

Utilisation des techniques de redondances matérielles et analytiques à la détection de pannes de capteurs. Application aux centrales nucléaires

Frédéric Kratz

▶ **To cite this version:**

Frédéric Kratz. Utilisation des techniques de redondances matérielles et analytiques à la détection de pannes de capteurs. Application aux centrales nucléaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1991. Français. NNT : 1991NAN10072 . tel-01747485

HAL Id: tel-01747485
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747485

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université de Nancy I *U.F.R. : S.T.M.I.A.*

THESE



présentée pour l'obtention du

DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE DE NANCY I
Spécialité Automatique

par

Frédéric KRATZ

UTILISATION DES TECHNIQUES DE REDONDANCES MATERIELLES ET ANALYTIQUES A LA DETECTION DE PANNES DE CAPTEURS
APPLICATION AUX CENTRALES NUCLEAIRES

soutenue publiquement le 24 juin 1991 devant la commission d'examen :

RAGOT J.	:	Président
AUBRUN M.	:	Rapporteur
OSTERTAG E.	:	Rapporteur
DESPUJOLS A.	:	Examinateur
LABARRERE M.	:	Examinateur
MAQUIN D.	:	Examinateur
STAROSWIECKI M.	:	Examinateur

A mes Parents,
à ma Famille

REMERCIEMENTS

Cette étude a été menée au Laboratoire d'Automatique et de Recherche Appliquée, une des composantes du Centre de Recherche en Automatique de Nancy, dans le cadre d'un contrat de recherche (novembre 1988 - novembre 1990) avec le département Surveillance, Diagnostic, Maintenance de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France (Chatou).

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Monsieur le professeur J. RAGOT, de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, qui a dirigé l'ensemble de mes travaux, pour sa constante disponibilité, pour l'aide et les nombreux conseils qu'il m'a toujours prodigués. Je le remercie également pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Monsieur le professeur M. AUBRUN, de l'Université Nancy I, directeur du Laboratoire d'Automatique et de Recherche Appliquée, pour ses judicieux conseils.

Monsieur le professeur E. OSTERTAG, de l'Université Louis Pasteur Strasbourg I, directeur du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg pour ses nombreuses interventions au cours de ma formation et pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Monsieur A. DESPUJOLS, ingénieur de recherche à la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, pour ses précieux conseils ainsi que son aide permanente tout au long de cette étude dont il fut le coordinateur.

Monsieur M. LABARRERE, Chef du département Automatique à l'ONERA-CERT de Toulouse pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Monsieur D. MAQUIN, maître de conférences de l'Université Nancy I, pour ses nombreux conseils et son aide au cours de cette étude.

Monsieur le professeur M. STAROSWIECKI, de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois et du Centre d'Automatique de Lille, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens également à remercier le personnel du Service Automatismes Sous Unité Centrales 1 & 2, de la centrale nucléaire de PALUEL, pour leurs disponibilités et leurs interventions lors de la campagne de mesures.

Ma reconnaissance s'adresse également à Monsieur C. LOFFLER pour ses bons conseils sur l'acquisition des mesures et pour l'amitié qu'il me porte.

Mes remerciements vont également à Mademoiselle M. FARAUD pour son aide précieuse lors de la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je remercie tous les membres du Laboratoire d'Automatique et de Recherche Appliquée pour leur sympathie et la bonne ambiance de travail.

SOMMAIRE

SOMMAIRE i

LISTE DES SYMBOLES UTILISES v

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Présentation du processus de validation de données
Définitions et concepts généraux

INTRODUCTION 4

I.1 - LES ERREURS DE MESURES 4

I.1.1 - Caractéristiques d'une chaîne d'acquisition de mesures 4
I.1.2 - Les différents types d'erreurs 4

I.2 - ESTIMATION DES GRANDEURS VRAIES 7

I.3 - UN EXEMPLE A PROPOS DE MESURES D'INTENSITE ELECTRIQUE 11

I.3.1 - Les variances de mesures sont connues 12
I.3.2 - Les variances de mesures sont inconnues 13
I.3.3 - Cas des mesures multiples 15

I.4 - STRUCTURES DES MODELES 15

I.5 - CODIFICATION SOUS FORME DE RESEAU 17

CONCLUSION 18

CHAPITRE II : Redondance analytique statique linéaire

INTRODUCTION 20

II.1 - LA DETECTION DE PANNES 20

II.1.1 - Les pannes 20
II.1.2 - Le problème de la détection de pannes 21

II.2 - DETECTION DE PANNES PAR LA REDONDANCE STATIQUE 22

II.2.1 - Méthode des C_v^{m+1} seuils 22
II.2.2.a - Fonction de détection 23
II.2.2.b - Fonction de localisation 24
II.2.2 - Test sur le carré de l'erreur 26
II.2.3 - Méthode du maximum de vraisemblance 26
II.2.4 - Méthode du minimax 32

II.3 - APPROCHE DE L'ESPACE DE PARITE 35

II.3.1 - Principe de la méthode 35
II.3.2 - Construction de l'espace de parité 35
II.3.3 - Isotropie de l'espace de parité 38
II.3.4 - Caractéristiques de l'espace de parité 39
II.3.5 - Cas d'une redondance d'ordre 3 40

II.4 - METHODE DES ECARTS DE FERMETURE DES EQUATIONS DE BILAN 41

II.4.1 - Présentation de la méthode 41
II.4.2 - Mise en œuvre de la méthode 42
II.4.3 - Signature de panne des capteurs 44

II.5 - TECHNIQUE DES TERMES CORRECTIFS NORMALISES 47

II.5.1 - Analyse des termes correctifs 47
II.5.2 - Procédure de détection de défauts 49
II.5.3 - Analogie entre corrections normalisées et projections du vecteur de parité 50

II.6 - ETUDE DE LA ROBUSTESSE DES METHODES DE DETECTION 51

II.6.1 - Protocole d'essai 51
II.6.2 - Analyse des résultats des simulations 53

II.7 - RECONCILIATION DES DONNEES 58

II.8 - EQUIVALENCE DES METHODES DE DETECTION D'ERREURS 61

II.8.1 - Critère résiduel 61
II.8.2 - Rapport de vraisemblance généralisé (GLR) 63
II.8.3 - Conclusion 65

CONCLUSION 65

CHAPITRE III : Redondance analytique statique non-linéaire

INTRODUCTION 67

III.1 - METHODE DES ECARTS DE FERMETURE DES EQUATIONS DE BILAN 67

III.1.1 - Définition 67
III.1.2 - Résultats numériques 70
III.1.2.a - Réseau n° 7 72
III.1.2.b - Réseau n° 8 76
III.1.2.c - Réseau n° 2 81
III.1.2.d - Conclusion 85

III.1.3 - Application à la détection-localisation 85
III.1.3.a - Présentation de la méthode 85
III.1.3.b - Mise en œuvre de la méthode 87
III.1.3.c - Tests 89
III.1.3.d - Résultats 89
III.1.3.e - Conclusion 92

III.2 - METHODE DES TERMES CORRECTIFS NORMALISES 92

III.2.1 - Présentation de la méthode 92
III.2.2 - Résultats numériques 94
III.2.3 - Conclusion 95

III.3 - METHODE DES TERMES CORRECTIFS NORMALISES PAR LA TECHNIQUE DE LINEARISATION DES CONTRAINTES 95

III.3.1 - Propriétés statistiques des termes correctifs 95
III.3.2 - Interprétation du critère résiduel 97
III.3.3 - Sensibilité du critère 97
III.3.4 - Localisation des voies en défaut 100
III.3.5 - Résultats numériques 100

III.4 - RECONCILIATION DES DONNEES 102

III.4.1 - Introduction d'un modèle de mesure 103
III.4.2 - Validation des données 103
III.4.3 - Propriétés statistiques de l'estimateur 105
III.4.4 - Résultats numériques 107

CONCLUSION 110

CHAPITRE IV : Applications aux centrales nucléaires
Centrale de paluel

INTRODUCTION 112

IV.1 - LES MODELES UTILISES 115

IV.1.1 - Modélisation et identification de la perte de charge 115
IV.1.2 - Niveaux générateur vapeur 119
IV.1.3 - Modèle débit générateur vapeur 120

IV.2 - ANALYSE DES MESURES 121

IV.2.1 - Puissance 100% 122
IV.2.2 - Puissance 30% 124

IV.3 - DETECTION DE PANNES DE CAPTEURS 126

IV.3.1 - Mesures brutes 126
IV.3.2 - Simulation de défauts 131

CONCLUSION 132

CONCLUSION GENERALE 134

ANNEXE A : Tests statistiques

INTRODUCTION 137

A.I - PRINCIPE DES TESTS FISHERIENS 137

A.II - PUISSANCE ET TYPES D'ERREURS 138

ANNEXE B : Optimisation avec contraintes non-linéaires

INTRODUCTION 140

B.I - METHODE 140

B.I.1 - Valeurs initiales 140
B.I.2 - Méthode du gradient 142

B.II - PROPRIETES STATISTIQUES DE L'ESTIMATEUR 143

B.III - APPLICATIONS NUMERIQUES 145

B.III.1 - Réseau n° 1 145
B.III.2 - Réseau n° 2 146
B.III.3 - Réseau n° 3 146

B.IV - CONCLUSION 147

BIBLIOGRAPHIE 148

LISTE DES SYMBOLES UTILISES

X : vecteur des mesures

X^* : vecteur des grandeurs vraies

$\hat{X}$: vecteur des estimées des mesures

ε : vecteur des erreurs de mesures

R : vecteur des écarts des équations de bilan

A^{-1} : matrice inverse de la matrice A

A^T : matrice transposée de la matrice A

Diag(A) : matrice diagonale formée à l'aide de la diagonale de la matrice A

det(A) : déterminant de la matrice A

Tr(A) : trace de la matrice A

n : nombre de nœuds du réseau

v : nombre de voies du réseau

I_v : matrice identité de rang v

E( ) : Espérance mathématique

Var( ) : Variance

f_j : $j^{ième}$ liaison (ou contrainte égalité)

f(X) : vecteur de composantes $f_i(X)$

$\left(\frac{\partial f_j}{\partial \hat{X}^T}\right)$: dérivée de la $j^{ième}$ liaison, par rapport aux composantes de $\hat{X}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right)$: matrice de composantes $\left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}^T}\right)$

Φ : critère quadratique

L : Lagrangien

$\| X \|_P$: norme euclidienne du vecteur X pondérée par la matrice P

$\mathcal{H}_{k,\theta}$: distribution d'Heaviside (= 0 pour $k < \theta$ et à 1 sinon)

sgn(x) : fonction signe (= 1 pour $x > 0$ et à -1 pour $x < 0$)

INTRODUCTION

L'état de fonctionnement d'un processus industriel est vu par les opérateurs de conduite et les automatismes de contrôle-commande à travers les informations délivrées par les capteurs de mesures. La défaillance d'un capteur peut ainsi avoir des conséquences graves sur le fonctionnement de l'installation. En effet, les opérateurs ne peuvent appréhender l'état du système qu'ils contrôlent que par l'intermédiaire d'information en relation plus ou moins directe avec le réel. Ils travaillent ainsi avec une image mentale représentant la réalité et utilisent des modèles de prévision de l'effet des actions correctives potentielles. Toute erreur d'image mentale, due à une mauvaise utilisation de l'information, ou toute erreur de modèle de prévision, peut donc conduire à des actions néfastes (on peut citer en exemple l'accident de Three Miles Island (1979) ; la décision de stopper les pompes d'injection d'eau assurant le refroidissement du "cœur" nucléaire a été prise car l'indicateur du niveau d'eau du pressuriseur était en position "haute". Les opérateurs en ont déduit à partir de cet indicateur et conformément à leur expérience qu'il y avait trop d'eau dans le circuit [TANG 89], alors que ce n'était pas le cas). Il est donc essentiel de surveiller les éléments de mesures pour localiser et identifier les défauts éventuels, avant que leurs effets ne soient perçus par le personnel de conduite.

Le travail présenté s'inscrit dans le cadre de la **MAINTENANCE PREVENTIVE** de l'instrumentation de centrales nucléaire, en vue d'améliorer la crédibilité des informations vitales. Cette étude, effectuée en collaboration avec le département *Surveillance, Diagnostic, Maintenance* de la **D**irection des **E**tudes et **R**echerches d'Electricité de France et à la demande du département **MATERIEL** du **S**ervice de **P**roduction **T**hermique, vise à la surveillance "***hors ligne***" de l'état des capteurs de mesures à partir des enregistrements effectués quotidiennement par le système KIT. On dispose en effet d'un nombre important d'informations (environ 1400 mesures analogiques et 700 mesures "tout ou rien") qui ne sont utilisées actuellement, après avoir été compactées, que pour constituer un historique du fonctionnement de la tranche.

Notre objectif est d'utiliser ces mesures pour élaborer des corrélations qui nous permettront de suivre la vie des capteurs à travers la cohérence de toutes les données disponibles. Les corrélations entre les différentes grandeurs seront utilisées par les redondances tant matérielles (multiplication des capteurs pour une même grandeur physique) qu'analytiques (utilisation de relations structurellement exactes entre différentes grandeurs (bilan matière ou bilan énergie par exemple)).

Le travail présenté dans ce mémoire se divise en quatre parties.

Le chapitre I est consacré à un exposé du processus de validation de données. Après un rappel sur les erreurs de mesure, les hypothèses de travail sont posées et l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance est défini. L'estimateur est illustré à travers un exemple où l'on cherche les valeurs vraies de courant électrique. Ensuite, la structure des modèles concernés et la représentation, sous forme de graphe orienté, d'un système sont exposées.

Dans le deuxième chapitre, nous détaillons le cas des modèles linéaires pour des régimes de fonctionnement statique. Pour des systèmes globalement redondants, nous présentons différentes méthodes de détection-localisation de pannes de capteurs. Après une présentation de diverses méthodes, nous avons effectué une étude comparative entre les méthodes. Nous terminons par la démonstration de l'équivalence existante entre diverses méthodes.

Les systèmes décrits par un modèle non linéaire font l'objet du chapitre III. Le cas des systèmes globalement redondants est soluble par différentes méthodes en tant qu'extension du cas linéaire. Les méthodes sont comparées sur des exemples particuliers permettant ainsi de mieux cerner les avantages et inconvénients de chacune d'entre-elles. Enfin, nous terminons ce chapitre par une présentation de réconciliation de données.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons la méthode retenue, compte tenu des résultats du chapitre III, à la détection-localisation de pannes de capteurs sur un exemple concret. Cet exemple concerne l'instrumentation d'un générateur de vapeur de centrale nucléaire 1300 MW. Les mesures, utilisées pour cet exemple, ont été effectuées à PALUEL lors des essais **COR400** de la tranche 2, pendant le mois de septembre 1990.

CHAPITRE I

Présentation du processus de validation de données

Définitions et concepts généraux

INTRODUCTION

On appelle "validation des mesures" l'action de générer une information, représentant une grandeur physique, qui sera considérée comme correcte par les traitements ultérieurs (opérateurs, systèmes de sécurité et de contrôle-commande).

La validation de données est extrêmement liée à la détection et à la localisation des défauts (de capteurs ou de processus) par la vérification de la cohérence des mesures entre elles (cohérence de mesures identiques dans le cas de redondance matérielle et cohérence entre mesures différentes dans le cas de redondance analytique).

I.1 - LES ERREURS DE MESURES

Le principe de toute mesure consiste à faire correspondre à une grandeur physique, que l'on désire mesurer, une autre grandeur physique directement accessible à l'élément terminal de la chaîne ou de l'appareil de mesure.

I.1.1 - CARACTERISTIQUES D'UNE CHAINE D'ACQUISITION DE MESURES [ZWIN 83]

Afin de se rendre compte des différentes erreurs qui peuvent affecter une information provenant d'une chaîne d'acquisition de mesures, nous avons représenté (figure I.1) la structure matérielle d'une chaîne d'instrumentation. L'élaboration d'une grandeur physique exploitable issue d'un capteur nécessite l'insertion de dispositifs ayant pour rôle de protéger cette grandeur physique des influences des perturbations et de l'environnement : (amplificateurs, filtre, ...). La description linéaire choisie permet de mettre en évidence la transmission des différentes erreurs entre les organes de la chaîne. L'introduction de différents éléments dans la chaîne diminue, en effet, la fiabilité de l'ensemble.

I.1.2 - LES DIFFERENTS TYPES D'ERREURS [ASCH 82]

C'est la valeur vraie du mesurande qui détermine l'excitation du capteur, mais l'expérimentateur n'a accès qu'à la réponse globale de la chaîne de mesure : cette réponse, exprimée en unités du mesurande, est la valeur mesurée. L'écart entre valeur mesurée et valeur vraie est l'erreur de mesure : celle-ci est due en particulier aux imperfections de la chaîne de mesure qui dégradent l'information du signal au cours de son traitement. L'erreur de mesure ne peut être qu'estimée : la valeur vraie du mesurande ne peut donc être connue. Trois grandes classes d'erreurs peuvent être distinguées [CECC 85] (voir figure I.2) :

- les erreurs aléatoires intrinsèques :

liées aux qualités de l'appareillage mis en oeuvre, l'apparition de ces erreurs comme leur amplitude et leur signe sont considérés comme aléatoires. Elles sont définies par les limites physiques du système de mesure. Par exemple, pour un convertisseur analogique-numérique, l'opération de quantification attribue une valeur unique à l'ensemble des valeurs analogiques comprises dans une plage correspondant à un bit de poids le plus faible (erreur de quantification). Dans cette classe, on retrouve les perturbations liées à des signaux parasites (bruit de fond produit par l'agitation thermique des porteurs de charge dans les composants électroniques) ou à des conditions extérieures (degré d'hygrométrie de l'air ambiant lors d'une mesure d'humidité d'un produit). Les causes de ce type d'erreurs sont généralement bien

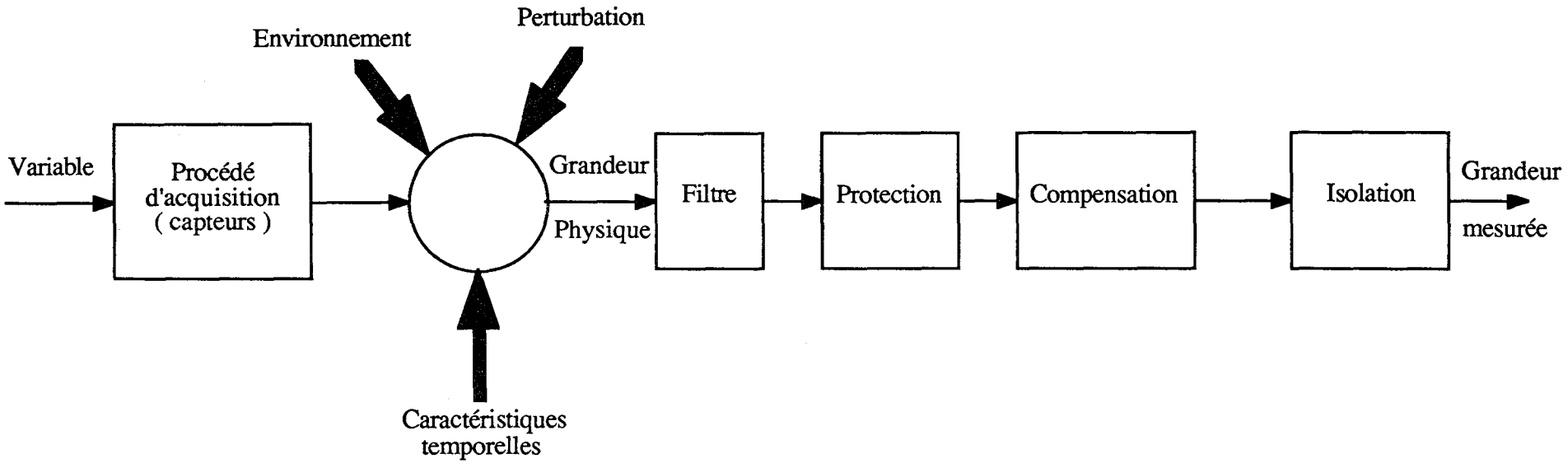


Fig. I.1 : Chaîne d'instrumentation.

FILTRE : Opération consistant à rehausser ou supprimer certaines fréquences du signal.

COMPENSATION : Permet de réduire le décalage initial (ou erreur de zéro) en fonction des grandeurs d'influence (température).

ISOLATION : Amplificateur qui isole électriquement les différentes entrées et sorties.

PROTECTION : En fonction de l'environnement du capteur, contre les agressions du milieu extérieur, nous pouvons citer :

- la protection contre la corrosion,
- la protection contre la poussière, l'étanchéité, les chocs,
- la protection contre les atmosphères explosibles ....

connues par les opérateurs, leur amplitude est faible et peut être bornée par étalonnage de la chaîne de mesure.

- les erreurs systématiques :

sont caractérisées par un écart entre la moyenne arithmétique de la distribution (des mesures) et la valeur vraie de la grandeur. Les erreurs systématiques ont généralement pour cause une connaissance erronée ou incomplète de l'installation de mesure ou sa mauvaise utilisation. Elles peuvent se traduire sous forme d'une dérive progressive ou d'une panne franche.

- les erreurs accidentelles :

exceptionnelles, elles sont de forte amplitude. Elles se distinguent des erreurs systématiques par leur aspect temporaire. Elles sont liées à une défaillance matérielle ou humaine momentanée.

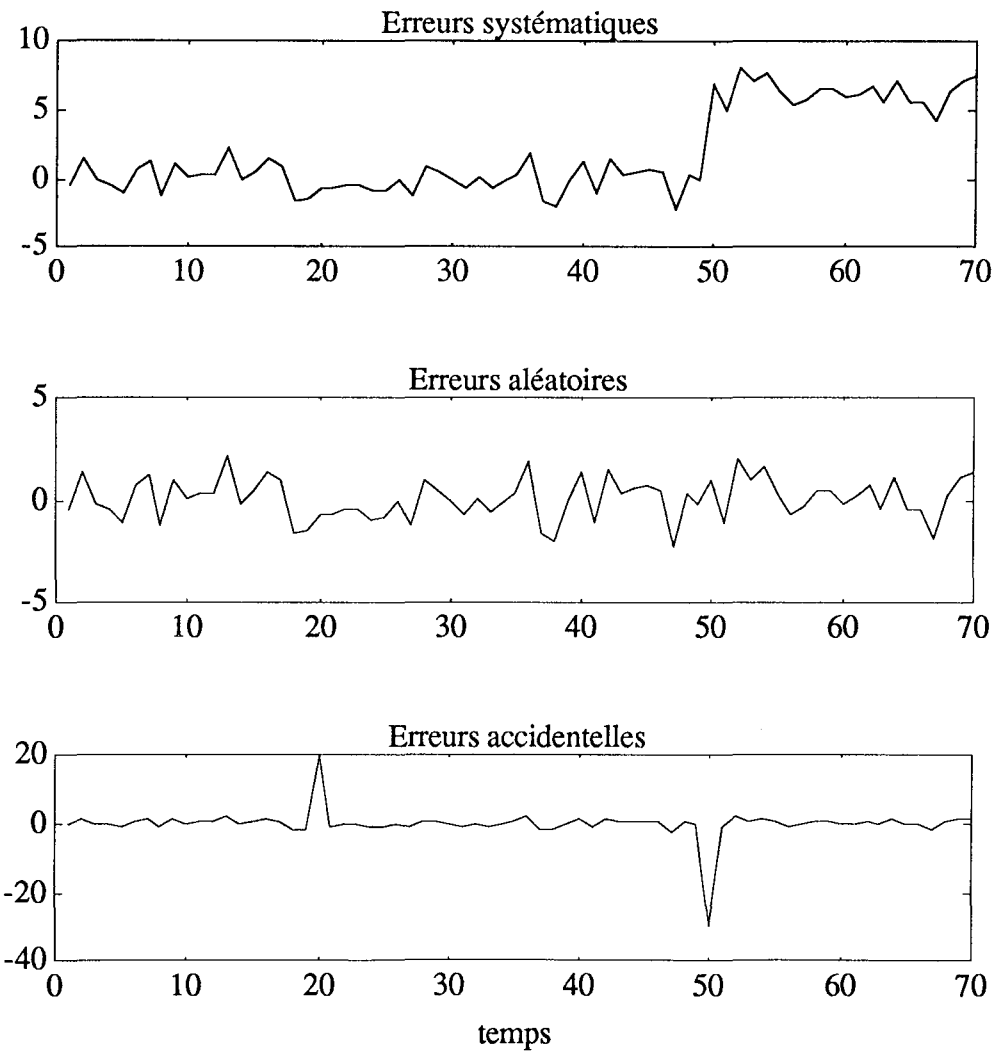


Fig. I.2 : Représentations des diverses erreurs.

Dans la suite de cet exposé, les erreurs accidentelles et systématiques seront confondues et considérées comme des défauts de mesure. Seules les erreurs aléatoires intrinsèques seront prise en compte comme erreurs de mesure.

Le vecteur des mesures X peut donc s'écrire en fonction du vecteur des grandeurs vraies X* et de celui des erreurs de mesure ε :

$$X = X^* + \varepsilon \qquad (I.1)$$

X, X* et ε sont des vecteurs de dimension m égale au nombre de grandeurs mesurées à un instant donné. Dans un cas plus général, X est une fonction de X* non nécessairement bijective. Cet aspect apparemment plus complexe doit être traité pal la notion d'observabilité [MAQU 87], permettant ainsi une extraction de l'information utile pour l'estimation des grandeurs vraies.

En instrumentation, on considère généralement que la loi de distribution des erreurs de mesure issues d'un capteur en fonctionnement correct est une loi normale. Cette affirmation repose sur le théorème de la limite centrale (Lindeberg - Levy, 1922) [LEBA 82] dont le remarquable intérêt pour le praticien réside dans la transcription suivante : si un phénomène aléatoire est le résultat de l'addition de multiples causes aléatoires, indépendantes et du même ordre de grandeur, il faut s'attendre à voir apparaître une distribution de Laplace-Gauss (ces circonstances, considérées longtemps comme la loi commune de la plupart des phénomènes observables, ont déterminé le qualificatif de "loi normale". "Tout le monde, disait Lippman, croît à la validité de la loi de Gauss : les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème mathématique et les mathématiciens un résultat expérimental" [DUPE 83]).

Il ne faut cependant pas utiliser cette considération sans réserve : par exemple, la mesure de l'angle de déviation minimal d'un rayon lumineux par un prisme ne paraît pas suivre une loi symétrique.

Dans la suite, seule la loi normale nous intéressera. C'est une loi continue définie dans l'intervalle]- ∞, + ∞[par une densité de probabilité pour n observations du vecteur X :

$$\mathcal{F}(\varepsilon/V) = \left(\sqrt{2\,\pi}\right)^{-nm} \prod_{i=1}^{n} (\det(V))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \| \varepsilon_i \|^2_{V^{-1}}\right) \qquad (I.2)$$

sous l'hypothèse (vérifiée dans la pratique) que les erreurs de mesure sont des réalisations d'une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée de matrice de variance-covariance V et qu'elles sont statistiquement indépendantes de l'instant d'observation noté i.

I.2 - ESTIMATION DES GRANDEURS VRAIES

Les procédés sont représentés par des modèles purement mathématiques. Dans le cas général, le modèle d'un procédé s'écrit :

$$f(X^*,\theta^*) = 0 \qquad (I.3)$$

où f est une fonction vectorielle (linéaire ou non),
X* est le vecteur des grandeurs vraies,

et θ^* le vecteur des paramètres exacts du modèle.

De façon générale, les mesures prélevées sur un procédé ne vérifient qu'approximativement les équations du modèle. Ces écarts peuvent se justifier par une

structure imparfaite du modèle, des paramètres du modèle inexacts, mais, surtout par le fait que les mesures effectuées sont entachées d'erreurs.

Dans la suite de l'étude, seules les erreurs de mesure seront prises en considération, les modèles seront supposés exacts.

Au sens du maximum de vraisemblance, les meilleurs estimateurs $\hat{X}$ et $\hat{\theta}$ des grandeurs vraies X* et θ^* sont ceux qui maximisent la densité de probabilité des valeurs observées X, sous la contrainte des équations du modèle :

$$f(\hat{X}, \hat{\theta}) = 0 \qquad \text{(I.4)}$$

Considérons un échantillon de n vecteurs X_i^* pour lesquels, on dispose des mesures :

$$X_i \text{ pour } i = 1, ..., n \qquad \text{(I.5)}$$

La fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ de cet échantillon correspond à la fonction densité de probabilité des vecteurs des erreurs de mesure ε_i dans laquelle les erreurs ε_i sont remplacées par les résidus $X_i - \hat{X}_i$. Elle s'écrit donc :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(\sqrt{2\,\pi})^{nm}} \prod_{i=1}^{n} (\det(V))^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}}) \qquad \text{(I.6)}$$

que l'on peut également écrire :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(\sqrt{2\,\pi})^{nm}} (\det(V))^{-n/2} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}}) \qquad \text{(I.7)}$$

où : $$\| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}} = (X_i - \hat{X}_i)^T V^{-1} (X_i - \hat{X}_i)$$

est l'expression abrégée de la norme euclidienne de $(X_i - \hat{X}_i)$ pondérée par l'inverse de la variance de X_i.

Remarque : Un cas un peu plus général consiste à considérer p_i observations de chaque vecteur X_i^* :

$$X_{ij} = X_i^* + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} j = 1, ..., p_i \\ i = 1, ..., n \end{matrix}$$

La fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(\sqrt{2\,\pi})^{np}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{p_i} (\det(V))^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} \| X_{ij} - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}}) \quad \text{avec } p = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

La recherche de l'extremum de $\mathcal{L}$ se fait de façon analogue ; cette extension est présentée dans [CHAF 90].

Le problème d'estimation des grandeurs vraies se formule par :

$$\text{chercher le maximum de } \mathcal{L} \text{ par rapport aux } \hat{X}_i \text{ et } \hat{\theta} \qquad \text{(I.8)}$$
$$\text{sous la contrainte } f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0 \text{ pour } i = 1, ..., n$$

Comme l'expression (I.7) est un peu complexe, on préfère maximiser son logarithme népérien, qui possède son maximum pour les mêmes valeurs de paramètres puisque le logarithme est une fonction monotone croissante.

Le problème (I.8) est équivalent à chercher le maximum par rapport aux $\hat{X}_i$ et $\hat{\theta}$ de la quantité :

$$\ln(\mathcal{L}) = -\frac{nm}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\det(V)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}} \qquad \text{(I.9)}$$
$$\text{sous la contrainte } f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0 \text{ pour } i = 1, ..., n$$

ou encore en supprimant les termes constants :

$$\text{chercher le minimum par rapport aux } \hat{X}_i \text{ et } \hat{\theta} \text{ de :}$$

$$\Phi = \frac{n}{2}\ln(\det(V)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}} \qquad \text{(I.10)}$$
$$\text{sous la contrainte } f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0 \text{ pour } i = 1, ..., n$$

Le problème (I.10) n'admet pas, en général, de solution analytique. Le mode de résolution dépend de la structure du modèle (équations de contraintes) et des connaissances que l'on peut avoir de la matrice V de variance-covariance des erreurs de mesure. Plusieurs cas sont envisageables selon que la matrice V est connue ou inconnue, et les erreurs de mesure indépendantes ou liées.

Le cas le plus général est celui où la matrice V est inconnue et de structure quelconque. Il suppose donc que l'on ne dispose d'aucune connaissance pratique sur l'amplitude des erreurs de mesure et sur leurs dépendances. La fonction f étant indépendante de la matrice V, la condition de stationnarité par rapport à cette matrice s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = \frac{n}{2} V^{-1} - \frac{1}{2} V^{-1} R V^{-1} = 0 \qquad \text{(I.11)}$$

avec R la matrice des moments des résidus :

$$R = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{X}_i)(X_i - \hat{X}_i)^T \qquad \text{(I.12)}$$

De la condition (I.11), on tire l'expression de V :

$$V = \frac{1}{n} R \qquad \text{(I.13)}$$

On peut réécrire l'expression du critère Φ de la manière suivante :

$$\Phi = \frac{n}{2} \ln(\det(\frac{1}{n}R)) + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(nI_m) \qquad (I.14)$$

D'après [RAGO 80], le problème se réduit alors à :

chercher le minimum par rapport aux $\hat{X}_i$ et $\hat{\theta}$ de :

$$\Phi = \frac{n}{2} \ln(\det(R))$$

sous la contrainte $f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0$ pour i = 1, ..., n (I.15)

Cas particulier :

En supposant les erreurs de mesure indépendantes, la matrice V revêt une forme particulière, elle est diagonale.

Dans ce cas les éléments diagonaux v_{jj} de V deviennent des paramètres inconnus par rapport auxquels la fonction $\mathcal{L}$ doit être maximisée.

D'après (I.13) nous obtenons :

$$v_{jj} = \frac{1}{n} R_{jj} \qquad (I.16)$$

la matrice R est également diagonale dans ce cas. Le problème (I.15) se formule alors :

chercher le minimum par rapport aux $\hat{X}_i$ et $\hat{\theta}$ de :

$$\Phi = \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{m} \ln(R_{jj}) \qquad (I.17)$$

sous la contrainte $f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0$ pour i = 1, ..., n

Si la matrice V est connue, elle peut être élaborée à partir des précisions des capteurs, le déterminant de cette matrice est une constante et le problème initial se formule de la manière suivante :

chercher le minimum par rapport aux $\hat{X}_i$ et $\hat{\theta}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}} \qquad (I.18)$$

sous la contrainte $f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0$ pour i = 1, ..., n

Le problème (I.18) est alors un problème d'optimisation quadratique sous contraintes égalité qui se résout par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Le lagrangien associé au système (I.18), dans le cas d'une seule observation ($i \in [\ 1, n\ ]$), s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}} + \lambda^T f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) \qquad (I.19)$$

où λ est le vecteur des paramètres de Lagrange.

La solution est donnée par la résolution du système formé par les équations de stationnarité du lagrangien L :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{X}_i} = V^{-1} (\hat{X}_i - X_i) + \left[\frac{\partial f(\hat{X}_i, \hat{\theta})}{\partial \hat{X}_i^T} \right]^T \lambda \ = 0 \qquad (I.20a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) \qquad = 0 \qquad (I.20b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\theta}} = \left[\frac{\partial f(\hat{X}_i, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^T} \right]^T \lambda \qquad = 0 \qquad (I.20c)$$

Ce système est généralement non linéaire et de grande dimension ; il admet rarement une solution analytique. Pour le résoudre, il faut utiliser des méthodes approchées (simplification de modèle, changement de variables, découplages des variables, ...) ou des méthodes itératives (linéarisation des équations, calcul hiérarchisé après décomposition du système en sous-systèmes, ...) [MILI 87].

Pour notre étude, l'estimateur précédent sera restreint au cas où la matrice V de variance-covariance des erreurs de mesure est connue. Nous ferons de plus l'hypothèse qu'elle est diagonale. En effet, si à chaque grandeur mesurée correspond un capteur différent, l'hypothèse d'indépendance des erreurs de mesure n'est pas abusive.

I.3 - UN EXEMPLE A PROPOS DE MESURES D'INTENSITE ELECTRIQUE

La figure I.3 représente un circuit électrique sur lequel on mesure les intensités traversant les résistances.

Chaque mesure d'intensité est effectuée avec un ampèremètre distinct. Les mesures relevées sont les suivantes :

$I_1 = 4{,}96$ A
$I_2 = 3{,}02$ A
$I_3 = 1{,}99$ A

La loi des noeuds nous donne une relation simple liant les trois intensités :

$$I_1^* - I_2^* - I_3^* = 0$$

On remarque que les mesures ne vérifient pas cette relation exacte et qu'un écart de bouclage apparaît :

$$r = I_1 - I_2 - I_3 = -0{,}05 \text{ A}$$

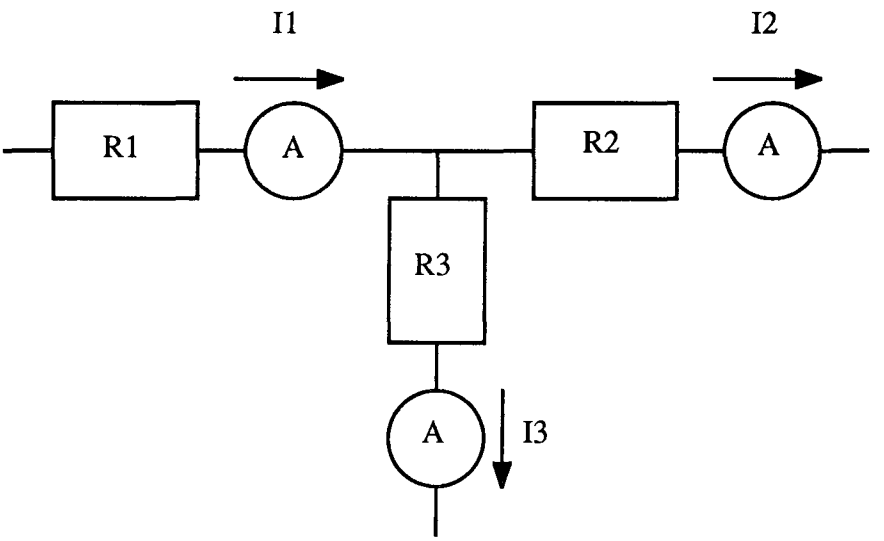


Fig. I.3 : Schéma électrique.

I.3.1 - LES VARIANCES DE MESURES SONT CONNUES

L'écart-type de la mesure de I_1 est 0,2 A, tandis que les deux autres appareils sont identiques et délivrent une mesure avec un écart-type de 0,1 A. Les erreurs de mesure étant supposées indépendantes, la matrice de variance-covariance V est donc diagonale.

$$V = \begin{bmatrix} 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}$$

Les variances des mesures étant connues, on peut alors préciser davantage l'importance du déséquilibre des mesures précédentes vis à vis de la loi des nœuds. On a, avec Var désignant l'opérateur variance :

$$\text{Var}(r) = \text{Var}(I_1) + \text{Var}(I_2) + \text{Var}(I_3)$$
$$\text{Var}(r) = 0{,}2^2 + 0{,}1^2 + 0{,}1^2$$
$$\text{Var}(r) = 0{,}06$$

Le résidu r a donc un écart-type d'environ 0,24 A. Si l'on accepte un intervalle de confiance défini par un écart-type, la valeur - 0,05 de l'écart r n'est donc pas "anormale". Ainsi, on peut conclure que les mesures I_1, I_2, I_3 ne sont pas entachées d'erreurs grossières.

Le problème d'estimation des intensités vraies s'écrit donc :

chercher le minimum par rapport aux $\hat{I}_i$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{(\hat{I}_i - I_i)^2}{v_{ii}} \qquad \text{sous la contrainte : } \hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0$$

Le lagrangien associé au problème précédent est :

$$L = \Phi + \lambda (\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3)$$

où λ est un paramètre de Lagrange.

Ce lagrangien est extrémal pour :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{I}_1} = \frac{\hat{I}_1 - I_1}{0,04} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\hat{I}_2 - I_2}{0,01} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{I}_3} = \frac{\hat{I}_3 - I_3}{0,01} - \lambda = 0$$

et $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0$$

Par substitution de $\hat{I}_i$ en fonction de I_i et λ, cette dernière équation devient :

$$I_1 - I_2 - I_3 - 0,06\lambda = 0$$

donc : $\lambda = - 0,83 \text{ A}^{-1}$

et
$$\begin{cases} \hat{I}_1 = I_1 - 0,04\lambda = 4,99 \text{ A} \\ \hat{I}_2 = I_2 + 0,01\lambda = 3,01 \text{ A} \\ \hat{I}_3 = I_3 + 0,01\lambda = 1,98 \text{ A} \end{cases}$$

On vérifie aisément que :

$$\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0$$

I.3.2 - LES VARIANCES DES MESURES SONT INCONNUES

Les mesures étant supposées indépendantes, la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure est diagonale.

Le problème d'estimation des intensités vraies s'écrit donc :

Chercher le minimum par rapport aux $\hat{I}_i$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \ln (\hat{I}_i - I_i)^2 \qquad \text{sous la contrainte } \hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0$$

et le lagrangien associé à ce problème est :

$$L = \Phi + \lambda (\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3)$$

où λ est un paramètre de Lagrange.

La recherche des points de stationnarité de L nous amène à la résolution des équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{I}_1} = \frac{1}{\hat{I}_1 - I_1} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{I}_2} = \frac{1}{\hat{I}_2 - I_2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{I}_3} = \frac{1}{\hat{I}_3 - I_3} - \lambda = 0$$

et $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0$$

En supposant les $\hat{I}_i$ différents de I_i (i = 1, 2, 3), les trois premières équations deviennent :

$$\lambda (I_1 - \hat{I}_1) = 1$$
$$\lambda (\hat{I}_2 - I_2) = 1$$
$$\lambda (\hat{I}_3 - I_3) = 1$$

qui par sommation donnent :

$$\lambda (I_1 - I_2 - I_3) - \lambda (\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3) = 3$$

et à l'aide de l'équation de contrainte :

$$\lambda (I_1 - I_2 - I_3) = 3$$

donc $$\lambda = \frac{3}{I_1 - I_2 - I_3} = -60 \text{ A}^{-1}$$

et
$$\begin{cases} \hat{I}_1 = I_1 - \frac{1}{\lambda} = 4{,}98 \text{ A} \\ \hat{I}_2 = I_2 + \frac{1}{\lambda} = 3{,}00 \text{ A} \\ \hat{I}_3 = I_3 + \frac{1}{\lambda} = 1{,}97 \text{ A} \end{cases}$$

Les termes diagonaux de la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure sont d'après (I.16) :

$$v_{ii} = (\hat{I}_i - I_i)^2 = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = 2{,}78\ 10^{-4} \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Remarque : les estimations obtenues, suivant que les erreurs de mesure sont connues ou inconnues, sont différentes. Nous aurions obtenu des estimations identiques si, pour le premier cas, nous avions choisi des mesures effectuées avec la même précision pour les trois intensités.

I.3.3 - CAS DES MESURES MULTIPLES

Traitons le même exemple, dans le cas de mesure multiples relatives au même état de fonctionnement du système.

Dans notre cas, le circuit étant considéré en état stationnaire, on a effectué cinq mesures des trois courants.

I_1	I_2	I_3
4,96	3,02	1,99
5,01	3,05	2,04
4,93	2,99	1,90
4,98	3,00	2,02
4,94	3,45	1,92

En utilisant la procédure évoquée à la remarque du paragraphe I.2 [CHAF 90], on trouve :

$\hat{I}_1 = 4{,}966$ A
$\hat{I}_2 = 2{,}999$ A
$\hat{I}_3 = 1{,}966$ A

et $v_{11} = 0{,}03$
$v_{22} = 0{,}19$
$v_{33} = 0{,}06$

I.4 - STRUCTURES DES MODELES

Les modèles considérés dans le cadre de notre étude sont structurellement exacts et découlent des lois physiques régissant le processus. Les modèles que l'on rencontre le plus prennent une forme n-linéaire.

- Modèles linéaires :

De tels modèles sont utilisés pour décrire des procédés de transport de matières.

$$\sum_{i=1}^{v} \alpha_i X_i^* = 0 \qquad (I.21)$$

avec α_i coefficient prenant les valeurs -1, 0, 1 selon le sens de circulation et la présence du ième flux dans l'équation. Ce type de modèle traduit la conservation des flux totaux.

- Modèles bilinéaires :

Ce type de modèle traduit, par exemple, la conservation d'une espèce chimique ou d'une espèce minérale et s'exprime :

$$\sum_{i=1}^{v} \alpha_i X_i^* C_{ki}^* = 0 \qquad (I.22)$$

avec C_{ki}^* concentration du flux i en produit k.

On rencontre également des modèles non linéaires, tel que le modèle de perte de charge d'un flux circulant dans un tuyau.

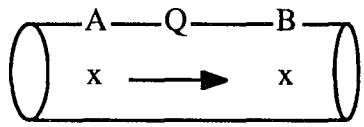


Fig. I.4 : Perte de charge d'un tuyau.

Le modèle décrivant cette perte de charge est :

$$Q = k \sqrt{P_A^2 - P_B^2} \qquad (I.23)$$

avec Q : débit dans le tuyau
k : facteur de perte de charge
P_M : pression au point M

Remarque : Nous venons d'expliciter les formes des modèles que nous allons utiliser. Néanmoins, il convient de préciser que les méthodes présentées restent valables dans le cas dynamique [ZASA 90]. Dans le cas linéaire dynamique, l'équation d'état est :

$$EX_{k+1} = AX_k + BU_k \qquad (I.24)$$

Cette équation peut être mise sous la forme :

$$G\,W = 0 \qquad (I.25)$$

avec $W = [\, X_0\ U_0\ X_1\ U_1\ \ldots\ X_{N-1}\ U_{N-1}\ X_N\,]^T$

et
$$G = \begin{bmatrix} A & B & -E & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & A & B & -E & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & A & B & -E \end{bmatrix}$$

La formulation de l'expression (I.25) est en tout point identique à (I.21), montrant ainsi que les méthodes proposées pour des modèles du type (I.21) restent valables pour les modèles dynamiques.

I.5 - CODIFICATION SOUS FORME DE RESEAU

Dans la suite de notre étude, nous allons nous intéresser surtout à des systèmes décrits par des équations de bilan en flux totaux. De façon générale, un procédé est constitué de sous-ensembles interconnectés, chacun d'entre eux ayant une fonction particulière et pouvant être décomposé en noeuds élémentaires. Le modèle de représentation, donnant une image du procédé étudié, que nous avons choisi est celui de Mah [MAH 76].

Dans cette représentation l'image du procédé est un graphe orienté, appelé graphe du procédé, dans lequel :

- les arcs (ou voies) correspondent aux flux dont les directions sont déterminées par la structure du procédé,
- les noeuds représentent les unités de traitement, de transformation ou les points de jonction de plusieurs arcs.

A chaque noeud, on associe des équations algébriques de bilan, en écrivant les lois de conservation de la matière ou de l'énergie. Nous ferons, de plus, l'hypothèse qu'il n'y a pas d'accumulation au sein des noeuds.

Ce réseau sera représenté par sa matrice d'incidence notée M. Elle est formée des éléments m_{ij} :

$m_{ij} = 0$	la voie j n'est pas liée au noeud i
$m_{ij} = -1$	la voie j "sort" du noeud i
$m_{ij} = 1$	la voie j "entre" dans le noeud i

avec i variant de 1 à n (nombre de noeuds) et j variant de 1 à v (nombre de voies).

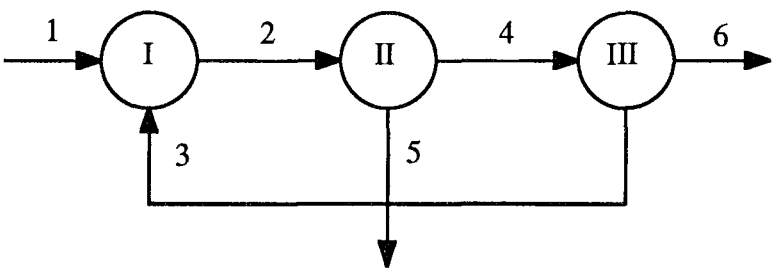


Fig. I.5 : Exemple de réseau.

Par exemple, la matrice d'incidence du réseau de la figure I.5 s'écrira :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de la réalité physique des procédés, les matrices d'incidence qui leur sont associées ont une structure obéissant à certaines propriétés :

- Chaque colonne de la matrice comporte au moins un élément non-nul et au plus deux éléments ; si une colonne contient deux éléments non-nuls, ils sont de signes

opposés. Physiquement, une voie ne peut être l'entrée ou la sortie que d'un seul noeud.

- Chaque ligne de la matrice d'incidence contient au minimum deux éléments non-nuls, de signes opposés. En effet, chaque noeud doit comporter au moins une voie d'"entrée" et une voie de "sortie".

- La matrice d'incidence comporte au moins deux colonnes ne contenant qu'un seul élément non-nul et de signe opposé. Cela traduit l'obligation pour le réseau d'avoir au minimum, une entrée et une sortie sur l'environnement extérieur.

Remarque : La représentation, sous forme de graphe, est générale. Elle s'applique également, entre autre, à la représentation de fonctions (nœud) dépendant explicitement de certaines variables (voies).

CONCLUSION

Après avoir mis en évidence, analysé et classé les différentes causes d'erreurs de mesure, l'hypothèse de normalité de leur distribution conduit à considérer la validation de données comme un problème d'estimation au sens du maximum de vraisemblance correspondant à la recherche d'extremum de fonctions. Sous l'hypothèse que l'on connaisse la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure, le problème de validation se réduit à un problème d'optimisation d'un critère quadratique sous contraintes égalités :

chercher le minimum par rapport aux $\hat{X}_i$ et $\hat{\theta}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \| X_i - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}} \text{ sous la contrainte } f(\hat{X}_i, \hat{\theta}) = 0 \text{ pour } i = 1, ..., n$$

où f est une fonction vectorielle et n représente le nombre d'observations du vecteur de mesure.

Ce problème s'étend bien sûr sans difficulté au cas de mesure multiples où le critère prend alors la forme :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \| X_{ij} - \hat{X}_i \|^2_{V^{-1}}$$

où p_i représente le nombre d'observations du vecteur X_i^*

Dans les chapitres suivants, nous proposons des méthodes de détection de défauts de mesure et de validation de mesure en tenant compte de la structure particulière des modèles issus des lois de conservation de la matière ou de l'énergie.

CHAPITRE II

Redondance analytique statique linéaire

INTRODUCTION

Ce chapitre fait une présentation des méthodes de détection de pannes par l'utilisation mixte de la redondance matérielle et de la redondance analytique. En effet, pour s'assurer une "grande" fiabilité dans l'interprétation des mesures, en vue du contrôle et de la conduite des procédés, il faut s'assurer de la validité des informations issues des chaînes de mesure ou des capteurs, car ces informations peuvent être entachées d'erreurs et ainsi faire dévier de leur plage de fonctionnement optimum les procédés. C'est pour cette raison que, dans de nombreuses installations, les capteurs ont été triplés ou quadruplés (redondance matérielle). Mais cette solution est très pénalisante en ce qui concerne le poids (dans le cas de la conduite du vol des avions par exemple), le coût (suivant le type de capteurs)...

