



# Estimation de retard dans des conditions expérimentales passives : application à l'identification de bief de rivière

Magalie Thomassin

## ► To cite this version:

Magalie Thomassin. Estimation de retard dans des conditions expérimentales passives : application à l'identification de bief de rivière. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2005. Français. NNT : 2005NAN10024 . tel-01746912

HAL Id: tel-01746912

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01746912v1>

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



**UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique**  
**École Doctorale IAEM Lorraine**  
**DFD Automatique et Production Automatisée**

## THÈSE

présentée pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1**  
(Spécialité Automatique, Traitement du Signal et Génie Informatique)

par

**Magalie THOMASSIN**

**S.C.D. - U.H.P. NANCY 1**  
**BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES**  
Rue du Jardin Botanique - BP 11  
54601 VILLERS-LES-NANCY Cedex

# Estimation de retard dans des conditions expérimentales passives – Application à l'identification de bief de rivière –

Soutenue publiquement le 22 juin 2005

### Composition du jury

*Président :* M. FLIESS      Directeur de Recherche au CNRS

*Rapporteurs :* D. GEORGES      Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble  
J.-P. RICHARD      Professeur à l'École Centrale de Lille

*Examinateurs :* M. DAROUACH      Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1  
A. RICHARD      Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1  
T. BASTOGNE      Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

A mes parents  
A Mamie  
A El-Hadi

# Remerciements

Je tiens à remercier avant tout, les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

J'exprime ma gratitude à M. Didier GEORGES, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour avoir bien voulu être rapporteur et pour ses remarques constructives. Merci de m'accueillir en tant qu'ATER l'année prochaine au sein de votre équipe.

Je remercie M. Jean-Pierre RICHARD, Professeur à l'École Centrale de Lille, pour avoir accepté de rapporter sur ce manuscrit et d'avoir examiné minutieusement ce travail. Merci pour votre accueil lors de ma visite de « près-soutenance » afin de discuter de mon travail.

J'adresse mes remerciements à M. Michel FLIESS, Directeur de Recherche au CNRS, pour avoir accepté d'apporter son regard critique à ce travail et pour m'avoir toujours envoyée des compliments encourageants.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy 1, pour sa participation au jury et son accueil à Longwy lors de réunion de travail.

Je remercie particulièrement mes deux co-encadrants de thèse :

M. Alain RICHARD, Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy 1,  
pour m'avoir accueillie dès mon DEA dans son équipe de recherche au sein du CRAN,  
pour m'avoir communiquée sa rigueur scientifique,  
pour m'avoir toujours poussée à aller de l'avant ;  
M. Thierry BASTOGNE, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré Nancy 1,  
pour tous ses bons conseils,  
pour son soutien dans les moments de doute,  
pour s'être toujours inquiété de mon avenir.

Merci à David BRIE, Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy 1, pour ses « coups de pouce » et sa désormais célèbre question : « Alors Mag, ça converge ? ». Maintenant que je peux te répondre : « Oui Dav', ça converge ! ».

Merci à tous mes amis du « couloir » du quatrième étage du CRAN, et d'ailleurs, pour tous les moments inoubliables de travail et de franche rigolade.

Merci à *Vincent, Samir, Mickaël, Ludovic, Yann, Stéphane T., Fateh, Sinuhé* et les p'ti nouveaux *Sébastien* et *Cyril*, sans oublier *Eric et Stephane L..*

Sans oublier les filles, Merci à *Marion, Sabine* et ses cop's.

Merci aux CNAM, *Christophe, Eric* et *Jean-Marc*. Leur passage a été rapide, mais il est difficile de les oublier.

Merci également à *Fred, Taha, Jean-Marie, Hugues, Patrick, Cédric, Didier, Jean-Christophe, Dominique, Christophe* et autres permanents, sans oublier *Hassan*, qui est parti au soleil (le chanceux !), pour leur encouragement et toutes les discussions que l'on a eues à la cafét'.

***Special thanks to***

*Manu*, pour tous ses conseils et ses histoires. Tu vas me manquer. A bientôt au Mexique !

*Philippe et Fabienne*, pour leur amitié et les moments de franche rigolade passés ensemble.

*Saïd*, pour nos interminables discussions pour refaire le monde et pour tous les bons moments.

*Olivier*, pour avoir toujours pris le temps de résoudre mes petits soucis informatiques.

*Marc*, pour tout ce que j'apprends quand je discute avec toi ou lorsque l'on tape le carton.

*Hicham*, je ne trouve pas les mots, ça doit être dû à ton « terroir » !

Je ne remercierais jamais assez mes parents et *Mamie* pour leur soutien indéfectible et tous les sacrifices qu'ils font pour moi.

Merci à *El-Hadi* pour son aide, sa patience et surtout son amour.

Merci au reste de ma famille et à la famille *DJERMOUNE* pour leur soutien.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>viii</b>
<b>Notations</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Position du problème</b>	<b>5</b>
1.1 Modélisation d'un bief de rivière aménagé . . . . .	5
1.2 Estimation du retard . . . . .	10
1.3 Les conditions expérimentales passives . . . . .	15
1.3.1 Les contraintes de structure . . . . .	15
1.3.2 L'information contenue dans les données . . . . .	18
1.3.2.1 Notion d'excitation persistante . . . . .	18
1.3.2.2 Étude pratique de l'excitation persistante des données . . . . .	20
1.4 Conclusion . . . . .	24
<b>2 Identifiabilité et discernabilité</b>	<b>25</b>
2.1 Structures, modèles et comportements . . . . .	27
2.2 Identifiabilité . . . . .	29
2.2.1 Identifiabilité <i>a priori</i> . . . . .	32
2.2.1.1 Cadre d'étude de l'identifiabilité <i>a priori</i> . . . . .	32
2.2.1.2 Définitions de l'identifiabilité <i>a priori</i> . . . . .	33
2.2.1.3 Méthodes d'identifiabilité <i>a priori</i> . . . . .	34
2.2.1.4 Identifiabilité <i>a priori</i> de structures stochastiques . . . . .	35
2.2.1.5 Objectifs de l'identifiabilité . . . . .	36
2.2.2 Identifiabilité <i>a posteriori</i> . . . . .	37
2.2.2.1 Cadre d'étude de l'identifiabilité <i>a posteriori</i> . . . . .	37
2.2.2.2 Définitions de l'identifiabilité <i>a posteriori</i> . . . . .	38
2.2.2.3 Méthode d'identifiabilité <i>a posteriori</i> locale . . . . .	38
2.2.2.4 Lien avec la continuité de la solution . . . . .	40
2.2.2.5 Identifiabilité <i>a posteriori</i> quantitative . . . . .	41

2.2.2.6	Lien avec le conditionnement du problème . . . . .	42
2.3	Discernabilité . . . . .	43
2.4	Identifiabilité d'un bief de rivière aménagé . . . . .	44
2.5	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Méthodes d'estimation de retard</b>	<b>49</b>
3.1	Estimation de retard à TD (structure mono–entrée/mono–sortie) : un état de l'art . .	50
3.1.1	Méthodes fondées sur l'estimation d'une RIF . . . . .	51
3.1.1.1	Détection du début de la partie non–nulle de la RIF . . . . .	52
3.1.1.2	Séparation fréquentielle du retard et de la dynamique . . . . .	54
3.1.2	Méthodes fondées sur l'estimation d'un transfert rationnel . . . . .	55
3.1.2.1	Méthode du numérateur augmenté . . . . .	55
3.1.2.2	Méthode explicite . . . . .	57
3.1.3	Méthodes fondées sur l'estimation des statistiques d'ordres 2 et 3 des données entrée–sortie . . . . .	59
3.1.3.1	Méthode de corrélation . . . . .	59
3.1.3.2	Méthode des cumulants . . . . .	60
3.1.4	Conclusion . . . . .	64
3.2	Étude d'applicabilité à un bief de rivière . . . . .	65
3.2.1	Cas de la structure n° 1 (approche directe) . . . . .	65
3.2.1.1	Méthodes fondées sur l'estimation d'une RIF . . . . .	66
3.2.1.2	Méthodes fondées sur l'estimation d'un transfert rationnel . . . . .	66
3.2.1.3	Généralisation de la méthode de corrélation . . . . .	69
3.2.2	Cas de la structure n° 2 (approche indirecte) . . . . .	76
3.2.2.1	Méthodes fondées sur l'estimation d'une RIF . . . . .	77
3.2.2.2	Méthodes fondées sur l'estimation d'un transfert rationnel . . . . .	77
3.2.2.3	La méthode de corrélation . . . . .	78
3.2.3	Conclusion . . . . .	80
3.3	Application à un bief de rivière aménagé . . . . .	80
3.4	Conclusion . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Une approche bayésienne pour l'identification de bief de rivière</b>	<b>83</b>
4.1	Information disponible <i>a priori</i> . . . . .	84
4.2	Identification d'une réponse impulsionale infinie tronquée . . . . .	85
4.2.1	Position du problème . . . . .	85
4.2.2	Estimateur du maximum de vraisemblance . . . . .	86
4.2.2.1	Exemple de simulation . . . . .	87
4.2.2.2	Robustesse vis–à–vis du modèle du bruit du bief . . . . .	88
4.2.3	Introduction de douceur par une approche bayésienne : estimateur du maximum <i>a posteriori</i> (MAP) . . . . .	90
4.2.3.1	Principe . . . . .	90

4.2.3.2	Cas du modèle linéaire gaussien avec introduction de douceur . . . . .	90
4.2.3.3	Exemple de simulation . . . . .	92
4.3	Estimation conjointe de la RIF et du retard . . . . .	94
4.3.1	Principe . . . . .	94
4.3.1.1	Fonction de vraisemblance . . . . .	95
4.3.1.2	Densité de probabilité <i>a priori</i> de la RIF . . . . .	95
4.3.1.3	Densité de probabilité <i>a priori</i> du retard . . . . .	96
4.3.1.4	Critère . . . . .	97
4.3.1.5	Optimisation du critère . . . . .	98
4.3.2	Exemple de simulation (hyperparamètres fixés) . . . . .	98
4.3.3	Estimation des hyperparamètres . . . . .	103
4.3.3.1	Principe . . . . .	103
4.3.3.2	Méthode d'optimisation du critère . . . . .	104
4.3.3.3	Exemple de simulation . . . . .	106
4.3.3.4	Dégénérescence de la densité de probabilité <i>a posteriori</i> conjointe . . . . .	106
4.3.3.5	Solution à la dégénérescence . . . . .	111
4.3.4	Exemple de simulation (hyperparamètres estimés) . . . . .	114
4.4	Application à un bief de rivière aménagé . . . . .	118
4.4.1	Estimation d'une RIF par MV . . . . .	118
4.4.2	Estimation d'une RIF par MAP . . . . .	118
4.4.3	Estimation d'une RIF et du retard par MAPC . . . . .	120
4.4.4	Analyse des résultats . . . . .	121
4.5	Conclusion . . . . .	122
<b>Conclusion</b>		<b>125</b>
<b>A Méthode de l'erreur de sortie</b>		<b>129</b>
<b>B Estimation d'une réponse impulsionale finie</b>		<b>133</b>
B.1	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	133
B.1.1	Principe . . . . .	134
B.1.2	Cas du modèle linéaire gaussien . . . . .	134
B.2	Analyse de corrélation . . . . .	135
B.2.1	Approche classique : méthode du maximum de vraisemblance. . . . .	136
B.2.2	Approche fréquentielle : méthode de division spectrale. . . . .	136
B.2.3	Approche par filtrage des signaux. . . . .	137
<b>C Test de Page–Hinkley (CUSUM)</b>		<b>139</b>
<b>D Équations de Yule–Walker généralisées</b>		<b>141</b>
<b>Liste des figures</b>		<b>149</b>

<b>Liste des tableaux</b>	<b>151</b>
<b>Liste des algorithmes</b>	<b>153</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>162</b>

# Notations

## Opérateurs et conventions

$\hat{a}$	une estimée de $a$ .
$(a \star b)$	produit de convolution.
$\text{Re } [a]$	partie réelle de $a$ .
$\text{Im } [a]$	partie imaginaire de $a$ .
$a \propto b$	$a$ proportionnel à $b$ .
$\mathbf{E} [X]$	espérance de la variable aléatoire $X$ .
$c_{xx}$	fonction d'autocorrélation de $x$ .
$c_{xy}$	fonction d'intercorrélation entre $x$ et $y$ .
$\text{cum}_{xx}$	cumulant d'ordre 3 de $x$ .
$\text{cum}_{xy}$	cumulant d'ordre 3 entre $x$ et $y$ .
$\mathbf{I}$	matrice identité de dimension définie par le contexte.
$A^T$	transposée de la matrice $A$ .
$A^{-1}$	inverse de la matrice $A$ (régulière).
$A^\dagger$	inverse généralisée de la matrice $A$ .
$\kappa(A)$	conditionnement de la matrice $A$ .
$\ \cdot\ $	norme euclidienne.
$\text{appl}(A, B)$	ensemble des applications de $A$ vers $B$ .

## Symboles et fonctions

$t$	temps continu.
$k$	indice temporel (temps discret).
$f$	fréquence.
$T_e$	période d'échantillonnage (en secondes).
$f_e$	fréquence d'échantillonnage (en Hz).
$N$	nombre de données.
$M$	nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle finie.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.

$\tau$	retard (en secondes).
$d$	indice du retard à temps discret (sous l'hypothèse : $\tau = d \times T_e$ ).
$d_{\min}, d_{\max}$	bornes du retard connues <i>a priori</i> .
$\mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$	$= \{d \in \mathbb{N}^*/d_{\min} \leq d \leq d_{\max}\}$ ensemble des retards admissibles <i>a priori</i> .
$u(t)$ et $u[k]^1$	signaux d'entrée à temps continu et à temps discret.
$y(t)$ et $y[k]$	signaux de sortie à temps continu et à temps discret.
$v(t)$ et $v[k]$	bruit et perturbations à temps continu et à temps discret.
$q^{-1}$	opérateur de retard : $q^{-1}u[k] = u[k - 1]$ .
$s$	variable de la transformée de Laplace.
$G(s)$	fonction de transfert à temps continu.
$\bar{u}(s)$	transformée de Laplace de la variable $u(t)$ .
$z$	variable de la transformée en $z$ .
$H(z)$	fonction de transfert à temps discret.
$h[k]$	échantillons $k$ de la réponse impulsionnelle.
$\mathcal{H}(f)$	transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle.
$\mathcal{M}$	structure de modèle.
$\boldsymbol{\theta}$	vecteur des paramètres.
$p$	nombre de paramètres.
$\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^p$	ensemble des paramètres admissibles <i>a priori</i> .
$\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$	modèle de la structure $\mathcal{M}$ .
$\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$	comportement entrée–sortie de la structure $\mathcal{M}$ .
$\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta})$	comportement entrée–sortie du modèle $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ .
$L$	longueur du bief.
$Q_e(t)$	le débit entrant.
$Q_s(t)$	le débit sortant.
$u_{Q_e}[k]$	la commande de débit entrant.
$u_{Q_s}[k]$	la commande de débit sortant.
$h_L(t)$	la hauteur d'eau au niveau de l'aménagement aval.

## Abréviations et acronymes

VA	variable(s) aléatoire(s).
i.i.d.	indépendantes et identiquement distribuées.
SBPA	séquence binaire pseudo-aléatoire.
RSB	rapport signal–sur–bruit (en dB).
RI	réponse impulsionnelle.
RIF	réponse impulsionnelle finie.

<sup>1</sup>Les variables à temps discret sont notées  $x[k]$  et correspondent à l'échantillonnage temporel avec une période constante  $T_e$  de la variable à temps continu  $x(t)$  :  $x[k] = x(kT_e)$ .

- MA      moyenne ajustée.  
AR      auto-régressif.  
MV      maximum de vraisemblance.  
MAP     maximum *a posteriori*.  
MAPC    maximum *a posteriori* conjoint.

# Introduction

Afin d'analyser, de prévoir ou de commander le comportement d'un système, il est nécessaire de déterminer un modèle de ce dernier, c'est-à-dire un ensemble d'équations liant ses entrées et ses sorties. Cette étape correspond à la *modélisation* du processus. Il existe deux approches permettant de résoudre ce problème. La première consiste à utiliser les principes de la physique (ou les *lois de la Nature*) gouvernant le système. On parle alors de modèles *de connaissance*. Une alternative à cette approche est fondée sur une procédure expérimentale consistant à mesurer et à analyser les entrées et les sorties du système. On parle alors de *modèles comportementaux* (ou *boîte noire*). Dans les deux cas, des paramètres peuvent être inconnus (ou mal connus). La détermination d'un modèle à partir des données entrée–sortie, c'est-à-dire l'*identification* du modèle, constitue un *problème inverse*, par opposition au *problème direct* consistant à déterminer la (ou les) sortie(s) connaissant la (ou les) entrée(s) et les paramètres du modèle.

En raison de la complexité de certains systèmes réels et du manque de données disponibles, un problème inverse peut être *mal posé* au sens de HADAMARD [HADAMARD (1902) ; TIKHONOV et ARSENINE (1976) ; IDIER (2001)], c'est-à-dire qu'il ne satisfait pas l'une des conditions d'*existence*, d'*unicité* ou de *continuité* de la solution. La condition d'*existence* signifie qu'il existe une solution satisfaisant les équations du modèle. L'exigence d'*unicité* garantie qu'il n'existe qu'une solution, c'est-à-dire qu'une seule combinaison de valeur des paramètres permet un ajustement optimum sur les observations. Enfin, on parle de *continuité* lorsque la dépendance de la solution est continue par rapport aux données. Par ailleurs, un problème *bien–posé* peut être *mal–conditionné* [DEMOMENT *et al.* (2001)]. En effet, la *continuité* est une condition nécessaire, mais pas suffisante, de stabilité de la solution. Par conséquent, bien que le problème soit bien–posé, si son conditionnement est mauvais, alors sa solution sera toujours sensible aux incertitudes des observations. Par conséquent, il faut non seulement veiller à ce que le problème d'estimation soit bien–posé, mais aussi bien–conditionné.

Le contexte expérimental dans lequel sont recueillies les données joue un rôle très important sur la formalisation du problème. En effet, il rassemble l'ensemble des facteurs sur lesquels peut agir l'utilisateur afin de poser et de conditionner le problème le mieux possible. De ce fait, les choix effectués au niveau de la forme des entrées, de la localisation et du type de capteurs et d'actionneurs, des instants de mesure, etc., constituent une étape très importante qu'il faut adapter pour faciliter la résolution du problème d'estimation. Toutefois, la planification d'expérience est parfois

impossible, le plus souvent pour des raisons d'économie et/ou de sécurité. Dans ce cas, les données à disposition sont obtenues lors du fonctionnement normal (nominal) du processus, dans un contexte expérimental *passif*. Il faut alors mettre en place des moyens pour restaurer les caractères bien-posé et bien-conditionné du problème.

La théorie de l'*inversion généralisée* (dont fait partie la célèbre solution des Moindres Carrés) offre une alternative permettant de bien-poser le problème [DEMOMENT *et al.* (2001)]. Le mauvais conditionnement du problème peut être réglé par des méthodes de régularisation. Ces dernières peuvent être classées en deux grandes familles : celles qui procèdent par contrôle de dimension (décomposition tronquée en valeurs singulières, paramétrisation parcimonieuse) et celles qui opèrent par minimisation d'un critère composite ou par optimisation sous contrainte. Toutefois, ces méthodes nécessitent des choix (comme celui de la fonctionnelle régularisante, par exemple) dont leur justification est empirique. L'approche bayésienne offre alors les outils nécessaires permettant de justifier ces choix et va même jusqu'à dépasser ces méthodes en offrant un cadre cohérent et complet à la prise en compte de connaissances *a priori*.

Le cadre de recherche de cette thèse a été déterminé suite à un problème pratique soulevé lors d'une étude antérieure réalisée par le CRAN pour le Centre d'Ingénierie Hydraulique d'EDF. Cette étude à caractère appliqué, terminée en décembre 2000 et sur laquelle ont travaillé T. BASTOGNE et H. GARNIER, avait pour objectif d'identifier le comportement de biefs de rivière aménagés à partir de données de production [GARNIER et BASTOGNE (2000)]. Cette identification reposait sur une valeur du retard entre le débit en amont et le niveau en aval du bief, comprise dans un certain intervalle. Ce dernier était obtenu à partir de valeurs empiriques du retard et de mesures réalisées à partir de tests d'intumescences. Cependant, ces valeurs ont été remises en cause par les résultats expérimentaux. Ainsi, une des principales perspectives de cette étude a été d'améliorer ces connaissances en estimant le retard à partir des données à notre disposition, c'est-à-dire obtenues en condition d'exploitation des installations.

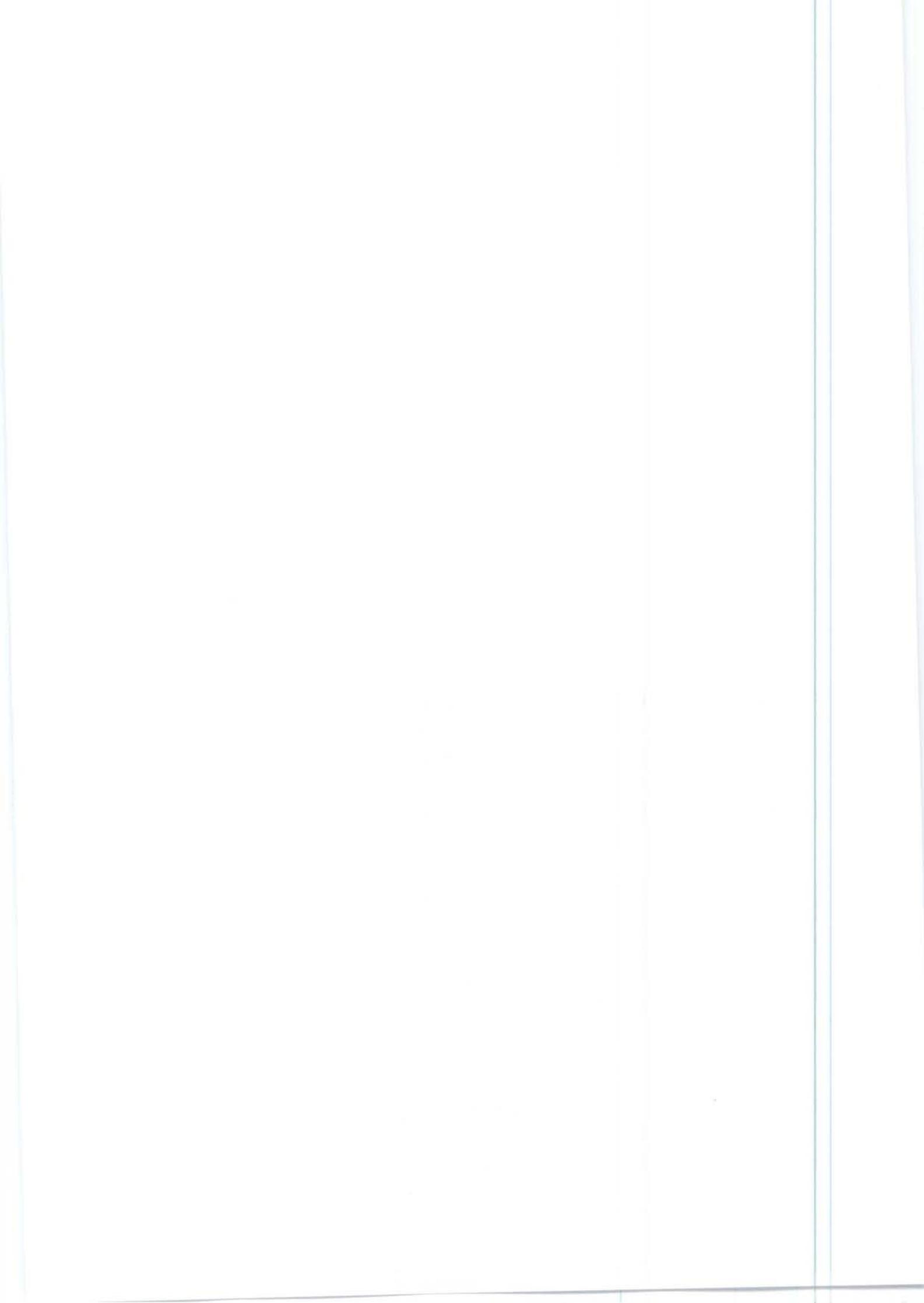
L'objectif du premier chapitre est de positionner le problème. Il contient une description du comportement du bief de rivière aménagé et des conditions d'exploitation dans lesquelles ont été recueillies les données. Ceci nous a conduit à proposer une modélisation simplifiée du comportement du système dans les conditions expérimentales passives. La principale contribution de ce chapitre est une analyse de l'échec des méthodes classiques d'identification en présence des données réelles disponibles. Enfin, ce chapitre contient une étude du niveau d'information des données disponibles.

Le second chapitre est principalement consacré aux concepts de l'identifiabilité et dans une moindre mesure à ceux de discernabilité. Devant la richesse des travaux portant sur le concept d'identifiabilité et ses différentes définitions plus ou moins pertinentes [LECOURTIER et WALTER (1981)], nous proposons la classification des différents concepts d'identifiabilité suivante : identifiabilités *a priori*, *a posteriori* et numérique. La première contribution de ce chapitre est de proposer une définition de l'identifiabilité *a posteriori* qui analyse l'identifiabilité dans un cadre expérimental

(avec les données disponibles). Celle-ci nous amène alors au développement de deux méthodes d'identifiabilité *a posteriori*, l'une qualitative et l'autre quantitative. Une application de ces méthodes au cas du bief met en évidence la difficulté de l'estimation du retard à partir des données disponibles.

Le chapitre 3 a pour objectif d'effectuer un état de l'art des méthodes d'estimation de retard à temps discret en considérant le retard comme un multiple de la période d'échantillonnage. Une étude d'applicabilité de ces méthodes au cas du bief de rivière aménagé sera également menée. Cela nous conduira à la généralisation, au cas de la structure de modèle du bief, d'une méthode fondée sur les corrélations des signaux entrée–sortie et présentée dans [ZHENG et FENG (1990)]. Les méthodes retenues seront analysées au travers d'exemples de simulation et d'une application au bief.

Afin de pallier les inconvénients engendrés par les conditions expérimentales passives (structure bouclée et manque d'information des données), le chapitre 4 vise à développer une méthode originale d'estimation de retard prenant en compte des informations *a priori*. Celui-ci est estimé grâce à la détection d'une discontinuité dans une réponse impulsionale par une approche bayésienne. Cette méthode, non-supervisée, présente l'avantage d'être efficace et simple à mettre en œuvre et constitue la principale contribution de cette thèse.



# Chapitre 1

## Position du problème

*Le sujet de cette thèse est issu d'un problème soulevé lors d'une étude antérieure réalisée par le CRAN pour le Centre d'Ingénierie Hydraulique d'EDF. Cette étude à caractère appliqué, terminée en décembre 2000, avait pour objectif d'identifier le comportement de biefs de rivière aménagés à partir de données de production [GARNIER et BASTOGNE (2000)]. Pour effectuer ce travail, des valeurs empiriques du retard étaient disponibles. Cependant, ces valeurs ont été remises en cause par les résultats expérimentaux. Il fallut donc estimer ces retards à partir des données à disposition, mais ce travail s'avéra difficile à cause d'un cadre expérimental passif. Il n'était en effet pas possible d'imposer un plan d'expérience.*

*Ce chapitre commence par décrire et modéliser le comportement d'un bief de rivière aménagé. Ensuite, le retard est estimé à partir des données à notre disposition, par une approche fondée sur la minimisation d'une fonction de l'erreur de sortie et une recherche exhaustive vis-à-vis du retard. Malheureusement, les résultats sont inacceptables. Par conséquent, une recherche des causes de cet échec est effectuée. Enfin, les conditions expérimentales, premières responsables de cet échec (car la réalisation d'une expérimentation imposant des excitations appropriées donnerait sans aucun doute des résultats acceptables), sont analysées afin de proposer une méthode d'estimation conduisant à de meilleurs résultats malgré ces conditions expérimentales passives.*

### 1.1 Modélisation d'un bief de rivière aménagé

Un *bief de rivière aménagé* est composé d'un bief de rivière (c'est-à-dire d'une section du cours d'eau), de plusieurs kilomètres, délimité par deux aménagements hydroélectriques situé en amont et en aval du bief (voir schéma à la figure 1.1). La photo 1.2 représente un exemple de ces aménagements, constitué d'un barrage (équipé de vannes) et d'une usine de production hydroélectrique (équipée de turbines). Le bief étudié a une longueur d'environ 8 km et une largeur moyenne de 80 m. Par conséquent, étant donné sa longueur, des variations de débits en amont du bief produiront des effets en aval seulement au bout d'un certain temps à cause du temps de transport de la matière (c'est-à-dire au transport de l'eau). Cette durée correspond au retard que l'on cherche à estimer.

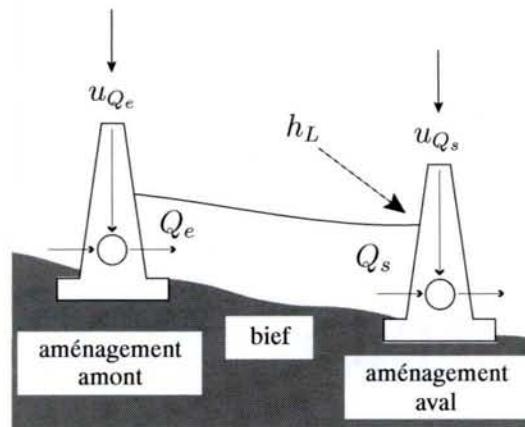


FIG. 1.1 – Bief de rivière aménagé (la distance entre les aménagements est de plusieurs kilomètres).

variable	désignation
$Q_e$	débit entrant
$Q_s$	débit sortant
$u_{Q_e}$	commande de débit entrant
$u_{Q_s}$	commande de débit sortant
$h_L$	hauteur d'eau au niveau de l'aménagement aval

TAB. 1.1 – Variables d'un bief de rivière aménagé.

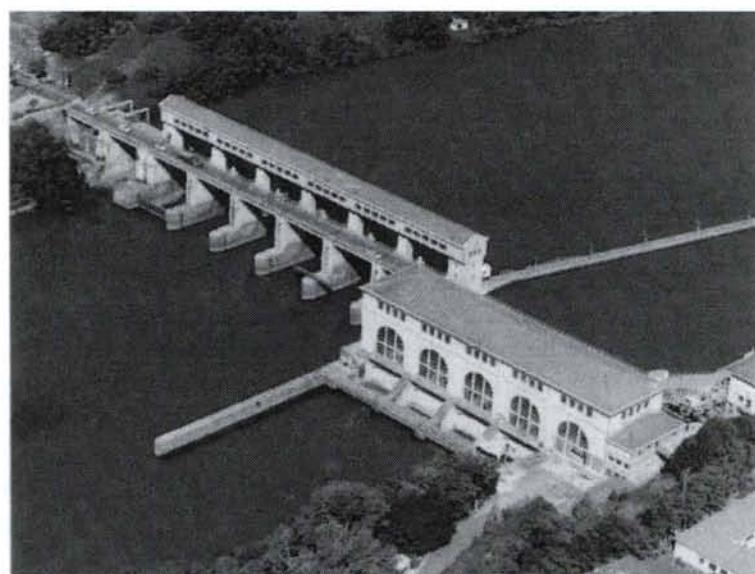


FIG. 1.2 – Exemple d'aménagement hydroélectrique.

Dans notre étude, le bief (sans les aménagements) est considéré comme un système à temps continu possédant deux entrées, correspondant aux débits entrant (en amont) et sortant (en aval), notées respectivement  $Q_e$  et  $Q_s$ , et une sortie, correspondant au niveau d'eau en aval du bief, notée  $h_L$  (qu'il est important de contrôler afin de respecter l'environnement). Le retard apparaît donc entre le débit entrant  $Q_e$  et le niveau d'eau en aval  $h_L$ . Notons qu'il est possible d'agir sur les débits, au niveau des barrages, par l'intermédiaire des signaux de commande que nous noterons  $u_{Q_e}$  et  $u_{Q_s}$  pour les aménagements amont et aval, respectivement. Le tableau 1.1 récapitule les différentes variables utilisées.

Un bief de rivière est un *système hydraulique à surface libre* car l'écoulement de l'eau, en contact avec l'atmosphère, est dû à la pente de fond du bief. Son comportement peut alors être modélisé par les équations de DE SAINT-VENANT [DE SAINT-VENANT (1871)] :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial z}{\partial x} + gSJ = \kappa q \frac{Q}{S}. \quad (1.2)$$

où :

- $S = S(x, t)$  est la section mouillée (en  $m^2$ ), c'est-à-dire la section (transversale) occupée par l'écoulement, au point  $x$  et à l'instant  $t$  ;
- $Q = Q(x, t)$  est le débit de l'écoulement (en  $m^3/s$ ) au point  $x$  et à l'instant  $t$  ;
- $z = z(x, t) = z_0 + h(x, t)$  est la cote absolue de l'eau (en  $m$ ) ;
- $J$  est la pente de frottement, calculée à partir de la formule de Manning–Strickler :

$$J = \frac{n^2 Q^2}{S^2 R^{4/3}},$$

où  $n$  est le coefficient de Manning qui est fonction de la rugosité des parois et  $R = S/P$  est le rayon hydraulique, quotient entre la section mouillée et le périmètre mouillé.

- $q = q(x, t)$  est le débit latéral par unité de longueur (en  $m^2/s$ ),  $q > 0$  : apport,  $q < 0$  : pertes ;  $\kappa$  est un nombre traduisant l'influence du débit latéral sur la quantité de mouvement ;
- $g$  est l'accélération de la pesanteur (en  $m/s^2$ ).

Ces équations sont obtenues à partir des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement d'un volume élémentaire du fluide sous les hypothèses suivantes [LITRICO (1999)] :

- l'écoulement est mono-dimensionnel ;
- la pente  $I$  du fond du bief est suffisamment faible pour satisfaire l'approximation :  $\sin I \approx I$  ;
- la masse volumique de l'eau est considérée comme constante ;
- la répartition des pressions est hydrostatique ;
- les effets de la viscosité interne sont négligeables devant les frottements externes.

La résolution de ces équations nécessite des conditions initiales (le débit et la cote en tout point à l'instant zéro) et deux conditions aux limites (par exemple une condition à l'amont en débit et une condition à l'aval en cote). Ce système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques non linéaires n'a pas de solution analytique. Cependant, il est possible de résoudre ces équations à l'aide de schémas numériques comme *le schéma de discréétisation de Preissmann* [GEORGES et LITRICO (2002)].

Le modèle de SAINT-VENANT est bien adapté aux canaux, pour lesquels la géométrie est bien connue [OOI *et al.* (2005)]. Toutefois, dans le cas des rivières, ce modèle est difficile à appliquer [LITRICO (1999)] car :

- la géométrie des rivières est rarement connue et est généralement variante dans l'espace. Les campagnes de mesure nécessaires sont d'un coût non négligeable, surtout lorsqu'il s'agit de rivières de plusieurs dizaines de kilomètres de long ;
- l'écoulement dans ces rivières est parfois torrentiel, ce qui pose problème à la plupart des schémas numériques de résolution des équations de SAINT-VENANT.

Pour ces raisons, nous sommes contraints d'utiliser un modèle simplifié permettant de reproduire les caractéristiques essentielles de la dynamique de ces systèmes en un point donnée du bief ( $x = L$ ,  $L$  étant la longueur du bief). Cette réduction du problème nous permet de passer d'une équation aux dérivées partielles à une équation différentielle. En effet, en supposant l'absence d'affluent, la dynamique d'un bief de rivière peut être décrite *approximativement* par une structure de modèle à temps continu, invariante et causale dont les éléments sont un retard pur (terme de transport) et un terme intégrateur (matérialisant le stockage de l'eau) [CUNO et THEOBALD (1998) ; THOMASSIN *et al.* (2004)] :

$$\overline{\Delta h_L}(s) = \frac{1}{A_s} (e^{-\tau s} \overline{\Delta Q_e}(s) - \overline{\Delta Q_s}(s)) + \overline{\delta h_L}(s), \quad (1.3)$$

où  $s$  est la variable de Laplace,  $\overline{\Delta h_L}(s)$ ,  $\overline{\Delta Q_e}(s)$  et  $\overline{\Delta Q_s}(s)$  sont respectivement les transformées de Laplace de  $\Delta h_L(t) = h_L(t) - h_L(0)$ ,  $\Delta Q_e(t) = Q_e(t) - Q_e(0)$  et  $\Delta Q_s(t) = Q_s(t) - Q_s(0)$ , et  $\overline{\delta h_L}(s)$  est la transformée de Laplace d'un terme représentant les bruits et les erreurs de modélisation. Enfin, le paramètre  $A$  représente la surface du bief (en  $m^2$ ) et  $\tau$  est le retard, dû au phénomène de transport de l'eau, entre le débit entrant par l'aménagement amont  $Q_e(t)$  et le niveau d'eau du bief en aval  $h_L(t)$ . Notons que ce retard varie lentement au cours du temps et peut donc être considéré comme constant sur une certaine période. En toute rigueur, la surface du bief  $A$  dépend du niveau d'eau. Toutefois, étant donné l'ordre de grandeur des caractéristiques géométriques du bief (longueur et largeur respectivement d'environ 8 km et 80 m, d'où une surface d'environ 640 000  $m^2$ ) et les variations de niveau d'eau de nos données de l'ordre de quelques dizaines de centimètres (voir par exemple à la figure 1.12(a)), la surface peut donc également être considérée comme constante.

Le problème est que nous ne disposons pas de mesures des débits entrant ou sortant. Nous avons uniquement à notre disposition les signaux de commandes de débits  $u_{Q_e}[k]$  et  $u_{Q_s}[k]$  (échantillonnés avec une période  $T_e \approx 133$  s) envoyés à l'entrée des aménagements qui actionnent l'ouverture

ou la fermeture des vannes. En fait, ces systèmes sont constitués de boucles de régulation dont les temps de réponse sont négligeables par rapport à  $T_e$ . Par conséquent, ces boucles peuvent être modélisées par un simple gain constant (que l'on notera  $K_e$  pour l'aménagement amont et  $K_s$  pour l'aménagement aval) et un bloqueur d'ordre zéro (BOZ), car les débits réels sont des grandeurs physiques à temps continu. Les deux aménagements peuvent donc être modélisés par les équations suivantes :

$$Q_e(t) = K_e \cdot \text{BOZ}(u_{Q_e}[k]) + \delta Q_e(t), \quad (1.4)$$

$$Q_s(t) = K_s \cdot \text{BOZ}(u_{Q_s}[k]) + \delta Q_s(t), \quad (1.5)$$

où  $\delta Q_e(t)$  et  $\delta Q_s(t)$  représentent les erreurs de modélisation. En regroupant les équations (1.3), (1.4) et (1.5), le système « aménagements + bief » peut être modélisé par une structure de modèle dont le schéma-bloc est représenté à la figure 1.3.

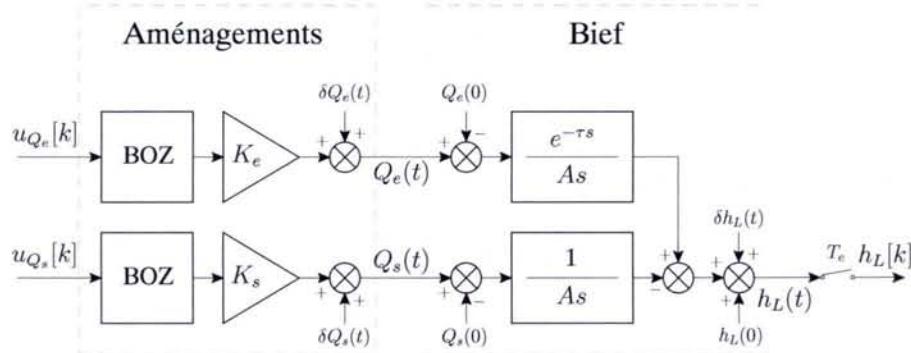


FIG. 1.3 – Schéma-bloc de la structure de modèle d'un bief de rivière aménagé.

Toutefois, puisque nous n'avons également à notre disposition qu'une mesure de niveau d'eau en aval (signal échantillonné et quantifié avec un pas de quantification de 0.01 m) que nous noterons  $h_L[k]$ , nous choisissons de modéliser le système composé du bief et des deux aménagements par la structure discrète suivante, obtenue par la discréttisation de la structure précédente par la méthode du BOZ (voir démonstration ci-dessous) :

$$\Delta h_L[k] = \frac{K_e T_e}{A} \frac{q^{-d-1}}{1 - q^{-1}} \Delta u_{Q_e}[k] - \frac{K_s T_e}{A} \frac{q^{-1}}{1 - q^{-1}} \Delta u_{Q_s}[k] + v[k], \quad (1.6)$$

où  $\Delta h_L[k] = h_L[k] - h_L[0]$ ,  $\Delta u_{Q_e}[k] = u_{Q_e}[k] - u_{Q_e}[0]$ ,  $\Delta u_{Q_s}[k] = u_{Q_s}[k] - u_{Q_s}[0]$ . Le signal  $v[k]$  représente toutes les erreurs de mesures, de modélisation et de quantification. Toutefois, cette discréttisation n'est possible que sous l'hypothèse que le retard soit un multiple de la période d'échantillonnage :  $\tau = d \cdot T_e$ . Le schéma-bloc de cette structure simplifiée est représenté à la figure 1.4.

#### Démonstration 1 (Discréttisation de la structure « aménagements + bief »)

L'utilisation d'un BOZ dans les équations (1.4) et (1.5) implique les relations suivantes :

$$Q_e(t) = K_e \cdot u_{Q_e}(t) + \delta Q_e(t), \quad (1.7)$$

$$Q_s(t) = K_s \cdot u_{Q_s}(t) + \delta Q_s(t), \quad (1.8)$$

où  $u_{Q_e}(t) = u_{Q_e}[k]$  et  $u_{Q_s}(t) = u_{Q_s}[k]$  pour  $k T_e \leq t < (k+1) T_e$ . En particulier, à  $t = 0$ , on a donc :

$$Q_e(0) = K_e \cdot u_{Q_e}(0) + \delta Q_e(0), \quad (1.9)$$

$$Q_s(0) = K_s \cdot u_{Q_s}(0) + \delta Q_s(0), \quad (1.10)$$

ce qui implique (avec la notation  $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ ) :

$$\Delta Q_e(t) = K_e \cdot \Delta u_{Q_e}(t) + \Delta \delta Q_e(t), \quad (1.11)$$

$$\Delta Q_s(t) = K_s \cdot \Delta u_{Q_s}(t) + \Delta \delta Q_s(t). \quad (1.12)$$

Les transformées de Laplace de ces deux équations et l'équation (1.3) conduisent au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta h_L}(s) &= \frac{1}{A s} (K_e e^{-\tau s} \overline{\Delta u_{Q_e}}(s) - K_s \overline{\Delta u_{Q_s}}(s)) \\ &\quad + \frac{1}{A s} (e^{-\tau s} \overline{\Delta \delta Q_e}(s) - \overline{\Delta \delta Q_s}(s)) + \overline{\delta h_L}(s). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Enfin, la discréttisation de cette structure à temps continu par la méthode du BOZ pour une période d'échantillonnage  $T_e$  (en supposant  $\tau = d \cdot T_e$ ) donne alors la structure à temps discret suivante :

$$\Delta h_L[k] = \frac{T_e q^{-1}}{A (1 - q^{-1})} \left( K_e q^{-d} \Delta u_{Q_e}[k] - K_s \Delta u_{Q_s}[k] \right) + v[k], \quad (1.14)$$

où le bruit  $v[k]$  est régi par la relation suivant :

$$v[k] = \frac{T_e q^{-1}}{A (1 - q^{-1})} \left( q^{-d} \Delta \delta Q_e[k] - \Delta \delta Q_s[k] \right) + \delta h_L[k]. \quad (1.15)$$

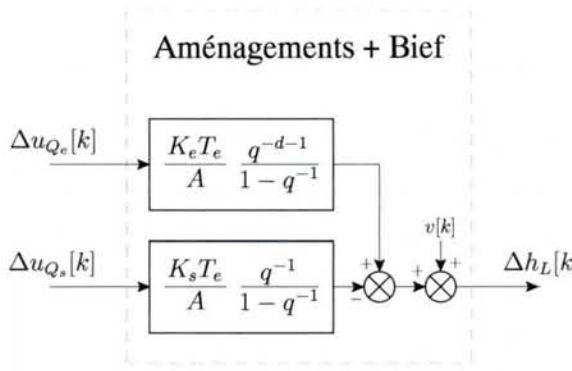


FIG. 1.4 – Schéma-bloc de la structure de modèle n° 1 : structure de modèle simplifiée d'un bief de rivière aménagé (sous l'hypothèse :  $\tau = d \cdot T_e$ ).

Ayant modélisé le comportement du système entre les différentes entrées–sorties à notre disposition, il est maintenant possible d'estimer les paramètres, et plus particulièrement, d'estimer l'*indice de retard*  $d$ .

## 1.2 Estimation du retard

Nous possédons plus de 300 jeux de données correspondant chacun à 24 heures d'enregistrements des commandes de débits et de mesure du niveau aval. Les jeux contenant des valeurs « clairement » erronées ont été éliminés. Nous avons choisi d'estimer le retard pour chacun des jeux de

données, ce qui signifie que nous supposons que ce dernier, ainsi que les autres paramètres du modèle, sont constants sur une durée de 24 heures.

En supposant que le retard est un multiple de la période d'échantillonnage et qu'il est possible de le borner à partir de nos connaissances *a priori* ( $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max}) = \{d \in \mathbb{N}^*/d_{\min} \leq d \leq d_{\max}\}$ ), une méthode d'estimation du retard consiste à effectuer une recherche exhaustive du minimum d'un critère en fonction du retard et des autres paramètres qu'il est également nécessaire d'estimer. Le principe de cette méthode, constituée de deux étapes, est donné par l'algorithme 1.1.

- ◊ Pour chaque  $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$ , estimation du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  à  $d$  fixé par minimisation d'un critère  $J(\boldsymbol{\theta}, d)$  fonction par exemple de l'erreur de sortie :

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_d &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}} J(\boldsymbol{\theta}, d), \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} e[k, \boldsymbol{\theta}, d]^2 \right), \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (y[k] - \tilde{y}[k, \boldsymbol{\theta}, d])^2 \right),\end{aligned}$$

où  $y[k]$  est la sortie mesurée,  $\tilde{y}[k, \boldsymbol{\theta}, d]$  est la sortie du modèle non bruitée et  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^p$  est l'ensemble des vecteurs de paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , de dimension  $p$ , admissibles *a priori*.

- ◊ Estimation du retard par la minimisation du même critère mais à  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$  fixé :

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})} J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_d, d).$$

ALGO. 1.1 – Estimation du retard par recherche exhaustive et minimisation de l'erreur de sortie.

La méthode de l'erreur de sortie est synthétiquement présentée dans l'annexe A. On peut ainsi constater que l'optimisation du critère nécessite généralement l'utilisation d'une méthode itérative ou récursive, comme celle du gradient [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989) ; LJUNG (1999)]. Toutefois, nous sommes dans un cas particulier où le dénominateur  $F(q^{-1})$  du transfert de l'équation (A.2) est connu. Nous allons voir que le critère  $J(\boldsymbol{\theta}, d)$ , à  $d$  fixé, possède une solution explicite.

Dans notre cas, le vecteur de paramètre est  $\boldsymbol{\theta} = [K_e T_e / A, K_s T_e / A]^T$  et le critère à minimiser (à  $d$  fixé) est le suivant :

$$J(\boldsymbol{\theta}, d) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (e[k, \boldsymbol{\theta}, d])^2, \quad (1.16)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (\Delta h_L[k] - \widetilde{\Delta h}_L[k, \boldsymbol{\theta}, d])^2, \quad (1.17)$$

où

$$\widetilde{\Delta h}_L[k, \boldsymbol{\theta}, d] = \frac{K_e T_e}{A} \frac{q^{-d-1}}{1-q^{-1}} \Delta u_{Q_e}[k] - \frac{K_s T_e}{A} \frac{q^{-1}}{1-q^{-1}} \Delta u_{Q_s}[k], \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{1-q^{-1}} \boldsymbol{\varphi}^T[k, d] \boldsymbol{\theta}, \quad (1.19)$$

avec  $\boldsymbol{\varphi}^T[k, d] = [\Delta u_{Q_e}[k-1-d], -\Delta u_{Q_s}[k-1]]$ . Par conséquent, on a :

$$J(\boldsymbol{\theta}, d) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left( \Delta h_L[k] - \frac{1}{1-q^{-1}} \boldsymbol{\varphi}^T[k, d] \boldsymbol{\theta} \right)^2. \quad (1.20)$$

En  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_d$ , la dérivée du critère est nulle. On a alors la relation suivante :

$$\frac{dJ(\boldsymbol{\theta}, d)}{d\boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_d} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} -\frac{1}{1-q^{-1}} \boldsymbol{\varphi}[k, d] \left( \Delta h_L[k] - \frac{1}{1-q^{-1}} \boldsymbol{\varphi}^T[k, d] \hat{\boldsymbol{\theta}}_d \right) = 0. \quad (1.21)$$

Finalement, on obtient donc une solution explicite :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_d = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\psi}[k, d] \boldsymbol{\psi}^T[k, d] \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\psi}[k, d] \Delta h_L[k] \right), \quad (1.22)$$

où  $\boldsymbol{\psi}[k, d] = \frac{1}{1-q^{-1}} \boldsymbol{\varphi}[k, d] = \frac{1}{1-q^{-1}} [\Delta u_{Q_e}[k-1-d], -\Delta u_{Q_s}[k-1]]$ , sous la condition que :

(i) la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{\boldsymbol{\psi}}^N(d) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\psi}[k, d] \boldsymbol{\psi}^T[k, d]$  soit inversible,  $\forall d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ .

Toutefois, il est connu que l'inversibilité de la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{\boldsymbol{\psi}}^N(d)$  n'est pas suffisante pour obtenir une estimée  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$  acceptable : il faut également que l'opération d'inversion soit stable, c'est-à-dire qu'une petite erreur sur les éléments de la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{\boldsymbol{\psi}}^N(d)$  n'en entraîne pas une erreur importante sur les éléments de la matrice inverse. Cette stabilité est mesurée par le conditionnement de la matrice<sup>1</sup>. Si ce dernier est proche de 1, alors l'opération d'inversion est stable et la solution est acceptable, mais s'il est trop élevé, alors la solution ne sera pas admissible (la variance de l'estimateur sera grande).

De plus, il est montré par un raisonnement identique à celui présenté en annexe A [LJUNG (1999)], que l'estimateur est asymptotiquement sans biais si la condition (i) est vérifiée et si :

(ii)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\psi}[k, d_0] v_0[k] = \mathbf{E} [\boldsymbol{\psi}[k, d_0] v_0[k]] = 0,$

sous l'hypothèse que les signaux soient stationnaires et ergodiques, où  $\{v_0[k]\}$  représente le bruit du modèle vrai. Cette condition sera vérifiée si :

<sup>1</sup>La définition du conditionnement d'une matrice est donnée au chapitre 2, paragraphe 2.2.2.5.

(a)  $\{v_0[k]\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle, ou

(b) les suites  $\{\Delta u_{Q_e}[k]\}$  et  $\{\Delta u_{Q_s}[k]\}$  sont indépendantes de la suite de moyenne nulle  $\{v_0[k]\}$ .

Toutefois, la condition (a) a peu de chance d'être vérifiée dans notre cas étant donné la relation régissant le bruit (voir équation (1.15)).

Enfin, en supposant que le bruit du modèle vrai résulte du filtrage d'un bruit blanc  $\{e_0[k]\}$  de moyenne nulle et de variance  $\lambda_0$  :

$$v_0[k] = H_0(q^{-1})e_0[k],$$

on montre alors [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989)] que la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur est égale à :

$$\mathbf{P}_{\theta} = \lambda_0^2 \left( \mathbf{E} [\psi[k, d_0] \psi^T[k, d_0]] \right)^{-1} \mathbf{E} [H_0(q^{-1}) \psi[k, d_0] H_0(q^{-1}) \psi^T[k, d_0]] \times \\ \left( \mathbf{E} [\psi[k, d_0] \psi^T[k, d_0]] \right)^{-1}. \quad (1.23)$$

En conclusion, l'estimée ne sera acceptable que si les trois points suivants sont réalisés :

- la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{\psi}^N(d)$  est bien conditionnée (ce qui implique la condition (i));
- la condition (ii) est vérifiée ;
- la variance du bruit n'est pas trop élevée.

La figure 1.5 représente le pourcentage des estimées du retard obtenu à partir de l'ensemble des jeux de données en utilisant l'ALGO. 1.1 où  $\hat{\theta}_d$  est obtenu par l'équation (1.22). On constate que l'estimée la plus souvent obtenue est  $\hat{d} = 1$  (correspondant à presque 60 % des estimées), c'est-à-dire que pour presque 60 % des jeux de données, l'estimée du retard est inférieure à 133 s. Or, le bief est d'une longueur de plus de 8 km. Cela signifie donc que les effets d'une variation de débit à l'amont du bief se propagent à une vitesse supérieure à 60 m/s, ce qui ne peut pas être physiquement le cas. Ensuite, l'estimée la plus souvent obtenue correspond à la borne supérieure  $d_{\max} = 20$  (17 %). Par conséquent, cela signifie que pour ces 17 % de jeux de données  $\hat{d} \geq 20$  et non pas que  $\hat{d} = 20$ . Il n'y donc pas d'autre estimée significative. En conclusion, ces résultats ne sont pas admissibles, d'autant plus que les experts du bief s'accordent à évaluer ce retard entre 6 et 12 périodes d'échantillonnage.

L'inversion de la matrice (condition (i)) n'est pas à l'origine de cet échec. En effet, comme le montre la figure 1.6 sur laquelle est représenté l'histogramme des conditionnements des matrices inversées lors de l'estimation des paramètres, la matrice est très souvent inversible et loin de la singularité.

Il reste donc deux explications à l'échec de l'estimation :

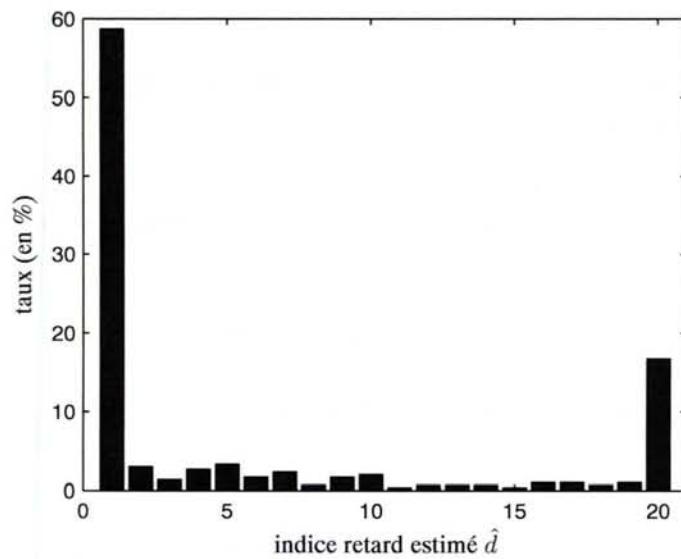


FIG. 1.5 – Histogramme des estimées du retard par recherche exhaustive et minimisation de l'erreur de sortie ( $d_{\min} = 0$  et  $d_{\max} = 20$ ) pour l'ensemble des jeux de données.

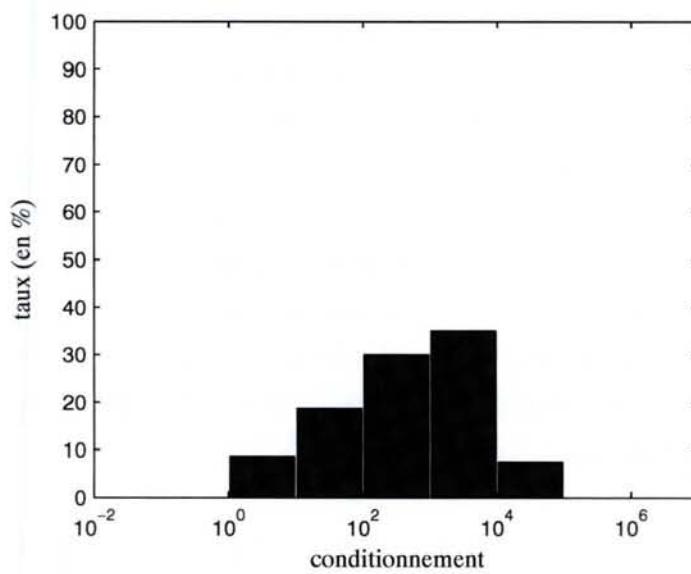


FIG. 1.6 – Histogramme des conditionnements de la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{\psi}^N(d)$ .

- la condition (b) n'est pas respectée, donc l'estimateur est biaisé ;
- la variance du bruit  $v_0$  est élevée à cause des grandes incertitudes de modélisation, ce qui entraîne une grande variance de l'estimateur.

Afin de pouvoir trouver les raisons de cet échec et proposer une solution, le paragraphe suivant détaille les conditions expérimentales passives dans lesquelles les données ont été recueillies.

## 1.3 Les conditions expérimentales passives

Afin d'éviter tout risque d'inondation et toute baisse de production d'énergie hydroélectrique, il est impossible de réaliser des plans d'expérience permettant d'obtenir des données « idéales » pour identifier le bief. Il faut donc se contenter des données recueillies dans les conditions de fonctionnement de l'installation. Comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants, ceci impose une structure de modèle bouclée et un niveau d'information contenu dans les données relativement faible.

### 1.3.1 Les contraintes de structure

Un bief de rivière aménagé est une partie des installations de production hydroélectrique d'une rivière, composée d'un bief délimité par deux aménagements. L'objectif de ces installations est de piloter les débits d'eau au niveau de chaque aménagement afin de produire de l'énergie hydroélectrique tout en évitant des inondations, c'est-à-dire en régulant le niveau d'eau de chaque bief.

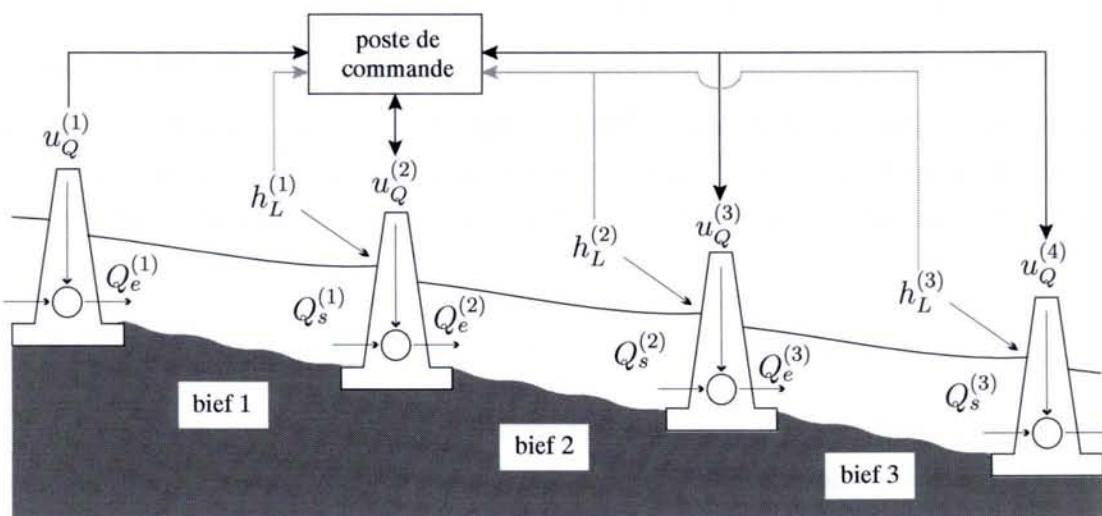


FIG. 1.7 – Série de biefs de rivière aménagés en cascade.

La conduite des biefs aménagés est réalisée en cascade à partir d'un poste de commande, dans lequel un opérateur humain surveille la mesure des niveaux à maîtriser et, en retour, élabore les consignes de débit à appliquer à chaque aménagement (voir FIG. 1.7). La régulation du bief se fait par *l'amont local*. Cela signifie que l'opérateur affecte la consigne de débit sortant en fonction :

variable	désignation
$Q_e^{(i)}$	débit entrant du bief $i$
$Q_s^{(i)}$	débit sortant du bief $i$
$u_Q^{(i)}$	commande de débit entrant du bief $i$ et de débit sortant du bief $(i - 1)$
$h_L^{(i)}$	hauteur d'eau au niveau de l'aménagement aval du bief $i$
$h_L^{*(i)}$	consigne de hauteur d'eau au niveau de l'aménagement aval du bief $i$

TAB. 1.2 – Variables d'une série de biefs de rivière aménagés en cascade.

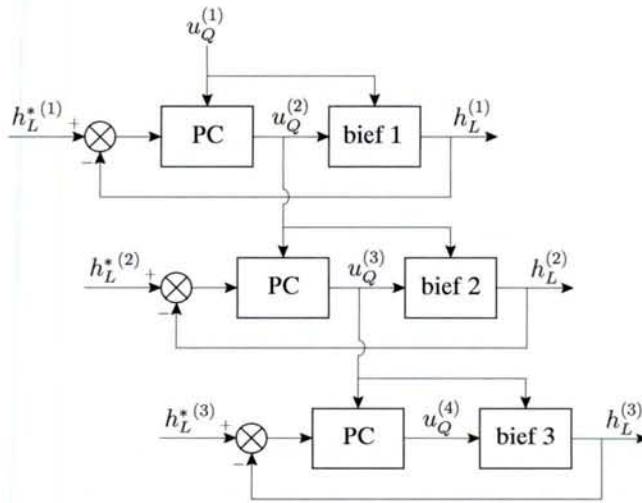


FIG. 1.8 – Conduite des biefs de rivière aménagés en cascade (PC : poste de commande).

- des objectifs de régulation sur le niveau ;
- des variations de la commande de débit entrant, considérée comme une perturbation.

Plus exactement, il ajuste la commande de débit de l'aménagement amont afin de réguler le niveau aval du bief et de rejeter les perturbations dues aux variations du débit entrant (voir Fig. 1.8). Cette régulation avec action anticipatrice peut alors être *approximativement* modélisée par deux correcteurs :

$$C_{Q_e}(q^{-1}) = K_{Q_e} q^{-d_{Q_e}} \quad \text{et} \quad C_{h_L}(q^{-1}) = K_{h_L}, \quad (1.24)$$

qui représentent respectivement la correction anticipatrice entre les commandes des débits entrant et sortant, et la contre-réaction du niveau aval sur la consigne de débit sortant.  $K_{Q_e}$  et  $K_{h_L}$  sont des gains proportionnels et  $d_{Q_e}$  représente le retard pur du régulateur  $C_{Q_e}(q^{-1})$ . Notons que pour des raisons de stabilité,  $K_{h_L}$  doit être négatif. En théorie,  $d_{Q_e}$  est non nul et est choisi, en fonction du retard  $\tau$  du bief, dans des tables spécifiques dédiées à la conduite des biefs. Toutefois, en pratique, l'opérateur tend à répercuter les variations du débit entrant sur le débit sortant sans attendre leur effet sur le niveau d'eau aval, d'où  $d_{Q_e} = 0$ . Ce constat est corroboré par l'examen des estimées de la réponse impulsionnelle (en boucle fermée) entre les consignes des débits entrant et sortant. En effet, d'après les équations (1.6) et (1.24), l'opérateur de transfert (en boucle fermée) entre  $\Delta u_{Q_s}$

et  $\Delta u_{Q_e}$  est :

$$\frac{\Delta u_{Q_s}[k]}{\Delta u_{Q_e}[k]} = \frac{K_{h_L} \alpha_e q^{-d-1} + K_{Q_e} q^{-d_{Q_e}-1} - K_{Q_e} q^{-d_{Q_e}}}{(K_{h_L} \alpha_s + 1) q^{-1} - 1}, \quad (1.25)$$

où  $\alpha_e = K_e T_e / A$ ,  $\alpha_s = K_s T_e / A$  et  $d \geq 1$  est le retard entre  $h_L$  et  $u_{Q_e}$  (en boucle ouverte). Par conséquent, la valeur de  $d_{Q_e}$  correspond au nombre de premiers échantillons nuls de la réponse impulsionnelle entre  $\Delta u_{Q_s}$  et  $\Delta u_{Q_e}$ . Or, le premier échantillon des estimées de cette réponse impulsionnelle<sup>2</sup> pour l'ensemble des données n'est jamais nul (voir exemple de la figure 1.9). Par conséquent,  $\hat{d}_{Q_e} = 0$ .

