donne

$$\mathbb{E}[(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}})\mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}^{\mathfrak{g}} = x_{j+1}\}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}^{\mathfrak{g}} = x_j].$$

On procède de la même manière pour calculer

$$\mathbb{E}[(\tau_p^{\mathfrak{g}} - \tau_{p-1}^{\mathfrak{g}})\mathbf{1}_{\{X_{\tau_p^{\mathfrak{g}}}^{\mathfrak{g}} = x_{j-1}\}} | X_{\tau_{p-1}^{\mathfrak{g}}}^{\mathfrak{g}} = x_j].$$

□





# Chapitre 4

## Construction d'une chaîne de Markov dans le cas bidimensionnel : Une piste

Comme indiqué en introduction on cherche dans ce chapitre à contruire une marche aléatoire dans le plan pour avoir une méthode de Monte-Carlo permettant d'approcher les solutions de problèmes du type

$$\mathcal{P}(G, \psi) \begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } G \\ u = \psi & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

avec  $G \subset \mathbb{R}^2$  et  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ , pour  $\rho \in \mathfrak{Ell}(\lambda, \Lambda)$ ,  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ , et  $b \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ .

Ce type de problème ne peut avoir de solution que si la forme bilinéaire  $\langle -Lu, \varphi \rangle_{\mathbb{H}^{-1}, \mathbb{H}_0^1}$  est continue et coercive. Or elle n'est pas forcément coercive si  $b \neq 0$ . On suppose donc que  $b = 0$ . Dans ces conditions la solution  $u$  de  $\mathcal{P}(G, \psi)$  est la même quel que soit  $\rho$ . On suppose donc que  $\rho = 1$ .

Comme on va construire une grille constituée de carrés on supposera que le domaine  $G$  est lui-même rectangulaire ou carré.

Dans la Section 4.1 on établit donc quelques résultats d'analyse relatifs aux problèmes du type  $\mathcal{P}(C, \psi)$  dans un domaine carré  $C \subset G$  et avec  $(L, D(L))$  de la forme  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$ . On établit notamment une représentation probabiliste de la solution de  $\mathcal{P}(C, \psi)$ . Cette représentation sert en outre à faire le lien entre les solutions de problèmes du type  $\mathcal{P}(C, \psi)$  et les probabilités de transition de la marche aléatoire qu'on va construire et qui sera utilisée pour les simulations du Chapitre 5. Dans la Section 4.2 on présente la construction de cette marche  $S$ , de loi  $\widehat{\mathbb{P}}_{h, x_0}^{\varepsilon, \delta}$ . Dans la Section 4.3 on évalue l'erreur entre  $\mathbb{E}^x \psi(X_{\tau_1})$  et  $\widehat{\mathbb{E}}_{h, x_0}^{\varepsilon, \delta} \psi(S_1)$ , où  $x$  est dans un carré  $C$ , de centre  $x_0$  et de taille  $h$ , de la grille, et  $\tau_1 = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial C\}$ . On discute le résultat obtenu, qui suggère de construire la marche selon un algorithme plus fin.

## 4.1 Problèmes elliptiques en domaine carré avec condition de Dirichlet non-homogène et probabilités de transition

On s'intéresse d'abord aux problèmes elliptiques avec une condition au bord de Dirichlet non homogène de classe  $\mathcal{C}^1$ . Il s'agit de prouver la proposition suivante.

**Proposition 4.1.1** *Soient  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  et  $X$  le processus engendré par l'opérateur  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(1, a, 0)$ . Soit  $C$  un domaine carré ouvert inclus dans  $G$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}^1(\partial C)$ . Soit le temps d'arrêt  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial C\}$ . Pour tout  $x \in C$  on a  $\mathbb{E}^x[\psi(X_\tau)] = u(x)$ , où  $u$  est une version régulière de la solution du problème elliptique*

$$\mathcal{P}(C, \psi) \begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } C \\ u = \psi & \text{sur } \partial C. \end{cases}$$

On va montrer dans la proposition qui suit que  $\mathcal{P}(C, \psi)$  a une solution faible unique  $\bar{u}$  dans  $H^1(C)$ . Ensuite les résultats de De Giorgi et Nash (cf Théorème 8.22 dans [GT83]) assurent l'existence d'une version de  $u$  qui est Hölder-continue sur un sous-domaine du carré  $C$ , excluant les coins de celui-ci. Cette version de  $u$  est la version «régulière» mentionnée dans la Proposition 4.1.1.

**Proposition 4.1.2** *Soient  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  et  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(1, a, 0)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, 4\}$  le problème  $\mathcal{P}(C, \psi)$  a une solution faible unique dans  $H^1(C)$ .*

**Preuve de la Proposition 4.1.2. Étape 1.** Comme  $\psi \in \mathcal{C}^1(\partial C)$  on dispose d'un théorème de trace (cf [LM68] par exemple) qui assure l'existence de  $\tilde{u} \in H^1(C)$  telle que  $\tilde{u} = \psi$  sur  $\partial C$ .

**Étape 2.** Soit sur  $H_0^1(C)$  la forme bilinéaire  $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$  définie par  $D(\mathcal{E}) = H_0^1(C)$  et  $\mathcal{E}(u, \varphi) = \langle -Lu, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$  pour tout  $(u, \varphi) \in H_0^1(C)$ . Comme  $\mathcal{E}(u, \varphi) = \sum_{i,j=1}^2 \int_G \frac{a_{ij}}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ , cette forme est continue et coercive, grâce aux propriétés de  $a$  et à l'inégalité de Poincaré.

On considère le relèvement  $\tilde{u}$  de la condition  $\psi$  construit dans l'Étape 1. Comme  $\tilde{u} \in H^1(C)$  on a  $L\tilde{u} \in H^{-1}(C)$ . Par le théorème de Lax-Milgram il existe un unique élément  $w$  de  $H_0^1(C)$  tel que pour toute fonction  $\varphi \in H_0^1(C)$  on ait  $\mathcal{E}(w, \varphi) = \langle L\tilde{u}, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ . Cela signifie que  $w$  est solution faible du problème  $Lw = -L\tilde{u}$  soumis à la condition de Dirichlet uniforme.

Il suffit alors de poser  $u = w + \tilde{u}$ . C'est un élément de  $H^1(C)$  qui vérifie bien  $Lu = 0$  et  $u = \psi$  sur  $\partial C$ . □

Pour prouver la Proposition 4.1.1 On procède en régularisant les coefficients, comme dans la Section 3.1. On a d'abord besoin d'un lemme.

**Lemme 4.1.1** Soient  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  et  $X$  le processus engendré par  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(1, a, 0)$ . Soit  $C$  un domaine carré ouvert inclus dans  $G$ . Soit  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial C\}$ . Pour tout  $x \in C$  et toute fonction  $\psi \in \mathcal{C}^1(\partial C)$ , on a  $\mathbb{E}^x[\psi(X_\tau)] = u(x)$ , où  $u$  est la solution du problème elliptique  $\mathcal{P}(C, \psi)$ , tel qu'écrit dans la Proposition 4.1.1.

**Preuve.** Compte tenu de la régularité du coefficient  $a$  et de la condition au bord, la solution  $u$  de  $\mathcal{P}(C, \psi)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur le domaine ouvert  $C$ , et Hölder-continue sur  $\bar{C}$  (voir Théorème 6.13 et Problème 6.3 dans [GT83]). En effet même si  $C$  est un domaine carré il satisfait une propriété de cône extérieur, ce qui assure au passage que tous les points de  $\partial C$  sont réguliers (voir [GT83] et [KS91] p 250). Une application de la formule de Feynman-Kac bidimensionnelle indique donc que  $u(x) = \mathbb{E}[\psi(X_\tau)]$  (voir par exemple dans [KS91] les Propositions 4.2.7 et 5.7.2). □

**Preuve de la Proposition 4.1.1.** *Étape 1.* On construit une suite  $(a^k)$  de  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  telle que pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  on ait  $a_{ij}^k \rightarrow a_{ij}$  p.p. quand  $k \rightarrow \infty$ . Par convergence dominée, pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ , on a en particulier que  $\|a_{ij}^k - a_{ij}\|_2 \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Pour tout  $k$  on note  $(L^k, D(L^k)) = \mathfrak{L}(1, a^k, 0)$  et  $u^k$  la solution de  $\mathcal{P}(C, \psi)$  avec l'opérateur  $L$  remplacé par  $L^k$ . On définit en outre les temps d'arrêt  $\tau^k = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^k \in \partial C\}$ .

D'après le Lemme 4.1.1 on a  $\mathbb{E}^x[\psi(X_{\tau^k}^k)] = u^k(x)$  pour tout  $k$  et tout  $x \in C$ .

Compte tenu des hypothèses de convergence faites sur les coefficients, on a la  $G$ -convergence de  $(L^k)$  vers  $L$  (cf Section 1.3).

*Étape 2.* Fixons  $x \in C$ .

On a vu dans la preuve de la Proposition 4.1.2, que chaque  $u^k$  est égal à  $w^k + \tilde{u}$ , où  $w^k \in H_0^1(C)$  est solution faible de  $L^k w^k = -L^k \tilde{u}$  avec condition de Dirichlet uniforme, avec  $\tilde{u}$  le relèvement de la condition  $\psi$ .

Montrons que  $L^k \tilde{u}$  converge vers  $L\tilde{u}$  pour la norme de  $H^{-1}(C)$ . On a pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(C)$ ,

$$\langle L\tilde{u} - L^k \tilde{u}, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = - \sum_{i,j=1}^2 \int_G \frac{a_{ij}^k - a_{ij}}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  on a  $\frac{a_{ij}^k - a_{ij}}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \in L^2(G)$ , et par convergence dominée il est clair que  $\left\| \frac{a_{ij}^k - a_{ij}}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \right\|_2 \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . En utilisant par exemple la Proposition IX.20 dans [Bre83], on a donc  $\|L\tilde{u} - L^k \tilde{u}\|_{H^{-1}} \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Donc le Théorème 1.3.1 indique que  $w^k$  converge faiblement dans  $H_0^1(C)$  vers  $w$  solution de  $Lw = -L\tilde{u}$ . Donc  $u^k$  converge faiblement dans  $H^1(C)$  vers  $u$ .

Les  $u^k$ 's sont localement Hölder continues dans  $C$  (elles sont même  $\mathcal{C}^2$  sur ce domaine ouvert, cf preuve de la Proposition 4.1.1). Plus précisément en prenant en compte dans

[GT83] le Théorème 8.1, qui énonce un principe du maximum, et le Théorème 8.22, on a pour toute boule  $B_{h_0}(x) \subset C$ , des constantes  $\tilde{C}$  et  $\alpha$  telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall h \leq h_0, \quad \text{osc}(u^k, B_h(x)) \leq \tilde{C}h^\alpha.$$

Par Arzela-Ascoli il existe alors une sous-suite  $(u^{k'})$  qui converge uniformément sur  $B_{h_0}(x)$ . Mais sa limite est nécessairement  $u$  à cause de ce qui précède. Finalement on a que  $u^k(x) \rightarrow u(x)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

*Étape 3.* Comme on l'a déjà remarqué dans la preuve du lemme 4.1.1, bien que  $\partial C$  soit  $C^1$  par morceaux, tous ses points sont réguliers. Par le Théorème 1.3.3 et la Proposition 1.3.1, on a donc la convergence en loi de  $\psi(X_{\tau^k}^k)$  vers  $\psi(X_\tau)$ .

Il est clair que pour tout  $k$ ,  $\mathbb{E}^x[(\psi(X_{\tau^k}^k))^2] \leq \|\psi\|_\infty^2$ . Cela assure l'uniforme intégrabilité des  $\psi(X_{\tau^k}^k)$ 's. Donc pour tout  $x$ ,

$$\mathbb{E}^x[\psi(X_{\tau^k}^k)] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}^x[\psi(X_\tau)].$$

Compte tenu des Étapes 1, 2 et 3 la preuve est terminée. □

Soit  $C$  un domaine carré ouvert inclus dans  $G$ , de longueur de côté  $h$ . Supposons qu'on dispose d'un repère cartésien dont l'origine est le centre du carré  $C$  dont les côtés sont parallèles aux axes du repère.

Définissons l'ensemble  $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ . Les éléments  $\xi$  de  $\mathcal{A}$  sont destinés à indiquer les arêtes de  $C$ ,  $(1, 0)$  indice l'arête droite,  $(0, 1)$  l'arête du haut et ainsi de suite dans le sens direct. Soient donc pour  $\xi \in \mathcal{A}$ , les arêtes  $\Gamma^\xi$  du carré  $C$  ( $\partial C = \cup_{\xi \in \mathcal{A}} \Gamma^\xi$ ). Soit le temps d'arrêt  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial C\}$ .