Aussi, avec l'utilisation des calculateurs numériques, s'est développée une autre approche de détection de pannes permettant une surveillance et une détection de pannes plus sophistiquées que dans le cas de la redondance matérielle. C'est le cas où l'on dispose de plusieurs unités physiques qui fournissent idéalement des sorties liées à tout instant par des relations algébriques dépendantes ou non du temps (redondance analytique).

II.1 - LA DETECTION DE PANNES

Avant de poser le problème de la détection d'anomalie, il convient d'approfondir la notion de panne et son effet sur le système [PAU 75] et [RAUL 89].

II.1.1 - LES PANNES

D'une manière générale, une panne est définie comme tout changement imprévu qui réduit les performances du système. Dans cette étude, nous nous restreignions aux pannes de capteurs. Considérons le système décrit par ses équations d'état, l'équation concernant les mesures est :

$$X_k = h(z_k, k) + \varepsilon_k \qquad \text{(II.1)}$$

où X_k représente les mesures à l'instant k, h une fonction vectorielle, z_k l'état du système et ε_k des perturbations traduisant les fluctuations "aléatoires" du système de mesure.

Une panne sur les capteurs se traduit par une modification de l'équation (II.1). Parmi les différents types de pannes classiques, on distingue :

- le biais de capteur qui se traduit par un échelon sur l'équation de mesure représentant une discontinuité sur la mesure :

$$X_k = h(z_k, k) + \varepsilon_k + \alpha\, \mathcal{H}_{k,\theta}$$

avec θ l'instant d'apparition de la panne, α l'amplitude de la discontinuité et $\mathcal{H}_{k,\theta}$ la distribution d'Heaviside (échelon unité apparaissant à l'instant θ).

- la dérive sur un capteur :

$$X_k = h(z_k, k) + \varepsilon_k + \alpha\,(k - \theta)\,\mathcal{H}_{k,\theta}$$

- modification du gain de mesure :

$$X_k = [\, I + \alpha\, D_j\, \mathcal{H}_{k,\theta}\,]\, h(z_k, k) + \varepsilon_k$$

où D_j est une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément d_{jj} égal à 1

- modification du bruit de mesure :

$$X_k = h(z_k, k) + \varepsilon_k^1 + \mathcal{H}_{k,\theta}\,(\varepsilon_k^2 - \varepsilon_k^1)$$

- coupure d'un capteur :

$$X_k = [\, I - D_j\, \mathcal{H}_{k,\theta}\,]\, h(z_k, k) + \varepsilon_k$$

- blocage d'un capteur à une valeur atteinte :

$$X_k = [\, I - D_j\, \mathcal{H}_{k,\theta}\,]\, (h(z_k, k) + \varepsilon_k) + D_j\, \alpha$$

II.1.2 - LE PROBLEME DE LA DETECTION DE PANNES

La détection de panne consiste dans la détection des changements brusques de fonctionnement du système.

La fonction détection de panne peut être divisée en quatre fonctions plus précises.

- La détection proprement dite ou alarme, qui est la détermination de l'instant d'apparition du changement. Elle consiste en une décision logique, le système fonctionne-t-il ou non suivant son régime normal.

- La localisation ou l'isolation de l'élément en panne. Elle permet d'attribuer l'origine de l'anomalie à un organe particulier.

- L'identification de la panne qui permet de définir le genre de la panne survenue : biais, rampe, facteur d'échelle, augmentation du bruit, etc...

- La correction de l'erreur permettant de compenser mathématiquement les erreurs induites.

Le système de détection de panne que nous allons mettre en œuvre n'exécute pas la fonction d'identification. En effet, cette fonction nécessite un traitement chronologique des mesures alors que notre fonction détection de pannes est basée sur une étude mono-campagne des mesures.

Bien évidemment, la détection ne peut être envisagée que si on dispose des informations contenant les défauts à mettre en évidence. Les aspects de la génération des "**résidus**" n'est pas abordée ici ; ces derniers sont directement issus des équations de bilan ou des termes correctifs après estimation. Pour une étude systématique du problème de génération, on peut consulter Massoumia [MASS 89], Patton [PATT 89], Brunet [BRUN 90], ...

II.2 - DETECTION DE PANNES PAR LA REDONDANCE STATIQUE

Des systèmes sont statistiquement redondants s'il existe à un instant, des relations déterministes entre les différentes mesures effectuées. La redondance matérielle apparaît ainsi comme un cas particulier de la redondance analytique statique, les relations entre les sorties sont alors de simples égalités entre les mesures prises deux à deux.

Dans le cas de la redondance statique linéaire, nous pouvons écrire l'équation de mesure (II.1) sous la forme :

$$X = HX^* + \varepsilon \qquad \text{(II.2)}$$

où X est le vecteur de mesure à v composantes,
X* est le vecteur des grandeurs vraies à m composantes avec v > m,
H est la matrice des gains de mesure de dimension v.m et de rang m,
ε est le vecteur du bruit des instruments de mesure, supposé à valeur moyenne nulle et de variance V.

En l'absence de panne, les bruits de mesure sont de moyenne nulle, indépendants et de variance connue V. Lorsqu'il y a une panne sur un capteur, par exemple le $i^{ème}$, la relation :

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} H(i,j)X_j^* + \varepsilon_i \qquad \text{(II.3)}$$

n'est plus vérifiée.

Pour détecter l'apparition d'une panne, différentes méthodes de détection ont été proposées dans le cas de systèmes linéaires [LABA 78].

II.2.1 - METHODE DES C_v^{m+1} SEUILS [EVAN 70]

Le système comportant m états, il suffit de m mesures indépendantes pour le déterminer et il existe donc entre (m+1) mesures une relation de dépendance. Ainsi à partir de v mesures (v > m), on obtient C_v^{m+1} [$= \frac{v!}{(m+1)!(v-m-1)!}$] relations qui sont exactement vérifiées en l'absence de bruits. A partir de ces relations, on définit une matrice test C de dimension $C_v^{m+1}.v$ telle que :

$$CH = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

puis à partir de cette relation on construit le vecteur p = CX. La condition (II.4) rend ce vecteur indépendant des grandeurs vraies :

$$p = CX = C\varepsilon \qquad \text{(II.5)}$$

En l'absence d'erreur de mesure (ε = 0), les équations (II.5) expriment les redondances qui existent entre les mesures indépendamment des grandeurs vraies. En présence d'un biais ou d'une panne de capteurs, le vecteur p = CX va étroitement dépendre de ce défaut. Pour pouvoir détecter et localiser les éventuels défauts, il faut se restreindre dans la construction de la matrice C aux relations indépendantes.

II.2.1.a - Fonction de détection

Le problème de la détection consiste à choisir entre deux hypothèses H_0 et H_1 connaissant une observation bruitée de la manifestation de ces hypothèses (voir Annexe A).

Soit l'hypothèse H_0 : il n'y a pas de défaut ;

les moments statistiques du vecteur p sous cette hypothèse sont :

$$E(p) = C\,E(\varepsilon)$$
$$E(p) = 0$$

$$Var(p) = E(pp^T)$$
$$Var(p) = E(C\varepsilon\varepsilon^T C^T)$$
$$Var(p) = C\,V\,C^T$$

et l'hypothèse H_1 : il y a un défaut, biais sur le bruit de mesure par exemple :

$$p = C\varepsilon + \delta$$

$$E(p) = \delta$$

$$Var(p) = E((p-\delta)(p-\delta)^T)$$
$$Var(p) = E(C\varepsilon\varepsilon^T C^T)$$
$$Var(p) = C\,V\,C^T$$

La décision de retenir l'une ou l'autre des hypothèses sera prise à l'aide du test de Neyman-Pearson.

Pour les besoins du test, nous construisons le rapport de vraisemblance $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{P}(p/H_1)}{\mathcal{P}(p/H_0)} \qquad \text{(II.6)}$$

avec $\mathcal{P}(p/H_1)$: densité de probabilité de p sous l'hypothèse H_1,
et $\mathcal{P}(p/H_0)$: densité de probabilité de p sous l'hypothèse H_0.

Remarque : Pour que l'hypothèse H_1 soit retenue ($\mathcal{R}$ > seuil), à savoir présence du défaut, il est **nécessaire** que la valeur de l'estimation $\hat{\delta}$ de δ maximise ce rapport.

Par hypothèse, on se trouve dans une situation gaussienne où la fonction de probabilité d'une variable x pour n observations est :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det(Var(x))}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x - E(x))^T (Var(x))^{-1} (x - E(x)) \right]$$

ce qui permet d'écrire en posant $K^{-1} = (2\pi)^n \sqrt{\det(Var(p))}$:

$$\mathcal{P}(p/H_0) = K \exp\left[-\frac{1}{2} p^T (CVC^T)^{-1} p \right]$$

$$\mathcal{P}(p/H_1) = K \exp[-\frac{1}{2}(p - \delta)^T (CVC^T)^{-1} (p - \delta)]$$

d'où :

$$\mathcal{R} = \exp[\frac{1}{2} p^T (CVC^T)^{-1} p - \frac{1}{2}(p - \delta)^T (CVC^T)^{-1} (p - \delta)] \qquad (II.7)$$

A la fonction $\mathcal{R}$, on substitue son logarithme népérien qui est plus simple :

$$\ln(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}[p^T (CVC^T)^{-1} p - (p - \delta)^T (CVC^T)^{-1} (p - \delta)] \qquad (II.8)$$

On trouve que $\mathcal{R}$ est maximum, si et seulement si $\hat{\delta} = p$, entraînant :

$$\mathcal{R}_{max} = \frac{1}{2} p^T (CVC^T)^{-1} p \qquad (II.9)$$

Cette valeur maximale du rapport de vraisemblance nous permet de construire une fonction de décision (qui sera comparée à un certain seuil) en vue de réaliser la détection de la panne :

$$F_d = \frac{1}{2} p^T (CVC^T)^{-1} p = \frac{1}{2} \| p \|^2_{(CVC^T)^{-1}} \qquad (II.10)$$

Remarque : La fonction de détection de panne (carré de la norme du vecteur p pondérée par l'inverse de CVC^T) **dépend** de la matrice C qui n'est pas définie de manière unique par la relation (II.4).

II.2.1.b - Fonction de localisation

On cherche à localiser le capteur défaillant, aussi ce test de localisation ne s'effectue que lorsque la détection a été réalisée.

On pose, pour hypothèse, qu'il existe un biais α sur le $j^{ème}$ capteur (hypothèse H_j). L'équation de mesure s'écrit alors :

$$X = HX^* + \varepsilon + \alpha e_j \qquad (II.11)$$

où e_j est un vecteur de dimension v tel que toutes ses composantes sont nulles à l'exception de la $j^{ème}$ égale à 1.

A partir de l'équation de mesure (II.11), on peut réécrire le vecteur p de la manière suivante :

$$p = CX$$
$$p = C\varepsilon + \alpha c_j \qquad (II.12)$$

où c_j est la $j^{ème}$ colonne de C.

Le vecteur p est donc la somme de deux termes, le premier, $C\varepsilon$ apporte une contribution aléatoire de statistique connue si l'on connaît celle du bruit (le plus

généralement considéré comme gaussien), le second, αc_j est une composante déterministe, sa direction est fixée et son amplitude dépend de l'amplitude du biais.

Dans ces conditions, nous aurons :

$$E(p) = \alpha c_j$$

$$Var(p) = E((p - \alpha c_j)(p - \alpha c_j)^T)$$
$$Var(p) = CVC^T$$

La loi de densité de probabilité liée à cette hypothèse est :

$$\mathcal{P}(p/H_j) = K \exp[- \frac{1}{2} (p - \alpha c_j)^T (CVC^T)^{-1} (p - \alpha c_j)]$$

La valeur $\hat{\alpha}$ maximisant cette probabilité est telle que :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\hat{\alpha}} = 0 \qquad \text{(II.13)}$$

nous obtenons pour $\hat{\alpha}$ l'expression suivante :

$$\hat{\alpha} = \frac{c_j^T (CVC^T)^{-1} p}{c_j^T (CVC^T)^{-1} c_j} \qquad \text{(II.14)}$$

En posant :

$$X = c_j^T (CVC^T)^{-1} p$$
$$Y = c_j^T (CVC^T)^{-1} c_j$$

nous obtenons comme expression du logarithme de la fonction $\mathcal{P}$:

$$\ln(\mathcal{P}) = \ln(K) - \frac{1}{2}\left(p - \frac{X}{Y} c_j\right)^T (CVC^T)^{-1} \left(p - \frac{X}{Y} c_j\right)$$

En développant cette expression, nous avons la relation suivante :

$$\ln(\mathcal{P}) = \ln(K) - \frac{1}{2}\left(p^T (CVC^T)^{-1} p - \frac{X^2}{Y}\right) \qquad \text{(II.15)}$$

Les termes $\ln(K)$ et $p^T (CVC^T)^{-1} p$ étant communs à toutes les hypothèses H_j pour j allant de 1 à v, le test ne portera que sur les termes en X^2/Y ; c'est à dire sur :

$$[c_j^T (CVC^T)^{-1} p]^2 / [c_j^T (CVC^T)^{-1} c_j] \qquad \text{(II.16)}$$

que l'on calculera pour j variant de 1 à v et que l'on appelle fonction de localisation.

$$F_{locj} = \frac{[c_j^T (CVC^T)^{-1} p]^2}{[c_j^T (CVC^T)^{-1} c_j]} \qquad \text{(II.17a)}$$

La fonction, dont la valeur sera maximale, détermine le capteur le plus probablement défaillant.

Remarque : On peut préférer, pour des raisons de sensibilité, prendre la racine carrée de la fonction définie en (II.17a) :

$$F_{locj} = \frac{\left[c_j^T (CVC^T)^{-1} p\right]}{\| c_j \|_{(CVC^T)^{-1}}} \qquad \text{(II.17b)}$$

Conclusion : La comparaison de l'"amplitude" de chaque composante du vecteur p (= CX) avec un seuil, dépendant de la matrice C, permet de détecter et de localiser une panne.

II.2.2 - TEST SUR LE CARRE DE L'ERREUR

A partir de l'ensemble des observations et en l'absence de panne la meilleure estimée $\hat{X}$ des grandeurs vraies X* au sens des moindres carrés est, en tenant compte de l'équation de mesure (II.2) :

$$\hat{X} = (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} X \qquad \text{(II.18)}$$

D'où l'on déduit une estimée de l'erreur :

$$\hat{\varepsilon} = X - H\hat{X}$$
$$\hat{\varepsilon} = X - H (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} X$$
$$\hat{\varepsilon} = (I - H (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1}) X \qquad \text{(II.19)}$$

Pour détecter la panne on compare la somme des carrés des erreurs de mesure ($S = \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}$) avec un seuil.

Si le seuil est dépassé il y a panne, pour la localiser on compare le rapport de l'erreur de chaque observation sur la racine carrée de la somme S avec un autre seuil.

II.2.3 - METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE [WILC 72]

La méthode du maximum de vraisemblance consiste, dans son principe, à estimer la valeur de la matrice de covariance de l'erreur de mesure qui maximise la probabilité d'obtenir l'échantillon effectivement obtenu.

On se place dans le cas où l'on dispose de n observations X_i du vecteur X*. Soit le vecteur p_i de composantes indépendantes, fonction linéaire de X_i et indépendant de X* (cf. II.2.1).

$$p_i = C X_i \qquad \text{avec } C H = 0$$
$$p_i = C \varepsilon_i$$

Si V est la matrice de covariance de ε_i, la matrice de covariance de p_i est :

$$P = \mathrm{Var}(p_i) = C V C^T$$

A la place d'estimer directement la valeur de la matrice de covariance de l'erreur de mesure, on passe par une étape supplémentaire qui est le calcul de l'estimée de P qui maximise la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ de la distribution des p_i (I.2) :

$$\mathcal{L} = (2\pi)^{-k/2} \prod_{i=1}^{n} \det(P)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} p_i^T P^{-1} p_i \right) \qquad \text{(II.20)}$$

où k représente la dimension de p ($C_v^{m+1}.1$).

Chercher le maximum de $\mathcal{L}$ est identique à chercher le minimum de :

$$n \ln(\det(P)) + \sum_{i=1}^{n} p_i^T P^{-1} p_i \qquad \text{(II.21)}$$

En l'absence de contrainte, nous trouvons pour $\hat{P}$:

$$\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i p_i^T \qquad \text{(II.22)}$$

La matrice de variance V, qui est supposée diagonale (indépendance des mesures), est obtenue par résolution du système :

$$C V C^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i p_i^T \qquad \text{(II.23)}$$

Si le bruit de mesure calculé est supérieur au bruit de mesure correspondant au fonctionnement correct du capteur le capteur est déclaré en panne.

Remarque : La matrice V ainsi obtenue peut présenter des coefficients négatifs sur la diagonale principale. Pour éviter ce type de résultats, il faut introduire des contraintes compliquant à la fois la résolution et les calculs.

Prenons par exemple un système composé de 4 instruments redondants.

L'équation de mesure d'un tel système est :

$$X = HX^* + \varepsilon$$

où X est le vecteur de mesure à quatre composantes,
X* est le vecteur des grandeurs vraies à une composante,
H est la matrice des gains de mesure de dimension 4.1 et de rang 1,
ε est le vecteur du bruit des instruments de mesure, supposé à valeur moyenne nulle et de variance V.

Pour notre exemple, H est égale à $[\,1\ 1\ 1\ 1\,]^T$. Cherchons une matrice C telle que CH = 0. On obtient la matrice C en écrivant les équations indépendantes de redondance :

$$\begin{cases} X(1) = X(2) \\ X(2) = X(3) \\ X(3) = X(4) \end{cases}$$

Nous trouvons ainsi pour C la matrice suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En posant que la matrice de variance V, des erreurs de mesure, est diagonale :

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \end{bmatrix}$$

nous calculons CVC^T, obtenant ainsi :

$$CVC^T = \begin{bmatrix} V_1+V_2 & -V_2 & 0 \\ -V_2 & V_2+V_3 & -V_3 \\ 0 & -V_3 & V_3+V_4 \end{bmatrix}$$

A partir du calcul de $p_i = C X_i$ et de sa matrice de variance-covariance P

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i p_i^T$$

nous sommes à même de calculer les variances des erreurs de mesure :

$$V_2 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i(1) p_i(2)$$

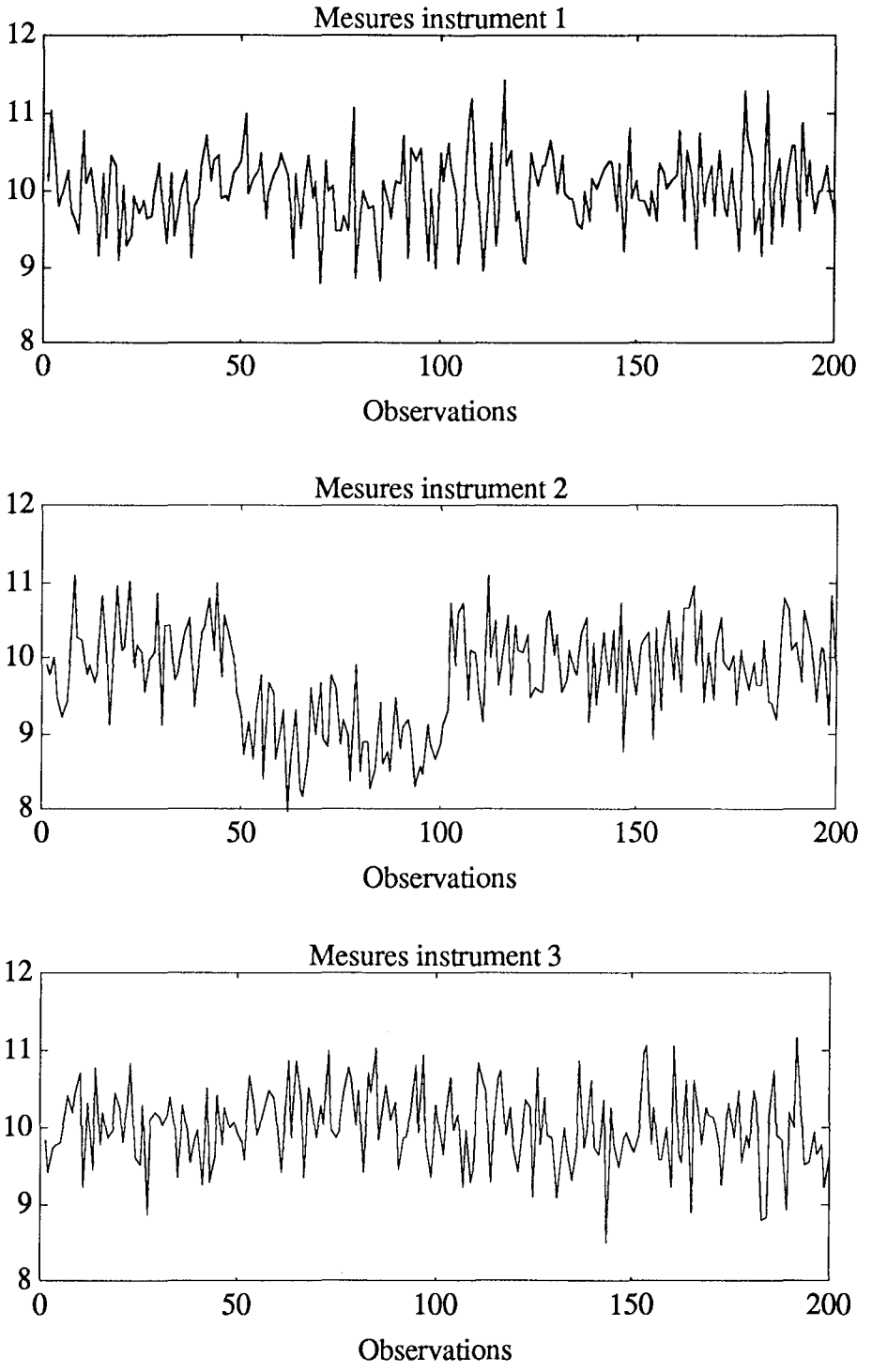
$$V_3 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i(2) p_i(3)$$

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i(1)^2$$

$$V_3 + V_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i(3)^2$$

Il est évident qu'un défaut sur une des mesures va se répercuter sur les composantes du vecteur p, où la mesure en défaut intervient. On retrouvera ce défaut sur l'estimation de la variance correspondant à cette mesure.

Nous présentons les résultats de cette méthode sur l'analyse de deux cents observations du vecteur de mesure X, sur lequel nous avons simulé un défaut sur l'instrument 2 entre les observations cinquante et cent (biais de - 10 % sur l'amplitude).



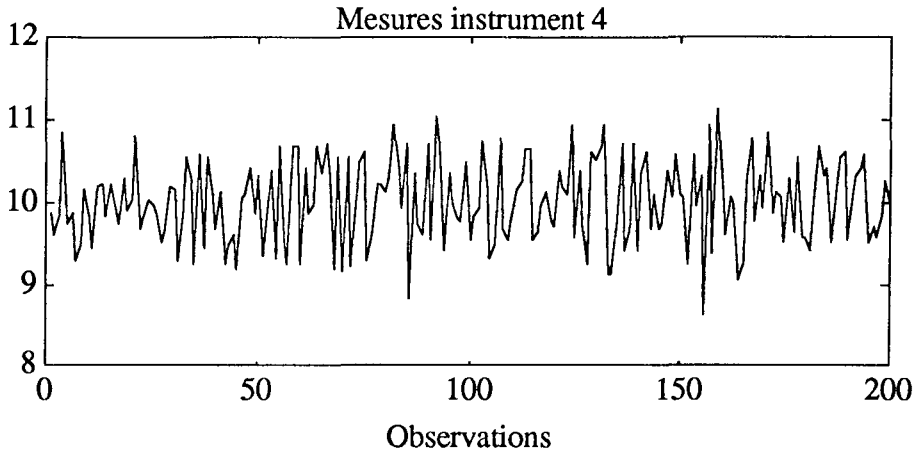
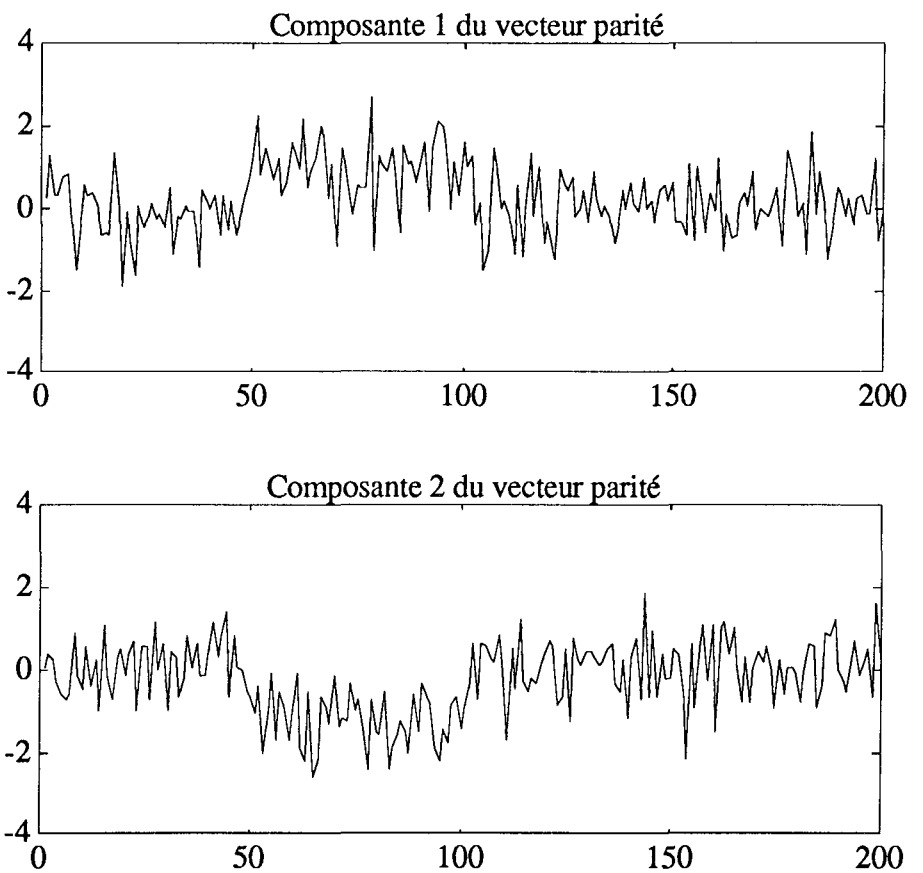


Fig. II.1 : Représentations des mesures des quatre instruments.

L'estimation de la variance va être calculée sur une fenêtre glissante de taille paramétrable L ainsi :

$$P = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} p_i p_i^T$$

Nous montrons l'influence de la taille L sur la détection en présentant les résultats avec L = 10 et L = 20, dans le cas d'un défaut de - 10% de l'amplitude du signal de l'instrument 2.



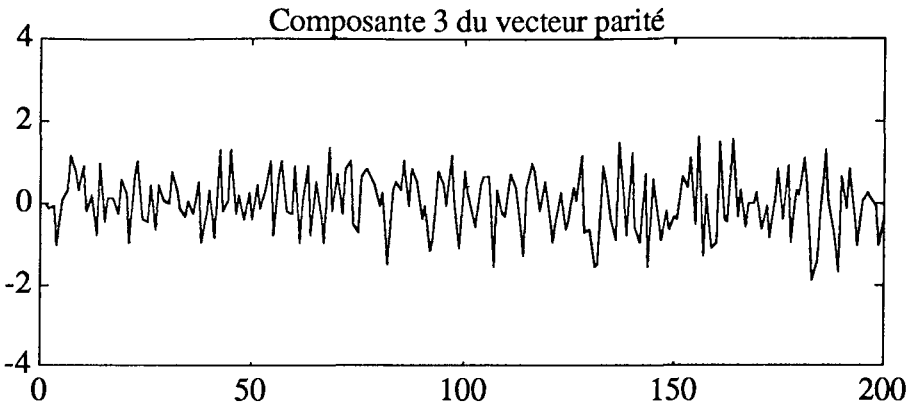


Fig. II.2 : Vecteur de parité avec un défaut de - 10% sur la mesure de l'instrument 2.

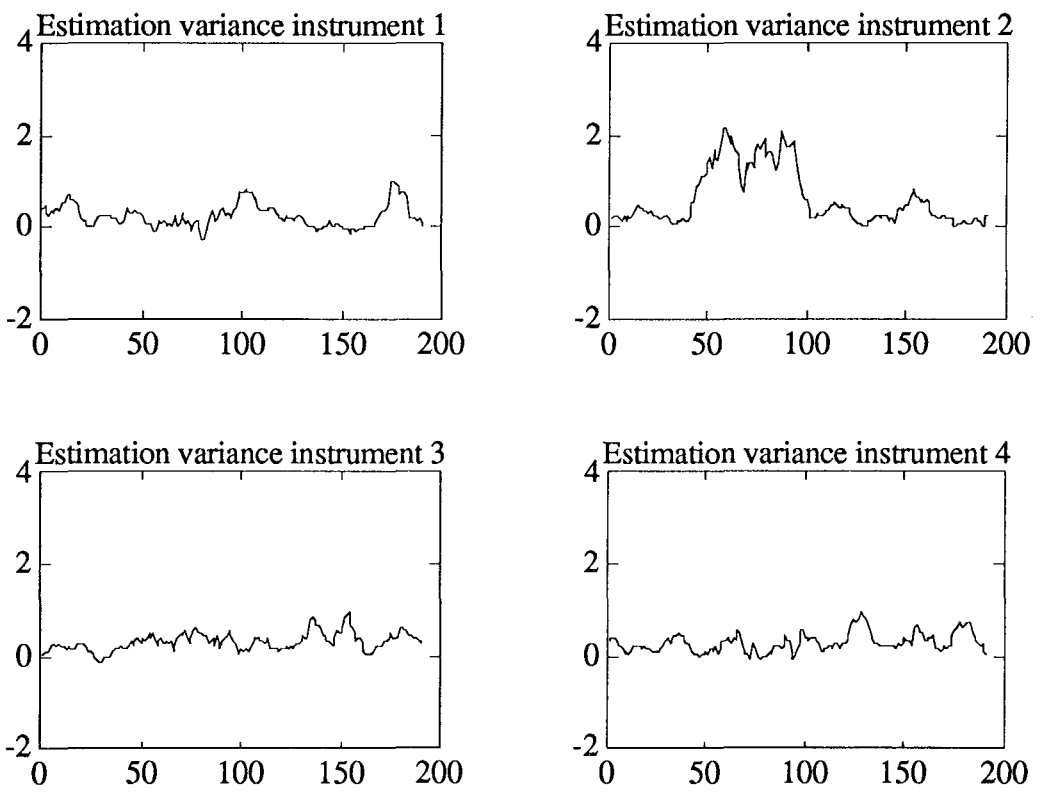


Fig. II.3 : Estimations des variances des erreurs de mesure
sur une fenêtre de longueur 10.

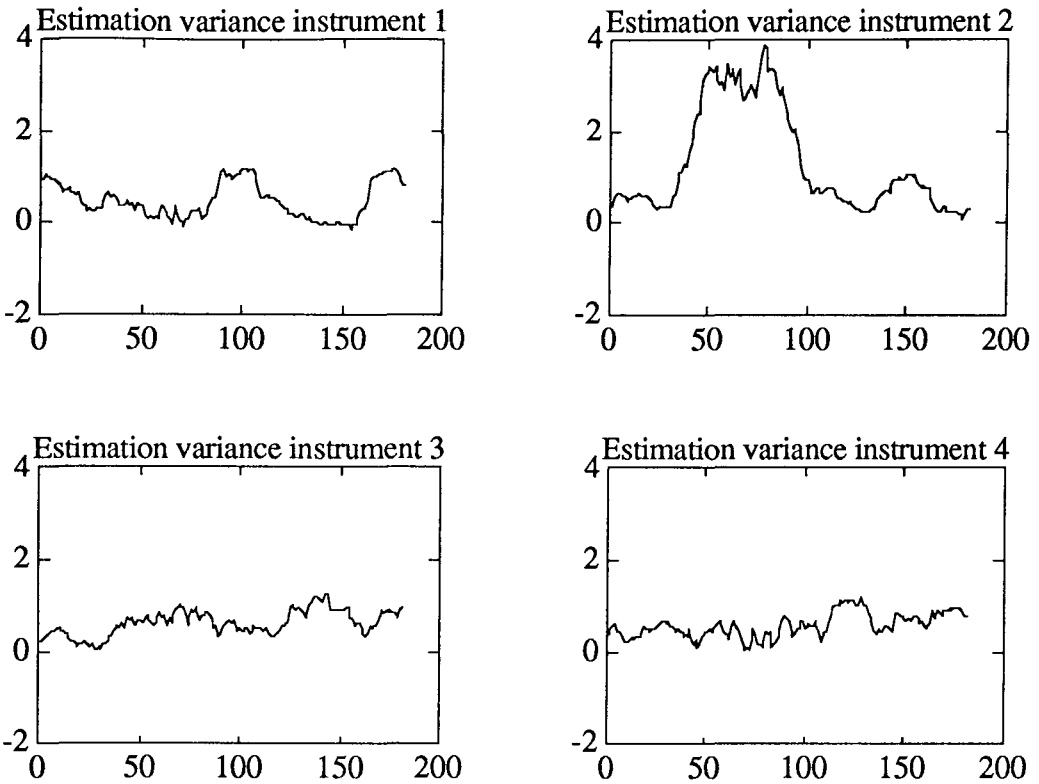


Fig. II.4 : Estimations des variances des erreurs de mesure
sur une fenêtre de longueur 20.

On voit bien sur ces deux exemples, l'influence de la taille de la fenêtre dans l'estimation du changement de variance de l'instrumentation en défaut.

II.2.4 - METHODE DU MINIMAX [POTT 72] [POTT 73]

Dans la méthode du Minimax, on suppose que les bruits de mesure sont inférieurs en module à une valeur M :

$$|\varepsilon_i| < M \qquad \text{(II.24)}$$

et étant donné le vecteur de mesure X de dimension v, on cherche à estimer le vecteur des grandeurs vraies X* de dimension m qui minimise la quantité :

$$J = \underset{1 \leq i \leq v}{\text{maximum}} |X(i) - H_{i.}\, X^*| \qquad \text{(II.25)}$$

où $H_{i.}$ représente la ième ligne de H.

J est l'amplitude de l'erreur maximum lorsque X* a été estimé. Si le minimum J_0 de J est inférieur au bruit de mesure maximum M, on peut expliquer les mesures par des mesures correctes sans avoir besoin d'introduire de panne. Si ce n'est pas le cas, seule une panne permet d'expliquer les mesures. Pour le critère J retenu la résolution du problème est assez simple.

En effet, pour m états, il existe une relation entre m+1 mesures. Considérons par exemple les (m+1) premières mesures. On peut trouver $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ par résolution d'un système linéaire tel que :

$$\lambda_1 H_{1.} + \lambda_2 H_{2.} + ... + \lambda_m H_{m.} + H_{m+1.} = 0 \qquad \text{(II.26)}$$

En posant $\lambda_{m+1} = 1$ et en normalisant les λ :

$$\lambda_i = \lambda_i / (|\lambda_1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_m| + 1) \text{ pour } i = 1, ... m+1 \qquad \text{(II.27)}$$

on a alors :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X(i) = (\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i H_{i.}) X^* + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X(i) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \varepsilon_i \qquad \text{(II.28)}$$

Si les erreurs de mesure sont nulles ($\varepsilon_i = 0$), le membre de droite de l'équation (II.28) est identiquement nul. En réalité, les bruits de mesure varient entre - M et +M (d'après (II.24)) d'où :

$$\left| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X(i) \right| \leq M \qquad \text{(II.29)}$$

S'il n'y a pas de panne sur ces m+1 capteurs l'inégalité précédente est vérifiée et il existe un vecteur X* tel que :

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ . \\ . \\ . \\ X(m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1.} \\ . \\ . \\ . \\ H_{m+1.} \end{pmatrix} X^* + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_{m+1} \end{pmatrix}$$

avec $|\varepsilon_i| < M$ pour $1 \leq i \leq m+1$

S'il n'y a pas de panne sur l'ensemble des capteurs, l'inégalité est vérifiée pour tous les groupements de (m+1) capteurs et on peut trouver un vecteur X* et des bruits de mesure ε_i inférieurs à M qui permettent d'expliquer les mesures sans nécessiter l'introduction d'une panne. Cette valeur de X* est obtenue par l'optimisation Minimax. On peut montrer que pour la forme de J choisie, l'erreur Minimax J_0 est obtenue pour (m+1) capteurs au moins, il y a donc au moins (m+1) instruments de mesure qui auront la même erreur. Ce groupement de (m+1) capteurs est celui tel que la valeur suivante soit maximale :

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X(i) \qquad \text{(II.30)}$$

On a alors :

$$J_0 = |L|$$

et si on suppose que ce groupement est le premier :

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ . \\ . \\ . \\ X(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1.} \\ . \\ . \\ . \\ H_{m.} \end{pmatrix} X^* + \begin{pmatrix} L\ sgn(\lambda_1) \\ . \\ . \\ . \\ L\ sgn(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

ce qui permet de calculer X* par résolution d'un système linéaire.

Ainsi, la détection et l'identification de la panne se fait par le test des différents signaux correspondant aux m-tuples.

Remarque : Cette méthode se généralise pour un système sous contrainte de la manière suivante :

Soit le système décrit par l'équation de mesure :

$$X = HX^* + \varepsilon$$

sous la contrainte $MX^* = 0$

où : X vecteur des voies mesurées de dimension m
X* vecteur des grandeurs vraies de dimension v
ε vecteur des erreurs de mesure de dimension m
H matrice de sélection de dimension m.v
M matrice d'incidence du réseau de dimension n.v

La méthode du Minimax nécessite d'avoir un nombre de mesures supérieur au nombre d'état. Nous allons donc procéder à une élimination des contraintes pour réduire le nombre d'état.

La matrice d'incidence M du réseau est de rang n, on peut donc décomposer M en deux sous matrices dont l'une est régulière et de dimension n.n.

$$M = [\, M_1 \mid M_2 \,]$$

avec M_1 de dimension n.n et de rang n

De la même manière, on peut décomposer le vecteur X* des grandeurs vraies selon les composantes de M :

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix}$$

avec X_1^* de dimension n et X_2^* de dimension v - n

La matrice M_1 étant régulière, nous pouvons exprimer X_1^* en fonction de X_2^*, en effet, l'équation de contrainte s'écrit :

$$M_1X_1^* + M_2X_2^* = 0$$

d'où $$X_1^* = - M_1^{-1}M_2X_2^*$$

L'ensemble du vecteur X* s'exprime alors en fonction de X_2^* :

$$X^* = KX_2^*$$

avec $$K = \begin{bmatrix} - M_1^{-1}M_2 \\ I_{v-n} \end{bmatrix}$$

Ainsi, nous pouvons exprimer le vecteur des mesures X en fonction du vecteur des états X_2^* par :

$$X = HKX_2^* + \varepsilon$$

Nous pouvons directement appliquer la méthode du Minimax sur X et X_2^* pour détecter les défauts sur les mesures (à condition que m > v - n).

Ces méthodes sont à la base de techniques de détection plus récentes et plus performantes que nous allons maintenant présenter.

II.3 - APPROCHE DE L'ESPACE DE PARITE

L'approche de l'espace de parité consiste à exploiter les relations de redondance analytique statique indépendamment du point de fonctionnement.

II.3.1 - PRINCIPE DE LA METHODE

La méthode consiste à transformer un vecteur de mesure en un nouveau vecteur, appelé vecteur de parité, tel que la valeur vraie, inconnue, de la grandeur soit supprimée. De ce fait, le vecteur de parité ne dépend que du bruit de mesure et des défaillances éventuelles des capteurs [ZWIN 83], [HAMA 86].

II.3.2 - CONSTRUCTION DE L'ESPACE DE PARITE

Les v mesures X sont liées aux m grandeurs vraies X* par l'équation de mesure (II.2) :

$$X = H X^* + \varepsilon$$

où H est la matrice des gains de mesure de dimension v.m et de rang m,
ε est le vecteur de bruit de mesure de dimension v.

Les colonnes de la matrice H définissent un sous-espace vectoriel de dimension m dans l'espace de mesure $\mathbb{R}^v$.

Le sous-espace orthogonal à l'espace engendré par H est appelé **espace de parité**. Il est de dimension v - m.

Soient P le vecteur projection de X sur l'espace de parité et W, de dimension (v - m).v, la matrice de projection. On a :

$$P = W X \qquad \text{(II.31)}$$

La matrice W vérifie les conditions suivantes, dites de Potter et Suman (auteurs de cette méthode) [POTT 77] :

$$W H = 0 \qquad \text{(II.32a)}$$

$$W W^T = I_{v-m} \qquad \text{(II.32b)}$$

$$W^T W = I_v - H (H^T H)^{-1} H^T \qquad \text{(II.32c)}$$

La première condition (II.32a) exprime l'orthogonalité des deux sous-espaces permettant ainsi de rendre le vecteur de parité indépendant des valeurs vraies. En effet, d'après (II.31) et (II.2), nous avons :

$$\begin{aligned} P &= W X \\ P &= W (H X^* + \varepsilon) \\ P &= W H X^* + W \varepsilon \\ P &= W \varepsilon \end{aligned} \qquad \text{(II.33)}$$

La deuxième relation (II.32b) exprime une condition de normalité ; les vecteurs définis par les lignes de la matrice W doivent être orthonormés. L'expression (II.32c) consiste à relier l'amplitude du vecteur de parité P aux estimations des erreurs de mesure. En effet, soit E le vecteur des estimations des erreurs de mesure au sens des moindres carrés :

$$\begin{aligned} E &= X - H \hat{X} \\ E &= (I - H (H^T H)^{-1} H^T) X \\ E &= W^T W X \\ E &= W^T P \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E^T E &= P^T W W^T P \\ E^T E &= P^T P \end{aligned} \qquad \text{(II.34)}$$

Les relations (II.32) sont insuffisantes pour déterminer d'une manière unique la matrice W, en effet toute matrice A de la forme :

$$A = G W \text{ avec G telle que } G^T = G^{-1}$$

vérifie les conditions (II.32) :

$$\begin{aligned} A H &= G W H = 0 \\ A A^T &= G W W^T G^T = I_{v-m} \\ A^T A &= W^T G^T G W = W^T W \end{aligned}$$

Aussi les auteurs de cette technique ont imposé à la matrice W deux conditions supplémentaires :

- W est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure),
- W est définie positive.

La matrice W peut alors être calculée à l'aide de la relation (II.32c), en utilisant une factorisation de Choleski [LASC 86].

Cependant, la méthode décrite de cette manière ne s'applique que pour le cas où les erreurs de mesure sont de variances unités, ce qui n'est malheureusement pas le cas général.

Pour étendre cette méthode au cas général, nous devons procéder aux changements suivants.

On pose : $Z = V^{-1/2} X$, Z est un vecteur de mesure dont la variance est unité. Z obéit alors à l'équation de mesure suivante :

$$Z = V^{-1/2} H X^* + V^{-1/2} \varepsilon \qquad \text{(II.35)}$$

Le vecteur de parité associé à Z est :

$$P = W Z$$

Ce vecteur de parité vérifie les conditions de Potter et Suman, qui s'écrivent dans ce cas :

$$W V^{-1/2} H = 0 \qquad \text{(II.36a)}$$

$$W W^T = I_{v-m} \qquad \text{(II.36b)}$$

$$W^T W = I_v - V^{-1/2} H (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1/2} \qquad \text{(II.36c)}$$

La première condition exprime bien l'indépendance du vecteur de parité et de la grandeur vraie. En effet :

$$P = W Z = W V^{-1/2} H X^* + W V^{-1/2} \varepsilon$$

La condition d'orthogonalité (II.36a) implique :

$$P = W V^{-1/2} \varepsilon$$

La deuxième condition exprime une condition de normalité ; les vecteurs définis par les lignes de la matrice W doivent être orthonormés. Cette deuxième condition permet également de rendre la fonction de détection, définie au paragraphe II.2.1 (méthode des seuils), indépendante de la matrice test (rôle joué par la matrice W en se rappelant que Z est de variance unité) [DALY 79].

L'expression (II.36c) relie l'amplitude du vecteur de parité P aux estimations des erreurs de mesure. En effet, soit E le vecteur des estimations, au sens des moindres carrés, des erreurs de mesure normalisées :

$$E = Z - V^{-1/2} H \hat{X}$$
$$E = (I_v - V^{-1/2} H (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1/2}) Z$$

$$E = W^T W Z$$
$$E = W^T P$$

d'où
$$E^T E = P^T W W^T P$$
$$E^T E = P^T P$$

D'après les conditions de Potter et Suman, généralisées, on peut réécrire les fonctions de détection et de localisation de la manière suivante (d'après les résultats du paragraphe II.2.1) :

$$F_d = \frac{1}{2} P^T P \qquad \text{et} \qquad F_{loc\,j} = \frac{(w_j^T P)^2}{(w_j^T w_j)}$$

II.3.3 - ISOTROPIE DE L'ESPACE DE PARITE [BATH 82]

Nous allons montrer que la détection de la défaillance est maximale et identique dans toutes les directions liées aux capteurs.

Posons pour hypothèse qu'un défaut b est présent sur le capteur j. Dans ces conditions :

$$E(P) = b\, w_j$$

et

$$E(F_d) = \frac{1}{2} b^2\, w_j^T\, w_j$$

La fonction de détection est directement liée au produit $w_j^T w_j$ et la détection de la défaillance sera d'autant plus efficace que ce produit sera important.

Evaluons ce produit, en fonction du nombre de capteurs v, en calculant :

$$\sum_{j=1}^{v} w_j^T w_j$$

Nous avons évidemment :

$$w_j^T w_j = \text{trace}(w_j w_j^T)$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^{v} w_j^T w_j = \sum_{j=1}^{v} \text{trace}(w_j w_j^T)$$
$$\sum_{j=1}^{v} w_j^T w_j = \text{trace}\left(\sum_{j=1}^{v} w_j w_j^T\right)$$
$$\sum_{j=1}^{v} w_j^T w_j = \text{trace}(W W^T)$$
$$\sum_{j=1}^{v} w_j^T w_j = v - m$$

Ainsi les produits $w_j^T w_j$, qui sont des scalaires positifs, doivent être maximaux de façon à assurer une meilleure détection possible et respectant la contrainte définie précédemment sur leur somme, soit :

$$\sum_{j=1}^{v} w_j^T w_j = v\text{-}m \text{ (contrainte)}$$

et : $$C = \prod_{j=1}^{v} w_j^T w_j \text{ fonction à maximiser}$$

Ces deux conditions entraînent : $w_j^T w_j = \frac{v - m}{v}$ quel que soit j. Ceci indique bien que la détection sera maximale et identique dans chacune des directions liées aux capteurs.

II.3.4 - CARACTERISTIQUES DE L'ESPACE DE PARITE

Le vecteur de parité est une image du désaccord entre les mesures. En fonctionnement normal, l'amplitude du vecteur de parité est faible (présence de bruit de mesure). Lorsqu'une défaillance apparaît, cette amplitude augmente et le vecteur de parité s'oriente dans une direction bien précise, liée à la mesure en défaut. A chaque mesure correspond, en effet, une direction particulière dans l'espace de parité.

D'après les relations (II.10) et (II.36), le test de détection est relatif à l'amplitude du vecteur de parité.

Comme les composantes du vecteur de parité dépendent linéairement des erreurs de mesure, elles suivent donc aussi une loi normale centrée. De plus, la variable $\chi^2 = P^T P$, somme des carrés de (v - m) variables aléatoires normalement distribuées, suit une loi du Khi2 à (v - m) degrés de liberté.

$$\text{Prob}(\chi^2 \leq \chi^2_{v\text{-}m}) = 1 - \alpha$$

où α définit le niveau de confiance et $\chi^2_{v\text{-}m}$ est lue sur une table de distribution du Khi2.

Pour chaque colonne w_j de la matrice de projection, on calcule la projection du vecteur de parité sur les axes en utilisant la généralisation de la fonction de localisation (II.17) :

$$P_j = \frac{w_j^T P}{\| w_j \|} \qquad \text{(II.37)}$$

Si un capteur k est défaillant, alors le vecteur P s'exprime, en tenant compte de l'équation de mesure (II.11) :

$$X = HX^* + \varepsilon + \alpha e_k$$

d'où : $$Z = V^{-1/2} H X^* + V^{-1/2} \varepsilon + \alpha V^{-1/2} e_k$$

donc : $$P = W Z$$

$$P = W V^{-1/2} \varepsilon + \alpha V^{-1/2} w_k$$

Le vecteur P est donc la somme de deux termes, le premier, $WV^{-1/2}\varepsilon$ apporte une contribution aléatoire de statistique connue si l'on connaît celle du bruit (le plus généralement considéré comme gaussien), le second, $\alpha V^{-1/2} w_k$ est une composante déterministe, sa direction est fixée et son amplitude dépend de l'amplitude du biais.

Ainsi, si le capteur k est défaillant, le vecteur P prend la direction de la $k^{ème}$ colonne de W, ce qui correspond à la plus grande projection de P sur les axes. On utilise cette caractéristique pour localiser les capteurs défaillants. Après avoir détecté un ou plusieurs capteurs défaillants, on localise celui qui a la plus grande projection. Ensuite, on supprime le capteur suspect pour obtenir un système de plus faible dimension. On arrête la procédure lorsque l'amplitude du vecteur P correspondant aux capteurs restants ne vérifie plus le test de détection.

II.3.5 - CAS D'UNE REDONDANCE D'ORDRE 3

Dans le cas où l'on dispose de trois mesures m_1, m_2, m_3 d'une grandeur unique ($v = 3$ et $m = 1$), l'espace de parité est un plan. Sur la figure II.5, on peut voir les trois directions liées à chacune des mesures (vecteurs directeurs $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$ et $\vec{i}_3$).

Le vecteur de parité est construit en traçant $m_1 \vec{i}_1$, $m_2 \vec{i}_2$, $m_3 \vec{i}_3$. La projection de P sur (Δ_1) est ici égale à P_2 (c'est également le vecteur de parité de dimension 1 obtenu en éliminant m_1 : $P_2 = m_2 - m_3$).

La détection s'effectue en comparant l'amplitude de P_2 à un seuil. La zone de fonctionnement normal se trouve à l'intérieur d'une bande semi-infinie parallèle à $\vec{i}_1$.

