



HAL
open science

Etude des méthodes de simulations numériques par codes eulériens de Vlasov pour les plasmas chauds

Abdelkader Benmedjadi

► **To cite this version:**

Abdelkader Benmedjadi. Etude des méthodes de simulations numériques par codes eulériens de Vlasov pour les plasmas chauds. Matière Condensée [cond-mat]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1991. Français. NNT : 1991NAN10040 . tel-01747171

HAL Id: tel-01747171

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747171>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITE DE NANCY-I

U.F.R S.T.M.P

THESE

PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU TITRE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE NANCY-I EN PHYSIQUE

PAR

Abdelkader BENMEDJADI

**ETUDE DES METHODES DE SIMULATIONS NUMERIQUES PAR
CODES EULERIENS DE VLASOV POUR LES PLASMAS CHAUDS**

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 05 JUILLET 1991 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury:

President : M. G. BAUMANN

Rapporteurs : MM. J. C. ADAM
M. FEIX

Examineurs: MM. E. FIJALKOW
G. LECLERT
J. ROCHE
P. BERTRAND

AVANT PROPOS

Je voudrais remercier M. le Professeur BAUMANN d'avoir bien voulu m'accueillir dans son laboratoire, et de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. le Professeur BERTRAND, qui a dirigé ce travail. Ses encouragements constants et son dynamisme ont permis la réalisation de ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à MM. J.C. ADAM directeur de recherche au C.N.R.S et M. FEIX directeur de recherche au C.N.R.S, qui ont bien voulu accepter la tâche ingrate d'examiner ce travail. Je les en remercie, ainsi que pour leur participation au jury et à l'intérêt qu'il ont donné à ce travail.

Mes vifs remerciements à M. E. FIJALKOW, qui m'a fait l'honneur de venir à NANCY pour participer au jury, et pour les remarques constructives qu'il a formulées.

Je suis très reconnaissant envers MM. J. ROCHE et G. LECLERT pour leur enthousiasme et leur nombreuses suggestions.

Je remercie très chaleureusement tous mes camarades de laboratoire pour leur esprit d'entr'aide, et qui ont su m'entourer d'une amitié généreuse.

TABLE DES MATIERES

INTRDUCTION

CHAPITRE I : EQUATION DE VLASOV - FONCTION H - MELANGE DANS L'ESPACE DES PHASES

I- LES INVARIANTS DU SYSTEME VLASOV POISSON

I.1 Propriétés d'invariance dans l'espace des phases

I.2 Les invariants du système VLASOV-POISSON

II- FONCTION H D'UN SYSTEME DE VLASOV

III- MICROSTRUCTURE ET "MELANGE" DANS L'ESPACE DES PHASES

IV- DISTRIBUTION FINE ET DISTRIBUTION "COARSE GRAINED"

V- PROBLEME DE LA RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE VLASOV

CHAPITRE II : CODES NUMERIQUES DE L'EQUATION DE VLASOV

I- INTRODUCTION

II- ALGORITHME NUMERIQUE DE RESOLUTION DU SYSTEME VLASOV-POISSON

II.1 La méthode des pas fractionnaires - Splitting scheme

II.2 Interprétation physique de la méthode

II.3 Les méthodes d'interpolation

II.3.1 Méthode d'interpolation par spline cubique

II.3.2 Application des splines cubiques à la solution numérique des advections

II.3.3 Méthode d'interpolation de FOURIER

II.3.4 Méthode d'interpolation par conservation de flux

CHAPITRE III : SIMULATIONS NUMERIQUES ET MESURE DE LA PERTE D'INFORMATION

- I- INTRODUCTION
- II- PREMIERE CONDITION INITIALE : EQUILIBRE BGK
 - II.1 Ondes BGK
 - II.2 Conditions initiales
 - II.3 Etude de l'entropie
 - II.4 L'entropie mesure la perte d'information
- III- DEUXIEME CONDITION INITIALE : TROUS GENERES
PAR UNE ONDE DE GRANDE AMPLITUDE
 - III.1 Paramètres de la simulation
 - III.2 L'entropie mesure la perte d'information
- IV- TROISIEME CONDITION INITIALE : TROUS CREEES
INITIALEMENT
 - IV.1 Etude de l'entropie
 - IV.2 Corrélation entre pic et saut d'entropie
- V- INFLUENCE DE LA GRILLE DE L'ESPACE DES PHASES
SUR L'EVOLUTION DU SYSTEME
 - V.1 Introduction
 - V.2 Influence de la grille
- VI- COMPARAISON AVEC D'AUTRES CODES POUR UNE MEME
GRILLE DE L'ESPACE DES PHASES
 - VI.1 Résultats numériques
- VII- COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU PIC CENTRAL
- VIII- CONCLUSION

CHAPITRE IV : COMPARAISON AVEC DES SIMULATIONS DE REFERENCE

- IV.1 INTRODUCTION
- IV.2 DEFINITION D'UNE SIMULATION DE REFERENCE
- IV.3 RESULTATS DE LA SIMULATION
- IV.4 CONCLUSION

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

On appelle plasma un gaz dans lequel un grand nombre d'atomes sont ionisés, sous l'effet d'une haute température, d'un rayonnement, etc.... C'est l'état de la matière le plus répandu dans l'univers.

Si la physique des plasmas a pris ces dernières années une extension considérable c'est à cause essentiellement des programmes de recherche en fusion thermonucléaire contrôlée. Depuis plusieurs années les physiciens tentent de confiner un plasma ultra chaud et de contrôler les réactions de fusion thermonucléaire, afin de pouvoir transformer ainsi l'énergie libérée par le plasma en énergie électrique utilisable.

En dehors de l'astrophysique et de la fusion thermonucléaire, les milieux plasma apparaissent dans les domaines très variés de la physique, touchant également à la physique du solide ou l'électronique.

Dans ce travail nous ne considérons que des gaz totalement ionisés et formés seulement de deux types de particules ; les électrons et les ions.

Pour les plasmas chauds et de faible densité, une description collective peut être employée, les phénomènes individuels tels les collisions sont négligeables, une telle description repose sur la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pour chaque espèce de particules. L'évolution du plasma est alors décrite par l'équation de VLASOV, les équations de MAXWELL relatives au champs autocohérents.

Dans le cas simplifié où l'on ne considère que des oscillations longitudinales, les équations de MAXWELL se ramènent à la seule équation de POISSON : on parle alors de modèle électrostatique de VLASOV-POISSON.

Le système VLASOV-MAXWELL forme donc l'ensemble des équations de base pour l'étude des phénomènes collectifs dans les plasmas. Or même dans sa version simplifié de VLASOV-POISSON, ce système est non linéaire et il n'existe pas, en général, de solution mathématique exacte. Dans tout ce travail nous

nous restreindrons d'ailleurs à ce système VLASOV-POISSON, dont nous rappellerons au chapitre I les conditions d'application.

S'il n'existe donc pas de solution analytique générale, en revanche la puissance des supercalculateurs actuels nous incite naturellement à considérer ce système VLASOV-POISSON comme la base d'un modèle de simulation numérique des effets collectifs dans un plasma chaud : la simulation numérique est une technique d'investigation remarquable dans beaucoup de domaines scientifiques, au même titre que les méthodes théoriques ou expérimentales. Il est donc fondamental de pouvoir disposer de modèles dûment validés. En ce qui concerne la physique des phénomènes collectifs dans les plasmas, le modèle actuellement le plus utilisé consiste à intégrer numériquement le mouvement d'un grand nombre de particules dans leur propre champ autocohérent. Malheureusement, pour des raisons bien compréhensibles, on ne peut traiter qu'un nombre de particules (quelques millions) bien inférieur à la réalité, ce qui crée dans le système des fluctuations à un niveau anormalement élevé. Il est alors tentant de considérer un modèle où l'on résoud directement l'équation de VLASOV, ce qui revient à traiter un nombre infini de particules, qui est finalement plus près de la réalité.

Cependant, la fonction de distribution qui obéit à l'équation de VLASOV, possède la propriété d'osciller au cours du temps avec des longueurs d'onde de plus en plus petites dans l'espace des phases, et fait apparaître une microstructure. Ceci pose alors deux problèmes :

- D'un point de vue numérique, tout schéma est basé sur un échantillonnage de l'espace des phases, avec une grille spatiale Δx et une grille dans l'espace des vitesses Δv . Il est évident que lorsque la microstructure devient aussi petite que $\Delta x \Delta v$, le code numérique ne peut plus suivre correctement la solution mathématique de l'équation de VLASOV.

- D'un point de vue plus fondamental, on peut se demander qu'elle est la signification physique d'oscillation de longueur d'onde de plus en plus petite dans l'espace des

phases.

Les deux problèmes sont évidemment liés, car si on peut montrer que la présence d'une microstructure mathématique ne modifie pas le comportement physique ultérieur du plasma, alors on peut espérer qu'un code numérique, (qui lisse cette microstructure), puisse simuler correctement la physique du plasma. Le cas contraire reviendrait alors à condamner la simulation numérique des plasmas.

C'est à la réponse à cette double question qu'est consacré ce travail.

Le plan en est le suivant :

Dans le premier chapitre nous définissons la classe des plasmas envisagés dans cette étude ; les plasmas de VLASOV. Quelques résultats analytiques sont rappelés dans la mesure où ils forment autant de test pour la mise au point de modèles numériques.

Nous décrivons dans le chapitre II l'algorithme numérique de résolution du système VLASOV-POISSON ainsi que les méthodes d'interpolation.

Le troisième chapitre a été consacré à l'étude de l'évolution de l'entropie, et, plus généralement de la fonction H. D'un point de vue théorique, cette fonction H est un invariant pour le système VLASOV-POISSON. Alors que les simulations numériques ont montré qu'il y a une bonne conservation des invariants tel que l'énergie totale, le nombre de particules, en revanche pour la fonction H il y a une variation (augmentation) au cours du temps. Cette augmentation numérique est bien entendu liée à l'impossibilité pour le code de suivre la microstructure de la fonction de distribution.

L'étude de la fonction H a été faite avec trois conditions initiales qui permettent de générer un violent "mélange" dans l'espace des phases et avec trois codes numériques qui utilisent des interpolations différentes.

Dans le chapitre IV, nous avons alors considéré une simulation de référence avec une grille dans l'espace des phases très fine. Le problème posé est le suivant : peut-on en filtrant la fonction de distribution, retrouver le même état asymptotique que celui obtenu avec un code numérique

ayant une grille avec un nombre de point très inférieur à celui de la grille de référence et pour le même temps. Ce travail a été réalisé à partir de simulations numériques effectuées sur le calculateur vectoriel CRAY-II (du CCVR).

CHAPITRE I

EQUATION DE VLASOV

FONCTION H

MELANGE DANS L'ESPACE DES PHASES

CHAPITRE I : EQUATION DE VLASOV - FONCTION H - MELANGE DANS L'ESPACE DES PHASES

Considérons un plasma non collisionnel, formé de N électrons de charge e et de masse m , neutralisé électriquement par la présence d'un fond ionique homogène. On se restreint à une géométrie unidimensionnelle. L'évolution de ce plasma peut être décrite par le système non linéaire de VLASOV-POISSON

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad \text{I.1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f \, dv + \frac{en_i}{\epsilon_0} \quad \text{I.2}$$

$f(x,v,t)$ étant la fonction de distribution des électrons, n_i la densité ionique uniforme et $E(x,t)$ le champ électrique autocohérent.

Le modèle de VLASOV décrit les phénomènes collectifs dans un plasma, où les phénomènes individuels (collisions) sont négligeables. Les forces d'interaction étant d'origine coulombienne, les interactions sont à longue portée. L'importance des effets individuels (collisions) par rapport aux effets collectifs est mesurée par le paramètre g (paramètre de grain)

$$g = 1/(n_0 l_D^3) \quad \text{I.3}$$

l_D étant la longueur de DEBYE

Le paramètre g tend vers zéro dans la limite des effets collectifs.

Dans le modèle VLASOV, l'individualité de la particule peut être ignorée et toutes les interactions sont traitées à travers un champ moyen (voir équation (I.2)). Dans la réalité physique, le paramètre g reste très petit pour les

plasmas chauds de l'espace ou pour la fusion thermonucléaire ($g \approx 10^{-9}$ pour les plasmas thermonucléaires).

I- LES INVARIANTS DU SYSTEME VLASOV-POISSON

Une particule est représentée dans l'espace des phases par un point qui, en se déplaçant au cours du temps, définit une trajectoire dans cet espace. La représentation dans l'espace des phases, ici à deux dimensions (x,v) puisqu'on se restreint à un modèle unidimensionnel, est très utile, car elle contient toutes les variables dynamiques qui caractérisent le système.

I-1 Propriétés d'invariance dans l'espace des phases

Une des propriétés de l'espace des phases est qu'il y a conservation du volume dans cet espace.

De plus l'équation de VLASOV s'écrit

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{I.4}$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée totale en suivant le mouvement de la particule dans l'espace des phases. Cette équation (I.4) montre que f est constante le long de la trajectoire et que sa variation $\frac{df}{dt}$ est nulle.

Ces propriétés d'invariance ont été exploitées dans le modèle Water-Bag [1]. L'idée de base du modèle Water-Bag est en effet de considérer des conditions initiales dans lesquelles la fonction de distribution est constante dans un certain domaine de l'espace des phases et nulle à l'extérieur. La propriété d'invariance du volume de l'espace des phases permet de remplacer l'étude de l'évolution de la fonction de distribution par l'étude de l'évolution de la frontière du domaine.

I-2 Les invariants du système VLASOV-POISSON

On considère à nouveau le système de VLASOV-POISSON (I.1)-(I.2). Les moments d'ordre 0, 1, 2 en v de la fonction de

distribution s'obtiennent en multipliant l'équation (I.1) par 1, mv , $\frac{1}{2}mv^2$ et en intégrant par rapport aux variables x et v .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint \left[\frac{1}{1/2} \frac{mv}{mv^2} \right] f \, dv \, dx + \iint \left[\frac{1}{1/2} \frac{mv}{mv^2} \right] v \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dv \\ - \frac{e}{m} \iint E \left[\frac{1}{1/2} \frac{mv}{mv^2} \right] \frac{\partial f}{\partial v} \, dx \, dv = 0 \end{aligned} \quad \text{I.5}$$

Dans tout ce qui suit, on suppose une périodicité spatiale. Le plasma est enfermé dans une boîte périodique de longueur L . Le champ électrique moyen dans la boîte est nul, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{L} \int_0^L E \, dx = 0 \quad \text{I.6}$$

On suppose de plus que la fonction de distribution f tend vers zéro quand $|v|$ tend vers l'infini.

La première des équations (I.5) s'écrit

$$\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \int f \, dx \, dv + \frac{1}{L} \int_0^L \int v \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dv - \frac{e}{m} \frac{1}{L} \int_0^L \int E \frac{\partial f}{\partial v} \, dx \, dv = 0$$

ce qui donne

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int f \, dx \, dv = \text{CONSTANTE} \quad \text{I.7}$$

l'équation (I.7) traduit la conservation de la densité moyenne.

La deuxième des équations (I.5) s'écrit

$$\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \int m v f \, dx \, dv + \frac{1}{L} \int_0^L \int \frac{\partial}{\partial x} (m v^2 f) \, dx \, dv - \frac{e}{L} \int_0^L \int E v \frac{\partial f}{\partial v} \, dx \, dv = 0$$

et conduit à l'invariance de la quantité de mouvement moyenne.

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int m v f \, dx \, dv = \text{CONSTANTE} \quad \text{I.8}$$

La troisième de ces équations (I.5) s'écrit

$$\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \int \frac{1}{2} m v^2 f dx dv + \frac{1}{L} \int_0^L \int \frac{1}{2} m v^3 \frac{\partial f}{\partial x} dx dv - \frac{e}{L} \int_0^L \int \frac{1}{2} v^2 E \frac{\partial f}{\partial v} dx dv = 0$$

et conduit à la conservation de l'énergie totale, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[E_c + \frac{\epsilon_0}{2L} \int_0^L E^2 dx \right] = 0$$

$$E_c = \frac{1}{L} \int_0^L \int \frac{1}{2} m v^2 f dx dv \quad \text{I.9}$$

Pour le système de VLASOV-POISSON, la densité de particule, la quantité de mouvement et l'énergie sont des invariants exacts.

II- FONCTION H D'UN SYSTEME DE VLASOV

En thermodynamique il est fréquent d'utiliser la quantité $H = - \int f \ln f dx dv = \int S/R$ ou S est l'entropie thermodynamique pour un gaz parfait, \int et R sont des constantes. Pour un système sans collision cette fonction H de BOLTZMANN ($H = - \int f \ln f dx dv$) est seulement une des variétés des fonctions H de la forme :

$$H = - \int C(f) dx dv \quad \text{I.10}$$

où $C(f)$ est une fonctionnelle de la fonction de distribution /2-3 /.

Nous partons de l'équation de VLASOV. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= - \frac{d}{dt} \int C(f) dx dv \\ &= - \int \frac{\partial C(f)}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} dx dv \\ &= - \int \frac{\partial C(f)}{\partial f} \left[v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} \right] dx dv \end{aligned} \quad \text{I.11}$$

En intégrant les deux termes par rapport à x et v en tenant compte que f est périodique et qu'elle tend vers zéro quand $|v|$ tend vers l'infini. On obtient

$$\frac{dH(t)}{dt} = 0 \quad \text{I.12}$$

Ainsi $\int C(f) dx dv$ est indépendante du temps. H est un invariant exact pour un système VLASOV-POISSON.

III- MICROSTRUCTURE ET "MELANGE" DANS L'ESPACE DES PHASES

L'équation de VLASOV, par sa nature même, crée une filamentation (microstructures) dans l'espace des phases /4 /. En fait c'est le terme $\exp(ikvt)$ qui décrit la filamentation et qui est négligé dans le traitement analytique de l'équation de VLASOV linéarisé /5 /.
Considérons une fonction de distribution avec une inhomogénéité spatiale avec un nombre d'onde k ; si on considère seulement l'advection due au mouvement libre, c'est à dire le cas où le champ autocohérent est nul ($E=0$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

à $t = 0$ on a

$$f(x,v,0) = h(v) \exp(ikx)$$

à l'instant t , la fonction de distribution $f(x,v,t)$ s'écrit

$$f(x,v,t) = h(v) \exp(ikvt) \exp(ikx) \quad \text{I.13}$$

Ainsi nous avons des "fréquences" en v proportionnelles à kt . La filamentation de la fonction de distribution dans l'espace des phases est générée continuellement. Elle nécessite donc pour des temps longs, un très grand nombre de points pour la suivre numériquement.
Dans l'espace des phases (x,v) il apparaît des filaments

séparés par une largeur $\delta v \sim 6-7 \%$. Sur la figure (I.1), nous avons schématisé ceci. A $t=0$ les particules sont localisées dans le rectangle ABCD (fig. I.1a), après un certain temps, les particules les plus rapides (initialement en B et D) arrivent à la frontière et apparaissent dans les coins de l'espace des phases (fig. I.1b, ...). La figure (I.1d) montre l'évolution du système après un temps t grand (filamentation).

Lorsque δv devient de l'ordre du plus petit écart dv en vitesse mesurable (où précision en vitesse), tout système de mesure ne peut plus suivre l'évolution de la microstructure. Il ne peut que suivre une structure lissée (coarse grained).

IV- DISTRIBUTION FINE ET DISTRIBUTION "COARSE GRAINED"

Nous avons montré que $\int C(f) dx dv$ est un invariant pour le système VLASOV-POISSON où f est la fonction de distribution exacte appelée aussi "fine grained". Les problèmes de microstructures conduisent à travailler sur une fonction de distribution moyennée $\langle f(x,v,t) \rangle$ sur des petits volumes mais finis de l'espace des phases. L'espace des phases est alors divisé en macrocellules d'égal volume $\Delta \mu = \Delta x \Delta v$. LYNDEN BELL et al. (1986) introduit une fonction $H = - \int C(F) dx dv$ où F est définie comme étant la moyenne de la fonction de distribution fine autour de l'élément de volume μ . F est appelée fonction de distribution "coarse grained".

$$F(x,v,t) = \frac{1}{\Delta \mu} \int_{\Delta \mu} f(x',v',t) dx' dv' \quad I.14$$

On peut établir l'évolution de la fonction H en s'appuyant sur la différence entre la fonction de distribution fine et la fonction de distribution "coarse grained".

A partir de la fonction de distribution initiale $f(x,v)$ (fine grained) qui contient toute la microstructure et toute l'information, le processus de "coarse graining" lisse cette fonction de distribution pour donner une fonction de distribution "coarse grained" F .

D'après (I.10) on a :

$$H(F) - H(f) = \int [C(f) - C(F)] dx dv \quad I.15$$

avec $C(f)$ une fonctionnelle convexe, et $C(0)=0$.

L'intégrale (I.10) peut être remplacé par /2 /

$$H = - \int C(f) dV \quad I.16$$

D'après les propriétés des fonctions convexes /8 /, (I.15) devient

$$H(F) - H(f) \geq \int (f - F) C'(F) dV \quad I.17$$

où C' est la dérivée de C , et $C'(0)=0$.

L'intégration par partie de (I.17) donne

$$H(F) - H(f) \geq (n-n') C'(F) - \int (n-n') C''(F) \frac{dF}{dV} dV \quad I.18$$

où n et n' sont les densités ; $n(V) = \int f(V) dV$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (I.17) s'annule (il y a conservation de la densité $n(\infty)=n'(\infty)$).

Le second terme est positif, en effet $n'(V) \leq n(V)$ (F est plus mélangé que f), $C'' > 0$ (C est une fonction convexe)

et finalement on obtient :

$$H(F) \geq H(f) \quad I.19$$

V- PROBLEME DE LA RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE VLASOV

D'un point de vue numérique, la résolution de l'équation de VLASOV revient à itérer un processus d'intégration défini sur un pas de temps Δt . Cette intégration numérique est basée sur un maillage de l'espace des phases en cellules $\Delta x \times \Delta v$; la fonction de distribution est lissée par le schéma numérique à l'échelle de $\Delta x \times \Delta v$. Ainsi, sur chaque intervalle de temps $[n \Delta t, (n+1) \Delta t]$ on aura

$$H[f_{(n+1) \Delta t}] \geq H[f_n \Delta t]$$

Il est clair que H ne peut alors qu'augmenter au cours du temps dans un code numérique, alors que mathématiquement nous voudrions pouvoir résoudre l'équation de VLASOV en gardant à f toutes ses propriétés et en particulier les propriétés de conservation. Or il est relativement facile de construire un

schéma qui conserve les invariants habituels (densité de particules, énergie) il est impossible de vouloir conserver H .

Toute la question est de savoir si cette impossibilité de conservation de H , condamne toute méthode numérique de l'équation de VLASOV, ou si au contraire, il est possible de s'en affranchir, et dans quelle mesure.

La réponse à cette question est importante à deux points de vue :

- du point de vue de la simulation numérique : il est important, en effet, d'avoir le contrôle sur ce que résoud effectivement le code numérique.
- d'un point de vue plus fondamental, il est important de savoir quel est le comportement de la microstructure sur le comportement asymptotique des solutions de VLASOV.

Le but de notre travail est de tenter d'apporter une réponse satisfaisante à ces questions.

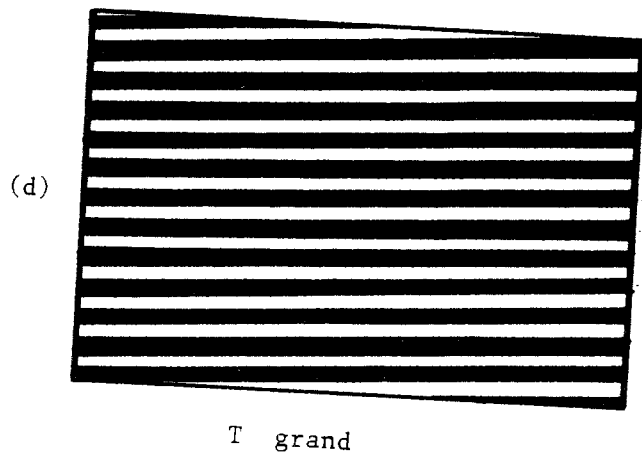
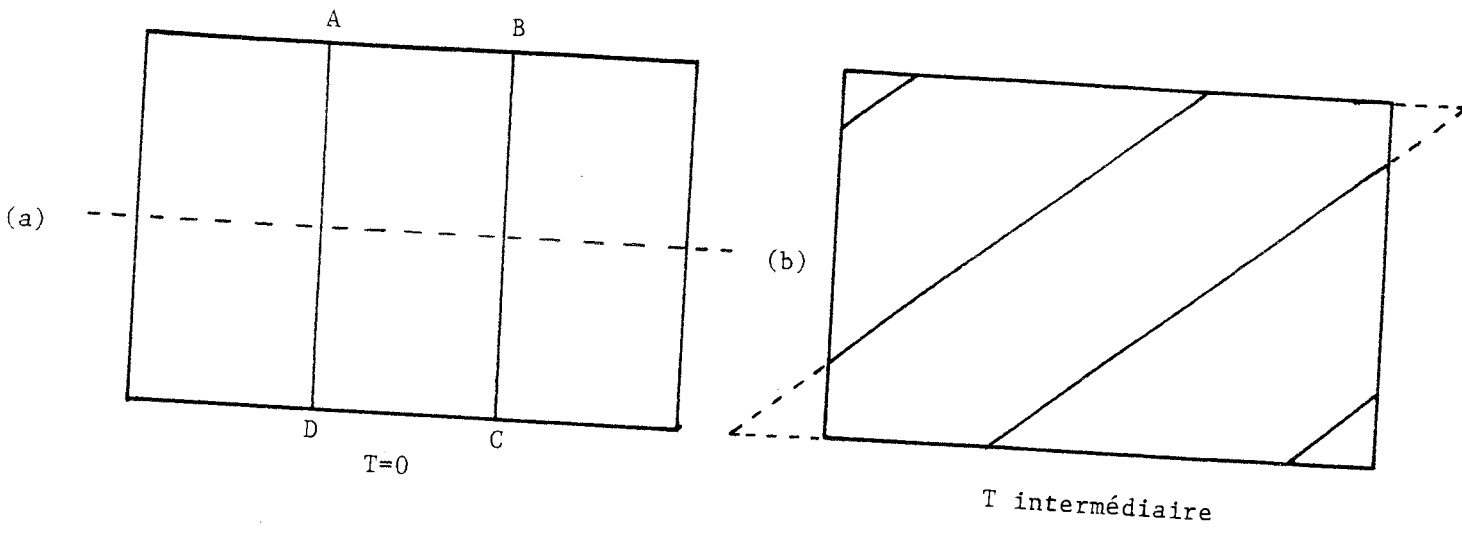


fig. I.1

CHAPITRE II

CODES NUMERIQUES DE L'EQUATION DE VLASOV

CHAPITRE II : CODES NUMERIQUES DE L'EQUATION DE VLASOV

I- INTRODUCTION

En physique des plasmas, la description mathématique est bien connue et bien définie, bien que la résolution en soit très compliquée. Les solutions analytiques de l'équation de VLASOV par exemple restent limitées au domaine linéaire ou faiblement non linéaire. Des hypothèses simplificatrices sont nécessaires même dans le cas des faibles non linéarités, et leur vérification expérimentale s'impose. La non linéarité exclue la plupart du temps la possibilité de toute étude analytique. Dans ces conditions le recours à des simulations numériques s'avère indispensable. La simulation numérique en fournissant des solutions approchées à un problème donné, comble cette importante lacune de la théorie.

Deux classes de modèles pour la simulation des plasmas peuvent être définis.

a) Les modèles lagrangiens

Ils consistent à suivre simultanément l'évolution de toutes les particules au cours du temps. Chacune d'elle obéit aux équations de la mécanique classique /9-10-11/. Compte tenu de la capacité des ordinateurs, on ne suivra qu'un nombre limité de particules.

b) Les modèles eulériens

Ils consistent à résoudre numériquement le système d'équation VLASOV-POISSON soit en suivant directement l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases, soit en utilisant des méthodes de transformation.

Cette deuxième classe contient un grand nombre de méthodes ; les schémas aux différences /12-13 / ne donnent pas de bons résultats. En effet on montre que l'apparition de la microstructure est la cause d'une détérioration rapide de la validité de la simulation, d'où l'idée d'utiliser des méthodes de transformations, dont les principales sont :

* La double transformée de fourier [KNORR /14 / DENAVIT et KRUER /15 /]. La discrétisation de la fonction de distribution se fait sur les modes ; on utilise une double décomposition en série de FOURIER sur l'espace et sur les vitesses.

* La transformée de FOURIER-HERMITE [ARMSTRONG /16 / et FEIX /17 /]. La fonction de distribution est développée en série de FOURIER sur l'espace et en polynômes d'HERMITE sur les vitesses. Mais ces méthodes nécessitent pour, être valables, un nombre impressionnant de modes ou polynômes. CANOSSA /18 / a utilisé quelques 100000 polynômes pour un problème faiblement non linéaire.

La méthode à pas fractionnaire ou "time splitting" est alors apparue comme la plus efficace : cette méthode qui repose sur la séparation des termes convectifs en vitesse et en position lors du traitement d'intégration, est d'une grande précision. Elle permet l'étude de problèmes fortement non linéaires, durant des temps assez longs sans apparition de bruit numérique. Elle sera décrite au paragraphe II.

On peut citer les différences essentielles entre les codes utilisant, soit le modèle particulaire ou lagrangien [code PIC (particle-in-cell)], soit le modèle eulérien (code VLASOV).

Le code PIC est le plus populaire. Il donne de bons résultats physiques mais ses inconvénients sont de deux ordres :

d'une part il utilise un nombre de particules insuffisant. Si l'on veut étudier des phénomènes fins qui se produisent près de la queue de la fonction de distribution ; le nombre de particule trop faible (quelques particules) ne sera pas représentatif et donc ne sera pas suffisant pour décrire convenablement le phénomène.

D'autre part, dans ce type de code, le bruit numérique dû au nombre fini de particules est trop important.

Par contre, le code VLASOV quant à lui utilise un nombre infini de particules, celles ci sont remplacées par leur fonction de distribution. Ce qui garanti un échantillonnage correct, y compris dans la queue de la fonction de

distribution. Dans ce type de code, il y a absence de bruit numérique, seulement les erreurs d'arrondis et le lissage dû au maillage élémentaire de l'espace des phases.

La simulation numérique implique nécessairement une discrétisation du problème : discrétisation de la condition initiale et de l'évolution temporelle. Cependant, quelque soit la finesse du découpage, il deviendra illusoire de suivre au delà d'un certain temps les microstructures qui apparaissent dans l'espace des phases. A cause de la limite en précision du code, le traitement numérique pour de telles situations devient délicat, de plus on aura une dissipation numérique.

II- ALGORITHME NUMERIQUE DE RESOLUTION DU SYSTEME VLASOV-POISSON

II-1 La méthode des pas fractionnaires ou splitting scheme

On intègre le système VLASOV-POISSON par une méthode de séparation "Splitting scheme". Cette méthode a été proposée par CHENG-KNORR/19 / et SHOUCRI/20 /, elle permet de résoudre l'équation de VLASOV par une intégration directe dans l'espace des phases. Ce procédé repose sur la séparation des termes convectifs en vitesse et en position lors du traitement d'intégration, et, produit un schéma du deuxième ordre en Δt (Δt étant le pas de temps). Partant du système VLASOV-POISSON sans dimension

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad \text{II.1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v,t) dv \right) - 1 \quad \text{II.2}$$

plutôt que de résoudre l'équation (II.1) pour chaque pas de temps Δt , on sépare l'équation en deux advections : l'advection du mouvement libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{II.3}$$

et l'advection due au champ de force

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad \text{II.4}$$

à chaque pas d'intégration Δt . Il s'agit donc en fait, d'une méthode à pas fractionnaires.

Pour obtenir un schéma centré du second ordre en Δt , l'intégration est décomposée en trois étapes sur l'intervalle Δt

(a) de t à $t + \Delta t^{-}/2$, on résout :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{II.5}$$

puis on calcule le champ par l'équation de POISSON

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v,t) dv \right) - 1 \quad \text{II.6}$$

(b) de $t + \Delta t^{-}/2$ à $t + \Delta t^{+}/2$, on résoud :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad \text{II.7}$$

le champ électrique étant calculé à l'étape précédente.

(c) de $t + \Delta t^{+}/2$ à $t + \Delta t$, on résoud à nouveau

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{II.8}$$

Le champ agit entre les instants $\Delta t/2 - \epsilon = \Delta t^{-}/2$ et $\Delta t/2 + \epsilon = \Delta t^{+}/2$ avec ϵ qui tend vers zéro, c'est une impulsion infiniment courte dans le temps.

La résolution numérique se réduit à la séquence suivante de calcul :

$$f^*(x,v) = f^n(x-v \Delta t/2, v) \quad \text{II.9}$$

$$f^{**}(x,v) = f^*(x, v-E(x) \Delta t) \quad \text{II.10}$$

$$f^{***}(x,v) = f^{**}(x-v \Delta t/2, v) \quad \text{II.11}$$

où f^n est la valeur de la fonction de distribution à l'instant $t = n \Delta t$.

Le champ électrique au milieu de la trajectoire est calculé à partir de $f^*(x,v)$.

Pour établir la validité de ce schéma, considérons les séquences II.9 - II.11 : on obtient alors l'expression

$$f^{n+1}(x,v) = f^n[x - \Delta t(v-E(x) \Delta t/2), v-E(\bar{x}) \Delta t] \quad \text{II.12}$$

avec $\bar{x} = x - v \Delta t/2$

D'autres part, les caractéristiques de l'équation (II.1) sont données par

$$\frac{dv}{dt} = E(x,t) \quad \text{II.13}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{II.14}$$

Leur solution est équivalente à la solution de l'équation (I.12). Il est possible d'écrire un schéma symétrique qui serait du deuxième ordre en Δt / 21 / :

$$V^{n+1} = V^n + E^{n+1/2}(x) \Delta t \quad \text{II.15}$$

$$X^{n+1} = X^n + \frac{1}{2}(V^{n+1} + V^n) \Delta t \quad \text{II.16}$$

On réécrit ces équations en caractérisant les valeurs initiales et finales par "i" et "f" :

$$V^n(i) = V^{n+1}(f) - E^{n+1/2}(x) \Delta t \quad \text{II.17}$$

$$X^n(i) = X^{n+1}(f) - [V^{n+1}(f) - \frac{1}{2} E^{n+1/2}(x) \Delta t] \Delta t \quad \text{II.18}$$

Une comparaison des arguments de f dans le membre de droite

de l'équation (II.12) montre qu'ils sont identiques aux équations (II.17)-(II.18), ce qui montre que le schéma (II.9)-(II.11) est du deuxième ordre en t .

II-2 Interprétation physique de la méthode

La représentation du champ électrique E se fait par une succession d'impulsions de DIRAC. Dans l'équation de VLASOV le champ $E(x,t)$ est remplacé par $E^*(x,t)$ où

$$E^*(x,t) = E(x,t) \Delta t \sum_n \delta(t - t_n) \quad \text{II.19}$$

avec
$$t_n = (n + \frac{1}{2}) \Delta t$$

Ainsi nous obtenons un nouveau système

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E^* \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

II.20

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v,t) dv \right) - 1$$

On peut néanmoins faire quelques remarques

- 1) Le schéma est correct jusqu'au second ordre en Δt .
- 2) Utiliser $E^*(x,t)$ revient à prendre une approximation du premier ordre du champ autocohérent

$$\int_0^{n \Delta t} E^*(x,t) dt = \Delta t \sum_{i=0}^n E(x, (i + \frac{1}{2}) \Delta t)$$

L'intégration sur le temps est remplacée par une somme et le problème incontournable de la discrétisation numérique est résolu dans la définition du modèle.

- 3) Le nouveau système inclut quelques propriétés de base en physique des plasmas comme celles de la théorie linéaire. Si nous linéarisons la fonction de distribution f autour d'un équilibre homogène :

$$f(x,v,t) = F_0(v) + f_1(x,v,t)$$

après transformation de LAPLACE et de FOURIER des équations linéarisées du nouveau système, on obtient :

$$ik \left[E(k,s) + \frac{i}{k} \sum_m E \left(k, s - i \frac{2\pi m}{\Delta t} \right) * \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_0/dv}{s - ikv} dv \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(k,v,0)}{s - ikv} dv \quad \text{II.21}$$

D'après le théorème de SHANON, si le spectre $E(k, \omega)$ est borné dans l'intervalle $(-\omega_M, +\omega_M)$, on a :

$$\Delta t \leq \pi / \omega_M$$

Si cette condition est remplie, la somme du premier membre de l'équation (II.21) donne une contribution non nulle pour $m=0$ seulement, on retrouve alors dans ce cas la fonction de dispersion du plasma.

Puisque la fréquence spectrale du champ électrique n'excède pas quelque ω_p , le choix de Δt tel que $\omega_p \Delta t \leq 1$ est suffisant pour tenir compte de la variation temporelle du champ.

II-3 LES METHODES D'INTERPOLATION

L'intégration du système VLASOV-POISSON se fait par une méthode de séparation (splitting scheme) et la résolution se réduit à un problème de deux interpolations successives suivant x ou v . Plusieurs méthodes ont été proposées, notamment un schéma d'interpolation par 'SPLINE CUBIQUE' /19-20/ qui demande un nombre d'opérations proportionnel à N (nombre total de points), mais également une méthode d'interpolation de 'FOURIER' /19/ , utilisant la transformation de FOURIER rapide , où le nombre d'opérations est aussi proportionnel à N . Citons aussi d'autres schémas telle que la méthode d'interpolation par polynômes de BERNSTEIN /22-23 / ou la méthode d'interpolation par conservation de FLUX /24-25 /. Dans ce qui suit, nous allons décrire ces méthodes d'interpolations.

II-3-1 Méthode d'interpolation par spline cubique

On considère une fonction $u(x)$ tel que au point x_1 , on ait :

$$u(x_1) = u_1$$

Au lieu d'approximer la fonction $u(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ par un seul polynôme, on peut diviser $[a, b]$ en $N+1$ sous intervalles et approximer $u(x)$ par un polynôme différent pour chaque sous intervalle. Si l'approximation $y(x)$ est un

polynôme d'ordre trois et si la fonction, la dérivée première et la dérivée seconde sont continues en chacun des $N+1$ points

$$y_i(x_{i+1}) = y_{i+1}(x_{i+1}) \quad (\text{II.22})$$

$$y_i'(x_{i+1}) = y_{i+1}'(x_{i+1}) \quad (\text{II.23})$$

$$y_i''(x_{i+1}) = y_{i+1}''(x_{i+1}) \quad (\text{II.24})$$

alors cette fonction $y(x)$ est unique. Elle est appelée spline cubique.

Dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) on écrit la fonction interpolée

$$y_i(x) = u_i + P_i(x-x_i) + S_i(x-x_i)^2 + G_i(x-x_i)^3 \quad \text{II.25}$$

ou $x = x_{i+1} - x_i$ et $x_i < x < x_{i+1}$

Pour déterminer les coefficients P_i , S_i , et G_i on utilise les équations (II.22), (II.23) et (II.24) avec l'équation (II.25).

$$P_{i+1} + 4P_i + P_{i-1} = 3(u_{i+1} - u_{i-1}) \quad \text{II.26}$$

$$S_{i+1} + 4S_i + S_{i-1} = 6(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad \text{II.27}$$

$$G_{i+1} + 4G_i + G_{i-1} = -u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2} \quad \text{II.28}$$

Les équations (II.26), (II.27) et (II.28) sont les équations fondamentales. Chacune de ces équations se réfère à un système d'équations tridiagonal, il existe des algorithmes efficaces pour résoudre de tels systèmes.

II-3.2 Application des splines cubiques à la solution numérique des advections

Dans la séquence (II.9), nous avons à résoudre l'équation hyperbolique :

où v est constante. La solution exacte s'écrit en suivant les caractéristiques $x=vt$

$$f(x,v,t) = f(x-vt,v,0)$$

la valeur de la fonction en un temps $t + \Delta t$ consiste donc à calculer la valeur $f(x-v\Delta t)$ à partir de $f(x,v,t)$.

Ce calcul peut se faire par interpolation en utilisant les splines cubiques de la façon suivante :

Soit $\tilde{y}_1 = y_1(x_1 + h)$ avec $0 < h < 1$

Il s'agit de calculer \tilde{y}_1 à partir de $y_1 = f_1$. On écrit le développement de Taylor

$$y_1(x_1 + h) = \tilde{y}_1 = f_1 + P_1 h + \frac{1}{2} S_1 h^2 + G_1 h^3 \quad \text{II.29}$$

Il est facile de montrer que

$$G_{i-1} + 4G_i + G_{i+1} = -f_{i-1} + 3f_i - 3f_{i+1} + f_{i+2} \quad \text{II.30}$$

on a alors

$$\tilde{y}_{i-1} + 4\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i+1} = A f_{i-1} + B f_i + C f_{i+1} + D f_{i+2} \quad \text{II.31}$$

ou

$$A = (1 - h)^3$$

$$B = 4 - 3h^2 * [1 + (1 - h)]$$

II.32

$$C = 4 - 3(1 - h)^2 * (1 + h)$$

$$D = h^3$$

Pour le calcul de $\tilde{y}_1 = y_1(x_1 - h)$, l'équation (II.31) est remplacée par

$$\tilde{y}_{i-1} + 4 \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i+1} = A f_{i+1} + B f_i + C f_{i-1} + D f_{i-2} \quad \text{II.33}$$

Les récurrences (II.31) ou (II.33) sont calculées par inversion d'une matrice tridiagonale avec conditions aux limites périodiques.

Dans la séquence (II.10) nous avons à résoudre :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

la solution formelle s'écrit sous la forme suivante

$$f(x, v, \Delta t) = f(x, v - E(\bar{x}, \tau) \Delta t)$$

avec

$$x - v \Delta t \leq \bar{x} \leq x$$

et

$$0 \leq \tau \leq \Delta t$$

Elle est formellement identique à la récurrence (II.31 ou (II.33) et elle est calculée par inversion d'une matrice tridiagonale avec conditions aux limites non périodiques.

II- 3.3 Methode d'interpolation de FOURIER

C'est un code numérique utilisant une interpolation par transformée de FOURIER.

Le champ électrique (impulsion) est appliqué juste au milieu de l'intervalle de temps $(\Delta t/2)$. On note par $\Delta t^-/2$ et $\Delta t^+/2$ respectivement les temps avant et après l'impulsion. L'intervalle de temps $[n \Delta t, (n+1) \Delta t]$ peut être divisé en trois étapes :

Etape I : $n \Delta t < t < (n+1/2) \Delta t^-$

La solution du mouvement de particule libre :

$$f(x, v, (n+1/2) \Delta t^-) = f(x - v \frac{1}{2} \Delta t, v, n \Delta t) \quad \text{II.34a}$$

En prenant la transformée de FOURIER dans l'espace x (k étant la variable position conjuguée) on a :

$$f(k,v,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-) = f(k,v,n\Delta t) * \exp(-ikv\Delta t/2) \quad \text{II.34b}$$

Etape II : $t = t_n = (n+\frac{1}{2})\Delta t/2$

La solution formelle de la "soudaine approximation" est

$$f(x,v,(n+\frac{1}{2})\Delta t^+) = f[x,v-E(x,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-)\Delta t,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-] \quad \text{II.35a}$$

En prenant la transformée de FOURIER dans l'espace des vitesses (l étant la variable vitesse conjuguée) on a :

$$f(x,l,(n+\frac{1}{2})\Delta t^+) = f(x,l,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-) * \exp[-ilE(x,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-)(n+\frac{1}{2})\Delta t^-] \quad \text{II.35b}$$

Il est clair que

$$E(x,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-) = E(x,(n+\frac{1}{2})\Delta t^+)$$

Le champ électrique $E^*(x,t) = E(x,t) \Delta t \sum_n \delta(t-t_n)$ a été calculé à partir de l'équation de POISSON seulement au temps $t = t_n = (n+\frac{1}{2})\Delta t$ c'est à dire à la fin de l'étape I.

Etape III : $(n+\frac{1}{2})\Delta t^+ \leq t \leq (n+1)\Delta t$

C'est la même étape que la première (étape I) en commençant avec $f(x,v,(n+\frac{1}{2})\Delta t^+)$.

Les équations (II.34) et (II.35) donnent une solution exacte de l'équation de VLASOV modifiée avec $E^*(x,t)$.

Comme les advections, respectivement dans l'espace x et v, peuvent être exprimées dans l'espace de FOURIER par un simple changement de phase (équation II.34 et II.35), l'utilisation de la transformée de FOURIER rapide ou "Fast Fourier Transform" (FFT) s'avère efficace. Cette technique a été notamment exploitée par IZRAR / 26 /.

Les advections sont calculées suivant la séquence :

1) de $n\Delta t$ à $(n+\frac{1}{2})\Delta t^-$

$$f(x,v,n\Delta t) \xrightarrow{\text{TF}_x} f(k,v,n\Delta t) * \exp[-ikv\Delta t/2] \xrightarrow{\text{ITF}_x} f(x,v,(n+\frac{1}{2})\Delta t^-)$$

2) à $t = t_n = (n + \frac{1}{2}) \Delta t$

$$f(x, v, (n + \frac{1}{2}) \Delta t^-) \xrightarrow{\text{TFv}} f(x, l, (n + \frac{1}{2}) \Delta t^-) * \exp[-il E(x, (n + \frac{1}{2}) \Delta t^-)]$$

$$\xrightarrow{\text{ITFv}} f(x, v, (n + \frac{1}{2}) \Delta t^+)$$

3) de $(n + \frac{1}{2}) \Delta t^+$ à $(n + 1) \Delta t$

(même chose que l'étape I).

TFx et TFv sont respectivement la transformée de FOURIER en x et en v. ITFx et ITFv sont respectivement la transformée de FOURIER inverse en x et en v.

Le champ électrique est calculé à partir de l'équation de POISSON en utilisant la technique de FFT.

II-3.4 Méthode d'interpolation par conservation de flux

La méthode utilisée dans ce code numérique est basée sur une interpolation "fluide".

Ce code a été développé par P. MINEAU et M. SABATIER du PMMS d'ORLEANS. Nous donnons ici les grandes lignes : On considère la portion de l'espace des phases de longueur L, et d'extension en vitesse $[-V_{max}, +V_{max}]$ discrétisée avec des pas constants en position (Δx) et en vitesse (Δv) (fig.II.1).

$$x = L/N_x \quad \text{et} \quad v = 2V_{max}/N_v$$

$$x_i = i \quad x \quad i = -1, N_x$$

$$v_j = j \quad v \quad j = 0, N_v$$

Le temps est discrétisé avec un pas constant (Δt)

$$t_n = n \Delta t$$

Soit $F_{i,j}^n = F(x_i, v_j, t_n)$ la solution numérique du problème. $F_{i,j}^n$ vérifie les conditions aux bords

$$F_{N_x, j}^n = F_{0, j}^n$$

$$F_{i, 0}^n = F_{i, 2M}^n = 0 \quad \text{II.36}$$

Le maillage permet de définir des cellules (i, j) de surface $\Delta x \Delta v$ centré sur le point (x_i, v_j) . Sur chacune des cellules, le profil de la fonction de distribution F est approximé par un plan F (figure II.2)

$$\begin{aligned}
 F_{i,j}^n &= Ax + Bv + C \\
 A &= 1/2 \Delta x [F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n] \\
 B &= 1/2 \Delta v [F_{i,j+1}^n - F_{i,j-1}^n] \quad \text{II.37} \\
 C &= F_{i,j}^n - Ax_i - Bv_j
 \end{aligned}$$

Soit $M_{i,j}^n$ la masse contenue dans le cellule (i,j) au temps t^n

$$M_{i,j}^n = \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} dx \int_{v_j - \frac{\Delta v}{2}}^{v_j + \frac{\Delta v}{2}} dv F_{i,j}^n(x,v) = \Delta x \Delta v F_{i,j}^n \quad \text{II.38}$$

Première étape du splitting : Translation en x

Le profil de la fonction F subit une translation d'une valeur

$\delta x_j = \frac{1}{2} v_j \Delta t$. Nous supposons que $|\delta x_j| < \Delta x$ et $v_j > 0$.

La cellule (i,j) perd la masse $\delta M_{i,j}$ tandis qu'elle reçoit la masse $\delta M_{i-1,j}$ qui a été perdue par la cellule $(i-1,j)$.

On voit que dans cette procédure la masse totale est conservée exactement (figure II.3).

$$\begin{aligned}
 \delta M_{i,j} &= \int_{x_i - \Delta x/2 - \delta x_j}^{x_i + \Delta x/2} dx \int_{v_j - \Delta v/2}^{v_j + \Delta v/2} dv F_{i,j}^n(x,v) \\
 &= \delta x_j \Delta v \left(F_{i,j}^n + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\delta x_j}{\Delta x} \right) (F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n) \right) \quad \text{II.39}
 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 F_{i,j}^{(1)} &= F_{i,j}^n + \frac{1}{\Delta x \Delta v} (\delta M_{i-1,j} - \delta M_{i,j}) \\
 &= -\frac{\alpha_j}{4} (1 - \alpha_j) F_{i-2,j}^n + \alpha_j \left(1 + \frac{1}{4} (1 - \alpha_j) \right) F_{i-1,j}^n \\
 &\quad + (1 - \alpha_j) \left(1 + \frac{\alpha_j}{4} \right) F_{i,j}^n + \frac{\alpha_j}{4} (1 - \alpha_j) F_{i+1,j}^n
 \end{aligned} \quad \text{II.40}$$

$$\text{avec } \alpha_j = \frac{\delta x_j}{\Delta x} = \frac{v_j \Delta t}{2 \Delta x}$$

Dans le cas $v_j < 0$, la même procédure donne :

$$\delta M_{i,j} = -\delta x_j \Delta v \left(F_{i,j}^n - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\delta x_j}{\Delta x} \right) (F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n) \right)$$

et,

$$F_{i,j}^{(1)} = \frac{\alpha_j}{4} (1 + \alpha_j) F_{i+2,j}^n - \alpha_j \left(1 + \frac{1}{4} (1 + \alpha_j) \right) F_{i+1,j}^n \\ + (1 + \alpha_j) \left(1 - \frac{\alpha_j}{4} \right) F_{i,j}^n - \frac{\alpha_j}{4} (1 + \alpha_j) F_{i-1,j}^n$$

II.41

$$\text{avec } \alpha_j = \frac{v_j \Delta t}{2\Delta x} .$$

La condition imposée au début de ce paragraphe ($|\delta x_j| < \Delta x$) introduit une sévère restriction sur le pas de temps : $\Delta t < 2 \Delta x / V_{\max}$. En fait, cette restriction est inutile si on décompose la translation de la fonction de distribution en deux étapes :

- Une translation d'un nombre entier de pas de grille qui est évidemment effectuée de façon exacte.
- Une translation d'une valeur inférieure au pas de grille, effectuée par le schéma ci-dessus (II.40) ou (II.41).

Deuxième étape du splitting : translation en v

Une fois que le champ $E_1 = E(x_1)$ est calculé, f est tradatée d'une valeur $\delta v_j = E_1 \Delta t$. Bien évidemment, on procède exactement comme précédemment (mis à part pour les conditions aux limites), en utilisant un schéma identique à (II.40) si $\delta v_j > 0$ ou à (II.41) si $\delta v_j < 0$.