On cherche maintenant à relier les probabilités  $\mathbb{P}^x[X_\tau \in \Gamma^\xi]$  aux solutions prises en  $x \in C$  de problèmes d'EDP elliptiques ad hoc posés dans  $C$ . Si on utilise formellement la formule de Feynman-Kac on a envie de dire que l'on a  $\mathbb{P}^x[X_\tau \in \Gamma^\xi] = u_\xi(x)$  où  $u_\xi$  est la solution du problème

$$\mathcal{P}(C, \xi) \begin{cases} Lu_\xi = 0 & \text{dans } C \\ u_\xi = 1 & \text{sur } \Gamma^\xi \\ u_{\xi'} = 0 & \text{sur } \Gamma^{\xi'}, \xi' \neq \xi. \end{cases}$$

Malheureusement ce problème est mal posé. Plus précisément le saut de la condition de Dirichlet non-homogène dans  $\mathcal{P}(C, \xi)$  rend impossible son relèvement dans  $H^1(C)$ . On ne peut donc avoir de solution dans  $H^1(C)$  et en prendre une version régulière (comme dans la preuve de la Proposition 4.1.1).

On est donc conduit à régulariser la condition au bord dans  $\mathcal{P}(C, \xi)$  pour pouvoir utiliser la Proposition 4.1.1. Soit en effet l'arête  $\Gamma^\xi$  correspondant par exemple au côté  $[(h/2, -h/2); (h/2, h/2)]$ . Pour tout  $\varepsilon$  assez petit, c'est à dire vérifiant (de façon arbitraire)

$$0 < \varepsilon < h/8, \quad (4.1.1)$$

on peut construire une fonction  $\psi_\varepsilon^\xi : \partial C \rightarrow \mathbb{R}$ , qui soit de classe  $\mathcal{C}^1$ , et telle que  $\psi_\varepsilon^\xi = 0$  sur les  $\Gamma^{\xi'}$  pour  $\xi' \neq \xi$ , et  $\psi_\varepsilon^\xi = 1$  sur la portion  $[(h/2, \varepsilon - h/2); (h/2, h/2 - \varepsilon)]$  de  $\Gamma^\xi$ . On peut procéder de même pour chaque arête  $\Gamma^\xi$ .

Il est clair que  $\psi_\varepsilon^\xi(X_\tau)$  tend presque sûrement en croissant vers  $\mathbf{1}_{\{X_\tau \in \Gamma^\xi\}}$ . Par le théorème de Beppo Levi on a donc

$$\mathbb{E}^x[\psi_\varepsilon^\xi(X_\tau)] \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}^x[X_\tau \in \Gamma^\xi].$$

Et par la Proposition 4.1.1 on a  $\mathbb{E}^x[\psi_\varepsilon^\xi(X_\tau)] = u_\xi^\varepsilon(x)$  où  $u_\xi^\varepsilon$  est solution de  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$ .

## 4.2 L'algorithme utilisé

Soit  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(1, a, 0)$  donné.

On suppose que le domaine  $G$ , dans le plan muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , est un rectangle  $ABCD$  de longueur  $L$  et de largeur  $l$ . Supposons pour présenter les choses que les sommets du rectangle sont désignés dans le sens direct, que  $O = A$ ,  $O\vec{x}_1 = (AB)$  et  $O\vec{x}_2 = (AD)$ .

**ÉTAPE 1 : Construction de la grille.** On se donne un pas de grille  $h > 0$ . On suppose que  $L/h$  et  $l/h$  sont des entiers. Posons  $M = 2L/h$  et  $N = 2l/h$ . Pour chaque  $(m, n) \in I = \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$  on désigne par  $C_{m,n}$  le carré de centre  $(mh/2, nh/2)$  et de côté  $h$ . On note  $\mathcal{G}_h^2 = (C_{m,n})_{(m,n) \in I}$  la grille ainsi construite. Il y a relation univoque entre un carré de la grille  $\mathcal{G}_h^2$  et son centre. On peut considérer que la marche aléatoire construite ci-dessous évolue sur les carrés ou sur leurs centres. Notons que les carrés de la grille se chevauchent, ce qui est nécessaire pour construire la marche.

**ÉTAPE 2 : Calculs des probabilités de transition.** Pour chaque carré  $C_{m,n}$  de  $\mathcal{G}_h^2$ , et chaque  $i = 1, \dots, 4$ , on calcule une approximation éléments finis  $u_\xi^{\varepsilon, \delta}$  de la solution de  $\mathcal{P}(C_{m,n}, \psi_\varepsilon^\xi)$ , pour  $\varepsilon$  petit. On évalue ensuite chaque  $u_\xi^{\varepsilon, \delta}$  au centre du carré et on obtient ainsi quatre quantités  $p_{m,n}^\xi(\varepsilon, \delta)$  (pour tout  $\xi$ ,  $p_{m,n}^\xi(\varepsilon, \delta) = u_\xi^{\varepsilon, \delta}((mh/2, nh/2))$ ).

**ÉTAPE 3 : Simulation de la marche aléatoire  $S$ .** On simule une marche aléatoire  $S$  sur les centres des carrés de  $\mathcal{G}_h^2$  avec les probabilités de transition  $p_{m,n}^\xi(\varepsilon, \delta)$ . On note  $\widehat{\mathbb{P}}_{h, x_0}^{\varepsilon, \delta}$  la loi de la marche aléatoire  $S$  ainsi construite, partant d'un point  $x_0$  de la grille.

**ÉTAPE 4 : Calcul de  $\psi(S_{n^*})$ .** Quand  $S$  atteint  $\partial G$  à l'étape  $n^*$  on arrête la simulation et on retourne  $\psi(S_{n^*})$ .

Cet algorithme a été utilisé pour les simulations de la Section 5.3 dont les résultats sont encourageants. On conjecture que la quantité  $\psi(S_{n^*})$  approche en loi  $\psi(X_\tau)$  où  $X$  est engendré par  $(L, D(L))$  et  $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial G\}$ .

### 4.3 Estimation de l'erreur faible sur un coup

On a avant tout besoin de minorer les solutions des problèmes  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$  définis dans la Section 4.1.

**Lemme 4.3.1** *Il existe une constante strictement positive  $K$  dépendant de  $\lambda$  et  $\Lambda$ , telle que pour tout domaine carré ouvert  $C$  de centre  $x_0$  inclus dans  $G$ , pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ , pour tout  $\varepsilon$  vérifiant (4.1.1), et tout  $\xi \in \mathcal{A}$ , la solution  $u_\xi^\varepsilon$  de  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$ , avec  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(1, a, 0)$ , vérifie*

$$u_\xi^\varepsilon(x_0) \geq K > 0. \quad (4.3.1)$$

**Preuve.** *Étape 1.* On fixe pour le moment  $C$ ,  $\varepsilon = h/8$ , et  $\xi$ .

On raisonne par l'absurde. Supposons que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  il existe un  $a^k \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ , tel que  $u_\xi^{\varepsilon, k}$  solution de  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$  avec  $(L^k, D(L^k)) = \mathfrak{L}(1, a^k, 0)$ , vérifie  $0 \leq u_\xi^{\varepsilon, k}(x_0) < 1/k$ .

On construit ainsi une suite  $(a^k)$  de  $\mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ . Par  $G$ -compacité (cf Théorème 1.3.5) il existe une sous-suite  $(a^{k'})$  et un élément  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ , tels que la suite des opérateurs  $(L^{k'}, D(L^{k'}))$   $G$ -converge vers  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(1, a, 0)$ . Par des techniques analogues à celles de l'Étape 2 de la preuve de la Proposition 4.1.1 on peut alors montrer que la suite des solutions  $u_\xi^{\varepsilon, k'}$  de  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$  avec  $L^{k'}$  converge uniformément, sur tout  $D \subset\subset C$  contenant 0, vers la solution  $u_\xi^\varepsilon$  de  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$  avec  $L$  (En effet dans la preuve de la Proposition 4.1.1, la régularité des coefficients ne jouait aucun rôle dans l'Étape 2). On a donc  $u_\xi^\varepsilon(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_\xi^{\varepsilon, k}(x_0) = 0$ .

Donc on a  $\inf_D u_\xi^\varepsilon = 0$  pour tout  $D \subset\subset C$ . Pour tout  $x \in C$  on peut construire  $D \subset\subset C$  qui contienne  $x$ , et par l'inégalité de Harnack (cf Corollaire 8.21 dans [GT83]) on a  $\sup_D u_\xi^\varepsilon = 0$ . Ce qui veut dire que  $u_\xi^\varepsilon$  est nulle sur  $C$  tout entier.

Mais c'est absurde compte tenu de la condition au bord dans  $\mathcal{P}(C, \psi_\varepsilon^\xi)$  et de la continuité de  $u_\xi^\varepsilon$  jusqu'au bord compris (voir Théorème 8.30 dans [GT83]).

Il doit donc exister  $K$  vérifiant (4.3.1) pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ .

*Étape 2.* On montre maintenant que la constante  $K$  ne dépend en fait pas de  $C$ . Munissons le plan d'un repère cartésien dont l'origine est le centre du carré  $C$  fixé dans l'Étape 1.

Considérons d'abord un carré  $rC$  obtenu en faisant subir à  $C$  une homothétie de centre 0 et de rapport  $r$ . On va chercher à minorer pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda) \cap \mathcal{C}^\infty(G)$  la solution  $u(y)$  en 0 de

$$\begin{cases} \nabla_y(a(y)\nabla_y u(y)) = 0 & \text{dans } rC \\ u(y) = \psi_{rC, \varepsilon}^\xi(y) & \text{sur } \partial(rC), \end{cases}$$

où on a noté  $\psi_{rC,\varepsilon}^\xi$  pour signifier le lien de cette condition au bord avec le carré  $rC$ .

Considérons la solution  $v(x)$  du problème

$$\begin{cases} \nabla_x(a(rx)\nabla_x v(y)) = 0 & \text{dans } C \\ v(x) = \psi_{C,\varepsilon}^\xi(x) & \text{sur } \partial C. \end{cases}$$

Considérons alors  $v(y/r)$ . Il est clair que si  $y \in \partial(rC)$  alors  $y/r \in \partial C$  et donc  $v(y/r) = \psi_{C,\varepsilon}^\xi(y/r) = \psi_{rC,\varepsilon}^\xi(y)$ . Par ailleurs si  $y \in rC$  alors  $y/r \in C$  et  $v$  est dérivable en  $y/r$ . Donc

$$\nabla_y(a(y)\nabla_y v(\frac{y}{r})) = \frac{1}{r}\nabla_y(a(r\frac{y}{r})\nabla_x v(\frac{y}{r})) = \frac{1}{r^2}\nabla_x(a(r\frac{y}{r})\nabla_x v(\frac{y}{r})) = 0$$

On a donc  $u(y) = v(y/r)$  et donc  $u(0) = v(0)$ . Or  $a(r\cdot) \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda) \cap C^\infty(G)$ , donc, d'après l'Étape 1,  $v(0) \geq K$ . Donc  $u(0) \geq K$ , avec la même constante  $K$ , pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda) \cap C^\infty(G)$ , et par régularisation pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ .

Considérons maintenant un carré  $C'$  de centre  $x' \neq 0$  mais de même taille que  $C$ . On peut montrer que pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  la solution  $u$  de  $\mathcal{P}(C', \psi_{C'}^\xi)$  vaut  $v(\cdot - x')$  où  $v$  est solution de

$$\begin{cases} \nabla_x(a(x+x')\nabla_x v(x)) = 0 & \text{dans } C \\ v(x) = \psi_{C,\varepsilon}^\xi(x) & \text{sur } \partial C. \end{cases}$$

Or  $a(\cdot+x') \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ , donc, d'après l'Étape 1,  $v(0) \geq K$ . Donc  $u(x') \geq K$  pour tout  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$ .

On a donc montré que quelle que soit la taille et la position d'un carré dans  $G$  la constante  $K$  en jeu dans (4.3.1) est la même. On pourrait montrer que cette constante ne dépend pas de  $\xi$  (l'arête importe peu). Et pour tout  $0 < \varepsilon' < h/8$  on a  $\psi_{\varepsilon'}^\xi > \psi_{h/8}^\xi$ , et un principe de comparaison permet d'affirmer que  $u_{\varepsilon'}^{\xi'}(0) > u_{\varepsilon'}^{h/8}(0) \geq K$  (dans [GT83], on peut se servir du principe faible du maximum énoncé par le Théorème 8.1 pour montrer un résultat analogue à celui du Théorème 3.3).