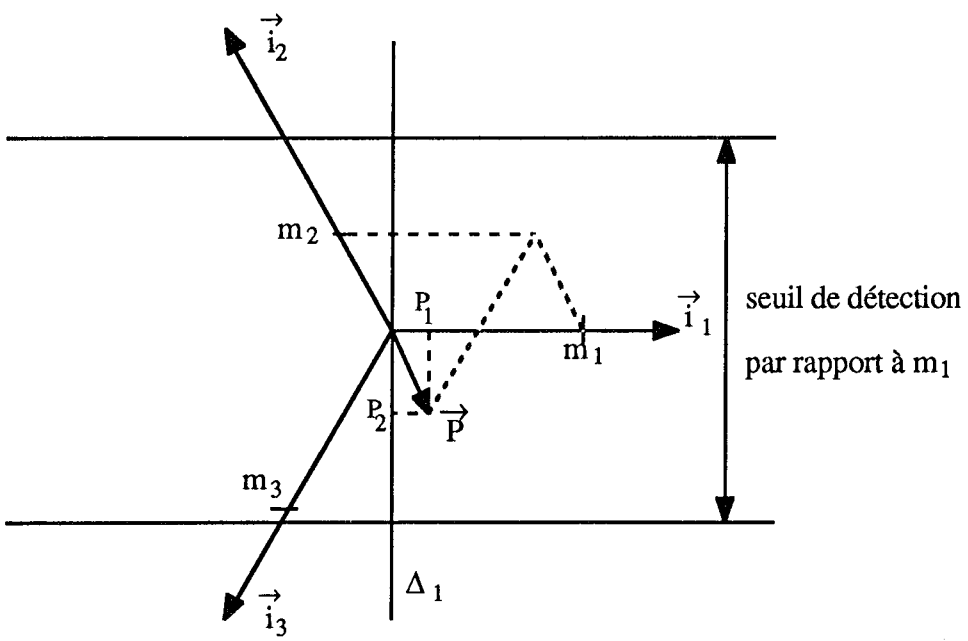


Fig. II.5 : Représentation du vecteur de parité.

II.4 - METHODE DES ECARTS DE FERMETURE DES EQUATIONS DE BILAN

II.4.1 - PRESENTATION DE LA METHODE

Les écarts de fermeture des équations de bilan caractérisent les erreurs de mesure. En effet, le vecteur de mesure X ne vérifie pas, en général, les contraintes de modèle du procédé.

Pour un réseau redondant, décrit par sa matrice d'incidence M, formé de v voies et n noeuds, le vecteur R des résidus, ou vecteur de fermeture, est donné par :

$$R = M X \qquad (II.38)$$

L'utilisation du modèle de mesure :

$$X = X^* + \varepsilon \qquad (II.39)$$

exprimant le vecteur de mesure X en fonction des grandeurs vraies X* et du bruit de mesure ε, permet de calculer les propriétés statistiques (et plus spécialement les deux premiers moments) du vecteur des résidus.

Les grandeurs vraies vérifiant parfaitement les équations de bilan (contrainte du procédé), R s'explicite donc en fonction de ε uniquement :

$$R = M \varepsilon \qquad (II.40)$$

Les hypothèses formulées sur le bruit (distribution normale centrée de variance V) permettent de déduire l'espérance mathématique de R :

$$E(R) = M\,E(\varepsilon) = 0 \qquad (II.41)$$

La matrice de variance-covariance V_R, de dimension n.n, des écarts de fermeture s'écrit :

$$V_R = Var(R)$$
$$V_R = M\,E(\varepsilon\varepsilon^T)\,M^T$$

donc
$$V_R = MVM^T \qquad (II.42)$$

Ainsi, le vecteur R est distribué selon une loi normale centrée et de variance égale à MVM^T.

Cependant, il est important de remarquer que la matrice MVM^T n'est pas une matrice diagonale. Les différentes composantes du vecteur R ne sont donc pas indépendantes. Pour comparer entre elles les composantes du vecteur R, nous définissons un vecteur des écarts normalisés R_N dont les composantes sont calculées de la manière suivante :

$$R_N(i) = \frac{R(i)}{\sqrt{V_R(i,i)}} \text{ pour } i = 1, ..., n \qquad (II.43)$$

De cette manière, pour un réseau quelconque, les résidus normalisés suivent donc tous la même loi (loi normale centrée et réduite). Ils peuvent donc être comparés et "seuillés" par la même grandeur (définie par un seuil de confiance α d'erreur de type I (voir annexe A)). Par exemple, pour $\alpha = 0,05$ si $R_N \in [- 1,96 ; 1,96]$ le bilan boucle avec une probabilité de 95%.

Le but de cette méthode est de déterminer les noeuds en défaut à partir des écarts de bouclage pour lesquels $R_N(i)$ n'est pas inclus dans l'intervalle prédéfini (intervalle de confiance). Dans ce cas, parmi les voies adjacentes au noeud i, l'une au moins est en défaut. Par recoupement et élimination, on localise les voies en défaut (cette démarche utilise la technique d'agrégation des noeuds en défaut formalisée par Mah [MAH 76]). La recherche de ces défauts, par l'agrégation de nœuds, s'effectue en trois étapes.

Lors de la première étape, nous calculons les écarts de fermeture de chacun des nœuds du réseau. Pour chaque nœud en défaut, nous affectons le coefficient 1 aux voies adjacentes à ce nœud (les voies n'intervenant pas dans l'équation de ce nœud n'étant pas affectées de coefficient particulier). Pour les nœuds "valides", c'est-à-dire dont les écarts normalisés sont compris dans l'intervalle de confiance choisi, les voies adjacentes sont affectées du coefficient 0 (et toujours pas de coefficient pour les autres voies).

L'étape suivante est identique à celle décrite ci-dessus pour chaque agrégation de 2, 3, ..., nœuds en défaut (dans la limite où cette agrégation a un sens). Enfin, la dernière étape consiste à faire le produit de tous les coefficients pour chaque colonne. Si ce produit est nul, la mesure de la voie correspondante est déclarée bonne, si ce produit vaut 1 la mesure de la voie est déclarée suspecte.

II.4.2 - MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE

Nous allons expliciter la méthode sur le réseau de la figure II.6, formé de 4 nœuds et 9 voies. Pour chacune des voies, une mesure est disponible.

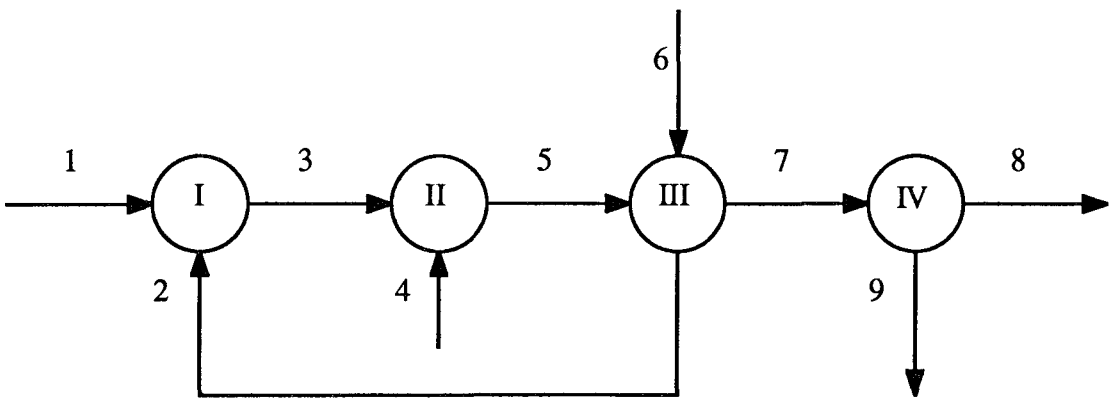


Fig. II.6 : Réseau d'application.

Le tableau 1 nous donne les mesures, les écarts-types associés ainsi que les mesures biaisées simulées (biais sur les voies 3 et 7 exprimés en pourcentage de la mesure non biaisée).

N° voie	Mesure	Ecart-type	Mesure biaisée	Biais
1	111,30	2,78	111,30	
2	18,20	0,46	18,20	
3	121,60	3,19	191,40	50 %
4	23,80	0,60	23,80	
5	148,70	3,72	148,70	
6	13,60	0,34	13,60	
7	139,40	3,48	181,20	30 %
8	106,40	2,66	106,40	
9	39,70	0,99	39,70	

Tableau 1 : Mesures.

Le tableau 2 montre les résidus de bilan ainsi que les résidus normalisés pour les nœuds et agrégations de nœuds. Nous avons indiqué à chaque fois les voies associées, permettant ainsi de construire le tableau 3 qui synthétise la recherche des voies en défaut par l'utilisation de coefficients (0 = voie validée, 1 = voie suspecte).

Equations	Résidu	Résidu normalisé	Probabilité	Voies	Nœud associé
1	- 61,90	- 14,54	> 95%	1,2,3	I
2	66,50	13,47	> 95%	3,4,5	II
3	- 37,10	- 7,24	> 95%	2,5,6,7	III
4	35,10	7,82	> 95%	7,8,9	IV
5	4,60	0,98	< 95%	1,2,4,5	I + II
6	- 99,00	- 14,93	> 95%	1,3,5,6,7	I + III
7	29,40	6,13	> 95%	2,3,4,6,7	II + III
8	- 2,00	- 0,42	< 95%	2,5,6,8,9	III + IV
9	- 63,90	- 10,11	> 95%	1,3,5,6,8,9	I + III + IV
10	64,50	14,82	> 95%	2,3,4,6,8,9	II + III + IV
11	2,60	0,64	< 95%	1,2,6,8,9	nœud env.

Tableau 2 : Résidus de bilan.

La recherche de ces défauts par l'agrégation de nœuds, synthétisée par le tableau suivant, nous permet de localiser les voies en défaut.

	Nœud en défaut	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	oui	1	1	1	.	.	.	.	.	.
II	oui	.	.	1	1	1	.	.	.	.
III	oui	.	1	.	.	1	1	1	.	.
IV	oui	.	.	.	.	.	.	1	1	1
I + II	non	0	0	.	0	0	.	.	.	.
I + III	oui	1	.	1	.	1	1	1	.	.
II + III	oui	.	1	1	1	.	1	1	.	.
III + IV	non	.	0	.	.	0	0	.	0	0
I + III + IV	oui	1	.	1	.	1	1	.	1	1
II + III + IV	oui	.	1	1	1	.	1	.	1	1
Nœud environnant	non	0	0	.	.	.	0	.	0	0
Produit par colonne		0	0	1	0	0	0	1	0	0

Tableau 3 : Localisation des voies en défaut.

Nous trouvons donc comme voies suspectes les voies 3 et 7. Dans d'autres cas, la localisation de la voie défaillante n'est pas aussi aisée ; ainsi, toujours pour le réseau précédent, un défaut sur la voie 8 ne peut être localisé simplement, car sa présence est détectée à la fois sur la voie 8 et sur la voie 9 (voies symétriques par rapport au nœud IV).

II.4.3 - SIGNATURE DE PANNE DES CAPTEURS [STAR 86]

A partir du vecteur des résidus normalisés R_N, on construit un vecteur logique S obtenu à partir de R_N par la règle suivante :

$S(i) = 0$ si $| R_N(i) | \leq$ seuil

$S(i) = 1$ si $| R_N(i) | >$ seuil

Par exemple, nous avons obtenu précédemment (voir tableau 2) :

$$R_N = [\ -14{,}54 \quad 13{,}47 \quad -7{,}24 \quad 7{,}82 \quad 0{,}98 \quad -14{,}93 \quad 6{,}13 \quad -0{,}42 \quad -10{,}11 \quad 14{,}82 \quad 0{,}64]^T$$

pour un seuil de 1,96, nous obtenons pour S :

$$S = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ ]$$

De plus, nous définissons pour chaque capteur une signature de panne définie de la manière suivante :

$S_i(j) = 1$ si la $i^{ème}$ voie intervient explicitement dans le calcul du $j^{ème}$ résidu,
$S_i(j) = 0$ sinon.

A partir du tableau 2, nous pouvons en déduire les différentes signatures théoriques :

$S_1 = [\,1\,0\,0\,0\;\;1\,1\,0\,0\;\;1\,0\;\;1\,]$
$S_2 = [\,1\,0\,1\,0\;\;1\,0\,1\,1\;\;0\,1\;\;1\,]$
$S_3 = [\,1\,1\,0\,0\;\;0\,1\,1\,0\;\;1\,1\;\;0\,]$
$S_4 = [\,0\,1\,0\,0\;\;1\,0\,1\,0\;\;0\,1\;\;0\,]$
$S_5 = [\,0\,1\,1\,0\;\;1\,1\,0\,1\;\;1\,0\;\;0\,]$
$S_6 = [\,0\,0\,1\,0\;\;0\,1\,1\,1\;\;1\,1\;\;1\,]$
$S_7 = [\,0\,0\,1\,1\;\;0\,1\,1\,0\;\;0\,0\;\;0\,]$
$S_8 = [\,0\,0\,0\,1\;\;0\,0\,0\,1\;\;1\,1\;\;1\,]$
$S_9 = [\,0\,0\,0\,1\;\;0\,0\,0\,1\;\;1\,1\;\;1\,]$

Remarque : Les signatures théoriques des capteurs 8 et 9 étant identiques, les deux capteurs sont indiscernables pour la localisation.

Si dans l'élaboration du vecteur S, des signatures expérimentales, n'intervient aucune erreur, alors on peut écrire S sous la forme :

$$S = \overset{v}{\underset{i=1}{OR}}\, a_i\, S_i$$

avec "OR" opérateur ou logique, et où $a_i = 1$ si le $i^{ème}$ capteur est en panne et 0 sinon.

La recherche des valeurs numériques des a_i peut être faite de différentes manières (par calcul des coefficients de rangs, mesure de distance entre signatures (Jaccard, Russel et Rao... [JAIN 88])...).

Nous avons choisi une méthode permettant de prendre en compte l'information fournie par un ensemble de capteurs. Cette méthode est basée sur l'entropie de la signature expérimentale connaissant les différentes signatures théoriques des capteurs [BARB 87], [MOUR 88]. Le calcul de l'entropie conditionnelle permet d'expliquer la signature expérimentale en fonction des signatures théoriques des capteurs. Cette explication permet de localiser le ou les capteurs en défaut.

Sachant que notre système a deux modalités {0, 1}, l'entropie nous est donnée par :

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{2} P_i \log_2 P_i$$

où P_i représente la probabilité d'apparition de l'état i et $\log_2$ le logarithme en base 2.

Ainsi pour S = [1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0], nous avons deux états différents possibles donnant :

$$P_0 = \frac{\text{nombre de zéros}}{\text{nombre d'observations}} = \frac{3}{11}$$
$$P_1 = \frac{8}{11}$$

d'où : $H(S) = -\left(\frac{3}{11}\log_2\frac{3}{11} + \frac{8}{11}\log_2\frac{8}{11}\right)$
$H(S) = 0{,}8454$

L'entropie conditionnelle de S sachant S_i est donnée par la formule :

$$H(S/Si) = H(S \cup S_i) - H(S_i) = - \sum_i \sum_j P_{ij} \log_2 P_{j/i}$$

avec $P_{j/i} = \frac{P_{ij}}{P_{i.}}$ et où $P_{i.} = \sum_j P_{ij}$

A partir de cette formule, nous cherchons le meilleur sous-ensemble X de m capteurs parmi 9 (avec m = 1, ..., 9). Le meilleur sous-ensemble X étant tel que :

$$H(S/X) = 0$$

(Pour de plus amples détails sur le calcul de l'entropie conditionnelle pour un ensemble X, le lecteur peut se référer à Marfaing Pallier [MARF 83])

Pour un sous-ensemble contenant un capteur (le capteur 3, par exemple) nous obtenons :

S = [1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0]
S_3 = [1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0]

Comptabilisons les nombres d'états pour S et S_3, c'est-à-dire les états 0-0, 0-1, 1-0 et 1-1.

$\frac{S}{S_3}$	0	1
0	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$
1	0	$\frac{6}{11}$

Tableau 4 : Tableau de contingence de S connaissant S_3.

$$H(S/S_3) = - \left(\frac{3}{11} \log_2 \frac{3}{5} + \frac{2}{11} \log_2 \frac{2}{5} + \frac{6}{11} \log_2 1 \right)$$
$$H(S/S_3) = 0{,}4413$$

A partir d'un seul capteur, nous ne sommes pas en mesure d'expliquer complètement S. Nous nous intéressons donc aux ensembles de deux capteurs. Ainsi par cette méthode, nous trouvons que seuls les capteurs 3 et 7 permettent d'expliquer complètement S.

En effet, comptabilisons les états 0-00, 0-01, 0-10, 0-11, 1-00, 1-01, 1-10 et 1-11 :

S = [1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0]
S_3 = [1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0]
S_7 = [0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0]

$\frac{S}{S_3 \cup S_7}$	0	1
00	$\frac{3}{11}$	0
01	0	$\frac{2}{11}$
10	0	$\frac{4}{11}$
11	0	$\frac{2}{11}$

Tableau 5 : Tableau de contingence de S connaissant S_3 et S_7.

$$H(S/S_3 \cup S_7) = -\left(\frac{3}{11}\log_2 1 + \frac{2}{11}\log_2 1 + \frac{4}{11}\log_2 1 + \frac{2}{11}\log_2 1\right)$$

$$H(S/S_3 \cup S_7) = 0$$

Ainsi par cette méthode, nous trouvons les capteurs 3 et 7 en défaut.

La robustesse de cette localisation est extrêmement liée à la qualité de génération des résidus normalisés.

II.5 - TECHNIQUE DES TERMES CORRECTIFS NORMALISES

II.5.1 - ANALYSE DES TERMES CORRECTIFS

Les écarts de fermeture des équations de contrainte nous ont apporté une information liée aux nœuds du réseau.

Initialement, nous disposions de n informations or, la localisation de mesures aberrantes nécessite la génération d'équations supplémentaires pour obtenir des informations sur les voies du réseau.

Ces informations peuvent être fournies directement par l'analyse des termes correctifs (c'est-à-dire des écarts entre les mesures et les estimations) qui renseignent sur la qualité des estimations obtenues.

En l'absence de biais, nous pouvons utiliser le modèle de mesure (II.39) reliant les mesures X aux grandeurs vraies X* et aux bruits de mesure ε :

$$X = X^* + \varepsilon$$

Le meilleur estimateur, au sens des moindres carrés, $\hat{X}$ de X* est celui qui minimise :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| \hat{X} - X \|^2_{V^{-1}} \tag{II.44}$$

sous la contrainte $M\hat{X} = 0$

Ce problème est un problème de minimisation d'un critère quadratique sous contrainte égalité dont la solution est analytique. La technique des multiplicateurs de Lagrange permet de trouver cette solution.

Le lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$L = \Phi + \lambda^T M\hat{X} \tag{II.45}$$

avec λ vecteur des paramètres de Lagrange (de dimension v).

Les conditions de stationnarité du lagrangien L sont :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{X}} = V^{-1}(\hat{X} - X) + M^T\lambda = 0 \tag{II.46a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M\hat{X} = 0 \tag{II.46b}$$

Ce système d'équations linéaires admet pour solution :

$$\hat{X} = (I_v - VM^T (MVM^T)^{-1} M) X \tag{II.47}$$

On définit ainsi le vecteur E_C des termes correctifs :

$$E_C = X - \hat{X} = VM^T (MVM^T)^{-1} MX \tag{II.48}$$

Son espérance mathématique est nulle et sa matrice de variance-covariance V_E s'exprime :

$$V_E = VM^T (MVM^T)^{-1} MV \tag{II.49}$$

Ainsi, E_C suit une loi normale centrée de variance V_E. Cependant, pour pouvoir comparer plus efficacement les différentes composantes de E_C entre elles, on définit le vecteur E_N des termes correctifs normalisés de la même manière que nous avons défini le vecteur R_N des écarts normalisés (II.43) :

$$E_N(i) = \frac{E_C(i)}{\sqrt{V_E(i,i)}} \text{ pour } i = 1, ..., v \tag{II.50}$$

Comme pour les écarts normalisés, on compare les composantes de E_N à une valeur critique (définie de même par un seuil de confiance α d'erreur de type I). Ainsi, a posteriori, c'est-à-dire après le calcul des estimées qui vérifient les équations de bilan, on peut tester la validité des hypothèses de distribution gaussienne des erreurs de mesure. Une composante du vecteur des termes correctifs normalisées $E_N(i)$ hors de

l'intervalle de confiance, défini par la valeur critique, est révélateur de la présence d'une erreur de mesure non-normale tel un biais par exemple. Il a été montré [FAYO 87] que le terme correctif normalisé le plus grand, en valeur absolue, correspond à la mesure soumise à l'erreur la plus importante. Cette propriété est utilisée pour la détection d'erreurs de grandes amplitudes.

II.5.2 - PROCEDURE DE DETECTION DE DEFAUTS

Nous proposons une méthode de détection et localisation de défauts par examen des corrections normalisées.

Après avoir réconcilié les données, on évalue les termes correctifs normalisés qui seront comparés à une valeur critique σ_C définie par l'utilisateur.

Etape 1 : $\forall$ i, on trouve $| E_N(i) | \leq \sigma_C$. Les grandeurs validées par réconciliation sont acceptées et aucun capteur n'est défaillant.

Etape 2 : $\exists$ i tel que $| E_N(i) | > \sigma_C$. Le capteur correspondant au plus grand, en valeur absolue, des termes correctifs normalisés est déclaré défaillant ; la mesure correspondante est supprimée (par agrégation des nœuds) et on recommence la procédure sur le système résultant.

Etape 3 : $\forall$ i, on trouve $| E_N(i) | \leq \sigma_C$. Le ou les capteurs défaillants sont ceux localisés précédemment. La procédure de détection de défaut est alors arrêtée.

Etape 4 : $\exists$ i tel que $| E_N(i) | > \sigma_C$. Un autre capteur, correspondant au terme correctif normalisé maximum (en valeur absolue), est présumé défaillant. La procédure se poursuit à l'étape 2.

A l'aide de cette procédure, le nombre d'itérations nécessaires à la localisation des capteurs défaillants est égal au nombre de capteurs défaillants (à comparer au nombre d'itérations de la procédure utilisée par Serth [SERT 86] : $A_v^m = v(v - 1)...(v - m + 1)$ où m est le nombre de capteur en défaut et v le nombre total de capteurs). Malgré le nombre réduits d'itérations nécessaires à la localisation, on utilise un seuil de confiance modifié β à la place du seuil α pour tenir compte de l'effet d'exécution de multiples tests [MAH 82]. Le seuil β est lié au seuil α et au nombre v' de mesures prises en compte [IORD 85] par la relation :

$$\beta = 1 - (1 - \alpha)^{1/v'} \qquad \text{(II.51)}$$

Ainsi, pour un réseau à 7 voies et en prenant pour α la valeur $\alpha = 0,05$, nous obtenons un seuil modifié égal à $\beta = 0,0073$, définissant donc l'intervalle de confiance [- 2,68 ; 2,68] ($\sigma_C = 2,68$) à la place de [- 1,96 ; 1,96].

II.5.3 - ANALOGIE ENTRE CORRECTIONS NORMALISEES ET PROJECTIONS DU VECTEUR PARITE

Rappelons tout d'abord que le problème d'estimation consiste à chercher le minimum par rapport à $\hat{X}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| \hat{X} - X \|^2_{V^{-1}} \text{ sous la contrainte } M\hat{X} = 0$$

En supposant diagonale la matrice de variance-covariance des erreurs des mesure et en posant [MAQU 87] :

$$Y = V^{-1/2} X$$

le problème d'estimation consiste alors à chercher le minimum par rapport à $\hat{Y}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| \hat{Y} - Y \|^2 \qquad \text{(II.52a)}$$

sous la contrainte $M V^{1/2} \hat{Y} = 0$ (II.52b)

On montre [RAGO 90b] qu'il existe une transformation régulière T, telle que :

$$A A^T = I \qquad \text{(II.53)}$$

avec : $A = T M V^{1/2}$ (II.54)

Cette transformation correspondant à l'orthonormalisation ligne à ligne de la matrice $M V^{1/2}$.

Le problème (II.52) devient :

chercher le minimum par rapport à $\hat{Y}$ de

$$\Phi = \frac{1}{2} \| \hat{Y} - Y \|^2 \text{ sous la contrainte } A\hat{Y} = 0$$

La solution est donnée par :

$$\hat{Y} = (I - A^T A) Y \qquad \text{(II.55)}$$

D'après $Y = V^{-1/2} X$ et $\hat{X} = V^{1/2} \hat{Y}$, nous avons :

$$X - \hat{X} = V^{1/2} (Y - \hat{Y})$$

et en utilisant la relation (II.55), on obtient :

$$X - \hat{X} = V^{1/2} A^T A Y \qquad \text{(II.56)}$$

En notant R le vecteur des résidus tel que :

$$R = A Y$$

on a : $X - \hat{X} = V^{1/2} A^T R$

d'où l'expression de $E_N(i)$:

$$E_N(i) = \frac{a_i^T R}{\| a_i \|} \qquad (II.57)$$

où a_i représente la ième colonne de la matrice de A.

On remarque l'analogie parfaite entre l'expression des projections du vecteur de parité sur les directions de pannes (II.37) et celle des corrections normalisées (II.57).

L'analogie est d'autant plus grande, que l'on montre facilement [RAGO 90] que la matrice A joue le rôle de la matrice W de l'espace de parité et que l'on démontre l'équivalence entre ces deux approches [AITO 90].

II.6 - ETUDE DE LA ROBUSTESSE DES METHODES DE DETECTION

II.6.1 - PROTOCOLE D'ESSAI

Pour juger de l'efficacité des trois dernières méthodes proposées, nous avons procédé par simulation. En effet, l'utilisation de la simulation permet, pour un réseau donné, de créer un très grand nombre de situations différentes, fonction des valeurs des mesures, de la précision des mesures, du nombre de biais, de l'amplitude des biais ...

Le vecteur des mesures X a été simulé à partir d'un vecteur des grandeurs vraies X*, vérifiant exactement les équations de bilan, de la manière suivante :

$$X = X^* + \varepsilon + \delta \qquad (II.58)$$

où ε est le vecteur des erreurs de mesure, obtenu par un générateur de nombres pseudo-aléatoire et où δ est le vecteur défaut (toutes ses composantes sont nulles, sauf pour les mesures où un défaut existe).

La précision des mesures est exprimée sous forme d'écart-type ; dans le cas de la redondance analytique cette précision est égale à 2,5 % de la mesure. Le niveau de confiance α a été fixé à 0,05 sauf dans l'étude de la redondance matérielle où nous avons testé son influence sur la détection.

Les procédures de détection-localisation ont été testées sur différents réseaux où nous avons modifié les paramètres suivants :

- nombre de biais,
- amplitude des biais,
- nombre de mesures,
- amplitude des mesures,
- amplitude des bruits,
- précision des mesures.

Pour le cas de la redondance matérielle, nous avons choisi un réseau avec 7 mesures (figure II.3).

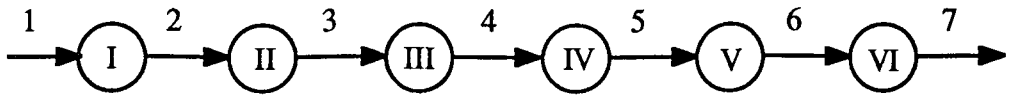


Fig. II.3 : Réseau n° 1.

N° voie	Mesure	Ecart-type
1	100,36	3,0
2	99,76	4,0
3	99,64	5,0
4	99,64	3,0
5	102,16	4,1
6	99,49	1,5
7	98,80	2,5

Tableau 6 : Mesures et écarts-type du réseau n° 1.

Dans le cas de la redondance analytique, nous avons pris un réseau de taille moyenne (figure II.4) comportant 9 nœuds et 15 voies et ayant une forte interconnexion (on note la présence de 3 cycles).

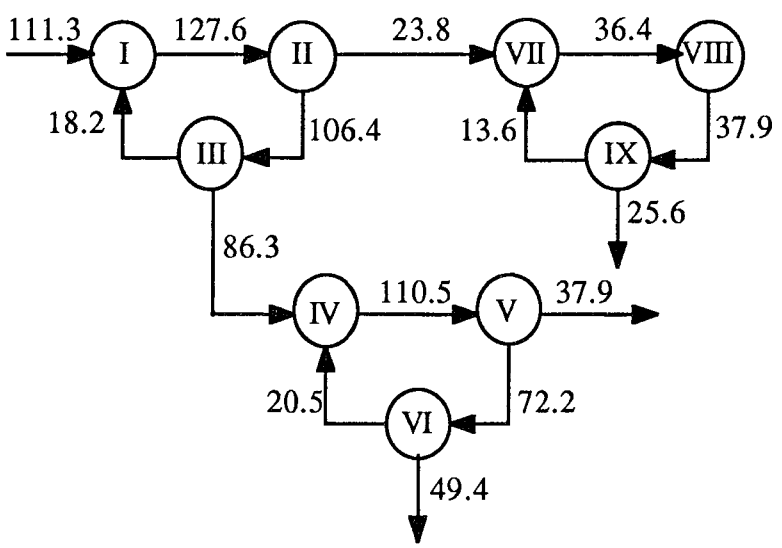


Fig II.4 : Représentation du réseau n° 2 avec ses mesures.

Nous pouvons résumer notre procédure de tests de la manière suivante :

- Simulation d'un défaut : le défaut a été "promené" sur toutes les voies du réseau avec à chaque fois une amplitude du défaut représentant ± 50 %, ± 40 %, ± 30 %, ± 20 % de la mesure initiale.

- Simulation de deux défauts : les deux défauts ont été "promenés" sur tout le réseau de manière à englober exactement toutes les combinaisons possibles de 2 voies du réseau. Pour chaque combinaison de 2 voies, 4 jeux de tests ont été réalisés en prenant pour amplitude des défauts ± 40 % de la mesure initiale.

- Simulation de trois défauts : nous avons tiré aléatoirement trois voies parmi les quinze voies du réseau et nous avons généré trois biais (de manière aléatoire) que nous avons ajouté aux mesures des voies choisies. Nous avons répété cette procédure 500 fois.

II.6.2 - ANALYSE DES RESULTATS DES SIMULATIONS

Cas de la redondance matérielle

Dans le cas d'un défaut, on constate que les trois tests sont équivalents puisque la détection-localisation se fait pratiquement à 100 %. Seul le test d'application de la technique de l'espace de **PAR**ité (PAR) a été mis en échec dans un seul cas où il n'est pas arrivé à détecter la voie 3 biaisée à ± 20 % pour une probabilité de détection de 99 % (α = 0,01). Il convient de remarquer que la voie 3 concerne justement la mesure ayant le plus grand écart-type (5,0), le biais que nous avons simulé a donc été interprété comme une erreur de mesure normale. Ces essais ont montré que l'influence du seuil est peu sensible sur les tests dans le cas de la redondance matérielle.

Dans le cas de deux défauts le tableau 7 présente les résultats obtenus.

Nbre voies	Bonne localisation %			Aucune détection %			Surdétection %		
	PAR	TCN	EFB	PAR	TCN	EFB	PAR	TCN	EFB
5	100,0	100,0	60,0	0,0	0,0	40,0	0,0	0,0	0,0
6	100,0	98,3	66,7	0,0	0,0	33,3	0,0	1,7	0,0
7	100,0	100,0	71,4	0,0	0,0	28,6	0,0	0,0	0,0

Tableau 7 : Deux défauts (redondance matérielle).

On remarque que les tests PAR et TCN (test d'application de la technique des Termes Correctifs Normalisés) donnent des résultats sensiblement équivalents (sur les 60 essais effectués sur le réseau n° 1 avec 6 voies, un seul essai a donné un résultat différent entre les deux tests). Par contre, le test EFB (application de la méthode des Ecarts de Fermeture de Bilan) détecte d'autant mieux que le nombre de voies est élevé (et donc le nombre de nœuds) puisque la détection se fait sur les nœuds.

Cas de la redondance analytique

Dans le cas d'un seul défaut (tableau 8), on constate que le test PAR n'est pas ou peu sensible à la modification du bruit de mesure et donne de meilleurs résultats que les deux autres tests. De plus, on remarque que pour les tests PAR et TCN la modification du bruit entraîne une surdétection au détriment de la non-détection (une amplitude du bruit de mesure trop importante a pu être considérée comme une défaillance d'un capteur).

	Test	Bonne localisation %	Non détection %	Fausse détection %	Sur détection %
Sans modification de bruit	PAR	91,7	7,5	0,8	0,0
	TCN	93,3	6,7	0,0	0,0
	EFB	84,2	15,8	0,0	0,0
Avec modification de bruit	PAR	91,7	5,8	0,8	1,7
	TCN	85,8	5,8	1,7	6,7
	EFB	79,2	20,0	0,8	0,0

Tableau 8 : Résultat des tests pour un défaut.

Les tableaux 9 et 10 (2 et 3 défauts respectivement) montrent que plus le nombre de défauts est important moins bonne est la détection. Les résultats des tests PAR et TCN restent comparables, tandis que l'on note une dégradation dans les résultats du test EFB.

Test	PAR	TCN	EFB
Bonne localisation %	85,0	84,0	58,6
Aucune détection %	0,0	0,2	8,1
Fausses détections %	1,2	2,1	1,4
1 détectée 2 localisées %	8,6	8,6	18,1
2 détectées 1 localisée %	4,3	4,2	1,7
Autres situations %	0,9	0,9	12,1

Tableau 9 : Résultats des tests dans le cas de 2 défauts.

Test	PAR	TCN	EFB
Bonne localisation %	65,8	63,6	27,4
Aucune détection %	0,0	0,0	5,0
Fausses détections %	0,8	1,8	2,2
2 détectées 1 localisée %	5,0	6,0	5,2
2 détectées 2 localisées %	16,6	15,6	17,2
3 détectées 1 localisée %	1,0	0,8	0,2
3 détectées 2 localisées %	9,6	8,8	5,4
Autres situations %	1,2	3,4	37,6

Tableau 10 : Résultats des tests dans le cas de 3 défauts.

Une variation de 25 % autour de la valeur initiale de la matrice de variance des erreurs de mesure modifie considérablement les résultats des tests PAR et TCN (tableau 11), tandis que le test EFB reste insensible aux modifications de la précision des capteurs (ceci provient du fait que ce test est dépendant des effets de compensation des erreurs car ne travaille pas séparément sur chaque mesure mais sur l'ensemble des mesures affectant le résidu).

	$\frac{3}{4}$V			$\frac{5}{4}$V		
Test	PAR	TCN	EFB	PAR	TCN	EFB
Bonne localisation %	93,1	89,8	60,0	77,6	78,8	59,8
Aucune détection %	0,0	0,0	7,4	0,0	0,2	7,6
Fausses détection %	0,7	1,9	1,4	1,7	2,4	1,4
1 détectée 1 localisée %	1,4	2,1	17,1	16,9	14,5	22,9
2 détectées 1 localisée %	4,8	5,2	1,9	3,8	3,1	1,0
Autres situations %	0,0	1,0	12,2	0,0	1,0	7,3

Tableau 11 : Influence de la précision des mesures sur les tests dans le cas de 2 défauts.

Le tableau 13 montre que les tests dépendent de la configuration du réseau et des amplitudes des mesures. Pour les réseaux n° 3 et n° 5, le test EFB surdétecte tandis que les deux autres tests ont une mauvaise détection. Le réseau n° 6 est le réseau utilisé par Serth et Heenan pour leurs tests [SERT 86].

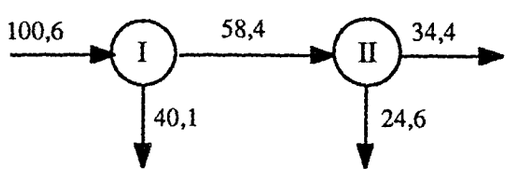


Fig. II.5 : Représentation du réseau n° 3
avec ses mesures.

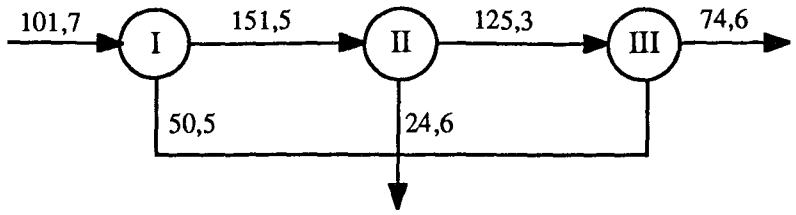


Fig. II.6 : Représentation du réseau n° 4
avec ses mesures.

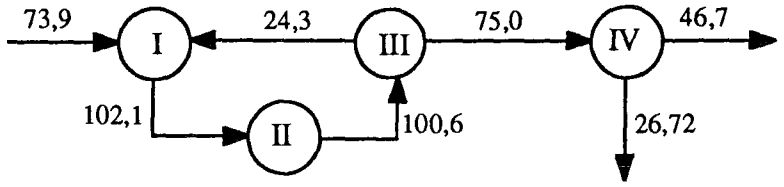


Fig. II.7 : Représentation du réseau n° 5
avec ses mesures.

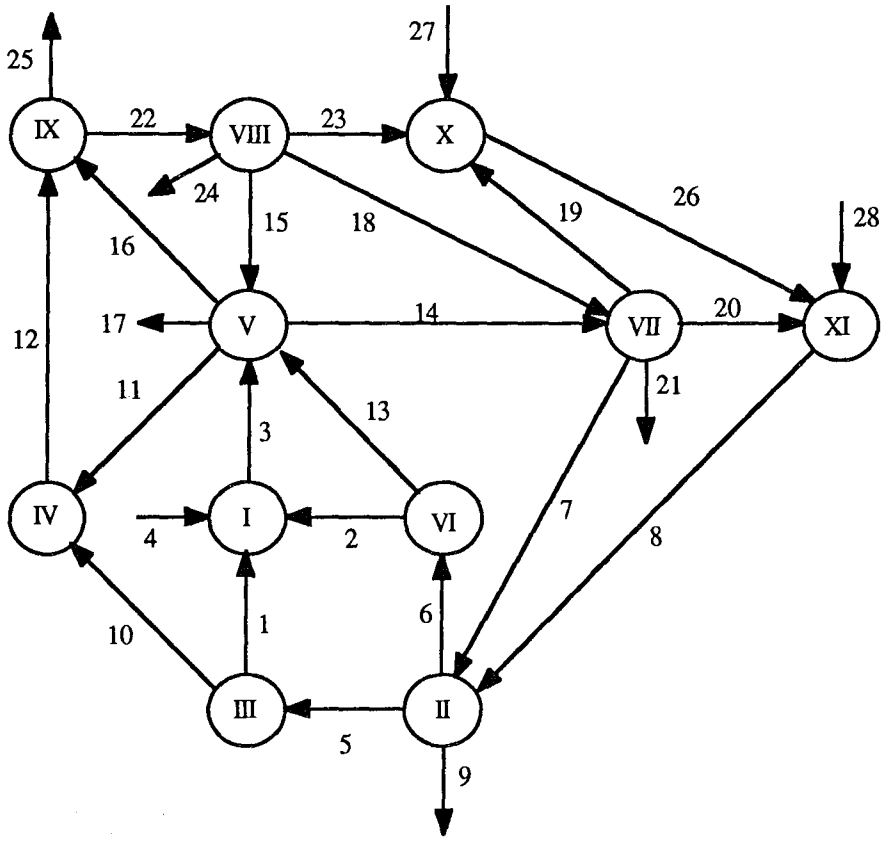


Fig. II.8 : Représentation du réseau n° 6.

N° de la voie	1	2	3	4	5	6	7
Mesure en t/h	0,86	0,86	111,82	109,95	53,27	112,27	2,32
N° de la voie	8	9	10	11	12	13	14
Mesure en t/h	164,05	0,86	52,41	14,86	67,27	111,27	91,86
N° de la voie	15	16	17	18	19	20	21
Mesure en t/h	60,00	23,64	32,73	16,23	7,95	10,50	82,27
N° de la voie	22	23	24	25	26	27	28
Mesure en t/h	5,45	2,59	46,64	85,45	81,32	70,77	72,23

Tableau 12 : Grandeurs vraies
des mesures du réseau n° 6.

	Bonne localisation %			Aucune détection %			Fausse détection %			Surdétection %		
Numéro réseau	PAR	TCN	EFB	PAR	TCN	EFB	PAR	TCN	EFB	PAR	TCN	EFB
3	57,5	60,0	20,0	2,5	2,5	7,5	40,0	37,5	0,0	0,0	0,0	72,5
4	93,8	93,8	89,6	6,2	6,2	10,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	80,3	83,9	64,3	5,4	3,6	8,9	14,3	12,5	0,0	0,0	0,0	26,8
6	65,6	68,8	60,7	34,4	31,2	39,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Tableau 13 : Influence de la taille du réseau sur les tests (1 défaut).

II.7 - RECONCILIATION DES DONNEES

Après la localisation des voies en défaut, il reste à identifier les amplitudes des erreurs et à estimer les grandeurs vraies. Connaissant la position des capteurs défaillant, nous pouvons utiliser comme équation de mesure, à la place de l'équation (II.58) :

$$X = X^* + \varepsilon + Bd \qquad \text{(II.59)}$$

avec : B = matrice de localisation des voies en défaut de dimension v.nvd,
nvd = nombre de voies en défaut,
d = vecteur des défauts de dimension nvd.

Nous obtenons :

$$E(X) = X^* + Bd = \bar{X}$$

$$Var(X) = E((X - \bar{X})\,(X - \bar{X})^T)$$
$$Var(X) = E(\varepsilon\varepsilon^T)$$
$$Var(X) = V$$

Le problème de la validation de données se formule ainsi :

chercher le minimum de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| (X - Bd) - \hat{X} \|^2_{V^{-1}} \quad \text{sous la contrainte : } M\hat{X} = 0 \qquad \text{(II.60)}$$

Le lagrangien associé à (II.60) s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \| (X - Bd) - \hat{X} \|^2_{V^{-1}} + \lambda^T M\hat{X} \qquad \text{(II.61)}$$

Les conditions de stationnarité de ce lagrangien sont :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{X}} = V^{-1} (\hat{X} - (X - Bd)) + M^T \lambda = 0 \qquad \text{(II.62a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d} = B^T V^{-1} (\hat{X} - (X - Bd)) = 0 \qquad \text{(II.62b)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M\hat{X} = 0 \qquad \text{(II.62c)}$$

D'après (II.62a), nous obtenons :

$$\hat{X} - (X - Bd) = - VM^T \lambda$$

Comme $M\hat{X} = 0$, on en déduit :

$$\lambda = (MVM^T)^{-1} M (X - Bd) \qquad \text{(II.63)}$$

En réinjectant cette dernière équation dans la formule (II.62a) on obtient :

$$\hat{X} - (X - Bd) = - VM^T (MVM^T)^{-1} M (X - Bd) \qquad \text{(II.64)}$$

En substituant (II.64) dans (II.62b) on a :

$$B^T M^T (MVM^T)^{-1} M (X - Bd) = 0 \qquad \text{(II.65)}$$

d'où :

$$d = \left[B^T M^T (MVM^T)^{-1} MB\right]^{-1} B^T M^T (MVM^T)^{-1} MX \qquad (II.66)$$

Les valeurs estimées des grandeurs vraies sont données, d'après (II.64), par :

$$\hat{X} = \left[I_v - VM^T (MVM^T)^{-1} M\right] (X - Bd) \qquad (II.67)$$

Remarque : La matrice $B^T M^T (MVM^T)^{-1} MB$ doit être **régulière**, ce qui est le cas si le système est **observable** par rapport à d.

Exemple numérique :

Nous avons appliqué cette méthode sur le réseau n°2 (fig. II.4).

On considère les vecteurs X, $\hat{X}$ et τ_C (avec $\tau_C(i) = \left|\frac{X(i) - \hat{X}(i)}{X(i)}\right| * 100$ pour i allant de 1 à v : τ_C représente un taux de correction). Nous avons présenté deux exemples (tableau 14) pour montrer les bons résultats obtenus par cette méthode (tableau 15).

Exemple	N° des voies en défaut	Erreurs (% mesure)
1	aucune erreur	
2	1 3 11	+ 50 % - 30 % - 35 %

Tableau 14 : N° et erreurs affectés aux voies.

On retrouve le plus fort taux de correction pour les voies en défaut, et une bonne cohérence entre les valeurs estimées pour chaque exemple (tableau 15).

X_1	$\hat{X}_1$	τ_{C1} (%)	X_2	$\hat{X}_2$	τ_{C2} (%)
111,30	111,87	0,52	166,95	112,20	32,79
127,60	130,04	1,92	127,60	130,35	2,15
106,40	105,74	0,62	74,48	105,65	41,86
18,20	18,17	0,17	18,20	18,14	0,31
86,30	87,57	1,47	86,30	87,51	1,40
110,49	108,28	2,00	110,49	108,22	2,05
72,20	70,56	2,27	72,20	70,53	2,31
49,40	49,85	0,92	49,40	49,82	0,85
37,90	37,71	0,49	37,90	37,69	0,56
20,50	20,71	1,01	20,50	20,71	1,03
23,80	24,31	2,31	15,47	24,69	59,62
36,36	37,78	3,91	36,36	38,10	4,79
13,60	13,48	0,91	13,60	13,41	1,41
37,89	37,78	0,28	37,89	38,10	0,56
25,53	24,31	4,79	25,53	24,69	3,88

Tableau 15 : Résultats de la réconciliation.

II.8 - EQUIVALENCE DES METHODES DE DETECTION D'ERREURS

Après avoir exposé des techniques de détection d'erreurs, on montre qu'elles sont équivalentes. Dans cette présentation des équivalences, on se limite aux cas des systèmes statiques décrits par des équations linéaires :

équation de modèle : $M X^* = 0$

équation de mesure : $X = H X^* + \varepsilon$

Dans le paragraphe II.5.3, nous avons démontré l'équivalence entre les termes correctifs normalisés et les projections du vecteur parité. Nous allons montré maintenant l'équivalence entre les termes correctifs normalisés, la variation du critère résiduel consécutive à la suppression de la mesure d'une voie et le test GLR.

II.8.1 - CRITERE RESIDUEL

Nous avons présenté dans le paragraphe II.4 une méthode de détection d'erreurs basée sur le test de la cohérence des mesures. Cette méthode repose sur l'étude des résidus de bilan ou écarts de fermeture des équations de bilan.

Le vecteur R des résidus s'exprime d'après (II.40) par :

$$R = M \varepsilon$$

et sa variance V_R s'écrit :

$$V_R = MVM^T$$

Ainsi, la somme des carrés des résidus, pondérés par l'inverse de leurs variances respectives, s'explicite sous forme vectorielle :

$$\Phi_R = R^T V_R^{-1} R \qquad (II.68)$$

Remarque : Si les erreurs de mesure sont des réalisations de variables aléatoires gaussiennes centrées, Φ_R suit une loi du Khi2.

Etudions la sensibilité du critère par rapport à la variance des mesures. Une modification ΔV de la variance V induit une modification $\Delta\Phi_R$ du critère définie par :

$$\Phi_R + \Delta\Phi_R = R^T (M(V + \Delta V)M^T)^{-1} R \qquad (II.69)$$

L'interprétation de la variation du critère est aisée, si on impose la modification d'une seule variance à la fois. On peut alors écrire la matrice ΔV sous la forme :

$$\Delta V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta v_2 \end{pmatrix} \qquad (II.70)$$

De même, on peut également appliquer cette décomposition pour la matrice d'incidence M :

$$M = [M_1\ m_2] \qquad (II.71)$$

Remarque : m_2 est un vecteur colonne.

En injectant (II.70) et (II.71) dans (II.69), on obtient :

$$R^T (M(V + \Delta V)M^T)^{-1} R = R^T (MVM^T + m_2 \Delta v_2 m_2^T)^{-1} R \qquad (II.72)$$

En appliquant le lemme d'inversion de matrice :

$$(A + CBC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(B^{-1} + C^T A^{-1} C)^{-1} C^T A^{-1}$$

l'expression (II.72) se réduit, en posant $K^{-1} = MVM^T$, à :

$$R^T(M(V+\Delta V)M^T)^{-1}R = R^TKR - R^TKm_2(\Delta v_2^{-1}+m_2^TKm_2)^{-1}m_2^T\,KR \qquad (II.73)$$

Le report de (II.73) dans (II.69) traduit la variation du critère :

$$\Delta\Phi_R = -\frac{(R^TKm_2)^2}{\Delta v_2^{-1}+m_2^TKm_2} \qquad (II.74)$$

Remarque : Si on considère le cas limite où la variation de la variance tend vers l'infini ; ce cas correspond à la suppression de la mesure correspondant à cette variance, on obtient :

$$\Delta\Phi_R = -\frac{(R^TKm_2)^2}{m_2^TKm_2} \qquad (II.75)$$

En utilisant la transformation de la matrice d'incidence défini en (II.53) et (II.54) par :

$$A = T\,M\,V^{1/2}$$

on a aussi

$$M = T^{-1} A V^{-1/2} \tag{II.76}$$

La nouvelle matrice d'incidence A se décompose également sous la forme :

$$A = [A_1 \; a_2] \tag{II.77}$$

A partir de cette décomposition, on obtient pour la matrice d'incidence M la décomposition suivante (cf. (II.71)) :

$$M_1 = T^{-1} A_1 V_1^{-1/2} \tag{II.78a}$$
$$m_2 = T^{-1} a_2 v_2^{-1/2} \tag{II.78b}$$

Le report de (II.78) dans (II.74) donne alors :

$$\Delta\Phi_R = -\frac{(R^T T^T a_2)^2}{v_2 \Delta v_2^{-1} + a_2^T a_2} \tag{II.79}$$

Dans le cas d'une variation infinie de la variance, la variation du critère s'écrit :

$$\Delta\Phi_R = -\frac{(R^T T^T a_2)^2}{a_2^T a_2} \tag{II.80}$$

A partir de cette expression, on peut déduire l'influence de la suppression de chaque mesure en considérant que a_2 est l'une des colonnes de la matrice A. On obtient alors le vecteur des variations du critère quand chaque mesure est supprimée :

$$\Delta\Phi_R = - \text{Diag}(A^T A)^{-1} (A^T T R).* (A^T T R) \tag{II.81}$$

où l'opérateur .* définit le produit composante par composante de deux vecteurs.