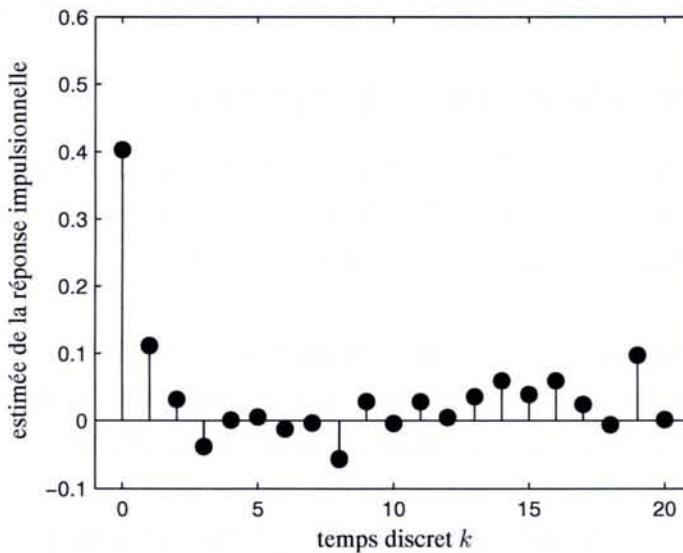


FIG. 1.9 – Exemple d'une estimée de la réponse impulsionnelle entre les commandes de débit.

Finalement, un bief de rivière aménagé, piloté par un opérateur humain, est modélisé par le schéma-bloc de la figure 1.10. La variation de consigne  $\Delta h_L^*[k]$  est supposée nulle (fonctionnement en régulation). Les signaux  $\delta u_{Q_s}[k]$  et  $v[k]$  représentent des bruits, incertitudes et erreurs de modélisation. On dispose de relevés des signaux  $h_L[k]$ ,  $u_{Q_e}[k]$  et  $u_{Q_s}[k]$ , c'est-à-dire de  $\Delta h_L[k]$ ,  $\Delta u_{Q_e}[k]$  et  $\Delta u_{Q_s}[k]$ .

La structure de modèle est donc « doublement » bouclée, ce qui entraîne des corrélations entre les commandes de débit  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$ , et entre la commande  $\Delta u_{Q_s}$  et le bruit  $v$ . Cette dernière corrélation explique alors l'échec de la méthode d'estimation (§ 1.2), puisque la condition (b) n'est pas vérifiée dans notre cas.

Le paragraphe suivant est consacré à une analyse du niveau d'information contenue dans les données disponibles car l'intervalle de confiance des estimées dépendra de la richesse des densités spectrales de puissance des entrées.

<sup>2</sup>L'estimation des réponses impulsionales est réalisée par l'analyse de corrélation, méthode présentée à l'annexe B.

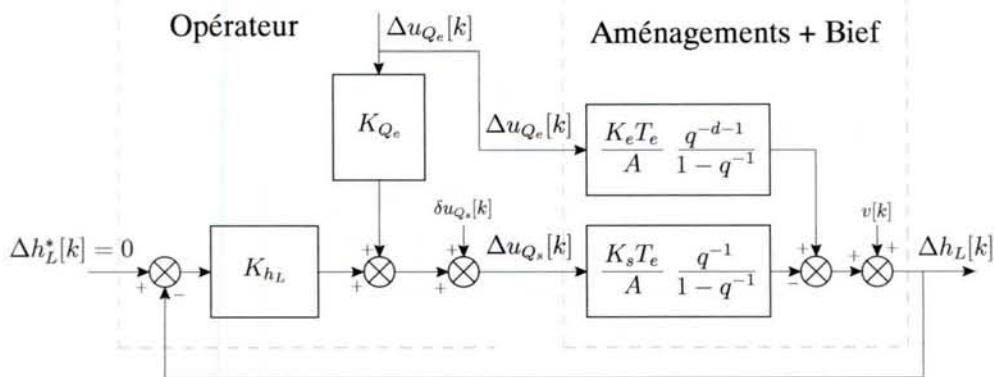


FIG. 1.10 – Schéma-bloc de la structure de modèle n° 2 : structure de modèle simplifiée d'un bief de rivière aménagé dans les conditions expérimentales imposées (sous l'hypothèse :  $\tau = d \cdot T_e$ ).

### 1.3.2 L'information contenue dans les données

Nous rappelons que nous avons à notre disposition les commandes de débit entrant et sortant,  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$ , et la mesure du niveau d'eau aval du bief  $\Delta h_L$  sur une année sous forme de 332 jeux de données journaliers (certains relevés journaliers sont inexploitables).

Les jeux de données peuvent être classés selon la quantité d'information qu'ils contiennent. Il est alors possible d'isoler trois catégories de jeux : la plus informative, la moins informative et une catégorie de jeux représentant les données dont la quantité d'information est la plus courante. Pour cela, il est nécessaire de choisir une grandeur caractéristique de cette quantité d'information. Nous avons utilisé l'ordre d'excitation persistante du signal (il aurait également été possible d'étudier la complexité linéaire du signal [TONG et PERREAU (1998)]).

#### 1.3.2.1 Notion d'excitation persistante

**Définition 1.1 (signal d'excitation persistante d'ordre  $n$  [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989)])**

Un signal  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est dit être d'excitation persistante d'ordre  $n$  si :

(i) la limite suivante existe :

$$\bar{c}_{uu}[l] \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k+l]u[k], \quad (1.26)$$

et

(ii) la matrice suivante :

$$\bar{\mathbf{C}}_{uu}(n) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{uu}[0] & \bar{c}_{uu}[1] & \cdots & \bar{c}_{uu}[n-1] \\ \bar{c}_{uu}[-1] & \bar{c}_{uu}[0] & \cdots & \bar{c}_{uu}[n-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{uu}[-n+1] & \bar{c}_{uu}[-n+2] & \cdots & \bar{c}_{uu}[0] \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

est définie positive.



**Remarque 1.1** Si  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de variables aléatoires stationnaire et ergodique alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u[k+l]u[k] = \mathbf{E} [u[k+l]u[k]] \triangleq c_{uu}[l], \quad (1.28)$$

où  $c_{uu}[l]$  est la fonction d'autocorrélation de  $u$  et, par conséquent, la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{uu}(n)$  est égale à la matrice d'autocorrélation de  $u$  de dimension  $n \times n$  (elle a la propriété d'être une matrice de Toeplitz).  $\diamond$

**Remarque 1.2** Une suite de variables aléatoires (VA), indépendantes et identiquement distribuée (i.i.d.) de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , possède une matrice d'autocorrélation égale à  $\sigma^2 \mathbf{I}$  qui est toujours définie positive. Elle est donc d'excitation persistante de tout ordre. On montre également qu'un signal composé de  $n$  sinusoïdes de fréquences différentes :

$$u[k] = \sum_{i=1}^n A_i \sin(2\pi f_i k T_e), \quad \text{avec } 0 \leq f_1 < f_2 < \dots < f_n \leq f_e/2,$$

est d'excitation persistante d'ordre :

$$\begin{cases} 2n & \text{si } 0 < f_1 \text{ et } f_n < f_e/2, \\ 2n - 1 & \text{si } 0 = f_1 \text{ ou } f_n = f_e/2, \\ 2n - 2 & \text{si } 0 = f_1 \text{ et } f_n = f_e/2, \end{cases}$$

où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage. De même, on peut montrer qu'une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) de période maximale  $M$  est d'excitation persistante d'ordre  $M - 1$  [LJUNG (1999)].  $\diamond$

Ce concept a été introduit, à l'origine, afin d'assurer que l'estimation d'une RIF par la méthode de corrélation (présentée dans l'annexe B) possède une solution [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989)]. En effet, si  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est d'excitation persistante d'ordre  $M$  alors la matrice  $\mathbf{C}_{uu}$  de l'équation (B.12) est régulière, donc l'inverse de cette matrice, ainsi que l'estimée de la RIF, existent. De plus, on montre que la convergence en probabilité (*consistency*) d'un estimateur des paramètres d'une structure linéaire (en boucle ouverte) possédant  $n$  paramètres nécessite que le signal d'entrée soit d'excitation persistante d'ordre  $n$  et que sa variance dépendra de l'inverse de la matrice d'autocorrélation  $\bar{\mathbf{C}}_{uu}(n)$ . Il est donc important que l'opération d'inversion de la matrice soit stable, c'est-à-dire que le conditionnement de la matrice (voir paragraphe 2.2.2.5) soit proche de 1, sinon la variance de l'estimateur sera d'autant plus grande que le conditionnement de la matrice est grand. Dans le cas d'une structure en boucle fermée, l'excitation persistante de l'entrée n'est pas suffisante, pour plus de détails voir [LJUNG (1999)].

Si on revient au cas de l'estimation des paramètres par la méthode de l'erreur de sortie du paragraphe 1.2, la structure possède deux entrées. Nous avons donc besoin d'une définition de la notion d'excitation persistante d'un signal de dimension  $m$ . Une telle définition peut être obtenue à partir de la généralisation de la méthode de corrélation à  $m$  entrées.

**Définition 1.2 (excitation persistante d'ordre  $n$  d'un signal de dimension  $m$ )**

Un signal  $\{\mathbf{u}[k] = [u_1[k] \dots u_m[k]]^T\}_{k=0}^{N-1}$  est dit être d'excitation persistante d'ordre  $n = \sum_{i=1}^m n_i$  si :

(i) la limite suivante existe  $\forall i, j = 1 \dots m$  :

$$\bar{c}_{u_i u_j}[l] \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_i[k+l] u_j[k], \quad (1.29)$$

et

(ii) la matrice suivante :

$$\bar{\mathbf{C}}_{uu}(n) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{u_1 u_1}(n_1, n_1) & \bar{\mathbf{C}}_{u_1 u_2}(n_1, n_2) & \cdots & \bar{\mathbf{C}}_{u_1 u_m}(n_1, n_m) \\ \bar{\mathbf{C}}_{u_2 u_1}(n_2, n_1) & \bar{\mathbf{C}}_{u_2 u_2}(n_2, n_2) & \cdots & \bar{\mathbf{C}}_{u_2 u_m}(n_2, n_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}_{u_m u_1}(n_m, n_1) & \bar{\mathbf{C}}_{u_m u_2}(n_m, n_2) & \cdots & \bar{\mathbf{C}}_{u_m u_m}(n_m, n_m) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

est définie positive, où  $\forall i, j = 1 \dots m$  :

$$\bar{\mathbf{C}}_{u_i u_j}(n_i, n_j) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{u_i u_j}[0] & \cdots & \bar{c}_{u_i u_j}[n_j - 1] \\ \bar{c}_{u_i u_j}[-1] & \cdots & \bar{c}_{u_i u_j}[n_j - 2] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{u_i u_j}[-n_i + 1] & \cdots & \bar{c}_{u_i u_j}[n_j - n_i] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}. \quad (1.31)$$

♦

**Remarque 1.3** Si chaque signal  $\{u_i[k]\}_{k=0}^{N-1}$ ,  $i \in 1, \dots, m$ , est une suite de variables aléatoires stationnaire et ergodique alors :

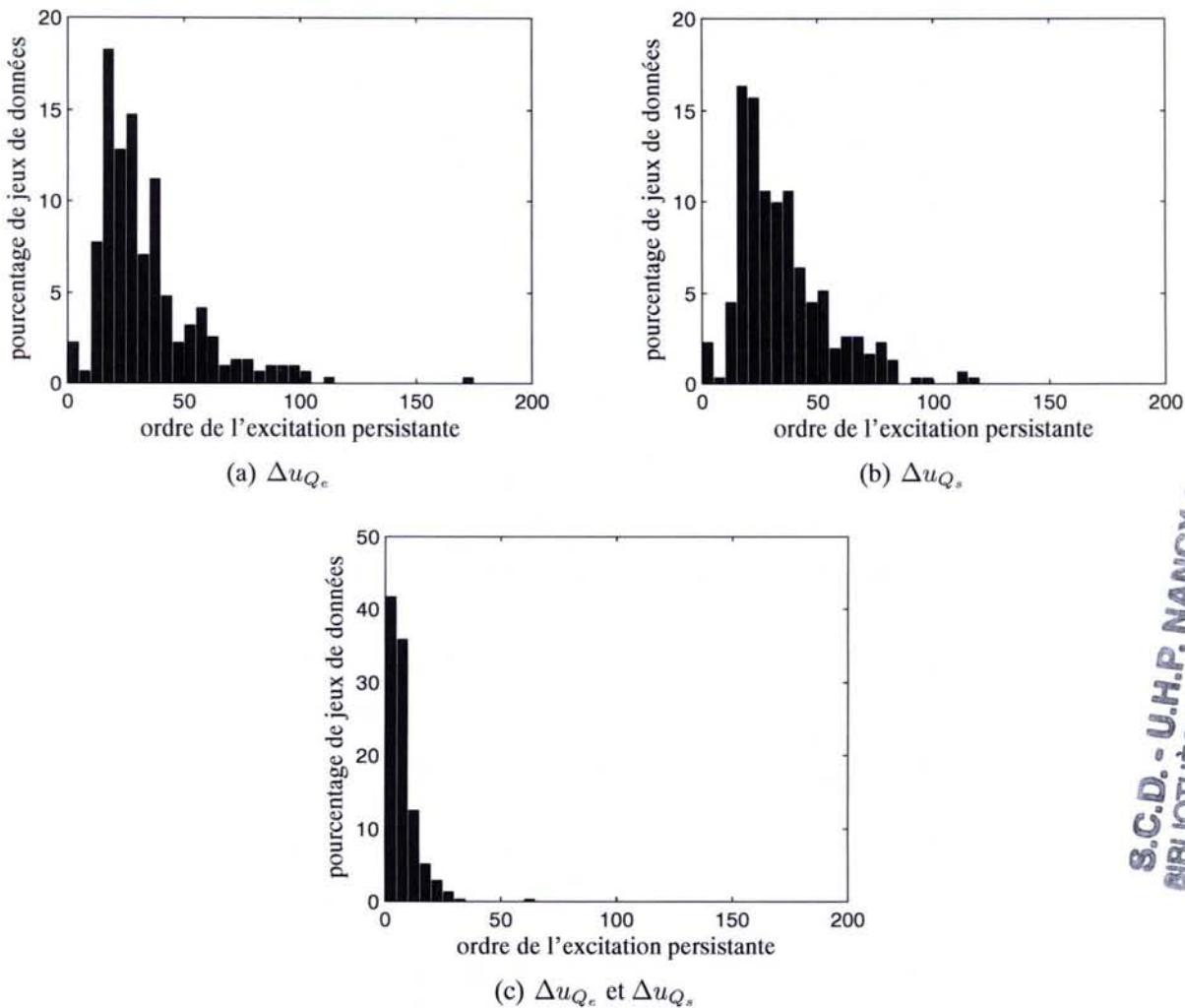
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_i[k+l] u_j[k] = \mathbf{E} [u_i[k+l] u_j[k]] \triangleq c_{u_i u_j}[l], \quad (1.32)$$

où  $c_{u_i u_j}[l]$  est la fonction d'intercorrélation entre  $u_i$  et  $u_j$  et, par conséquent, la matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{u_i u_j}(n_i, n_j)$  est égale à la matrice d'intercorrélation entre  $u_i$  et  $u_j$  de dimension  $n_i \times n_j$  (matrice de Toeplitz). Notons que la matrice résultante  $\bar{\mathbf{C}}_{uu}(n)$  n'est pas une matrice de Toeplitz. ◇

**Remarque 1.4** Il ne suffit pas que chaque signal  $\{u_i[k]\}_{k=0}^{N-1}$ ,  $i \in 1, \dots, m$ , soit d'excitation persistante d'ordre  $n_i$  pour que  $\{\mathbf{u}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  soit d'excitation persistante d'ordre  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ , sauf si les  $m$  signaux sont décorrélés. ◇

### 1.3.2.2 Étude pratique (*a posteriori*) de l'excitation persistante des données

En théorie, le rang d'une matrice correspond au nombre de ses valeurs propres non nulles. Toutefois, en pratique, on ne dispose que d'une estimée des matrices (1.27) ou (1.30). La présence d'erreurs d'estimation fait que cette matrice est souvent de rang plein (toutes ses valeurs propres sont souvent non nulles), même si l'ordre d'excitation persistante maximal du signal est inférieur à  $N$ . Le rang théorique est alors obtenu en négligeant les valeurs propres (normalisées) inférieures



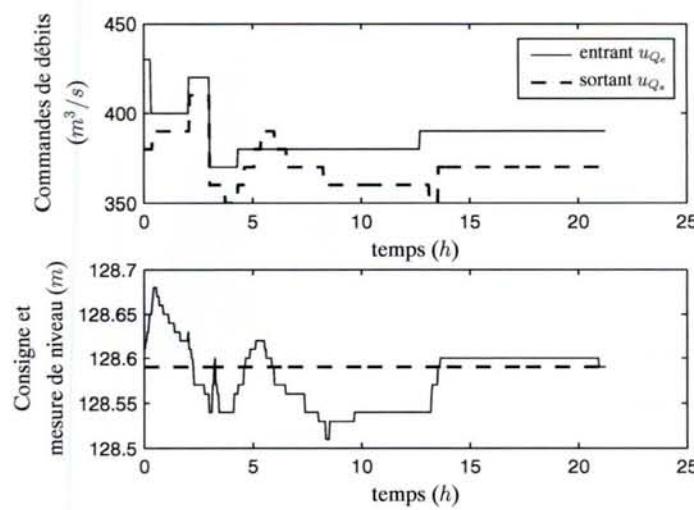
**S.C.D.-U.H.P. NANCY I**  
**BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES**  
 Rue du Jardin Botanique - BP 11  
 54600 Nancy  
 Tél. : 03 83 59 50 00

FIG. 1.11 – Histogrammes des ordres de l'excitation persistante de  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  sur une année.

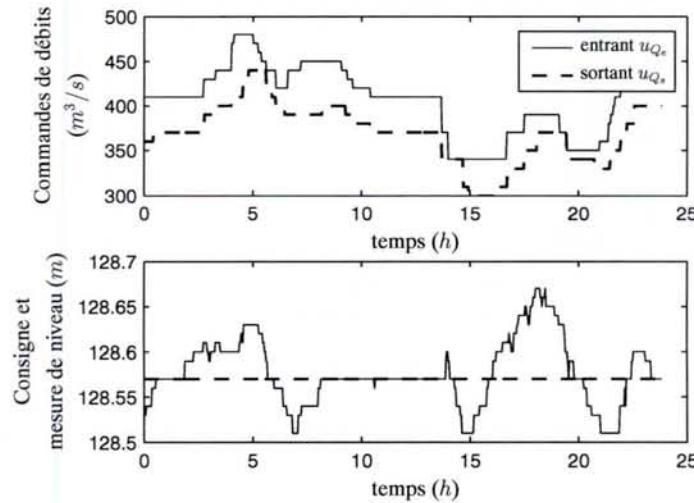
à un seuil.

La figure 1.11 représente les histogrammes des ordres d'excitation persistante de chacune des entrées  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  dont la longueur avoisine 600 échantillons par jeu de données. Le seuil permettant de distinguer les valeurs propres significatives est fixé à  $10^{-3}$ <sup>3</sup>. On constate que les ordres d'excitation persistante sont distribués de manière quasi-identique pour les deux entrées. La plupart des jeux de données ont un ordre d'excitation proche de 20. Autour de cette moyenne, on distingue des jeux de données moins informatifs (ordre d'excitation inférieur à 10) et d'autres plus informatifs (ordre d'excitation supérieur à 40). Les figures 1.12(a), 1.12(b) et 1.12(c) représentent respectivement les jeux de données du 03 novembre, 14 mars et 27 février dont les ordres d'excitation de  $\Delta u_{Q_e}$  sont 62, 17 et 10 et ceux de  $\Delta u_{Q_s}$  sont 43, 18 et 10. Les valeurs propres des matrices d'autocorrélation obtenues pour ces trois jeux sont représentées à la figure 1.13. Le jeu possédant l'information la plus élevée correspond, bien évidemment, à celui ayant le plus grand

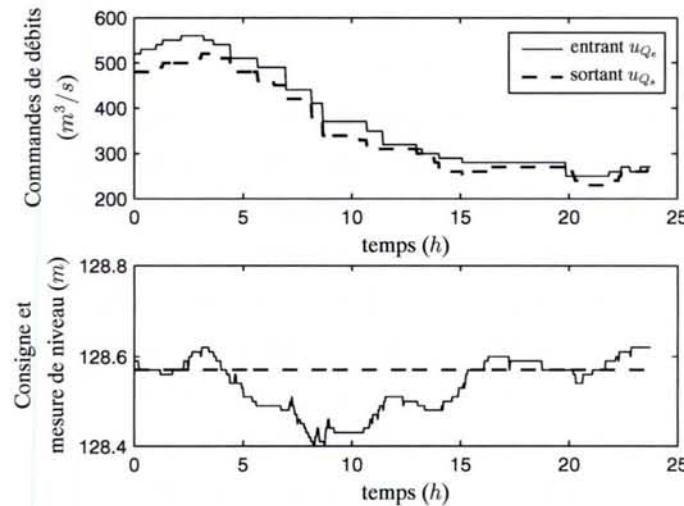
<sup>3</sup>Le choix de ce seuil est arbitraire. Il signifie que nous considérons comme négligeable toute valeur propre 1000 fois plus petite que la plus grande des valeurs propres car ces dernières sont normalisées par rapport à la plus importante d'entre elles.



(a) 3 novembre (ordre d'excitation relativement élevé)



(b) 14 mars (ordre d'excitation moyen)



(c) 27 février (ordre d'excitation relativement faible)

FIG. 1.12 – Exemples de jeux de données.

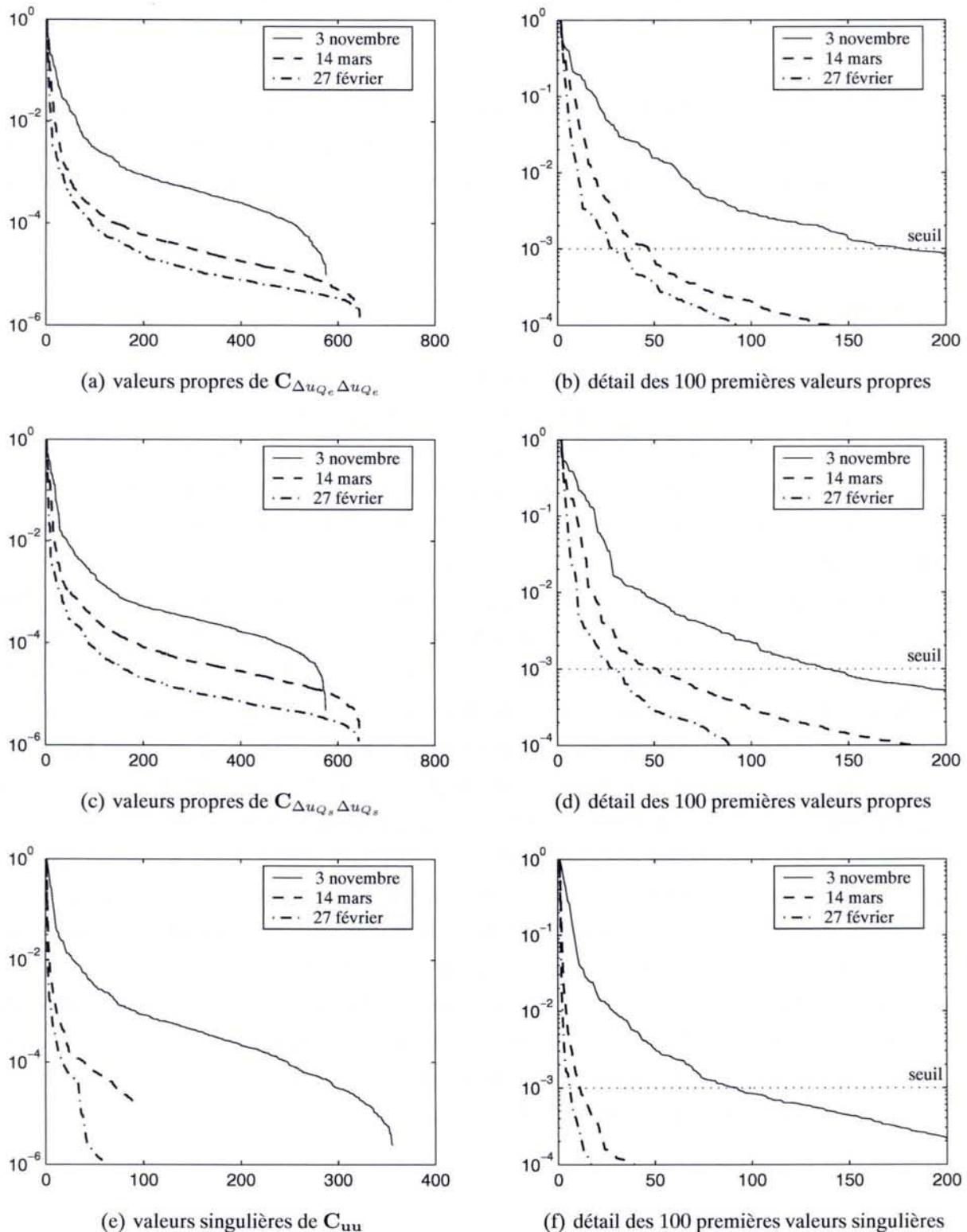


FIG. 1.13 – Valeurs propres des matrices d'autocorrélation de  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  pour les trois jeux de données.

nombre de valeurs propres non négligeables (supérieur à un seuil que nous avons fixé à  $10^{-3}$ ). Il est clair que si l'on change le seuil, l'ordre d'excitation persistante « estimé » varie. Toutefois, on peut constater que la modification de ce seuil n'altère pas la classification des jeux selon leur information.

La figure 1.13(f) représente l'histogramme des ordres d'excitation persistante de  $[\Delta u_{Q_e}, \Delta u_{Q_s}]$  de dimension 2. On remarque que plus de 80 % des ordres sont inférieurs à 20. On en déduit que le nombre de paramètres que l'on peut estimer avec un modèle possédant plusieurs entrées sera plus faible que celui d'un modèle mono–entrée.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre est dédié à la description du problème étudié dans ce mémoire, c'est–à–dire l'identification d'un bief de rivière à partir des *conditions expérimentales passives*. Il débute par une description du fonctionnement du bief de rivière aménagé et des données disponibles. Nous avons alors vu qu'une structure de modèle de connaissance fondée sur les équations de SAINT–VENANT était difficilement exploitable. Pour cette raison, une structure de modèle simplifiée, tenant compte des caractéristiques essentielles de la dynamique et du retard, a été proposée.

L'estimation du retard par une approche classique a abouti à des résultats inacceptables (cet échec a également été montré dans [BASTOGNE *et al.* (2002) ; THOMASSIN *et al.* (2003b)]). Nous montrons alors que cet échec est en partie dû à la présence d'une boucle implicite dans la structure du processus, révélée par l'étude des conditions d'acquisition des données expérimentales. En effet, la modélisation des conditions expérimentales conduit à une structure de modèle bouclée, possédant une rétroaction et une action anticipatrice effectuées par un opérateur. Ces actions entraînent une corrélation entre les entrées et le bruit de sortie empêchant ainsi la convergence de l'estimateur vers la valeur « vraie » du vecteur des paramètres.

En outre, une étude *a posteriori* des données disponibles, c'est–à–dire l'analyse de leur niveau d'information, montre que l'ordre d'excitation persistante des jeux de données est relativement faible. Ceci peut donc entraîner une variance élevée de l'estimateur.

L'analyse des conditions expérimentales présentée dans ce chapitre est en réalité une étape d'une étude plus générale qu'est celle de l'*identifiabilité*. En effet, cette dernière consiste à étudier à la fois les caractères bien–posé et bien–conditionné du problème inverse que constitue l'estimation des paramètres d'une structure. Ceci sera étudié en détails dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Identifiabilité et discernabilité

*L'identification d'un système nécessite notamment la résolution de deux problèmes correspondant au **choix de la structure** du modèle et à l'**estimation des paramètres** de la structure choisie [WALTER et PRONZATO (1994) ; LJUNG (1999)]. Dans les deux cas, il s'agit d'un problème inverse qui, en raison de la complexité de certains systèmes réels et du manque de données disponibles, peut être soit impossible à résoudre s'il est mal-posé (au sens de HADAMARD [HADAMARD (1902) ; TIKHONOV et ARSENINE (1976) ; IDIER (2001)]), c'est-à-dire s'il ne respecte pas les conditions d'existence, d'unicité et de continuité de la solution), soit très difficile à résoudre s'il est mal-conditionné. Nous allons voir que l'étude de ces propriétés dans le cadre de chacun des deux problèmes – estimation des paramètres et choix de la structure – conduit alors respectivement à deux concepts : l'**identifiabilité** et la **discernabilité**. En effet, il est connu que l'identifiabilité vérifie l'existence et l'unicité de la solution du problème de l'estimation des paramètres [WALTER (1987)], mais nous allons également montrer les liens existant entre l'identifiabilité, la continuité de la solution et le conditionnement du problème.*

*Tout d'abord, nous allons donner des définitions des notions de structures, modèles et comportements dont nous aurons besoin par la suite. Ensuite, une grande partie du chapitre est consacrée à l'identifiabilité avec pour premier objectif de clarifier ses différentes notions. En effet, comme le montre le tableau 2.1<sup>1</sup>, on trouve dans la littérature un certain nombre de terminologies associées à l'identifiabilité avec parfois des définitions équivalentes portant des noms différents et, inversement, des définitions différentes portant le même nom<sup>2</sup>. Toutefois, ces différentes notions sont divisibles en trois concepts. Dans un premier temps, l'**identifiabilité a priori**<sup>3</sup> étudie l'identifiabilité de la structure dans un cadre idéal. Dans un second temps, l'**identifiabilité a posteriori** étudie toujours l'identifiabilité de la structure, mais cette fois, à partir des données disponibles (on ne se place plus dans un cadre idéal). Enfin, on trouve parfois une troisième étude d'identifiability*

<sup>1</sup>Des implications et des équivalences entre certaines de ces définitions peuvent être trouvées dans [NOIRET (2000) ; NGUYEN et WOOD (1982)].

<sup>2</sup>D'ailleurs, Y. LECOURTIER et E. WALTER [LECOURTIER et WALTER (1981)] ont critiqué les différentes terminologies présentées dans [DISTEFANO III et COBELLINI (1980)].

<sup>3</sup>Cette étude peut être réalisée avant d'avoir recueilli des données, d'où le nom d'identifiabilité *a priori*, par opposition à l'identifiabilité *a posteriori* qui tient compte des données entrée-sortie à disposition.

Terminologie extraite des références	Article(s)	Terminologie utilisée dans la thèse
identifiabilité structurelle	[BELLMAN et ÅSTRÖM (1970) ; REID (1977) ; DiSTEFANO III et COBELLI (1980)]	
identifiabilité de la fonction de transfert ( <i>identifiability from the transfer function</i> )	[GLOVER et WILLEMS (1974)]	
discernabilité de la sortie ( <i>output distinguishability</i> )	[GREWAL et GLOVER (1976)]	
identifiabilité des Moindres Carrés ( <i>least square identifiability</i> )	[GREWAL et GLOVER (1976) ; CHAVENT (1987)]	{ <b>identifiabilité <i>a priori</i></b> (étude de la structure)}
identifiabilité déterministe	[REID (1977) ; NORTON (1986)]	
identifiabilité théorique	[JULIEN <i>et al.</i> (2000)]	
identifiabilité <i>a priori</i>	[GODFREY et DiSTEFANO III (1987) ; BREAMS <i>et al.</i> (2002)]	
identifiabilité qualitative	[WALTER et PRONZATO (1987) ; NOIRET (2000)]	
identifiabilité en sensibilité	[REID (1977)]	
identifiabilité pratique	[VAJDA (1987) ; VANROLLEGHEM <i>et al.</i> (1995) ; BRUN <i>et al.</i> (2001) ; DOCHAIN et VANROLLEGHEM (2001)]	{ <b>identifiabilité <i>a posteriori</i></b> (étude des données disponibles)}
identifiabilité <i>a posteriori</i>	[GODFREY et DiSTEFANO III (1987)]	
identifiabilité quantitative	[WALTER et PRONZATO (1987)]	
identifiabilité en terme de convergence de l'estimateur	[TSE et ANTON (1972) ; LJUNG (1976)]	{ <b>identifiabilité numérique</b> (étude de l'estimateur)}
identifiabilité numérique	[GODFREY et DiSTEFANO III (1987)]	
identifiabilité stochastique	[DiSTEFANO III et COBELLI (1980)]	
identifiabilité robuste	[LJUNG <i>et al.</i> (1993)]	

TAB. 2.1 – Différentes terminologies d'identifiabilité trouvées dans la littérature.

bilité : l'**identifiabilité numérique**. Cependant, nous verrons que cette étude se ramène à celle de la convergence de l'estimateur choisi. Par conséquent, nous ne la détaillerons pas. L'identifiabilité a priori étant largement étudiée par ailleurs [WALTER (1987) ; OLLIVIER (1990) ; DIOP et FLIESS (1991) ; LJUNG et GLAD (1994) ; WALTER et PRONZATO (1994) ; NOIRET (2000)], nos contributions concernent principalement l'identifiabilité a posteriori pour laquelle une définition et une méthode d'analyse sont proposées. De plus, nous montrons que l'identifiabilité a posteriori quantitative (identifiabilité pratique selon [DOCHAIN et VANROLLEGHEM (2001) ; BRUN *et al.* (2001)]) revient à étudier la continuité de la solution et le conditionnement du problème. Le pa-

ragraphes suivants est consacré à la discernabilité. Ce concept étant lié à celui de l'identifiabilité, nous avons également pu formuler de nouvelles interprétations. Enfin, le dernier paragraphe est dédié à l'étude d'identifiabilité de la structure du bief de rivière aménagé déterminée au chapitre 1.

## 2.1 Structures, modèles et comportements

La modélisation consiste à organiser les connaissances théoriques ou expérimentales de manière à proposer une loi d'évolution du système, ce qui suppose le choix de grandeurs d'état significatives, si possible en nombre fini, et de paramètres internes *a priori* connus ou inconnus. Ceci définit une **structure**. Le problème est alors de déterminer un ensemble de valeurs à attribuer aux paramètres inconnus de la structure, compatibles avec les mesures effectuées. Cette évaluation définit alors un **modèle** permettant de simuler ou de prédire l'évolution du système et éventuellement de le commander ou de le surveiller.

Les définitions suivantes (légèrement modifiées) sont extraites de la thèse de F. OLLIVIER [OLLIVIER (1990)].

**Définition 2.1** On appelle **structure de modèle**, notée  $\mathcal{M}$ , la formulation :

- d'une classe d'applications (représentant les  $m$  entrées) :

$$\mathcal{U} \subset \text{appl}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m), \quad (2.1)$$

- de deux applications :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{E} \times \mathbb{P} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{E}, \\ g &: \mathbb{E} \times \mathbb{P} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^r, \end{aligned} \quad (2.2)$$

- d'une famille d'applications :

$$\phi_i : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots n, \quad (2.3)$$

où :

$\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des vecteurs d'état admissibles de dimension  $n$ ,  
 $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^p$  est l'ensemble des vecteurs de paramètres de dimension  $p$  admissibles *a priori*,  
 $m$  est la dimension du vecteur d'entrée,  
 $r$  est la dimension du vecteur de sortie. ♦

En donnant au vecteur des paramètres une valeur  $\theta$  particulière, on obtient un **modèle** de la structure  $\mathcal{M}$  qui sera noté  $\mathcal{M}(\theta)$ .

**Définition 2.2** On appelle **système d'équations d'état de la structure**, l'ensemble d'équations :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t, \mathbf{u}), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t), \quad (2.5)$$

et **conditions initiales**, les équations :

$$x_i(0) = \phi_i(\boldsymbol{\theta}), \quad i = 1 \dots n, \quad (2.6)$$

où :

- $t \in \mathbb{R}^+$  est le temps,
- $\mathbf{x} \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur d'observation,
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P} \subset \mathbb{R}^p$  est le vecteur des paramètres internes.

◆

**Définition 2.3** On appelle **structure linéaire** (en les entrées), une structure pour laquelle le système d'équations d'état est de la forme :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x} + \mathbf{B}(t, \boldsymbol{\theta})\mathbf{u}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont des matrices de tailles respectives  $n \times n$ ,  $n \times m$  et  $r \times n$  dont les coefficients dépendent du temps  $t$  et du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ .

◆

On dira qu'une structure est *invariante* si les fonctions  $f$  et  $g$  sont indépendantes du temps, et qu'elle est *polynomiale* ou *rationnelle* si de plus les fonctions le sont. Enfin, on dira qu'elle est à *conditions initiales nulles* si les fonctions  $\phi_i$  définissant ces conditions sont nulles.

**Définition 2.4** On appelle **comportement entrée–sortie du modèle**  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ , noté  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta})$ , l'application qui à tout vecteur d'entrée associe le vecteur de sortie du modèle :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) : \quad \mathcal{U} &\rightarrow \text{appl}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^r), \\ \mathbf{u}(t) &\rightarrow \quad \mathbf{y}(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{y}(t)$  est la sortie du modèle  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$  soumis à l'entrée  $\mathbf{u}(t)$  que l'on notera  $\mathbf{y}_{\mathcal{M}}(t, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})$  afin de faire apparaître les grandeurs dont elle dépend (les conditions initiales, toujours supposées connues, sont omises).

Alors, le **comportement entrée–sortie de la structure**, noté  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ , est l'application qui, à tout vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}$ , associe le comportement entrée–sortie du modèle  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta})$ .

◆

**Remarque 2.1** La notion de comportement est donc décrite comme une **application**. Toutefois, dans [WILLEMS (1986)], J. C. WILLEMS définit le comportement d'un modèle par :

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{w}(t) = [\mathbf{u}^T(t), \mathbf{y}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{m+r} \mid \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_{\mathcal{M}}(t, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \right\}, \quad (2.10)$$

et le comportement d'une structure est défini par :

$$\mathbb{B} = \left\{ t \in \mathbb{R}^+, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}, \mathbf{w}(t) = [\mathbf{u}^T(t), \mathbf{y}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{m+r} \mid \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_{\mathcal{M}}(t, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \right\}. \quad (2.11)$$

Il décrit donc la notion de comportement par l'**ensemble des trajectoires possibles des variables manifestes**  $\mathbf{w}(t)$ . Ces deux notions de comportement proposées par F. OLLIVIER et J. C. WILLEMS sont liées. En effet, le comportement d'un modèle selon WILLEMS correspond à l'ensemble des trajectoires correspondant aux graphes des applications à l'origine du comportement entrée–sortie d'un modèle selon OLLIVIER :

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{w}(t) = (\mathbf{u}^T(t), \mathbf{y}^T(t))^T \in \mathbb{R}^{m+r} \mid \mathbf{y}(t) = [\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta})](\mathbf{u}(t)) \right\}, \quad (2.12)$$

$$\mathbb{B} = \left\{ t \in \mathbb{R}^+, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}, \mathbf{w}(t) = (\mathbf{u}^T(t), \mathbf{y}^T(t))^T \in \mathbb{R}^{m+r} \mid \mathbf{y}(t) = [\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta})](\mathbf{u}(t)) \right\}. \quad (2.13)$$

◊

Le comportement entrée–sortie d'une structure est un objet trop peu maniable pour être utilisé directement, c'est pourquoi il est parfois substitué par une fonction des paramètres plus simple, appelée **résumé**.

**Définition 2.5** Un **résumé** de  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$  est une application  $r_{\mathcal{M}}$  de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{E}$  telle que :

$$\forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{P}, \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}^*) \implies r_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) = r_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}^*). \quad (2.14)$$

On parle de **résumé exhaustif** s'il est possible de remplacer l'implication précédente par l'équivalence :

$$\forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{P}, \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}^*) \iff r_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) = r_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}^*). \quad (2.15)$$

♦

Dans le cas de structures linéaires invariantes avec des conditions initiales nulles, les paramètres de Markov (c'est-à-dire la matrice des réponses impulsionales) et la matrice de transfert sont des résumés exhaustifs.

## 2.2 Identifiabilité

Une fois la structure de modèle  $\mathcal{M}$  choisie, il est crucial de s'assurer qu'il est théoriquement possible d'estimer les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  d'un modèle de cette structure à partir des données entrée–sortie. Deux facteurs majeurs vont avoir un impact sur l'identifiabilité :

- la complexité de la structure ;
- les données disponibles.

Ils vont respectivement conduire à deux notions :

- l’identifiabilité *a priori* ;
- l’identifiabilité *a posteriori*.

Notons que l’identifiabilité *a priori* est la plus fondamentale et constitue une condition nécessaire à l’identifiabilité *a posteriori*. Si une structure n’est pas identifiable *a priori*, c’est-à-dire si au moins un des paramètres n’est pas identifiable, alors quelle que soit l’information contenue dans les données, il sera naturellement impossible d’estimer le (ou les) paramètre(s) *a priori* non identifiable(s). Il sera alors nécessaire d’étudier l’identifiabilité *a posteriori* des paramètres *a priori* identifiables, si besoin en fixant les paramètres non identifiables.

Voici trois exemples de structures non-identifiables. Les deux premiers sont des exemples mettant en cause directement la structure (non identifiable *a priori*). La non-identifiabilité de la dernière structure est due aux données disponibles (non identifiable *a posteriori*).

#### Exemple 1 (Sur-paramétrisation du modèle)

Soit le modèle  $\mathcal{M}_1(a, b)$  régi par l’équation suivante :

$$\mathcal{M}_1(a, b) : \quad y(t) = a \cdot b \cdot u(t). \quad (2.16)$$

La structure  $\mathcal{M}_1$  n’est pas identifiable puisque tous les modèles  $\mathcal{M}_1(\hat{a}, \hat{b})$  tels que :  $\hat{a} = a/\gamma$  et  $\hat{b} = \gamma \cdot b$  où  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ , donnent le même comportement entrée-sortie que le modèle  $\mathcal{M}_1(a, b)$ . Seule la structure régie par l’équation  $y(t) = a \cdot u(t)$  est identifiable. ■

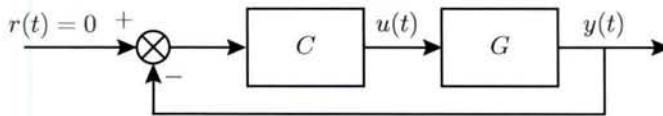


FIG. 2.1 – Exemple d’illustration d’une structure avec une boucle fermée.

#### Exemple 2 (Structure avec une boucle fermée)

Soit le modèle en boucle fermée  $\mathcal{M}_2(a, b)$  (Fig 2.1) fonctionnant en régulation (consigne nulle  $r(t) = 0$  et  $y(0) \neq 0$ ) régi par l’équation suivante :

$$G : \quad y(t) + a \frac{dy}{dt}(t) = b \frac{du}{dt}(t), \quad (2.17)$$

où le signal de commande  $u(t)$  est issu d’un correcteur proportionnel de paramètre connu  $p$  :

$$C : \quad u(t) = -p \cdot y(t). \quad (2.18)$$

Par conséquent, l’équation régissant la structure en boucle fermée est la suivante :

$$\mathcal{M}_2(a, b) : \quad y(t) + (a + p \cdot b) \frac{dy}{dt}(t) = 0, \quad (2.19)$$

donc la structure  $\mathcal{M}_2(a, b)$  n’est pas identifiable puisque tous les modèles  $\mathcal{M}_2(\hat{a}, \hat{b})$  tels que :  $\hat{a} = a + \gamma \cdot p$  et  $\hat{b} = b - \gamma$  où  $\gamma \in \mathbb{R}$ , donnent le même comportement entrée-sortie que le modèle  $\mathcal{M}_2(a, b)$ . Notons tout de même que si  $r(t) \neq 0$ , alors la structure est *a priori* identifiable. ■

**Exemple 3 (Entrées corrélées)**

Soit le modèle  $\mathcal{M}_3(a, b)$  régi par l'équation suivante :

$$\mathcal{M}_3(a, b) : \quad y(t) = a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t), \quad (2.20)$$

où :

$$u_2(t) = \alpha \cdot u_1(t). \quad (2.21)$$

Alors, la structure  $\mathcal{M}_3$  n'est pas identifiable puisque tous les modèles  $\mathcal{M}_3(\hat{a}, \hat{b})$  tels que :  $\hat{a} = a + \gamma \cdot \alpha$  et  $\hat{b} = b - \gamma$  où  $\gamma \in \mathbb{R}$ , donnent le même comportement pour ces entrées que le modèle  $\mathcal{M}_3(a, b)$ . ■

**Remarque 2.2** Les structures de modèle mono–entrée/mono–sortie de type « boîte noire » **canoniques**<sup>4</sup> sont toujours *a priori identifiables* et elles sont *a posteriori identifiables* si l'entrée est d'excitation persistante d'ordre suffisamment élevé (voir définition 1.1). En effet, on peut vérifier que dans ce cas le problème est bien–posé et bien–conditionné. C'est pourquoi le problème d'identifiabilité n'est pas soulevé lorsque l'on identifie un système par une structure canonique. En revanche, l'identifiabilité est évoquée en « boîte noire » dans les cas à entrées et sorties multiples non canoniques ou dans un contexte boucle fermée par exemple.

Outre les deux facteurs précédents conduisant aux notions d'identifiabilité *a priori* et *a posteriori*, le bruit (terme regroupant les erreurs de caractérisation et de mesure), souvent modélisé par un processus stochastique (ou une suite de variables aléatoires en temps discret), est un autre facteur évident ayant un impact sur le résultat de l'identification. Pour cette raison, il est à l'origine du troisième type d'identifiabilité trouvé dans la littérature : l'**identifiabilité numérique des paramètres** (voir tableau 2.1). Cette étude a pour objectif de répondre à la question suivante : *est-ce que les paramètres de la structure stochastique choisie (bruits modélisés par un processus stochastique), estimés à partir d'un comportement du système par une méthode d'estimation choisie, convergent presque sûrement (avec une probabilité 1) vers les vrais ?* [TSE et ANTON (1972) ; LJUNG (1976) ; GUSTAVSSON *et al.* (1977)]. Toutefois, ce problème n'est rien d'autre que celui de l'évaluation des propriétés d'un estimateur dans le cadre de la théorie de l'estimation [GODFREY et DiSTEFANO III (1987)]. Il s'agit donc d'un problème déjà longuement étudié que nous avons choisi de ne pas intégrer dans l'étude de l'identifiabilité, bien qu'il puisse s'avérer être un problème non résolu dans le cas de structures de modèles spécifiques pour justifier la cohérence des résultats d'identification.

<sup>4</sup>c'est–à–dire sous une forme telle qu'il existe une façon unique de l'écrire. On obtient, par exemple, une forme canonique en écrivant la fonction de transfert comme le rapport de deux polynômes ordonnés en  $s$ , à condition de simplifier numérateur et dénominateur par leur PGCD et de normaliser (fixer à un) le coefficient de plus bas (ou de plus haut) degré en  $s$  du dénominateur.

### 2.2.1 Identifiabilité *a priori*

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'identifiabilité *a priori* vis-à-vis de la structure, indépendamment de toute expérience. Pour cela, nous allons étudier, dans un cadre idéal, la structure de modèle afin de s'assurer qu'il existe une solution unique (identifiabilité globale) ou un nombre fini de solutions (identifiabilité locale) à l'estimation des paramètres. Par conséquent, l'étude de l'identifiabilité *a priori* revient à tester l'existence et l'unicité du vecteur des paramètres, c'est-à-dire les deux premières conditions pour que le problème d'estimation soit bien-posé au sens de HADAMARD. Notons que cette notion est voisine de l'observabilité qui exprime l'existence et l'unicité du vecteur d'état correspondant à un comportement entrée-sortie donné [DIOP et FLIESS (1991)].

L'objectif de l'identifiabilité *a priori* est de vérifier que deux vecteurs de paramètres différents n'entraînent pas le même comportement entrée-sortie (ou le même résumé du comportement), ce qui se traduit par :

$$\mathcal{C}_M(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\theta}^*), \quad (2.22)$$

↓

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*, \quad (2.23)$$

où  $\boldsymbol{\theta}^*$  et  $\boldsymbol{\theta}$  appartiennent à  $\mathbb{P}$ , l'ensemble des paramètres admissibles *a priori*.

En somme, évaluer l'identifiabilité *a priori* revient à tester l'injectivité du comportement entrée-sortie de la structure (Fig. 2.2).

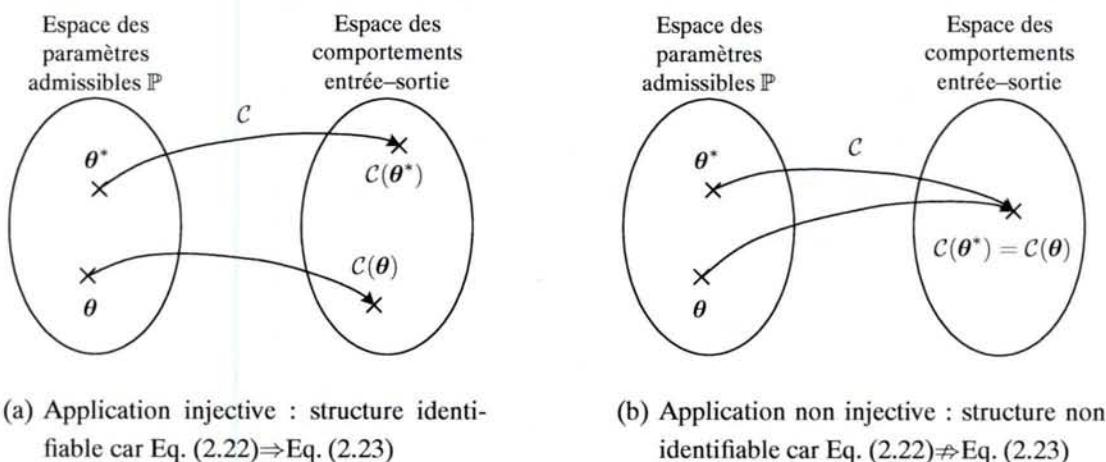


FIG. 2.2 – Interprétation algébrique de la condition d'identifiabilité *a priori* (globale).

#### 2.2.1.1 Cadre d'étude de l'identifiabilité *a priori*

Cette étude se réalise dans le cadre théorique (idéal) suivant [WALTER et PRONZATO (1994)] :

- le système et le modèle ont des structures identiques (pas d'erreur de caractérisation) ;
- les signaux d'entrée–sortie sont non bruités ;

- l'entrée à appliquer et les instants de mesure sont choisis librement (ce qui sous-entend qu'ils sont indépendants des paramètres et des autres variables).

Le schéma de la figure 2.3 est une représentation de ces conditions idéales.

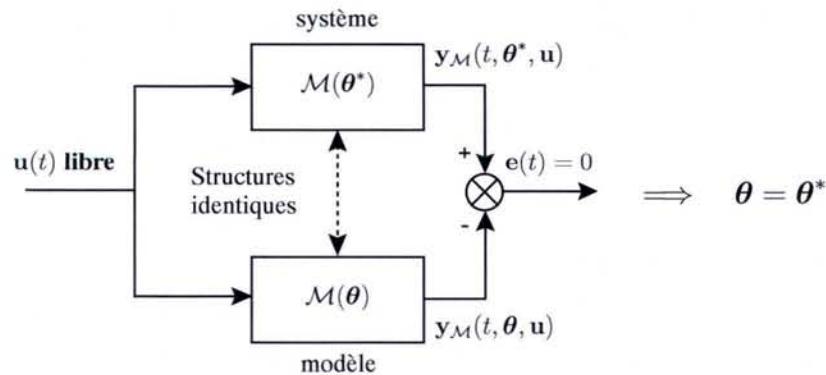


FIG. 2.3 – Identifiabilité *a priori*.

### 2.2.1.2 Définitions de l'identifiabilité *a priori*

Le concept d'identifiabilité *a priori* a été traité dès le début des années 1970 selon différentes définitions [BELLMAN et ÅSTRÖM (1970) ; GLOVER et WILLEMS (1974) ; GREWAL et GLOVER (1976)]. Ces définitions et d'autres plus récentes, ainsi que des comparaisons, peuvent être trouvées dans l'état de l'art de NGUYEN [NGUYEN et WOOD (1982)], le livre édité par WALTER [WALTER (1987)] et la thèse de NOIRET [NOIRET (2000)]. Les définitions suivantes, données par WALTER [WALTER et PRONZATO (1994)], sont basées sur des notions d'analyse. Il existe également des définitions basées sur des notions d'algèbre, données par [DIOP et FLIESS (1991)] ou [LJUNG et GLAD (1994)] que nous ne formulerons pas ici.

**Définition 2.6** Le paramètre  $\theta_i$  est *a priori globalement identifiable* en  $\theta^* \in \mathbb{P}$  si :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}, \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\theta}^*) \implies \theta_i = \theta_i^*. \quad (2.24)$$

L'identifiabilité globale n'est pas toujours facile à démontrer. C'est pourquoi, il existe une définition d'identifiabilité locale qui est souvent plus facile à démontrer.

**Définition 2.7** Le paramètre  $\theta_i$  est *a priori localement identifiable* en  $\theta^* \in \mathbb{P}$  si :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in V(\boldsymbol{\theta}^*), \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\theta}^*) \implies \theta_i = \theta_i^*, \quad (2.25)$$

où  $V(\boldsymbol{\theta}^*)$  est un voisinage de  $\boldsymbol{\theta}^*$ .

**Définition 2.8** La structure est *a priori globalement* (resp. *localement*) identifiable si tous ses paramètres sont *a priori globalement* (resp. *localelement*) identifiables.

Puisqu'aucune donnée expérimentale n'a encore été recueillie, aucune valeur numérique ne peut être attribuée au vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}^*$  de la structure. Il faut donc que l'étude de l'identifiabilité soit effectuée pour toutes les valeurs de  $\boldsymbol{\theta}^*$  admissibles. C'est pourquoi, l'identifiabilité est souvent traitée en tant que propriété structurelle, c'est-à-dire qu'elle est étudiée pour presque toutes les valeurs des paramètres de  $\mathbb{P}$ , et éventuellement fausse sur un sous-espace de mesure nulle (espace contenant des valeurs atypiques des paramètres) [WALTER et PRONZATO (1994)].

**Définition 2.9** Un paramètre  $\theta_i$  est *a priori* structurellement globalement (resp. localement) identifiable s'il est globalement (resp. localement) identifiable  $\forall \boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{P}$ . ♦

Si pour presque tout  $\boldsymbol{\theta}^*$ , il existe une solution unique pour  $\boldsymbol{\theta}$ , la structure est *a priori* structurellement globalement identifiable. Si pour presque tout  $\boldsymbol{\theta}^*$ , l'ensemble des solutions est dénombrable, la structure est *a priori* structurellement localement identifiable. Si pour presque tout  $\boldsymbol{\theta}^*$ , l'ensemble des solutions n'est pas dénombrable, la structure est *a priori* structurellement non-identifiable.

### 2.2.1.3 Méthodes d'identifiabilité *a priori*

Il existe de nombreuses méthodes pour tester l'identifiabilité *a priori* d'une structure de modèle linéaire ou non, fondées soit sur une approche analytique, soit sur une approche algébrique. Les descriptions détaillées de ces méthodes, peuvent être trouvées dans [WALTER (1982, 1987) ; CHAPELL *et al.* (1990) ; OLLIVIER (1990) ; NOIRET (2000) ; JAUBERTHIE (2002)].

Dans le cas de structures linéaires, l'identifiabilité *a priori* est un concept bien cerné. Il existe ainsi plusieurs méthodes simples à mettre en œuvre, utilisant différents *résumés* du comportement (comme par exemple les paramètres de Markov, la matrice de transfert ou la réalisation minimale de la forme d'état). Ce paragraphe présente la méthode fondée sur la matrice de transfert. Cette dernière sera utilisée afin d'étudier l'identifiabilité *a priori* de la structure de l'application envisagée dans cette thèse. Considérons une structure de modèle linéaire avec des conditions initiales nulles. Pour tester son identifiabilité, il est possible d'utiliser la méthode suivante [WALTER et PRONZATO (1994)] :

- exprimer la matrice de transfert associée  $H(s, \boldsymbol{\theta})$  ;
- transformer  $H(s, \boldsymbol{\theta})$  sous *forme canonique*  $H_c(s, \boldsymbol{\theta})$  ;
- écrire les équations en  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\boldsymbol{\theta}^*$  traduisant l'identité des paramètres de  $H_c(s, \boldsymbol{\theta})$  et  $H_c(s, \boldsymbol{\theta}^*)$  ;
- résoudre ces équations en  $\boldsymbol{\theta}$ .

#### Exemple 4 (extrait de [WALTER et PRONZATO (1994)])

Soit le modèle dont la fonction de transfert sous forme canonique est la suivante :

$$H_c(s, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_1}{s^2 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)s + \theta_2\theta_3}. \quad (2.26)$$

La relation  $H_c(s, \boldsymbol{\theta}) = H_c(s, \boldsymbol{\theta}^*)$  se traduit par le système d'équations :

$$\theta_1 = \theta_1^*, \quad (2.27)$$

$$\theta_2 + \theta_3 = \theta_2^* + \theta_3^*, \quad (2.28)$$

$$\theta_2\theta_3 = \theta_2^*\theta_3^*. \quad (2.29)$$

■

Ce dernier possède deux solutions en  $\boldsymbol{\theta}$  :  $\boldsymbol{\theta}_1 = (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*)^T$  et  $\boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_1^*, \theta_3^*, \theta_2^*)^T$ . On ne pourra donc pas trancher entre  $\theta_2$  et  $\theta_3$  sans faire appel à d'autres mesures que celles prévues ou à d'autres connaissances *a priori* que celles supposées disponibles lors de l'étude de l'identifiabilité *a priori*.

Le cas des structures non linéaires est bien plus complexe. En effet, il n'est parfois possible de mettre en évidence que des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'identifiabilité globale. La liste ci-dessous renvoie à quelques méthodes disponibles :

- l'approche par linéarisation autour d'un point d'équilibre [GODFREY et DISTEFANO III (1987)];
- l'approche par développement en séries (série de Taylor [GODFREY et DISTEFANO III (1987)] ou séries génératrices [WALTER (1982)]);
- l'approche par la méthode des similarités [VAJDA *et al.* (1989)];
- l'approche par l'algèbre différentielle [OLLIVIER (1990); LJUNG et GLAD (1994); DENIS-VIDAL *et al.* (1999); FLIESS et SIRA-RAMÍREZ (2003)].

Cette dernière s'avère très efficace dans les cas complexes. Elle est devenue accessible grâce aux travaux récents de A. SEDOGLAVIC qui a mis au point un algorithme testant l'observabilité et l'identifiabilité locale des systèmes et l'a implanté sous MAPLE (logiciel de calcul symbolique) [SEDOGLAVIC (2002)]. Les récents travaux de [XIA et MOOG (2003)] et [MARGARIA *et al.* (2004)] permettent de faire le point sur l'identifiabilité de structures non-linéaires et présentent des applications.

### 2.2.1.4 Identifiabilité *a priori* de structures stochastiques

Pour les systèmes réels, il convient de prendre en compte dans la structure de modèle les incertitudes de mesures et de modélisation. Il est possible de modéliser ces incertitudes par une approche probabiliste ce qui conduit alors à une structure de modèle  $\mathcal{M}_v$  fonction d'un ou plusieurs processus stochastiques stationnaires  $v(t)$ . Il peut alors être essentiel de s'assurer que les paramètres de la structure de modèle du bruit, ainsi que ceux de la structure globale (partie déterministe + partie stochastique), sont *a priori* identifiables. L. LJUNG [LJUNG (1999)] est le seul à notre connaissance à considérer l'identifiabilité de la structure du bruit.

Nous proposons alors d'étudier l'identifiabilité *a priori* stochastique dans le cadre suivant :

- processus stochastiques (stationnaires)  $v(t)$  du système et du modèle libres et identiques (même trajectoire) ;
- pas de bruit supplémentaire ;
- pas d'erreur de caractérisation ;
- entrée  $u(t)$  libre.

Les définitions et les méthodes restent identiques à celles précédemment décrites, sauf que la structure  $\mathcal{M}$  prend en compte celle de la structure du bruit  $\mathcal{M}_v$ . Dans le cas le plus couramment envisagé, représenté à la figure 2.4, les bruits et perturbations sont additifs et leur structure de modèle est définie par  $\mathcal{M}_v = \{H(s, \vartheta) | \vartheta \in \mathbb{P}\}$  où  $H(s, \vartheta)$  est un filtre stable et inversement stable mis sous forme canonique. La structure  $\mathcal{M}_v$  est donc identifiable. Alors, si l'identifiabilité de la structure  $\mathcal{M}$  a été établie, l'identifiabilité théorique de la structure stochastique résultante  $\mathcal{M}_s$  (correspondant à  $\mathcal{M} + \mathcal{M}_v$ ) est triviale.

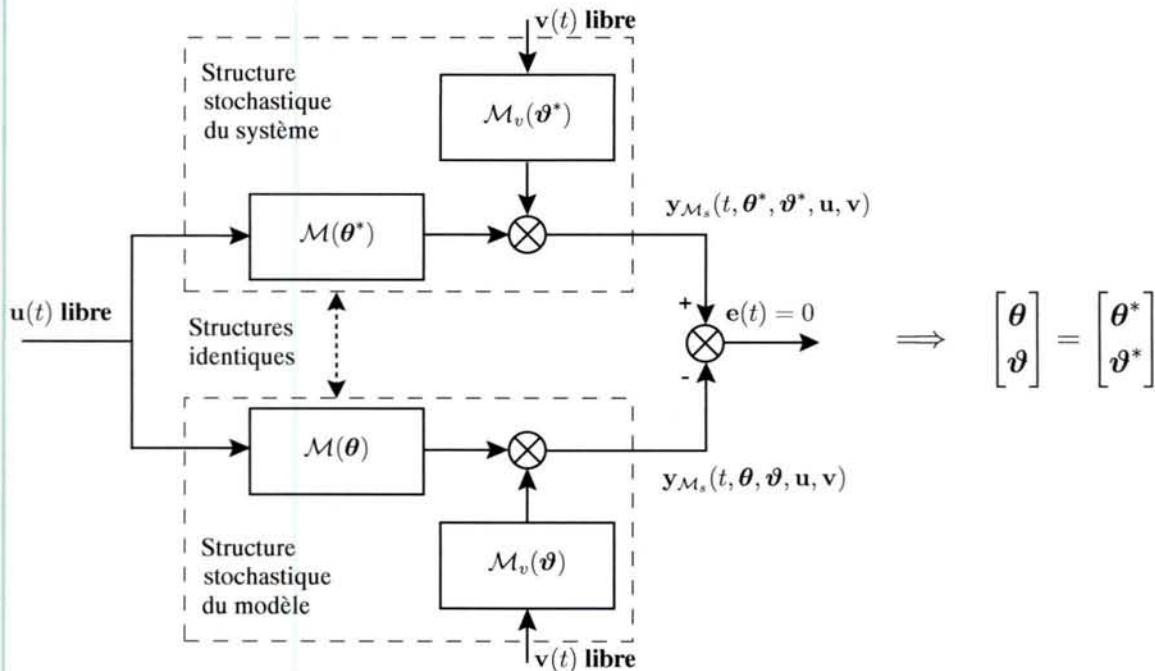


FIG. 2.4 – Identifiabilité *a priori* d'une structure stochastique – cas d'un bruit additif en sortie.

### 2.2.1.5 Objectifs de l'identifiabilité

Un objectif original de l'identifiabilité, récemment développé par C. NOIRET [NOIRET (2000)], est d'améliorer les méthodes d'identification en prenant en compte ses résultats. Toutefois, le principal objectif de l'identifiabilité *a priori* reste de parvenir à formuler des conditions d'identifiabilité de la structure, en particulier sur l'entrée, afin de garantir l'unicité de la solution du problème d'identification de la structure. Cette étude s'avère en effet nécessaire à toute démarche de planification d'expériences visant à rechercher les conditions expérimentales permettant d'obtenir la meilleure précision sur les estimées des paramètres [WALTER et PRONZATO (1990) ; JAUBERTHIE (2002)]. D'avantage de résultats sur l'identifiabilité *a priori* de systèmes à retard sont présentés

dans [ORLOV *et al.* (2002b,a) ; BELKOURA et ORLOV (2002) ; BELKOURA *et al.* (2000)]. Néanmoins, dans notre cas, la planification d'expériences est impossible pour des raisons de sécurité et de coût. En revanche, il serait intéressant de pouvoir déterminer si les données disponibles permettent d'estimer correctement les paramètres *a priori* identifiables de notre structure. Cette étude va être réalisée par l'identifiabilité *a posteriori*.

