



HAL
open science

Involutions et formes réelles d'algèbres de Kac-Moody symétrisables

Hechmi Ben Messaoud

► **To cite this version:**

Hechmi Ben Messaoud. Involutions et formes réelles d'algèbres de Kac-Moody symétrisables. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1993. Français. NNT : 1993NAN10089 . tel-01747507

HAL Id: tel-01747507

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747507v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

présentée à

l'Université de Nancy I

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Nancy I

Option Mathématiques Pures

par

Hechmi BEN MESSAOUD

Involutions et formes réelles d'algèbres de Kac-Moody symétrisables

Soutenue publiquement le 14 Octobre 1993 devant le jury composé de MM.

J.L. Clerc	Président	Professeur à l'Université de Nancy I
G. Rousseau	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Nancy I
O. Mathieu	Rapporteur	Professeur à l'Université de Paris 7
J. Tits	Rapporteur	Professeur au collège de France
J.Ph. Anker	Examineur	Professeur à l'Université de Nancy I
H. Rubenthaler	Examineur	Professeur à l'Université de Strasbourg

A
mes parents
&
à tous les miens

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser toute ma reconnaissance à Monsieur Guy ROUSSEAU, professeur à l'Université de Nancy I, qui a dirigé ce travail en restant plus que disponible à mon égard. Ses travaux et ses nombreuses idées m'ont toujours été profitables. Je garderai de lui le souvenir d'un homme juste et généreux. Je suis très heureux de le compter parmi les membres du jury.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur O. MATHIEU, professeur à l'Université de Paris 7, ainsi qu'à Monsieur J. TITS, professeur au Collège de France, pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de participer au jury. Je les en remercie vivement.

Je remercie sincèrement Monsieur J.L. CLERC, professeur à l'Université de Nancy I, de l'intérêt qu'il a manifesté pour cette thèse et de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je suis très honoré de compter parmi les membres de jury Monsieur J.Ph. ANKER, professeur à l'Université de Nancy I, et Monsieur H. RUBENTHALER, professeur à l'Université de Strasbourg. Je les en remercie vivement.

Je remercie vivement Monsieur V.G. KAC, professeur au " MIT ", Cambridge, USA , pour la discussion que nous avons eu. Ses derniers travaux avec S.P. WANG m'ont été très utiles.

J'exprime mes plus vifs remerciements à MM H. ELMIR et K. HARZALLAH, professeurs à la Faculté des sciences de Monastir; ils m'ont encouragé et m'ont aidé à poursuivre les études de troisième cycle. Qu'ils y trouvent ma profonde reconnaissance.

Enfin, Je ne peux oublier les membres de l'équipe d'Analyse harmonique et leur sympathie. Au sein de cette équipe j'ai bénéficié des différents groupes de travail organisés. Que chacun y trouve ma profonde gratitude.

INTRODUCTION

Les algèbres de Kac-Moody sont des généralisations en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples. Ces algèbres ont fait apparaître des notions nouvelles qu'on ne rencontre pas dans le cas classique, à savoir, les systèmes de racines infinis, les racines réelles, les racines imaginaires dont les multiples sont encore des racines et qui peuvent avoir une multiplicité plus grande que 1, les groupes de Weyl infinis, etc...

Dans le cas où l'algèbre de Kac-Moody est indécomposable (ce qui correspond à une algèbre de Lie simple dans le cas classique) du fait que le système de racines est infini une base de racines ne peut pas être conjuguée à son opposé par le groupe de Weyl; d'où l'existence de deux classes de conjugaison (sous le groupe de Weyl) de bases de racines et donc grâce à la décomposition de Birkhoff deux classes de conjugaison (sous le groupe adjoint) de sous algèbres de Borel.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Kac-Moody indécomposable sur \mathbb{C} ; un automorphisme linéaire (ou semi-linéaire) de \mathfrak{g} est dit de première espèce lorsqu'il stabilise les deux classes de conjugaison de sous algèbres de Borel de \mathfrak{g} ; dans le cas contraire on dit que l'automorphisme est de seconde espèce.

Une forme réelle de \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g}_0 telle que $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à \mathfrak{g} ; on choisit donc une identification de $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ avec \mathfrak{g} et on lui associe l'automorphisme $Id \otimes \gamma$ de \mathfrak{g} , où γ est la conjugaison de \mathbb{C} sur \mathbb{R} . Les formes réelles de \mathfrak{g} correspondent ainsi bijectivement aux automorphismes semi-linéaires et involutifs de \mathfrak{g} dits semi-involutions (ou conjugaisons) de \mathfrak{g} .

Une forme réelle de \mathfrak{g} est dite presque déployée lorsque la semi-involution correspondante est de première espèce; dans le cas contraire la forme est dite presque compacte.

Dans ce travail on distingue deux parties qui sont “ presque ” indépendantes.

La première partie consiste à étudier les formes réelles presque déployées d'algèbres de Kac-Moody indécomposables et symétrisables.

L'hypothèse “ symétrisable ” intervient par l'usage de la forme bilinéaire invariante sur \mathfrak{g} qui permet de généraliser certains résultats sur les formes réelles des algèbres de Lie semi-simples (notamment la comparaison d'une forme réelle à une forme compacte), (cf $[KP_2]$ ou $[R_2]$).

Les principaux résultats sur ces formes sont rédigés dans un article en collaboration avec Valérie Back, Nicole Bardy et Guy Rousseau, ($[B_3R]$).

Pour un corps K quelconque de caractéristique nulle, d'après les résultats de Rousseau ($[B_3R]$, §2), une K -forme presque déployée de \mathfrak{g} est entièrement déterminée par son indice. Pour classifier ces K -formes on a besoin de connaître les indices admissibles, c'est à dire les indices qui correspondent à des K -formes presque déployées.

Dans le cas réel, pour vérifier l'admissibilité d'un indice donné, l'idée est de généraliser la correspondance bijective classique (due à Elie Cartan) qui à une forme réelle d'une algèbre de Lie simple complexe, c'est à dire à une semi-involution (ou conjugaison) σ' de cette algèbre de Lie complexe associe une involution de cette algèbre (dite involution de Cartan) qui est le produit $\sigma = \sigma'\omega'$ de σ' et d'une semi-involution “ compacte ” ou de Cartan ω' commutant avec σ' .

L'accomplissement de ce programme est ma contribution essentielle à $[B_3R]$ qui est inclus dans cette thèse. Plus précisément dans le §4 j'établis une correspondance bijective entre les classes de conjugaison des formes réelles presque déployées (c'est à dire des semi-involutions de première espèce) d'une algèbre de Kac-Moody

complexe symétrisable et indécomposable, et celles des involutions de seconde espèce de cette algèbre, et j'indique un procédé de classification de ces involutions, semi-involutions ou formes réelles presque déployées. Au §6 la classification complète est indiquée dans le cas affine.

L'article $[B_3R]$ est complété dans la première partie de ce travail par un §7 où l'on explicite mieux la classification des involutions de seconde espèce et où l'on étend ces classifications aux algèbres de Kac-Moody indécomposables strictement hyperboliques et symétrisables.

La deuxième partie est consacrée aux formes réelles presque compactes d'algèbres de Kac-Moody affines, elle est indépendante de la première partie à l'exception de l'usage de quelques définitions et résultats (notamment sur le groupe d'automorphismes de \mathfrak{g}) introduits dans $[B_3R]$, §1.

Dans le premier chapitre de cette partie, on reprend (avec un point de vue différent) l'étude (par Jean Bausch $[B]$) des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines. Cette étude est due à V.Kac ($[K]$) dans le cas classique des algèbres simples et avait été étendue par F.Levstein ($[L]$) au cas des involutions des algèbres affines.

Dans ce chapitre on examine toutes les réalisations de \mathfrak{g} comme “algèbre de lacets tordue”, c'est à dire les différents isomorphismes de \mathfrak{g} avec des algèbres $l(\mathfrak{s}, \theta, \eta)$, où \mathfrak{s} est une algèbre de Lie semi-simple, θ un automorphisme de \mathfrak{s} d'ordre divisant un certain entier p et η est une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité. On note ici $l(\mathfrak{s}, \theta, \eta) = \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \nu^j \otimes \mathfrak{s}_j \right) \oplus (\mathbb{C}_c \oplus \mathbb{C}_d)$, où \mathfrak{s}_j est l'espace propre de θ associé à la valeur propre η^j et le crochet est maintenant classique, (cf $[K]$ ou Chap I de la deuxième partie ci-dessous).

Le résultat essentiel de ce chapitre est alors que pour une bonne réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \eta)$ de l'algèbre affine \mathfrak{g} , un automorphisme d'ordre fini et de première espèce σ de \mathfrak{g} s'écrit comme le relèvement naturel d'un automorphisme d'ordre fini de \mathfrak{s} commutant avec l'automorphisme de torsion θ .

Comme conséquence de ceci, on retrouve d'une manière assez simple l'un des résultats les plus techniques de Bausch ($[B]$) concernant la structure de l'algèbre \mathfrak{g}^σ de points fixes de σ dans \mathfrak{g} .

Dans le deuxième chapitre on se sert des résultats du chapitre I et de ceux

de Bausch et Rousseau ([BR] et [R₂]) pour étudier les formes réelles presque compactes d’algèbres de Kac-Moody affines. Plus précisément, on montre que pour une bonne réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \eta)$ de \mathfrak{g} , une forme presque compacte de \mathfrak{g} s’obtient à partir d’une forme réelle θ -stable de l’algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{s} . On étend ainsi à ce cas un résultat de G. Rousseau et V. Back pour les formes presque déployées ([R₃] et [B₃R, §5]).

La liste de ces formes établie dans [BR] et [R₂] peut éventuellement comporter des redits, puisque la classification se fait en se fixant ce qu’on appelle une “ sous algèbre de Cartan maximalement compacte ” de la forme presque compacte, et on ne sait pas à priori que deux telles sous algèbres sont conjuguées par un automorphisme intérieur commutant avec la semi-involution associée à la forme presque compacte donnée. En fait la liste de [BR] qui est reproduite à la fin de ce chapitre classe les involutions de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines et on montre dans [R₂] que les classes de conjugaison de ces involutions sont en bijection (par essentiellement le même procédé que celui décrit dans la première partie) avec les classes de conjugaison des paires formées d’une forme réelle presque compacte et d’une sous algèbre de Cartan maximalement compacte.

La fin de ce deuxième chapitre est consacrée à une construction (basée sur la liste précitée mais essayant d’éviter l’étude d’un trop grand nombre de cas) d’une sous algèbre torique déployée maximale (*SATDM*) dans chaque forme presque compacte; de plus la *SATDM* construite est stable par l’involution σ correspondante. Cette construction est un premier pas en vue de l’étude des formes presque compactes via les *SATDM* qui pourrait éventuellement déboucher sur une classification plus satisfaisante.

Première partie

Formes réelles presque déployées d'algèbres de Kac-Moody symétrisables

Cette partie consiste en l'article $[B_3R]$ à paraître au “ Journal of algebra ” et des compléments que l'on a regroupé dans un paragraphe 7.

FORMES PRESQUE DEPLOYEES D' ALGEBRES DE KAC-MOODY:
CLASSIFICATION ET RACINES RELATIVES

par Valérie Back-Valente , Nicole Bardy-Panse ,
Hechmi Ben Messaoud et Guy Rousseau

On sait que les algèbres de Kac-Moody sont des généralisations raisonnables (et utiles) en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples complexes. On appelle forme d'algèbre de Kac-Moody une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique 0 qui devient isomorphe à une algèbre de Kac-Moody sur la clôture algébrique de K . Il se trouve que pour une partie (la moitié ?) de ces formes (celles dites presque-déployées) on peut généraliser les théorèmes classiques sur les algèbres de Lie semi-simples sur un corps de caractéristique 0 . Pour les autres formes dites presque-anisotropes des résultats sont disponibles essentiellement sur le corps des réels : [R2],[A] et [BeP] ; voir aussi [R6] pour une revue d'ensemble.

Cet article est donc consacré aux formes presque-déployées. Le paragraphe 1 rappelle, en fixant les notations, quelques résultats sur les algèbres de Kac-Moody, leurs formes et les groupes associés.

Au paragraphe 2 on continue l'étude à la Borel-Tits [BoT] des formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody qui a été déjà bien entamée dans [R4] et [R5]. Il s'agit ici essentiellement de généraliser des résultats de Tits [T1] sur la classification de ces formes.

Le paragraphe 3 est consacré à l'étude du système des racines relatives, on y donne sa description complète au moyen d'une matrice dite de Kac-Moody relative. Le point notable est qu'il existe des racines simples imaginaires comme chez Borchers [Bo].

Au paragraphe 4 on explique que les formes réelles presque-déployées des algèbres de Kac-Moody complexes symétrisables sont en correspondance bijective (comme dans le cas classique) avec certaines involutions (dites de seconde espèce) de ces algèbres. Grâce aux résultats de Kac et Wang [KW] sur ces involutions et à ceux du paragraphe 2, on donne un procédé de classification effective de toutes les formes réelles presque-déployées d'une algèbre de Kac-Moody complexe symétrisable donnée.

Au paragraphe 5 on montre que toutes les formes presque-déployées sur le corps K d'algèbres de Kac-Moody affines peuvent se construire explicitement à partir d'une algèbre de Lie simple sur K par un procédé généralisant la construction des algèbres de lacets (tordues ou non).

On applique enfin tous les résultats précédents dans le paragraphe 6 pour établir le tableau de toutes les formes réelles presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody affines et de leurs systèmes de racines relatives. Ce tableau fournit donc aussi la classification des involutions de seconde espèce des algèbres de Kac-Moody affines complexes.

§ 1 ALGÈBRES DE KAC-MOODY ET FORMES PRESQUE-DEPLOYEES :

1.1 Soient K un corps de caractéristique 0 et \bar{K} sa clôture algébrique.

On considère une algèbre de Kac-Moody \mathfrak{g} sur \bar{K} que l'on suppose construite comme dans [K] et avec toutes ses composantes de dimension infinie. Pour les résultats standards suivants on renvoie à [K] et [PK] ou parfois à [KP1],[KP2],[R2] ou [R4].

Il existe une matrice de Cartan généralisée (encore appelée matrice de Kac-Moody) $A=(a_{ij})_{i,j \in I}$ telle que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{h} \oplus (\oplus \mathfrak{g}_\alpha)$ où α parcourt le système de racines $\Delta=\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*-\{0\}$.

On note $\Pi=\{\alpha_i / i \in I\}$ la base (standard) de Δ . L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+=\Delta \cap (\oplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i)$ (resp. $\Delta^- = -\Delta^+$).

Les coracines α_i^\vee dans \mathfrak{h} sont telles que $a_{ij}=\alpha_j(\alpha_i^\vee)$ pour tous i,j . Le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales r_i définies par $r_i(h)=h-\alpha_i(h)\alpha_i^\vee$ pour h dans \mathfrak{h} . Une racine réelle est une racine conjuguée par W à une

racine dans Π ; leur ensemble est noté Δ^{re} . Les éléments de $\Delta^{im}=\Delta-\Delta^{re}$ sont les racines imaginaires . Le centre de \mathfrak{g} est $\mathfrak{z} = \{H \in \mathfrak{h} / \alpha(H)=0 \ \forall \alpha \in \Pi\}$.

1.2 Pour un sous-ensemble J de I on définit le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par les r_i , pour $i \in J$ et $Q(J) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i$, $Q^+(J) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{N}\alpha_i$; les objets analogues définis avec les α_i^\vee sont notés avec des $^\vee$, on omet (J) quand $J = I$.

On définit des sous-ensembles de Δ par :

$$\Delta^P(J)=\Delta \cap (Q(J) \oplus Q^+(I-J)) \ , \ \Delta(J)=\Delta^m(J)=\Delta \cap Q(J) \quad \text{et} \quad \Delta^u(J)=\Delta^P(J)-\Delta^m(J)$$

On en déduit des sous-algèbres de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^+(J)=\mathfrak{p}(J) &= \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha) && \text{où } \alpha \text{ parcourt } \Delta^P(J) \\ \mathfrak{p}^-(J) &= \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha) && \text{où } \alpha \text{ parcourt } -\Delta^P(J) \\ \mathfrak{m}(J) &= \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha) && \text{où } \alpha \text{ parcourt } \Delta^m(J) \\ \mathfrak{u}^+(J)=\mathfrak{u}(J) &= \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha && \text{où } \alpha \text{ parcourt } \Delta^u(J) \\ \mathfrak{u}^-(J) &= \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha && \text{où } \alpha \text{ parcourt } -\Delta^u(J) \end{aligned}$$

Alors $\mathfrak{p}^+(J)=\mathfrak{m}(J) \oplus \mathfrak{u}(J)$ (resp. $\mathfrak{p}^-(J)=\mathfrak{m}(J) \oplus \mathfrak{u}^-(J)$) est la sous-algèbre parabolique standard positive (resp. négative) de type J (le mot standard et les signes font référence ici et dans la suite du §1 à la standardisation (\mathfrak{h}, Π) de 1.1).

$\mathfrak{u}(J)$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{p}(J)$ et $\mathfrak{m}(J) \cong \mathfrak{p}(J)/\mathfrak{u}(J)$ est le produit d'une sous-algèbre de \mathfrak{h} et d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{m}^s(J)$ associée à la matrice $A(J) = (a_{ij})_{i,j \in J}$. Cette algèbre $\mathfrak{m}^s(J)$ contient l'algèbre dérivée $\mathfrak{m}(J)'$ engendrée par les e_i , f_i pour $i \in J$; elle est la somme directe de $\mathfrak{m}(J)'$ et d'un supplémentaire dans \mathfrak{h} de $\{h \in \mathfrak{h} / \alpha_i(h) = 0 \ \forall i \in J\} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}(J)'$.

Le sous-ensemble J et les paraboliques correspondants sont dits de type fini si la matrice $A(J)$ est une matrice de Cartan, c'est à dire si $W(J)$ est fini ou si $\Delta^m(J)$ est fini. Si J ne contient aucune composante connexe de I (ce qui est toujours le cas si J est de type fini) on dit que J et les paraboliques correspondants sont non-dégénérés. Quand $J=\emptyset$ les paraboliques $\mathfrak{b}^+=\mathfrak{p}^+(\emptyset)$ et $\mathfrak{b}^-=\mathfrak{p}^-(\emptyset)$ sont appelés sous-algèbres de Borel standards .

1.3 On définit un groupe G (ne dépendant que de \mathfrak{g}) agissant sur \mathfrak{g} par la représentation adjointe $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes U_α , pour α racine réelle, isomorphes au groupe additif \mathfrak{g}_α par un isomorphisme \exp tel que : $\text{Ad} \cdot \exp = \exp \cdot \text{ad}$.

Le groupe H associé à l'algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur \mathfrak{g}_α (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α (en particulier H fixe $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$). Ainsi pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ on a $h \cdot \exp(X) \cdot h^{-1} = \exp(\alpha(h) \cdot X)$ et donc H normalise U_α .

Le sous-groupe de Borel standard positif (resp. néгатif) est le sous-groupe engendré par H et les U_α pour α racine réelle positive (resp. négative).

Pour J dans I le sous-groupe parabolique standard positif (resp. néгатif) correspondant à J est $P(J) = P^+(J) = B^+W(J)B^+$ (resp. $P^-(J) = B^-W(J)B^-$); c'est le stabilisateur de $\mathfrak{p}(J)$ (resp. $\mathfrak{p}^-(J)$) dans G . Le groupe $M(J) = P(J) \cap P^-(J)$ est le produit $H \cdot G(J)$ où $G(J)$ est le sous-groupe (distingué) engendré par les U_α pour α racine réelle dans $\Delta^m(J)$.

1.4 Les sous-algèbres de Cartan (c'est à dire les sous-algèbres $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables maximales) de \mathfrak{g} sont conjuguées par G .