En tenant compte de la transformation T, on peut exprimer le vecteur des termes correctifs normalisés (II.57) sous forme matricielle de la manière suivante :

$$E_N = \text{Diag}(A^T A)^{-1/2} (A^T T R) \tag{II.82}$$

La comparaison de (II.82) et (II.81) montre que la variation du critère consécutive à la suppression de la mesure d'une voie est le carré, au signe près, du terme correctif normalisé correspondant à cette voie avant suppression de la mesure.

II.8.2 - RAPPORT DE VRAISEMBLANCE GENERALISE (GLR)

Ce test usuel en statistiques, a été introduit en premier lieu pour la détection de défauts dans le domaine de l'aérospatiale et a été appliqué à un domaine plus général par Willsky et Jones [WILL 76]. Si une erreur d'amplitude δ est présente sur la $i^{ème}$ mesure, on peut modifier l'équation de mesure pour écrire :

$$X = X^* + \varepsilon + \delta e_i \tag{II.83}$$

où e_i est la $i^{ème}$ colonne de la matrice identité.

Le test GLR se présente comme un test de rapport de probabilité de l'hypothèse (cf. II.2.1 - Méthode des C_v^{m+1} seuils)

H_0 : il n'y a pas de défaut :

$$E(R) = 0$$
$$Var(R) = M\,V\,M^T$$

contre l'hypothèse

H_i : il y a un défaut sur la $i^{ème}$ mesure

$$E(R) = M\,\delta e_i = \delta\, m_i$$
$$Var(R) = M\,V\,M^T$$

où m_i est la $i^{ème}$ colonne de la matrice d'incidence M.

Nous construisons le rapport de vraisemblance $\mathcal{R}_i$ (II.6) :

$$\mathcal{R}_i = \frac{\mathcal{P}(R/H_i)}{\mathcal{P}(R/H_0)} \qquad (II.84)$$

En utilisant l'hypothèse de densité de probabilité normale pour R et avec $V_R = MVM^T$, nous obtenons :

$$\mathcal{R}_i = \exp[\frac{1}{2} R^T V_R^{-1} R - \frac{1}{2} (R - \delta m_i)^T V_R^{-1} (R - \delta m_i)] \qquad (II.85)$$

L'utilisation du logarithme népérien de $\mathcal{R}_i$ simplifie beaucoup l'expression précédente :

$$s_i = 2\ln(\mathcal{R}_i) = R^T V_R^{-1} R - (R - \delta m_i)^T V_R^{-1} (R - \delta m_i) \qquad (II.86)$$

Calculons l'estimée $\hat{\delta}$ de δ qui maximise s_i :

$$\hat{\delta} = (m_i^T V_R^{-1} m_i)^{-1} (m_i^T V_R^{-1} R) \qquad (II.87)$$

En injectant cette expression dans (II.86), nous obtenons :

$$s_i = \frac{(m_i^T V_R^{-1} R)^2}{m_i^T V_R^{-1} m_i} \qquad (II.88)$$

La comparaison de (II.88) et (II.75) montre que la variation du critère consécutive à la suppression d'une voie est égale, au signe près, au logarithme du GLR correspondant à l'hypothèse où cette mesure est en défaut.

Remarque : La différence de signe s'explique par le fait que l'on cherche à minimiser la variation du critère consécutive à la suppression d'une voie, alors que l'on maximise le logarithme du GLR.

II.8.3 - CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre, l'équivalence de quatre tests communément utilisé pour la détection d'erreurs. Ces quatre tests sont : le vecteur de parité, le vecteur des termes correctifs normalisés, le test GLR et la variation du critère consécutive à la suppression d'une voie.

CONCLUSION

Nous avons présenté au cours de ce chapitre, des méthodes de détection et localisation de capteurs défaillants. Ces méthodes, basées sur l'utilisation de la redondance (matérielle et/ou analytique), ont été exposées pour des systèmes linéaires en régime statique. Après avoir fait une présentation non exhaustive de différentes méthodes, nous avons effectué une étude comparative sur trois méthodes qui nous semblent les plus importantes (espace de parité, termes correctifs normalisés et écarts de fermeture de bilan) montrant leurs forces et faiblesses vis-à-vis de certains paramètres (tel que la précision des capteurs, seuil de détection ...).

Dans le chapitre suivant, nous utiliserons ces trois approches pour proposer des méthodes de détection-localisation de pannes de capteurs pour des systèmes présentant des relations non linéaires entre différentes grandeurs mais toujours en régime statique.

CHAPITRE III

Redondance analytique statique non-linéaire

INTRODUCTION

La plupart des procédés industriels continus ont, en général, un comportement global non-linéaire. Une approximation de cette réalité par des modèles linéaires n'est possible que dans certains cas particuliers de fonctionnement.

Dans le cas d'une surveillance de fonctionnement d'une installation, pour localiser et identifier les éventuels défauts de capteur, les modèles de description du procédé doivent être les plus "exacts" possible.

Pour les systèmes pour lesquels nous disposons d'une connaissance sous forme de relations algébriques liant plusieurs unités physiques, nous présentons les extensions des techniques utilisées pour les systèmes linéaires dans le cas des systèmes non-linéaires.

Notre approche reprend et étend les bases posées par Feeley [FEEL 83]. Dans son article, Feeley décrit une méthode de détection de défauts pour des systèmes ayant des formes de contraintes quelconques, et donc en particulier des contraintes non-linéaires. Cette méthode utilise directement la méthode des moindres carrés telle qu'elle a été présentée par Romagnoli et Stephanopoulos [ROMA 81].

Dans ce chapitre, nous présentons diverses méthodes pour les systèmes non-linéaires, mais toujours dans l'hypothèse du régime statique. La première méthode présentée est une extension des résidus de bilan introduisant également le concept d'agrégation de "nœuds" non-linéaires. Nous présentons ensuite une méthode des termes correctifs normalisés basée sur une optimisation quadratique sous contraintes non-linéaires, que l'on reprend ensuite en utilisant la technique de linéarisation des contraintes. Cette présentation des méthodes fait l'objet d'une étude comparative où, outre les résultats, la complexité des algorithmes à mettre en œuvre est prise en compte.

Nous présentons également, dans le cadre de l'optimisation quadratique sous contraintes, une technique de réconciliation de données.

III.1 - METHODE DES ECARTS DE FERMETURE DES EQUATIONS DE BILAN

Cette méthode, telle qu'elle a été présentée dans le chapitre précédent, peut être facilement exploitée en présence de relations algébriques non-linéaires entre différentes unités physiques.

III.1.1 - DEFINITION

L'essentiel de cette méthode repose sur l'analyse des écarts (ou résidus) des équations de bilan que l'on peut écrire sous l'hypothèse d'un modèle multi-entrées mono-sortie :

$$R(j) = M_j (E_1, ..., E_n) - S$$

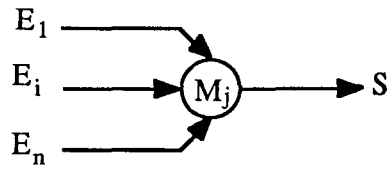


Fig. III.1 : Exemple de modèle.

Pour l'ensemble du réseau, on définit le vecteur R des résidus par l'expression suivante :

$$R = f(X) \qquad \text{(III.1)}$$

où X représente l'ensemble des entrées E_i et sorties S des noeuds élémentaires et f est une fonction vectorielle liant les différentes composantes de X (f sera appelée indifféremment par la suite contraintes ou liaisons du système).

La $j^{ème}$ composante de R représente la valeur numérique de l'erreur de bouclage de la $j^{ème}$ liaison du système.

En supposant les erreurs de mesures distribuées selon une loi normale centrée de variance connue V, calculons les propriétés statistiques du vecteur R.

Le vecteur des mesures X est lié, en l'absence de défaut, au vecteur des grandeurs vraies X* et au vecteur des erreurs de mesures ε par la relation (II.38) :

$$X = X^* + \varepsilon$$

Pour calculer l'espérance mathématique de R, on utilise un développement de Taylor, limité à l'ordre 1, des équations de liaisons du système. On justifie la limitation à l'ordre 1 par le fait que le bruit de mesure doit être un infiniment petit des mesures vraies.

$$f_j(X) = f_j(X^* + \varepsilon)$$
$$f_j(X) = f_j(X^*) + \left(\frac{\partial f_j}{\partial X^{*T}}\right)\varepsilon \qquad \text{(III.2)}$$

$$E\left(f_j(X)\right) = E\left(f_j(X^*)\right) + E\left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial X^{*T}}\right)\varepsilon\right)$$

Comme les grandeurs vraies vérifient parfaitement les liaisons, il reste :

$$E\left(f_j(X)\right) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial X^{*T}}\right)E(\varepsilon) \qquad \text{(III.3)}$$

Nous déduisons de (III.3) l'espérance de R :

$$E(R) = 0 \qquad \text{(III.4)}$$

Le calcul de la variance des résidus donne :

$$V_R = Var(R) = E(R\,R^T)$$
$$V_R = E\left([f(X)]\,[f(X)]^T\right) \qquad \text{(III.5)}$$

En particulier :

$$V_R(i, j) = E\left(f_i(X)\, f_j(X)\right)$$

$$V_R(i, j) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X^{*T}}\right) V \left(\frac{\partial f_j}{\partial X^{*T}}\right)^T$$

et de façon générale :

$$V_R = g(X^*)\, V\, g(X^*)^T \quad \text{avec } g(X^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial X^{*T}}\right) \qquad \text{(III.6)}$$

Si on dispose d'une estimation $\hat{X}$ de X* (par exemple, obtenue par réconciliation des mesures), on peut utiliser l'expression approchée de la variance :

$$V_R = g(\hat{X})\, V\, g(\hat{X})^T \qquad \text{(III.7)}$$

Remarquons que cette expression peut être calculée à partir d'une campagne de mesure limitée à une seule observation.

Ainsi pour l'équation :

$$f(X) = \sqrt{X(1)^2 - X(2)^2} - X(3)$$

et avec :

$$X = [149{,}21 \;\; 78{,}29 \;\; 131{,}51]^T$$

$$V = \begin{pmatrix} 55{,}66 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 15{,}39 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 43{,}24 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$R = -4{,}49$$

$$\hat{X} = [151{,}37 \;\; 77{,}92 \;\; 129{,}78]^T$$

$$g(\hat{X}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right) = [1{,}17 \;\; -0{,}60 \;\; -1{,}00]$$

$$V_R = 124{,}51$$

Pour pouvoir comparer les différentes composantes du vecteur R entre elles, nous définissons le vecteur des écarts normalisés R_N par :

$$R_N(i) = \frac{R(i)}{\sqrt{V_R(i,i)}} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.8)}$$

Si l'hypothèse de normalité de la distribution des erreurs de mesure est respectée, chaque composante du vecteur R_N est distribuée selon une loi normale centrée et réduite.

La probabilité d'obtenir un écart de fermeture inférieur à la valeur absolue de l'écart concerné est donnée par :

$$P\left(|x| \leq |R_{N(i)}| \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-|R_{N(i)}|}^{|R_{N(i)}|} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \qquad \text{(III.9)}$$

Cette probabilité, jugée par rapport au niveau de confiance fixé, permet d'accepter ou de rejeter l'hypothèse de défaut sur l'écart de fermeture du nœud i.

Ce test permet de situer les nœuds ayant des écarts de fermeture particulièrement élevés.

Comme pour les systèmes linéaires, on utilise ce test sur les noeuds et les agrégations de noeuds pour la détection-localisation des voies suspectes. Ainsi, pour l'exemple précédent nous obtenons R_N = -0,40 permettant de conclure que le vecteur X n'est pas entaché d'erreur grossière.

III.1.2 - RESULTATS NUMERIQUES

Afin de tester la robustesse de nos estimateurs, nous avons effectué des essais sur trois réseaux avec des modèles de contraintes différents et des campagnes de mesure comportant 500 observations. Les deux premiers réseaux peuvent représenter un procédé présentant de la redondance matérielle et analytique.

Nous générons un bruit distribué aléatoirement selon une loi normale centrée et de variance égale à la variance de la mesure (dans ces exemples, on a fixé la précision des mesures à 5 %).

Le vecteur de bruit ainsi obtenu est ajouté au vecteur des mesures pour former un vecteur de pseudo-mesures. Nous avons créé ainsi pour chaque réseau un tableau de 500 vecteurs de mesures.

Pour chaque observation, nous allons calculer le vecteur des résidus R (III.1) et la diagonale de la matrice de variance des résidus V_R (III.6).

A partir des 500 résultats, nous allons calculer la moyenne et la variance expérimentale du vecteur des résidus R et du vecteur formé par la diagonale de la matrice V_R de variance des résidus, permettant ainsi une comparaison directe entre la moyenne de ce dernier vecteur et la variance expérimentale du vecteur des résidus.

Nous allons également comparer, pour chaque résidu, la distribution expérimentale par rapport à la distribution normale centrée, que le résidu est sensé suivre sous l'hypothèse de validité de notre développement. Cette comparaison est basée sur un test portant sur la moyenne, la variance ainsi que sur les coefficients de Fisher (symétrie et aplatissement), que l'on calcule à partir des moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 de la distribution expérimentale [C.E.A. 78]. Les quatre coefficients calculés (concernant la moyenne, la variance, la symétrie et l'aplatissement) doivent suivre une loi normale centrée réduite pour que l'hypothèse précédente soit confirmée.

L'hypothèse de nullité de chacun de ces coefficients, a_i i=1, ..., 4, est testée au seuil α par un test bilatéral :

$$- u_{1-\alpha/2} < a_i < u_{1-\alpha/2}$$

où $u_{1-\alpha/2}$ correspond à la valeur de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite égale à $1 - \alpha/2$.

Si les tests sur les quatre coefficients sont concluants, on admet que la distribution est normale.

Les résultats seront présentés de la manière suivante :

- chaque distribution expérimentale est représentée par un histogramme (calculé sur 39 classes), ajusté par la loi normale théorique,

- l'affichage des quatre paramètres (moy, var, u1, u2) résultant des tests portant respectivement sur la moyenne, la variance, la symétrie et l'aplatissement.

La décision d'estimer que la distribution expérimentale suit une loi normale se fera sous l'hypothèse H_0 de normalité avec un seuil de confiance $\alpha = 0,05$ (soit un seuil critique $\alpha_c = 1,96$).

Avant d'effectuer les tests sur les mesures simulées, nous avons testé la bonne normalité de notre générateur de nombres aléatoires. Ce premier test a porté sur un vecteur de bruit de 500 composantes (cette distribution est supposée suivre une loi normale centrée réduite), puis sur le vecteur centré, réduit obtenu à partir du vecteur initial.

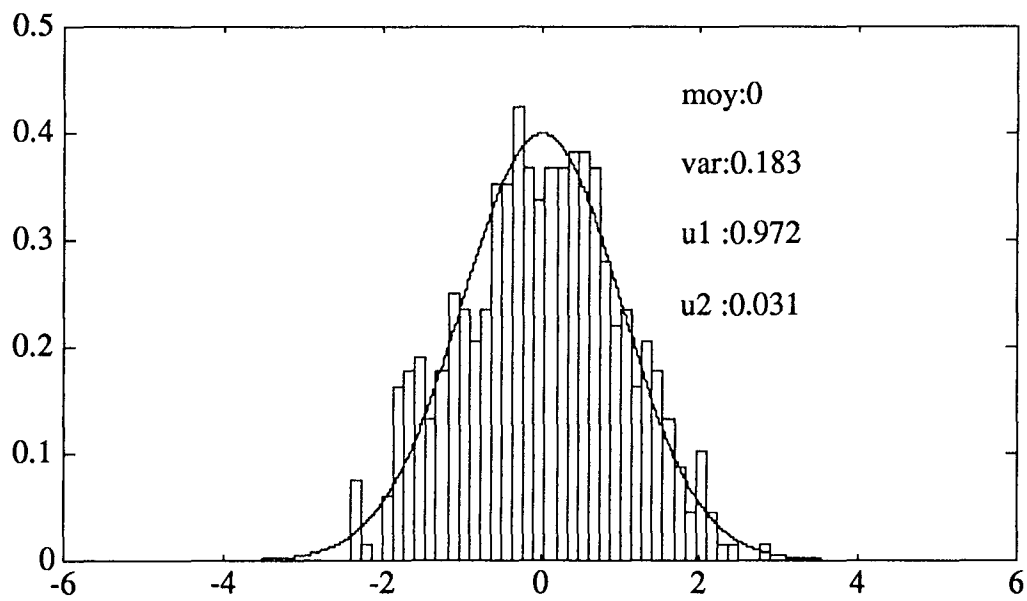


Fig. III.2a : Test de normalité du vecteur bruit.

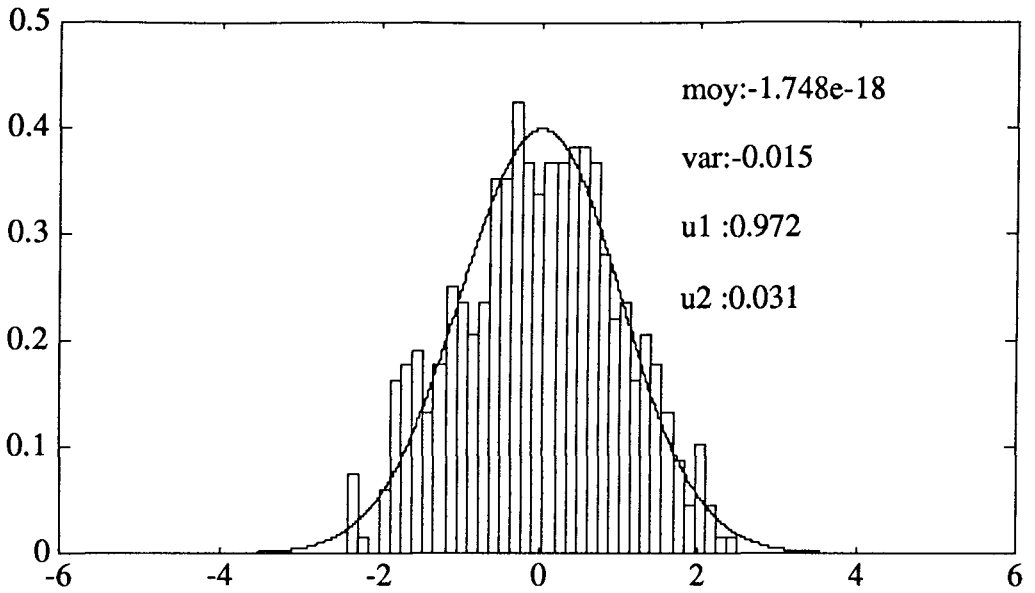


Fig. III.2b : Test de normalité du vecteur bruit centré et réduit.

Sur cet exemple, on trouve bien les résultats des tests dans l'intervalle de confiance choisi ([- 1,96, 1,96]). On remarque également que le fait de centrer et réduire notre vecteur initial ne modifie pas la forme de la distribution expérimentale (caractérisée par la symétrie et l'aplatissement).

III.1.2.a - Réseau n° 7

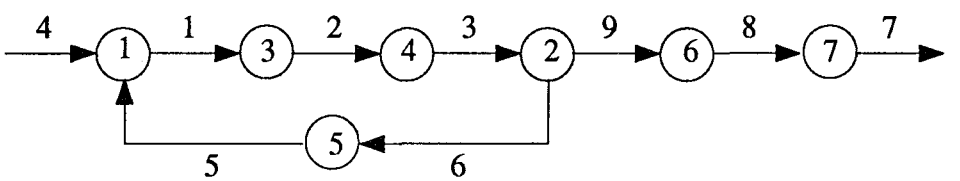


Fig. III.3 : Réseau n° 7.

$f_1(X) = 0{,}0045 * X(4) * X(5)^2 - X(1)$

$f_2(X) = X(3) - 280{,}86 * \frac{X(6)}{X(9)}$

$f_3(X) = X(1) - X(2)$

$f_4(X) = X(2) - X(3)$

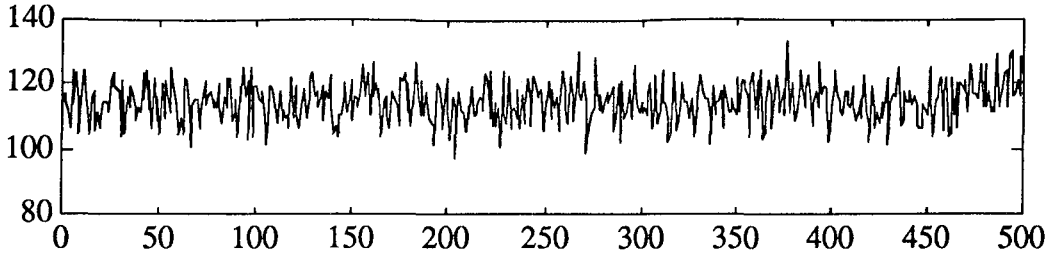
$f_5(X) = X(6) - X(5)$

$f_6(X) = X(9) - X(8)$

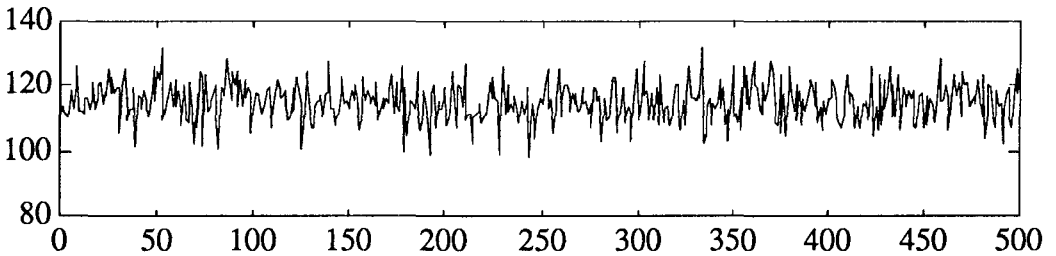
$f_7(X) = X(8) - X(7)$

Le vecteur des mesures est :

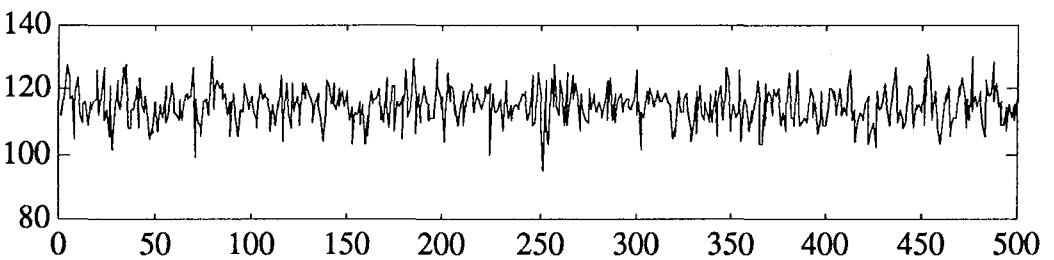
$X° = [111{,}3 \;\; 110{,}6 \;\; 112{,}4 \;\; 7{,}29 \;\; 58{,}39 \;\; 60{,}25 \;\; 151{,}46 \;\; 150{,}69 \;\; 152{,}96]^T$



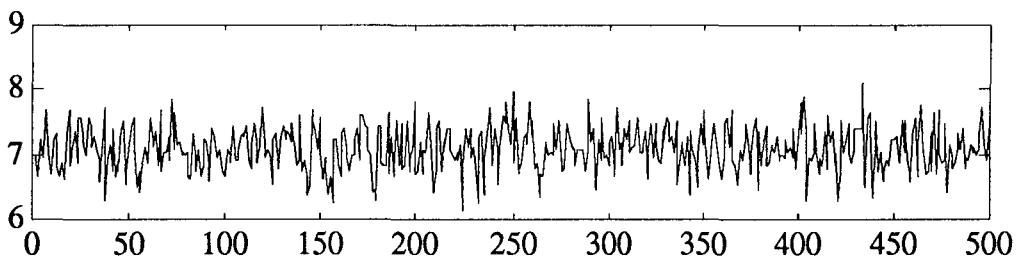
Mesures voie n° 1



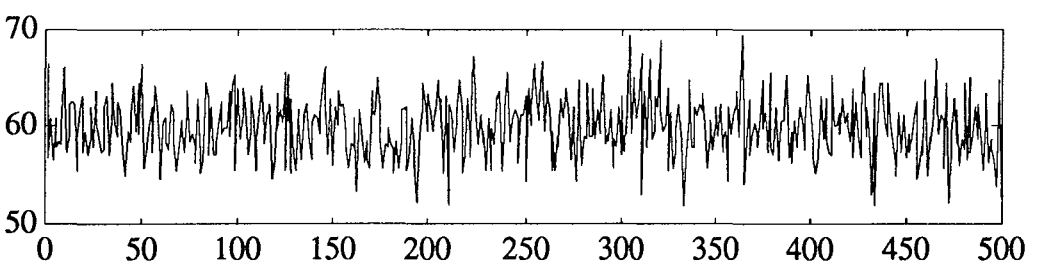
Mesures voie n° 2



Mesures voie n° 3



Mesures voie n° 4



Mesures voie n° 5

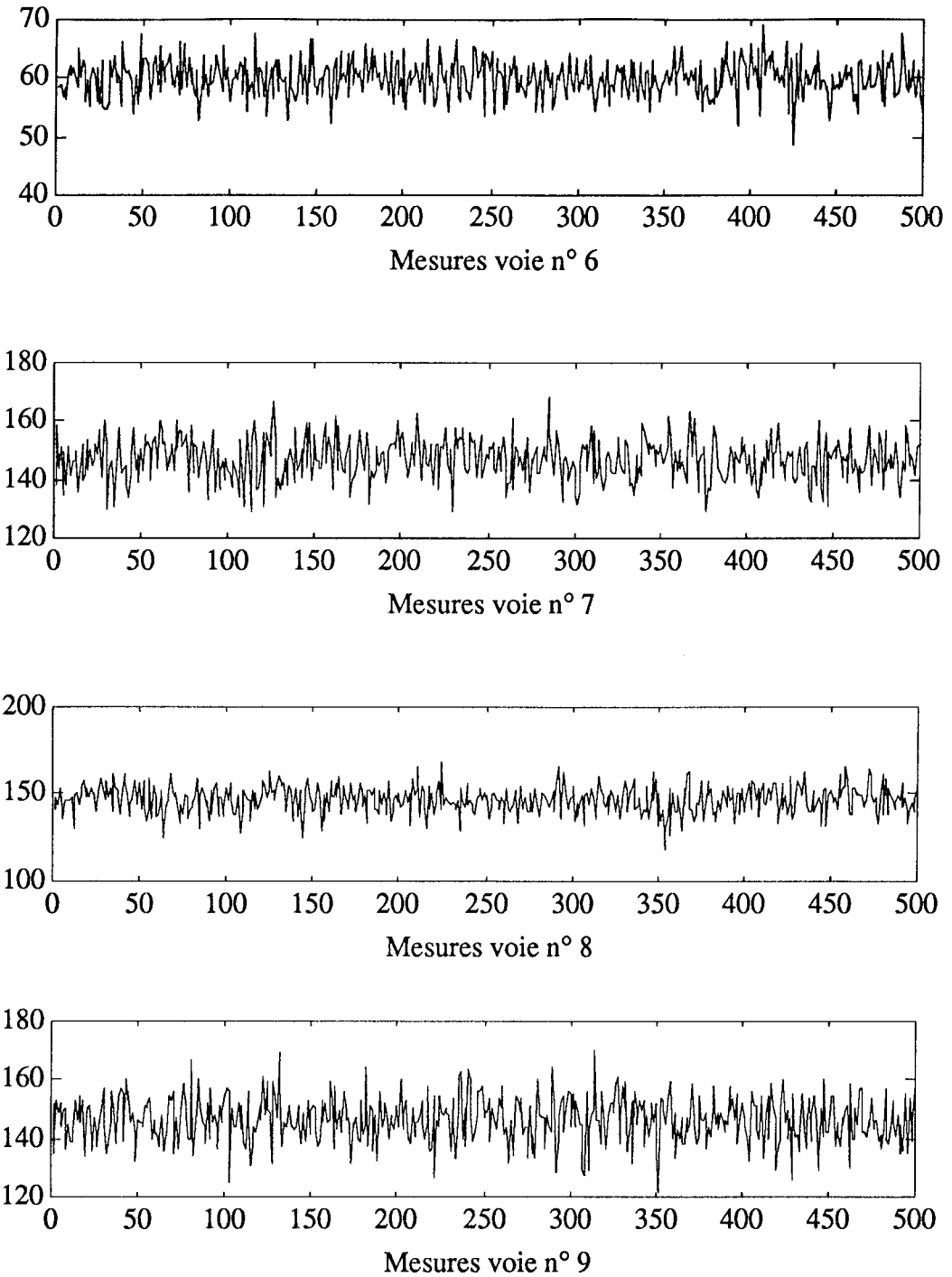


Fig. III.4 : Représentation des mesures du réseau n° 7.

Résidus		Variance des Résidus	
moyenne	variance	moyenne	variance
0,40	224,45	200,5	1503,3
- 0,71	105,51	100,2	114,8
- 0,46	71,28	66,1	23,5
0,24	71,53	66,2	21,3
- 0,04	17,63	18,0	1,8
- 0,46	124,30	107,5	62,7
- 0,14	112,35	107,9	57,8

Tableau 16 : Moments statistiques expérimentaux.

Remarque : Les résultats de la variance des résidus sont représentés délibérément avec une précision moindre que les résultats des résidus car la variance des résidus est obtenue par le calcul d'un estimateur. Pour les deux premiers résidus, issus de contraintes non-linéaires, on constate la dépendance entre la variance des résidus et les mesures (forte dispersion de la variance).

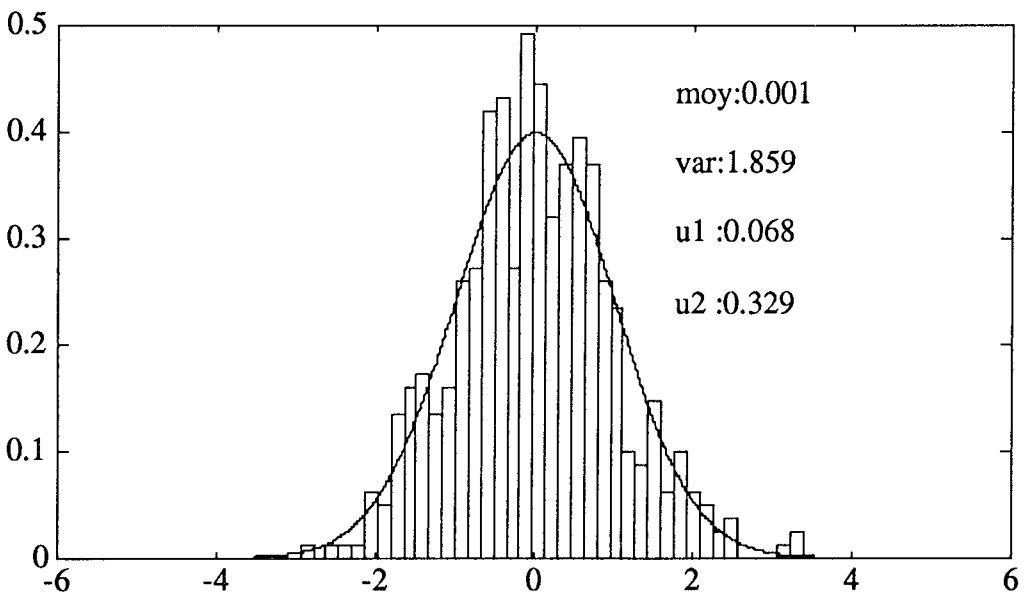


Fig. III.5a : Comparaison à une loi normale du résidu 1.

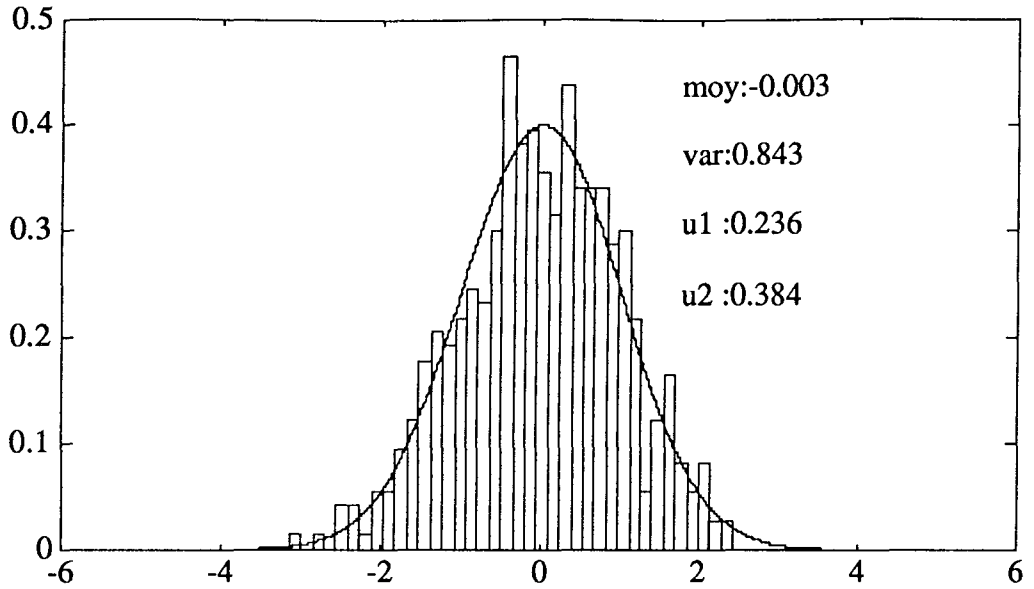


Fig. III.5b : Comparaison à une loi normale du résidu 2.

On remarque que les quatre coefficients de comparaison sont compris dans l'intervalle de confiance ([-1,96 , 1,96]), pour le résidu 1 et le résidu 2.

III.1.2.b - Réseau n° 8

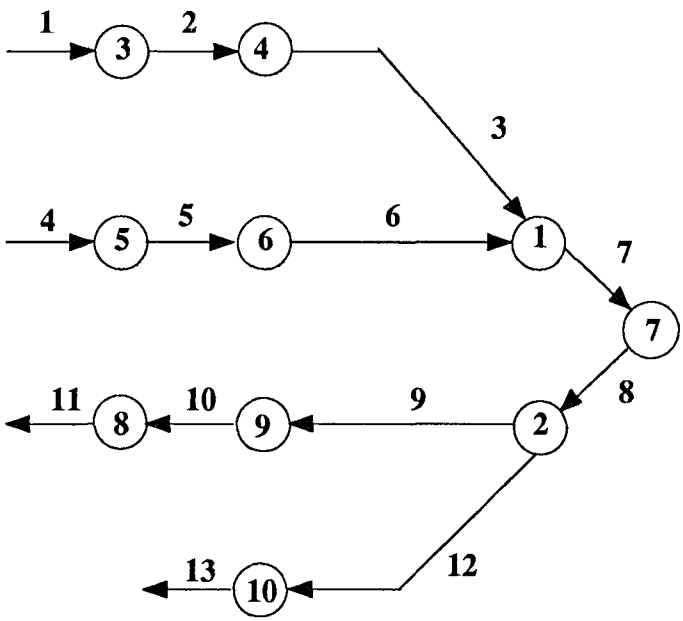


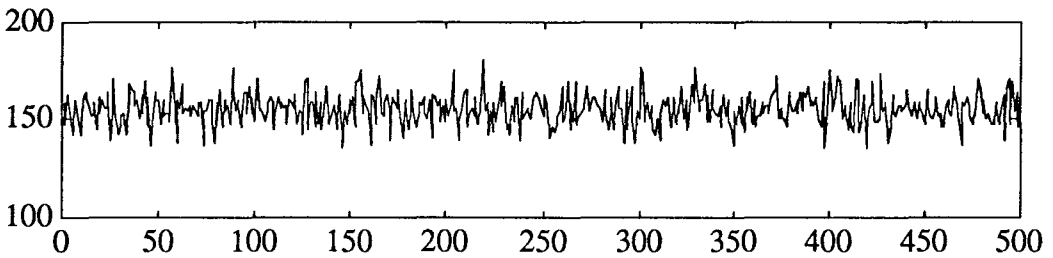
Fig. III.6 : Réseau n° 8.

$f_1(X) = \sqrt{X(3)^2 - X(6)^2} - X(7)$
$f_2(X) = X(8) - \left(X(9) + X(12)^2\right)$
$f_3(X) = X(1) - X(2)$
$f_4(X) = X(2) - X(3)$
$f_5(X) = X(4) - X(5)$
$f_6(X) = X(5) - X(6)$

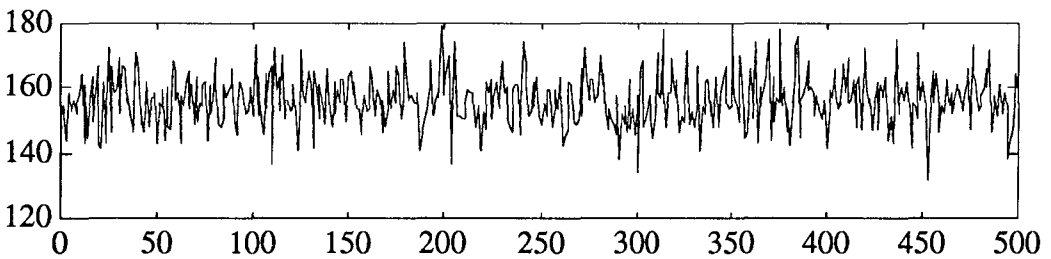
$f_7(X) = X(7) - X(8)$
$f_8(X) = X(10) - X(11)$
$f_9(X) = X(9) - X(10)$
$f_{10}(X) = X(12) - X(13)$

Le vecteur initial des mesures est :

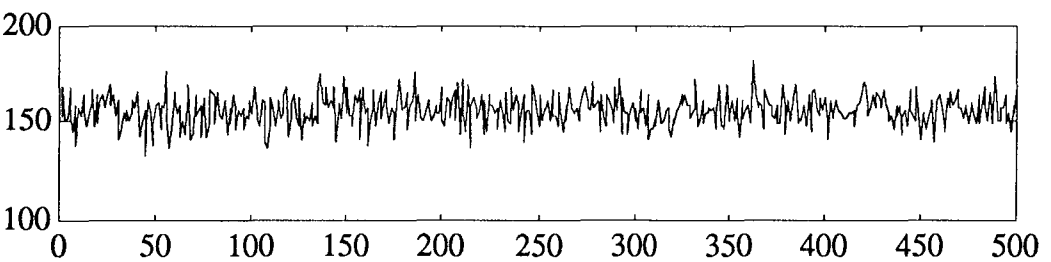
$X° = [156\ 156\ 156\ 77{,}29\ 77{,}29\ 77{,}29\ 135\ 135\ 35\ 35\ 35\ 10\ 10]^T$



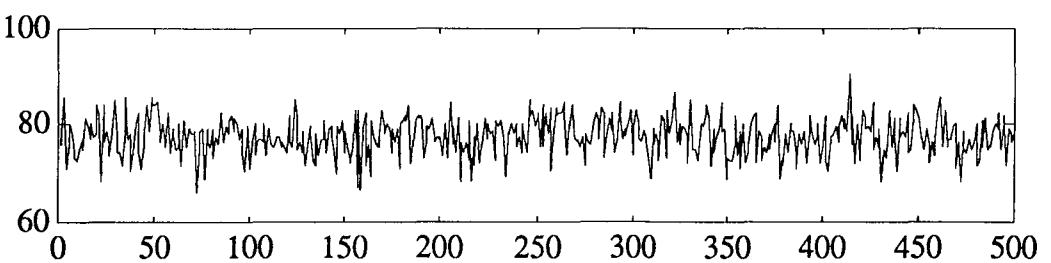
Mesures voie n° 1



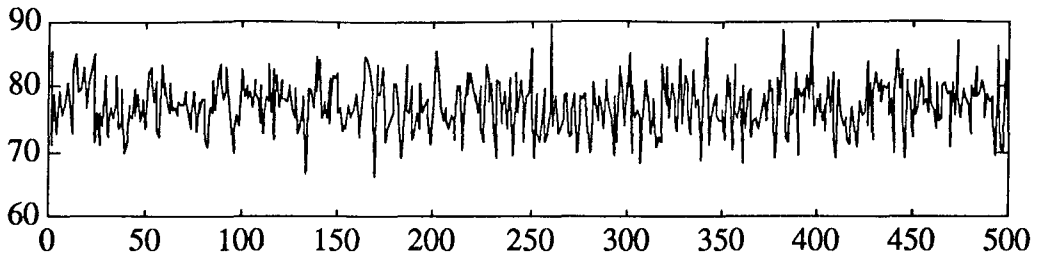
Mesures voie n° 2



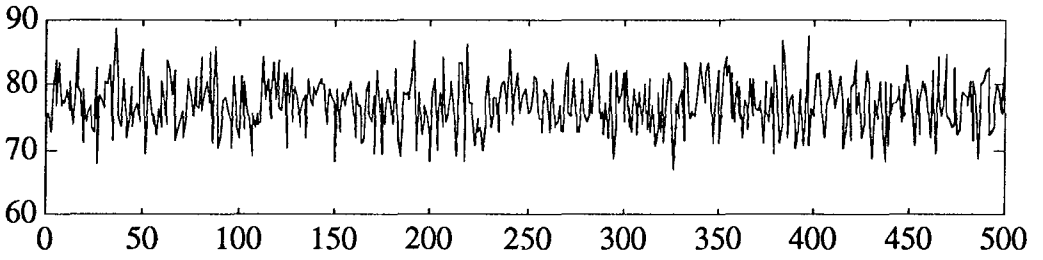
Mesures voie n° 3



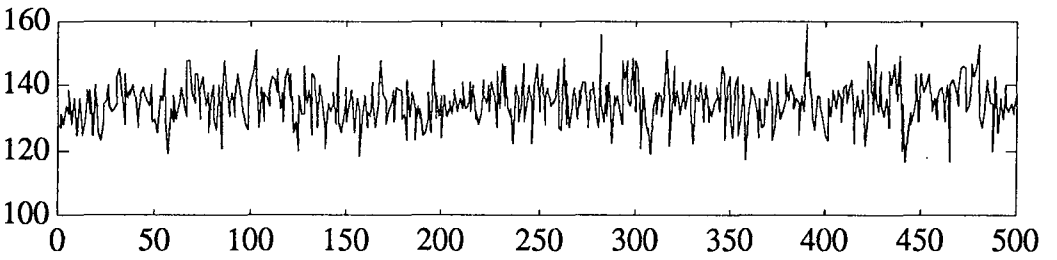
Mesures voie n° 4



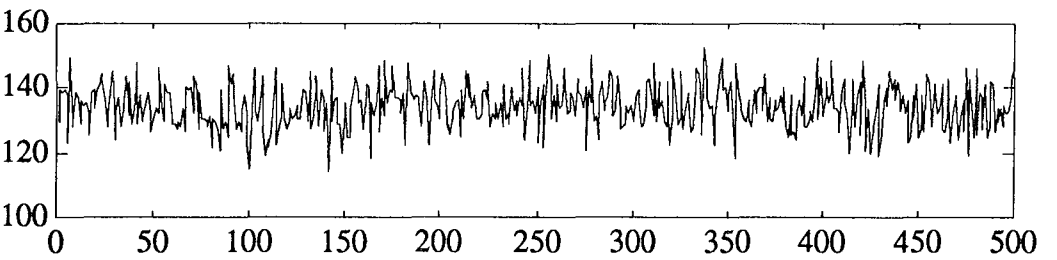
Mesures voie n° 5



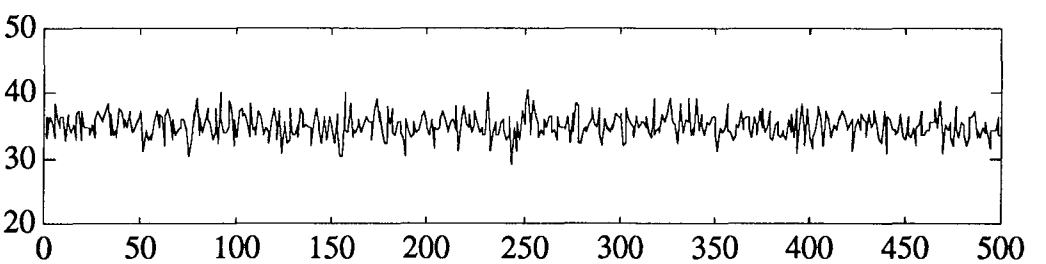
Mesures voie n° 6



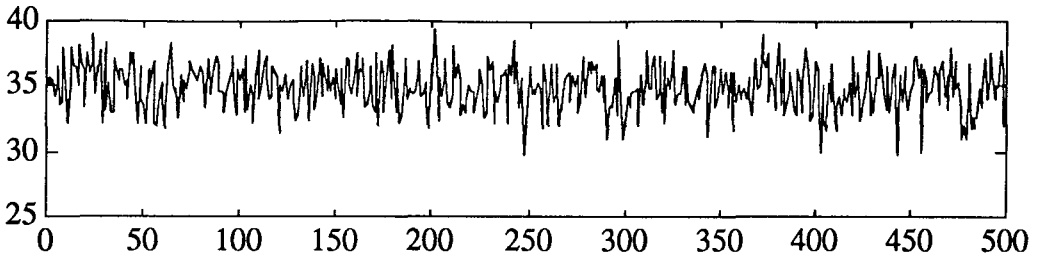
Mesures voie n° 7



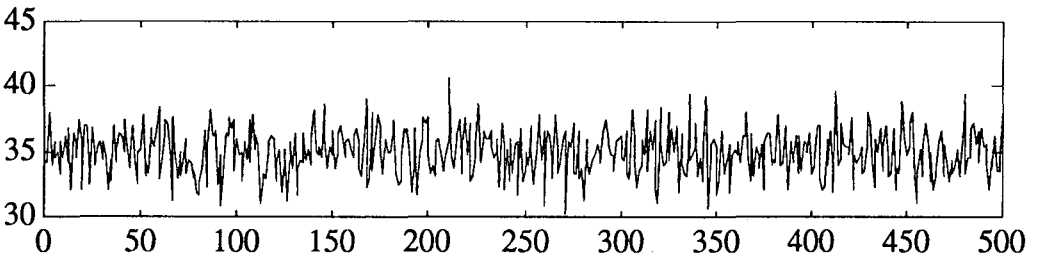
Mesures voie n° 8



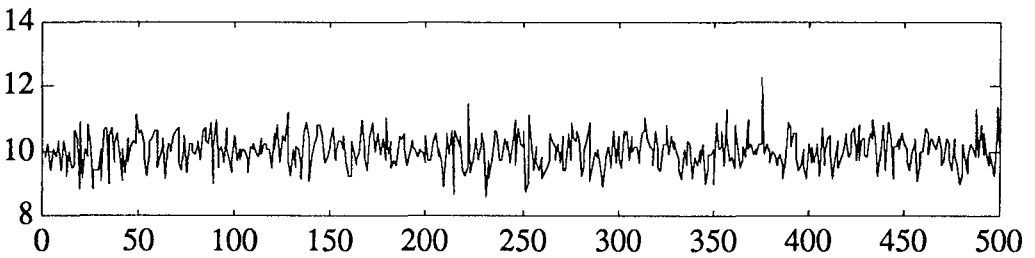
Mesures voie n° 9



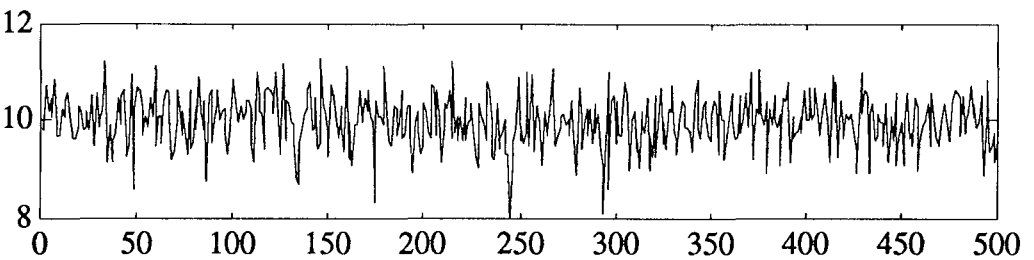
Mesures voie n° 10



Mesures voie n° 11



Mesures voie n° 12



Mesures voie n° 13

Fig. III.7 : Représentation des mesures du réseau n° 8.

Résidus		Variance des Résidus	
moyenne	variance	moyenne	variance
0,80	134,16	131,5	57,0
- 1,17	160,62	150,4	457,3
- 0,63	138,34	122,2	73,9
0,30	119,83	122,4	80,4
0,34	28,52	30,0	4,8
0,17	31,39	29,8	4,6
0,50	101,04	90,8	38,8
0,04	6,55	6,1	0,2
0,03	6,40	6,1	0,2
0,03	0,51	0,5	0,0

Tableau 17 : Moments statistiques expérimentaux.

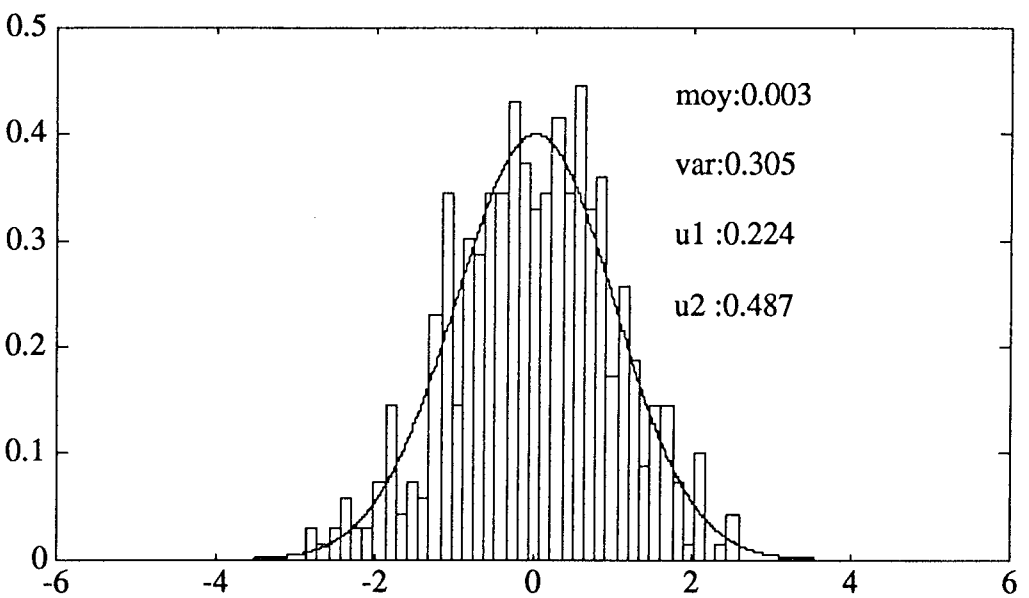


Fig. III.8a : Comparaison à une loi normale du résidu 1.