En guise de conclusion on peut dire qu'un progrès important a été réalisé avec les codes de VLASOV basés sur le "time splitting", qui, associé a des interpolations convenables a permis de construire des codes numériques performants. La question qu'on peut se poser est qu'elle est la meilleure interpolation ? L'étude de la fonction H introduite dans le chapitre I va nous permettre de préciser ce point et de justifier la validité des codes de VLASOV. C'est ce qui va faire l'objet des chapitres suivants.

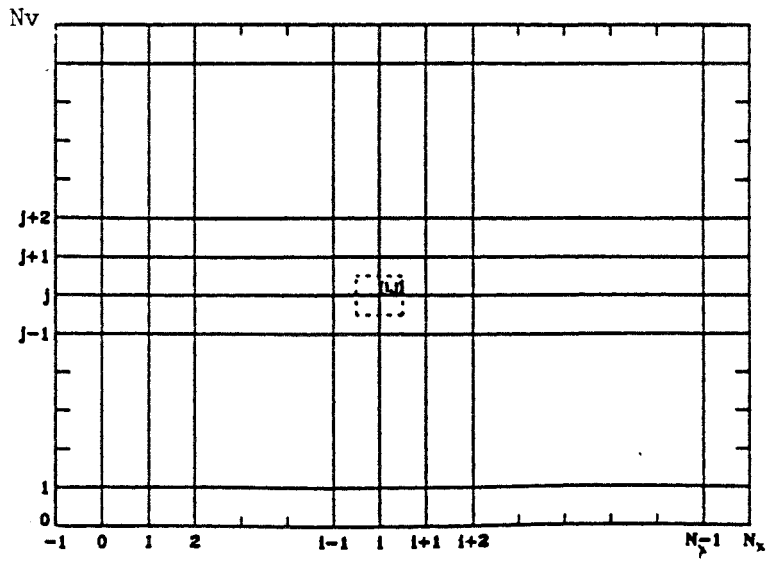


fig. II.1

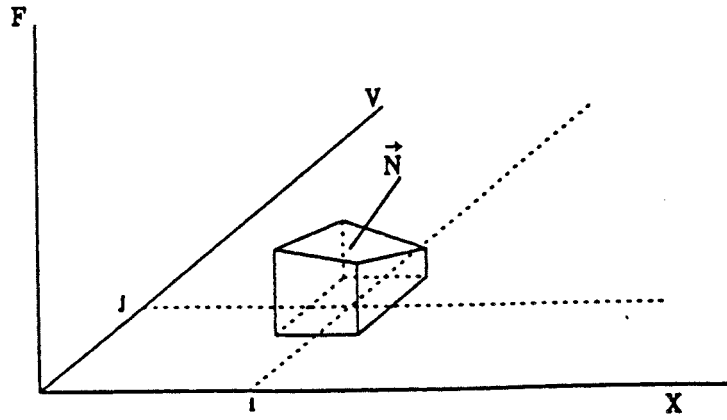


fig. II.2

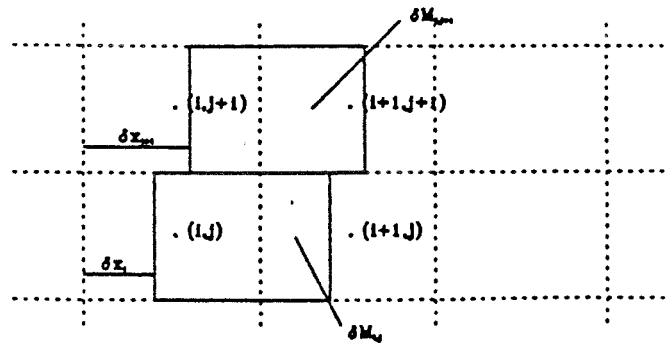


fig. II.3

CHAPITRE III

SIMULATIONS NUMERIQUES ET MESURE DE LA PERTE D'INFORMATION

CHAPITRE III : SIMULATIONS NUMERIQUES ET MESURE DE LA PERTE D'INFORMATION

I - INTRODUCTION

Le but de ce chapitre consiste à étudier l'évolution au cours du temps de la fonction H à l'aide des codes de VLASOV décrits dans le chapitre précédent. On choisit comme conditions initiales des situations qui permettent de générer un violent mélange dans l'espace des phases, c'est à dire une modification de la fonction de distribution. Notre choix s'est porté sur les trois conditions initiales suivantes :

- Premièrement on considère le cas d'un équilibre de BERNSTEIN-GREEN-KRUSKAL (BGK) où la fonction de distribution initiale dépend de l'énergie totale de la particule qu'on perturbe fortement en introduisant une vitesse de dérive.

- Deuxièmement on considère le cas d'un plasma dans un état d'équilibre stable et homogène que nous perturbons fortement (cas du piégeage des particules dans le puit de potentiel d'une onde de grande amplitude).

- Troisièmement on considère une condition initiale représentant une cavité gaussienne dans l'espace des phases (état de non équilibre).

Pour caractériser l'état asymptotique, on évalue la variation de la fonction H du système. Pour des raisons pratiques, au cours de ce chapitre cette fonction sera appelée entropie. Pour toutes nos simulations, on a choisit deux formes pour le calcul :

$$H1(t) = - \int f(x,v,t) * \ln f(x,v,t) dx dv \quad (III.1)$$

$$H2(t) = - \int f(x,v,t) * f(x,v,t) dx dv \quad (III.2)$$

On verra que, pour toutes les simulations faites, il y a une augmentation d'entropie au cours du temps alors que l'entropie doit être un invariant pour l'équation de VLASOV.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de relier l'augmentation de la fonction H au cours du mélange dans l'espace des phases avec le "coarse graining" introduit par l'échantillonnage de l'espace des phases des codes numériques. Pour les trois paragraphes suivants, c'est le code à interpolation par SPLINE qui sera utilisé.

Dans tout ce qui suit, les distances sont normalisées à la longueur de DEBYE l_D ($l_D^2 = \epsilon_0 k_B T / n_0 e^2$), les vitesses sont normalisées à la vitesse thermique des électrons v_{th} ($v_{th}^2 = k_B T / m$) et le temps à la pulsation plasma ω_p ($\omega_p^2 = n_0 e^2 / \epsilon_0 m$).

II-PREMIERE CONDITION INITIALE : EQUILIBRE BGK

II-1 ONDES BGK

Les ondes de BERNSTEIN-GREEN et KRUSKAL (ondes BGK) sont des équilibres spatialement inhomogènes, fortement non linéaires. Elles peuvent être générées par un système double faisceau de plasma chaud /27-28/. Il est à noter qu'elles sont d'un point de vue analytique, les solutions exactes du système stationnaire d'équations de VLASOV-POISSON /29 /. Elles sont caractérisées dans l'espace des phases, par la formation de vortex qui constituent un ensemble de particules piégées dans le champ de l'onde. Ces vortex correspondent à des zones de faible densité, et constituent des trous dans l'espace des phases.

Soit une condition initiale de la forme :

$$f(\epsilon) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{2-2\xi}{3-2\xi} \left(1 + \frac{\epsilon}{1-\xi} \right) \exp(-\epsilon) \quad \text{III.3}$$

où ϵ est l'énergie totale de la particule

$$\epsilon = \frac{1}{2} m v^2 + e\phi(x)$$

Cette fonction a été introduite par HOLEC /30 / dans le cas d'un modèle de Water-Bag et plus récemment par GHIZZO/31 / pour l'étude des structures BGK.

Dans le cas homogène ($\emptyset=0$), $f(\xi)$ correspond à un plasma double faisceau.

La densité électronique s'écrit alors

$$n(x) = \mu \frac{3 - 2\xi + 2\emptyset}{3 - 2\xi} e^{-\emptyset} \quad \text{III.4}$$

μ est un paramètre qui décrit l'inhomogénéité du système ($\mu \leq 1$).

ξ est un paramètre qui caractérise la profondeur du trou dans l'espace des phases.

le potentiel obéit à l'équation :

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} + \mu \frac{3 - 2\xi + 2\emptyset}{3 - 2\xi} e^{-\emptyset} - 1 = 0 \quad \text{III.5}$$

le potentiel $\emptyset(x)$ est déterminé numériquement par un algorithme de RUNGE-KUTTA-GILL /32 /, et en tenant compte des conditions suivantes :

$$\emptyset(0) = 0$$

$$\left(\frac{d\emptyset}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{III.6}$$

$$\left(\frac{d^2\emptyset}{dx^2} \right)_{x=0} > 0$$

L'équation (III.5) peut aussi s'écrire en terme de champ électrique $E_0 = -d\emptyset/dx$

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} - k^2(x) E_0 = 0 \quad \text{III.7}$$

$$k^2(x) = \mu \frac{1 - 2\xi + 2\emptyset}{3 - 2\xi} e^{-\emptyset} \quad \text{III.8}$$

Cette forme est particulièrement importante pour l'analyse de la stabilité (stabilité de type marginale)/1 /.

Pour avoir des solutions périodiques de l'équation (III.5), μ et ξ doivent satisfaire des conditions supplémentaires/30 /.

$$\frac{1}{2} \leq \xi < 1$$

$$\mu > \frac{3-2\xi}{2} e^{\xi - \frac{1}{2}}$$

Le nombre de vortex N qui apparaît dans l'espace des phases est directement lié à la longueur L du système (d'après le critère de stabilité marginale), chaque équilibre BGK ayant une période spatiale Ω avec des conditions aux limites périodiques. Le plasma est alors contenu dans une boîte de longueur $L=N\Omega$.

Un système composé d'un trou ($N=1$) constitue, quant à lui, un équilibre parfait. Pour un système composé de N vortex ($N>2$) GHIZZO /33 / a montré que les N vortex interagissent entre eux puis fusionnent pour ne donner qu'un seul vortex, ces vortex se comportent aussi comme de vrais particules/34 / soumises à des forces attractives.

II-2 CONDITIONS INITIALES

A partir d'une condition initiale où la fonction de distribution $f(x,v,t=0)=f(\epsilon')$ (ϵ' est l'énergie totale de la particule), est un équilibre exact, on perturbe cet équilibre en introduisant une vitesse de dérive de la forme $v_D = \alpha \sin(k_0 x)$. α est l'amplitude de la perturbation ($\alpha=1.30$), k_0 étant le mode fondamental ($k_0=2\pi/L$).

La fonction de distribution initiale normalisée s'écrit :

$$f(x,v,t=0) = f(\epsilon') = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{2-2\xi}{3-2\xi} \left(1 + \frac{\epsilon'}{1-\xi} \right) \exp(-\epsilon') \quad \text{III.9}$$

avec

$$\epsilon' = \frac{1}{2}(v - v_D)^2 + \phi(x)$$

Une telle condition initiale est montrée sur la figure (III.1).

La réaction d'une structure BGK vis à vis de la perturbation

initiale se traduit par une déformation du système global, puis cette structure a tendance à revenir vers son état d'équilibre. Mais il faut noter la présence de deux autres vortex qui se déplacent dans l'espace des phases dans des directions opposées.

II-3 ETUDE DE L'ENTROPIE

Pour caractériser l'état asymptotique, on évalue la variation d'entropie du système.

Pour le calcul de l'entropie, on a pris deux formes de la fonctionnelle convexe $C(f)$ [voir équations (III.1) et (III.2)]. Une des formes privilégie plutôt les grandes valeurs de f (III.2), l'autre plutôt les très petites valeurs à cause du logarithme (III.1).

La discrétisation dans l'espace des phases revient à remplacer l'intégrale (III.1 ou III.2) par une somme discrète, et l'entropie du système est calculée numériquement de la façon suivante :

$$H1 = - \Delta x \Delta v / L \sum f(x_i, v_j, t) \ln f(x_i, v_j, t) \quad \text{III.10}$$

$$H2 = - \Delta x \Delta v / L \sum f(x_i, v_j, t) / f(x_i, v_j, t) \quad \text{III.11}$$

Nous donnons les paramètres de la simulation

Le code utilisé est le code à interpolation par spline avec :

$L=14.710$

$k_0=0.427$

$V_{\text{max}}=12$

$DT=0.25$

$\mu=0.92$

$f=0.90$

Nous avons choisi $\mu = 0.92$ et $f = 0.90$ pour avoir des solutions périodiques de l'équation (III.5). La période spatiale $\Omega = 14.710$ correspond à une structure composée d'un seul vortex. Sur la figure (III.2) on a représenté l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases (x, v) . Cet espace est décrit par une grille de 128×128 points ($\Delta x = 0.114$,

$\delta v = 0.188$). On remarque une microstructure (filamentation) qui apparaît dans l'espace des phases, puis un "mélange" de ces microstructures. A partir de $t = 25-30 \omega p^{-1}$ le système commence à se "nettoyer" des microstructures avec apparition d'un trou central plus deux autres trous. Ces deux trous se déplacent suivant l'axe des x avec des vitesses opposées, mais de même amplitude.

Sur les courbes de la figure (III.3) représentant la variation d'entropie du système en fonction du temps, on remarque une augmentation d'entropie, puis une stabilisation lorsque le système atteint son état asymptotique (la valeur de l'entropie est maximale). Les deux courbes présentent la même allure.

L'évolution de ce type de système s'accompagne d'une disparition de la microstructure qui se traduit par une perte d'information. Cette disparition permet alors d'expliquer l'augmentation d'entropie du système, puis sa stabilisation quand le système est bien "nettoyé" de ces microstructures. L'état asymptotique n'est pas stationnaire (à strictement parler) du moins jusqu'à $t = 300 \omega p^{-1}$ qui est le temps maximum de notre simulation, les deux trous se meuvent toujours suivant l'axe des x . L'état asymptotique est un équilibre (trou central) plus deux autres trous mobiles. Ce point a été signalé aussi par MINEAU /24 / concernant une étude faite sur un système gravitationnel. Il montre que, si le champ est self-consistent et est décrit par l'équation de POISSON, la formation des trous empêche la relaxation de la fonction de distribution vers une fonction de l'énergie seule, et l'état asymptotique le plus général semble être un équilibre auquel sont superposés des modes balistiques (trous). Ce qui n'est pas le cas si le champ est extérieur où la fonction de distribution relaxe vers une fonction de l'énergie seule (état stationnaire)/35 /.

II-4 L'ENTROPIE MESURE LA PERTE D'INFORMATION

Théoriquement pour un système de VLASOV-POISSON, l'entropie

ne varie pas au cours du temps. Numériquement et pour toutes les simulations que nous avons faites, on a constaté une augmentation d'entropie (due à la disparition de la microstructure). Pour essayer de comprendre l'origine de ce phénomène d'augmentation d'entropie corrélativement à la disparition de la microstructure, nous allons étudier la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER (k,l) , espace dual de l'espace des phases (x,v) . L'intérêt de décrire le système dans les deux espaces (x,v) et (k,l) provient du fait que les deux descriptions se complètent : la microstructure dans l'espace des phases (x,v) correspond à la présence de nombre d'onde élevé dans l'espace dual (k,l) .

En effet considérons un système de VLASOV-POISSON, dans le cas où le champ électrique autocohérent est nul ($E=0$), c'est à dire que le système évolue librement et il ne subsiste dans l'équation de VLASOV que l'advection due au mouvement libre.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{III.12a}$$

En prenant la transformée de FOURIER de l'équation (III.12a) par rapport aux variables de l'espace des phases (x,v) , la solution formelle s'écrit :

$$f(k,l,t) = f(k,l-kt,0) \quad \text{(III.12b)}$$

cette solution formelle dépend de $(l-kt)$ qui représente en fait un déplacement de la fonction de distribution, le long de l'axe des l , vers les grandes valeurs de l .

Revenons maintenant au système VLASOV-POISSON complet, c'est à dire avec un champ autocohérent non nul, et étudions l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER (k,l) pour un k donné en fonction de l .

Sur la figure (III.4), on a représenté en ordonnée le module de $f(k,l)$ pour un k donné ($1k_0, 2k_0, 3k_0 \dots$) où k_0 est le mode fondamental ($k_0=2\pi/L$), $2k_0, 3k_0 \dots$ sont les harmoniques et en abscisse l ($-l_{\max} < l < +l_{\max}$) avec $l_{\max}=\pi/\Delta v$ et Δv étant

le pas en vitesse ($\Delta v = 2V_{\text{max}} / (Nv - 1)$).

On remarque, sur les courbes, l'apparition de structures symétriques par rapport à $l=0$. Une structure (ou pic) centrale qui est situé autour de $l=0$ d'amplitude importante, plus d'autres structures qui sont moins importantes en amplitude. Au cours de l'évolution la partie centrale semble ne pas s'étaler, et garde une largeur constante autour $l=0$. Par contre il semble que les autres structures (voir par exemple celles numérotées sur la figure de 1 à 4) se déplacent chacune avec une vitesse constante. Ces structures partent vers les petites longueurs d'onde ($\pm l_{\text{max}}$) et puis ils disparaissent à la frontière de l'espace des l . Rappelons que la discrétisation de l'espace des vitesses introduit une maille élémentaire Δv , et donc les frontières $\pm l_{\text{max}}$ avec $l_{\text{max}} = \pi / \Delta v$ dans l'espace dual.

En ce qui concerne l'entropie, on peut dire que le fait que ces structures se déplacent vers les petites longueurs d'onde ($\pm l_{\text{max}}$) puis disparaissent, alors ceci entraîne une perte de l'information qui était initialement contenue dans la fonction de distribution, d'où l'augmentation d'entropie.

On remarque sur la figure (III.5) que la variation d'entropie en fonction du temps ne se fait pas continuellement, mais plutôt par saut. Il semble que chaque fois qu'une structure disparaît à $\pm l_{\text{max}}$, un saut d'entropie se produit. On peut le voir au temps 25, où la structure 4 disparaît, puis autour de 35, où vraisemblablement la structure 3 disparaît ainsi que autour de 50 où la structure 2 disparaît à son tour. C'est beaucoup moins net pour la structure 1.

Nous verrons que pour d'autres conditions initiales impliquant un mélange plus énergétique dans l'espace des phases, ce phénomène est plus marqué.

Sur la figure (III.6) nous avons représenté la variation de l'énergie totale en fonction du temps.

L'énergie totale est calculée à partir de la formule suivante

$$\epsilon_T = \int \frac{1}{2} m v^2 f(x, v, t) dx dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2(x, t) dx$$

Au contraire de H , cette quantité reste bien conservée.

LEGENDE DES FIGURES DU CHAPITRE III

- fig. III.1 : Représentation tridimensionnelle de la condition initiale où la fonction de distribution $f(x,v,t=0) = f(\epsilon)$ est un équilibre perturbé avec une vitesse de dérive $v_D = \alpha \sin(k_0 x)$ ($\alpha = 1.30$; $k_0 = 0.42$)
- fig. III.2 : Evolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases. L'espace des phases est décrit par une grille de 128×128 points ($x = 0.114$; $v = 0.188$)
- fig. III.3 : Variation d'entropie en fonction du temps
a) $H_1(t)$
b) $H_2(t)$
- fig. III.4 : Evolution de la fonction de distribution $f(k,l)$ en fonction de l dans l'espace de FOURIER (k,l)
- fig. III.5 : Variation d'entropie en fonction du temps
a) $H_1(t)$
b) $H_2(t)$
- fig. III.6 : Variation de l'énergie totale en fonction du temps

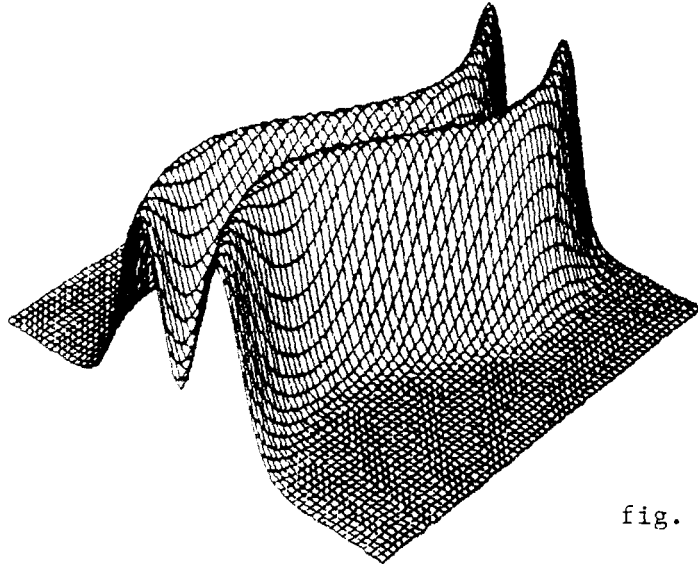


fig. III.1

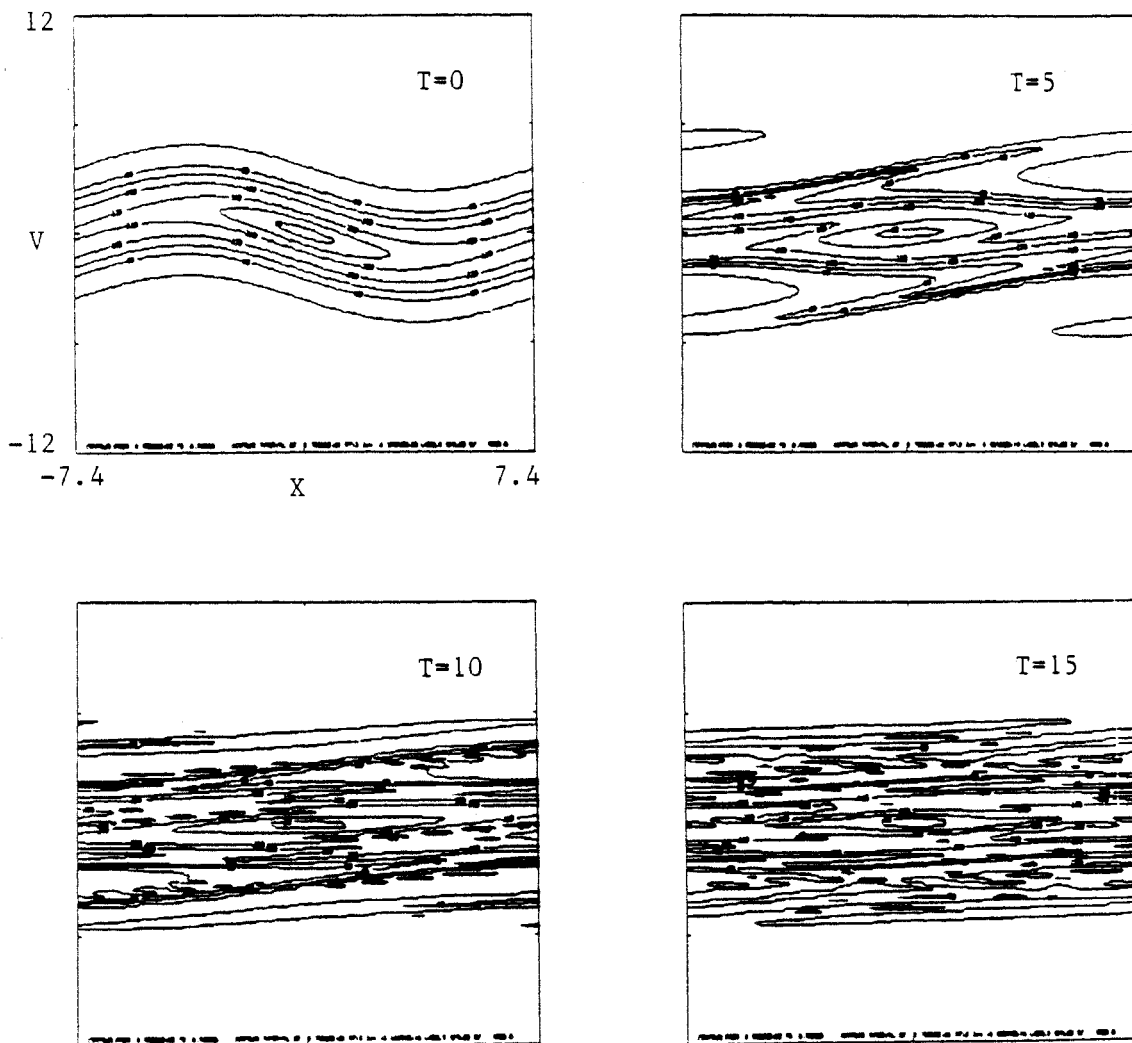


fig. III.2

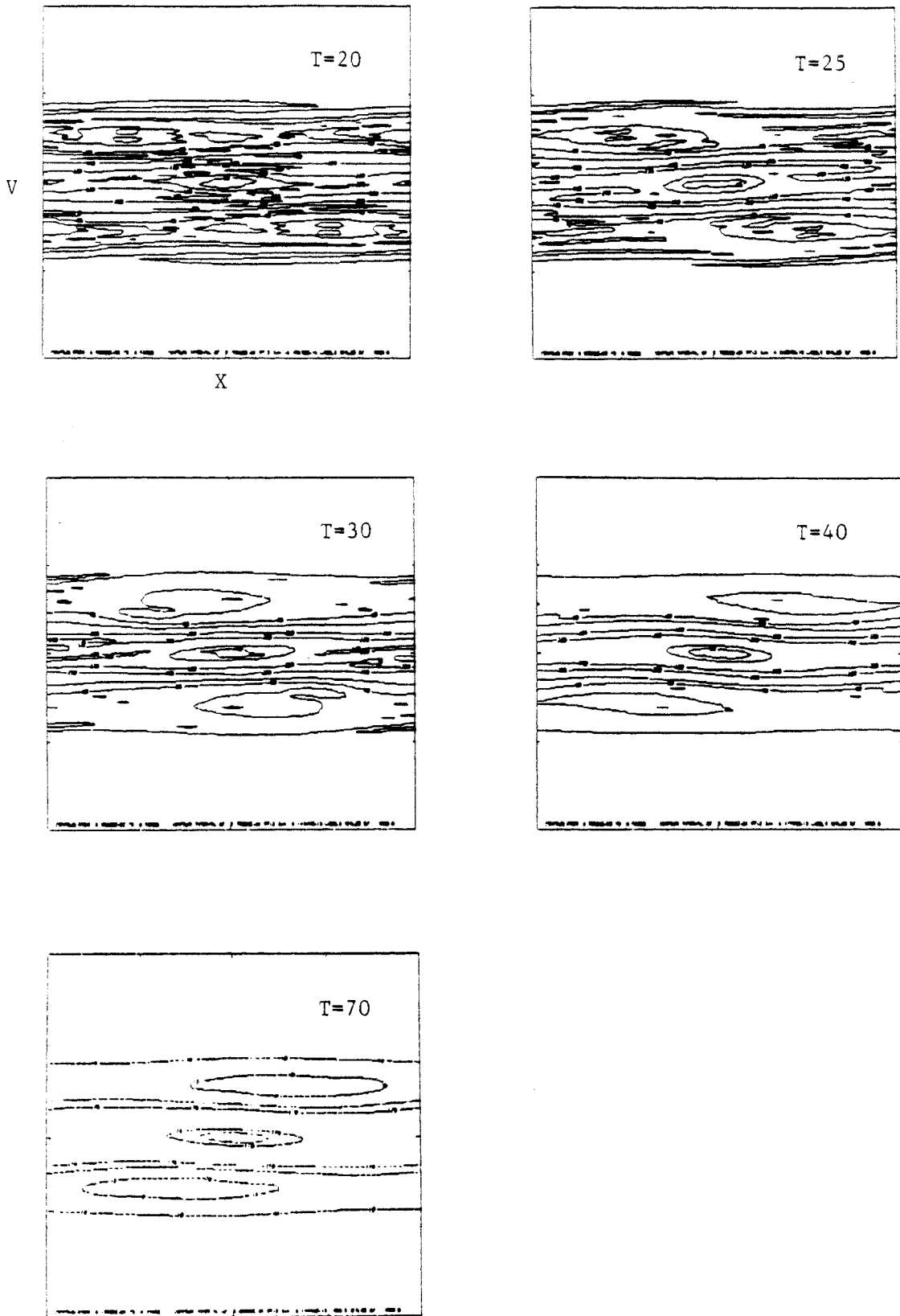


fig. III.2

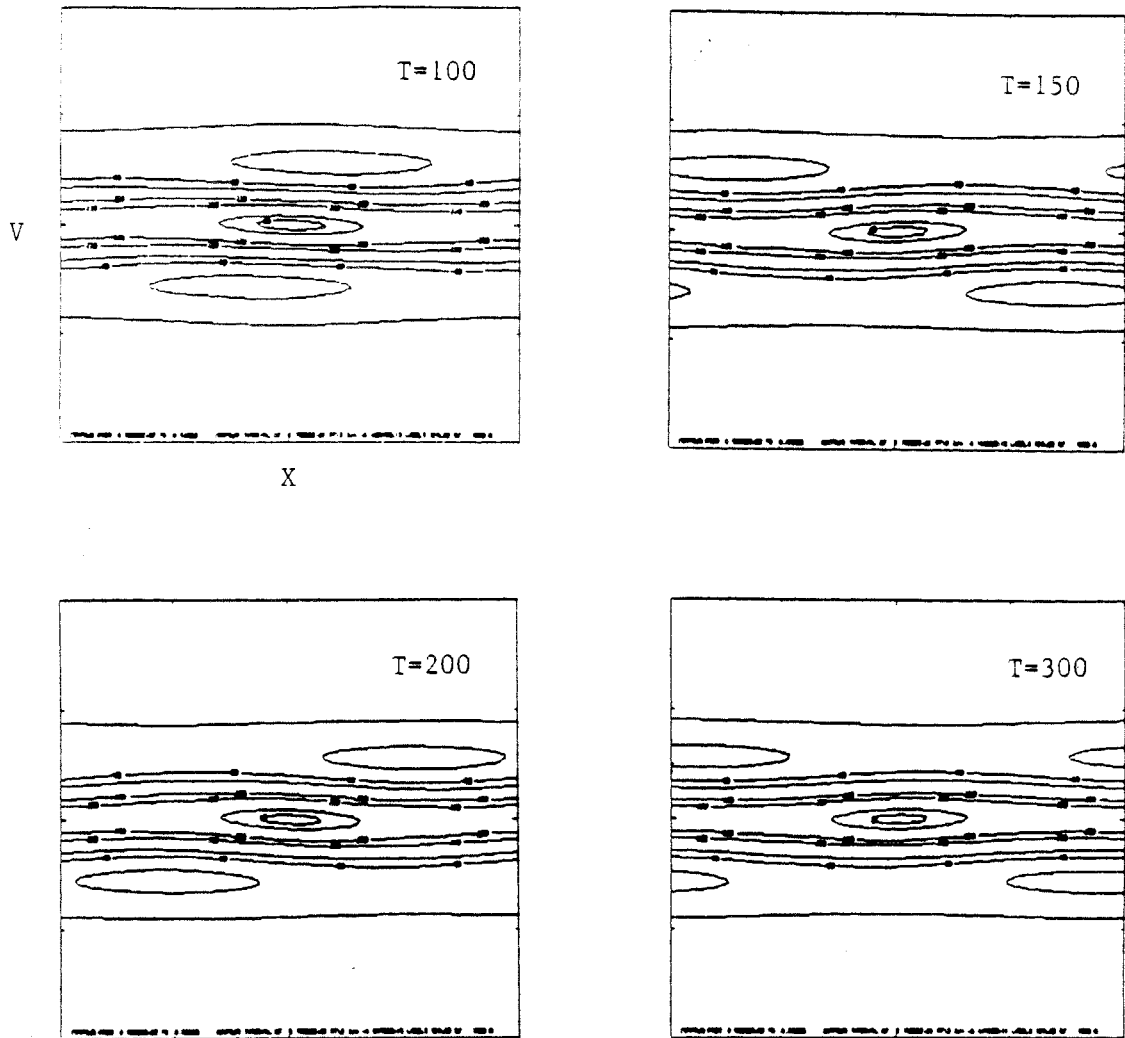


fig. III.2

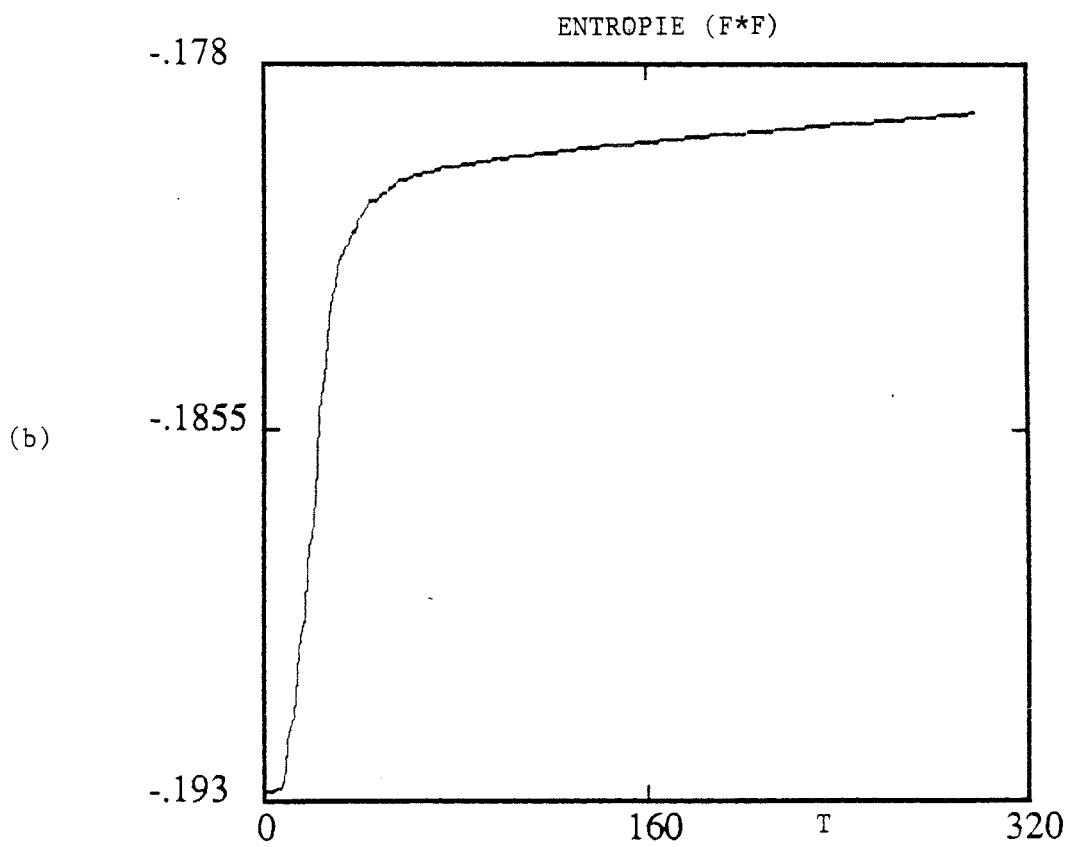
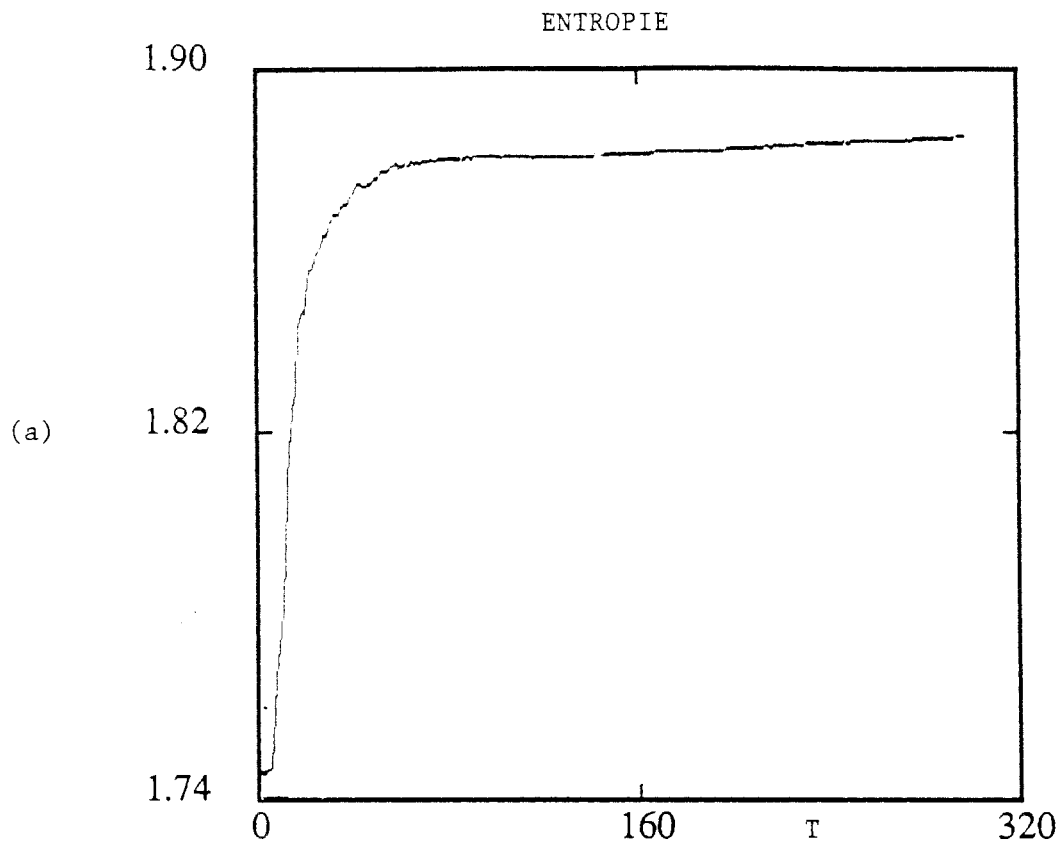


fig. III.3

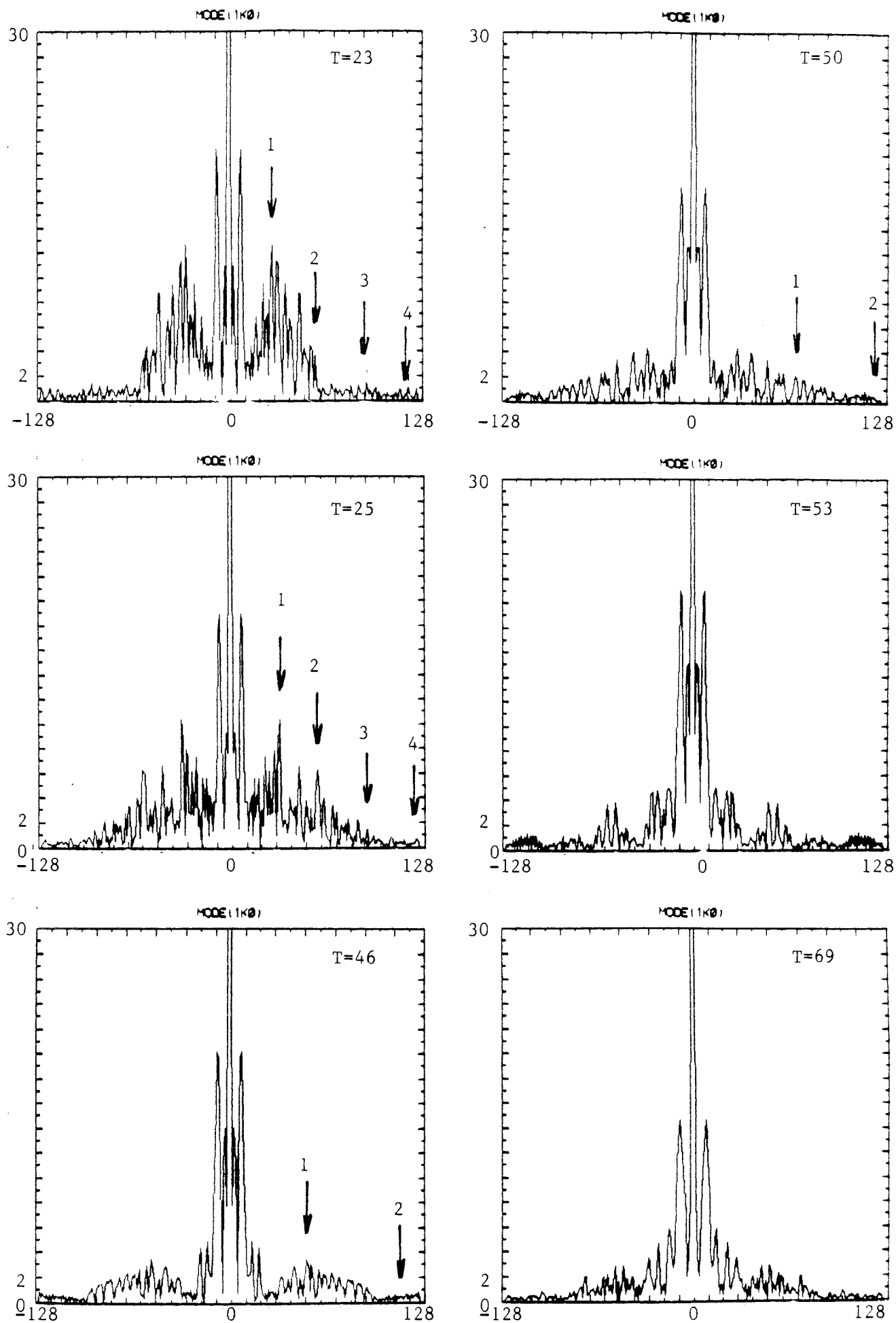


fig. III.4

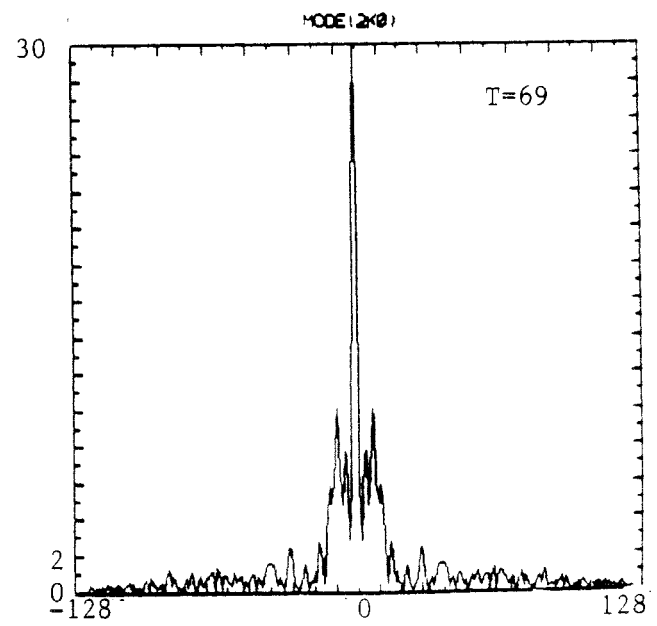
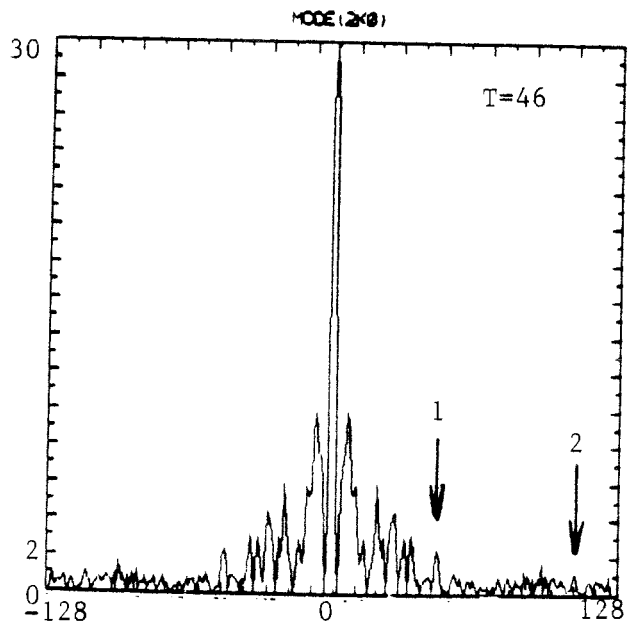
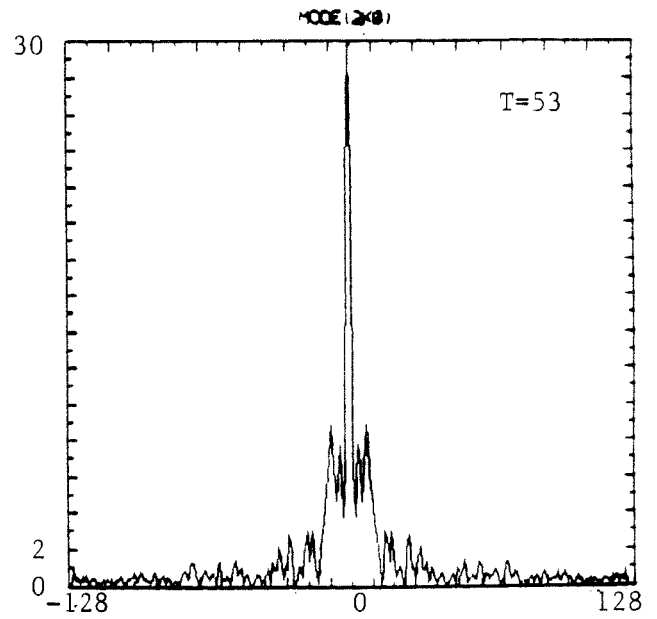
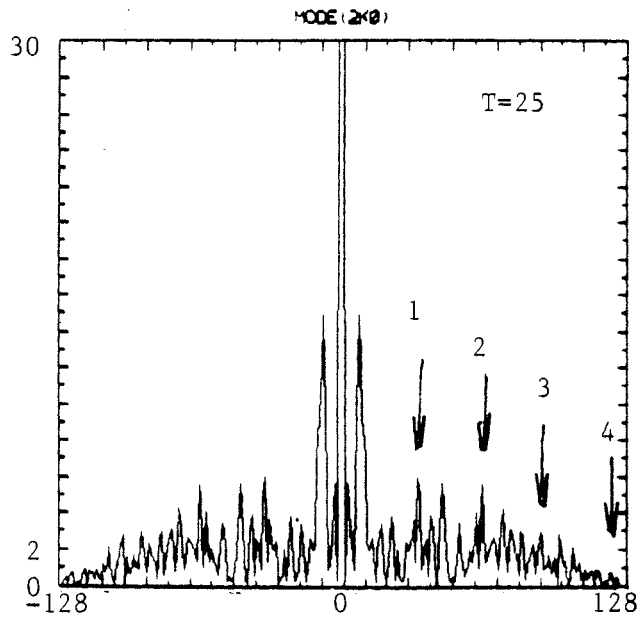
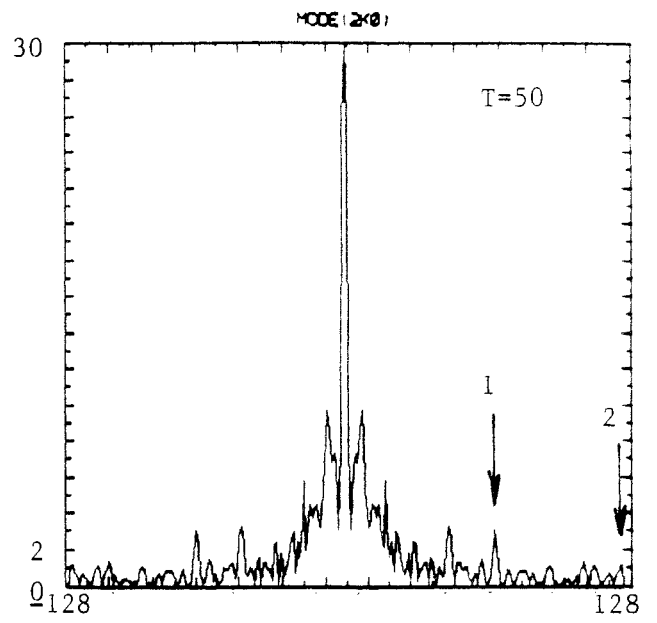
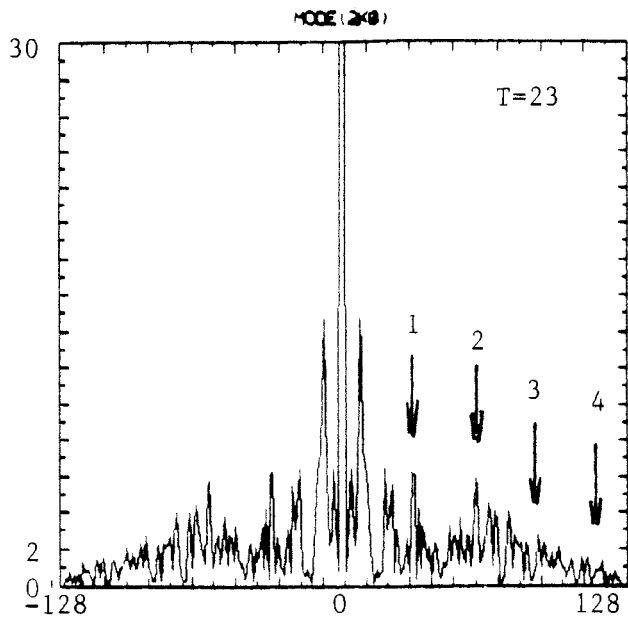


fig. III.4

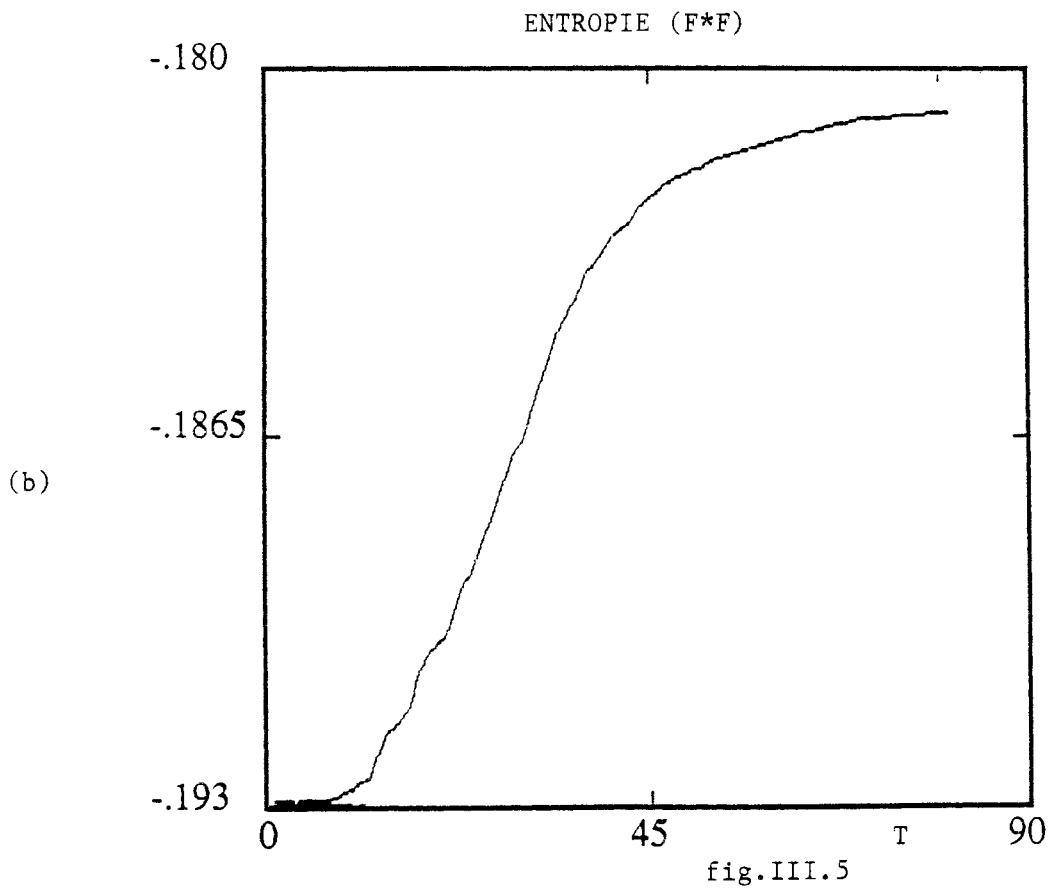
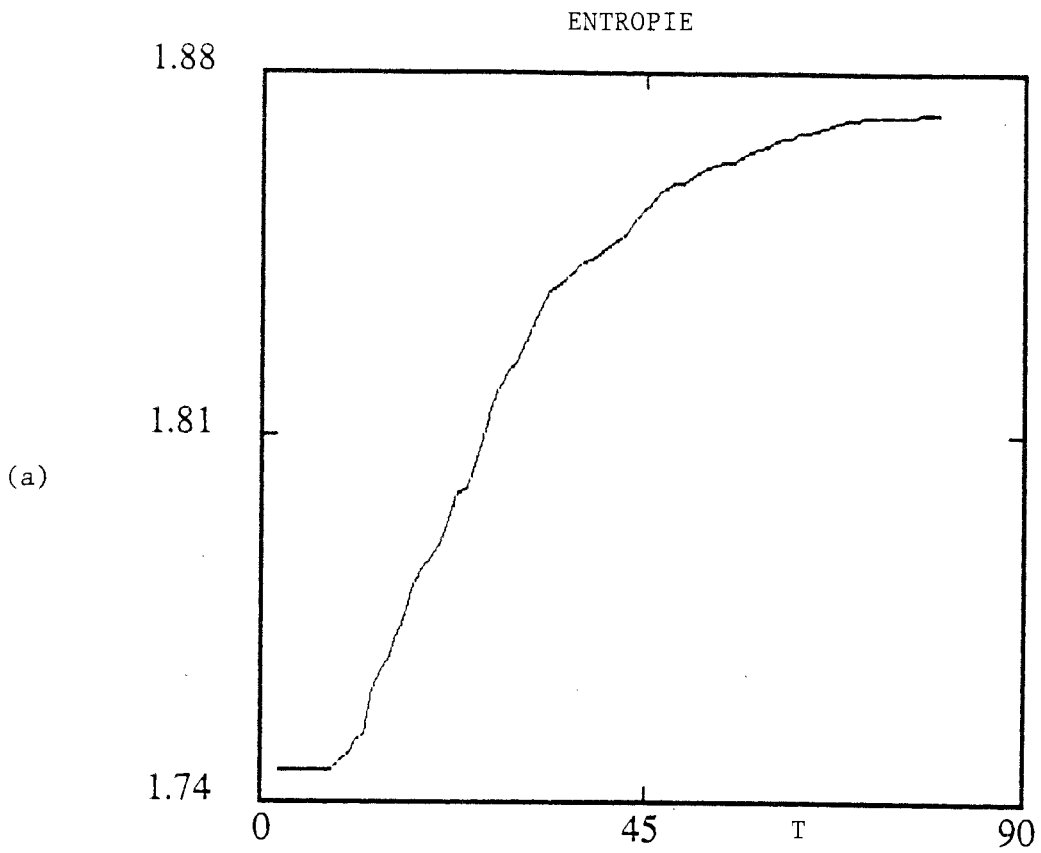


fig.III.5

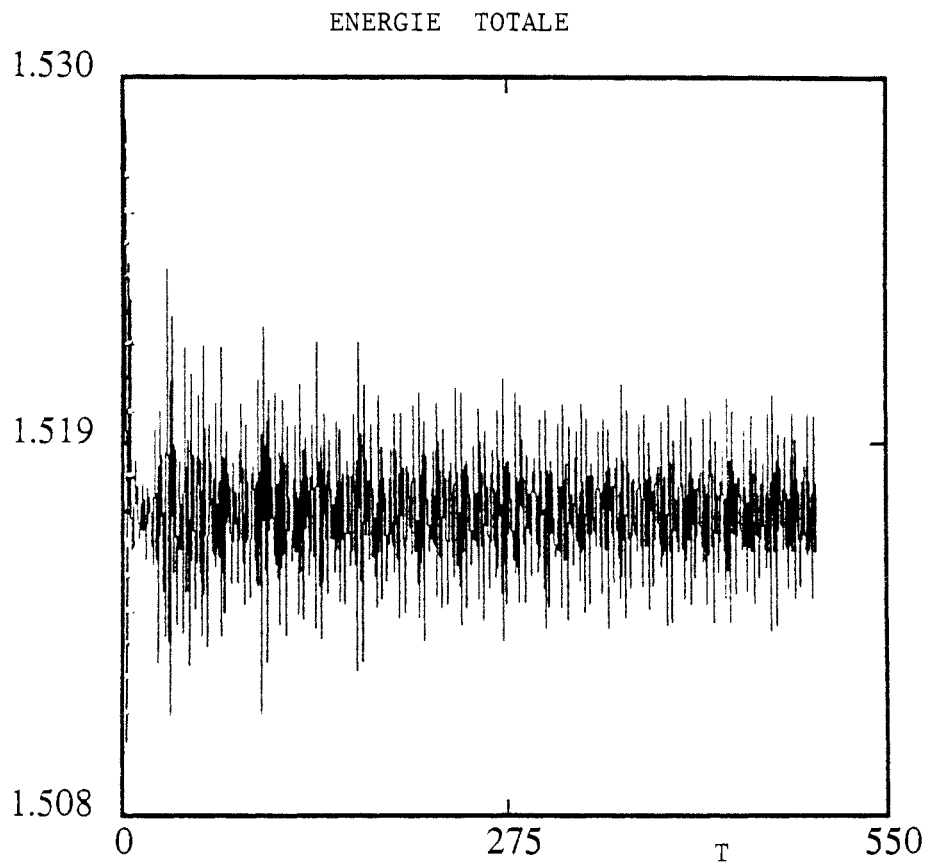


fig. III.6

III - DEUXIEME CONDITION INITIALE : TROUS GENERES PAR UNE ONDE DE GRANDE AMPLITUDE

Soit un plasma maxwellien dans un état d'équilibre stable et homogène. Nous perturbons cet équilibre sur le mode k_0 . La fonction de distribution initiale est de la forme :

$$f(x,v,t=0) = (\sqrt{2\pi}v_{th})^{-1} \exp(-v^2/2v_{th}^2) [1 + \alpha \cos(k_0x)] \quad \text{III.13}$$

le paramètre α détermine l'amplitude de la perturbation et caractérise aussi le degré de non linéarité.