En fait  $K$  ne dépend que de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

□

Dans le contexte de la Section 4.2 considérons les temps d'atteinte successifs ( $\tau_p$ ) des arêtes de la grille  $\mathcal{G}_h^2$  par le processus à approcher  $X$ . Considérons la chaîne  $\bar{X}_p$  obtenue en projetant les  $X_{\tau_p}$  sur les centres des arêtes auxquelles ils appartiennent. Plus précisément supposons que  $\bar{X}$  parte de  $x \in C_{m,n}$  et que  $X_{\tau_1} \in \Gamma_{m,n}^\xi$  où les  $\Gamma_{m,n}^\xi$ 's sont les arêtes de  $C_{m,n}$ . Dans ce cas  $\bar{X}_0$  a pour valeur le centre du carré  $C_{m,n}$  et  $\bar{X}_1$  celui du carré  $C_{(m,n)+\xi}$ . Par la suite, à toute étape  $p$ ,  $\bar{X}_p$  est au centre d'un carré  $C_{m,n}$  auquel appartient  $X_{\tau_p}$ . Si  $X_{\tau_{p+1}} \in \Gamma_{m,n}^\xi$  alors  $\bar{X}_{p+1}$  prend pour valeur le centre du carré  $C_{(m,n)+\xi}$ .

Le processus  $\bar{X}$  définit ainsi une chaîne  $S$  sur  $\mathcal{G}_h^2$  dont la loi  $\mathbb{P}$  est donnée par

$$\mathbb{P}[S_{p+1} = C_{(m,n)+\xi} | S_p = C_{m,n}] = \mathbb{P}^x[X_{\tau_{p+1}} \in \Gamma_{m,n}^\xi | \bar{X}_p = C_{m,n}, X_{\tau_p}]$$

et  $S_0 = C_{m,n}$  où  $C_{m,n}$  est le carré dont le centre est le plus proche de  $X_0 = x$  (Notons qu'on a confondu les carrés et leurs centres dans ces écritures). On notera parfois  $\mathbb{P}_{x_0}^x$  la loi  $\mathbb{P}$  de  $S$  partant de ce carré de centre  $x_0$  dépendant de  $x$ . Notons que les quantités  $\mathbb{P}[S_{p+1} = C_{(m,n)+\xi} | S_p = C_{m,n}]$  dépendent des positions sur les arêtes de  $X_{\tau_p}$ , donc de la trajectoire de  $X$ .

Il est facile de voir que concernant l'erreur due à la projection entre  $\mathbb{E}^x[\psi(X_\tau)]$  et  $\mathbb{E}_{x_0}^x[\psi(S_{n^*})]$  on a

$$\mathbb{E}_{x_0}^x[\psi(S_{n^*})] = \mathbb{E}^x[\psi(\bar{X}_{n^*})] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^x[\psi(X_\tau)] = \mathbb{E}^x[\psi(X_{\tau_{n^*}})],$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathbb{E}^x \psi(X_{\tau_p}) - \mathbb{E}^x \psi(\bar{X}_p)| \leq \|\psi'\|_\infty h. \quad (4.3.2)$$

Tout le problème est donc d'évaluer l'erreur entre  $S$  simulée sous la loi  $\mathbb{P}$  et la loi  $\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon,\delta}$  décrite dans la Section 4.2. Si on avait une estimation d'ordre  $h^\gamma$ , pour  $\gamma > 0$ , de  $|\mathbb{E}[\psi(S_{n^*})] - \widehat{\mathbb{E}}_h^{\varepsilon,\delta}[\psi(S_{n^*})]|$ , on obtiendrait la convergence du schéma compte tenu de (4.3.2).

Définissons aussi bien sous  $\mathbb{P}$  que sous  $\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon,\delta}$  la variable aléatoire  $\Xi$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , définie à toute étape  $p$ , sachant que  $S_p = C_{m,n}$ , par  $S_{p+1} = C_{(m,n)+\Xi}$ . Considérons la v.a.  $u_{\Xi}^{\varepsilon,\delta}(x_0) / \mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in \Gamma^\Xi]$  sous la loi  $\mathbb{P}_{x_0}^x$ , où chaque  $u_{\xi}^{\varepsilon,\delta}$  est l'approximation de la solution de  $\mathcal{P}(C_0, \psi_\xi^\varepsilon)$ , avec  $C_0$  de centre  $x_0$ , et qui contient  $x$ . C'est une densité qui permet d'écrire

$$\widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon,\delta} \psi(S_1) = \mathbb{E}_{x_0}^x \left[ \psi(S_1) \frac{u_{\Xi}^{\varepsilon,\delta}(x_0)}{\mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in \Gamma^\Xi]} \right].$$

En utilisant la propriété de Markov forte, une récurrence et un conditionnement par rapport aux événements  $\{n^* = k\}$ , on peut montrer que

$$\widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon,\delta} [\psi(S_{n^*})] = \mathbb{E}_{x_0}^x [\psi(S_{n^*}) Z_{n^*-1} \times \dots \times Z_0], \quad (4.3.3)$$

où

$$Z_0 = \frac{u_{\Xi}^{\varepsilon,\delta}(x_0)}{\mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in \Gamma^\Xi]},$$

et, pour tout  $k < n^*$ ,

$$Z_p = \frac{u_{\Xi}^{\varepsilon,\delta}(S_p)}{\mathbb{P}[X_{\tau_{p+1}} \in \Gamma_{\bar{X}_p}^\Xi | \bar{X}_p = S_p, X_{\tau_p}]},$$

où on a noté  $\Gamma_{\bar{X}_p}^\xi$  les arêtes du carré au centre duquel est  $\bar{X}_p$  (on a à nouveau confondu les carrés et leur centre). En outre chaque  $u_{\xi}^{\varepsilon,\delta}$  est calculée dans le carré ad hoc.



Il apparaît donc des poids qui se multiplient. Or même si on contrôlait bien ces poids le nombre d'étapes  $n^*$  nécessaire pour atteindre  $\partial G$  peut être élevé et l'erreur totale peut donc avoir tendance à exploser. On peut donc penser d'ores et déjà qu'on a intérêt quoi qu'il en soit à n'utiliser notre algorithme que localement, au niveau des discontinuités de  $a$ , et à le coupler à un schéma d'Euler, par exemple, dans les zones de  $G$  où  $a$  est régulier.

On évalue l'erreur due au poids sur une étape. Pour des raisons de commodité on démontre la proposition suivante avec la densité inverse à celle utilisée ci-dessus. A une étape quelconque  $X_{\tau_p}$  est sur une des deux arêtes qui sont disposées «en croix» à l'intérieur du carré  $S_p$ . Et à l'instant initial  $x \in S_0$  et est plus près du centre de  $S_0$  que de celui de tout autre carré de la grille. C'est pourquoi on fait ci-dessous l'hypothèse que  $x \in D \subset C$ , où  $D$  ne contient pas les coins de  $C$ .

**Proposition 4.3.1** *Soit  $a \in \mathfrak{Mell}(\lambda, \Lambda)$  et soit  $X$  le processus engendré par  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$ . Soit  $\mathcal{G}_h^2 = (C_{m,n})_{(m,n) \in I}$  une grille sur  $G$  de pas  $h$  telle que décrite dans le contexte de la Section 4.2. Soit  $S$  une marche aléatoire sur  $\mathcal{G}_h^2$  ayant la loi  $\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon, \delta}$  décrite dans cette même section. Soit  $C$  de centre  $x_0$  un élément de la grille  $\mathcal{G}_h^2$ . Pour chaque arête  $\Gamma^\xi$  de  $C$  notons  $s_1^\xi$  et  $s_2^\xi$  ses deux extrémités, numérotées dans le sens direct. Soit  $K$  la constante vérifiant (4.3.1) dont l'existence est assurée par le Lemme 4.3.1.*

*On note  $x^\xi$  les milieux respectifs des arêtes  $\Gamma^\xi$  de  $C$ . On définit la loi  $\widehat{\mathbb{P}}_{h,x_0}^\varepsilon$  de  $S_1$  par  $\widehat{\mathbb{P}}_{h,x_0}^\varepsilon[S_1 = x^\xi] = u_\xi^\varepsilon(x_0)$  où chaque  $u_\xi^\varepsilon$  est solution de  $\mathcal{P}(C, \psi_\xi^\varepsilon)$ .*

*Soit  $D \subset C$  qui ne contienne pas les coins de  $C$ . On a pour tout  $x \in D$  et toute fonction  $\psi \in \mathcal{C}^1(\partial C)$*

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{x_0}^x \psi(S_1) - \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon, \delta} \psi(S_1)| &= \left| \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon, \delta} \left[ \psi(S_1) \left( \frac{\mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in \Gamma^\Xi]}{u_{\Xi}^{\varepsilon, \delta}(x_0)} - 1 \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{\|\psi\|_\infty}{K} \sup_\xi \left( \mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in B_\varepsilon(s_1^\xi)] + \mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in B_\varepsilon(s_2^\xi)] \right) \\ &\quad + \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \left[ |\psi(S_1)| \frac{|u_\xi^\varepsilon(x) - u_\xi^\varepsilon(x_0)|}{u_\xi^\varepsilon(x_0)} \right] + \frac{\|\psi\|_\infty}{K} E(\delta), \end{aligned}$$

où  $E(\delta)$  majore l'erreur due à l'approximation par éléments finis de  $u_\xi^\varepsilon$  à l'Étape 2 de l'algorithme.

**Preuve.** On écrit

$$|\mathbb{E}_{x_0}^x \psi(S_1) - \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon, \delta} \psi(S_1)| \leq |\mathbb{E}_{x_0}^x \psi(S_1) - \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \psi(S_1)| + |\widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \psi(S_1) - \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon, \delta} \psi(S_1)|$$

*Étape 1.* On peut introduire une densité et écrire

$$\mathbb{E}_{x_0}^x \psi(S_1) = \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \left[ \psi(S_1) \frac{\mathbb{P}^x[X_{\tau_1} \in \Gamma^\Xi]}{u_{\Xi}^\varepsilon(x_0)} \right].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}_{x_0}^x \psi(S_1) - \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \psi(S_1)| &\leq \|\psi\|_\infty \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \left| \frac{\mathbb{P}^x[X_\tau \in \Gamma^\Xi]}{u_\Xi^\varepsilon(x_0)} - 1 \right| \\
&\leq \|\psi\|_\infty \sup_\xi \left| \frac{\mathbb{P}^x[X_\tau \in \Gamma^\xi] - u_\xi^\varepsilon(x)}{u_\xi^\varepsilon(x_0)} \right| \\
&\quad + \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \left[ |\psi(S_1)| \frac{|u_\xi^\varepsilon(x) - u_\xi^\varepsilon(x_0)|}{u_\xi^\varepsilon(x_0)} \right]
\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 4.3.1 on a  $1/u_\xi^\varepsilon(x_0) < 1/K$  pour tout  $\xi$ . On a pour tout  $\xi$ , si l'on note  $\psi^\xi : \partial C \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui vaut 1 sur  $\Gamma^\xi$  et 0 ailleurs,

$$\begin{aligned}
\left| \mathbb{P}^x[X_\tau \in \Gamma^\xi] - u_\xi^\varepsilon(x) \right| &\leq \mathbb{E}^x(\psi^\xi - \psi_\varepsilon^\xi)(X_\tau) \\
&\leq \mathbb{P}^x[X_\tau \in B_\varepsilon(s_1^\xi)] + \mathbb{P}^x[X_\tau \in B_\varepsilon(s_2^\xi)].
\end{aligned}$$

*Étape 2.* De la même manière que dans l'Étape 1, on montre que

$$\begin{aligned}
\left| \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \psi(S_1) - \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^{\varepsilon,\delta} \psi(S_1) \right| &\leq \|\psi\|_\infty \widehat{\mathbb{E}}_{h,x_0}^\varepsilon \left| \frac{u_\xi^\varepsilon(x_0) - u_\xi^{\varepsilon,\delta}(x_0)}{u_\xi^\varepsilon(x_0)} \right| \\
&\leq \frac{\|\psi\|_\infty}{K} \sup_\xi |u_\xi^\varepsilon(x_0) - u_\xi^{\varepsilon,\delta}(x_0)|
\end{aligned}$$

On suppose qu'on peut majorer  $\sup_\xi |u_\xi^\varepsilon(x_0) - u_\xi^{\varepsilon,\delta}(x_0)|$  par une quantité  $E(\delta)$  tendant vers 0 quand  $\delta$  tend vers 0, c'est à dire quand on augmente la précision de la méthode éléments finis à l'Étape 2 de la Section 4.2.