Une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} est une sous-algèbre complètement résoluble maximale de \mathfrak{g} ; c'est le cas de \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{b}^- qui ne sont pas conjuguées par G . Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à \mathfrak{b}^+ (resp. \mathfrak{b}^-) sont dites positives (resp. néгатives). Si \mathfrak{g} est indécomposable il n'y a pas d'autre classe de conjugaison de sous-algèbre de Borel.

Une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} est une sous-algèbre contenant une sous-algèbre de Borel. On dit qu'elle est non dégénérée si elle ne contient aucun facteur indécomposable de \mathfrak{g} et de signe positif ou néгатif si elle est propre (i.e. différente de \mathfrak{g}) et si elle contient une sous-algèbre de Borel positive ou négative. Si \mathfrak{g} est indécomposable toute sous-algèbre parabolique propre est non-dégénérée et de signe positif ou négatif. Une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} de signe positif ou négatif est conjuguée à une unique sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^\pm(J)$; elle est non dégénérée si et seulement si J est non dégénéré. On note $\mathfrak{u}(\mathfrak{p})$ le conjugué correspondant de $\mathfrak{u}^\pm(J)$ et on appelle J le type de \mathfrak{p} .

Les sous-algèbres paraboliques de signe ε de \mathfrak{g} contenues dans la sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^\varepsilon(J)$ correspondent bijectivement (par passage au quotient) aux sous-algèbres paraboliques de signe ε de $\mathfrak{m}^s(J)$.

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de \mathfrak{g} agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux sous-algèbres de Borel (ou paraboliques) conjuguées en deux sous-algèbres de Borel (ou paraboliques) conjuguées; il est dit de première espèce s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive ou négative en une sous-algèbre de Borel de même signe.

1.5 Une K -forme de \mathfrak{g} est une algèbre de Lie \mathfrak{g}_K telle qu'il existe un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g}_K \otimes \bar{K}$.

Dans la suite on fixe une telle forme et un tel isomorphisme. Alors le groupe de Galois $\Gamma = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit sur \mathfrak{g} et le groupe correspondant G . On identifie \mathfrak{g}_K avec l'ensemble \mathfrak{g}^Γ des points fixes et on définit $G_K = G^\Gamma$.

On dit que \mathfrak{g}_K est presque-déployée si Γ est formé d'automorphismes (semi-linéaires) de première espèce. On sait [R4] que cela équivaut à exiger qu'une sous-algèbre parabolique non dégénérée et de signe positif (resp. négatif) de \mathfrak{g} est définie sur K .

Si \mathfrak{g} est décomposable, cette notion de presque-déployée dépend du choix de la classe de conjugaison des sous-algèbres de Borel opposées \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{b}^- . On peut alors de manière plus générale dire que \mathfrak{g}_K est presque-déployée si Γ stabilise une classe de conjugaison de sous-algèbre de Borel; cette notion se ramène à la précédente par le choix de cette sous-algèbre de Borel comme standard.

Un exemple de forme presque-déployée est la forme déployée ${}^d\mathfrak{g}_K$ que l'on définit par générateurs et relations comme \mathfrak{g} mais en remplaçant le corps \bar{K} par le corps K . Tous les objets introduits ci-dessus se définissent encore pour ${}^d\mathfrak{g}_K$ (on les orne alors des lettres d et K). Les résultats indiqués ci-dessus sont encore valables [PK].

Une partie B de \mathfrak{g} ou de G est dite définie sur K si elle est stable par Γ , on note alors $B_K = B^\Gamma$. On dit aussi, par exemple, que " P est un K -parabolique" au lieu de " P est un parabolique défini sur K ", etc. Inversement si \mathfrak{k}_K est un K -sous-espace vectoriel de \mathfrak{g}_K , on note $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}_K \otimes \bar{K}$ le \bar{K} -sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} correspondant.

1.6 Sous-algèbres toriques :

Une sous-algèbre torique K-déployée de \mathfrak{g}_K est une sous-algèbre \mathfrak{t} pour laquelle la représentation adjointe dans \mathfrak{g}_K est diagonalisable. Une sous-algèbre \mathfrak{t} est dite torique si et seulement si $\mathfrak{t} \otimes \bar{K}$ est torique \bar{K} -déployée.

Une sous-algèbre de Cartan (en abrégé SAC) de \mathfrak{g}_K est une sous-algèbre \mathfrak{h}_K telle que $\mathfrak{h}_K \otimes \bar{K}$ soit une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Toute sous-algèbre torique de \mathfrak{g}_K est contenue dans une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_K [R4 ; 4.3] .

Il est clair que ${}^d\mathfrak{h}_K$ est une SAC de la forme déployée ${}^d\mathfrak{g}_K$; c'est aussi une sous-algèbre torique K-déployée donc une sous-algèbre torique K-déployée maximale. Il résultera de 2.8 ci-dessous que si dans une forme presque-déployée une SAC est déployée alors cette forme est isomorphe à la forme déployée ${}^d\mathfrak{g}_K$.

1.7 Automorphismes de \mathfrak{g} :

Soit \mathfrak{h} la SAC standard de \mathfrak{g} . On définit dans [PK] un groupe \tilde{H} qui agit sur G et \mathfrak{g} ; en fait $\text{Ad}(\tilde{H})$ est isomorphe à $(\bar{K})^I$ et si l'élément h correspond à $(h_i)_{i \in I}$, il agit sur \mathfrak{g}_α par multiplication par le scalaire $\alpha(h) = \prod_i (h_i)^{n(i)}$ si $\alpha = \sum n(i)\alpha_i \in \Delta \cup \{0\}$.

L'involution de Cartan ω de \mathfrak{g} est définie par $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$; elle dépend donc du choix de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i \in I})$ de 1.1 .

Le groupe des automorphismes intérieurs de \mathfrak{g} est l'image $\text{Int}(\mathfrak{g}) := \text{Ad}(\tilde{H} \rtimes G)$ du produit semi-direct de \tilde{H} et G . Son groupe dérivé est le groupe adjoint $\text{Ad}(G)$ (noté aussi $\text{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\text{Int}(\mathfrak{g}')$) ou groupe des automorphismes intérieurs de \mathfrak{g}' (algèbre dérivée de \mathfrak{g}). Ces groupes sont intrinsèquement définis par \mathfrak{g} , cf. [R2].

On considère le groupe $\text{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i, \rho j} = a_{i, j}$ pour $i, j \in I$. On en déduit une action fidèle de $\text{Aut}(A)$ sur \mathfrak{g}' en posant $\rho(e_i) = e_{\rho i}$ et $\rho(f_i) = f_{\rho i}$; cette action commute à ω et $\rho(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$ où $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \bigoplus \bar{K}\alpha_i^\vee$; plus précisément $\rho(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\rho i}^\vee$. D'après [PK] le groupe $\text{Aut}(A) \rtimes \text{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $(\Omega \rtimes \text{Aut}(A)) \rtimes \text{Int}(\mathfrak{g})$ où Ω désigne le groupe commutatif engendré par les involutions de Cartan des composantes de \mathfrak{g}) est le groupe $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce (resp. le groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ de tous les automorphismes) de \mathfrak{g}' (ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$).

On peut prolonger l'action de $\text{Aut}(A)$ de \mathfrak{h}' à \mathfrak{h} et donc de \mathfrak{g}' à \mathfrak{g} par le choix d'un supplémentaire de \mathfrak{h}' dans \mathfrak{h} (c'est analogue à la démonstration 2.11b ci-dessous). On peut ainsi considérer $\text{Aut}(A)$ comme un groupe d'automorphismes (dits de diagramme) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ commutant à ω et $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ et considérer $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ comme un groupe d'automorphismes de \mathfrak{g} , mais ces définitions ne sont pas intrinsèques [R2].

Le sous-groupe $\text{Tr}=\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ des transvections de \mathfrak{g} (noté $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ dans [KW;4.20]) est formé des automorphismes de \mathfrak{g} qui induisent l'identité sur \mathfrak{g}' (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) ; il commute à $\text{Int}(\mathfrak{g})$ et ω et est isomorphe au groupe additif des applications \bar{K} -linéaires de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ dans \mathfrak{c} , cf. [R2]. Le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} (resp. des automorphismes de première espèce) est $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g}') \rtimes \text{Tr}$ (resp. $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \text{Aut}_1(\mathfrak{g}') \rtimes \text{Tr}$).

§ 2 L'INDICE DES FORMES PRESQUE-DEPLOYEES :

Dans tout ce paragraphe \mathfrak{g}_K est une forme presque-déployée de \mathfrak{g} .

La proposition 2.1 ci-dessous est l'un des résultats essentiels [R4,R5], voir 3.4, 3.5 et 3.11 dans [R5].

Proposition 2.1 : *Pour tout signe ε , le groupe G_K agit transitivement sur les paires $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^\varepsilon)$ où \mathfrak{t}_K est une sous-algèbre torique K -déployée maximale (en abrégé SATDM) de \mathfrak{g}_K et $\mathfrak{t}_K \subset \mathfrak{p}_K^\varepsilon$ une K -sous-algèbre parabolique minimale de signe ε de \mathfrak{g}_K . Toute K -sous-algèbre parabolique de signe ε contient une K -sous-algèbre parabolique minimale de signe ε .*

On dira qu'une telle paire $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^\varepsilon)$ est une standardisation de \mathfrak{g}_K de signe ε . Ainsi pour $K = \bar{K}$ une standardisation de \mathfrak{g} est une paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ d'une SAC et d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$, ce qui équivaut à la notion introduite en 1.2.

Dans la suite on choisit un signe que l'on note $+$.

Proposition 2.2 : *Pour une standardisation $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ de \mathfrak{g}_K , il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_K de \mathfrak{g}_K et une sous-algèbre de Borel positive \mathfrak{b}^+ de \mathfrak{g} telles que :*

$$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$$

Il existe une partie de type fini I_0 de I telle que $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{p}^+(I_0)$ pour la standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ de \mathfrak{g} .

La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}^-(I_0)$ est définie sur K et minimale. Elle ne dépend que de \mathfrak{t} et \mathfrak{p}^+ .

Définitions : Sous ces conditions on dira que la standardisation $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^-)$ de \mathfrak{g}_K est opposée à $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et que la standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ est compatible avec $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$.

Démonstration : D'après [R4;4.3] il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_K contenant \mathfrak{t}_K . Avec le langage immobilier de [R4;R5] on a que la facette $F(\mathfrak{p}^+)$ de \mathfrak{p}^+ dans l'immeuble de \mathfrak{g} sur \bar{K} est l'enclos de son intersection $F_K(\mathfrak{p}^+)$ avec le K -appartement $A_K(\mathfrak{t})$ de \mathfrak{t}_K qui est contenu dans l'appartement $A(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} ; donc $F(\mathfrak{p}^+) \subset A(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}^+$. L'existence de \mathfrak{b}^+ est alors claire et I_0 est de type fini d'après [R4;4.7b].

Comme $\mathfrak{p}^-(I_0)$ est la sous-algèbre parabolique opposée à $\mathfrak{p}^+(I_0)$ par rapport à la SAC \mathfrak{h} qui est définie sur K , elle est elle-même définie sur K . Elle est minimale d'après [R4;4.7b]. Comme la K -chambre $F_K(\mathfrak{p}^-)$ est l'opposée de $F_K(\mathfrak{p}^+)$ dans le K -appartement $A_K(\mathfrak{t})$ l'algèbre \mathfrak{p}^- ne dépend que de \mathfrak{t} et \mathfrak{p}^+ .

Remarque : Pour une SAC \mathfrak{h}_K de \mathfrak{g}_K , il est équivalent de dire que \mathfrak{h}_K contient une SATDM \mathfrak{t}_K de \mathfrak{g}_K et que \mathfrak{h}_K est contenue dans une K -sous-algèbre parabolique minimale \mathfrak{p}_K^+ de \mathfrak{g}_K . En effet, une fois traduit en langage immobilier, cela signifie que l'appartement $A(\mathfrak{h})$ contient un K -appartement $A_K(\mathfrak{t}_K)$ si et seulement si il contient une K -chambre $F_K(\mathfrak{p}_K^+)$ ce qui est clair car $A(\mathfrak{h})$ est stable par le groupe de Galois Γ . Dans ces conditions il existe une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}^+ telle que : $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$.

Proposition 2.3 : Avec les standardisations de 2.2, l'algèbre dérivée $I_K = \mathfrak{z}(\mathfrak{t}_K)$ du centralisateur de \mathfrak{t}_K est la sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p}_K^+ relative à \mathfrak{h}_K . C'est une sous-algèbre semi-simple (de dimension finie) définie sur K et K -anisotrope.

Le système de racines Δ_0 de I par rapport à $\mathfrak{h} \cap I$ admet pour base $\Pi_0 = \{\alpha_i / i \in I_0\}$.

Le groupe de Weyl $W_0 = W(I)$ de I par rapport à $\mathfrak{h} \cap I$ est engendré par les r_i pour $i \in I_0$; il agit simplement transitivement sur les sous-algèbres de Borel \mathfrak{b}_1^+ de \mathfrak{g} telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}_1^+ \subset \mathfrak{p}^+$.

Définitions : 1) On appelle I_K le noyau anisotrope de $(\mathfrak{g}_K, \mathfrak{t}_K)$.

2) La forme \mathfrak{g}_K est dite quasi-déployée s'il existe une sous-algèbre de Borel définie sur K , c'est à dire si \mathfrak{p}_K^+ est une sous-algèbre de Borel autrement dit si $I_0 = \emptyset$ ou encore si I_K est réduite à $\{0\}$.

Démonstration : D'après [R4; 4.7b et 3.5e] $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_K)$ est l'algèbre $\mathfrak{m}(I_0)$. Comme I_0 est de type fini, $I = \mathfrak{m}^s(I_0)$ est une algèbre semi-simple qui admet bien comme base de racines Π_0 et pour groupe de Weyl le sous-groupe W_0 de W engendré par les r_i pour $i \in I_0$

Aucune sous-algèbre parabolique positive de \mathfrak{g} contenue dans \mathfrak{p}^+ n'est définie sur K , donc aucune sous-algèbre parabolique de I n'est définie sur K et ainsi I_K est anisotrope. Par contre W_0 agit simplement transitivement sur les sous-algèbres de Borel de I contenant $\mathfrak{h} \cap I$ qui sont en bijection avec les sous-algèbres de Borel positives de \mathfrak{g} contenues dans \mathfrak{p}^+ et contenant \mathfrak{h} , d'où la dernière assertion.

2.4 L'action * : (cf. [T1;2.3]) . Choisissons I_K , \mathfrak{h}_K , \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{p}_K^+ comme en 2.2.

a) Pour γ dans Γ , $\gamma\mathfrak{b}^+$ est une sous-algèbre de Borel positive vérifiant $\mathfrak{h} \subset \gamma\mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$. Il existe donc un unique élément w_γ de W_0 tel que $w_\gamma\gamma\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{b}^+$. Ainsi $\gamma^* = w_\gamma\gamma$ stabilise \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{h} et donc agit sur Π ou I .

On peut voir facilement que l'on définit ainsi une action notée par une étoile de Γ sur Δ , Π , I et le diagramme de Dynkin. Il est clair que I_0 est stable par cette action.

On peut interpréter différemment cette action * :

b) Les éléments de I sont en correspondance bijective, par $i \rightarrow \text{cl}(\mathfrak{p}^\varepsilon(I - \{i\}))$, avec les classes de conjugaison sous G des sous-algèbres paraboliques de signe ε maximales de \mathfrak{g} . Ainsi Γ permute ces classes de conjugaison et l'action induite de Γ sur I est l'action *.

c) Les orbites de Γ^* dans $I - I_0$ correspondent bijectivement, par $J \rightarrow \mathfrak{p}^\varepsilon(I - J)$, aux sous-algèbres paraboliques propres de \mathfrak{g} , contenant $\mathfrak{p}^\varepsilon(I_0)$, définies sur K et maximales pour cette propriété c'est à dire aux classes de conjugaison sous G_K des K -sous-algèbres paraboliques maximales de signe ε de \mathfrak{g}_K .

d) Deux sous-algèbres paraboliques \mathfrak{q}^+ et \mathfrak{q}^- de \mathfrak{g} sont conjuguées par G aux sous-algèbres standards $\mathfrak{p}^+(J)$ et $\mathfrak{p}^-(J)$ pour le même $J \subset I$ si et seulement si elles sont opposées

c'est à dire si $\mathfrak{u}(\mathfrak{q}^+) \cap \mathfrak{q}^- = \mathfrak{u}(\mathfrak{q}^-) \cap \mathfrak{q}^+ = \{0\}$. Cette relation d'opposition est évidemment stable par tout automorphisme (linéaire ou semi-linéaire).

e) Il résulte des numéros précédents que l'action $*$ de Γ sur le graphe de Dynkin et la partie I_0 de celui-ci sont indépendants des choix faits c'est à dire du signe $+$ et des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

Remarque : Dans le cas (que l'on exclut ici) où \mathfrak{g} est de dimension finie, on peut choisir de conjuguer une sous-algèbre parabolique à $\mathfrak{p}^+(J)$ ou $\mathfrak{p}^-(J)$. Le changement de ce choix échange donc les types par l'automorphisme d'opposition $-w_0$ (où w_0 est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl). Alors I_0 et l'action $*$ de Γ sont stabilisés par cet automorphisme d'opposition.

2.5 L'indice de \mathfrak{g}_K : (cf. [T1;2.3])

C'est le triplet consistant en le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} (dont les sommets sont indexés par I), l'action $*$ de Γ et le sous-ensemble I_0 de I . Ce triplet est bien déterminé par \mathfrak{g}_K comme on vient de le voir.

On représente l'indice par le dessin du diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} sur lequel on figure l'action $*$ de Γ par des flèches (ou en dessinant de manière significativement rapprochée les sommets d'une même orbite) ; les orbites sous Γ^* des sommets de $I - I_0$ sont encerclées. On note $I' = (I - I_0)/\Gamma^*$ l'ensemble de ces orbites dites distinguées.

Bien entendu comme ce dessin ne représente que les orbites de Γ^* , il ne détermine pas complètement l'indice, sauf par exemple pour $K = \mathbb{R}$ et donc $|\Gamma| = 2$.

Remarque 2.6 : Si J est une partie de I stable par Γ^* et contenant I_0 , alors (avec les standardisations de 2.2) $\mathfrak{p}^+(J)$ et $\mathfrak{m}(J)$ sont des sous-algèbres définies sur K de \mathfrak{g} . On peut choisir $\mathfrak{m}^s(J)$ définie sur K et alors l'indice de la forme d'algèbre de Kac-Moody correspondante est obtenu à partir de celui de \mathfrak{g}_K en enlevant les sommets du graphe de Dynkin non dans J et les arêtes (ou flèches) qui y aboutissent.

En particulier pour J de type fini, on obtient ainsi l'indice d'une algèbre de Lie semi-simple sur K au sens classique de [T1]. Si $J = I_0$, cette algèbre de Lie semi-simple est \mathfrak{l}_K qui est anisotrope.

2.7 Racines relatives : On considère toujours les standardisations de 2.2 .

Pour α dans Δ , on note α' sa restriction à \mathfrak{t} . Le système des racines relatives est $\Delta' = \{ \alpha' \neq 0 / \alpha \in \Delta \}$. Pour α' dans Δ' , on note $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ l'espace propre correspondant de \mathfrak{t} , c'est à dire la somme directe des \mathfrak{g}_{β} pour $\beta \in \Delta$ et $\beta' = \alpha'$.

Proposition : 1) Pour $i \in I$, on a $\alpha_i' = 0$ si et seulement si $i \in I_0$. Pour $i, j \notin I_0$, on a $\alpha_i' = \alpha_j'$ si et seulement si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $j = \gamma^* i$.

On a $\Delta' \subset \pm(\bigoplus_{i \in \Gamma'} \mathbb{N}\alpha_i')$. Le cardinal de Γ' est le rang de \mathfrak{g}_K sur K .