Une onde de grande amplitude provoque le piégeage des particules /36 / dont la vitesse de phase est proche de la vitesse de l'onde . Le piégeage des particules se manifeste comme un trou dans l'espace des phases, il en résulte une perturbation de la fonction de distribution.

III-1 PARAMETRES DE LA SIMULATION

Le code utilisé est le code à interpolation par spline avec :

$$L = 4\pi$$

$$V_{max} = 7$$

$$\alpha = 0.4$$

$$DT = 0.25$$

$$k_0 = 0.5$$

La condition initiale normalisée s'écrit :

$$f(x,v,t=0) = (\sqrt{2\pi})^{-1} * \exp(-v^2/2) * [1 + \alpha \cos(k_0x)]$$

sur la figure (III.7) représentant les courbes de niveaux de la fonction de distribution dans l'espace des phases, on observe bien ce phénomène de formation des trous.

Au cours de l'évolution dans le temps du système, et dès le début, certaines particules situées dans la zone de forte

densité subissent une importante accélération due au champ électrique, la fonction de distribution forme des filaments dans l'espace des phases. Il apparaît ensuite autour de la vitesse de phase ($v_0 = 2.8$) un trou qui se forme entre les filaments. La dimension du trou diminue et enfin le trou se stabilise autour de la vitesse de phase /37 /. Lorsque le trou est formé, la filamentation disparaît progressivement et la taille du vortex diminue. C'est l'échantillonnage de la fonction de distribution f dans le code numérique lui même qui produit le lissage et détruit la microstructure. Ce phénomène s'identifie à un "coarse graining". L'évolution de ce type de système s'accompagne d'une disparition de la microstructure dans l'espace des phases, et conduit à un état asymptotique qui n'est pas stationnaire, les trous se meuvent toujours dans l'espace des phases. L'état asymptotique le plus général semble être la superposition d'un équilibre et d'un ensemble de trous.

III-2 L'ENTROPIE MESURE LA PERTE D'INFORMATION

Nous étudions l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER (k,l) dual de l'espace des phases (x,v) . Sur la figure(III.8), on a représenté en ordonnée l'amplitude de $f(k,l)$ pour un k donné ($1k_0, 2k_0, \dots$) avec $k_0 = 2\pi/L = 0.5$ le mode fondamental et en abscisse l ($-l_{max}, +l_{max}$) avec $l_{max} = \pi / \Delta v$.

Comme dans le cas de la condition initiale précédente, des structures (ou pics) apparaissent dans cette représentation. Ces structures sont formées d'une partie centrale située autour de $l=0$, et de structures d'amplitudes moins importantes qui se déplacent vers les bords ($\pm l_{max}$).

Sur la figure (III.8), on voit nettement deux structures (numéro 1 et 2) et une troisième moins nette en dehors de la structure centrale. Ces structures sont régulièrement espacées sur l'axe des l et se déplacent chacune avec une vitesse constante.

Nous avons dans ce cas-là aussi calculé l'entropie avec les

deux formes déjà citées H1(équation III.1) et H2(équation III.2). Les deux courbes de la figure (III.9) montrent bien une augmentation d'entropie, puis une stabilisation quand le système atteint son état asymptotique.

On remarque en particulier sur la figure (III.10) un saut d'entropie autour de $t=120 \omega p^{-1}$, qui correspond au fait que la structure 2 a atteint le bord l_{\max} et a disparu ensuite. Sur la figure (III.11) nous avons représenté la variation de l'énergie totale en fonction du temps.

LEGENDE DES FIGURES DU CHAPITRE III

- fig. III.7 : Courbes de niveaux de la fonction de distribution dans l'espace des phases
- fig. III.8 : Evolution de la fonction de distribution $f(k,l)$ en fonction de l dans l'espace de FOURIER
- fig. III.9 : Variation d'entropie du système en fonction du temps ($T_{MAX} = 500 \text{ wp}^{-1}$)
a) $H_1(t)$
b) $H_2(t)$
- fig. III.10 : Variation d'entropie du système en fonction du temps ($T_{MAX} = 150 \text{ wp}^{-1}$)
a) $H_1(t)$
b) $H_2(t)$
- fig. III.11 : Variation de l'énergie totale en fonction du temps

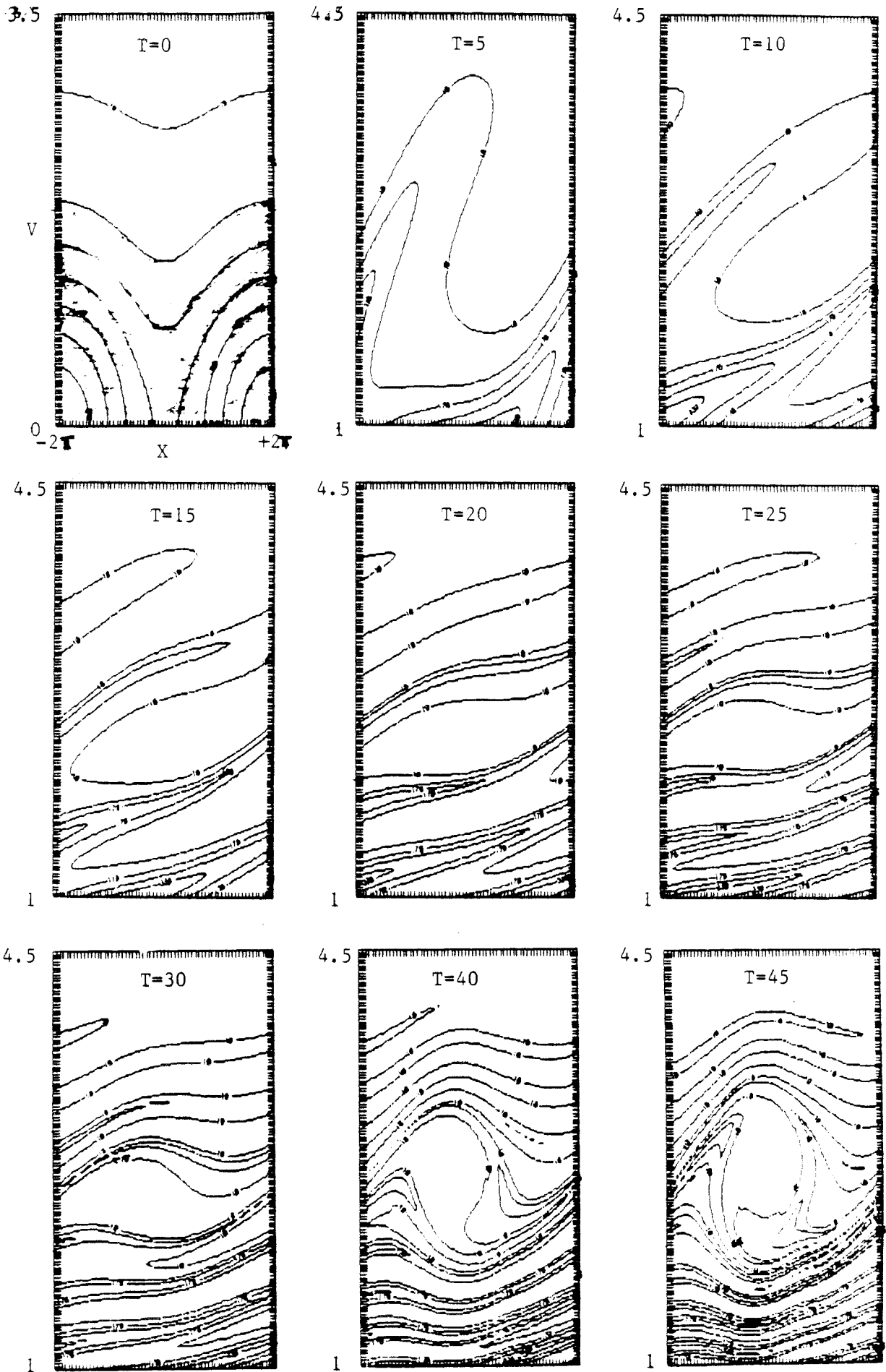


fig. III.7

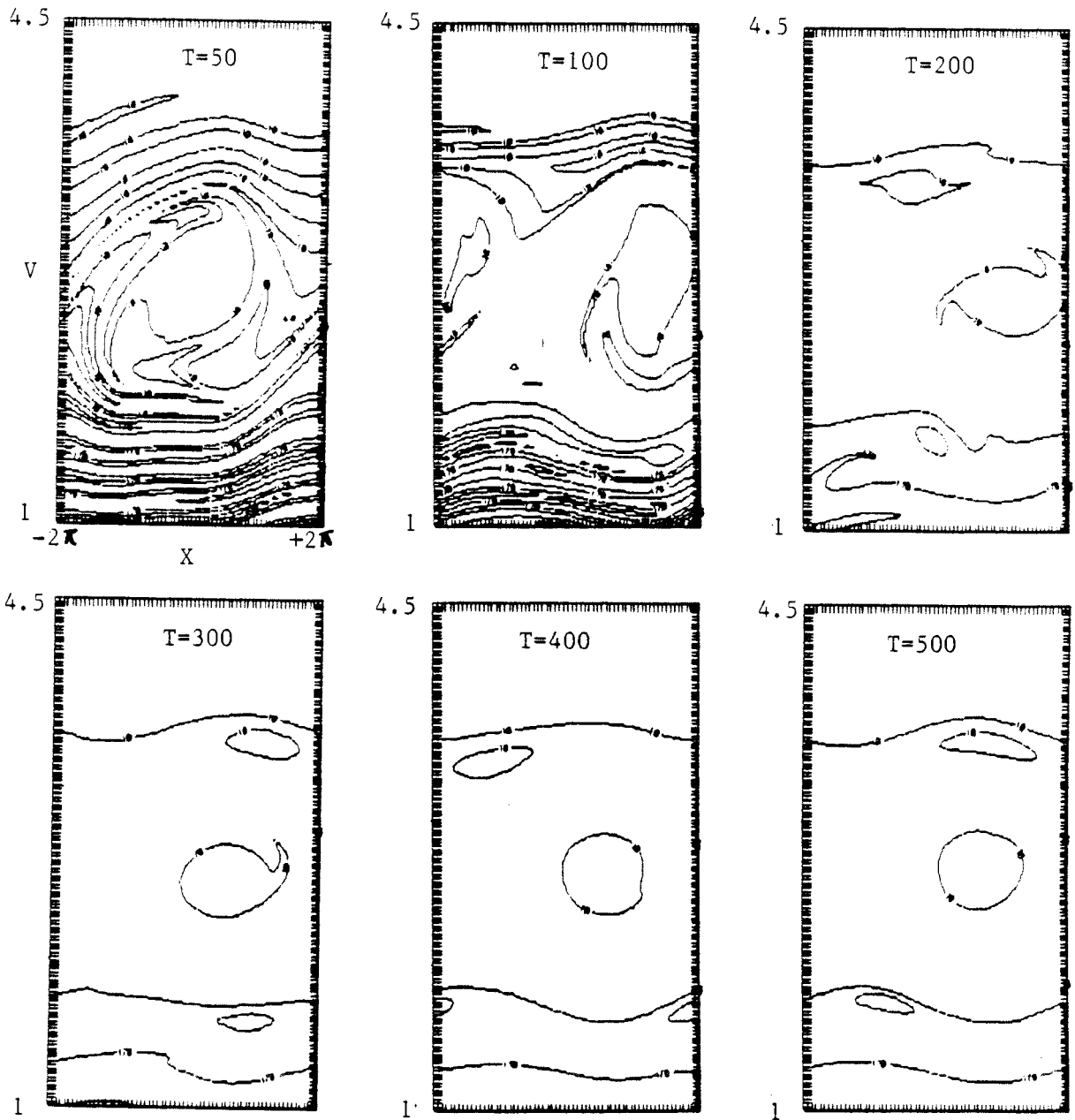
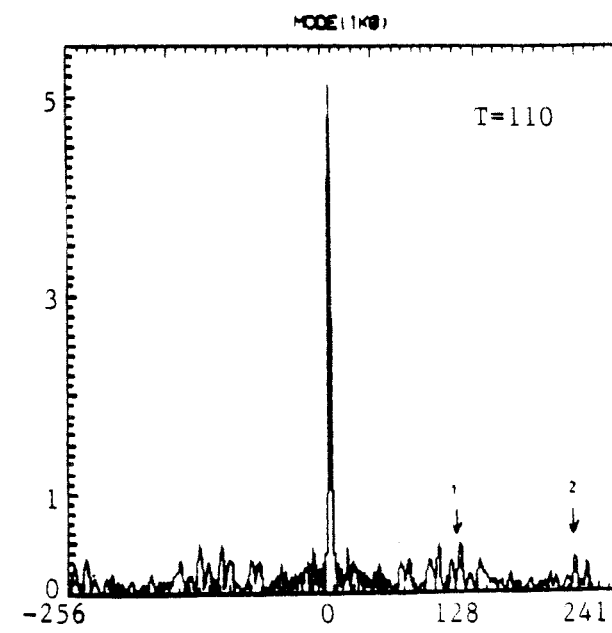
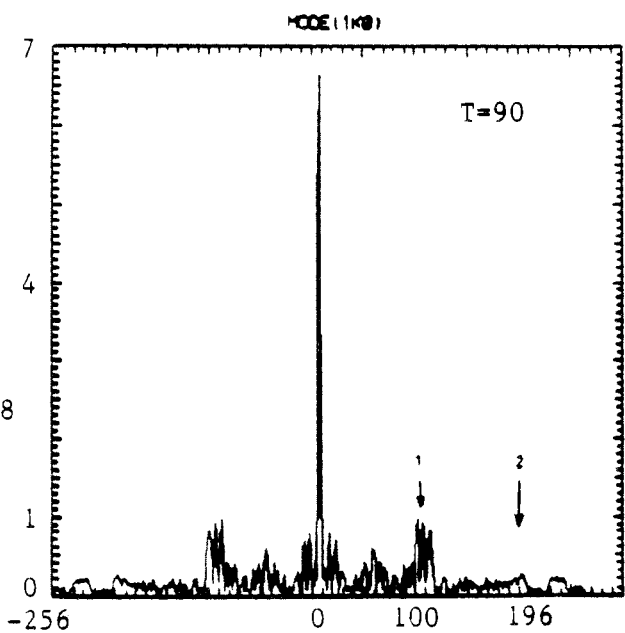
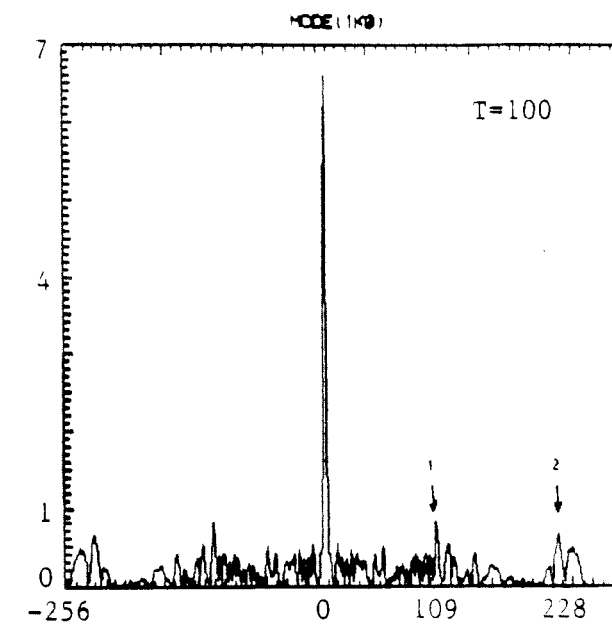
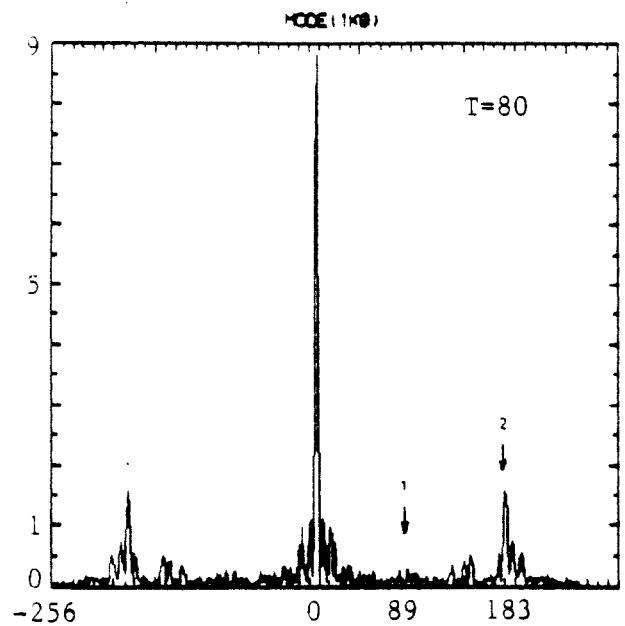
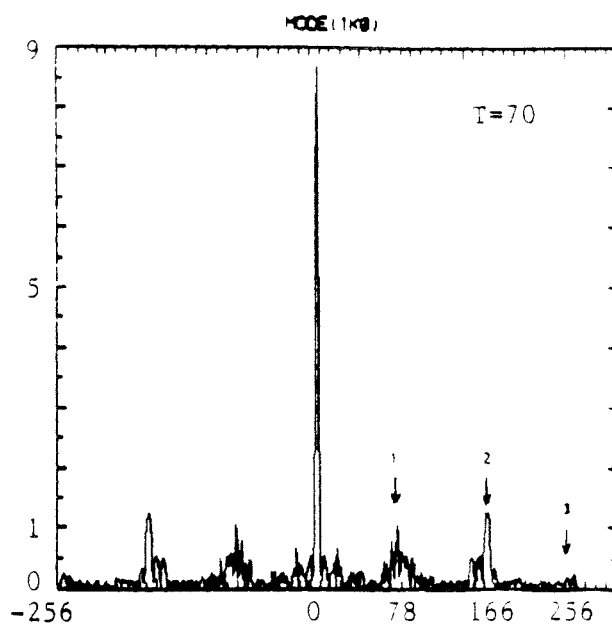
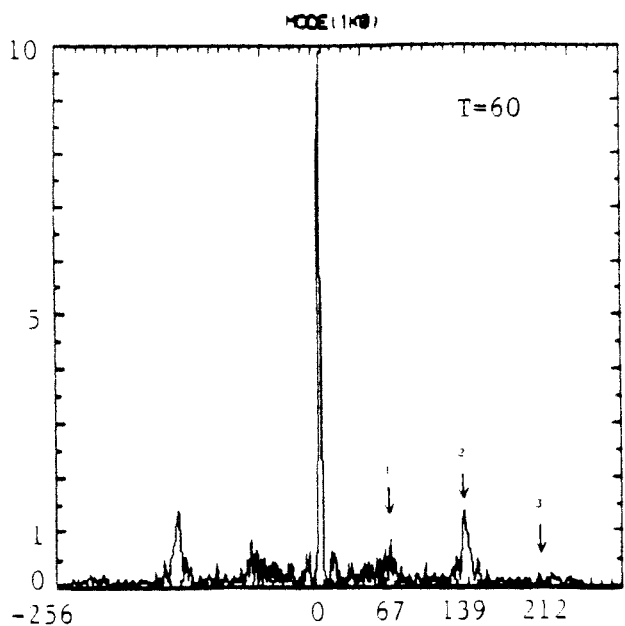


fig. III.7



III.8

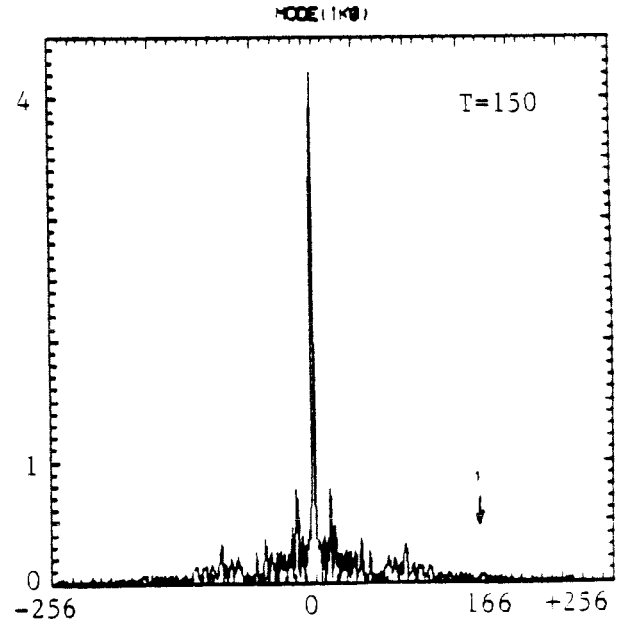
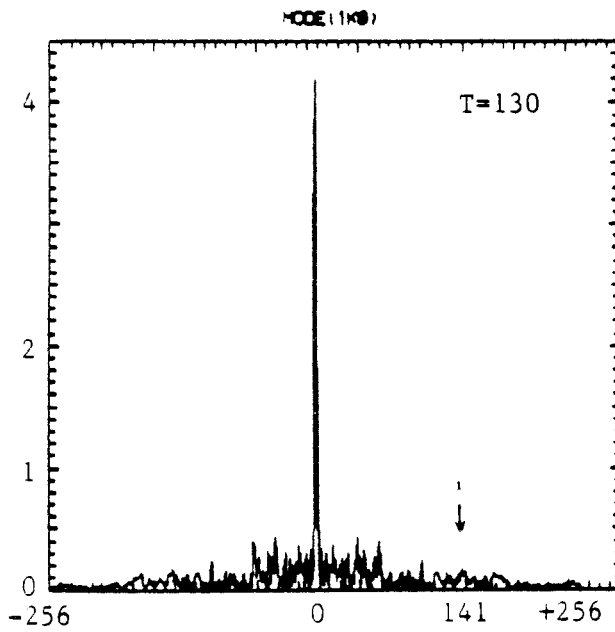
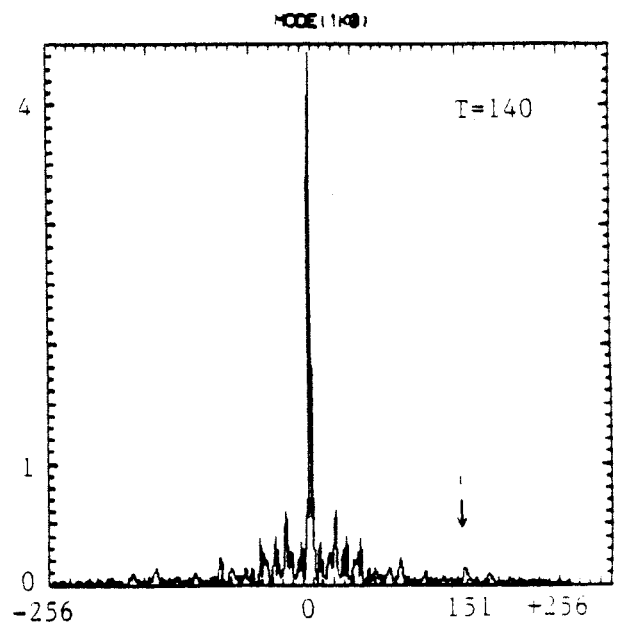
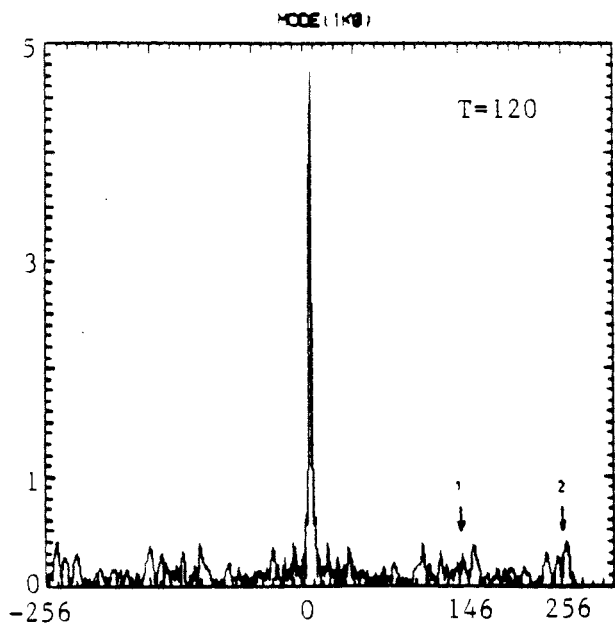
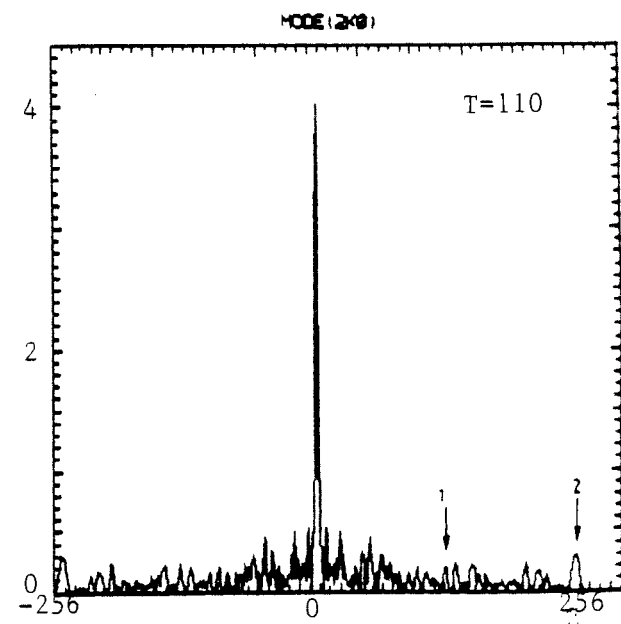
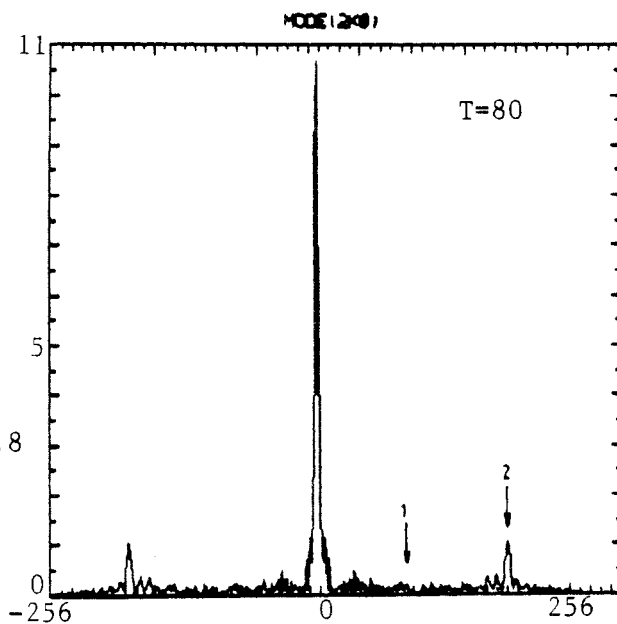
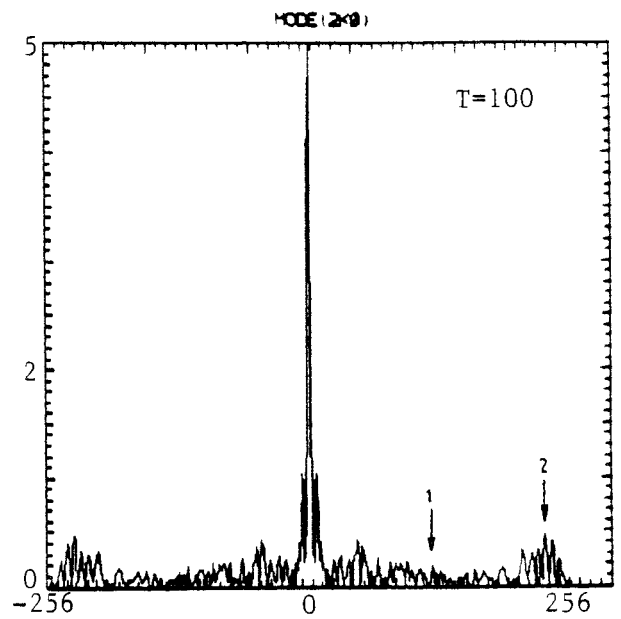
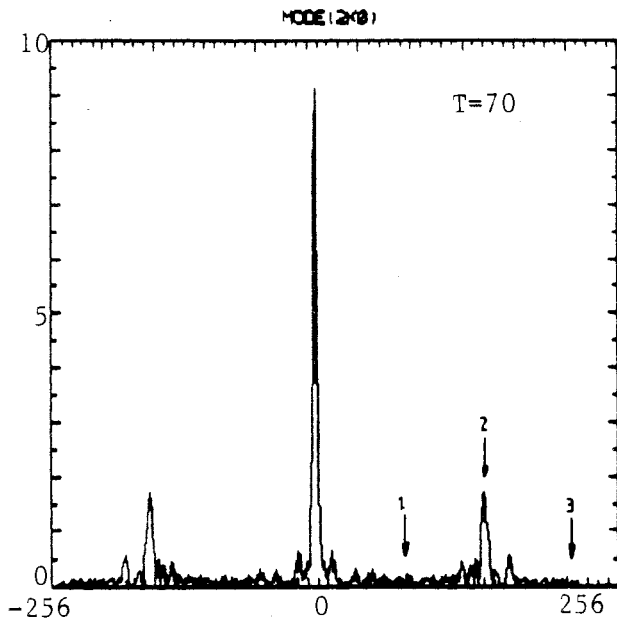
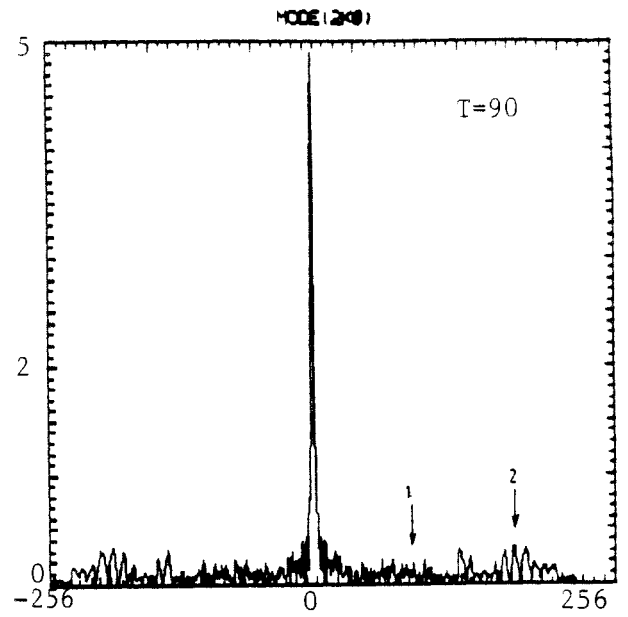
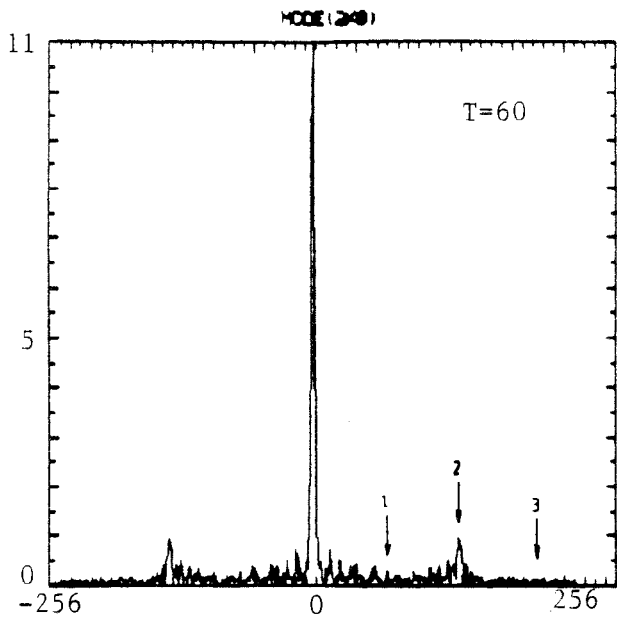


fig. III.8



ig. III.8

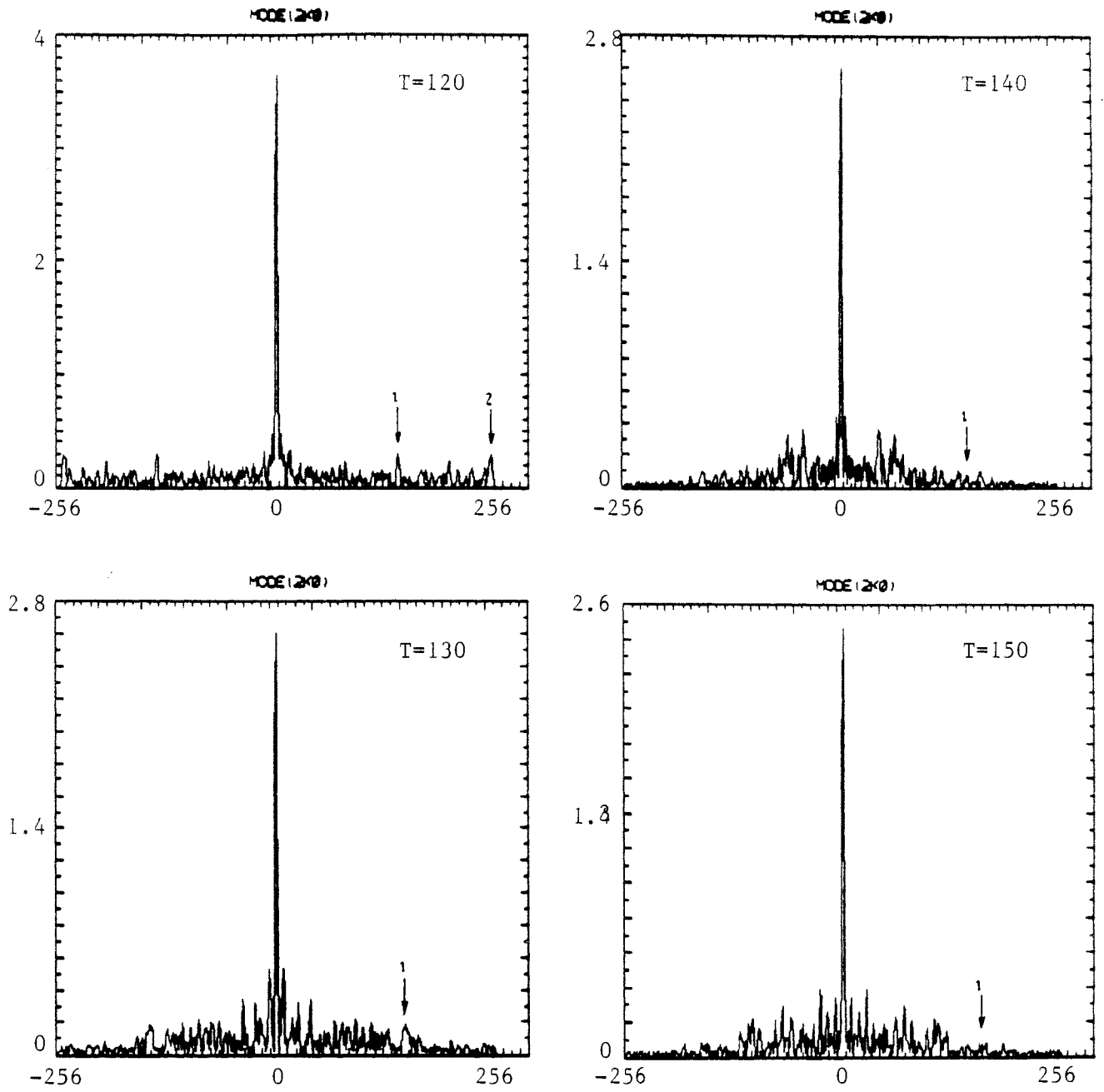


fig. III.8

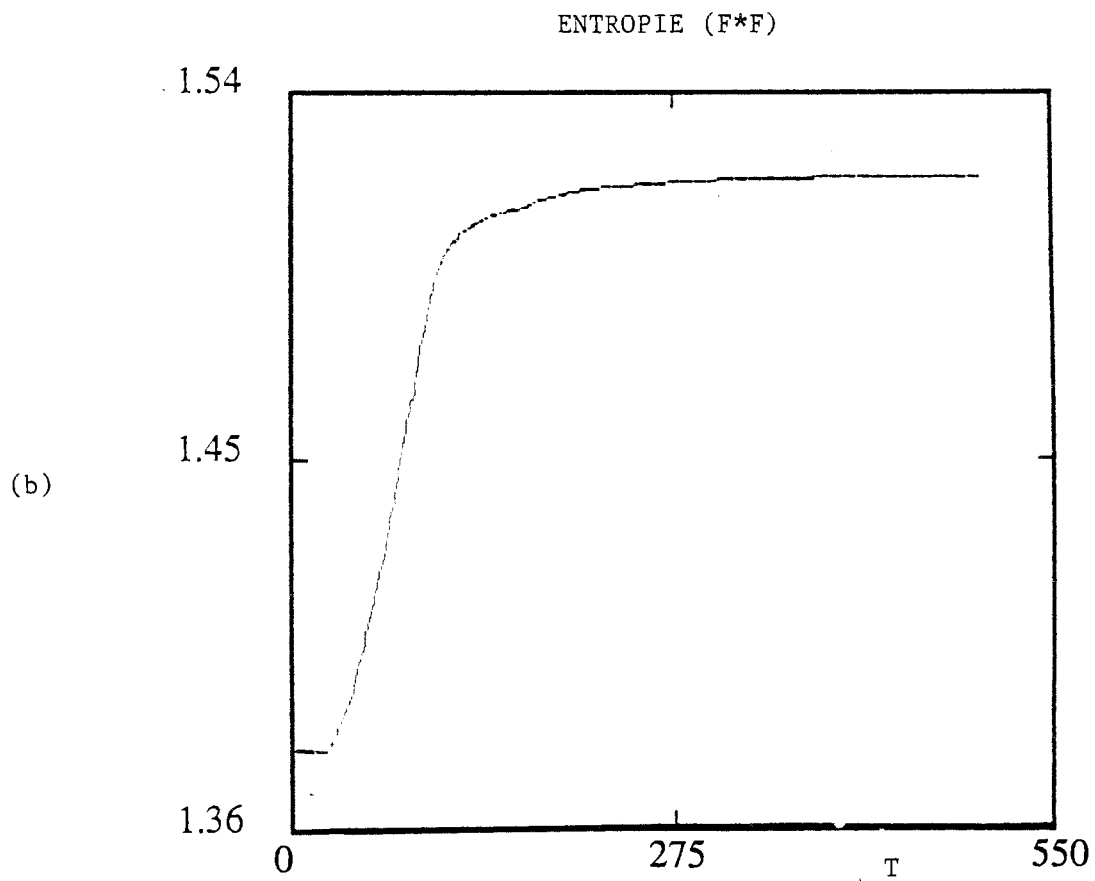
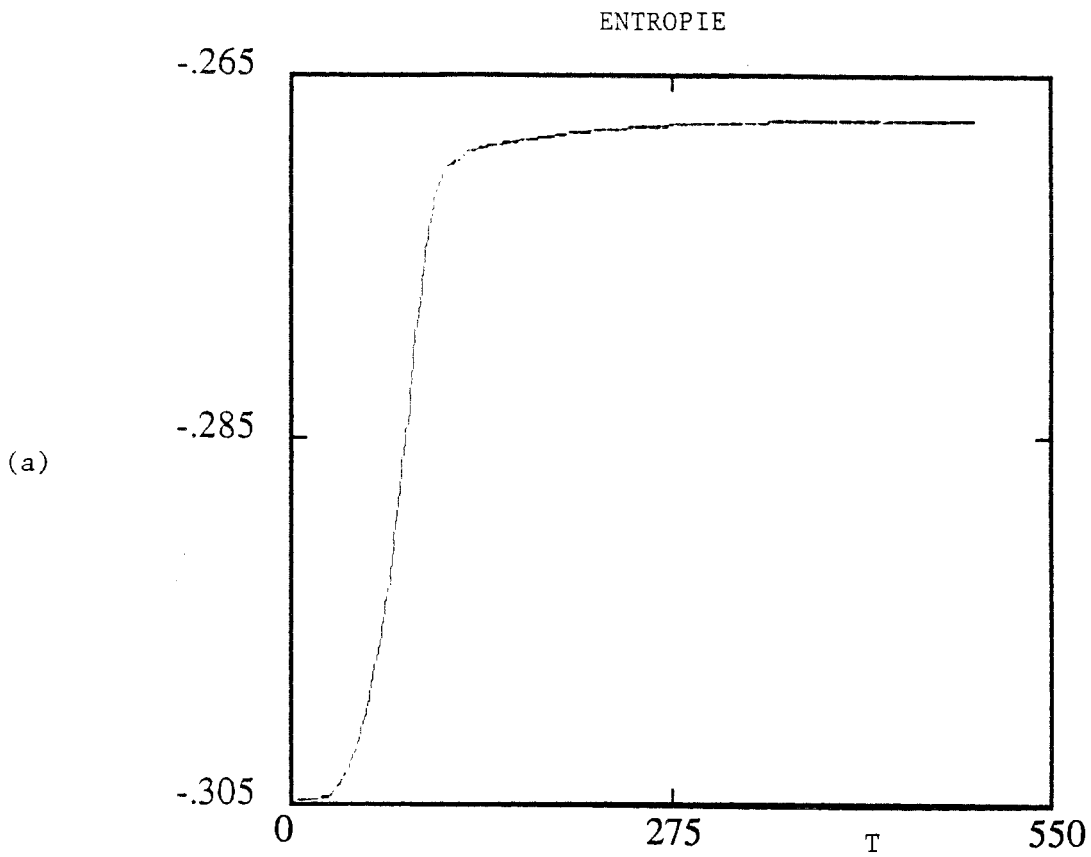


fig. III.9

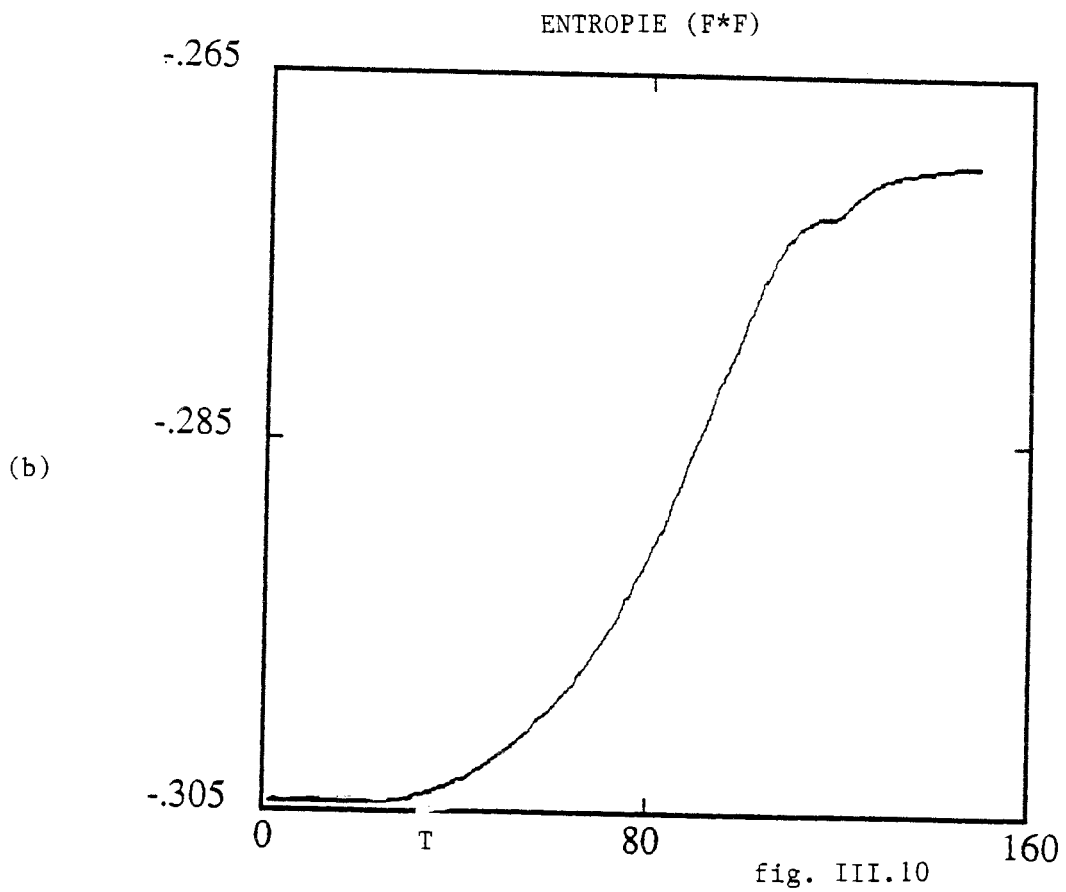
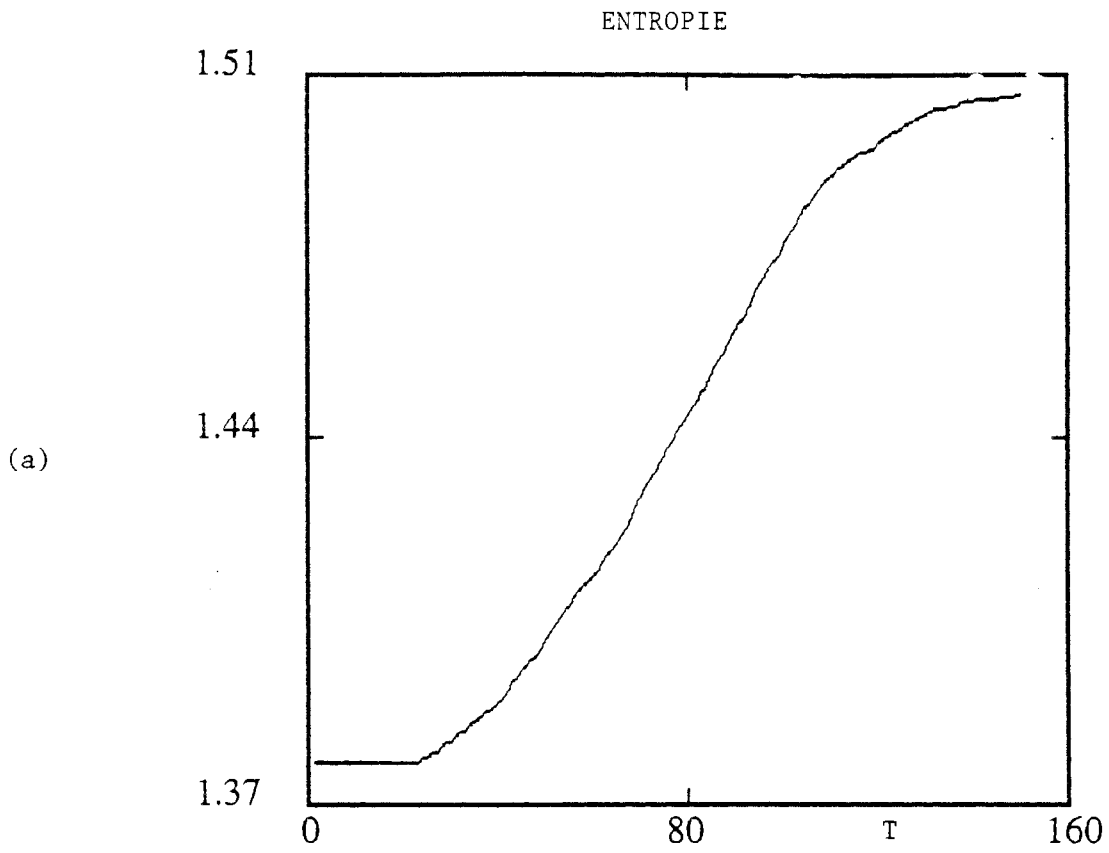


fig. III.10

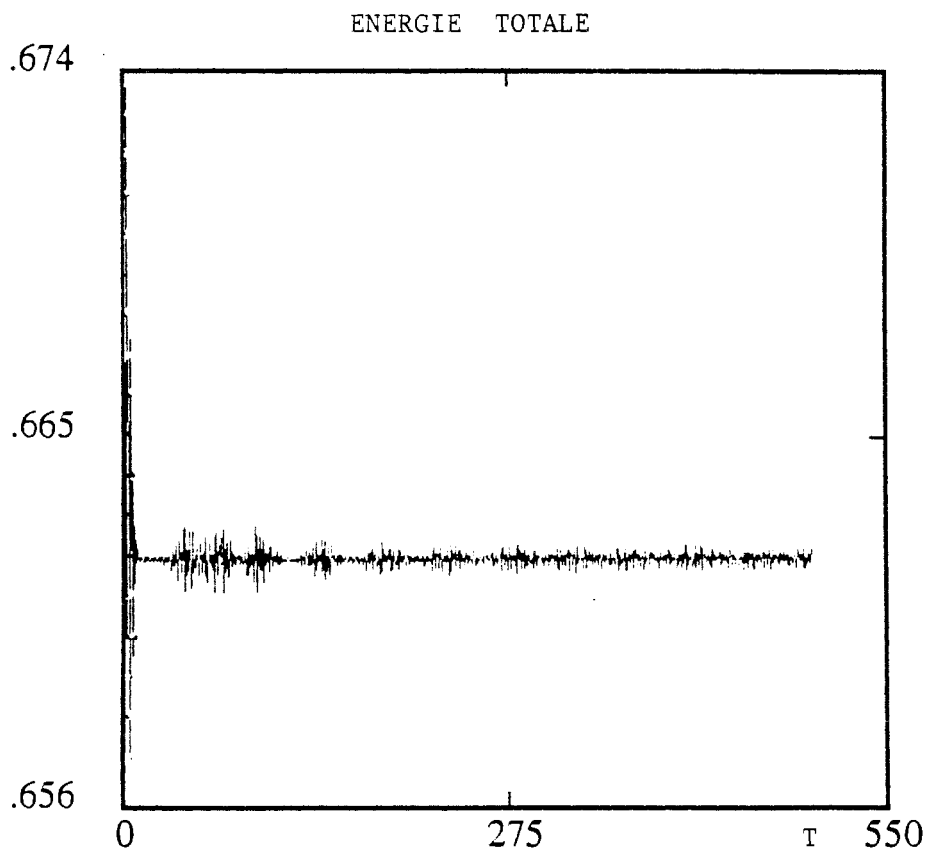


fig. III.11

IV- TROISIEME CONDITION INITIALE : TROUS CREES INITIALEMENT

Jusqu'à présent nous avons choisi des conditions initiales correspondant à un équilibre perturbé. Nous considérons maintenant une condition initiale qui n'est pas un équilibre. On choisit une fonction qui représente dans l'espace des phases une cavité de forme gaussienne. Elle est de la forme :

$$f(x,v,t=0) = \frac{\sigma_0}{4v_0} [\text{th}(v+v_0) - \text{th}(v-v_0)] + \frac{\alpha_1 L}{2\pi\sigma_x\sigma_v} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2} - \frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (III.14) représente le corps de la fonction, il est constitué de deux tangentes hyperboliques centrées en vitesse autour des points $v = \pm v_0$ ($2v_0 = V_{\text{max}}$). Dans l'espace des vitesses la fonction s'étend de $-V_{\text{max}}$ à $+V_{\text{max}}$ où $V_{\text{max}} = 12 v_{\text{th}}$ (v_{th} étant la vitesse thermique des électrons). Le deuxième membre à valeurs négatives détermine la nature et la forme du trou dans l'espace des phases.