Les erreurs entre la solution faible d'un problème elliptique et son approximation par éléments finis sont le plus souvent données pour la norme  $H^1$ . Mais on considère des versions continues des solutions donc on considèrera que  $E(\delta)$  existe. Notons que  $E(\delta)$  peut aussi refléter des erreurs d'intégration numérique due à la méthode utilisée dans l'Étape 2 de l'algorithme. □

Les quantités  $\mathbb{P}^x[X_\tau \in B_\varepsilon(s_1^\xi)] + \mathbb{P}^x[X_\tau \in B_\varepsilon(s_2^\xi)]$  tendent vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. En effet ces probabilités tendent vers les probabilités d'atteinte des coins par  $X$ . Or en dimension deux les points ne sont jamais atteints par le brownien et sont donc de capacité nulle (cf [PS78]). Mais la théorie des formes de Dirichlet montre que les ensembles de capacité nulle pour  $X$  sont les mêmes que pour le brownien. Donc les points sont de capacité nulle pour  $X$ , qui ne les atteint jamais.

Supposons qu'on s'intéresse à des trajectoires de  $X$  qui partent d'un point de la grille. On a alors  $\sup_\xi |u_\xi^\varepsilon(x) - u_\xi^\varepsilon(x_0)| = 0$  et le poids  $Z_0$  est très proche de 1. Mais à l'étape

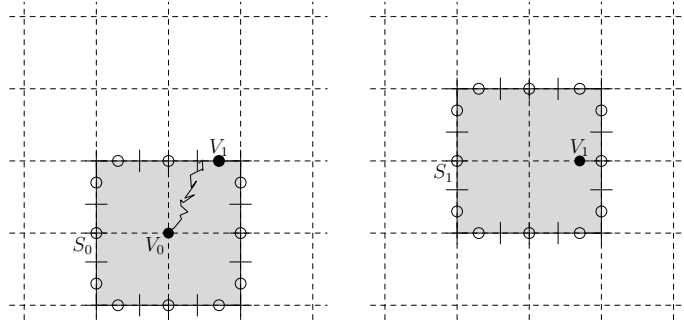


FIG. 4.1 – Grille à deux échelles. Étapes 0 et 1 du schéma envisageable. Les  $S_i$  désignent les carrés en gris.

$p = 1$  on a  $X_{\tau_1}$  positionné sur l'une des arêtes disposées en croix à l'intérieur du carré au centre duquel est  $\bar{X}_1$ . Le poids  $Z_1$  risque donc d'être très éloigné de 1 car  $u_\xi^\varepsilon(X_{\tau_1})$  varie entre 0 et 1 (De plus remarquons que  $\sup_\xi |u_\xi^\varepsilon(x) - u_\xi^\varepsilon(x_0)|$  qui ne tend pas vers 0 avec  $h$ . En effet on a  $|x - x_0| < h$ , et  $u_\xi^\varepsilon$  Hölder continue sur  $D$ , mais de module de régularité höldérienne en  $1/h$  - cf à nouveau [GT83]). Et ce problème se retrouve à toute étape ultérieure  $p > 1$ . Ce schéma n'est donc a priori pas bon puisque des poids, qui peuvent être importants, se multiplient au fur et à mesure des étapes.

Pourtant les simulations du chapitre suivant (cf Section 5.3) montrent un comportement plus que correct pour l'exemple étudié. Mais ce phénomène peut s'expliquer car dans cet exemple favorable le coefficient  $a$  est le plus souvent isotrope et constant. Le processus  $X$  se comporte donc la plupart du temps comme un brownien. Or si le brownien part du milieu d'un carré, il sortira par un point proche du milieu d'un côté avec une forte probabilité (ces probabilités sont calculables explicitement, cf [MT97]). Donc  $|X_{\tau_p} - \bar{X}_p|$  est le plus souvent assez petit devant  $h$  pour que  $|u_\xi^\varepsilon(X_{\tau_p}) - u_\xi^\varepsilon(\bar{X}_p)|$  soit petit. Donc les poids  $Z_p$  doivent être proches de 1 ce qui expliquerait le bon comportement du schéma.

Mais dans le cas d'un coefficient  $a$  plus irrégulier le schéma sera pris en défaut. Une solution envisageable est d'introduire une seconde échelle dans le schéma, plus petite que celle de la grille  $\mathcal{G}_h^2$ , qui servirait uniquement au calcul des probabilités de transition de la chaîne de Markov.

C'est à dire qu'on cherche toujours à simuler une chaîne  $S$  sur la grille  $\mathcal{G}_h^2$  constituée de carrés de taille  $h$ . Mais chaque arête  $\Gamma_{m,n}^\xi$  de chaque carré  $C_{m,n}$  est divisée en  $k$  segments  $J_{m,n}^{\xi,j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , de centres  $x_{m,n}^{\xi,j}$ . Notons  $\chi_k^2$  la grille constituée des  $(x_{m,n}^{\xi,j})$ 's. On cherche à simuler une chaîne  $(S, V)$  sur  $\mathcal{G}_h^2 \times \chi_k^2$  de la manière suivante (voir Figure 4.1).

Pour  $p = 0$  on a  $S_0$  au centre  $x_0$  du carré de départ  $C_{m,n}$  et  $V_0$  au centre  $x_{m,n-1}^{\xi,j} = x_0$  du segment  $J_{m,n-1}^{\xi,j}$  qui contient  $x_0$  (ce segment appartient à l'arête du dessus du carré en bas de  $C_{m,n}$ ). On calcule les solutions  $u_{\xi,j}^\varepsilon$  des problèmes  $\mathcal{P}(C_{m,n}, \psi_\varepsilon^{\xi,j})$  où, de façon analogue à la fin de la Section 4.1,  $\psi_\varepsilon^{\xi,j}$  vaut «presque» 1 sur  $J_{m,n}^{\xi,j}$  et 0 ailleurs. On calcule

les  $u_{\xi,j}^\varepsilon(x_0)$ . On obtient ainsi  $4k$  probabilités de se retrouver sur tel ou tel segment  $J_{m,n}^{\xi,j}$ , en étant parti de  $x_0$ . On simule la variable aléatoire correspondante et on obtient donc un certain  $\xi$  et un certain  $j$ . La variable  $S_1$  prend alors pour valeur  $C_{(m,n)+\xi}$ . La variable  $V_1$  prend la valeur  $x_{m,n}^{\xi,j}$ . Notons que  $x_{m,n}^{\xi,j}$  est alors sur une arête intérieure au carré  $C_{(m,n)+\xi}$ .

A une étape  $p$  quelconque on a donc  $S_p$  en un certain  $C_{m,n}$  et  $V_p$  en un certain  $x_{(m,n)+\xi'}^{\xi'',j}$  contenu dans  $C_{m,n}$ . On calcule les solutions  $u_{\xi,j}^\varepsilon$  des problèmes  $\mathbb{P}(C_{m,n}, \psi_\varepsilon^{\xi,j})$ , qu'on évalue en  $x_{(m,n)+\xi'}^{\xi'',j}$ . On tire la v.a. correspondant à ces probabilités et on obtient un certain  $\xi$  et un certain  $j$ . La variable  $S_{p+1}$  prend pour valeur  $C_{(m,n)+\xi}$  et  $V_{p+1}$  prend la valeur  $x_{m,n}^{\xi,j}$ .

Ce schéma définit une loi  $\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon,k}$  pour  $(S, V)$  telle que

$$\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon,k}[S_{p+1} = C_{(m,n)+\xi}, V_{p+1} = x_{m,n}^{\xi,j} | S_p = C_{m,n}, V_p = x_{(m,n)+\xi'}^{\xi'',j}] = u_{\xi,j}^\varepsilon(x_{(m,n)+\xi'}^{\xi'',j}),$$

où  $u_{\xi,j}^\varepsilon$  est calculée dans la carré ad hoc  $(C_{m,n})$ . On a

$$\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon,k}[S_{p+1} = C_{(m,n)+\xi} | S_p = C_{m,n}, V_p] = v_\xi^\varepsilon(S_p, V_p) = \sum_{j=1}^k u_{\xi,j}^\varepsilon(V_p).$$

Si on considère maintenant les projections  $\bar{X}_p$  et  $\tilde{X}_p$  de  $X_{\tau_p}$  respectivement sur  $\mathcal{G}_h^2$  et  $\chi_k^2$ , on définit une chaîne  $(S, V)$  sur  $\mathcal{G}_h^2 \times \chi_k^2$  de loi  $\mathbb{P}$  donnée par

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[S_{p+1} = C_{(m,n)+\xi}, V_{p+1} = x_{m,n}^{\xi,j} | S_p = C_{m,n}, V_p = x_{(m,n)+\xi'}^{\xi'',j}] \\ &= \mathbb{P}[X_{\tau_{p+1}} \in J_{m,n}^{\xi,j} | \bar{X}_p = C_{m,n}, \tilde{X}_p = x_{(m,n)+\xi'}^{\xi'',j}, X_{\tau_p}]. \end{aligned}$$

On a

$$\mathbb{P}[S_{p+1} = C_{(m,n)+\xi} | S_p = C_{m,n}, V_p] = \mathbb{P}[X_{\tau_{p+1}} \in \Gamma_{m,n}^\xi | \bar{X}_p = C_{m,n}, \tilde{X}_p = V_p, X_{\tau_p}].$$

Heuristiquement on devrait pouvoir obtenir une formule analogue à (4.3.3), avec cette fois des poids  $Z_p$  de la forme

$$Z_p = \frac{v_{\Xi}^\varepsilon(S_p, V_p)}{\mathbb{P}[X_{\tau_{p+1}} \in \Gamma_{\bar{X}_p}^\Xi | \bar{X}_p = S_p, \tilde{X}_p = V_p, X_{\tau_p}]}.$$

En utilisant un principe de superposition on doit pouvoir montrer, comme dans la Proposition 4.3.1, qu'on contrôle l'erreur si on garde la quantité  $|v_\xi^\varepsilon(x, V_p) - v_\xi^\varepsilon(x, X_{\tau_p})|/v_\xi^\varepsilon(x, X_{\tau_p})$  proche de 1, avec ici  $V_p$  et  $X_{\tau_p}$  appartenant au même segment  $J_{m,n}^{\xi,j}$ . Donc  $|V_p - X_{\tau_p}| < h/k$ , et même si le module de régularité höldérienne de  $v_\xi^\varepsilon$  est en  $1/h$ , on peut espérer que pour  $k$  grand un tel schéma converge.

# Chapitre 5

## Simulations numériques

### 5.1 La régularisation des coefficients n'est pas une bonne solution

Comme évoqué en introduction l'approche consistant à régulariser les coefficients discontinus de l'OFD d'intérêt n'est pas une solution satisfaisante. Nous allons illustrer cela par deux exemples simples.

**Exemple 1 : Skew Brownian Motion.** On prend pour coefficients  $\rho$  et  $a$

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ A & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 1/A & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Par la Proposition 2.1.1, le processus  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, 0)$  est solution de  $\mathfrak{Sde}(1, \beta \delta_0)$ , avec  $\beta = (1 - 1/A)/(1 + 1/A)$ , c'est à dire que  $X$  a la même loi que le SBM  $Y^{0,\beta}$  de paramètre  $\beta$ .

Or on connaît exactement la densité de probabilité de transition  $p(t, x, y)$  de  $Y^{0,\beta}$  (voir [Wal78]). Par exemple pour  $x = 0$  on a :

$$\sqrt{2\pi t} p(t, 0, y) = \begin{cases} (\beta + 1) \exp\{-y^2/2t\} & \text{si } y \geq 0, \\ (1 - \beta) \exp\{-y^2/2t\} & \text{si } y < 0. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

On construit les coefficients  $\rho^\varepsilon$  et  $a^\varepsilon$  de la façon suivante :

$$a^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -\varepsilon, \\ \frac{A-1}{2\varepsilon}(x + \varepsilon) + 1 & \text{si } -\varepsilon \leq x < \varepsilon, \\ A & \text{si } x \geq \varepsilon, \end{cases}$$

et

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -\varepsilon, \\ \frac{1/A-1}{2\varepsilon}(x + \varepsilon) + 1 & \text{si } -\varepsilon \leq x < \varepsilon, \\ 1/A & \text{si } x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ces coefficients continus ne sont pas très réguliers car ils ne sont pas dérivables en  $-\varepsilon$  et  $\varepsilon$ . Cependant d'un point de vue numérique cela ne change pas grand chose. En effet la probabilité que le processus  $X^\varepsilon$ , engendré par  $\mathfrak{L}(\rho^\varepsilon, a^\varepsilon, 0)$ , soit en  $-\varepsilon$  ou en  $\varepsilon$  en un instant  $t$  donné est nulle. Si on construit un schéma d'Euler pour approcher  $X^\varepsilon$  on peut considérer que le schéma ne se retrouve jamais en  $-\varepsilon$  et  $\varepsilon$ , et que les coefficients  $\rho^\varepsilon$  et  $a^\varepsilon$  «vus» par le schéma sont beaucoup plus réguliers qu'ils ne le sont en réalité.