2) L'algèbre \mathfrak{t} contient le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{g} ; elle est l'ensemble des H dans \mathfrak{h} tels que $\alpha_i(H) = 0$ pour i dans I_0 et $\alpha_j(H) = \alpha_i(H)$ si $j = \gamma^* i$ pour un γ dans Γ . Autrement dit $\mathfrak{t}/\mathfrak{c}$ est l'ensemble des points de l'orthogonal de Π_0 dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ fixes sous l'action (\bar{K} -linéaire) de Γ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ déduite de son action $*$ sur Π .

3) Pour α' dans Δ' , l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est de dimension finie et défini sur K .

Démonstration : 1) Par définition I_0 est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\alpha_i' = 0$. Comme $\gamma^* = w_\gamma \gamma$ avec w_γ dans le centralisateur de \mathfrak{t}_K et γ fixant \mathfrak{t}_K , on a $\alpha_j' = \alpha_i'$ si $j = \gamma^* i$. On a bien $\Delta' \subset \pm(\sum_{i \in \Gamma'} \mathbb{N}\alpha_i')$ et il reste donc à montrer que les α_i' pour $i \in \Gamma'$ sont libres dans le dual de \mathfrak{t} . Or il résulte de [R5;3.2,3.5.5 et 3.6] que le sous-espace vectoriel du dual de \mathfrak{t} engendré par Δ' a pour dimension le rang c'est à dire le cardinal de Γ' ; d'où le résultat.

2) Comme \mathfrak{t}_K est K -diagonalisable dans la représentation adjointe, \mathfrak{t} contient \mathfrak{c} . D'après le 1) \mathfrak{t} est contenu dans l'espace \mathfrak{s} des $H \in \mathfrak{h}$ vérifiant les conditions indiquées. Comme W_0 agit trivialement sur \mathfrak{s} il est clair que Γ stabilise \mathfrak{s} et que la base $(H_i)_{i \in \Gamma'}$ de $\mathfrak{s}/\mathfrak{c}$ duale de $(\alpha_i')_{i \in \Gamma'}$ est fixe par Γ . On en déduit que cette base est contenue dans $\mathfrak{s}_K/\mathfrak{c}_K$ donc est une base de $\mathfrak{s}_K/\mathfrak{c}_K$. Ainsi \mathfrak{s}_K est formé d'éléments K -diagonalisables dans la représentation adjointe et $\mathfrak{s}_K = \mathfrak{t}_K$.

3) Il est clair que $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est défini sur K , montrons qu'il est de dimension finie. Pour cela il suffit d'après le 1) de montrer que la somme directe V des \mathfrak{g}_{β} pour $\beta = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i \in \Delta$ et $\sum_{i \notin I_0} n_i = N$ (fixé) est de dimension finie. Soient $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}^+ \cap \mathfrak{l}$ la sous-algèbre de Borel positive de \mathfrak{l} et \mathfrak{u}_0 sa partie nilpotente. Il est clair que V est l'espace

vectoriel engendré par les crochets itérés $[x(i_1), \dots, x(i_N)]$ où pour tout j , $i_j \in I - I_0$ et $x(i_j)$ est dans le sous \mathfrak{u}_0 -module $X(i_j)$ de \mathfrak{g} engendré par e_{i_j} (les crochets itérés sont définis par récurrence par $[x]=x$ et $[x_1, x_2, \dots, x_n]=[x_1, [x_2, \dots, x_n]]$). Mais \mathfrak{u}_0 est de dimension finie et engendré par des éléments agissant de manière localement nilpotente sur \mathfrak{g} donc (par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) $X(i_j)$ est de dimension finie. Ainsi V lui-même est de dimension finie.

Théorème 2.8, cf. [T1;2.7] : *La connaissance du noyau anisotrope I_K et de l'indice détermine entièrement la forme \mathfrak{g}_K de \mathfrak{g} sur K .*

Plus précisément : Soit ${}_1\mathfrak{g}_K$ une autre K -forme presque-déployée d'algèbre de Kac-Moody. On note avec des ${}_1$ à gauche les objets relatifs à ${}_1\mathfrak{g}_K$ analogues à ceux déjà introduits pour \mathfrak{g}_K .

On suppose qu'il existe une bijection $\Phi : I \rightarrow {}_1I$ et un K -isomorphisme $\psi_K : I_K \rightarrow {}_1I_K$ entre les noyaux anisotropes tels que, si l'on note encore ψ la bijection de I_0 sur ${}_1I_0$ déduite de l'isomorphisme ψ par l'intermédiaire des sous-algèbres paraboliques, on ait :

- i) Φ est un isomorphisme des diagrammes de Dynkin i.e. ${}_1a_{\Phi i, \Phi j} = a_{i,j} \quad \forall i, j \in I$.
- ii) $\Phi(I_0) = {}_1I_0$.
- iii) $\Phi : I \rightarrow {}_1I$ est compatible aux actions $*$ de Γ .
- iv) La restriction de Φ à I_0 est ψ .

Alors il existe un K -isomorphisme Ψ_K de \mathfrak{g}_K sur ${}_1\mathfrak{g}_K$ dont la restriction à I_K est ψ_K et qui induit (par l'intermédiaire des sous-algèbres paraboliques positives) la bijection Φ de I sur ${}_1I$.

Démonstration : Considérons des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$, $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ et $({}_1\mathfrak{t}_K, {}_1\mathfrak{p}_K^+)$, $({}_1\mathfrak{h}, {}_1\mathfrak{b}^+)$ pour \mathfrak{g}_K et ${}_1\mathfrak{g}_K$.

a) D'après i) il existe un isomorphisme Φ de \mathfrak{g} sur ${}_1\mathfrak{g}$ correspondant à la bijection Φ de I sur ${}_1I$ et tel que $\Phi(\mathfrak{h}) = {}_1\mathfrak{h}$ et $\Phi(\mathfrak{b}^+) = {}_1\mathfrak{b}^+$. D'après ii), iii) et 2.7.2 on a aussi $\Phi(\mathfrak{p}^+) = {}_1\mathfrak{p}^+$, $\Phi(\mathfrak{t}) = {}_1\mathfrak{t}$ et donc $\Phi(I) = {}_1I$.

D'après iv) les deux isomorphismes $\Phi|_I$ et ψ diffèrent par un automorphisme intérieur de ${}_1I$. Donc quitte à composer (à gauche) Φ par le prolongement à ${}_1\mathfrak{g}$ d'un automorphisme intérieur de ${}_1I$ (donc sans changer ${}_1\mathfrak{t}$ ni ${}_1\mathfrak{p}^+$) on peut supposer que $\Phi|_I =$

ψ . Comme \mathfrak{h} est le centralisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{t} et $\mathfrak{h}^0_K = \mathfrak{h}_K \cap \mathfrak{l}_K$, l'algèbre $\Phi(\mathfrak{h})$ est le centralisateur dans ${}_{1}\mathfrak{g}$ de ${}_{1}\mathfrak{t}$ et $\psi(\mathfrak{h}^0_K)$ elle est donc encore définie sur K .

On considère maintenant pour ${}_{1}\mathfrak{g}$ la standardisation $(\Phi(\mathfrak{h}), \Phi(\mathfrak{b}^+))$ que l'on appelle encore $({}_{1}\mathfrak{h}, {}_{1}\mathfrak{b}^+)$ et on identifie $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ à $\Delta({}_{1}\mathfrak{g}, {}_{1}\mathfrak{h})$ par Φ .

b) L'isomorphisme Φ est compatible avec les actions $*$ de Γ sur Π et ${}_{1}\Pi$. Donc pour γ dans Γ l'automorphisme $\theta_\gamma = \Phi^{-1}\gamma\Phi\gamma^{-1}$ de \mathfrak{h} induit sur les racines un élément w_γ de W .

La restriction ψ de Φ à \mathfrak{h}^0 est définie sur K . Ainsi θ_γ induit l'identité sur $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}^0)$ et donc sur \mathfrak{h}^0 .

Les algèbres \mathfrak{t}_K et ${}_{1}\mathfrak{t}_K$ sont déployées, leurs racines sont donc fixes par Γ . Ainsi θ_γ induit l'identité sur les racines de \mathfrak{t} dans \mathfrak{g} et donc sur $\mathfrak{t}/\mathfrak{c}$.

Finalement θ_γ induit l'identité sur $(\mathfrak{h}^0 + \mathfrak{t})/\mathfrak{c}$. Comme le centralisateur dans \mathfrak{g} de $\mathfrak{h}^0 + \mathfrak{t}$ est réduit à \mathfrak{h} , on en déduit que θ_γ stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et donc que $w_\gamma = 1$.

c) Ainsi pour γ dans Γ , θ_γ induit l'identité sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ et sur $\mathfrak{h}' = \sum \bar{K}\alpha_i^\vee$. Autrement dit θ_γ est un élément du groupe $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ de 1.7 qui est canoniquement isomorphe aux groupes additifs d'applications linéaires $L(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ et $L(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}', \mathfrak{c})$.

Pour γ', γ dans Γ , on a $\theta_{\gamma\gamma'} = \theta_\gamma \cdot \gamma(\theta_{\gamma'})$. Autrement dit θ_γ est un 1-cocycle de Γ dans un espace vectoriel sur \bar{K} (défini sur K). Comme $H^1(\Gamma, \bar{K}) = \{0\}$, ce cocycle est un cobord : il existe $\xi \in \text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ tel que $\theta_\gamma = \xi^{-1} \cdot \gamma(\xi)$ sur \mathfrak{h} . Autrement dit $(\Phi\xi^{-1})^{-1}\gamma(\Phi\xi^{-1})\gamma^{-1}$ est l'identité sur \mathfrak{h} . Ainsi quitte à composer (à droite) Φ par ξ^{-1} on peut supposer que $\Phi|_{\mathfrak{h}}$ est défini sur K .

d) Pour une racine relative $\alpha' \in \Delta'$ (identifié naturellement avec ${}_{1}\Delta'$) on va définir un isomorphisme K -linéaire $\eta_{\alpha'K}$ de $\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ sur ${}_{1}\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ compatible avec les actions de $\mathfrak{h}_K + \mathfrak{l}_K$ et ${}_{1}\mathfrak{h}_K + {}_{1}\mathfrak{l}_K$ et l'homomorphisme Φ_K de $\mathfrak{h}_K + \mathfrak{l}_K$ sur ${}_{1}\mathfrak{h}_K + {}_{1}\mathfrak{l}_K$ (qui coïncide avec ψ_K sur \mathfrak{l}).

L'ensemble L_K des applications K -linéaires de $\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ dans ${}_{1}\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ compatibles avec les actions ci-dessus est un K -espace vectoriel. De plus $L = L_K \otimes_K \bar{K}$ est l'espace défini de manière analogue sur \bar{K} ; il contient donc un isomorphisme : la restriction de Φ . Mais les applications qui ne sont pas des isomorphismes sont les zéros d'un polynôme à coefficients dans K et K est infini, il existe donc dans L_K l'isomorphisme $\eta_{\alpha'K}$ cherché.

e) Définissons d'abord Ψ sur \bar{K} : on impose que Ψ est égal à Φ sur \mathfrak{h} , à Φ et à ψ sur \mathfrak{l} et à $\eta_{\alpha'}$ sur \mathfrak{g}_{α} pour $\alpha \in \Pi - \Pi_0$. Comme les algèbres \mathfrak{g} et ${}_{\mathbb{1}}\mathfrak{g}$ sont définies par générateurs et relations et comme la définition partielle de Ψ ci-dessus échange les générateurs et relations respectifs, il existe bien un isomorphisme Ψ de \mathfrak{g} sur ${}_{\mathbb{1}}\mathfrak{g}$ ayant les restrictions ci-dessus à \mathfrak{h} , \mathfrak{l} et \mathfrak{g}_{α} pour $\alpha \in \Pi - \Pi_0$.

Mais $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est, pour la représentation de $\mathfrak{h} + \mathfrak{l}$, une somme directe de modules de plus haut poids engendrés par les vecteurs e_i pour $i \in I - I_0$ tel que $\alpha' = \alpha_i'$ (cf. la démonstration de 2.7.3). Comme Ψ et $\eta_{\alpha'}$ coïncident sur \mathfrak{g}_{α} et sont tous deux compatibles avec les actions de $\mathfrak{h} + \mathfrak{l}$, ils coïncident sur $\mathfrak{g}_{\alpha'}$.

Pour montrer que Ψ est défini sur K il faut vérifier que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\Psi\gamma^{-1} = \Psi$ sur les générateurs \mathfrak{h} , \mathfrak{l} et $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ (pour $\alpha \in \Pi - \Pi_0$) de \mathfrak{g} . C'est clair d'après les choix ci-dessus et les résultats c) et d) précédents.

Remarques 2.9 : Soit \mathfrak{g}_K une forme presque-déployée d'algèbre de Kac-Moody.

1) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^n$ est une décomposition de \mathfrak{g} en somme directe d'algèbres de Kac-Moody, on a une décomposition correspondante $I = I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup I^n$ de I en parties disjointes et disconnexes.

Si K'/K est une extension finie, si $\Gamma' = \text{Gal}(\bar{K}/K')$ et si la décomposition de \mathfrak{g} est stable par Γ' , alors Γ' permute les I^j et les \mathfrak{g}^j par la même permutation des indices.

Si chaque facteur de la décomposition est défini sur K , alors l'indice de \mathfrak{g}_K est la réunion disjointe et disconnexe des indices des \mathfrak{g}^j_K .

2) Si $I = I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup I^n$ est une réunion disjointe et disconnexe, on a une décomposition correspondante $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^n$ de \mathfrak{g} en somme directe d'algèbres de Kac-Moody. Supposons maintenant la partition de I stable par Γ .

Si Γ^j est le sous-groupe de Γ qui stabilise I^j et si K^j/K est l'extension finie correspondante, on peut modifier le facteur \mathfrak{g}^j par des éléments du centre \mathfrak{t} de façon que le nouveau facteur \mathfrak{g}^j soit défini sur K^j et que l'on ait encore la décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^i$: En effet si \mathfrak{g}^j est la somme directe des \mathfrak{g}^k pour $k \neq j$, les algèbres dérivées \mathfrak{g}^j et \mathfrak{g}^j sont stables par Γ^j (comme sommes directes des idéaux non commutatifs minimaux de \mathfrak{g} correspondant aux composantes de I^j et $I_j = I - I^j$). Ainsi le centralisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{g}^j est stable par Γ^j et

somme directe de \mathfrak{g}^j et du centre \mathfrak{t}_j de \mathfrak{g}_j (ou de \mathfrak{g}_j'). Comme \mathfrak{t}_j et \mathfrak{g}_j' sont définis sur K^j , il existe un supplémentaire \mathfrak{h}_j de $\mathfrak{t}_j \oplus \mathfrak{g}_j'$ dans $\mathfrak{t}_j \oplus \mathfrak{g}_j$ qui est défini sur K^j . Alors $\mathfrak{g}_j' \oplus \mathfrak{h}_j$ est la nouvelle algèbre \mathfrak{g}_j cherchée.

En faisant des choix comme ci-dessus des \mathfrak{g}_j pour un j dans chaque orbite de Γ et en transportant ces \mathfrak{g}_j par Γ , on obtient une décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^i$ stable par Γ .

3) Restriction des scalaires : Sous les hypothèses de 2) on suppose que Γ agit transitivement sur $\{1, \dots, n\}$. On a donc une décomposition en somme directe de \mathfrak{g} stable par Γ . Soit \mathfrak{g}^1 l'un des facteurs, $\Gamma' = \Gamma^1$ le groupe et $K' = K^1$ le corps correspondants. On indexe la décomposition et les groupes ou corps par les éléments de $\Gamma/\Gamma' = \{\sigma : K' \rightarrow \bar{K}\}$: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'} \mathfrak{g}^\sigma$. Le groupe Γ agit (à gauche) sur Γ/Γ' et pour $\gamma \in \Gamma$ on a : $\gamma(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^{\gamma\sigma}$, $\gamma\Gamma^\sigma = \Gamma^{\gamma\sigma}$ et $K^\sigma = \sigma(K')$.

On note $\mathfrak{g}^1_{K'}$ l'algèbre des points fixes sous Γ' de \mathfrak{g}^1 : c'est une K' -forme d'algèbre de Kac-Moody. Comme $\mathfrak{g}^1_{K'}$ est un facteur de $\mathfrak{g}^{\Gamma'}$ on a un homomorphisme K -linéaire d'algèbres de Lie ϕ_K de $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}^\Gamma$ dans $\mathfrak{g}^1_{K'}$. C'est en fait un isomorphisme K -linéaire : l'inverse ψ_K est donné par $\psi_K(X') = (\sigma(X'))_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'}$ si $X' \in \mathfrak{g}^1_{K'}$ (et donc $\sigma(X') \in \mathfrak{g}^{\sigma(K')}$).

Ainsi \mathfrak{g}_K est K -isomorphe à une K' -forme d'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}^1_{K'}$ considérée comme une algèbre de Lie sur K . Réciproquement il est classique que pour toute K -algèbre de Lie \mathfrak{g}_K restriction des scalaires d'une K' -algèbre de Lie $\mathfrak{g}^1_{K'}$, on a une décomposition de \mathfrak{g} en somme directe d'algèbres de Lie comme dans les hypothèses de ce numéro.

Voyons maintenant quel est l'indice de $\mathfrak{g}^1_{K'}$.

Si N' est un K' -sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^1_{K'}$, on a $\psi_K(N') = (\bigoplus_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'} \sigma(N'))^\Gamma$. On en déduit facilement que $\mathfrak{h}_{K'}$ est une SAC de $\mathfrak{g}^1_{K'}$ si et seulement si $\psi_K(\mathfrak{h}_{K'})$ est une SAC de \mathfrak{g}_K et que $\mathfrak{p}_{K'}$ est une K' -sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}^1_{K'}$ si et seulement si $\psi_K(\mathfrak{p}_{K'})$ est une K -sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g}_K ; en particulier $\mathfrak{g}^1_{K'}$ est une forme presque-déployée. Par ailleurs si $\mathfrak{t}_{K'}$ est une SATDM de $\mathfrak{g}^1_{K'}$, alors $\mathfrak{t}_K = \psi_K(\{ X \in \mathfrak{t}_{K'} / \alpha'(X) \in K \ \forall \alpha' \in \Delta(\mathfrak{g}^1_{K'}, \mathfrak{t}_{K'}) \})$ est une SATDM de \mathfrak{g}_K et si \mathfrak{b}^{1+} est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g}^1 alors $\mathfrak{b}^+ = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'} \sigma(\mathfrak{b}^{1+})$ est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} . Donc si

$(\mathfrak{t}_{K'}, \mathfrak{p}_{K'})$ et $(\mathfrak{h}_{K'}, \mathfrak{b}^{1+})$ sont des standardisations compatibles de $\mathfrak{g}^{1_{K'}}$, alors $(\mathfrak{t}_K, \psi_K(\mathfrak{p}_{K'}))$ et $(\psi_K(\mathfrak{h}_{K'}), \mathfrak{b}^+)$ sont des standardisations compatibles de \mathfrak{g}_K .

Il est maintenant clair que l'indice de $\mathfrak{g}^{1_{K'}}$ s'obtient en ne retenant de celui de \mathfrak{g}_K que le sous-graphe de Dynkin correspondant à I^1 , avec $I_0^1 = I^1 \cap I_0$ et en prenant pour action de Γ' la restriction à Γ' et I^1 de l'action de Γ sur I .

2.10 Le problème de classification :

Pour classifier les formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody il faut maintenant déterminer les indices admissibles, c'est à dire ceux qui peuvent correspondre à des formes.

Une K -forme est évidemment somme directe de K -formes indécomposables. Son indice est alors réunion disjointe des indices de ces K -formes indécomposables (cf. 2.9.1).

Une K -forme indécomposable \mathfrak{g}_K peut ne pas être absolument indécomposable (i.e. \mathfrak{g} peut ne pas être indécomposable). D'après la remarque précédente les composantes connexes du graphe de Dynkin sont alors permutées transitivement par Γ et il existe une extension finie K'/K et une K' -forme presque-déployée $\mathfrak{g}^{1_{K'}}$ qui est absolument indécomposable telle que \mathfrak{g}_K soit $\mathfrak{g}^{1_{K'}}$ considérée comme algèbre de Lie sur K .