Les paramètres σ_x et σ_v déterminent la largeur de la gaussienne avec $\sigma_x = \sigma_v = 2.25$.

Les facteurs σ_0 et α_1 permettent de normaliser la fonction de distribution à l'unité. $\sigma_0 = 1.10$ et $\alpha_1 = 1 - \sigma_0$.

L représente la longueur du système, $L = 24 l_D$ où l_D est la longueur de DEBYE. La dimension de la grille $N_x * N_v = 64 * 512$. Une telle condition initiale a été introduite par GHIZZO /33/ afin d'étudier les chocs entre vortex. Ce type de fonction permet de choisir librement la position d'un trou dans l'espace des phases.

La figure (III.12) montre l'allure de cette fonction à l'instant initial.

La figure (III.13) représente les courbes de niveau dans l'espace des phases de la fonction de distribution à divers instants.

L'évolution du système, calculée à l'aide du code spline,

montre que, dès les premiers instants, il y a de fortes fluctuations de densité et un "mélange" violent dans l'espace des phases. On peut également noter la disparition progressive de la microstructure et finalement le système devient lisse, on voit alors apparaître une structure asymptotique qui est de type BGK /33 /. En effet sur la figure (III.14), nous avons tracé la fonction de distribution f en fonction de $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 + e\phi(x)$ l'énergie totale de la particule pour différentes positions. Toutes ces courbes ont la même allure ce qui montre que la fonction de distribution asymptotique ne dépend plus que de l'énergie totale ϵ de la particule. C'est donc bien une structure de type BGK.

IV-1 ETUDE DE L'ENTROPIE

Comme dans les cas précédents, nous étudions l'évolution de l'entropie du système.

La fonction H est calculée à partir des formules (III.1) et (III.2). Les courbes correspondantes sont reproduites sur les figures (III.15a) et (III.15b).

Les deux courbes montrent l'entropie qui augmente, puis qui se stabilise lorsque le système atteint son état asymptotique.

IV-2 CORRELATION ENTRE PIC ET SAUT D'ENTROPIE

Nous avons vu dans le cas d'une onde de grande amplitude, ou de l'équilibre BGK, que les sauts d'entropie étaient reliés à la disparition de pics dans l'espace de FOURIER. Ce phénomène est particulièrement net avec cette troisième condition initiale pour laquelle le mélange dans l'espace des phases est très violent.

Sur la figure (III.16) où on représente $f(k,l)$ en fonction de l pour un k donné, on remarque sur ce spectre, plus nettement que dans les cas précédents, des pics qui se déplacent vers les bords (l_{\max}), à vitesse constante.

Sur la figure (III.17) nous avons reproduit la courbe de l'évolution temporelle de l'entropie seulement jusqu'au temps $t=150 \omega p^{-1}$, pour mieux mettre en évidence le caractère non

régulier de la montée d'entropie.

A partir de $t=40\omega p^{-1}$, l'entropie augmente car la queue du spectre $f(l)$ atteint les bords (l_{\max}). Puis on voit successivement dans l'espace (k,l) les structures n°6- 5 - 4- 3 disparaître et corrélativement des sauts d'entropie sur les figures (III.17).

Les numéros sur les courbes d'entropie se réfèrent aux numéros des structures visibles sur les figures (III.16). La flèche sur la courbe d'entropie indique l'instant approximatif où la structure correspondante disparaît dans l'espace (k,l) .

Sur la figure (III.18) nous avons représenté la variation de l'énergie en fonction du temps.

- fig. III.12 : Représentation de la condition initiale
 - en tridimensionnelle
 - en courbes de niveaux
- fig. III.13 : Evolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases (x,v)
- fig. III.14 : fonction de distribution f en fonction de l'énergie totale de la particule ϵ pour différentes positions
- fig. III.15 : Variation d'entropie du système en fonction du temps
 a) $H_1(t)$
 b) $H_2(t)$
- fig. III.16 : Evolution de la fonction de distribution $f(k,l)$ en fonction de l dans l'espace de FOURIER (k,l)
- fig. III.17 : Evolution de l'entropie du système en fonction du temps (TMAX = 150 wp-1)
 a) $H_1(t)$
 b) $H_2(t)$
- fig. III.18 : Variation de l'énergie totale en fonction du temps

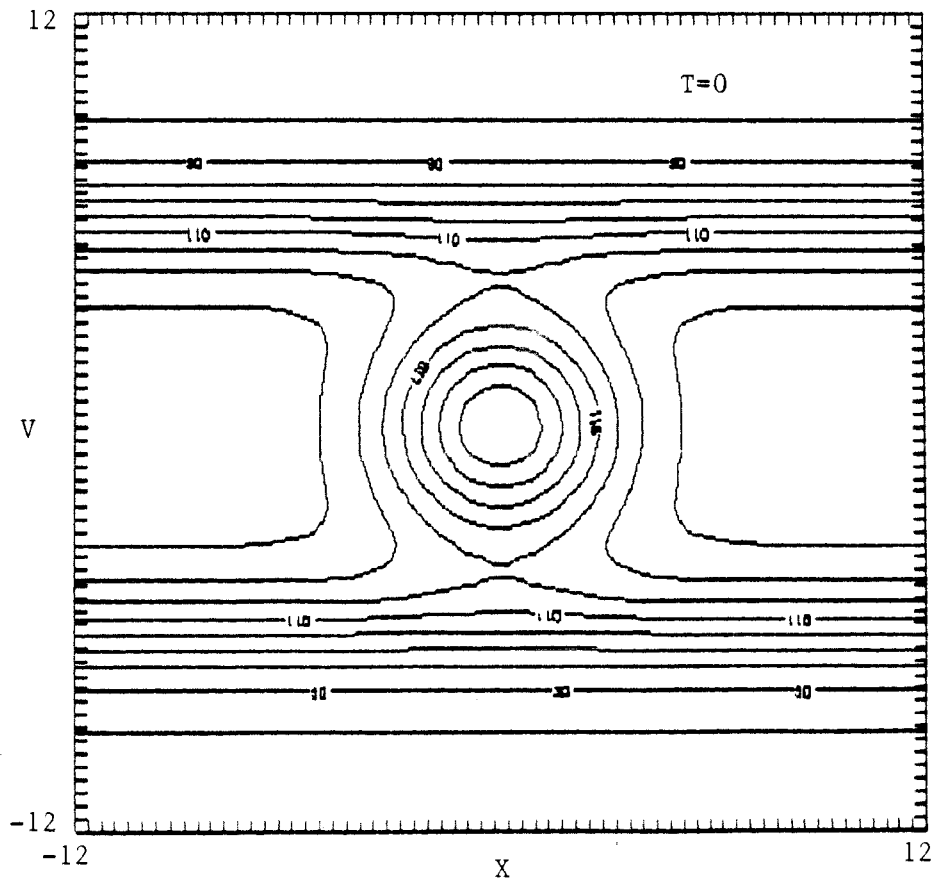
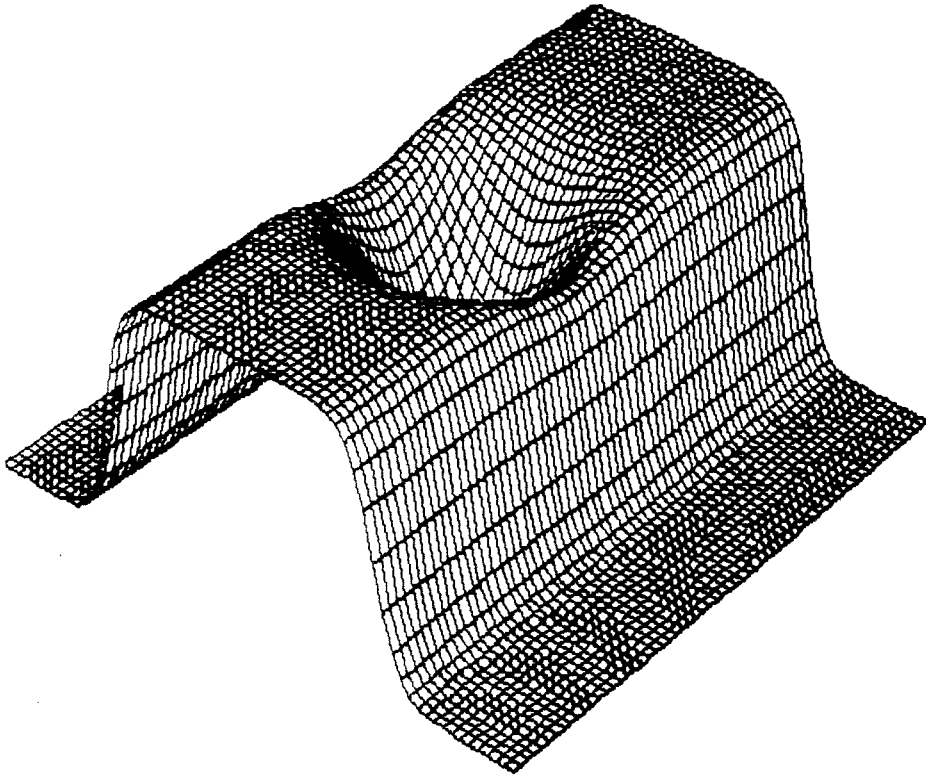


fig. III.12

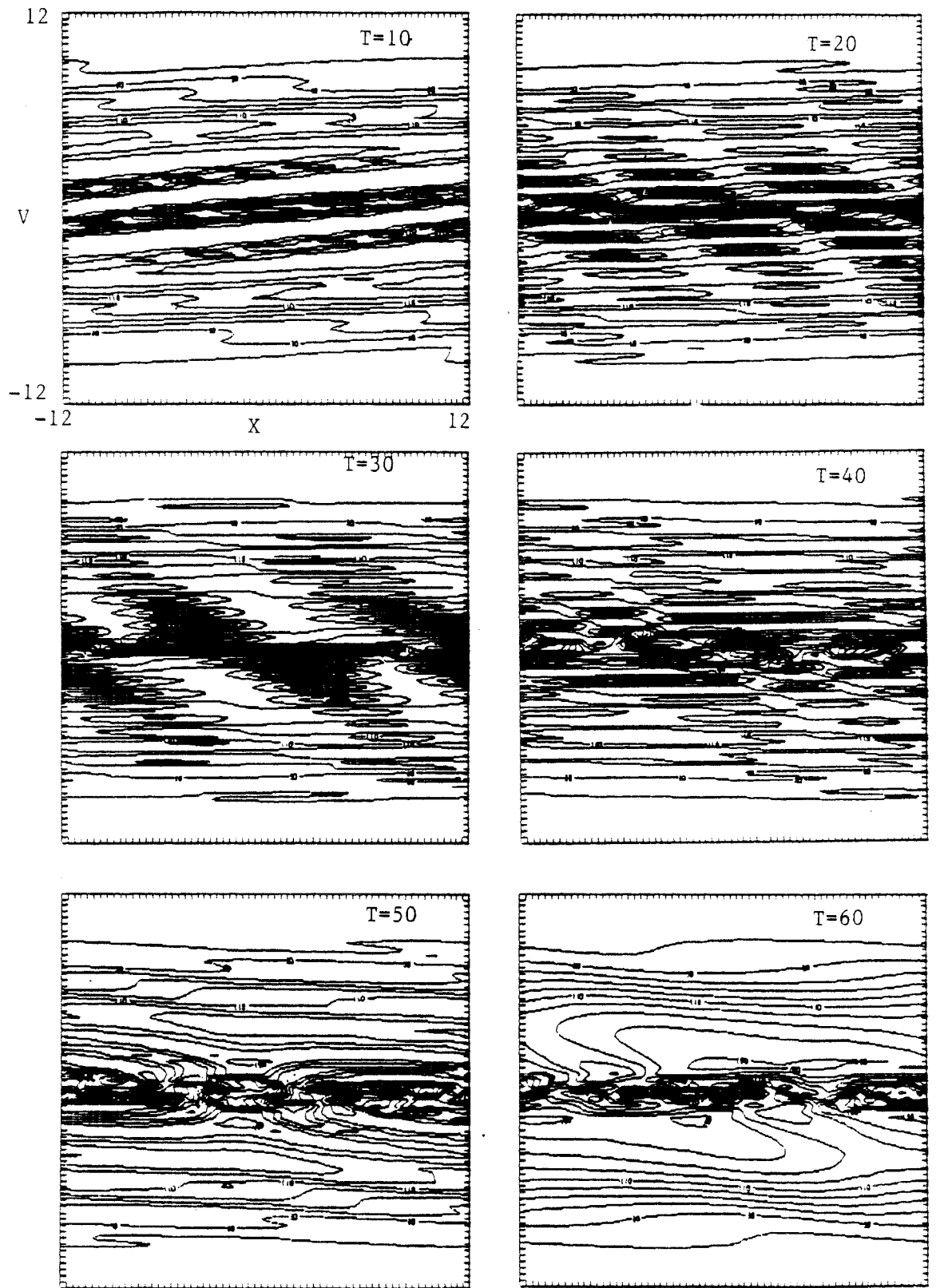


fig. III.13

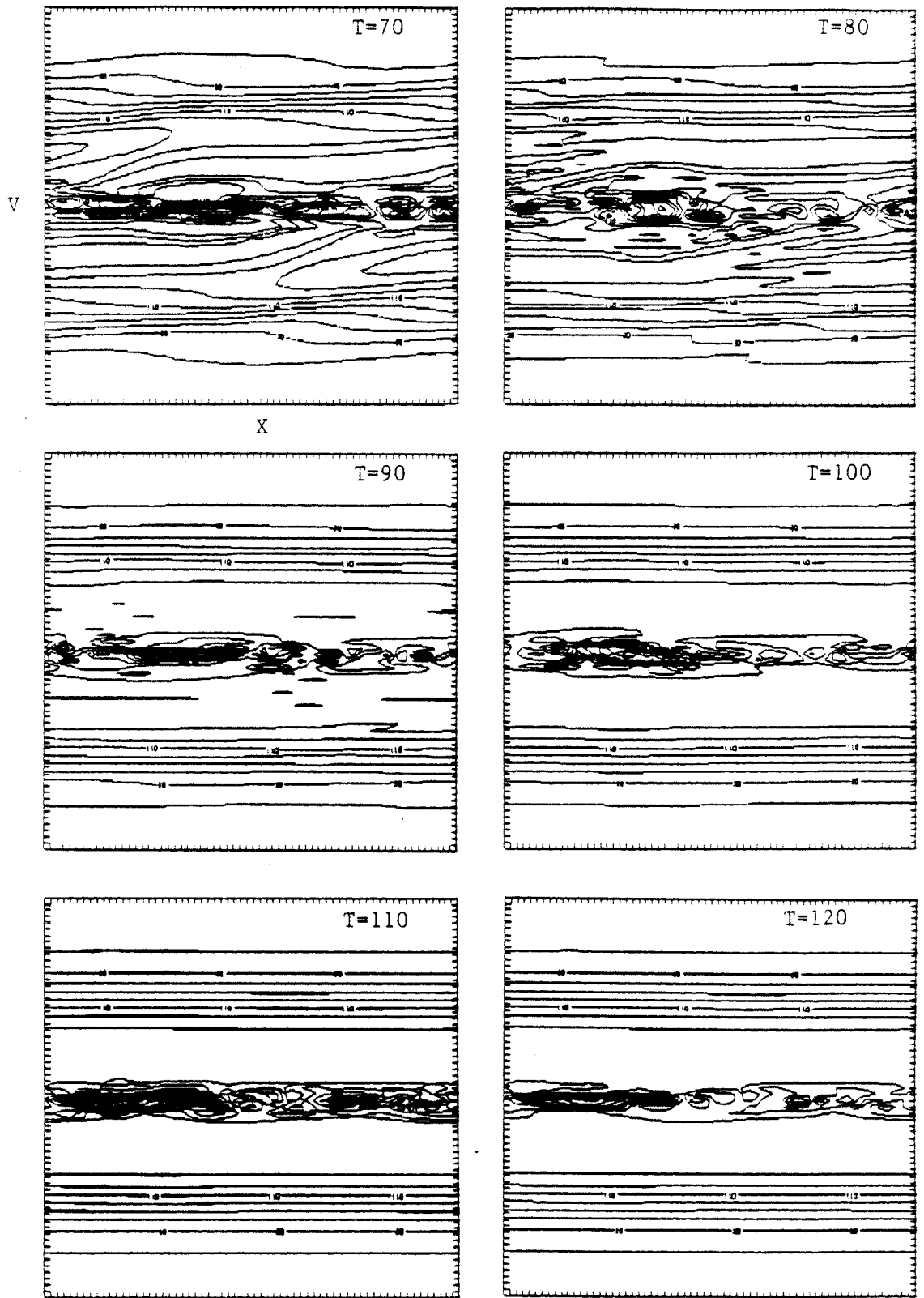


fig. III.13

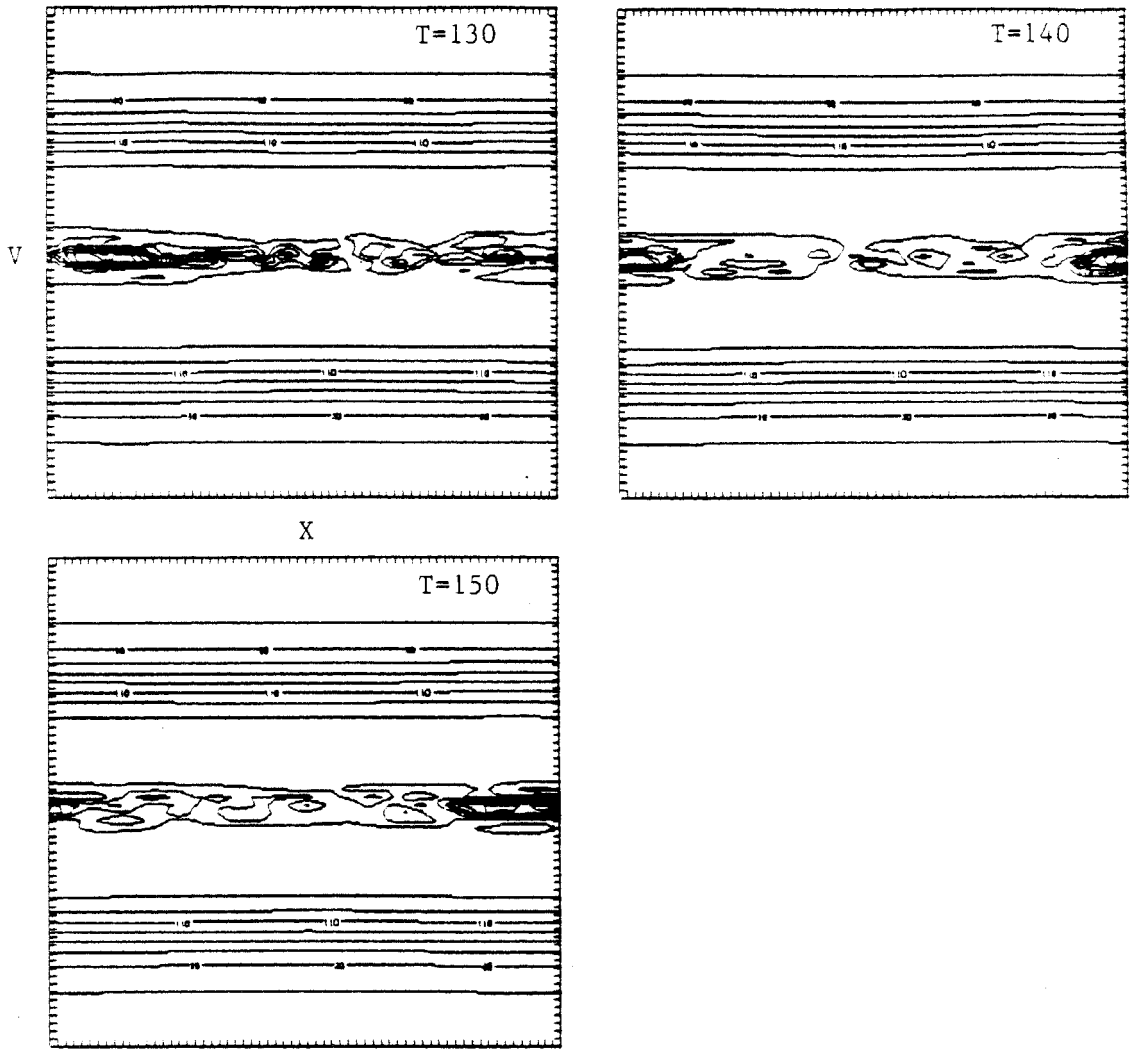


fig. III.13

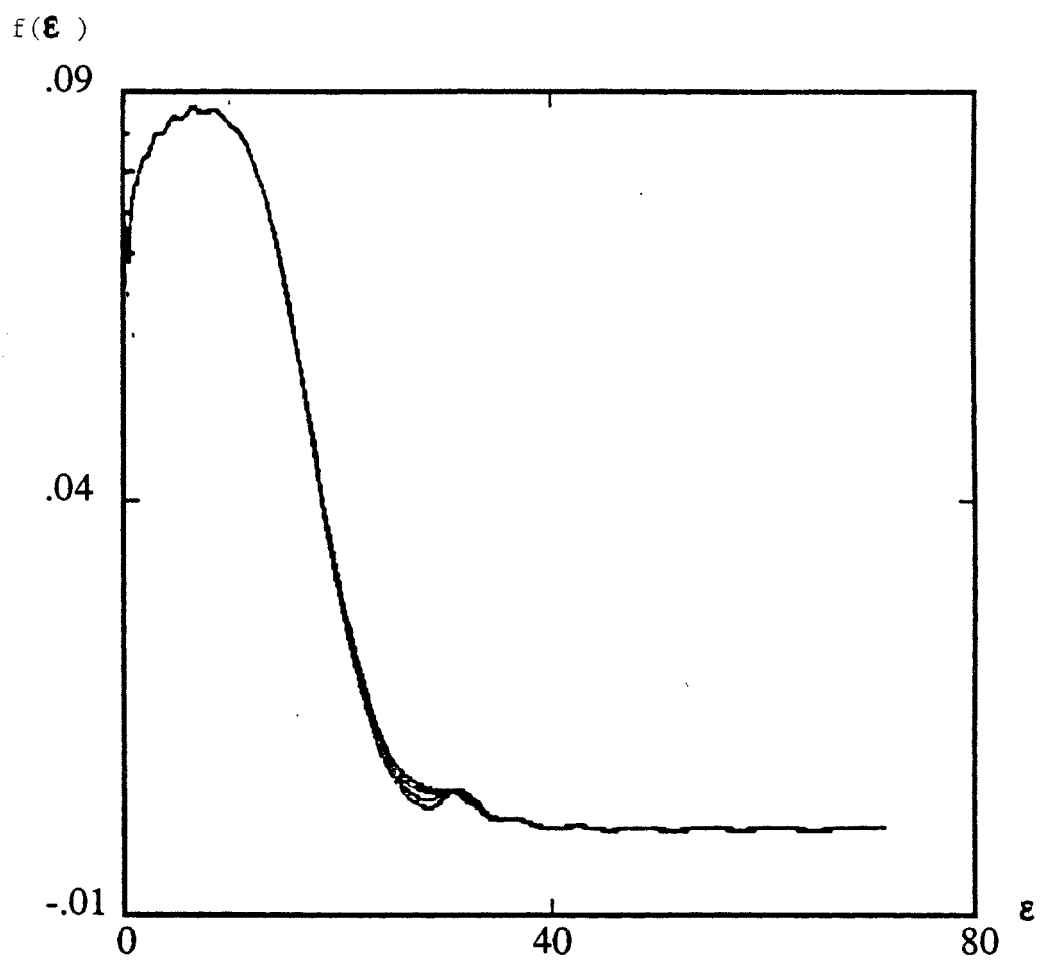


fig. III.14

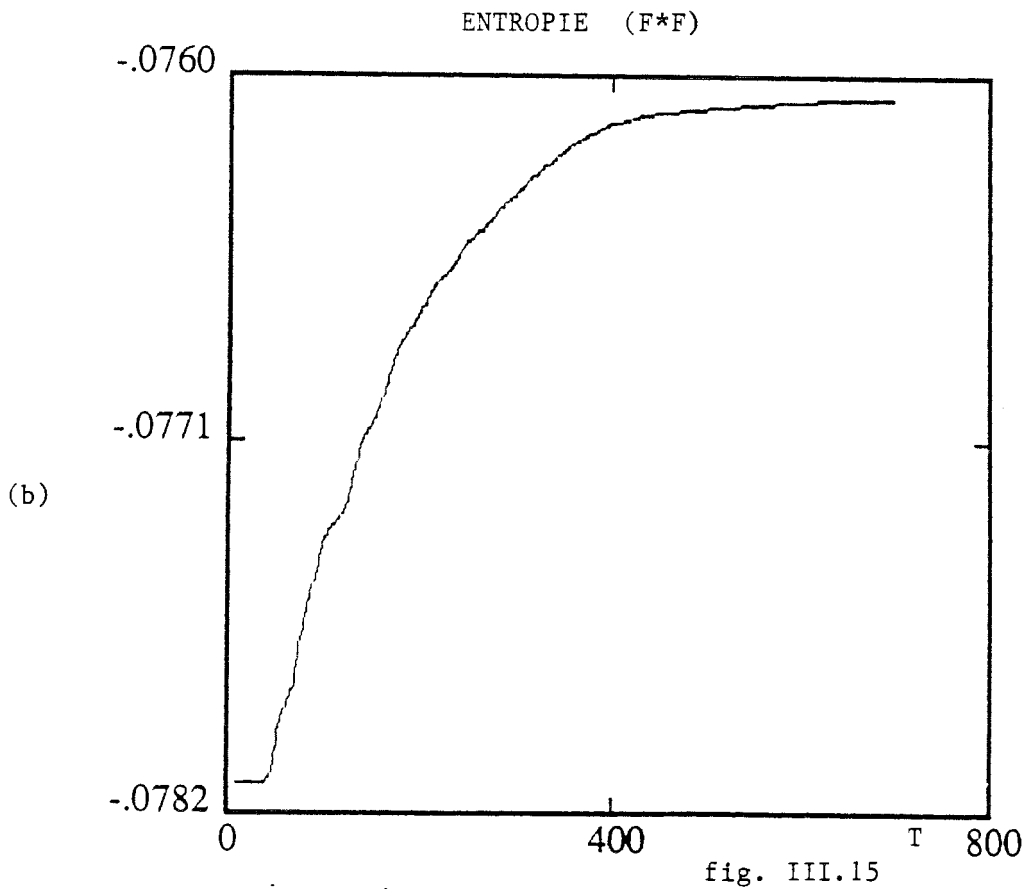
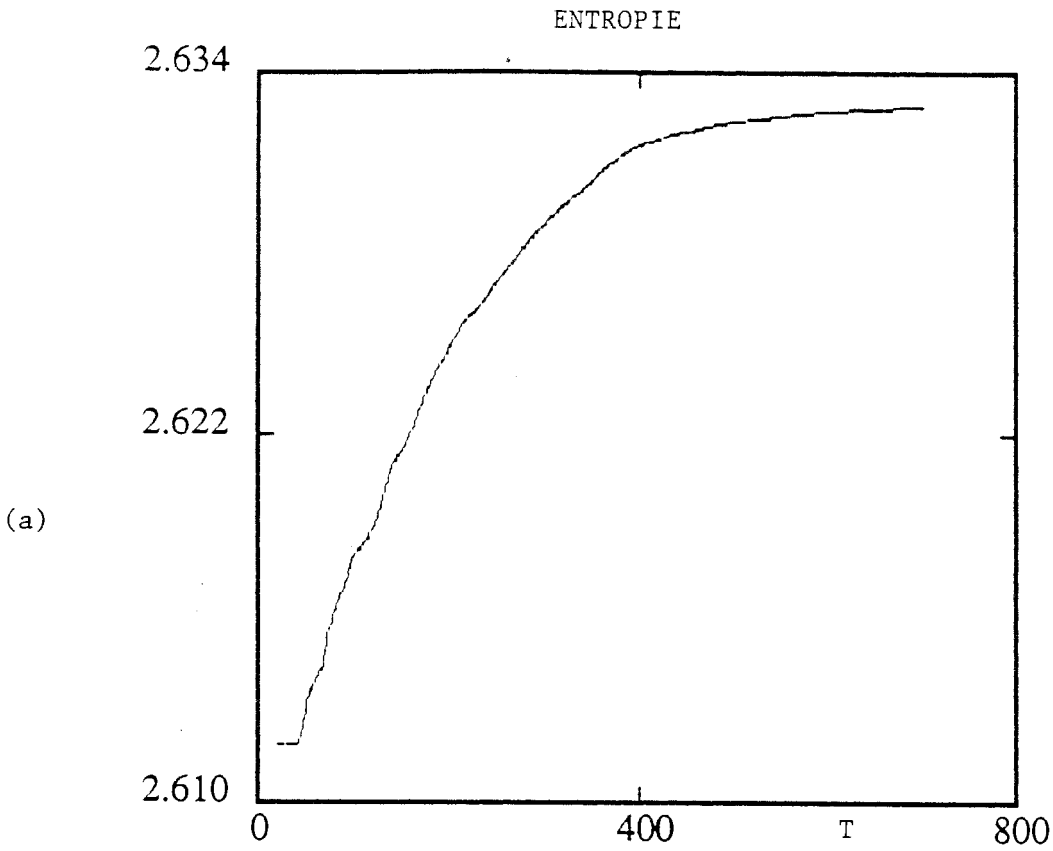


fig. III.15

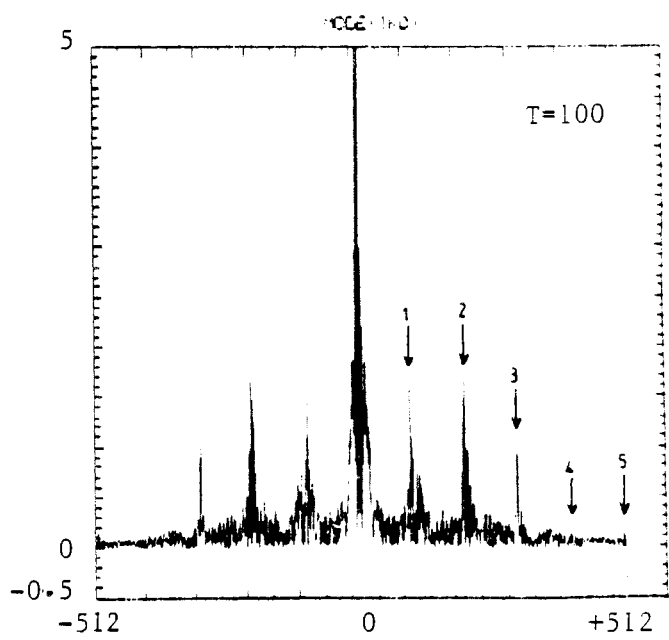
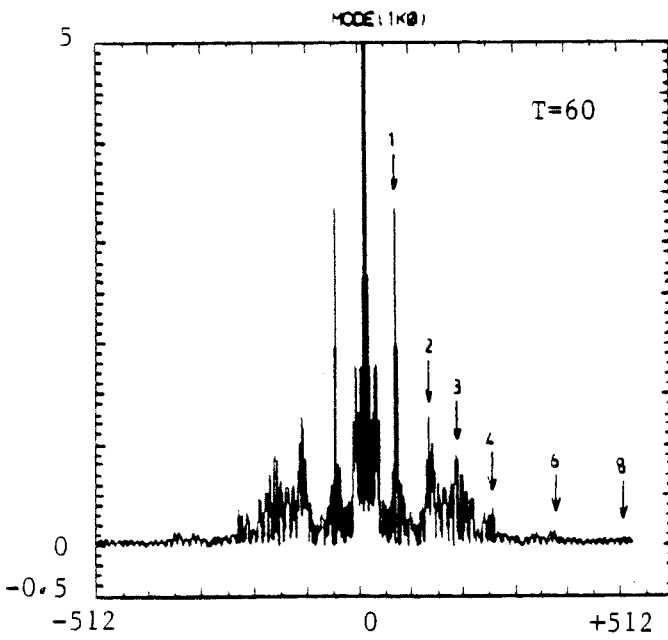
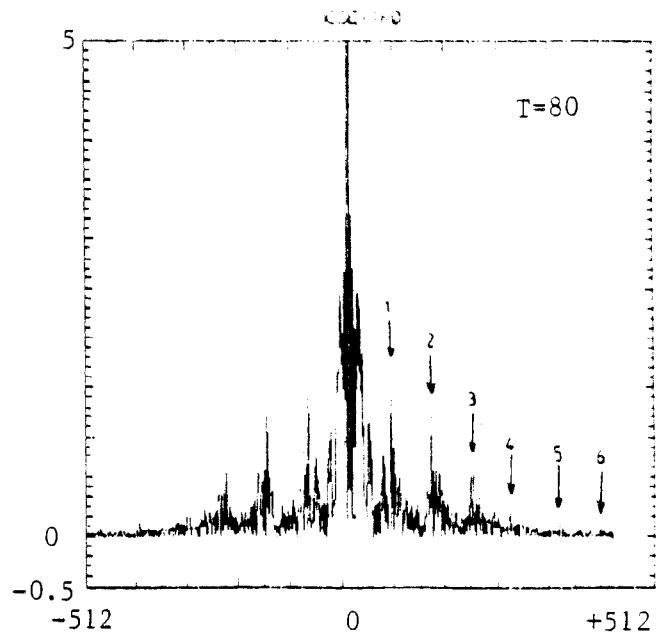
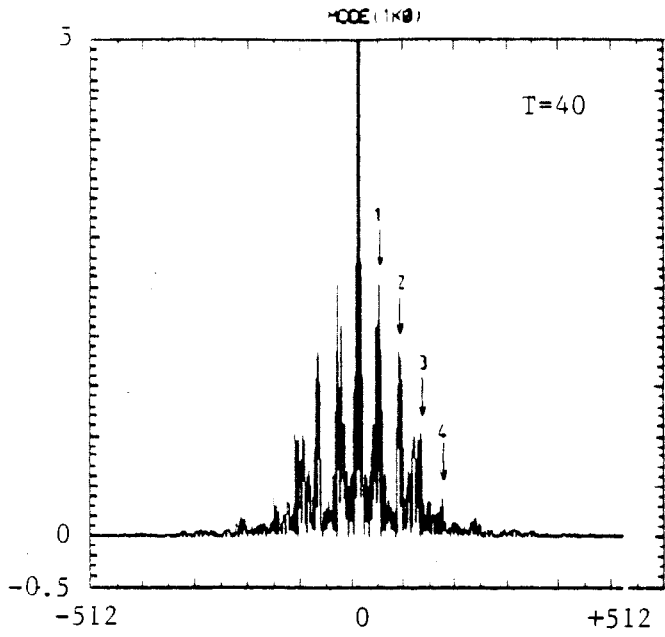


fig. III.16

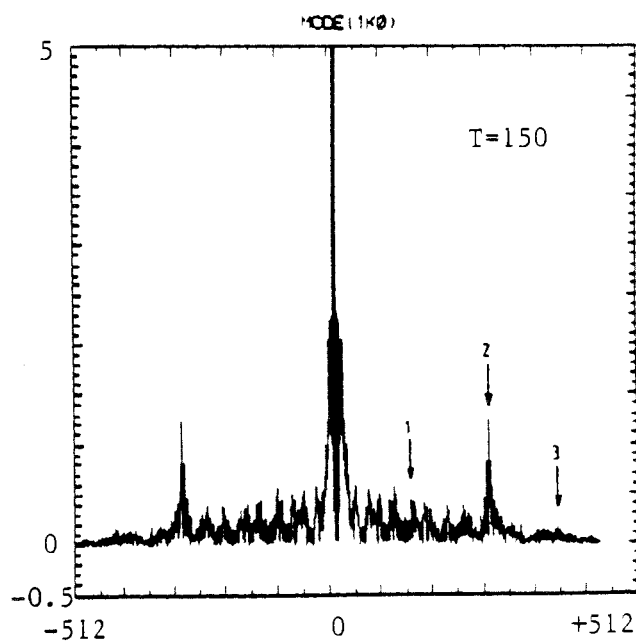
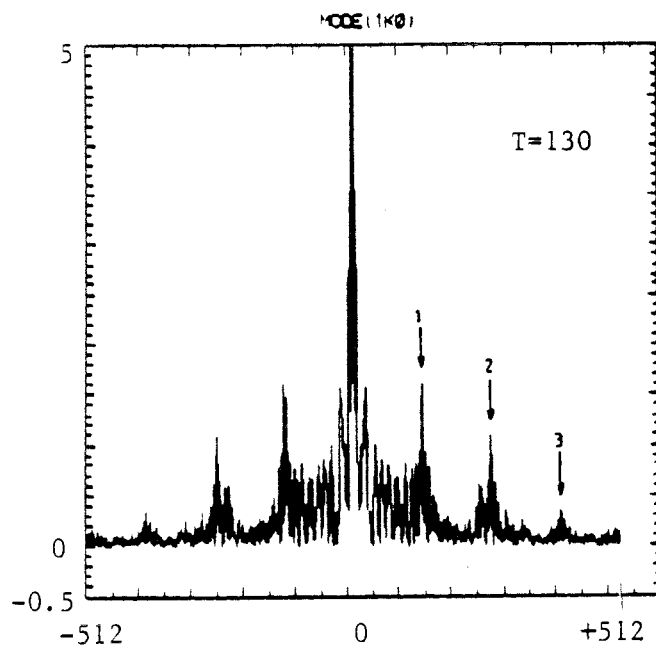
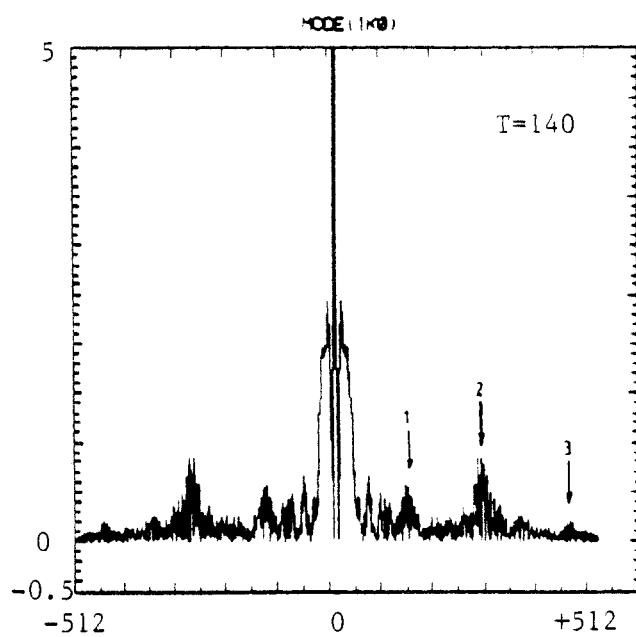
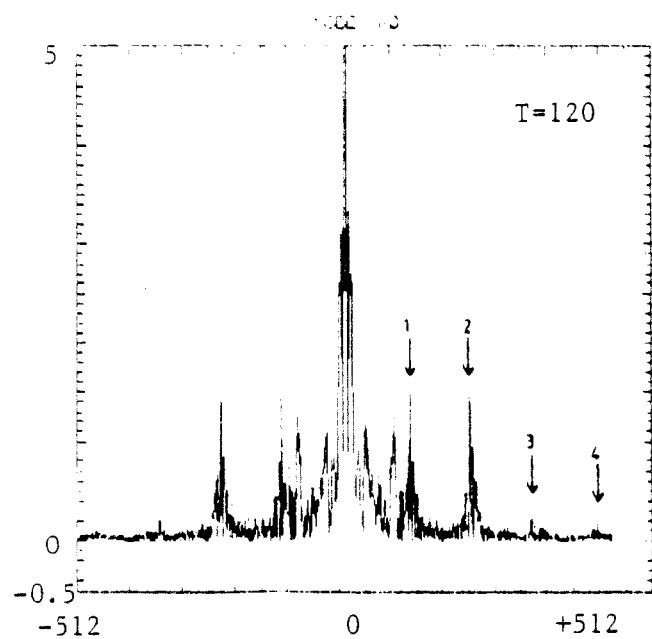