Par les Théorèmes 1.3.3 et 1.3.4 le processus  $X^\varepsilon$  tend en loi vers  $Y^{0,\beta}$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Le processus  $X^\varepsilon$  est solution de

$$dX_t^\varepsilon = \sqrt{\rho^\varepsilon a^\varepsilon}(X_t) dW_t + \frac{\rho^\varepsilon (a^\varepsilon)'}{2}(X_t) dt. \quad (5.1.3)$$

Le schéma d'Euler est une méthode bien rodée pour approcher les solutions d'EDS à coefficients réguliers (voir [KP92]). Cependant on va voir que dans certaines conditions un schéma d'Euler qui approche  $X^\varepsilon$  échoue à approcher  $Y^{0,\beta}$ .

**Remarque 5.1.1** On pourrait avoir le réflexe d'approcher  $Y^{0,\beta}$  par la solution  $Y^\varepsilon$  de

$$Y_t^\varepsilon = W_t + \beta \int_0^t b^\varepsilon(Y_s^\varepsilon) ds = W_t + \beta \int_{\mathbb{R}} b^\varepsilon(x) L_t^x(Y^\varepsilon) dx,$$

avec  $b^\varepsilon$  de support  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  et  $\int_{\mathbb{R}} b^\varepsilon(x) dx = 1$ . En effet dans ces conditions la mesure  $\beta b^\varepsilon(x) dx$  tend faiblement vers  $\beta \delta_0$ . Mais ce serait une erreur car, dans ce cas (cf Remarque 1.5.2 et [Leg85] p 65), le processus  $Y^\varepsilon$  tend vers  $Y$  solution de  $\mathfrak{Sde}(1, (1 - e^{-2\beta})/(1 + e^{-2\beta})\delta_0)$ .

Mieux vaut donc jouer sur les coefficient  $\rho$  et  $a$ , même si ça ne paraît pas naturel de prime abord (c'est en jouant sur le saut de  $a$  qu'on obtient coefficient  $\beta$  qu'on veut).

**Exemples avec  $A$  petit.** On prend  $A = 5$  ce qui correspond à  $\beta = 2/3$ . On prend  $\varepsilon = 0.01$ . On prend  $x = 0$ ,  $t = 1$ , et on simule  $N = 10000$  trajectoires d'un schéma d'Euler  $\widehat{X}^{\varepsilon, \Delta t}$  jusqu'à l'instant  $t$ . Le paramètre  $\Delta t$  est le pas en temps du schéma d'Euler. On trace un histogramme des positions  $\widehat{X}_t^{\varepsilon, \Delta t}$ , qui correctement renormalisé devrait donner une approximation de la densité  $p(1, 0, y)$  de  $Y_1^{0,\beta}$ . On prend d'abord  $\Delta t = 0.01$ , puis  $\Delta t = 0.002$  (Figure 5.1).

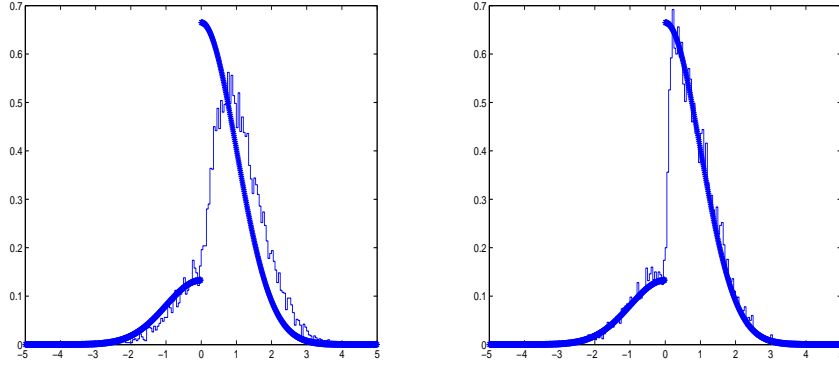


FIG. 5.1 – Approximation de  $p(1, 0, y)$  par un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^{\epsilon, \Delta t}$  pour  $\Delta t = 0.01$  (à gauche) et  $\Delta t = 0.002$  (à droite), représentés par une ligne en escaliers. Dans les deux figures la ligne en \* représente la densité exacte.

On voit que pour  $\Delta t = 0.01$  l'allure de l'histogramme est différente de la densité théorique : le schéma est peu souvent sur  $[-\epsilon, \epsilon]$  et la dérive dans (5.1.3) intervient trop peu dans sa dynamique. Cependant, en poussant la précision ( $\Delta t = 0.002$ ) on parvient à obtenir un histogramme correct.

**Exemples avec  $A$  grand.** On prend cette fois  $A = 100$ , ce qui est encore relativement peu par rapport à certaines données issues de la physique (où les coefficients peuvent varier dans un rapport de 1 pour 1000). On prend encore  $\epsilon = 0.01$ . On trace des histogrammes des  $N = 10000$  positions de  $\widehat{X}_1^{\epsilon, \Delta t}$  pour  $\Delta t = 10^{-2}$  et  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$  (les deux courbes du haut dans la Figure 5.2).

Même avec  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$  l'histogramme obtenu est aberrant. On peut alors essayer de pousser encore la précision ( $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ ) et d'étaler le support  $[-\epsilon, \epsilon]$  (en prenant  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ ). L'histogramme obtenu est mieux centré mais il présente une pente en zéro au lieu de la discontinuité nette de la densité théorique (courbe du bas dans la Figure 5.2).

Il s'avère en fait que plus les sauts des coefficients sont grands et donc dans cet exemple, plus le SBM se rapproche d'un brownien réfléchi, moins l'approximation fournie par un schéma d'Euler pour les coefficients régularisés est satisfaisante.

**Exemple 2 :  $\rho = 1$  et  $a$  saute.** Le coefficient  $a$  est défini comme dans l'Exemple 1, avec  $A = 100$ . En fait il est possible de calculer la densité de probabilité de transition de  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$ , en se servant du fait qu'on connaît celle du SBM.

En effet posons  $\beta = (\sqrt{A} - 1)/(\sqrt{A} + 1)$  et définissons

$$\Phi(y) = \begin{cases} y & \text{si } y < 0, \\ \sqrt{A}y & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

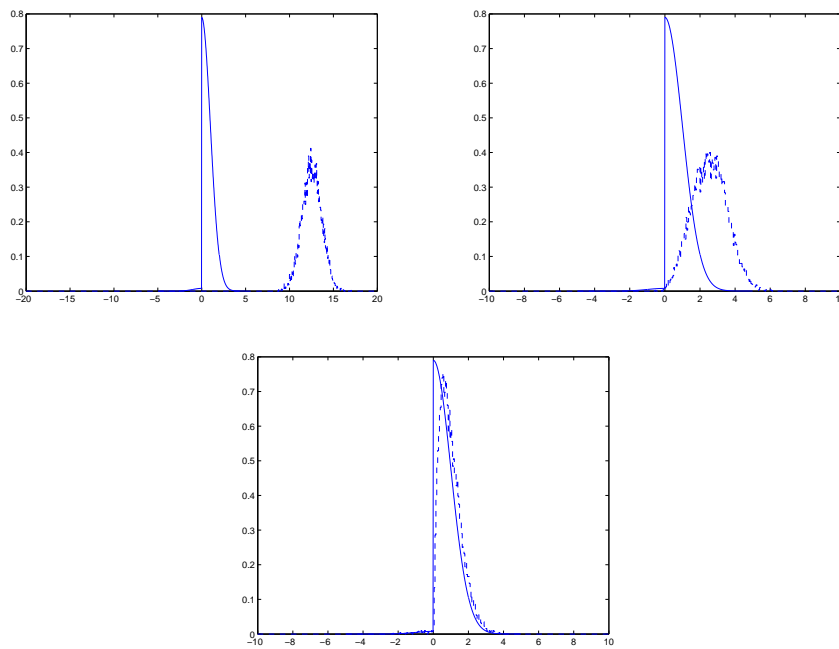


FIG. 5.2 – Approximation de  $p(1, 0, y)$  par un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^{\epsilon, \Delta t}$  pour  $(\epsilon, \Delta t) = (10^{-2}, 10^{-2})$ ,  $(\epsilon, \Delta t) = (10^{-2}, 2 \cdot 10^{-3})$  et  $(\epsilon, \Delta t) = (2 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-4})$  (lignes en pointillé). Dans ces trois graphes la courbe en trait plein représente la densité théorique.



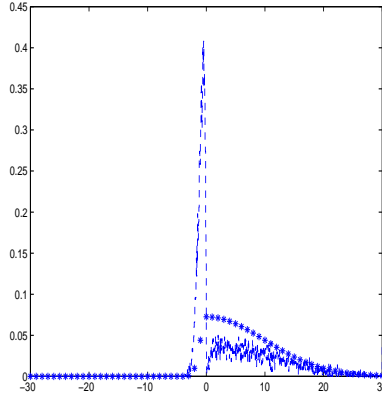


FIG. 5.3 – Approximation de  $q(1, 0, y)$  par un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^{\epsilon, \Delta t}$ . La ligne en \* représente la densité exacte.

Considérons  $Y^{0, \beta}$  le SBM de paramètre  $\beta$  et posons  $X = \Phi(Y^{0, \beta})$ . Une application de la Proposition 2.2.1 montre que le processus  $X$  est solution de  $\mathfrak{S}\mathfrak{d}\mathfrak{e}(\sqrt{a}, (A-1)/(A+1)\delta_0)$ , c'est à dire que  $X$  est engendré par  $\mathfrak{L}(1, a, 0)$  (Proposition 2.1.1).

Des calculs élémentaires montrent alors que la densité  $q(t, 0, x)$  de la mesure de probabilité  $\mathbb{P}^0[X_t \in dx]$  est égale à  $p(t, 0, \Phi^{-1}(x))(\Phi^{-1})'(x)$ , où  $p(t, 0, y)$  est la densité du SBM définie par (5.1.2).

On peut donc régulariser  $a$  comme précédemment, en construisant  $a^\epsilon$  avec  $\epsilon = 0.02$ . On trace un histogramme de  $N = 10000$  positions d'un schéma d'Euler  $\widehat{X}^{\epsilon, \Delta t}$  approchant  $X^\epsilon$  engendré par  $\mathfrak{L}(1, a^\epsilon, 0)$ , à  $t = 1$  avec  $\Delta t = 10^{-3}$ . Le résultat obtenu est aberrant (Figure 5.3).

## 5.2 Les algorithmes pour la dimension un

Dans cette section on teste les schémas  $\widehat{X}^h$  et  $\widehat{X}^g$  présentés respectivement dans les Chapitres 2 et 3 de cette thèse. On considère des processus  $X$  engendrés par des OFD à coefficients  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (ne présentant qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce). Le schéma  $\widehat{X}^g$  est donc construit par la procédure décrite en début de Sous-section 3.5.1, en incluant les points de discontinuité des coefficients dans la grille  $\mathfrak{g}$ , et en faisant au préalable une approximation constante par morceaux des coefficients.

Remarquons que tester nos schémas sur des coefficients régularisés serait peu judicieux puisqu'ils comportent justement une étape d'approximation constante par morceaux. Les sauts des coefficients constants par morceaux qu'on construit déterminent justement les probabilités de transitions qui servent à construire nos marches aléatoires. Heuristiquement, quand en un point un saut d'un coefficient constant par morceaux correspond

au saut d'un vrai coefficient, la probabilité de transition de la marche reflète, au point concerné, la probabilité de transition du processus à approcher.

**Exemple 1 : Skew Brownian Motion.** On prend  $\rho$  et  $a$  définis par (5.1.1). Pour  $A = 5$  on fait l'expérience suivante : on prend  $G = (-5, 5)$ ,  $x = 0$ ,  $t = 1$ , et on simule  $N = 20000$  trajectoires de  $\widehat{X}^h$  et  $\widehat{X}^{\mathbf{g}}$  avec  $h = 0.05$  et  $\mathbf{g} = \{hk | k \in \mathbb{Z}\}$ . On renormalise les histogrammes des positions de  $\widehat{X}_t^h$  et  $\widehat{X}_t^{\mathbf{g}}$  et on compare à la densité théorique  $p(1, 0, y)$  (Figure 5.4).