On est donc ramené au problème de la classification des formes absolument indécomposables. La proposition suivante dit que l'on peut se ramener au rang 0 ou 1 et le cas des formes quasi-déployées est traité en 2.12.2. D'autres résultats seront obtenus aux paragraphes 4, 5 et 6.

2.11 On considère un indice \mathcal{I} de \mathfrak{g} sur K , c'est à dire une action $*$ de $\Gamma = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} (dont les sommets sont indexés par I) et une partie de type fini I_0 de I stable par Γ^* .

Pour tout $i' \in I' = (I - I_0)/\Gamma^*$, on considère la partie $I_{i'}$ de I réunion de I_0 et de l'orbite i' , l'action $*$ induite sur $I_{i'}$ et la partie I_0 de $I_{i'}$. On obtient donc ainsi pour chaque $i' \in I'$ un indice $\mathcal{I}_{i'}$ sur K de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{i'} = \mathfrak{g}(A(I_{i'}))$.

Proposition cf. [Sa;II 3.12] : Si pour chaque $i' \in I'$ il existe une forme presque-déployée $\mathfrak{g}_{i'K}$ de $\mathfrak{g}_{i'}$ dont l'indice est $\mathcal{F}_{i'}$ et si pour $i',j' \in I'$ les noyaux anisotropes de $\mathfrak{g}_{i'K}$ et $\mathfrak{g}_{j'K}$ sont K -isomorphes, alors il existe une forme presque-déployée \mathfrak{g}_K de \mathfrak{g} dont l'indice est \mathcal{F} et dont le noyau anisotrope est isomorphe à ceux des formes $\mathfrak{g}_{i'K}$.

Remarques : 1) Ainsi l'admissibilité d'un indice se vérifie au rang 0 et 1.

2) Cette condition suffisante d'admissibilité est aussi nécessaire d'après 2.6.

Démonstration : a) On a donc une K -algèbre semi-simple anisotrope I_K et des K -isomorphismes $\phi_{i'K}$ de I_K sur chacun des noyaux anisotropes des $\mathfrak{g}_{i'K}$. On choisit une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}^0 de I contenant une SAC \mathfrak{h}^0 définie sur K .

Soit $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ une standardisation de \mathfrak{g} . On peut identifier I à la sous-algèbre $\mathfrak{m}(I_0)$ de \mathfrak{g} de façon que $\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{h} \cap I$ et $\mathfrak{b}^0 = \mathfrak{b} \cap I$.

Il existe un isomorphisme $\psi_{i'}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{m}^s(I_{i'})$ de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g}_{i'}$ tel que la standardisation de $\mathfrak{m}^s(I_{i'})$ déduite de $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ soit échangée avec une standardisation $(\mathfrak{h}_{i'}, \mathfrak{b}_{i'}^+)$ de $\mathfrak{g}_{i'}$ compatible avec une standardisation de $\mathfrak{g}_{i'K}$ et que $\phi_{i'} = \psi_{i'}$ sur I (cf. la démonstration 2.8a).

b) Pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(\mathfrak{b}^0)$ est une sous-algèbre de Borel de I contenant \mathfrak{h}^0 , il existe donc un unique $w_\gamma \in W_0 = W(I, \mathfrak{h}^0) \subset W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que $w_\gamma^{-1}\gamma(\mathfrak{b}^0) = \mathfrak{b}^0$. Ainsi $w_\gamma^{-1}\gamma$ induit une bijection de $\Delta_0 = \Delta(I, \mathfrak{h}^0)$ qui est l'action γ^* sur l'indice : $\gamma = w_\gamma\gamma^*$. Comme γ correspond à une action de Γ sur \mathfrak{h}^0 on a $w_\gamma\gamma = w_\gamma \cdot \gamma^*(w_\gamma)$ dans W_0 pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Réciproquement cette formule montre que $\gamma = w_\gamma\gamma^*$ définit un homomorphisme de Γ dans $W_0 \rtimes \Gamma^*$, donc une action sur $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et des actions K -linéaires de Γ sur $R = \sum_{\alpha \in \Delta_{re}} K\alpha$ (qui est un K -sous-espace vectoriel de \mathfrak{h}^*) et $R^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta_{re}} K\alpha^\vee$ (qui est un K -sous-espace vectoriel de \mathfrak{h}). De plus ces deux actions sont compatibles avec la dualité entre ces deux espaces vectoriels.

$\mathfrak{t}_K = \mathfrak{t} \cap R^\vee$ est une K -forme de \mathfrak{t} , elle est stable par W_0 et Γ^* donc par le groupe $W_0 \rtimes \Gamma^*$ (dont l'action sur $\Delta_{re}, \Delta_{re}^\vee$, etc.. se fait via un groupe fini). Soit \mathfrak{h}^1_K un supplémentaire de \mathfrak{t}_K dans R^\vee stable par $W_0 \rtimes \Gamma^*$. Soit \mathfrak{h}^2 un supplémentaire de \mathfrak{t} dans \mathfrak{h} contenant \mathfrak{h}^1 . On note $\mathfrak{h}^2_K = \{ X \in \mathfrak{h}^2 / \alpha(X) \in K \ \forall \alpha \in K \}$ et $\mathfrak{h}^3_K = \mathfrak{h}^2_K \oplus \mathfrak{t}_K$ qui sont des K -formes de \mathfrak{h}^2 et \mathfrak{h} . On a $\mathfrak{h}^2_K \cap R^\vee = \mathfrak{h}^1_K$.

La dualité entre $\mathfrak{h}^2_{\mathbb{K}}$ et \mathbb{R} est non dégénérée. On en déduit donc une action de Γ sur $\mathfrak{h}^2_{\mathbb{K}}$ coïncidant sur $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{K}}$ avec l'action sur \mathbb{R}^{\vee} . Comme $\mathfrak{h}^3_{\mathbb{K}} = \mathfrak{h}^2_{\mathbb{K}} + \mathbb{R}^{\vee}$, on obtient ainsi une action \mathbb{K} -linéaire de Γ sur $\mathfrak{h}^3_{\mathbb{K}}$ et une action $\bar{\mathbb{K}}$ -semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{h} prolongeant l'action sur \mathfrak{h}^0 (qui est contenu dans $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \mathbb{R}^{\vee} \otimes \bar{\mathbb{K}}$) et compatible avec l'action $*$ de Γ sur le graphe de Dynkin.

Ces deux dernières conditions caractérisent en fait l'action de Γ sur \mathfrak{h}' .

c) On vient donc de construire une action de Γ sur $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{I} + \mathfrak{h}$ prolongeant l'action sur \mathbb{I} et compatible avec les actions $*$ de Γ .

Par hypothèse il existe une action semi-linéaire de Γ sur l'algèbre dérivée \mathfrak{g}'_i compatible avec son action sur \mathbb{I} et avec les actions $*$ de Γ sur les graphes. En particulier \mathfrak{g}'_i est gradué par $\Delta'_i \cup \{0\}$ où Δ'_i est une partie de Δ , cette graduation est stable par Γ et l'action de Γ sur Δ'_i est induite par l'action de Γ sur Δ du b). De la remarque à la fin du b) on déduit que l'isomorphisme ψ'_i qui transforme $\mathfrak{h}^0 \oplus (\oplus_{i \in \mathbb{I}'} \bar{\mathbb{K}} \alpha_i^{\vee})$ en $\mathfrak{h}'_i \cap \mathfrak{g}'_i$ est compatible aux actions semi-linéaires de Γ sur $\mathbb{I} + \mathfrak{h}$ et \mathfrak{g}'_i .

d) Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ le quotient de la somme amalgamée des algèbres de Lie \mathfrak{g}_0 et \mathfrak{g}'_i (pour $i \in \mathbb{I}'$) au dessus de \mathbb{I} par les relations :

$$(1) [\mathfrak{h}, X] = \alpha(\mathfrak{h})X \text{ pour } \mathfrak{h} \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0 \text{ et } X \in \mathfrak{g}'_i \text{ de poids } \alpha \in \Delta'_i \subset \Delta .$$

$$(2) [X, Y] = 0 \text{ si } X \in \mathfrak{g}'_i \text{ et } Y \in \mathfrak{g}'_j \text{ sont de poids respectifs } \alpha, \beta \text{ avec } \alpha + \beta \notin \Delta$$

$$(3) \mathfrak{h} = \psi'_i(\mathfrak{h}) \text{ pour } \mathfrak{h} \in \oplus_{i \in \mathbb{I}'} \bar{\mathbb{K}} \alpha_i^{\vee} .$$

Alors \mathfrak{g} est le quotient de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par le plus grand idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$ ne rencontrant pas \mathfrak{h} . En effet $\tilde{\mathfrak{g}}$ est un quotient de l'algèbre de Lie de générateurs \mathfrak{h} et les e_i, f_i pour $i \in \mathbb{I}$ avec les relations habituelles (sauf les relations de Serre) et il admet \mathfrak{g} pour quotient.

e) Le groupe Γ agit semi-linéairement sur \mathfrak{g}_0 et les \mathfrak{g}'_i de manière compatible avec son action sur \mathbb{I} et en stabilisant d'après b) les ensembles de relations (1),(2) et (3). On obtient ainsi une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} qui coïncide avec les actions déjà connues sur \mathfrak{g}_0 et les images des \mathfrak{g}'_i ; d'où la \mathbb{K} -forme cherchée.

Remarques 2.12 :

1) Il est facile de construire une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} à partir d'une action sur \mathfrak{g}' ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ correspondant à un certain indice : l'action sur \mathfrak{h} est construite comme

en 2.11b et le supplémentaire $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ qui doit être stable par Γ s'envoie isomorphiquement dans $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$. Ainsi l'admissibilité d'un indice se voit par exemple sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

2) Les formes quasi-déployées sont caractérisées d'après le théorème 2.8 par une action de Γ (égale à l'action $*$) sur le graphe de Dynkin.

Réciproquement tout indice quasi-déployé (c'est à dire avec $I_0 = \emptyset$) est admissible : on construit une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{h} comme 2.11b et si on pose $\gamma(e_i) = e_{\gamma_i}$ et $\gamma(f_i) = f_{\gamma_i}$ pour $\gamma \in \Gamma$, on obtient aussitôt l'action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} et donc la forme quasi-déployée cherchée grâce à la définition par générateurs et relations de \mathfrak{g} .

Si K est un corps de dimension cohomologique 1 (mais infini car de caractéristique 0 !) il n'existe pas d'algèbre semi-simple anisotrope sur K non triviale, cf. e.g. [T1;3.3.1].
Donc sur un tel corps toute forme presque-déployée est quasi-déployée.

§ 3 LE SYSTEME DES RACINES RELATIVES :

On considère une forme presque-déployée \mathfrak{g}_K de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

3.1 Généralités: D'après ce qui précède, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2$ où $\mathfrak{t}_1 = \bigcap_{i \in I_0} \text{Ker}(\alpha_i)$ et $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{h}^{\Gamma^*} + \mathfrak{c}$

Pour étudier le système de racines relatives $\Delta' = \{ \alpha' = \alpha|_{\mathfrak{t}} / \alpha \in \Delta \ \alpha' \neq 0 \}$, on peut étudier d'abord $\bar{\Delta} = \{ \bar{\alpha} = \alpha|_{\mathfrak{t}_2} / \alpha \in \Delta \ \bar{\alpha} \neq 0 \}$ puis les restrictions $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}|_{\mathfrak{t}} = \alpha'$. Dans le cas quasi-déployé on a $\bar{\Delta} = \Delta'$, donc ce qui est valable pour Δ' l'est aussi pour $\bar{\Delta}$ (cf. 2.12.2).

D'après 2.7.1 on a $\Delta' \subset \pm \bigoplus_{i \in I'} \mathbb{N} \alpha_i'$ où $I' = (I - I_0)/\Gamma^* = I/\Gamma^* - I_0/\Gamma^*$,

donc aussi $\bar{\Delta} \subset \pm \bigoplus_{i \in \bar{I}} \mathbb{N} \alpha_i'$ où $\bar{I} = I/\Gamma^*$.

Dans la suite pour $i \in I$ on se permettra parfois de noter encore i la classe $i' = \bar{i} = \Gamma^* i$ dans \bar{I} .

Les résultats des numéros 3.2 à 3.5 seront valables dans $\bar{\Delta}$ et dans Δ' ; on considèrera Δ' comme une généralisation de $\bar{\Delta}$.

3.2 Racines relatives réelles cf. [R5; 3.6, 3.7 et 3.11] :

On appelle racines relatives réelles, les racines α' pour $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ telles que $\{\beta \in \Delta^{\text{re}} / \exists \lambda > 0 \beta' = \lambda \alpha'\}$ est fini. Pour une telle racine il existe un élément $R_{\alpha'}$ du groupe de Weyl relatif $W' = W_K = N_K/L$ (où N_K (resp. L) est le normalisateur (resp. fixateur) de \mathfrak{t} dans G_K) qui induit dans \mathfrak{t} la réflexion par rapport à l'hyperplan $\{v / \alpha'(v)=0\}$.

Remarques : 1) Il est clair que si β' est une racine réelle alors la racine $\bar{\alpha}$ de $\bar{\Delta}$ telle que $\bar{\alpha}' = \beta'$ est réelle dans $\bar{\Delta}$.

2) Dans le cas $\bar{\Delta}$, on a avec les mêmes définitions un groupe de Weyl relatif \bar{W} qui est le sous-groupe W^{Γ^*} de W formé des éléments fixes sous l'action $\gamma^*.w = \gamma^*w\gamma^{*-1}$. De plus les racines réelles de $\bar{\Delta}$ sont les restrictions à \mathfrak{t}_2 des racines réelles de Δ dont l'orbite sous Γ^* est prénilpotente c'est à dire contenue dans $w_1\Delta_+ \cap w_2\Delta_-$ pour des éléments w_1 et w_2 de W [Hée].

3) Si α' est une racine réelle de Δ' , son mur dans le K -appartement correspondant à \mathfrak{t} est engendré par son intersection avec l'adhérence d'une K -chambre positive [R5;3.7c]; en conjuguant α' par le groupe de Weyl W_K [R5;3.11] on peut supposer que cette chambre est la K -chambre canonique correspondant à \mathfrak{p}_K^+ . Il est alors clair que α' est colinéaire à une racine de la base Π' , cf [R5;3.6].

Dans le cas de $\bar{\Delta}$ le résultat analogue est dû à J.Y. Hée [Hée].

3.3 Racines relatives simples : 1) Pour $i \in I - I_0$, α_i' est une racine relative simple réelle si et seulement si $\Delta(\Gamma^*i \cup I_0)$ est fini, en effet cette dernière condition équivaut à $\Delta^{\text{re}}(\Gamma^*i \cup I_0)$ fini, donc à $\Delta^{\text{re}}(\Gamma^*i \cup I_0) - \Delta^{\text{re}}(I_0)$ fini c'est à dire à $\{\beta \in \Delta^{\text{re}} / \exists \lambda > 0 \beta' = \lambda \alpha_i'\}$ fini.

Dans ce cas, d'après 2.6, l'indice de \mathfrak{g}_K restreint à $\Gamma^*i \cup I_0$ est un indice de rang relatif 1 parmi ceux répertoriés par Tits [T1]. En particulier la somme des coefficients, suivant les α_j pour $j \in \Gamma^*i$, de la plus grande racine de chaque composante connexe de $\Gamma^*i \cup I_0$ qui rencontre Γ^*i (elles sont toutes de même type) est au plus 2.

Une racine relative simple réelle α_i' admettra un multiple entier positif dans Δ' si et seulement si la somme précédente est 2, ce multiple est alors $2\alpha_i'$; on dit que $i \in I_2'$ dans ce cas. Dans les autres cas où α_i' est réelle on dit que $i \in I_1'$, on a alors :

$$i \in I_1' \Rightarrow N\alpha_i' \cap \Delta' = \{\alpha_i'\} \quad i \in I_2' \Rightarrow N\alpha_i' \cap \Delta' = \{\alpha_i', 2\alpha_i'\}$$

On définit de même $\bar{\Gamma}_1$ et $\bar{\Gamma}_2$.

2) Lorsque α_i' n'est pas réelle, elle est dite imaginaire, $\Delta(\Gamma^*i \cup I_0)$ n'est pas fini et il contient des racines imaginaires dont le support rencontre nécessairement Γ^*i . Une racine imaginaire de Δ a tous ses multiples entiers dans Δ donc $\{n \in \mathbb{N} / n\alpha_i' \in \Delta\}$ n'est pas borné.

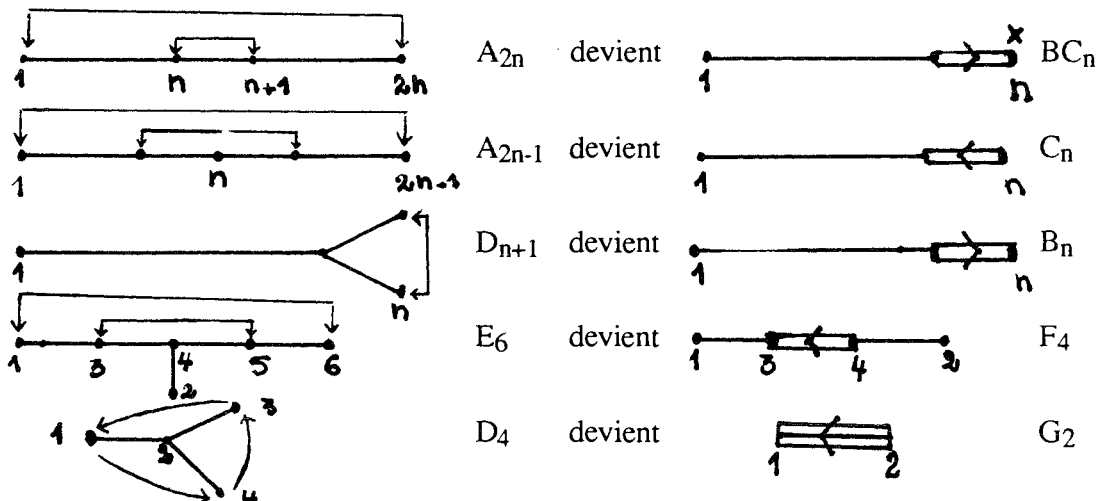
3) Lorsque $\alpha' \in \Delta_+$ et n'est pas une racine simple, il existe $i \in \Gamma'$ tel que $\alpha' - \alpha_i' \in \Delta_+$

En effet $\mathfrak{g}_{\alpha'} \neq \{0\}$ et est la somme directe des \mathfrak{g}_{α} pour α dans Δ et $\alpha|_{\mathfrak{t}} = \alpha'$. Il existe donc un tel α et un $v \neq 0$ dans \mathfrak{g}_{α} qui est obtenu comme crochet itéré $v = [e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}]$ avec $\sum_{j=1, n} \alpha_{i_j} = \alpha$. Par suite il existe $k \geq 0$ tel que $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I_0$ et $i_{k+1} = j$ non dans I_0 ; alors le crochet itéré $[e_{i_{k+2}}, \dots, e_{i_n}]$ est non nul et de poids β avec $\beta = \alpha' - \alpha_j'$, d'où le résultat.

3.4 Coracine d'une racine relative réelle : Si α' est une racine relative réelle l'élément $R_{\alpha'}$ (cf. 3.2) est associé à un élément α'^{\vee} de \mathfrak{t} appelé coracine de α' et défini par : $R_{\alpha'}(h) = h - \langle h, \alpha' \rangle \alpha'^{\vee} \quad \forall h \in \mathfrak{t}$. On posera $\alpha'^{\wedge} = (2\alpha')^{\vee}$ si α' est multipliable et $\alpha'^{\wedge} = \alpha'^{\vee}$ sinon.