fig. III.16

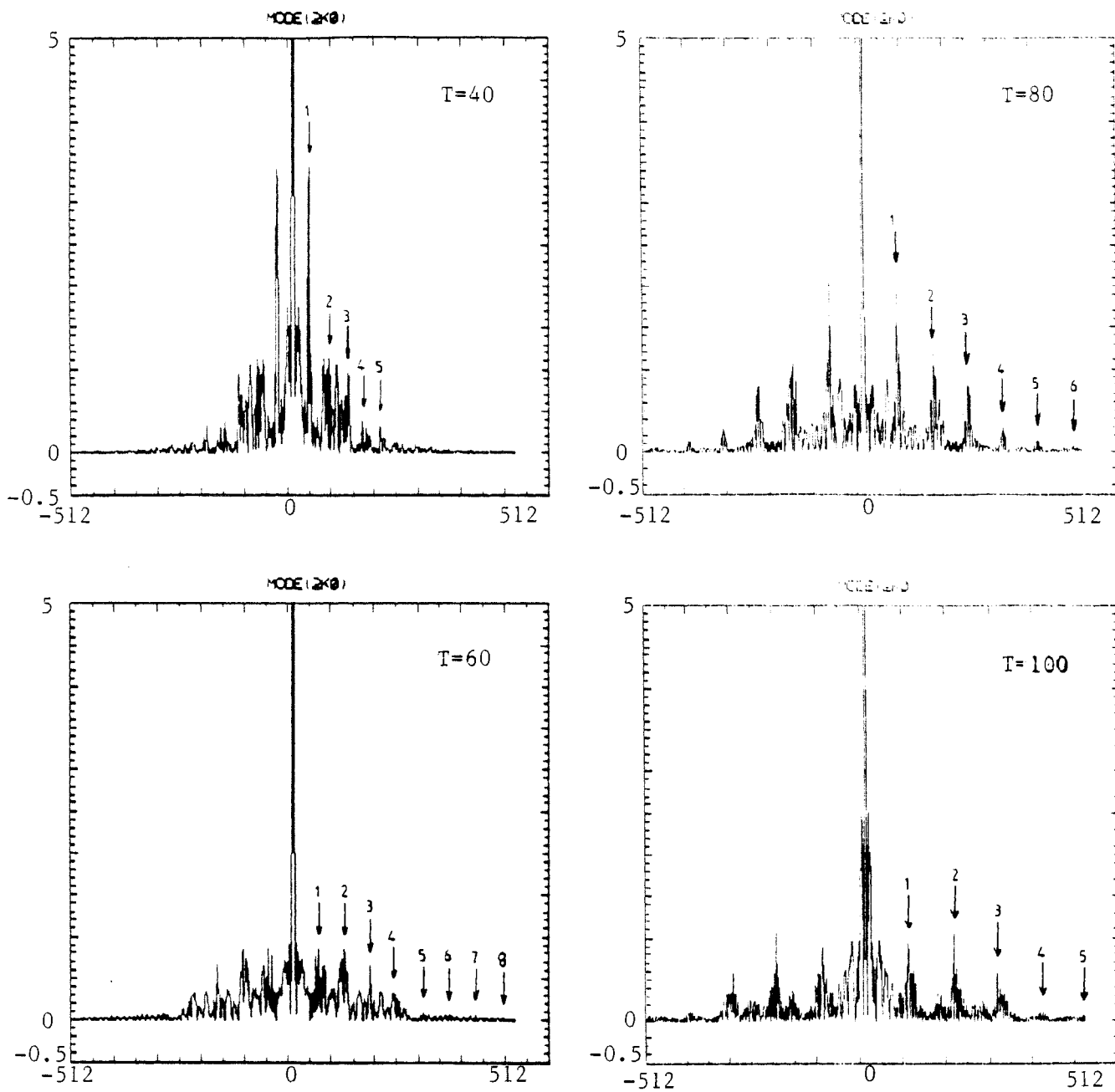


fig. III.16

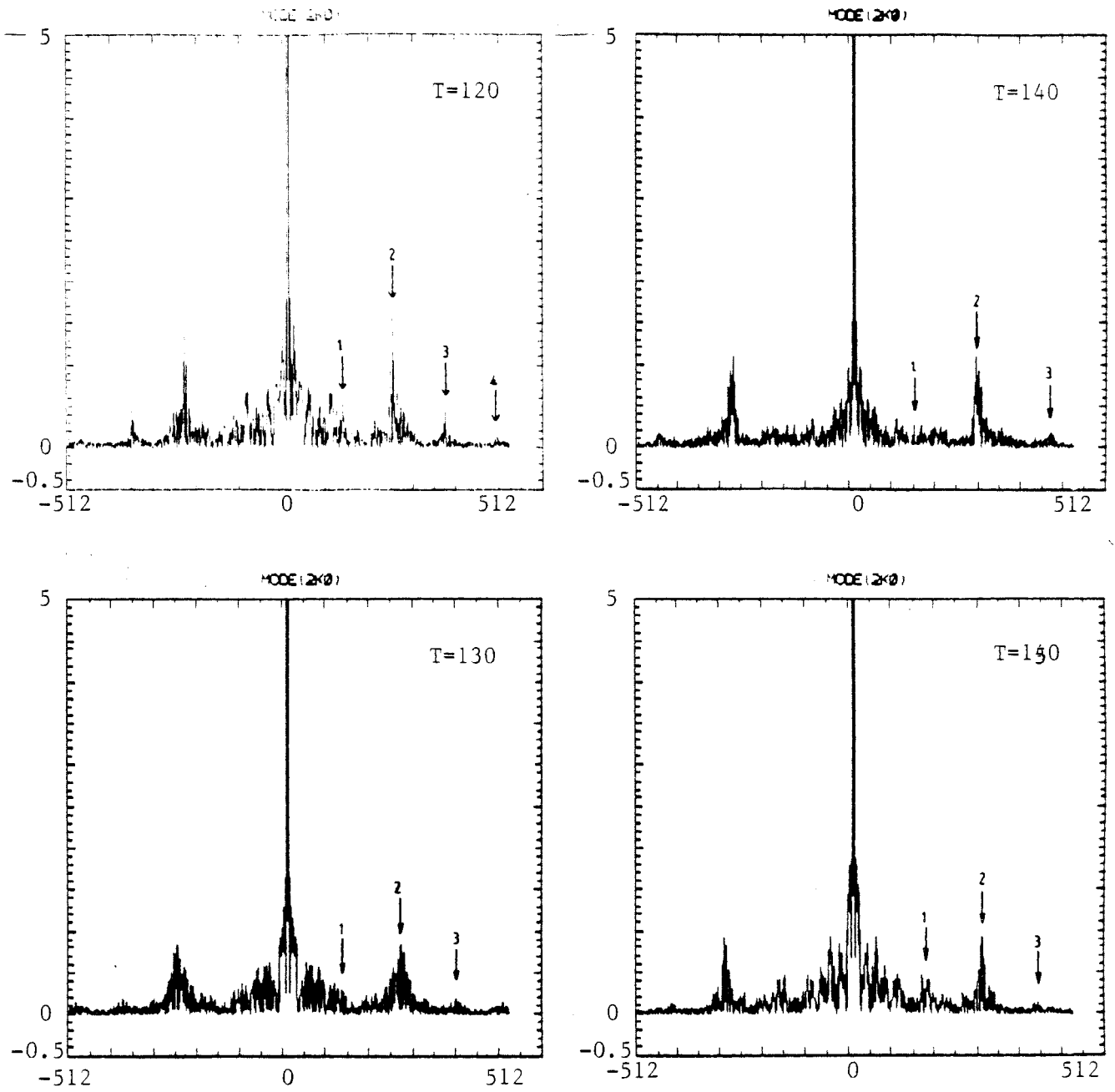


fig. III.16

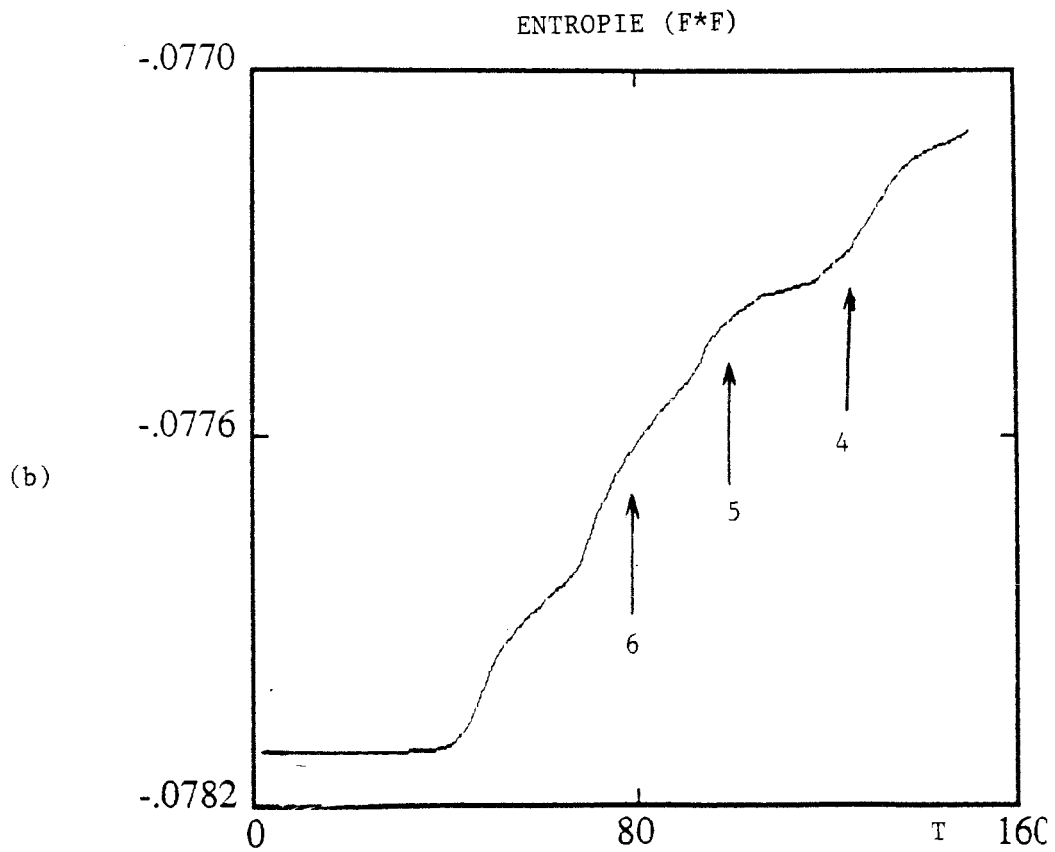
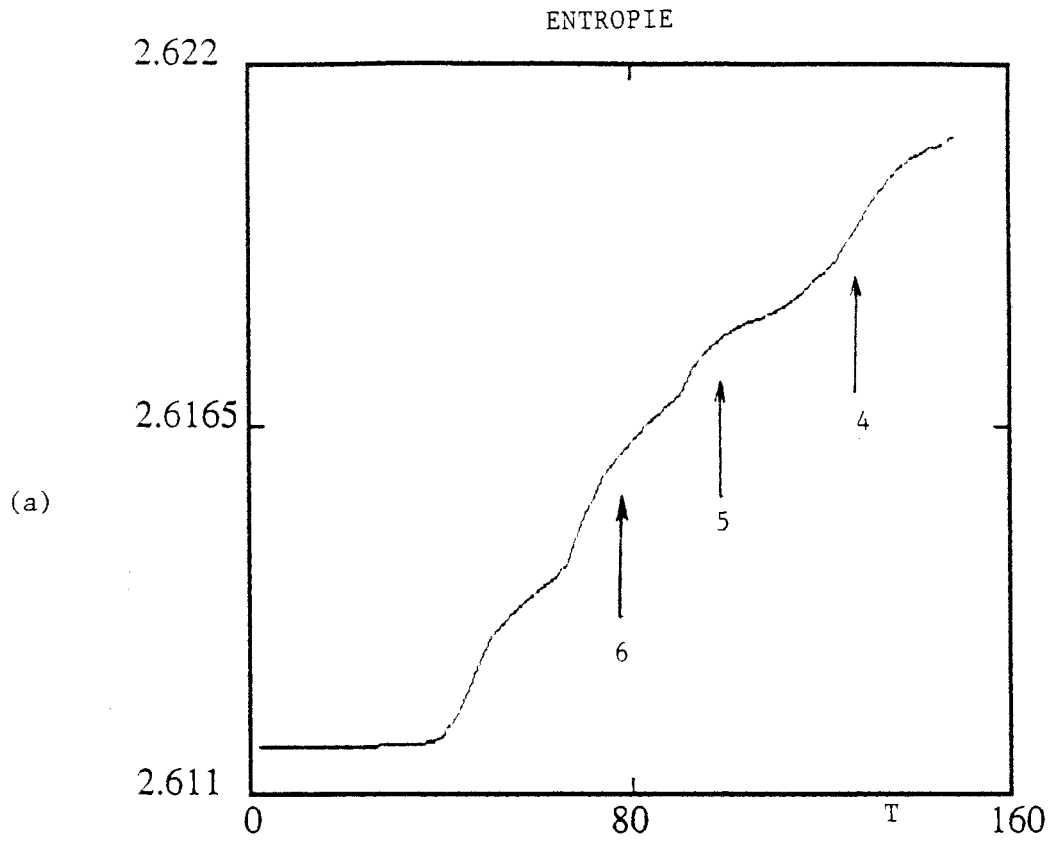


fig. III.17

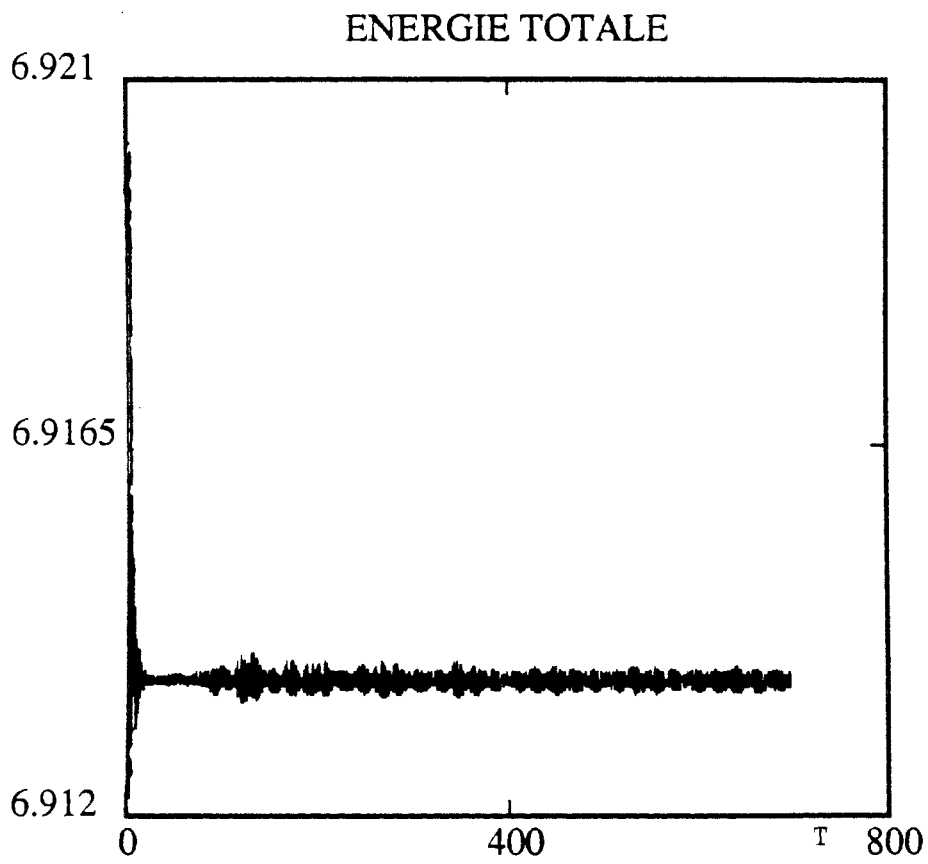


fig. III.18

V- INFLUENCE DE LA GRILLE DE L'ESPACE DES PHASES SUR L'EVOLUTION DU SYSTEME

V-1 INTRODUCTION

L'équation de VLASOV, du fait de sa nature, crée une filamentation ou des microstructures de plus en plus fines de la fonction de distribution dans l'espace des phases . Cependant quelque soit la finesse du découpage de l'espace des phases, il deviendra illusoire de suivre au delà d'un certain temps les microstructures qui apparaissent dans l'espace des phases. Quand cette filamentation atteint les dimensions de la cellule élémentaire, le traitement de l'information n'est plus suivi rigoureusement, et conduit à un phénomène de "nettoyage" du système.

La simulation numérique implique nécessairement une discrétisation de l'espace des phases, donc une discrétisation de la condition initiale et de l'évolution temporelle. Cette discrétisation provoque le lissage (perte de la structure fine développée par l'équation de VLASOV). Du fait de la taille limite des mémoires des ordinateurs, on ne peut utiliser qu'un nombre limité de points dans l'espace des phases, ce qui implique que nous ne résolvons pas d'un point de vue formel l'équation de VLASOV, équation à variables continues.

Les simulations précédentes ayant été faites avec une taille de grille unique, nous devons envisager des simulations avec un nombre de points N_x (nombre de points dans la direction x) et N_v (nombre de point dans la direction v) différent.

V-2 INFLUENCE DE LA GRILLE

Pour cela nous reprenons les mêmes conditions initiales que précédemment, à savoir une cavité gaussienne dans l'espace des phases, une onde de grande amplitude et un équilibre BGK

perturbé. On découpe l'espace des phases en cellules élémentaires de plus en plus fines et on compare les différentes courbes donnant la variation d'entropie en fonction du temps.

Dans le cas d'une cavité gaussienne dans l'espace des phases, nous avons étudié plusieurs cas (figure III.19) ; l'espace des phases est découpé en :

- 1) 64*512 cellules de surface $\Delta x * \Delta v = 0.375 * 0.046$
L=24 ; $\Delta X = L/N_x$; $N_x = 64$
 $V_{max} = 12$; $\Delta V = 2V_{max}/(N_v - 1)$; $N_v = 512$
- 2) 64*1024 ($\Delta X = 0.375$; $\Delta V = 0.023$)
- 3) 64*2048 ($\Delta X = 0.375$; $\Delta V = 0.011$)
- 4) 64*4096 ($\Delta X = 0.375$; $\Delta V = 0.005$)
- 5) 256*4096 ($\Delta X = 0.093$; $\Delta V = 0.005$)
 $N_x = 256$; $N_v = 4096$

Pour tous les cas étudiés, la longueur du système (L=24) et la vitesse maximale ($V_{max} = 12$) sont maintenues constantes.

Dans tous les cas de figure et quelque soit la dimension de la cellule élémentaire, on remarque sur les courbes d'entropie une première phase sur une dizaine de fréquence plasma (ωp^{-1}) où l'entropie reste constante, puis une deuxième phase où elle augmente et enfin une troisième phase où elle redevient constante et atteint sa valeur asymptotique.

Autre fait intéressant, au début de l'évolution et jusqu'à un temps t_s (t_s : temps à partir duquel l'entropie commence à augmenter) l'entropie est constante. Ce temps t_s augmente mais d'une façon faible avec l'augmentation du nombre de points N_x et N_v .

Pour $N_x = 64$; $N_v = 256$; $t_s = 30 \omega p^{-1}$

$N_x=64$;	$N_y=512$;	$t_s = 33 \text{ wp}^{-1}$
$N_x=64$;	$N_y=1024$;	$t_s = 35 \text{ wp}^{-1}$
$N_x=64$;	$N_y=2048$;	$t_s = 38 \text{ wp}^{-1}$
$N_x=64$;	$N_y=4096$;	$t_s = 40 \text{ wp}^{-1}$
$N_x=256$;	$N_y=4096$;	$t_s = 50 \text{ wp}^{-1}$

L'évolution de la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER $f(k,l)$ (figure III.20) montre l'existence de pic qui se déplacent à vitesse constante. La valeur de l_{\max} varie avec Δv ($l_{\max}=n/\Delta v$) par contre le mode fondamental ($l_0=n/V_{\max}$) est le même, quelque soit la dimension de la grille. L'état asymptotique est atteint lorsque l'entropie est maximale. Pour une valeur de l_{\max} petite (Δv grand) les pics atteignent les bords de la boîte ($\pm l_{\max}$) en un temps plus court, par contre pour une valeur de l_{\max} grande (Δv petit) ces mêmes pics mettent plus de temps pour atteindre les bords. Sur la figure (III.19) sont regroupées les différentes courbes de la variation d'entropie en fonction du temps et pour différentes cellules. On remarque que l'entropie augmente d'une façon plus rapide pour les valeurs de N_x et N_y petites, par contre elle augmente d'une façon plus lente pour des valeurs N_x et N_y grandes. Le point remarquable est que la valeur asymptotique reste la même quelle que soit la grille de l'espace des phases, par contre le temps de montée dépend de la grille.

La même étude est faite avec les deux autres conditions, et, les résultats sont identiques à ceux déjà trouvés pour la cavité gaussienne à savoir que l'augmentation d'entropie est d'autant plus lente que les valeurs de N_x et N_y sont grandes.

Sur la figure (III.22) on a représenté les différentes courbes d'entropie pour différentes grilles de l'espace des phases dans le cas d'une condition initiale d'une onde de grande amplitude.

Sur la figure (III.21) sont représentées les courbes d'entropie dans le cas d'un équilibre BGK perturbé.

LEGENDE DES FIGURES DU CHAPITRE III

- fig. III.19 : Variation d'entropie du système en fonction du temps pour différentes grilles dans le cas du trou gaussien
- fig. III.20 : Représentation de la fonction de distribution $f(k,l)$ en fonction de l dans l'espace de FOURIER, pour différentes grilles pour $t=100$ $\omega p-1$ et $t=200$ $\omega p-1$ dans le cas du trou gaussien
- fig. III.21 : Variation d'entropie du système en fonction du temps pour différentes grilles dans le cas d'un équilibre BGK perturbé
- fig. III.22 : Variation d'entropie du système en fonction du temps pour différentes grilles dans le cas d'une onde de grande amplitude

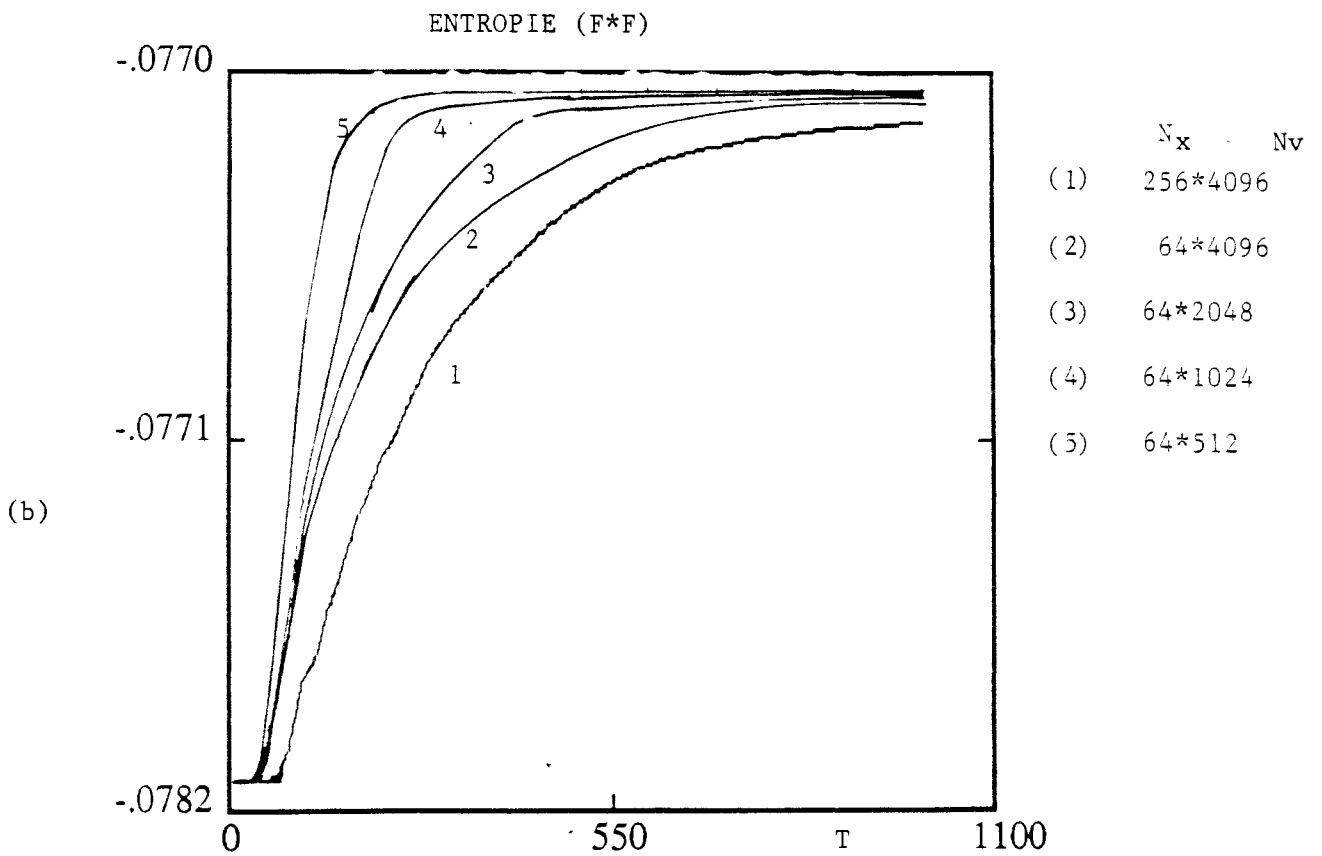
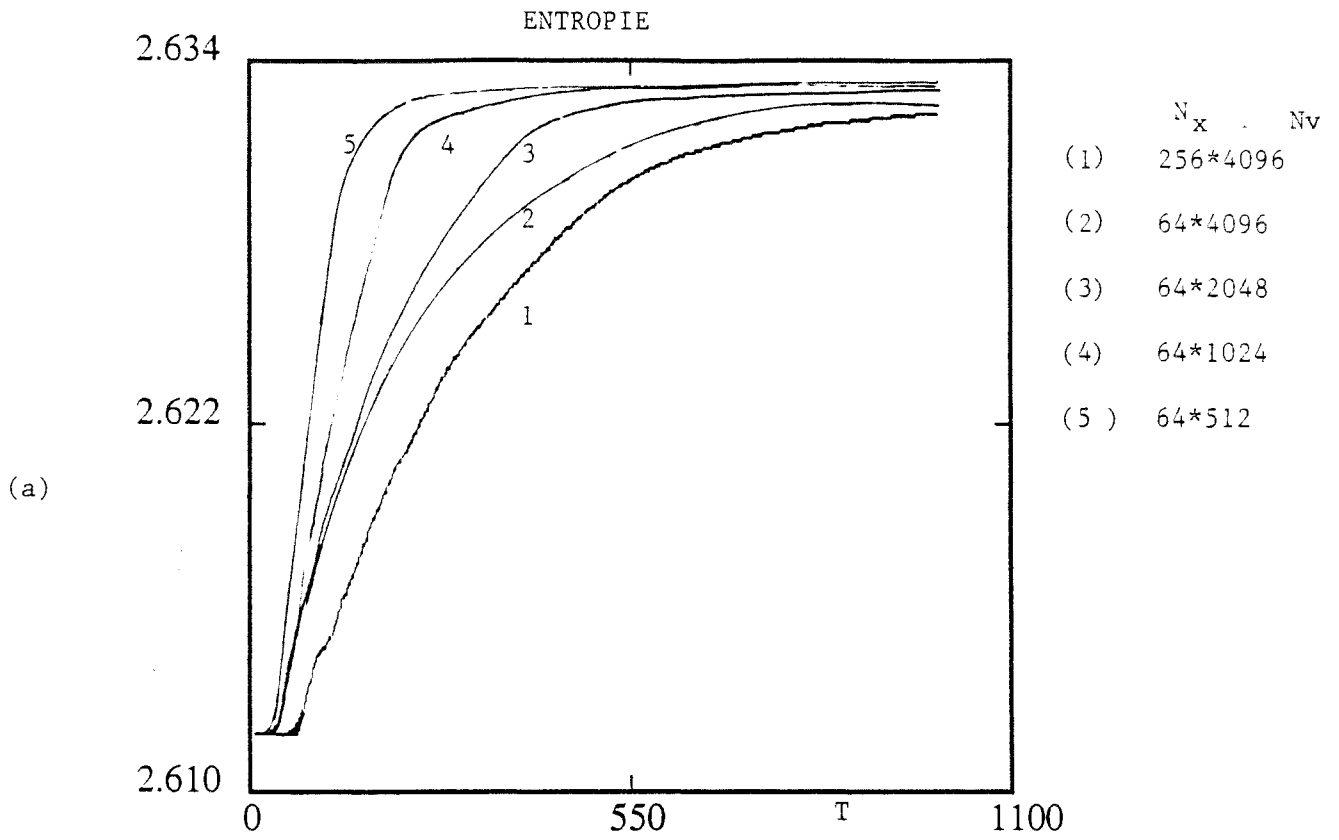
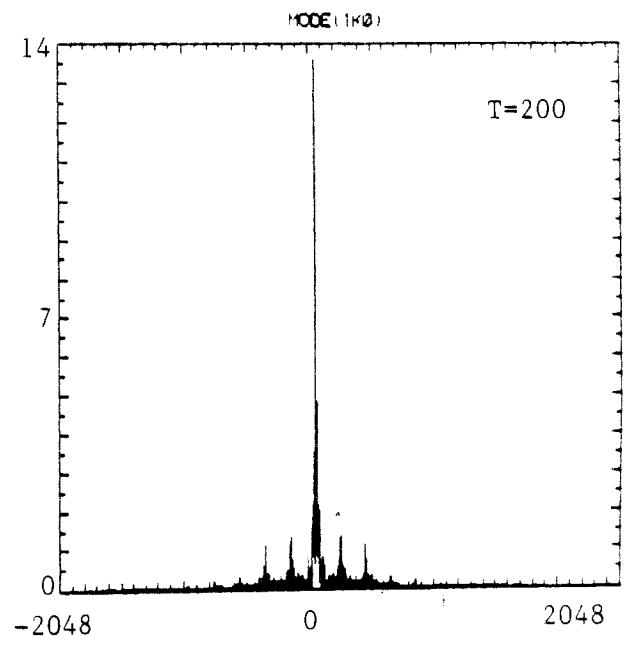
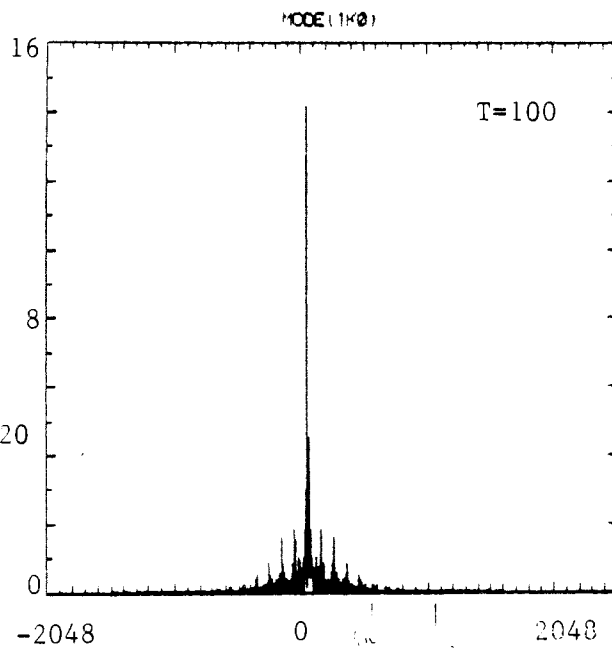
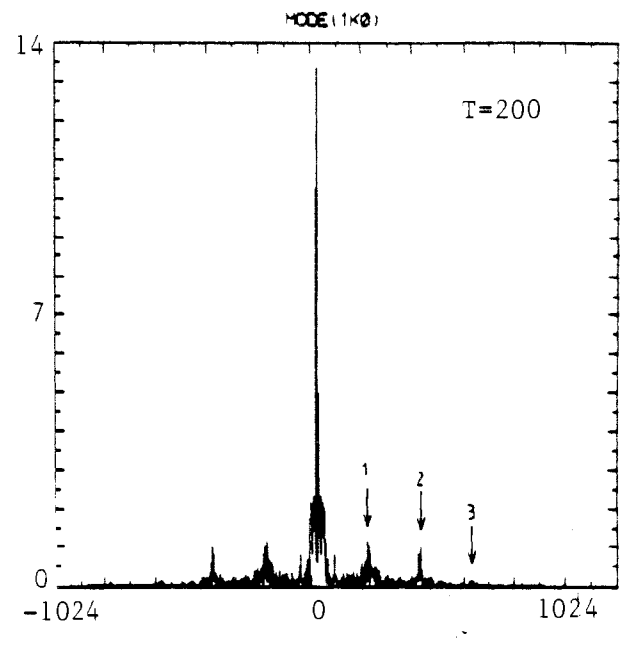
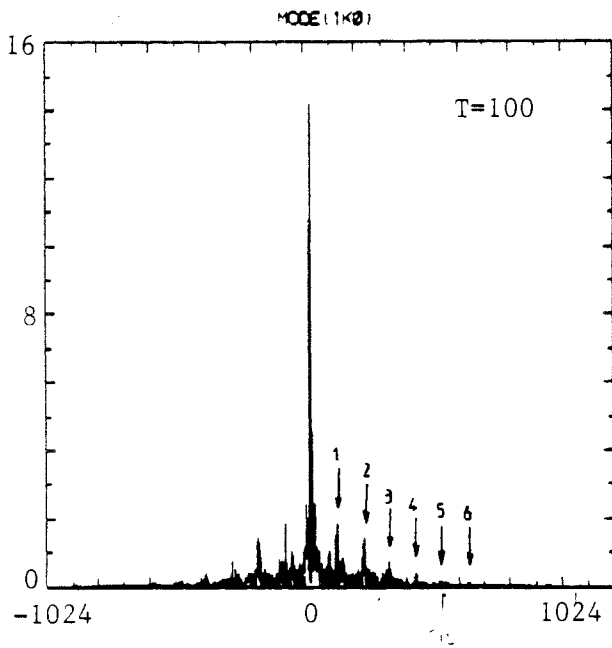
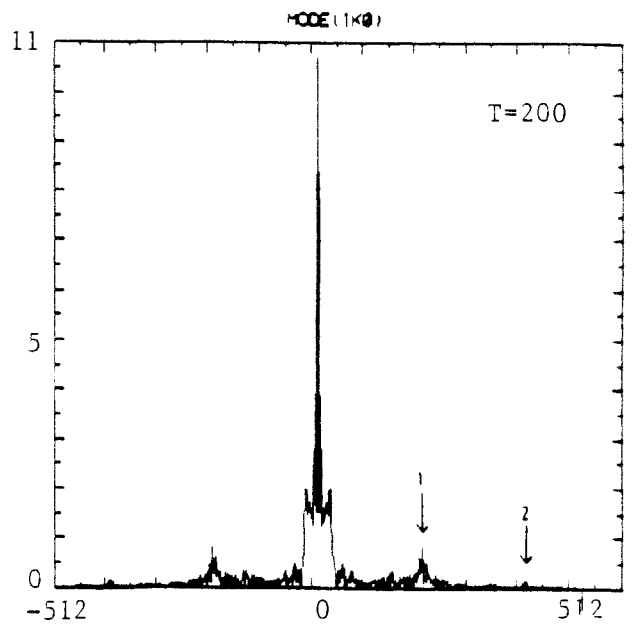
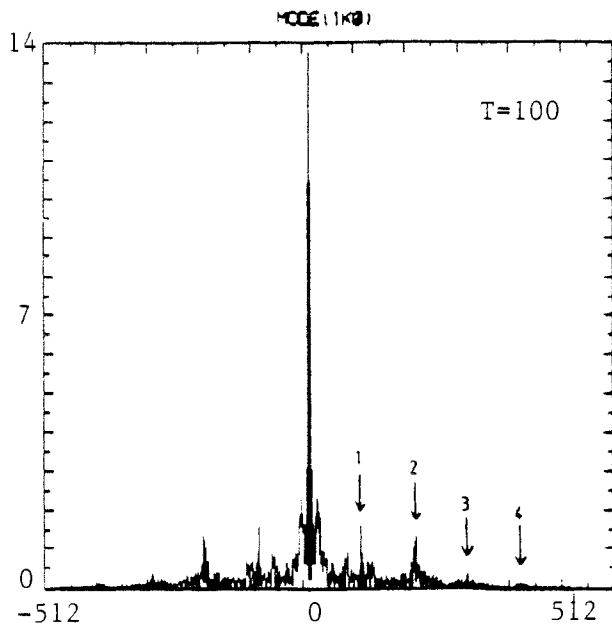
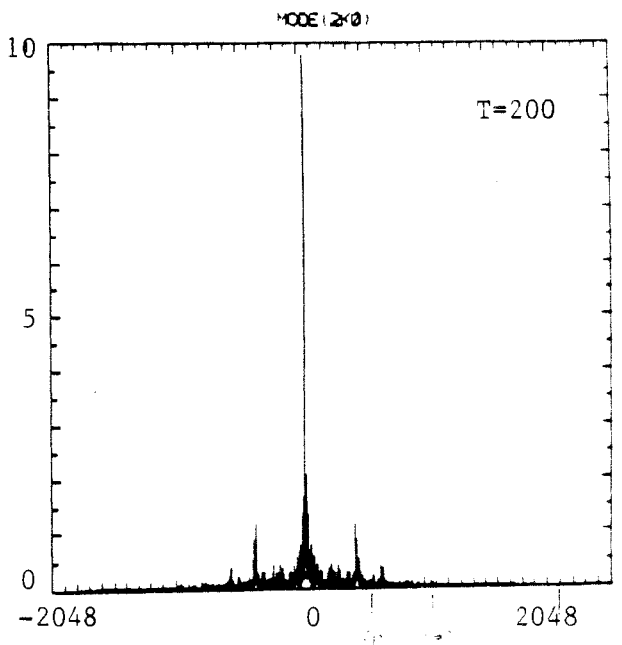
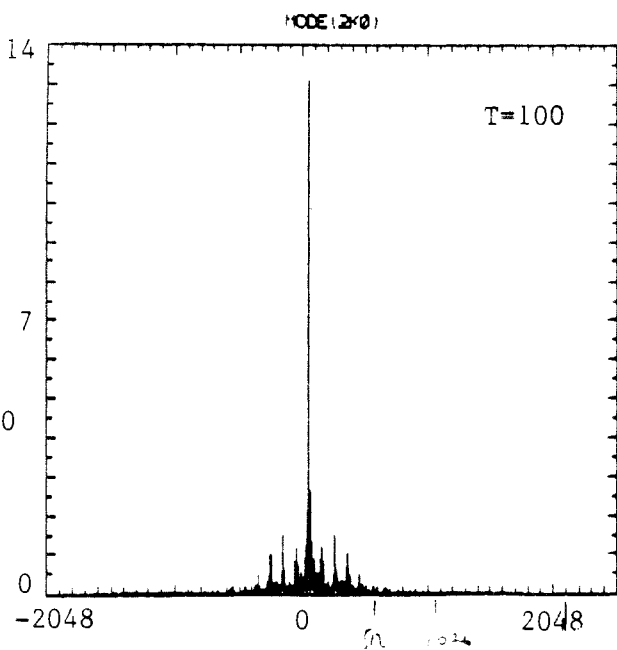
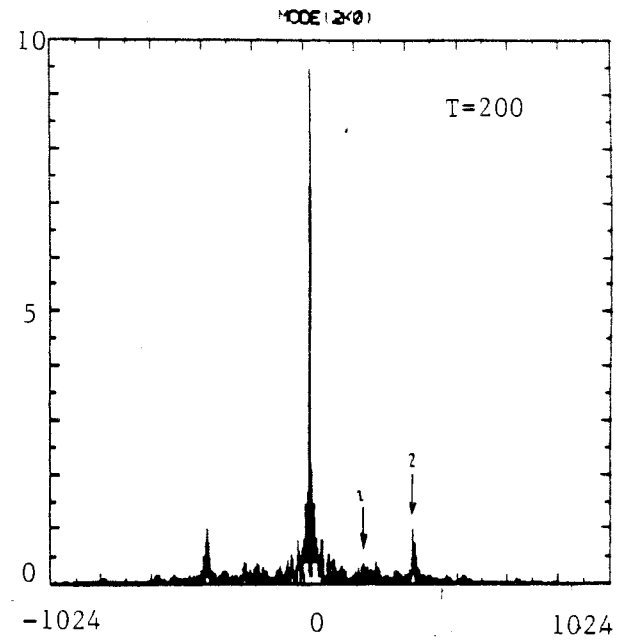
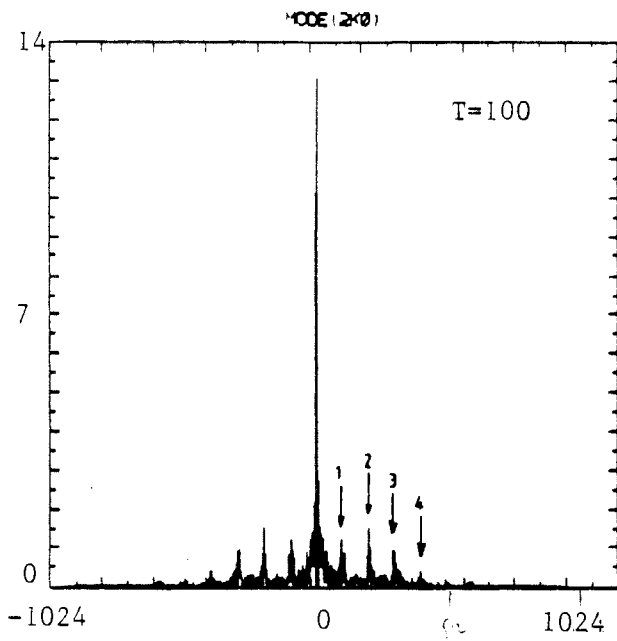
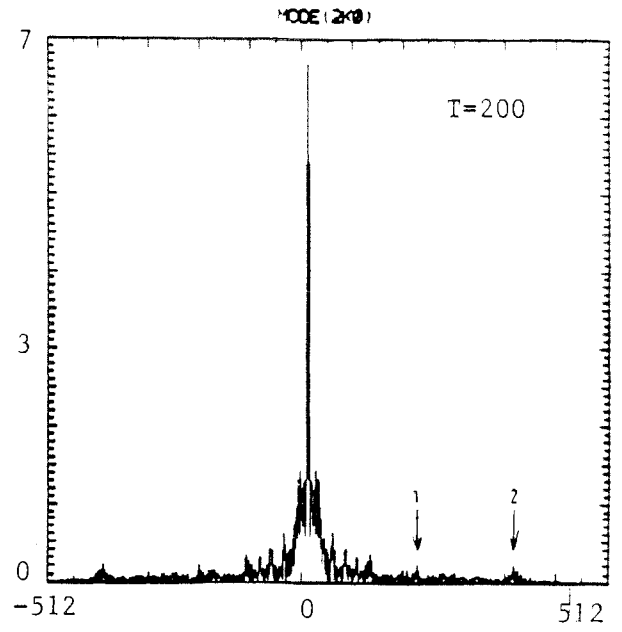
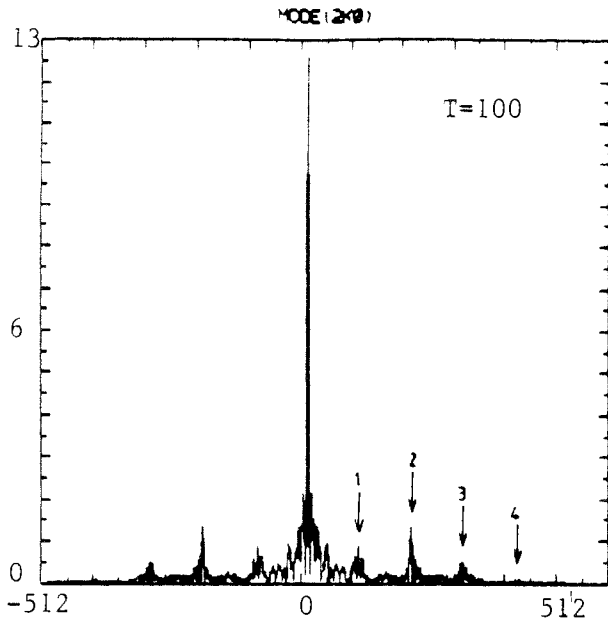


fig. III.19



ig. III.20



g. III.20

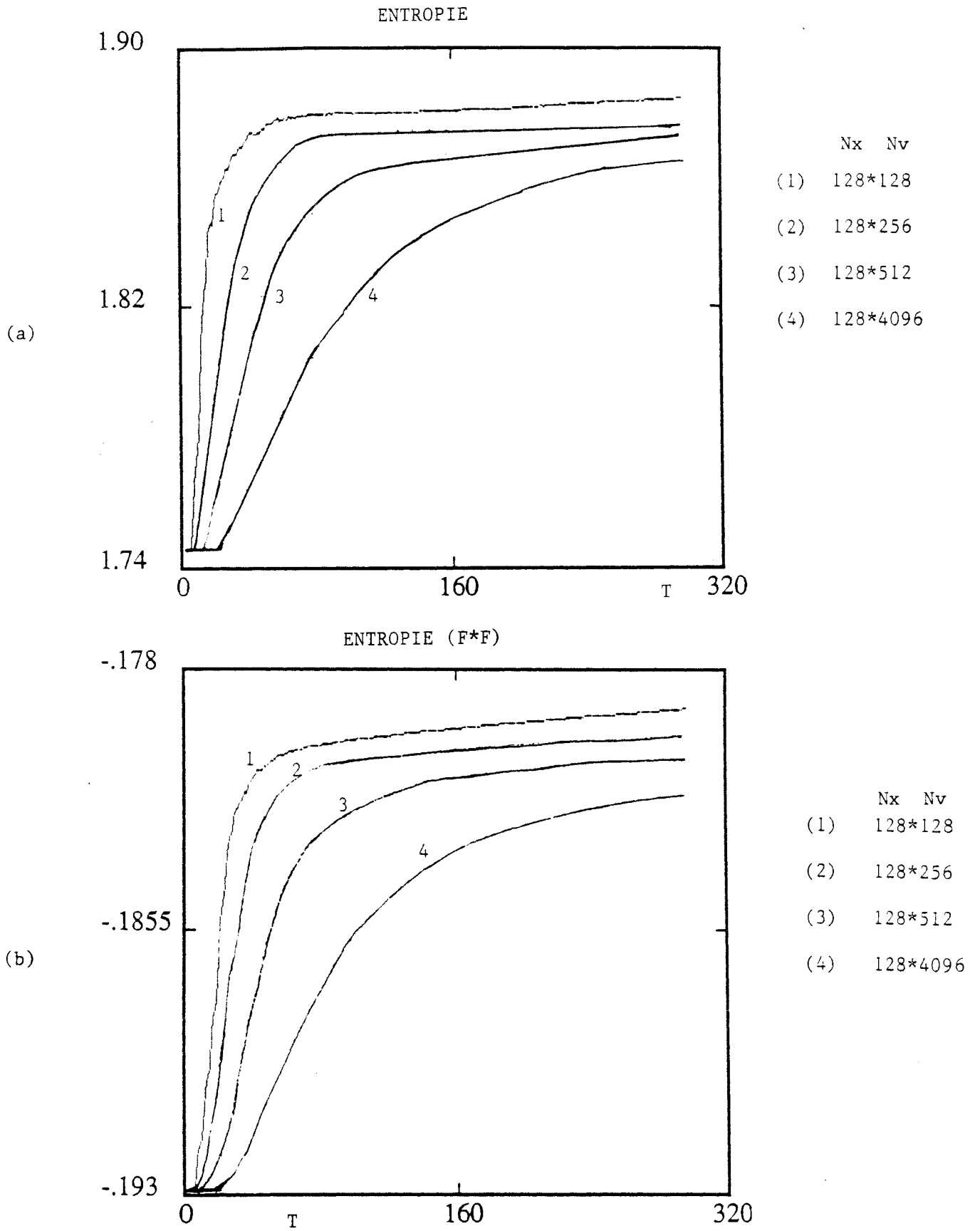


fig. III.21

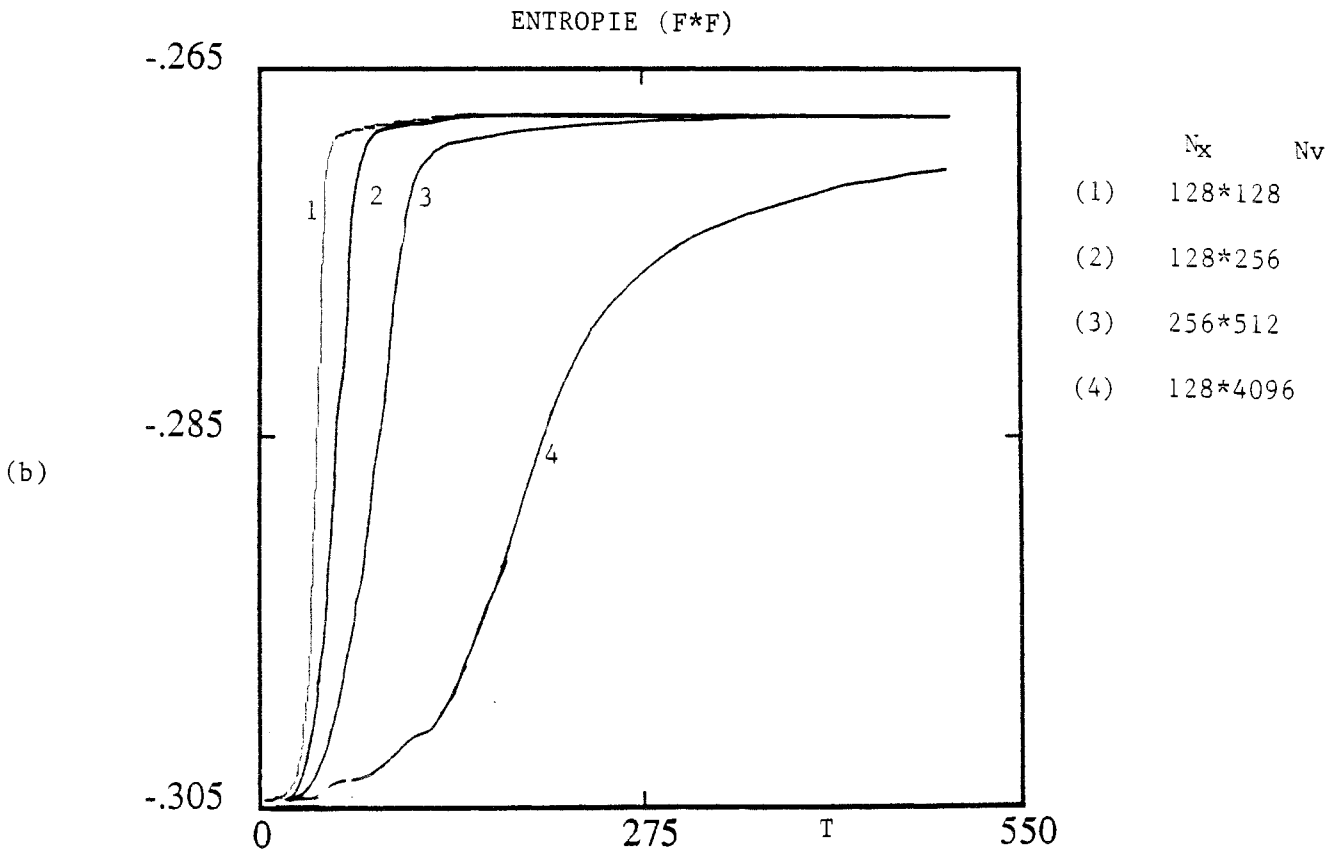
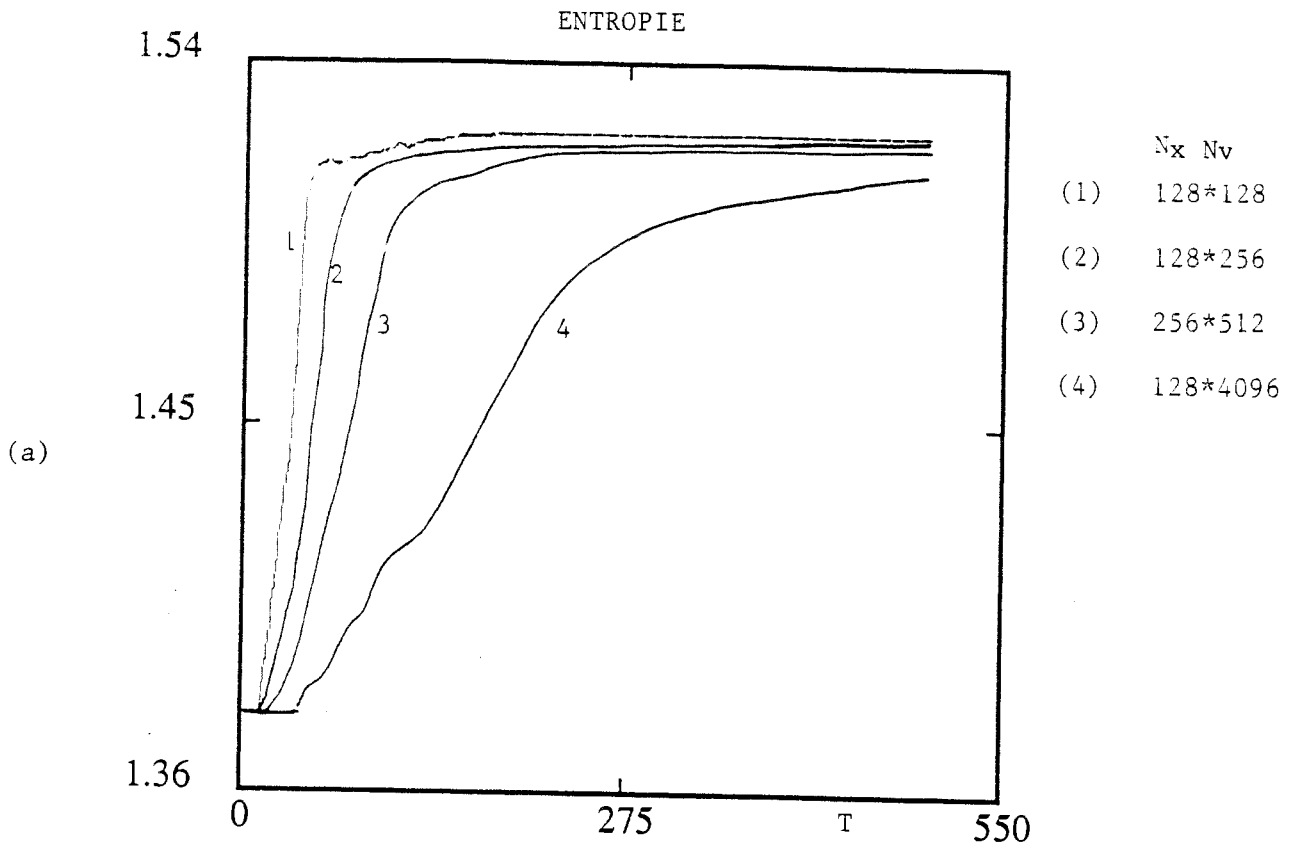


fig. III.22

VI- COMPARAISON AVEC D'AUTRES CODES POUR UNE MEME GRILLE DE L'ESPACE DES PHASES

Nous avons vu précédemment que l'étude de l'entropie montrait une augmentation (reliée à la perte d'information) puis une stabilisation (état asymptotique). Cette étude a été faite avec un code "SPLINE". Nous avons vu que l'augmentation d'entropie ne dépendait pas de la grille choisie, nous allons effectuer la même étude (entropie) avec deux autres codes déjà décrits dans le chapitre II, le code "FOURIER" et le code "FLUX", pour la même grille de l'espace des phases, afin de déterminer dans quelle mesure l'augmentation d'entropie dépend du type d'interpolation choisie, et donc du code numérique.