## 2.2.2 Identifiabilité *a posteriori*

Une fois l'identifiabilité *a priori* de la structure démontrée, il est alors important de vérifier que la condition d'unicité de la solution du problème inverse (estimation) est toujours vérifiée *a posteriori*, c'est-à-dire avec les données entrée-sortie disponibles.

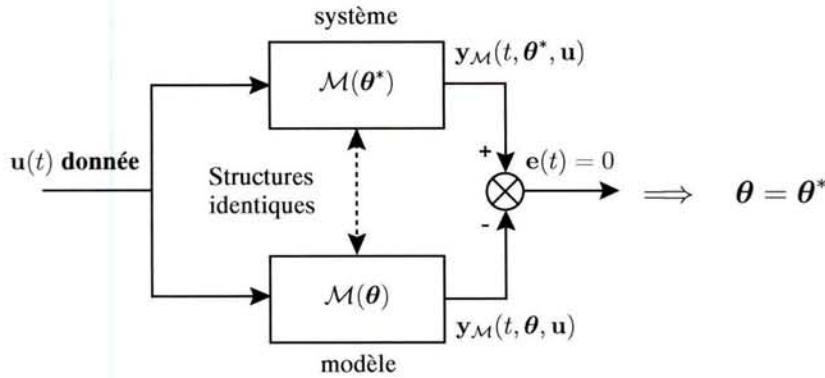
L'identifiabilité *a posteriori*, aussi souvent nommée *identifiabilité pratique*, a fait l'objet de nombreux travaux ces dix dernières années, notamment en bioprocédés où certains systèmes s'avèrent avoir une structure *a priori* identifiable, mais non identifiable *a posteriori* à cause des conditions expérimentales passives [DOCHAIN *et al.* (1995) ; VANROLLEGHEM *et al.* (1995) ; WEIJERS et VANROLLEGHEM (1997) ; BRUN *et al.* (2001) ; DOCHAIN et VANROLLEGHEM (2001)]. Toutefois, leur théorie repose sur la minimisation de l'énergie de l'erreur de sortie, ce qui sous-entend donc que leur résultat d'identifiabilité dépend du critère (i.e. de l'estimateur) utilisé. Nous proposons ici de définir l'identifiabilité *a posteriori* indépendamment de l'estimateur considéré, c'est-à-dire en exploitant uniquement la structure de modèle et les données disponibles. L'analyse de l'estimateur est envisagée dans le cadre de l'identifiabilité numérique (voir tableau 2.1). Le concept de l'identifiabilité *a posteriori* que nous allons utiliser est basé sur celui de l'identifiabilité *a priori*.

### 2.2.2.1 Cadre d'étude de l'identifiabilité *a posteriori*

La différence entre les cadres d'étude des identifiabilités *a priori* et *a posteriori* concerne les entrées : elles ne sont plus libres mais imposées. On parle alors d'un cadre expérimental passif où les données sont issues d'une simple observation et non d'une planification optimale d'expérience [GODFREY (1993) ; SCHOUKENS et PINTELON (1991) ; WALTER et PRONZATO (1994)]. Le cadre de l'identifiabilité *a posteriori* (voir FIG. 2.5) est donc le suivant :

- le système et le modèle ont des structures identiques (pas d'erreur de caractérisation) ;
- les entrées disponibles sont non bruitées (donc non mesurées) ;
- les entrées sont imposées (conditions expérimentales passives) ;
- le choix de la période d'échantillonnage des données est adaptée au problème.

Cette étude est donc toujours réalisée dans un cadre théorique, même si celui-ci n'est plus idéal ; c'est d'ailleurs pourquoi nous préférons les qualificatifs *a priori* et *a posteriori* plutôt que ceux de théorique et pratique.

FIG. 2.5 – Identifiabilité *a posteriori*.

### 2.2.2.2 Définitions de l'identifiabilité *a posteriori*

Il ne s'agit plus d'étudier l'injectivité du comportement entrée–sortie de la structure, mais d'étudier l'injectivité de son comportement pour une entrée spécifique, imposée par les conditions expérimentales.

**Définition 2.10** La structure est *a posteriori globalement identifiable* en  $\theta^* \in \mathbb{P}$  si :

$$\text{pour } u(t) \text{ donnée, } \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \forall t \in [t_1, t_N] \text{ (l'horizon de mesure),} \\ [\mathcal{C}_M(\theta)](u(t)) = [\mathcal{C}_M(\theta^*)](u(t)) \implies \theta = \theta^*, \quad (2.30)$$

ce qui est équivalent, d'après la définition 2.4 du comportement entrée–sortie d'un modèle, à :

$$y_M(t, \theta, u) = y_M(t, \theta^*, u) \implies \theta = \theta^*. \quad (2.31)$$

◆

**Définition 2.11** La structure est *a posteriori localement identifiable* en  $\theta^* \in \mathbb{P}$  si :

$$\text{pour } u(t) \text{ donnée, } \exists V(\theta^*) \text{ tel que } \forall \theta \in V(\theta^*), \quad \forall t \in [t_1, t_N], \\ y_M(t, \theta, u) = y_M(t, \theta^*, u) \implies \theta = \theta^*, \quad (2.32)$$

où  $V(\theta^*)$  représente un voisinage de  $\theta^*$ .

◆

### 2.2.2.3 Méthode d'identifiabilité *a posteriori* locale

Soit  $M$  une structure de modèle mono–entrée/mono–sortie *a priori* identifiable. Soit  $\theta^* \in \mathbb{P} \subset \mathbb{R}^p$  le vecteur des paramètres du modèle nominal,  $p$  étant le nombre de paramètres de la structure à estimer (*a priori* identifiables). Soit  $\theta \in V(\theta^*)$ ,  $p < N$ . Notons  $d\theta$  la différence entre les deux vecteurs de paramètres :  $\theta = \theta^* + d\theta$ . Alors, le développement en série de Taylor du premier ordre de  $y(t, \theta^* + d\theta, u)$  (pour raison de simplification l'indice  $M$  faisant référence à la structure considérée est omise) donne :

$$y(t, \theta^* + d\theta, u) = y(t, \theta^*, u) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial y(t, \theta, u)}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta^*} d\theta_i + O(d\theta^2), \quad (2.33)$$

Par conséquent, la condition d'identifiabilité *a posteriori* locale de la structure (2.32) est quasi-équivalente (à l'approximation près) à :

$$\forall t \in [t_1, t_N], \sum_{i=1}^p \frac{\partial y(t, \boldsymbol{\theta}, u)}{\partial \theta_i} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^*} d\theta_i = 0 \implies d\boldsymbol{\theta} = 0, \quad (2.34)$$

où :

$$\frac{\partial y(t, \boldsymbol{\theta}, u)}{\partial \theta_i} \Big|_{\boldsymbol{\theta}^*} = s_y(t, \theta_i^*, u) \quad (2.35)$$

est la fonction de sensibilité de la sortie  $y(t, \boldsymbol{\theta}^*, u)$  par rapport au paramètre  $\theta_i^*$  pour l'entrée  $u$  donnée et où  $[t_1, t_N]$  correspond à l'ensemble des instants des échantillons des données. L'équation précédente se réécrit :

$$\forall t \in [t_1, t_N], \sum_{i=1}^p s_y(t, \theta_i^*, u) d\theta_i = 0 \implies d\boldsymbol{\theta} = 0, \quad (2.36)$$

ou encore :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_y(t_1, \theta_1^*, u) & \cdots & s_y(t_1, \theta_p^*, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_y(t_N, \theta_1^*, u) & \cdots & s_y(t_N, \theta_p^*, u) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)} d\boldsymbol{\theta} = 0 \implies d\boldsymbol{\theta} = 0, \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)$  est la matrice de sensibilité de la sortie  $y$  par rapport aux paramètres de la structure  $\boldsymbol{\theta}^*$  pour  $u$  donnée. Cette écriture permet de voir que la condition (2.32) est vraie si et seulement si les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)$  sont linéairement indépendantes ou que la matrice  $\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)$  est de rang plein colonne :

$$\text{Rang}(\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)) = p, \quad (2.38)$$

ou, de manière équivalente, que le noyau de la matrice  $\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)$  est de dimension nulle :

$$\text{Ker}(\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, u)) = \emptyset. \quad (2.39)$$

En conclusion, s'il existe une fonction de sensibilité (c'est-à-dire une colonne de la matrice de sensibilité) :

$$\mathbf{s}_y(\theta_i^*, u) = [s_y(t_1, \theta_i^*, u) \dots s_y(t_N, \theta_i^*, u)]^T$$

nulle ou colinéaire à une autre, alors la condition d'unicité n'est pas respectée. Attention, ce n'est pas parce que la fonction de sensibilité d'un paramètre est non-nulle que ce dernier est *a posteriori* identifiable.

**Remarque 2.3** *Le choix des instants de discréétisation  $[t_1, t_N]$  est important. Il faudra d'assurer que la discréétisation temporelle des données est adaptée, c'est à dire qu'elle n'entraîne pas une chute du rang de la matrice de sensibilité.*

◊

**Remarque 2.4** Ce lien entre les notions d'identifiabilité et de sensibilité de la sortie n'est pas nouveau. J. G. REID a déjà donné une définition de structure « identifiable en sensibilité » (sensitivity identifiable) dans [REID (1977)] mais sans donner de définition de l'identifiabilité. Le chapitre [RICHALLET et al. (1971)] introduit le concept de sensibilité et montre son importance dans le développement des méthodes d'identification. ◇

La principale difficulté de cette méthode reste l'évaluation des fonctions de sensibilité. Plusieurs approches de différentiation (numérique, analytique, automatique) sont alors utilisables [GRIEWANK (2001)] et il existe des outils logiciels de différentiation associés à ces méthodes. Par exemple, le logiciel DIFFEDGE<sup>5</sup> [MASSE (2001)] a été développé récemment pour résoudre des problèmes de différentiation symbolique de modèles décrits sous forme de schémas-blocs.

Nous avons précédemment considéré le cas mono–entrée/mono–sortie, mais cette méthode est généralisable au cas multi–entrées/multi–sorties en considérant la matrice de sensibilité globale (composée des fonctions de sensibilité de chaque sortie par rapport à chaque paramètre de la structure  $\theta_i^*$  pour le vecteur d'entrées  $\mathbf{u}$  donné) de dimension  $Nr \times p$  :

$$\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{y_1}(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u}) & \mathbf{S}_{y_2}(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u}) & \cdots & \mathbf{S}_{y_r}(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u}) \end{pmatrix}^T, \quad (2.40)$$

où :

$$\mathbf{S}_{y_i}(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} s_{y_i}(\theta_1^*, \mathbf{u}) & s_{y_i}(\theta_2^*, \mathbf{u}) & \cdots & s_{y_i}(\theta_p^*, \mathbf{u}) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

On peut alors montrer que la structure est *a posteriori* localement identifiable en  $\boldsymbol{\theta}^*$  si et seulement si  $\text{Rang}(\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u})) = p$ .

#### 2.2.2.4 Lien avec la continuité de la solution

La condition de *continuité* signifie que la dépendance de la solution  $\boldsymbol{\theta}$  par rapport à la sortie  $y$  est continue, c'est–à–dire que lorsque l'erreur  $dy = \mathbf{y}(t, \boldsymbol{\theta}^* + d\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) - \mathbf{y}(t, \boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u})$  sur la donnée tend vers zéro, l'erreur  $d\boldsymbol{\theta}$  tend aussi vers zéro :

$$dy \rightarrow 0 \implies d\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0. \quad (2.42)$$

Nous avons vu au paragraphe précédent que si les paramètres sont *a posteriori* localement identifiables alors la matrice de sensibilité  $\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u})$  est de rang  $p$ . Or, si  $\text{Rang}(\mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u})) = p$ , alors :

$$dy \rightarrow 0 \implies d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{S}_y(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{u})^\dagger dy \rightarrow 0, \quad (2.43)$$

où  $(\cdot)^\dagger$  représente l'inverse généralisée d'une matrice. Par conséquent, l'identifiabilité *a posteriori* locale des paramètres implique la continuité (locale) de la solution (troisième condition pour qu'un problème soit bien–posé au sens de HADAMARD) : le problème de l'identification est bien–posé. Toutefois, le problème peut être mal–conditionné. Nous reviendrons sur le conditionnement du problème au paragraphe 2.2.2.6.

<sup>5</sup>DIFFEDGE, copyright APPEDGE, <http://www.appedge.com>

### 2.2.2.5 Identifiabilité *a posteriori* quantitative

Nous avons vu au paragraphe 2.2.2.3 que l'identifiabilité *a posteriori* d'une structure revenait à étudier la singularité de la matrice de sensibilité de la sortie vis-à-vis des paramètres. L'identifiabilité *a posteriori* d'un paramètre revient à tester la non-nullité de la fonction de sensibilité de la sortie vis-à-vis de ce paramètre, et sa non-colinéarité avec une autre (vis-à-vis d'un autre paramètre). Ces études sont donc qualitatives. Toutefois, puisque la dépendance linéaire est un critère quantitatif, il est possible de quantifier l'identifiabilité *a posteriori* d'un paramètre vis-à-vis des autres. Cette idée de degré (ou de quantification) d'identifiabilité rejoint les méthodes de sélection de paramètres identifiables des bioprocédés [WEIJERS et VANROLLEGHEM (1997) ; BRUN *et al.* (2001)] et celles de sélection de variables en régression linéaire (avec un critère de corrélation) [DRAPER et SMITH (1981)].

Le conditionnement d'une matrice est une mesure du degré de régularité de cette dernière. Il peut, par conséquent, servir de mesure du degré d'identifiabilité *a posteriori* d'une structure ou d'un paramètre. Par définition, le conditionnement d'une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est :

$$\kappa(\mathbf{A}) \triangleq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^\dagger\|, \quad (2.44)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme matricielle. On montre alors qu'une matrice ayant un conditionnement élevé est proche de la singularité, tandis qu'une matrice ayant un conditionnement petit (proche de 1 car  $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$ ) est loin d'être singulière. Lorsque la norme 2 est retenue le conditionnement de  $\mathbf{A}$  correspond alors au rapport des valeurs singulières extrêmes de  $\mathbf{A}$  :

$$\kappa_2(\mathbf{A}) \triangleq \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^\dagger\|_2 = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})}. \quad (2.45)$$

Notons qu'une matrice singulière aura un conditionnement infini.

Par conséquent, une structure ayant une matrice de sensibilité avec un conditionnement élevé sera moins identifiable qu'une autre ayant une matrice de sensibilité avec un conditionnement plus faible au sens où la première est plus proche de la singularité que la seconde, c'est-à-dire que son inversion sera plus sensible à des perturbations (ou incertitudes) sur les données.

Enfin, afin de comparer le degré d'identifiabilité de chacun des paramètres, il suffit alors de comparer les conditionnements de toutes les matrices formées par les diverses combinaisons possibles des fonctions de sensibilité (c'est-à-dire des colonnes de la matrice de sensibilité de la structure). Il est donc possible de classer les paramètres de la façon suivante :

1. Le paramètre le plus identifiable est celui ayant la plus grande norme (euclidienne) :

$$\theta_1 = \arg \max_{\theta \in \Theta} \|\mathbf{s}_y(\theta, \mathbf{u})\|_2, \quad (2.46)$$

où  $\Theta$  correspond à l'ensemble des paramètres étudiés.

2. Le deuxième est celui dont la fonction de sensibilité et celle relative à  $\theta_1$  forment une matrice ayant le conditionnement le plus faible, c'est-à-dire le plus petit rapport  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$ . Or, toutes ces matrices ont la même valeur singulière  $\sigma_{\max}$ , donc il suffit de choisir celle qui a

la plus grande valeur  $\sigma_{\min}$ . Par conséquent, le deuxième paramètre le plus identifiable est déterminé par :

$$\theta_2 = \arg \max_{\theta \in \Theta \setminus \{\theta_1\}} \sigma_{\min} ([\mathbf{s}_y(\theta_1, \mathbf{u}), \mathbf{s}_y(\theta, \mathbf{u})]), \quad (2.47)$$

où  $\Theta \setminus \{\theta_1\}$  correspond à l'ensemble des paramètres étudiés privé de  $\theta_1$ .

3. Le  $j^{\text{e}}$  paramètre ( $3 \leq j \leq p$ ) est alors déterminé par :

$$\theta_j = \arg \max_{\theta \in \Theta \setminus \Sigma_j} \sigma_{\min} ([\mathbf{S}_{\Sigma_j} \mathbf{s}_y(\theta, \mathbf{u})]), \quad (2.48)$$

où  $\Sigma_j = \{\theta_1 \dots \theta_{j-1}\}$  est l'ensemble des  $(j-1)^{\text{e}}$  paramètres plus identifiables et  $\mathbf{S}_{\Sigma_j} = [\mathbf{s}_y(\theta_1, \mathbf{u}) \dots \mathbf{s}_y(\theta_{j-1}, \mathbf{u})]$  est la matrice formée par les fonctions de sensibilité vis-à-vis de chacun des paramètres de  $\Sigma_j$ .

Enfin, une représentation synthétique de ces résultats peut être effectuée en traçant ces maxima (ou les valeurs singulières de la matrice de sensibilité) en fonction de leur argument, c'est-à-dire en fonction du classement établi. Cette classification sera effectuée dans le cadre de l'étude de l'identifiabilité *a posteriori* de la structure de notre application au paragraphe 2.4.

### 2.2.2.6 Lien avec le conditionnement du problème

Nous allons maintenant voir que le conditionnement du problème est lié au conditionnement de la matrice de sensibilité et, par conséquent, qu'étudier le degré d'identifiabilité *a posteriori* de la structure revient à étudier le conditionnement du problème. Tout d'abord, considérons un problème linéaire de la forme suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}, \quad (2.49)$$

où  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  sont respectivement des vecteurs de dimensions  $N$  et  $p$ , et  $\mathbf{A}$  est une matrice de dimension  $N \times p$ . Le vecteur  $\mathbf{y}$  et la matrice  $\mathbf{A}$  sont des données du problème. Dans notre cas, ils dépendent de la structure du modèle et des données entrée–sortie. L'annexe B montre la mise sous forme d'un problème linéaire de l'identification d'une réponse impulsionale finie.

Le conditionnement du problème (2.49) mesure la sensibilité de la solution  $\boldsymbol{\theta}$  à des perturbations relatives de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{y}$ . Il nécessite le choix d'une norme de vecteur et de sa norme matricielle subordonnée et il est alors défini par :

$$\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{y}) \triangleq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\begin{array}{l} \|\Delta \mathbf{A}\| \leq \epsilon \|\mathbf{A}\| \\ \|\Delta \mathbf{y}\| \leq \epsilon \|\mathbf{y}\| \end{array}} \frac{\|(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})^\dagger (\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}) - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}\|}{\epsilon \|\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}\|}. \quad (2.50)$$

Or D. J. HIGHAM souligne dans [HIGHAM (1995)] que le conditionnement du problème est lié au conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  par la relation suivante :

$$\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \kappa(\mathbf{A}) + \frac{\|\mathbf{A}^\dagger\| \|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}\|}, \quad (2.51)$$

où  $\kappa(\mathbf{A})$  est le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  (mesurant la sensibilité de l'opération d'inversion de la matrice) dont la définition a déjà été donnée à l'équation (2.44). Par conséquent, en utilisant l'inégalité  $\|\mathbf{A}\| \geq \|\mathbf{y}\|/\|\boldsymbol{\theta}\|$ , on déduit des équations (2.44) et (2.51) que :

$$\kappa(\mathbf{A}) \leq \kappa(\mathbf{A}, \mathbf{y}) \leq 2\kappa(\mathbf{A}). \quad (2.52)$$

Finalement, on constate donc que le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$  donne un nombre de grandeur acceptable du conditionnement du problème. Or, la matrice de sensibilité de la sortie vis-à-vis des paramètres du problème linéaire de l'équation (2.49) est égale à la matrice  $\mathbf{A}$ . Par conséquent, il est possible de quantifier le conditionnement du problème en quantifiant l'identifiabilité *a posteriori* d'une structure.

**Remarque 2.5** Si le conditionnement d'une matrice est infini, cela implique que cette matrice n'est pas inversible et donc que la solution du problème inverse n'est pas continue, c'est-à-dire que le problème est mal conditionné et mal-posé. ◇

## 2.3 Discernabilité

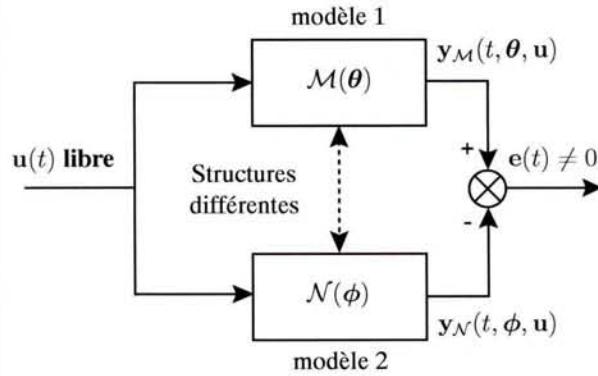
La discernabilité assure qu'il est possible (ou non) de faire la distinction entre plusieurs structures candidates à la représentation d'un système. On considère maintenant deux structures de modèle  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ , pensées être pertinentes pour décrire le système  $\mathcal{S}$  et associées respectivement aux vecteurs de paramètres  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}$  et  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{Q}$  (FIG. 2.6). On dira que  $\mathcal{N}$  est structurellement discernable de  $\mathcal{M}$ , si pour presque toute valeur de  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}$ , il n'existe aucune valeur  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{Q}$  satisfaisant l'égalité des comportements entrée-sortie des deux modèles. Notons que contrairement à l'identifiabilité, cette définition n'est pas symétrique : la proposition «  $\mathcal{N}$  est structurellement discernable de  $\mathcal{M}$  » n'entraîne pas nécessairement «  $\mathcal{M}$  est structurellement discernable de  $\mathcal{N}$  ». Lorsque les deux propositions sont vérifiées, on dira que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont structurellement discernables. Les algorithmes de test de discernabilité structurelle [CHAPMAN *et al.* (1994)] sont analogues à ceux employés pour l'identifiabilité de la structure. Il y a cependant deux différences notables. La première est qu'au lieu de considérer deux modèles de même structure, on considère deux modèles de structures différentes. La seconde est que l'on espère montrer l'inexistence d'une solution  $\boldsymbol{\phi}$ , alors que dans l'étude de l'identifiabilité on espère montrer l'unicité de cette solution. Par ailleurs, il est facile de prouver [WALTER et PRONZATO (1994)] que l'identifiabilité d'une structure n'est ni nécessaire ni suffisante pour sa discernabilité. Il suffit de mettre en évidence des structures qui sont discernables alors qu'aucune n'est identifiable et des structures identifiables qui ne sont pas discernables.

**Définition 2.12** On dira que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont structurellement (globalement) discernables sur  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ , s'il n'existe aucune valeur de  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}$  et  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{Q}$  satisfaisant :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\phi}). \quad (2.53)$$

◆

On peut également donner une définition de discernabilité locale non structurelle beaucoup moins restrictive.

FIG. 2.6 – Discernabilité *a priori* de structures.

**Définition 2.13** On dira que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont localement discernables en  $\theta^* \in \mathbb{P}$  et en  $\phi^* \in \mathbb{Q}$ , s'il n'existe aucune valeur de  $\theta \in V(\theta^*)$  et  $\phi \in V(\phi^*)$  satisfaisant :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\theta) = \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\phi). \quad (2.54)$$

◆

Naturellement, tout comme pour l'identifiabilité, il est important d'étudier la discernabilité *a posteriori* des structures candidates, c'est-à-dire pour les jeux de données à notre disposition.

**Définition 2.14** On dira que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont *a posteriori* localement discernables en  $\theta^* \in \mathbb{P}$  et en  $\phi^* \in \mathbb{Q}$  pour un vecteur  $\mathbf{u}$  d'entrées donné, s'il n'existe aucune valeur de  $\theta \in V(\theta^*)$  et  $\phi \in V(\phi^*)$  satisfaisant,  $\forall t \in [t_1, t_N]$  :

$$[\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(\theta)](\mathbf{u}(t)) = [\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\phi)](\mathbf{u}(t)), \quad (2.55)$$

ou de manière équivalente :

$$\mathbf{y}_{\mathcal{M}}(t, \theta, \mathbf{u}) = \mathbf{y}_{\mathcal{N}}(t, \phi, \mathbf{u}) \quad (2.56)$$

◆

Toutefois, la non-existence est plus difficile à démontrer que l'unicité.

## 2.4 Identifiabilité d'un bief de rivière aménagé

Dans le chapitre 1, nous avons montré qu'un bief de rivière peut être modélisé par une structure à temps continu régie par l'équation suivante :

$$\overline{\Delta h_L}(s) = \frac{K_e}{A} \frac{e^{-\tau s}}{s} \overline{\Delta u_{Q_e}}(s) - \frac{K_s}{A} \frac{1}{s} \overline{\Delta u_{Q_s}}(s), \quad (2.57)$$

où les paramètres sont  $\theta = [K_e, K_s, A, \tau]^T$  avec  $\tau > 0$ . Rappelons que les données sont  $\Delta h_L$  la côte du bief en aval,  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  respectivement les commandes de débit entrant et sortant.

La méthode d'identifiabilité *a priori* présentée au paragraphe 2.2.1.3 montre que les paramètres  $K_e$ ,  $K_s$  et  $A$  ne sont pas identifiables. En revanche, les paramètres  $\alpha_e = K_e/A$ ,  $\alpha_s = K_s/A$  et  $\tau$

sont *a priori* structurellement globalement identifiables. Nous considérerons donc maintenant la structure régie par l'équation suivante :

$$\overline{\Delta h_L}(s) = \alpha_e \frac{e^{-\tau s}}{s} \overline{\Delta u_{Q_e}}(s) - \alpha_s \frac{1}{s} \overline{\Delta u_{Q_s}}(s), \quad (2.58)$$

où les paramètres sont  $\boldsymbol{\theta} = [\alpha_e, \alpha_s, \tau]^T$  avec  $\tau > 0$ .

Nous allons maintenant étudier l'identifiabilité *a posteriori* de cette structure en  $\boldsymbol{\theta}^*$  (dont les valeurs sont données dans le tableau 2.2) à partir de plusieurs jeux de données à notre disposition (voir chapitre 1). Pour cela, nous avons vu au paragraphe 2.2.2 qu'il était nécessaire de calculer les fonctions de sensibilité de la sortie vis-à-vis des paramètres pour les entrées disponibles. Ces calculs peuvent se faire de manière soit analytique comme nous allons le voir, soit en utilisant le logiciel DIFFEDGE évoqué précédemment. Toutefois, ce dernier ne permet pas de calculer directement la sensibilité d'une sortie vis-à-vis d'un retard. Mais ceci reste possible indirectement en approchant le retard avec, par exemple, une approximation de Padé [MALEK-ZAVAREI et JAMSHIDI (1987) ; RICHARD (2003b)].

paramètre	valeur nominale
$\tau$	$7 \times T_e$ (en s)
$A$	$0,669.10^6$ (en $m^2$ )
$K_e$	1
$K_s$	0,8

TAB. 2.2 – Valeurs nominales  $\boldsymbol{\theta}^*$  des paramètres du bief aménagé.

D'après l'équation (2.58), les transformées de Laplace des fonctions de sensibilité de la sortie vis-à-vis de chacun des paramètres vérifient les relations suivantes<sup>6</sup> :

$$\frac{\partial \overline{\Delta h_L}}{\partial \alpha_e}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s} \overline{\Delta u_{Q_e}}(s), \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \overline{\Delta h_L}}{\partial \alpha_s}(s) = -\frac{1}{s} \overline{\Delta u_{Q_s}}(s), \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \overline{\Delta h_L}}{\partial \tau}(s) = -\alpha_e e^{-\tau s} \overline{\Delta u_{Q_e}}(s), \quad (2.61)$$

desquelles il est possible de déduire les fonctions de sensibilité à l'aide de la transformée de Laplace inverse. La figure 2.8 représente ces fonctions de sensibilité évaluées pour le jeu d'entrées représenté à la figure 2.7 et les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau 2.2, les conditions initiales étant supposées nulles. On constate que, dans ces conditions, la sortie est très sensible vis-à-vis des deux paramètres  $\alpha_e$  et  $\alpha_s$  (variation de la sensibilité respectivement entre  $-5.10^5$  et  $10.10^5$ , et entre  $-15.10^5$  et 0). En revanche, elle est beaucoup moins sensible vis-à-vis du retard puisque sa sensibilité varie entre  $-1.10^{-4}$  et  $1.10^{-4}$ . Toutefois, bien que cette sensibilité soit faible,

<sup>6</sup>Nous rappelons que la notation  $\bar{x}(s)$  représente la transformée de Laplace de la variable  $x(t)$ .

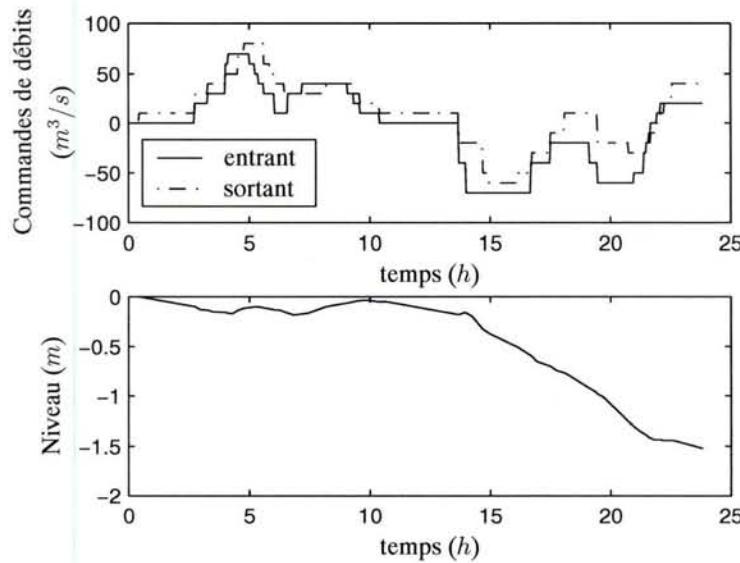


FIG. 2.7 – Variations des commandes de débits entrant et sortant (données du 14/03) et variation du niveau en aval obtenue par une simulation du modèle (2.57) pour les valeurs nominales des paramètres du tableau 2.2.

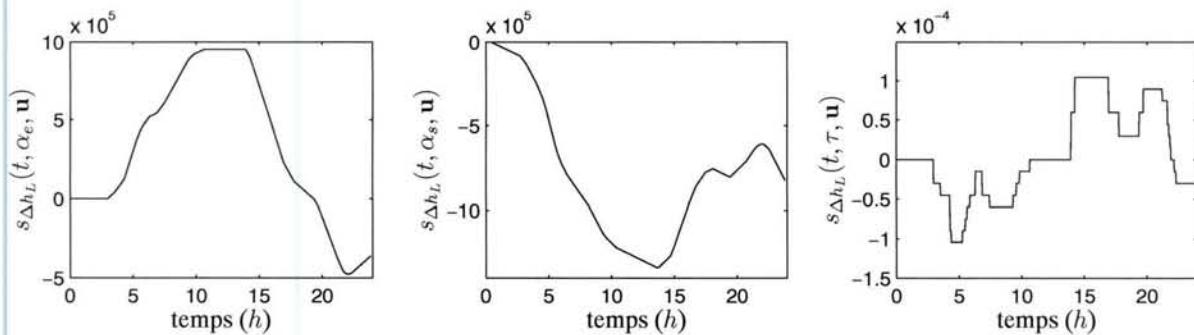


FIG. 2.8 – Fonctions de sensibilité de la sortie  $\Delta h_L$  du modèle nominal vis-à-vis des trois paramètres  $\alpha_e$ ,  $\alpha_s$  et  $\tau$  pour les entrées  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  données. Le conditionnement de la matrice de sensibilité vaut  $1,86 \cdot 10^{10}$ .

on ne peut pas la considérer comme nulle. De plus, les deux autres vecteurs de sensibilité ne sont pas colinéaires : la matrice de sensibilité n'est pas singulière. Toutefois, le conditionnement de cette dernière est élevé ( $1,86 \cdot 10^{10}$ ). Par conséquent, la structure est *a posteriori* identifiable mais au moins un des paramètres est très peu identifiable. La figure 2.9 représente les valeurs singulières de la matrice de sensibilité pour ce jeu de données (marqueurs  $\times$ ), ainsi que celles pour l'ensemble des jeux de données à notre disposition (marqueurs  $\bullet$ ), en fonction du classement des paramètres du plus au moins identifiable, obtenu par la méthode présentée au paragraphe 2.2.2.5. On constate que  $\alpha_e$  et  $\alpha_s$  ont un degré d'identifiabilité du même ordre de grandeur. Toutefois, le retard  $\tau$  possède un degré d'identifiabilité beaucoup plus faible. Il est responsable du mauvais conditionnement du problème pour l'ensemble des jeux de données, compris entre  $5 \cdot 10^9$  et  $5 \cdot 10^{11}$  comme l'indique la figure 2.10 représentant la répartition de ce dernier pour l'ensemble des jeux de données.

En conclusion, le problème d'identification est bien–posé, mais mal conditionné étant donné les signaux disponibles. En particulier, le retard est peu identifiable, ce qui signifie qu'il est déjà suffisant de l'estimer à une période d'échantillonnage près.

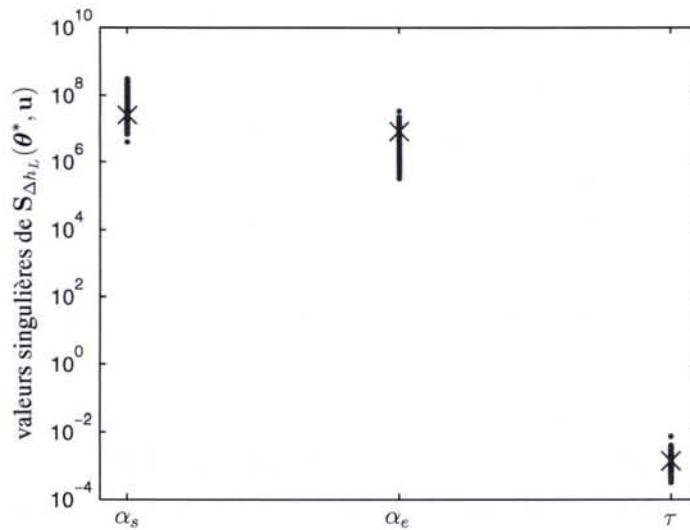


FIG. 2.9 – Résultats de l'identifiabilité *a posteriori* quantitative pour l'ensemble des jeux de données (× valeurs singulières de la matrice de sensibilité pour le jeux de données du 14/03).

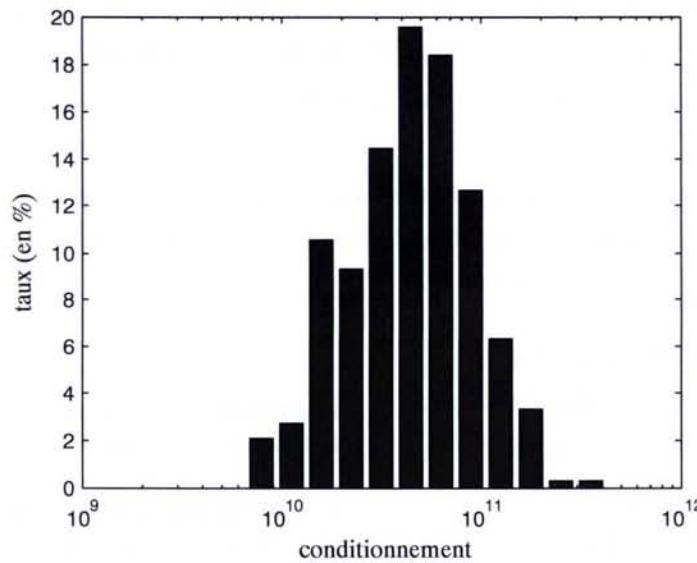


FIG. 2.10 – Histogrammes des nombres de conditionnement des matrices de sensibilité obtenues pour l'ensemble des jeux de données.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux concepts d'identifiabilité et dans une moindre mesure à ceux de discernabilité. Devant la richesse des travaux portant sur le concept d'identifiabilité et ses différentes

définitions plus ou moins pertinentes [LECOURTIER et WALTER (1981)], il nous a paru nécessaire d'apporter une clarification. Nous avons alors proposé la classification suivante :

- l'identifiabilité *a priori* ;
- l'identifiabilité *a posteriori* ;
- l'identifiabilité numérique.

Ce chapitre a été principalement dédié aux deux premières notions. L'identifiabilité numérique, relative à l'étude des propriétés de l'estimateur des paramètres, et donc déjà longuement étudiée, n'est pas considérée dans ce travail.

L'identifiabilité *a priori* consiste à étudier l'existence et l'unicité d'une solution à l'estimation des paramètres d'une structure de modèle dans un cadre idéal (indépendamment des données).

Une fois l'identifiabilité *a priori* de la structure démontrée, il est alors important de vérifier que l'unicité de la solution du problème inverse est également garantie *a posteriori* dans le cadre expérimental (avec les données disponibles) : il s'agit alors de l'identifiabilité *a posteriori*. Ce concept a déjà été défini sous la terminologie d'*identifiabilité pratique* [DOCHAIN et VANROLLEGHEM (2001)]. Dans ce cadre, notre contribution a été de proposer une définition de l'identifiabilité *a posteriori* généralisant celle de l'identifiabilité *a priori* donnée dans [WALTER et PRONZATO (1994)]. Celle-ci nous a conduit au développement d'une méthode d'identifiabilité *a posteriori* locale, consistant à étudier le rang de la matrice de sensibilité de la sortie vis-à-vis des paramètres de la structure de modèle. Cette étude est qualitative : la structure est ou n'est pas identifiable. Nous avons vu que cette étude peut également être quantitative : un paramètre peut être plus ou moins identifiable qu'un autre. Nous avons alors proposé une méthode de sélection de paramètres selon leur degré d'identifiabilité pour une entrée donnée, par l'inspection du conditionnement des matrices de sensibilité.

Finalement, nous sommes parvenus à la conclusion que des liens entre les différents concepts d'identifiabilité et l'étude du problème inverse (d'estimation) peuvent être établis. Ceux-ci peuvent être résumés par le diagramme suivant :

#### **Étude du caractère bien-posé :**

- existence d'une solution ;
- unicité de la solution ;
- continuité de la solution.

} **identifiabilité *a priori***  
(étude de la structure)

#### **Étude du conditionnement.**

} **identifiabilité *a posteriori* locale**  
(étude des données disponibles)

Enfin, le dernier paragraphe du chapitre a été dédié à l'étude d'identifiabilité de la structure du bief de rivière aménagé déterminée au chapitre 1. Celle-ci montre qu'il est déjà suffisant d'estimer le retard à une période d'échantillonnage près, étant donné le degré d'identifiabilité *a posteriori* de ce paramètre.

## Chapitre 3

# Méthodes d'estimation de retard

L'objectif de ce chapitre est, d'une part, d'effectuer un état de l'art des méthodes d'estimation du retard d'une structure de modèle à temps discret, le retard étant supposé être un multiple de la période d'échantillonnage :  $\tau = d \times T_e$ , où  $d \in \mathbb{N}^*$ . D'autre part, il s'agira d'appliquer le principe de ces méthodes à l'estimation de retard de bief de rivière aménagé.

Cependant, ces méthodes ne sont pas directement applicables aux cas du bief de rivière aménagé. En effet, nous avons montré au chapitre 1 que le bief de rivière aménagé, dans les conditions expérimentales passives, est modélisé par la structure de modèle représentée à la figure 3.1. Deux grandes approches peuvent alors être considérées pour identifier le bief (et en particulier estimer le retard) selon la structure de modèle :

- l'approche directe, qui ne prend pas en compte la nature bouclée du système : la structure de modèle (ne contenant pas de boucle) représente directement le comportement entre les deux entrées,  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$ , et la sortie  $\Delta h_L$  ;
- l'approche indirecte, qui prend en compte les boucles du système : la structure de modèle, mono-entrée/mono-sortie, représente le comportement (bouclé) entre une entrée  $\Delta u_{Q_e}$  et la sortie  $\Delta h_L$ .

Notons que si les correcteurs sont connus, il est alors possible de passer d'un modèle de l'approche directe à un autre de l'approche indirecte, et inversement.

La première partie de ce chapitre effectue un état de l'art des principales méthodes d'estimation de retard de structure à temps discret mono-entrée/mono-sortie.

La deuxième partie est dédiée à une étude d'applicabilité des méthodes précédemment décrites dans le cadre du bief de rivière. Certaines de ces méthodes vont s'avérer difficilement utilisables en l'état et il sera alors nécessaire de les adapter. Nous proposerons en particulier une généralisation de la méthode d'estimation de retard développée dans [ZHENG et FENG (1990)] au cas d'une structure possédant deux entrées et une sortie corrélées.

Enfin, la dernière partie concerne l'application des méthodes retenues à l'estimation du retard du bief de rivière aménagé à partir des données disponibles.

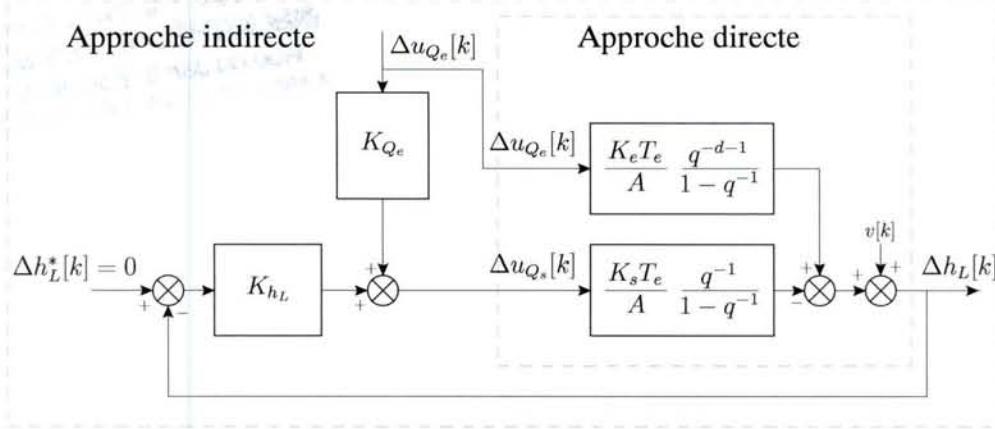


FIG. 3.1 – Schéma–bloc de la structure de modèle simplifiée d'un bief de rivière dans les conditions expérimentales passives.

### 3.1 Estimation de retard de structure mono–entrée/mono–sortie à temps discret : un état de l'art

La structure de modèle du système considérée dans cette partie est la suivante :

$$y[k] = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} u[k] + w[k], \quad (3.1)$$

où  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente l'entrée (d'ordre d'excitation persistante suffisamment élevé),  $\{y[k]\}_{k=0}^{N-1}$  la sortie,  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  le bruit agissant sur le système et :

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}, \quad (3.2)$$

$$A(q^{-1}) = 1 - a_1 q^{-1} - \cdots - a_{n_a} q^{-n_a}. \quad (3.3)$$

Les ordres  $n_a$  et  $n_b$  sont supposés connus. Le paramètre  $d$  correspond au retard à estimer.

Les méthodes d'estimation de retard, qui vont être présentées, sont classées en trois catégories :

- celles fondées sur l'estimation d'une réponse impulsionnelle finie (RIF) ;
- celles fondées sur l'estimation d'un transfert rationnel ;
- celles fondées sur l'estimation des statistiques d'ordres 2 et 3 des données entrée–sortie.

Les performances des principales méthodes seront illustrées à l'aide d'un exemple de simulation du modèle d'ordre 2 suivant :

$$y[k] = \frac{q^{-1} + 0.1q^{-2}}{1 - 1.6q^{-1} + 0.8q^{-2}} q^{-d} u[k] + w[k], \quad \text{pour } k = 0 \dots N-1, \quad (3.4)$$

dont les paramètres sont rappelés dans le tableau 3.1. L'entrée  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de variables aléatoires (VA) stationnaire et ergodique, le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA stationnaire dont la variance est déterminée en fonction du rapport signal–sur–bruit<sup>1</sup> (RSB) souhaité. La période

<sup>1</sup>Le RSB (en dB) est défini comme étant 10 fois le rapport logarithmique entre la puissance du signal et celle du bruit.

d'échantillonnage vaut  $T_e = 0.1 \text{ s}$ . De plus, parce que certaines méthodes supposeront que l'entrée  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un processus MA (Moyenne Ajustée) d'ordre fini, l'entrée de notre exemple vérifie la relation suivante :

$$u[k] = (2.1 - 0.8q^{-1} + 1.3q^{-2} + 2.2q^{-3}) r[k], \quad (3.5)$$

où  $\{r[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Notons que l'ordre d'excitation persistante de l'entrée  $u$  (voir définition 1.1, p. 18) est égal à celui de  $r$ .

$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$	$d$
1	0.1	1.6	-0.8	30

TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres du modèle de simulation.

### 3.1.1 Méthodes fondées sur l'estimation d'une RIF

Les deux méthodes présentées dans ce paragraphe nécessitent l'estimation d'une réponse impulsionnelle infinie tronquée, c'est-à-dire l'estimation d'une RIF. Cette dernière peut être réalisée par une des méthodes présentées dans l'annexe B. L'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) est classiquement utilisé. Le retard est ensuite *détecté* par l'une des deux méthodes suivantes :

- détection de l'instant de début de la partie non-nulle de la RIF [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989) ; CARLEMALM *et al.* (1999) ; BJÖRKLUND (2003)] ;
- séparation fréquentielle du retard et de la dynamique, puis détection du retard [BJÖRKLUND (2003)].

Le principe de la première méthode repose sur le fait que les  $d$  premiers échantillons de la RIF d'un système causal à retard sont théoriquement nuls. Celui de la seconde repose sur le fait que la réponse impulsionnelle  $h[k]$  est égale au produit de convolution de la réponse impulsionnelle du système non retardé  $h_{nr}[k]$  et d'une impulsion unité retardée  $\delta_d[k] = \delta[k - d]$  :

$$h[k] = (h_{nr} \star \delta_d)[k], \quad (3.6)$$

comme l'illustre la figure 3.2 [BJÖRKLUND (2003)]. Naturellement, le résultat de détection du retard dépendra de la qualité des estimées de la RIF.

**Remarque 3.1** Nous considérons dans ce travail que la réponse impulsionnelle discrète est obtenue par la discréttisation d'un système continu par la méthode de l'invariance indicelle (signal d'entrée supposé constant par morceau, ce qui revient implicitement à considérer un bloqueur d'ordre 0). De ce fait, on a  $h_{nr}[0] = 0$  et  $h[d] = 0$ , comme on peut le constater sur la figure 3.2. Le retard correspond donc à l'indice du dernier des premiers coefficients nuls de la réponse impulsionnelle  $h[k]$ , et non pas à l'indice de son premier coefficient non-nul. ◇

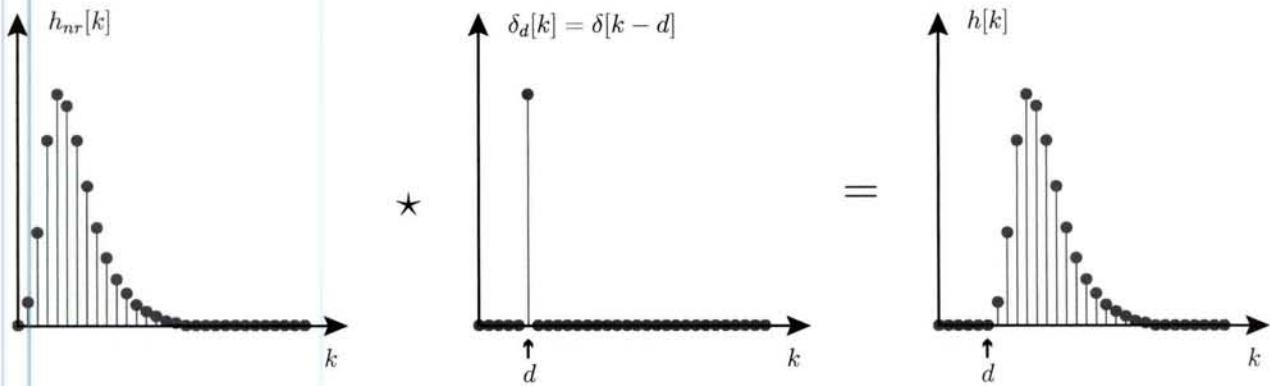


FIG. 3.2 – Décomposition de la réponse impulsionnelle d'un système à retard.

### 3.1.1.1 Détection du début de la partie non-nulle de la RIF

La détection de l'instant de début de la partie non-nulle de la réponse impulsionnelle est réalisée par des techniques de détection de sauts de moyenne. Une fois la réponse impulsionnelle estimée, un test statistique permet par comparaison à un seuil de déterminer l'instant à partir duquel la réponse impulsionnelle commence à varier. Il existe plusieurs tests qui peuvent être utilisés, parmi lesquels on peut citer :

- *Utilisation directe de la réponse estimée :*

Dans ce cas, aucun traitement (filtrage) n'est effectué sur la réponse impulsionnelle estimée. Le retard est approché par l'instant à partir duquel la réponse impulsionnelle est supérieure à un seuil. Cette méthode est simple et performante quand le RSB est satisfaisant. En revanche, le taux de fausses détections augmente rapidement quand le RSB diminue.

- *Dérivée de la réponse impulsionnelle :*

Idéalement, en l'absence de bruit, un saut brusque dans la réponse impulsionnelle est caractérisé localement par une grande valeur absolue de la dérivée (discrète). Comme l'opérateur de différentiation discrète est sensible au bruit, un détecteur plus réaliste consiste à appliquer un filtre (typiquement passe-bas) avant la dérivation et le seuillage. C'est le principe de l'algorithme de la dérivée filtrée [BASSEVILLE (1981)].

- *Réponse indicelle :*

La réponse impulsionnelle est d'abord intégrée (pour obtenir la réponse indicelle), avant d'appliquer le seuil.

- *Test de Page–Hinkley (CUSUM) :*

La réponse impulsionnelle ou indicelle d'un système dynamique retardé présente un saut de moyenne mobile à un instant correspondant au retard du système. L'algorithme classique du CUSUM [PAGE (1954) ; BASSEVILLE et NIKIFOROV (1993)], présenté dans l'annexe C, permet de détecter cet instant en calculant la statistique suivante (en supposant que  $\mu_0 = 0$  et le saut de moyenne  $\nu_m$  est positif) :

$$g^+[n] = \max\{0, g^+[n-1] + h[n] - \frac{\nu_m}{2}\}, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq M-1, \quad (3.7)$$

appelée *fonction de décision*, où  $h$  est la réponse impulsionnelle (ou indicelle) finie estimée (d’ordre de troncature  $M$ ),  $\nu_m$  est le saut minimum à détecter et  $g^+[-1] = 0$ . Le temps d’arrêt est alors déterminé par la relation suivante :

$$k_a = \arg \min_{0 \leq n \leq M-1} \{g^+[n] > \lambda\}, \quad (3.8)$$

où  $\lambda$  est un seuil à fixer. Alors, si un saut supérieur à  $\nu_m$  est détecté, le retard du système est approché par :

$$\hat{d} = \arg \max_{0 \leq n \leq k_a} \{g^+[n] = 0\}. \quad (3.9)$$

Un exemple, présenté ci-dessous, illustre le principe de cette méthode, ainsi que ces performances.

D’autres détecteurs, tels que l’algorithme GLR (*Generalized Likelihood Ratio*) de Willsky [WILLSKY et JONES (1976) ; BASSEVILLE et NIKIFOROV (1993)] ou celui de Carlemalm *et al.* [CARLEMALM *et al.* (1999)], peuvent également être utilisés. Cependant, l’algorithme CUSUM est celui qui donne le meilleur rapport simplicité–performance.

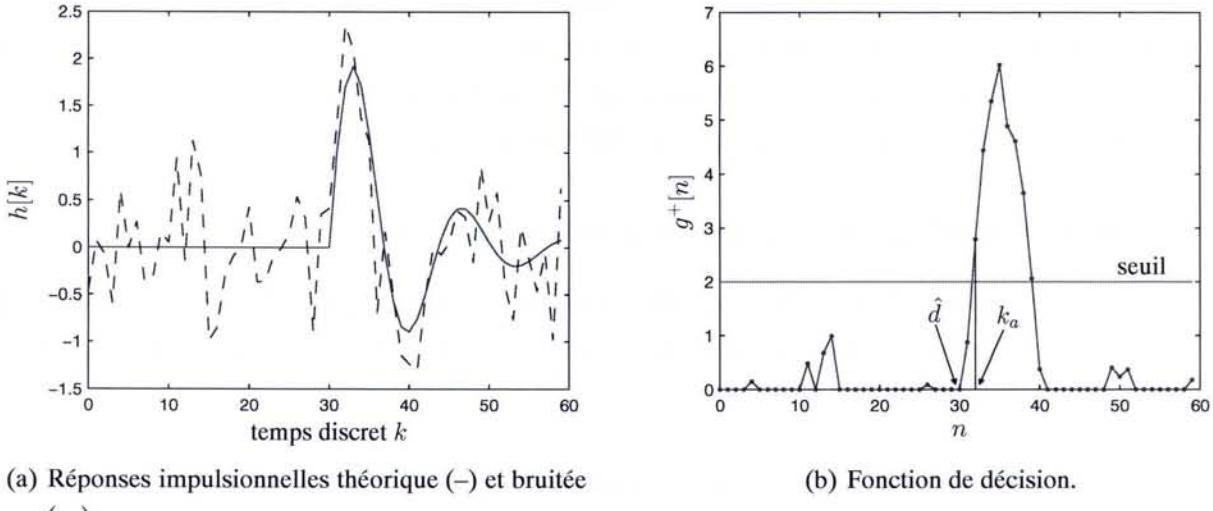


FIG. 3.3 – Exemple de détection du retard par l’algorithme CUSUM pour un bruit de 0 dB sur la réponse impulsionnelle ( $\nu_m = 0.9$  et  $\lambda = 2$ ).

Pour illustrer le fonctionnement de l’algorithme CUSUM, la figure 3.3 montre la fonction de décision  $g^+[n]$  obtenue à partir de la réponse impulsionnelle théorique bruitée du système définie par l’équation (3.4) (le bruit, simulant l’erreur d’estimation, est une suite de VA i.i.d. selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance déterminée de sorte que le RSB soit égal à 0 dB). Les paramètres de l’algorithme CUSUM sont les suivants<sup>2</sup> :  $\nu_m = 0.9$  et  $\lambda = 2$ . L’instant de détection de l’algorithme est  $k_a = 32$  et le retard estimé vaut  $\hat{d} = 30$ . Malgré l’importance du bruit,

<sup>2</sup>Ce choix de paramètres est heuristique, obtenu par essais successifs. Toutefois, des méthodes d’estimation de ces paramètres peuvent être trouvées dans [BASSEVILLE et NIKIFOROV (1993)].

le retard a été correctement estimé pour cette réalisation. Les estimées du retard obtenues à partir 5000 réalisations de la RI bruitée, à différentes valeurs du RSB, sont représentées à la figure 3.4 sous la forme d'histogrammes. Le taux de réussite de la détection est proche de 100% pour un RSB supérieur à 10 dB. Naturellement, ce taux diminue avec le RSB ; toutefois, il est encore supérieur à 60% pour un RSB de 0 dB.

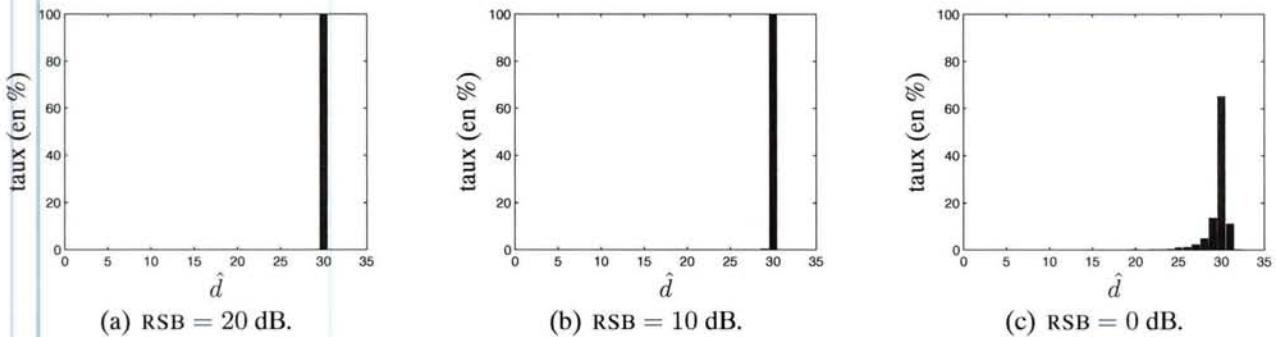


FIG. 3.4 – Histogramme des estimées du retard par la méthode de détection CUSUM d'un saut de moyenne de la RI pour différents RSB (5000 réalisations de la RI bruitée,  $\nu_m = 0.9$  et  $\lambda = 2$ ).

De plus, l'application de cet algorithme pour la détection d'un saut de moyenne dans l'estimée au sens du MV de la RIF de l'exemple de l'équation (3.4) à partir de 5000 réalisations du jeux de données entrée–sortie (sortie bruitée avec des RSB de 20, 10 et 0 dB, et  $N = 500$ ) donne des résultats très proches de ceux de la figure 3.4, sensiblement meilleurs.

En conclusion, cet algorithme de détection est relativement robuste au bruit.

### 3.1.1.2 Séparation fréquentielle du retard et de la dynamique

Une méthode alternative à la précédente consiste à séparer les dynamiques du système et le retard en étudiant la partie réelle de la réponse en fréquence. Cette méthode a été introduite récemment dans [BJÖRKLUND (2003)].

D'après l'équation (3.6), la réponse en fréquence du système, notée  $\mathcal{H}(f)$ , est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{F}(h[k]) = \mathcal{F}(h_{nr}[k])\mathcal{F}(\delta[k - dT_e]) = \mathcal{H}_{nr}(f)e^{-i2\pi f dT_e}, \quad (3.10)$$

où  $\mathcal{F}$  est l'opérateur de la transformée de Fourier à temps discret et  $\mathcal{H}_{nr}$  est la réponse fréquentielle du système non retardé. En prenant la partie réelle de  $\mathcal{H}(f)$ , on obtient :

$$\text{Re}[\mathcal{H}(f)] = \text{Re}[\mathcal{H}_{nr}(f)e^{-i2\pi f dT_e}], \quad (3.11)$$

$$= \text{Re}[(\text{Re}[\mathcal{H}_{nr}(f)] + i\text{Im}[\mathcal{H}_{nr}(f)]) (\cos(2\pi f dT_e) - i \sin(2\pi f dT_e))], \quad (3.12)$$

$$= \underbrace{\text{Re}[\mathcal{H}_{nr}(f)]}_{A} \cos(2\pi f dT_e) + \underbrace{\text{Im}[\mathcal{H}_{nr}(f)]}_{B} \sin(2\pi f dT_e), \quad (3.13)$$

$$= \left[ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(2\pi f dT_e) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(2\pi f dT_e) \right] \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (3.14)$$

En posant :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin(\phi(f)) \text{ et } \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos(\phi(f)), \quad (3.15)$$

l’équation précédente devient :

$$\operatorname{Re}[\mathcal{H}(f)] = \sqrt{A^2 + B^2} [\sin(\phi(f)) \cos(2\pi f d T_e) + \cos(\phi(f)) \sin(2\pi f d T_e)], \quad (3.16)$$

$$= \beta(f) \sin(2\pi f d T_e + \phi(f)), \quad (3.17)$$

où :

$$\beta(f) = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\operatorname{Re}[\mathcal{H}_{nr}(f)]^2 + \operatorname{Im}[\mathcal{H}_{nr}(f)]^2}, \quad (3.18)$$

$$\phi(f) = \arcsin \frac{\operatorname{Re}[\mathcal{H}_{nr}(f)]}{\sqrt{\operatorname{Re}[\mathcal{H}_{nr}(f)]^2 + \operatorname{Im}[\mathcal{H}_{nr}(f)]^2}}. \quad (3.19)$$

La partie réelle de la réponse en fréquence  $\operatorname{Re}[\mathcal{H}(f)]$  est donc constituée d’un signal  $\beta(f)$  modulé par une sinusoïde de « fréquence »  $d T_e$  et de phase  $\phi(f)$ . La transformée de Fourier inverse de la partie réelle de  $\mathcal{H}(f)$ ,  $\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{Re}[\mathcal{H}(f)])$ , possède donc un « pic » à l’instant  $d T_e$ .

La figure 3.5 montre un exemple de simulation de cette méthode sans bruit. Le système utilisé est défini par l’équation (3.4) dans laquelle le bruit est nul. Le retard est égal à 30 échantillons. La réponse impulsionnelle théorique du système est représentée à la figure 3.5(a). Sur la figure 3.5(b), on voit que la partie réelle de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $\operatorname{Re}[\mathcal{H}(f)]$  contient une oscillation, mais son amplitude est faible. Afin d’augmenter l’effet de l’oscillation, l’auteur propose de prendre le logarithme de la valeur absolue de  $\operatorname{Re}[\mathcal{H}(f)]$ , ce qui va amplifier les petites valeurs du signal positif (voir Fig. 3.5(c)). Finalement, la transformée de Fourier inverse est calculée (Fig. 3.5(d)). Elle possède deux pics dont un à la fréquence  $2d = 60$ , car la valeur absolue a doublé la base de fréquence du signal périodique (sinusoïde).

Malheureusement, cette méthode est très sensible au bruit. En effet, on peut remarquer sur la figure 3.6(a) que, pour un RSB de 20 dB, le pic caractérisant le retard est difficilement détectable, voire indétectable pour un RSB de 10 dB (Fig. 3.6(b)).

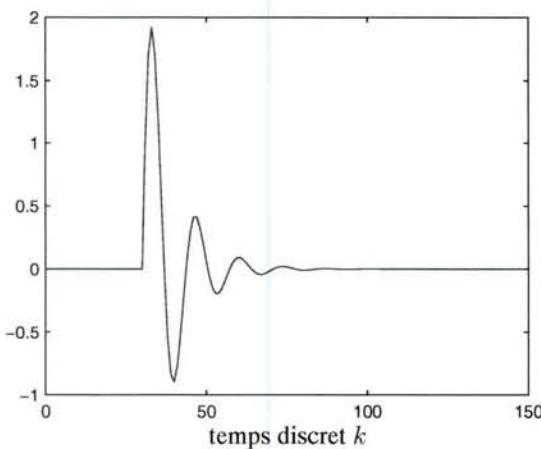
### 3.1.2 Méthodes fondées sur l’estimation d’un transfert rationnel

Les méthodes présentées dans les deux paragraphes suivants nécessitent l’estimation d’une structure de type transfert rationnel.

#### 3.1.2.1 Méthode du numérateur augmenté

La structure de modèle de cette méthode est la suivante :

$$y[k] = \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} u[k] + w[k], \quad (3.20)$$



(a) Réponse impulsionnelle théorique.