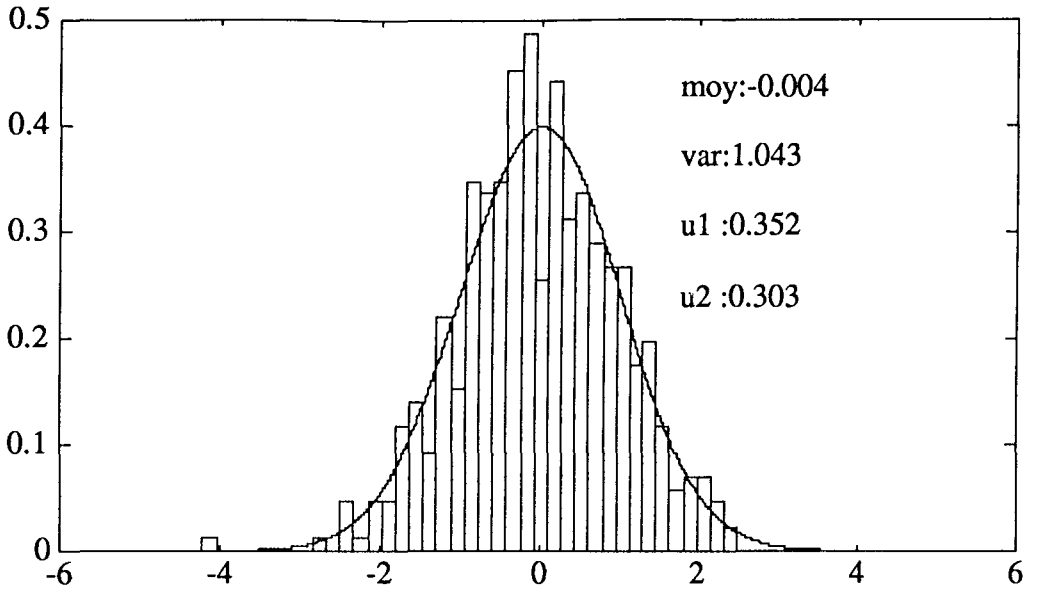


Fig. III.8b : Comparaison à une loi normale du résidu 2.

Les valeurs des coefficients du test montrent que l'hypothèse de normalité est tout à fait acceptable pour les contraintes linéarisées.

Remarque : les différents essais effectués, pour tester l'hypothèse de normalité des contraintes linéarisées, montrent que cette hypothèse est acceptable pour des contraintes continûment dérivables et monotones dans un sous-ensemble où les mesures sont définies (voir Annexe B : Introduction et position du problème).

III.1.2.c - Réseau n° 2

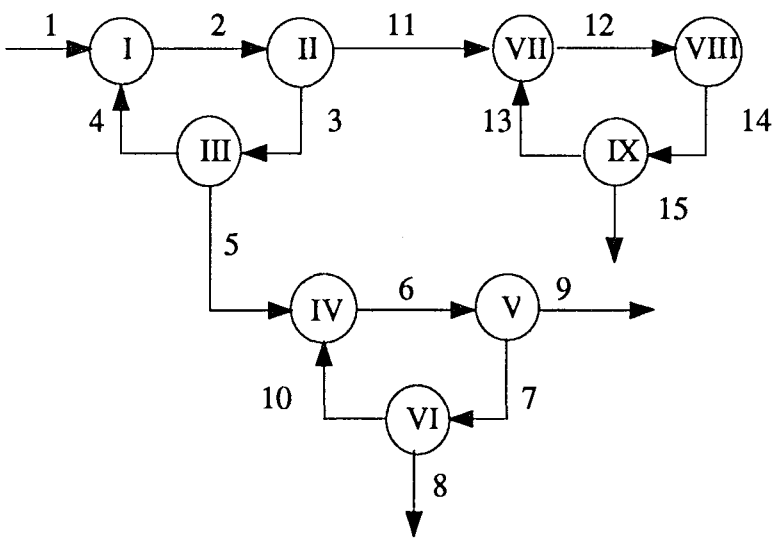


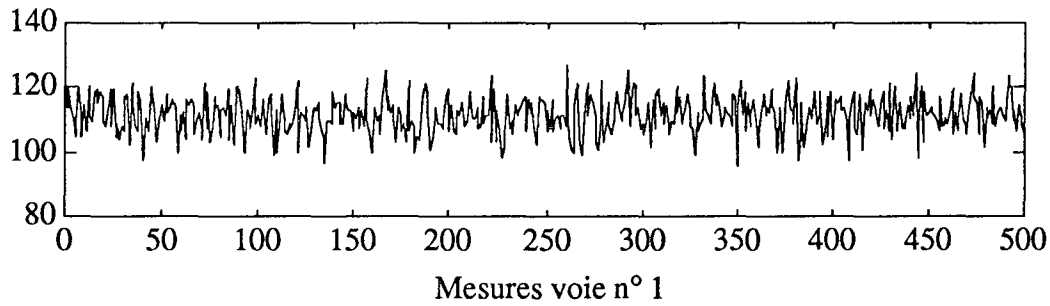
Fig. III.9 : Réseau n° 2.

$f_1(X) = X(1) - X(2) - X(4)$
$f_2(X) = X(2) - X(3) - X(11)$
$f_3(X) = X(3) + X(4) - X(5)$
$f_4(X) = X(5) + X(7) - X(6)$

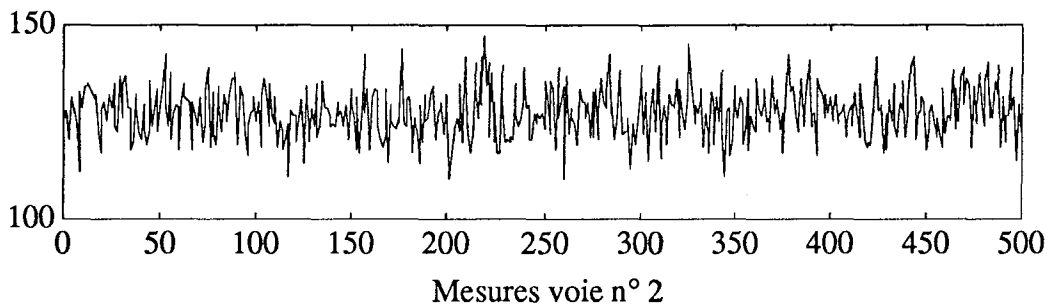
$f_5(X) = X(6) - X(8) - X(10)$
$f_6(X) = X(8) - X(7) - X(9)$
$f_7(X) = X(11) + X(14) - X(12)$
$f_8(X) = X(12) - X(13)$
$f_9(X) = X(13) - X(14) - X(15)$

Le vecteur des mesures est :

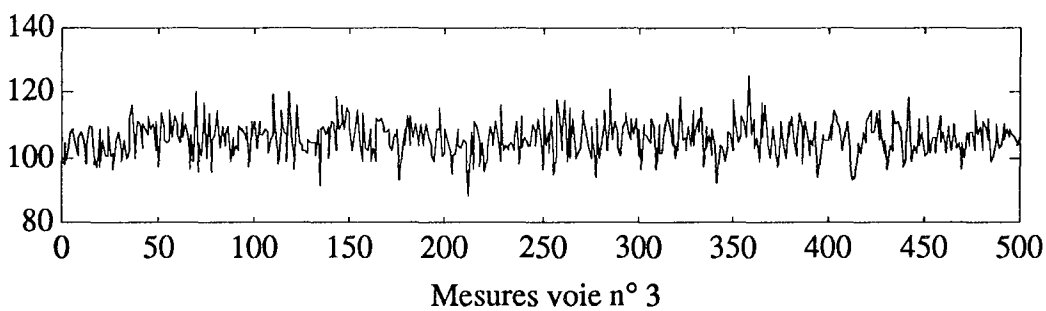
$X° = [111{,}3\ 127{,}6\ 106{,}4\ 18{,}2\ 86{,}3\ 110{,}5\ 20{,}5\ 72{,}2\ 49{,}4\ 37{,}9\ 23{,}8\ 36{,}4\ 37{,}9\ 13{,}6\ 25{,}6]^T$



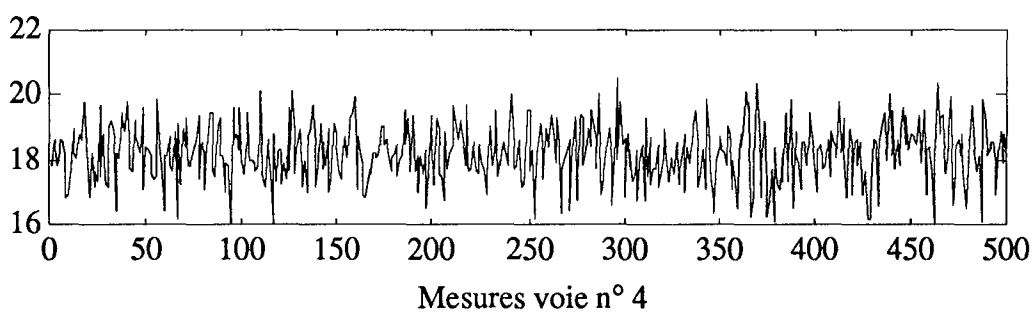
Mesures voie n° 1



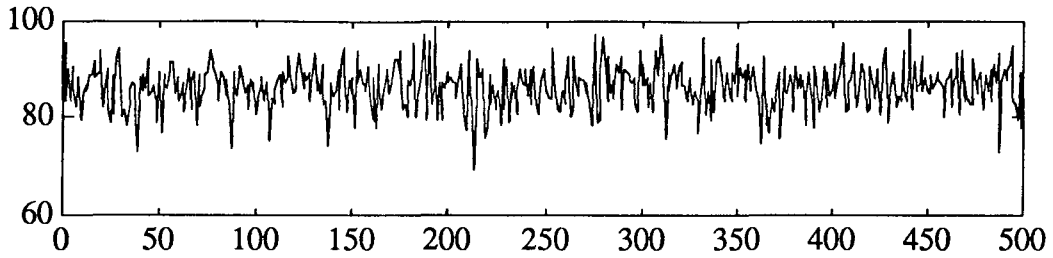
Mesures voie n° 2



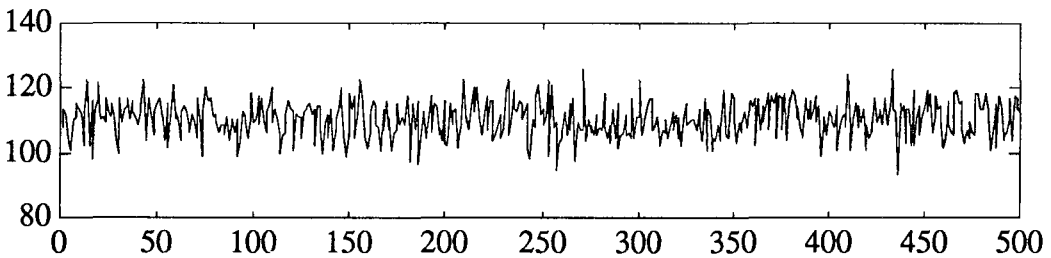
Mesures voie n° 3



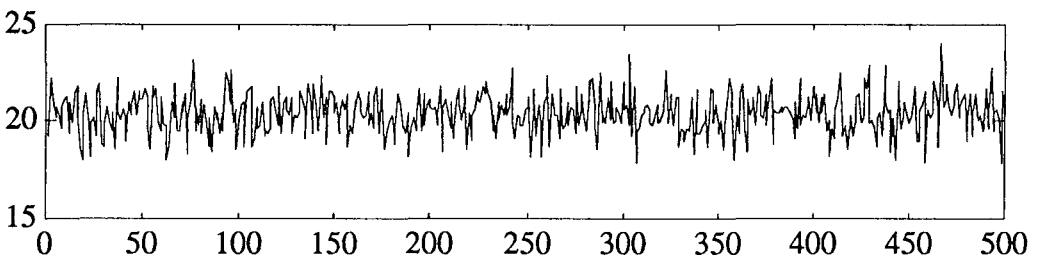
Mesures voie n° 4



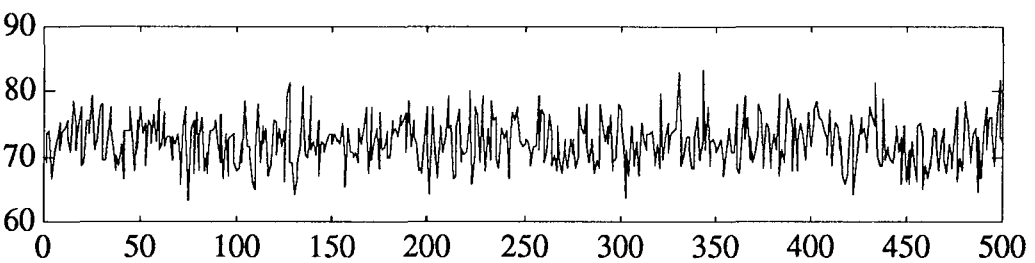
Mesures voie n° 5



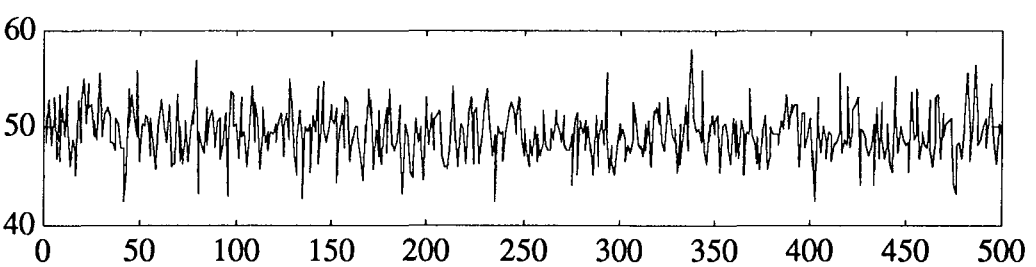
Mesures voie n° 6



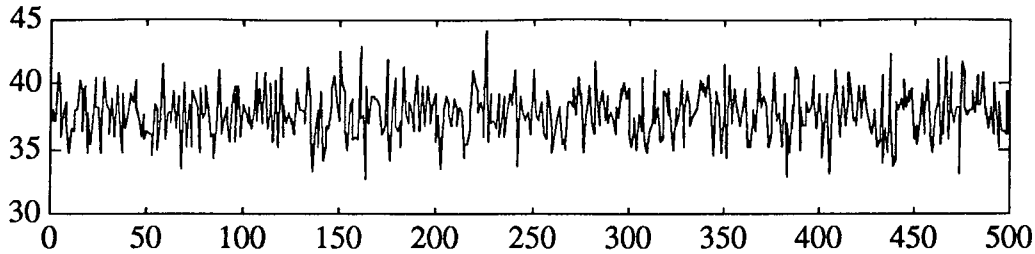
Mesures voie n° 7



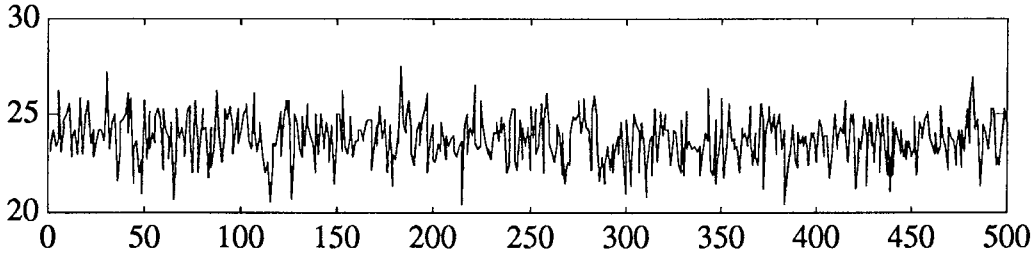
Mesures voie n° 8



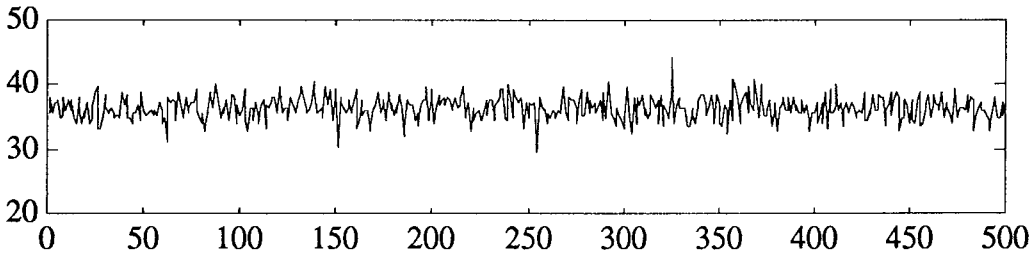
Mesures voie n° 9



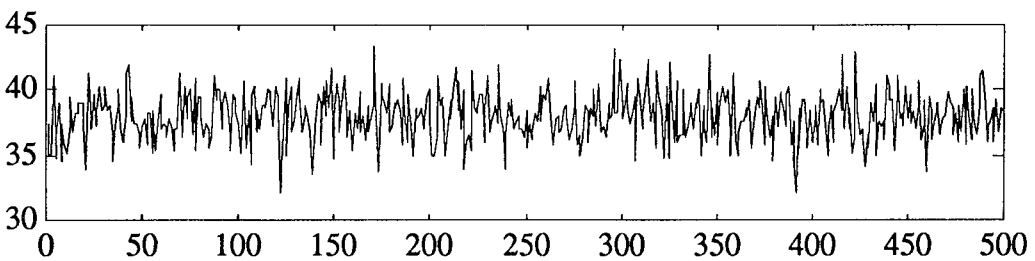
Mesures voie n° 10



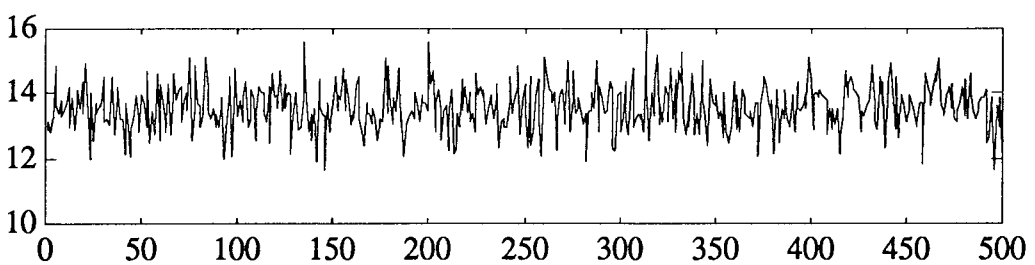
Mesures voie n° 11



Mesures voie n° 12



Mesures voie n° 13



Mesures voie n° 14

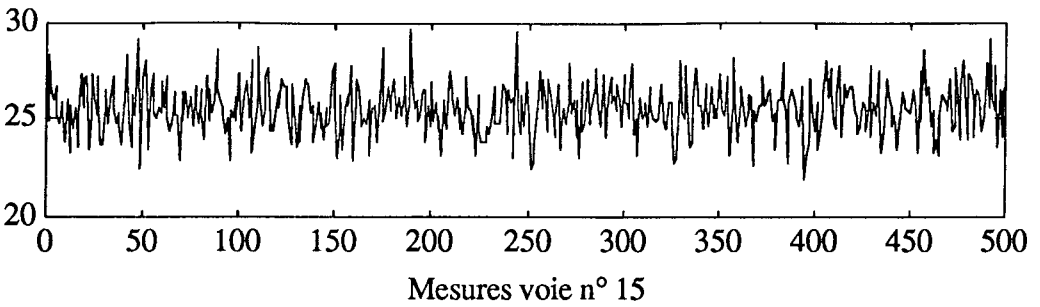


Fig. III.10 : Représentation des mesures du réseau n° 2.

Résidus		Variance des Résidus	
moyenne	variance	moyenne	variance
- 34,16	79,49	72,7	26,2
- 2,35	77,10	70,4	23,8
37,65	48,83	47,8	12,1
- 3,41	55,72	50,4	12,8
0,41	49,22	47,3	11,6
2,40	20,84	20,3	2,2
1,04	5,66	5,2	0,1
- 1,62	7,10	6,9	0,2
- 1,18	5,64	5,7	0,2

Tableau 18 : Moments statistiques expérimentaux.

III.1.2.d - Conclusion

Sur ces trois exemples numériques, on montre la bonne qualité de l'estimation de la variance des résidus grâce à la bonne proximité des valeurs de la variance des résidus et de la moyenne de la variance des résidus (calculée analytiquement), ces deux valeurs étant calculées sur un échantillon de 500 vecteurs de mesures. La dispersion de la variance des résidus provient de l'estimation de la matrice de variance des erreurs de mesures pour chaque vecteur de mesure et non d'une estimation à partir des 500 vecteurs de mesures, liant ainsi l'estimation de la variance des résidus à chaque vecteur de mesures.

III.1.3 - APPLICATION A LA DETECTION - LOCALISATION

III.1.3.a - Présentation de la méthode

Dans le cas linéaire, la détection se fait par la comparaison des composantes du vecteur des résidus normalisés par rapport à un seuil (défini par un niveau de confiance α d'erreur de type I). Les essais précédents nous ont permis de montrer que l'on pouvait appliquer cette méthode sur les résidus issus d'équations de contrainte non-linéaire (pour des contraintes respectant les hypothèses formulées précédemment). En

effet, les résidus suivent, en première approximation, une loi normale de variance $g(X)Vg(X)^T$.

La localisation, quant à elle, est effectuée par recoupement des informations issues des agrégations nodales. Dans le cas de contraintes non-linéaires, la localisation des voies en défaut nécessite la fusion d'équations non nécessairement linéaires. Il faut noter d'une part que ces fusions, qui correspondent à l'élimination d'une variable entre deux équations, ne sont pas toujours aisées du point de vue analytique, d'autre part celles-ci ne sont pas toujours réalisables ou ne sont pas uniques.

Si l'on note E_i l'ensemble des indices des variables dont l'équation i dépend explicitement et $E_{i,j}$ ($= E_i \cap E_j$) l'intersection des ensembles d'indices de deux équations, la fusion de deux équations i et j n'est possible que si $E_{i,j} \neq \emptyset$. Alors pour chaque équation, nous cherchons à expliciter (si c'est possible) les variables X(p) ($p \in E_{i,j}$) en fonction des autres variables X(i) ($i \in E_i$ et $i \neq p$).

En général, la fusion de deux équations entraîne la suppression d'une seule variable X(p), à la condition que l'on puisse expliciter cette variable en fonction des autres variables X(i) à partir d'une équation au moins. Il convient de remarquer que la fusion de deux équations est possible de différentes manières suivant les variables que l'on supprime. L'équation résultante de la fusion est obtenue par substitution de la relation dans l'autre équation.

Considérons, par exemple, les deux équations suivantes :

$$f_1(X) = X(1) - \ln(X(2)) - X(3)X(2)^2$$
$$f_2(X) = X(4) - X(2)^2X(5)$$

$$E_1 = \{1, 2, 3\},\ E_2 = \{2, 4, 5\}$$

$$E_{1,2} = \{2\}$$

Par fusion des équations 1 et 2, on supprime la deuxième variable, on cherche donc à expliciter la variable X(2) en fonction des autres variables. A partir de l'équation 1, cette relation n'est pas possible à obtenir. Mais de l'équation 2, on tire $X(2) = \sqrt{\frac{X(4)}{X(5)}}$ que l'on reporte dans l'équation 1.

Ainsi l'équation obtenue par la fusion est :

$$f_3(X) = X(1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X(4)}{X(5)}\right) - X(3)\frac{X(4)}{X(5)}$$

Comme dans le cas linéaire, la recherche des voies en défaut nécessite trois étapes (identique au cas linéaire). La première est le calcul du vecteur des écarts normalisés et la recherche des composantes de ce vecteur hors de l'intervalle de confiance, donnant ainsi les nœuds en défaut. La suivante est identique à la première, mais pour chaque fusion d'équations en défaut. Enfin, la dernière étape permet la localisation des voies suspectes par le produit colonne par colonne des coefficients affectés aux différentes voies (cf. § II.4.1).

III.1.3.b - Mise en œuvre de la méthode [KRAT 90]

Considérons l'exemple de la figure III.11 décrit par les équations :

$$f_1(X) = 0{,}0045\, X(1)\, X(2)^2 - X(3)$$
$$f_2(X) = X(3) - 280{,}86\, \frac{X(2)}{X(4)}$$
$$f_3(X) = X(4) - \ln(X(6)) - X(6)^2 X(5)$$
$$f_4(X) = X(6)^2 - X(6)X(7) - X(8)$$

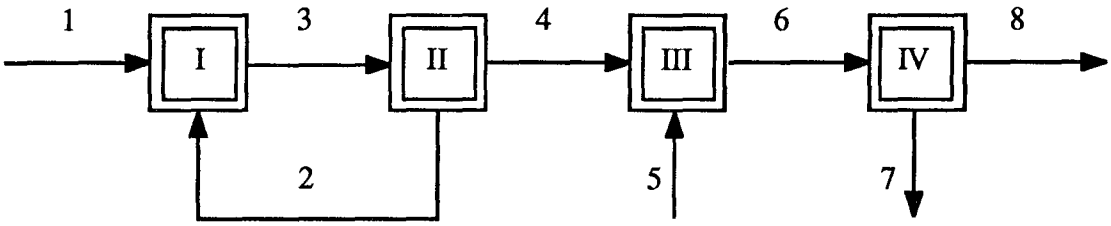


Fig. III.11 : Réseau d'application.

Le tableau 19 nous donne les mesures, les écarts-types associés ainsi que les mesures biaisées simulées (biais sur les voies 3 et 6 exprimés en pourcentage de la mesure non biaisée).

N° voie	Mesure	Ecart-type	Mesure biaisée	Biais
1	7,18	0,36	7,18	
2	60,31	2,92	60,31	
3	111,39	5,59	169,93	52,55 %
4	141,49	7,13	141,49	
5	0,039	0,002	0,039	
6	62,64	3,11	82,46	31,64 %
7	63,04	3,03	63,04	
8	96,57	4,57	96,57	

Tableau 19 : Mesures.

Pour calculer les résidus normalisés, on utilise la matrice des dérivées des contraintes g(X) qui s'exprime analytiquement :

$$g(X) = \begin{bmatrix} 0{,}0045X(2)^2 & 0{,}009X(1)X(2) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-280{,}86}{X(4)} & 1 & \frac{280{,}86X(2)}{X(4)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -X(6)^2 & \frac{-1}{X(6)} - 2X(5)X(6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2X(6) - X(7) & -X(6) & -1 \end{bmatrix}$$

Le tableau 20 montre les résidus de bilan ainsi que les résidus normalisés pour les nœuds et agrégations de nœuds (obtenus par fusion des équations correspondantes). Nous avons indiqué à chaque fois les voies associées, permettant ainsi de construire le tableau 19 qui synthétise la recherche des voies en défaut par l'utilisation de coefficients (0 = voie validée, 1 = voie suspecte). Dans le cas de fusions multiples entre 2 équations, la voie supprimée lors d'une fusion est indiquée en indice.

Equations	Résidu	Résidu normalisé	Probabilité	Voies	Nœud associé
1	- 52,41	- 3,75	> 95%	1,2,3	I
2	50,21	4,99	> 95%	2,3,4	II
3	- 128,11	- 5,07	> 95%	4,5,6	III
4	1504,80	3,73	> 95%	6,7,8	IV
5	- 2,19	- 0,22	< 95%	1,2,4	$(I + II)_3$
6	66,85	5,22	> 95%	1,3,4	$(I + II)_2$
7	- 169,92	- 6,82	> 95%	2,3,5,6	II + III
8	- 25,11	- 1,35	< 95%	4,5,7,8	III + IV
9	689,74	4,10	> 95%	1,3,5,6	$(I + II)_2$+ III
10	- 66,92	- 3,70	> 95%	2,3,5,7,8	II + III + IV
11	158,35	2,22	> 95%	1,5,6,7,8	$(I + II)_2$+ III +IV

Tableau 20 : Résidus de bilan.

La recherche de ces défauts par l'agrégation de nœuds, synthétisée par le tableau suivant, nous permet de localiser les voies en défaut.

	Nœud en défaut	1	2	3	4	5	6	7	8
I	oui	1	1	1	.	.	.	.	.
II	oui	.	1	1	1	.	.	.	.
III	oui	.	.	.	1	1	1	.	.
IV	oui	.	.	.	.	.	1	1	1
$(I + II)_3$	non	0	0	.	0	.	.	.	.
$(I + II)_2$	oui	1	.	1	1	.	.	.	.
II + III	oui	.	1	1	.	1	1	.	.
III + IV	non	.	.	.	0	0	.	0	0
$(I + II)_2$+ III	oui	1	.	1	.	1	1	.	.
II + III + IV	oui	.	1	1	.	1	.	1	1
$(I + II)_2$ + III + IV	oui	1	.	1	.	1	.	1	1
Produit par colonne		0	0	1	0	0	1	0	0

Tableau 21 : Localisation des voies en défaut.

Les voies 3 et 6 sont donc déclarées en défaut. Il convient de noter que la localisation de voies défaillantes peut être plus difficile. Outre le problème de symétrie rencontré en linéaire, le problème de la fusion d'équations non linéaires n'est guère aisé et est difficilement automatisable dans le cas général. L'utilisation de langages formels devrait permettre, dans une certaine mesure, de résoudre ce problème délicat.

III.1.3.c - Tests

Remarque : Contrairement au cas linéaire, en non-linéaire on ne peut pas effectuer systématiquement une agrégation de tous les nœuds suspects. En effet, l'agrégation de deux nœuds non-linéaires n'est pas toujours facile et réalisable du point de vue analytique et informatique. Pour les essais effectués, on s'interdit ce genre d'agrégation. Ainsi si un nœud d'entrée (ou de sortie) du réseau est en défaut, on ne pourra pas "innocenter" les voies d'entrée (ou de sortie).

Les tests ont été effectués sur les réseaux n° 7 et n° 8 du paragraphe III.1. A partir d'un vecteur de mesures (bruitées) non en défaut, nous avons effectué trois tests.

Test 1 :

nous avons biaisé systématiquement, une par une, toutes les voies du réseau avec pour chaque voie une amplitude de défaut de ± 50 %, ± 40 % , ± 30 % et ± 20 %.

Ce test a été fait pour les valeurs de seuils suivantes :

1,16 ; 1,64 ; 1,96 et 2,58 (correspondant à des probabilités respectives de 75 %, 90 %, 95 % et 99 %).

Test 2 :

nous avons biaisé systématiquement, deux par deux, toutes les voies du réseau avec des amplitudes de biais de ± 40 % sur chaque voie en défaut. Les seuils de détection ont été pris égaux à 1,64 et 1,96.

Test 3 :

nous avons choisi trois voies du réseau que nous avons biaisé aléatoirement. Nous avons effectué cette procédure de tirage 500 fois. Ce test a été fait avec un seuil de 1,64 et de 1,96.

III.1.3 d - Résultats

Pour le réseau n° 7, le vecteur de mesure était le suivant :

$$X1 = [116{,}73\ 113{,}67\ 112{,}70\ 6{,}97\ 63{,}42\ 58{,}43\ 138{,}11\ 140{,}41\ \ 151{,}92]^T$$

et pour le réseau n° 8 :

$$X2 = [158{,}57\ 154{,}49\ 153{,}27\ 75{,}97\ 80{,}54\ 75{,}23\ 126{,}84\ 129{,}22\ 36{,}26\ 34{,}99\ 34{,}05\ 9{,}77\ 9{,}84]^T$$

Les résultats obtenus sont exprimés en %, et sous la forme suivante : x dét y dont la signification est :

x voies ont été détectées en défaut et parmi ces x voies, y seulement sont des voies réellement en défaut.

Ainsi par exemple, lors du Test 1, nous obtenons, pour le réseau n° 7 avec un seuil critique de 1,96 ; 6,94 % de non détection, 1,39 % où nous détectons une voie en défaut alors que celle ci n'est pas en défaut ; 62,50 % des cas où nous détectons la voie mise en défaut...

Seuil		1,16		1,64		1,96		2,58	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		1,39	6,73	5,56	12,50	6,94	17,31	20,83	25,00
1 dét	0	0,00	0,00	1,39	0,00	1,39	0,00	4,17	0,96
	1	66,67	62,50	63,89	56,73	62,50	51,92	51,39	47,12
2 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	31,94	30,77	29,17	30,77	29,17	30,77	23,61	26,92
3 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau 22 : Résultats Test 1.

Seuil		1,64		1,96	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		13,89	6,73	14,58	7,69
1 dét	0	6,25	2,56	6,25	2,24
	1	1,39	14,74	1,39	17,63
2 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	3,85	0,00	5,13
	2	55,56	56,09	54,86	52,88
3 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	22,92	16,03	22,92	14,42

Tableau 23 : Résultats Test 2.

Seuil		1,64		1,96	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		5,20	3,60	7,40	5,00
1 dét	0	5,80	0,80	6,60	0,60
	1	12,00	13,60	14,80	18,80
2 dét	0	10,00	0,00	9,40	0,00
	1	7,40	7,80	7,20	8,60
	2	22,20	27,00	22,80	26,40
3 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,60	0,80	0,80	0,80
	2	6,40	10,60	6,00	10,20
	3	15,40	24,00	12,60	20,80

Seuil		1,64		1,96	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
4 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,60	0,00	0,60	0,00
	2	10,80	0,40	0,80	0,40
	3	10,40	10,60	8,20	8,20
5 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	0,20	0,00	0,40	0,00
	3	3,00	0,80	2,40	0,20

Tableau 24 : Résultats Test 3.

III.1.3.e - Conclusion

Les résultats sont corrects et du même ordre de grandeur que pour le cas linéaire (chapitre II) ; néanmoins, il faut tenir compte, dans ces résultats, de la remarque du paragraphe III.1.3.c concernant l'agrégation de nœuds non-linéaires, ce qui représente un manque d'informations non négligeable. Signalons aussi que le test 3 est très sévère, puisqu'il concerne la détection de 3 capteurs en défaut parmi 9 ou 13 capteurs ce qui est une proportion importante.

III.2 - METHODE DES TERMES CORRECTIFS NORMALISES

Cette méthode, telle qu'elle a été décrite dans le deuxième chapitre n'est pas directement extensible au cas non-linéaire.

En effet, du point de vue informatique, il est très "lourd" de gérer les voies et les nœuds que l'on supprime, pour le critère et les liaisons, dans le calcul des estimées (voir Annexe B : Optimisation avec contraintes non-linéaires).

Néanmoins, on présente les résultats de cette méthode utilisée directement sur les mesures.

III.2.1 - PRESENTATION DE LA METHODE

Comme pour le cas linéaire (II.5), cette méthode repose sur le calcul des estimées des grandeurs vraies. A partir du vecteur de mesures X, on calcule le vecteur des estimées $\hat{X}$ suivant la méthode décrite dans l'annexe B. Pour améliorer la convergence de la méthode, on utilise la partie régulière de la matrice des dérivées des contraintes (g(X)) ayant le plus grand déterminant en valeur absolue (B.9).

D'après (II.38) et (B.13), on pose :

$$X = X^* + \varepsilon$$

$$\hat{X} = X^* + x$$

On définit un vecteur des écarts par :

$$E_C = X - \hat{X} \qquad \text{(III.10)}$$

Les propriétés statistiques de ce vecteur sont :

$$E(E_C) = 0 \text{ car l'estimateur } \hat{X} \text{ est non biaisé} \qquad \text{(III.11)}$$

$$\text{Var}(E_C) = E[(\varepsilon - x)(\varepsilon - x)^T]$$
$$\text{Var}(E_C) = E\left[\varepsilon\,\varepsilon^T - x\,\varepsilon^T - \varepsilon\,x^T + x\,x^T\right] \qquad \text{(III.12)}$$

On peut approximer, d'après (B.19), cette variance par :

$$\text{Var}(E_C) = V - PV - VP^T + PVP^T \qquad \text{(III.13)}$$

Or : $P = I_v - V\,g(\hat{X})^T\left(g(\hat{X})\;V\;g(\hat{X})^T\right)^{-1} g(\hat{X})$

avec : $g(\hat{X}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right)$

donc : $$\text{Var}(E_C) = V\,g(\hat{X})^T\left(g(\hat{X})\;V\;g(\hat{X})^T\right)^{-1} g(\hat{X})\,V \qquad \text{(III.14)}$$

D'où :

$$\text{Var}(E_C) = V - \hat{V} \qquad \text{(III.15)}$$

avec : $\hat{V} = PVP^T$

De manière analogue au cas linéaire, on définit le vecteur des termes correctifs normalisés par :

$$E_N(i) = \frac{E_C(i)}{\sqrt{V(i,i) - \hat{V}(i,i)}} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, v \qquad \text{(III.16)}$$

Chaque composante de vecteur E_N est testée par rapport à un seuil, permettant ainsi de situer les voies ayant un terme correctif particulièrement élevé.

III.2.2 - RESULTATS NUMERIQUES

Les tests effectués sont identiques à ceux effectués précédemment (voir III.1.3.c) et ont été fait sur les mêmes données.

Seuil		1,16		1,64		1,96		2,58	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		2,78	22,12	16,67	32,69	27,78	38,46	31,94	50,96
1 dét	0	38,89	3,85	38,89	2,88	27,78	1,92	33,33	1,92
	1	8,33	11,54	9,72	18,27	9,72	24,04	11,11	23,08
2 dét	0	0,00	8,65	0,00	5,77	0,00	3,85	0,00	2,88
	1	41,67	17,31	33,33	15,38	34,72	10,58	23,61	6,73
3 dét	0	0,00	0,96	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	8,33	35,58	1,39	25,00	0,00	21,15	0,00	14,42

Tableau 25 : Résultats Test 1.

Seuil		1,64		1,96	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		2,08	5,13	2,08	5,13
1 dét	0	17,36	0,96	17,36	2,88
	1	15,28	1,92	18,75	10,26
2 dét	0	0,00	3,21	0,00	2,88
	1	29,86	19,87	35,42	15,06
	2	8,33	4,17	9,72	5,45
3 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	21,72	0,00	24,68
	2	27,08	42,95	16,67	33,65

Tableau 26 : Résultats Test 2.

III.2.3 - CONCLUSION

La mise en pratique de cette méthode nous a révélé quelques inconvénients, dont les deux plus importants sont :

- la difficulté de trouver de bonnes estimées lorsque des voies ont des défauts importants. Cette conclusion est dans la lignée des remarques de l'annexe A, puisque l'hypothèse essentielle du calcul des estimées est que nous sommes en possession d'un vecteur initial "proche" des valeurs vraies,

- le temps d'exécution est de 3 à 7 fois plus important que pour la méthode des écarts de fermeture. Ce temps est essentiellement dû aux calculs des estimées (voir annexe B).

III.3 - METHODE DES TERMES CORRECTIFS NORMALISES PAR LA TECHNIQUE DE LINEARISATION DES CONTRAINTES

Au paragraphe précédent, nous avons montré les limites de la méthode d'estimation par élimination numérique, pour l'application à la détection de défauts, à l'aide des termes correctifs normalisés. Nous allons maintenant appliquer cette méthode mais en linéarisant les contraintes.

III.3.1 - PROPRIETES STATISTIQUES DES TERMES CORRECTIFS

En l'absence de biais et dans le cas de mesures directes on a :

$$X = X^* + \varepsilon \qquad \text{(III.17)}$$

Au sens des moindres carrés, le meilleur estimateur $\hat{X}$ de X^* est celui qui minimise :

$$\Phi(\hat{X}, X) = \frac{1}{2} \|\hat{X} - X\|^2_{V^{-1}}$$

$$\Phi(\hat{X}, X) = \frac{1}{2} (\hat{X} - X)^T V^{-1} (\hat{X} - X) \qquad \text{(III.18)}$$

sous la contrainte $f(\hat{X}) = 0$, et où V représente la matrice de variance des erreurs de mesure.

Le Lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \|\hat{X} - X\|^2_{V^{-1}} + \lambda^T f(\hat{X}) \qquad \text{(III.19)}$$

Il est stationnaire pour :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{X}} = V^{-1} (\hat{X} - X) + \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right)^T \lambda = 0 \qquad \text{(III.20a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(\hat{X}) = 0 \qquad \text{(III.20b)}$$

Comme ces équations sont non-linéaires, on remplace $f(\hat{X})$ par son développement limité au premier ordre :

$$f(\hat{X}) = f(X) + g(\hat{X}) (\hat{X} - X)$$

obtenant ainsi :

$$f(\hat{X}) = f(X) - g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T \lambda \qquad \text{(III.21)}$$

Les équations (III.20a) et (III.20b) deviennent alors linéaires et on obtient :

$$\lambda = \left[g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T\right]^{-1} f(X) \qquad \text{(III.22)}$$

puis :

$$\hat{X} = X - V \, g(\hat{X})^T \left[g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T\right]^{-1} f(X) \qquad \text{(III.23)}$$

A partir du vecteur des grandeurs estimées, on exprime le vecteur des écarts par :

$$E_C = X - \hat{X}$$

ou $$E_C = V \, g(\hat{X})^T \left[g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T\right]^{-1} f(X) \qquad \text{(III.24)}$$

On peut alors aisément calculer les deux premiers moments de ce vecteur E_C :

$$E(E_C) = V \, g(\hat{X})^T \left[g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T\right]^{-1} E(f(X))$$

or, d'après (III.4), $E(f(X)) = 0$ donc :

$$E(E_C) = 0$$

$$Var(E_C) = E[\, (X - \hat{X}) \, (X - \hat{X})^T \,]$$

$$Var(E_C) = M \, E[f(X) \, f(X)^T] \, M^T$$

avec $M = V \, g(\hat{X})^T \left[g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T\right]^{-1}$

D'après (III.7)

$$E(f(X) \, f(X)^T) = g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T$$

donc $$Var(E_C) = V \, g(\hat{X})^T \left[g(\hat{X}) \, V \, g(\hat{X})^T\right]^{-1} g(\hat{X}) \, V$$

$$Var(E_C) = V - \hat{V} \qquad \text{(III.25)}$$

Grâce à cette variance, on définit comme pour les écarts de fermeture un vecteur de termes correctifs normalisés E_N :

$$E_N(i) = \frac{E_C(i)}{\sqrt{V(i,i) - \hat{V}(i,i)}} \qquad \text{pour } i = 1, ..., v \qquad \text{(III.26)}$$

Remarque : Ces écarts n'étant pas indépendant, il n'est pas possible à partir de ce seul résultat de conclure si un capteur est défectueux ou non.

III.3.2 - INTERPRETATION DU CRITERE RESIDUEL

Après avoir déterminé le vecteur des grandeurs estimées, le calcul du critère résiduel donne une information importante.

Le critère résiduel Φ s'exprime de la manière suivante :

$$\Phi(\hat{X}, X) = \frac{1}{2} \|\hat{X} - X\|^2_{V^{-1}}$$

$$\Phi(\hat{X}, X) = \frac{1}{2} (\hat{X} - X)^T V^{-1} (\hat{X} - X)$$

ou encore d'après (III.23)

$$\Phi = \frac{1}{2} f(X)^T \left[g(\hat{X})\ V\ g(\hat{X})^T \right]^{-1} f(X) \qquad \text{(III.27)}$$

Φ est la réalisation d'une variable aléatoire distribuée selon une loi du Khi2 à n degrés de liberté.

En examinant cette unique grandeur qui rend compte de l'ensemble des informations disponibles (mesures, précision des mesures, structure du réseau, ...), il devient possible de tester la qualité de l'estimation.

L'utilisation des tables de la distribution du Khi2 permet de définir la limite supérieure γ de Φ relativement au seuil α :

$$\text{Prob}(\chi^2_n \leq \gamma) = 1 - \alpha$$

L'utilisateur pourra donc se fixer un seuil au-dessous duquel l'estimation sera considérée comme satisfaisante. Le franchissement de ce seuil indique que l'une des hypothèses (proximité de $\hat{X}$ et X, ...) ayant permis d'effectuer l'estimation n'est pas vérifiée et qu'au moins une des grandeurs est entachée d'erreur autre que le bruit de mesure.

III.3.3 - SENSIBILITE DU CRITERE

La sensibilité du critère Φ par rapport aux estimations s'écrit :

$$S = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}} = V^{-1} (\hat{X} - X) \qquad \text{(III.28)}$$

Le vecteur S, de dimension v, peut-être considéré comme la réalisation d'une variable aléatoire normalement distribuée et de variance V_S connue :

$$S = - V^{-1} E_C \qquad \text{(III.29)}$$

$$E(S) = 0$$
$$Var(S) = V^{-1} Var(E_C) V^{-1} \qquad \text{(III.30)}$$

On définit le vecteur de sensibilité normalisée S_N par :

$$S_N = Diag(V_S)^{-1/2} S \qquad \text{(III.31)}$$

$$S_N = - Diag(V^{-1} Var(E_C) V^{-1})^{-1/2} V^{-1} E_C \qquad \text{(III.32)}$$

comme la matrice V est diagonale :

$$S_N = - Diag(Var(E_C))^{-1/2} E_C \qquad \text{(III.33)}$$

$$S_N = - E_N \qquad \text{(III.34)}$$

Cette relation montre que la sensibilité normalisée du critère et les corrections normalisées sont opposées. Donc, en particulier, le plus grand des termes correctifs normalisés correspond à la variable qui influence le plus fortement le critère.

Pour tester l'influence d'une mesure aberrante sur les termes correctifs normalisés, imposons une variation déterministe δ sur les grandeurs vraies.

$$X = X^* + \delta \qquad \text{(III.35)}$$

avec δ un vecteur de dimension v tel que :

$$\delta = [\ 0\ 0\ ...\ 0\ \delta_k\ 0\ ...\ 0\ ]^T$$

Remarque : δ représente un défaut sur la $k^{ème}$ mesure.

D'après la formule (III.26), nous pouvons réécrire le vecteur E_N des termes correctifs normalisés sous la forme :

$$E_N = Diag(V_E)^{-1/2} E_C$$

avec :
$$E_C = X - \hat{X}$$
$$E_C = V\, g(\hat{X})^T [g(\hat{X})\, V\, g(\hat{X})^T]^{-1} f(X)$$

et
$$V_E = Var(E_C)$$
$$V_E = V\, g(\hat{X})^T [g(\hat{X})\, V\, g(\hat{X})^T]^{-1} g(\hat{X})\, V$$

En posant $U = g(\hat{X})^T [g(\hat{X})\, V\, g(\hat{X})^T]^{-1} g(\hat{X})$, nous pouvons réécrire E_N sous la forme suivante :

$$E_N = Diag(U)^{-1/2}\, g(\hat{X})^T [g(\hat{X})\, V\, g(\hat{X})^T]^{-1} f(X) \qquad \text{(III.36)}$$

Par linéarisation des contraintes et en utilisant le modèle de mesure (III.35), nous obtenons :

$$f(X) = f(X^*) + g(X^*)\delta$$

que l'on peut réécrire (sous l'hypothèse de proche voisinage entre X^* et $\hat{X}$)

$$f(X) = g(\hat{X})\delta$$

Ainsi, E_N s'exprime par :

$$E_N = \mathrm{Diag}(U)^{-1/2}\, U\delta$$

En posant u_{ij} l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de la matrice U, alors E_N s'écrit :

$$E_N = \begin{bmatrix} . & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{u_{ii}}} & \\ 0 & & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . \\ u_{ik}\,\delta_k \\ . \end{bmatrix}$$

$$E_N = \begin{bmatrix} \frac{u_{1k}\,\delta_k}{\sqrt{u_{11}}} \\ . \\ \frac{u_{kk}\,\delta_k}{\sqrt{u_{kk}}} \\ . \\ \frac{u_{vk}\,\delta_k}{\sqrt{u_{vv}}} \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\frac{E_N(i)}{E_N(k)} = \frac{u_{ik}\,\delta_k}{\sqrt{u_{ii}}} \frac{\sqrt{u_{kk}}}{u_{kk}\,\delta_k}$$

$$\frac{E_N(i)}{E_N(k)} = \frac{u_{ik}}{\sqrt{u_{ii}}\sqrt{u_{kk}}}$$

U étant une matrice définie positive, on décompose U de la manière suivante :

$$U = A^T A$$

avec A une matrice dont les colonnes sont notées c_i, ainsi : $u_{ik} = c_i^T c_k$

donc :

$$\frac{E_N(i)}{E_N(k)} = \frac{c_i^T c_k}{\sqrt{c_i^T c_i}\sqrt{c_k^T c_k}}$$

$$\frac{E_N(i)}{E_N(k)} = \frac{\| c_i \| \| c_k \| \cos(c_i,c_k)}{\| c_i \| \| c_k \|}$$

$$\frac{E_N(i)}{E_N(k)} = \cos(c_i,c_k) \qquad \text{(III.37)}$$

Ainsi $\frac{E_N(i)}{E_N(k)} \leq 1$, montrant que la voie dont le terme correctif normalisé est le plus important est celle dont la mesure est biaisée.

III.3.4 - LOCALISATION DES VOIES EN DEFAUT

Nous exploitons directement les termes correctifs normalisés pour la détection et la localisation de voies en défaut car cette méthode est plus sensible pour la détection qu'un test basé sur le critère résiduel.

La démarche utilisée est identique au cas linéaire (II.5.2). Après avoir estimé les grandeurs vraies à partir des mesures, nous calculons les termes correctifs normalisés que nous comparons à une valeur critique σ_c.

Les quatre étapes utilisées dans la procédure pour les systèmes linéaires restent valables dans cette technique (cf. chapitre II.5.2).

III.3.5 - RESULTATS NUMERIQUES

Nous avons testé cette méthode par les mêmes procédures que pour les écarts de fermeture des équations de bilan. Les seuils utilisés pour le test 1 sont 90% (1,64), 95% (1,96) et 99% (2,58).