VI-1 RESULTATS NUMERIQUES

VI-1.1 Trou gaussien

Nous rappelons la fonction de distribution initiale (équation III.14) qui s'écrit :

$$f(x,v,t=0) = \frac{\sigma_0}{4v_0} [\text{th}(v+v_0) - \text{th}(v-v_0)] + \frac{\alpha_1 L}{2\pi\sigma_0\sigma_1} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2} - \frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

Les paramètres de la simulation sont identiques à ceux du paragraphe IV.

Rappelons que l'état initial n'est pas un équilibre, mais son évolution conduit à la formation d'une structure finale de type BGK /33 /. Le système évolue rapidement, et dans l'espace des phases il y a une forte fluctuation de densité et disparition du vortex initialement créé. Le système se "nettoie" et il y a à nouveau réapparition du vortex.

Cas du code "SPLINE"

D'après la figure (III.23), qui représente l'évolution de la

fonction de distribution dans l'espace des phases (courbes de niveaux), le vortex initialement créé disparaît vers $t=30 \text{ wp}^{-1}$ puis réapparaît vers $t=50 \text{ wp}^{-1}$ dans le cas d'une grille de $128*128$ points. Le système est "nettoyé" vers $t=200 \text{ wp}^{-1}$ et l'état asymptotique est atteint. En doublant le nombre de point avec une grille de $256*256$, le système se "nettoie" vers $t=300 \text{ wp}^{-1}$ (figure III.24).

Cas du code flux

Nous reprenons à nouveau notre condition initiale avec une grille de $128*128$ points (figure III.25) et une grille de $256*256$ points (figure III.26). Pour ce code aussi, le vortex disparaît vers $t=30 \text{ wp}^{-1}$, puis réapparaît vers $t=40 \text{ wp}^{-1}$ donc un peu plus tôt que dans le cas du code "SPLINE". Le système se "nettoie" plus tôt que dans le cas du code "SPLINE" vers $t=100 \text{ wp}^{-1}$ (cas d'une grille de $128*128$ points) et vers $t=200 \text{ wp}^{-1}$ (cas d'une grille de $256*256$ points).

Cas du code "FOURIER"

En ce qui concerne le code "FOURIER", nous reprenons les résultats (courbes de niveau) déjà obtenus par GHIZZO /33 / avec la même condition initiale. Dans le cas d'une grille de $128*128$ points (figure III.27) le vortex initialement créé disparaît vers $t=25-30 \text{ wp}^{-1}$, puis réapparaît vers $t=35-40 \text{ wp}^{-1}$. Le système se "nettoie" vers $t=100 \text{ wp}^{-1}$ et vers $t=300 \text{ wp}^{-1}$ dans le cas d'une grille de $256*256$ points (fig.III.28)

VI-1.2 Etude de l'entropie

Sur la figure (III.29) nous avons tracé la variation d'entropie du système pour les différents codes, avec la même grille de l'espace des phases ($128*128$ points).

La courbe (3) est obtenue à partir d'un code "FLUX", la courbe (2) à partir d'un code "FOURIER" et la courbe (1) à partir du code "SPLINE".

On constate que la variation d'entropie (ΔH) est la même et cela indépendamment du code numérique. Sur la figure (III.29) on remarque un très léger décalage des valeurs asymptotiques pour les trois codes, mais l'état asymptotique atteint est le même. En revanche le temps de la montée de l'entropie quant à

lui dépend du code numérique. Pour atteindre l'état asymptotique, la montée de la courbe d'entropie pour le code "FLUX" (courbe (3)) est trop rapide comparativement à celle du code "SPLINE" .

VI-1.3 Ondes BGK

Nous rappelons la fonction de distribution initiale (équation III.9) qui est de la forme

$$f(\varepsilon) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \frac{2-2\xi}{3-2\xi} \left(1 + \frac{\varepsilon'}{1-\xi} \right) \exp(-\varepsilon)$$

avec

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}(v - v_D)^2 + \varnothing(x)$$

Les paramètres de la simulations sont identiques à ceux du paragraphe II.

Pour cette condition initiale, la même étude de l'entropie est faite avec les trois codes et pour la même grille de l'espace des phases (128*128 points). La figure (III.30), où sont regroupées les différentes courbes de variation de l'entropie [FOURIER (1), FLUX (2), SPLINE (3)], montre aussi que la variation d'entropie (ΔH) est à peu près indépendante du code numérique, par contre le temps de montée de l'entropie quant à lui dépend du code numérique. L'état asymptotique est le même, avec des niveaux légèrement inférieurs (cas du code "FOURIER" ou code "SPLINE" par rapport au code "FLUX").

VI-1.4 Onde de grande amplitude

Nous rappelons que la fonction de distribution initiale (équation III.13) est de la forme :

$$f(x,v,t=0) = (\sqrt{2\pi})^{-1} * \exp(-v^2/2) * [1 + \alpha \cos(k_0 x)]$$

Les paramètres de la simulation sont identiques à ceux du paragraphe III. Pour cette autre condition initiale, nous avons fait la même étude de l'entropie et pour la même grille (128*128 points) avec les trois codes. La figure (III.31) regroupe les différentes courbes de variation d'entropie

[FOURIER (1), FLUX (2), SPLINE (3)]. De même que pour les deux autres cas, le (ΔH) ne dépend pas du code, par contre le temps de montée de l'entropie, lui, en dépend.

VI-1. 4 Conclusion

On peut dire que la variation d'entropie à des détails près est la même pour les trois codes (l'état asymptotique est le même ou très légèrement décalé), elle est indépendante du code numérique, par contre le temps de montée de l'entropie dépend du code numérique, de la grille....

L'équation de VLASOV introduit un fort "mélange" dans l'espace des phases et la croissance de $H = - \int C(f) dx dv$ est une bonne mesure du "mélange" dans l'espace des phases.

A titre d'exemple, partant d'un code "SPLINE" avec une grille donnée, on peut chercher la grille d'un code "FLUX" qui donnerait le même temps de montée de l'entropie, pour une condition initiale donnée. Nous avons considéré deux conditions initiales à savoir le trou gaussien dans l'espace des phases et l'onde de grande amplitude en utilisant un code "FLUX" avec une grille de 256*1024 et une grille de 256*512 points pour le code "SPLINE". La figure (III.32) représente la variation d'entropie dans le cas du trou gaussien ; la courbe en trait plein est donnée par le code "SPLINE" et la courbe avec les petits cercles est donnée par le code "FLUX". Nous remarquons qu'on a la même variation d'entropie (même montée d'entropie et même état asymptotique), en revanche on a un facteur deux pour la grille entre les deux codes.

La figure (III.33) représente la variation d'entropie dans le cas d'une onde de grande amplitude. Pour ce cas là aussi on a obtenu la même montée de la courbe d'entropie et le même état asymptotique avec un facteur deux entre les grilles. Pour les trois codes utilisés, le code "SPLINE" a un temps de montée de l'entropie un peu plus grand, et l'état asymptotique est atteint un peu plus tard que pour les deux autres codes (FOURIER et FLUX). Le code "SPLINE" conserve et traite mieux la microstructure.

LEGENDE DES FIGURES DU CHAPITRE III

- fig. III.23 : Evolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases, à partir d'un code spline et pour une grille de 128*128 points
- fig. III.24 : Evolution de la fonction de distribution à partir d'un code spline et pour une grille de 256*256 points
- fig. III.25 : Evolution de la fonction de distribution à partir d'un code flux et pour une grille de 128*128 points
- fig. III.26 : Evolution de la fonction de distribution, à partir d'un code flux et pour une grille de 256*256 points
- fig. III.27 : Evolution de la fonction de distribution à partir d'un code de FOURIER et pour une grille de 128*128 points
- fig. III.28 : Evolution de la fonction de distribution à partir d'un code de FOURIER et pour une grille de 256*256 points
- fig. III.29 : Variation d'entropie du système pour différents codes avec la même grille de l'espace des phases (128*128 points) dans le cas d'un trou gaussien
(1) Code spline
(2) code fourier
(3) code flux
- fig. III.30 : Variation d'entropie du système pour différents codes avec la même grille (128*128 points) dans le cas d'un équilibre BGK perturbé
(1) code FOURIER
(2) code flux
(3) code spline
- fig. III.31 : Variation d'entropie du système pour différents codes avec la même grille (128*128 points) dans le cas d'une onde de grande amplitude
(1) code FOURIER
(2) code flux
(3) code spline

fig. III.32 : Variation d'entropie du système dans le cas d'un trou gaussien
- en trait plein le code spline (256*512 points)
- en petits cercles le code flux (256*1024 points)

fig. III.33 : Variation d'entropie du système dans le cas d'une onde de grande amplitude
- en trait plein le code spline (256*512 points)
- en petits cercles le code flux (256*1024 points)

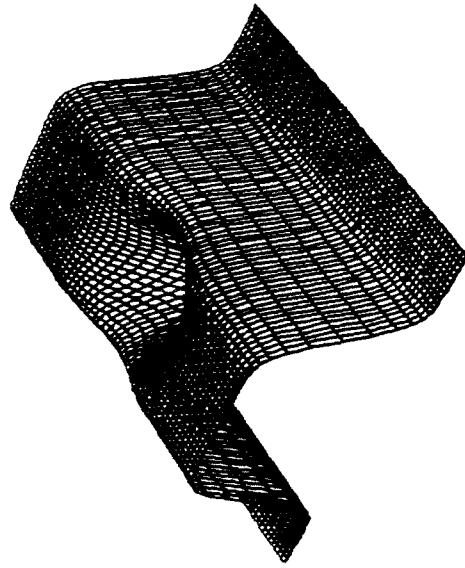
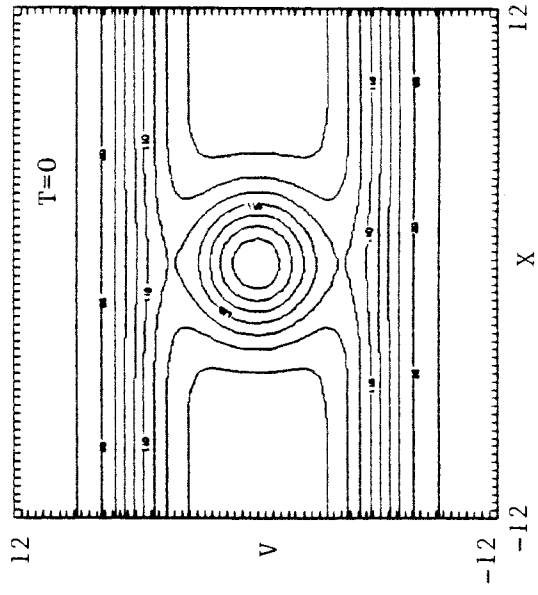


fig. III.23

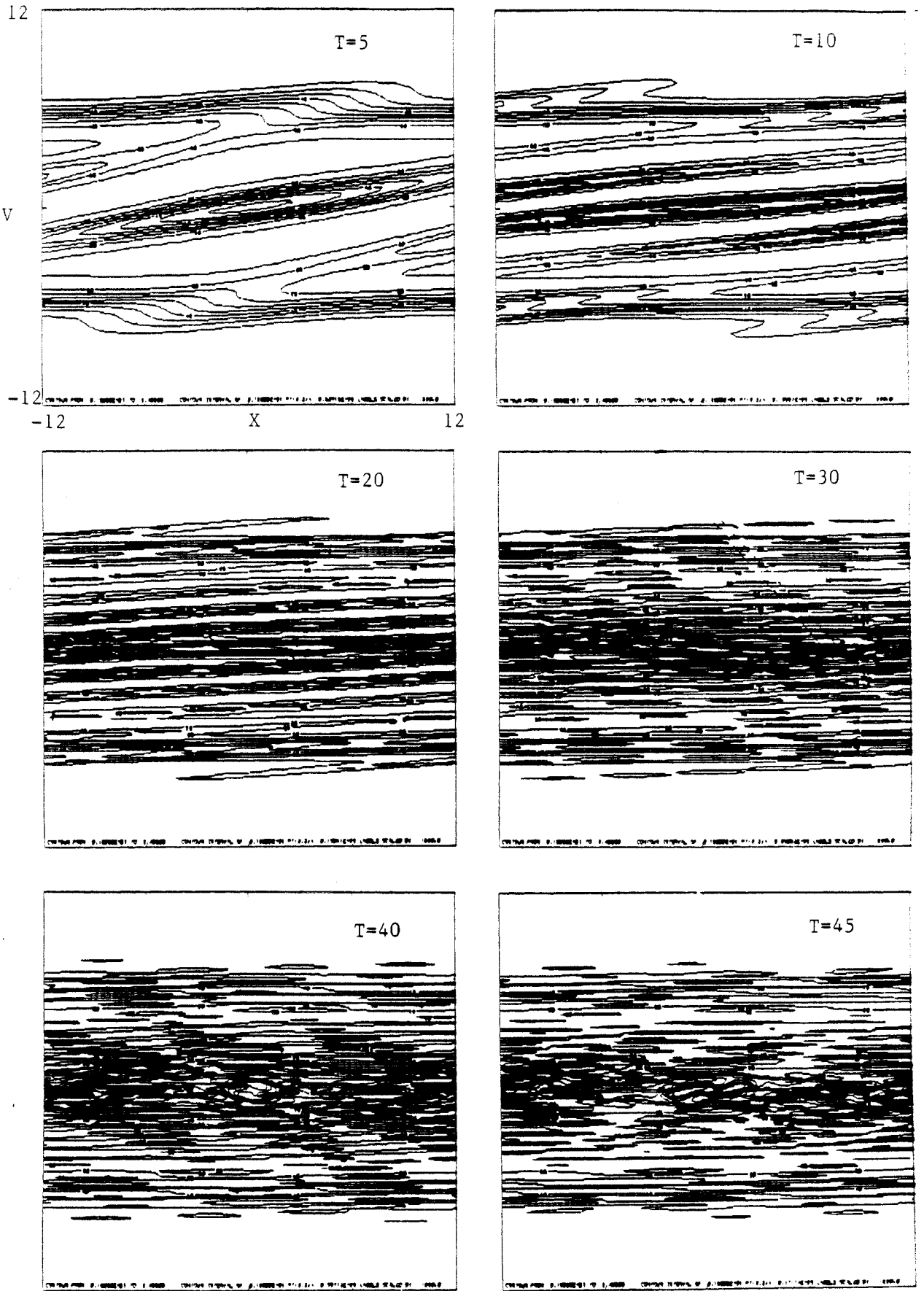


fig. III.23

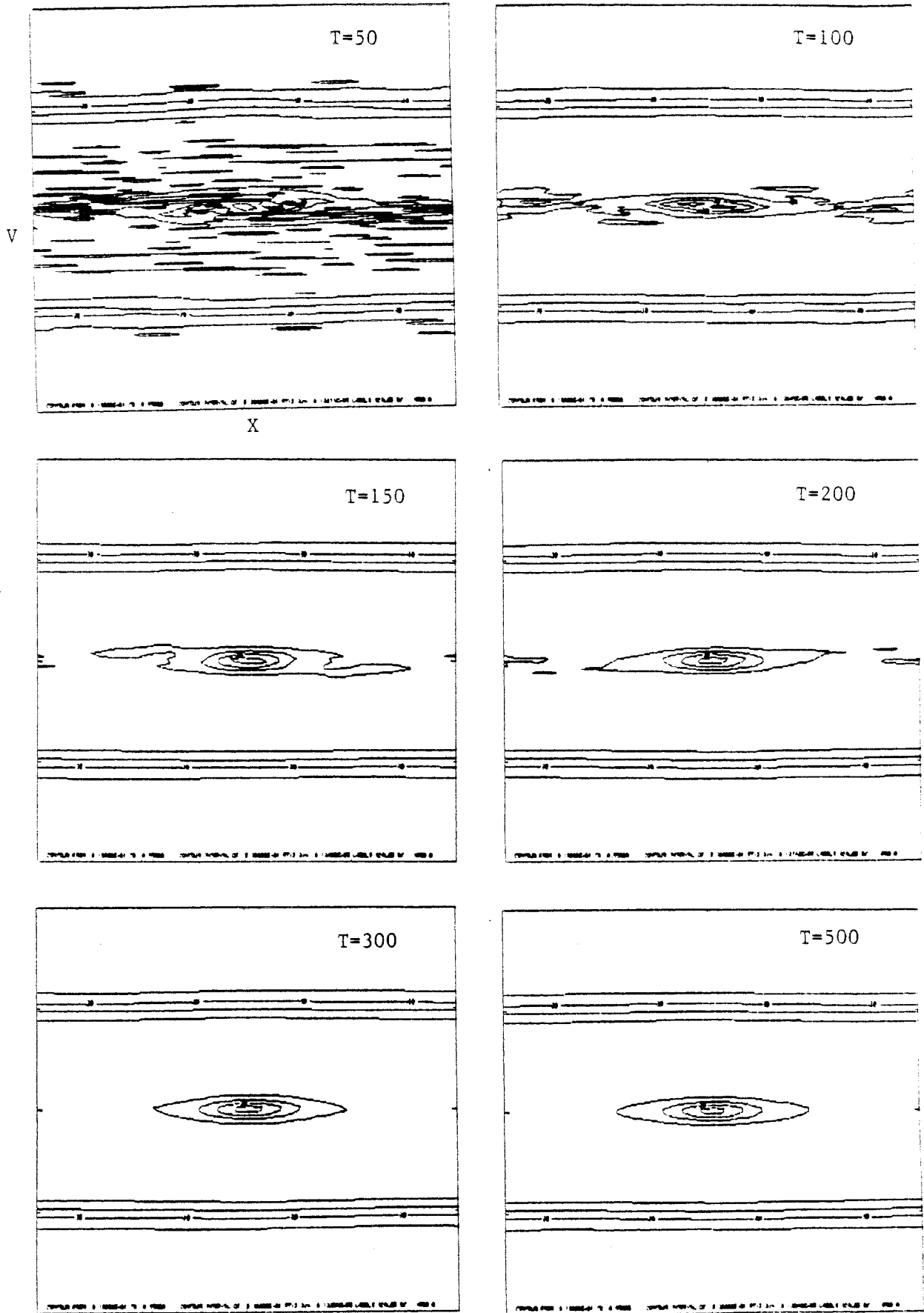


fig. III.23

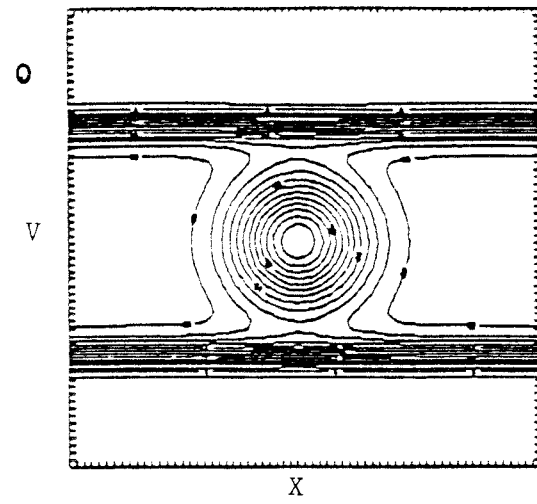
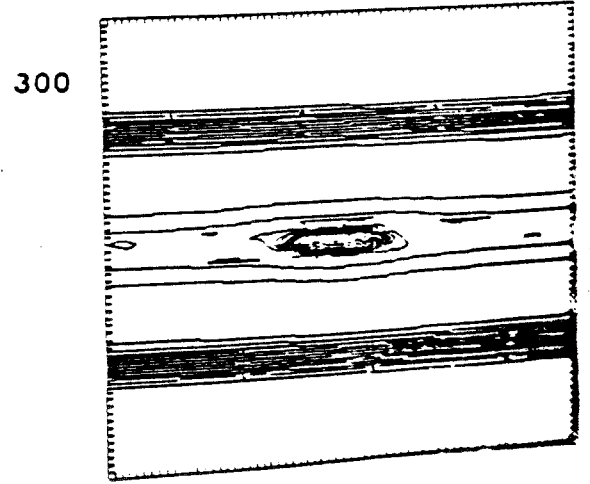
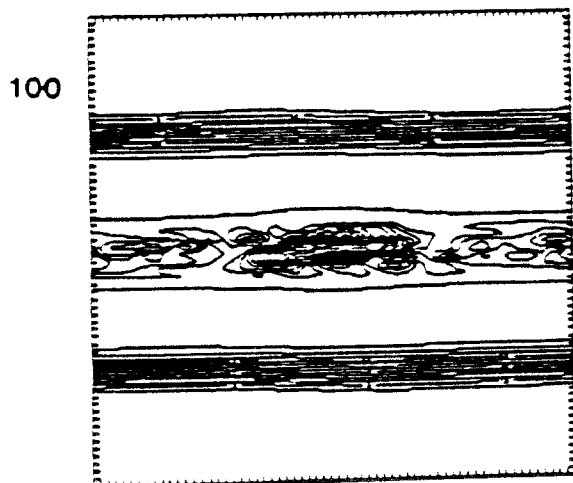
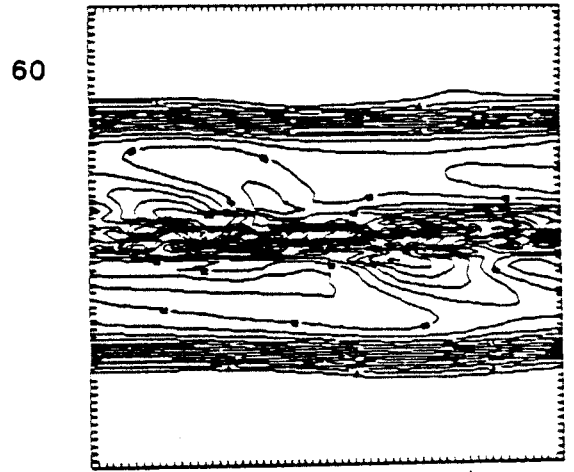
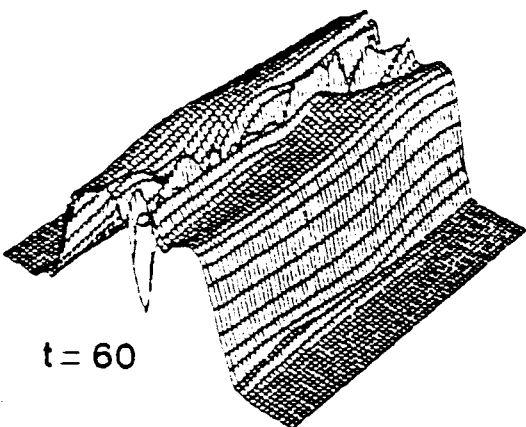
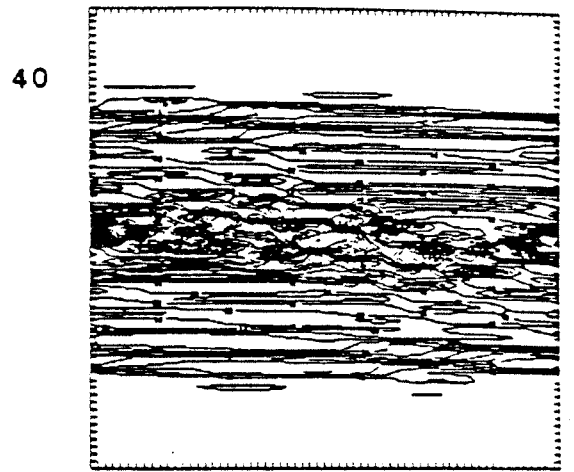


Fig. 11.24
Code "Splines cubiques"
256 * 256 points



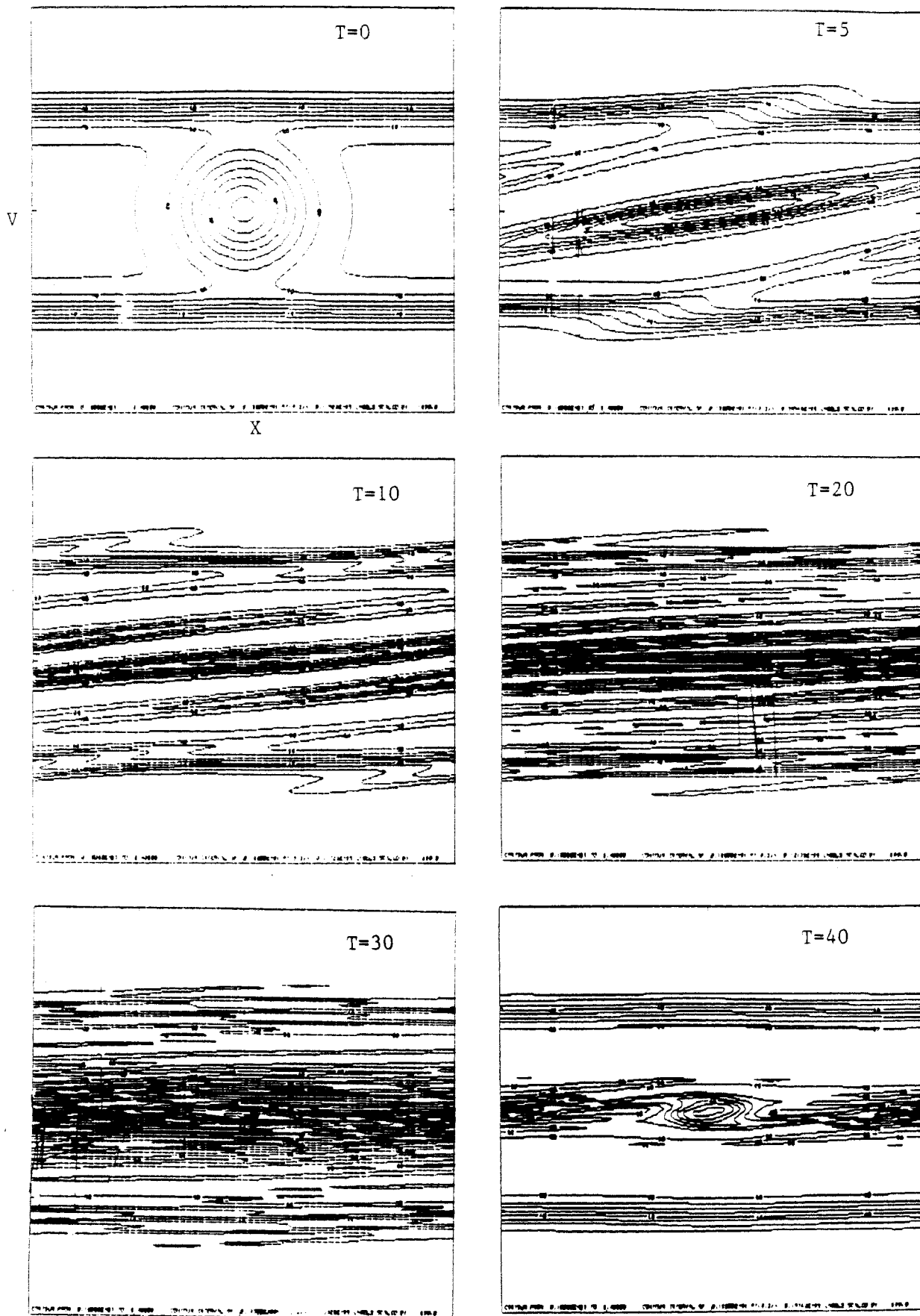


fig. III.25

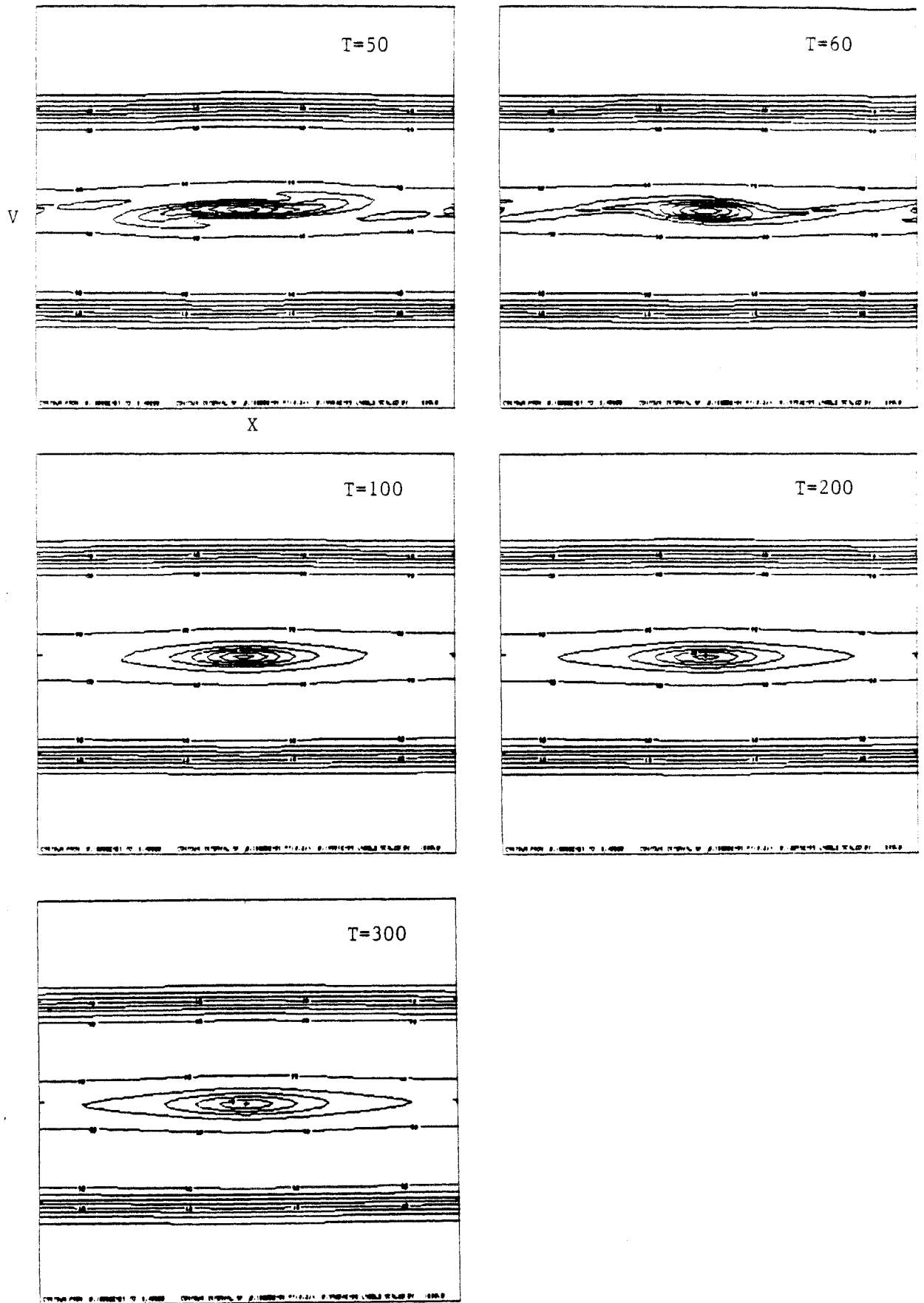


fig. III.25

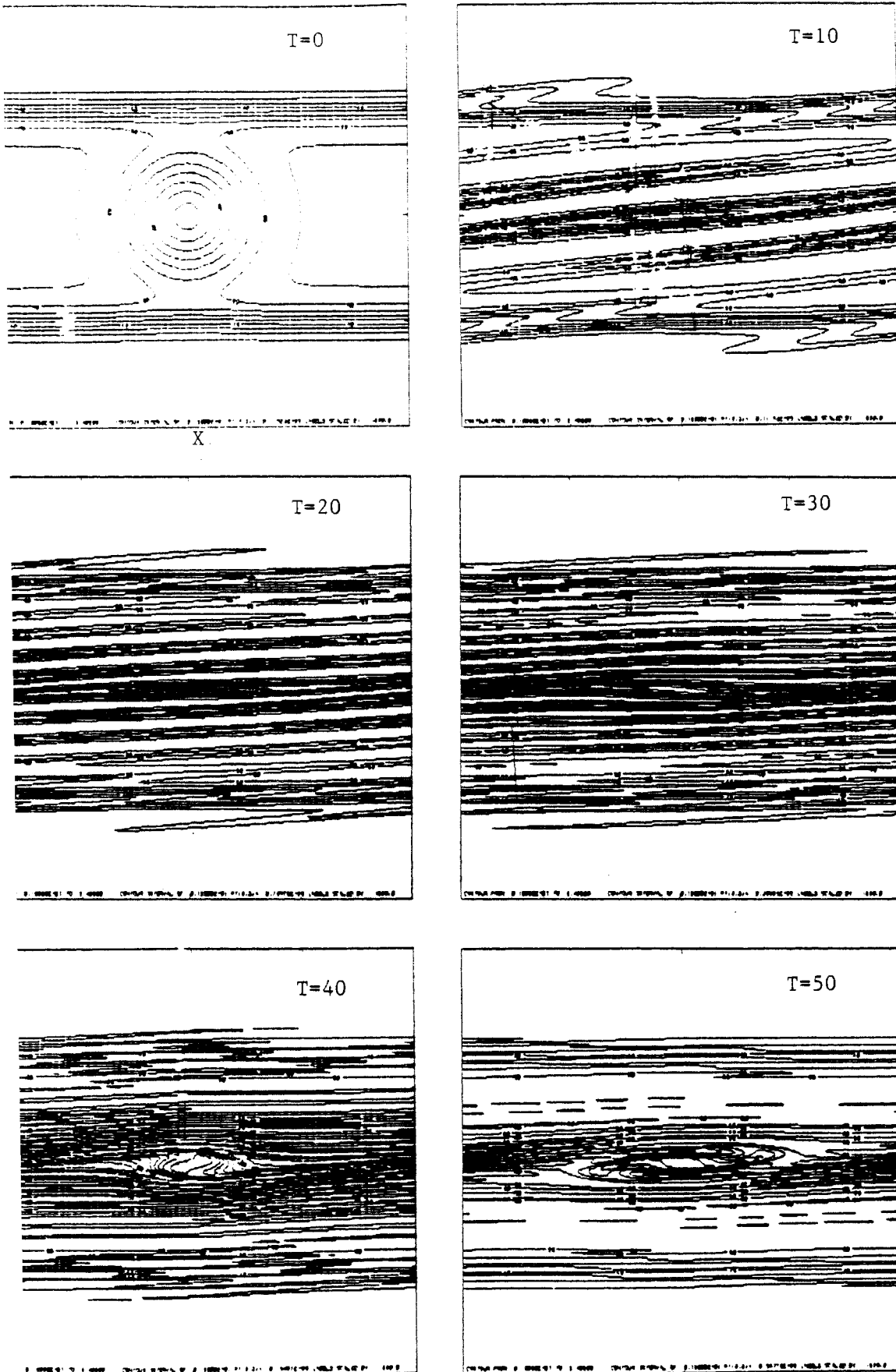


fig. III.26

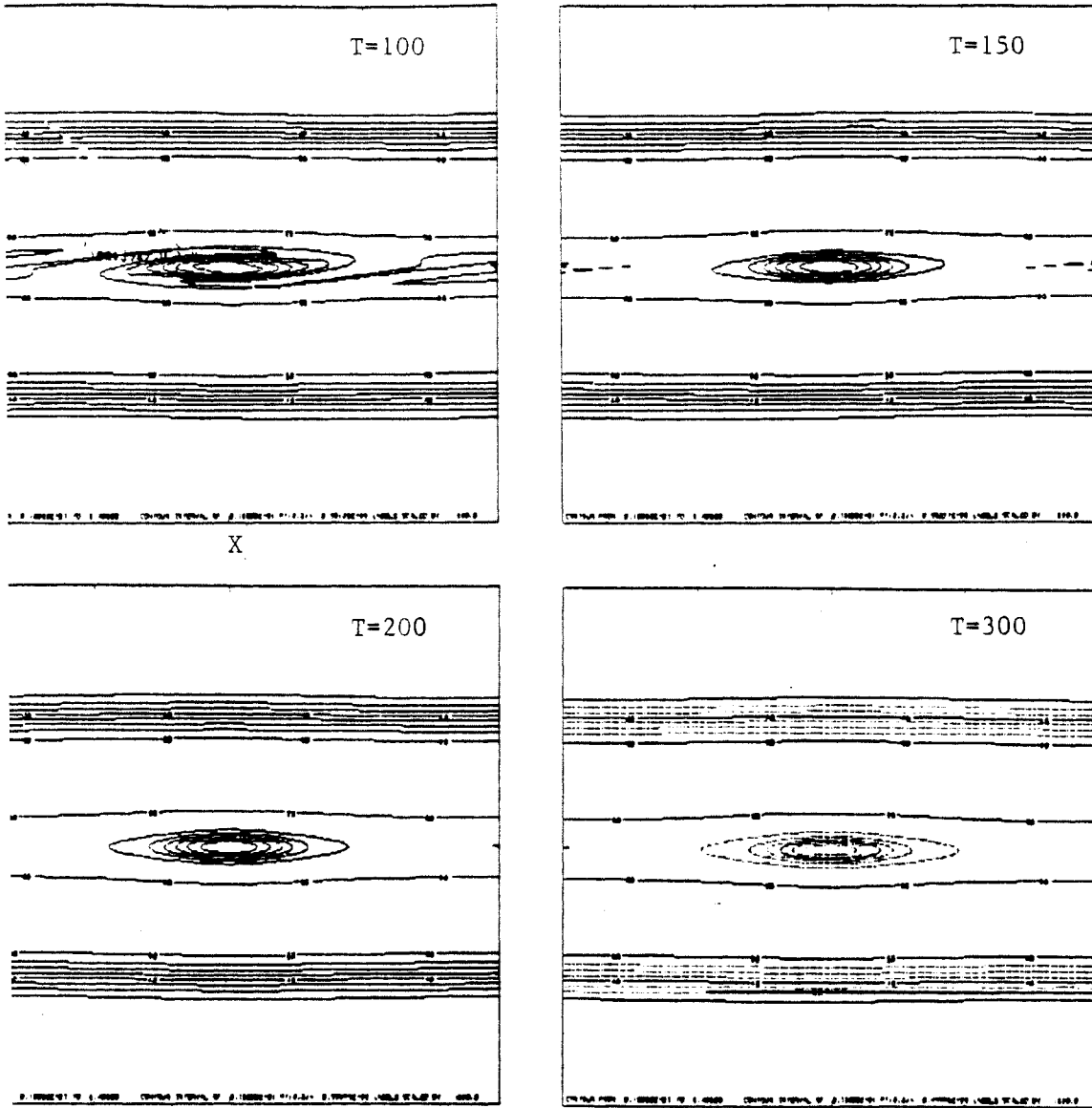


fig. III.26

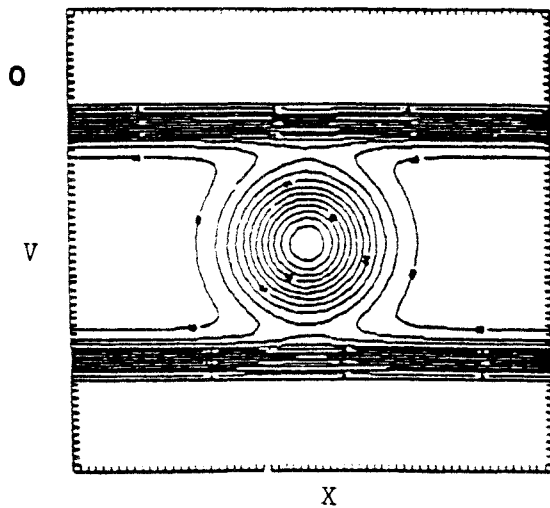
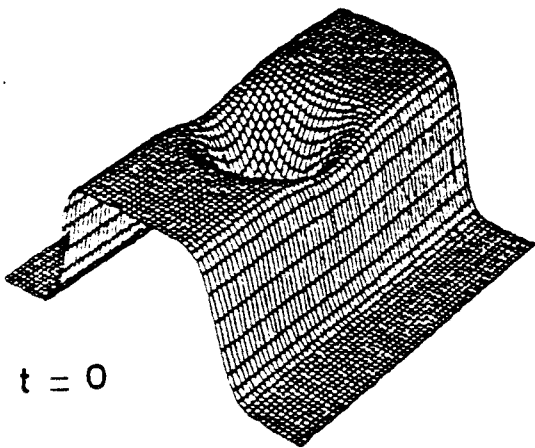
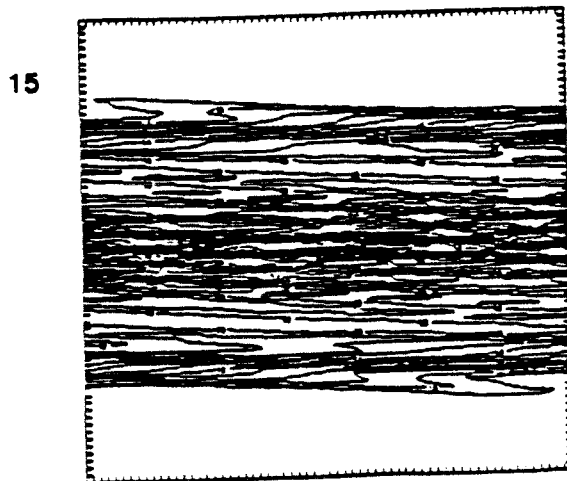
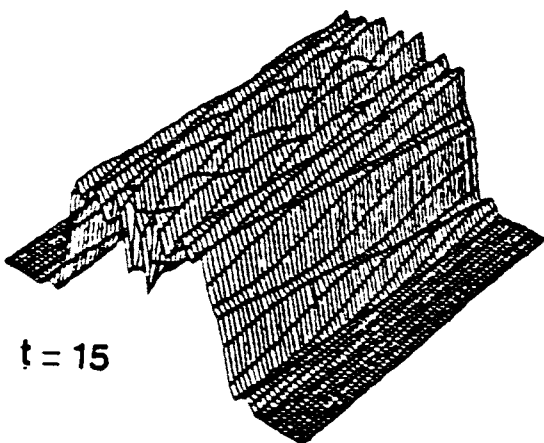
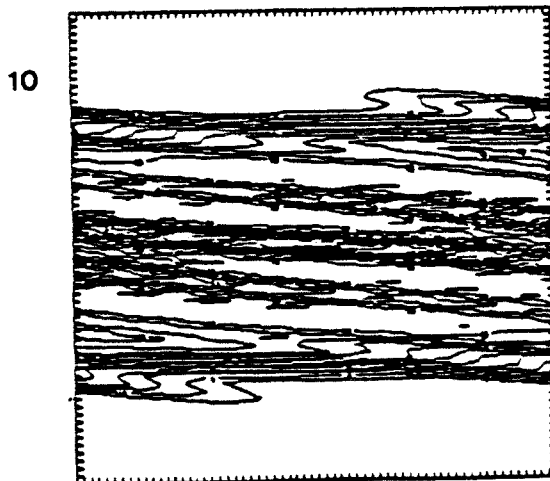
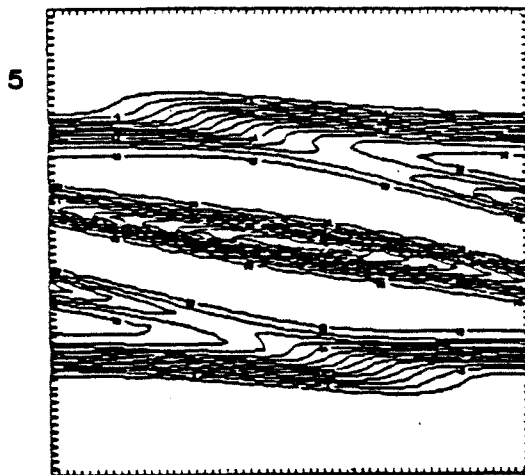
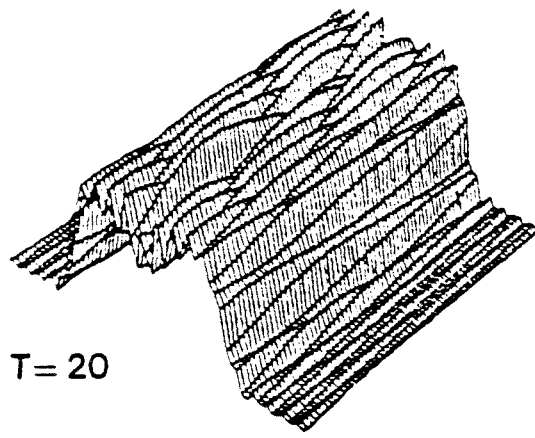