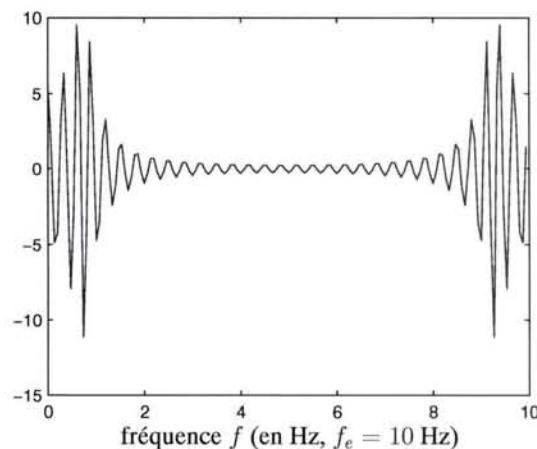
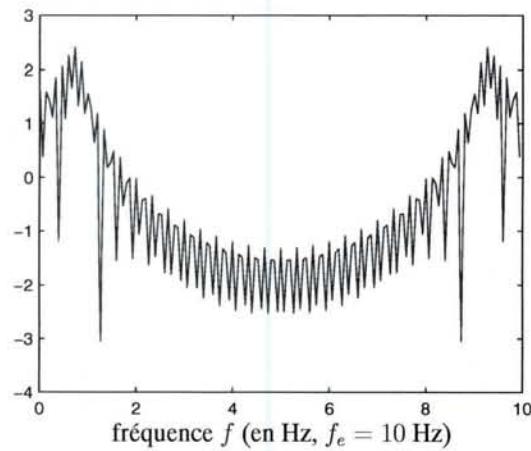
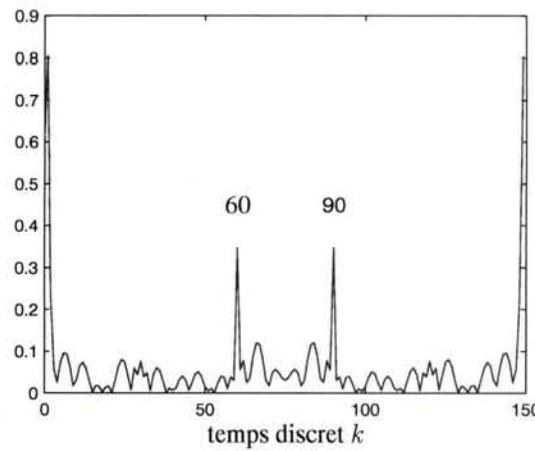
(b)  $\text{Re}[\mathcal{H}(f)]$ .(c)  $\ln |\text{Re}[\mathcal{H}(f)]|$ .(d)  $\mathcal{F}^{-1}(\ln |\text{Re}[\mathcal{H}(f)]|)$ .

FIG. 3.5 – Exemple de simulation sans bruit de la méthode de séparation fréquentielle.

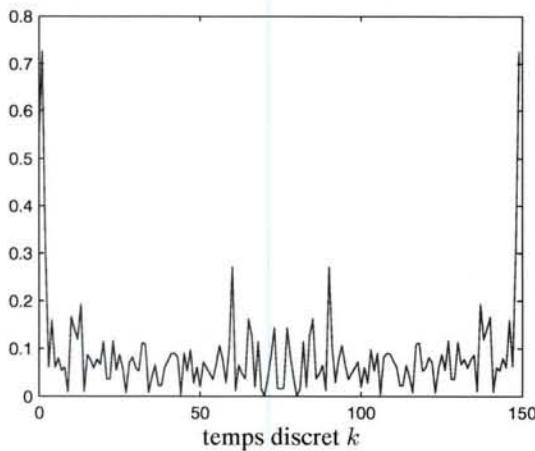
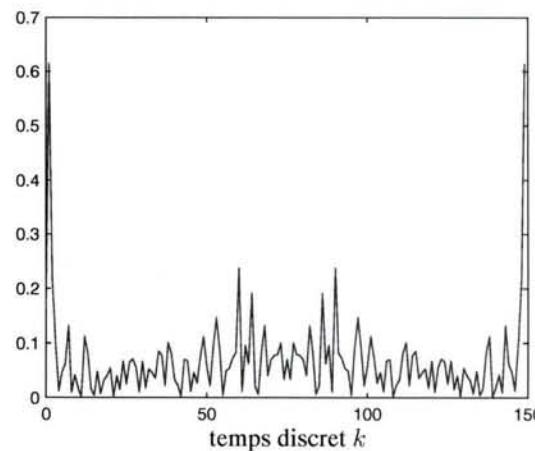
(a)  $\mathcal{F}^{-1}(\ln |\text{Re}[\mathcal{H}(f)]|)$ , RSB = 20 dB.(b)  $\mathcal{F}^{-1}(\ln |\text{Re}[\mathcal{H}(f)]|)$ , RSB = 10 dB.

FIG. 3.6 – Exemple de simulation avec un bruit de 20 et 10 dB de la méthode de séparation fréquentielle.

où le numérateur est augmenté :

$$B^*(q^{-1}) = b_1^* q^{-1} + \dots + b_{n_b+d_{\max}}^* q^{-(n_b+d_{\max})}, \quad (3.21)$$

vis–à–vis du numérateur de l'équation (3.1). Le paramètre  $d_{\max}$  est la valeur maximale que peut prendre le retard, connue *a priori*. Alors, en théorie, les paramètres du numérateur vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} b_i^* = 0, & i = 1, \dots, d, \\ b_i^* = b_{i-d} & i = 1 + d, \dots, n_b + d, \\ b_i^* = 0, & i = n_b + d + 1, \dots, n_b + d_{\max}. \end{cases}$$

Après avoir estimé les paramètres  $b_i^*$  (par une technique d'identification classique [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989) ; LJUNG (1999)]), il suffit alors d'en déduire le nombre des premiers paramètres  $b_i^*$  négligeables (théoriquement nuls). Cette méthode repose donc sur une prise de décision visant à séparer les valeurs nulles de celles non nulles, tout comme la méthode détectant le début de la partie non–nulle de la RIF (présentées au § 3.1.1.1). D'ailleurs les techniques de détection présentées dans ce paragraphe peuvent être utilisées.

D'autres méthodes existent [DE KEYSER (1986) ; DASTYCH et UNBEHAUEN (1995)]. Elles sont en général fondées sur des mesures faisant intervenir les coefficients du numérateur augmenté. Par exemple, dans [DASTYCH et UNBEHAUEN (1995)], on définit les rapports suivants :

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{j=0}^i |b_j^*|}{\sum_{j=i+1}^{n_b+d_{\max}} |b_j^*|}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_b + d_{\max} - 1, \quad (3.22)$$

et le retard est évalué en utilisant la règle :

$$\hat{d} = \min\{i : \varepsilon_i > \kappa\} - 1, \quad (3.23)$$

où  $\kappa$  est un seuil d'erreur fixé *a priori*.

L'avantage principal de ces approches réside dans leur facilité de mise en œuvre. En revanche, elles présentent plusieurs inconvénients :

- la difficulté de déterminer les paramètres de synthèse des détecteurs (comme par exemple les seuils) ;
- la sur-paramétrisation du numérateur (importante lorsque le retard est grand) entraîne une augmentation de la variance de l'estimateur des paramètres. Celle-ci est également amplifiée par le manque d'information dans les données, rendant ainsi plus difficile la détection des paramètres nuls [LEE et HANG (1985) ; ELNAGGAR *et al.* (1991)].

### 3.1.2.2 Méthode explicite

Pour cette méthode, la structure de modèle correspond à celle du système (voir équation (3.1)) :

$$y[k] = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} u[k] + w[k]. \quad (3.24)$$

Le retard  $d$  est un paramètre explicite de la structure de modèle. Son estimation est réalisée conjointement à celle des autres paramètres de la structure.

Le principe de l'estimation est représenté à l'algorithme 3.1. Nous avons choisi de privilégier une méthode d'optimisation exhaustive vis-à-vis du retard pour deux raisons. La première est que le retard prend uniquement des valeurs entières ( $d \in \mathbb{N}^*$ ) comprises entre  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$ . Le nombre d'itérations de la recherche exhaustive est donc fini. La seconde est qu'elle évite tout problème de convergence vers un minimum local (non global) comme cela a été montré dans le cas de certaines méthodes d'optimisation [KAMINSKAS (1979) ; PUKEIKIS (1985) ; ZHENG et FENG (1991) ; NAGY et LJUNG (1991)]. Notons que nous avons déjà utilisé cette méthode dans le chapitre 1 pour laquelle les critères  $J_1$  et  $J_2$  correspondaient à l'énergie de l'erreur de sortie.

Plusieurs travaux [PUKEIKIS (1985) ; ZHENG et FENG (1991) ; BJÖRKLUND *et al.* (1991) ; FERRETTI *et al.* (1991)] proposent des techniques de filtrage afin de transformer certains critères non convexes vis-à-vis du retard en critères convexes. Cela permet d'obtenir une méthode d'optimisation moins coûteuse en calculs que la recherche exhaustive (dans le cas où l'ensemble des retards admissibles est grand). Cependant, la procédure de sélection de tels filtres est quelque peu compliquée.

Cette méthode sera analysée au paragraphe 3.2 lors de l'étude de l'applicabilité de la méthode au cas de la structure de modèle du bief.

1. Pour chaque valeur du retard possible ( $d = d_{\min}, \dots, d_{\max}$ ) :

estimation des autres paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  de la structure de modèle à  $d$  fixé à partir des données entrée-sortie,

- ◊ choix d'un critère  $J_1(d, \boldsymbol{\theta})$ ,
- ◊ choix d'une méthode d'optimisation,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_d = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} J_1(d, \boldsymbol{\theta}).$$

2. Estimation du retard,

- ◊ choix d'un critère  $J_2(d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_d)$ ,
- ◊ pour chaque valeur du retard possible ( $\forall d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ ) :  
évaluation de  $J_2(d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_d)$ .

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})} J_2(d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_d).$$

ALGO. 3.1 – Principe des méthodes explicites fondées sur une recherche exhaustive vis-à-vis du retard.

### 3.1.3 Méthodes fondées sur l'estimation des statistiques d'ordres 2 et 3 des données entrée–sortie

#### 3.1.3.1 Méthode de corrélation

L'estimation de retard à partir des fonctions de corrélation des signaux d'entrée–sortie a été présentée pour la première fois par [FAURE et EVANS (1969)] dans un cas déterministe. Ensuite, de nombreuses méthodes traitant le cas de systèmes à retards purs ont été développées [CARTER (1987)]. Ce sont ZHENG et FENG [ZHENG et FENG (1990)] qui pour la première fois (à notre connaissance) présentent une méthode fondée sur les fonctions de corrélation permettant l'identification d'un système stochastique dont le retard est inconnu.

Ils considèrent la structure de modèle suivante :

$$A(q^{-1})y[k] = q^{-d'}B'(q^{-1})u[k] + \omega[k], \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_a}q^{-n_a}, \\ B'(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}, \end{aligned}$$

avec  $b_0 \neq 0$ <sup>3</sup>. Les suites  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{y[k]\}_{k=0}^{N-1}$  correspondent respectivement à l'entrée du système et à la sortie bruitée ; la suite  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente les bruits et les perturbations agissant sur le système. L'entrée  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est supposée être d'ordre d'excitation persistante suffisant (voir définition 1.1, p. 18). Le paramètre  $d' > 0$  est le retard inconnu. Enfin, les racines du polynôme  $A(q^{-1})$  sont supposées être à l'intérieur du cercle unité (le système est stable).

Les auteurs montrent alors que si  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un processus à moyenne ajustée (MA) d'ordre  $n_f$  :

$$u[k] = F(q^{-1})r[k] \quad (3.26)$$

où  $\{r[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  et :

$$F(q^{-1}) = f_0 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}, \text{ avec } f_0 \neq 0 \text{ et } f_{n_f} \neq 0,$$

et si  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est décorrélée de  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$ , alors les valeurs de la fonction d'intercorrélation entrée–sortie sont telles que :

$$\begin{cases} c_{yu}[l] = 0, \text{ pour } l < d' - n_f \\ c_{yu}[d' - n_f] = b_0 f_0 f_{n_f} \sigma^2 \neq 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

<sup>3</sup>Cette condition implique que la réponse impulsionnelle du système non retardé  $h_{nr}$  vérifie  $h_{nr}[0] \neq 0$ . Or, nous avions justement supposé dans ce travail (voir FIG. 3.2) que  $h_{nr}[0] = 0$ . Toutefois, ce changement d'hypothèse entraîne uniquement un décalage de l'indice de retard : l'indice de retard estimé par cette méthode correspond à  $d' = d + 1$ .

Par conséquent, le retard peut être évalué à partir des estimées de la fonction d'intercorrélation entre la sortie et l'entrée  $\hat{c}_{yu}$  et de l'ordre d'autocorrélation  $\hat{n}_f$  (cette dernière estimée étant obtenue en estimant l'ordre de la fonction d'autocorrélation de l'entrée). Cette évaluation est effectuée en déterminant l'instant à partir duquel la fonction d'intercorrélation est supérieure à un seuil. Toutefois, cette évaluation est un des principaux reproches que nous faisons à cette méthode, car la détermination de ce seuil est heuristique. C'est pourquoi, nous avons préféré utiliser, dans nos simulations, un algorithme de détection évaluant l'instant du début de la partie non-nulle de la fonction d'intercorrélation. Nous avons choisi l'algorithme CUSUM pour les raisons déjà évoquées au § 3.1.1.1. Une fois le retard estimé, il est possible d'estimer les paramètres du modèle, par exemple à l'aide de la méthode des moindres carrés, en utilisant l'entrée  $\{u[k - \hat{d}']\}_{k=0}^{N-1}$ .

**Remarque 3.2** si  $n_f = 0$ , alors  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc gaussien de variance  $f_0^2\sigma^2$ . Par conséquent, la fonction d'intercorrélation entre  $y$  et  $u$  vérifie la relation suivante :

$$c_{yu}[l] = f_0^2\sigma^2 h[l], \quad (3.28)$$

où  $h[l]$  est le  $l^e$  coefficient de la réponse impulsionale. Détecter l'instant du début de la partie non-nulle de la fonction d'intercorrélation revient donc à détecter l'instant du début de la partie non-nulle de la réponse impulsionale. Ceci montre donc un lien entre les méthodes présentées aux paragraphes précédents et cette méthode de corrélation. ◇

Afin d'évaluer les performances de la méthode, nous avons effectué une simulation multiple en utilisant 5000 jeux de données du modèle de l'équation (3.4) où  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$  fonction du RSB désiré. La figure 3.7 représente les histogrammes des retards estimés pour différentes valeurs de  $N$  et du RSB. L'ordre d'autocorrélation  $n_f$  n'a pas été estimé ; il a été fixé à sa valeur vraie ( $n_f = 3$ ). Les paramètres de l'algorithme CUSUM ont été fixés par essais successifs aux valeurs suivantes :  $\nu_m = 4$ ,  $\lambda = 60$ . On constate que le taux de bonne détection diminue d'environ 80 % pour  $N = 2000$  et RSB = 20 dB à seulement 30 % pour  $N = 500$  et RSB = 0 dB. Ce résultat est cohérent, étant donné que la variance de l'estimateur de  $r_{yu}$  est d'autant plus grande que le bruit est élevé et  $N$  est faible.

En conclusion, il s'agit d'une méthode simple à planter (l'estimation de la fonction d'intercorrélation est encore plus simple que celle de la RIF puisqu'il n'y pas de problème d'inversion de matrice), peu sensible au bruit si le nombre de données est suffisamment grand. Toutefois, sur notre exemple, les performances de cette approche sont inférieures à celle de la méthode fondée sur l'estimation d'une RIF (voir Fig. 3.4) dans les mêmes conditions ( $N = 500$ ).

### 3.1.3.2 Méthode des cumulants

Cette méthode repose sur le même principe que la méthode précédente de [ZHENG et FENG (1990)], excepté le fait qu'elle utilise les moments d'ordre 3 (cumulants) au lieu des fonctions de corrélation. Elle a été développée par CHEN *et al.* dans [CHEN et CHEN (1994)]. L'avantage de cette méthode est qu'elle peut considérer, non seulement du bruit sur la sortie, mais également

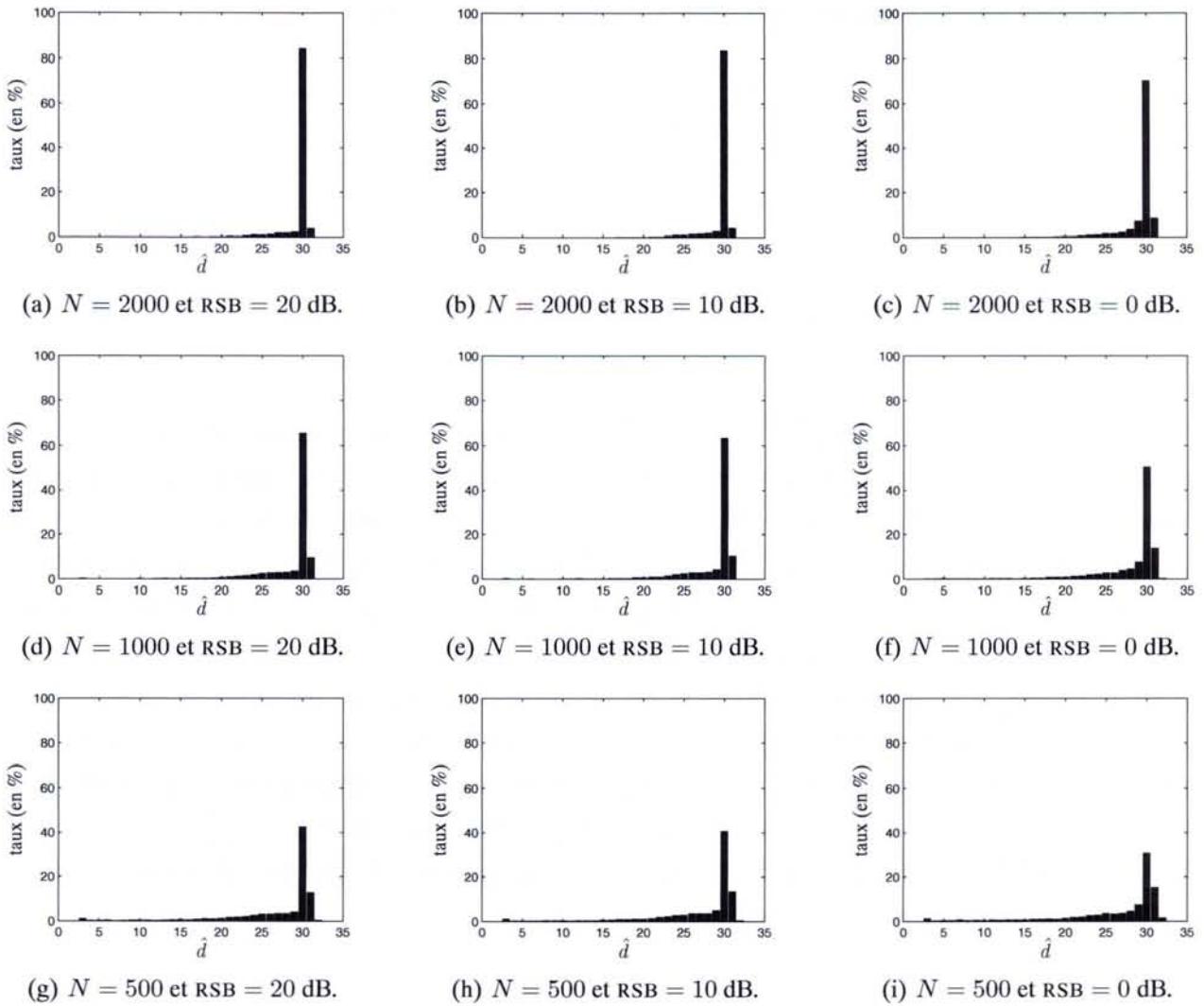


FIG. 3.7 – Histogrammes des estimées du retard  $d = d' - 1 = 30$  pour différentes valeurs de  $N$  et de RSB (5000 simulations de Monte Carlo).

du bruit sur l'entrée, à l'inverse des méthodes précédentes qui considèrent uniquement un bruit sur la sortie. Il s'agit donc d'une approche erreurs–en–les–variables. De plus, cette méthode peut être utilisée dans un cadre général (c'est–à–dire où les signaux ne sont pas issus de suite de VA distribuées selon un loi de probabilité gaussienne).

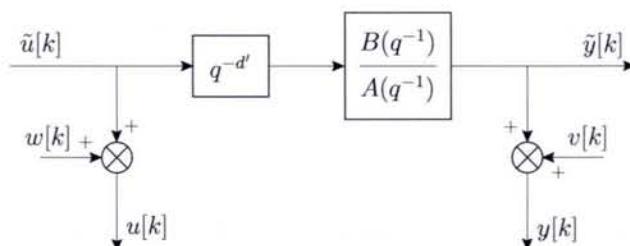


FIG. 3.8 – Schéma–bloc de la structure considérée par la méthode des cumulants.

Soit le système suivant (dont un schéma-bloc est représenté à la figure 3.8) :

$$A(q^{-1})\tilde{y}[k] = q^{-d'}B(q^{-1})\tilde{u}[k], \quad (3.29)$$

$$u[k] = \tilde{u}[k] + w[k], \quad (3.30)$$

$$y[k] = \tilde{y}[k] + v[k], \quad (3.31)$$

où

$$A(q^{-1}) = 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_a}q^{-n_a},$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b},$$

avec  $b_0 \neq 0^4$ . Les suites  $\{\tilde{u}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\tilde{y}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représentent respectivement l'entrée et la sortie non bruitées du système. L'entrée est modélisée par une suite de VA stationnaire non gaussienne de moyenne nulle, de moments non-nuls et finis jusqu'à l'ordre 3 (les auteurs supposent que les moments sont non-nuls et finis jusqu'à l'ordre 6 pour des besoins d'analyse statistique de leur méthode) et d'ordre d'excitation persistante suffisant (voir définition 1.1, p. 18). La suite  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente les incertitudes de mesure sur l'entrée ;  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est l'entrée observée. La suite  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente les bruits et les perturbations observés sur la sortie du système ;  $\{y[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est la sortie observée ; le paramètre  $d' \geq 0$  est le retard inconnu. Les racines du polynôme  $A(q^{-1})$  sont supposées être à l'intérieur du cercle unité (le système est stable). Enfin, les suites  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont supposées indépendantes de l'entrée  $\{\tilde{u}[k]\}_{k=0}^{N-1}$ . Si l'entrée  $\{\tilde{u}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA stationnaire de spectre rationnel fini, alors elle peut être modélisée par un processus MA d'ordre  $n_f$  :

$$\tilde{u}[k] = F(q^{-1})r[k] \quad (3.32)$$

où  $\{r[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d., non gaussienne, de moyenne nulle et de moments non-nuls et finis jusqu'à l'ordre 6, et

$$F(q^{-1}) = f_0 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}, \text{ avec } f_0 \neq 0 \text{ et } f_{n_f} \neq 0. \quad (3.33)$$

Ils montrent alors que :

$$\begin{cases} \text{cum}_{yu}[l, l_1] = 0, \text{ pour } l > d', \\ \text{cum}_{yu}[d', l_1] = b_0\gamma_e f_0^2 f_{n_f} \neq 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $l_1 = d' - n_f$  et  $\text{cum}_{yu}$  est le cumulant d'ordre 3 entre  $y$  et  $u$ . Toutefois, l'application de ces relations nécessite de connaître la valeur de  $l_1 = d' - n_f$  où ni le retard  $d'$ , ni l'ordre  $n_f$  ne sont connus. Il faut donc estimer la valeur de  $l_1$ . Pour cela, ils montrent que :

$$\begin{cases} \text{cum}_{yu}[l, l] = 0, \text{ pour } l < l_1, \\ \text{cum}_{yu}[l_1, l_1] = b_0\gamma_e f_0^2 f_{n_f} \neq 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

L'algorithme d'estimation du retard est présenté à l'algorithme 3.2. Une fois le retard estimé, une cinquième étape peut être ajoutée pour estimer les paramètres du modèle.

1. Calcul du cumulant d'ordre 3  $\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, l]$  à partir des données :

$$\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, l] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y[k]u[k-l]u[k-l], \quad (3.36)$$

pour  $l = T_3, T_3 + 1, \dots, T_4$ , où  $T_3$  et  $T_4$  sont respectivement des bornes inférieure et supérieure de  $l_1 = d' - n_f$ , connues *a priori*.

2. Décision de la valeur de  $\hat{l}_1$  en suivant la condition suivante :

$$\begin{cases} |\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, l]| < \epsilon, & l < \hat{l}_1, \\ |\widehat{\text{cum}}_{yu}[\hat{l}_1, \hat{l}_1]| \gg \max \left\{ |\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, l]|, l = T_3, \dots, \hat{l}_1 - 1 \right\}, \end{cases} \quad (3.37)$$

où  $\epsilon$  est un petit nombre positif, choisi de façon appropriée. Si  $n_f$  est connue, le retard peut-être déduit de  $\hat{l}_1$  :  $\hat{d}' = \hat{l}_1 + n_f$ , sinon il faut passer à l'étape suivante.

3. Calcul du cumulant  $\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, \hat{l}_1]$  à partir des données :

$$\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, \hat{l}_1] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y[k]u[k-l]u[k-\hat{l}_1], \quad (3.38)$$

pour  $l = T_2, T_2 - 1, \dots, \hat{l}_1 + 1, \hat{l}_1$ , où  $T_2$  une borne supérieure de  $d'$ , connue *a priori*.

4. Décision de la valeur de  $\hat{d}'$  en suivant la condition suivante :

$$\begin{cases} |\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, \hat{l}_1]| < \delta, & l > \hat{d}', \\ |\widehat{\text{cum}}_{yu}[\hat{d}', \hat{l}_1]| \gg \max \left\{ |\widehat{\text{cum}}_{yu}[l, \hat{l}_1]|, l = \hat{d}' + 1, \dots, T_2 \right\}, \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $\delta$  est un petit nombre positif, choisi de façon appropriée.

---

#### ALGO. 3.2 – Estimation du retard par la méthode des cumulants.

Afin d'évaluer les performances de la méthode, nous avons effectué une simulation multiple en utilisant 5000 jeux de données du modèle de l'équation (3.4) où  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$  fonction du RSB désiré. La figure 3.9 représente les histogrammes des retards estimés pour différentes valeurs de  $N$  et du RSB. L'ordre d'autocorrélation  $n_f$  n'a pas été estimé ; il a été fixé à sa valeur vraie ( $n_f = 3$ ). La détection est effectuée par l'algorithme CUSUM dont les paramètres ont été fixés par essais successifs à  $\nu_m = 100$  et  $\lambda = 600$ . On constate que le taux de bonne détection diminue d'environ 80 % pour  $N = 8000$  et RSB =20dB à seulement 20 % pour  $N = 2000$  et RSB =0 dB. Rappelons que le taux de bonne détection de 80 % avait été atteint par la méthode de corrélation pour seulement  $N = 2000$ . Par conséquent, la méthode des cumulants nécessite un nombre de

<sup>4</sup>Cette condition implique, comme dans la méthode précédente, que la réponse impulsionnelle du système non retardé  $h_{nr}$  vérifie  $h_{nr}[0] \neq 0$ . Par conséquent on a  $d' = d + 1$ .

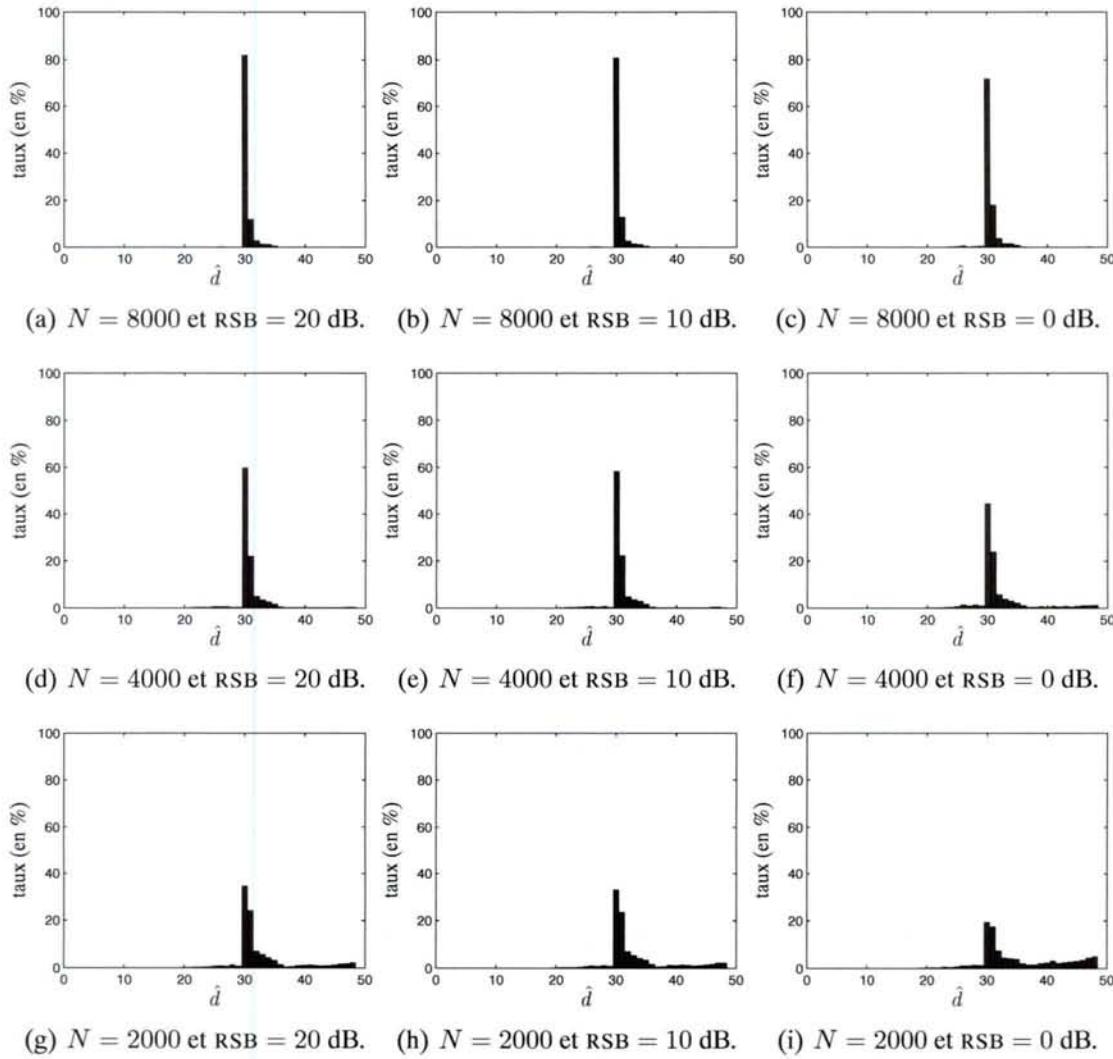


FIG. 3.9 – Histogrammes des estimées du retard  $d = d' - 1 = 30$  par la méthode des cumulants pour différentes valeurs de  $N$  et de RSB (5000 simulations de Monte Carlo).

données beaucoup plus important que la méthode de corrélation pour obtenir des résultats similaires, mais elle a l'avantage de considérer un cadre plus général (c'est-à-dire bruit non gaussien), sans oublier celui d'être une méthode erreurs-en-les-variables.

### 3.1.4 Conclusion

L'analyse effectuée dans cette première partie permet de sélectionner les trois méthodes suivantes :

1. la méthode fondée sur l'estimation d'une RIF (estimation par MV et détection d'un saut par le CUSUM) ;
2. la méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel (estimation des paramètres à  $d$  fixé, suivie d'une recherche exhaustive du retard) ;
3. la méthode fondée sur l'estimation des fonctions de corrélation.

L'objectif de la partie suivante est d'effectuer une étude d'« applicabilité » de ces méthodes d'estimation de retard valables dans le cas d'une structure mono-entrée/mono-sortie au cas d'une struc-

ture telle que celle du bief de rivière aménagé, c'est-à-dire possédant en particulier une rétroaction et une action anticipatrice.

## 3.2 Étude d'applicabilité à un bief de rivière

Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction de ce chapitre, deux structures de modèle peuvent être envisagées pour identifier le bief de rivière selon l'approche directe ou indirecte (voir Fig. 3.1).

### 3.2.1 Cas de la structure n° 1 (approche directe)

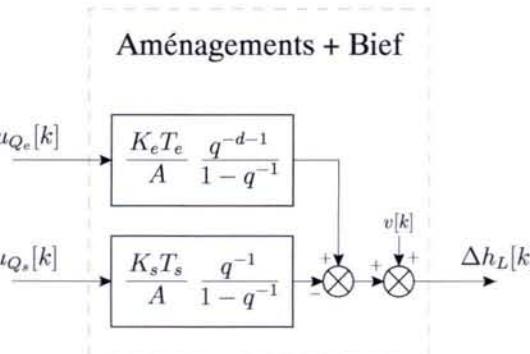


FIG. 3.10 – Schéma-bloc de la structure de modèle n° 1 (approche directe).

La structure de modèle considérée par l'approche directe (voir Fig. 3.10) est régie par l'équation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \frac{b_1 q^{-d-1}}{1 - q^{-1}} \Delta u_{Q_e}[k] - \frac{b_2 q^{-1}}{1 - q^{-1}} \Delta u_{Q_s}[k] + v[k], \quad (3.40)$$

ou de manière équivalente par :

$$\underbrace{(1 - q^{-1}) \Delta h_L[k]}_{y[k]} = b_1 q^{-d-1} \Delta u_{Q_e}[k] - b_2 q^{-1} \Delta u_{Q_s}[k] + \underbrace{(1 - q^{-1}) v[k]}_{e[k]}, \quad (3.41)$$

où le vecteur de paramètres est  $\boldsymbol{\theta} = [b_1, b_2]^T = [\frac{K_e T_e}{A}, \frac{K_s T_s}{A}]^T$ . Le bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente les incertitudes de mesure et de modélisation et vérifie la relation de l'équation (1.15). Cette dernière permet de supposer que ce bruit peut être modélisé par une marche aléatoire d'ordre 1 :

$$v[k] = \frac{1}{1 - q^{-1}} e[k], \quad (3.42)$$

où  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_e^2$ . L'équation (3.41) permet d'obtenir une structure de modèle avec un bruit, additif sur la sortie  $y$ , modélisé par une suite de VA i.i.d.. Elle permet donc d'éliminer le bruit  $v$  participant à l'échec de l'identification par une approche directe présentée au chapitre 1.

### 3.2.1.1 Méthodes fondées sur l'estimation d'une RIF

La généralisation de la méthode présentée au paragraphe 3.1.1.1 au cas de cette structure est simple. Elle consiste à estimer les RIF entre chacune des deux entrées et la sortie sous la contrainte de corrélation entre les entrées et la sortie. Une fois les RIF estimées, il suffit de détecter le retard de la RIF entre  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta h_L$  à l'aide de l'algorithme CUSUM.

L'unique limitation de cette méthode est la nécessité que l'entrée  $[\Delta u_{Q_e}[k], \Delta u_{Q_s}[k]]$  (de dimension 2) soit d'ordre d'excitation persistante suffisant pour que la variance de l'estimateur des paramètres des RIF ne soit pas trop élevée. Plus précisément, il faut que cet ordre soit supérieur au nombre de coefficients à estimer. Or, nous avons vu au chapitre 1 que cet ordre était inférieur à 10 pour presque 80 % des entrées disponibles (voir Fig. 1.11). C'est pourquoi, il apparaît clairement qu'une méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel est plus adaptée dans notre cas car elle ne nécessite l'estimation que de deux paramètres  $b_1$  et  $b_2$ .

### 3.2.1.2 Méthodes fondées sur l'estimation d'un transfert rationnel

La méthode présentée au paragraphe 3.1.2.2 consiste à estimer le vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta} = [b_1 \ b_2]$  pour chaque valeur du retard possible ( $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$ ) à partir des signaux d'entrée–sortie  $\Delta u_{Q_e}$ ,  $\Delta u_{Q_s}$  et  $\Delta h_L[k]$  régis par l'équation 3.41. Nous choisissons de minimiser le critère, fonction de l'erreur de sortie, suivant :

$$J(d, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} (y[k] - \varphi^T[k, d]\boldsymbol{\theta})^2, \quad (3.43)$$

où :

$$y[k] = \Delta h_L[k] - \Delta h_L[k-1], \quad (3.44)$$

$$\varphi[k, d] = [\Delta u_{Q_e}[k-d-1], \ \Delta u_{Q_s}[k-1]]^T. \quad (3.45)$$

Ce qui implique que, pour chaque valeur de  $d$  possible, l'estimée du vecteur de paramètres est obtenue par la relation suivante (moindres carrés) :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_d = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \varphi[k, d] \varphi^T[k, d] \right]^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi[k, d] y[k], \quad (3.46)$$

et l'estimée de  $d$  est obtenue par :

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})} J(d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_d). \quad (3.47)$$

Les propriétés de l'estimateur de l'équation (3.46) sont connues (voir dans [LJUNG (1999)]). Toutefois, nous ne connaissons pas celles de l'estimateur de  $d$  (qui dépendent de celles de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ). C'est pourquoi nous allons effectuer des simulations afin d'évaluer les performances de cet estimateur.

Nous avons simulé le modèle représenté à la figure 3.1 pour les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau 3.2. L'entrée  $\{\Delta u_{Q_e}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est, dans un premier temps, une SBPA de longueur

maximale<sup>5</sup>  $N = 2^9 - 1 = 511$  (d'ordre d'excitation persistante  $N - 1$ ). Dans un second temps, elle correspond à l'entrée du jeu de données du 09/03 représentée à la figure 3.11. Le bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$ , dans un premier temps, est une marche aléatoire d'ordre 1 :

$$v[k] = \frac{1}{1 - q^{-1}} e[k], \quad (3.48)$$

où  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc gaussien de variance déterminée par le choix du RSB désiré. Dans un second temps, le bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sera égal à  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$ . Ces séries de simulation, dont les conditions sont résumées dans le tableau 3.3, permettent donc de tester la robustesse de cet estimateur vis-à-vis du niveau d'information contenu dans les données et du modèle du bruit.

paramètre	valeur
$d$	7
$K_e T_e / A$	$10^{-4}$ (en $s/m^2$ )
$K_s T_e / A$	$1, 2.10^{-4}$ (en $s/m^2$ )
$K_{Q_e}$	1
$K_{h_L}$	1000

TAB. 3.2 – Valeurs des paramètres du modèle de simulation.

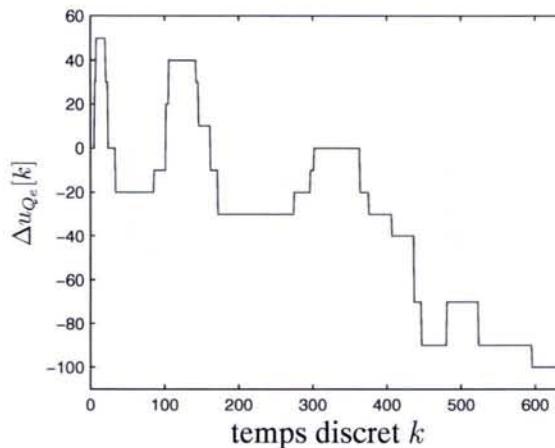


FIG. 3.11 – Entrée  $\Delta u_{Q_e}$  du jeux de données du 09/03.

L'estimation du retard par la méthode présentée ci-dessus pour 5000 simulations de Monte Carlo a conduit aux résultats présentés à la figure 3.12 : l'estimée du retard vaut  $\hat{d} = 7$  dans 100 % des cas pour des RSB de 20, 10 et 0 dB et dans environ 99.5 % des cas pour un RSB de -10 dB. La méthode est donc très performante lorsque l'entrée est d'ordre d'excitation persistante suffisamment élevé. Ensuite, nous avons voulu tester la robustesse de la méthode vis-à-vis de la structure du modèle du bruit. Nous avons alors toujours considéré le modèle précédent, mais les bruits ont été modélisés par un bruit blanc ( $v[k] = e[k]$ ). La figure 3.13 présente les estimées du retard obtenues pour

<sup>5</sup>Une SBPA de longueur maximale  $N = 511 = 2^9 - 1$  signifie qu'elle est engendrée à l'aide d'un registre à décalage possédant 9 cellules [LANDAU et BESANÇON-VODA (2001)].

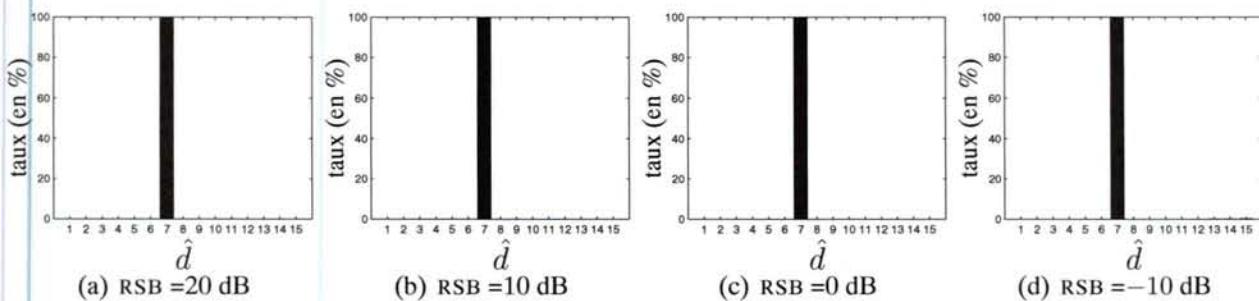


FIG. 3.12 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB,  $\Delta u_{Q_e}$  est une SBPA et  $v$  une marche aléatoire.

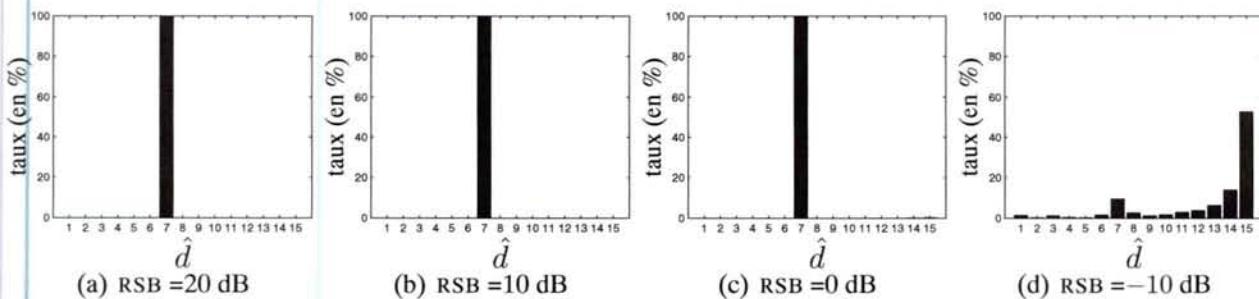


FIG. 3.13 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB  $\Delta u_{Q_e}$  est une SBPA et  $v$  est un bruit blanc.

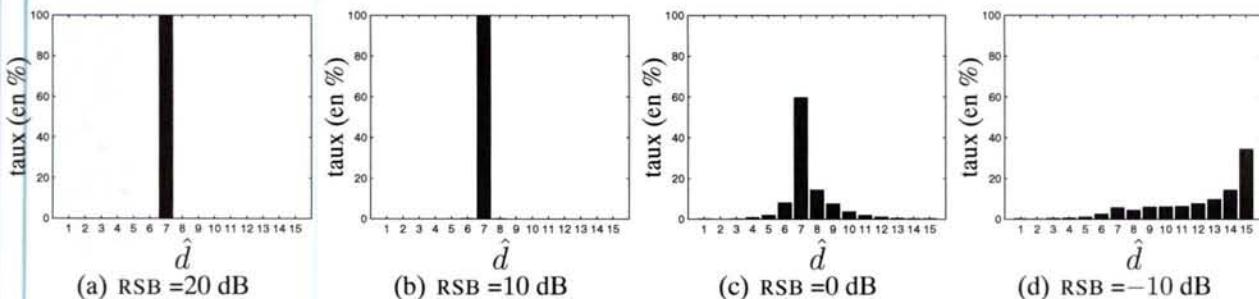


FIG. 3.14 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB,  $\Delta u_{Q_e}$  est l'entrée du jeu de données du 09/03 et  $v$  une marche aléatoire.

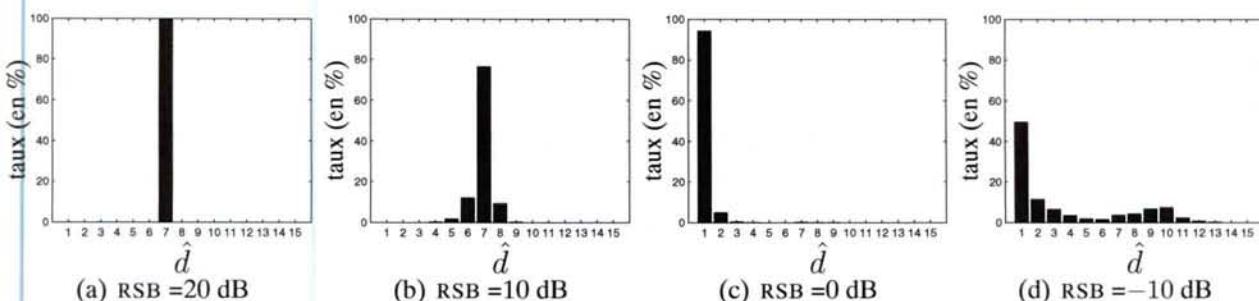


FIG. 3.15 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB,  $\Delta u_{Q_e}$  est l'entrée du jeu de données du 09/03 et  $v$  est un bruit blanc.

Entrée	Bruit	RSB		Approche directe
SBPA $N = 511$	$v[k] = \frac{1}{1-q^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.12
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	
	$v[k] = e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.13
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	
entrées des données du 09/03	$v[k] = \frac{1}{1-q^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.14
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	
	$v[k] = e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.15
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	

TAB. 3.3 – Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différentes résultats présentés aux FIG. 3.12 – 3.15.

différents RSB. On constate que les résultats sont encore très satisfaisants pour des RSB de 20, 10 et 0 dB, mais nettement moins bons ( $\hat{d} = 7$  pour moins de 10 % des estimées) pour un RSB de -10 dB. La méthode est donc encore performante lorsque l'entrée est d'ordre d'excitation élevé et que le RSB est supérieur à 0 dB.

Enfin, nous avons voulu tester la robustesse de la méthode vis-à-vis du niveau d'information de l'entrée en effectuant toujours la simulation du modèle ci-dessus, mais cette fois avec comme entrée  $\{\Delta u_{Q_e}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  celle du jeux de données du 09/03 représentée à la figure 3.11. Les figures 3.14 et 3.15 représentent les histogrammes obtenus pour les deux modèles du bruit, c'est-à-dire pour  $v[k] = \frac{1}{1-q^{-1}} e[k]$  et  $v[k] = e[k]$ , respectivement. On constate que, lorsque le modèle du bruit est correct, la diminution du niveau d'information augmente la variance des estimées pour un RSB de 0 dB, mais l'estimée la plus souvent obtenue est égale à la valeur vraie, ce qui n'est plus le cas lorsque le RSB diminue (pour un RSB de -10 dB, cette estimée est égale à  $d_{\max}$ ). Enfin, si le modèle du bruit est incorrect, alors les performances de la méthode d'estimation du retard se détériorent même à RSB élevé : à 10 dB la variance des estimées a augmenté et à 0 dB l'estimée la plus souvent obtenue vaut 1 (c'est-à-dire  $d_{\min}$ ).

En conclusion, la qualité des estimées du retard obtenues par cette approche directe se détériore rapidement lorsque l'ordre d'excitation des entrées diminue et le RSB est faible.

### 3.2.1.3 Généralisation de la méthode de corrélation

La méthode de corrélation de ZHENG et FENG, présentée au paragraphe 3.1.3.1 dans le cas d'une structure mono-entrée/mono-sortie, suppose que l'entrée et les perturbations (et les bruits) sont

non corrélées ; ce qui n'est pas le cas du bief de rivière. Toutefois, ZHENG et FENG présentent toujours dans le même article une méthode d'estimation de retard où il est supposé que l'entrée et les perturbations sont corrélées. Celle-ci permet d'estimer le retard d'une structure de modèle sous forme de transfert rationnel en boucle fermée sans connaissance du correcteur. Cette méthode peut s'avérer intéressante du point de vue de la charge de calcul vis-à-vis de la méthode précédente si l'incertitude *a priori* sur le retard est grande. C'est pourquoi nous avons généralisé cette méthode au cas d'une structure de modèle à deux entrées et une sortie, bouclée par une rétroaction et une action anticipatrice.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons la méthode de ZHENG et FENG dans le cas d'une structure mono-entrée/mono-sortie bouclée, puis nous développerons la généralisation de cette méthode au cas d'une structure avec rétroaction et action anticipatrice.

### Cas d'une structure mono-entrée/mono-sortie bouclée.

ZHENG et FENG présentent toujours dans le même article [ZHENG et FENG (1990)] une méthode d'estimation de retard de la structure de modèle définie par l'équation (3.25), où il est supposé que la fonction d'intercorrélation entre  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  vérifie la relation suivante :

$$\begin{cases} c_{\omega u}[l] \neq 0, & -m \leq l \leq 0, \\ c_{\omega u}[l] = 0, & l < -m \text{ ou } l > 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $m \geq 0$  est l'ordre d'intercorrélation entre  $\omega$  et  $u$ . Cela signifie que la commande à l'instant  $k$  ne dépend que des perturbations aux instants  $k, k-1, \dots, k-m$ . Cette hypothèse est en fait assez restrictive. D'ailleurs, elle n'est pas vérifiée si  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  n'est pas un bruit blanc (on peut vérifier que, dans ce cas, on aura au mieux  $c_{\omega u}[l] \neq 0$  pour  $-m \leq l \leq n_\omega$ , où  $n_\omega > 0$  est l'ordre d'autocorrélation de  $\omega$ ).

Les auteurs considèrent le cas où  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite stationnaire de VA non corrélées de moyenne nulle et de variance  $\sigma_u^2$ . Nous reviendrons sur la véracité de cette hypothèse après avoir présentée la théorie des auteurs. Ils montrent alors que les coefficients  $a_i$  peuvent être estimés grâce aux équations suivantes :

$$c_{yy}[l] = \sum_{i=1}^{n_a} a_i c_{yy}[l-i], \quad \text{pour } l > n_b + d' + m, \quad (3.50)$$

où  $n_b$  est supposé être connu *a priori*,  $m$  peut être estimé à partir de l'estimée de  $c_{\omega u}$  et  $d'$  peut être majoré par  $d'_{\max}$  supposé être connu *a priori*, et sous l'hypothèse que  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  soit un bruit blanc. La démonstration de ces équations (3.50), nommées *équations de Yule–Walker généralisées*, est effectuée dans l'annexe D.

Une fois les coefficients  $a_i$  estimés, il est possible d'estimer la quantité suivante :

$$\hat{\rho}_{yu}[l] \triangleq c_{yu}[l] - \sum_{i=1}^{n_a} \hat{a}_i c_{yu}[l-i], \quad (3.51)$$

qui, en théorie, est égale à :

$$\rho_{yu}[l] = \sum_{i=0}^{n_b} b_i c_{uu}[l-i] + c_{\omega u}[l], \quad (3.52)$$

et, par conséquent, vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_{yu}[l] = 0, & l < -m, \\ \rho_{yu}[l] = c_{\omega u}[l], & -m \leq l \leq 0, \\ \rho_{yu}[l] = 0, & 0 < l < d', \\ \rho_{yu}[l] = b_{l-d'} \sigma_u^2, & d' \leq l \leq n_b + d', \\ \rho_{yu}[l] = 0, & l > n_b + d'. \end{cases} \quad (3.53)$$

L'indice de retard  $d'$  peut donc être obtenu en détectant le premier instant *positif* tel que  $\hat{\rho}_{yu}[l] \neq 0$ .

Revenons sur l'hypothèse que l'entrée  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  soit une suite de VA non corrélées. Si on suppose que  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc et que la fonction d'intercorrélation entre  $\omega$  et  $u$  vérifie la relation (3.49), cela signifie, comme nous l'avons déjà dit, que  $u[k]$  dépend de  $\{\omega[k], \omega[k-1], \dots, \omega[k-m]\}$ . Par conséquent, cela implique que  $u[k]$  dépend de  $\{u[k], u[k-1], \dots, u[k-m]\}$  et donc l'hypothèse, que  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  soit une suite de VA non corrélées, est fausse. D'ailleurs, dans le cas d'une structure bouclée, l'hypothèse que la commande soit une suite de VA non corrélées n'est pas réaliste : la commande à l'instant  $k$  dépend au moins de celle à l'instant  $k-1$ . Au mieux, on peut supposer que la fonction d'intercorrélation de  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est finie, d'ordre  $n_f > 0$  :

$$\begin{cases} c_{uu}[l] \neq 0, & |l| \leq n_f, \\ c_{uu}[l] = 0, & l < -n_f \text{ ou } l > n_f. \end{cases} \quad (3.54)$$

Alors, par une démonstration analogue à celle de l'annexe D, en supposant toujours que  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc et que la fonction d'intercorrélation entre  $\omega$  et  $u$  vérifie la relation (3.49), on montre que l'on a les équations suivantes :

$$c_{yy}[l] = \sum_{i=1}^{n_a} a_i c_{yy}[l-i], \quad \text{pour } l > n_b + d' + \max\{m, n_f - d'\}. \quad (3.55)$$

Ces équations permettent d'estimer les coefficients  $a_i$ , qui permettent à leur tour d'estimer la statistique  $\hat{\rho}_{yu}[l]$  toujours définie par l'équation (3.51) et maintenant vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_{yu}[l] = 0, & l < -m, \\ \rho_{yu}[l] \neq 0, & -m \leq l \leq 0, \\ \rho_{yu}[l] = 0, & 0 < l < d' - n_f, \\ \rho_{yu}[l] \neq 0, & d' - n_f \leq l \leq n_b + d' + n_f, \\ \rho_{yu}[l] = 0, & l > n_b + d' + n_f. \end{cases} \quad (3.56)$$

Cette statistique permet donc d'estimer l'indice  $d' - n_f$  (à condition que  $d' - n_f > 0$ ) ou l'indice  $n_b + d' + n_f$ . L'indice de retard  $d'$  peut alors être obtenu si  $n_b$  et  $n_f$  sont connus *a priori*. Si  $n_f$  n'est pas connu *a priori*, notons qu'il est possible de l'estimer à partir de la fonction d'intercorrélation de  $u$ .

**Remarque 3.3** Si  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  n'est pas un bruit blanc, il est également possible de développer une théorie similaire en supposant que :

$$\begin{cases} c_{\omega\omega}[l] \neq 0, & |l| \leq n_\omega, \\ c_{\omega\omega}[l] = 0, & l < -n_\omega \text{ ou } l > n_\omega, \end{cases} \quad (3.57)$$

c'est à dire que  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  soit un processus MA d'ordre  $n_\omega$  :

$$\omega[k] = \Omega(q^{-1})e[k], \text{ avec } \Omega(q^{-1}) = \omega_0 + \omega_1 q^{-1} + \cdots + \omega_{n_\omega} q^{-n_\omega}, \quad (3.58)$$

et  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc. L'ordre  $n_\omega$  doit être connu ou être majoré par une valeur connue. De plus, rappelons que l'hypothèse (3.49) n'est plus vraie.  $\diamond$

En conclusion, il est possible d'estimer le retard d'une structure mono-entrée/mono-sortie à partir de cette méthode même si les données entrée-sortie sont corrélées. Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de généraliser le principe de cette méthode au cas d'une structure possédant deux entrées et une sortie corrélées par une rétroaction et une action anticipatrice (voir FIG. 3.16), la structure du bief étant un cas particulier de cette structure.

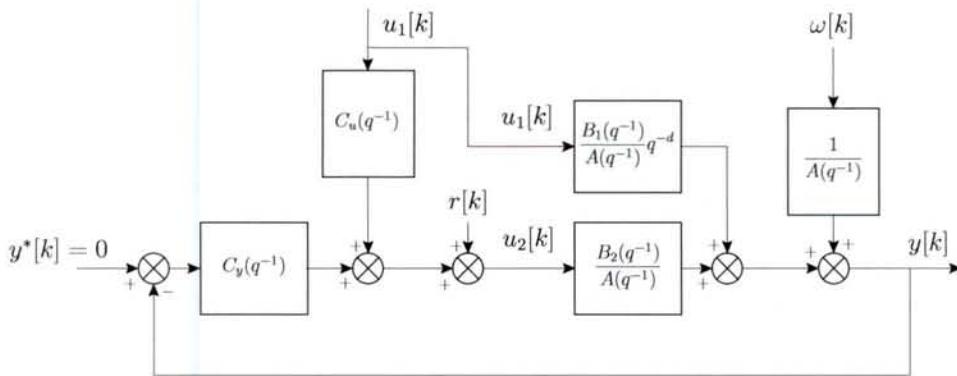


FIG. 3.16 – Exemple d'une structure avec rétroaction et action anticipatrice.

### Cas d'une structure avec rétroaction et action anticipatrice.

On suppose que la sortie du système est régie par la relation suivante :

$$A(q^{-1})y[k] = B_1(q^{-1})q^{-d'}u_1[k] + B_2(q^{-1})u_2[k] + \omega[k], \quad (3.59)$$

où

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - a_1 q^{-1} - \dots - a_{n_a} q^{-n_a}, \\ B_1(q^{-1}) &= b_{10} + b_{11} q^{-1} + \dots + b_{1n_b} q^{-n_{b1}}, \quad b_{10} \neq 0, \\ B_2(q^{-1}) &= b_{20} + b_{21} q^{-1} + \dots + b_{2n_b} q^{-n_{b2}}. \end{aligned}$$

Les suites  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$ ,  $\{u_2[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont des suites de VA stationnaires et ergodiques. Les ordres  $n_a$ ,  $n_{b1}$  et  $n_{b2}$  sont supposés connus *a priori*. De plus, on suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$ – $(\mathcal{H}_5)$  suivantes sont vérifiées :

- $(\mathcal{H}_1)$  :  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_\omega^2$  ;
- $(\mathcal{H}_2)$  :  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont non corrélées ;
- $(\mathcal{H}_3)$  :  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un processus MA d'ordre  $n_f$  :

$$u_1[k] = F(q^{-1})r_1[k] \text{ avec } F(q^{-1}) = f_0 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}, \quad (3.60)$$

où  $\{r_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA non corrélée de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{r_1}^2$  ;

- $(\mathcal{H}_4)$  : la fonction d'intercorrélation entre  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{u_2[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est finie :

$$\begin{cases} c_{\omega u_2}[l] \neq 0, & -m \leq l \leq 0, \\ c_{\omega u_2}[l] = 0 & l < -m \text{ ou } l > 0; \end{cases} \quad (3.61)$$

- $(\mathcal{H}_5)$  : la fonction d'intercorrélation entre  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{u_2[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est finie :

$$\begin{cases} c_{u_1 u_2}[l] \neq 0, & -p_1 \leq l \leq p_2, \\ c_{u_1 u_2}[l] = 0 & l < -p_1 \text{ ou } l > p_2. \end{cases} \quad (3.62)$$

On montre alors que les équations de Yule–Walker généralisées s'écrivent :

$$c_{yy}[l] = \sum_{i=1}^{n_a} a_i c_{yy}[l-i] + \sum_{i=0}^{n_{b2}} b_{2i} c_{u_2 y}[l-i], \text{ pour } l > \max\{n_f - d, p_2\} + d' + n_{b1}. \quad (3.63)$$

Elles permettent d'estimer les coefficients  $a_i$  et  $b_{2i}$ .

### Démonstration 2

En multipliant l'équation (3.59) par  $y[k-l]$  et en prenant l'espérance des deux termes de l'égalité, on obtient la relation suivante :

$$c_{yy}[l] = \sum_{i=1}^{n_a} a_i c_{yy}[l-i] + \sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 y}[l-d'-i] + \sum_{i=0}^{n_{b2}} b_{2i} c_{u_1 y}[l-i] + c_{\omega y}[l]. \quad (3.64)$$

L'objectif est de montrer que

$$\sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 y}[l-d'-i] + c_{\omega y}[l] = 0, \text{ pour } l > \max\{n_f - d, p_2\} + d' + n_{b1}. \quad (3.65)$$

Notons que, d'après l'équation (3.59), la sortie  $y[k]$  peut être réécrite sous la forme d'une somme de convolutions discrètes :

$$y[k] = \frac{B_1(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d'} u_1[k] + \frac{B_2(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_2[k] + \frac{1}{A(q^{-1})} \omega[k], \quad (3.66)$$

$$= \sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 y}[l - d' - i] + \sum_{i=0}^{\infty} g_1[i] u_1[k - d' - i] + \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i] u_2[k - i] + \sum_{i=0}^{\infty} h[i] \omega[k - i]. \quad (3.67)$$

◊ Nous commençons par nous intéresser au terme  $\sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 y}[l - d' - i]$  de l'équation (3.65).

D'après l'équation (3.67), on a :

$$c_{u_1 y}[l] = \sum_{i=0}^{\infty} g_1[i] c_{u_1 u_1}[l + d' + i] + \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i] c_{u_1 u_2}[l + i] + \sum_{i=0}^{\infty} h[i] c_{u_1 \omega}[l + i]. \quad (3.68)$$

Comme  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un processus MA d'ordre  $n_f$ , on a :

$$\begin{cases} c_{u_1 u_1} \neq 0, & |l| \leq n_f, \\ c_{u_1 u_1} = 0, & l < -n_f \text{ ou } l > n_f, \end{cases} \quad (3.69)$$

et donc on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g_1[i] c_{u_1 u_1}[l + d' + i] \neq 0, & l \leq n_f - d', \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_1[i] c_{u_1 u_1}[l + d' + i] = 0, & l > n_f - d'. \end{cases} \quad (3.70)$$

De plus, puisque l'on a supposé que la fonction d'intercorrélation entre  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{u_2[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est finie, et plus précisément vérifie la relation (3.62), on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i] c_{u_1 u_2}[l + i] \neq 0, & l \leq p_2, \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i] c_{u_1 u_2}[l + i] = 0, & l > p_2. \end{cases} \quad (3.71)$$

Enfin, comme on a supposé que  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont non corrélées, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} h[i] c_{u_1 \omega}[l + i] = 0, \quad \forall l. \quad (3.72)$$

En utilisant ces trois résultats et l'équation (3.68), on obtient :

$$c_{u_1 y}[l] = 0, \quad \text{pour } l > \max\{n_f - d', p_2\}. \quad (3.73)$$

Par conséquent, on a :

$$\sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 y}[l - d' - i] = 0, \quad \text{pour } l > n_b + d' + \max\{n_f - d', p_2\}. \quad (3.74)$$

◊ Nous nous intéressons maintenant au terme  $c_{\omega y}[l]$  de l'équation (3.65).

D'après l'équation (3.67), on a :

$$c_{\omega y}[l] = \sum_{i=0}^{\infty} g_1[i]c_{\omega u_1}[l + d' + i] + \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i]c_{\omega u_2}[l + i] + \sum_{i=0}^{\infty} h[i]c_{\omega \omega}[l + i]. \quad (3.75)$$

Comme on a supposé que  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont non corrélées, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_1[i]c_{\omega u_1}[l + d' + i] = 0, \quad \forall l. \quad (3.76)$$

De plus, à partir de (3.61), on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i]c_{\omega u_2}[l + i] \neq 0, & l \leq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} g_2[i]c_{\omega u_2}[l + i] = 0, & l > 0. \end{cases} \quad (3.77)$$

Enfin, comme  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc, on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} h[i]c_{\omega \omega}[l + i] \neq 0, & l \leq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} h[i]c_{\omega \omega}[l + i] = 0, & l > 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

Par conséquent, on a :

$$c_{\omega y}[l] = 0, \quad \text{pour } l > 0. \quad (3.79)$$

Finalement, les résultats (3.74) et (3.79) montrent le résultat de l'équation (3.65) et, par conséquent, prouvent les équations de Yule–Walker généralisées. ■

Une fois les coefficients  $a_i$  et  $b_{2i}$  estimés, il est possible d'estimer la statistique :

$$\hat{\rho}_{yu_1}[l] \triangleq c_{yu_1}[l] - \sum_{i=1}^{n_a} \hat{a}_i c_{yu_1}[l - i] - \sum_{i=0}^{n_{b2}} \hat{b}_{2i} c_{u_2 u_1}[l - i], \quad (3.80)$$

qui, en théorie, est égale à :

$$\rho_{yu_1}[l] = \sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 u_1}[l - d' - i] + c_{\omega u_1}[l], \quad (3.81)$$

$$= \sum_{i=0}^{n_{b1}} b_{1i} c_{u_1 u_1}[l - d' - i], \quad (3.82)$$

car  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont non corrélées. Par conséquent, cette statistique vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_{yu_1}[l] \neq 0, & d' - n_f \leq l \leq d' + n_f + n_{b1}, \\ \rho_{yu_1}[l] = 0, & l < d' - n_f \text{ ou } l > d' + n_f + n_{b1}. \end{cases} \quad (3.83)$$

En conclusion, l'indice de retard  $d'$  peut être estimé en détectant l'instant  $d' - n_f$  à partir duquel  $\rho_{yu_1}[l]$  devient non-nul. Si l'ordre  $n_f$  n'est pas *a priori* connu, il peut être estimé à partir de la fonction d'autocorrélation de  $\{u_1[k]\}_{k=0}^{N-1}$ .