Quand α_i' est une racine relative simple réelle, un calcul classique (expliqué par exemple dans [B; III 3.2]) détermine le diagramme de Dynkin du système de racines relatives $\bar{\Delta}_i = \bar{\Delta}(\{i'\} \cup J_0 / \Gamma^*)$ où $J_0 \cup i'$ est la réunion des composantes connexes de $I_0 \cup i'$ rencontrant i' (qui sont toutes de même type).

Lorsque l'action de Γ^* sur une composante connexe n'est pas triviale, on a :



(la croix au dessus du sommet n dans BC_n signifie que $2\alpha_n'$ est une racine, cf 3.6)

Dans tous les cas l'automorphisme d'opposition de $\bar{\Delta}_i$ stabilise J_0/Γ^* et fixe i' . L'élément du groupe de Weyl induisant $R_{\alpha_i'}$ est l'élément le plus long de $\bar{W}(\{i'\} \cup J_0/\Gamma^*)$, il échange la racine longue en son opposée.

3.5 Condition de chaîne réelle :

Si $i \in I_1'$ (resp. I_2') on sait qu'il est possible de trouver dans \mathfrak{g}_K un \mathfrak{sl}_2 -triplet E_i', F_i', H_i' dans $(\mathfrak{g}_\beta)^\Gamma, (\mathfrak{g}_{-\beta})^\Gamma, [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]^\Gamma$ où $\beta = \alpha_i'$ (resp. $2\alpha_i'$) et $H_i' = \alpha_i'^\wedge$ dans les deux cas. On note $\mathfrak{g}_{(i)} = KE_i' \oplus KF_i' \oplus KH_i'$.

Si $\alpha' \in \Delta_+' - N\alpha_i'$ la somme directe des \mathfrak{g}_β pour $\beta \in \Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha_i')$ est un $\mathfrak{g}_{(i)}$ -module. D'après la théorie des \mathfrak{sl}_2 -modules et comme $\alpha_i'(\alpha_i'^\wedge) = 2$ (resp. 1) on a :

Si $i \in I_1'$ $\Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha_i') = \{\alpha' - p\alpha_i', \dots, \alpha' + q\alpha_i'\} \subset \Delta_+'$ avec $p - q = \langle \alpha', \alpha_i'^\vee \rangle$.

Si $i \in I_2'$ il existe des entiers p et q tels que : $p - q = \langle \alpha', \alpha_i'^\vee \rangle = \langle \alpha', 2\alpha_i'^\wedge \rangle$,

$$\{\alpha' - p\alpha_i', \alpha' - (p-2)\alpha_i', \dots, \alpha' + (q-2)\alpha_i', \alpha' + q\alpha_i'\} \subset \Delta_+' \quad \text{et}$$

$$\Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha_i') \subset \{\alpha' - p\alpha_i', \dots, \alpha' + q\alpha_i'\}.$$

De plus si $i \in I_2'$ et $\alpha' - (p-2k)\alpha_i' \in \Delta'$ ainsi que $\alpha' - (p-2k-2)\alpha_i'$ on passe de l'un des espaces radiciels correspondants à l'autre grâce à l'action adjointe non nulle de E_i' ou F_i' . Supposons qu'il s'agisse de E_i' . Il existe alors $v \in \mathfrak{g}_{\alpha' - (p-2k)\alpha_i'}$ tel que $[E_i', v] \neq 0$.

Ainsi un des crochets itérés contenant 2 éléments e_j avec $j \in i$ intervenant dans la combinaison linéaire donnant E_i' ne commute pas à v ; on le note $[e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}]$.

Quitte à faire une permutation de $\{1, \dots, n\}$ on a $\text{ad}(e_{j_1})\text{ad}(e_{j_2})\dots\text{ad}(e_{j_n})v \neq 0$ donc pour $k \geq 1$ on a $\text{ad}(e_{j_k})\dots\text{ad}(e_{j_n})v \neq 0$. Si on choisit k de façon que $\{j_k, \dots, j_n\} \cap i$ soit réduit à un élément on en déduit aussitôt que : $\mathfrak{g}_{\alpha' - (p-2k-1)\alpha_i'}$ n'est pas réduit à 0. Ainsi même si

$i \in I_2'$ on a $\Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha_i') = \{\alpha' - p\alpha_i', \dots, \alpha' + q\alpha_i'\} \subset \Delta_+'$ avec $p - q = \langle \alpha', \alpha_i'^\vee \rangle$.

3.6 Matrice et graphe associés à $\bar{\Delta}$:

a) Pour $i \in \bar{I}$ une étude rapide des orbites montre que $\bar{\alpha}_i$ est réelle c'est à dire i est de type fini (comme partie de I) si et seulement si i est de la forme :

ou

On obtient facilement que dans le premier cas $2\bar{\alpha}_i \notin \bar{\Delta}$ ($i \in \bar{I}_1$) et $\bar{\alpha}_i^\vee = \sum_{j \in i} \alpha_j^\vee$ et dans le second cas $2\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}$ ($i \in \bar{I}_2$) et $(2\bar{\alpha}_i)^\vee = \sum_{j \in i} \alpha_j^\vee$.

b) Si on pose pour tout $i \in \bar{I}$ $\bar{\alpha}_i^\wedge = \sum_{j \in i} \alpha_j^\vee$ la notation est compatible avec celle de 3.4 et on a : $\bar{Q}^\vee = \bigoplus_{i \in \bar{I}} \mathbb{Z} \bar{\alpha}_i^\wedge = t_2 \cap Q^\vee$. Ainsi \bar{Q}^\vee contient toutes les coracines de racines réelles de $\bar{\Delta}$ et il est stable par le groupe de Weyl \bar{W} .

c) On définit la matrice $B = (b_{ij})$ ($i, j \in \bar{I}$) par $b_{ij} = \langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle = \langle \alpha_j, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle$.

Les calculs du a) prouvent que $\bar{\alpha}_i$ est réelle si et seulement si $b_{ii} = 2$ (et dans ce cas $2\bar{\alpha}_i \notin \bar{\Delta}$, $i \in \bar{I}_1$) ou $b_{ii} = 1$ (et dans ce cas $2\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}$, $i \in \bar{I}_2$) et que $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire si et seulement si $b_{ii} \leq 0$.

On en déduit aussitôt que B est une matrice de Kac-Moody relative au sens suivant :

d) Une matrice $B = (b_{ij})$ ($i, j \in J$) est dite de Kac-Moody relative (KMR) si :

- 1- Les coefficients de B sont entiers.
- 2- $b_{ii} \leq 2$.
- 3- $b_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$.
- 4- $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ji} = 0$.

Cela généralise donc la notion de matrice de Kac-Moody seulement en ce que $b_{ii} = 2$ est remplacé par $b_{ii} \leq 2$.

Si b_{ii} est strictement positif on pose $c_{ij} = (2/b_{ii})b_{ij}$, dans les autres cas on pose $c_{ij} = b_{ij}$.

e) On définit le graphe associé à une matrice de Kac-Moody relative :

à chaque $i \in J$ on associe un sommet orné d'une croix si $b_{ii} = 1$, d'un signe $-$ si $b_{ii} < 0$ et de 0 si $b_{ii} = 0$.

deux sommets distincts i et j sont liés si et seulement si $b_{ij} \neq 0$. Plus précisément, si b_{ii} et b_{jj} sont simultanément strictement positifs on pose $\lambda = c_{ij}c_{ji} \in \mathbb{N}$ et $\mu = \sup(c_{ij}, c_{ji}) \in \mathbb{N}$ et, si $\lambda \leq 4$ on joint les sommets i et j par μ traits avec une flèche pointant vers i si $|c_{ij}| > 1$. Si $\lambda \geq 5$ ou si l'un des deux coefficients b_{ii} ou b_{jj} est négatif on joint les sommets i et j par un trait gras orné des deux entiers $|c_{ij}|$ (près de i) et $|c_{ji}|$ (près de j).

3.7 Condition de chaîne imaginaire pour $\bar{\Delta}$: Soit $i \in I$.

Proposition : Si $\bar{\alpha}_i$ est une racine relative simple imaginaire dans $\bar{\Delta}_+$, et si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - \mathbb{N}\bar{\alpha}_i$, on a alors : $\bar{\alpha} + \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \subset \bar{\Delta}_+$ si les supports de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}_i$ sont liés.

$$(\bar{\alpha} + N\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta} = \{ \bar{\alpha} \} \quad \text{si non.}$$

Remarque : Il est clair que le support de $\bar{\alpha}$ est lié au support $\{i\}$ de $\bar{\alpha}_i$ (dans \bar{I}) si et seulement si on a : $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i \wedge \rangle < 0$.

Démonstration : Soit $\beta \in \Delta$, on sait que le support de β est connexe, on en déduit facilement la connexité du support de la racine $\bar{\beta} \in \bar{\Delta}$. Si les supports de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}_i$ ne sont pas liés on a donc $(\bar{\alpha} + N\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta} = \{ \bar{\alpha} \}$.

Supposons maintenant les supports de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}_i$ liés. Soit $\alpha \in \Delta$ dont la restriction à t_2 est $\bar{\alpha}$. Alors le support S_α de α est lié à une composante connexe de i' , composante connexe qui n'est pas de type fini puisque $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire. Or i' est réunion de composantes de même type, soit J l'une de celles liées au support de α . D'après [K;4.3] on a :

$$\text{Si } J \text{ est de type affine, } v \in \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j = Q(J) \quad , \quad A(J)v \geq 0 \Rightarrow A(J)v = 0 \quad ,$$

$$\text{Si } J \text{ est de type indéfini, } v \in \bigoplus_{j \in J} N\alpha_j = Q^+(J) \quad , \quad A(J)v \geq 0 \Rightarrow v = 0 \quad .$$

On considère la décomposition $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ de α dans $Q(S_{\alpha-J}) \oplus Q(J)$ et on applique le résultat précédent à $v = \alpha_2$. En étudiant les deux cas on montre facilement que :

$$\exists j \in J \text{ tel que } \langle \alpha, \alpha_j \vee \rangle < 0 \text{ , donc } \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_j \in \bar{\Delta} \quad [\text{K;cor.3.6}] \text{ .}$$

Par une récurrence immédiate, on a le résultat.

Théorème 3.8 : $\bar{\Delta}$ est l'unique sous-ensemble de $\bar{Q} = \bigoplus_{i \in \bar{I}} \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i$ vérifiant :

$$(SR1) \quad \bar{\Delta} \subset \bar{Q}_+ \cup \bar{Q}_- \text{ , } \bar{\Delta}_+ = -\bar{\Delta}_- = \bar{\Delta} \cap \bar{Q}_+ \text{ où on a posé } \bar{Q}_+ = -\bar{Q}_- = \bigoplus_{i \in \bar{I}} N\bar{\alpha}_i \text{ .}$$

$$(SR2) \quad \bar{\Pi} = \{ \bar{\alpha}_i / i \in \bar{I} \} \subset \bar{\Delta} \text{ et plus exactement :}$$

$$\text{si } b_{ii} = 1 \quad N\bar{\alpha}_i \cap \bar{\Delta}_+ = \{ \bar{\alpha}_i, 2\bar{\alpha}_i \} \text{ .}$$

$$\text{si } b_{ii} = 2 \quad N\bar{\alpha}_i \cap \bar{\Delta}_+ = \{ \bar{\alpha}_i \} \text{ .}$$

$$\text{si } b_{ii} \leq 0 \quad N\bar{\alpha}_i \cap \bar{\Delta}_+ = N^*\bar{\alpha}_i \text{ .}$$

$$(SR3) \quad \text{Pour } \bar{\alpha}_i \text{ réelle et pour } \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - N\bar{\alpha}_i \text{ on a :}$$

$$(\bar{\alpha} + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta}_+ = \{ \bar{\alpha} - p\bar{\alpha}_i, \dots, \bar{\alpha} + q\bar{\alpha}_i \} \text{ avec } p - q = \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i \vee \rangle \text{ .}$$

$$(SR4) \quad \text{Pour } \bar{\alpha}_i \text{ imaginaire et pour } \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - N\bar{\alpha}_i \text{ on a :}$$

$$(\bar{\alpha} + N\bar{\alpha}_i) \subset \bar{\Delta}_+ \Leftrightarrow \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i \wedge \rangle < 0 \text{ .}$$

$$(\bar{\alpha} + N\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta}_+ = \{ \bar{\alpha} \} \Leftrightarrow \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i \wedge \rangle = 0 \text{ .}$$

$$(SR5) \quad \text{Pour } \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - \bar{\Pi} \text{ il existe } i \in \bar{I} \text{ tel que } \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}_+ \text{ .}$$

Remarques : 1) $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle$ et $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle$ se calculent grâce à la matrice B .

2) Une étude abstraite des systèmes de racines infinis (avec essentiellement les cinq axiomes ci-dessus) est développée dans [Bp] ; elle inclut les systèmes ci-dessus et ceux de 3.10 mais les généralise au cas où les $\bar{\alpha}_i$ ne sont pas libres.

Démonstration : D'après les numéros précédents, ces 5 propriétés sont vérifiées par $\bar{\Delta}$. En effet pour (SR2) on sait que si $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire $\{ n \in \mathbb{N} / n\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta} \}$ n'est pas borné, on en déduit facilement le résultat par (SR5).

Montrons que ces propriétés caractérisent $\bar{\Delta}$. Soit \mathcal{F} l'ensemble des parties Ω de $\bar{\Delta}$ qui vérifient les propriétés (SR1),(SR2),(SR3) et (SR4) ; on note \mathcal{F}' le sous-ensemble de \mathcal{F} formé des parties qui vérifient de plus (SR5). \mathcal{F} et \mathcal{F}' ne sont pas vides, car ils contiennent $\bar{\Delta}$. Notons Δ^* l'intersection des Ω de \mathcal{F} . On vérifie facilement que $\Delta^* \in \mathcal{F}$ et il est clair que $\Delta^* \subset \Omega$ pour tout $\Omega \in \mathcal{F}'$; montrons qu'en réalité $\Delta^* = \Omega$ pour tout $\Omega \in \mathcal{F}'$, ce qui établira l'unicité de $\bar{\Delta}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\Omega \in \mathcal{F}'$ avec $\Omega \neq \Delta^*$. Il existe alors $\beta \in \Omega - \Delta^*$ de hauteur minimale. Mais Ω vérifie (SR5) et Δ^* comme Ω vérifie (SR2) , il existe donc $\bar{\alpha}_i$ non colinéaire à β telle que $\beta - \bar{\alpha}_i$ soit dans Δ^* . En considérant les chaînes $(\beta + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i) \cap \Delta^*$ et $(\beta + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i) \cap \Omega$, les axiomes (SR3) et (SR4) permettent de conclure que $\beta \in \Delta^*$; d'où la contradiction.

3.9 Matrice de Δ' : Pour $i \in I'$, on pose : $\tilde{\alpha}_i^\wedge = \sum_{\bar{w} \in \bar{W}(I_0/\Gamma^*)} \bar{w}\bar{\alpha}_i^\wedge \in \bar{Q}^\vee$,

où $\bar{W}(I_0/\Gamma^*)$ est le sous-groupe de \bar{W} engendré par les réflexions par rapport aux $\bar{\alpha}_j$ avec $j \in \bar{I}_0 = I_0/\Gamma^*$.

L'élément $\tilde{\alpha}_i^\wedge$ est invariant par $\bar{W}(I_0/\Gamma^*)$ donc se trouve dans $\mathfrak{t}_1 \cap \bar{Q}^\vee = \mathfrak{t} \cap Q^\vee$.

Soit alors $B' = (b_{ij}')_{ij \in I'}$ où $b_{ij}' = \langle \alpha_j', \alpha_i'^\wedge \rangle$ où $\alpha_i'^\wedge$ désigne l'élément $\tilde{\alpha}_i^\wedge$ si α_i' est imaginaire , la coracine (au sens de 3.4) de α_i' (resp. $2\alpha_i'$) si α_i' est réelle et $2\alpha_i' \notin \Delta'$ (resp. $2\alpha_i' \in \Delta'$).

Proposition : B' est une matrice de Kac-Moody relative . Soit $i \in I - I_0$, si α_i' est réelle , c'est à dire si $\Gamma^*i \cup I_0$ est de type fini, on a : $\tilde{\alpha}_i^\wedge \in \mathbb{Q}_+^* \alpha_i'^\wedge$.

Démonstration : 1) Supposons α_i' réelle, alors $b_{ii}' \in \{1,2\}$ et $\Gamma^*i \cup I_0$ est de type fini . D'après [K;4.3] étendu au cas décomposable de type fini, on a $\det({}^tA(\Gamma^*i \cup I_0)) \neq 0$ et si $v \in Q^\vee(\Gamma^*i \cup I_0)$ on a ${}^tA(\Gamma^*i \cup I_0)v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$.

Mais ${}^tA(\Gamma^*i \cup I_0)\tilde{\alpha}_i^\wedge$ est le vecteur colonne dont les composantes correspondant à I_0 sont nulles et celles correspondant à Γ^*i sont toutes égales à $\alpha_i(\tilde{\alpha}_i^\wedge)$. Par suite, comme les coordonnées (sur la base Π^\vee) de $\tilde{\alpha}_i^\wedge$ sont dans \mathbb{N} et non toutes nulles, $\alpha_i(\tilde{\alpha}_i^\wedge)$ est nécessairement strictement positif.

De même ${}^tA(\Gamma^*i \cup I_0)\alpha_i'^\vee$ est un vecteur colonne dont les composantes correspondant à I_0 sont nulles et celles correspondant à Γ^*i sont toutes égales à b_{ii}' (= 1 ou 2). Comme la matrice ${}^tA(\Gamma^*i \cup I_0)$ est inversible on en déduit que $\tilde{\alpha}_i^\wedge \in \mathbb{Q}_+^* \alpha_i'^\wedge$.

2) Si α_i' est imaginaire, $\Gamma^*i \cup I_0$ n'est pas de type fini, donc, par invariance par Γ^* , toutes les composantes connexes J de $\Gamma^*i \cup I_0$ rencontrant Γ^*i sont de même type (non fini). Le support de $\tilde{\alpha}_i^\wedge$ est inclus dans la réunion de ces composantes et, si J désigne l'une d'entre elles on a :

Si J est de type affine : $v \in Q(J)$, $A(J)v \geq 0 \Rightarrow A(J)v = 0$.

Si J est de type indéfini : $v \in Q_+(J)$, $A(J)v \geq 0 \Rightarrow v = 0$.

Il est clair que ces propriétés s'étendent au cas d'une réunion de composantes de même type, on peut donc remplacer J par la réunion $J(i)$ des composantes de $\Gamma^*i \cup I_0$ rencontrant Γ^*i .

Le même raisonnement qu'au 1) montre que :

dans le cas affine ${}^tA(J(i))(\tilde{\alpha}_i^\wedge) \geq 0$ (ou ≤ 0 selon le signe de $\alpha_i(\tilde{\alpha}_i^\wedge)$), ce qui implique ${}^tA(J(i))(\tilde{\alpha}_i^\wedge) = 0$, donc $b_{ii}' = 0$,

dans le cas indéfini, comme $\tilde{\alpha}_i^\wedge$ n'est pas nul mais a ses coordonnées sur la base Π^\vee entières et positives, on a nécessairement ${}^tA(I_0 \cup \Gamma^*i)(\tilde{\alpha}_i^\wedge) \leq 0$ et non nul, donc $b_{ii}' < 0$

3) Il est clair que si α_i' est imaginaire ($i \in I'_{im}$), les coefficients b_{ij}' sont entiers . Si α_i' est réelle ($i \in I'_{re}$) , un simple calcul permet de montrer que $\alpha_i'^\wedge \in \bar{Q} \cap \mathfrak{t}_1$ (résultat classique puisque $\Gamma^*i \cup I_0$ est de type fini) donc b_{ij}' est encore entier dans ce cas.