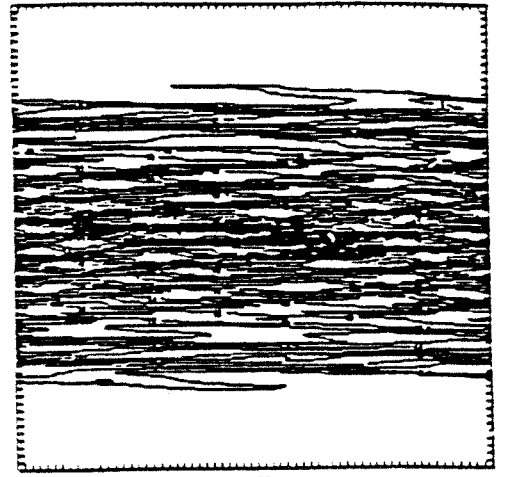
fig. III.27



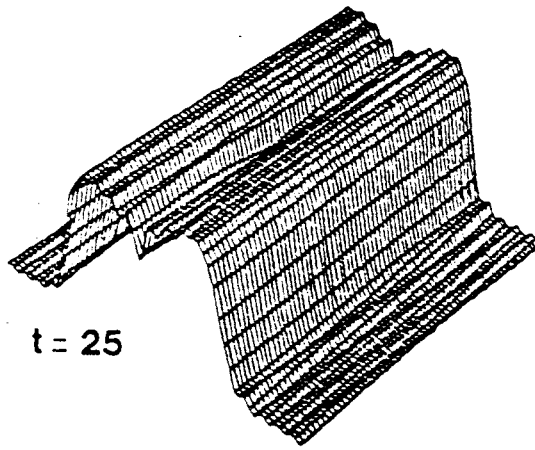


20

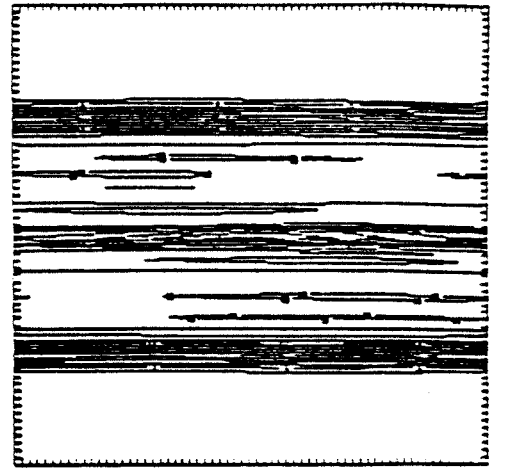
V



X



25



30

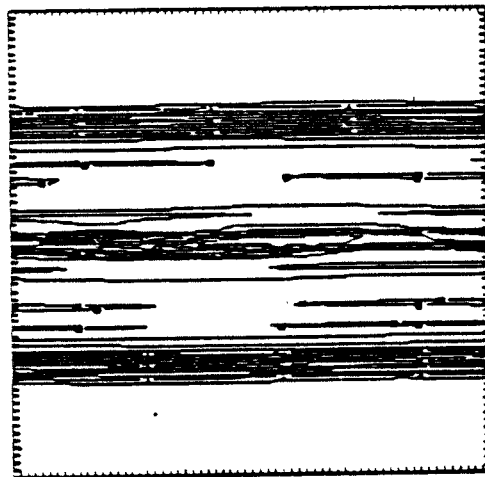
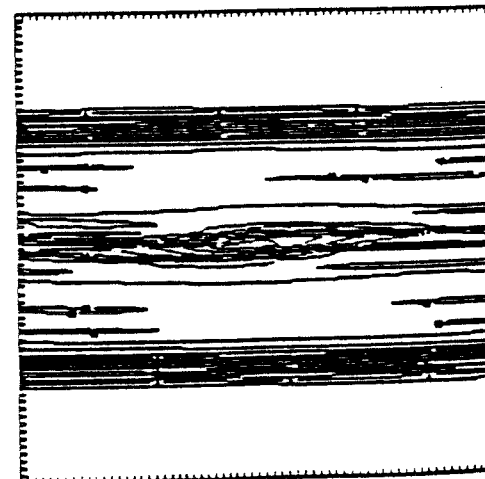
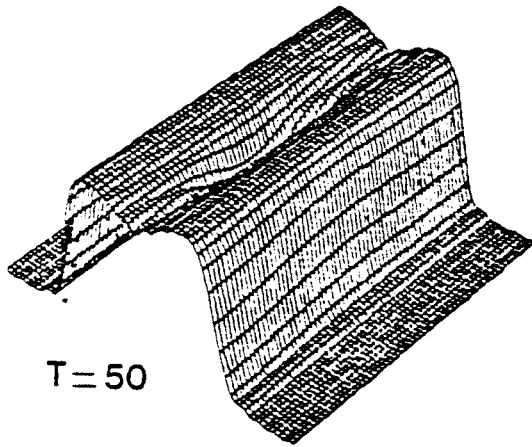


fig. III.27

35



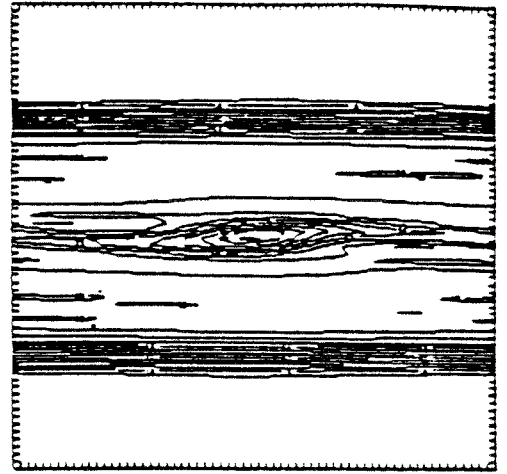


T=50

code de Fourier
128 * 128 points

fig. III.27

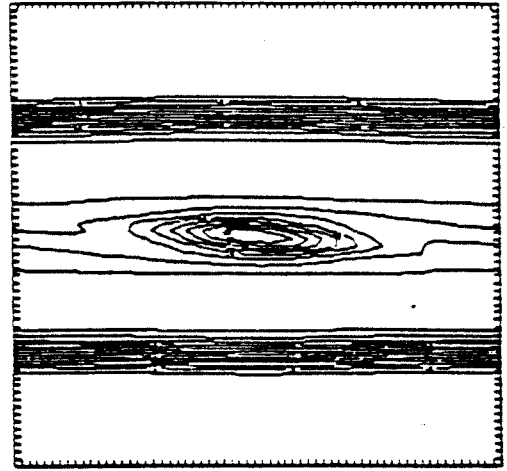
40



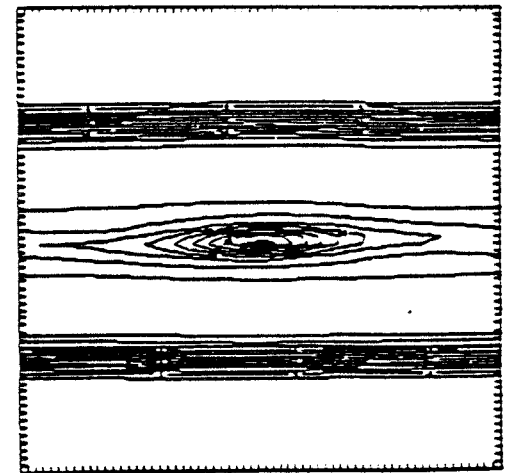
V

X

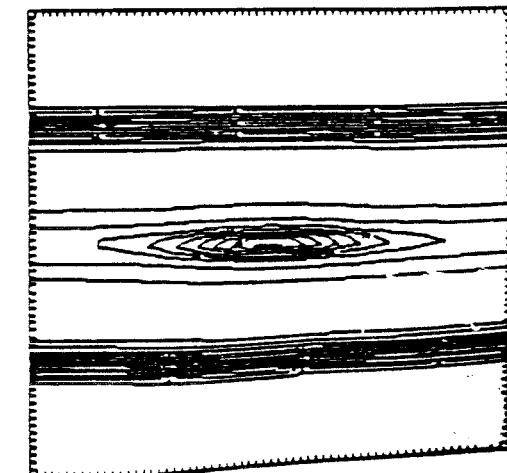
50



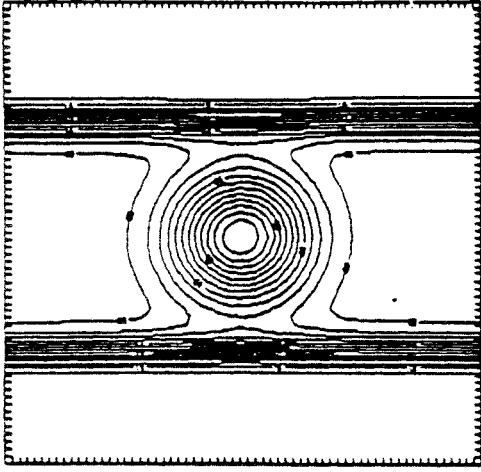
75



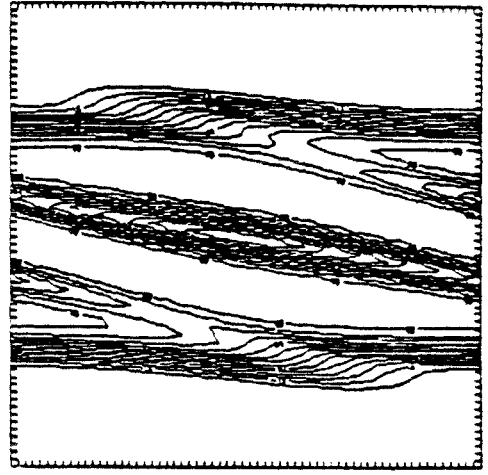
100



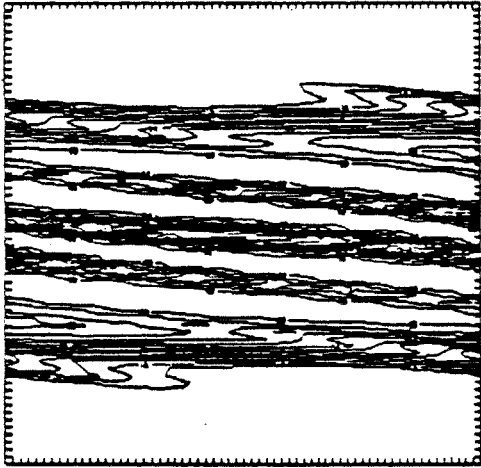
0



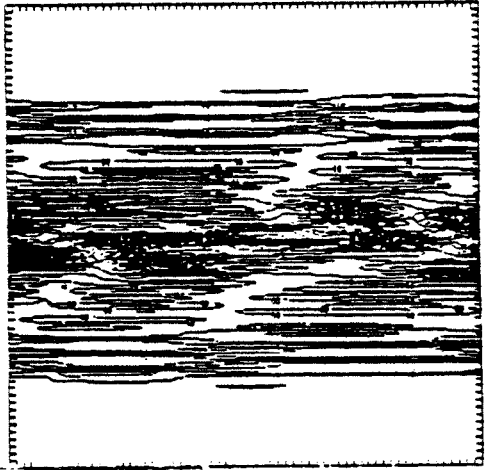
5



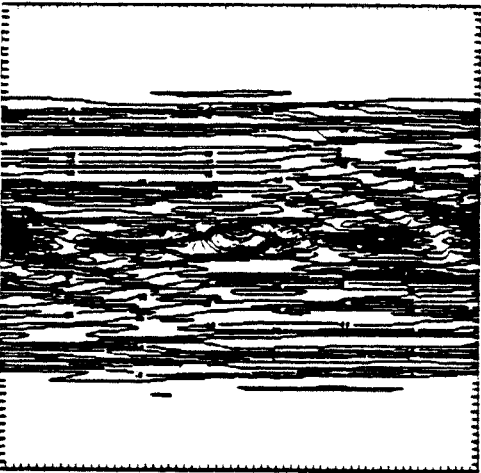
10



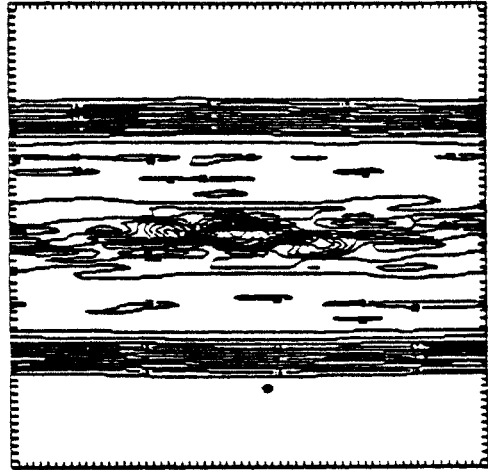
30



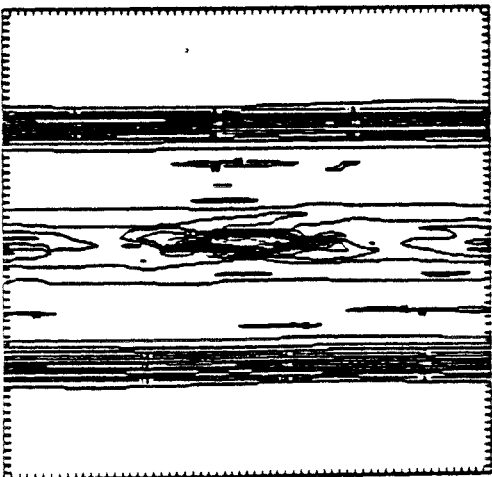
40



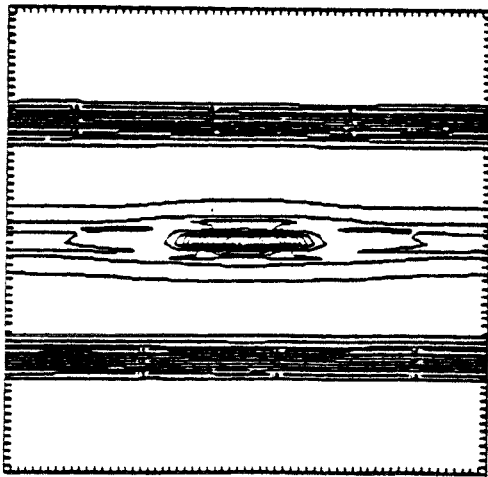
50



100



300



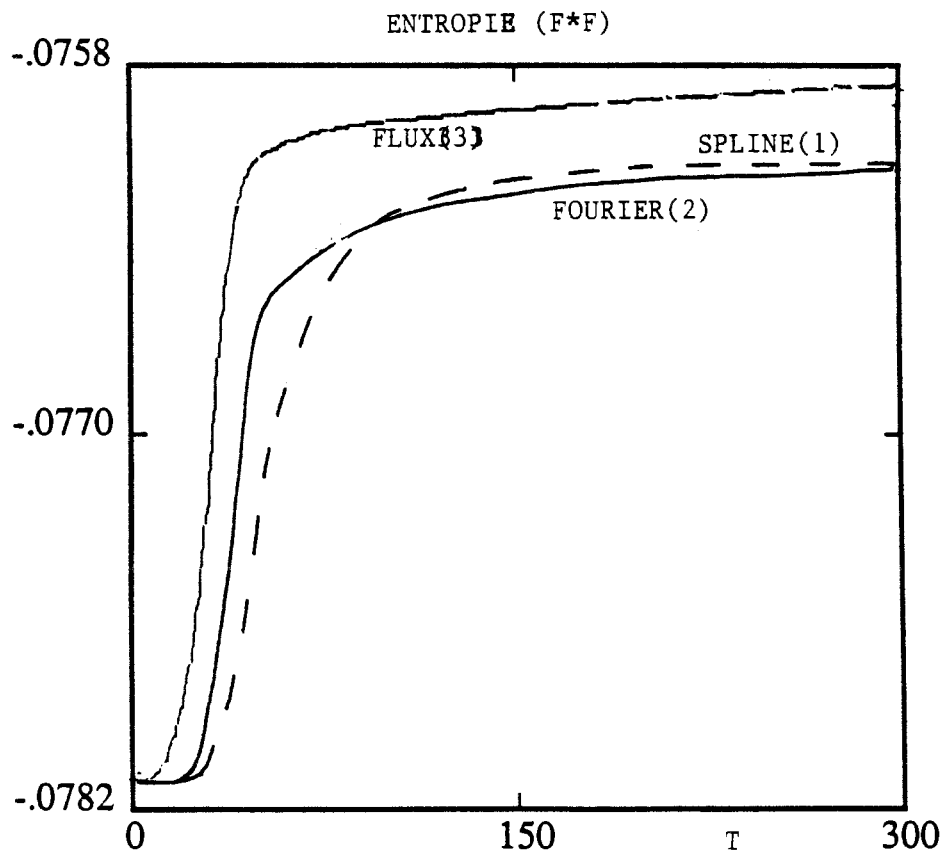
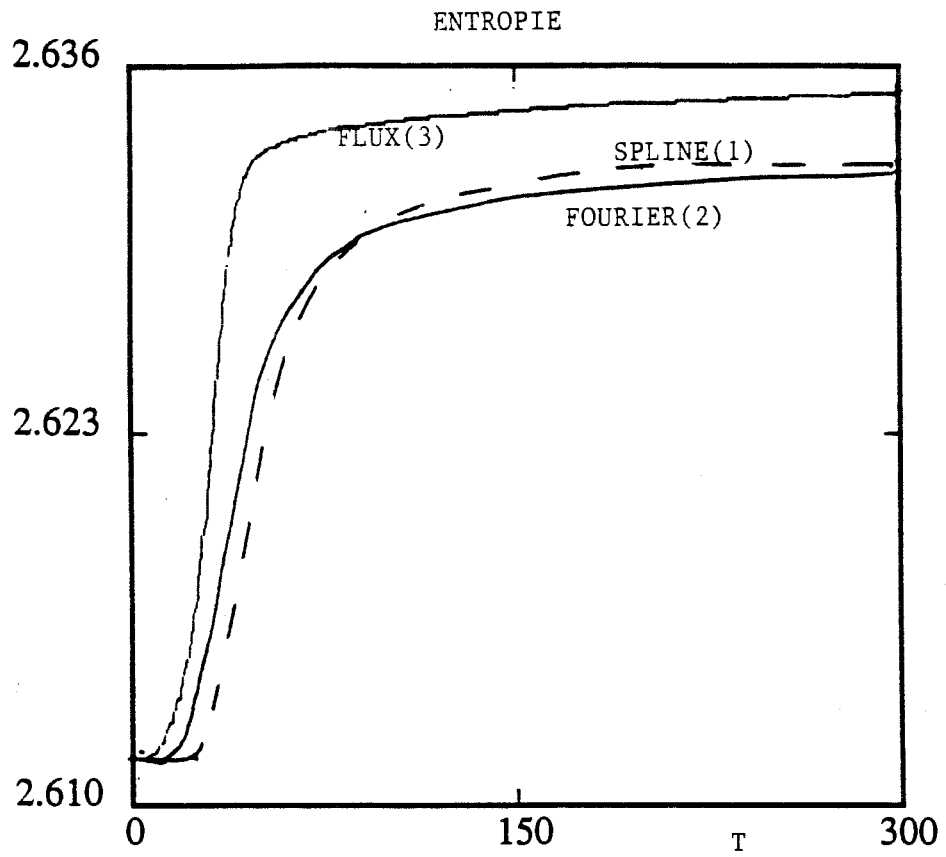


fig. III.29

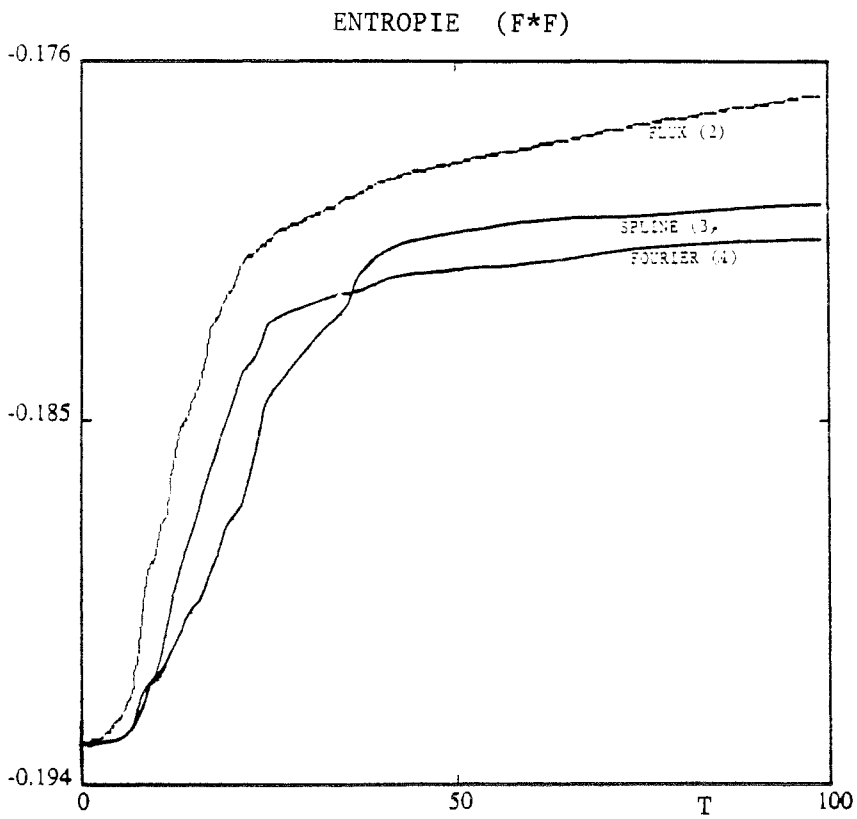
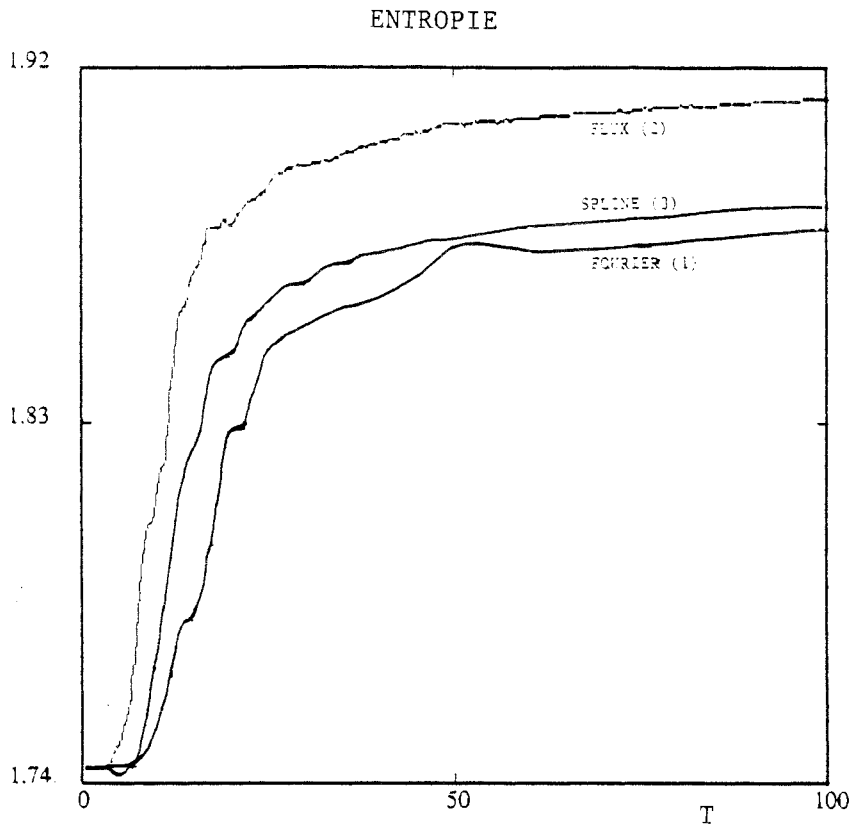


fig. III.30

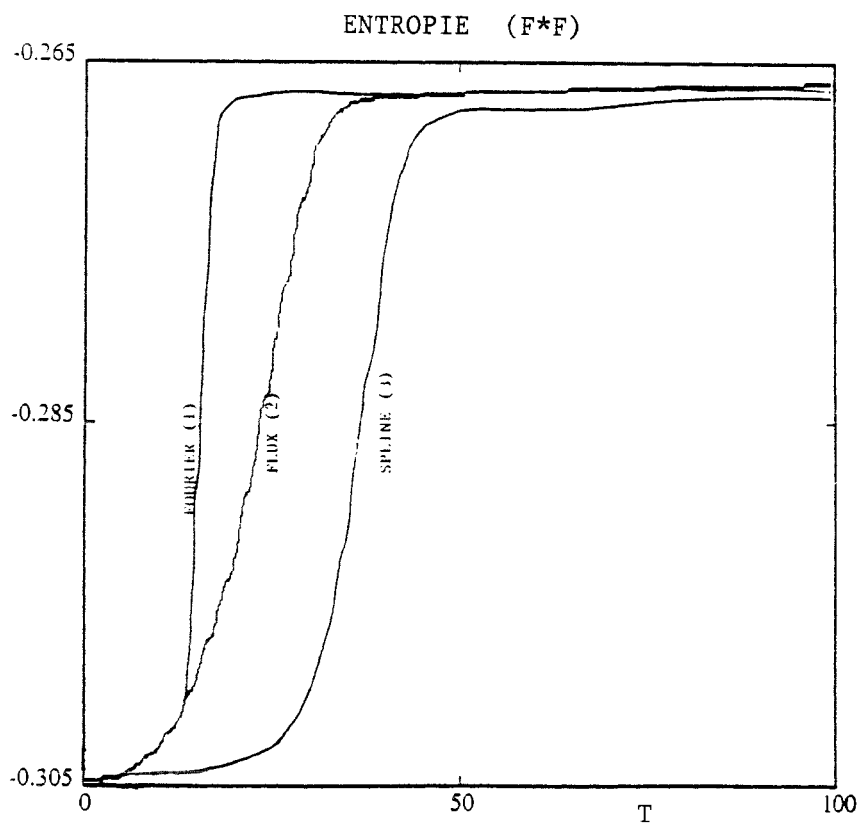
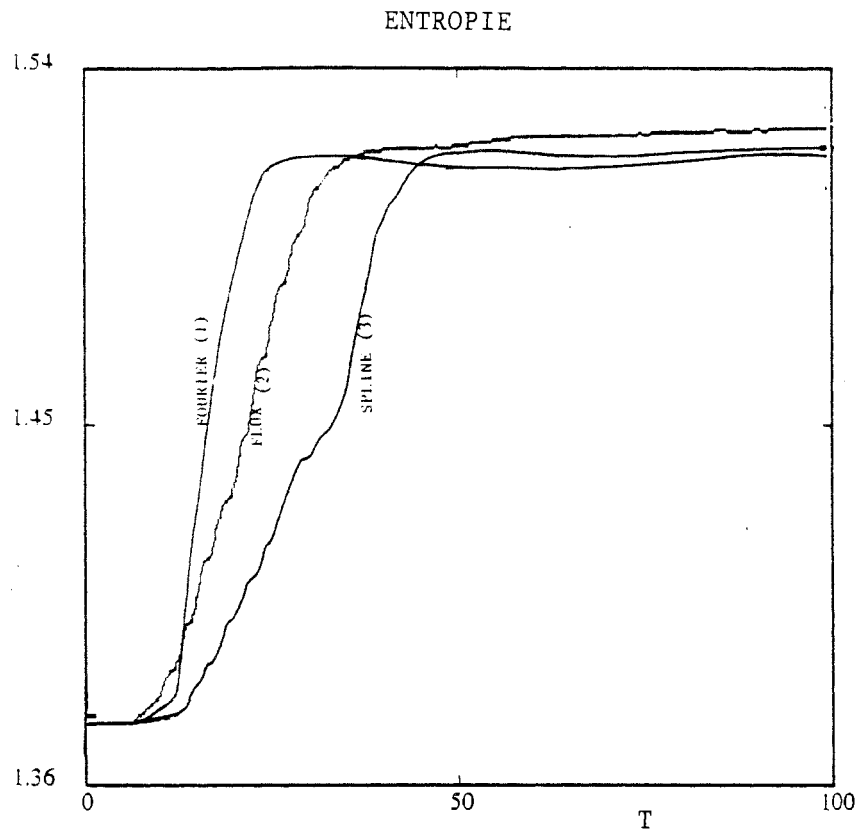


fig. III.31

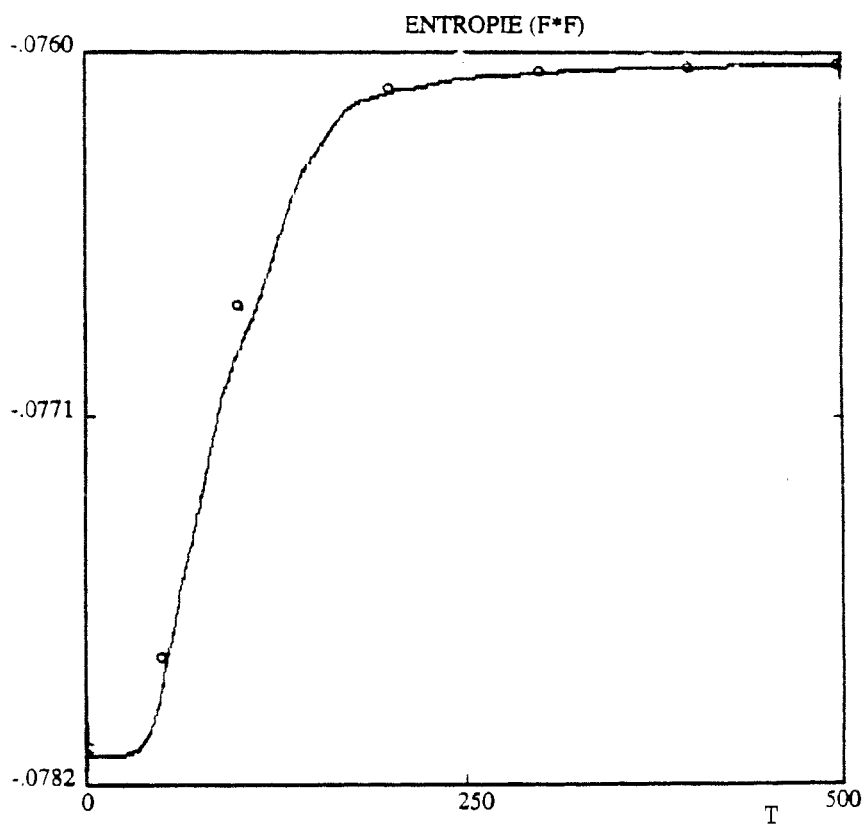
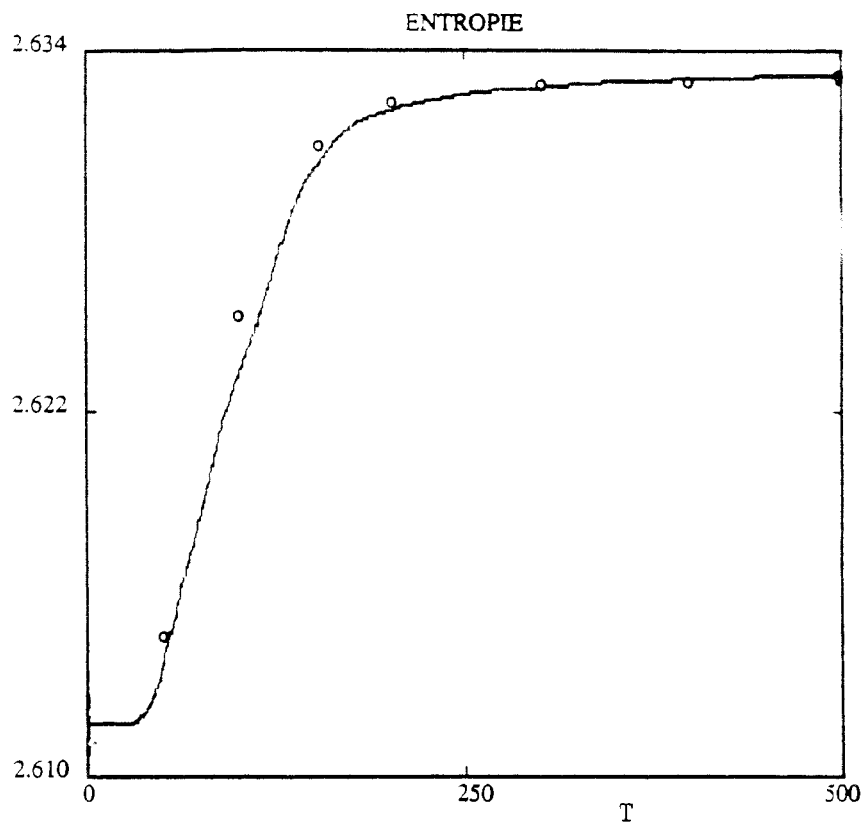


fig. III.32

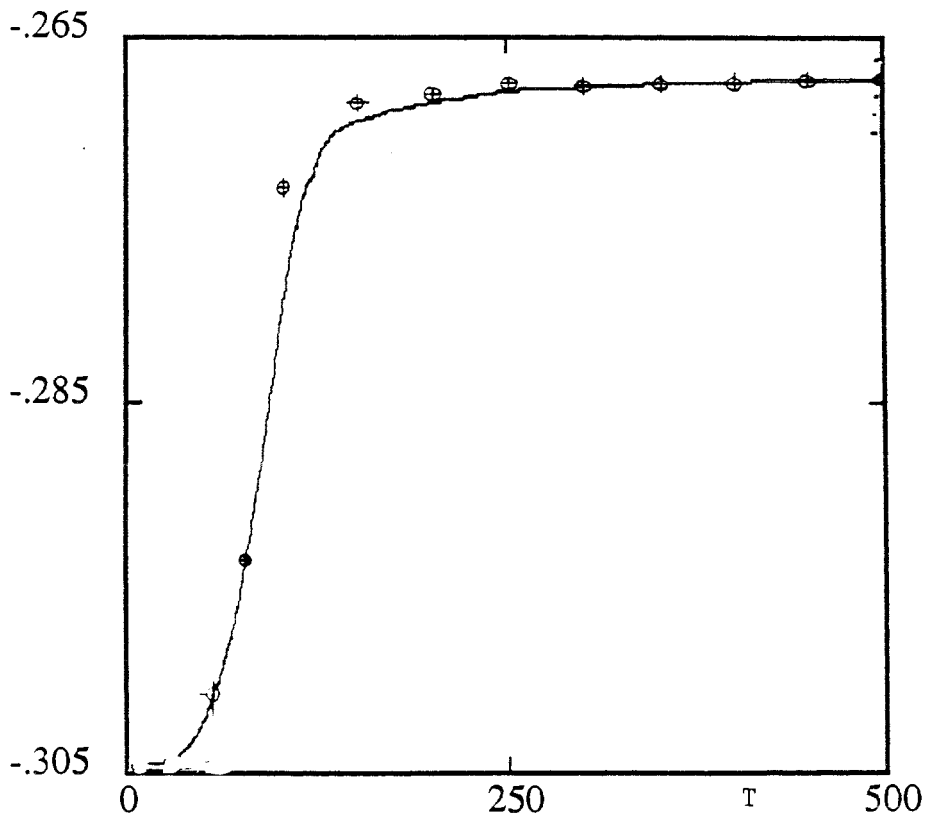
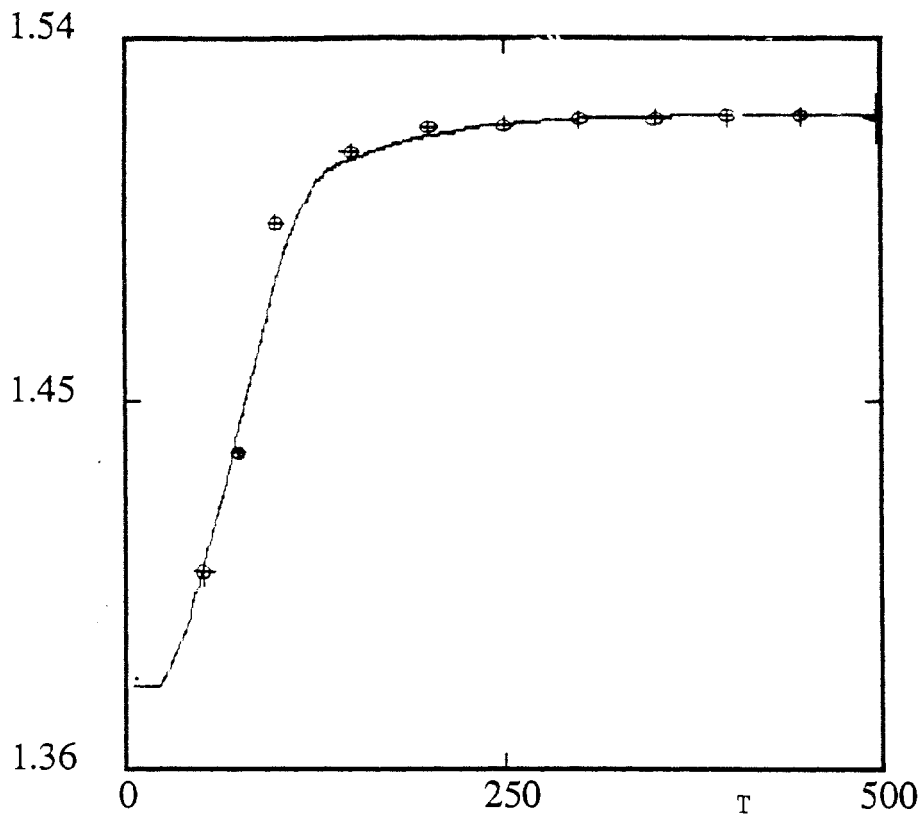


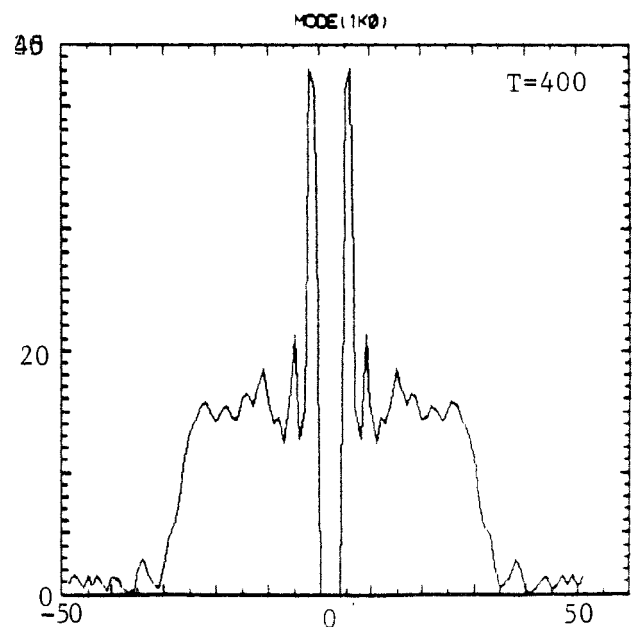
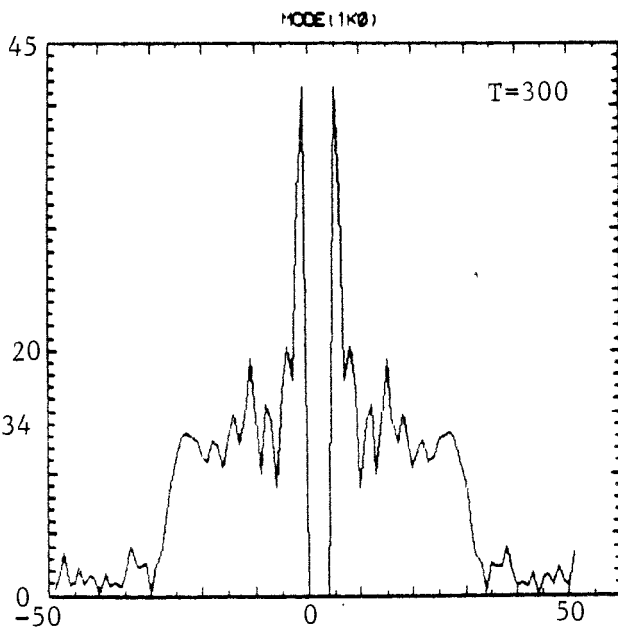
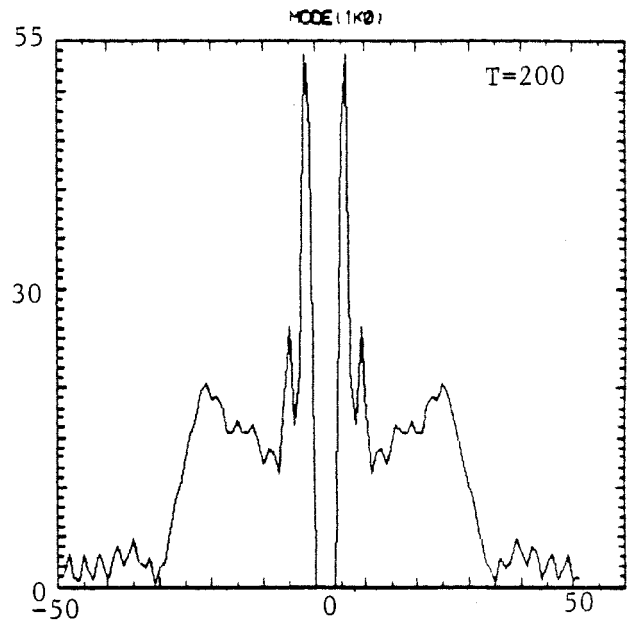
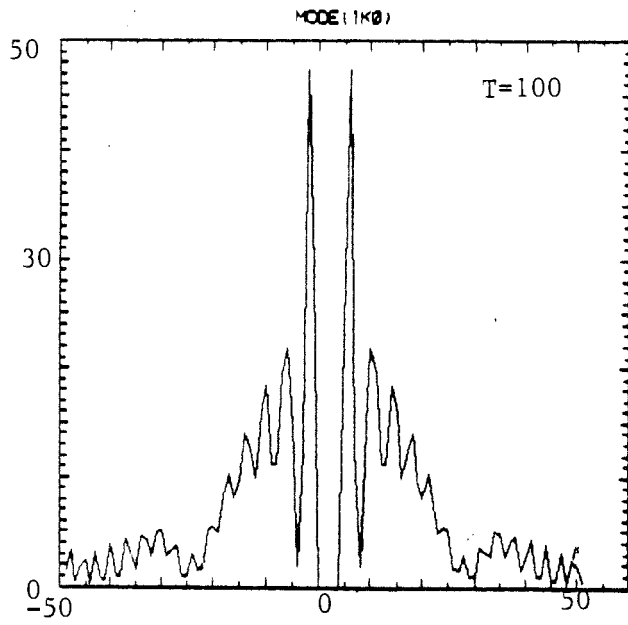
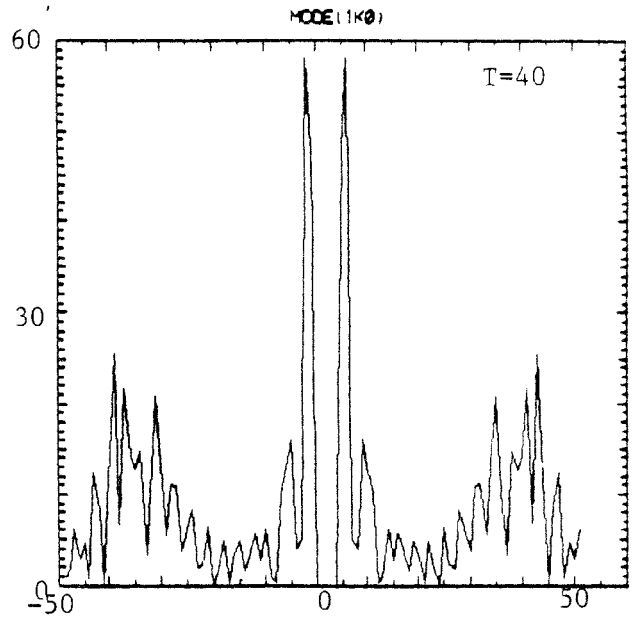
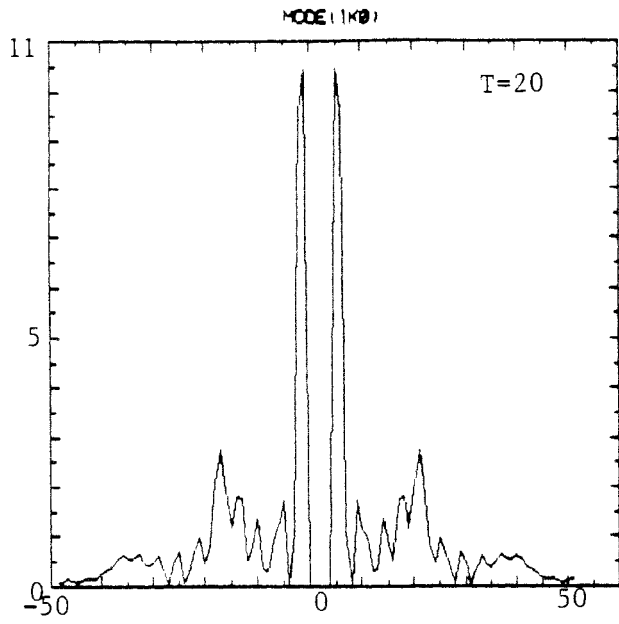
fig. III.33

VII- COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU PIC CENTRAL

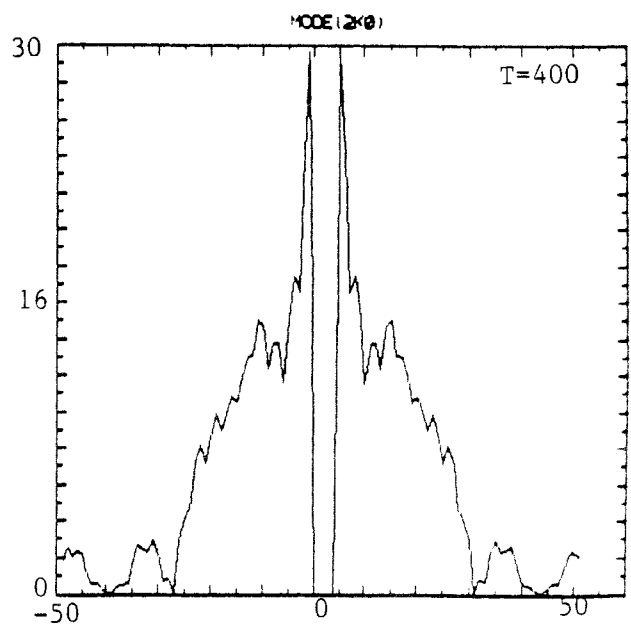
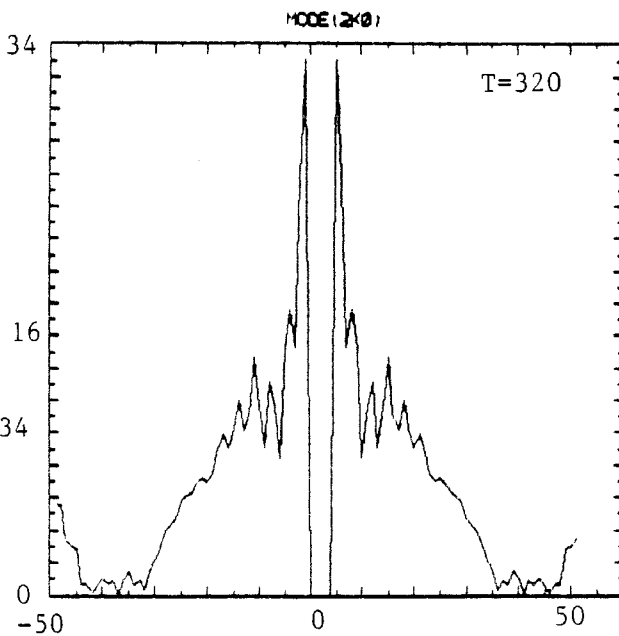
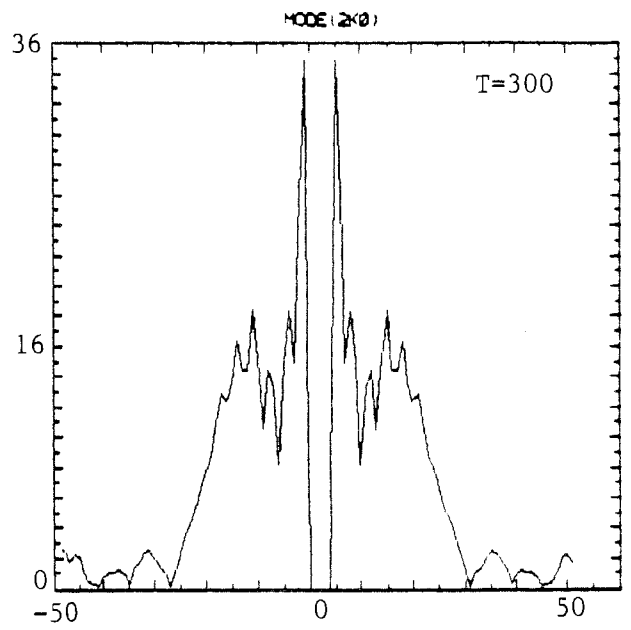
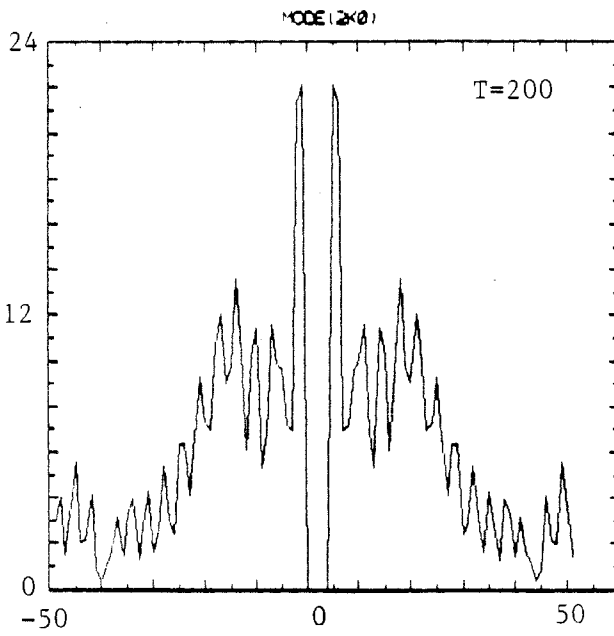
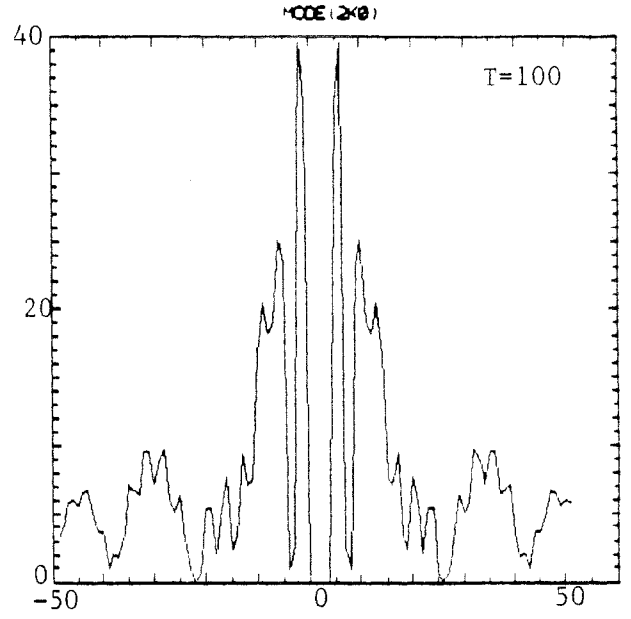
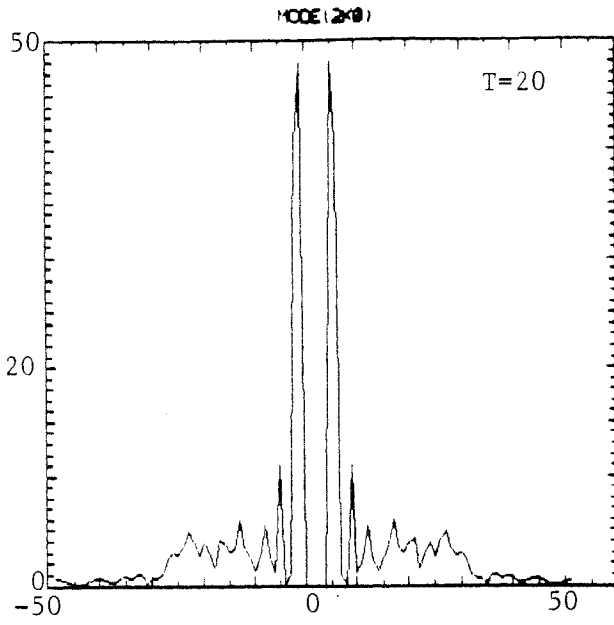
On a vu dans les paragraphes précédents que l'évolution du système VLASOV-POISSON conduit à un état asymptotique où l'entropie atteint sa valeur maximale.

La représentation de la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER (k,l) au cours de son évolution montre qu'elle se sépare en deux parties distinctes : une partie centrale autour de $l=0$ (pic central) avec une amplitude importante et une autre partie formée de petites structures qui se déplacent au cours du temps vers les petites longueurs d'onde $(\pm l_{max})$ avec une vitesse constante, puis, qui en disparaissant font croître l'entropie.

Lorsque l'état asymptotique est atteint, le lissage de la fonction de distribution $f(x,v)$ correspond à l'élimination de toutes ces structures fines (microstructures). La fonction lissée est donc la transformée de FOURIER inverse de la structure centrale dans l'espace (k,l) . Lorsque l'entropie a atteint sa valeur maximale (état asymptotique), l'amplitude du pic central peut continuer à osciller (la densité de particule correspond d'ailleurs au mode $l=0$) mais la largeur en l devient constante. Ceci est bien visible sur la figure (III.34), on a représenté un grossissement de cette partie centrale dans le cas de la condition initiale n°3 à différents temps.



g. III.34



ig. III.34

VIII- CONCLUSION DU CHAPITRE

Les trois conditions initiales utilisées présentent un fort "mélange" dans l'espace des phases (propriété de l'équation de VLASOV) puis un lissage (dû au code numérique) de la fonction de distribution. Les microstructures qui apparaissent dans l'espace des phases peuvent être interprétées en terme d'information, et leur disparition permet d'expliquer l'augmentation d'entropie du système, puis sa stabilisation quand le système est bien "nettoyé" de ces microstructures.

Quelle que soit la grille de l'espace des phases utilisée, toutes les courbes de la variation d'entropie convergent assez bien vers la même valeur maximale (même état asymptotique). Pour les petites valeurs N_x et N_v de la grille, l'entropie augmente d'une façon plus rapide, par contre lorsque N_x et N_v deviennent plus grand, l'état asymptotique est atteint pour des temps plus longs et l'entropie augmente d'une façon plus lente, mais toujours avec la même valeur asymptotique.

De plus la variation d'entropie (ΔH) est indépendante du code numérique, par contre le temps de montée (ΔT) de l'entropie, quant à lui, en dépend.

L'équation de VLASOV génère des microstructures de plus en plus fines dans l'espace des phases, et le code numérique lui même produit le lissage (dû au maillage élémentaire de l'espace des phases) qui détruit cette microstructure. Un code numérique qui traite et préserve mieux la microstructure peut être considéré comme meilleur par rapport à un autre code, qui pour le même problème, ne conserve pas bien la microstructure. Le comportement de $H = - \int C(f) dx dv$ en fonction du temps est une bonne mesure du "mélange" dans l'espace des phases et finalement un bon test pour les codes. On peut aussi citer le cas d'un code utilisant une interpolation par polynômes de BERNSTEIN du second ordre /33/ ,présentant la possibilité de préserver la forme de la

fonction de distribution. Avec ce code, il n'y a pas de convergence de la fonction H vers une même valeur asymptotique pour différentes grilles. De plus, l'énergie totale du système n'est pas conservée au cours de l'évolution. En effet la mauvaise conservation de l'énergie provoque l'absence de convergence de l'entropie.

CHAPITRE IV

COMPARAISON AVEC DES SIMULATIONS DE REFERENCE

CHAPITRE IV : COMPARAISON AVEC DES SIMULATIONS DE REFERENCE

IV-1 INTRODUCTION

On a vu dans le chapitre précédent que la variation d'entropie ne dépendait ni de la grille, ni de la méthode d'intégration, en revanche le temps de montée de l'entropie quant à lui dépendait de la grille et du code numérique d'une façon générale. Le fait d'utiliser une grille ultra fine dans l'espace des phases devrait permettre au code numérique de conserver la microstructure et donc toute l'information sur des temps suffisants et cela sur plusieurs dizaines de pulsations plasma (ω_p).

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème suivant : sachant que le temps de montée de l'entropie dépend de la grille, on va considérer une grille très fine dans l'espace des phases avec un nombre de points N_x et N_y suffisamment élevé de telle sorte à avoir une faible variation relative d'entropie au moins jusqu'à une centaine de pulsations plasma (ω_p). Lorsqu'on obtient cette faible variation d'entropie, on garde cette simulation qu'on appellera par la suite simulation de référence. A partir de cette simulation de référence, on peut effectuer un traitement de l'information, en particulier filtrer la fonction de distribution ce qui revient à détruire une partie de l'information contenue dans cette fonction.