Seuil		1,64		1,96		2,58	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		2,78	0,96	4,17	1,92	11,11	4,81
1 dét	0	1,39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	95,83	99,04	95,83	98,08	88,89	95,19
2 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau 27 : Résultats Test 1.

Seuil		1,64		1,96	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		0,00	0,00	0,00	0,00
1 dét	0	0,00	2,88	0,00	3,85
	1	0,00	0,00	0,69	0,00
2 dét	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	1	0,00	0,32	0,00	0,32
	2	93,75	95,83	93,06	95,83
3 dét	0	2,08	0,96	2,08	0,00
	1	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	4,17	0,00	4,17	0,00

Tableau 28 : Résultats Test 2.

Seuil		1,64		1,96	
		Rés 7	Rés 8	Rés 7	Rés 8
Aucune détection		0,60	0,20	0,80	0,20
1 dét	0	5,40	0,00	6,20	0,00
	1	7,80	5,60	10,20	8,40
2 dét	0	14,00	0,00	13,40	0,00
	1	0,80	3,20	0,80	3,40
	2	25,20	33,20	27,40	36,60
3 dét	0	0,00	0,00	0,20	0,00
	1	0,60	0,00	0,20	0,00
	2	3,40	2,00	2,60	2,00
	3	35,20	54,40	32,40	48,60
4 dét	0	0,40	0,00	0,40	0,20
	1	1,80	0,00	1,60	0,00
	2	0,40	0,00	0,40	0,00
	3	3,00	0,80	2,00	0,40
5 dét	0	0,20	0,00	0,20	0,00
	1	0,20	0,20	0,20	0,20
	2	0,60	0,00	0,60	0,00
	3	0,40	0,20	0,40	0,00

Tableau 29 : Résultats Test 3.

Les résultats sont du même ordre de grandeur que pour le cas linéaire (chapitre II). On remarque également les meilleurs résultats obtenus par cette méthode par rapport à la technique des écarts de fermeture de bilan (III.1). Les meilleurs résultats obtenus, par rapport à la technique de l'élimination numérique (III.2), peuvent s'expliquer par une meilleure convergence des estimées.

III.4 - RECONCILIATION DES DONNEES

Pour cette étape de validation des données, on considère les voies en défaut comme des voies non-mesurées. On effectue une validation des données puis on déduit l'amplitude des défauts par comparaison entre les valeurs mesurées et estimées des voies en défaut.

III.4.1 - INTRODUCTION D'UN MODELE DE MESURE

Supposons que, parmi les mesures contenues dans le vecteur X, v_2 mesures soient en défaut. L'introduction d'un modèle de mesure, qui se présente sous forme d'une matrice de sélection des voies mesurées, autorise une approche globale du problème de réconciliation. Le vecteur des mesures s'exprime en fonction des grandeurs vraies :

$$X_m = H\,X^* + \varepsilon \qquad \text{(III.38)}$$

où : X_m vecteur des voies mesurées de dimension $m = v - v_2$
X^* vecteur des grandeurs vraies de dimension v
ε vecteur des erreurs de mesure de dimension m
H matrice de sélection de dimension m.v

Le processus de mesure étant supposé direct, la matrice H traduit l'absence ou la présence d'une mesure sur chaque voie du réseau. Elle se présente sous la forme :

$$H = [\, I_m \; 0 \,] \qquad \text{(III.39)}$$

III.4.2 - VALIDATION DES DONNEES

Le problème d'estimation des vraies grandeurs devient alors :

chercher le minimum par rapport à $\hat{X}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| H\hat{X} - X_m \|^2_{V_m^{-1}} \qquad \text{(III.40)}$$

sous la contrainte $f(\hat{X}) = 0$

où V_m est la matrice de variance des voies mesurées.

Ce problème d'optimisation quadratique sous contraintes non-linéaires peut être traité par différentes méthodes de résolution. Notre choix s'est porté sur la méthode par linéarisation des équations de contrainte, car c'est une méthode très générale, efficace, simple à mettre en oeuvre et rapide.

Nous calculons de manière itérative les vecteurs :

$$\hat{X}_0, \ldots, \hat{X}_i, \hat{X}_{i+1}, \ldots$$

où nous posons $\hat{X}_0 = X$ et où $\hat{X}_{i+1}$ est défini en fonction de $\hat{X}_i$ comme solution du problème (III.40).

Un développement au premier ordre réduit les contraintes à :

$$f(\hat{X}_{i+1}) = f(\hat{X}_i) + g(\hat{X}_i)\,(\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) \qquad \text{(III.41)}$$

avec $g(\hat{X}_i) = \dfrac{\partial f}{\partial \hat{X}_i^T}$

Or, on considère que $\hat{X}_{i+1}$ est l'optimum cherché, donc $f(\hat{X}_{i+1}) = 0$ entraîne

$$f(\hat{X}_i) + g(\hat{X}_i)\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \qquad \text{(III.42)}$$

A l'étape i+1, le problème devient alors :

chercher le minimum par rapport à $\hat{X}_{i+1}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| H\hat{X}_{i+1} - X_m \|^2_{V_m^{-1}} \qquad \text{(III.43)}$$

sous la contrainte $f(\hat{X}_i) + g(\hat{X}_i)\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0$

Le Lagrangien associé à ce problème est :

$$L = \Phi + \lambda^T [f(\hat{X}_i) + g(\hat{X}_i)\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i)] \qquad \text{(III.44)}$$

où λ est le vecteur des paramètres de Lagrange de dimension n.

Il est stationnaire pour :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{X}_{i+1}} = H^T V_m^{-1} (H\hat{X}_{i+1} - X_m) + g(\hat{X}_i)^T \lambda = 0 \qquad \text{(III.45a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(\hat{X}_i) + g(\hat{X}_i)\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \qquad \text{(III.45b)}$$

Nous posons pour la suite des calculs $g = g(\hat{X}_i)$ pour simplifier les écritures des équations.

En multipliant (III.45b) par g^T et par addition à (III.45a), le système (III.45) devient :

$$H^T V_m^{-1} (H\hat{X}_{i+1} - X_m) + g^T \lambda + g^T f(\hat{X}_i) + g^T g\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \qquad \text{(III.46a)}$$

$$f(\hat{X}_i) + g\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \qquad \text{(III.46b)}$$

En posant :

$$A = H^T V_m^{-1} X_m + g^T (g \hat{X}_i - f(\hat{X}_i))$$
$$G = H^T V_m^{-1} H + g^T g$$

le système (III.46) s'écrit sous la forme suivante :

$$G \hat{X}_{i+1} = A - g^T \lambda \qquad \text{(III.47a)}$$
$$f(\hat{X}_i) + g\ (\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \qquad \text{(III.47b)}$$

Ce système admet pour solution :

$$\lambda = [g\, G^{-1}\, g^T]^{-1}\, [f(\hat{X}_i) + g\, G^{-1}\, A - g\, \hat{X}_i] \qquad \text{(III.48)}$$

$$\hat{X}_{i+1} = P\, A + G^{-1}\, g^T [g\, G^{-1}\, g^T]^{-1}\, (g\, \hat{X}_i - f(X_i)) \qquad \text{(III.49)}$$

avec $P = G^{-1} - G^{-1}\, g^T [g\, G^{-1}\, g^T]^{-1}\, g\, G^{-1}$

Remarque : A chaque itération, l'équation de stationnarité (III.45b) est vérifiée. Par contre, la relation (III.45a) ne l'est pas. On utilise donc cette relation comme test de convergence en s'assurant qu'elle est vérifiée après que l'algorithme ait convergé.

III.4.3 - PROPRIETES STATISTIQUES DE L'ESTIMATEUR

X_m s'écrit en fonction de X_m^* :

$$X_m = X_m^* + \varepsilon \qquad \text{(III.50)}$$

où : ε est le vecteur des erreurs de mesure de dimension m,
X_m^* le vecteur de dimension m extrait de X* correspondant aux grandeurs mesurées.

De même posons :

$$\hat{X} = X^* + \hat{x} \qquad \text{(III.51)}$$

où : $\hat{x}$ est un vecteur de dimension v (représentant les erreurs d'estimation).

Les équations de contraintes s'écrivent :

$$f(\hat{X}) = 0$$

Sous l'hypothèse que $\hat{X}$ est proche des grandeurs vraies pour que le développement en série de Taylor des contraintes puisse être limité au premier ordre. Les équations de contraintes deviennent :

$$f(\hat{X}) = f(X^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial X^{*T}}\right)(\hat{X} - X^*) \qquad \text{(III.52)}$$

X* représentant les grandeurs vraies, il vérifie les contraintes :

$$f(X^*) = 0$$

Ainsi, avec $g^* = \left(\frac{\partial f}{\partial X^{*T}}\right)$, l'expression (III.52) s'écrit en fonction de $\hat{x}$:

$$g^*\, \hat{x} = 0 \qquad \text{(III.53)}$$

Avec ces nouvelles notations, le problème (III.40) s'exprime :

chercher le minimum par rapport à $\hat{x}$ de :

$$\Phi = \frac{1}{2} \| H\hat{x} - \varepsilon \|^2_{V_m^{-1}} \qquad \text{sous la contrainte } g^* \hat{x} = 0 \tag{III.54}$$

En posant $G = H^T V_m^{-1} H + (g^*)^T g^*$ de dimension v.v, la solution est alors :

$$\hat{x} = [G^{-1} - G^{-1} (g^*)^T [g^* G^{-1} (g^*)^T]^{-1} g^* G^{-1}] H^T V_m^{-1} \varepsilon \tag{III.55}$$

que l'on écrit en posant :

$$P^* = G^{-1} [I_v - (g^*)^T [g^* G^{-1} (g^*)^T]^{-1} g^* G^{-1}]$$

$$\hat{x} = P^* H^T V_m^{-1} \varepsilon \tag{III.56}$$

L'espérance mathématique de $\hat{x}$ s'exprime par :

$$E(\hat{x}) = P^* H^T V_m^{-1} E(\varepsilon)$$

or, avec les hypothèses faites sur la distribution des erreurs de mesures, $E(\varepsilon) = 0$ donc :

$$E(\hat{x}) = 0$$

ce qui implique :

$$E(\hat{X}) = X^* \text{ (l'estimateur est donc non-biaisé)} \tag{III.57}$$

La matrice de variance-covariance de $\hat{x}$ s'écrit alors :

$$Var(\hat{x}) = E(\hat{x}\, \hat{x}^T)$$

qui devient d'après (III.56) :

$$Var(\hat{x}) = P^* H^T V_m^{-1} H P^*$$

La matrice de variance-covariance des grandeurs estimées $\hat{X}$ s'écrira donc :

$$Var(\hat{X}) = P^* H^T V_m^{-1} H P^* \tag{III.58}$$

Les grandeurs vraies étant inconnues, la matrice P* ne peut être calculée. Nous approximons donc le vecteur des grandeurs vraies X* par celui des grandeurs estimées et la matrice P* par la matrice P calculée à partir des grandeurs estimées :

$$P = G^{-1} [I_v - g^T (g\, G^{-1} g^T)^{-1} g\, G^{-1}] \quad \text{avec } g = \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T} \right)$$

obtenant ainsi :

$$\mathrm{Var}(\hat{X}) = \hat{V} \qquad \text{avec} \quad \hat{V} = P\, H^T\, V_m^{-1}\, H\, P \tag{III.60}$$

Remarque : Dans le cas où toutes les voies sont considérées comme mesurées (aucun défaut), ce qui revient à dire que la matrice H est la matrice identité de rang v, l'expression (III.60) se simplifie :

$$\hat{V} = P\, V^{-1}\, P \tag{III.61}$$

G s'exprime par :

$$G = V^{-1} + g^T g$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle :

$$G^{-1} = V - V\, g^T\, (I_n + g\, V\, g^T)^{-1}\, g\, V$$

Ce qui implique :

$$(g\, G^{-1}\, g^T)^{-1} = I_n + (g\, V\, g^T)^{-1}$$

et P s'exprime par :

$$P = V - V\, g^T\, (g\, V\, g^T)^{-1}\, g\, V$$

d'où : $$\hat{V} = V - V\, g^T\, (g\, V\, g^T)^{-1}\, gV \tag{III.62}$$

ce qui est une forme particulièrement simple pour le calcul de la variance des estimées.

III.4.4 - RESULTATS NUMERIQUES

Dans le but de tester la qualité de nos estimateurs, nous avons effectué un test comparable à celui du III.1.3c, pour le réseau n° 7 et n° 8. Nous avons calculé les estimées des grandeurs vraies et la diagonale de la matrice de variance de ces estimées. Nous avons calculé la valeur moyenne et la variance expérimentale pour les 2 estimateurs.

Réseau n° 7

Résidus		Variance des Résidus	
moyenne	variance	moyenne	variance
114,40	7,86	7,77	0,17
114,40	7,86	7,77	0,17
114,40	7,86	7,77	0,17
7,12	0,06	0,06	0,00
59,86	1,79	1,64	0,01
59,86	1,79	1,64	0,01
146,63	8,62	8,43	0,26
146,63	8,62	8,43	0,26
146,63	8,62	8,43	0,26

Tableau 30 : Moments statistiques expérimentaux.

Réseau n° 8

Résidu		Variance des Résidus	
moyenne	variance	moyenne	variance
154,74	8,14	7,88	0,13
154,74	8,14	7,88	0,13
154,74	8,14	7,88	0,13
77,05	5,19	4,77	0,07
77,05	5,19	4,77	0,07
77,05	5,19	4,77	0,07
134,29	10,05	10,06	0,17
134,29	10,05	10,06	0,17
34,85	1,09	1,00	0,00
34,85	1,09	1,00	0,00
34,85	1,09	1,00	0,00
9,99	0,03	0,03	0,00
9,99	0,03	0,03	0,00

Tableau 31 : Moments statistiques expérimentaux.

Sur ces deux essais, nous pouvons constater une bonne robustesse des deux estimateurs. En effet, nous avons une proche égalité entre la variance expérimentale des estimées des mesures et la valeur moyenne de l'estimation de la variance des dites estimées. Nous constatons également que les résultats obtenus par cette méthode sont comparables à ceux obtenus par la technique de l'élimination numérique (cf. Annexe B).

Nous avons appliqué cette méthode de réconciliation sur le réseau n° 7 et sur le réseau n° 8. On considère les vecteurs X, $\hat{X}$, τ_C (avec $\tau_C(i) = \left| \frac{X(i) - \hat{X}(i)}{X(i)} \right| * 100$ pour $i = 1, ..., v$), $\hat{V}$ diagonale de la matrice de variance des estimées et E_N vecteur des termes correctifs normalisés.

Réseau n° 7 :

Pour cet essai les voies 4, 5 et 9 ont été mises en défaut avec des amplitudes respectives de : - 2,44, - 19,03 et 53,15.

X	$\hat{X}$	τ_C	$\hat{V}$	E_N
116,73	111,25	4,69	9,14	3,67
113,67	111,25	2,13	9,14	3,20
112,70	111,25	1,28	9,14	3,05
4,53	9,01	98,99	0,28	- 14,80
44,39	61,72	39,02	4,00	- 11,05
58,43	61,72	5,63	4,00	- 2,06
138,11	136,05	1,11	16,77	- 6,90
140,41	136,05	2,73	16,58	- 6,39
205,08	136,05	33,41	16,58	2,51

Tableau 32 : Réconciliation des mesures réseau n° 7.

On retrouve les plus forts taux de corrections (τ_C) pour les voies défaillantes avec une déduction des amplitudes des défauts de : - 4,48, - 17,32 et 68,52.

Pour cet essai les voies 2 et 6 ont été mises en défaut avec des amplitudes respectives de : 51,15 et 14,60.

X	$\hat{X}$	τ_C	$\hat{V}$	E_N
116,73	118,05	1,13	17,64	- 1,98
164,82	118,05	28,37	17,64	5,00
112,70	118,05	4,74	17,64	- 2,93
6,97	7,04	1,12	0,07	0,91
63,42	61,05	3,74	3,06	- 0,41
73,04	61,05	16,41	3,06	2,51
138,11	146,08	5,77	10,22	- 0,91
140,41	146,08	4,04	10,22	- 0,54
151,92	146,08	3,84	10,22	1,14

Tableau 33 : Réconciliation des mesures réseau n° 7.

On retrouve les plus forts taux de corrections pour les voies défaillantes avec une déduction des amplitudes des défauts de : 46,77 et 12,99.

Les résultats obtenus sur le réseau n° 8 sont comparables à ceux du réseau n° 7. On retrouve toujours les plus forts taux de corrections pour les voies en défaut et une bonne estimation de l'amplitude des défauts.

CONCLUSION

Les procédures de détection de pannes de capteurs développées dans notre première étude sont bien adaptées aux problèmes de détection pour les systèmes linéaires. Cependant, l'extension de ces méthodes pour des systèmes non-linéaires est tout à fait réalisable.

Nous avons étudié trois méthodes : la première qui utilise une analyse des résidus des équations de bilan, la deuxième qui compare entre eux les termes correctifs normalisés et la troisième qui procède par linéarisation des équations de contrainte.

Cette dernière méthode demande une hypothèse supplémentaire sur les contraintes (monotonie des fonctions représentant les équations de contrainte sur l'intervalle de mesure, en plus des hypothèses formulées en annexe) ; nous avons montré qu'elle est adaptable à notre étude.

A partir de cette méthode, nous nous sommes intéressés au problème de validation de données et avons étudié les propriétés statistiques (deux premiers moments) des grandeurs estimées.

Pour la suite de cette étude, nous développerons plus particulièrement une méthode complète de détection d'erreurs et de suivis de capteurs à partir de ce principe de linéarisation.

CHAPITRE IV

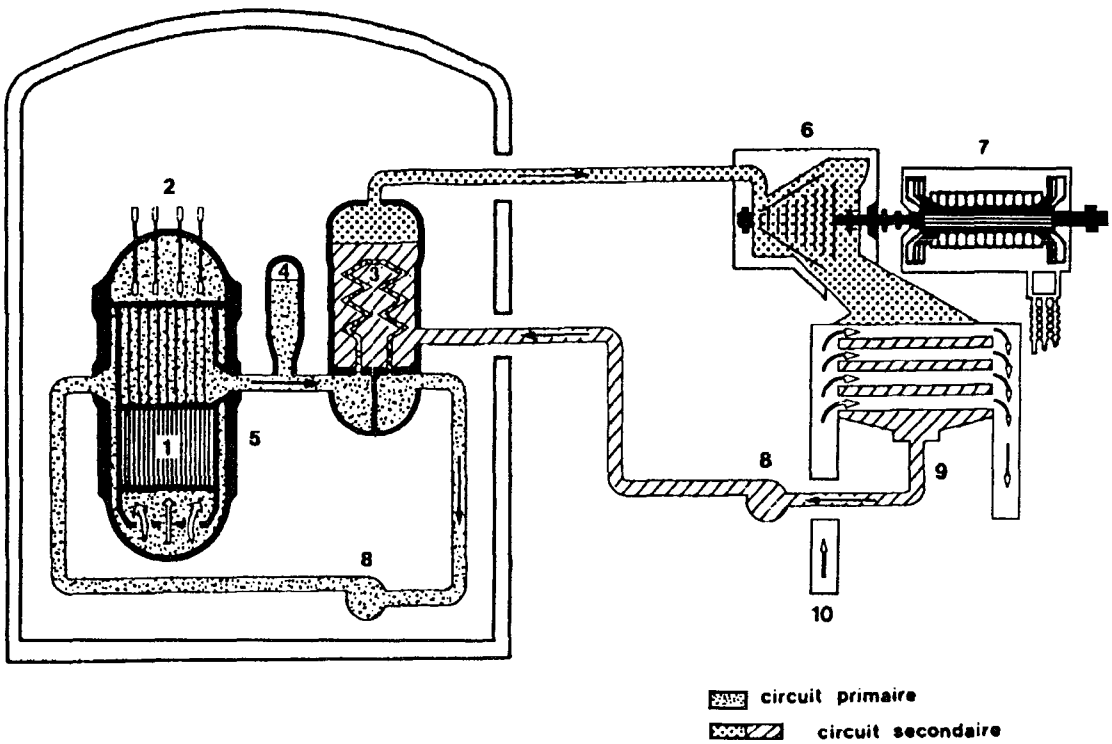
Applications aux centrales nucléaires

Centrale de PALUEL

INTRODUCTION

L'application de la méthode de linéarisation des contraintes va être développée sur l'instrumentation concernant le générateur vapeur de la tranche 2 de la centrale nucléaire de Paluel. Les mesures utilisées pour cette application proviennent des relevés effectués courant septembre 1990 lors des essais COR 400.

Le générateur de vapeur est l'interface entre le circuit primaire et le circuit secondaire/vapeur. Le fluide primaire (réfrigérant du réacteur) circule dans les tubes en U et cède sa chaleur au fluide secondaire (eau d'alimentation) du côté enveloppe, produisant la vapeur (voir figure IV.1).



1	Cœur du réacteur	6	Turbine
2	Barres de contrôle	7	Alternateur
3	Générateur de vapeur	8	Pompe
4	Pressuriseur	9	Condenseur
5	Cuve	10	Eau de refroidissement

Fig. IV.1 : Schéma de principe du fonctionnement d'une centrale nucléaire à eau sous pression.

L'instrumentation concernant le générateur de vapeur (GV) est décrite par le schéma de la figure IV.2.

Les différents capteurs représentés sont respectivement :

1	VVP104MP	:	Pression vapeur GV1
2	VVP105MP	:	Pression vapeur GV1
3	VVP106MP	:	Pression vapeur GV1
4	VVP107MP	:	Pression vapeur GV1
5	GCT01MP	:	Pression barillet vapeur

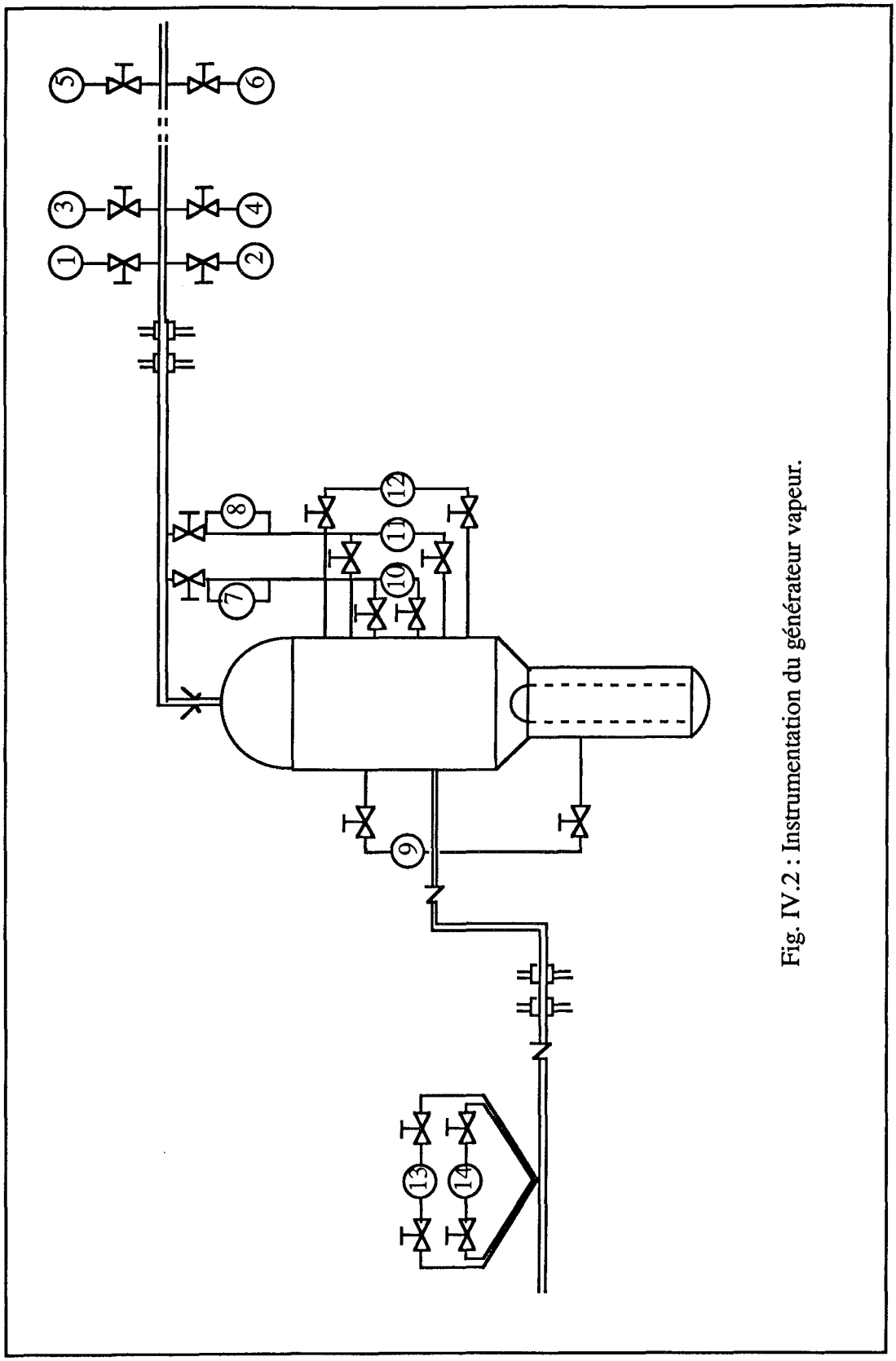


Fig. IV.2 : Instrumentation du générateur vapeur.

6	GCT02MP	:	Pression barillet vapeur
7	VVP101MD	:	Débit vapeur GV1
8	VVP102MD	:	Débit vapeur GV1
9	ARE108MN	:	Niveau GV gamme large
10	ARE105MN	:	Niveau GV gamme étroite
11	ARE106MN	:	Niveau GV gamme étroite
12	ARE107MN	:	Niveau GV gamme étroite
13	ARE101MD	:	Débit eau alimentaire
14	ARE102MD	:	Débit eau alimentaire

La période d'échantillonage des mesures a été prise à deux secondes, correspondant à la plus petite des périodes d'échantillonage du système d'acquisition "KIT". La précision des mesures, fournies par les fiches de calibrage nous permet d'exprimer directement la variance des erreurs de mesure. L'instrumentation est constituée de deux types différents de capteurs : Schlumberger série 6000 et Bailey dont les précisions en pourcentage de l'étendue de mesure sont de 0,5%. Nous obtenons ainsi, pour nos différentes mesures :

Capteur	Type	Echelle physique	Ecart-type	Variance
VVP104MP	Série 6000	0 - 100 B	0,5	0,25
VVP105MP	Série 6000	0 - 100 B	0,5	0,25
VVP106MP	Série 6000	0 - 100 B	0,5	0,25
VVP107MP	Série 6000	0 - 100 B	0,5	0,25
GCT01MP	Bailey	0 - 100 B	0,5	0,25
GCT02MP	Bailey	0 - 100 B	0,5	0,25
VVP101MD	Bailey	0 - 2450 t/h	12,25	150,00
VVP102MD	Bailey	0 - 2450 t/h	12,25	150,00
ARE108MN	Série 6000	0 - 100 %	0,08	0,01
ARE105MN	Série 6000	0 - 100 %	0,03	0,01
ARE106MN	Série 6000	0 - 100 %	0,03	0,01
ARE107MN	Série 6000	0 - 100 %	0,03	0,01
ARE101MD	Bailey	0 - 2450 t/h	12,25	150,00
ARE102MD	Bailey	0 - 2450 t/h	12,25	150,00

Tableau 34 : Précisions capteurs données par les constructeurs.

La précision expérimentale relevée à partir des mesures sur les plages statiques reste inférieure à celle donnée par le constructeur. Cependant, sur certaines plages et pour certaines mesures (essentiellement les mesures de débit d'eau alimentaire), nous trouvons une variance supérieure à la variance constructeur. Cette anomalie provient d'un bruit de procédé non négligeable, supérieur au bruit de mesure.

Les relations liant les différentes mesures effectuées par les différents capteurs sont essentiellement des relations de redondance matérielle. Nous pouvons néanmoins mettre à profit les relations liant par exemple les pressions de vapeur en sortie du GV, les pressions barillet et le débit de vapeur en sortie du GV (modèle de perte de charge). Nous obtenons ainsi les différentes relations liant les mesures.

$f_1(X) = X_1 - X_2$
$f_2(X) = X_2 - X_3$
$f_3(X) = X_3 - X_4$
$f_4(X) = X_5 - X_6$
$f_5(X) = f(X_4, X_6, X_7)$ perte de charge

$f_6(X) = X_7 - X_8$
$f_7(X) = (X_9, X_{10})$ niveau GV
$f_8(X) = X_{11} - X_{10}$
$f_9(X) = X_{12} - X_{11}$
$f_{10}(X) = f(X_8, X_{12}, X_{14})$ débit GV
$f_{11}(X) = X_{14} - X_{13}$

En utilisant ces différentes relations, nous pouvons mettre le schéma d'instrumentation sous la forme du réseau suivant :

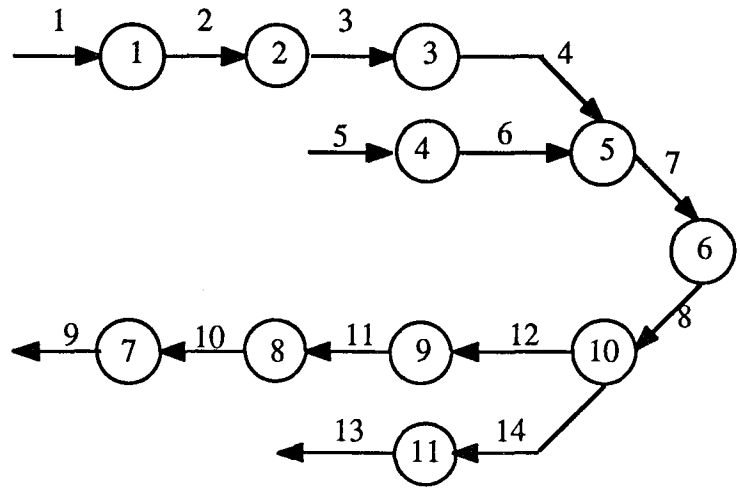


Fig. IV.3 : Réseau instrumentation GV.

Pour la suite de l'application, il convient de préciser les modèles cités précédemment.

IV.1 - LES MODELES UTILISES

IV.1.1 - MODELISATION ET IDENTIFICATION DE LA PERTE DE CHARGE

Ce modèle relie le débit de vapeur en sortie du générateur de vapeur aux pressions de vapeur en sortie du générateur et aux pressions de vapeur en entrée turbine.

Les variables concernées sont :

Débit de vapeur : VVP101MD
VVP102MD

Pression de vapeur en sortie du générateur :

VVP104MP
VVP105MP
VVP106MP
VVP107MP

Pression de vapeur en entrée circuit turbine :

GCT01MP
GCT02MP

Dès le début de la campagne de mesure, nous avons détecté une forte anomalie dans le fonctionnement du capteur VVP101MD qui ne sera donc jamais pris en compte par la suite.

Le modèle retenu est de la forme :

$$D = k\sqrt{P_1^2 - P_2^2}$$

avec :

D : débit de vapeur
P_1 : pression vapeur sortie générateur vapeur
P_2 : pression vapeur entrée circuit turbine

En vue de l'identification du coefficient k, nous avons utilisé 2 fichiers différents obtenus par moyennage (sur 20points) de divers fichiers représentatifs d'un point de fonctionnement (ainsi les abscisses représentent 20 x 2 s soient 40 secondes).

Les points de fonctionnement dépendent de la puissance délivrée ; ainsi, lors des essais COR 400, nous avons eu accès à six points de fonctionnement statique (30%, 40%, 55%, 70%, 93% et 100% de la puissance nominale).

Ainsi, le débit vapeur VVP102MD présente pour les plages 70%, 40%, 93%, 55%, 100% et 30% les variations suivantes :

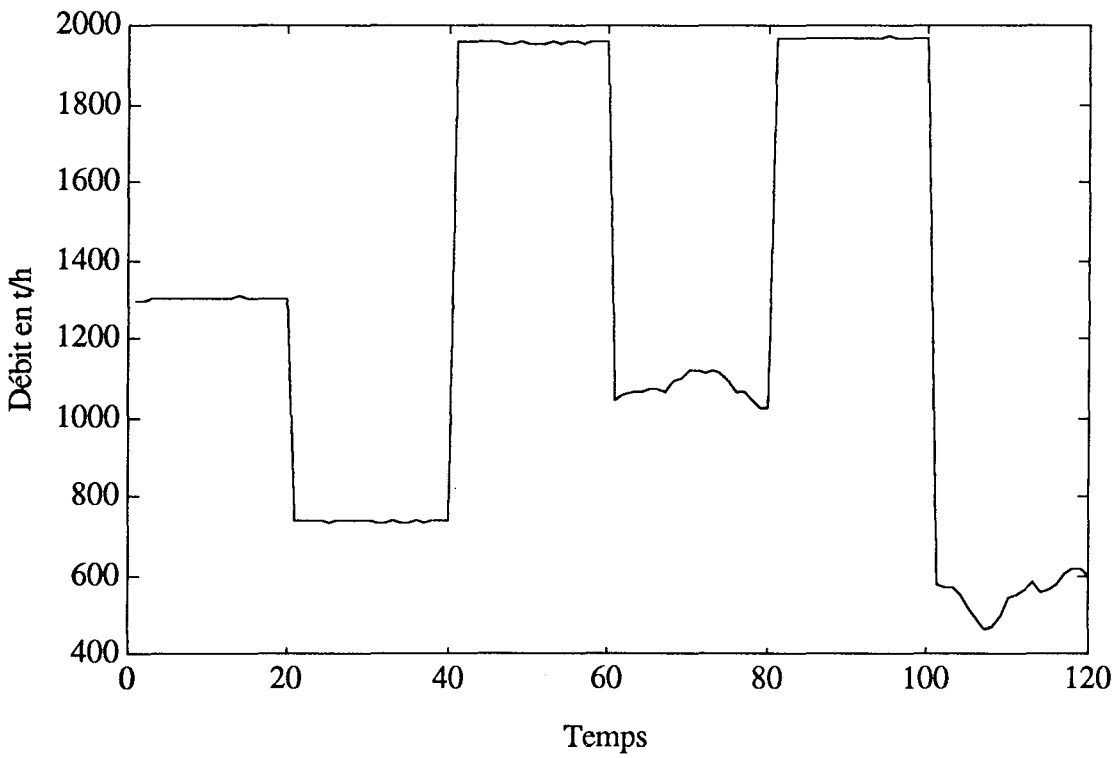
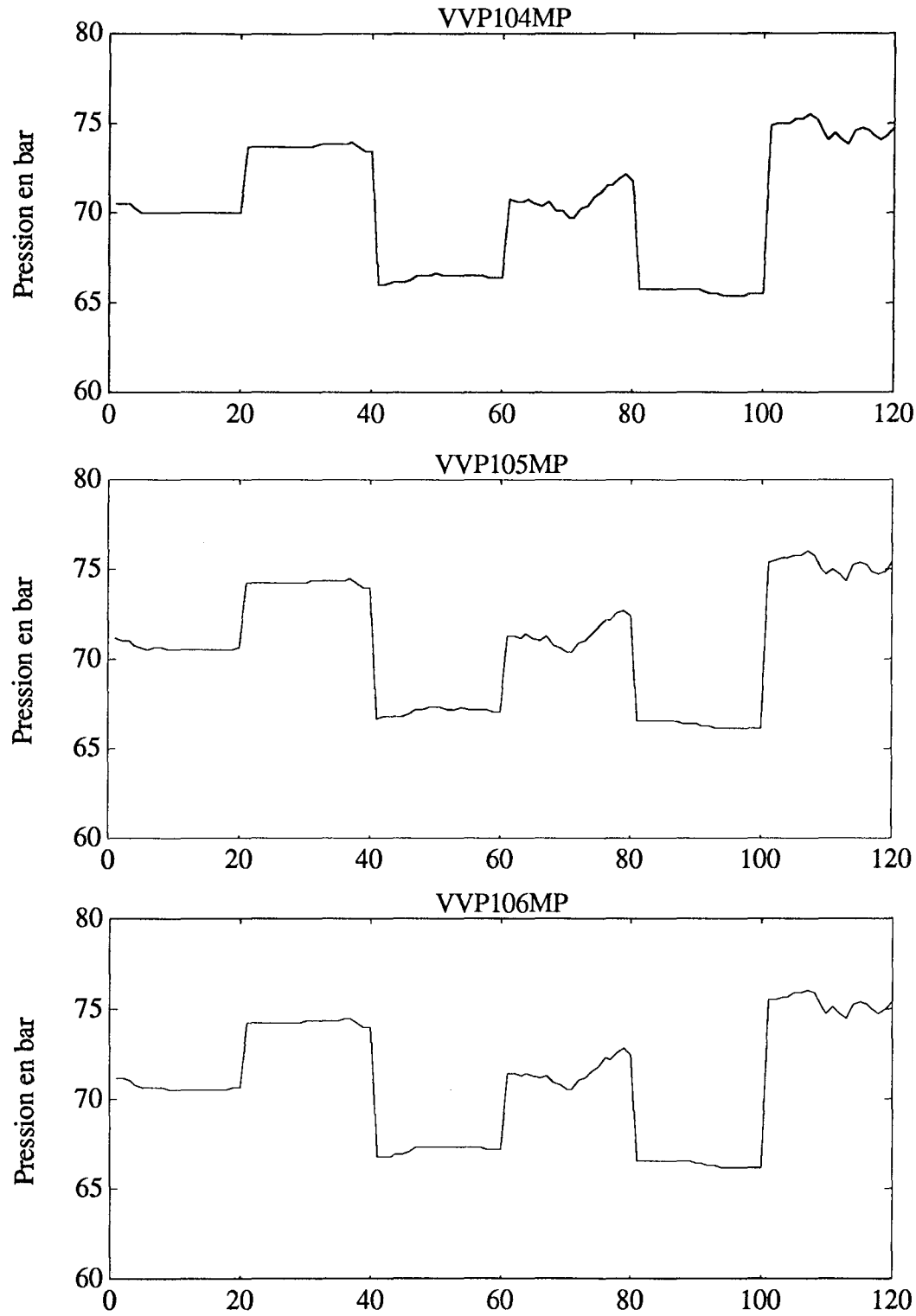


Fig. IV.4 : Mesures du débit vapeur.

Nous représentons maintenant les variations de la pression de vapeur en sortie du générateur de vapeur :

Remarque : Pour tous les fichiers servant à l'identification, la base de temps est de 40 secondes.



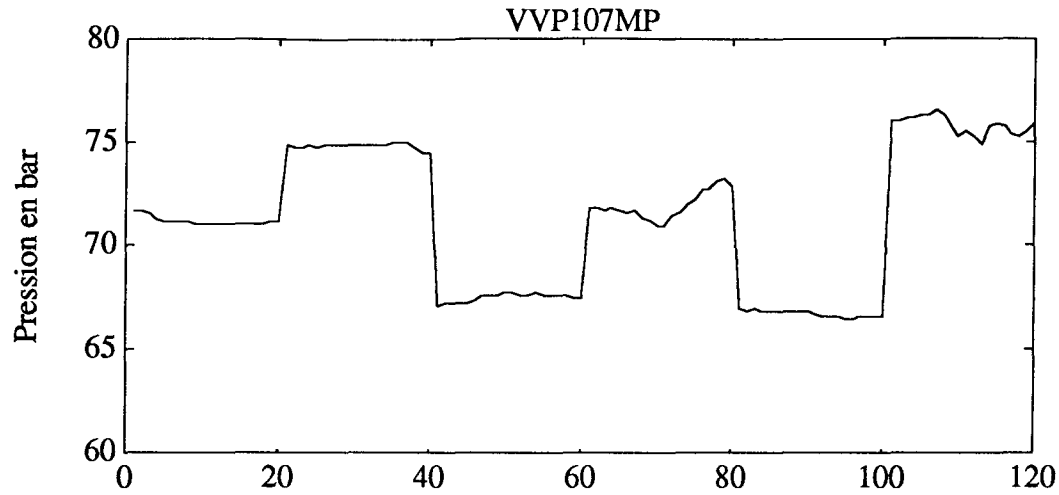


Fig. IV.5 : Mesures de la pression vapeur en sortie GV.

Les variations de la pression de vapeur en entrée circuit turbine sont :

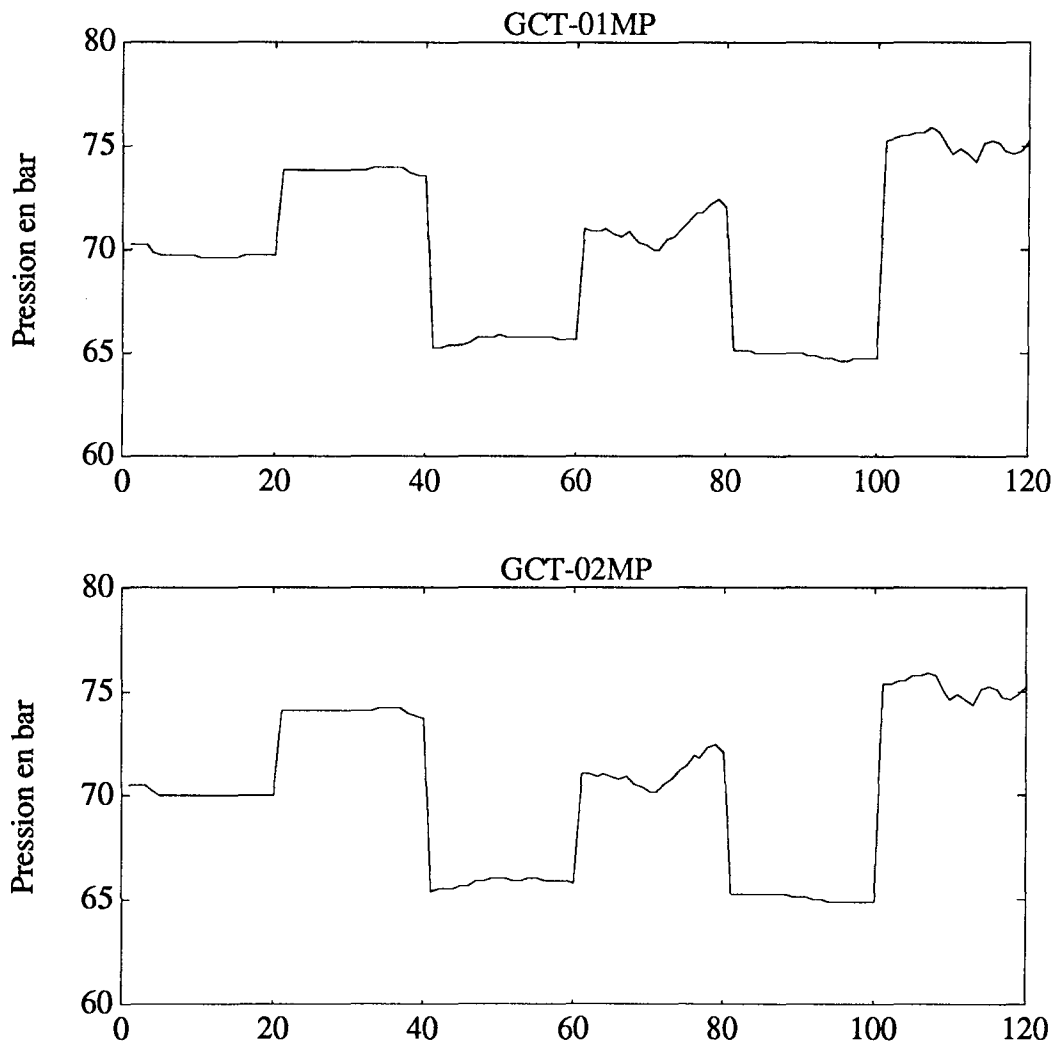


Fig. IV.6 : Mesures de la pression vapeur en entrée circuit turbine.

A partir des deux fichiers "statiques", nous pouvons identifier le coefficient k. Il convient de remarquer que nous avons quatre mesures redondantes de la pression vapeur en sortie du générateur vapeur et deux mesures de la pression vapeur en entrée du circuit turbine.

Le nombre total de couples (P_1, P_2) que l'on peut créer pour chaque fichier est donc de huit. La valeur de k retenue est celle qui minimise l'écart entre la sortie mesurée et la sortie modèle du débit vapeur.

Pour le premier fichier, nous obtenons k = 151,77 correspondant au couple VVP105MP - GCT02MP. De même, pour le deuxième fichier, nous obtenons k = 152,71 correspondant également au couple VVP105MP - GCT02MP.

Le choix final de la valeur k a été pris de la manière suivante : pour les deux fichiers statiques, nous regardons la valeur normalisée de k qui minimise les résidus normalisés. Nous remarquons que nous obtenons les mêmes résidus normalisés (au centième près) quel que soit le choix de la valeur k retenue (parmi celles possibles). Finalement, nous choisissons comme valeur de k la valeur moyenne des valeurs obtenues par l'identification.

Ainsi, le modèle de perte de charge retenu est de la forme :

$$D = k \sqrt{P_{vap}{}^2_{gén} - P_{vap}{}^2_{tur}}$$

avec k = 152,24 en tonnes par heure et par bar.

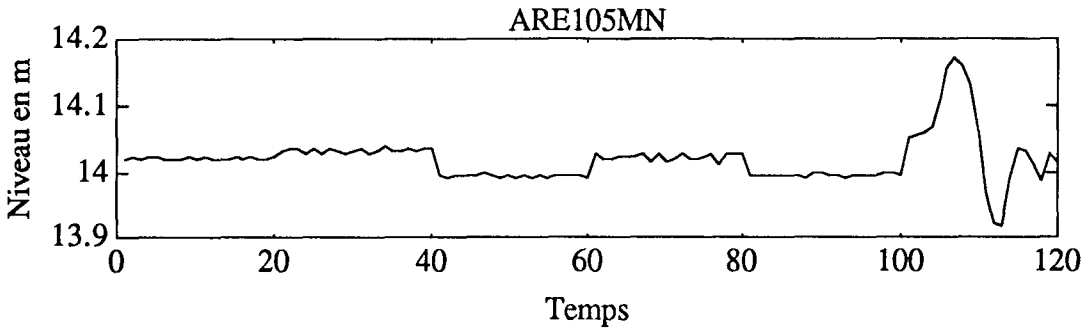
IV.1.2 - NIVEAUX GENERATEUR VAPEUR

Les niveaux d'eau des générateurs de vapeur sont mesurés par quatre capteurs différents (ARE105MN, ARE106MN, ARE107MN et ARE108MN). Les trois premiers capteurs correspondent à la gamme étroite, car mesurant seulement le niveau d'eau compris entre 10,784 m et 16,072 m. Le dernier capteur (ARE108MN) correspond à la gamme large dont l'étendue des mesures est de 0,351 m à 16,072 m.

Il convient d'effectuer une correction entre les mesures en gamme étroite et en gamme large suivant la puissance et la température de l'eau alimentaire. Nous devons tenir compte du fait que la température de l'eau alimentaire à l'entrée du générateur de vapeur est fonction de la charge.

Dans la suite de l'étude, nous ne pouvons pas tenir compte de manière rigoureuse de cette correction nécessaire, donnée par des abaques et donc difficilement exploitable de manière analytique. Nous introduisons de manière artificielle la correction suivante :

Niveau en gamme étroite = Niveau en gamme large + 0,95 en mètre



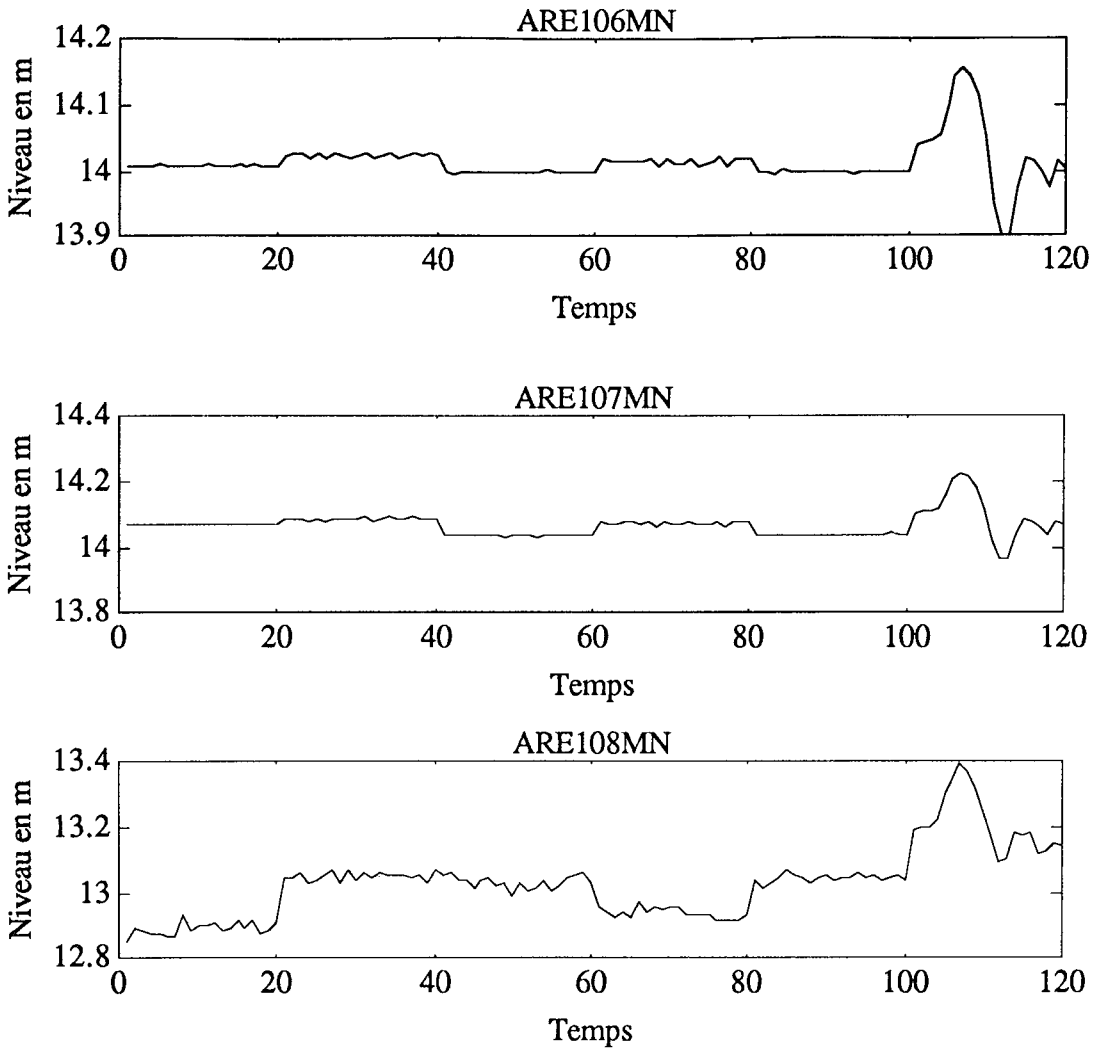


Fig. IV.7 : Mesures niveaux.