4) Si $i \neq j$ dans I' on a : $(\mathbb{Q}_+^*)b_{ij}' \ni \langle \alpha_j', \tilde{\alpha}_i'^\wedge \rangle = \sum_w \langle \bar{\alpha}_j, w\bar{\alpha}_i'^\wedge \rangle$ où la somme est étendue à tous les $w \in \bar{W}(\bar{I}_0)$. Mais chaque $\langle \bar{\alpha}_j, w\bar{\alpha}_i'^\wedge \rangle$ est négatif ou nul (donc $b_{ij}' \leq 0$) et sont tous nuls si $b_{ij}' = 0$.

En supposant cette dernière condition vérifiée et en utilisant le fait que dans $\bar{\Delta}$ (tout comme dans Δ), les supports d'une racine réelle et de sa coracine sont les mêmes, on a : $\langle w\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = 0$ pour tout $w \in \bar{W}(\bar{I}_0)$, d'où $\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = 0$ soit $b_{ji} = 0$. D'où la proposition.

Théorème 3.10 : Δ' est l'unique sous-ensemble de Q' associé à B' par les conditions (SR1) à (SR5) du théorème 3.8 (sous réserve de remplacer à chaque fois $\bar{\Delta}$ par Δ').

Démonstration : L'unicité se démontre comme en 3.8. Les relations (SR1), (SR3) et (SR5) ont déjà été vues en 3.1, 3.5 et 3.3.3. Comme en 3.8, on déduit (SR2) de (SR5) et du fait que $\{n \in \mathbb{N} / n\alpha_i' \in \Delta'\}$ n'est pas borné si α_i' est imaginaire.

Pour établir (SR4) on introduit la notion de support relatif d'une racine $\alpha' \in \Delta'_+$. Il s'agit de la composante connexe de $S_{\alpha'} \cup (I_0/\Gamma^*)$ contenant l'ensemble $S_{\alpha'}$ des $i \in I'$ tels que α' s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des α_i' , $i \in I'$. La démonstration de (SR4) se fait en 6 étapes plus ou moins claires.

1) Il existe $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ qui a pour support le support relatif de α' et telle que $\bar{\alpha}|_{\mathfrak{t}} = \alpha'$.

(c'est clair et cela prouve que le support relatif est bien connexe)

2) Les supports relatifs de α' et α_j' sont liés si et seulement si le support relatif de α' est lié à j (dans \bar{I}).

3) Il existe $\alpha \in \bar{\Delta}$ dont la restriction à \mathfrak{t} est α' et telle que $\forall i \in I_0 \langle \alpha, \bar{\alpha}_i \rangle \leq 0$.

(il suffit de considérer la racine de hauteur minimale dans $\bar{\Delta}$ de restriction α')

4) Si $\bar{\alpha}_j$ est réelle (dans $\bar{\Delta}$), si α_j' est imaginaire (dans Δ'), si j appartient au support relatif de α' et si α' n'est pas colinéaire à α_j' , alors : $\alpha' + \alpha_j' \in \Delta'$.

Soit $\alpha \in \bar{\Delta}$ comme dans l'étape 3, $\alpha|_{\mathfrak{t}} = \alpha'$.

Si $\langle \alpha, \bar{\alpha}_j \rangle < 0$ on a $\alpha + \bar{\alpha}_j \in \bar{\Delta}$ (d'après (SR3) dans $\bar{\Delta}$), d'où le résultat.

Supposons maintenant $\langle \alpha, \bar{\alpha}_j \rangle \geq 0$ et considérons l'élément w_0 de plus grande longueur de $\bar{W}(\bar{I}_0)$ (où $\bar{I}_0 = I_0/\Gamma^*$). Pour $i \in \bar{I}_0$ on a $\langle \alpha, \bar{\alpha}_i \rangle \leq 0$ donc $\langle w_0\alpha, \bar{\alpha}_i \rangle \geq 0$. Comme $w_0 \in \bar{W}(\bar{I}_0)$ on a $(w_0\alpha)' = \alpha'$.

Notons $w_0\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 \in \bar{Q}(J(j))$ et $\alpha_2 \in \bar{Q}(\bar{I}-J(j))$ où $J(j)$ désigne le support relatif de j . Comme $w_0\alpha$ est une racine positive de $\bar{\Delta}$ on a $\alpha_1 \in \bar{Q}^+(J(j))$ et

$\alpha_2 \in \bar{Q}^+(\bar{I}-J(j))$, comme $J(j)$ n'est pas de type fini on a : ${}^tB(J(j))\alpha_1 \geq 0 \Rightarrow {}^tB(J(j))\alpha_1 = 0$. Il y a donc deux cas :

Soit pour tout $i \in J(j)$ $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_i \rangle = 0$ auquel cas $J(j)$ est affine. Comme α' n'est pas proportionnelle à α_j' , on a $\alpha_2 \neq 0$ et donc il existe $i \in J(j)$ tel que $\langle \alpha_2, \bar{\alpha}_i \rangle < 0$. Ainsi $\langle w_0\alpha, \bar{\alpha}_i \rangle = \langle \alpha_1 + \alpha_2, \bar{\alpha}_i \rangle < 0$, donc $i \in J(j) - \bar{I}_0 = \{j\}$ et $\alpha' + \alpha_j' = (w_0\alpha)' + \alpha_j' \in \Delta'$ (d'après (SR3) dans $\bar{\Delta}$).

Soit il existe $k \in J(j)$ tel que $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_k \rangle < 0$. Or $\langle \alpha_2, \bar{\alpha}_i \rangle \leq 0 \quad \forall i \in J(j) - \{j\} \subset \bar{I}_0$ et $\langle \alpha_1 + \alpha_2, \bar{\alpha}_i \rangle \geq 0 \quad \forall i \in \bar{I}_0$ donc $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_i \rangle \geq 0 \quad \forall i \in J(j) - \{j\}$. Ainsi $k = j$ et $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_j \rangle < 0$ comme $\langle \alpha_2, \bar{\alpha}_j \rangle \leq 0$ on en déduit comme ci-dessus que $\alpha' + \alpha_j' \in \Delta'$.

5) Supposons toujours α' non colinéaire à α_j' ,

$\alpha' + \mathbb{N}\alpha_j' \subset \Delta'$ si et seulement si les supports relatifs de α' et α_j' sont liés.

$(\alpha' + \mathbb{N}\alpha_j') \cap \Delta' = \{\alpha'\}$ sinon.

La seconde assertion est claire car les supports relatifs des racines sont connexes. Si les supports relatifs de α' et α_j' sont liés on choisit $\bar{\alpha}$ comme à l'étape 1 et on a 3 cas : $\bar{\alpha}_j$ imaginaire ; $\bar{\alpha}_j$ réelle et j non dans le support relatif de α' ; $\bar{\alpha}_j$ réelle et j dans le support relatif de α' . La conclusion découle alors respectivement de (SR4) dans $\bar{\Delta}$, de (SR3) dans $\bar{\Delta}$ et de l'étape 4.

6) Pour établir (SR4) il reste à voir que, dans le cas α_j' imaginaire et non colinéaire à α' les supports relatifs de α' et α_j' sont liés si et seulement si $\langle \alpha', \alpha_j' \rangle < 0$. Mais il est évident que le support de α_j' dans \bar{Q}^\vee est exactement le support relatif de α_j' , d'où le résultat.

§ 4 FORMES REELLES PRESQUE-DEPLOYEES DES ALGEBRES DE KAC-MOODY SYMETRISABLES :

Dans ce paragraphe on a $K = \mathbb{R}$ et donc $\bar{K} = \mathbb{C}$ et on suppose que la matrice de Cartan généralisée $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ est indécomposable et symétrisable.

4.1 Généralités :

1) Soit \mathfrak{g}_0 une forme réelle de \mathfrak{g} , comme le groupe $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est d'ordre deux, l'élément non trivial de Γ agit sur $\mathfrak{g} (= \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C})$ comme la semi-involution σ' de \mathfrak{g} dont \mathfrak{g}_0 est l'ensemble des points fixes.

Inversement soit σ' une semi-involution de \mathfrak{g} , alors $\mathfrak{g}^{\sigma'} = \{ X \in \mathfrak{g} / \sigma'(X) = X \}$ est une forme réelle de \mathfrak{g} .

Ainsi les formes réelles de \mathfrak{g} correspondent bijectivement aux semi-involutions de \mathfrak{g} ; la forme réelle est presque-déployée si la semi-involution est de première espèce.

2) On note $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ la forme déployée de \mathfrak{g} sur \mathbb{R} , la semi-involution correspondante σ_n' est appelée semi-involution normale standard de \mathfrak{g} .

Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre de Cartan standard de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, pour $i \in I$ on définit $P_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tel que $(P_i + \mathfrak{t})_{i \in I}$ soit la base de $\mathfrak{h}/\mathfrak{t}$ duale de Π .

Posons $\omega' = \sigma_n' \omega = \omega \sigma_n'$, où ω est l'involution de Cartan de \mathfrak{g} ; ω' est appelée semi-involution de Cartan standard de \mathfrak{g} , son algèbre des points fixes est la forme compacte de \mathfrak{g} .

On appellera semi-involution de Cartan (en abrégé SIC) tout conjugué de ω' par un automorphisme de \mathfrak{g} .

3) Les semi-involutions σ_n' et ω' dépendent non seulement de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i \in I})$ mais aussi de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ c'est à dire d'un " \mathbb{R} -supplémentaire" de $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \bigoplus \mathbb{R} \alpha_i \vee$ dans $\{ h \in \mathfrak{h} / \alpha(h) \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \Delta \}$. Ce choix de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ n'est donc unique que modulo le centre. On va tourner cette difficulté en raisonnant un peu différemment:

Considérons le sous-groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ introduit en 1.7 et le sous-groupe $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}') = \{ 1, \sigma_n' \} \rtimes \text{Aut}(\mathfrak{g}')$ du groupe des automorphismes \mathbb{R} -linéaires de \mathfrak{g} . D'après [R2;3.6] toute semi-involution de \mathfrak{g} est conjuguée par $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{t})$ à une semi-involution contenue dans $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$; d'après [KW;4.39] toute involution de seconde espèce de \mathfrak{g} est conjuguée par $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{t})$ à une involution contenue dans $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$. Dans la suite de ce paragraphe on supposera donc que toutes les involutions ou semi-involutions qui interviendront seront dans $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ ou $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$.

Si l'on ne veut pas faire cette restriction, il faudra rajouter le groupe $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{t})$ dans les théorèmes de conjugaison qui vont suivre.

Avec ces conventions tout couple formé d'une semi-involution de Cartan et d'une sous-algèbre de Cartan qu'elle stabilise est conjugué par G au couple standard (ω', \mathfrak{h}) [R2].

4.2 Semi-involutions de première espèce :

Proposition 4.2.1 [R2] (on peut voir aussi [KP2]) :

1) Soit σ' une semi-involution de \mathfrak{g} :

Pour toute SAC \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , σ' -stable il existe une SIC ω' stabilisant \mathfrak{h} et commutant à σ' . Alors $\theta = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ est une involution de \mathfrak{g} qui stabilise \mathfrak{h} et commute à σ' .

L'involution θ ou la SIC ω' correspondant à ces conditions est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur commutant à σ' et stabilisant \mathfrak{h} .

2) Deux SIC qui commutent et stabilisent une même SAC sont égales.

Proposition 4.2.2 : Soit σ' une semi-involution de première espèce de \mathfrak{g} , alors :

1) σ' stabilise un triplet $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p}^+(X), \mathfrak{p}^-(X))$ formé d'une SAC \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et de deux sous-algèbres paraboliques opposées de type fini et contenant \mathfrak{h} .

2) Les couples $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p})$ formés d'une SAC \mathfrak{h} σ' -stable et d'une sous-algèbre parabolique positive (resp. négative) \mathfrak{p} σ' -stable minimale et contenant \mathfrak{h} sont conjugués par $G^{\sigma'}$.

N.B. Le groupe $G^{\sigma'}$ est noté $G_{\mathbb{R}}$ au paragraphe 2, mais ici comme on considère plusieurs semi-involutions, on évitera cette notation.

Démonstration : 1) résulte de 2.1 et 2.2 ci-dessus.

2) Soient $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{p}_i)_{i=1,2}$ deux tels couples et supposons par exemple les \mathfrak{p}_i positives.

En conjuguant par $G^{\sigma'}$ on peut supposer que $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}^+$ pour $i=1,2$ où $(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{p}^+_{\mathbb{R}})$ est une standardisation fixée de $\mathfrak{g}^{\sigma'}$. Alors \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 sont des SAC σ' -stables de $\mathfrak{z}(\mathfrak{t})$ et donc $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{l}$ sont des SAC σ' -stables de \mathfrak{l} . Or $\mathfrak{l}^{\sigma'}$ est une algèbre de Lie semi-simple compacte (2.3) ainsi il existe $l \in L^{\sigma'} \subset G^{\sigma'}$ qui conjugue $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{l}$ en $\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{l}$ et qui stabilise \mathfrak{t} et \mathfrak{p}^+ . Mais alors l conjugue \mathfrak{h}_1 en \mathfrak{h}_2 car pour $i=1,2$ \mathfrak{h}_i est le centralisateur dans \mathfrak{g} de $\mathfrak{t} + (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{l})$.

Proposition 4.2.3 : Soit σ' une semi-involution de première espèce, il existe alors une involution de seconde espèce θ vérifiant :

$\theta\sigma'$ est une SIC (en particulier θ commute à σ') et θ et σ' stabilisent une même SAC \mathfrak{h} contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale.

L'involution θ vérifiant ces conditions est unique à une conjugaison près par $\text{Int}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$.

Démonstration: Soit \mathfrak{h} une SAC σ' -stable et contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale. Deux choix pour \mathfrak{h} sont donc conjugués par $G^{\sigma'}$ (4.2.2). D'après 4.2.1 il existe une SIC ω' qui stabilise \mathfrak{h} et commute à σ' , par suite $\theta = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ est une involution de seconde espèce qui commute à σ' et stabilise \mathfrak{h} . Deux choix pour θ vérifiant ces conditions, correspondent à deux choix pour ω' qui stabilisent \mathfrak{h} et commutent à σ' , ils sont donc conjugués par un automorphisme intérieur qui commute à σ' et stabilise \mathfrak{h} (4.2.1).

4.3 Involutions de seconde espèce :

4.3.1 **Définitions :** Rappelons quelques notions introduites par Kac et Wang [KW].

Soit θ une involution de seconde espèce.

1) Une sous-algèbre \mathfrak{t} de \mathfrak{g} est dite torique θ -déployée si elle est $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable et si $\theta|_{\mathfrak{t}} = -\text{Id}_{\mathfrak{t}}$.

2) Une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} de \mathfrak{g} est dite θ -déployée si $\theta(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p} (ou plutôt une sous-algèbre \mathfrak{m} supplémentaire de $\mathfrak{u}(\mathfrak{p})$). Une telle sous-algèbre existe.

3) Soient \mathfrak{h} une SAC de \mathfrak{g} stable par θ et \mathfrak{b} une sous-algèbre de Borel contenant \mathfrak{h} . Posons $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\Delta^+ = \Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$, Π la base de Δ contenue dans Δ^+ , $\Psi = \theta(\Delta^+) \cap \Delta^+$ et $X = \Pi \cap \Psi$.

La paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est dite θ -déployée si $\Psi = \Delta(X)^+$ et θ est l'identité sur $\mathfrak{g}_{\alpha} \forall \alpha \in \Psi$.

Une telle paire existe et est unique à conjugaison près par G^{θ} .

Lemme 4.3.2 : Soient θ une involution de seconde espèce, \mathfrak{h} une SAC θ -stable de \mathfrak{g} et \mathfrak{b} une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h} .

a) Si la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est θ -déployée, alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}(X) = \mathfrak{b} + (\bigoplus_{\alpha \in \Delta(X)} \mathfrak{g}_{\alpha})$ est θ -déployée minimale et de type fini. De plus l'algèbre $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}^{-\theta} =$

$\{h \in \mathfrak{h} / \theta(h) = -h\}$ est une sous-algèbre torique θ -déployée maximale de \mathfrak{g} et le centralisateur $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ est égal à $\mathfrak{m}(X)$.

b) Si \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique θ -déployée minimale et contenant \mathfrak{b} , alors la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est θ -déployée et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(X)$.

Démonstration : Le a) est [KW;5.16]. Si \mathfrak{p} est θ -déployée et contient \mathfrak{b} , il existe une partie Y de Π telle que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(Y)$ et $\theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^-(Y)$. Si \mathfrak{p} n'est pas de type fini on peut appliquer le a) à une paire θ -déployée dans l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{m}^s(Y) \subset \mathfrak{p} \cap \theta(\mathfrak{p})$; on en déduit une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} de type fini, θ -déployée et contenue dans \mathfrak{p} . Donc si \mathfrak{p} est minimale elle est de type fini et d'après [KW;4.34] la sous-algèbre $\mathfrak{m}^s(Y)$ ne contient pas de sous-algèbre torique θ -déployée non triviale, ce qui équivaut à dire, d'après [V], que la restriction de θ à $\mathfrak{m}^s(Y)$ est l'identité. On en déduit aussitôt que $\Psi = \Delta(Y)^+$ et donc $Y = X$, d'où le résultat.

Proposition 4.3.3 : Soit θ une involution de seconde espèce. Les couples $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p})$ formés d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} , θ -stable et une sous-algèbre parabolique positive (resp. négative) \mathfrak{p} , θ -déployée minimale et contenant \mathfrak{h} sont conjugués par G^θ .

Démonstration : Soient $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{p}_1)$ et $(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{p}_2)$ deux tels couples et pour $i=1, 2$ soit \mathfrak{b}_i une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{p}_i contenant \mathfrak{h}_i . D'après 4.3.2 les paires $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{b}_i)$ sont θ -déployées et donc conjuguées par G^θ d'après [KW;5.32]. Par suite les couples $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}(X_i))$ sont conjugués par G^θ .

Proposition 4.3.4 : Soit θ une involution de seconde espèce de \mathfrak{g} , on a alors :

i) A une conjugaison par $\text{Int}(\mathfrak{g})$ près, l'involution θ s'écrit :

$$\theta = \tau \omega \text{Ad}(n_X) \text{Ad}(s) \quad \text{avec,}$$

$X \subset \Pi$, X de type fini et choisie de façon que $\mathfrak{p}^+(X)$ soit θ -déployée minimale

τ un automorphisme de diagramme qui stabilise X et vérifie $\tau^2 = 1$

ω l'involution de Cartan de \mathfrak{g}

$n_X \in N^\tau \cap N^\omega \cap G(X)$ et $\text{Ad}(n_X)$ est l'élément de plus grande longueur de $W(X)$

$s \in \tilde{H}$ et $\text{Ad}(s)$ commute à θ

ii) Il existe une semi-involution de première espèce σ' telle que $\theta\sigma' = \sigma'\theta$ est une SIC et θ et σ' stabilisent une même SAC \mathfrak{h} contenue dans une sous-algèbre parabolique θ -déployée minimale.

De plus la semi-involution σ' vérifiant ces conditions est unique à une conjugaison près par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} commutant à θ .

Démonstration : Le i) est [KW;4.39], montrons maintenant ii).

a) Existence : On peut supposer $\theta = \tau\omega\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ avec les conditions indiquées en i). Soit ω' la semi-involution de Cartan standard, elle commute à τ et ω . On verra dans 4.10.2 (qui n'utilise ni 4.3.4 ni 4.4) que l'on peut choisir n_X de façon que $\text{Ad}(n_X)$ commute à ω' . On a alors $\text{Ad}(n_X)(\Delta^+ - \Delta(X)) = \Delta^+ - \Delta(X)$ et $\text{Ad}(n_X^2)(\Delta^+) = \Delta^+$, donc $n_X^2 \in H^\omega \cap H^\tau \cap G(X)$ et on en déduit alors que $n_X^4 = 1$.