Or on a vu que, dans l'espace de FOURIER (k,l) , la fonction de distribution est formée de deux parties bien distinctes : une partie centrale autour de $l=0$ et une autre partie formée de petites structures qui se déplacent vers les modes l élevés. Avec le filtrage on élimine une partie de ces structures fines.

Posons-nous le problème suivant : partant de la simulation de référence (où la variation relative d'entropie est faible), peut-on, en filtrant la fonction de distribution, retrouver le même état asymptotique que celui obtenu avec un code ayant une grille avec un nombre de point très inférieur à celui de

la grille de référence et pour le même temps.

IV-2 DEFINITION D'UNE SIMULATION DE REFERENCE

Au lieu de chercher à trouver une entropie constante comme le prévoit la théorie et qui nécessiterait un nombre de point infini, on va considérer un nombre de point N_x et N_y suffisamment élevé pour avoir une faible variation relative d'entropie $[\delta H / (H_\infty - H_0)]$ de l'ordre de quelques pourcents et jusqu'à un temps t de l'ordre de $100 - 300 \omega p^{-1}$. (H_0 : valeur initiale de l'entropie, H_∞ valeur asymptotique).

Dans le cas d'une condition initiale représentant une onde de grande amplitude, on atteint pour $t=200 \omega p^{-1}$ une variation relative de l'ordre de 10 % pour une grille de l'espace des phases de $N_x=512$ et $N_y=8192$ dans le cas où l'on calcule l'entropie avec $C(f)=f^2$ et, de l'ordre de 20 % dans le cas où $C(f)=f \ln f$.

Par contre avec le même nombre de points $512*8192$ et avec la condition initiale représentant une cavité gaussienne on a atteint une variation relative de l'ordre de 30 % dans les deux cas.

Pour la troisième condition initiale qui représente un équilibre BGK perturbé avec une vitesse de dérive, on a atteint une variation de l'ordre de 30 % mais seulement jusqu'à $t=100 \omega p^{-1}$.

Etant donné qu'on peut atteindre une variation relative de l'ordre de 10 - 30 % sur des temps correspondants à une évolution physique significative pour chacune des conditions initiales considérées, on choisit le code avec $N_x=512$ et $N_y=8192$ comme code de référence. On peut donc admettre que ces codes "juges" conservent, au moins sur les temps considérés, toute l'information y compris la microstructure. A partir des simulations de référence ainsi réalisées, il est possible de filtrer la fonction de distribution, c'est à dire de faire des coupures artificielles sur les modes de FOURIER (k,l) élevés et de ne garder que les modes de grandes longueurs d'onde. La question cruciale est : peut on retrouver les résultats déjà obtenus avec des codes ayant un nombre de point bien inférieur à ceux du code "juge" ?

Pour une condition initiale donnée, à partir des résultats de

la simulation de référence avec un nombre de points $N_x=512$ et $N_v=8192$, on peut considérer le diagnostic suivant : on calcule la transformée de FOURIER $f(k,l,t)$ de la fonction de distribution $f(x,v,t)$ qu'on multiplie ensuite par une fonction filtre $G(k,l)$; on calcule alors la transformée de FOURIER inverse du produit $f(k,l,t) G(k,l)$, le résultat donne une fonction de distribution filtrée $\tilde{f}(x,v,t)$.

$$f(x,v,t) \text{ -----} \rightarrow f(k,l,t) G(k,l) \text{ -----} \rightarrow \tilde{f}(x,v,t)$$

Avec ce diagnostic, on peut annuler certains modes (coupures) et ne travailler qu'avec un nombre de mode réduit ($k \leq k_c$; $l \leq l_c$), k_c et l_c étant les modes de coupure du filtre G . Ces nombres d'onde de coupure k_c et l_c correspondent dans l'espace des phases (x,v) à un échantillonnage de dimension $\delta x = \pi/k_c$ et $\delta v = \pi/l_c$.

Les fonctions filtrées sont ainsi échantillonnées avec un nombre de point N_{x1} et N_{v1} très inférieur aux nombres de points originaux dans la simulation de référence ($N_{x1} \ll N_x$; $N_{v1} \ll N_v$).

Lorsqu'on obtient la fonction de distribution filtrée $\tilde{f}(x,v,t)$, on calcule les entropies "coarse grained"

$$\tilde{H}_1(t) = - \delta x \delta v / L^4 \sum \sum f(x_i, v_j, t) \ln f(x_i, v_j, t)$$

$$\tilde{H}_2(t) = - \delta x \delta v / L \sum \sum f(x_i, v_j, t) \tilde{f}(x_i, v_j, t)$$

On compare ensuite avec les entropies $H_1(t)$ (équation III.10) et $H_2(t)$ (équation III.11) calculées directement à partir d'une simulation habituelle réalisée directement avec un échantillonnage du même ordre que N_{x1} et N_{v1} .

On a vu que la représentation de la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER $f(k,l)$ en fonction de l montre l'existence d'une partie centrale (pic central) plus d'autres structures qui se déplacent à vitesse constante vers les petites longueurs d'onde (l_{max}). Dans la simulation de référence, ces valeurs l_{max} et k_{max} sont rejetées très loin vers les grandes valeurs, ce qui permet de les conserver sur des temps suffisamment élevés.

Notre filtrage consiste alors à annuler la fonction de distribution au delà d'un certain nombre d'onde limite l_c ou k_c c'est-à-dire faire disparaître artificiellement certaines de ces structures.

IV-3 RESULTATS DES SIMULATIONS

En multipliant la fonction de distribution $f(k,l)$ par un filtre $G(k,l)$, on élimine une partie de cette fonction, cela revient donc à considérer une autre grille de dimension $N_{x1} \ll N_x$ et $N_{y1} \ll N_y$.

Pour l'étude des filtres, on fait varier les valeurs de N_{x1} et N_{y1} de la fonction de distribution filtrée.

Sur la figure (IV.1 a,b) où on a regroupé différentes courbes d'entropie pour une condition initiale représentant un trou gaussien dans l'espace des phases, (a) se réfère à $\tilde{H}_1(t)$ et (b) à $\tilde{H}_2(t)$. En traits pleins la simulation de référence et les entropies obtenues par filtrage de plus en plus sélectif à partir de la simulation de référence.

On a également superposé les points obtenus par les simulations réalisées directement avec une grille plus grossière, correspondant approximativement à la grille définie par les filtres. On remarque que la courbe d'entropie (filtrée) coïncide assez bien avec la courbe d'entropie (non filtrée). Le point remarquable est que l'on retrouve bien la même valeur asymptotique.

Sur la figure (IV.2 a,b) on a tracé les courbes d'entropie dans le cas d'une onde de grande amplitude. En traits pleins la simulation de référence et les entropies calculées avec une fonction de distribution non filtrée. On a aussi superposé les points obtenus pour les entropies calculées avec une fonction de distribution filtrée ; dans ce cas là aussi les deux entropies correspondant à la même grille coïncident assez bien.

Sur la figure (IV.3 a,b) nous avons tracé les entropies filtrées $\tilde{H}_1(t)$ et $\tilde{H}_2(t)$ et les entropies non filtrées $H_1(t)$ et $H_2(t)$ dans le cas d'une condition initiale représentant un équilibre BGK. Là aussi les courbes d'entropie coïncident assez bien y compris pour l'état asymptotique.

Sur la figure (IV.4 a,b) où on a tracé, dans le cas d'un équilibre BGK, les entropies filtrées et non filtrées avec une grille de 128×128 points, on constate cependant qu'il y a un décalage entre les limites asymptotiques ; les valeurs maximales d'entropie sont différentes. Dans ce cas là un filtrage de la simulation de référence avec 128 points en v est trop fort, on a coupé une partie de l'information qui est contenue dans le "corps" de la fonction de distribution (partie centrale autour de $l=0$), on a détruit de l'information utile.

Sur la figure (IV.5 a) on a représenté, par une méthode de niveaux de gris, la fonction de distribution dans le cas d'un équilibre BGK perturbé, avec une grille de $N_x=128$ et $N_v=128$ et pour $t=50 \text{ wp}^{-1}$. La figure (IV.5 b) représente la fonction de distribution de référence filtrée avec un nombre de points de 128×256 , et pour le même temps $t=50 \text{ wp}^{-1}$. On remarque que l'on obtient une courbe dans l'espace des phases semblable à celle de la figure (IV.5 a). On retrouve les mêmes trous (même position) dans l'espace des phases.

Sur la figure (IV.5c) nous avons représenté, avec une méthode de niveaux de gris, la fonction de distribution non filtrée avec un grille de l'espace des phases de 128×128 , et celle filtrée (fig. IV.5 d) ayant un nombre de points de 128×256 , et pour $t=100 \text{ wp}^{-1}$. Les deux courbes sont semblables.

Il faut toutefois mentionner que l'aspect de la fonction filtrée dépend non seulement de la bande passante des filtres, mais aussi de la forme des filtres utilisés (porte, gaussien, sinus cardinal...). Il est donc difficile de retrouver un aspect parfaitement identique dans l'espace des phases. L'important est de retrouver, par exemple, la présence de trous de même dimensions.

Enfin, pour terminer à propos de la simulation de référence, il faut bien se rappeler que celle-ci a été réalisé avec une grille gigantesque (plus de quatre millions de points dans l'espace des phases). Il serait donc impossible de faire une représentation de la fonction de distribution complète. Aussi, sur la figure (IV. 5), nous avons tracé un grossissement d'une partie du contour du trou (voir partie encadrée sur la figure), à partir de la grille de référence

(512*8192). On remarque les microstructures et certains traits non réguliers du contour.

IV.4 CONCLUSION

A partir de ces courbes, on peut tirer quelques conclusions importantes : à partir d'une simulation de référence ($N_x=512$ et $N_y=8192$) on a pu retrouver en filtrant la fonction de distribution et en prenant bien sur un nombre de point N_{x_1} et N_{y_1} suffisant, le même état asymptotique (même valeur maximale de l'entropie) que pour un code sans filtrage ayant une grille de même ordre.

Si l'on diminue trop le nombre d'onde de coupure (l_c) ce qui revient à couper une partie du "pic" central, on perd alors de l'information "utile" et il y aura une augmentation d'entropie. Dans ce cas là on n'aura pas la même entropie asymptotique.

On a vu aussi que dans l'espace des phases, les courbes de niveaux de la fonction de distribution filtrée ou non filtrée sont semblables pour un temps donné, à condition de choisir les bonnes valeurs pour N_{x_1} et N_{y_1} .

On peut donc conclure de ceci deux points fondamentaux :

- Si l'on veut résoudre mathématiquement correctement l'équation de VLASOV, en conservant tous ses invariants (y compris H) il est nécessaire d'utiliser une grille d'espace des phases avec un nombre de points très élevé : dans notre simulation de référence, nous avons considéré quatre millions de points ; en fait, il en faudrait beaucoup plus, et ceci pour un problème physique qui demeure assez modeste. Ceci nous amène alors au deuxième point :

- D'un point de vue physique, la microstructure générée par l'équation de VLASOV, (et qui nécessite un nombre gigantesque de points de grille pour être suivie), n'a en fait aucune influence sur le comportement "coarse grained" asymptotique : que l'on filtre une simulation de référence, ou que l'on utilise un code ayant une définition du même ordre de grandeur que le filtre, cela donne le même résultat, et c'est ce qui compte pour l'étude physique du phénomène considéré. Bien entendu, le "nettoyage" de la microstructure, et le

temps qu'elle mettra pour disparaître, dépendra du nombre de points considérés et du code utilisé.

LEGENDE DES FIGURES DU CHAPITRE IV

- fig. IV.1 : Variation d'entropie en fonction du temps à partir d'un code filtré (traits pleins) et d'un code non filtré (symboles \circ Δ $+$). La courbe d'entropie de la simulation de référence est aussi représentée. Cas du trou gaussien
a) $H_1(t)$
b) $H_2(t)$
- fig. IV.2 : Variation d'entropie en fonction du temps à partir
- d'un code filtré (symbole $+$ \circ)
- d'un code non filtré (trait plein)
Dans le cas d'une onde de grande amplitude
- fig. IV.3 : Variation d'entropie en fonction du temps à partir
- d'un code filtré (symbole Δ \circ $+$)
- d'un code non filtré (trait plein)
dans le cas d'un équilibre BGK perturbé
- fig. IV.4 : Variation d'entropie en fonction du temps à partir
- d'un code filtré (\circ , $+$) avec une grille de $128*128$ points et $256*256$ points
- d'un code non filtré (trait plein) avec une grille de $128*128$ et $256*256$ points
- fig. IV.5 : Représentation de la fonction de distribution, par une méthode de niveaux de gris, dans le cas d'un équilibre BGK perturbé
a) code non filtré ($128*128$) pour $t=50$ wp-1
b) code filtré ($128*256$) pour $t=50$ wp-1
c) code non filtré ($128*128$) pour $t=100$ wp-1
d) code filtré ($128*256$) pour $t=100$ wp-1
- fig. IV.6 : Grossissement d'une partie du contour du trou

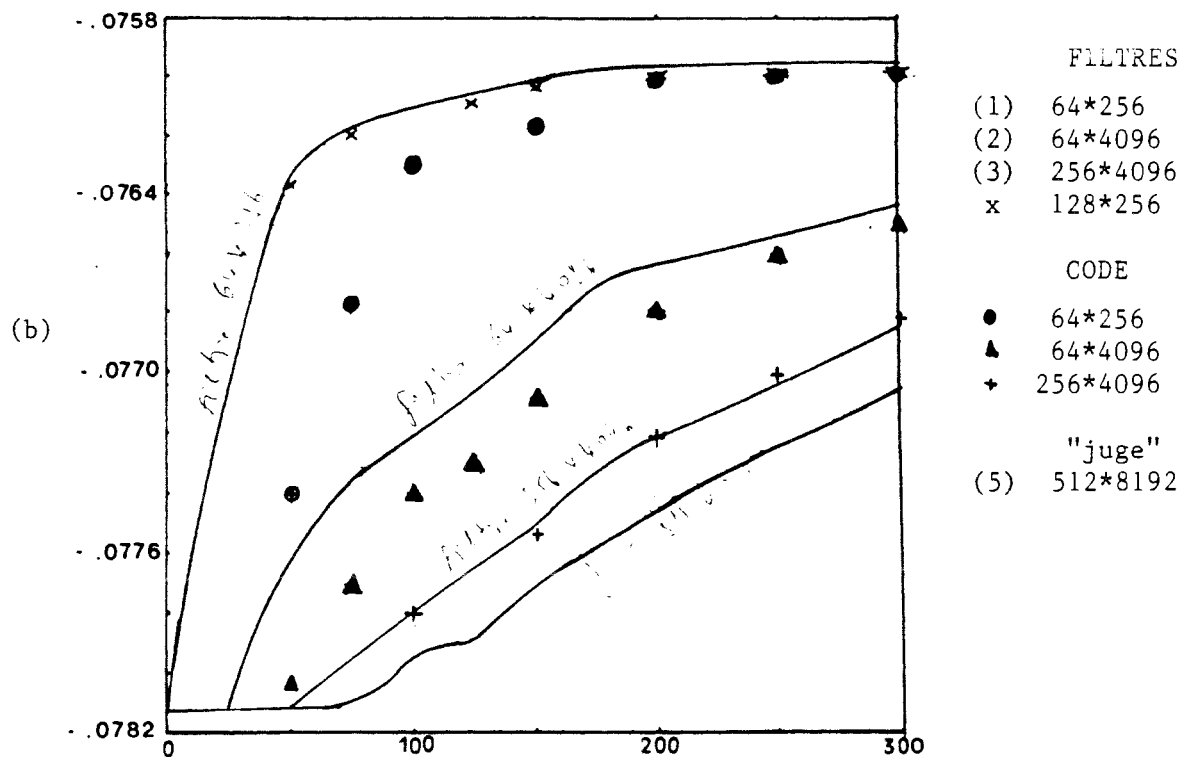
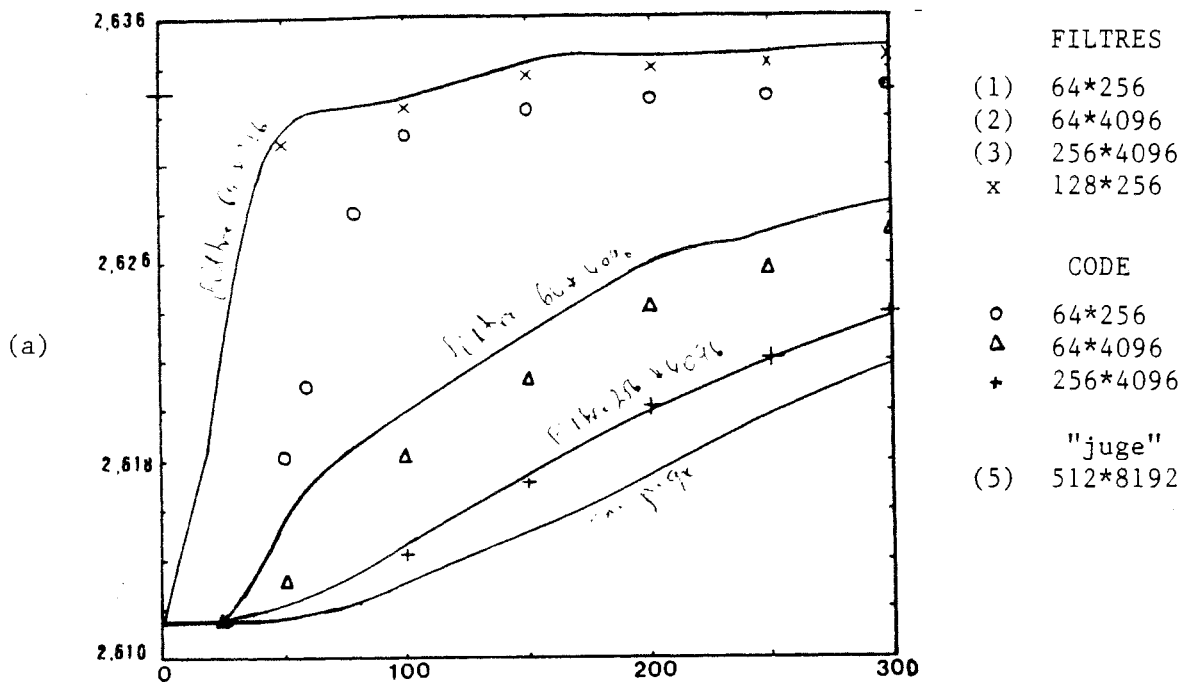


fig. IV.1

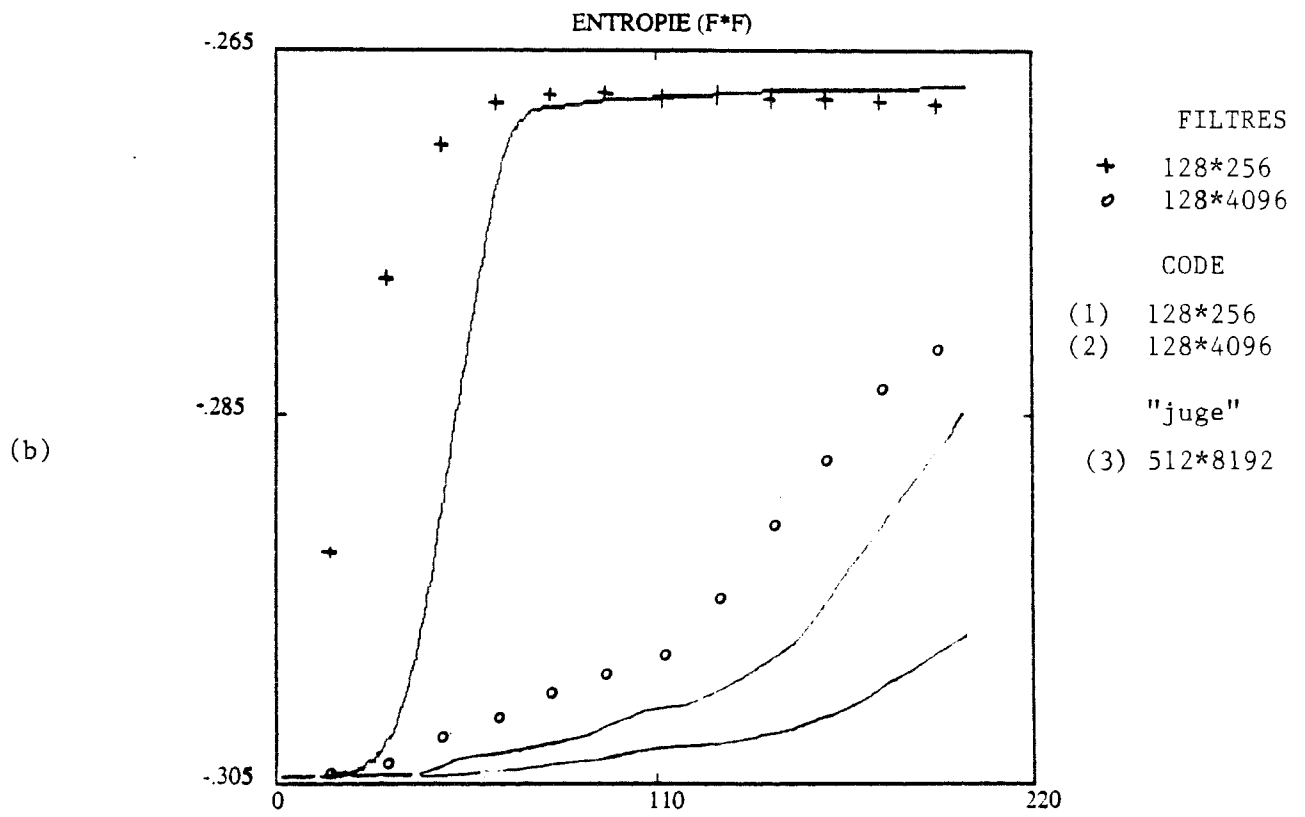
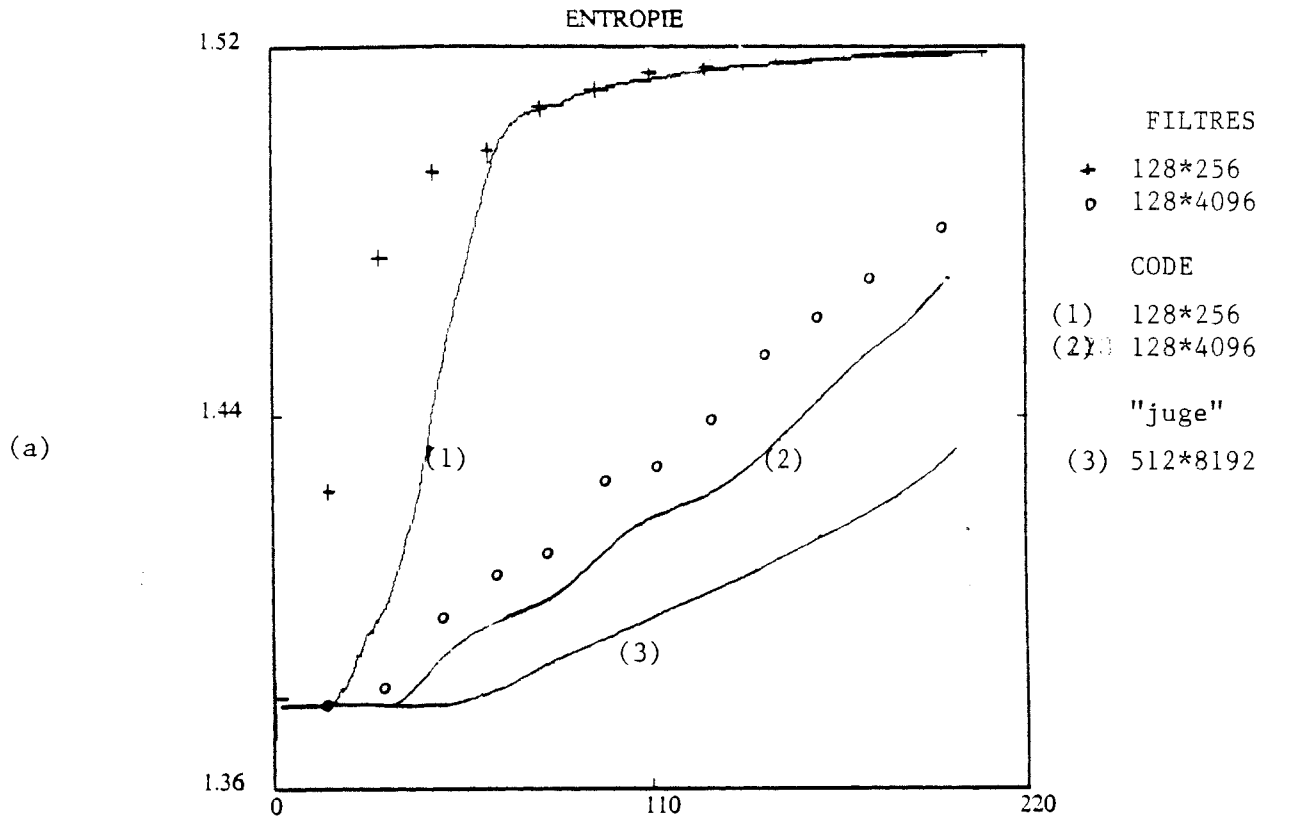


fig. IV.2

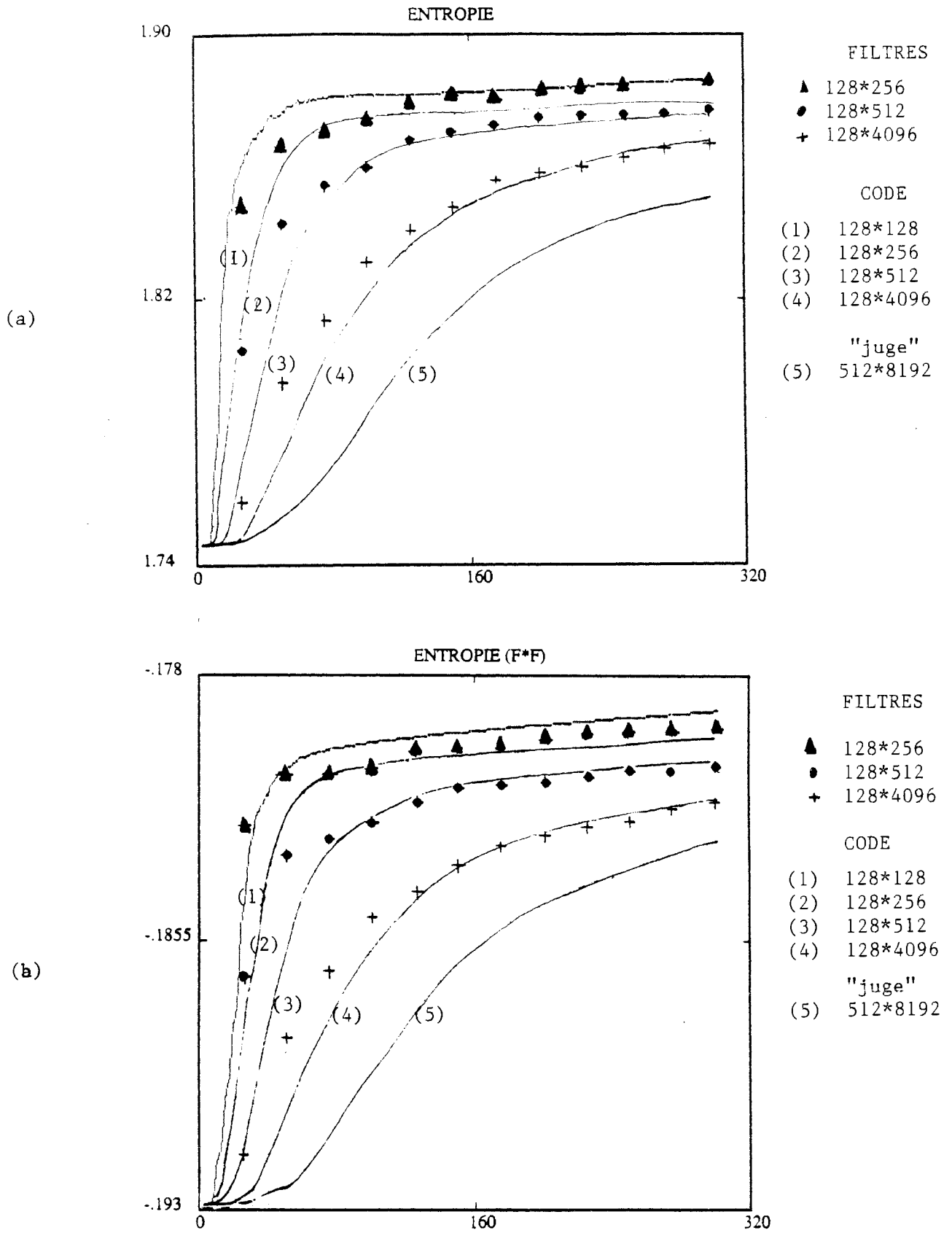


fig. IV.3

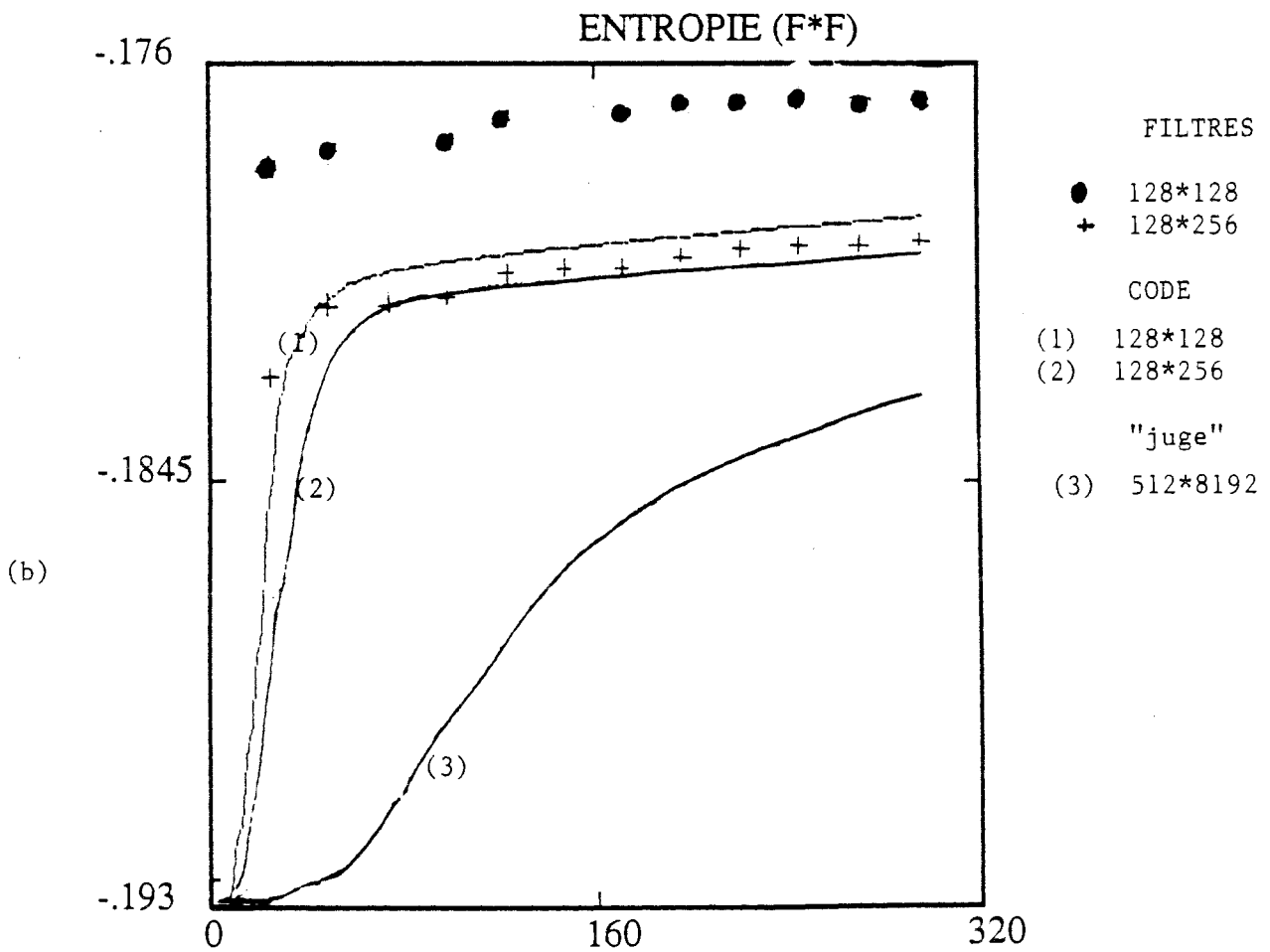
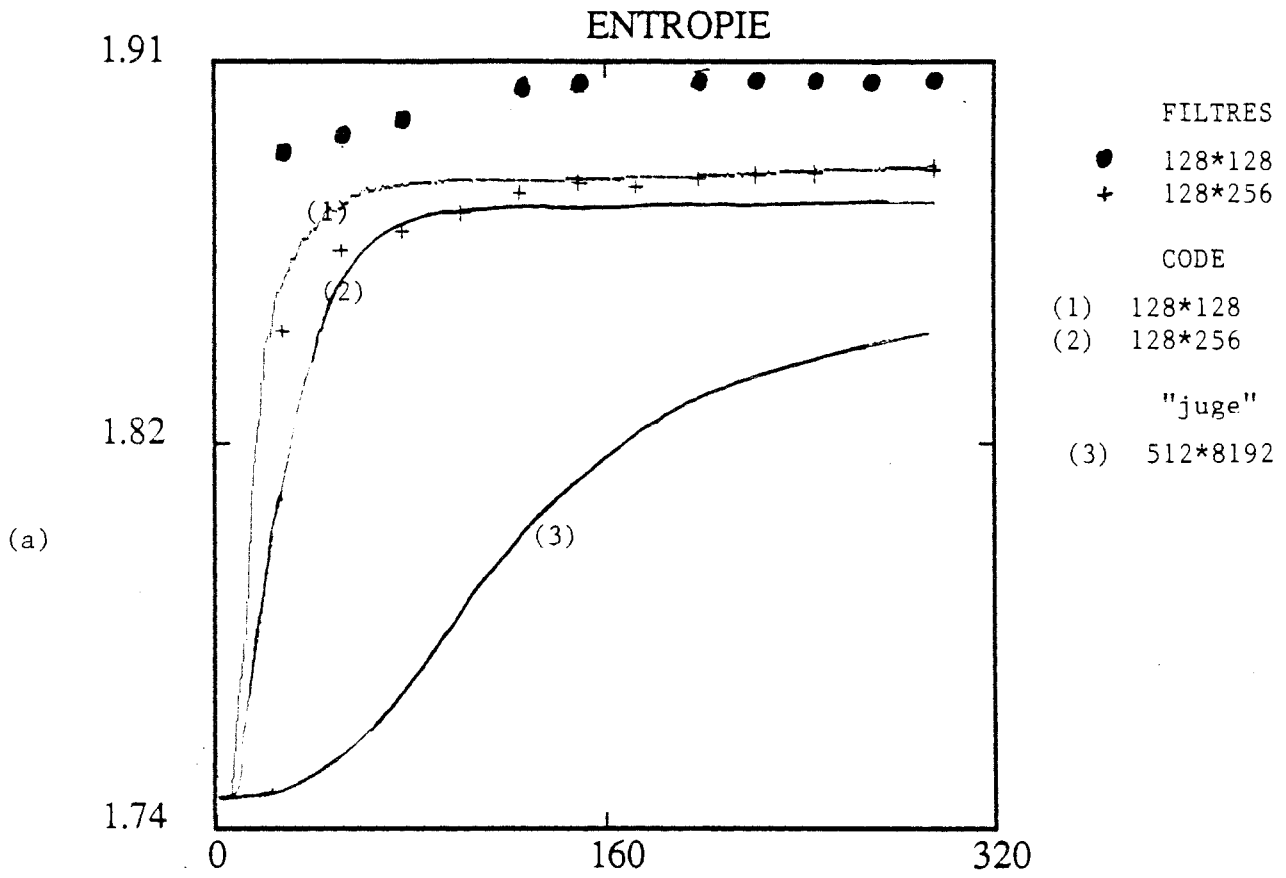


fig. IV.4

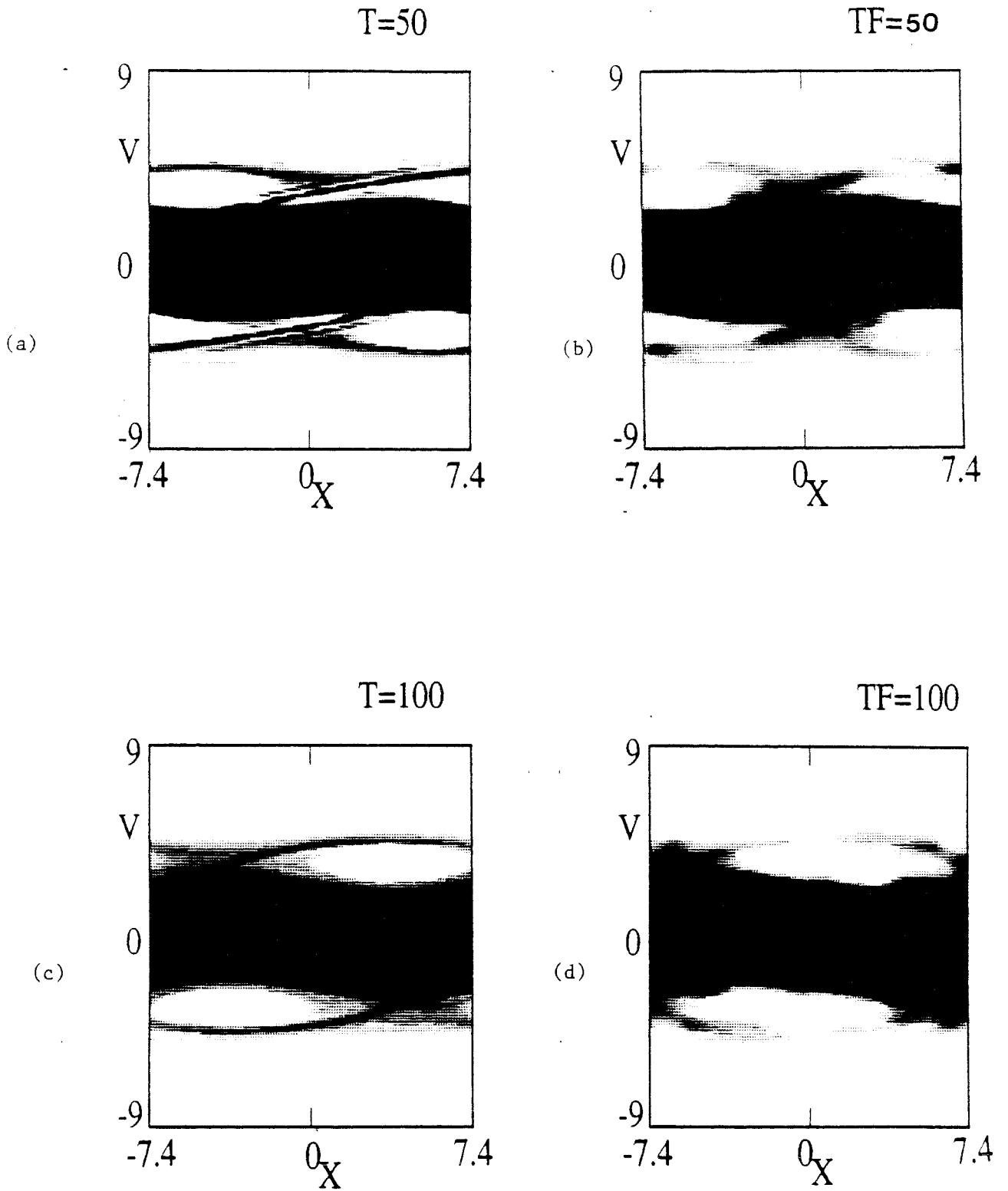


fig. IV.5

fig. IV.6

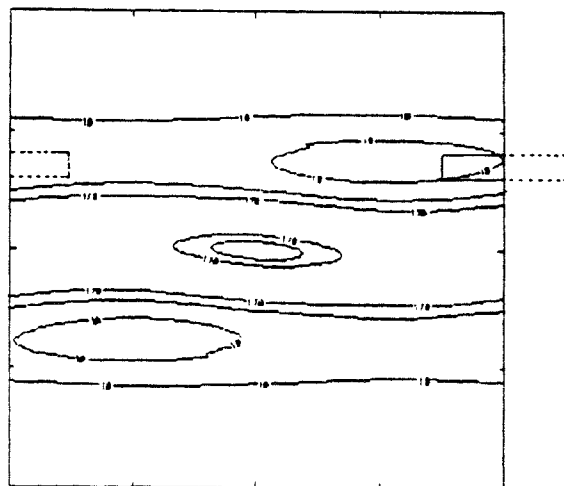
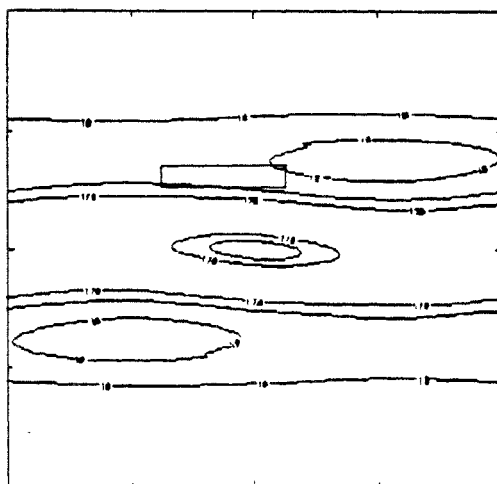


fig. IV.6

V



X



CONCLUSION

Les progrès importants réalisés dans la simulation numérique des plasmas de VLASOV n'auraient pas été aussi important sans le développement des supercalculateurs, qui ont vu leurs mémoires considérablement augmentées, de même que leur vitesse, grâce à la diminution du temps d'exécution d'une opération élémentaire. La fonction de distribution dans l'espace des phases possède la propriété d'osciller au cours du temps avec des longueurs d'onde de plus en plus petites, et fait apparaître une microstructure.

Il apparaît dans l'espace des phases une microstructure, puis un "mélange" et enfin un "nettoyage" de ces microstructures. La disparition de ces microstructures se traduit par une perte d'information qui permet d'expliquer l'augmentation de la fonction H.

Le phénomène d'augmentation de la fonction H corrélativement à la disparition de la microstructure, nous a amené à étudier la fonction de distribution dans l'espace de FOURIER (k,l) , espace dual de l'espace des phases (x,v) . La microstructure dans l'espace des phases (x,v) correspond à la présence de nombre d'onde élevé dans l'espace dual (k,l) .

Dans l'espace de FOURIER, il apparaît deux types de structures ; une structure centrale au voisinage de k,l petits plus d'autres structures. Au cours de l'évolution, la partie centrale semble ne pas s'étaler et garde une largeur constante autour de $l=0$. Par contre les autres structures se déplacent chacune à vitesse constante et partent vers les petites longueurs d'onde (l_{\max}) et puis disparaissent à la frontière de l'espace des l .

La variation d'entropie en fonction du temps ne se fait pas continuellement, mais plutôt par saut. A chaque fois qu'une structure disparaît à (l_{\max}) , un saut d'entropie se produit. L'étude de la fonction H a été faite avec trois codes numériques utilisant des interpolations différentes (splines cubiques, FOURIER, conservation de flux). Les trois codes

ont confirmés l'augmentation de la fonction H, et que sa variation est la même (Δ Hasymptotique) et ceci indépendamment du code numérique utilisé, par contre le temps de montée de la fonction H quand à lui en dépend du code numérique, de la grille utilisée.

Le comportement de $H = \int C(f) dx dv$ en fonction du temps est une bonne mesure du "mélange" dans l'espace des phases et finalement un bon test pour les codes de VLASOV. L'étude de la fonction H nous a permis de préciser et de justifier qu'elle est la meilleure interpolation et de ce fait la validité des codes de VLASOV. Le comportement de H nous permet aussi de savoir à quel moment la microstructure disparaît.

Le fait d'utiliser une grille ultra fine dans l'espace des phases devrait permettre au code numérique de conserver la microstructure et donc toute l'information sur des temps suffisants, et d'avoir un temps de montée de la fonction H suffisamment grand avec une faible variation relative d'entropie. A partir d'une simulation de référence ayant une grille très fine, et après filtrage de la fonction de distribution, le même état asymptotique a été obtenu comparativement à celui trouvé à partir d'un code numérique ayant une grille très grossière.

Du fait de la taille limite des mémoires des ordinateurs, nous ne résolvons pas d'un point de vue formel l'équation de VLASOV, équation à variables continus. La simulation numérique implique nécessairement une discrétisation de l'espace des phases, cette discrétisation provoque le lissage (perte de la structure fine développée par l'équation de VLASOV), il est donc évident que le code numérique ne peut plus suivre correctement la solution mathématique de l'équation de VLASOV.

D'un point de vue physique, la microstructure générée par l'équation de VLASOV, n'a aucune influence sur le comportement asymptotique

Les codes de VLASOV, en fournissant une bonne résolution (très fine) dans l'espace des phases, même dans les régions de faible densité, permettent une observation convenable des phénomènes assez fins. A l'avenir ces codes peuvent être

développés, et améliorés pour l'étude de situations physiques réelles. Actuellement ces codes de VLASOV peuvent être utilisés pour l'étude de l'accélération des particules par interaction laser-plasma, la diffusion Raman....

Les problèmes unidimensionnels donc à deux dimensions de l'espace des phases sont maintenant réalisables dans d'excellentes conditions avec une discrétisation élevée et sur des temps assez longs. L'étude des problèmes à deux dimensions commence à devenir possible, tandis que le problème entier à trois dimensions devra encore attendre d'importantes améliorations dans les machines actuelles, à la fois en taille mémoire et en vitesse d'exécution (machines parallèles, vectorielles). Le CRAY-II avec ces $256 \cdot 10^6$ mots est largement dépassé pour le stockage des valeurs d'une fonction de distribution de 100 points par dimension qui demande 10^{12} mots, tandis que le temps de calcul, de l'ordre de la microseconde par point de grille et par pas de temps, atteint la valeur de 10^6 secondes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Pierre BERTRAND, Thèse (1972) NANCY
2. Scott Tremaine, Michel Henon et D. Lynden Bell ,
Mon. Not. R. astr. Soc. 219,285,(1986)
3. E. MINARDI, Physica 31,585,(1965)
4. G. KNORR, Journal Computational Physic 13,165,(1973)
5. T. BURNS and G. KNORR, Phys. Fluids 15,610,(1974)
6. M. R. FEIX, J. GUASP and J. GUTIERREZ, G.I.F.T (1980)
7. D. Lynden Bell, Mon. Not. R. astr. Soc. ,136,101,(1967)
8. Alfred WEHRL, Reviews of Modern Physics, 50,221,(1978)
9. J. M. DAWSON, Methods in computational physics 9,
(1970)
10. F. HOHL, Ph.D. Thesis, The College of William an Mary
(1967)
11. F. HOHL, Symposium on computer simulation of plasmas and
many body problems, NASA, 5,153,(1967)
12. P. KELLOG, Physics of Fluids, 8,445,(1965)
13. SAKANAKA et al. Phys. Fluids, 14,611, (1971)
14. G. KNORR, Z. Naturforsh, 16a,1304,(1963)
15. J. DENAVIT, W. O. KRUER, Physics of Fluids 14,1782,(1971)
16. T. P. ARMSTRONG, Physics of Fluids, 10,1269,(1967)
17. F. C. GRANT et M. R. FEIX, Physics of Fluids,
10,696 et 1386,(1967)
18. CANOSSA et J. GAZDAG, Phys. Fluids, 17, 2030, (1974)
19. C. G. CHENG, G. KNORR, Journal Computatinal Physics,
22,330,(1976)
20. M. SHOUCRI, R. J. GAGNE, Journal Computatinal Physics,
24,445,(1977)
21. M. SHOUCRI, Méthodes numériques pour la solution
d'équations aux dérivées partielles,
PMMS (ORLEANS)
22. M. M. SHOUCRI, R. M. SHOUCRI,
International Journal for Numerical Methods in
ingeneering, 20,689,(1984)
23. M. M. SHOUCRI, Journal Computational
Physics,49,334,(1984)

24. Pascal MINEAU, These ORLEANS (1990)
25. J. P. BORRIS and D. I. BOOK, in méthodes of comput.
Physics 16, 85, (1976)
26. B. IZRAR, These NANCY (1986)
27. U. FINZI, Plasma Physics 14, 327,(1972)
28. K. V. ROBERTS, H. L. BERK, Physical Review Letter,
19,297,(1967)
29. I. B. BERNSTEIN, J. M. GREEN, M. D. KRUSKAL,
Phys. Rev.,108,546,(1957)
30. J. HOLEC, These NANCY (1974)
31. A. GHIZZO et al., Physics Fluids, 31,72,(1987)
32. J. LEGRAS, Précis d'analyse numérique,
Dunod Edition (1963)
33. A. GHIZZO, These Nancy (1987)
34. H. L. BERK, C. E. NIELSON, K. W. ROBERTS,
Phys. Fluids, 13,980,(1970)
35. SUH, These ORLEANS (1990)
36. T. M. O'NEIL, J. M. WINFREY and J. M. MALUSBERG,
Physics Fluids 14,1204,(1971)
37. P. BERTRAND et al, Non linear phenomena in VLASOV plasma
F. DOVEIL Ed, Edition de Physique ORSAY 1989

UNIVERSITE DE NANCY I

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur BENMEDJADI Abdelkader

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I
EN PHYSIQUE

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 27 JUIN 1991 n° 327

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



RESUME

Notre travail entre dans le cadre d'une étude numérique de la physique des plasmas, et, plus particulièrement la résolution numérique du système VLASOV-POISSON par codes euleriens.

Les codes euleriens offrent une absence de bruit numérique, il y a seulement des erreurs d'arrondis et le lissage dû au maillage élémentaire de l'espace des phases.

La fonction de distribution qui obéit à l'équation de VLASOV, possède la propriété d'osciller au cours du temps avec des longueurs d'onde de plus en plus petites, et fait apparaître des microstructures.

- D'un point de vue numérique, tout schéma est basé sur un échantillonnage de l'espace des phases avec une grille spatiale Δx et une grille dans l'espace des vitesses Δv . Il est évident que lorsque la microstructure devient aussi petite que $\Delta x \Delta v$, le code numérique ne peut plus suivre correctement la solution mathématique de l'équation de VLASOV. Il se produit un lissage (perte de la microstructure) dû à l'échantillonnage.

- D'un point de vue physique, nous avons montré que la perte de la microstructure n'influe pas sur le comportement physique ultérieur du plasma.

MOTS CLES

PLASMA. CODE EULERIEN. SIMULATION NUMERIQUE. TIME SPLITTING.
ENTROPIE. MICROSTRUCTURE. ESPACE DES PHASES.