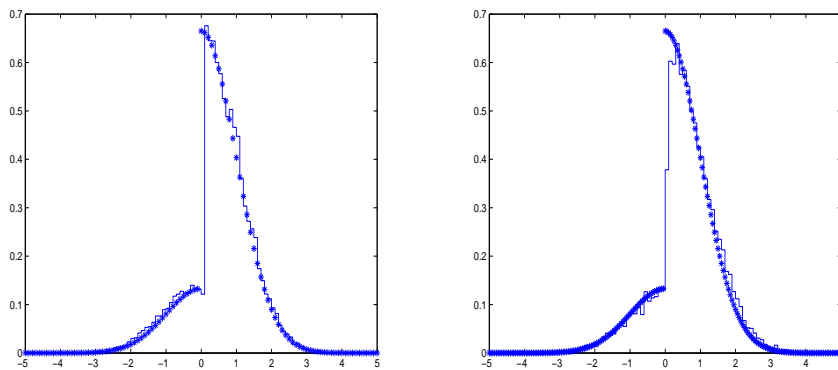


FIG. 5.4 – Pour  $A = 5$ , approximation de  $p(1, 0, y)$  par un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^h$  (à gauche) et un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^{\mathbf{g}}$  (à droite), représentés par une ligne en escaliers. Dans les deux figures la ligne en \* représente la densité exacte.

Le résultat obtenu est satisfaisant et on se demande donc si nos schémas tiennent le choc en prenant  $A = 100$  (cf problèmes de la Figure 5.2). Avec le schéma  $\widehat{X}^{\mathbf{g}}$ , et cette fois  $h = 0.02$ , on obtient l'histogramme de la Figure 5.5. On peut obtenir un histogramme analogue avec le schéma  $\widehat{X}^h$ .

**Exemple 2 :  $\rho = 1$  et  $a$  saute.** On veut confronter nos schémas avec le cas de l'Exemple 2 de la Section 5.1. On prend donc à nouveau  $a$  défini par (5.1.1) avec  $A = 100$ . On prend  $h = 0.1$ ,  $G = (-40, 40)$  et  $\mathbf{g} = \{hk | k \in \mathbb{Z}\}$ . Avec le schéma  $\widehat{X}^{\mathbf{g}}$  on obtient l'histogramme de la Figure 5.6. Malgré quelques oscillations (dûes en partie à la difficulté de renormaliser un histogramme pour obtenir l'approximation d'une densité), le résultat est correct, contrairement à ce qui se passait dans la Section 5.1.

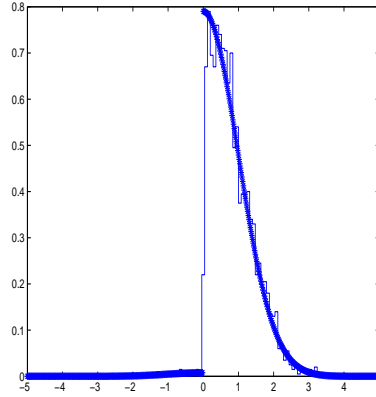


FIG. 5.5 – Pour  $A = 100$ , approximation de  $p(1, 0, y)$  par un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^g$ , représenté par une ligne en escaliers. La ligne en \* représente la densité exacte.

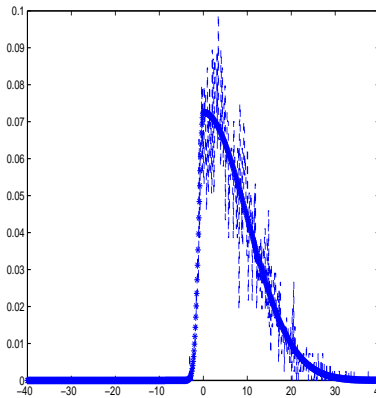


FIG. 5.6 – Dans l'Exemple 2 approximation de  $p(1, 0, y)$  par un histogramme des positions de  $\widehat{X}_1^g$ , représenté par une ligne en pointillé. La ligne en \* représente la densité exacte.

**Exemple 3 : «Doubly Skewed Brownian Motion».** On prend à nouveau  $b = 0$  et  $\rho$  et  $a$  sont cette fois définis par

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1/2 \\ 2 & \text{si } x \in [-1/2, 1/2) \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2, \end{cases} \quad \text{et } \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1/2 \\ 1/2 & \text{si } x \in [-1/2, 1/2) \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

On peut montrer que  $X$  engendré par  $\mathfrak{L}(\rho, a, 0)$  est solution de  $\mathfrak{S}\mathfrak{d}\mathfrak{e}(1, \frac{1}{3}\delta_{-1/2} - \frac{1}{3}\delta_{1/2})$

c'est à dire que,

$$X_t = X_0 + W_t + \frac{1}{3}L_t^{-1/2}(X) - \frac{1}{3}L_t^{1/2}(X).$$

Le processus  $X$  est appelé «Doubly Skewed Brownian Motion». Ce processus se comporte comme un mouvement brownien sauf en  $-1/2$  et  $1/2$  où, heuristiquement, il va à droite avec des probabilités de respectivement  $2/3$  et  $1/3$ .

On simule 10000 trajectoires de  $\widehat{X}^h$  et  $\widehat{X}^g$  partant de  $x = 1.0$  jusqu'aux instants  $t = 0.5, t = 1.0$  et  $t = 1.5$ . On prend  $h = 0.02$  et  $g = \{hk | k \in \mathbb{Z}\}$ . Comparés à une densité gaussienne centrée en  $x = 1.0$  les histogrammes obtenus montrent une concentration de particules dans l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$  (Figure 5.7).

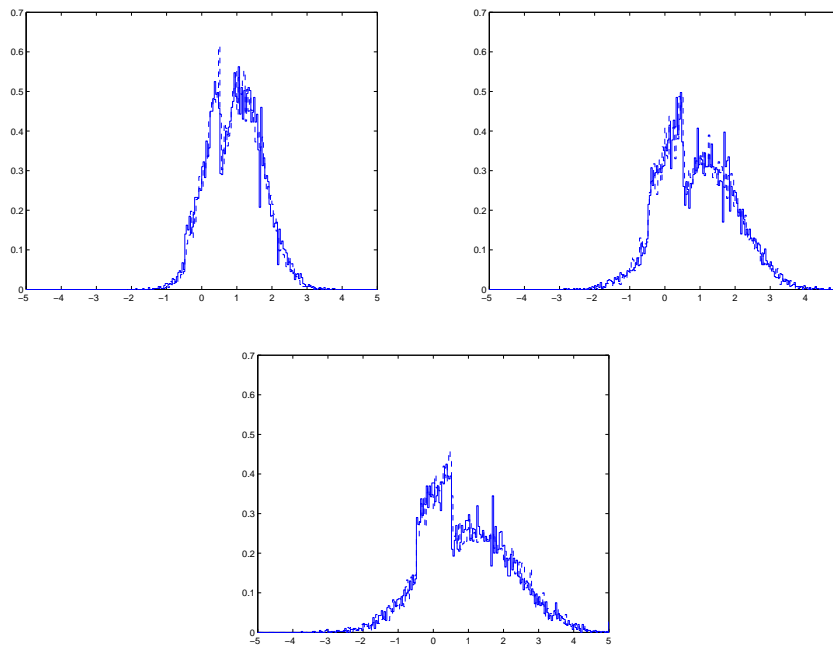


FIG. 5.7 – Approximation de  $p(t, x, y)$  pour  $x = 1.0$  aux instants  $t = 0.5, t = 1.0$  et  $t = 1.5$ , par un histogramme des positions de  $\widehat{X}^g$  et de  $\widehat{X}^h$  (ligne en pointillé).

**Exemple 4. Comparaison avec les résultats de M. Martinez et d'A. Lejay dans [LM06].** Dans l'article [LM06] les auteurs ont comparé leur schéma et le schéma d'Euler proposé dans [Mar04] sur l'exemple suivant :  $\rho = 1, b = 0$  et  $a$  est défini par

$$a(x) = \begin{cases} 2 + \sin(x) & \text{si } x < 0, \\ 5 + \sin(x + \pi) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On prend  $t = 1, x = 0.5, h = 0.1$  et  $N = 10000$ . On trace un histogramme des valeurs de  $\widehat{X}_1^h$ , qui approche  $p(1, 0.5, y)$ , sur la Figure 5.8. On trace sur la même figure

l'histogramme obtenu dans [LM06] pour les mêmes paramètres. On compare également (graphique de droite dans la Figure 5.8) les histogrammes obtenus avec  $\widehat{X}^h$  et  $\widehat{X}^g$ .

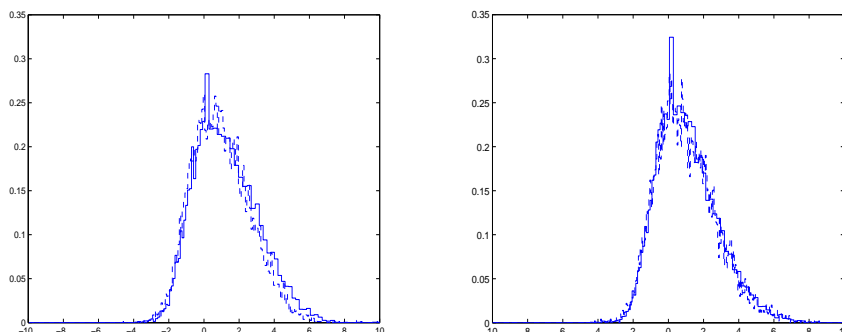


FIG. 5.8 – Approximation de  $p(t, x, y)$  dans l'Exemple 4. A gauche, par l'algorithme du Chapitre 2 et par celui de Lejay et Martinez (courbe en pointillé). A droite par l'algorithme du Chapitre 2 et celui de Chapitre 3 (courbe en pointillé).

Dans les exemples qui suivent on ne cherche plus à comparer nos deux schémas entre eux. On cherche plutôt à construire une approximation Monte-Carlo de solutions d'EDP et à la comparer avec ce que donne un solveur déterministe type différences finies ou autre.

**Exemple 5.** On prend  $G = (-100, 100)$ ,  $\rho = 1$ ,  $b = 0$  et  $a$  dont le graphe est représenté par la Figure 5.9. On note  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

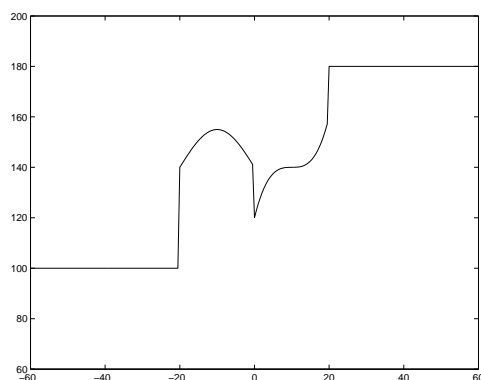


FIG. 5.9 – Graphe de  $a$ .

Pour  $f \in W_0^{1,\infty}(G) \cap \mathcal{C}_0(G)$ , le Théorème 2.4.1 indique que  $u_{sto}(t, x) = \mathbb{E}^x f(\widehat{X}_t^h)$  approche une version continue  $u(t, x)$  de la solution du problème parabolique  $\partial_t u = Lu$ ,

avec condition de Dirichlet uniforme. Si chaque  $\widehat{X}^{h,(i)}$  est une réalisation indépendante de  $\widehat{X}^h$  partant de  $x$ , la loi des grands nombres indique que la quantité  $(1/N) \sum_{i=1}^N f[\widehat{X}^{h,(i)}]$  approche  $u_{sto}(t, x)$ , et donc  $u(t, x)$ . C'est ce qu'on appelle l'approximation Monte-Carlo de la solution du problème d'EDP (on parle parfois pour faire court de solution Monte-Carlo).

On prend  $f(x) = \sin(\pi(x + 100)/200)$  et  $x = -10$ . On calcule la quantité  $u_{sto}(t, x) := (1/N) \sum_{i=1}^N f[\widehat{X}_t^{h,(i)}]$ , avec  $N = 10000$  et  $h = 0.1$ , pour  $t$  appartenant à une grille en temps qui discrétise l'intervalle  $[0, 4]$ . On utilise une routine déterministe de MATLAB pour calculer une approximation  $u_{det}(t, x)$  de  $u(t, x)$  pour  $t \in [0, 4]$ . On trace  $u_{sto}(t, x)$  et  $u_{det}(t, x)$  en fonction de  $t$  sur la Figure 5.10.