## **Application au brief.**

La méthode d'estimation de retard présentée au paragraphe précédent est applicable au cas du bief à condition que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$ – $(\mathcal{H}_5)$  (où  $u_1$ ,  $u_2$  et  $y$  correspondent respectivement à  $\Delta u_{Q_e}$ ,  $\Delta u_{Q_s}$  et  $\Delta h_L$ ) soient respectées. Malheureusement, ce n'est pas le cas. En effet, les entrées  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  ne vérifient pas les hypothèses  $(\mathcal{H}_3)$  et  $(\mathcal{H}_5)$  : les fonctions d'autocorrélation de  $\Delta u_{Q_e}$  et d'intercorrélation entre  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$  ne sont pas finies (voir exemple à la figure 3.17). En perspective, il serait intéressant de tester les performances de cette approche sur des exemples de simulation, à défaut d'une application sur des données réelles.

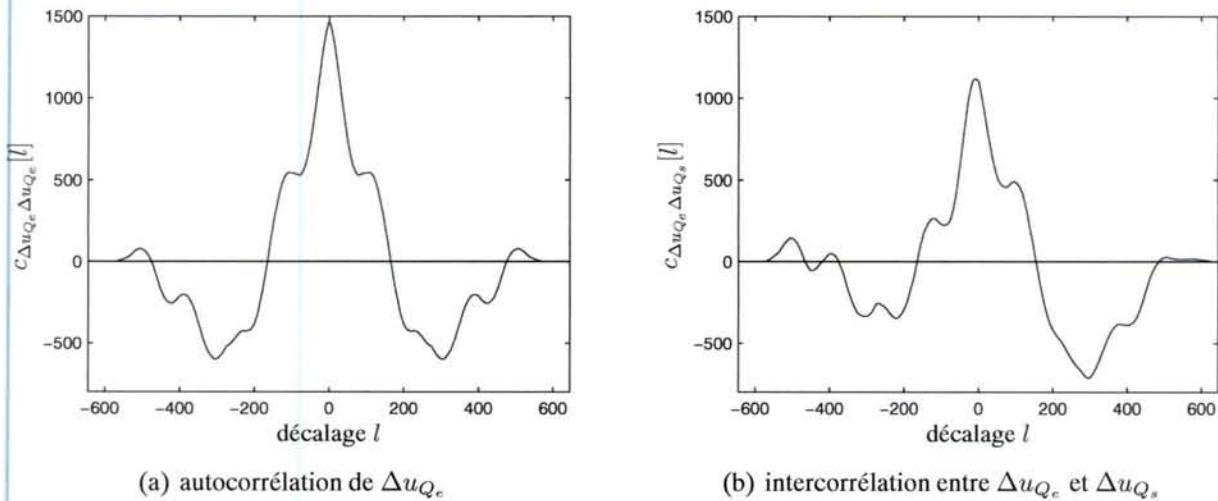


FIG. 3.17 – Exemples des estimées des fonctions d'autocorrélation de  $\Delta u_{Q_e}$  et d'intercorrélation entre  $\Delta u_{Q_e}$  et  $\Delta u_{Q_s}$ .

### 3.2.2 Cas de la structure n° 2 (approche indirecte)

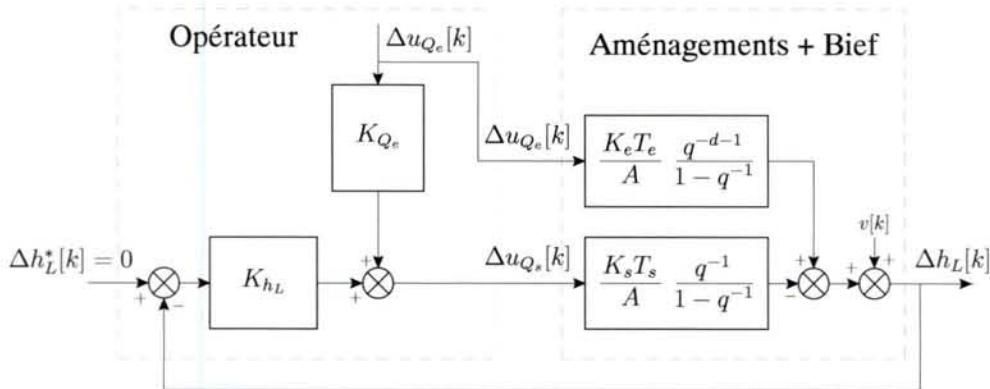


FIG. 3.18 – Schéma–bloc de la structure de modèle n° 2 (approche indirecte).

La structure de modèle considérée par l'approche directe (voir Fig. 3.18) est régie par l'équation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \frac{\frac{K_e T_e}{A} q^{-d-1}}{1 - q^{-1}} \Delta u_{Q_e}[k] - \frac{\frac{K_s T_e}{A} q^{-1}}{1 - q^{-1}} \Delta u_{Q_s}[k] + v[k], \quad (3.84)$$

où

$$\Delta u_{Q_s}[k] = K_{Q_e} \Delta u_{Q_e}[k] - K_{h_L} \Delta h_L[k]. \quad (3.85)$$

Ces deux équations conduisent à la relation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \frac{-K_{Q_e} \frac{K_s T_e}{A} + \frac{K_e T_e}{A} q^{-d}}{1 - (K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1)q^{-1}} q^{-1} \Delta u_{Q_e}[k] + \frac{1 - q^{-1}}{1 - (K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1)q^{-1}} v[k], \quad (3.86)$$

$$= \underbrace{\frac{b_1 + b_2 q^{-d}}{1 - aq^{-1}} q^{-1}}_{H(q^{-1})} \Delta u_{Q_e}[k] + \underbrace{\frac{1 - q^{-1}}{1 - aq^{-1}} v[k],}_{w[k]} \quad (3.87)$$

où :

$$a = K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1, \quad (3.88)$$

$$b_1 = -K_{Q_e} \frac{K_s T_e}{A}, \quad (3.89)$$

$$b_2 = \frac{K_e T_e}{A}. \quad (3.90)$$

Ces paramètres sont non nuls. Cette structure de modèle est alors mono–entrée/mono–sortie. Les méthodes d'estimation de retard présentées dans la première partie du chapitre sont applicables.

### 3.2.2.1 Méthodes fondées sur l'estimation d'une RIF

Les méthodes décrites au paragraphe 3.1.1 sont fondées sur la nullité des  $d$  premiers échantillons de la réponse impulsionale. Or, seul le premier échantillon de la réponse impulsionale, correspondant à  $H(q^{-1})$  défini par l'équation (3.87), est nul. Par conséquent, ces méthodes ne vont pas estimer  $d$ . Notons que cet échec est dû à la présence du terme  $K_{Q_e} \frac{K_s T_e}{A}$  (non nul) dans le numérateur de  $H(q^{-1})$ . S'il n'y avait pas d'action anticipatrice, c'est-à-dire si  $K_{Q_e} = 0$ , ces méthodes pourraient estimer  $d$ .

### 3.2.2.2 Méthodes fondées sur l'estimation d'un transfert rationnel

Pour des raisons d'identifiabilité (voir chapitre 2), l'estimation de tous les paramètres de la structure de modèle de l'équation (3.86) nécessite que les correcteurs soient connus. De plus, pour des raisons de convergence des estimateurs, il est nécessaire qu'il existe un signal d'excitation  $r[k]$  (d'ordre d'excitation persistante suffisant) connu à la sortie des correcteurs [SÖDERSTRÖM (1999)] ou que les correcteurs (connus) varient au cours du temps. Par conséquent, l'utilisation de ces approches afin d'identifier une structure bouclée sont généralement envisageables uniquement lorsqu'il est possible d'effectuer une planification d'expériences. Toutefois, notre objectif principal étant l'estimation du retard, et non celle des paramètres de cette structure, l'utilisation de ces approches reste envisageable.

La méthode présentée au paragraphe 3.1.2.2 consiste à estimer le vecteur de paramètres  $\theta = [b_1, b_2, a]^T$  pour chaque valeur du retard possible ( $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$ ) à partir des signaux

d'entrée–sortie  $\Delta u_{Q_e}$ , et  $\Delta h_L[k]$  régis par la structure de modèle de l'équation 3.87. Puisque  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une marche aléatoire d'ordre 1 (voir Eq. (3.42)), cette structure de modèle devient la structure ARX (autorégressive à entrée auxiliaire) suivante :

$$(1 - aq^{-1})\Delta h_L[k] = (b_1 q^{-1} + b_2 q^{-d-1})\Delta u_{Q_e}[k] + e[k]. \quad (3.91)$$

Nous choisissons alors de minimiser le critère suivant :

$$J(d, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta h_L[k] - \varphi^T[k, d]\boldsymbol{\theta})^2, \quad (3.92)$$

où :

$$\varphi[k, d] = [\Delta u_{Q_e}[k-1], \quad \Delta u_{Q_s}[k-d-1], \quad \Delta h_L[k-1]]^T. \quad (3.93)$$

Ce qui implique, que pour chaque valeur de  $d$  possible, l'estimée du vecteur de paramètres est obtenue par la relation suivante (moindres carrés) :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_d = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \varphi[k, d]\varphi^T[k, d] \right]^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi[k, d]\Delta h_L[k], \quad (3.94)$$

et l'estimée de  $d$  est obtenue par :

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})} J(d, \hat{\boldsymbol{\theta}}_d). \quad (3.95)$$

Les propriétés de l'estimateur de l'équation (3.94) sont connues (voir dans [LJUNG (1999)]). Toutefois, nous ne connaissons pas celles de l'estimateur de  $d$  (qui dépendent de celles de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ). C'est pourquoi nous allons effectuer des simulations afin d'évaluer les performances de cet estimateur.

Nous avons simulé le modèle représenté à la figure 3.1 pour les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau 3.2. L'entrée  $\{\Delta u_{Q_e}[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est, dans un premier temps, une SBPA de longueur maximale  $N = 2^9 - 1 = 511$  (d'ordre d'excitation persistante  $N - 1$ ). Dans un second temps, elle correspond à l'entrée du jeu de données du 09/03 représentée à la figure 3.11. Le bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$ , dans un premier temps, est une marche aléatoire d'ordre 1. Dans un second temps, le bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sera égal à  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$ . Ces séries de simulations, dont les conditions sont résumées dans le tableau 3.4, permettent donc de tester la robustesse de cet estimateur vis-à-vis du niveau d'information contenu dans les données et du modèle du bruit.

Les figures 3.19 – 3.22 représentent les histogrammes des estimées du retard obtenues dans les mêmes conditions que celles de l'approche directe (Fig. 3.12 – 3.15). On constate que l'approche directe donne de bien meilleurs résultats, en particulier lorsque le bruit est blanc. On en déduit que l'approche directe est plus robuste au modèle du bruit.

### 3.2.2.3 La méthode de corrélation

La méthode de corrélation, présentée au paragraphe 3.1.3.1, tout comme les méthodes fondées sur la nullité des  $d$  premiers échantillons de la RIF, estime le retard du transfert  $H(q^{-1})$  (voir équation (3.87)), non pas  $d$ .

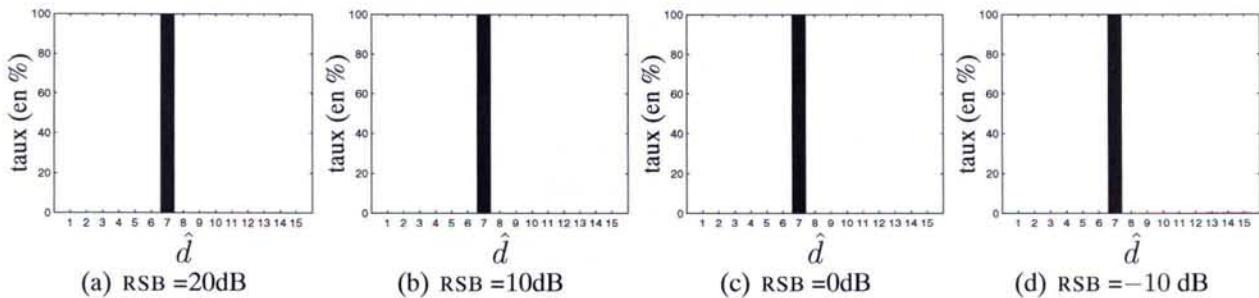


FIG. 3.19 – Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB,  $\Delta u_{Q_e}$  est une SBPA et  $v$  une marche aléatoire.

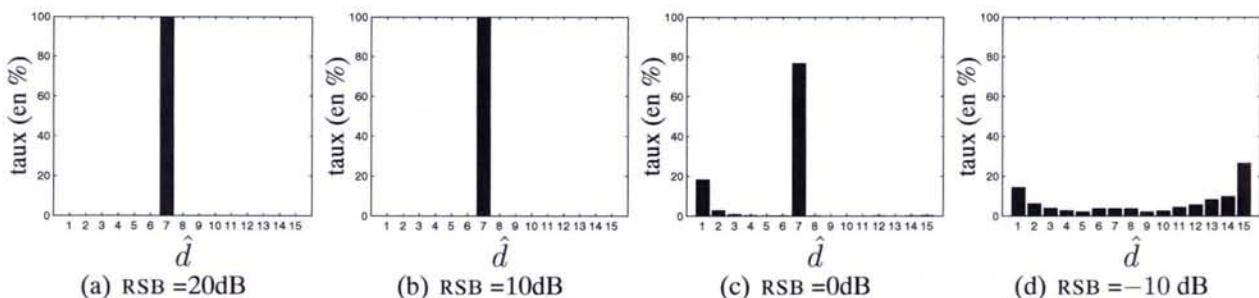


FIG. 3.20 – Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB  $\Delta u_{Q_e}$  est une SBPA et  $v$  est un bruit blanc.

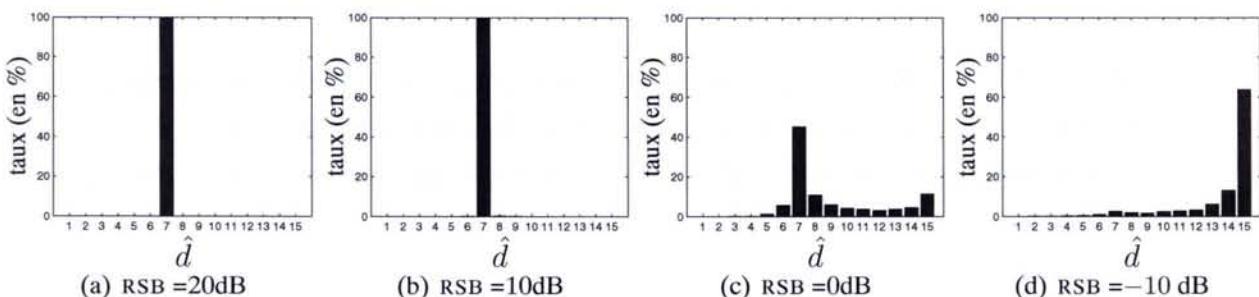


FIG. 3.21 – Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB,  $\Delta u_{Q_e}$  est l'entrée du jeu de données du 09/03 et  $v$  une marche aléatoire.

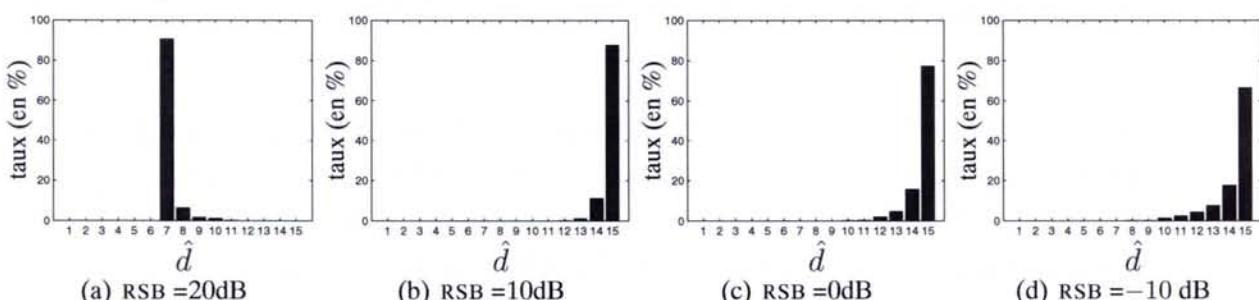


FIG. 3.22 – Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB,  $\Delta u_{Q_e}$  est l'entrée du jeu de données du 09/03 et  $v$  est un bruit blanc.

Entrée	Bruit	RSB		Approche indirecte
SBPA $N = 511$	$v[k] = \frac{1}{1 - q^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.19
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	
	$v[k] = e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.20
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	
donnée du 09/03	$v[k] = \frac{1}{1 - q^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.21
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	
	$v[k] = e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 3.22
		10 dB	(b)	
		0 dB	(c)	
		-10 dB	(d)	

TAB. 3.4 – Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différentes résultats présentés aux FIG. 3.19 – 3.22.

### 3.2.3 Conclusion

L'étude d'applicabilité effectuée précédemment a permis finalement de retenir uniquement la méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel pour les deux approches directe et indirecte. Nous allons maintenant présenter les résultats de ces deux méthodes dans le cas de l'estimation de retard du bief.

## 3.3 Application à un bief de rivière aménagé

La figure 3.23 représente les histogrammes et la répartition journalière des estimées de l'indice de retard  $d$  obtenues à partir des données entrée–sortie disponibles en utilisant l'une approche directe. On constate qu'approximativement 50 % des estimées du retard valent 6 fois la période d'échantillonnage (ce qui correspond environ à 13 min). Une analyse de ces résultats vis–à–vis des paramètres physiques du bief sera effectuée dans le prochain chapitre.

Les résultats obtenus par l'approche indirecte sont présentés à la figure 3.24. On remarque dans ce cas que la majorité des estimées sont à la limite supérieure de l'intervalle spécifié. Ce qui indique l'échec de cette approche et conforte les résultats de simulation présentés précédemment.

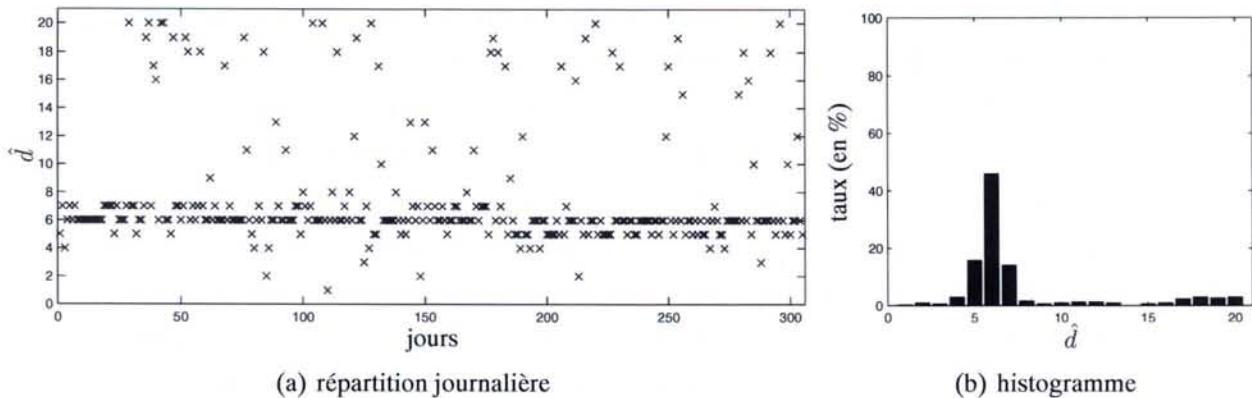


FIG. 3.23 – Retards estimés par l'approche directe.

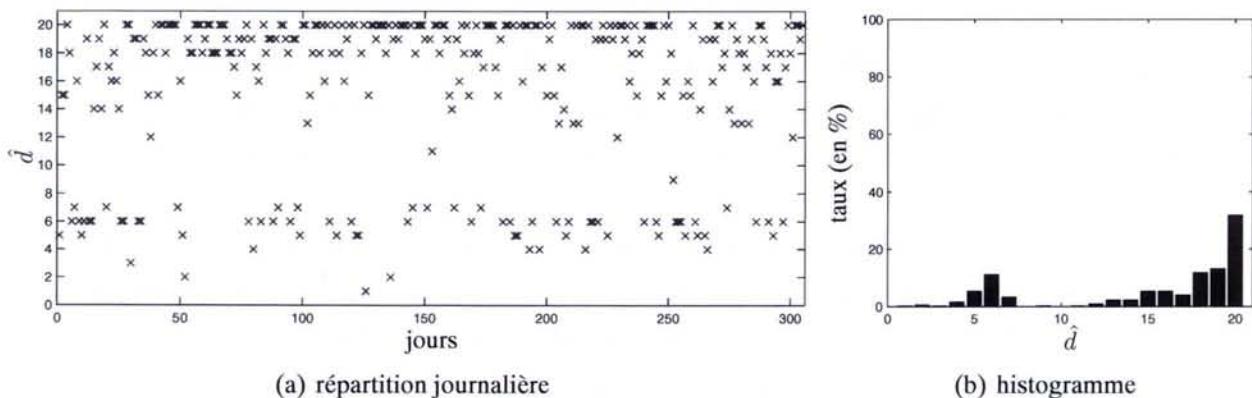


FIG. 3.24 – Retards estimés par l'approche indirecte.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué un état de l'art des méthodes d'estimation du retard entre l'entrée et la sortie d'une structure de modèle à temps discret, sous l'hypothèse que le retard est un multiple de la période d'échantillonnage. Les performances des principales méthodes ont été évaluées sur un exemple de simulation. Cela nous a conduit à retenir trois approches d'estimation de retard :

1. une méthode fondée sur l'estimation d'une RIF (estimation par MV et détection d'un saut par le CUSUM);
  2. une méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel (estimation des paramètres à  $d$  fixé, suivie d'une recherche exhaustive du retard);
  3. une méthode fondée sur l'estimation des fonctions de corrélation.

Ensuite, nous avons étudié l'applicabilité de ces méthodes au cas du bief de rivière aménagé, en considérant les deux approches directe et indirecte. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.5. Dans le cas de l'approche directe, la première méthode se généralise sans difficulté à une structure à deux entrées et une sortie. Toutefois, sa mise en œuvre nécessite le réglage des paramètres de l'algorithme de détection CUSUM qui dépendent de la variance des estimées de la RIF. Dans des conditions expérimentales passives, ce réglage s'avère difficile. En revanche, la deuxième méthode

est simple à mettre en œuvre. Des exemples de simulation proche du système réel ont montré son efficacité. Enfin, nous avons vu que la dernière méthode ne pouvait pas s'appliquer directement à cause de la corrélation entre les entrées et la sortie. Pour cette raison, nous avons proposé une généralisation de cette approche à ce cas, sous certaines hypothèses généralement peu restrictives. Malheureusement, dans le cas particulier du bief, les fonctions de corrélation entre les entrées disponibles ne sont pas finies, ce qui a entraîné l'échec de cette méthode. Par conséquent, les performances de cette méthode restent à étudier de manière plus approfondie.

Concernant l'approche indirecte, seule la méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel s'applique. En effet, les deux autres approches échouent en raison de la non-nullité des  $d$  premiers échantillons de la RIF, induite par l'action anticipatrice. Des exemples de simulation de la deuxième méthode ont permis de mettre en évidence ses performances. Néanmoins, celles-ci restent inférieures à celles obtenues dans le cas de l'approche directe.

Enfin, l'application de la méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel au cas du bief de rivière pour les deux approches a conforté les résultats de simulation. L'approche directe donne des estimées du retard plus satisfaisantes, souvent comprises entre 5 et 7 fois la période d'échantillonnage.

Dans le chapitre suivant, nous développons une nouvelle méthode d'estimation de retard. Elle repose sur la modélisation du bief par une structure RIF intégrant les boucles de régulation (approche indirecte). L'approche proposée est développée dans un contexte bayésien qui facilite l'introduction de connaissances *a priori*. Ceci permet, en effet, d'obtenir de meilleurs résultats en présence de données peu informatives.

		Méthode directe	Méthode indirecte
Difficultés :	bruit = marche aléatoire et entrées corrélées		$d$ premiers échantillons non nuls
Méthodes :			
RIF	✓ Applicable mais beaucoup de paramètres et données peu informatives	✓ Applicable méthode développée au chapitre 4	
Fonction de transfert	✓ Applicable mais le critère doit être fonction de l'erreur de prédiction	✓ Applicable mais moins performante (+ de paramètres)	
Corrélation	✗ Non applicable hypothèses non respectées	✗ Non applicable	

TAB. 3.5 – Applicabilité des méthodes d'estimation de retard à un bief de rivière aménagé.

## Chapitre 4

# Une approche bayésienne pour l'identification de bief de rivière

*Ce chapitre est dédié à l'identification d'un bief de rivière aménagé à partir de données expérimentales passives. Ce système a été présenté au chapitre 1, où ont été également décrites les conditions expérimentales, et où l'information contenue dans les données a été analysée. Plus particulièrement, nous avons vu que l'ordre d'excitation persistante des entrées était souvent faible. Or, ce facteur est susceptible de conduire à des estimées insatisfaisantes des paramètres et du retard du modèle, comme nous l'avons vu au chapitre 3. L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode d'identification originale (incluant l'estimation du retard) adaptée au problème. Celle-ci offre une alternative aux méthodes présentées au chapitre précédent.*

*Ce chapitre est structuré de la façon suivante. Dans un premier temps, nous mettons en évidence que le retard introduit une discontinuité dans la réponse impulsionale entre le niveau aval du bief et la commande du débit entrant sous l'hypothèse de la modélisation retenue au chapitre 1. L'identification du bief de rivière est réalisée alors au travers de l'estimation conjointe du retard et de cette réponse impulsionale. Pour cela, la deuxième partie de ce chapitre présente deux estimateurs de la réponse impulsionale : celui du maximum de vraisemblance (approche classique) et celui du maximum a posteriori (approche bayésienne). Ce dernier permet d'introduire une contrainte de douceur sur l'estimée de la réponse impulsionale. Toutefois, cette contrainte pénalise excessivement les discontinuités et, par conséquent, rend difficile la détection du retard. Nous proposons alors une nouvelle approche permettant, à la fois, de prendre en compte l'a priori de douceur de la réponse impulsionale tout en conservant ses discontinuités, et d'estimer conjointement à celle-ci le retard, en une seule étape. Enfin, ces méthodes sont analysées et comparées au travers d'un exemple de simulation, puis appliquées sur les jeux de données du bief.*

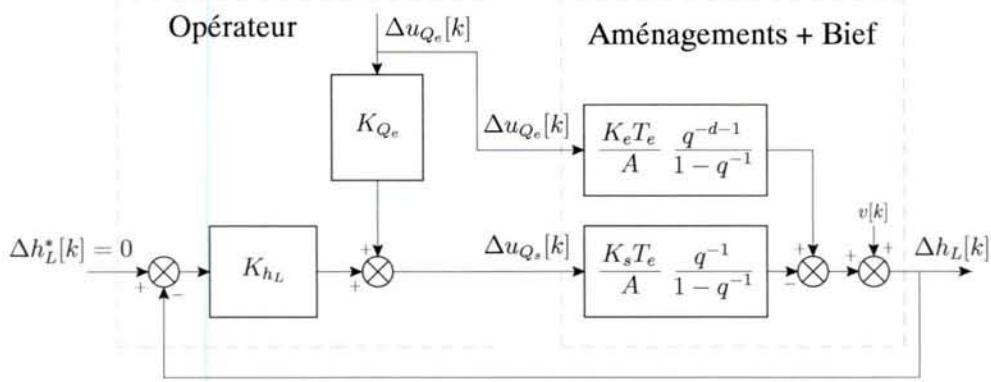


FIG. 4.1 – Schéma-bloc de la structure de modèle simplifiée d'un bief de rivière aménagé dans les conditions expérimentales passives.

## 4.1 Information disponible *a priori*

Pour l'ensemble de ce chapitre, nous nous plaçons sous l'hypothèse où la structure de modèle du bief de rivière aménagé (voir schéma-bloc Fig. 4.1) est régie par l'équation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \frac{K_e T_e}{A} \frac{q^{-d-1}}{1-q^{-1}} \Delta u_{Q_e}[k] - \frac{K_s T_e}{A} \frac{q^{-1}}{1-q^{-1}} \Delta u_{Q_s}[k] + v[k], \quad (4.1)$$

où

$$\Delta u_{Q_s}[k] = K_{Q_e} \Delta u_{Q_e}[k] - K_{h_L} \Delta h_L[k], \quad (4.2)$$

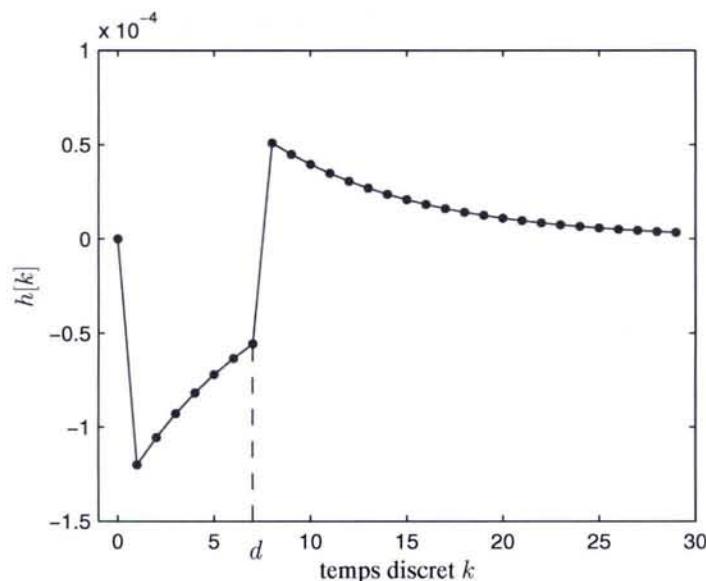
et  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de variables aléatoires (VA) représentant les erreurs de modélisation et de mesures. Ces deux équations conduisent à la relation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \underbrace{\frac{\frac{K_e T_e}{A} q^{-d} - K_{Q_e} \frac{K_s T_e}{A}}{-(K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1)q^{-1} + 1} q^{-1} \Delta u_{Q_e}[k]}_{H(q^{-1})} + \underbrace{\frac{1 - q^{-1}}{-(K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1)q^{-1} + 1} v[k].}_{w[k]} \quad (4.3)$$

Par conséquent, le transfert rationnel  $H(q^{-1})$  décrivant le comportement dynamique entre  $\Delta h_L[k]$  et  $\Delta u_{Q_e}[k]$  dépend effectivement de l'indice de retard à estimer  $d$  (entre la consigne de débit entrant et le niveau aval du bief), mais comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre précédent le retard de ce transfert est égal à 1, et non pas à  $d$ , à cause de la présence du coefficient  $K_{Q_e} \frac{K_s T_e}{A}$  (non nul) au numérateur (présence due à la correction anticipatrice). Ce transfert se décompose selon deux systèmes du premier ordre (de même constante de temps). L'un, de gain négatif, est retardé d'un échantillon, l'autre, de gain positif, est retardé de  $d + 1$  échantillons. La figure 4.2 représente la réponse impulsionale théorique entre  $\Delta h_L$  et  $\Delta u_{Q_e}$  du modèle dont les valeurs des paramètres sont indiquées dans le tableau 4.1. On peut démontrer que cette réponse impulsionale  $h[k]$  possède « deux discontinuités » : une première entre les points  $h[0]$  et  $h[1]$  et une seconde entre  $h[d]$  et  $h[d + 1]$ . En dehors de ces deux discontinuités, la réponse impulsionale varie de façon douce au cours du temps. Il est donc possible d'estimer le retard  $d$  en détectant l'instant de la seconde discontinuité. Mais, cette détection nécessite d'identifier cette réponse impulsionale.

paramètre	valeur
$d$	7
$K_e T_e / A$	$10^{-4}$ (en $s/m^2$ )
$K_s T_e / A$	$1, 2 \cdot 10^{-4}$ (en $s/m^2$ )
$K_{Q_e}$	1
$K_{h_L}$	-1000

TAB. 4.1 – Valeurs des paramètres du modèle de simulation.

FIG. 4.2 – Exemple d'une réponse impulsionnelle théorique  $h[k]$  entre le niveau  $\Delta h_L$  (en  $m$ ) et le débit entrant  $\Delta u_{Q_e}$  (en  $m^3/s$ ).

## 4.2 Identification d'une réponse impulsionnelle infinie tronquée

### 4.2.1 Position du problème

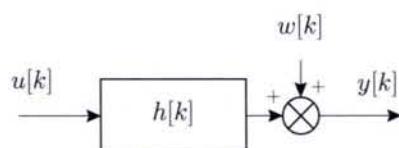


FIG. 4.3 – Schéma-bloc d'un système mono-entrée/mono-sortie.

Le problème consiste à estimer une réponse impulsionnelle infinie tronquée<sup>1</sup> à l'ordre  $M$   $\{h[k]\}_{k=0}^{M-1}$  à partir des données entrée–sortie  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{y[k]\}_{k=0}^{N-1}$  ( $M < N$ ) du système (Fig. 4.3) dont un modèle linéaire, causal, invariant et à temps discret, est décrit par l'équation de convolution

<sup>1</sup>Ce qui revient à estimer une réponse impulsionnelle finie (RIF). C'est pourquoi nous parlerons de RIF dans la suite du chapitre.

suivante :

$$y[k] = (h \star u)[k] + w[k] = \sum_{l=0}^{M-1} h[k-l]u[l] + w[k], \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

où  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente les bruits, perturbations et erreurs de modélisation, supposés additifs. Il s'agit d'un problème inverse [IDIER (2001)] qui, comme nous allons le voir, est bien-posé si les conditions d'inversibilité sont respectées, mais qui peut être mal-conditionné (voir définition au chapitre 2).

La concaténation des  $N$  équations (4.4) forme un système d'équations linéaires basé sur les données disponibles :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{h} + \mathbf{w}, \quad (4.5)$$

avec

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w[0] \\ \vdots \\ w[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u[0] & 0 & \dots & 0 \\ u[1] & u[0] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[M-2] & u[M-3] & & 0 \\ u[M-1] & u[M-2] & & u[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u[N-1] & u[N-2] & \dots & u[N-M] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times M}.$$

#### 4.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Le principe de cet estimateur classique est rappelé à l'annexe B. Sous l'hypothèse<sup>2</sup> que  $\mathbf{w}$  est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance définie positive  $\mathbf{C}_w$ , le critère à minimiser est le suivant :

$$J^{\text{MV}}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h})^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}). \quad (4.6)$$

Sous les conditions d'inversibilité ( $M < N$ ,  $\text{rang}(\mathbf{U}) = M$  et  $\mathbf{C}_w$  définie positive), on obtient alors une expression explicite de l'estimateur du MV, dans le cas du modèle linéaire gaussien :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{y}. \quad (4.7)$$

On peut démontrer que cet estimateur est non biaisé si le bruit est de moyenne nulle.

<sup>2</sup>Cette hypothèse est un choix peu compromettant que l'on peut faire sur la densité de probabilité du bruit dans une situation d'incertitude [JAYNES (2003) ; IDIER (2001)].

Le problème est alors bien–posé (au sens de HADAMARD : existence, unicité et continuité de la solution), mais il peut être mal–conditionné si le conditionnement de la matrice  $\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}$  est élevé. Dans ce cas, la solution au sens du MV (qui procure pourtant la plus grande fidélité aux données) est inacceptable car celle–ci est trop sensible au bruit des données. Ceci est montré à l'aide de l'exemple de simulation présenté au paragraphe suivant. Enfin, notons que si  $\mathbf{C}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ , alors l'estimateur du MV est le suivant :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}. \quad (4.8)$$

#### 4.2.2.1 Exemple de simulation

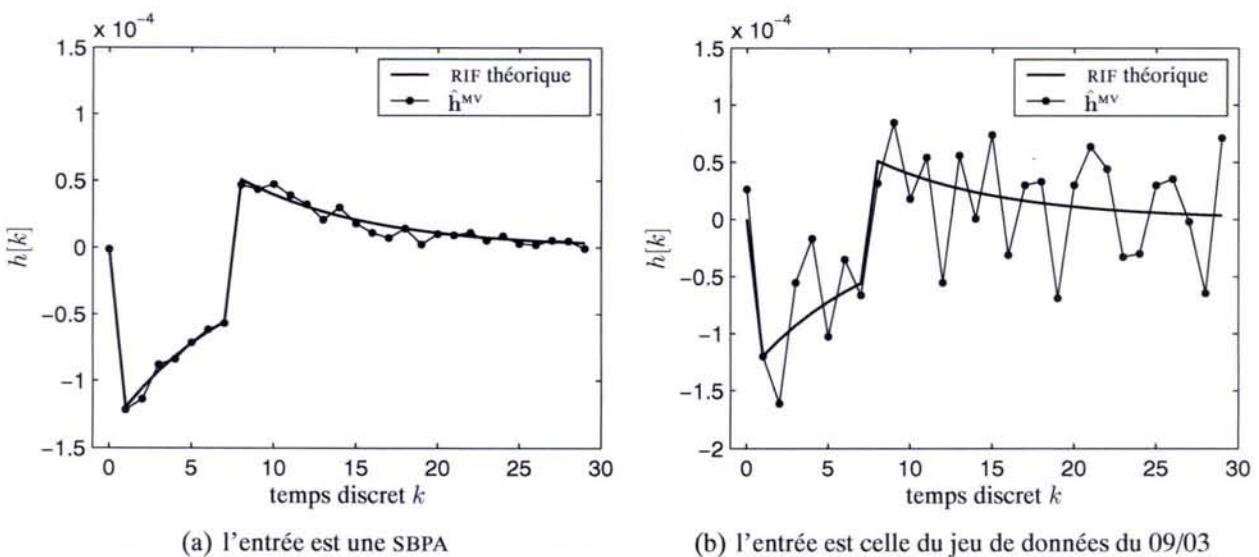


FIG. 4.4 – Estimées de la RIF au sens du MV (RSB = 0 dB).

	entrée	$\kappa(\mathbf{U}^T \mathbf{U})$	bruit
FIG. 4.4(a)	SBPA	1,3	$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 \mathbf{I})$
FIG. 4.4(b)	donnée du 09/03	$1,7 \cdot 10^4$	RSB = 10 dB

TAB. 4.2 – Conditions de simulation des jeux de données d'estimation.

Nous considérons le modèle représenté par l'équation (4.3) dont les valeurs des paramètres sont indiquées dans le tableau 4.1. L'entrée  $\Delta u_{Q_e}$  est une séquence binaire pseudo–aléatoire (SBPA) de longueur maximale  $N = 511$ . Le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$  telle que le RSB soit égal à 10 dB. Ces conditions expérimentales sont récapitulées dans le tableau 4.2. La figure 4.4(a) représente une estimée de la RIF obtenue par l'estimateur du MV. On constate que cette estimée est légèrement dispersée vis–à–vis de la solution théorique. Le conditionnement de la matrice  $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$  est faible<sup>3</sup> :  $\kappa(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) \approx 1,3$ . La détection de la discontinuité est réalisable sans difficulté. En revanche, si on considère un jeu de données ayant pour entrée celle du jeu de données du 09/03 (FIG. 3.11), l'estimée au sens du MV est

<sup>3</sup>Ce qui est logique en présence d'un signal d'excitation persistante d'ordre suffisant.

beaucoup plus dispersée (voir FIG. 4.4(b)). Ceci s'explique par un conditionnement de la matrice  $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$  de l'ordre de  $1,7.10^4$ . Dans ce cas, la détection de la discontinuité s'avère alors plus difficile.

Les paragraphes qui suivent ont pour objectif :

- de tester la robustesse de l'estimateur du MV vis-à-vis du modèle du bruit du bief (§ 4.2.2.2);
- de proposer un algorithme alternatif fournissant une solution moins rugueuse (§ 4.2.3).

#### 4.2.2.2 Robustesse vis-à-vis du modèle du bruit du bief

Sous l'hypothèse de modélisation du bief de rivière aménagé (voir Eq. (4.3)), le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  résulte du filtrage du bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  :

$$w[k] = \frac{1 - q^{-1}}{1 - aq^{-1}} v[k], \quad (4.9)$$

où  $a = K_{hL} \frac{K_s T_e}{A} + 1$ . Nous avons vu au chapitre 1 que le bruit  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représentait les incertitudes de mesure et de modélisation et vérifiait la relation de l'équation (1.15). Cette dernière permet de supposer que ce bruit peut être modélisé par une marche aléatoire d'ordre 1 :

$$v[k] = \frac{1}{1 - q^{-1}} e[k], \quad (4.10)$$

ou  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_e^2$ . D'ailleurs les résultats d'estimation de retard obtenus au chapitre 3 à partir des données du bief confirment cette hypothèse de modélisation de  $\{v[k]\}_{k=0}^{N-1}$ . Par conséquent, le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un processus AR (autorégressif) d'ordre 1, puisqu'à partir des équations (4.9) et (4.10), on a :

$$w[k] = \frac{1}{1 - aq^{-1}} e[k]. \quad (4.11)$$

La fonction d'autocorrélation de  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  vérifie alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} c_{ww}[0] = \frac{\sigma_e^2}{1 - a^2}, \\ c_{ww}[k] = ac_{ww}[k - 1], \quad \text{pour } k > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

A partir de cette équation, il est possible de déterminer la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{C}_w$  qui est donnée par :

$$\mathbf{C}_w = \frac{\sigma_e^2}{1 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{N-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{N-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{N-1} & a^{N-2} & a^{N-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Cette matrice est inversible  $\forall a \neq 1$ . Pour les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau 4.1, on a  $a = 0.88$ .

Afin d'étudier la robustesse de l'estimateur vis-à-vis du modèle du bruit, nous avons simulé 500 jeux de données du modèle de l'équation (4.3) (pour les valeurs des paramètres indiquées dans le tableau 4.1) pour lesquels l'entrée est une SBPA de longueur maximale  $N = 511$ , le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  résulte du processus AR de l'équation (4.11) où la variance  $\sigma_e^2$  est fixée de sorte à avoir un RSB de 0 dB. La figure 4.5(a) montre la réponse impulsionnelle théorique, ainsi que la moyenne et l'écart-type des échantillons des RIF obtenus à partir de l'estimateur du MV de l'équation (4.7) en considérant la matrice de covariance de  $C_w$  de l'équation (4.13). La figure 4.5(b) montre les résultats obtenus toujours à partir des mêmes jeux de données, mais en considérant l'estimateur du MV de l'équation (4.8), c'est-à-dire en supposant que  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ . On remarque que la différence est surtout perceptible sur les premiers et les derniers échantillons des estimées. En revanche, aux points définissant la discontinuité d'intérêt, il n'y a pratiquement aucune différence entre les résultats obtenus avec la matrice de covariance  $C_w$  de l'équation (4.13) (avec  $a = 0.88$ ) et  $C_w = \sigma_w^2 I$ . Ce résultat est confirmé par d'autres simulations dans lequel le RSB a été modifié. Par conséquent, l'estimée du retard ne devrait pas être considérablement affectée si l'on suppose que le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ . C'est pourquoi, pour des raisons de simplicité, nous allons dorénavant considérer que  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  vérifie cette hypothèse.

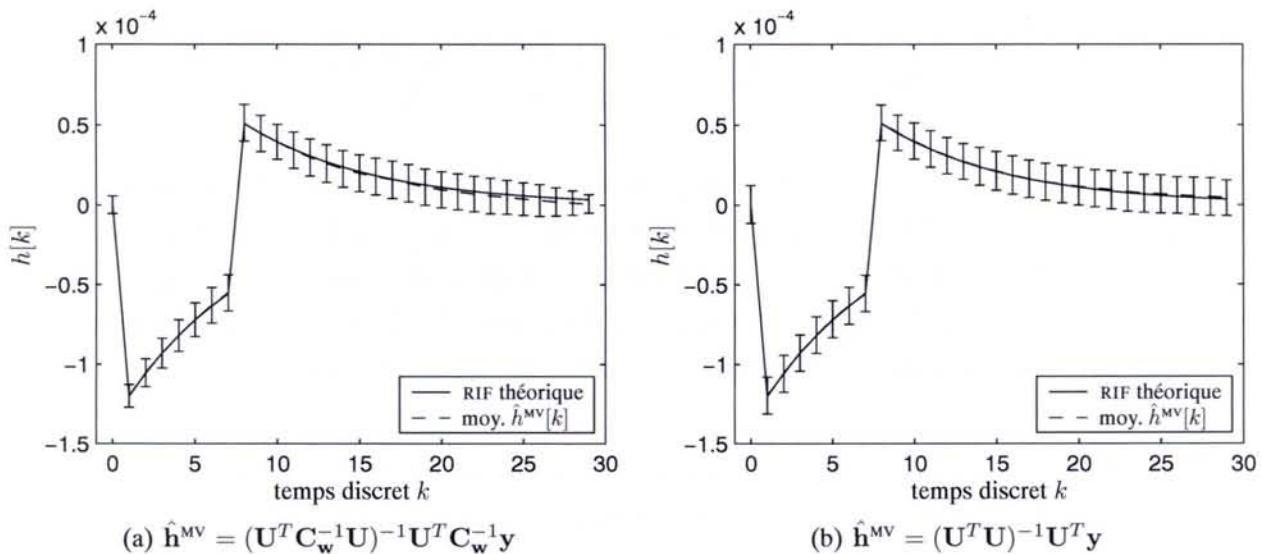


FIG. 4.5 – Moyenne et écart-type des estimées de la RIF au sens du MV pour 500 simulations de Monte Carlo (0 dB). (a) Prise en compte de la matrice de covariance  $C_w$ ; (b) le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est supposé être une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ .

	entrée	bruit	RSB
FIG. 4.5	SBPA	$w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}} e[k]$ avec $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 I)$	0 dB

TAB. 4.3 – Conditions de simulation des 500 jeux de données d'estimation.

### 4.2.3 Introduction de douceur par une approche bayésienne : estimateur du maximum *a posteriori* (MAP)

La méthode précédente n'utilise pas d'autre information *a priori* sur la RIF que son support temporel (l'ordre de troncature de la RIF). Lorsque les conditions expérimentales sont favorables (entrée suffisamment excitante, fort rapport signal sur bruit), les résultats sont acceptables. En revanche, dans des conditions expérimentales moins favorables, les résultats deviennent rapidement inexplotables. Une solution consiste alors à prendre en compte d'autres informations *a priori* sur la RIF, comme, par exemple, le fait qu'elle varie de façon douce au cours du temps.

#### 4.2.3.1 Principe

La prise en compte de connaissances disponibles *a priori* peut être effectuée à l'aide d'une approche bayésienne. Celle-ci fournit en effet un cadre approprié pour la construction d'un critère. Elle s'appuie sur la fonction de vraisemblance (prise en compte de l'information contenue dans les données), mais cette dernière est pondérée par multiplication avec la densité de probabilité *a priori* (prise en compte de l'information disponible *a priori*), c'est la règle de Bayes. Après normalisation, on obtient la densité de probabilité *a posteriori* :

$$p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\beta}_w) = \frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}_w)p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h}|\boldsymbol{\beta}_h)}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\beta}_w)}, \quad (4.14)$$

où  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{h}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}_w)$  est la fonction de vraisemblance,  $p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h}|\boldsymbol{\beta}_h)$  est la densité de probabilité *a priori* de l'objet, et  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\beta}_w)$ , égale à l'intégrale (par rapport à  $\mathbf{h}$ ) du produit de la fonction de vraisemblance et de la densité de probabilité *a priori* et appelée *vraisemblance généralisée*, permet de normaliser le produit [ROBERT (2001) ; RICHARD (2003a)]. Les hyperparamètres  $\boldsymbol{\beta}_h$  et  $\boldsymbol{\beta}_w$  désignent respectivement les paramètres des densités de probabilité de  $\mathbf{h}$  et du bruit.

L'estimateur du *maximum a posteriori* (MAP),  $\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAP}}$ , qui minimise le risque de Bayes (risque moyen) pour la fonction de coût 0–1 [ROBERT (2001)], est alors le suivant :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\beta}_w). \quad (4.15)$$

#### 4.2.3.2 Cas du modèle linéaire gaussien avec introduction de douceur

L'information *a priori* de douceur temporelle dans la RIF peut être introduite en considérant le vecteur des différences finies d'ordre 2 :

$$\mathbf{h}_D = D\mathbf{h}, \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice de Toeplitz suivante :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M}. \quad (4.17)$$

En effet, sous l'hypothèse que  $\{h_{\mathbf{D}}[k]\}_{k=0}^{M-1}$  soit une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2$ , la contrainte de douceur sur  $\mathbf{h}$  peut alors être paramétrée par  $\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2$  car une faible valeur de  $\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2$  signifie que les variations entre les éléments successifs de  $\mathbf{h}$  sont faibles, et inversement. De plus, sous cette hypothèse, on montre alors que  $\mathbf{h}$  suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_h = \sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2 (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}$ , sous la condition que les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  soient inversibles, ce qui est le cas si  $\mathbf{D}$  correspond à la matrice de l'équation (4.17). Par conséquent, l'information *a priori* de douceur temporelle dans la RIF peut être codée par la densité de probabilité *a priori* sur  $\mathbf{h}$  suivante :

$$p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h} | \sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det(\mathbf{C}_h)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{h} \right], \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2)^{M/2} \sqrt{\det((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1})}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2} \mathbf{h}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{h} \right], \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2)^{M/2} \sqrt{\det((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1})}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2} \|\mathbf{D}\mathbf{h}\|^2 \right]. \quad (4.20)$$

En supposant que le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite de VA i.i.d. selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ , la fonction de vraisemblance est la suivante :

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \mathbf{h}, \sigma_w^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} (\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h})^T (\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}) \right], \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 \right], \quad (4.22)$$

et la vraisemblance généralisée est alors égale à :

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2, \sigma_w^2) = \frac{\int_{\mathbf{h}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 - \frac{1}{2\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2} \|\mathbf{D}\mathbf{h}\|^2 \right] d\mathbf{h}}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2} (2\pi\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2)^{M/2} \sqrt{\det((\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1})}}. \quad (4.23)$$

Par conséquent, la densité de probabilité *a posteriori* est :

$$p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2, \sigma_w^2) = K \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 - \frac{1}{2\sigma_{h_{\mathbf{D}}}^2} \|\mathbf{D}\mathbf{h}\|^2 \right], \quad (4.24)$$

où :

$$K = \int_{\mathbf{h}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2 - \frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{Dh}\|^2 \right] d\mathbf{h} \quad (4.25)$$

ne dépend pas de  $\mathbf{h}$ . L'estimateur du MAP vérifie alors les relations suivantes :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2), \quad (4.26)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} [-\ln p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2)], \quad (4.27)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} \left[ \frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2 + \frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{Dh}\|^2 \right], \quad (4.28)$$

et le critère à minimiser est le suivant :

$$J^{\text{MAP}}(\mathbf{h}) = \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2}_{\text{Fidélité aux données}} + \alpha \underbrace{\|\mathbf{Dh}\|^2}_{\substack{\text{Fidélité à} \\ \text{l}'a priori sur } \mathbf{h}}, \quad (4.29)$$

pour  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M$  et où  $\alpha = \sigma_w^2 / \sigma_{h_D}^2$ . Il s'agit donc d'un problème de minimisation d'un critère pénalisé correspondant à une régularisation par critère composite [DEMOMENT *et al.* (2001); IDIER (2001)]. Le premier terme du critère correspond à l'anti-log-vraisemblance. Il reflète l'adéquation de l'estimateur aux données. Le second terme traduit les connaissances introduites *a priori* sur la solution. Il reflète la fidélité de l'estimateur aux propriétés souhaitées *a priori*. Le paramètre  $\alpha$  permet d'effectuer un compromis entre les deux. Le paramètre  $\sigma_{h_D}^2$  est fixé en fonction de la contrainte de douceur désirée : plus il tend vers 0, plus le poids de la contrainte de douceur *a priori* est grand. Le paramètre  $\sigma_w^2$  représente le niveau de bruit : plus  $\sigma_w^2$  est grand, plus l'information contenue dans les données est incertaine, et donc plus de poids doit être donné à l'information *a priori*.

Sous la condition d'inversibilité de la matrice  $(\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D})$ , on déduit de l'équation (4.29) que l'estimée de la RIF au sens du MAP est donnée par l'expression suivante :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAP}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}. \quad (4.30)$$

D'après cette équation, il est clair que l'estimée au sens du MV est un cas particulier de celle du MAP, dans lequel  $\alpha = 0$  (aucun *a priori* de douceur). Enfin, on peut démontrer que la variance de l'estimateur du MAP est plus faible que celle de l'estimateur du MV, mais en contre-partie l'estimateur du MAP est biaisé.

#### 4.2.3.3 Exemple de simulation

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence l'apport de l'estimateur précédent en terme de douceur, comparativement à l'estimateur du MV, ainsi que ses limitations. Pour cela, on considère toujours le jeu de données utilisé au paragraphe 4.2.2.1 ayant pour entrée celle du jeu du 09/03. Les conditions de simulation sont rappelées dans le tableau 4.4. La figure 4.6 représente les estimées

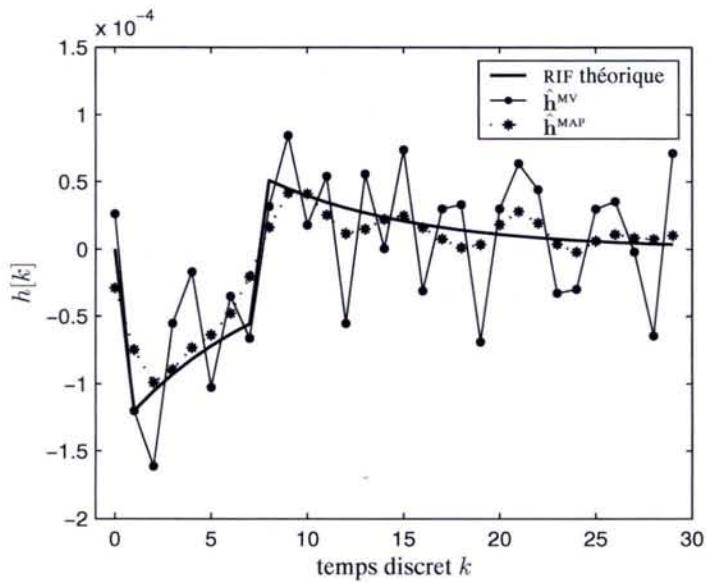


FIG. 4.6 – Estimées de la RIF au sens du MV et du MAP.

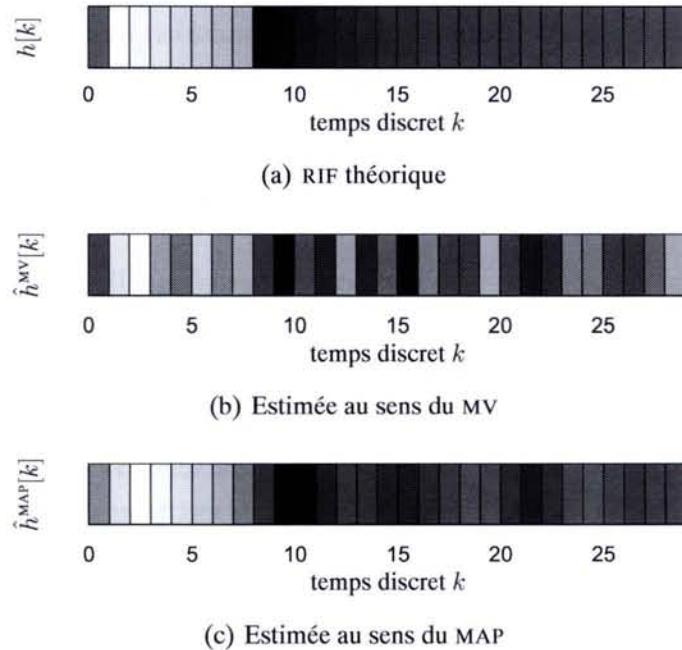


FIG. 4.7 – Barres impulsionales.

	entrée	$\kappa(\mathbf{U}^T \mathbf{U})$	bruit
FIG. 4.6 et 4.7	donnée du 09/03	$1,7.10^4$	$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 \mathbf{I})$ RSB = 10 dB

TAB. 4.4 – Conditions de simulation des jeux de données d'estimation.

de la RIF au sens du MV et du MAP ( $\alpha = 10000$ ). Comme prévu, on constate que la solution donnée par l'estimateur du MAP est plus douce que celle fournie par l'estimateur du MV. Par conséquent, elle est plus proche de la RIF théorique en dehors des discontinuités. En revanche, la contrainte de douceur a adouci les discontinuités « théoriques » : la détection de discontinuité dans l'estimée au sens du MAP est difficile puisqu'il n'y a pas de discontinuité franche.

La figure 4.7 est une autre représentation de la réponse impulsionale, nommée « barre impulsionale ». Chaque coefficient de la RIF est représenté par un niveau de gris correspondant à sa valeur (du blanc pour le plus petit des coefficients au noir pour le plus grand). Cette représentation permet, d'une part, de mettre en évidence la présence d'une discontinuité au travers d'une brusque variation du niveau de gris, et d'autre part, d'obtenir des « représentations temps-jours » que nous utiliserons par la suite, dans le paragraphe 4.4, par une juxtaposition de plusieurs barres impulsionales. Cette figure montre que l'instant de la discontinuité (due au retard) dans la RIF est caractérisé par le passage d'un niveau de gris clair au noir.

Puisque la contrainte de douceur pénalise les discontinuités que l'on cherche à détecter, notre idée a été d'appliquer cette contrainte sur la RIF sauf au niveau des discontinuités « théoriques » (par opposition aux discontinuités introduites dans l'estimée par le bruit) en modifiant la matrice de pénalisation D. Toutefois, l'instant de la seconde discontinuité est inconnu (c'est justement ce que l'on cherche), nous allons donc en même temps (conjointement) l'estimer.

## 4.3 Estimation conjointe de la RIF et du retard

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1 que la réponse impulsionale de notre système est caractérisée par deux discontinuités : la première se situe entre les échantillons 0 et 1, et la seconde entre  $d$  et  $d + 1$  ( $d$  est donc supérieur ou égal à 2). L'objectif de cette partie est de développer une méthode permettant d'imposer une contrainte de douceur sur la RIF, sauf aux instants caractérisant les deux sauts, et de détecter l'instant du second saut qui caractérise la valeur du retard. Le principe de cette méthode a déjà fait l'objet de publications [THOMASSIN *et al.* (2003a) ; THOMASSIN et BASTOGNE (2003)].

### 4.3.1 Principe

Comparativement aux approches précédentes, le retard  $d$  est maintenant un paramètre explicite du critère. Par conséquent, l'estimée de la RIF dépend du retard  $d$ , ce dernier correspondant à l'instant discret du premier point de la discontinuité à détecter.

L'information *a priori* sur les objets  $\mathbf{h}$  et  $d$  est exprimée sous la forme d'une densité de probabilité *a priori* conjointe égale à (règle du produit) :

$$p_{\mathbf{H},D}(\mathbf{h}, d | \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\beta}_d) = p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h}|d, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{h}})p_D(d|\boldsymbol{\beta}_d), \quad (4.31)$$

où  $\beta_h$  et  $\beta_d$  sont des vecteurs d'hyperparamètres, contenant les divers paramètres des densités de probabilité. La densité de probabilité *a posteriori* conjointe de  $h$  et  $d$ , déterminée par le théorème de Bayes, permet de combiner l'information *a priori* avec celle contenue dans les données :

$$p_{H,D}(h, d | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \beta_h, \beta_d, \beta_w) = \frac{p_Y(\mathbf{y} | h, d, \mathbf{U}, \beta_w) p_H(h | d, \beta_h) p_D(d | \beta_d)}{p_Y(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \beta_h, \beta_d, \beta_w)}, \quad (4.32)$$

où  $p_Y(\mathbf{y} | h, d, \mathbf{U}, \beta_w)$  est la fonction de vraisemblance. Le terme :

$$p_Y(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \beta_h, \beta_d, \beta_w) = \int_{h,d} p_Y(\mathbf{y} | h, d, \mathbf{U}, \beta_w) p_H(h | d, \beta_h) p_D(d | \beta_d) dh dd, \quad (4.33)$$

permet de normaliser le produit. Comme dans le cas précédent, nous choisissons l'estimateur minimisant le risque de Bayes pour une fonction de coût 0–1, c'est-à-dire l'estimateur maximisant la densité de probabilité *a posteriori* conjointe, le *maximum a posteriori conjoint* (MAPC) :

$$(\hat{h}^{\text{MAPC}}, \hat{d}^{\text{MAPC}}) = \arg \max_{h \in \mathbb{R}^M, d \in \mathbb{D}} p_{H,D}(h, d | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \beta_h, \beta_d, \beta_w), \quad (4.34)$$

où  $\mathbb{D}$  correspond à l'ensemble des valeurs du retard admissibles ( $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}^*$ ). Le critère à minimiser est donc proportionnel à l'anti-log de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe :

$$J^{\text{MAPC}}(h, d) \propto -\ln [p_{H,D}(h, d | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \beta_h, \beta_d, \beta_w)], \quad (4.35)$$

$$\propto -\ln [p_Y(\mathbf{y} | h, d, \mathbf{U}, \beta_w) p_H(h | d, \beta_h) p_D(d | \beta_d)], \quad (4.36)$$

car  $p_Y(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \beta_h, \beta_d, \beta_w)$  dépend ni de  $h$ , ni de  $d$ .

### 4.3.1.1 Fonction de vraisemblance

En supposant que le bruit est une suite de VA i.i.d. selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ , la fonction de vraisemblance est la suivante :

$$p_Y(\mathbf{y} | h, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} (\mathbf{y} - \mathbf{Uh})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Uh}) \right], \quad (4.37)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2 \right]. \quad (4.38)$$

### 4.3.1.2 Densité de probabilité *a priori* de la RIF

Nous voulons contraindre la RIF à être relativement douce, sauf entre les deux couples de points  $(h[0], h[1])$  et  $(h[d], h[d+1])$  ( $d \geq 2$ ). Pour cela, nous allons modifier la matrice  $\mathbf{D}$  de l'équation (4.17) qui permettait d'introduire une contrainte de douceur sur toute la RIF. Cette nouvelle

matrice, qui appartient toujours à  $\mathbb{R}^{M \times M}$  mais qui dépend désormais de  $d$ , est la suivante :

$$\mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow (d-1)^{\text{e}} \text{ ligne} \\ \leftarrow d^{\text{e}} \text{ ligne} \end{array} \quad (4.39)$$

Ainsi, le vecteur  $\mathbf{h}_D = \mathbf{D}_d \mathbf{h}$  correspond aux différences finies d'ordre 2 de  $\mathbf{h}$ , sauf aux instants discrets  $k = 0, 1, d, d+1$ , de sorte qu'aucune contrainte de douceur n'est appliquée entre  $h_D[0]$  et  $h_D[1]$ , et entre  $h_D[d]$  et  $h_D[d+1]$ . Cette information *a priori* est alors imposée, comme dans la méthode du MAP (§ 4.2.3), en supposant que le vecteur  $\mathbf{h}_D$  suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\sigma_{h_D}^2 \mathbf{I}$  :

$$p_{\mathbf{H}_D}(\mathbf{h}_D | d, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \mathbf{h}_D^T \mathbf{h}_D \right]. \quad (4.40)$$

Puisque  $\mathbf{h}_D = \mathbf{D}_d \mathbf{h}$ , la RIF  $\mathbf{h}$  est alors distribuée selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\sigma_{h_D}^2 (\mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1}$  :

$$p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2} \sqrt{\det((\mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1})}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \mathbf{h}^T \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d \mathbf{h} \right]. \quad (4.41)$$

Notons que cette hypothèse nécessite que la matrice  $\mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d$  soit inversible, ce qui est bien le cas. De plus, on peut vérifier que  $\det((\mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1}) = 1$ , donc la densité de probabilité *a priori* de la RIF est la suivante :

$$p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \mathbf{h}^T \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d \mathbf{h} \right]. \quad (4.42)$$

### 4.3.1.3 Densité de probabilité *a priori* du retard

La densité de probabilité *a priori* de  $d$ ,  $p_D(d | \beta_d)$ , est déterminée à partir de notre information *a priori* sur  $d$ . Si l'on ne dispose pas d'information *a priori* sur le retard, il est possible d'utiliser une densité de probabilité *a priori* non informative. Plusieurs lois peuvent convenir comme par exemple la loi uniforme, la loi gamma ou la loi de Rayleigh [ROBERT (2001)], dont l'expression est la suivante :

$$p_D(d | \sigma_d^2) = \frac{d}{\sigma_d^2} \exp \left[ -\frac{d^2}{2\sigma_d^2} \right] \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(d), \quad (4.43)$$

où  $\sigma_d = \arg \max_d [p_D(d|\sigma_d^2)]$  est un hyperparamètre, et  $\mathbb{I}_{[0,+\infty]}(d)$  est la fonction indicatrice d'intervalle qui vaut 1 si  $d \in [0, +\infty[$  et 0 sinon. La figure 4.8 représente cette loi pour  $\sigma_d = 7$ . Cette loi a les avantages de prendre en compte la positivité du retard<sup>4</sup> et de posséder un seul hyperparamètre.