IV.1.3 - MODELE DEBIT GENERATEUR VAPEUR

Le modèle débit du générateur de vapeur reliant le niveau GV, le débit d'eau alimentaire et le débit vapeur est le suivant :

$$\frac{dN}{dt} = k\,(Q_e - Q_v)$$

C'est malheureusement un modèle dynamique, ne convenant pas sous cette forme à notre étude.

Pour le débit d'eau alimentaire, deux capteurs délivrent l'information de base nécessaire : ARE101MD et ARE012MD. Pour le débit vapeur, seul le capteur VVP102MD est utilisable (en effet, on rappelle que dès le début de la campagne de mesure, le dysfonctionnement du capteur VVP101MD a été mis en évidence).

Nous avons retenu comme forme de modèle de débit du générateur de vapeur le modèle suivant :

$$N = k\,(Qe - Qv) + a\,f(N)$$

avec f(N) fonction dépendant du point de fonctionnement.

L'identification des paramètres sur nos deux fichiers statiques montre que l'on peut prendre a = 1 sans commettre une trop grosse erreur ($< 10^{-4}$) dans le cas où f(N) = $\overline{N}$.

Nous retenons comme modèle :

$$N = k\,(Q_e - Q_v) + \overline{N}$$

avec $\overline{N}$ = moyenne de N sur la plage de fonctionnement et k = 0,0005.

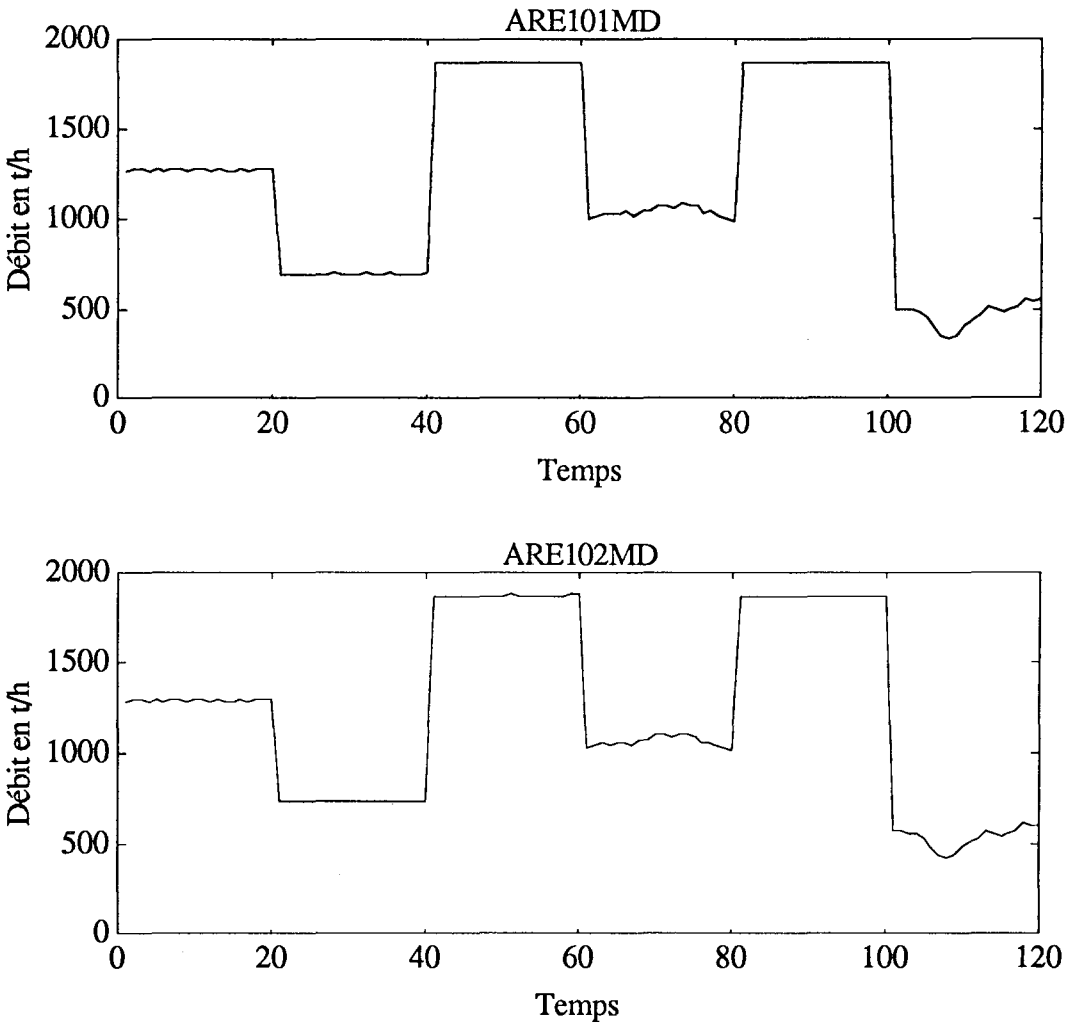


Fig. IV. 8 : Débits d'eau alimentaire.

IV.2 - ANALYSE DES MESURES

Dans un premier temps, nous allons analyser les mesures telles que nous les avons recueillies lors des essais COR400. Plus particulièrement, nous allons nous intéresser aux régimes de puissance de 100% et de 30%. Il convient de noter, que pour utiliser le maximum d'information, la mesure du capteur VVP101MD (panne franche) a

été simulée. On a simplement utilisé le bruit de mesure réel que l'on a centré sur la mesure du capteur redondant VVP102MD.

Remarque : Dans toutes les figures qui suivent a base de temps est de 2 secondes.

IV.2.1 - PUISSANCE 100%

Pour illustrer la qualité des mesures, nous allons présenter les résidus de bilan (fig. IV.9) et les résidus normalisés (fig. IV.10) correspondant à quelques équations de liaison. De plus, pour chaque graphique des résidus normalisés, nous représentons également le seuil de détection de 1,64 correspondant à un niveau de confiance $\alpha = 0,10$.

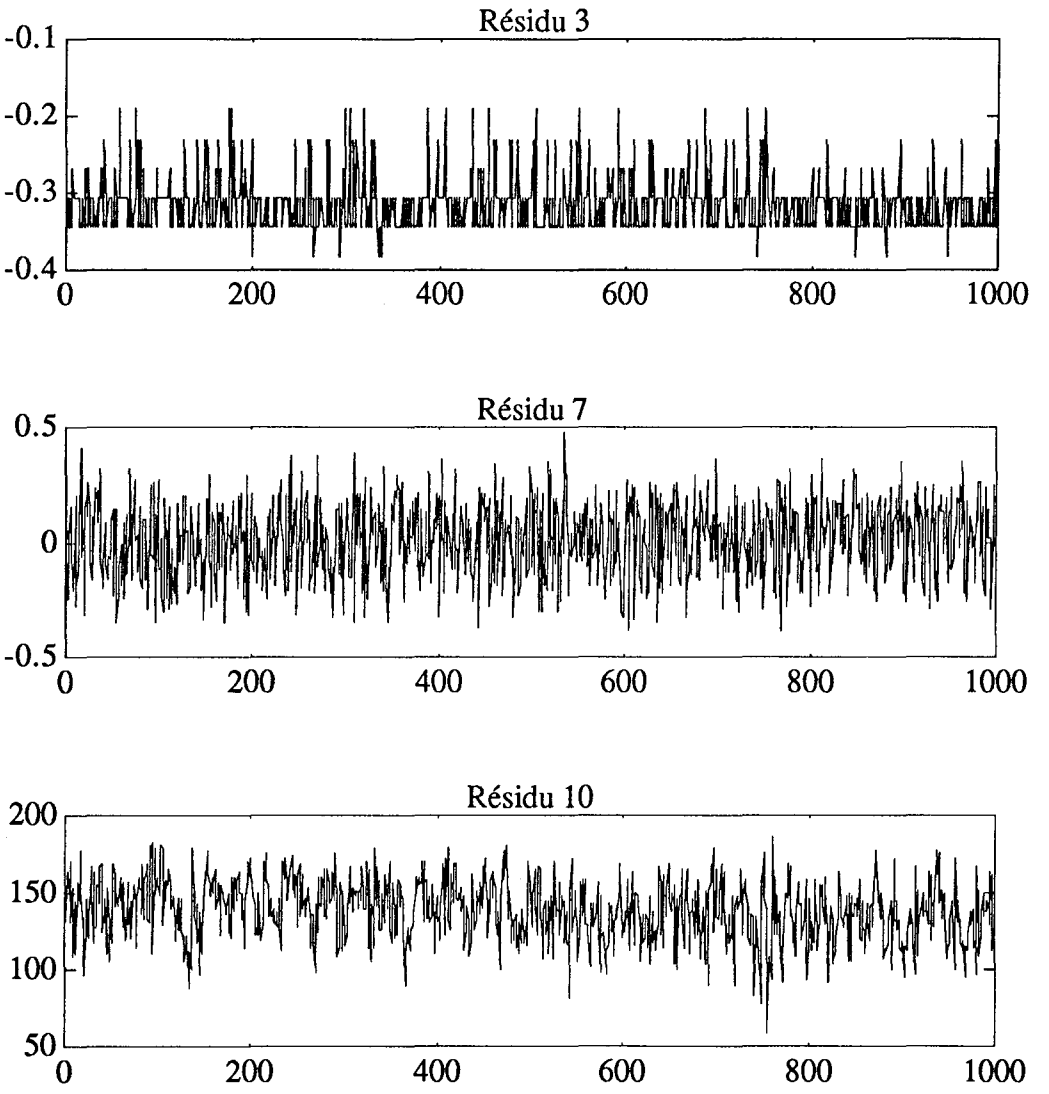
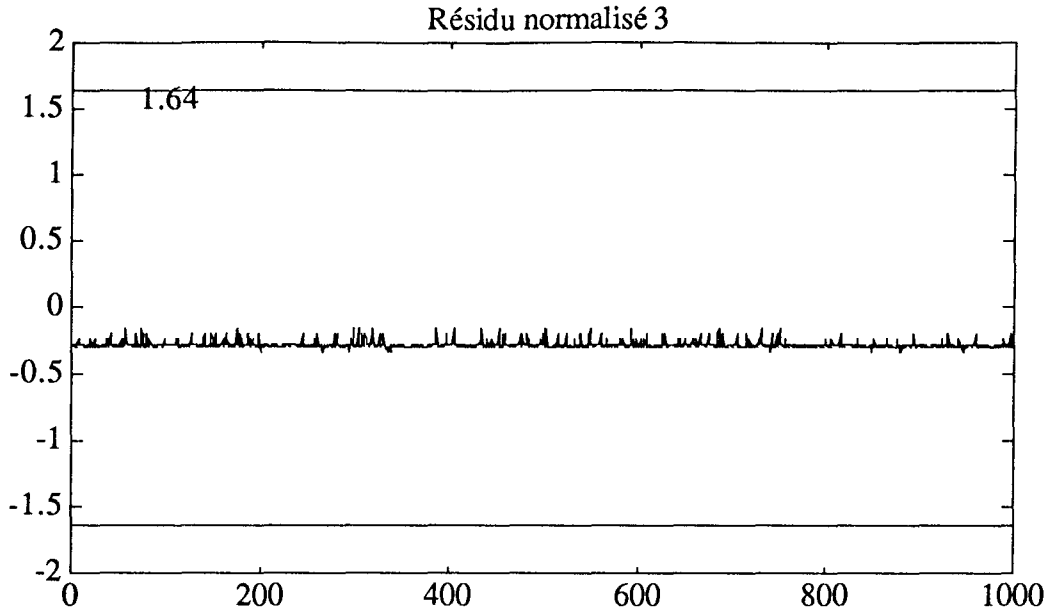
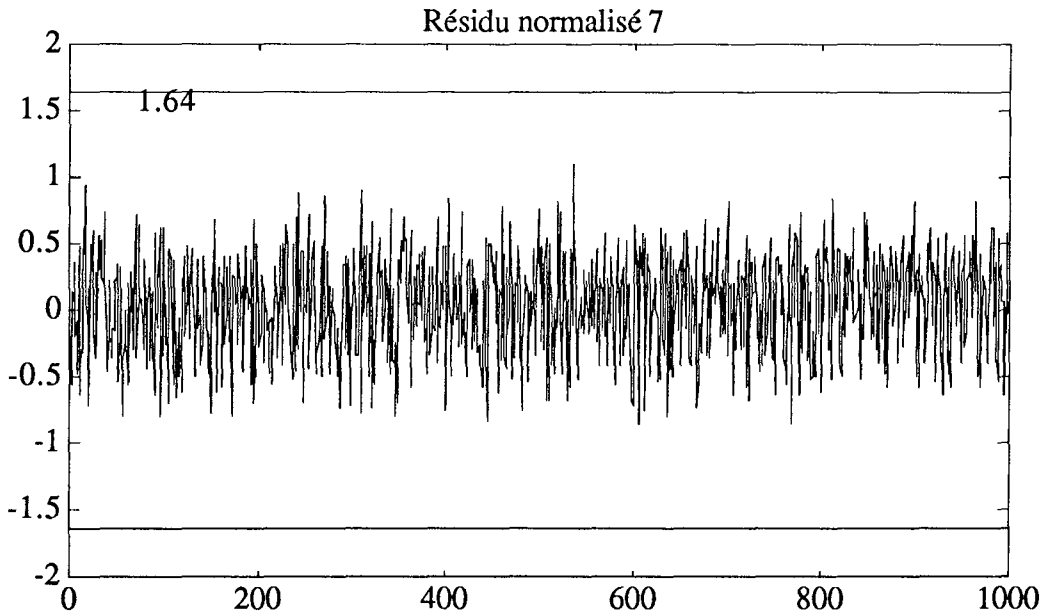


Fig. IV.9 : Résidus des équations de bilan.


Résidu normalisé 3
1.64
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
200
400
600
800
1000


Résidu normalisé 7
1.64
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
200
400
600
800
1000

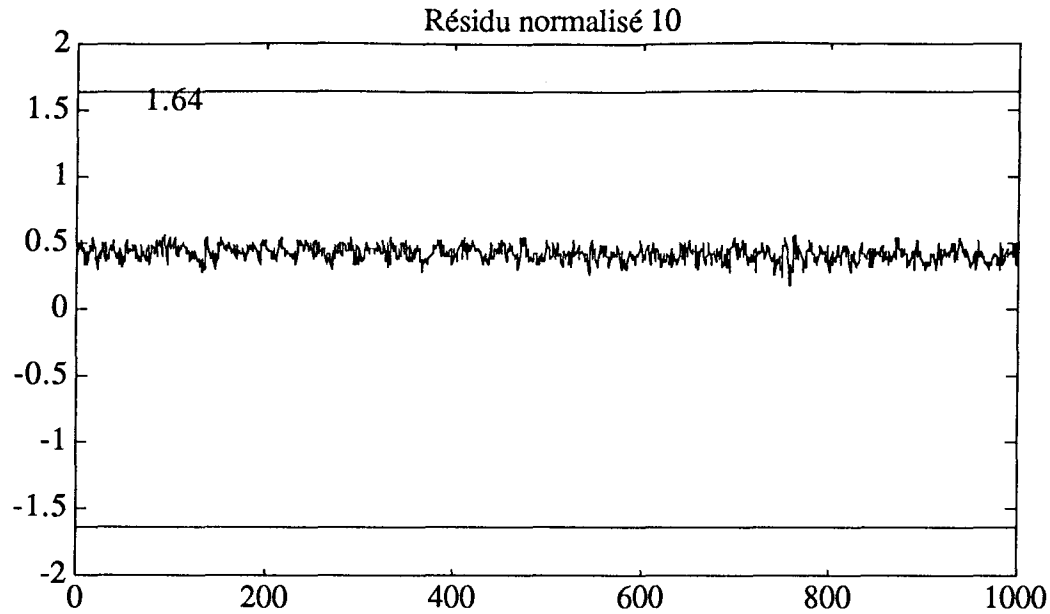
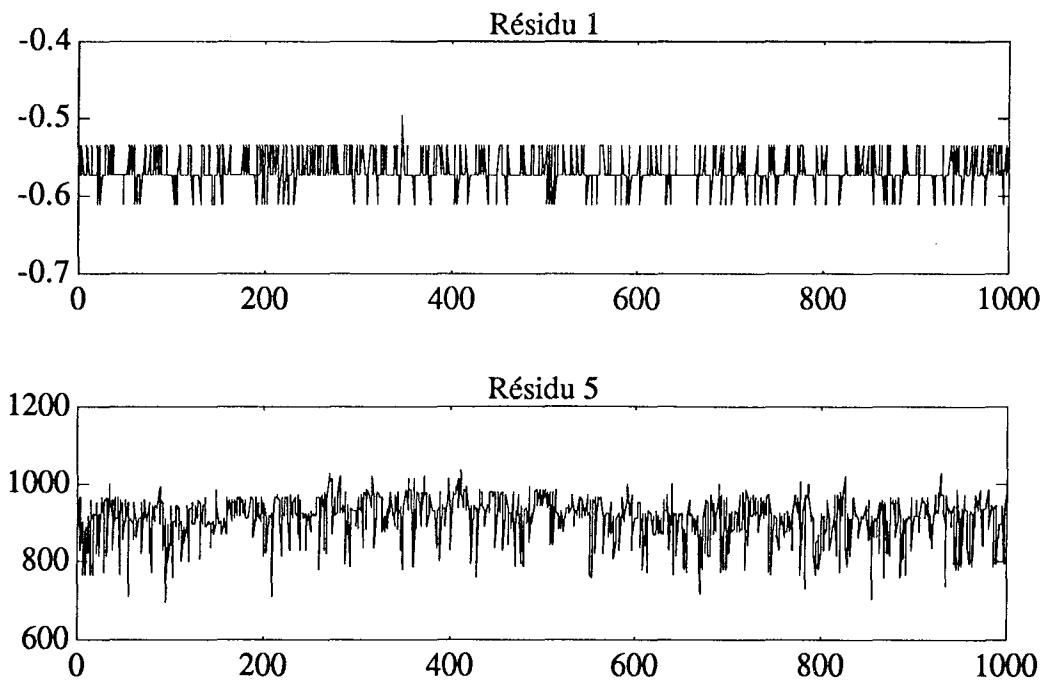


Fig. IV.10 : Résidus normalisés des équations de bilan.

A partir de l'analyse des mesures, on peut souligner que seuls les résidus 6, 7, 8 et 11 sont centrés. On peut donc conclure que parmi les mesures prises en compte pour le calcul des autres résidus, certaines présentent un biais (peu important en amplitude).

IV.2.2 - PUISSANCE 30%

Nous allons présenter également les résidus de bilan (fig. IV.11) et les résidus normalisés (fig. IV.12) correspondant aux équations de liaison. Nous représentons également pour les résidus normalisés le seuil de détection de 1,64 correspondant à un niveau de confiance $\alpha = 0,10$.



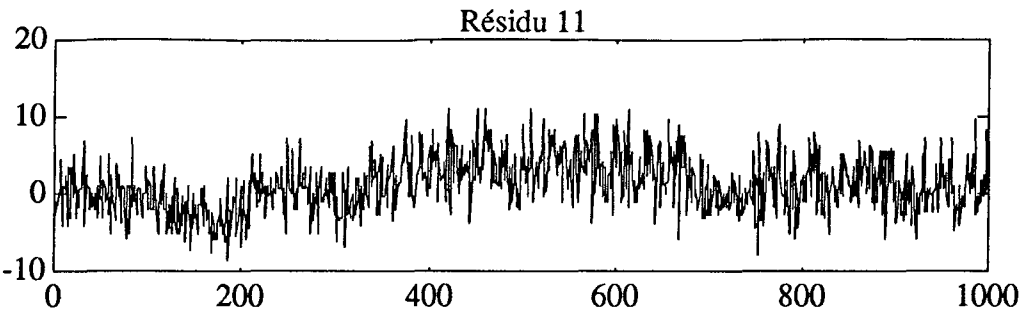
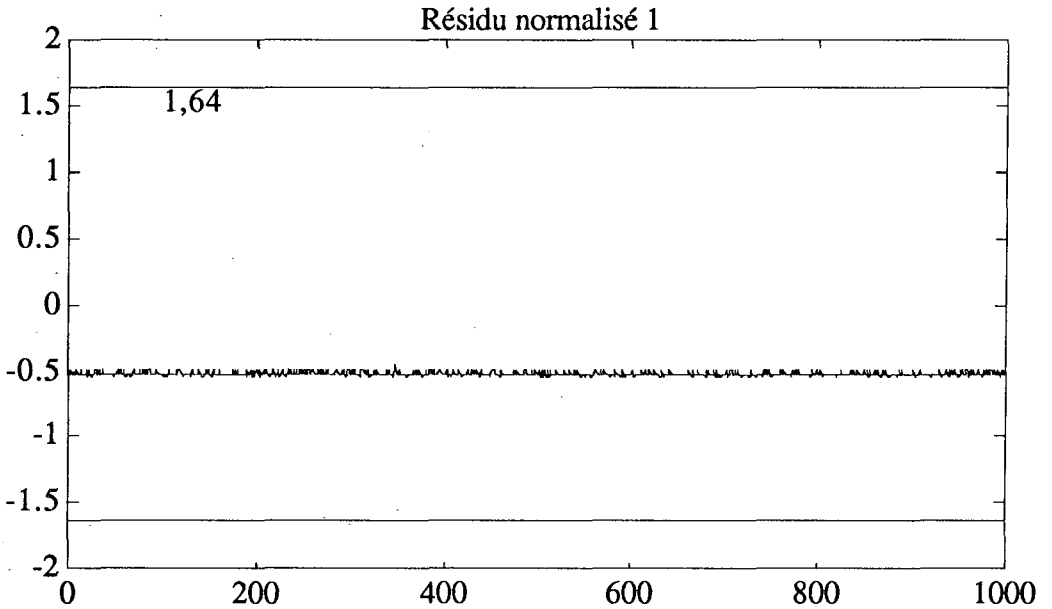
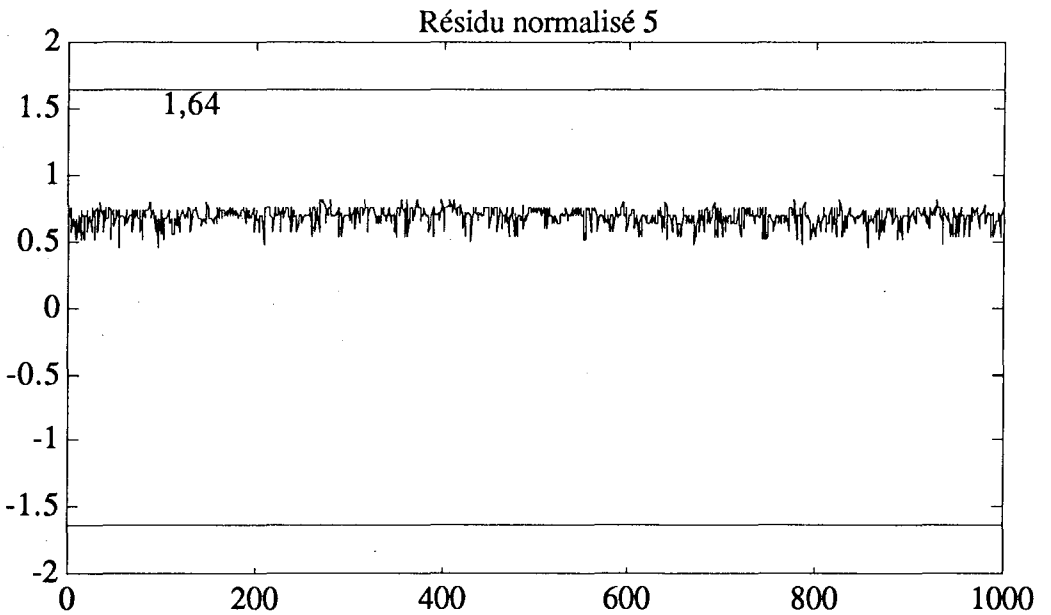


Fig. IV.11 : Résidus des équations de bilan.





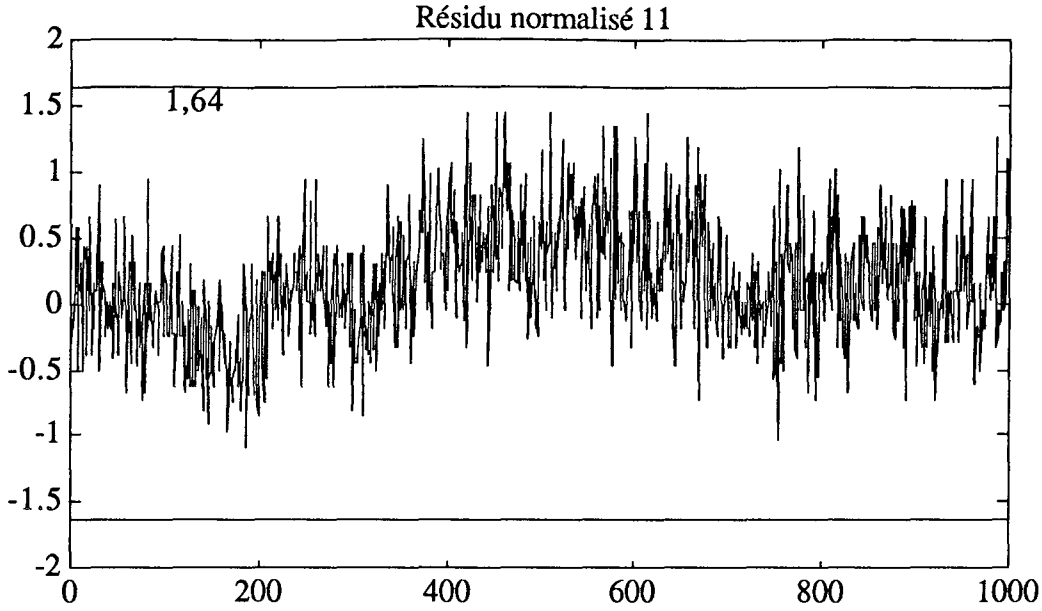


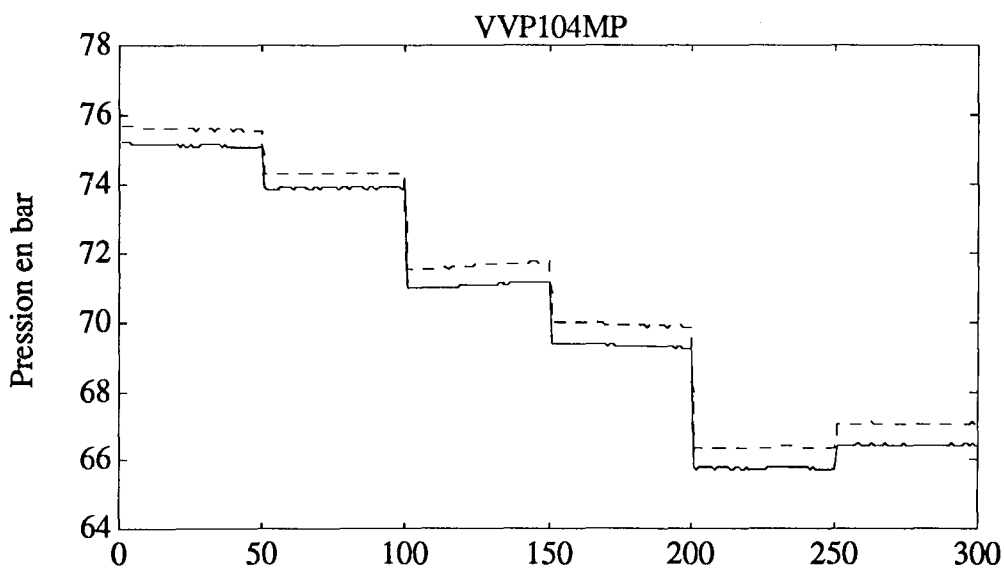
Fig. IV.12 : Résidus normalisés des équations de bilan.

On remarque, lors de l'analyse des mesures, la faible dispersion des résidus normalisés attestant la bonne qualité de l'instrumentation. Il convient de noter les oscillations du résidus 11 indiquant un régime non-stationnaire.

IV.3 - DETECTION DE PANNES DE CAPTEURS

IV.3.1 - MESURES BRUTES

A partir des mesures recueillies sur site, nous avons construit un fichier constitué de cinquante mesures réelles pour chaque plage de fonctionnement statique (30%, 40%, 55%, 70%, 93% et 100% de la puissance nominale). Il convient de noter, que les mesures choisies n'appartiennent pas à des fichiers retenus pour la modélisation. La procédure de détection-localisation de défauts n'ayant fait apparaître aucun défaut , nous représentons chaque mesure avec son estimée (représentée en pointillée --).



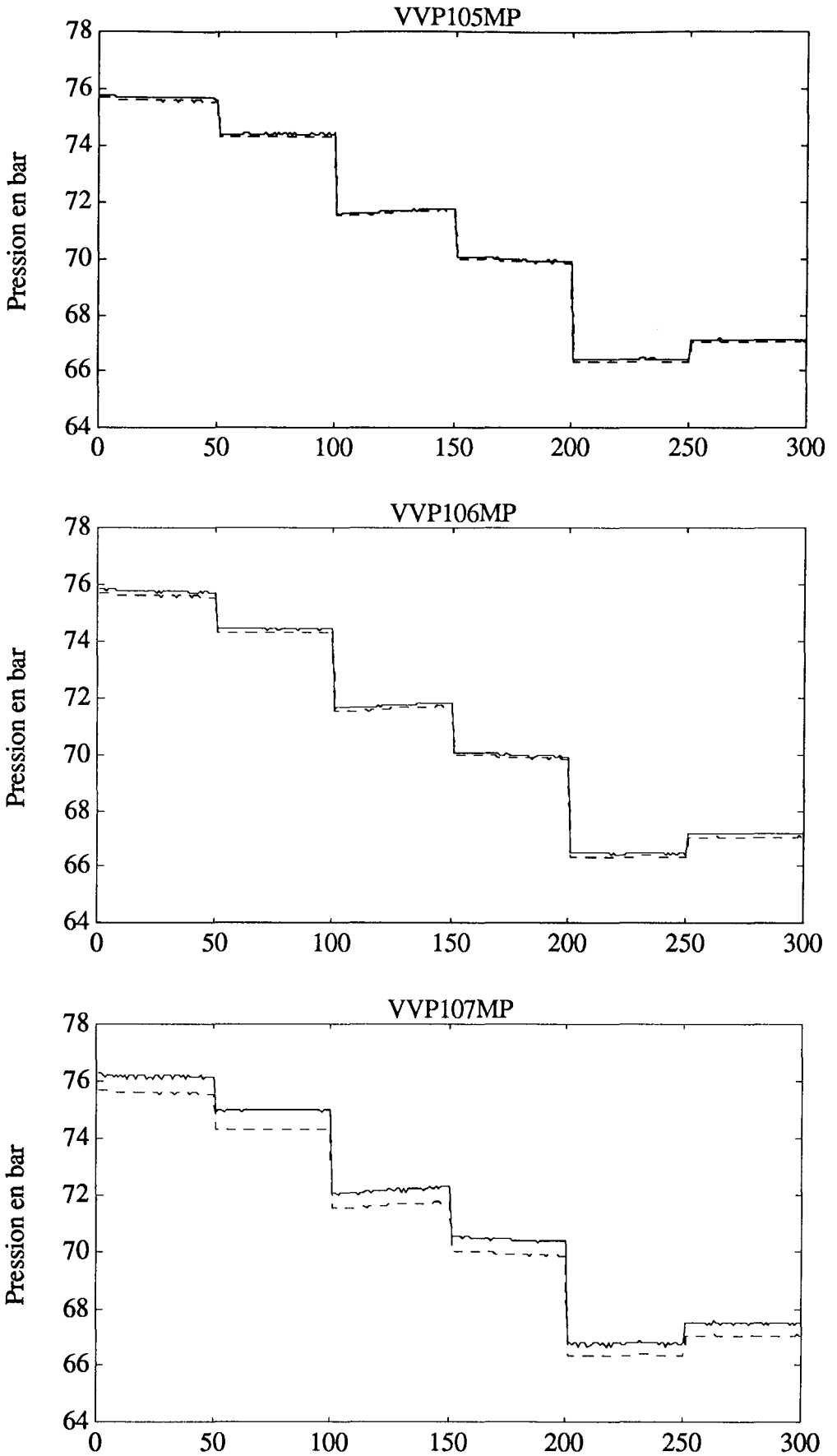


Fig. IV.13 : Mesures pression vapeur.

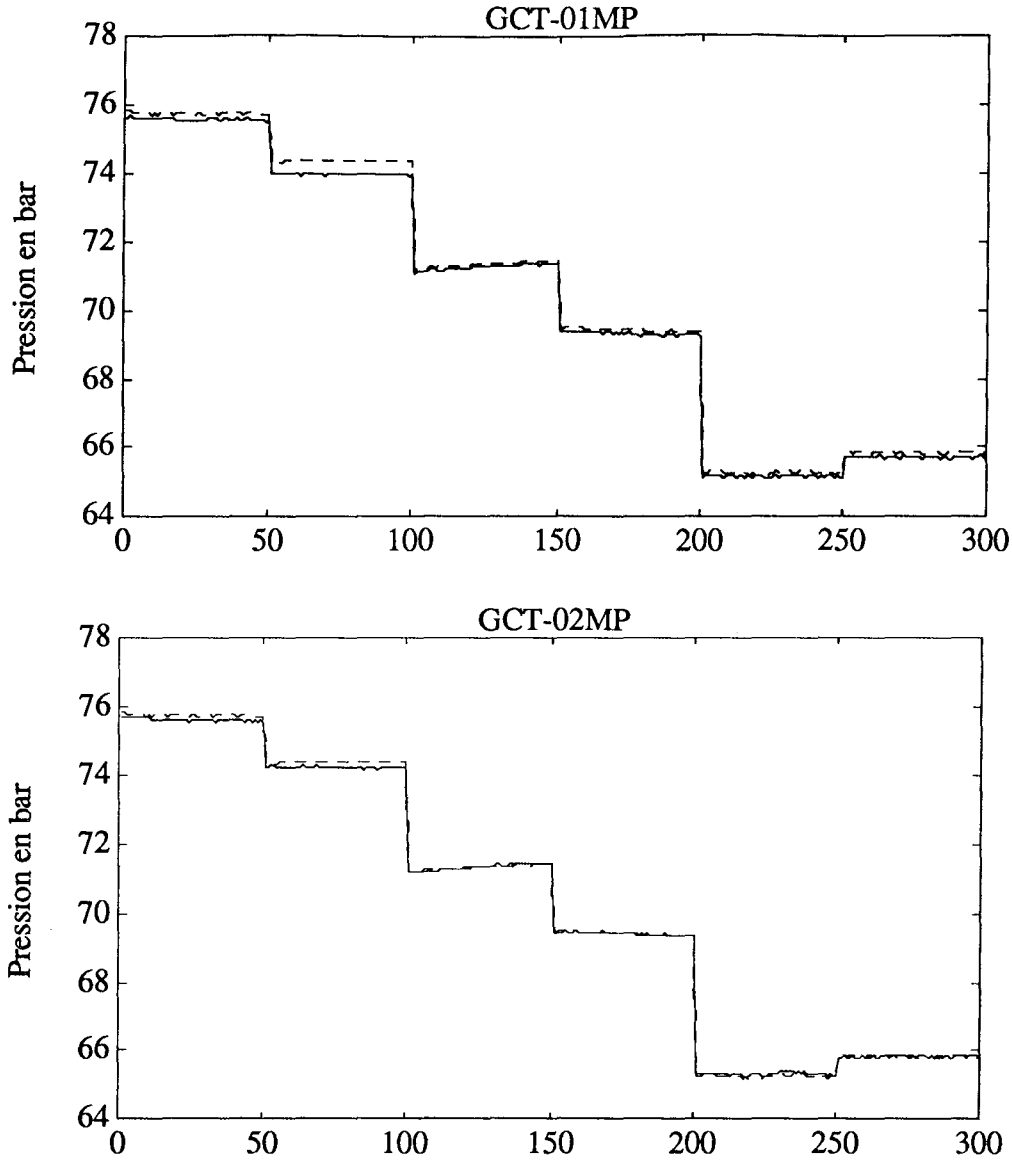
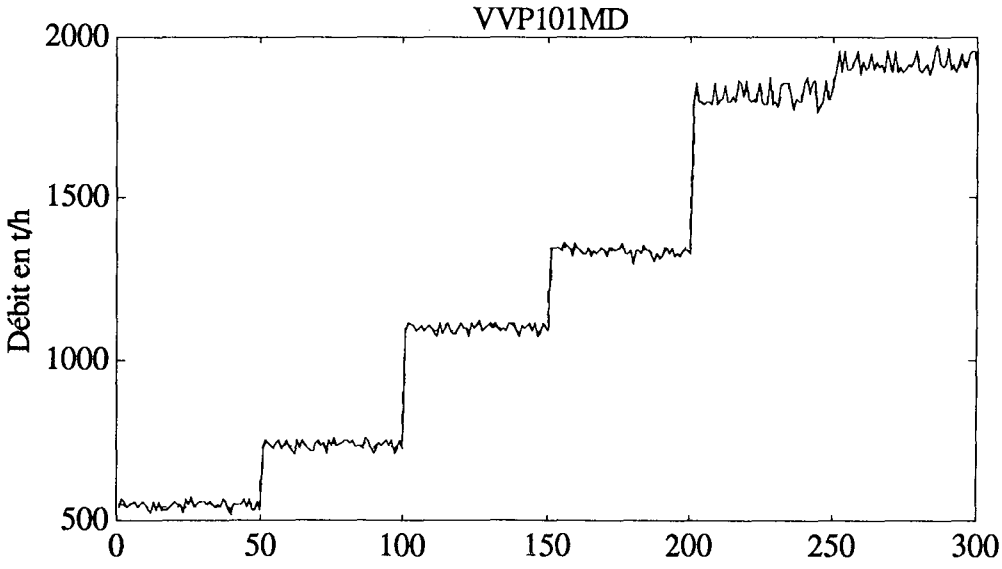


Fig. IV.14 : Mesures pression barillet.



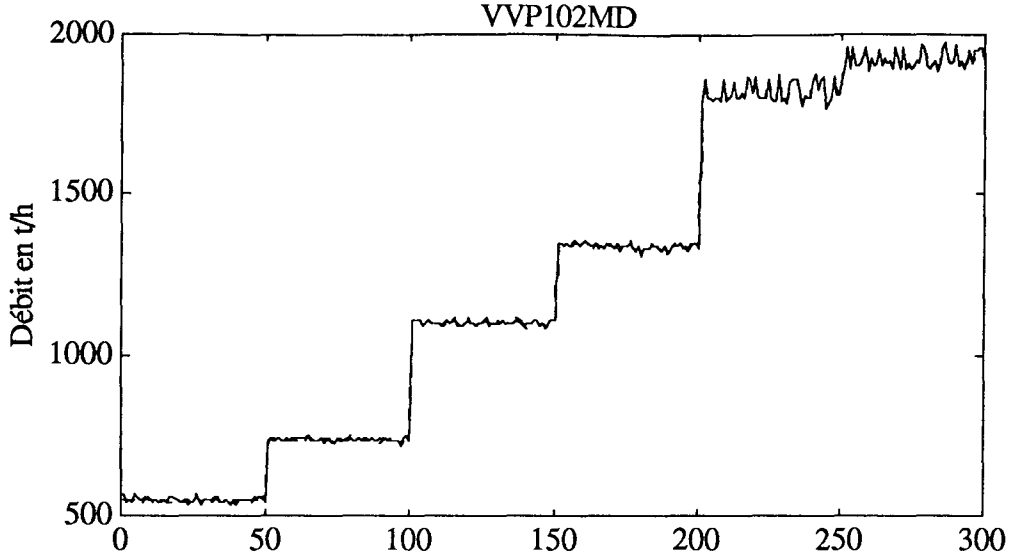


Fig. IV.15 : Mesures débit vapeur.

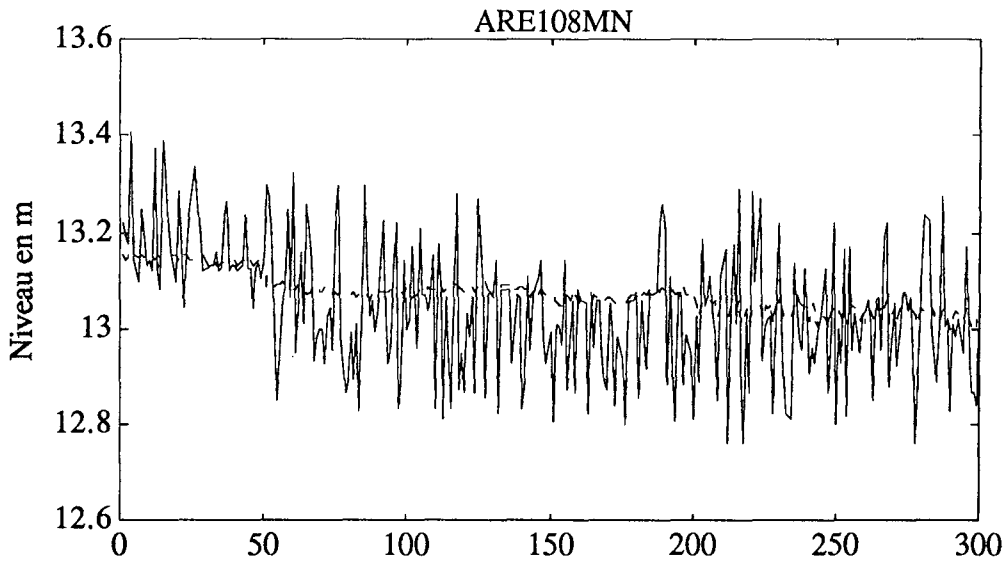


Fig. IV.16 : Mesures niveau gamme large.

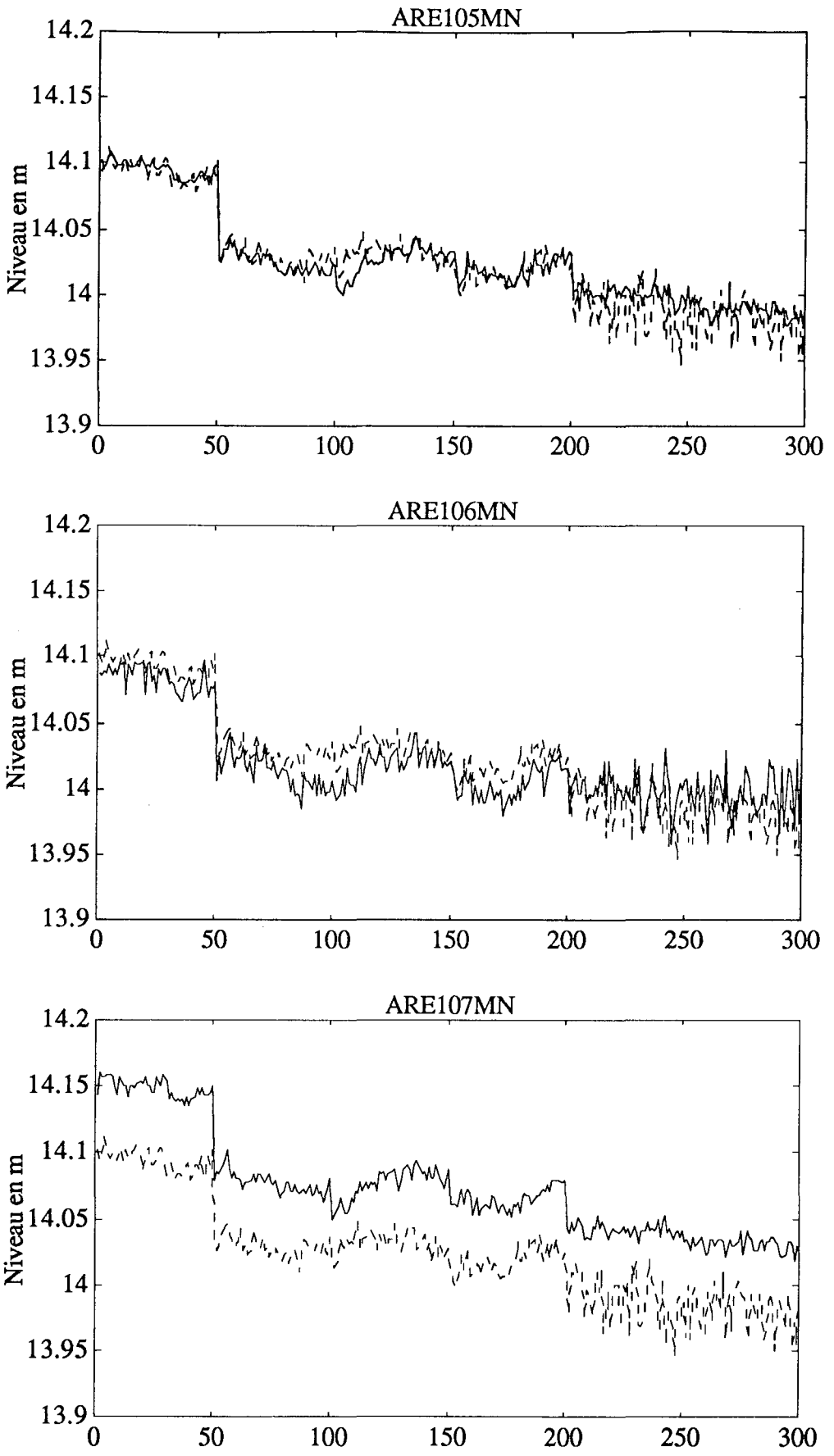


Fig. IV.17 : Mesures niveau gamme étroite.

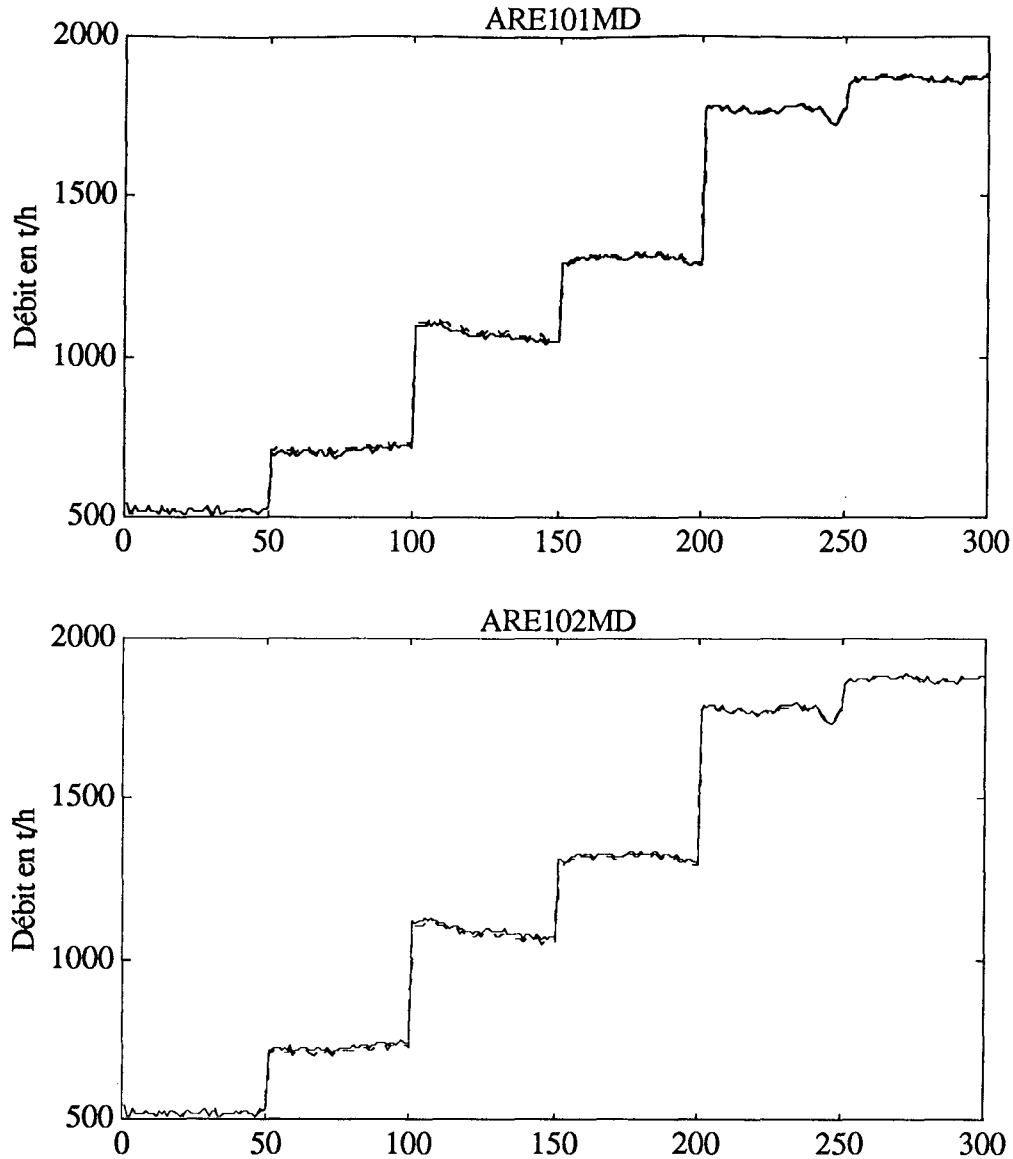


Fig. IV.18 : Mesures débit eau alimentaire.