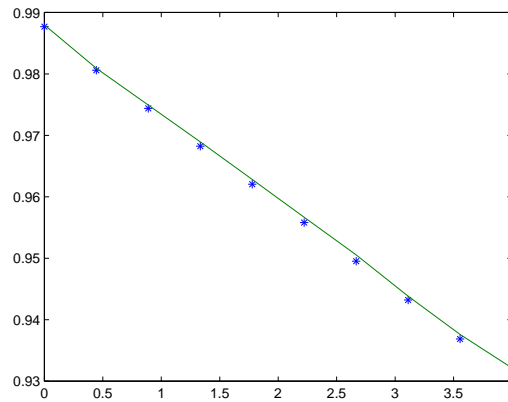


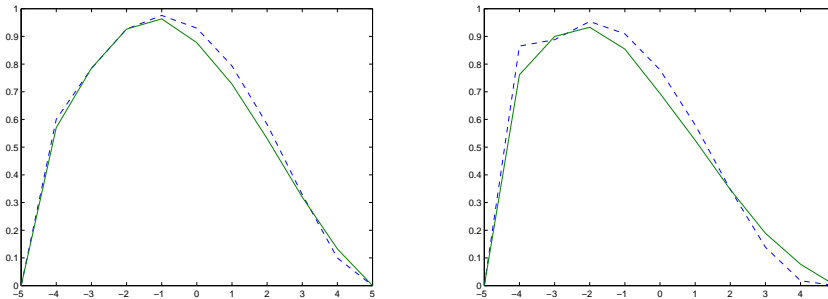
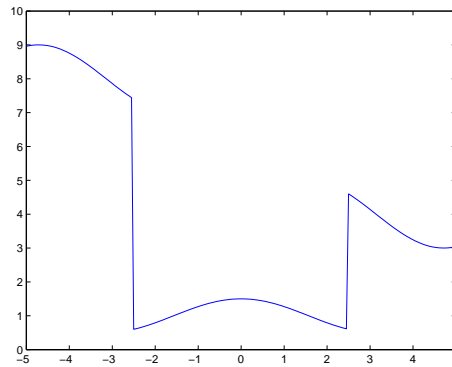
FIG. 5.10 – Graphes de  $u_{sto}(t, x)$  et  $u_{det}(t, x)$  (représenté par la ligne en \*) pour  $x = -10$  et  $t \in [0, 4]$ .

**Exemple 6.** On prend  $G = (-5, 5)$ ,  $\rho = 1$ ,  $b = 2$  et un coefficient  $a$  irrégulier dont le graphe est représenté sur la Figure 5.11. On note  $(L, D(L)) = \mathfrak{L}(\rho, a, b)$ .

On prend  $\mathfrak{g} = \{0.1k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  $f(x) = \cos(\frac{\pi}{10}x)$ . Aux instants  $t = 0.5$  et  $t = 1.0$  on calcule aux points  $\{-4, -3, \dots, 3, 4\}$  la solution Monte Carlo  $u_{sto}(t, x) = (1/N) \sum_{i=1}^N f[\widehat{X}_t^{\mathfrak{g},(i)}]$  de  $\partial_t u = Lu$ , où on a noté  $\widehat{X}^{\mathfrak{g},(i)}$  les réalisations indépendantes de  $\widehat{X}^{\mathfrak{g}}$  partant de  $x$ . On prend  $N = 8000$ .

Notons que la condition aux limites est encore de Dirichlet uniforme.

On compare encore avec les résultats fournis par un solveur déterministe de MATLAB (solution  $u_{det}$  sur la Figure 5.12).

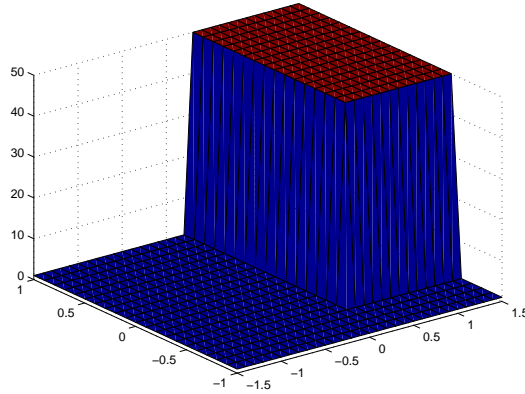
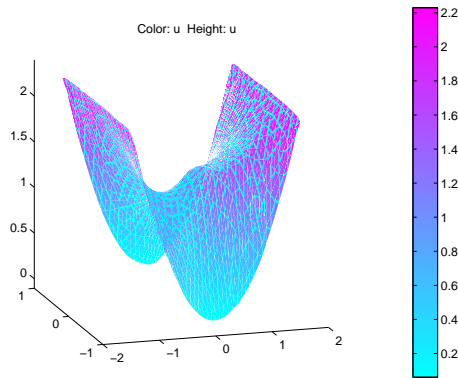
FIG. 5.11 – Graphe du coefficient  $a$ .FIG. 5.12 – Graphes de  $u_{sto}(t, \cdot)$  avec ceux de  $u_{det}(t, \cdot)$  (représentés par les lignes en pointillé), pour  $t = 0.5$  (à gauche) et  $t = 1.0$  (à droite).

### 5.3 Chaîne de Markov en dimension deux

On fait des tests sur un domaine rectangulaire  $G$ . Le plan est muni d'un repère cartésien dont l'origine est au centre du rectangle. On note  $(x_1, x_2)$  les coordonnées d'un point  $x$  de  $G$ . Les sommets de  $G$  sont aux coordonnées  $(-1.5, 1)$ ,  $(1.5, 1)$ ,  $(1.5, -1)$  et  $(-1.5, -1)$ .

On se donne un coefficient  $a = (a_{ij})_{(i,j) \in \{1,2\}^2} \in \mathfrak{Mell}(1, 50)$  défini par  $a_{ij} = A$  pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  avec  $A : G \rightarrow \mathbb{R}$  elle-même définie par

$$A(x_1, x_2) = \begin{cases} 50 & \text{si } x_1 \geq 0.23 \text{ et } x_2 \geq -0.53 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

FIG. 5.13 – Graphe de  $A$ .FIG. 5.14 – Graphe 3D de la solution  $u$  de  $\mathcal{P}(G, \psi)$ .

On se donne la condition au bord  $\psi : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\psi(x_1, x_2) = x_1^2$  pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \partial G$ .

On met en oeuvre l'algorithme de la Section 4.2 pour simuler  $\psi(S_{n^*})$  selon la loi  $\widehat{\mathbb{P}}_h^{\varepsilon, \delta}$ . On prend  $h = 0.1$ .

Notons qu'on utilise la PDE Toolbox de MATLAB pour résoudre chaque  $\mathcal{P}(C_{m,n}, \psi_i^\varepsilon)$  et obtenir les probabilités de transition. En pratique on définit  $\psi_i^\varepsilon$  avec  $\varepsilon = 0$ , ce qui d'un point de vue numérique ne change rien. Comme on a laissé faire les choses de façon automatique, on n'a pas spécifié non plus le paramètre  $\delta$ .



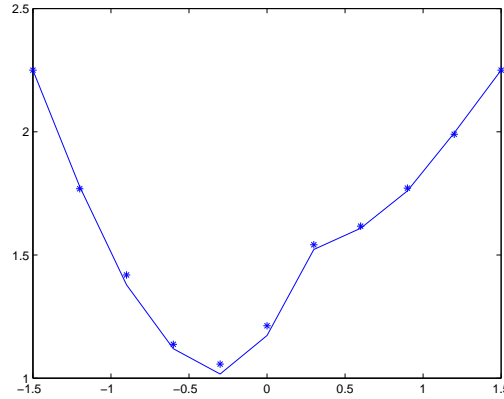


FIG. 5.15 – Graphe de  $u^{h,N}(\cdot, x_2)$  comparé à celui de  $u(\cdot, x_2)$  (la ligne en \*).

On simule  $N = 10000$  fois  $\psi(S_{n^*})$  sous la loi  $\widehat{\mathbb{P}}_{h,x}^{\varepsilon,\delta}$  pour  $x \in G$ , et on calcule

$$u^{h,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(S_{n^*}^i).$$

Cette quantité est censée approcher  $u(x)$  où  $u$  est solution de  $\mathcal{P}(G, \psi)$  tel qu'écrit dans le Chapitre 4. Sur la Figure 5.14 on trace le graphe obtenu en utilisant le solveur déterministe de la PDE Toolbox pour le problème  $\mathcal{P}(G, \psi)$ .

On fixe  $x_2 = -0.4$ . On calcule alors  $u^{h,N}(x_1, x_2)$  pour les abscisses successives  $x_1 = -1.5, -1.2, \dots, 1.2, 1.5$ . On compare avec  $u(\cdot, x_2)$  sur la Figure 5.15.

## 5.4 Remarque sur la programmation dynamique

Dans l'Exemple 5 de la Section 5.2 on a approché la moyenne  $\mathbb{E}^x[f(\widehat{X}_t^h)]$  par une méthode de Monte Carlo. Or on peut envisager de calculer une telle moyenne en mettant en oeuvre une méthode de programmation dynamique. En effet, par construction, le processus  $\widehat{X}_t^h$  passe une tranche de temps exactement égale à  $h^2$  sur chaque site de la grille  $\mathcal{G}^h$  (voir Sous-section 2.3.2). On peut donc construire un arbre binomial représentant les trajectoires possibles de  $\widehat{X}_t^h$  partant de  $x$  (sur la Figure 5.16 on a représenté un tel arbre pour  $x = 0$ , dans le cas  $L = \mathfrak{L}(1, a, 0)$  avec  $a$  prenant les trois valeurs constantes  $a_1, a_2$  et  $a_3$  selon les  $x$  croissants, et  $a_2 > a_3 > a_1$ ). Les branches de cet arbre ont pour poids les probabilités de transition données par (2.3.7). Pour toute position possible  $x_{\text{fin}}$  de  $\widehat{X}_t^h$  on peut donc remonter l'arbre de  $x_{\text{fin}}$  jusqu'à  $x$  de diverses façons, et ainsi calculer la probabilité que  $\widehat{X}_t^h = x_{\text{fin}}$ . On peut ainsi calculer  $\mathbb{E}^x[f(\widehat{X}_t^h)]$ . Notons que comme ce type

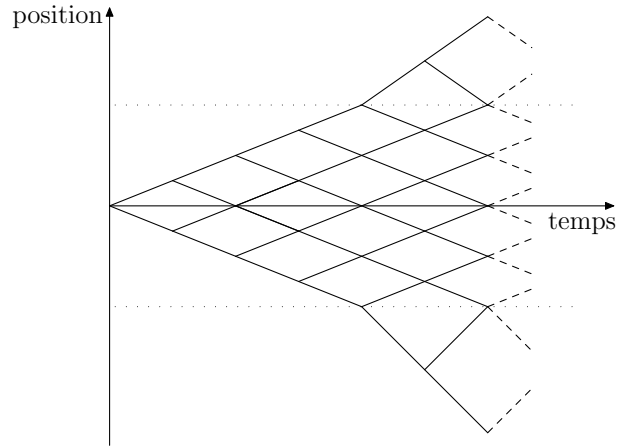


FIG. 5.16 – Arbre binomial des trajectoires de  $\widehat{X}_t^h$  partant de  $x = 0$ .

de méthode permet de calculer des espérances conditionnelles, on peut s'en servir pour calculer le prix d'options américaines, comme pour les modèles présentés dans [DGS05].

Notons qu'utiliser une telle approche pour l'algorithme  $\widehat{X}^{\mathfrak{g}}$  dans l'Exemple 6 de la Section 5.2 semble plus difficile. En effet entre deux sites de la grille  $\mathfrak{g}$  le processus  $\widehat{X}^{\mathfrak{g}}$  passe un temps qui est fonction de ces sites, et n'est pas forcément le même. En conséquence l'arbre correspondant aux trajectoires de  $\widehat{X}^{\mathfrak{g}}$  partant de  $x$  n'est pas structuré de façon si commode que dans le cas précédent : le remonter pose problème.

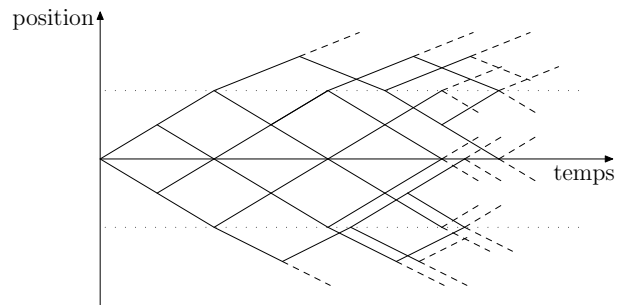


FIG. 5.17 – Arbre déstructuré correspondant aux trajectoires de  $\widehat{X}^{\mathfrak{g}}$  partant de  $x = 0$ .