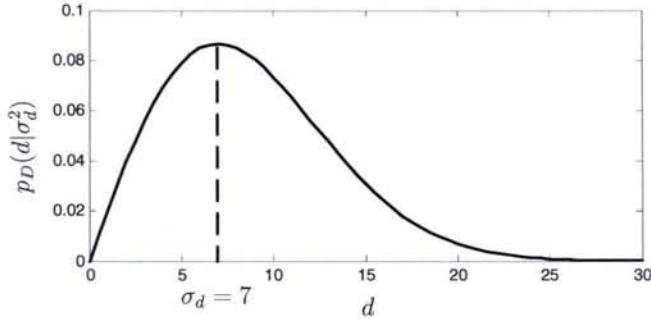


FIG. 4.8 – Loi de Rayleigh.

#### 4.3.1.4 Critère

D'après l'équation (4.36), en retenant l'anti-log des termes qui sont fonctions de  $\mathbf{h}$  et de  $d$  des équations (4.38), (4.42) et (4.43), on obtient le critère à minimiser suivant :

$$J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d) = \frac{1}{2\sigma_w^2} (\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h})^T (\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}) + \frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \mathbf{h}^T \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d \mathbf{h} + \frac{d^2}{2\sigma_d^2} - \ln(d), \quad (4.44)$$

pour  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M$  et  $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$  où  $\mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max}) = \{d \in \mathbb{N}^*/d_{\min} \leq d \leq d_{\max}\}$ . Il peut se réécrire sous la forme suivante :

$$J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d) = \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2}_{\text{Fidélité aux données}} + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{h_D}^2} \underbrace{\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2}_{\substack{\text{Fidélité à} \\ \text{l}'a priori sur } \mathbf{h}} + \sigma_w^2 \underbrace{\left( \frac{d^2}{\sigma_d^2} - 2 \ln(d) \right)}_{\substack{\text{Fidélité à} \\ \text{l}'a priori sur } d}. \quad (4.45)$$

L'hyperparamètre  $\sigma_{h_D}^2$  permet d'ajuster la contrainte *a priori* de douceur sur  $\mathbf{h}$ . L'hyperparamètre  $\sigma_d^2$  est fixé en fonction de notre connaissance *a priori* sur la valeur la plus probable du retard. Enfin, l'hyperparamètre  $\sigma_w^2$  permet d'ajuster le compromis entre la fidélité aux données et celles aux *a priori* sur  $\mathbf{h}$  et  $d$ .

Notons que si l'on ne dispose pas d'*a priori* sur le retard, il est possible de considérer la loi *a priori* sur le retard comme une loi uniforme, ce qui conduit au critère suivant :

$$J_{\text{unif}}^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d) = \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2, \quad (4.46)$$

toujours pour  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M$  et  $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$ .

<sup>4</sup>En toute rigueur, la loi *a priori* sur le retard devrait être discrète afin de tenir compte du caractère discret du retard. Ce caractère discret n'est toutefois considéré que lors de la procédure d'optimisation.

### 4.3.1.5 Optimisation du critère

Le critère  $J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d)$  de l'équation (4.45) est quadratique en  $\mathbf{h}$  et, à  $d$  fixé, possède une solution explicite :

$$\widehat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}}(d) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}, \quad (4.47)$$

où  $\alpha = \sigma_w^2 / \sigma_{h_D}^2$ , mais il n'est pas convexe vis-à-vis de  $d$ . Toutefois,  $d$  est un nombre entier positif que l'on peut borner à l'aide de nos connaissances *a priori* :  $2 \leq d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$ . Une méthode simple sans problème de convergence consiste à calculer le critère  $J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d)$  pour toutes les valeurs de  $\mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})^5$ , c'est-à-dire effectuer, comme dans le chapitre 3, une recherche exhaustive vis-à-vis du retard. Finalement, l'estimation de  $\mathbf{h}$  et  $d$  peut donc se résumer par l'algorithme 4.1. Toutefois, la résolution de ce problème nécessite l'évaluation des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$ ,  $\sigma_w^2$  et  $\sigma_d^2$ . Avant d'étudier ce problème, nous allons voir, dans un cadre idéal où ces hyperparamètres sont fixés, les performances de cette méthode d'estimation de retard du bief.

---

◊ Pour  $d = d_{\min}, d_{\min} + 1, \dots, d_{\max}$ ,

a) formation de la matrice  $\mathbf{D}_d$ ,

b) estimation de  $\mathbf{h}$  à  $d$  fixé :

$$\widehat{\mathbf{h}}(d) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y},$$

c) calcul du critère :

$$J^{\text{MAPC}}(\widehat{\mathbf{h}}(d), d) = \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\widehat{\mathbf{h}}(d)\|^2 + \alpha \|\mathbf{D}_d \widehat{\mathbf{h}}(d)\|^2 + \sigma_w^2 \left( \frac{d^2}{\sigma_d^2} - 2 \ln(d) \right).$$

◊  $\widehat{d}^{\text{MAPC}} = \arg \min_{d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})} J^{\text{MAPC}}(\widehat{\mathbf{h}}(d), d)$ .

◊  $\widehat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}} = \widehat{\mathbf{h}}(\widehat{d}^{\text{MAPC}}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}_{\widehat{d}^{\text{MAPC}}}^T \mathbf{D}_{\widehat{d}^{\text{MAPC}}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$ .

---

ALGO. 4.1 – Estimation de  $\mathbf{h}$  et  $d$  pour les hyperparamètres fixés.

### 4.3.2 Exemple de simulation (hyperparamètres fixés)

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence les performances de cette méthode d'estimation de retard dans le cas où les hyperparamètres sont fixés. En effet, puisque ce paragraphe considère un cadre de simulation où les valeurs vraies des objets  $\mathbf{h}$  et  $d$  sont connues (on note  $d_0$  la valeur vraie du retard et  $\mathbf{h}_{\text{theo}}$  la RIF théorique), il est possible de fixer les hyperparamètres de manière optimale<sup>6</sup> à :

- $\sigma_d = d_0$ ;
- $\sigma_w^2$  est fixé à la valeur de la variance du bruit :  $\sigma_w^2 = \|\mathbf{w}\|^2/N = \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}_{\text{theo}}\|^2/N$ ;
- $\sigma_{h_D}^2$  est fixé à la valeur de la variance de  $\mathbf{D}_{d_0} \mathbf{h}_{\text{theo}}$  :  $\sigma_{h_D}^2 = \|\mathbf{D}_{d_0} \mathbf{h}_{\text{theo}}\|^2/M$ .

<sup>5</sup>Ce qui revient à tronquer la loi *a priori* du retard, à la discrétiliser et donc à la normaliser.

<sup>6</sup>Les choix de  $\sigma_w^2$  et de  $\sigma_{h_D}^2$  sont justifiés par les résultats des équations (4.61) et (4.62).

Nous avons simulé 5000 jeux de données entrée–sortie du modèle défini au paragraphe 4.1 pour 2 types d'entrée : l'une est une SBPA de longueur maximale  $N = 511$ , l'autre est l'entrée du jeu de données du 09/03, pour deux types de bruit :  $w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}}e[k]$  et  $w[k] = \frac{1-q^{-1}}{1-aq^{-1}}e[k]$  où  $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ . De plus, différents RSB ont été considérés. Le tableau 4.5 récapitule ces conditions de simulation et indique la figure présentant les résultats obtenus selon la méthode d'estimation utilisée : approches directe (méthode présentée au chapitre précédent), méthode du MAPC avec comme 2 lois *a priori* sur le retard : la loi uniforme et la loi de Rayleigh.

Entrée	Bruit	RSB		Approche directe	MAPC loi uniforme hyperpar. fixés	MAPC loi de Rayleigh hyperpar. fixés
SBPA $N = 511$	$w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}}e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.9	FIG. 4.13	FIG. 4.17
		10 dB	(b)			
		0 dB	(c)			
		-10 dB	(d)			
	$w[k] = \frac{1-q^{-1}}{1-aq^{-1}}e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.10	FIG. 4.14	FIG. 4.18
		10 dB	(b)			
		0 dB	(c)			
		-10 dB	(d)			
donnée du 09/03	$w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}}e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.11	FIG. 4.15	FIG. 4.19
		10 dB	(b)			
		0 dB	(c)			
		-10 dB	(d)			
	$w[k] = \frac{1-q^{-1}}{1-aq^{-1}}e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.12	FIG. 4.16	FIG. 4.20
		10 dB	(b)			
		0 dB	(c)			
		-10 dB	(d)			

TAB. 4.5 – Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différentes résultats présentés aux FIG. 4.9 – 4.20.

Lorsque l'ordre d'excitation persistante de l'entrée est élevé (entrée SBPA), toutes les méthodes comparées aboutissent à des résultats similaires. En effet, d'après les figures correspondant aux deux premières lignes du tableau 4.5, on remarque que le pourcentage des estimées correctes est très satisfaisant, même à faible RSB.

En considérant maintenant une entrée moins informative (celle du jeu de données du 09/03) associée à un bruit de la forme  $w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}}e[k]$ , les performances sont toujours satisfaisantes à fort RSB quelle que soit la méthode utilisée. Des différences apparaissent lorsque le RSB diminue. Ainsi, c'est la méthode MAPC utilisant une loi de Rayleigh qui est la moins sensible aux incertitudes puisque ces dernières sont compensées par les informations *a priori*.

Enfin, lorsque l'on utilise la même entrée que la précédente avec un bruit de la forme  $w[k] = \frac{1-q^{-1}}{1-aq^{-1}}e[k]$ , il apparaît clairement que l'approche du MAPC est plus performante que l'approche directe, surtout avec une loi *a priori* de Rayleigh. Bien sûr, la loi de Rayleigh fournit toujours les meilleurs résultats quand le niveau de bruit est élevé.

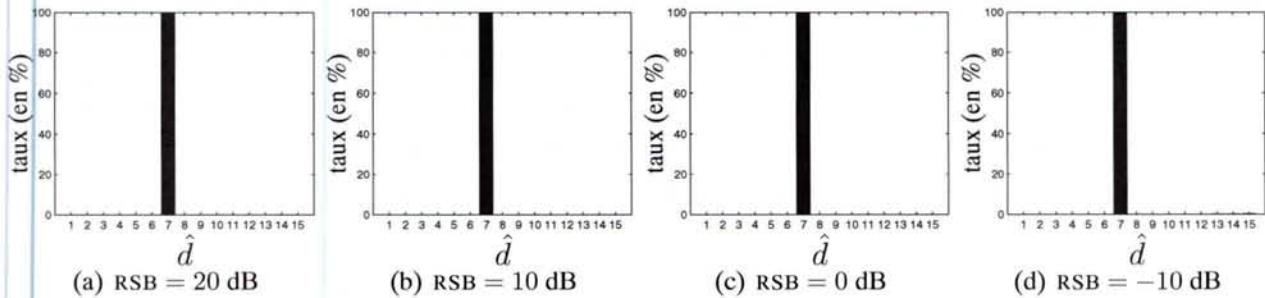


FIG. 4.9 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ .

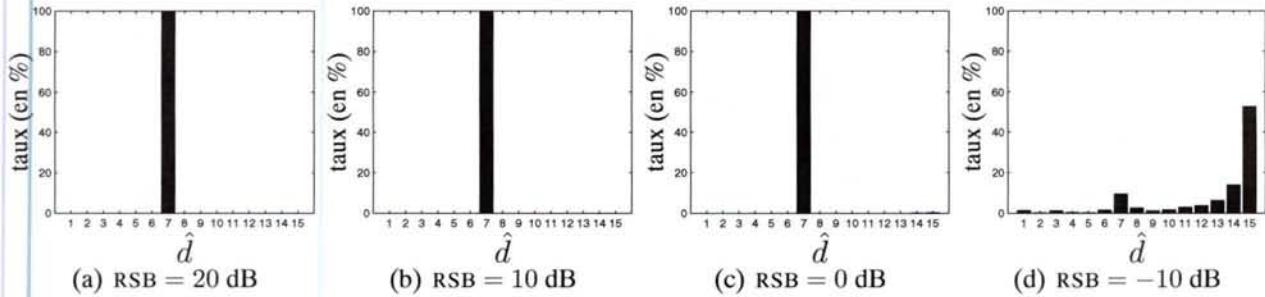


FIG. 4.10 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB l'entrée est une SBPA et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ .

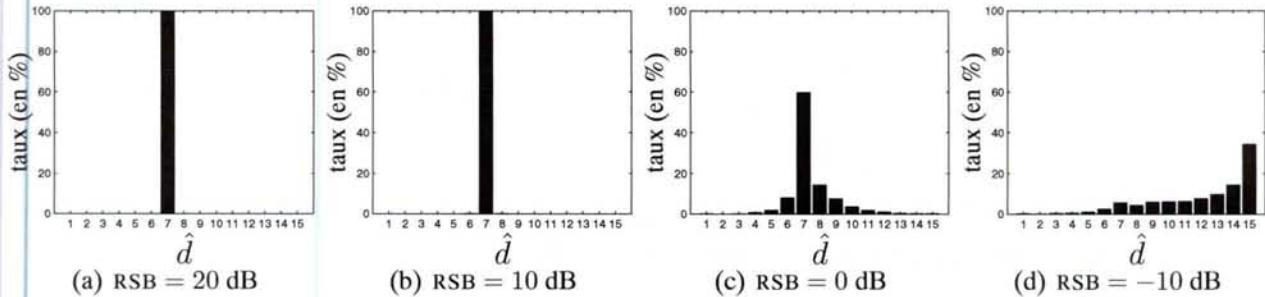


FIG. 4.11 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeu de données du 09/03 et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ .

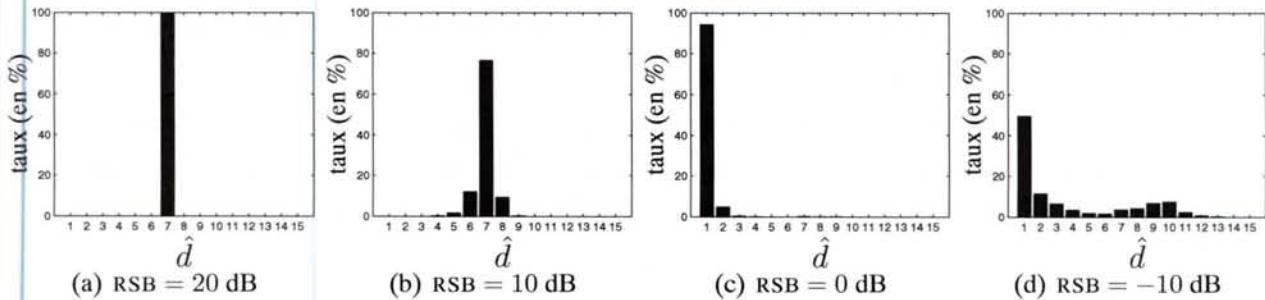


FIG. 4.12 – Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeu de données du 09/03 et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ .

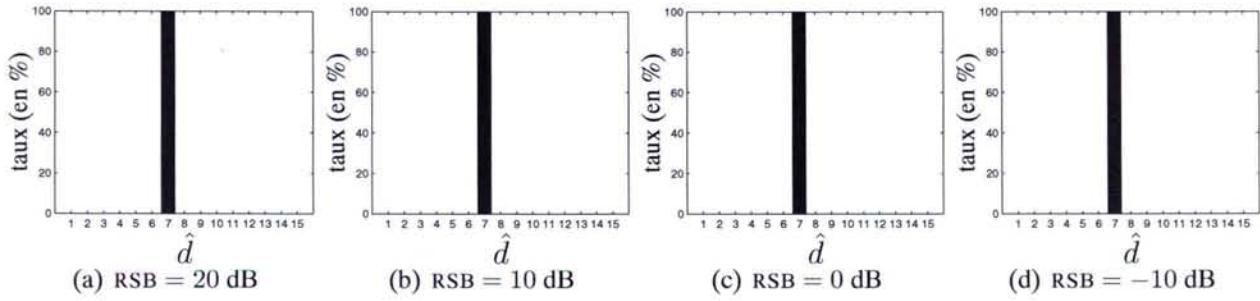


FIG. 4.13 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

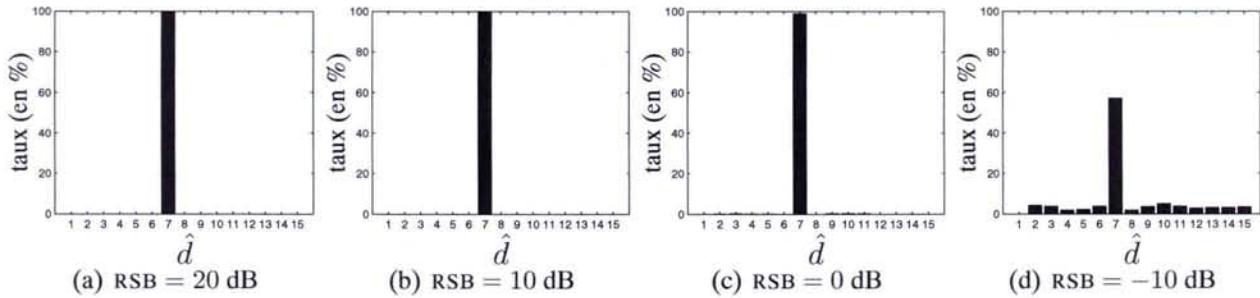


FIG. 4.14 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

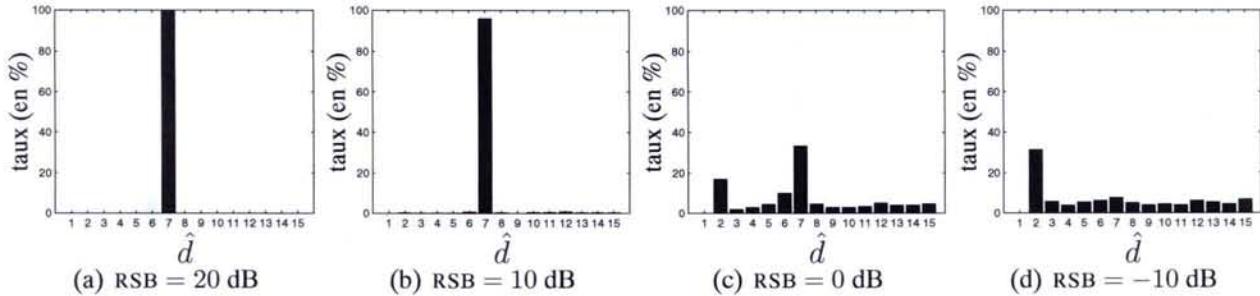


FIG. 4.15 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeu de donnée du 09/03 et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

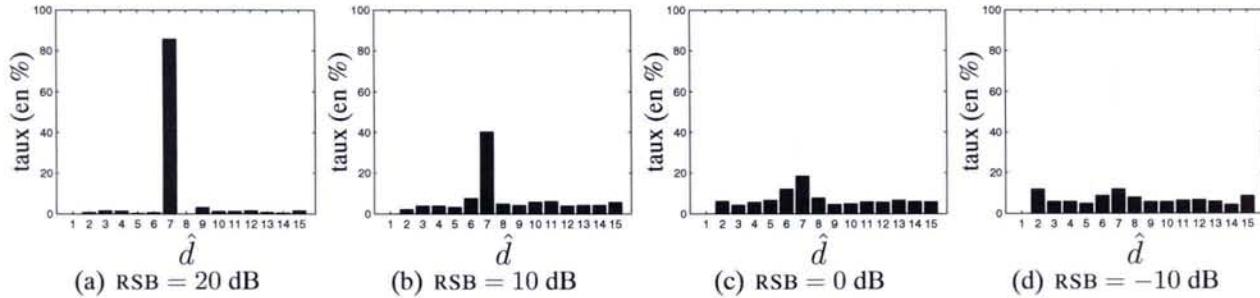


FIG. 4.16 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeu de donnée du 09/03 et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

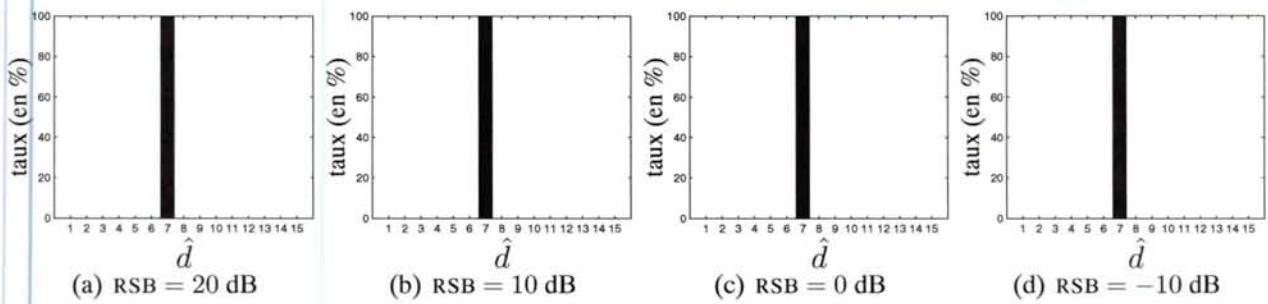


FIG. 4.17 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

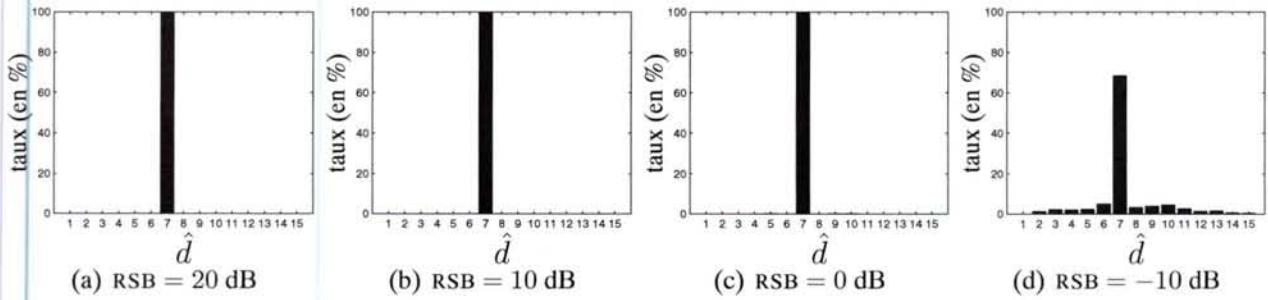


FIG. 4.18 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

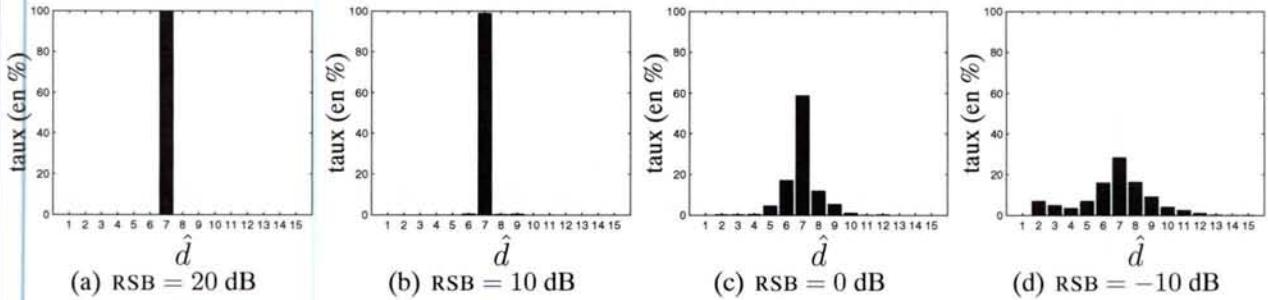


FIG. 4.19 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeu de donnée du 09/03 et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

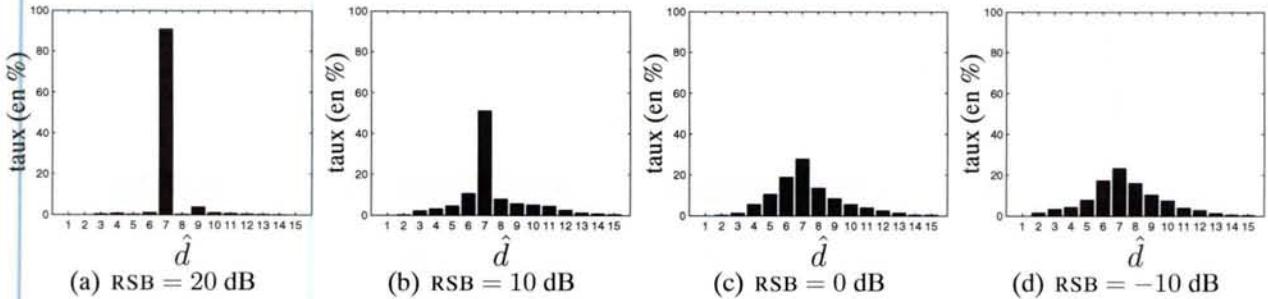


FIG. 4.20 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeu de donnée du 09/03 et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

En conclusion, de manière générale, l'estimateur du MAPC conduit à des résultats meilleurs que ceux de l'approche directe. De plus, cet estimateur est plus robuste au modèle du bruit. Toutefois, ces performances sont nécessairement conditionnées par un « bon » réglage des hyperparamètres. En pratique, il s'avère même difficile de connaître leur ordre de grandeur. La suite de ce chapitre est consacrée à la mise en œuvre de l'estimation des hyperparamètres de manière non supervisée.

### 4.3.3 Estimation des hyperparamètres

L'hyperparamètre  $\sigma_d^2$  peut être fixé. Rappelons que si aucune connaissance *a priori* sur le retard n'est disponible, il suffit de considérer une loi *a priori* uniforme qui conduit au critère de l'équation (4.46). En revanche, les hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  doivent être estimés à partir des informations disponibles.

#### 4.3.3.1 Principe

Les hyperparamètres constituent un second niveau de description du problème indispensable à la résolution du premier niveau constitué par les paramètres eux-mêmes [DEMOMENT et IDIER (1999)]. Ce dernier infère sur les objets, dans notre cas  $\mathbf{h}$  et  $d$ , pour une valeur des hyperparamètres donnée au travers de la densité de probabilité *a posteriori* de l'équation (4.32). Le second niveau infère sur les hyperparamètres grâce à une relation analogue<sup>7</sup> :

$$p(\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \frac{p(\mathbf{y} | \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2, \mathbf{U}, \sigma_d^2) p(\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}. \quad (4.48)$$

Si la fonction de vraisemblance  $p(\mathbf{y} | \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2, \mathbf{U}, \sigma_d^2)$  (correspondant à la vraisemblance généralisée du premier niveau, c'est-à-dire le terme de normalisation, où  $\sigma_w^2$  et  $\sigma_d^2$  sont devenus des variables) est suffisamment « piquée », l'influence de la densité de probabilité *a priori*  $p(\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{U}, \sigma_d^2)$  est négligeable, et l'estimation des hyperparamètres peut être résolue par la maximisation de cette vraisemblance. Cependant, il faut pour cela résoudre un problème de marginalisation :

$$p(\mathbf{y} | \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \int_{\mathbf{h}, d} p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2) d\mathbf{h} dd. \quad (4.49)$$

Une telle intégrale conduit rarement à un résultat explicite. Pour contourner cette difficulté, on peut introduire des « variables cachées »  $\mathbf{z}$ , complétant les observations  $\mathbf{y}$ , de sorte que la nouvelle vraisemblance  $p(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2, \mathbf{U}, \sigma_d^2)$  soit plus simple à calculer. Il est alors nécessaire de maximiser des espérances conditionnelles par des techniques itératives, déterministes ou stochastiques (algorithmes EM et SEM) [DEMPSTER *et al.* (1977) ; BILMES (1997) ; GREEN (1990)]. Toutefois, on peut aussi remarquer que la densité de probabilité *a posteriori* conjointe des paramètres  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2) p(\sigma_{h_D}^2) p(\sigma_w^2)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}, \quad (4.50)$$

résume toute l'information des deux niveaux d'inférence. Il est donc intéressant de la maximiser conjointement par rapport aux paramètres et aux hyperparamètres.

<sup>7</sup>Les notations des densités de probabilité ont été allégées pour des raisons de lisibilité.

### 4.3.3.2 Méthode d'optimisation du critère

Le problème d'optimisation peut être implanté par un algorithme itératif maximisant successivement la densité de probabilité  $p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2)$  par rapport aux paramètres  $\mathbf{h}$ ,  $d$ , puis par rapport aux hyperparamètres  $\sigma_w^2$  et  $\sigma_d^2$  :

$$\begin{cases} (\widehat{\sigma}_{h_D}^2)^{(i)}, \widehat{\sigma}_w^2)^{(i)}) = \arg \max_{\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2} p(\widehat{\mathbf{h}}^{(i-1)}, \widehat{d}^{(i-1)}, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2), \\ (\widehat{\mathbf{h}}^{(i)}, \widehat{d}^{(i)}) = \arg \max_{\mathbf{h}, d} p(\mathbf{h}, d, \widehat{\sigma}_{h_D}^2)^{(i)}, \widehat{\sigma}_w^2)^{(i)} | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2). \end{cases} \quad (4.51)$$

Si on suppose que les hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  suivent une loi *a priori* uniforme (le choix d'une autre loi *a priori* non informative est possible), alors :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}. \quad (4.52)$$

Le critère à minimiser, correspondant à l'anti-log des termes, fonctions des objets  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$ ,  $\sigma_w^2$ , de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe, est proportionnel à :

$$J_\sigma^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \propto -\ln [p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2)], \quad (4.53)$$

et vaut donc :

$$\boxed{J_\sigma^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = \frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 + \frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma_w^2) + \frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_d\mathbf{h}\|^2 + \frac{M}{2} \ln(2\pi\sigma_{h_D}^2) + \frac{d^2}{2\sigma_d^2} - \ln(d).} \quad (4.54)$$

A  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  fixés, minimiser ce critère revient à minimiser celui de l'équation (4.45). A  $\mathbf{h}$ ,  $d$  fixés, on a :

$$\frac{\partial J_\sigma^{\text{MAPC}}}{\partial \sigma_{h_D}^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = -\frac{1}{2(\sigma_{h_D}^2)^2} \|\mathbf{D}_d\mathbf{h}\|^2 + \frac{M}{2} \frac{1}{\sigma_{h_D}^2}, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial J_\sigma^{\text{MAPC}}}{\partial \sigma_w^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = -\frac{1}{2(\sigma_w^2)^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 + \frac{N}{2} \frac{1}{\sigma_w^2}, \quad (4.56)$$

d'où :

$$\frac{\partial J_\sigma^{\text{MAPC}}}{\partial \sigma_{h_D}^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = 0 \implies \sigma_{h_D}^2 = \frac{\|\mathbf{D}_d\mathbf{h}\|^2}{M}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial J_\sigma^{\text{MAPC}}}{\partial \sigma_w^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = 0 \implies \sigma_w^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2}{N}, \quad (4.58)$$

et :

$$\frac{\partial^2 J_\sigma^{\text{MAPC}}}{\partial (\sigma_{h_D}^2)^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \Big|_{\sigma_{h_D}^2 = \frac{\|\mathbf{D}_d\mathbf{h}\|^2}{M}} = \frac{M^3}{2\|\mathbf{D}_d\mathbf{h}\|^4} > 0, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial^2 J_\sigma^{\text{MAPC}}}{\partial (\sigma_w^2)^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \Big|_{\sigma_w^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2}{N}} = \frac{N^3}{2\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^4} > 0, \quad (4.60)$$

donc :

$$\widehat{\sigma}_{h_D}^2(\mathbf{h}, d, \sigma_w^2) = \arg \min_{\sigma_{h_D}^2} J_\sigma^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = \frac{\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2}{M}, \quad (4.61)$$

$$\widehat{\sigma}_w^2(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2) = \arg \min_{\sigma_w^2} J_\sigma^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U} \mathbf{h}\|^2}{N}. \quad (4.62)$$

Par conséquent, l'algorithme itératif décrit par l'équation (4.51), conduit à l'algorithme 4.2, étant donné la procédure d'estimation de  $\mathbf{h}$  et de  $d$  (ALGO. 4.1).

1. Initialisation :  $i = 0$ ,  $\widehat{\mathbf{h}}^{(i)} = \mathbf{h}_{\text{init}}$ ,  $\widehat{d}^{(i)} = d_{\text{init}}$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$ .

2. Itération :  $i = i + 1$ .

◊ Estimation de  $\sigma_{h_D}^2$  :  $\widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i)} = \frac{\|\mathbf{D}_{\widehat{d}^{(i-1)}} \widehat{\mathbf{h}}^{(i-1)}\|^2}{M}$ .

◊ Estimation de  $\sigma_w^2$  :  $\widehat{\sigma}_w^{2(i)} = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U} \widehat{\mathbf{h}}^{(i-1)}\|^2}{N}$ .

◊ Pour  $d^{(i)} = d_{\min}, d_{\min} + 1, \dots, d_{\max}$ ,

a) formation de la matrice  $\mathbf{D}_{d^{(i)}}$ ,

b) estimation de  $\mathbf{h}^{(i)}$  à  $d^{(i)}$  fixé :

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\widehat{\sigma}_w^{2(i)}}{\widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i)}} \mathbf{D}_{d^{(i)}}^T \mathbf{D}_{d^{(i)}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y},$$

c) calcul du critère :

$$J^{\text{MAPC}}(\widehat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}), d^{(i)}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{U} \widehat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)})\|^2 + \frac{\widehat{\sigma}_w^{2(i)}}{\widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i)}} \|\mathbf{D}_{d^{(i)}} \widehat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)})\|^2 + \widehat{\sigma}_w^{2(i)} \left( \frac{d^{(i)}{}^2}{\sigma_d^2} - 2 \ln(d^{(i)}) \right).$$

◊  $\widehat{d}^{(i)} = \arg \min_{\{d^{(i)} \in \mathbb{N}^*, d_{\min} \leq d^{(i)} \leq d_{\max}\}} J^{\text{MAPC}}(\widehat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}), d^{(i)})$ .

◊  $\widehat{\mathbf{h}}^{(i)} = \widehat{\mathbf{h}}^{(i)}(\widehat{d}^{(i)}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\widehat{\sigma}_w^{2(i)}}{\widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i)}} \mathbf{D}_{\widehat{d}^{(i)}}^T \mathbf{D}_{\widehat{d}^{(i)}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$ .

3. Continuer l'itération (étape 2.) tant que :

$$\left| \frac{\widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i)} - \widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i-1)}}{\widehat{\sigma}_{h_D}^{2(i-1)}} \right| < \epsilon, \text{ et } \left| \frac{\widehat{\sigma}_w^{2(i)} - \widehat{\sigma}_w^{2(i-1)}}{\widehat{\sigma}_w^{2(i-1)}} \right| < \epsilon.$$

4.  $\widehat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}} = \widehat{\mathbf{h}}^{(i)}$  et  $\widehat{d}^{\text{MAPC}} = \widehat{d}^{(i)}$ .

ALGO. 4.2 – Estimation de  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$ ,  $\sigma_w^2$ .

### 4.3.3.3 Exemple de simulation

On considère toujours le modèle de l'équation (4.3), dont les valeurs des paramètres sont définis dans le tableau 4.1. L'entrée est une SBPA de longueur maximale  $N = 511$ . Le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  résulte du processus AR de l'équation (4.11) où la variance  $\sigma_e^2$  est fixée de sorte à avoir le RSB désiré. Ces conditions de simulation sont rappelées dans le tableau 4.6. La figure 4.21 représente les RIF théorique et estimées par les estimateurs du MV et du MAPC (ALGO. 4.2) pour des RSB de 20, 0, -5 et -10 dB. L'algorithme du MAPC est initialisé par  $\mathbf{h}_{\text{init}} = \hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}$ ,  $d_{\text{init}} = 10$  et  $\sigma_d$  est fixé à 7. Pour un RSB = 20 dB, les résultats sont acceptables : les estimées de la RIF sont proches de la RIF théorique et  $\hat{d}^{\text{MAPC}} = 7$ . En revanche, lorsque le RSB diminue, on constate que l'estimée de la RIF au sens du MAPC est trop douce, au point que pour un RSB de -10 dB, elle est quasiment nulle : la contrainte de douceur est trop importante. La figure 4.22 représente l'évolution des estimées des objets  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  en fonction des itérations de l'algorithme 4.2 pour un RSB de -10 dB. On constate que l'estimée de  $\sigma_{h_D}^2$  ne cesse de tendre vers 0 et, ainsi, applique une contrainte de douceur de plus en plus forte sur l'estimée de la RIF.

Le problème est que l'application de la méthode du MAPC (avec l'estimateur au sens du MV des hyperparamètres) aux données du bief disponibles conduit dans tous les cas à une contrainte de douceur sur la RIF trop importante. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que ce problème est dû à la dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe, puis nous proposerons une solution à ce problème dans le paragraphe 4.3.3.5.

### 4.3.3.4 Dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe

La dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe (en l'infini) signifie que,  $\forall (\mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N \times M} \times \mathbb{R}^{+*}, \exists (\mathbf{h}^0, d^0, \sigma_{h_D}^{2^0}, \sigma_w^{2^0}) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{D} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  tel que :

$$\lim_{(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \rightarrow (\mathbf{h}^0, d^0, \sigma_{h_D}^{2^0}, \sigma_w^{2^0})} p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = +\infty, \quad (4.63)$$

et donc que, quelles que soient les données, l'estimateur du MAPC (qui maximise la densité de probabilité *a posteriori* conjointe  $p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2)$ ) conduit à la solution  $(\mathbf{h}^0, d^0, \sigma_w^{2^0}, \sigma_{h_D}^{2^0})$ . Reprenons l'expression de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe obtenue à l'Eq. (4.52) :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}, \quad (4.64)$$

où :

$$p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 \right], \quad (4.65)$$

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U} \mathbf{h}\|^2 \right], \quad (4.66)$$

$$p(d | \sigma_d^2) = \frac{d}{\sigma_d^2} \exp \left[ -\frac{d^2}{2\sigma_d^2} \right] \mathbb{I}_{[0, +\infty]}(d). \quad (4.67)$$

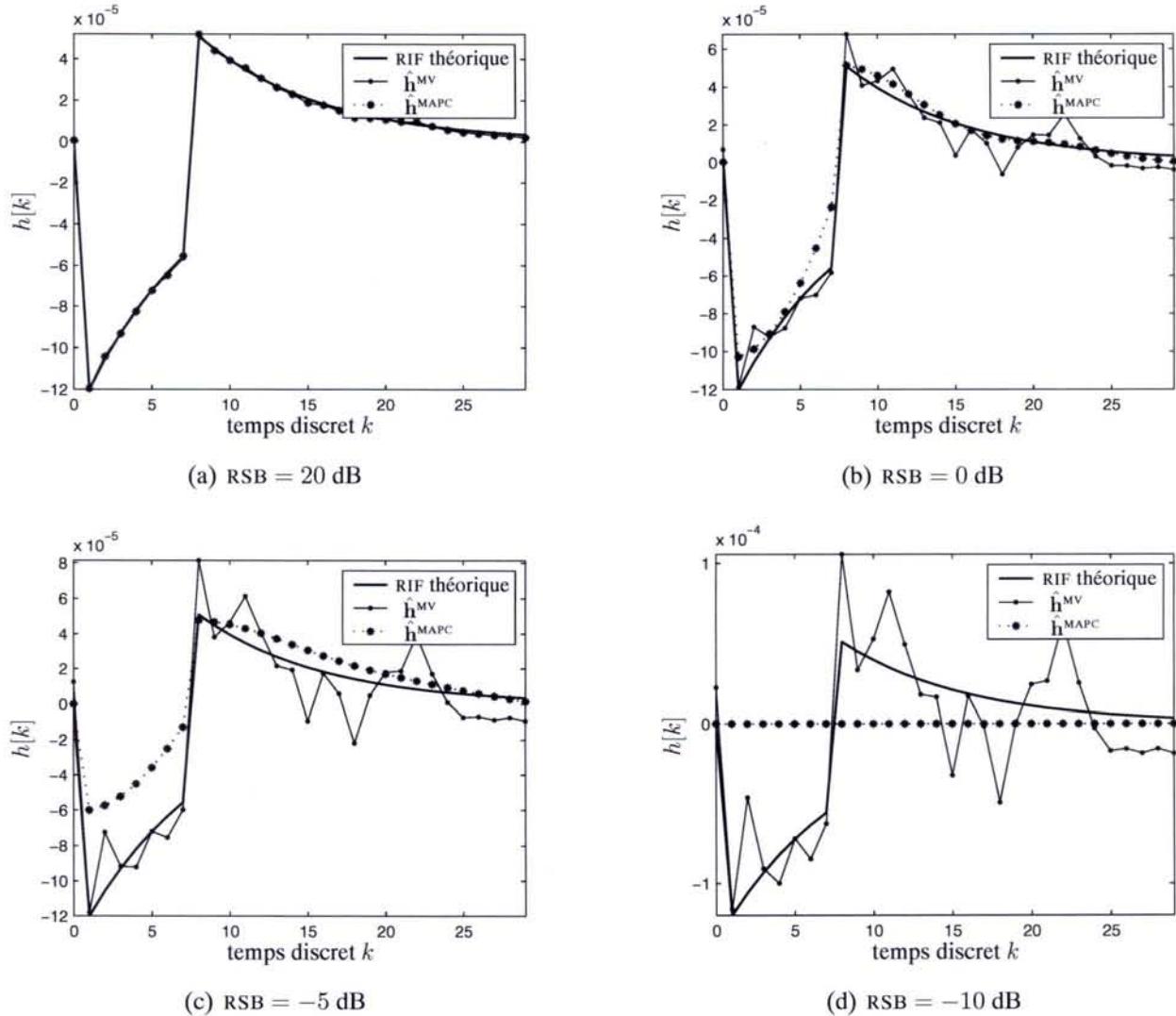


FIG. 4.21 – Estimées d’une RIF par l’estimateur du MAPC inacceptables.

	entrée	bruit	RSB
FIG. 4.21(a)	SBPA	$w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}} e[k]$ avec $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$	20 dB
FIG. 4.21(b)			0 dB
FIG. 4.21(c)			-5 dB
FIG. 4.21(d) et 4.22			-10 dB

TAB. 4.6 – Conditions de simulation des jeux de données d’estimation.

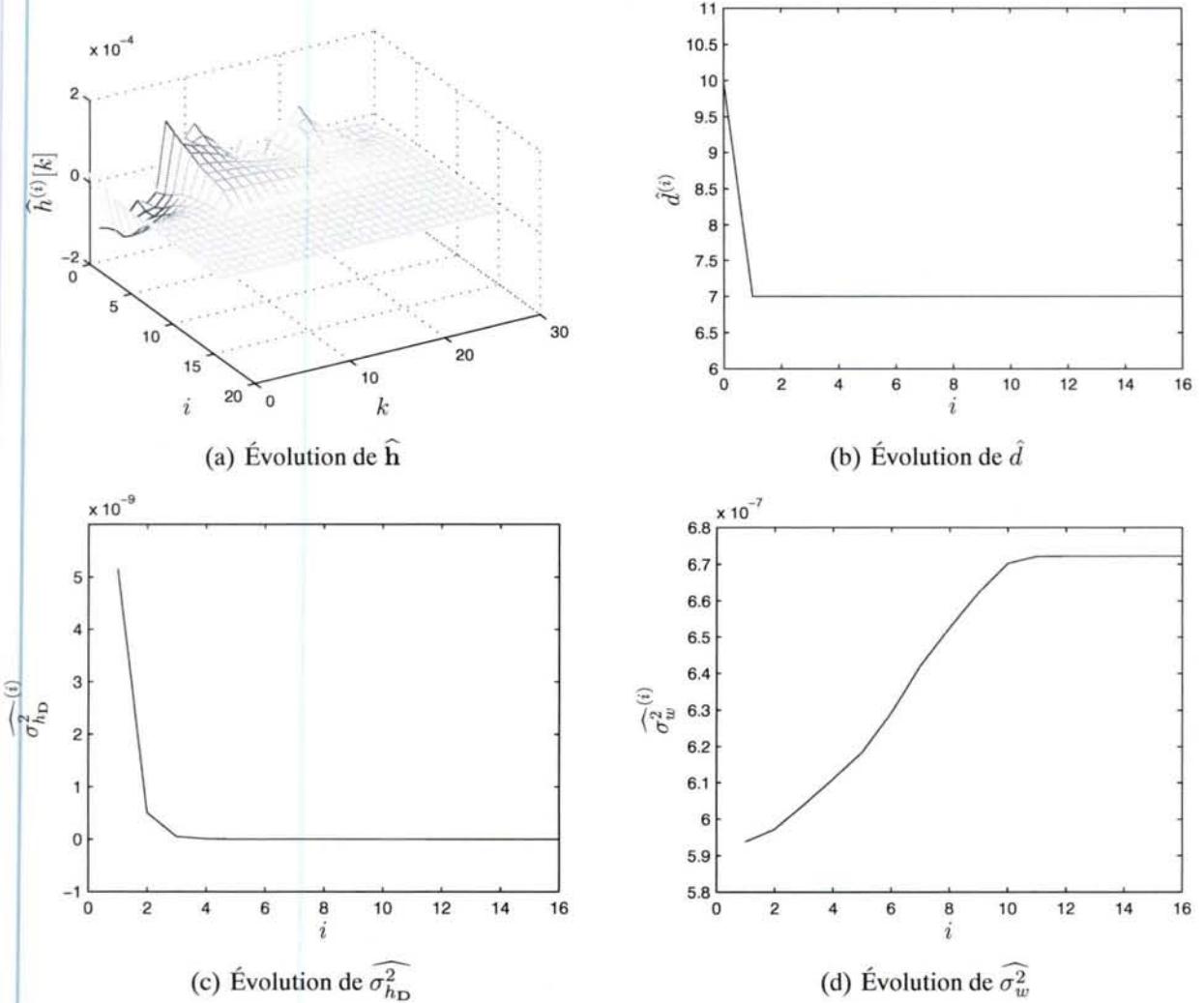


FIG. 4.22 – Estimées des paramètres et des hyperparamètres en fonction du nombre d’itération (RSB = −10 dB).

On montre alors que le quadruplet  $(\sigma_{h_D}^2 = 0, \mathbf{h}^0 = \mathbf{0}, \sigma_w^2 = 0, d^0)$ , où  $\sigma_w^2 \neq 0, \forall d^0 \in \mathbb{D}$ , conduit à une singularité de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe. En effet, dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(\mathbf{h}, \sigma_{h_D}^2) \rightarrow (\mathbf{h}^0 = \mathbf{0}, \sigma_{h_D}^2 = 0)} p(\mathbf{h}|d, \sigma_{h_D}^2) &= \lim_{(\mathbf{h}, \sigma_{h_D}^2) \rightarrow (\mathbf{h}^0 = \mathbf{0}, \sigma_{h_D}^2 = 0)} \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 \right], \\ &= +\infty, \end{aligned} \quad (4.68)$$

alors que les limites des autres termes  $p(\mathbf{y}|\mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2)$  et  $p(d|\sigma_d^2)$  sont finies et non nulles. Par conséquent, un tel quadriplet conduit à la dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe. De plus, on peut montrer que si  $\sigma_w^2 = 0$ , alors :

$$\lim_{(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \rightarrow (\mathbf{h}^0 = \mathbf{0}, d^0, \sigma_{h_D}^2 = 0, \sigma_w^2 = 0)} p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = 0. \quad (4.69)$$

Ce qui signifie qu'en l'absence de bruit, le quadriplet  $(\sigma_{h_D}^2 = 0, \mathbf{h}^0 = \mathbf{0}, \sigma_w^2 = 0, d^0)$ ,  $\forall d^0 \in \mathbb{D}$ , ne conduit pas à une singularité. Enfin, le couple  $(\sigma_w^2 = 0, \mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h} = \mathbf{0})$  constitue également une singularité de la fonction de vraisemblance, mais en pratique ce cas n'est pas possible car les

données sont toujours sujettes à incertitudes.

Nous avons vu dans les simulations précédentes (§ 4.3.3.3) que l'estimateur du MAPC conduit à une solution nulle seulement quand le RSB est très faible. Or d'après l'interprétation précédente celle-ci devrait être nulle quel que soit  $\sigma_w^2 \neq 0$ . En fait, ceci est dû à la présence d'un maximum local vers lequel converge la méthode d'optimisation. Pour illustrer ce phénomène, on considère l'exemple suivant.

On considère toujours le modèle de l'équation (4.3), dont les valeurs des paramètres sont définis dans le tableau 4.1. L'entrée est une SBPA de longueur maximale  $N = 511$ . Le bruit  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  résulte du processus AR de l'équation (4.11). Ces conditions de simulation sont rappelées dans le tableau 4.7.

Puisque le phénomène de dégénérescence est indépendant de  $d$ , la valeur du retard est fixée à sa valeur vraie  $d_0 = 7$ . D'après l'équation (4.54), le critère à maximiser par rapport aux hyperparamètres est :

$$J_d(\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = \underbrace{-\frac{M}{2} \ln(\sigma_{h_D}^2)}_{J_{\sigma_{h_D}^2} \text{ a priori sur } h} - \underbrace{\frac{\|\mathbf{D}_d \hat{\mathbf{h}}\|^2}{2\sigma_{h_D}^2} - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{h}}\|^2}{2\sigma_w^2}}_{J_{\sigma_w^2} \text{ information sur les données}} - \frac{N}{2} \ln(\sigma_w^2), \quad (4.70)$$

où

$$\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}(\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{h_D}^2} \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}. \quad (4.71)$$

Notons que lorsque  $\sigma_{h_D}^2 \rightarrow 0$ , alors  $\hat{\mathbf{h}} \rightarrow \mathbf{0}$ . Par conséquent, à  $\sigma_w^2$  fixé (non nul), ce critère dégénère puisque l'on a :

$$\lim_{\sigma_{h_D}^2 \rightarrow 0} J_d(\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = +\infty. \quad (4.72)$$

	entrée	bruit	RSB
FIG. 4.23(a)	SBPA	$w[k] = \frac{1}{1-aq^{-1}} e[k]$ avec $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$	20 dB
FIG. 4.23(b)			0 dB
FIG. 4.23(c)			-5 dB
FIG. 4.23(d)			-10 dB

TAB. 4.7 – Conditions de simulation des jeux de données d'estimation.

Les figures 4.23 représentent l'évolution de ce critère (centré<sup>8</sup>) et de ses composantes  $J_{\sigma_{h_D}^2}$  et  $J_{\sigma_w^2}$  (également centrées), en fonction de  $\sigma_{h_D}^2$  pour différents RSB, c'est-à-dire pour différentes valeurs

<sup>8</sup>Le terme « centré » signifie que l'on a retranché la valeur moyenne au critère. Ceci n'a naturellement aucune incidence sur l'argument du maximum du critère.

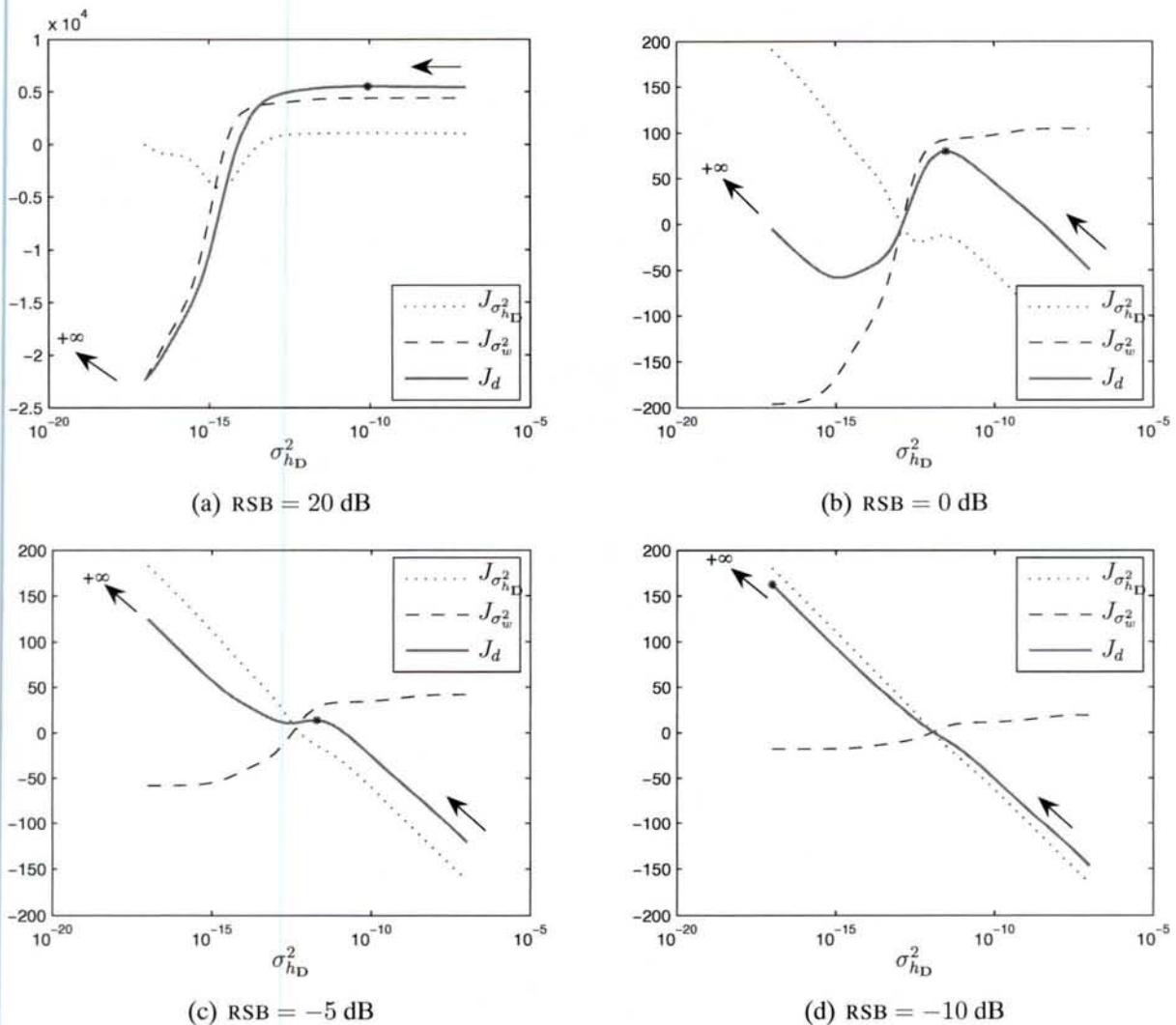


FIG. 4.23 – Évolution du critère en fonction de  $\sigma_{h_D}^2$  pour différents RSB.

de  $\sigma_w^2$ . Étant donné que l'algorithme d'optimisation est initialisé par  $\mathbf{h}_{\text{init}} = \hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}$ , la première estimée  $\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(1)}$  est relativement élevée. Par conséquent, l'algorithme parcourt le critère de la gauche vers la droite et va converger vers le point représenté par une étoile. Dans les cas où le RSB est relativement élevé, il d'agit d'un maximum local (FIG. 4.23(a)–4.23(c)). Toutefois, lorsque le RSB diminue, ce maximum finit par disparaître (FIG. 4.23(d)) car  $J_{\sigma_w^2}$  s'aplatis tandis que  $J_{\sigma_{h_D}^2}$  tend vers une droite de pente  $-M/2$  (en échelle logarithmique). L'estimée tend alors vers 0 (point de la dégénérescence).

La dégénérescence de la fonction de vraisemblance dans le cadre de l'estimation des paramètres d'un mélange gaussien est un problème d'optimisation connu [KIEFER et WOLFOWITZ (1956)]. Dans ce contexte, une solution consiste à pénaliser la fonction de vraisemblance par une densité de probabilité *a priori* de type gamma inverse sur la variance du bruit, ce qui élimine les singularités et rend ainsi le problème bien–posé [RIDOLFI et IDIER (1999) ; SNOUSSI et MOHAMMAD-DJAFARI (2002)]. Nous allons nous inspirer de cette solution pour résoudre la dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe.

### 4.3.3.5 Solution à la dégénérescence

Une solution au problème de dégénérescence consiste à pénaliser la densité de probabilité *a posteriori* conjointe de l'équation (4.54) par une densité de probabilité *a priori* de type gamma inverse sur la variance  $\sigma_{h_D}^2$  :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2, \alpha_h, \beta_h) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2) p(\sigma_{h_D}^2 | \alpha_h, \beta_h)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}, \quad (4.73)$$

avec :

$$p(\sigma_{h_D}^2 | \alpha_h, \beta_h) = \frac{\beta_h^{\alpha_h}}{\Gamma(\alpha_h)} \frac{\exp[-\frac{\beta_h}{\sigma_{h_D}^2}]}{(\sigma_{h_D}^2)^{\alpha_h+1}} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(\sigma_{h_D}^2), \quad (4.74)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma,  $\mathbb{I}_{[0, +\infty[}(\sigma_{h_D}^2)$  est la fonction indicatrice qui vaut 1 si  $\sigma_{h_D}^2 \in [0, +\infty[$  et 0 sinon. Les deux nouveaux hyperparamètres  $\alpha_h$  et  $\beta_h$  (tous les deux dans  $\mathbb{R}^{++}$ ) sont à déterminer.

On a alors :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2, \alpha_h, \beta_h) &\propto \frac{1}{(\sigma_w^2)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2\right] \\ &\times \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2)^{M/2+\alpha_h+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} (\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 + 2\beta_h)\right] \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(\sigma_{h_D}^2) \\ &\times \frac{d}{\sigma_d^2} \exp\left[-\frac{d^2}{2\sigma_d^2}\right] \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(d), \end{aligned} \quad (4.75)$$

et il n'y a pas de dégénérescence car :

$$\lim_{(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \rightarrow (\mathbf{h}^0 = \mathbf{0}, d^0, \sigma_{h_D}^2 = 0, \sigma_w^2 = 0)} p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2, \alpha_h, \beta_h) = 0. \quad (4.76)$$

L'optimisation peut être réalisée comme précédemment, c'est-à-dire par l'algorithme itératif de l'équation (4.51), maximisant successivement la densité  $p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2, \alpha_h, \beta_h)$  par rapport aux paramètres  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et par rapport aux hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$ ,  $\sigma_w^2$ . Le critère à minimiser, fonction des objets  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe, est proportionnel à :

$$J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) \propto -\ln p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2, \alpha_h, \beta_h), \quad (4.77)$$

et vaut donc :

$$\begin{aligned} J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) &= \frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2 + \frac{N}{2} \ln(\sigma_w^2) \\ &+ \frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} (\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 + 2\beta_h) + \frac{M + 2(\alpha_h + 1)}{2} \ln(\sigma_{h_D}^2) \\ &+ \frac{d^2}{2\sigma_d^2} - \ln(d). \end{aligned} \quad (4.78)$$

A  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  fixés, ce critère correspond à celui de l'équation (4.36). Son optimisation s'effectue donc par la même procédure. A  $\mathbf{h}$  et  $d$  fixés, on montre que :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{h_D}^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_w^2) &= \arg \min_{\sigma_{h_D}^2} J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = \frac{\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 + 2\beta_h}{M + 2(\alpha_h + 1)}, \\ \widehat{\sigma_w^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2) &= \arg \min_{\sigma_w^2} J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{Uh}\|^2}{N}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Par conséquent, l'algorithme itératif 4.2 est complété pour prendre la forme de l'ALGO. 4.3.

- 
1. Initialisation :  $i = 0$ ,  $\hat{\mathbf{h}}^{(i)} = \hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}$ ,  $\hat{d}^{(i)} = d_{\text{init}}$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$ ,

$$\alpha_h = M/2, \beta_h = \|\mathbf{D}\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}\|^2/2.$$

2. Itération :  $i = i + 1$ .

$$\diamond \text{Estimation de } \sigma_{h_D}^2 : \widehat{\sigma}_{h_D}^2 = \frac{\|\mathbf{D}_{\hat{d}^{(i-1)}} \hat{\mathbf{h}}^{(i-1)}\|^2 + 2\beta_h}{M + 2(\alpha_h + 1)}.$$

$$\diamond \text{Estimation de } \sigma_w^2 : \widehat{\sigma}_w^2 = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{h}}^{(i-1)}\|^2}{N}.$$

$\diamond$  Pour  $d^{(i)} = d_{\min}, d_{\min} + 1, \dots, d_{\max}$ ,

a) formation de la matrice  $\mathbf{D}_{d^{(i)}}$ ,

b) estimation de  $\mathbf{h}^{(i)}$  à  $d^{(i)}$  fixé :

$$\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\widehat{\sigma}_w^2}{\widehat{\sigma}_{h_D}^2} \mathbf{D}_{d^{(i)}}^T \mathbf{D}_{d^{(i)}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y},$$

c) calcul du critère :

$$J^{\text{MAPC}}(\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}), d^{(i)}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)})\|^2 + \frac{\widehat{\sigma}_w^2}{\widehat{\sigma}_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_{d^{(i)}} \hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)})\|^2 + \widehat{\sigma}_w^2 \left( \frac{d^{(i)}_{}^2}{\sigma_d^2} - 2 \ln(d^{(i)}) \right).$$

$$\diamond \hat{d}^{(i)} = \arg \min_{\{d^{(i)} \in \mathbb{N}^*, d_{\min} \leq d^{(i)} \leq d_{\max}\}} J^{\text{MAPC}}(\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}), d^{(i)}).$$

$$\diamond \hat{\mathbf{h}}^{(i)} = \hat{\mathbf{h}}^{(i)}(\hat{d}^{(i)}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\widehat{\sigma}_w^2}{\widehat{\sigma}_{h_D}^2} \mathbf{D}_{\hat{d}^{(i)}}^T \mathbf{D}_{\hat{d}^{(i)}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}.$$

3. Continuer l'itération (étape 2.) tant que :

$$\left| \frac{\widehat{\sigma}_{h_D}^{(i)} - \widehat{\sigma}_{h_D}^{(i-1)}}{\widehat{\sigma}_{h_D}^{(i-1)}} \right| < \epsilon, \text{ et } \left| \frac{\widehat{\sigma}_w^{(i)} - \widehat{\sigma}_w^{(i-1)}}{\widehat{\sigma}_w^{(i-1)}} \right| < \epsilon.$$

4.  $\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}} = \hat{\mathbf{h}}^{(i)}$  et  $\hat{d}^{\text{MAPC}} = \hat{d}^{(i)}$ .

---

ALGO. 4.3 – Estimation de  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$ ,  $\sigma_w^2$  avec une loi *a priori* gamma inverse sur  $\sigma_{h_D}^2$ .