Ces différentes courbes, nous permettent de mettre en évidence la bonne qualité des mesures. En effet, l'écart entre estimée et mesure est très faible (pour certaines mesures, comme VVP102MD, on peut considérer l'écart comme nul).

IV.3.2 - SIMULATION DE DEFAUTS

Nous avons testé la méthode sur différents exemples de défauts simulés. Cette simulation a permis de mettre en évidence de bonnes dispositions de localisation de défauts. L'illustration que nous présentons, concerne un biais sur la voie 11 d'une amplitude de +20% entre les instants 31 à 50, un biais sur la voie 3 d'une amplitude de +50% entre les instants 71 à 90, un biais sur la voie 7 d'une amplitude de -35% entre les instants 111 à 120, un biais sur la voie 5 d'une amplitude de +35% entre les instants 160 à 200, un biais sur la voie 9 d'une amplitude de -25% entre les instants 211 à 230 et un biais sur la voie 13 d'une amplitude de -20% entre les instants 261 à 275.

La procédure de détection a localisé comme voie en défaut :

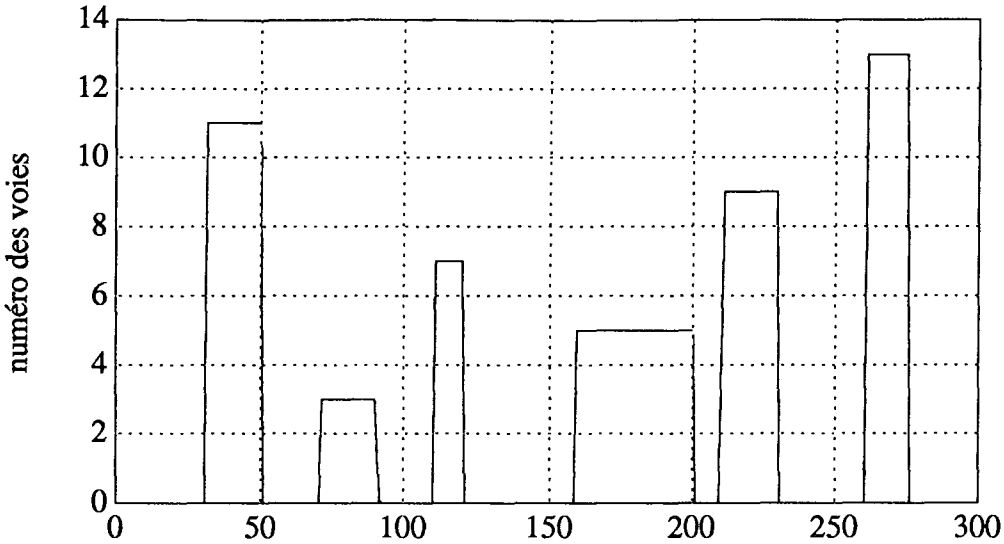


Fig. IV.19 : Localisation des voies en défaut.

Cependant dans certains cas, la bonne localisation s'accompagne d'une surdétection. Toujours sur le même exemple, nous trouvons comme voie en défaut, alors quelles ne le sont pas, les voies suivantes : la voie 7, la voie 8 et essentiellement la voie 9.

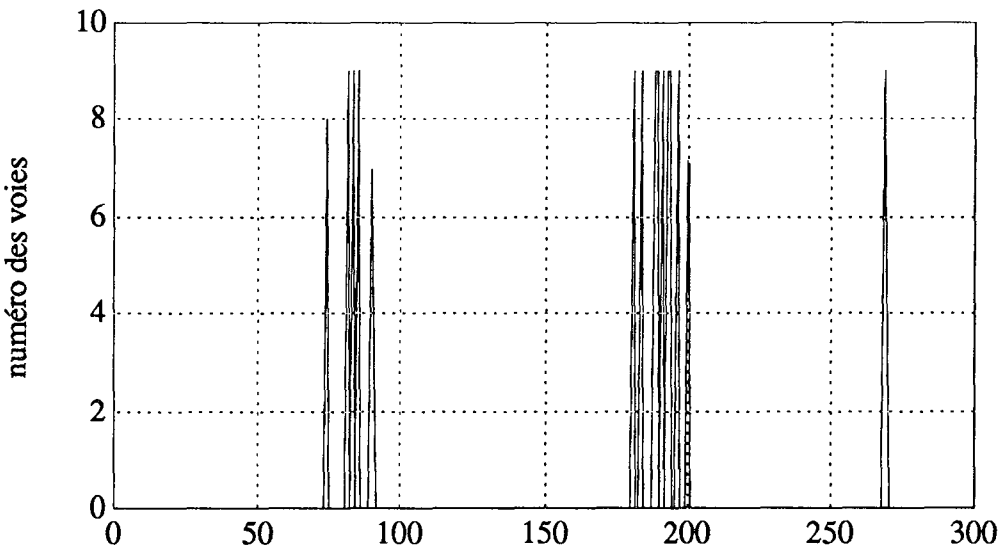


Fig. IV.20 : Localisation des voies en surdétection.

CONCLUSION

Après une étape de validation de la méthode par simulation, nous avons pu l'appliquer sur des mesures réelles provenant de la centrale de Paluel. Cette application laisse entrevoir de bonnes possibilités, mais il conviendrait de la tester plus en détail. Les données utilisées sont en effet très fragmentaires et représentent des états de fonctionnement peu perturbés. Cependant, on a pu montrer sur ces différents exemples,

que la méthode des écarts normalisés par linéarisation des contraintes est applicable aux mesures réelles d'une centrale. Il convient de continuer ce genre de tests afin d'en éprouver la robustesse.

Cette étape nécessite la connaissance des modèles et une identification des paramètres des modèles plus parfaite que celle obtenue par les mesures à notre disposition. En effet, nous ne disposions que de six points représentatifs de fonctionnement différent, ce qui est insuffisant pour une bonne identification des coefficients des modèles. Pour une meilleure transposition de la méthode aux cas réel, une étape de modélisation semble s'imposer.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail à la fois théorique et appliqué, nous nous sommes intéressés aux problèmes du *DIAGNOSTIC* de l'état de fonctionnement de l'instrumentation, en vue de sa **MAINTENANCE PREVENTIVE**. Nous nous sommes orientés sur l'utilisation de la redondance analytique afin de recouper le maximum d'information, permettant ainsi une détection d'erreur par utilisation de la technique de **validation de données**.

Dans un premier temps, nous présentons les concepts généraux utilisés dans la validation de données. Les hypothèses de travail sont posées, la structure des modèles concernés et la représentation, sous forme de graphe orienté, d'un réseau de transport de matière sont exposées.

Puis l'aspect détection de défauts est présenté dans le cas de la redondance analytique utilisant des modèles linéaires. Après une brève description de méthodes, que l'on peut considérer comme la base des travaux ultérieurs, trois techniques encore très utilisées aujourd'hui sont détaillées et comparées entre-elles (l'espace de parité, les écarts de fermeture de bilan et termes correctifs normalisés). La comparaison a permis de mieux cerner les performances respectives et certaines limites de chaque méthode. De plus, nous montrons l'analogie mathématique entre la technique de l'espace de parité et la technique des termes correctifs normalisés. Nous terminons ce second chapitre, par une présentation de la réconciliation des données où une estimation des grandeurs vraies est fournie en tenant compte des mesures en défauts. L'équivalence pour la détection de différentes méthodes (espace de parité, termes correctifs normalisés, critére résiduel et rapport de vraisemblance généralisé) est démontrée.

L'utilisation de modèles non-linéaires pour la redondance analytique est abordée dans le troisième chapitre. A partir des techniques des écarts de fermeture de bilan et des termes correctifs normalisés, nous présentons une extension dans le cas des modèles non-linéaires en insistant sur les propriétés mathématiques que doivent posséder les dits modèles. Après avoir montré les difficultés rencontrées lors du calcul des estimées des grandeurs vraies et de l'agrégation des voies en défauts, une méthode basée sur la linéarisation des modèles et utilisant la technique de la matrice de sélection est détaillée. Comme pour la seconde partie, nous terminons ce chapitre par une présentation de réconciliation de données.

La quatrième et dernière partie est consacrée à l'application de la méthode retenue, compte tenu des résultats du chapitre III, à la détection-localisation de pannes de capteurs sur un exemple concret. Cet exemple concerne l'instrumentation d'un générateur de vapeur de centrale nucléaire 1300 MW. Après une brève description de l'installation, les différents modèles sont présentés ainsi que l'identification des paramètres concernés. A partir des signaux réels, quelques simulations de défauts sont effectuées montrant les possibilités de détection de défauts de la méthode.

Cependant certains développements nous semblent nécessaires :

- une étude détaillée sur le choix des modèles et de leurs paramètres,

- une analyse historique permettant ainsi de caractériser les différents types de défaillance et leur durée,

- une étude de sensibilité de la méthode de détection par rapport au type de défaut (biais, dérive, valeur aberrante, ...), à la durée des défauts, à l'amplitude des bruits de mesure, ...

Cette liste non-exhaustive constitue à notre sens des directions intéressantes de recherche qu'il conviendra d'explorer.

ANNEXE - A

Tests statistiques

INTRODUCTION

Pour parvenir à une décision sur un événement, nous sommes souvent amenés, en statistique, à utiliser l'information que donne cet échantillon. Pour cela il est commode de poser deux hypothèses exhaustives par rapport auxquelles nous testerons cet événement (tests fishériens).

A.I - PRINCIPE DES TESTS FISHERIENS

Le principe des **tests fishériens** repose sur la mise en œuvre d'une procédure de décision construite de telle sorte qu'elle ne conduise à une réponse fausse qu'avec une probabilité faible. L'épreuve est prévue pour tester une certaine faculté (par exemple l'état de fonctionnement d'un système) ; c'est l'hypothèse que l'on qualifiera de nulle, et que l'on note H_0

(H_0) : le système est en fonctionnement normal et présente les caractéristiques statistiques A.

On lui opposera l'hypothèse alternative, notée H_1 qui est la négation de H_0 :

(H_1) : le système est en fonctionnement anormal et présente les caractéristiques statistiques B.

On fait le choix d'une variable de test, d'une "statistique", fonction des résultats expérimentaux et dont les distributions de probabilité sous H_0 et H_1 sont connues.

La régle de décision s'appuie sur la probabilité sous H_0, quantité que l'on appelera probabilité critique du test :

$$P_C = P_{H_0}$$

Si cette probabilité est jugée "trop faible", on rejette l'hypothèse nulle. En effet, l'événement qui s'est réalisé (puisqu'il contient le résultat observé) est alors considéré comme trop invraisemblable dans ce contexte, alors que l'hypothèse alternative lui donne une probabilité plus grande d'apparaître. Par contre, si cette probabilité n'est pas jugée "trop faible", on ne peut pas rejeter H_0.

Il est d'usage de considérer comme "trop faible" une probabilité critique inférieure à un seuil fixé a priori et appelé seuil de confiance du test ; on choisit généralement pour seuil de confiance soit $\alpha = 0,05$ soit $\alpha = 0,10$. La procédure de décision consiste alors à rejeter l'hypothèse nulle si la probabilité critique P_C est inférieure à ce seuil de confiance α ; dans le cas contraire on ne peut pas rejeter H_0 (on remarque les rôles différents joués par H_0 et H_1, et noter que la décision ne concerne que le rejet de H_0).

On fait l'erreur de rejeter à tort H_0 chaque fois que simultanément H_0 est vraie et la probabilité critique inférieure à α. Ainsi, le seuil α apparaît comme une borne supérieure pour la probabilité de rejeter à tort H_0 ; on dit que α mesure le risque de première espèce. L'ensemble des résultats de l'épreuve qui, pour un seuil α fixé, conduisent au rejet de H_0, constitue la région de rejet de H_0 au seuil α.

A.II - PUISSANCE ET TYPES D'ERREURS

Comme on l'a déjà dit le seuil de confiance α fixe une borne supérieure à l'erreur dite de première espèce, qui consiste à rejeter une hypothèse nulle alors qu'elle est vraie. N'aurait-on pas intérêt alors à toujours travailler avec un seuil de confiance α très petit ?

Ceci nous amène à introduire la notion de puissance d'un test. De façon intuitive la puissance d'une procédure veut mesurer son aptitude à détecter un certain écart à l'hypothèse nulle ; c'est pourquoi on convient d'appeler puissance du test la probabilité de rejeter H_0 quand H_0 est fausse.

Il apparaît la nécessité d'un compromis entre le seuil de confiance (risque de première espèce) qu'on voudrait minimiser et la puissance qu'on voudrait maximiser.

Lorsque le statisticien prend une décision, il peut faire l'erreur de première espèce qui consiste à rejeter H_0 quand H_0 est vraie ; mais il peut aussi ne pas rejeter H_0 alors que H_0 est fausse, faisant alors une erreur dite de seconde espèce. Si on appelle β le risque de seconde espèce, on voit qu'il est lié de façon simple à la puissance du test par :

$$\beta = \text{Prob}\{\text{ ne pas rejeter } H_0 \text{ quand } H_0 \text{ est fausse}\}$$

$$\beta = 1 - \text{Prob}\{\text{ rejeter } H_0 \text{ quand } H_0 \text{ est fausse}\} = 1 - \text{puissance}$$

Il est apparu qu'en voulant réduire le risque de première espèce, on détériore la puissance, donc on augmente le risque de seconde espèce. Ainsi, en réduisant le risque de rejeter l'hypothèse nulle à tort (α), on augmente celui de la conserver à tort.

Règle de décision au seuil α		Etat de la nature	
		H_0 vraie	H_0 fausse
Décision du Statisticien	H_0 rejetée	Erreur "1" (Prob = α)	Correct (Prob = 1-β)
	H_0 non rejetée	Correct (Prob = 1-α)	Erreur "2" (Prob = β)

ANNEXE - B

Optimisation avec contraintes non linéaires

INTRODUCTION

Le problème de la validation de données peut être formulé de la manière suivante : à partir des mesures disponibles, on cherche à estimer les valeurs vraies respectant les contraintes de structure du procédé.

La recherche des estimées $\hat{X}$ des grandeurs vraies X* est réalisée par minimisation de la fonction $\Phi(\hat{X}, X)$ définie par :

$$\Phi(\hat{X}, X) = \frac{1}{2} \|\hat{X} - X\|^2_{V^{-1}}$$
$$= \frac{1}{2} (\hat{X} - X)^T V^{-1} (\hat{X} - X)$$

(où V représente la matrice de variance des mesures).

Les estimations doivent satisfaire les contraintes de structure (représentées par les équations de liaisons). Les équations de liaisons (ou contraintes égalités) sont définies par :

$$f_i(\hat{X}) = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

Φ est une fonction deux fois continûment dérivable, définie sur un sous-ensemble ouvert (Ω) de $\mathbb{R}^V$ et nous supposons que $f_1, ..., f_n$ sont continûment dérivables dans (Ω) et sont régulières en tout point $\hat{X}$ tel que $\Phi(\hat{X})$ soit le minimum de Φ, c'est-à-dire que les $f_i'(\hat{X})$ sont toutes indépendantes.

B.I - METHODE

B.I.1 - Valeurs initiales

La méthode que nous allons utiliser est une "méthode d'élimination numérique" [LEGR 80], méthode qui, au cours du traitement, ramène le problème de variables liées en un problème de variables libres.

C'est une méthode itérative qui nécessite la connaissance d'un point $X^\circ \in (\Omega)$, vérifiant les contraintes bilatérales, qui peut ne pas être évident dans le cas où les contraintes sont des expressions compliquées.

Dans le cas où le point X° n'est pas évident, nous l'obtiendrons à partir d'un point quelconque de (Ω) par le procédé suivant :

soit X un vecteur arbitraire ne vérifiant pas à la fois toutes les n contraintes :

$$\{ f_i(X) = 0 \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (B.1)$$

Notre but est, à partir de ce point X, de chercher un point $\overline{X}$ vérifiant toutes les contraintes.

Pour cela, nous choisissons v - n variables hors base (ou libres) qui seront nos variables indépendantes par opposition aux n variables de base ou variables liées.

On décompose le vecteur X de la manière suivante :

$$X = (X_1, X_2) \text{ avec } \begin{cases} X_1 \text{ contenant les n variables de base} \\ X_2 \text{ contenant les v - n variables hors-base} \end{cases}$$

Les n équations de (B.1) permettent en général de calculer les variables de base (X_1) en fonction des v - n variables indépendantes (X_2).

Remarque : Le choix des variables doit pouvoir être modifié au cours du traitement.

Sous certaines conditions (existence des solutions, non nullité du Jacobien), nous obtenons :

$$\begin{cases} (X_1)_1 = k_1 (X_2) \\ (X_1)_2 = k_2 (X_2) \\ \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \\ (X_1)_n = k_n (X_2) \end{cases} \qquad \text{(B.2)}$$

En réinjectant ces variables dans Φ, nous avons :

$$\Phi(X_1,X_2) = \Phi(k_1 (X_2), k_2 (X_2), ..., k_n (X_2), X_2)$$

que nous notons $F(X_2)$.

Remarque : Le calcul explicite de $F(X_2)$ est en général impossible.

La technique de l'élimination numérique consiste à utiliser des algorithmes qui, à partir d'un ensemble de valeurs numériques des variables indépendantes X_2, permettent le calcul des valeurs numériques des variables liées X_1, puis de $F(X_2)$.

L'essentiel de ce traitement est le calcul du vecteur X_1, c'est-à-dire la résolution du système (B.1) que nous résoudrons par linéarisation des contraintes.

Nous calculons de manière itérative les vecteurs :

$$X_1^0, ..., X_1^j, X^{j+1}_1, ...$$

où X_1^0 est pris arbitraire et où X^{j+1}_1 est défini en fonction de X_1^j comme solution du système (B.1).

Ainsi :

$$f(X^{j+1}) = f(X^j) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T}\right)\left(X^{j+1}_1 - X_1^j\right) \qquad \text{(B.3)}$$

Comme $f(X^{j+1}) = 0$ (car X^{j+1} est défini comme étant solution du système), nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T}\right)\left(X_1^{j+1} - X_1^j\right) = - f(X^j) \qquad (B.4)$$

Il est possible que le système linéarisé soit insoluble $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T}\right) \text{non inversible}\right)$, il convient alors d'effectuer un changement dans le choix des vecteurs liés (changement de base).

Après cette étape, on se trouve en possession d'un vecteur X qui vérifie les contraintes bilatérales.

A partir des composantes "libres", on cherche à minimiser le critère Φ.

B I.2 - Méthode du gradient

La fonction $F(X_2)$ est une fonction des seules variables indépendantes X_2 et, pour lui appliquer la technique de la méthode du gradient, nous avons besoin de connaître les dérivées de $F(X_2)$ par rapport aux variables libres ; pour les distinguer des dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}(x_1, x_2, ..., x_v)$, nous les désignerons par "gradient réduit" et noterons $F'(X)$ le tableau des dérivées $\frac{\partial F(X_2)}{\partial X_{2(j)}}$.

D'après (B.2), nous avons :

$$F(X_2) = \Phi(X_2, K(X_2)) \qquad (B.5)$$

En dérivant (B.5) par rapport à chacune des variables libres, nous obtenons :

$$F'(X) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_2^T}\right) + \left(\frac{\partial K}{\partial X_2^T}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1^T}\right) \qquad (B.6)$$

De même, pour les n liaisons, nous avons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_2^T}\right)^T + \left(\frac{\partial K}{\partial X_2^T}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T}\right)^T = 0 \qquad (B.7)$$

Par élimination de $\left(\frac{\partial K}{\partial X_2^T}\right)$ dans (B.6) et (B.7), on obtient l'expression du gradient réduit :

$$F'(X) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_2^T}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial X_2^T}\right)^T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T}\right)^T\right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1^T}\right) \qquad (B.8)$$

Pour les traitements numériques, on pose :

$$\lambda = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T} \right)^T \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1^T} \right) \qquad (B.9)$$

solution de :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1^T} \right)^T \lambda = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1^T} \right) \qquad (B.10)$$

Remarque : λ joue le rôle de paramètres de Lagrange

On a alors :

$$F'(X) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_2^T} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial X_2^T} \right)^T \lambda \qquad (B.11)$$

Nous posons :

$$X_2^{j+1} = X_2^j - \mu * F'(X) \qquad (B.12)$$

(où μ représente le pas de convergence)

et calculons X_1 par élimination numérique.

Par construction, $X = (X_1, X_2)$ vérifie les n contraintes.

Nous devons également tester la vérification des conditions :

$\Phi (X^{j+1}) < \Phi (X^j)$ (méthode de descente)

Si cette condition est vérifiée alors $X = X^{j+1}$, sinon on remplace μ par $\mu/4$.

Remarque : Pour améliorer la vitesse de convergence, on peut pondérer le pas μ par la matrice V de variance des erreurs qui représente l'inverse du Hessien (dérivée seconde du critère), utilisant ainsi la méthode de NEWTON-RAPHSON.

B.II - PROPRIETES STATISTIQUES DE L'ESTIMATEUR

Posons $X = X^* + \varepsilon$

(B.13)

et $X = X^* + \varepsilon$

Les estimées $\hat{X}$ sont obtenues par la minimisation de :

$$\Phi(\hat{X}, X) = \frac{1}{2} \| \hat{X} - X \|^2_{V^{-1}} \text{ sous } f(\hat{X}) = 0$$

X*, représentant les valeurs vraies, vérifie :

$$f(X^*) = 0 \tag{B.14}$$

En supposant la solution $\hat{X}$ suffisamment proche des grandeurs vraies pour que le développement en série de Taylor des contraintes puisse être limité au premier ordre :

$$f(\hat{X}) \sim f(X^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial (X^*)^T}\right)(\hat{X} - X^*) \tag{B.15}$$

ou encore en fonction de x :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial (X^*)^T}\right) x = 0 \tag{B.16}$$

Sous l'hypothèse de proche voisinage de $\hat{X}$ et X*, alors :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial (X^*)^T}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right) \tag{B.17}$$

Le problème de l'estimation devient :

chercher le minimum de :

$$\frac{1}{2} \| \hat{x} - \varepsilon \|^2_{V^{-1}} \qquad \text{sous} \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right) \hat{x} = 0 \tag{B.18}$$

Ce problème admet comme solution :

$$\hat{x} = P\varepsilon \text{ avec } P = I_v - V \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right)^T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right) V \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right)^T\right]^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{X}^T}\right) \tag{B.19}$$

L'espérance mathématique de $\hat{x}$ s'exprime par :

$$E(\hat{x}) = PE(\varepsilon) = 0 \tag{B.20}$$

ce qui implique :

$$E(\hat{X}) = E(X^*) = X^* \tag{B.21}$$

La matrice de variance-covariance de $\hat{x}$ s'écrit alors :

$$\text{Var}(\hat{x}) = E\left(\hat{x}\ \hat{x}^T\right) \tag{B.22}$$

qui devient d'après (B.19) :

$$\text{Var}(\hat{x}) = PVP^T \tag{B.23}$$

La matrice de variance-covariance de $\hat{X}$ s'écrit alors :

$$Var(\hat{X}) = E\left((\hat{X} - E(\hat{X}))(\hat{X} - E(\hat{X}))^T\right) \quad (B.24)$$

qui devient d'après (B.21) :

$$Var(\hat{X}) = E\left((\hat{X} - X^*)(\hat{X} - X^*)^T\right) \quad (B.25)$$

et en fonction de x :

$$\begin{aligned} Var(\hat{X}) &= E(x\,x^T) \\ &= PVP^T \\ &= \hat{V} \end{aligned} \quad (B.26)$$

B.III - APPLICATIONS NUMERIQUES

Afin de tester la robustesse de nos estimateurs, nous avons effectué l'essai suivant sur les trois réseaux définis au chapitre III.

Nous générons pour chaque mesure un bruit distribué aléatoirement selon une loi normale centrée et de variance égale à la variance de la mesure (dans ces exemples, on a fixé la précision des mesures à 5 %). Le vecteur de bruit, ainsi obtenu, est ajouté au vecteur des mesures pour former un vecteur de pseudo-mesures. Ces dernières sont ensuite validées par notre procédure.

En renouvelant ces opérations un grand nombre de fois (dans notre cas 500 expériences), il devient possible de calculer la moyenne et la dispersion des grandeurs estimées (à savoir l'estimée des mesures $\hat{X}$ et l'estimée de la variance des estimées $\hat{V}$).

B.III.1 - Réseau n°1

Estimées		Estimées des variances	
moyenne	variance	moyenne	variance
114,81	7,67	7,88	0,02
114,81	7,67	7,88	0,02
114,81	7,67	7,88	0,02
7,09	0,06	0,06	0,00
60,02	1,71	1.67	0.00
60,02	1,71	1.67	0.00
146,85	8,45	8.49	0.12
146,85	8,45	8.49	0.12
146,85	8,45	8.49	0.12

B.III.2 - Réseau n° 2

Estimées		Estimées des variances	
moyenne	variance	moyenne	variance
155,61	7,92	7,95	0,01
155,61	7,92	7,95	0,01
155,61	7,92	7,95	0,01
77,31	5,06	4,79	0,00
77,31	5,06	4,79	0,00
77,31	5,06	4,79	0,00
135,02	9,82	10,15	0,00
135,02	9,82	10,15	0,00
34,96	1,05	1,00	0,00
34,96	1,05	1,00	0,00
34,96	1,05	1,00	0,00
10,00	0,03	0,03	0,00
10,00	0,03	0,03	0,00

Remarque : Les variances nulles s'expliquent par le choix du format d'édition (elles ne sont pas rigoureusement nulles).

B.III.3 - Réseau n° 3

Remarque : Toutes les contraintes sont de type linéaire, donc la matrice des dérivées des contraintes représente tout simplement la matrice d'incidence du réseau M. Le choix de la base pour l'élimation numérique peut se faire par extraction de la partie régulière de cette matrice.

Estimées		Estimées des variances	
moyenne	variance	moyenne	variance
119,02	4,34	3,70	0
102,19	4,90	4,17	0
77,60	4,59	3,84	0
16,83	0,77	0,80	0
94,44	3,89	3,36	0
114,60	4,16	3,85	0
20,17	1.01	0.97	0
73.87	3.37	3.38	0
53.71	3.18	2.95	0
40.73	2.53	2.64	0
24.59	0.58	0.55	0
37.95	0.73	0.71	0
37.95	0.73	0.71	0
13.36	0.42	0.39	0
24.59	0.58	0.55	0

Remarque : Attention, le fait de trouver une variance de nos estimées nulle est tout à fait normal (cf remarque précédente), puisque dans le cas présent, la variance de l'estimateur des mesures ne dépend que de la structure du réseau (par le biais de la matrice d'incidence) et non des mesures.

B.IV - CONCLUSION

Les résultats obtenus par la technique de l'élimination numérique semblent prometteurs (par rapport à d'autres techniques du même genre : Gauss - Seidel, Jacobi non-linéaire, ...). La moyenne des estimées des variances est relativement proche de la variance des estimées des mesures représentant la dispersion des estimées des mesures.

Cette proche égalité permet de conclure sur une bonne qualité de l'estimateur de la variance.

On remarque une bonne qualité sur l'estimation des mesures puisque les contraintes de redondance directe sont rigoureusement respectées alors que les erreurs absolues pour les autres contraintes (redondances analytiques) sont de l'ordre du 1/50ème.

BIBLIOGRAPHIE

[ADAM 85] T. ADAM
"Spécification des traitements de validation des mesures. DAMPIERRE - Tranche 4."
Note HP 41/85/06, E.D.F. Chatou, Avril 1985.

[AITO 89] A. AITOUCHE - F. KRATZ - D. MAQUIN - J. RAGOT
"Détection et localisation d'erreurs de mesure par la technique de l'espace de parité."
Congrès CIAME - CAPTEURS 89, Paris, 6 - 9 Juin 1989.

[AITO 90] A. AITOUCHE
"Détection et localisation de défaillances de capteurs."
Thèse de l'Université de Nancy I, Nancy, Décembre 1990.

[ALMA 84] G.A. ALMASY - R.S.H. MAH
"Estimation of measurement error variances from process data."
Industrial Engineering and Chemistry Process Design and Development, Vol. 23, p. 779-784, 1984.

[ALMA 89] G.A. ALMASY
"Sensor validation on the basis of linear submodels."
Congrès IFAC AIPAC' 89. Advanced Information Processing in Automatic Control, Nancy, 3-5 July 1989.

[ASCH 82] G. ASCH et collaborateurs
"Les capteurs en instrumentation industrielle."
Dunod 1982.

[BAJA 84] P. BAJARD
"Contribution au diagnostic des systèmes industriels complexes par la méthode du modèle. Application aux centrales nucléaires à eau pressurisée."
Mémoire CNAM, Aix en provence, 1984.

[BARA 90] A.S. BARASHKO
"On the theory of signature analyzers."
Cybernetics, Vol. 26, n° 2, March - April 1990.

[BARB 87] M. BARBOUCHA
"Modélisation structurale des systèmes complexes, extraction et validation des règles d'un système expert."
Thèse d'état, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, Lille, Juin 1987.

[BARR 89] R. BARRACLOUGH
"Fault diagnosis in a chemical process."
Control of Instrumentation, Vol. 21, n° 6, p. 69-71, 1989.

[BATH 82] L. BATH
"Détection de défaut sur des capteurs redondants. Application à une mesure de niveau d'un pressuriseur de centrale nucléaire."
Mémoire CNAM, Paris, 1982.

[BRIT 73] H.I. BRITT - R.H. LUECKE
"The estimation of parameters in nonlinear implicit models."
Technometrics, Vol. 15, 1973.

[BRUN 90] J. BRUNET - D. JAUME - M. LABARRERE - A. RAULT - M. VERGE
"Détection et diagnostic de pannes. Approche par modélisation."
Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance. Hermès 1990.

[C.E.A. 78] C.E.A.
"Statistiques appliquées à l'exploitation des mesures."
Tome 1, Masson 1978.

[CECC 85] T. CECCHIN
"Conception d'une usine pilote minéralurgique automatisée. Elaboration et application d'une stratégie de diagnostic d'état de fonctionnement de procédés industriels en temps réel."
Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, Décembre 1985.

[CHAF 90] H. CHAFOUK
"Validation de données à variance inconnue."
Thèse de l'Université de Nancy I, Nancy, Novembre 1990.

[CHOW 84] E.Y. CHOW - A.S. WILLSKY
"Analytical redundancy and the design robust failure detection systems."
IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 29, n° 7, p. 603-614, 1984.

[CLAR 80] R.N. CLARK - W. SETZER
"Sensor fault detection in a system with random disturbances."
IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, Vol. AES-16, n° 4, 1980.

[CROW 83] C.M. CROWE - Y.G. CAMPOS - A. HRYMAK
"Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part I : the linear case."
AIChE Journal, Vol. 29, n° 6, p. 881-888, 1983.

[CROW 86] C.M. CROWE
"Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part II : the non linear case."
AIChE Journal, Vol. 32, n° 4, p. 616-623, 1986.

[CROW 88] C.M. CROWE
"Recursive identification of gross errors in linear data reconciliation."
AIChE Journal, Vol. 34, n° 4, p. 541-550, 1988.

[CROW 89] C.M. CROWE
"Test of maximum power for detection of gross errors in process constraints."
AIChE Journal, Vol. 35, n° 5, p. 869-872, 1989.

[DALY 79] K.C. DALY - E. GAI - J.V. HARRISON
"Generalized likelihood test for FDI in redundant sensor configurations."
Journal Guidance and Control, Vol. 2, n° 1, p. 9-17, Jan - Feb 1979.

[DARO 83] M. DAROUACH
"Aide au diagnostic de l'état des systèmes. Validation de mesures par équilibrage de bilan matière."
Thèse de Docteur-Ingénieur de l'Université de Nancy I, Nancy, Mars 1983.

[DESA 81] M.N. DESAI - A. RAY
"A fault detection and isolation methodology."
20th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California, p. 1363-1369, December 1981.

[DESP 87] J.L. DESPLANS
"Détection de panne capteur, utilisation de l'espace de parité généralisé."
Mémoire CNAM, 1987.

[DESP 88] A. DESPUJOLS
"Surveillance des capteurs par redondances et corrélations de données."
Note HP 24/88/43, E.D.F. Chatou, Décembre 1988.

[DESP 90] A. DESPUJOLS - C. MEUWISSE
"Surveillance des capteurs et validation des mesures : bilan d'études D.E.R."
Note HP 24/90/27, E.D.F. Chatou, Novembre 1990.

[DIVA 88] S.M. DIVAKARUNI - B.K.H. SUN - O.L. DEUTSCH
"Signal validation techniques and power plant application."
Progress in Nuclear Energy, Vol. 21, p. 479-481, 1988.

[DUPE 83] R. DUPERDU
"Mesures et Instrumentation électrique et électronique. Généralités sur la Mesure."
Ecole Supérieure d'Electricité 1983.

[EKLU 88] J. EKLUND - S. KUISMANEN - A. LUCANDER - L.E. HALL
"Early fault detection and diagnosis in finish nuclear power plants."
Progress in Nuclear Energy, Vol. 21, p. 479-481, 1988.

[EVAN 70] F.A. EVANS - J.C. WILCOX
"Experimental strapdown redundant sensor inertial navigation system."
Journal of Spacecraft, Vol. 7, n° 9, September 1970.

[FAYO 87] J. FAYOLLE
"Validation de données et diagnostic des procédés industriels."
Thèse de l'Université de Nancy I, Nancy, Septembre 1987.

[FEEL 83] J.J. FEELEY
"Failure detection and isolation in a nuclear power plant under steady state conditions."
22th Conference on Decision and Control, p. 756 - 757, San Antonio (Texas), December 1983.

[FRIE 81] B. FRIEDLAND
"Multidimensionnal maximum likelihood failure detection and estimation."
IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.24, n° 2, 1981.

[GERT 88] J.J. GERTLER
"Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants."
IEEE Control Systems Magazine, December 1988.

[HAMA 86] M. HAMAD
"Validation des mesures et détection des capteurs défaillants dans un système de contrôle-commande."
Thèse de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, Lille, Juin 1986.

[HOLB 90] K.E. HOLBERT - B.R. UPADHYAYA
"An integrated signal validation system for nuclear power plants."
Nuclear Technology, Vol. 92, n° 3, p. 411-427, 1990.

[HOLL 89] W. HOLLY - R. COOK - C.M. CROWE
"Reconciliation of mass flow rate measurements in a chemical extraction plant."
Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 67, n° 4, p. 595-601, 1989.

[IORD 85] C. IORDACHE - R.S.H. MAH - A.C. TAMHANE
"Performance studies of the measurement test for detection of gross errors in process data."
AIChE J., Vol. 31, n° 7, p. 1187-1201, 1985.

[JAIN 88] A.K. JAIN - R.C. DUBES
"Algorithms for clustering data."
Prentice Hall 1988.

[JONG 88] E.M. JONGENELEN - C.D. HEVER - G.A. VAN ZEE
"Detection of gross errors in process data using studentized residuals."
Computer Chemical Engineering, Vol. 12, n° 8, p. 845-847, 1988.

[KAGE 90] K. KAGE - B. JOSEPH
"Measurement selection and detection of measurement biais in the context of model based control and optimisation."
Ind. Eng. Chem. Res., Vol. 29, n° 10, p. 2037-2044, 1990.

[KIM 90] I.W. KIM - M.J. LIEBMAN - T.F. EDGAR
"Robust error in variables estimation using nonlinear programming techniques."
AIChE J., Vol. 36, n° 7, 1990.

[KLEM 89] J. KLEMSA - B. HOLCAK - J. LUTCHA
"Systematic error location by measured data reconciliation."
Congrès IFAC AIPAC' 89. Advanced Information Processing in Automatic Control, Nancy, 3-5 July 1989.

[KRAT 89a] F. KRATZ - A. AITOUCHE - S. NOWAKOWSKI - D. MAQUIN - J. RAGOT
"Présentation de méthodes de détection de pannes de capteurs."
Rapport E.D.F./C.R.A.N.-L.A.R.A., Avril 1989.

[KRAT 89b] F. KRATZ - D. MAQUIN - J. RAGOT
"Détection de pannes de capteurs par la redondance analytique statique : application aux systèmes non-linéaires."
Rapport E.D.F./C.R.A.N.-L.A.R.A., Novembre 1989.
Note HP 24/90/11, E.D.F. Chatou, 1990.

[KRAT 90] F. KRATZ - J. RAGOT - D. MAQUIN - A. DESPUJOLS
"Detection of bias in measurement using analytical redundancy."
7th Symposium IMEKO, Helsinki, 17-19 September 1990.

[KRAT 91] F. KRATZ - D. MAQUIN - J. RAGOT
"Détection de pannes de capteurs par la redondance analytique statique."
Rapport final E.D.F./C.R.A.N.-L.A.R.A., Janvier 1991.
Note HP 27/91/20, E.D.F. Chatou, 1991.

[KRET 87a] A. KRETSOVALIS - R.S.H. MAH
"Observability and redundancy classification in multicomponent process networks."
AIChE J., Vol. 33, n° 1, p. 70-82, January 1987.

[KRET 87b] A. KRETSOVALIS - R.S.H. MAH
"Effect of redundancy on estimation accuracy in process data reconciliation."
Chemical Engineering Science, Vol. 42, n° 9, p. 2115-2121, 1987.

[LABA 78] M. LABARRERE - M. PIRCHER - S. TRABULSI
"Détection de pannes de capteurs par utilisation de la redondance analytique."
Rapport intermédiaire n° 1/7170 D.E.R.A. D.R.E.T. - Convention n° 77 408, Août 1978.

[LASC 86] P. LASCAUX - R. THEODOR
"Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur."
Tome 1 & 2, Masson 1986-1987.

[LEBA 82] L. LEBART - A. MORINEAU - J.P. FENELON
"Traitement des données statistiques."
Dunod 1982.

[LEGR 80] J. LEGRAS
"Algorithmes et programmes d'optimisation non linéaires avec contraintes."
Masson 1980.

[LOU 86] X.C. LOU - A.S. WILLSKY - G.C. VERGHESE
"Optimally robust redundancy relations for failure detections in uncertain systems."
Automatica, Vol. 22, n° 3, p. 333-344, 1986.

[MACD 88] R.J. MAC DONALD - C.S. HOWAT
"Data reconciliation and parameter estimation in plant performance analysis."
AIChE J., Vol. 34, n° 1, 1988.

[MAH 76] R.S.H. MAH - G.M. STANLEY - D.M. DOWNING
"Reconciliation and rectification of process flow and inventory data."
Industrial Engineering and Chemistry Process Design and Development, Vol. 15, n° 1, p. 175 - 183, 1976.

[MAH 82] R.S.H. MAH - A.C. TAMHANE
"Detection of gross errors in process data."
AIChE J., Vol. 28, n° 5, 1982.

[MAQU 87] D. MAQUIN
"Observabilité, diagnostic et validation de données des procédés industriels."
Thèse de l'Université de Nancy I, Nancy, Novembre 1987.

[MAQU 90] D. MAQUIN - J. RAGOT - F. KRATZ
"Mesure cohérente : principes et applications."
18e Salon MESURE & REGULATION, Nancy, 15-17 Mai 1990.

[MARF 83] C. MARFAING PALLIER
"Contribution à l'analyse structurale des systèmes complexes par la biais des concepts de la théorie de l'information."
Thèse de Docteur-Ingénieur INSA, Toulouse, Décembre 1983.

[MASS 89] M.A. MASSOUMNIA - G.C. VERGHESE - A.S. WILLSKY
"Failure detection and identification."
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, n° 6, p. 316-321, Mars 1989.

[MEIJ 81] C.H. MEIJER - J.P. PASQUENZA - J.C. DECKERT - J.L. FISHER - D.B. LANING - A. RAY
"On-line power plant signal validation technique utilizing parity space representation and analytic redundancy."
NP-2110 Project 1541, Electric Power Research Institute, 1981.

[MILI 87] L. MILI - T.H. VANCUTSEM - M. RIBBENS-PAVELLA
"Decision theory for fault diagnosis in electric power systems."
Automatica, Vol. 23, n° 3, p. 335-353, 1987.

[MOUR 88] G. MOUROT
"Analyse structurale des systèmes complexes par le biais de la théorie de l'information."
Journées du L.A.R.A., C.R.A.N., Vol. 2, 5 - 6 Juillet 1988.

[NARA 86] S. NARASIMHAN - R.S.H. MAH - A.C. TAMHANE
"A composite statistical test for detecting changes of steady states."
AIChE J., Vol. 32, n° 9, 1986.

[NARA 87] S. NARASIMHAN - R.S.H. MAH
"Generalized Likelihood Ratio method for gross errors detection."
AIChE J., Vol. 33, n° 9, p. 1514-1521, 1987.

[NARA 89] S. NARASIMHAN - R.S.H. MAH
"Treatment of general steady state process models in gross errors identification."
Computers Chemical Engineering, Vol. 13, n° 7, p.851-853,1989.

[NARA 90] S. NARASIMHAN
"Maximum power tests for gross error detection using likelihood ratios."
AIChE, Vol. 36, n° 10, p. 1589-1591, 1990.

[NOGI 72] S. NOGITA
"Statistical test and adjustement of process data."
Industrial Engineering and Chemistry Process Design and Development, Vol. 11, n° 2, 1972.

[PATT 89] R. PATTON - P.M. FRANK - R. CLARK
"Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and applications."
Prentice Hall international series in systems and control engineering, 1989.

[PAU 75] L.F. PAU
"Diagnostic des pannes dans les systèmes."
Editions CEPADUES 1975.

[POTT 72] J.E. POTTER - J.C. DECKERT
"Gyro and accelerometer failure detection and identification in redundant sensor systems."
Institut of Navigation Proceedings, M 99 107, 1972.

[POTT 73] J.E. POTTER - J.C. DECKERT
"Minimax failure detection and indentification in redundant gyro and accelerometer systems."
Journal of Spacecraft, Vol. 10, n° 4, April 1973.

[POTT 77] J.E. POTTER - M.C. SUMAN
"Thresholdless redundancy management with arrays of skewed instruments."
Electronic Flight Control Systems, AGARDOGRAPH 224, p. 2115-2121, 1977.

[PROC 88] J. PROCK
"Mathematical modeling of a steam generator for sensor fault detection."
Applied Mathematical Modelling, Vol. 12, December 1988.

[RAGO 79] J. RAGOT - G. KRZAKALA - M. AUBRUN
"Ajustement de données à un modèle non linéaire connu en utilisant le calcul hiérarchisé."
Le Nouvel Automatisme, t. 24, n° 34-4, p. 49-56, 1979.

[RAGO 80] J. RAGOT
"Contribution à l'extension de la méthode des moindres carrés. Application à l'équilibrage de bilans industriels."
Thèse d'état, Université de Nancy I, Nancy, Mai 1980.

[RAGO 90] J. RAGOT - M. DAROUACH - D. MAQUIN - G. BLOCH
"Validation de données et diagnostic."
Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance. Hermès 1990.

[RAGO 91a] J. RAGOT - D. MAQUIN
"Comparison of gross errors detection methods in process data."
30th Conference on Decision and Control, Brigthon, 11-13 December 1991.

[RAGO 91b] J. RAGOT - A. AITOUCHE - F. KRATZ - D. MAQUIN
"Detection and location of gross errors in instruments and analytic redundancies using parity space technique."
Accepté à International Journal of Mineral Processing.

[RAUL 89] A. RAULT
"Detection and diagnosis system and model-based approach."
Congrès IFAC AIPAC' 89. Advanced Information Processing in Automatic Control, Nancy, 3-5 July 1989.

[RAY 83] A. RAY - R. GEIGER - M.N. DESAI - J. DEYST
"Analytic redundancy for on-line fault diagnosis in a nuclear reactor."
Journal Energy, Vol. 7, n° 4, July - August 1983.

[ROMA 81] J.A. ROMAGNOLI - G. STEPHANOPOULOS
"Rectification of process measurement data in the presence of gross errors."
Chemical Engineering Science, Vol. 36, n° 11, 1981.

[ROMA 83] J.A. ROMAGNOLI
"On data reconciliation constraints processing and treatment of bias."
Chemical Engineering Science, Vol. 38, n° 7, p. 1107-1117, 1983.

[ROSE 87] J. ROSENBERG - R.S.H. MAH - C. IORDACHE
"Evaluation of schemes for detecting and identifying gross errors in process data."
Industrial Engineering Chemistry Research, Vol. 26, n° 3, p. 555-564, 1987.

[SCHW 85a] H. SCHWETLICK - V. TILLER
"Numerical methods for estimating parameters in nonlinear models with error in the variables."
Technometrics, Vol. 27, n° 1, 1985.

[SCHW 85b] H. SCHWETLICK - W. SCHELLONG - V. TILLER
"Gauss-Newton like methods for non-linear least squares with equality constraints - Local convergence and applications to parameter estimation in implicit models."
STATISTICS, Vol. 16, n° 2, 1985.

[SERT 86] R.W. SERTH - W.A. HEENAN
"Gross error detection and data reconciliation in steam-metering system."
AIChE J., Vol. 32, n° 5, p. 733-742, 1986.

[SIBO 82] M. SIBONY - J.C. MARDON
"Systèmes linéaires et non linéaires - Analyse numérique I."
Hermann, 1982.

[STAR 86] M. STAROSWIECKI - M. HAMAD
"Validation of measurement and detection of sensors' failures in control systems."
EUSIPCO 86, The Hague, The Netherlands, September 2 - 5, 1986.

[STAR 89] M. STAROSWIECKI - P. DECLERCK
"Analytical redundancy in non linear interconnected systems by means of structural analysis."
Congrès IFAC AIPAC' 89. Advanced Information Processing in Automatic Control, Nancy, 3-5 July 1989.

[STEP 86] G.R. STEPHENSON - C.F. SHEWCHUK
"Reconciliation of process data with process simulation."
AIChE Journal, Vol. 32, n° 2, p. 247-254, 1986.

[SWAR 89] C.L.E. SWARTZ
"Data reconciliation for generalized flowsheet applications."
American Chemical Society National Meeting, Dallas, April 1989.

[TAMH 85] A.C. TAMHANE - R.S.H. MAH
"Data reconciliation and gross error detection in chemical process network."
Technometrics, Vol. 27, n° 4, p. 409-422,1985.

[TANG 89] P. TANGUY
"Le retour d'expérience."
Supplément La Recherche n° 212, Juillet - Août 1989.

[UPAD 85] B.R. UPADHYAYA
"Sensor failure detection and estimation."
Nuclear Safety, Vol. 26, n° 1, p. 32-43, 1985.

[UPAD 88] B.R. UPADHYAYA - O. GLOCKER - F.P. WOLVAARDT
"An integrated approach for signal validation in dynamic systems."
Progress in Nuclear Energy, Vol. 21, p. 605-611, 1988.

[WILC 72] J.C. WILCOX
"Maximum likelihood failure detection for redundant inertial instruments."
AIAA Paper 72 - 864, 1972.

[WILL 76] A.S. WILLSKY - H.L. JONES
"A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems."
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 21, p. 108-112, February 1976.

[YAMA 88] K. YAMAMURA - M. NAKAJIMA - H. MATSUYAMA
"Detection of gross errors in process data using mass and energy balances."
International Chemical Engineering, Vol. 28, n° 1, p. 91-98, 1988.

[ZASA 90] M. ZASADZINSKI
"Contribution à l'estimation de l'état des systèmes singuliers. Application à la validation de données des systèmes dynamiques linéaires."
Thèse de l'Université de Nancy I, Nancy, Octobre 1990.

[ZWIN 83] G. ZWINGELSTEIN
"Méthodes de détection et localisation de capteurs défaillants et techniques de validation de mesures analogiques : application aux processus énergétiques complexes."
Rapport HP 40/83/381, E.D.F. Chatou, Juin 1983.

[ZWIN 85] G. ZWINGELSTEIN
"Validation de mesures analogiques pour réacteur à eau pressurisée."
EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, n° 3/4, p. 56-60, 1985.



UNIVERSITE DE NANCY I

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur KRATZ Frédéric

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I
en AUTOMATIQUE

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 12 JUIN 1991 n° 303

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

UNIVERSITE NANCY I
LE PRESIDENT

M. BOULANGÉ

Mots-clés : Capteur, Détection de défauts, Redondance Analytique, Diagnostic

Dans ce travail, on s'intéresse à la détection de pannes de capteurs sous les aspects suivants :

- la détection proprement dite,
- la localisation de l'élément défectueux,
- la correction de l'erreur.

On examine le comportement de quelques méthodes appliquées à la redondance analytique statique linéaire ou non (espace de parité, fermeture des équations de contrainte, termes correctifs normalisés) à l'aide de données simulées.

L'utilisation de modèles non-linéaires pour la redondance analytique est abordée. A partir des techniques des écarts de fermeture de contrainte et des termes correctifs normalisés, nous présentons une extension dans le cas des modèles non-linéaires en insistant sur les propriétés mathématiques que doivent posséder les modèles. Après avoir montré les difficultés rencontrées lors du calcul des estimées des grandeurs vraies et de l'agrégation des voies en défauts, une méthode basée sur la linéarisation des modèles est détaillée.

La méthode des termes correctifs normalisés a été appliquée à l'instrumentation du circuit secondaire d'un générateur de vapeur de la centrale REP de Paluel. Des résultats encourageants ont été obtenus. Une connaissance approfondie des modèles et une identification des paramètres plus parfaite peuvent néanmoins contribuer à de meilleurs résultats.

Key-words : Sensor, Failure Detection, Analytic Redundancy, Diagnostic

The study of failure detection concentrates on the following points :

- detection strictly speaking,
- location the defective sensor,
- correction of the error.

The efficiency of a few methods applied to steady-state analytic redundancy, whether linear or not, is evaluated (parity space, standardized imbalance residuals approach, standardized least-square residuals analysis) using simulated data.

The use of non-linear models for analytical redundancy is examined. From the standardized imbalance residuals approach (SIRA) and the standardized least-square residuals analysis (SLSRA), we present an extension to non-linear models. We dwell on the mathematical properties of the non-linear models. We show the problem of the computation of the estimate of the true values vector and the difficulties that we meet with fusion of not necessarily linear equations. The SLSRA is essentially examined with constraint linearization.

The SLSRA method with constraint linearization was applied to the instrumentation of a steam generator in the Paluel PWR plant. Results are promising. However, they can be improved with a deeper knowledge of the models and a perfected identification of the parameters.