Cependant les probabilités de transition  $\pi(j, j+1)$  calculées pour  $\widehat{X}^{\mathbf{g}}$  permettraient de déterminer, en résolvant un système linéaire, les solutions de problèmes du type,

$$\mathcal{P}(\alpha, \beta) \begin{cases} Lu & = 0 \quad \text{dans } (l, r) \\ u(l) & = \alpha \\ u(r) & = \beta. \end{cases}$$

En effet posons  $\psi(x) = \alpha \mathbf{1}_{\{x=l\}} + \beta \mathbf{1}_{\{x=r\}}$ . Par Feynman-Kac on a pour tout  $x \in (l, r)$ ,  $\mathbb{E}^x[\psi(X_\tau)] = u(x)$ , où  $u$  est la solution de  $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ ,  $X$  est le processus engendré par  $(L, D(L))$  et  $\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t \in \{l, r\}\}$ . Une approximation de  $u(x)$  est donc donnée par  $\hat{u}(x) = \mathbb{E}^x[\psi(\widehat{X}_{\hat{\tau}}^{\mathbf{g}})] = \mathbb{E}^{x_j(x)}[\psi(\widehat{S}_{n^*}^{\mathbf{g}})]$  où on a noté  $x_j(x)$  le point de la grille  $\mathbf{g}$  le plus proche de  $x$ ,  $\hat{\tau} = \inf\{t \geq 0 | \widehat{X}_t^{\mathbf{g}} \in \{l, r\}\}$  et  $n^* = \inf\{p \in \mathbb{N} | \widehat{S}_p^{\mathbf{g}} \in \{l, r\}\}$ . Par la propriété de Markov forte on obtient, pour  $x = x_j$ ,

$$\hat{u}(x_j) = \mathbb{E}^{x_j}[\mathbb{E}[\psi(\widehat{S}_{n^*}^{\mathbf{g}}) | \widehat{S}_1^{\mathbf{g}}]] = \mathbb{E}^{x_j}[\hat{u}(S_1)] = \hat{u}(x_{j+1})\pi(j, j+1) + \hat{u}(x_{j-1})\pi(j, j-1).$$

Soit  $\mathbf{g} = \{x_j\}_{j=0, \dots, J}$  la grille sur  $(l, r)$  avec  $l = x_0$  et  $r = x_J$ . Soient les vecteurs  $U = (\hat{u}(x_1), \dots, \hat{u}(x_{J-1}))^\top$  et  $F = (\alpha\pi(1, 0), 0, \dots, 0, \beta\pi(J-1, J))^\top$ , et soit la matrice  $\Pi$  la matrice tribande dont les coefficients non nuls sont les  $\Pi(j, j \pm 1) = \pi(j, j \pm 1)$ . Le vecteur  $U$  est solution du système linéaire

$$(I - \Pi)U = F.$$

**Dernière remarque.** Pour conclure ce chapitre qui traite de considérations numériques signalons que, comme on a étudié la convergence de nos schémas  $\widehat{X}$  vers  $X$ , on aurait pu étudier la convergence de fonctionnelles de  $\widehat{X}$  du type

$$f(\widehat{X}_t) \exp\left[-\int_0^t c(\widehat{X}_r) dr\right] + \int_0^t g(t-s, \widehat{X}_s) \exp\left[-\int_0^s c(\widehat{X}_r) dr\right] ds.$$

Cela aurait permis d'utiliser nos algorithmes pour le cas de problèmes paraboliques du type suivant (cf [KS91] Section 4.4).

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) & = Lu(t, x) - cu(t, x) + g(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) & = f(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



# Bibliographie

- [Aro68] D.G. Aronson. *Non-Negative Solutions of Linear Parabolic Equations*. Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 607-694.
- [BC05] R.F. Bass et Z.-Q. Chen. *One-dimensional stochastic differential equations with singular and degenerate coefficients*. Sankhya 67 (2005), 19-45.
- [BLP78] A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of Probabilities Measures*. John Wiley & Sons, 1968.
- [Bre68] L. Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Series in Statistics, 1968.
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [Cha98] K.S. Chan. *Weak consistency of the Euler method for numerically solving stochastic differential equations with discontinuous coefficients*. Stochastic Process. Appl. 76 :1 (1998), 33-44.
- [Dag89] G. Dagan. *Flow and transport in porous formation*. Springer, New York, 1989.
- [DDG05] M. Decamps, A. De Schepper et M. Goovaerts. *Applications of  $\delta$ -function perturbation to the pricing of derivative securities*. Physica A 342 :3-4 (2004), 677-692.
- [DGS05] M. Decamps, M. Goovaerts et W. Schoutens. *Self exciting threshold interest rates models*. Prépublication.
- [EK86] S.N. Ethier et T.G. Kurtz. *Markov processes. Characterization and convergence*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1986.
- [Éto06] P. Étoré. *On random walk simulation of one-dimensional diffusion processes with discontinuous coefficients*. Electronic Journal of Probability, vol. 11 (2006), 249-275.
- [ÉL06] P. Étoré et A. Lejay. *A Donsker theorem to simulate one-dimensional processes with measurable coefficients*. Soumis à l'ESAIM P&S en mai 2006. Accepté et en cours de révision.
- [Fau99] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulos, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst et D. Lingrand. *The inverse EEG and MEG problems : The adjoint state approach I : The continuous case*. Rapport de Recherche INRIA RR-3673, 1999.

- [FW94] M. Freidlin et A.D. Wentzell. *Necessary and Sufficient Conditions for Weak Convergence of One-Dimensional Markov Processes*. Festschrift dedicated to 70<sup>th</sup> Birthday of Professor E.B. Dynkin, Birkhäuser (1994), 95-109.
- [GT83] D. Gilbarg et N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 1983.
- [HS81] J.M. Harrison et L.A. Shepp. *On skew Brownian Motion*, The Annals of Probability 9 (1981), 309-313.
- [IM74] K. Itô et H.P. McKean. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer, Berlin, 1974.
- [Jan84] R. Janssen *Difference methods for stochastic differential equations with discontinuous coefficients*. Stochastics 13 :3 (1984), 199-212.
- [KS91] I. Karatzas et S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York, 1991.
- [KP92] P.E. Kloeden et E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 1992.
- [JKO94] V.V. Jikov, S.M. Kozlov et O.A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer, 1994.
- [LSU68] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov et N.N. Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, 1968.
- [LRU68] O.A. Ladyzenskaja, V.J. Rivkind et N.N. Ural'ceva. *The classical solvability of diffraction problems*. Trudy Mat. Inst. Steklov 92 (1966), 116-146.
- [Leg85] J.F. Le Gall. *One-dimensional stochastic differential equations involving the local time of the unknown process*, Stochastic Analysis and Applications, vol. 1095 of Lect. Notes in Math. 51-82, Springer 1985.
- [Lej00] A. Lejay. *Méthodes probabilistes pour l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence : cas linéaires et semi-linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, France, 2000.
- [Lej05] A. Lejay. *Stochastic Differential Equations Driven by Processes Generated by Divergence Form Operators I : A Wong-Zakai Theorem*. Prépublication, Institut Élie Cartan, Nancy, France, 2005.
- [Lej06] A. Lejay. *On the construction of the Skew Brownian Motion*. Prépublication.
- [LM06] A. Lejay et M. Martinez. *A scheme for simulating one-dimensional diffusion processes with discontinuous coefficients*. The Annals of Applied Probability 16 :1 (2006), 107-139.
- [LM68] J.L. Lions et E. Magenes *Problèmes aux limites non homogènes, vol. I*. Dunod, 1968.
- [Mar04] M. Martinez. *Interprétations probabilistes d'opérateurs sous forme divergence et analyse de méthodes numériques probabilistes associées*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, France, 2004.

- [MT97] G.N. Milstein et M.V. Tretyakov. *Space-time random walk for stochastic differential equations in bounded domain*. The Annals of Applied Probability 9 :3 (1999), 732-779.
- [Nak72] S. Nakao. *On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations*. Osaka J. Math. 9 (1972), 513-518.
- [OC03] O. Ovaskainen et S.J. Cornell. *Biased movement at a boundary and conditionnal occupancy times for diffusion processes*. The Journal of Applied Probability 40 :3 (2003), 557-580.
- [Ova04] O. Ovaskainen. *Habitat-specific movement parameters estimated using mark-recapture data and a diffusion model*. Ecology 85 :1 (2004), 242-257.
- [OZ05] H. Owhadi and L. Zhang. *Metric based up-scaling*. Accepté et à paraître dans Communications on Pure and Applied Mathematics (2005).
- [PS78] S.C. Port et C.J. Stone *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Academic Press, New York, 1978.
- [RY91] D. Revuz et M. Yor. *Continuous Martingale and Brownian Motion*. Springer, Heidelberg, 1991.
- [Roz96] A. Rozkosz. *Stochastic Representation of Diffusions Corresponding to Divergence Form Operators*. Stochastics Stochastics Reports 57 (1996), 129-157.
- [Str88] D. W. Stroock. *Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators*. Springer, Lecture Notes in Mathematics, Seminaire de Probabilités XXII 1321 (1988), 316-347.
- [SZ97] D. W. Stroock et W. Zheng. *Markov chain approximations to symmetric diffusions*. Ann. IHP, Probabilités et Statistiques 33 (1997), 619-649.
- [Wal78] J.B. Walsh. *A Diffusion with a Discontinuous Local Time*. Société Mathématique de France, Astérisque 52-53 (1978) 37-45.
- [Yan02] L. Yan. *The Euler scheme with irregular coefficients*. Ann. Probab. 30 :3 (2002), 1172-1194.
- [ZKOT79] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik et K. T'en Ngoan. *Averaging and G-convergence of Differential Operators*. Russian Math. Survey 34 :5 (1979), 69-147.
- [ZKO81] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov et O.A. Oleinik. *G-convergence of Parabolic Operators*. Russian Math. Survey 36 :1 (1981), 9-60.





Monsieur **ETORE Pierre**

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1**  
en **MATHEMATIQUES APPLIQUEES**

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER *11/12/06*

Nancy, le *19/12/06*

Le Président de l'Université







**Résumé :** Dans cette thèse on étudie des schémas numériques pour des processus  $X$  à coefficients discontinus. Un premier schéma pour le cas unidimensionnel utilise les Équations Différentielles Stochastiques avec Temps Local. En effet en dimension un les processus  $X$  sont solutions de telles équations. On construit une grille sur la droite réelle, qu'une bijection adéquate transforme en une grille uniforme de pas  $h$ . Cette bijection permet de transformer  $X$  en  $Y$  qui se comporte localement comme un Skew Brownian Motion, pour lequel on connaît les probabilités de transition sur une grille uniforme, et le temps moyen passé sur chaque cellule de cette grille. Une marche aléatoire peut alors être construite, qui converge vers  $X$  en  $h^{1/2}$ . Toujours dans le cas unidimensionnel on propose un deuxième schéma plus général. On se donne une grille non uniforme sur la droite réelle, dont les cellules ont une taille proportionnelle à  $h$ . On montre qu'on peut relier les probabilités de transition de  $X$  sur cette grille, ainsi que le temps moyen passé par  $X$  sur chacune de ses cellules, à des solutions de problèmes d'EDP elliptiques ad hoc. Une marche aléatoire en temps et en espace est ainsi construite, qui permet d'approcher  $X$  à nouveau en  $h^{1/2}$ . Ensuite on présente des pistes pour adapter cette dernière approche au cas bidimensionnel et les problèmes que cela soulève. Enfin on illustre par des exemples numériques les schémas étudiés.

**Mots-clés :** diffusions en dimension un, EDS avec temps local, Skew Brownian Motion, marche aléatoire, théorème de Donsker, formule de Feynman-Kac, problèmes d'EDP elliptiques, schémas numériques.

**Summary :** In this thesis numerical schemes for processes  $X$  generated by operators with discontinuous coefficients are studied. A first scheme for the one-dimensional case uses Differential Stochastic Equations with Local Time. Indeed, in dimension one, the processes  $X$  are solutions of such equations. We construct a grid on the real line, that is transformed by a proper bijection in a uniform grid of step  $h$ . This bijection also transforms  $X$  in some process  $Y$ , that behaves locally like a Skew Brownian Motion (SBM). We know the transition probabilities of the SBM on a uniform grid, and the average time it spends on each of its cells. A random walk can then be built, that converges to  $X$  in  $h^{1/2}$ . A second scheme, that is more general, is proposed still for the dimension one. A non uniform grid on the real line is given, whose cells have a size proportional to  $h$ . Both the transition probabilities of  $X$  on this grid, and the average time it spends on each of its cells, can be related to the solutions of proper elliptic PDE problems, using the Feynman-Kac formula. A time-space random walk can then be built, that converges to  $X$  again in  $h^{1/2}$ . Next some directions to adapt this approach to the two-dimensional case are given. Finally numerical examples illustrate the studied schemes.

**Keywords :** one-dimensional diffusion processes, SDE with local time, Skew Brownian Motion, random walk, Donsker theorem, Feynman-Kac formula, elliptic PDE problems, numeric schemes.