Il reste maintenant à déterminer les hyperparamètres  $\alpha_h$  et  $\beta_h$  de la densité de probabilité *a priori* de  $\sigma_{h_D}^2$ . Reprenons l'expression de la densité de probabilité *a priori* de  $\mathbf{h}$  :

$$p(\mathbf{h}|d, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2}{2\sigma_{h_D}^2} \right], \quad (4.80)$$

de laquelle on déduit la fonction de vraisemblance de  $\sigma_{h_D}^2$  :

$$p(\hat{\mathbf{h}}|\hat{d}, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{D}_{\hat{d}}\hat{\mathbf{h}}\|^2}{2\sigma_{h_D}^2}\right]. \quad (4.81)$$

Si l'on considère la statistique  $\nu = \|\mathbf{D}_{\hat{d}}\hat{\mathbf{h}}\|^2$ , alors l'expression précédente est proportionnelle à :

$$p(\hat{\mathbf{h}}|\hat{d}, \sigma_{h_D}^2) \propto \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp\left[-\frac{\nu}{2\sigma_{h_D}^2}\right]. \quad (4.82)$$

La densité de probabilité *a posteriori* vérifie alors les relations suivantes :

$$p(\sigma_{h_D}^2|\hat{\mathbf{h}}, \hat{d}, \alpha_h, \beta_h) \propto p(\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}|d = \hat{d}, \sigma_{h_D}^2)p(\sigma_{h_D}^2|\alpha_h, \beta_h), \quad (4.83)$$

$$\propto \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp\left[-\frac{\nu}{2\sigma_{h_D}^2}\right] \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2)^{\alpha_h+1}} \exp\left[-\frac{\beta_h}{\sigma_{h_D}^2}\right], \quad (4.84)$$

$$\propto \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2)^{M/2+\alpha_h+1}} \exp\left[-\frac{\nu/2 + \beta_h}{\sigma_{h_D}^2}\right]. \quad (4.85)$$

Il s'agit donc d'une loi gamma inverse de paramètres  $\alpha_0 = M/2 + \alpha_h$  et  $\beta_0 = \nu/2 + \beta_h$ , et on a donc :

$$p(\sigma_{h_D}^2|\nu) \propto \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2)^{\alpha_0+1}} \exp\left[-\frac{\beta_0}{\sigma_{h_D}^2}\right]. \quad (4.86)$$

Par conséquent, les paramètres  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  peuvent être déterminés en fonction de l'allure de la densité de probabilité  $p(\sigma_{h_D}^2|\nu)$  désirée<sup>9</sup>. La figure 4.24 représente cette densité de probabilité relativement à  $\nu$ , c'est-à-dire :

$$p\left(\frac{\sigma_{h_D}^2}{\nu}|\nu\right) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}/\nu^{\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2/\nu)^{\alpha_0+1}} \exp\left[-\frac{\beta_0/\nu}{\sigma_{h_D}^2/\nu}\right], \quad (4.87)$$

pour  $\nu = 10^{-8}$ ,  $\alpha_0 = M$  et  $\beta_0 = M\nu$ . Notons que les axes sont en échelle logarithmique. On a alors  $\alpha_h = M/2$  et  $\beta_h = M\nu - \nu/2$ . La densité de probabilité *a priori* de  $\sigma_{h_D}^2$  obtenue est représentée à la figure 4.24(b).

Le problème est que la valeur de  $\nu$  n'est pas connue. Au mieux, il est possible de déterminer la statistique<sup>10</sup>  $\nu^{MV} = \|\mathbf{D}\hat{\mathbf{h}}^{MV}\|^2$  où, nous le rappelons,  $\hat{\mathbf{h}}^{MV}$  représente la connaissance de  $\mathbf{h}$  la plus fidèle aux données. Cependant, étant donné que la variance de l'estimateur  $\hat{\mathbf{h}}^{MV}$  est élevée à cause du mauvais conditionnement du problème d'inversion (voir § 4.2.2.1), on a  $\nu \ll \nu^{MV}$ . La figure 4.25 représente la densité de probabilité relativement à  $\nu^{MV}$  :

$$p\left(\frac{\sigma_{h_D}^2}{\nu^{MV}}|\nu^{MV}\right) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}/(\nu^{MV})^{\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2/\nu^{MV})^{\alpha_0+1}} \exp\left[-\frac{\beta_0/\nu^{MV}}{\sigma_{h_D}^2/\nu^{MV}}\right], \quad (4.88)$$

pour  $\nu^{MV} = 10^{-8}$ ,  $\alpha_0 = M$  et  $\beta_0 = \nu^{MV}$ . On peut vérifier que cet *a priori* suppose que  $\nu$  est de l'ordre de  $M \cdot 10^{-3} \nu^{MV}$  ( $\approx 10^{-1.5} \nu^{MV}$ ). On a alors  $\alpha_h = M/2$  et  $\beta_h = \nu^{MV}/2$ . La densité de probabilité *a priori* de  $\sigma_{h_D}^2$  obtenue est représentée à la figure 4.25(b).

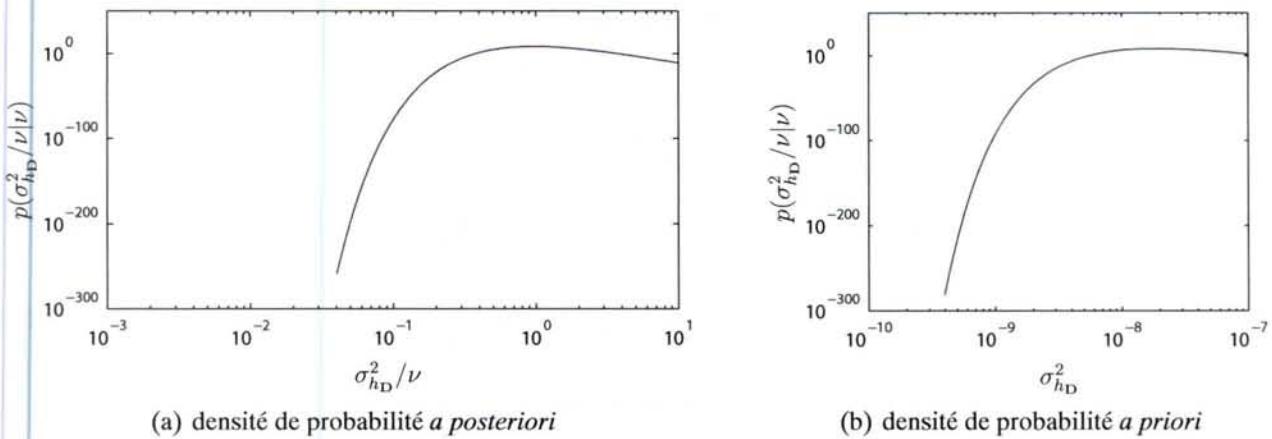


FIG. 4.24 – Densités de probabilité *a posteriori* ( $\alpha_0 = M$  et  $\beta_0 = M\nu$ ) et *a priori* ( $\alpha_h = M/2$  et  $\beta_h = M\nu - \nu/2$ ) de  $\sigma_{hD}^2$  pour  $\nu = 10^{-8}$ .

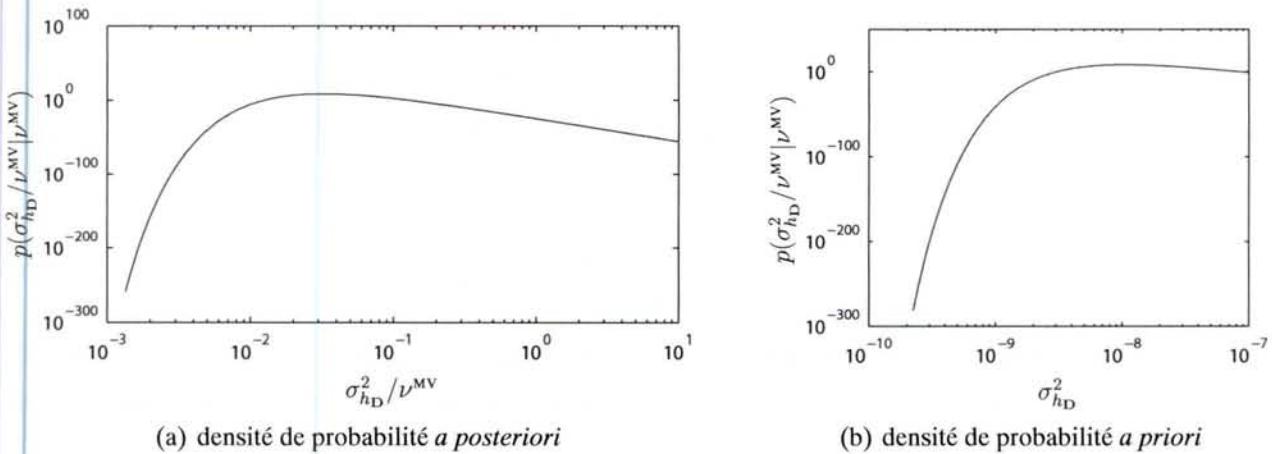


FIG. 4.25 – Densité de probabilité *a posteriori* ( $\alpha_0 = M$  et  $\beta_0 = \nu^{MV}$ ) et *a priori* ( $\alpha_h = M/2$  et  $\beta_h = \nu^{MV}/2$ ) de  $\sigma_{hD}^2$  pour  $\nu^{MV} = 10^{-8} \cdot 10^{-3}/M = 10^{-5}/M$ .

Afin d'observer les résultats obtenus par cette nouvelle approche, la figure 4.26 présente les résultats obtenus à partir des jeux de données déjà utilisés au paragraphe 4.3.3.4. On constate, cette fois-ci, que l'estimée de la RIF n'est pas trop pénalisée par la contrainte de douceur car les hyperparamètres (en particulier  $\sigma_{hD}^2$ ) sont mieux estimés.

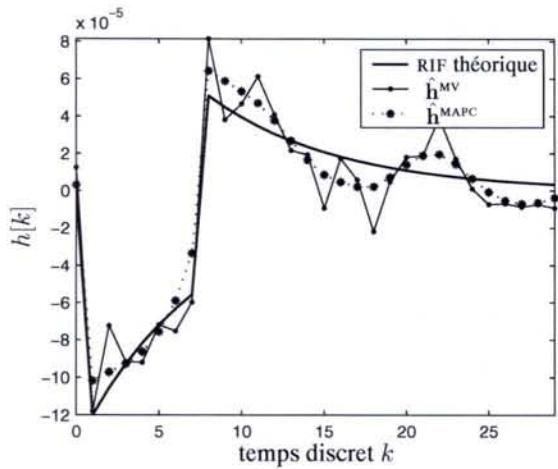
#### 4.3.4 Exemple de simulation (hyperparamètres estimés)

Pour cet exemple de simulation, on reprend les mêmes conditions que celles décrites dans le paragraphe 4.3.2 et récapitulées dans le tableau 4.8.

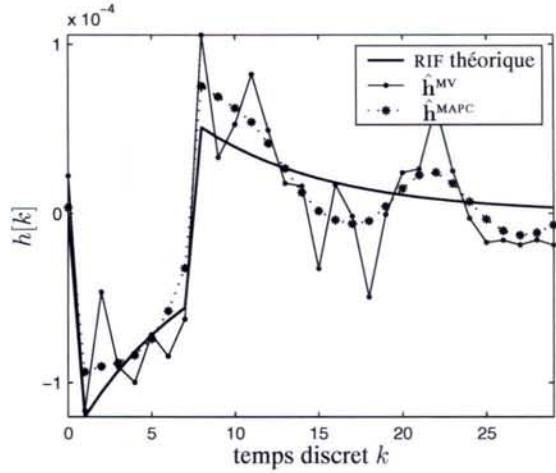
A l'instar du cas où les hyperparamètres sont fixés, l'approche proposée conduit à des résultats très satisfaisants lorsque l'entrée est d'ordre d'excitation persistante élevé, que ce soit avec une

<sup>9</sup>Dans l'état actuel de l'avancée des travaux, ce choix est heuristique, obtenu par essais successifs.

<sup>10</sup>Il s'agit bien de la matrice  $D$  définie à l'équation (4.17). En effet, ceci semble être le choix le moins compromettant pour remplacer la matrice  $D_d$  qui ne peut pas être déterminée, étant donné que la valeur de  $d$  est inconnue.



(a) RSB = -5 dB



(b) RSB = -10 dB

FIG. 4.26 – Estimations d'une RIF par l'estimateur du MAPC avec une loi *a priori* gamma inverse sur  $\sigma_{h_D}^2$ .

Entrée	Bruit	RSB		MAPC loi uniforme hyperpar. fixés	MAPC loi de Rayleigh hyperpar. fixés
SBPA  $N = 511$	$w[k] = \frac{1}{1 - aq^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.27	FIG. 4.31
		10 dB	(b)		
		0 dB	(c)		
		-10 dB	(d)		
	$w[k] = \frac{1 - q^{-1}}{1 - aq^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.28	FIG. 4.32
		10 dB	(b)		
		0 dB	(c)		
		-10 dB	(d)		
donnée du 09/03	$w[k] = \frac{1}{1 - aq^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.29	FIG. 4.33
		10 dB	(b)		
		0 dB	(c)		
		-10 dB	(d)		
	$w[k] = \frac{1 - q^{-1}}{1 - aq^{-1}} e[k]$	20 dB	(a)	FIG. 4.30	FIG. 4.34
		10 dB	(b)		
		0 dB	(c)		
		-10 dB	(d)		

TAB. 4.8 – Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différents résultats présentés aux FIG. 4.27 – 4.34.

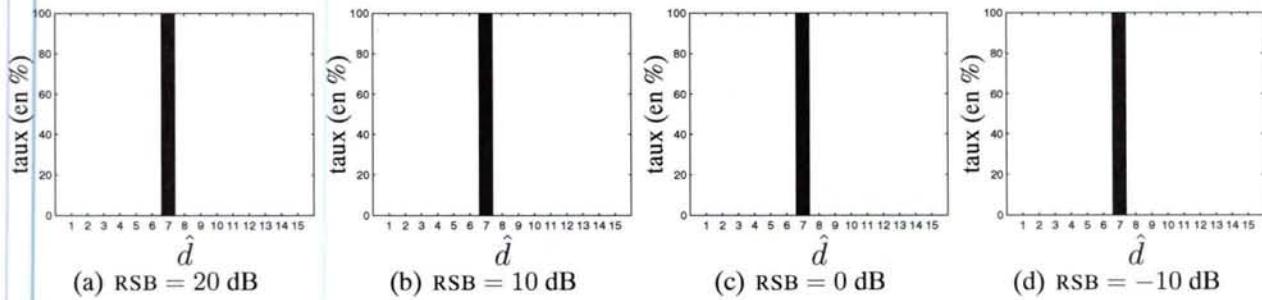


FIG. 4.27 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

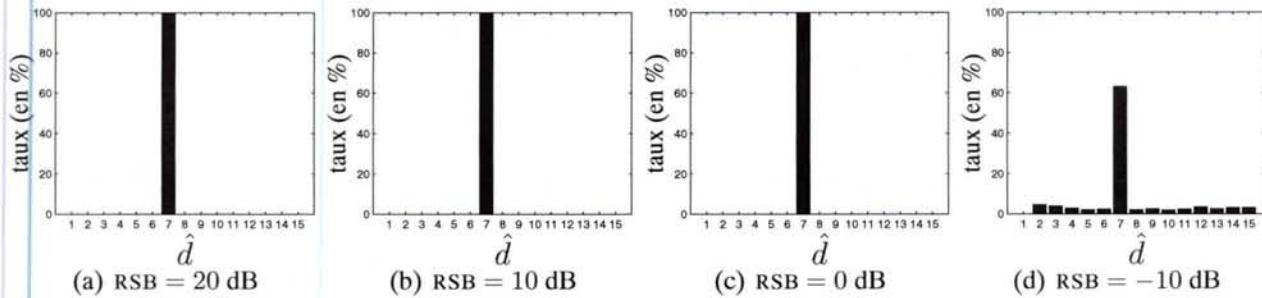


FIG. 4.28 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

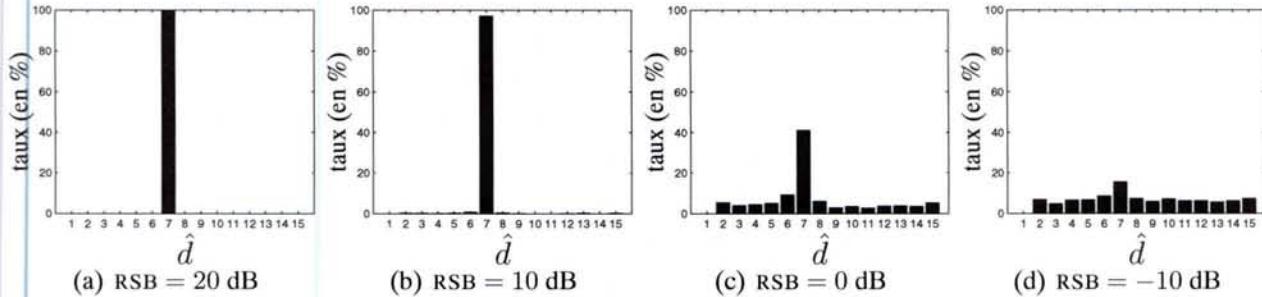


FIG. 4.29 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et  $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

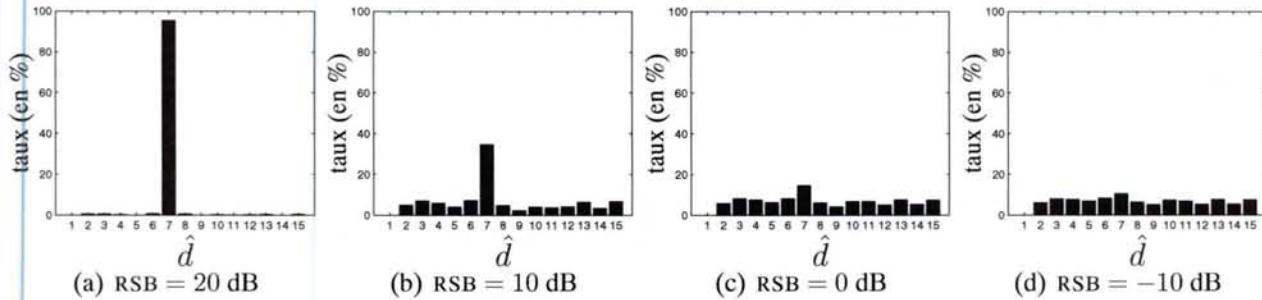


FIG. 4.30 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et  $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est uniforme.

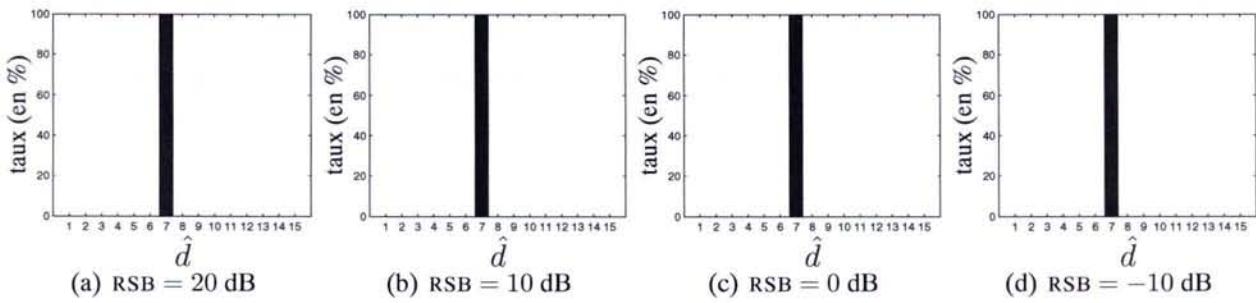


FIG. 4.31 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et  $w[k] = [1/(1-aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

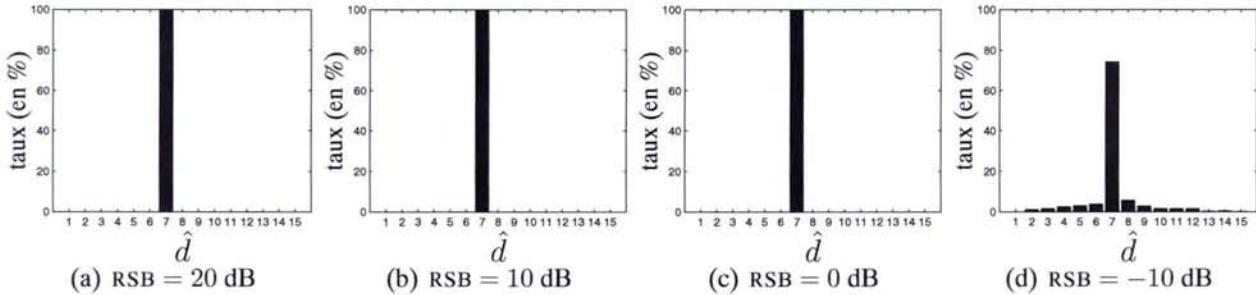


FIG. 4.32 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et  $w[k] = [(1-q^{-1})/(1-aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

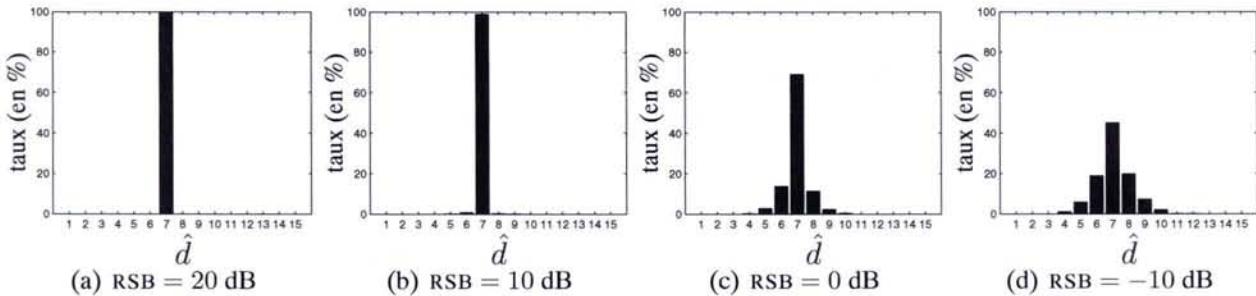


FIG. 4.33 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeu de données du 09/03 et  $w[k] = [1/(1-aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

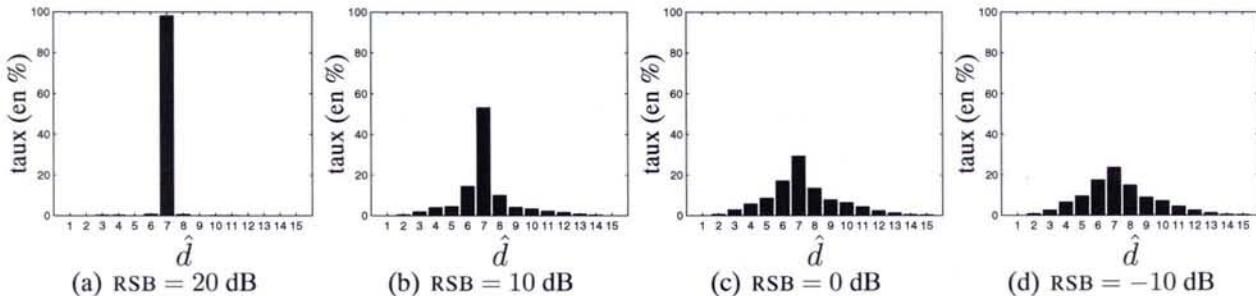


FIG. 4.34 – MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeu de données du 09/03 et  $w[k] = [(1-q^{-1})/(1-aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité *a priori* sur le retard est une loi de Rayleigh.

loi uniforme ou une loi de Rayleigh. En outre, lorsque l'entrée est moins informative et que le RSB est faible, on constate une légère amélioration des résultats pour les hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  estimés. Finalement, cette méthode est une alternative aux approches paramétriques présentées au chapitre 3 étant donné sa robustesse au modèle du bruit et au manque d'information dans les données.

En conclusion, nous avons développé une méthode d'estimation de la RIF et du retard non supervisée puisqu'elle ne nécessite le réglage d'aucun paramètre. Nous allons maintenant appliquer cette approche au cas du bief de rivière aménagé.

## 4.4 Application à un bief de rivière aménagé

L'objectif de ce paragraphe est de comparer plusieurs estimateurs de la RIF et du retard dans un cadre expérimental correspondant à celui d'un bief de rivière aménagé présenté au chapitre 1. En particulier, les algorithmes utilisés sont les estimateurs MV, MAP (estimation de la RIF) et deux versions du MAPC (estimation de la RIF et du retard) : l'une avec une loi *a priori* sur le retard uniforme et l'autre avec une loi de Rayleigh.

### 4.4.1 Estimation d'une RIF par MV

Nous avons à notre disposition 332 jeux de données, chacun d'une durée d'environ 24 heures. Afin d'observer l'évolution des estimées au cours du temps et de comparer les différentes approches, les estimées des RIF seront présentées sous une nouvelle forme : la *représentation temps-jours* (RTJ). Elle consiste en la juxtaposition des barres impulsionales estimées quotidiennement, présentées au paragraphe 4.2.3.3.

La figure 4.35 montre la RTJ des différentes RIF estimées par la méthode du MV. On peut observer la présence de discontinuités caractérisées par le changement de niveau de gris, le retard correspondant à l'instant du plus grand changement. On constate que la plupart des retards sont compris entre 6 et 7 par une analyse visuelle. A partir des estimées de la RIF, il est possible de déterminer le retard en utilisant un algorithme de détection de changement de moyenne tel que l'algorithme CUSUM (voir annexe C). Concernant les estimées des RIF, on observe que ces dernières ont une allure bruitée ; le bruit présent sur les données est amplifié par l'inversion de la matrice de données inhérent à la méthode du MV. Pour palier ce problème, nous avons proposé l'algorithme du MAP introduisant une contrainte de douceur sur la RIF.

### 4.4.2 Estimation d'une RIF par MAP

Une méthode permettant d'obtenir une estimée plus douce de la RIF est l'approche MAP (paragraphe 4.2.3). En utilisant un paramètre de douceur  $\alpha = 10000$  (rapport entre la fidélité aux données et l'*a priori* de douceur), on obtient les estimées de la RIF illustrées par la RTJ de la figure 4.36. Comme attendu, on obtient bien des estimées plus douces que celles obtenues avec l'estimateur

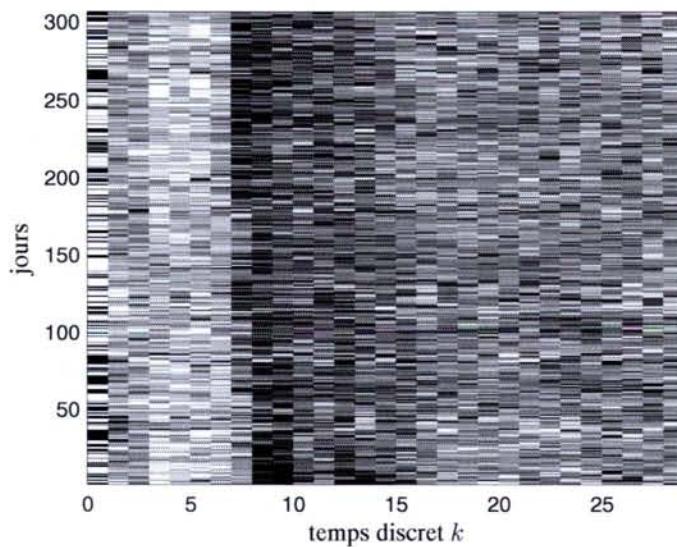
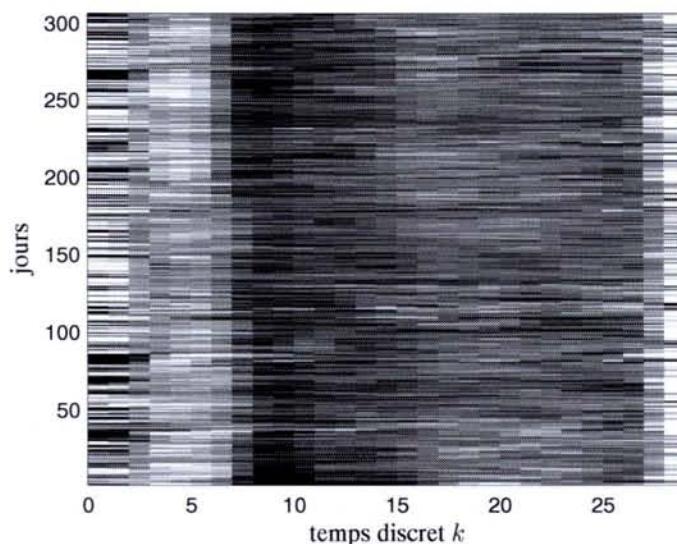


FIG. 4.35 – RTJ : estimées de la RIF au sens du MV.

MV. Ceci est reflété par des variations faibles des niveaux de gris entre les échantillons (dans le sens de l'abscisse  $k$ ). Toutefois, les discontinuités sont moins franches que précédemment, rendant ainsi la détection visuelle du retard plus délicate. Tout comme pour la méthode du MV, il est également possible d'utiliser l'approche du CUSUM pour estimer le retard. Néanmoins, à cause de la contrainte de douceur dans la méthode du MAP, le retard estimé par le détecteur sera imprécis (« retard » à la détection). Pour pouvoir appliquer l'*a priori* de douceur tout en conservant les discontinuités, nous allons utiliser la méthode du MAPC.

FIG. 4.36 – RTJ : estimées de la RIF au sens du MAP ( $\alpha = 10000$ ).

#### 4.4.3 Estimation d'une RIF et du retard par MAPC

Outre l'estimation d'une RIF, la méthode du MAPC réalise l'estimation du retard. Nous avons tout d'abord considéré le cas d'une densité de probabilité *a priori* uniforme sur le retard. Ceci signifie que le seul *a priori* disponible sur le retard est son appartenance à l'intervalle  $[d_{\min}, d_{\max}]$ . Les résultats sont présentés sur les figures 4.37 et 4.38 ( $d_{\min} = 3$  et  $d_{\max} = 15$ ). Évidemment, la douceur des RIF estimées par le MAPC est quasiment identique à celle du MAP, en dehors des points de discontinuité. En revanche, au niveau des discontinuités, le MAPC aboutit à des sauts plus abrupts que le MAP. Par rapport à l'estimateur du MV, les transitions ressortent mieux du fait du lissage effectué sur les estimées de la RIF. Visuellement, on s'aperçoit que la majorité des retards ( $\approx 80\%$ ) est comprise entre 5 et 7. Ceci est confirmé par la figure 4.38 où sont représentés l'évolution des estimées du retard au cours de l'année et leur histogramme.

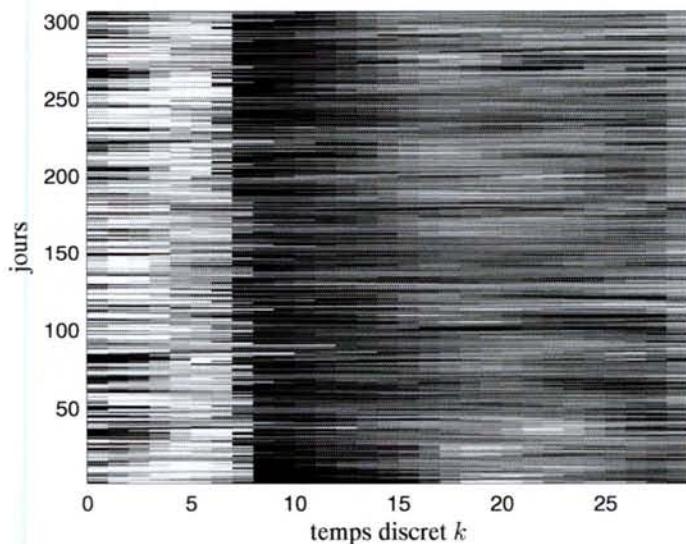


FIG. 4.37 – RTJ : RIF estimées par la méthode du MAPC avec une loi uniforme.

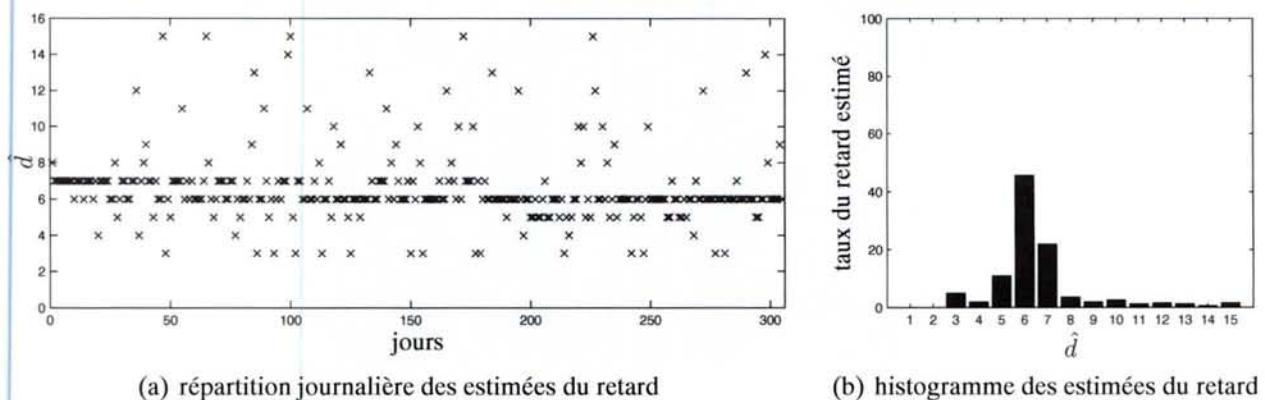


FIG. 4.38 – Retards estimés par la méthode du MAPC avec une loi uniforme.

Nous avons ensuite considéré la méthode du MAPC avec une loi de Rayleigh ( $\sigma_d = 6.5$ ) comme densité de probabilité *a priori* du retard. Les résultats sont présentés sur les figures 4.39 et 4.40

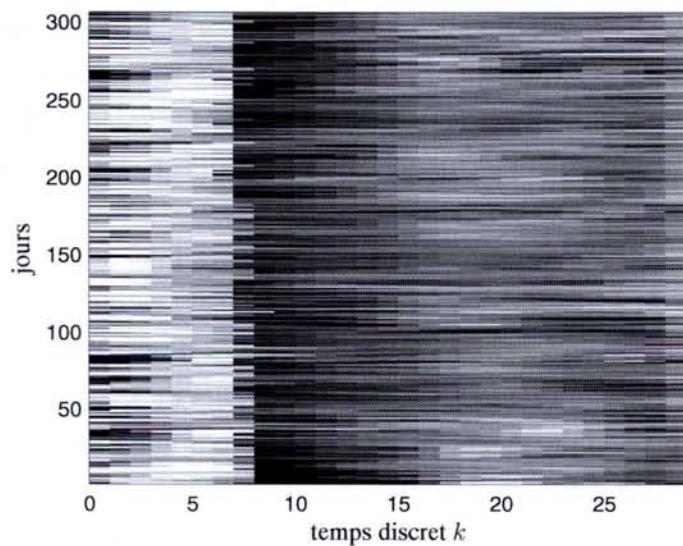


FIG. 4.39 – RTJ : RIF estimées par la méthode du MAPC avec une loi de Rayleigh  $\sigma_d = 6.5$ .

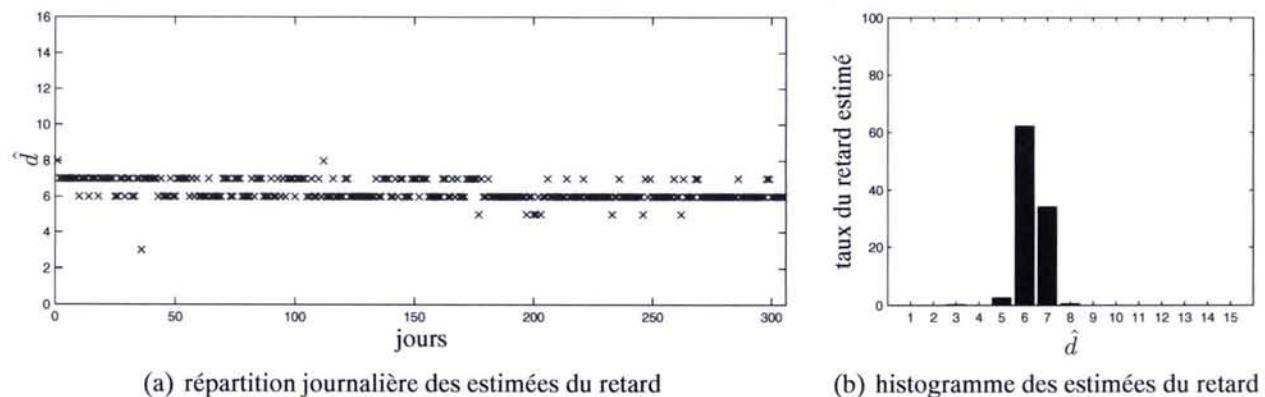


FIG. 4.40 – Retards estimés par la méthode du MAPC avec une loi de Rayleigh  $\sigma_d = 6.5$ .

( $d_{\min} = 3$  et  $d_{\max} = 15$ ). On constate que plus de 95 % des estimées du retard valent 6 ou 7. Ce qui signifierait que le retard de ce bief varie très peu au cours de l'année. Bien sûr, cette conclusion repose sur des résultats obtenus en modifiant l'*a priori* sur le retard, c'est-à-dire en imposant une estimée du retard entre 6 et 7 dans le cas où les données sont peu informatives. Ce qui explique la faible dispersion du retard sur l'année.

#### 4.4.4 Analyse des résultats

La méthode du MAPC (avec loi uniforme) a été appliquée sur 4 biefs, de longueurs différentes, répartis en cascade le long de la Basse-Isère. La plage de variation des indices de retard estimés pour chacun des biefs est représentée à la figure 4.41. Afin d'apprécier la pertinence de ces résultats, nous allons comparer ces estimées à des valeurs du retard obtenues à partir de connaissances empiriques.

Ces connaissances empiriques sont issues de critères physiques : à débit constant, le retard pur est

proportionnel à la longueur du bief et dépend du tirant d'eau dans le bief qui influence la célérité des ondes. Dans notre cas, le débit n'est pas constant, mais son influence limitée par rapport à la célérité de l'onde fait de la longueur des biefs un indicateur assez fiable permettant d'évaluer la validité des estimations des retards. Notons que les célérités sont similaires entre les différents biefs étant donnée la répartition de ces derniers.

La figure 4.41 fait apparaître une proportionnalité entre les intervalles de variation des retards estimés par la méthode du MAPC (—) et la longueur du bief ; ce qui renforce la validité des estimations. Cette figure représente également les intervalles d'incertitudes des retards obtenus à partir de connaissances empiriques (—). Ce sont les valeurs de référence normalement utilisées par les opérateurs pour la conduite manuelle des biefs. Notons que l'incertitude de ces estimations est d'environ trois périodes d'échantillonnage autour de la valeur nominale. Comparativement, on constate une aberration de ces estimations empiriques puisqu'elles sont très éloignées d'une caractéristique linéaire. Enfin, la figure 4.41 montre également l'amélioration significative de la précision des nouvelles estimations par rapport aux anciennes puisque leurs intervalles de variations ont au moins été divisés par deux. La comparaison de ces résultats corrobore la pertinence des estimations.

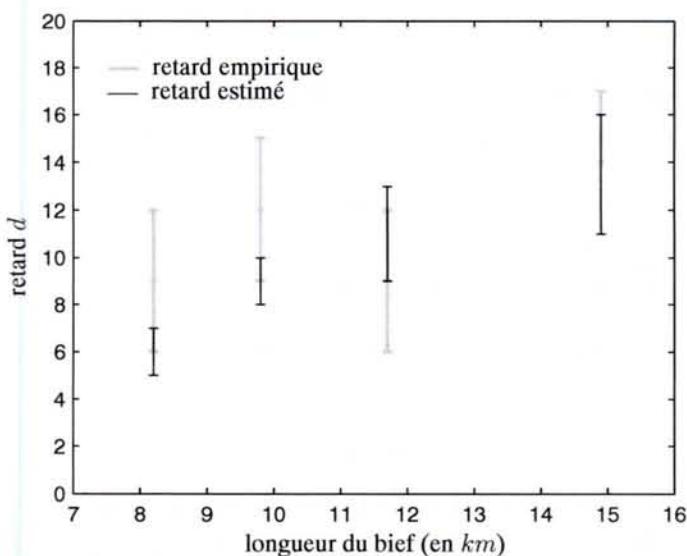


FIG. 4.41 – Intervalles de variations des retards empirique et estimé en fonction de la longueur du bief.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre est dédié à l'identification d'un bief de rivière aménagé à partir de données expérimentales passives par une approche bayésienne. La principale contribution est le développement d'une méthode originale estimant conjointement le retard et une réponse impulsionale finie. Cette approche est basée sur le fait que le retard introduit une discontinuité dans la réponse impulsionale entre le niveau aval du bief et la commande du débit entrant. L'estimation du retard est réalisée

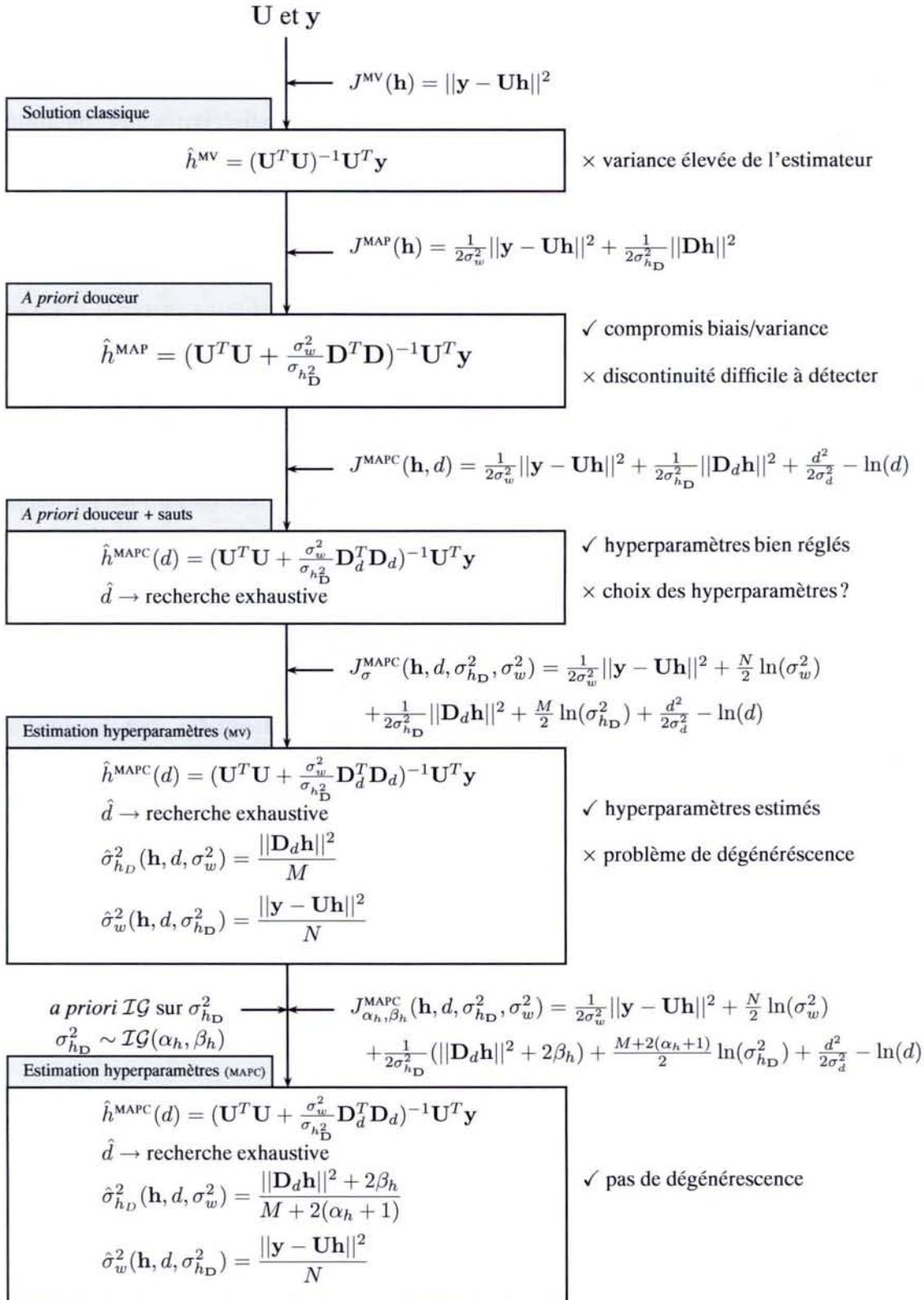


FIG. 4.42 – Différentes étapes de construction de l'algorithme proposé.

grâce à l'application d'une contrainte de douceur sur la réponse impulsionale sauf au niveau de la discontinuité.

Des exemples de simulation ont permis de montrer l'intérêt de cette approche comparativement à l'approche directe présentée au chapitre 3. Cependant, la méthode proposée nécessite le réglage d'hyperparamètres difficilement réalisable en pratique. Pour cette raison, nous avons présenté une méthode d'estimation de ces hyperparamètres qui donne des résultats satisfaisants en simulation et à fort RSB. Cependant, lorsque le RSB est faible, l'estimée de la RIF est souvent nulle ; la contrainte de douceur est trop forte. Ce problème apparaît également lors de l'application sur les données réelles. Nous avons mis en évidence que ce problème était dû à la dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe. La solution proposée consiste à pénaliser cette densité de probabilité par une densité de probabilité *a priori* de l'hyperparamètre qui agit sur la contrainte de douceur. Les différentes étapes de la construction de cette méthode sont représentées par le diagramme de la figure 4.42.

En conclusion, nous avons développé une méthode d'estimation de la RIF et du retard non supervisée puisqu'elle ne nécessite le réglage daucun paramètre. L'application de cette méthode au cas du bief a permis d'affiner sensiblement la plage de variation des retards estimés par rapport aux données fournies par les approches classiques. Enfin, une analyse des résultats d'estimation de retard a permis de vérifier la cohérence de ces derniers vis-à-vis des paramètres physiques du bief.

Ajoutons que, la lecture des résultats d'estimation de la réponse impulsionale finie, pour l'ensemble des jeux de données disponibles sur l'année, a été facilitée par la proposition d'une représentation originale de l'évolution des réponses impulsionales identifiées jour par jour : la représentation temps-jour.

# Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'identification de systèmes dynamiques à temps discret à partir de données échantillonnées, et plus particulièrement l'estimation de retards. Ils sont motivés par une application à un bief de rivière aménagé. Les difficultés résident dans l'obligation d'utiliser des données recueillies dans des conditions expérimentales passives et, qui plus est, en présence d'une boucle de régulation avec action anticipatrice effectuée par un opérateur humain.

Le chapitre 1 a permis de mettre en évidence des problèmes liés à l'estimation de retard du bief de rivière. Pour cela, une modélisation simplifiée de l'installation est effectuée. Elle conduit à une structure de modèle possédant deux entrées et une sortie. L'estimation du retard de cette structure par une approche classique aboutit à des résultats inacceptables. Deux facteurs, liés aux conditions expérimentales passives, sont à l'origine de cet échec. Le premier est la présence de boucles de régulation et d'action anticipatrice entraînant des corrélations entre les entrées et le bruit. Le second est le manque d'information dans les données recueillies. En effet, une étude *a posteriori* des données disponibles montre que l'ordre d'excitation persistante des jeux de données est relativement faible.

Au chapitre 2, il est proposé de classer les différents concepts de l'identifiabilité de la façon suivante :

- l'identifiabilité *a priori* : elle consiste à étudier l'existence et l'unicité d'une solution à l'estimation des paramètres d'une structure de modèle dans un cadre idéal (indépendamment des données) ;
- l'identifiabilité *a posteriori* : elle vérifie que l'unicité de la solution est toujours garantie *a posteriori* dans le cadre expérimental (avec les données disponibles) ;
- l'identifiabilité numérique : elle est relative à l'étude des propriétés de l'estimateur des paramètres.

Cette dernière est déjà longuement étudiée dans la littérature. Elle n'est donc pas considérée dans ce travail. En revanche, une nouvelle définition de l'identifiabilité *a posteriori* a été proposée. Elle s'appuie sur la définition de l'identifiabilité *a priori* et conduit au développement d'une méthode qualitative d'identifiabilité *a posteriori* locale, consistant à étudier le rang de la matrice de sensibilité de la sortie vis-à-vis des paramètres de la structure de modèle. Ensuite, une méthode quantitative mesurant le degré d'identifiabilité d'un paramètre par rapport aux autres a été déve-

loppée. Enfin, l'étude de l'identifiabilité du bief de rivière montre qu'il est suffisant d'estimer le retard à une période d'échantillonnage près, étant donné le degré d'identifiabilité *a posteriori* de ce paramètre.

Dans le chapitre 3, nous avons effectué un état de l'art des méthodes d'estimation de retard d'une structure de modèle à temps discret, sous l'hypothèse d'un retard multiple de la période d'échantillonnage. Cela nous a conduit à retenir trois approches d'estimation de retard :

- une méthode fondée sur l'estimation d'une RIF (estimation par MV et détection d'un saut par le CUSUM) ;
- une méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel (estimation des paramètres à  $d$  fixé, suivie d'une recherche exhaustive du retard) ;
- une méthode fondée sur l'estimation des fonctions de corrélation.

Une étude d'applicabilité de ces méthodes au cas du bief de rivière a été réalisée. Elle nous a conduit à la généralisation de la méthode de corrélation de [ZHENG et FENG (1990)] au cas d'une structure à deux entrées et une sortie corrélées. Finalement, après comparaison des différentes méthodes sur des exemples de simulation, nous avons retenu la méthode fondée sur l'estimation d'un transfert rationnel pour estimer le retard du bief. Celle-ci fournit des résultats satisfaisants en présence de signaux suffisamment informatifs, mais échoue dans le cas contraire (ce qui est le cas avec certaines des données disponibles).

L'objectif du quatrième chapitre a été de développer une méthode d'estimation de retard alternative aux précédentes, performante même en présence de données peu informatives. Pour cela, l'approche bayésienne offre un cadre de travail permettant d'intégrer des connaissances *a priori* compensant le manque d'information des données. Tout d'abord, nous avons montré que le retard pouvait être estimé par la détection d'une discontinuité dans la réponse impulsionale entre le niveau aval du bief et la commande du débit entrant. L'estimation du retard peut donc être réalisée via la détection de l'instant de cette discontinuité conjointement à l'estimation de la réponse impulsionale.

L'approche bayésienne proposée dans ce chapitre impose une contrainte de douceur sur tous les échantillons de la réponse impulsionale sauf entre deux échantillons définissant la discontinuité. L'avantage de cette méthode est triple :

- elle ne nécessite pas une connaissance parfaite de la structure de modèle, mais seulement que la réponse impulsionale soit finie ;
- elle effectue un compromis entre l'information contenue dans les données et celle fournie par l'*a priori* ;
- elle est facile à mettre en œuvre car non-supervisée.

La difficulté majeure du développement de cette méthode a été l'estimation des hyperparamètres. Nous avons mis en évidence un problème de dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe lors de l'estimation des hyperparamètres. Ce problème a été résolu en intégrant une

nouvelle contrainte *a priori* sur l'hyperparamètre responsable de la dégénérescence. Des exemples de simulation ont permis de mettre en avant les performances de la méthode proposée.

Dans le cadre de l'application au bief, la plage de variation des retards estimés par cette méthode a été sensiblement affinée par rapport aux estimées fournies par les approches classiques. Une analyse des résultats d'estimation de retard a permis de vérifier la cohérence de ces derniers vis-à-vis des paramètres physiques du bief.

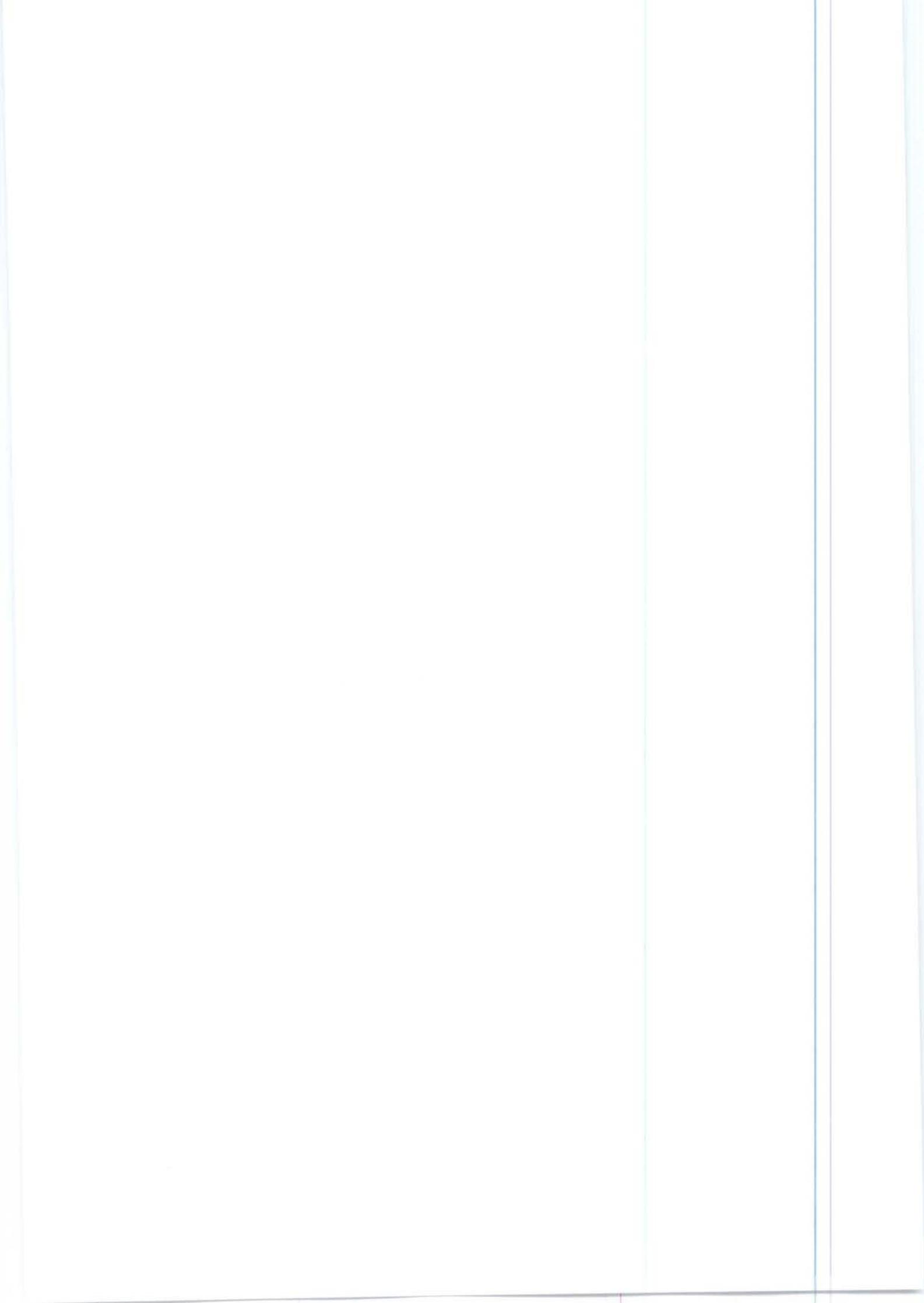
Néanmoins, nous avons recensé une limitation à l'approche bayésienne proposée. En effet, elle ne s'applique que lorsque le retard introduit une discontinuité dans la réponse impulsionale. De plus, cette discontinuité doit être suffisamment franche. Ce qui est, par exemple, le cas des systèmes dont l'ordre relatif est égal à 1.

Enfin, nous avons proposé dans ce chapitre une représentation originale des réponses impulsionales identifiées pour chaque jeu de données journaliers : la représentation temps-jour. Elle a facilité la visualisation de leur évolution.

En terme de perspective, il serait tout d'abord intéressant d'améliorer l'approche proposée en prenant en compte le fait que le retard varie lentement d'un jour à l'autre. Il est possible d'intégrer cette information en imposant une contrainte de douceur sur le retard. Toutefois, cette contrainte ajoute une complexité supplémentaire à l'algorithme d'optimisation.

D'autre part, il serait également intéressant de développer une approche bayésienne d'estimation de retard qui considère une structure de modèle paramétrique parcimonieuse (par exemple, définie par une fonction de transfert) possédant moins de paramètres à estimer qu'une réponse impulsionale. Elle permettrait d'intégrer des connaissances *a priori* sur les paramètres, comme par exemple le retard et/ou les correcteurs utilisés.

Une autre perspective de recherche concerne le développement d'une méthode d'estimation de retard du bief de rivière utilisant les mesures des débits entrant et sortant, et non plus les consignes de débit. Cela implique des signaux d'entrée bruités à cause des erreurs de mesures. Il est alors envisageable de développer des techniques de type « erreurs-en-les-variables » pour l'estimation de retard.



# Annexe A

## Méthode de l'erreur de sortie

Soit un système linéaire et invariant dans le temps, régi par l'équation suivante :

$$y[k] = G_0(q^{-1})u[k] + v_0[k], \quad (\text{A.1})$$

où  $u[k]$  et  $y[k]$  sont respectivement l'entrée et la sortie à l'instant discret  $k$  du processus,  $\{v_0[k]\}$  est une suite de variables aléatoires représentant les bruits et les incertitudes, et  $G_0(q^{-1})$  est l'opérateur de transfert modélisant le comportement du système.

Ce système peut être modélisé par le modèle de l'erreur de sortie, régi par les équations suivantes :

$$\tilde{y}[k] = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u[k], \quad (\text{A.2})$$

$$y[k] = \tilde{y}[k] + e[k], \quad (\text{A.3})$$

où  $\tilde{y}[k]$  représente la sortie sans bruit du modèle,  $e[k]$  est l'erreur de sortie et :

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}, \quad (\text{A.4})$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}. \quad (\text{A.5})$$

Les ordres  $n_b$  et  $n_f$  sont supposés connus. Le vecteur des paramètres à estimer est :

$$\boldsymbol{\theta} = [b_0 \ b_1 \dots b_{n_b} \ f_1 \ f_2 \dots f_{n_f}]^T. \quad (\text{A.6})$$

Puisque  $\tilde{y}[k]$  n'est jamais observé, nous le noterons  $\tilde{y}[k, \boldsymbol{\theta}]$  afin de rappeler sa dépendance vis-à-vis des paramètres. Son évaluation est effectuée à partir de l'équation (A.2), c'est-à-dire à partir de la relation suivante :

$$\tilde{y}[k, \boldsymbol{\theta}] + f_1\tilde{y}[k-1, \boldsymbol{\theta}] + \dots + f_{n_f}\tilde{y}[k-n_f, \boldsymbol{\theta}] = b_1u[k-1] + \dots + b_{n_b}u[k-n_b]. \quad (\text{A.7})$$

Celle-ci peut se réécrire sous une *forme pseudo-linéaire*<sup>1</sup> :

$$\tilde{y}[k, \boldsymbol{\theta}] = \boldsymbol{\varphi}^T[k, \boldsymbol{\theta}] \times \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>1</sup>On parle de forme « pseudo-linéaire » car le régresseur  $\boldsymbol{\varphi}[k, \boldsymbol{\theta}]$  dépend des paramètres à estimer, contrairement à la forme linéaire.

où :

$$\varphi[k, \boldsymbol{\theta}] = [u[k-1] \quad \dots \quad u[k-n_b] \quad -\tilde{y}[k-1, \boldsymbol{\theta}] \quad \dots \quad -\tilde{y}[k-n_f, \boldsymbol{\theta}]]^T. \quad (\text{A.9})$$

La méthode de l'erreur de sortie (*output error method*) consiste à estimer le paramètre  $\boldsymbol{\theta}$  en minimisant l'erreur de sortie  $e[k]$  de l'éq. (A.3), c'est-à-dire que l'on a :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{P}} J_N(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{A.10})$$

où

$$J_N(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (e[k, \boldsymbol{\theta}])^2, \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (y[k] - \tilde{y}[k, \boldsymbol{\theta}])^2, \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (y[k] - \varphi^T[k, \boldsymbol{\theta}] \times \boldsymbol{\theta})^2. \quad (\text{A.13})$$

### Recherche des hypothèses de convergence de l'estimateur [SÖDERSTRÖM et STOICA (1989)]

D'après l'équation (A.10), on a :

$$\frac{d J_N(\boldsymbol{\theta})}{d \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_N} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\iff \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d e[k, \boldsymbol{\theta}]}{d \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_N} \times e[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N] = 0. \quad (\text{A.15})$$

Or :

$$e[k, \boldsymbol{\theta}] = y[k] - \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u[k] \quad (\text{A.16})$$

$$= y[k] - \frac{b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}} u[k], \quad (\text{A.17})$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e[k, \boldsymbol{\theta}]}{\partial b_i} &= -\frac{q^{-i}}{F(q^{-1})} u[k] = -\frac{1}{F(q^{-1})} u[k-i] \quad \text{pour } i = 1 \dots n_b, \\ \frac{\partial e[k, \boldsymbol{\theta}]}{\partial f_i} &= \frac{B(q^{-1}) q^{-i}}{[F(q^{-1})]^2} u[k] = \frac{B(q^{-1})}{[F(q^{-1})]^2} u[k-i], \\ &= \frac{1}{F(q^{-1})} \tilde{y}[k-i] \quad \text{pour } i = 1 \dots n_f. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

D'où l'on déduit que :

$$\frac{d e[k, \boldsymbol{\theta}]}{d \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_N} = -\frac{1}{\hat{F}(q^{-1})} \varphi[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_N], \quad (\text{A.19})$$

où les coefficients de  $\hat{F}(q^{-1})$  correspondent aux  $n_f$  derniers éléments du vecteur de paramètres  $\hat{\theta}_N$ . L'équation (A.15) devient alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} -\frac{1}{\hat{F}(q^{-1})} \varphi[k, \hat{\theta}_N] e[k, \hat{\theta}_N] = 0, \quad (\text{A.20})$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\hat{F}(q^{-1})} \varphi[k, \hat{\theta}_N] \left( y[k] - \varphi^T[k, \hat{\theta}_N] \times \hat{\theta}_N \right) = 0, \quad (\text{A.21})$$

et donc :

$$\hat{\theta}_N = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\hat{F}(q^{-1})} \varphi[k, \hat{\theta}_N] \varphi^T[k, \hat{\theta}_N] \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\hat{F}(q^{-1})} \varphi[k, \hat{\theta}_N] y[k], \quad (\text{A.22})$$

sous l'hypothèse que  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\hat{F}(q^{-1})} \varphi[k, \hat{\theta}_N] \varphi^T[k, \hat{\theta}_N]$  soit inversible.

Supposons que pour le vecteur de paramètre vrai  $\theta_0$ , on ait la relation suivante :

$$y[k] = \frac{B_0(q^{-1})}{F_0(q^{-1})} u[k] + v_0[k], \quad (\text{A.23})$$

$$= \varphi^T[k, \theta_0] \theta_0 + v_0[k]. \quad (\text{A.24})$$

En supposant que l'estimateur converge :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta_0, \quad (\text{A.25})$$

alors, d'après l'équation (A.22) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0] \varphi^T[k, \theta_0] \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0] y[k], \quad (\text{A.26})$$

et en remplaçant  $y[k]$  à l'aide de l'équation (A.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \\ &\left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0] \varphi^T[k, \theta_0] \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0] \varphi^T[k, \theta_0] \right) \theta_0 \\ &+ \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0] \varphi^T[k, \theta_0] \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0] v_0[k] \right). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

En supposant que les signaux d'entrée–sortie sont quasi–stationnaires, et en notant :

$$\psi[k, \theta_0] = \frac{1}{F_0(q^{-1})} \varphi[k, \theta_0], \quad (\text{A.28})$$

alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \boldsymbol{\varphi}[k, \boldsymbol{\theta}_0] \boldsymbol{\varphi}^T[k, \boldsymbol{\theta}_0] = \mathbf{E} [\boldsymbol{\psi}[k, \boldsymbol{\theta}_0] \boldsymbol{\varphi}^T[k, \boldsymbol{\theta}_0]] \triangleq \mathbf{C}_{\psi_0 \varphi_0}, \quad (\text{A.29})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{F_0(q^{-1})} \boldsymbol{\varphi}[k, \boldsymbol{\theta}_0] v_0[k] = \mathbf{E} [\boldsymbol{\psi}[k, \boldsymbol{\theta}_0] v_0[k]] \triangleq \mathbf{C}_{\psi_0 v_0}, \quad (\text{A.30})$$

et l'équation (A.27) devient :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}_0 + (\mathbf{C}_{\psi_0 \varphi_0})^{-1} \mathbf{C}_{\psi_0 v_0}. \quad (\text{A.31})$$

Par conséquent, comme  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}_0$ , cela implique les deux points suivants :

- $\mathbf{C}_{\psi_0 \varphi_0}$  est une matrice régulière ;
- $\mathbf{C}_{\psi_0 v_0} = 0$ .

Ce dernier point est vérifié dans l'un des deux cas suivants :

- $\{v_0[k]\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle ; alors,  $v_0[k]$  ne dépendra plus alors de ce qui se passe à l'instant  $k - 1$  et donc  $\mathbf{E} [\boldsymbol{\psi}[k, \boldsymbol{\theta}_0] v_0[k]] = 0$  ;
- la suite  $\{u[k]\}$  est indépendante de la suite de moyenne nulle  $\{v_0[k]\}$  ; alors,  $\boldsymbol{\varphi}[k, \boldsymbol{\theta}]$  ne contient que des termes dépendants de  $u$  et  $\tilde{y}$ , donc il ne dépendant pas du bruit et on peut conclure que  $\mathbf{E} [\boldsymbol{\psi}[k, \boldsymbol{\theta}_0] v_0[k]] = 0$ .