La condition $\theta^2 = 1$ s'écrit $\text{Ad}(n_X^2).\text{Ad}(s^2) = 1$ ce qui donne $\text{Ad}(s^4) = \text{Ad}(n_X^4)^{-1} = 1$. Il existe donc une famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels telle que, avec les P_j de 4.1.2, $\text{Ad}(s) = \exp(\text{ad}\pi(\sum_{j \in I} \varepsilon_j P_j))$ et on voit alors que ω' commute à $\text{Ad}(s)$ et donc à θ . Par conséquent la semi-involution $\sigma' = \theta\omega' = \omega'\theta$ répond à la question.

b) Unicité : Deux choix possibles pour \mathfrak{h} sont conjugués par G^θ (4.3.3). Deux choix pour σ' vérifiant les conditions ci-dessus pour une même SAC correspondent à deux SIC qui commutent à θ et stabilisent \mathfrak{h} , elles sont donc conjuguées par un automorphisme intérieur commutant à θ et stabilisant \mathfrak{h} (4.2.1), d'où le résultat.

Théorème 4.4 : On considère :

1) Les semi-involutions de première espèce σ' de \mathfrak{g} .

2) Les involutions de seconde espèce θ de \mathfrak{g} .

3) La relation : $\sigma' = \theta$ si et seulement si

a) $\omega' = \theta\sigma' = \sigma'\theta$ est une SIC.

b) θ et σ' stabilisent une même SAC \mathfrak{h} .

c) \mathfrak{h} est contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale.

Alors cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison sous $\text{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$) des semi-involutions de première espèce et celles des involutions de seconde espèce.

Remarques : 1) Si l'hypothèse de 4.1.3 est abandonnée, les classes de conjugaison à considérer sont sous le groupe $\text{Int}(\mathfrak{g}) \rtimes \text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g})$).

2) Soient σ' , θ et \mathfrak{h} vérifiant les conditions a) et b) ci-dessus et \mathfrak{p} une sous-algèbre parabolique positive et contenant \mathfrak{h} . Il est clair que \mathfrak{p} est σ' -stable (minimale) si et seulement si elle est θ -déployée (minimale). En effet si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(X)$ on a :

$$\sigma'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \theta(\mathfrak{p}) = \omega'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^-(X) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}(X) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \text{ est } \theta\text{-déployée} .$$

Dans ce cas $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}^{-\theta}$ est une sous-algèbre torique θ -déployée maximale de \mathfrak{g} et $\mathfrak{t}^{\sigma'} = \{h \in \mathfrak{h} / \theta(h) = -h = -\sigma'(h)\} = \{h \in \mathfrak{h} / \sigma'(h) = h = \sigma_n'(h)\} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ainsi $\mathfrak{t}^{\sigma'}$ est une sous-algèbre torique déployée de \mathfrak{h} (contenue dans une SATDM de $\mathfrak{g}^{\sigma'}$, cf. la remarque 2.2). Il est facile de voir que $\mathfrak{t}^{\sigma'} + \mathfrak{t}^{\sigma'}$ est cette SATDM : la définition de déployée donnée en 1.6 ne fait intervenir que la représentation adjointe et donc le centre est toujours contenu dans une SATDM.

Démonstration : Notons par CSI1 (resp. CI2) l'ensemble des classes de conjugaison sous $\text{Int}(\mathfrak{g})$ ou $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ des semi-involutions de première espèce (resp. des involutions de seconde espèce) de \mathfrak{g} .

Soient σ' une semi-involution de première espèce, $\text{cl}(\sigma')$ sa classe dans CSI1 et \mathfrak{h} une SAC σ' -stable et contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale. Soit θ une involution de seconde espèce qui stabilise \mathfrak{h} , commute à σ' et telle que $\theta\sigma'$ soit une SIC. D'après 4.2.3 θ existe et sa classe $\text{cl}(\theta)$ dans CI2 est bien déterminée par σ' . Il est clair que $\sigma' \approx \theta$ et l'on obtient donc une application $\phi : \text{CSI1} \rightarrow \text{CI2}$ par la formule $\phi(\text{cl}(\sigma')) = \text{cl}(\theta)$.

Montrons maintenant que ϕ est bijective. Soient θ une involution de seconde espèce et \mathfrak{h} une SAC θ -stable contenue dans une sous-algèbre parabolique positive θ -déployée minimale. Soit σ' une semi-involution de première espèce qui stabilise \mathfrak{h} , commute à θ et telle que $\theta\sigma'$ soit une SIC. D'après 4.3.4ii) σ' existe et sa classe $\text{cl}(\sigma')$ dans CSI1 est bien déterminée par $\text{cl}(\theta)$. On a alors d'après la remarque 2 $\sigma' \approx \theta$ et $\phi(\text{cl}(\sigma')) = \text{cl}(\theta)$; par suite ϕ est bijective.

4.5 Le problème de classification :

1) A une conjugaison par un automorphisme de \mathfrak{g} près, une forme réelle presque-déployée \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} correspond à une involution de seconde espèce θ qui s'écrit comme dans 4.3.4i) sous la forme $\theta = \tau\omega\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$.

D'après 4.3.4ii) on peut supposer que la semi-involution définissant \mathfrak{g}_0 est $\sigma' = \omega'\theta = \tau\sigma_n'\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$. La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^+(X)$ est θ -déployée minimale donc σ' -stable minimale. L'action de σ' sur $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est donnée par $\tau w_0(X)$ où $w_0(X)$ est l'élément de plus grande longueur de $W(X)$.

Par conséquent l'indice de \mathfrak{g}_0 (cf. 2.5) est donné par la partie X de I qui est de type fini et par l'automorphisme de diagramme τ qui stabilise X et qui détermine l'action $*$ de $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. En particulier $\tau|_X$ doit être l'automorphisme d'opposition correspondant à $-w_0(X)$.

2) On considère donc des couples (τ, X) formés d'un automorphisme de diagramme τ et d'une partie de type fini X de I vérifiant la condition :

(A1) τ est une involution qui stabilise X et y induit l'automorphisme d'opposition $-w_0(X)$.

On sait que toute algèbre semi-simple complexe a une unique forme réelle compacte (i.e. anisotrope), d'après 2.8 pour classifier les formes réelles presque-déployées, il suffit de déterminer les diagrammes admissibles c'est à dire les couples (τ, X) vérifiant (A1) et tels qu'il existe un choix de n_X et de $s \in \tilde{H}$ commutant à θ tel que $\theta = \tau\omega\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ soit une involution.

On peut même fixer un choix pour n_X , car deux choix différents par un élément de $H^\omega \cap H^\tau \cap G(X)$ qui est donc un élément de \tilde{H} commutant à θ (puisque $\text{Ad}(n_X) = \tau\omega$ sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}(X)$).

Pour déterminer ces diagrammes admissibles, on va d'abord rassembler quelques résultats sur les algèbres de Lie semi-simples complexes.

4.6. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe de rang l .

1) Soient \mathfrak{t} une SAC de \mathfrak{g} , $X = \{ \alpha_i, i=1, \dots, l \}$ une base de $\Delta(\mathfrak{g}) = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, et $\{ e_i, f_i, i=1, \dots, l \}$ les générateurs de Chevalley de \mathfrak{g} correspondant à la base X .

Pour $i=1, \dots, l$, soit ρ_i le monomorphisme d'algèbre Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans \mathfrak{g} défini par : $\rho_i(x) = e_i$, $\rho_i(y) = f_i$ et donc $\rho_i(H) = \alpha_i^\vee$ où $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soient S le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , T un tore maximal de S d'algèbre de Lie \mathfrak{t} , N le normalisateur de T dans S et $W_0 = N/T$ le groupe de Weyl correspondant. Pour $i=1, \dots, l$, ρ_i s'intègre en un monomorphisme de groupes de Lie de $SL_2(\mathbb{C})$ dans S qu'on note encore ρ_i .

Pour $s \in \mathbb{C}^*$ et $i=1, \dots, l$ on pose :

$$m(s) = \exp(sx)\exp(-s^{-1}y)\exp(sx) = \exp(-s^{-1}y)\exp(sx)\exp(-s^{-1}y) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}),$$

$m_i(s) = \rho_i(m(s))$ et $m_i = m_i(1)$. Les applications m et donc m_i sont injectives sur \mathbb{C}^* .

2) Soit I le groupe libre engendré par $\{1, 2, \dots, l\}$. Le groupe de Weyl est un quotient de I ; on note $r : I \rightarrow W_0$ la projection canonique, pour $i \in \{1, \dots, l\}$ on a $r(i) = r_i = \text{Ad}(m_i)$ (considéré comme élément de W_0).

3) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$ la matrice de Coxeter associée à W_0 . Pour $i, j \in \{1, \dots, l\}$ on a d'après [T3; §2.4 prop 3] : $m_i m_j m_i \dots = m_j m_i m_j \dots$ (m_{ij} facteurs de chaque côté).

Proposition 4.7 : Soient X_0 un groupe et $a : I \rightarrow X_0$, $b : X_0 \rightarrow W_0$ deux homomorphismes de groupes tels que $b \circ a = r$ (cf. 4.6.2).

Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1) Pour $i, j \in \{1, \dots, l\}$ on a $a(i)a(j)a(i)\dots = a(j)a(i)a(j)\dots$ (m_{ij} facteurs de chaque côté).

2) Soient i et j deux mots de I qui sont minimaux (i.e. $r(i)$ et $r(j)$ sont de longueurs minimales dans W_0) et vérifient $r(i) = r(j)$ on a alors $a(i) = a(j)$.

3) Soient $i \in I$ un mot minimal et $j, k \in \{1, \dots, l\}$ tels que $r(i)r_j r(i)^{-1} = r_k$, on a alors $a(i)a(j)a(i)^{-1} = a(k)$.

Démonstration : C'est la proposition 2.1 de [T2].

Conséquence : Pour $X_0 = N$ et a défini par $a(i) = m_i$ pour $i=1, \dots, l$, on sait d'après 4.6.3, qu'avec $b : N \rightarrow W_0=N/T$ la projection canonique, les hypothèses et la propriété 1 de la proposition sont vérifiées, ainsi les deux autres propriétés le sont aussi.

4.8 Définition : On conserve les notations de 4.6.

Soient $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_n$ un mot minimal de \mathbf{I} , $w = r(\mathbf{i})$ l'élément de W_0 correspondant et $m = m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_n} \in N$. D'après 4.7.2 l'élément m ainsi défini ne dépend pas du choix du mot minimal \mathbf{i} mais seulement de w . Ceci permet de définir un automorphisme $w^* = \text{Ad}(m)$ de \mathfrak{g} qui ne dépend que de w (et des choix de $\mathfrak{t}, X, e_i, f_i$).

Lemme 4.9 : Soient w_0 l'élément de plus grande longueur dans W_0 , τ l'automorphisme d'opposition de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, e_i, f_i)$ (c'est à dire l'automorphisme de diagramme tel que $w_0 = -\tau$ sur \mathfrak{t}) et ω l'involution de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, e_i, f_i)$, on a alors $w_0^* = \tau\omega$

Démonstration : Comme $w_0^* = \tau\omega$ sur \mathfrak{t} , pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$ il existe $\varepsilon_i \in \mathbb{C}^*$ tel que $w_0^*(e_i) = -(\varepsilon_{\tau(i)})^{-1} f_{\tau(i)}$; on a alors $w_0^*(f_i) = -\varepsilon_{\tau(i)} e_{\tau(i)}$ puisque w_0^* transforme $\alpha_i^\vee = [e_i, f_i]$ en $\alpha_{\tau(i)}^\vee$. On va montrer que $\varepsilon_i = 1$ pour tout i , ce qui prouvera le lemme.

Soient \mathbf{j} un mot minimal de \mathbf{I} tel que $r(\mathbf{j}) = w_0$, et m l'élément de N correspondant à \mathbf{j} (cf. 4.8). Pour tout i on a $r(\mathbf{j})r(\mathbf{j})^{-1} = w_0 r_i w_0^{-1} = r_{\tau(i)}$, ce qui équivaut d'après 4.7.3 à $m m_i m^{-1} = m_{\tau(i)}$. D'autre part (puisque $\text{Ad}(m) = w_0^*$) on a :

$$\begin{aligned} m m_i m^{-1} &= m \exp(e_i) \exp(-f_i) \exp(e_i) m^{-1} = \exp(\text{Ad}(m)e_i) \exp(-\text{Ad}(m)f_i) \exp(\text{Ad}(m)e_i) \\ &= \exp(-(\varepsilon_{\tau(i)})^{-1} f_{\tau(i)}) \exp(\varepsilon_{\tau(i)} e_{\tau(i)}) \exp(-(\varepsilon_{\tau(i)})^{-1} f_{\tau(i)}) = m_{\tau(i)}(\varepsilon_{\tau(i)}) \end{aligned}$$

Ainsi on a $m_{\tau(i)}(\varepsilon_{\tau(i)}) = m_{\tau(i)} = m_{\tau(i)}(1)$ et donc $\varepsilon_{\tau(i)} = 1$ par injectivité de $m_{\tau(i)}$.

4.10 Classes de conjugaison des involutions de seconde espèce

a) Comme on l'a vu en 4.5, le problème consiste à voir si pour un couple (τ, X) formé d'un automorphisme de diagramme et d'une partie X de \mathbf{I} de type fini vérifiant la condition (A1) de 4.5 et pour un choix de n_X , il existe un élément s de \tilde{H} qui commute à $\tau\omega\text{Ad}(n_X)$ et tel que :

(A2) l'automorphisme $\theta = \tau\omega\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ est une involution.

b) Définition : Un couple (τ, X) vérifiant les propriétés (A1) et (A2) est dit admissible.

Cela signifie que l'indice associé est admissible.

Proposition 4.10.1 : Soient $w = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}$ une décomposition réduite de $w \in W$, on a alors : $\text{Ad}(m_{i_n} m_{i_2} \dots m_{i_1})(m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_n}) = \text{expad}(i\pi H_w)$ dans $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

avec $H_w = \sum_{\alpha \in \Phi(w)} \alpha^\vee$ si on pose $\Phi(w) = \{ \alpha \in \Delta^+ / w(\alpha) \in \Delta^- \}$.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur la longueur n de w . Pour $n = 1$ on a bien la relation $\text{Ad}(m_i)^2 = \text{expad}(i\pi\alpha_i^\vee)$.

Posons $w' = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_{n-1}}$, on a $l(w') < l(w)$ et l'hypothèse de récurrence appliquée à w' donne $\text{Ad}(m_{i_{n-1}} m_{i_2} \dots m_{i_1})(m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_{n-1}}) = \text{expad}(i\pi H_{w'})$, on en déduit donc que : $\text{Ad}(m_{i_n} m_{i_2} \dots m_{i_1})(m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_n}) = m_{i_n} \text{expad}(i\pi H_{w'})(m_{i_n})^{-1} (m_{i_n})^2 = \text{expad}(i\pi(\alpha_{i_n}^\vee + r_{i_n}(H_{w'})))$. Il reste à montrer que $\Phi(w) = \{ \alpha_{i_n} \} \cup r_{i_n}(\Phi(w'))$. Comme w est de longueur n on a $w(\alpha_{i_n}) \in \Delta^-$ [K;3.11], donc $\alpha_{i_n} \in \Phi(w)$. Soit $\alpha \in \Phi(w) - \{ \alpha_{i_n} \}$, alors $r_{i_n}(\alpha) \in \Delta^+ - \{ \alpha_{i_n} \}$, comme $w(\alpha) \in \Delta^-$, on a $w'(r_{i_n}(\alpha)) \in \Delta^-$ et donc $r_{i_n}(\alpha) \in \Phi(w')$. Ainsi $\Phi(w) - \{ \alpha_{i_n} \}$ est inclus dans $r_{i_n}(\Phi(w'))$.

Inversement soit $\alpha \in \Phi(w')$, comme $l(w'r_{i_n}) > l(w')$ on a $\alpha \neq \alpha_{i_n}$ [K;3.11] et par suite $r_{i_n}(\alpha) \in \Delta^+ - \{ \alpha_{i_n} \}$. Comme $w'r_{i_n}(\alpha) = w'(\alpha) \in \Delta^-$, on a $r_{i_n}(\alpha) \in \Phi(w)$ et ainsi $r_{i_n}(\Phi(w'))$ est inclus dans $\Phi(w)$; d'où le résultat.

4.10.2 Choix de n_X : Soit $w(X)$ l'élément de plus grande longueur du groupe $W(X)$. On considère l'élément n_X de $N \cap G(X)$ défini à partir de $w(X)$ comme en 4.8 ; il vérifie $\text{Ad}(n_X) = w(X)$ sur \mathfrak{h} . De plus d'après 4.7.2 l'élément n_X ainsi choisi est fixé par τ , ω et ω' puisque d'après 4.6.1 ω et ω' fixent m_i et $\tau(m_i) = m_{\tau(i)}$.

Corollaire 4.10.3 : On a : $\text{Ad}(n_X^2) = \text{expad}(i\pi 2\rho_X^\vee)$ où $2\rho_X^\vee$ désigne la somme des coracines positives du système $\Delta(X)$.

Démonstration : Soit $w(X) = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}$ une décomposition réduite de $w(X)$ dans $W(X)$. Comme $w(X)^2 = 1$, on a $w(X) = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} = r_{i_n} r_{i_{n-1}} \dots r_{i_1}$. Le résultat découle alors de 4.7.2, 4.10.1 et du fait que $(\text{Ad}(n_X^{-1})\Delta^-) \cap \Delta^+ = \Delta(X)^+$.

Corollaire 4.10.4 : Soient $I_1 = \{ i \in I-X / \tau(i) \neq i \}$ et Ω un système de représentants des orbites de $\{1, \tau\}$ dans I_1 . Le couple (τ, X) vérifiant (A1) est admissible si et seulement si pour tout j de Ω il existe un nombre rationnel ε_j tel que :

$$(A3) \quad 2\rho_X^\vee + \sum_{j \in \Omega} 2\varepsilon_j (P_j - P_{\tau(j)}) \in \bigoplus_{i \in I} 2\mathbb{Z}P_i \quad .$$

Démonstration : Par définition (τ, X) est admissible si et seulement si il existe $s \in \tilde{H}$ tel que $\theta = \tau \omega \text{Ad}(n_X) \text{Ad}(s)$ soit une involution et $\text{Ad}(s)$ commute à $\tau \omega \text{Ad}(n_X)$.

Si en est ainsi $\mathfrak{p}^+(X)$ est θ -déployée minimale (4.5) et on a, d'après 4.3.2b, que la restriction de θ à $\mathfrak{m}^s(X)$ est l'identité et donc celle de $\text{Ad}(s)$ l'est aussi (4.9). Ainsi on peut écrire $\text{Ad}(s) = \exp(\text{ad}(i\pi \sum_{j \in I-X} \varepsilon_j P_j))$ avec des ε_j dans \mathbb{C} .

Si s est ainsi choisi, $\text{Ad}(s)$ commute à $\text{Ad}(n_X)$ et il commute donc à θ si et seulement si il commute à $\tau \omega$, ce qui se traduit par $\varepsilon_{\tau(j)} \equiv -\varepsilon_j \pmod{2\mathbb{Z}}$; en particulier pour $\tau(j) = j$ on a $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$. Sous ces conditions on a $\theta^2 = \text{Ad}(n_X^2) \text{Ad}(s^2)$. Donc si $\theta^2 = 1$ on a de plus $2\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$ pour $\tau(j) \neq j$ et la condition (A3) est vérifiée. La réciproque est claire.

4.10.5 Conclusion : La formule (A3) ci-dessus et les tables bien connues donnant $2\rho_X^\vee$ pour chaque système de racine fini (cf. e.g. [BBK]) permettent de décider rapidement quels sont les couples admissibles correspondant à une algèbre de Kac-Moody symétrisable donnée et donc de déterminer à isomorphisme près toutes les formes réelles presque-déployées de celle-ci. Le cas des algèbres affines sera traité in extenso au paragraphe 6.

§ 5 FORMES PRESQUE-DEPLOYEES DES ALGEBRES DE KAC-MOODY AFFINES :

On considère une forme presque-déployée \mathfrak{g}_K de l'algèbre de Lie affine \mathfrak{g} et des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

Si Π est la base correspondante du système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on note $\Pi_0 = \{ \alpha \in \Pi / \alpha(\mathfrak{t}_K) = \{0\} \} \subsetneq \Pi$ et W_0 le sous-groupe de $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ engendré par les r_α pour $\alpha \in \Pi_0$ (cf. 2.2, 2.3 et 2.7).