## Annexe B

# Estimation d'une réponse impulsionale finie

Il existe deux grandes classes de méthodes permettant l'estimation d'une réponse impulsionale finie (RIF). L'une résout un système d'équations construit directement à partir des données disponibles. La méthode la plus classique est celle du maximum de vraisemblance (présentée au § B.1). L'autre fait appel à une estimation préalable des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation des données. Il s'agit de l'analyse de corrélation (présentée au § B.2).

### B.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Un modèle mono–entrée/mono–sortie linéaire, causal, invariant à temps discret, est décrit par les équations de convolution suivantes :

$$y[k] = (h \star u)[k] + w[k] = \sum_{l=0}^{M-1} h[l]u[k-l] + w[k], \quad \text{pour } k = M-1, \dots, N-1, \quad (\text{B.1})$$

où  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{y[k]\}_{k=0}^{N-1}$  sont respectivement l'entrée et la sortie,  $\{h[k]\}_{k=0}^{M-1}$  est la RIF à estimer,  $M$  étant son ordre de troncature ( $M < N$ ) et  $\{w[k]\}_{k=0}^{N-1}$  représente les bruits, perturbations et erreurs de modélisation, supposés additifs. La concaténation des  $N$  équations (B.1) forme un système d'équations linéaires basé sur les données disponibles :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{h} + \mathbf{w}, \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w[0] \\ \vdots \\ w[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u[0] & 0 & \dots & 0 \\ u[1] & u[0] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[M-2] & u[M-3] & & 0 \\ u[M-1] & u[M-2] & & u[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u[N-1] & u[N-2] & \dots & u[N-M] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times M}.$$

### B.1.1 Principe

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) est défini par l'argument correspondant à la valeur maximale de la fonction de vraisemblance  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{h})$  :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}} = \arg \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} [p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{h})]. \quad (\text{B.3})$$

Cette dernière est déduite de la densité de probabilité directe des données en remplaçant la variable  $\mathbf{y}$  par un jeu de données observées et où le vecteur des paramètres  $\mathbf{h}$  devient la variable. Le logarithme de la fonction de vraisemblance, appelé log-vraisemblance, ou son opposé (anti-log-vraisemblance), sont classiquement utilisés, car ils facilitent généralement les calculs analytiques sans changer l'argument du maximum (puisque il s'agit de fonctions monotones) :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}} = \arg \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} [\ln p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{h})] = \arg \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} [-\ln p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{h})]. \quad (\text{B.4})$$

### B.1.2 Cas du modèle linéaire gaussien

Supposons que  $\mathbf{w}$  est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance définie positive<sup>1</sup>  $\mathbf{C}_w$ . La densité de probabilité du bruit s'écrit alors :

$$p_w(\mathbf{w}|\mathbf{C}_w) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_w)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{w} \right], \quad (\text{B.5})$$

où la notation  $\det(\cdot)$  représente le déterminant. On en déduit alors la fonction de vraisemblance :

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{U}, \mathbf{C}_w, \mathbf{h}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_w)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{Uh})^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{Uh}) \right]. \quad (\text{B.6})$$

On obtient ainsi l'expression de l'anti-log-vraisemblance suivante :

$$-\ln p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{U}, \mathbf{C}_w, \mathbf{h}) = -\ln \left[ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C}_w)}} \right] + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{Uh})^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{Uh}), \quad (\text{B.7})$$

<sup>1</sup>Toutes ses valeurs propres sont strictement positives. La matrice est donc inversible et son déterminant est non-nul.

de laquelle on déduit le critère à minimiser contenant uniquement le terme de l'anti-log-vraisemblance fonction de  $\mathbf{h}$  :

$$J^{\text{MV}}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{Uh})^T \mathbf{C}_w^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{Uh}). \quad (\text{B.8})$$

Sous les conditions d'inversibilité ( $M < N$ ,  $\text{rang}(\mathbf{U}) = M$  et  $\mathbf{C}_w$  définie positive), on obtient alors une expression explicite de l'estimateur du MV, dans le cas du modèle linéaire gaussien :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{y}. \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Analyse de corrélation

Une RIF peut également être estimée en résolvant un système d'équations faisant appel aux fonctions d'autocorrélation de l'entrée et d'intercorrélation entre l'entrée et la sortie. Les méthodes classiques de résolution de ce système sont rassemblées sous le terme d'*analyse de corrélation* [BOX et JENKINS (1976) ; GODFREY (1980) ; LJUNG (1999) ; SÖDERSTRÖM et STOICA (1989)]. La fonction d'intercorrélation entre l'entrée et la sortie est :

$$c_{uy}[l] \triangleq \mathbf{E} \left[ u[k] y[k+l] \right], \quad (\text{B.10})$$

où  $l \in [-N+1, N-1]$  est l'indice de la fonction d'intercorrélation, aussi nommé *décalage* entre les deux signaux.

En remplaçant  $y[k+l]$  à l'aide de l'équation (B.1) et en supposant que la fonction d'intercorrélation entre l'entrée et le bruit est nulle ( $c_{uv}[l] = 0, \forall l$ ), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_{uy}[l] &= \mathbf{E} \left[ u[k] \left( \sum_{m=0}^{M-1} h[m] u[k+l-m] + v[k+l] \right) \right], \\ &= \mathbf{E} \left[ u[k] \sum_{m=0}^{M-1} h[m] u[k+l-m] \right] + \mathbf{E} \left[ u[k] v[k+l] \right], \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} h[m] \mathbf{E} \left[ u[k] u[k+l-m] \right] + \mathbf{E} \left[ u[k] v[k+l] \right], \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} h[m] c_{uu}[l-m] + \underbrace{c_{uv}[l]}_{=0}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'ensemble des équations suivantes :

$$c_{uy}[l] = (h \star c_{uu})[l] \quad \text{pour } l = -N+1+M, \dots, N-1. \quad (\text{B.11})$$

La concaténation de ces dernières fournit le système suivant :

$$\mathbf{c}_{uy} = \mathbf{C}_{uu} \mathbf{h}, \quad (\text{B.12})$$

où

$$\mathbf{C}_{uu} = \begin{bmatrix} c_{uu}[-N+1+M] & \dots & c_{uu}[-N+1] \\ \vdots & & \vdots \\ c_{uu}[N-1] & \dots & c_{uu}[N-M] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N-1-M \times M},$$

$$\mathbf{c}_{uy} = \begin{bmatrix} c_{uy}[-N+1+M] \\ \vdots \\ c_{uy}[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N-1-M}, \quad \text{et} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M.$$

L'avantage est que, dans ce système d'équations, les effets du bruit sont théoriquement annihilés. Par conséquent, les méthodes de résolution de ces équations en présence de bruit devraient conduire à des estimées de meilleure qualité d'une RIF que celles fournies par les méthodes basées directement sur les données. Toutefois, en pratique, les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation ne sont pas connues. Il faut donc les estimer et, par conséquent, des erreurs d'estimation sont introduites. La variance de ces erreurs est d'autant plus grande que le nombre de données ( $N$ ) est faible. Par conséquent, les résultats d'estimation de ces méthodes seront généralement moins satisfaisants que ceux des méthodes présentées au § B.1, et ce d'autant plus que  $N$  est petit.

### B.2.1 Approche classique : méthode du maximum de vraisemblance.

Cette méthode permet de prendre en compte les erreurs d'estimation des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation. En effet, en supposant que ces dernières, notées  $\{b[k]\}_{l=-N+1}^{N-1}$ , suivent une distribution gaussienne et soient additives, le système d'équations :

$$\hat{\mathbf{c}}_{uy} = \hat{\mathbf{C}}_{uu}\mathbf{h} + \mathbf{b}, \quad (\text{B.13})$$

où

$$\hat{\mathbf{C}}_{uu} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{uu}[-N+1+M] & \dots & \hat{c}_{uu}[-N+1] \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_{uu}[N-1] & \dots & \hat{c}_{uu}[N-M] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N-1-M \times M},$$

$$\hat{\mathbf{c}}_{uy} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{uy}[-N+1+M] \\ \vdots \\ \hat{c}_{uy}[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N-1-M}, \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b[-N+1+M] \\ \vdots \\ b[N-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N-1-M},$$

peut être résolu par la méthode du maximum de vraisemblance présentée au § B.1. La qualité du résultat dépendra du conditionnement de la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_{uu}$ .

### B.2.2 Approche fréquentielle : méthode de division spectrale.

Le passage dans le domaine fréquentiel par transformation de Fourier à temps discret de l'équation (B.12) conduit à une relation très simple : l'interspectre entrée–sortie est le produit (*simple*) de l'autospectre de l'entrée et de la réponse en fréquence  $H(f)$  de la RIF. Cette réponse peut donc (en

théorie) s'obtenir par simple division. Cependant, comme tout problème d'inversion, la qualité du résultat dépend du conditionnement de la matrice inversée (ici il s'agit de  $\hat{C}_{uu}$ ). De plus, cette méthode néglige les erreurs d'estimation des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation. C'est pourquoi, son utilisation en dehors d'un cadre idéal (dans lequel l'entrée est d'ordre d'excitation persistante élevé et  $N$  est grand) n'est pas recommandée.

### B.2.3 Approche par filtrage des signaux.

Cette approche se décompose en deux étapes : la première consiste à filtrer les signaux d'entrée–sortie de sorte que l'entrée filtrée soit un bruit blanc, et la seconde estime la réponse impulsionnelle à partir de la fonction de corrélation entre les signaux filtrés.

En effet, si l'entrée est un bruit blanc stationnaire de variance  $\sigma^2$ , notée  $\{e[k]\}_{k=0}^{N-1}$ , alors :

$$\begin{cases} c_{ee}[0] = \sigma^2, \\ c_{ee}[l] = 0, \quad l \neq 0, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

et l'équation (B.11) devient :

$$c_{ey}[l] = \sigma^2 h[l]. \quad (\text{B.15})$$

Par conséquent, la RIF est proportionnelle à la fonction d'intercorrélation entre l'entrée blanche et la sortie à  $\sigma^2$  près :

$$h[l] = c_{ey}[l]/\sigma^2. \quad (\text{B.16})$$

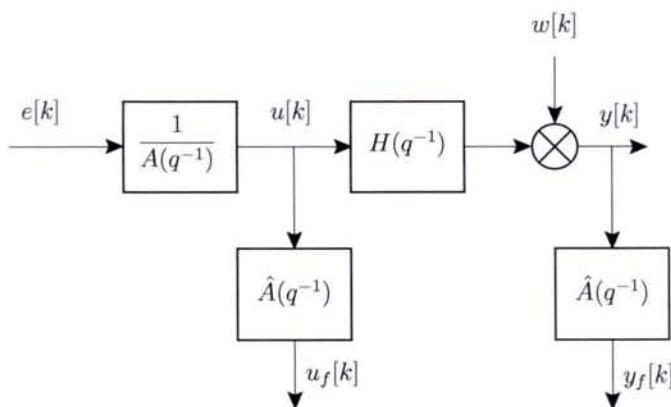


FIG. B.1 – Principe de l'approche par filtrage des signaux

L'approche consiste alors à modéliser l'entrée par un processus (auto-régressif) AR (voir FIG. B.1). Soit  $\hat{A}(q^{-1})$  une estimée du filtre de pré-blanchiment, correspondant à un modèle AR de la suite de données  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  :

$$A(q^{-1})u[k] = e[k], \quad (\text{B.17})$$

et soient  $u_f$  et  $y_f$  les signaux d'entrée et de sortie filtrés par  $\hat{A}(q^{-1})$  :

$$u_f[k] = \hat{A}(q^{-1})u[k], \quad (\text{B.18})$$

$$y_f[k] = \hat{A}(q^{-1})y[k], \quad (\text{B.19})$$

alors, on montre que, théoriquement, :

$$h[l] = c_{u_f y_f}[l]/\sigma^2. \quad (\text{B.20})$$

En pratique, on aura :

$$\hat{h}[l] = \hat{c}_{u_f y_f}[l]/\hat{\sigma}^2, \quad (\text{B.21})$$

où  $\hat{c}_{u_f y_f}$  est une estimée de la fonction d'intercorrélation entre  $\{u_f[k]\}_{k=0}^{N-1}$  et  $\{y_f[k]\}_{k=0}^{N-1}$ , et  $\hat{\sigma}^2$  est la variance empirique de  $\{u_f[k]\}_{k=0}^{N-1}$ .

## Annexe C

### Test de Page–Hinkley (CUSUM)

L'algorithme de Page-Hinkley (également appelé CUSUM pour *Cumulative SUM*) est introduit par E. S. Page [PAGE (1954)]. Il consiste à tester le degré de véracité de deux hypothèses relatives à la moyenne d'une suite d'observations d'un processus.

On considère  $\{y[k]\}_{k=0}^{N-1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, distribuées selon des lois de probabilité gaussiennes dépendant d'un seul paramètre  $\mu$ , la moyenne ; la variance  $\sigma^2$  est supposée identique. Avant l'instant de rupture, le paramètre  $\mu$  est égal à  $\mu_0$ , et après le saut il est égal à  $\mu_1 \neq \mu_0$ . Le problème est de détecter l'instant du changement de moyenne de la suite.

Compte tenu des considérations précédentes, la variable aléatoire  $y[k]$  ne peut obéir qu'à l'une des deux hypothèses suivantes :

$$\mathbf{H}_0 : y[k] \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2), \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{H}_1 : y[k] \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2). \quad (\text{C.2})$$

On note  $p_{Y_k}(y[k]/\mathbf{H}_0)$  et  $p_{Y_k}(y[k]/\mathbf{H}_1)$  les densités de probabilité conditionnelle de la VA  $y[k]$  sous les hypothèses  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_1$ , respectivement. On suppose que les moyennes avant et après le saut sont connues et on pose  $\mathbf{y}_n = [y[0], y[1], \dots, y[n]]$  où  $0 \leq n \leq N - 1$ .

On définit le rapport de vraisemblance entre les hypothèses  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_1$  :

$$\Lambda(n) \triangleq \frac{p_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_n/\mathbf{H}_1)}{p_{\mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_n/\mathbf{H}_0)} = \frac{\prod_{k=0}^n p_{Y_k}(y[k]/\mathbf{H}_1)}{\prod_{k=0}^n p_{Y_k}(y[k]/\mathbf{H}_0)}. \quad (\text{C.3})$$

Le logarithme du rapport de vraisemblance s'écrit alors :

$$S(n) = \sum_{k=0}^n \ln \frac{p_{Y_k}(y[k]/\mathbf{H}_1)}{p_{Y_k}(y[k]/\mathbf{H}_0)}. \quad (\text{C.4})$$

Sous les hypothèses gaussiennes précédentes, l'équation (C.4) devient :

$$S(n) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{k=0}^n \left( y[k] - \mu_0 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} \right). \quad (\text{C.5})$$

En posant  $\nu_m = |\mu_1 - \mu_0|$ , on obtient l'algorithme CUSUM *bilatéral* décrit par les relations :

$$g^+[n] = \max\{0, \sum_{k=1}^n (y[k] - \mu_0 - \nu_m/2)\}, \quad (\text{C.6})$$

$$g^-[n] = \max\{0, \sum_{k=1}^n (-y[k] + \mu_0 - \nu_m/2)\}, \quad (\text{C.7})$$

$$k_a = \arg \min_{0 \leq n \leq N-1} \{(g^+[n] > \lambda) \cup (g^-[n] > \lambda)\}. \quad (\text{C.8})$$

Les fonctions  $g^+[n]$  et  $g^-[n]$  sont appelées *fonctions de décision*. La première détecte les sauts positifs ( $\mu_1 > \mu_0$ ) et la seconde les sauts négatifs. L'instant  $k_a$  est appelé *temps d'arrêt*; il correspond à l'instant où l'une des fonctions de décision dépasse un seuil fixé  $\lambda$  appelé *seuil de détection*. Enfin, il reste à déterminer l'instant du changement de moyenne correspondant à l'instant :

$$k_d = \arg \max_{0 \leq n \leq k_a} \{g^\pm[n] = 0\}, \quad (\text{C.9})$$

où

$$\begin{cases} g^\pm = g^+, & \text{si } g^+(k_a) > \lambda, \\ g^\pm = g^-, & \text{si } g^-(k_a) > \lambda, \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

c'est-à-dire où  $g^\pm$  correspond à  $g^+$  ou  $g^-$  selon que le saut détecté à l'instant  $k_a$  est positif ou négatif, respectivement.

Comme le montrent les équations (C.6)–(C.9), l'algorithme CUSUM est de faible complexité numérique, d'autant plus que les fonctions de décision peuvent être calculées de façon récursive :

$$g^+[n] = \max\{0, g^+[n-1] + y[n] - \mu_0 - \nu_m/2\}, \quad (\text{C.11})$$

$$g^-[n] = \max\{0, g^-[n-1] - y[n] + \mu_0 - \nu_m/2\}. \quad (\text{C.12})$$

## Annexe D

# Équations de Yule–Walker généralisées

Considérons un système régi par la relation suivante :

$$A(q^{-1})y[k] = q^{-d'}B(q^{-1})u[k] + \omega[k], \quad (\text{D.1})$$

où

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_a}q^{-n_a}, \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}, \quad b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Le signal  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite stationnaire de VA non corrélées de moyenne nulle et de variance  $\sigma_u^2$ . Le signal  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_\omega^2$ . De plus, il est supposé que la fonction d'intercorrélation entre ces deux suites vérifie la relation suivante :

$$\begin{cases} c_{\omega u}[l] \neq 0, & -m \leq l \leq 0, \\ c_{\omega u}[l] = 0, & l < -m \text{ ou } l > 0, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

où  $m \geq 0$  est l'ordre d'intercorrélation entre  $\omega$  et  $u$ .

Alors, ZHENG et FENG montrent que la fonction d'autocorrélation de  $y$  vérifie les relations suivantes :

$$c_{yy}[l] = \sum_{i=1}^{n_a} a_i c_{yy}[l-i], \quad \text{pour } l > n_b + d' + m, \quad (\text{D.3})$$

appelées *équations de Yule–Walker généralisées* [ZHENG et FENG (1990)] car elles sont analogues aux *équations de Yule–Walker* d'un processus ARMA [BOX et JENKINS (1976)].

### Démonstration

En multipliant l'équation (D.1) par  $y[k-l]$  et en prenant l'espérance des deux termes de l'égalité, on obtient la relation suivante :

$$c_{yy}[l] = \sum_{i=1}^{n_a} a_i c_{yy}[l-i] + \sum_{i=0}^{n_b} b_i c_{uy}[l-d'-i] + c_{\omega y}[l]. \quad (\text{D.4})$$

L'objectif est de montrer que

$$\sum_{i=0}^{n_b} b_i c_{uy}[l - d' - i] + c_{\omega y}[l] = 0, \quad \text{pour } l > n_b + d' + m. \quad (\text{D.5})$$

Notons que, d'après l'équation (D.1), la sortie  $y[k]$  peut être réécrite sous la forme d'une somme de convolutions discrètes :

$$y[k] = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d'} u[k] + \frac{1}{A(q^{-1})} \omega[k], \quad (\text{D.6})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} g[i] u[k - d' - i] + \sum_{i=0}^{\infty} h[i] \omega[k - i]. \quad (\text{D.7})$$

◊ Nous commençons par nous intéresser au terme  $\sum_{i=0}^{n_b} b_i c_{uy}[l - d' - i]$  de l'équation (D.5).

D'après l'équation (D.7), on a :

$$c_{uy}[l] = \sum_{i=0}^{\infty} g[i] c_{uu}[l + d' + i] + \sum_{i=0}^{\infty} h[i] c_{u\omega}[l + i]. \quad (\text{D.8})$$

Comme  $\{u[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est une suite stationnaire de VA non corrélées de moyenne nulle et de variance  $\sigma_u^2$ , alors on a :

$$\begin{cases} c_{uu}[l] = \sigma_u^2 \neq 0, & l = 0, \\ c_{uu}[l] = 0, & l \neq 0, \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

et donc :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g[i] c_{uu}[l + d' + i] \neq 0, & l \leq -d', \\ \sum_{i=0}^{\infty} g[i] c_{uu}[l + d' + i] = 0, & l > -d'. \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

De plus, en utilisant l'équation (D.2), on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} h[i] c_{u\omega}[l + i] \neq 0, & l \leq m, \\ \sum_{i=0}^{\infty} h[i] c_{u\omega}[l + i] = 0, & l > m, \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

car  $c_{u\omega}[l] = c_{\omega u}[-l]$ . En utilisant ces deux derniers résultats et l'équation (D.8), on obtient :

$$c_{uy}[l] = 0, \quad \text{pour } l > \max\{-d', m\} = m. \quad (\text{D.12})$$

Par conséquent, on a :

$$\sum_{i=0}^{n_b} b_i c_{uy}[l - d' - i] = 0, \quad \text{pour } l > n_b + d' + m. \quad (\text{D.13})$$

◊ Nous nous intéressons maintenant au terme  $c_{\omega y}[l]$  de l'équation (D.5).  
D'après l'équation (D.7), on a :

$$c_{\omega y}[l] = \sum_{i=0}^{\infty} g[i]c_{\omega u}[l + d' + i] + \sum_{i=0}^{\infty} h[i]c_{\omega \omega}[l + i]. \quad (\text{D.14})$$

Comme  $\{\omega[k]\}_{k=0}^{N-1}$  est un bruit blanc, on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} h[i]c_{\omega \omega}[l + i] \neq 0, & l \leq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} h[i]c_{\omega \omega}[l + i] = 0, & l > 0. \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

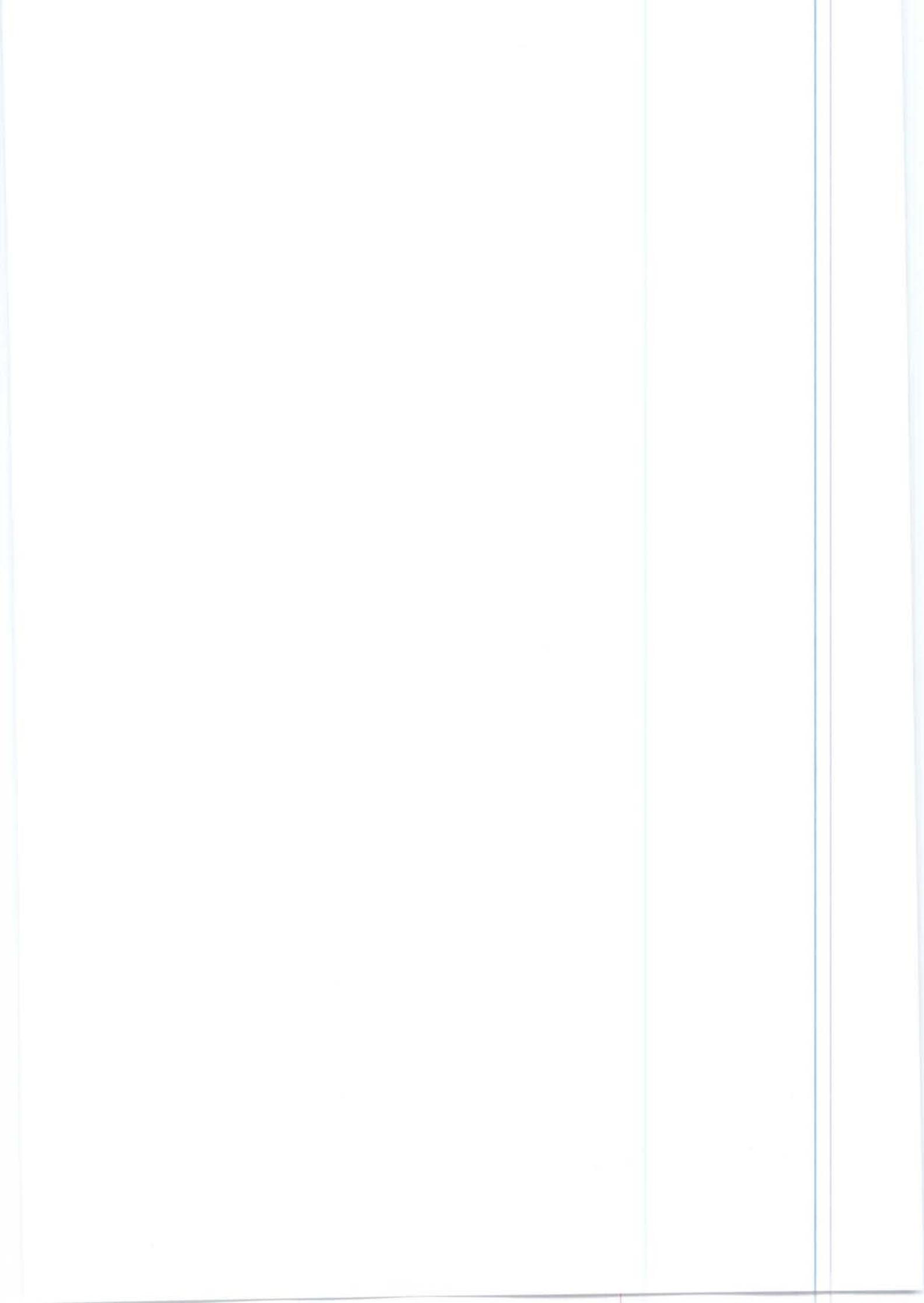
De plus, à partir de (D.2), on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g[i]c_{\omega u}[l + d' + i] \neq 0, & l \leq -d', \\ \sum_{i=0}^{\infty} g[i]c_{\omega u}[l + d' + i] = 0, & l > -d'. \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

Par conséquent, on a :

$$c_{\omega y}[l] = 0, \quad \text{pour } l > \max\{0, -d'\} = 0. \quad (\text{D.17})$$

Finalement, les résultats (D.13) et (D.17) montrent le résultat de l'équation (D.5), et par conséquent prouvent les équations de Yule–Walker généralisées.



# Liste des figures

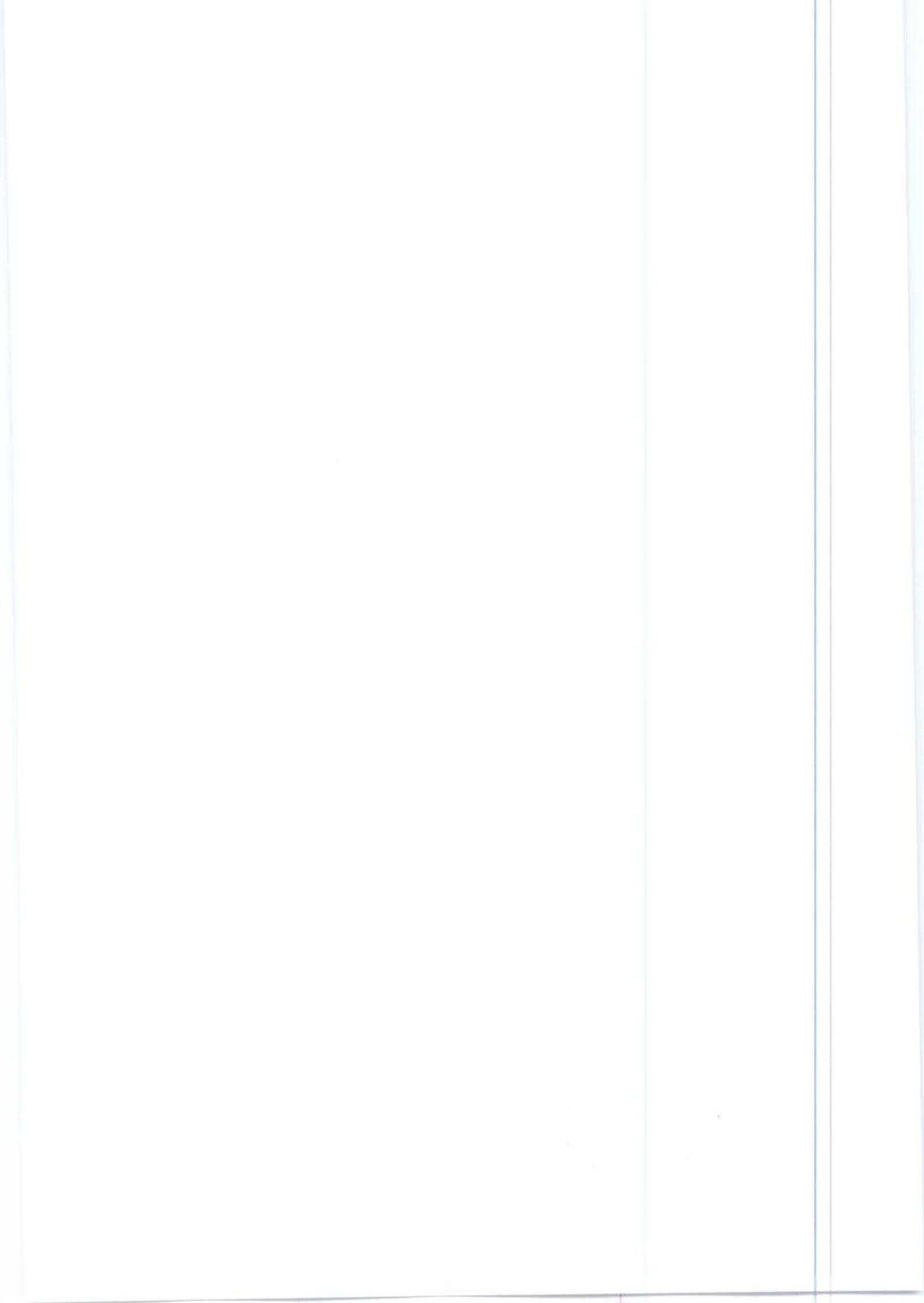
1.1	Brief de rivière aménagé. . . . .	6
1.2	Exemple d'aménagement hydroélectrique. . . . .	6
1.3	Schéma-bloc de la structure de modèle d'un bief de rivière aménagé. . . . .	9
1.4	Schéma-bloc de la structure de modèle n° 1. . . . .	10
1.5	Histogramme des estimées du retard par recherche exhaustive et minimisation de l'erreur de sortie. . . . .	14
1.6	Histogramme des conditionnements de la matrice $\bar{C}_{\psi}^N(d)$ . . . . .	14
1.7	Série de biefs de rivière aménagés en cascade. . . . .	15
1.8	Conduite des biefs de rivière aménagés en cascade. . . . .	16
1.9	Exemple d'une estimée de la réponse impulsionnelle entre les commandes de débit. . . . .	17
1.10	Schéma-bloc de la structure de modèle n° 2. . . . .	18
1.11	Histogrammes des ordres de l'excitation persistante de $\Delta u_{Q_e}$ et $\Delta u_{Q_s}$ sur une année. . . . .	21
1.12	Exemples de jeux de données. . . . .	22
1.13	Valeurs propres des matrices d'autocorrélation de $\Delta u_{Q_e}$ et $\Delta u_{Q_s}$ pour les trois jeux de données. . . . .	23
2.1	Exemple d'illustration d'une structure avec une boucle fermée. . . . .	30
2.2	Interprétation algébrique de la condition d'identifiabilité <i>a priori</i> (globale). . . . .	32
2.3	Identifiabilité <i>a priori</i> . . . . .	33
2.4	Identifiabilité <i>a priori</i> d'une structure stochastique – cas d'un bruit additif en sortie. . . . .	36
2.5	Identifiabilité <i>a posteriori</i> . . . . .	38
2.6	Discernabilité <i>a priori</i> de structures. . . . .	44
2.7	Variations des commandes de débits entrant et sortant (données) et variation du niveau en aval obtenue par une simulation. . . . .	46
2.8	Fonctions de sensibilité de la sortie du modèle nominal. . . . .	46
2.9	Résultats de l'identifiabilité <i>a posteriori</i> quantitative pour l'ensemble des jeux de données. . . . .	47
2.10	Histogrammes des nombres de conditionnement des matrices de sensibilité. . . . .	47
3.1	Schéma-bloc de la structure de modèle simplifiée d'un bief de rivière dans les conditions expérimentales passives. . . . .	50
3.2	Décomposition de la réponse impulsionnelle d'un système à retard. . . . .	52

3.3 Exemple de détection du retard par l'algorithme CUSUM pour un bruit de 0 dB sur la réponse impulsionnelle ( $\nu_m = 0.9$ et $\lambda = 2$ ). . . . .	53
3.4 Histogramme des estimées du retard par la méthode de détection CUSUM d'un saut de moyenne de la RI pour différents RSB (5000 réalisations de la RI bruitée, $\nu_m = 0.9$ et $\lambda = 2$ ). . . . .	54
3.5 Exemple de simulation sans bruit de la méthode de séparation fréquentielle. . . . .	56
3.6 Exemple de simulation avec un bruit de 20 et 10 dB de la méthode de séparation fréquentielle. . . . .	56
3.7 Histogrammes des estimées du retard $d = d' - 1 = 30$ pour différentes valeurs de $N$ et de RSB (5000 simulations de Monte Carlo). . . . .	61
3.8 Schéma-bloc de la structure considérée par la méthode des cumulants. . . . .	61
3.9 Histogrammes des estimées du retard $d = d' - 1 = 30$ par la méthode des cumulants pour différentes valeurs de $N$ et de RSB (5000 simulations de Monte Carlo). .	64
3.10 Schéma-bloc de la structure de modèle n° 1 (approche directe). . . . .	65
3.11 Entrée $\Delta u_{Q_e}$ du jeu de données du 09/03. . . . .	67
3.12 Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, $\Delta u_{Q_e}$ est une SBPA et $v$ une marche aléatoire. . . . .	68
3.13 Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB $\Delta u_{Q_e}$ est une SBPA et $v$ est un bruit blanc. . . . .	68
3.14 Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, $\Delta u_{Q_e}$ est l'entrée du jeu de données du 09/03 et $v$ une marche aléatoire. . . . .	68
3.15 Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, $\Delta u_{Q_e}$ est l'entrée du jeu de données du 09/03 et $v$ est un bruit blanc. . . . .	68
3.16 Exemple d'une structure avec rétroaction et action anticipatrice. . . . .	72
3.17 Exemples des estimées des fonctions d'autocorrélation de $\Delta u_{Q_e}$ et d'intercorrélation entre $\Delta u_{Q_e}$ et $\Delta u_{Q_s}$ . . . . .	76
3.18 Schéma-bloc de la structure de modèle n° 2 (approche indirecte). . . . .	76
3.19 Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, $\Delta u_{Q_e}$ est une SBPA et $v$ une marche aléatoire. . . . .	79
3.20 Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB $\Delta u_{Q_e}$ est une SBPA et $v$ est un bruit blanc. . . . .	79
3.21 Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, $\Delta u_{Q_e}$ est l'entrée du jeu de données du 09/03 et $v$ une marche aléatoire. . . . .	79
3.22 Approche indirecte : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, $\Delta u_{Q_e}$ est l'entrée du jeu de données du 09/03 et $v$ est un bruit blanc. . . . .	79
3.23 Retards estimés par l'approche directe. . . . .	81
3.24 Retards estimés par l'approche indirecte. . . . .	81
4.1 Schéma-bloc de la structure de modèle n° 2. . . . .	84
4.2 Exemple d'une réponse impulsionnelle théorique $h[k]$ entre le niveau $\Delta h_L$ (en m) et le débit entrant $\Delta u_{Q_e}$ (en $m^3 / s$ ). . . . .	85

4.3	Schéma–bloc d'un système mono–entrée/mono–sortie. . . . .	85
4.4	Estimées de la RIF au sens du MV (RSB = 0 dB). . . . .	87
4.5	Moyenne et écart–type des estimées de la RIF au sens du MV pour 500 simulations de Monte Carlo (0 dB) . . . . .	89
4.6	Estimées de la RIF au sens du MV et du MAP. . . . .	93
4.7	Barres impulsionales. . . . .	93
4.8	Loi de Rayleigh. . . . .	97
4.9	Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ . . . . .	100
4.10	Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB l'entrée est une SBPA et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ . . . . .	100
4.11	Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ . . . . .	100
4.12	Approche directe : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ . . . . .	100
4.13	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	101
4.14	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	101
4.15	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	101
4.16	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	101
4.17	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	102
4.18	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est une SBPA et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	102
4.19	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	102
4.20	MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l'entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	102
4.21	Estimées d'une RIF par l'estimateur du MAPC inacceptables. . . . .	107

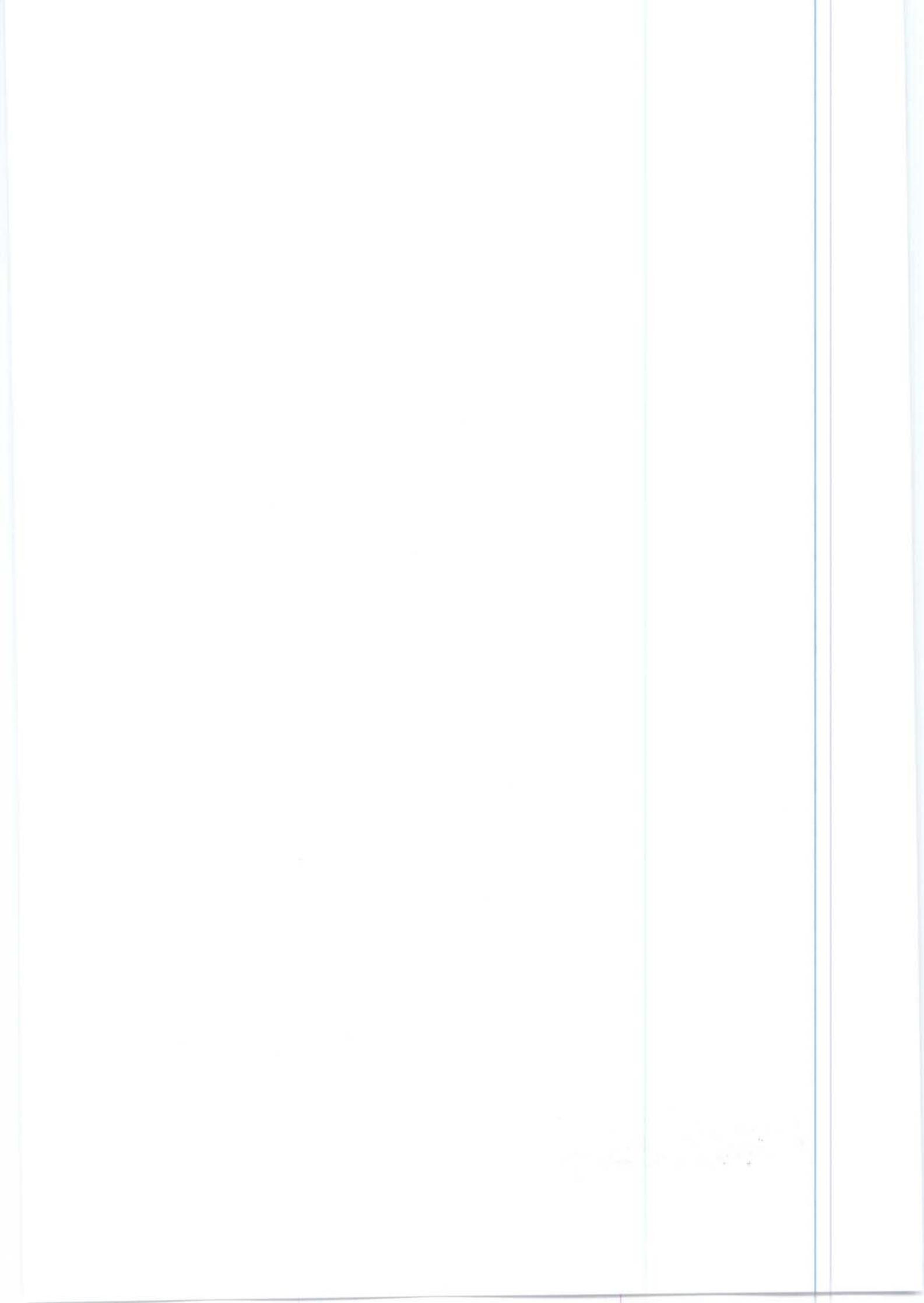
4.22 Estimées des paramètres et des hyperparamètres en fonction du nombre d’itération (RSB = -10 dB). . . . .	108
4.23 Évolution du critère en fonction de $\sigma_{h_D}^2$ pour différents RSB. . . . .	110
4.24 Densités de probabilité <i>a posteriori</i> ( $\alpha_0 = M$ et $\beta_0 = M\nu$ ) et <i>a priori</i> ( $\alpha_h = M/2$ et $\beta_h = M\nu - \nu/2$ ) de $\sigma_{h_D}^2$ pour $\nu = 10^{-8}$ . . . . .	114
4.25 Densité de probabilité <i>a posteriori</i> ( $\alpha_0 = M$ et $\beta_0 = \nu^{MV}$ ) et <i>a priori</i> ( $\alpha_h = M/2$ et $\beta_h = \nu^{MV}/2$ ) de $\sigma_{h_D}^2$ pour $\nu^{MV} = 10^{-8}.10^{-3}/M = 10^{-5}/M$ . . . . .	114
4.26 Estimées d’une RIF par l’estimateur du MAPC avec une loi <i>a priori</i> gamma inverse sur $\sigma_{h_D}^2$ . . . . .	115
4.27 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	116
4.28 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	116
4.29 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	116
4.30 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est uniforme. . . . .	116
4.31 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	117
4.32 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est une SBPA et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	117
4.33 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [1/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	117
4.34 MAPC : histogrammes des retards estimés pour différents RSB, l’entrée est celle du jeux de donnée du 09/03 et $w[k] = [(1 - q^{-1})/(1 - aq^{-1})]e[k]$ ; la densité de probabilité <i>a priori</i> sur le retard est une loi de Rayleigh. . . . .	117
4.35 RTJ : estimées de la RIF au sens du MV. . . . .	119
4.36 RTJ : estimées de la RIF au sens du MAP ( $\alpha = 10000$ ). . . . .	119
4.37 RTJ : RIF estimées par la méthode du MAPC avec une loi uniforme. . . . .	120
4.38 Retards estimés par la méthode du MAPC avec une loi uniforme. . . . .	120
4.39 RTJ : RIF estimées par la méthode du MAPC avec une loi de Rayleigh $\sigma_d = 6.5$ . . . . .	121
4.40 Retards estimés par la méthode du MAPC avec une loi de Rayleigh $\sigma_d = 6.5$ . . . . .	121
4.41 Intervalles de variations des retards empirique et estimé en fonction de la longueur du bief. . . . .	122

4.42 Différentes étapes de construction de l'algorithme proposé. . . . .	123
B.1 Principe de l'approche par filtrage des signaux . . . . .	137



# Liste des tableaux

1.1	Variables d'un bief de rivière aménagé. . . . .	6
1.2	Variables d'une série de biefs de rivière aménagés en cascade. . . . .	16
2.1	Différentes terminologies d'identifiabilité trouvées dans la littérature. . . . .	26
2.2	Valeurs nominales $\theta^*$ des paramètres du bief aménagé. . . . .	45
3.1	Valeurs des paramètres du modèle de simulation. . . . .	51
3.2	Valeurs des paramètres du modèle de simulation. . . . .	67
3.3	Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différentes résultats présentés aux FIG. 3.12 – 3.15. . . . .	69
3.4	Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différentes résultats présentés aux FIG. 3.19 – 3.22. . . . .	80
3.5	Applicabilité des méthodes d'estimation de retard à un bief de rivière aménagé. . .	82
4.1	Valeurs des paramètres du modèle de simulation. . . . .	85
4.2	Conditions de simulation des jeux de données d'estimation. . . . .	87
4.3	Conditions de simulation des 500 jeux de données d'estimation. . . . .	89
4.4	Conditions de simulation des jeux de données d'estimation. . . . .	93
4.5	Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différentes résultats présentés aux FIG. 4.9 – 4.20. . . . .	99
4.6	Conditions de simulation des jeux de données d'estimation. . . . .	107
4.7	Conditions de simulation des jeux de données d'estimation. . . . .	109
4.8	Conditions de simulation des 5000 jeux de données et méthodes d'estimation utilisées pour les différents résultats présentés aux FIG. 4.27 – 4.34. . . . .	115



S.C.D. - U.H.P. NANCY 1  
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES  
Rue du Jardin Botanique - BP 11  
54601 VILLERS-LES-NANCY Cedex

# Liste des algorithmes

1.1	Estimation du retard par recherche exhaustive et minimisation de l'erreur de sortie.	11
3.1	Principe des méthodes explicites fondées sur une recherche exhaustive vis-à-vis du retard.	58
3.2	Estimation du retard par la méthode des cumulants.	63
4.1	Estimation de $h$ et $d$ pour les hyperparamètres fixés.	98
4.2	Estimation de $h$ , $d$ et des hyperparamètres $\sigma_{h_D}^2$ , $\sigma_w^2$ .	105
4.3	Estimation de $h$ , $d$ et des hyperparamètres $\sigma_{h_D}^2$ , $\sigma_w^2$ avec une loi <i>a priori</i> gamma inverse sur $\sigma_{h_D}^2$ .	112



## Bibliographie

- BASSEVILLE, M. (1981), Edge detection using sequential methods for change in level, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **29**:32–50.
- BASSEVILLE, M. et I. M. NIKIFOROV (1993), *Detection of abrupt change. Theory and application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- BASTOGNE, T., M. THOMASSIN, H. GARNIER, A. RICHARD et A. LIBAUX (2002), Modélisation expérimentale de biefs de rivière : une estimation appropriée des retards, *dans 2ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nantes, France.
- BELKOURA, L. et Y. ORLOV (2002), Identifiability analysis of linear delay-differential systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information, special issue on "Analysis and design of delay and propagation systems"*, **19**(1–2):73–82.
- BELKOURA, L., M. DAMBRINE et J.-P. RICHARD (2000), Identifiability of delay systems : a distribution approach, *dans Proceedings of the 14th Conf. Mathematical Theory of Networks and Systems, Invited session FrM08 Control of delay and infinite dimensional systems*, Perpignan, France.
- BELLMAN, R. et K. J. ÅSTRÖM (1970), On structural identifiability, *Mathematical Biosciences*, **7**(3-4):329–339.
- BILMES, J. (1997), A gentle tutorial on the EM algorithm and its application to parameter estimation for gaussian mixture and hidden markov models, technical report, University of Berkeley, ICSI-TR-97-021.
- BJÖRKLUND, M., M. NIHTILÄ et T. SÖDERSTRÖM (1991), An algorithm for identification of linear system with varying time-delay, *dans Proceedings of the 9th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 1254–1259.
- BJÖRKLUND, S. (2003), *A survey and comparison of time-delay estimation methods in linear systems*, Thèse de doctorat, Division of Automatic Control, Department of Electrical Engineering, Linköping, Sweden.
- BOX, G. E. P. et G. M. JENKINS (1976), *Time series analysis: forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco.

- BREAMS, I., L. JAULIN, M. KIEFFER et E. WALTER (2002), Identifiabilités, discernabilités et analyse par intervalles, *dans Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pages 823–828, Nantes, France.
- BRUN, R., P. REICHERT et H. R. KÜNSCH (2001), Practical identifiability analysis of large environmental simulation models, *Water Resources Research*, **37**(4):1015–1030.
- CARLEMALM, C., S. HALVARSSON, T. WIGREN et B. WAHLBERG (1999), Algorithms for time delay estimation using low complexity exhaustive search, *IEEE Transaction on Automatic Control*, **44**(5):1031–1036.
- CARTER, G. C. (1987), Coherence and time delay estimation, *Proceedings of the IEEE*, **75**:236–255.
- CHAPELL, M., K. R. GODFREY et S. VAJDA (1990), Global identifiability of non-linear systems with specified inputs: a comparaison of methods, *Mathematical Biosciences*, **102**:41–73.
- CHAPMAN, M. J., K. R. GODFREY et S. VAJDA (1994), Indistinguishability for a class of nonlinear compartmental models, *Mathematical Biosciences*, **119**:77–95.
- CHAVENT, G. (1987), *Identifiability of parametric models*, chapitre Identifiability of parameters in the output least square formulation, pages 67–74, Pergamon Press, Oxford.
- CHEN, J.-M. et B. S. CHEN (1994), Identification of linear systems with unknown time delay and input–output noisy data: high-order correlation approach, *Control-Theory and Advanced Technology*, **10**(3):317–346.
- CUNO, B. et S. THEOBALD (1998), The relationship between control requirements, process complexity and modelling effort in the design process of river control systems, *Mathematics and Computers in Simulation*, **46**:611–619.
- DASTYCH, J. et H. UNBEHAUEN (1995), Some aspects on the identification of dead-times, *dans Proceedings of the 3rd European Control Conference*, tome 4, pages 3697–3701, Rome, Italy.
- DE KEYSER, R. M. C. (1986), Adaptive dead-time estimation, *dans Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Adaptative Systems in Control and Signal Processing*, pages 385–389, Lund, Sweden.
- DE SAINT-VENANT, A. B. (1871), Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **73**:148–154, 237–240.
- DEMOMENT, G. et J. IDIER (1999), Approche bayésienne pour la résolution des problèmes inverses en imagerie, *dans M. BONNET (éditeur), Problèmes inverses : de l'expérimentation à la modélisation*, Collection Arago, vol. 22, pages 59–77, Observatoire français des techniques avancées, Paris.

- DEMOMENT, G., J. IDIER, J.-F. GIOVANNELLI et A. MOHAMMAD-DJAFARI (2001), Problèmes inverses en traitement du signal et de l'image, tome TE 5 235 de *Traité Télécoms*, pages 1–25, Techniques de l'Ingénieur, Paris, France.
- DEMPSTER, A. P., N. M. LAIRD et D. B. RUBIN (1977), Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*(39):1–38.
- DENIS-VIDAL, L., G. JOLY-BLANCHARD et C. NOIRET (1999), Some results and applications about identifiability of non-linear systems, *dans Proceedings of the European Control Conference*.
- DIOP, S. et M. FLIESS (1991), Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories, *dans Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 714–719.
- DI STEFANO III, J. J. et C. COBELLI (1980), On parameter and structural identifiability: nonunique observability/reconstructibility for identifiable systems, others ambiguities, and news definitions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-25**(4):830–833.
- DOCHAIN, D. et P. A. VANROLLEGHEM (2001), *Automatique des bioprocédés*, chapitre Identification de modèles de bioprocédés, pages 53–86, Hermès Science Publications, Paris, France.
- DOCHAIN, D., P. A. VANROLLEGHEM et M. VAN DAELE (1995), Structural identifiability of a biokinetic models of activated sludge respiration, *Water Research*, **29**(11):2571–2578.
- DRAPER, N. R. et H. SMITH (1981), *Applied regression analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2nd édition.
- ELNAGGAR, A., G. A. DUMONT et A. L. ELSHAFEI (1991), Delay estimation using variable regression, *dans Proceedings of the American Control Conference*, pages 2812–2817, Massachusetts, USA.
- FAURE, F. et F. J. EVANS (1969), Identification of process delay time, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-14**:421–422.
- FERRETTI, G., C. MAFFEZZONI et R. SCATTOLINI (1991), Recursive estimation of time delay in sampled systems, *Automatica*, **27**(4):653–661.
- FLIESS, M. et H. SIRA-RAMÍREZ (2003), An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **9**:151–168.
- GARNIER, H. et T. BASTOGNE (2000), Identification à partir de données expérimentales de trois biefs aménagés de la Basse-Isère : Pizançon, La Vanelle et Beaumont-Monteux, rapport confidentiel de fin de contrat, EDF – Université Henri Poincaré Nancy 1.
- GEORGES, D. et X. LITRICO (2002), *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, Hermès Science Publications, Paris.

- GLOVER, K. et J. WILLEMS (1974), Parametrizations of linear dynamical systems: Canonical forms and identifiability, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19**(6):640–646.
- GODFREY, K. (1993), *Perturbation signals for system identification*, Acoustics, Speech And Signal Processing, Prentice-Hall International, Hertfordshire, UK.
- GODFREY, K. et J. J. DiSTEFANO III (1987), *Identifiability of parametric models*, chapitre Identifiability of model parameters, pages 1–20, Pergamon Press, Oxford.
- GODFREY, K. R. (1980), Correlation methods, *Automatica*, **16**:527–534.
- GREEN, P. J. (1990), On use of EM algorithm for penalized likelihood estimation, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*(52):443–452.
- GREWAL, M. et K. GLOVER (1976), Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**(6):833–837.
- GRIEWANK, A. (2001), *Complexity of gradients, jacobians, and hessians.*, Encyclopedia of Optimization. C. A. Floudas and P. M. Pardalos, éditeurs, Kluwer Academic Publishers.
- GUSTAVSSON, I., L. LJUNG et T. SÖDERSTRÖM (1977), Identification of processes in closed loop – Identifiability and accuracy aspects, *Automatica*, **13**:59–75.
- HADAMARD, J. (1902), Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Princeton University Bulletin*, pages 49–52.
- HIGHAM, D. J. (1995), Condition numbers and their condition numbers, *Linear Algebra and its Applications*, **214**:193–213.
- IDIER, J. (réacteur) (2001), *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès Science Publication, Paris.
- JAUBERTHIE, C. (2002), *Méthodologie de planification d'expériences pour systèmes dynamiques souples*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France.
- JAYNES, E. T. (2003), *Probability Theory: the logic of science*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- JULIEN, S., J. P. BABARY et P. LESSARD (2000), Theoretical and practical identifiability of an activated sludge process model, *Systems Analysis Modelling Simulation*, **37**(4):481–499.
- KAMINSKAS, V. (1979), Parameter estimation in systems with time-delay and closed loop systems, *dans Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 669–677, Darmstadt, RFA.
- KIEFER, J. et J. WOLFOWITZ (1956), Consistency of the maximum likelihood estimator in the presence of infinitely many incidental parameters, *Annals of Mathematical Statistics*, **27**(4):887–906.

- LANDAU, D. et A. BESANÇON-VODA (éditeurs) (2001), *Identification des systèmes*, Traité IC2, Série Systèmes Automatisés, Hermès Science Publication, Paris.
- LECOURTIER, Y. et E. WALTER (1981), Comments on “On parameter and structural identifiability: nonunique observability/reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new definitions”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(3):800–801.
- LEE, T. H. et C. C. HANG (1985), A performance study of parameters estimation schemes for systems with unknown dead-time, *dans Proceedings of the American Control Conference*, pages 512–516, Boston, USA.
- LITRICO, X. (1999), *Modélisation, identification et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre*, Thèse de doctorat, École Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts, Centre de Montpellier, France.
- LJUNG, L. (1976), On consistency and identifiability, *Mathematical Programming Study*, **5**:169–190.
- LJUNG, L. (1999), *System identification: theory for the user*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2nd édition.
- LJUNG, L. et T. GLAD (1994), On global identifiability for arbitrary model parametrizations, *Automatica*, **30**(2):265–276.
- LJUNG, L., T. GLAD et T. ANDERSSON (1993), Identifiability implies robust identifiability, *dans Proceeding of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 567–569, San Antonio, Texas.
- MALEK-ZAVAREI, M. et M. JAMSHIDI (1987), *Time-delay systems – analysis, optimization and applications*, tome 9 de *North-Holland systems and control series*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands.
- MARGARIA, G., E. RICCOMAGNO et L. J. WHITE (2004), Structural identifiability analysis of some highly structured families of statespace models using differential algebra, *Journal of Mathematical Biology*, **49**(5):433–454.
- MASSE, J. (2001), Diffedge : un environnement pour l’analyse de sensibilité et l’optimisation des modèles Simulink, manuel Utilisateur, version 1.2.
- NAGY, P. et L. LJUNG (1991), Estimating time-delays via state-space identification methods, *dans Proceedings of the 9th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 1141–1144, Budapest, Hungary.
- NGUYEN, V. V. et E. F. WOOD (1982), Review and unification of linear identifiability concepts, *SIAM Review*, **24**(1):34–51.

- NOIRET, C. (2000), *Utilisation du calcul formel pour l'identifiabilité de modèles paramétriques et nouveaux algorithmes en estimation de paramètres*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- NORTON, J. P. (1986), *An introduction to identification*, Academic Press.
- OLLIVIER, F. (1990), *Le problème de l'identifiabilité structurelle globale : approche théorique, méthode effectives et bornes de complexité*, Thèse de doctorat, École Polytechnique.
- OOI, S. K., M. P. M. KRUTZEN et E. WEYER (2005), On physical and data driven modelling of irrigation channels, *Control Engineering Practice*, **13**:461–471.
- ORLOV, Y., L. BELKOURA, M. DAMBRINE et J.-P. RICHARD (2002a), On-line parameter identification of linear time-delay systems, *dans Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages TuM08–4, Las Vegas, Nevada.
- ORLOV, Y., L. BELKOURA, M. DAMBRINE et J.-P. RICHARD (2002b), On identifiability of linear time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**(8):1319–1324.
- PAGE, E. S. (1954), Continuous inspection schemes, *Biometrika*, **41**:100–115.
- PUKEIKIS, R. (1985), Recursive estimation of the parameters of linear systems with time delay, *dans Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 787–792, York, U. K.
- REID, J. (1977), Structural identifiability in linear time-invariant systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22**(2):242–246.
- RICHALET, J., A. RAULT et R. POULIQUEN (1971), *Identification des processus par la méthode du modèle*, Gordon and Breach.
- RICHARD, A. (2003a), Modélisation statistique des signaux, cours du DEA Contrôle, Signaux et Communication, Nancy.
- RICHARD, J.-P. (2003b), Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, **39**:1667–1694.
- RIDOLFI, A. et J. IDIER (1999), Penalized maximum likelihood estimation for univariate normal mixture distributions, *dans Actes du 17e colloque GRETSI*, pages 259–262.
- ROBERT, C. P. (2001), *The Bayesian Choice: From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*, Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2<sup>e</sup> édition.
- SCHOUKENS, J. et R. PINTELON (1991), *Identification of linear systems: a practical guideline to accurate modeling*, Pergamon Press, Oxford, New York.
- SEDOGLAVIC, A. (2002), A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time, *Journal of Symbolic Computation*, **33**(5):735–755.

- SNOUSSI, H. et A. MOHAMMAD-DJAFARI (2002), Penalized maximum likelihood for multivariate gaussian mixture, *dans American Institute of Physics Conference Proceedings: Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, pages 36–46.
- SÖDERSTRÖM, T. (1999), Feedforward, correlated disturbances and identification, *Automatica*, **35**(9):1565–1571.
- SÖDERSTRÖM, T. et P. STOICA (1989), *System identification*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- THOMASSIN, M. et T. BASTOGNE (2003), Estimation du retard d'un bief de rivière aménagé par une approche bayésienne à partir des données de production, *dans Journées Doctorales d'Automatique*, Valenciennes, France.
- THOMASSIN, M., T. BASTOGNE, A. RICHARD et A. LIBAUX (2003a), A bayesian approach for time-delay estimation of a managed river reach in imposed experimental conditions, *dans IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, Rocquencourt, France.
- THOMASSIN, M., T. BASTOGNE, A. RICHARD et A. LIBAUX (2003b), Time-delay estimation of a managed river reach from supervisory data, *dans 13th IFAC Symposium on System Identification*, Rotterdam, Pays-Bas.
- THOMASSIN, M., T. BASTOGNE, A. RICHARD et A. LIBAUX (2004), Estimation des temps de propagation des débits dans les vallées hydrauliques, *La Houille Blanche, Revue Internationale de l'Eau*, **2**:36–42.
- TIKHONOV, A. et V. ARSENINE (1976), *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Editions Mir, Moscou.
- TONG, L. et S. PERREAU (1998), Multichannel blind identification: from subspace to maximum likelihood methods, *Proceeding of the IEEE*, **86**(10):1951–1968.
- TSE, E. et J. J. ANTON (1972), On the identifiability of parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-17**(5):637–646.
- VAJDA, S. (1987), *Identifiability of parametric models*, chapitre Identifiability of polynomial systems: structural and numerical aspects, pages 42–48, Pergamon Press, Oxford.
- VAJDA, S., K. R. GODFREY et H. RABITZ (1989), Similarity transformation approach to identifiability analysis of nonlinear compartmental models, *Mathematical Biosciences*, **93**(2):217–248.
- VANROLLEGHEM, P. A., M. VAN DAELE et D. DOCHAIN (1995), Practical identifiability of a biokinetic model of activated sludge respiration, *Water Research*, **29**(11):2561–2570.
- WALTER, E. (1982), *Identifiability of state-space models*, Springer, vol. 46 des Lecture Notes in Biomathematics, Berlin.

- WALTER, E. (1987), *Identifiability of parametric models*, Pergamon Press, Oxford.
- WALTER, E. et L. PRONZATO (1987), *Identifiability of parametric models*, chapitre Robust experiment design: between qualitative and quantitative identifiabilities, pages 104–112, Pergamon Press, Oxford.
- WALTER, E. et L. PRONZATO (1990), Qualitative and quantitative experiment design for phenomenological models – a survey, *Automatica*, **26**(2):195–213.
- WALTER, E. et L. PRONZATO (1994), *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, Paris.
- WEIJERS, S. R. et P. A. VANROLLEGHEM (1997), A procedure for selecting best identifiable parameters in calibrating activated sludge model no.1 to full-scale plant data, *Water Science and Technology*, **36**(5):69–79.
- WILLEMS, J. C. (1986), From time series to linear system – Part I. Finite dimensional linear time invariant systems, *Automatica*, **22**:561–580.
- WILLSKY, A. S. et H. L. JONES (1976), A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**:108–112.
- XIA, X. et C. H. MOOG (2003), Identifiability of nonlinear systems with application to HIV/AIDS models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**(2):330–336.
- ZHENG, W.-X. et C.-B. FENG (1990), Identification of stochastic time lag systems in the presence of colored noise, *Automatica*, **26**(4):769–779.
- ZHENG, W.-X. et C.-B. FENG (1991), Optimizing search-based identification of stochastic time-delay systems, *International Journal of Systems Science*, **22**(5):783–792.



S.C.D. - U.H.P. NANCY 1  
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES  
Rue du Jardin Botanique - BP 11  
54601 VILLERS-LES-NANCY Cedex

Mademoiselle THOMASSIN Magalie

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1

en AUTOMATIQUE, TRAITEMENT DU SIGNAL & GENIE INFORMATIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER n° 1069

Nancy, le 11 juillet 2005

Le Président de l'Université



## Résumé

Cette thèse porte sur l'identification de modèles à temps discret, et plus précisément, sur l'estimation de retard. Ces travaux sont motivés par une application à des biefs de rivière aménagés pour la production d'énergie hydroélectrique. Les difficultés résident dans l'obligation d'utiliser des données recueillies dans un contexte de régulation avec action anticipatrice effectuée par un opérateur humain.

Après avoir classé les diverses notions d'identifiabilité, une approche permettant de déterminer le degré d'identifiabilité *a posteriori* des paramètres est proposée. Son application montre la faible identifiabilité du retard pour les données disponibles. Ensuite, une étude d'applicabilité des méthodes existantes d'estimation de retard au cas du modèle du bief est menée en motivant les choix retenus. Ceci a conduit à la généralisation d'une méthode fondée sur les corrélations des signaux d'entrée-sortie. Afin de pallier les inconvénients engendrés par les conditions expérimentales passives, une méthode originale d'identification bayésienne est développée. Elle est non-supervisée et simple à mettre en œuvre. La difficulté majeure de son développement a été l'estimation des hyperparamètres à cause de la dégénérescence d'une densité de probabilité. Les résultats d'application montrent une diminution sensible de la plage de variation du retard. Leur analyse a permis de vérifier leur cohérence vis-à-vis des paramètres physiques du bief.

**Mots-clés** : identification des systèmes, estimation de retard, conditions expérimentales passives, approche bayésienne, identifiabilité, bief de rivière aménagé.

## Abstract

This thesis deals with the identification of discrete-time models, and particularly the time-delay estimation. This work is justified by an application to river reaches managed for hydroelectric energy production. The difficulties lie in the obligation to use data collected in a context of combined feedback/feedforward control carried out by a human operator.

After having classified the various concepts of identifiability, an approach allowing one to determine the degree of *a posteriori* identifiability of the parameters is proposed. Its application shows the low identifiability of the time-delay for the available data. Then, an applicability study of the existing time-delay estimation methods to the reach model case is undertaken by justifying the retained choices. This has led to the generalization of a method based on correlations between the inputs and the output. In order to mitigate the disadvantages generated by the normal operating conditions, an original Bayesian identification method is developed. It is non-supervised and simple to implement. The major difficulty of its development has been the hyperparameters estimation because of the degeneration of a probability distribution. Application results show a reduction in the time-delay interval variation. Their analysis permitted to check their coherence with respect to the physical parameters of the reach.

**Keywords** : system identification, time-delay estimation, normal operating conditions, Bayesian approach, identifiability, managed river reach