D'après 2.4 $\Gamma = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit sur Δ et pour $\gamma \in \Gamma$ il existe $w_\gamma \in W_0$ tel que $w_\gamma \gamma(\Pi) = \Pi$; on note alors par $*$ l'action de Γ sur Π ou Δ définie par $\gamma^* \alpha = w_\gamma \gamma(\alpha)$.

5.1 Construction des algèbres affines sur \bar{K} .

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple sur \bar{K} , θ un automorphisme d'ordre fini divisant $m \geq 1$ et ε_m une racine primitive m ième de l'unité dans \bar{K} . Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note \mathfrak{g}_j l'espace propre de θ dans \mathfrak{g} correspondant à la valeur propre $(\varepsilon_m)^j$.

On note : $I'' = I''(\mathfrak{g}, \theta, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ (sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \otimes \bar{K}[t, t^{-1}]$)

et $I = I(\mathfrak{g}, \theta, m) = I'' \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}D$ où c et D sont deux symboles.

Alors I est une algèbre de Lie pour le crochet défini par :

$$[t^j X + \lambda c + \mu D, t^k Y + \lambda' c + \mu' D] = t^{j+k} [X, Y] + \mu k t^k Y - \mu' j t^j X + j \delta_{j, -k} (X|Y)c$$

où $(|)$ désigne une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante (par exemple la forme de Killing).

Ainsi $\mathfrak{z} = \bar{K}c$ est le centre de I , $I' = I'' \oplus \bar{K}c$ est l'algèbre dérivée de I et I'/\mathfrak{z} est isomorphe à I'' .

Si on remplace m par un multiple $m'm$ dans la construction précédente on obtient un isomorphisme ϕ de $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ sur $I(\mathfrak{g}, \theta, m'm)$ en posant $\phi(t^j X) = t^{j m'} X$, $\phi(D) = D/m'$ et $\phi(c) = m'c$.

On sait [K] que toute algèbre de Kac-Moody affine peut se construire de cette façon, on peut même choisir pour θ un automorphisme de diagramme ξ de \mathfrak{g} d'ordre $k = 1, 2$ ou 3 .

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}^θ , on sait que le centralisateur \mathfrak{h} de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On a donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\theta = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}D$ est une sous-algèbre de Cartan de I . On note alors $\Delta = \Delta(I, \mathfrak{h})$ le système de racines de I par rapport à \mathfrak{h} . On note aussi $\hat{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h} et $\hat{\Pi} = \{ \hat{\alpha}_i / i \in \hat{I} \}$ sa base déterminée par un élément régulier de \mathfrak{h} ; $\bar{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{ \bar{\alpha} = \hat{\alpha}_i \mathfrak{h} / \hat{\alpha} \in \hat{\Delta} \}$ est le système de racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h} et $\bar{\Pi} = \{ \bar{\alpha} / \hat{\alpha} \in \hat{\Pi} \}$ sa base. On a donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}})$.

θ stabilise $\hat{\Delta}$ et $\hat{\Pi}$ donc agit sur \hat{I} ; on note \bar{I} un système de représentants des orbites de θ dans \hat{I} . Alors $\bar{\Pi} = \{ \bar{\alpha}_i / i \in \bar{I} \}$ et on note $(\bar{P}_i)_{i \in \bar{I}}$ la base duale de $\bar{\Pi}$ dans \mathfrak{h} .

5.2 Changement de réalisation d'une algèbre.

Pour $i \in \bar{I}$, donnons nous un entier $s_i \in \mathbb{Z}$. On note $H = \sum_{i \in \bar{I}} s_i \bar{P}_i$. Si de plus $p \geq 1$ est un entier et ε_{mp} une racine p ième de ε_m , on construit un automorphisme σ de \mathfrak{g} par les formules :

σ est l'identité sur \mathfrak{h}

pour $\bar{\alpha} = \sum_{i \in \Gamma} m_i \bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta} \cup \{0\}$, σ est la multiplication par $(\epsilon_{mp})^N$ sur $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ où $N = \sum_{i \in \Gamma} m_i s_i$.

Proposition : 1) σ commute à θ et σ comme $\theta\sigma$ sont des automorphismes de \mathfrak{g} d'ordres divisant mp .

2) Considérons l'application linéaire ϕ de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}, \theta, m)$ dans $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}, \theta\sigma, mp)$ définie par :

$$\phi(D) = (D-H)/p \quad \phi(c) = pc$$

$$\phi(t^j X) = t^{p^j + N} X + \delta_{j,0}(H^j X)c$$

$$\text{si } X \in \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \text{ où } \bar{\alpha} = \sum_{i \in \Gamma} m_i \bar{\alpha}_i \text{ et } N = \sum_{i \in \Gamma} m_i s_i,$$

alors ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Remarque : ϕ échange les sous-algèbres de Cartan de ces deux algèbres qui sont attachées comme ci-dessus à la même sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g}^θ .

Démonstration : La première assertion est claire, la seconde est une réécriture de [R3;1.2] dans le cas $\bar{K} \neq \mathbb{C}$.

5.3 Les racines de \mathfrak{g} :

On considère la réalisation de \mathfrak{g} sous la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{I}(\mathfrak{g}, \xi, k)$ où ξ est un automorphisme de diagramme d'ordre k de \mathfrak{g} et on note alors d l'élément noté D en 5.1.

On note $\bar{I} = \{1, \dots, l\}$, $\bar{J} = \{1, \dots, n\}$. On sait alors (cf. [K] ou [R1]) qu'une base de Δ est $\Pi = \{ \alpha_i / i \in I \}$ avec $I = \{0, 1, \dots, l\}$. On emploiera ici comme dans [R1] la convention de numérotation suivante : $\alpha_i(d) = \delta_{0,i}$; elle diffère de celle de [K] uniquement dans le cas $A_{2l}^{(2)}$.

Plus précisément pour $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$, on note encore $\bar{\alpha}$ le prolongement de $\bar{\alpha}$ en une forme linéaire sur \mathfrak{h} nulle sur c et d et δ désigne la forme linéaire sur \mathfrak{h} nulle sur $\bar{\mathfrak{h}}$ et c et telle que $\delta(d) = 1$. On a alors : $\forall i \in I \quad \alpha_i = \delta_{0,i} \delta + \bar{\alpha}_i$.

La racine $\bar{\alpha}_0$ appartient à $\bar{\Delta}$ mais on ne la précisera pas plus ici. Notons seulement que δ est la plus petite racine imaginaire positive et donc que si l'on écrit $\delta = \sum_{i=0,l} a_i \alpha_i$ on a $a_0 = 1$ et $\bar{\alpha}_0 = - \sum_{i=1,l} a_i \bar{\alpha}_i$.

5.4 Graduation de \mathfrak{g} :

Si on se donne un entier $s_i \in \mathbb{N}$ pour chaque $i \in I$ (les s_i non tous nuls) on définit une graduation $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ pour laquelle \mathfrak{h} est de degré 0 et \mathfrak{g}_α de degré $\sum_{i=0,l} n_i s_i$ pour $\alpha = \sum_{i=0,l} n_i \alpha_i$.

On considère alors $p = \sum_{i=0,l} a_i s_i$ et $H = \sum_{i=1,l} s_i \bar{P}_i$. On note σ l'automorphisme construit comme en 5.2 avec ce p , ces s_i et $m=k$.

Proposition : La graduation ainsi construite sur \mathfrak{g} correspond à la graduation naturelle de $I(\mathfrak{g}, \xi \sigma, kp)$ c'est à dire que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d$ et que $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{v}_j \mathfrak{g}_j$ pour $j \neq 0$.

Remarque : Cette proposition ainsi que 5.2 généralisent au cas $\bar{K} \neq \mathbb{C}$ et précisent certains aspects des résultats de [R1] et de [K;§ 8.6 et 8.7].

Démonstration : D'après 5.2 on a un isomorphisme $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow I(\mathfrak{g}, \xi \sigma, kp)$. La graduation naturelle de cette dernière algèbre est donnée par les valeurs propres de $\text{ad}(D)$. Or on calcule facilement que $\phi^{-1}(D) = pd + H - \frac{(H|H)}{p}c$. Pour $i \in \bar{I}$ on a donc $\alpha_i(\phi^{-1}(D)) = \bar{\alpha}_i(H) = s_i$ et de plus $\alpha_0(\phi^{-1}(D)) = p + \bar{\alpha}_0(H) = \sum_{i=0,l} a_i s_i - \sum_{i=1,l} a_i \bar{\alpha}_i(H) = a_0 s_0 = s_0$. On en déduit aussitôt le résultat.

5.5 Choix d'une graduation :

On choisit dans toute la suite de ce paragraphe (sauf peut-être en 5.6) l'isomorphisme de \mathfrak{g} avec $I(\mathfrak{g}, \xi, k)$ de façon que le couple (\mathfrak{h}, Π) de l'introduction de ce paragraphe corresponde avec celui défini pour I en 5.1 et 5.3.

On considère une partie $\Pi' = \{\alpha_i / i \in I'\}$ non vide de $\Pi - \Pi_0$ stable par l'action $*$ de Γ , par exemple une orbite de cette action dans $\Pi - \Pi_0$. On définit alors $s_i = 1$ si $i \in I'$, $s_i = 0$ sinon et on considère la graduation de \mathfrak{g} associée.

Proposition : Sous ces hypothèses l'action de Γ sur \mathfrak{g} stabilise la graduation de \mathfrak{g} ainsi définie.

Démonstration : L'action $*$ de Γ permute les éléments de Π et stabilise Π' ; cette action stabilise donc la graduation de \mathfrak{g} associée à Π' . On sait que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma^* = w_\gamma \gamma$ avec $w_\gamma \in W_0$, donc pour $\alpha \in \Delta$ on a $w_\gamma(\alpha) = \alpha + \sum_{i \in I_0} m_i \alpha_i$. Pour $\alpha = \sum_{i=0,l} n_i \alpha_i \in \Delta$, notons $h(\alpha) = \sum_{i=0,l} n_i s_i = \sum_{i \in I'} n_i$ le degré de \mathfrak{g}_α dans cette graduation. Puisque $I' \subset I - I_0$ on a $h(w_\gamma(\alpha)) = h(\alpha)$ et par conséquent w_γ stabilise aussi la graduation de \mathfrak{g} associée à Π' ; d'où le résultat.

5.6 L'application translation :

Dans tout ce qui va suivre on notera $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Choisissons un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $l(\mathfrak{g}, \theta, m)$ pour un certain choix de l'algèbre simple \mathfrak{g} et de l'automorphisme θ d'ordre fini divisant m .

On a alors un isomorphisme de \mathfrak{g}'' sur $l''(\mathfrak{g}, \theta, m)$ et l'on construit un isomorphisme de $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -modules : $\mathcal{T} : \mathfrak{g}'' \rightarrow \mathfrak{g}''$ en posant $\mathcal{T}(t^j X) = t^{j+m} X$ pour $X \in \mathfrak{g}_j$.

En fait $(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' puisque le quotient est \mathfrak{g} .

Proposition : Si T est un isomorphisme de $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -modules de \mathfrak{g}'' sur \mathfrak{g}'' tel que $(\text{Id} - T)\mathfrak{g}''$ soit un idéal maximal de \mathfrak{g}'' , alors T est la multiplication par at^k ou at^{-k} avec $a \in \bar{K}^*$ pour l'identification de \mathfrak{g} avec $l(\mathfrak{g}, \xi, k)$ de 5.3 .

Remarque : Ce résultat est affirmé sans démonstration dans [R3].

Démonstration : 1) On remarque qu'il existe $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ telle que la dimension de $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ soit 1 . Il suffit en fait de prendre pour $\bar{\alpha}$ la restriction à \mathfrak{h} de la plus grande racine de $\hat{\Delta}$. On note j l'entier $j \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ soit contenu dans \mathfrak{g}_j .

2) Il est clair que si $\mathfrak{g}''_{\bar{\alpha}} = \{ Y \in \mathfrak{g}'' / [H, Y] = \bar{\alpha}(H)Y \ \forall H \in \mathfrak{h} \}$ on a $T(\mathfrak{g}''_{\bar{\alpha}}) \subset \mathfrak{g}''_{\bar{\alpha}}$ et $\mathfrak{g}''_{\bar{\alpha}} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} t^{j+pk} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$. On en déduit immédiatement que, si on fixe X dans $t^j \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} - \{0\}$, alors il existe un polynôme de Laurent $P \in \bar{K}[t, t^{-1}]$ tel que $T(X) = P(t^k)X$.

3) On considère l'idéal $\mathcal{I}(X)$ de \mathfrak{g}'' engendré par X . D'après [K;8.6] on a $\mathcal{I}(X) = Q(t^k)\mathfrak{g}''$ pour un certain $Q \in \bar{K}[t, t^{-1}]$ et le fait que X appartienne à $t^j \mathfrak{g}_j \cap \mathcal{I}(X)$ implique que Q est un monôme et donc que $\mathcal{I}(X) = \mathfrak{g}''$.

4) Comme T est $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -linéaire on déduit de 2) et 3) que pour tout Y de \mathfrak{g}'' on a : $T(Y) = P(t^k)Y$. Puis, T étant un isomorphisme, on voit que P est forcément un monôme et enfin le fait que $(\text{Id} - T)\mathfrak{g}''$ soit un idéal maximal de \mathfrak{g}'' implique d'après [K;8.6] que l'on a $P(t) = at^\varepsilon$ avec $a \in \bar{K}^*$ et $\varepsilon = \pm 1$. D'où le résultat.

Conséquence : L'application \mathcal{T} est donc canoniquement déterminée par l'algèbre de Lie \mathfrak{g}'' au changement près de \mathcal{T} en $a\mathcal{T}^{\pm 1}$ avec $a \in \bar{K}^*$.

On remarque aussi qu'un isomorphisme du type de la proposition 5.2 échange les applications translation. En particulier si on écrit \mathfrak{g}'' sous la forme $\mathfrak{g}'' = l''(\mathfrak{g}, \xi, k)$ et si on choisit \mathfrak{h} comme en 5.1 et 5.3, on voit aussitôt que pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ $\mathcal{T}(\mathfrak{g}''_{\alpha}) = \mathfrak{g}''_{\alpha+k\delta}$.

Proposition 5.7 : A conjugaison près par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} stabilisant toute graduation du type 5.4, on peut supposer que \mathcal{T} commute aux éléments de Γ .

Remarque : Cette généralisation de [R3;3.3] a aussi été remarquée par N. Andruskiewitsch (communication privée).

Démonstration : Soit $\gamma \in \Gamma$, on considère l'application $\mathcal{T}_\gamma = \gamma \mathcal{T} \gamma^{-1}$ de \mathfrak{g}'' dans \mathfrak{g}'' ; on voit facilement que \mathcal{T}_γ est un isomorphisme de $\text{ad}(\mathfrak{g}'')$ -modules et que $(\text{Id} - \mathcal{T}_\gamma)\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' puisque $\mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{T}_\gamma)\mathfrak{g}''$ est isomorphe à $\mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ qui est simple. Par conséquent d'après la proposition 5.6 $\mathcal{T}_\gamma = a_\gamma \mathcal{T}^\varepsilon$ avec $a_\gamma \in \bar{K}^*$ et $\varepsilon = \pm 1$. Mais le fait que γ stabilise une graduation de \mathfrak{g} du type 5.5 et que sur une telle graduation \mathcal{T} agisse par $\mathcal{T}(\mathfrak{g}''_j) = \mathfrak{g}''_{j+\varepsilon m}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ montre que l'on a forcément $\varepsilon = 1$.

Ainsi pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $a_\gamma \in \bar{K}^*$ tel que $\gamma \mathcal{T} \gamma^{-1} = a_\gamma \mathcal{T}$. Considérons alors l'application $f : \Gamma \rightarrow \bar{K}^*$ $f(\gamma) = a_\gamma$; pour tout couple (γ, γ') de Γ^2 on a $f(\gamma'\gamma) = \gamma'(f(\gamma))f(\gamma')$, autrement dit f est un 1-cocycle. Donc d'après le théorème 90 de Hilbert il existe un élément $b \in \bar{K}^*$ tel que $a_\gamma = \gamma(b^{-1})b$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Par conséquent si $\gamma \in \Gamma$ on a : $\gamma \circ (b \mathcal{T}) \circ \gamma^{-1} = \gamma(b) \gamma \circ \mathcal{T} \circ \gamma^{-1} = \gamma(b) a_\gamma \mathcal{T} = \gamma(b) \gamma(b^{-1}) b \mathcal{T} = b \mathcal{T}$.

Ainsi, quitte à remplacer \mathcal{T} par $b \mathcal{T}$ avec $b \in \bar{K}^*$, on peut supposer que \mathcal{T} commute aux éléments de Γ .

On considère alors une racine $k^{\text{ième}}$ b' de b dans \bar{K} et l'automorphisme ψ de \mathfrak{g} qui sur \mathfrak{g}_α pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ est la multiplication par $(b')^{\alpha(d)}$ où d est l'élément de \mathfrak{g} défini en 5.3. Comme $\delta(d) = 1$ et $\mathcal{T}(\mathfrak{g}''_\alpha) = \mathfrak{g}''_{\alpha+k\delta}$ on voit facilement que $\psi \circ \mathcal{T} \circ \psi^{-1} = b \mathcal{T}$. Il est clair que ψ stabilise toutes les graduations du type 5.4 et que c'est un élément de $\text{Ad}(\tilde{H})$ donc un automorphisme intérieur (cf. 1.7); d'où la proposition.

5.8 L'action induite sur \mathfrak{g} : On considère un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $l(\mathfrak{g}, \theta, m)$ qui stabilise la graduation naturelle et tel que l'action induite de Γ sur $l''(\mathfrak{g}, \theta, m)$ commute à \mathcal{T} . On a montré précédemment qu'il en existe.

Pour $X \in \mathfrak{g}_j$ et $\gamma \in \Gamma$ on note $\gamma(X)$ l'élément de \mathfrak{g}_j tel que $\gamma(t_j X) = t_j \gamma(X)$. Comme Γ commute à \mathcal{T} cette définition ne dépend pas du choix de j modulo m . On obtient

ainsi une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} qui stabilise les \mathfrak{g}_j . Comme \mathfrak{g} est isomorphe à $I''(\mathfrak{g}, \theta, m) / (\text{Id} - \mathcal{T})I''(\mathfrak{g}, \theta, m)$ cette action de Γ est compatible avec la structure d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} et définit donc une forme \mathfrak{g}_K de \mathfrak{g} sur K .

Le fait que Γ stabilise les espaces propres \mathfrak{g}_j se traduit par la propriété suivante :

$$(*) \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma \theta \gamma^{-1} = \theta^{n(\gamma)} \quad \text{où } n(\gamma) \text{ est défini modulo } m \text{ par } \gamma(\epsilon_m) = (\epsilon_m)^{n(\gamma)}$$

5.9 Construction : On considère une forme \mathfrak{g}_K de l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} , un automorphisme θ de \mathfrak{g} d'ordre fini divisant m et (.l.) une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante sur \mathfrak{g}_K que l'on prolonge à \mathfrak{g} . On suppose que l'action de Γ sur \mathfrak{g} vérifie la condition (*) ci-dessus.

Alors les espaces propres \mathfrak{g}_j de θ sont stables par Γ et on vérifie facilement que l'on peut définir une action semi-linéaire de Γ sur $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ par les formules :

$$\gamma(\iota X) = \iota \gamma(X) \quad \gamma(D) = D \quad \gamma(c) = c$$

On définit donc ainsi une forme $I_K(\mathfrak{g}_K, \theta, m) = I(\mathfrak{g}, \theta, m)^\Gamma$ de l'algèbre de Lie affine $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$. Cette forme est presque-déployée puisqu'il existe une sous-algèbre parabolique définie sur K : $(\oplus_{j \geq 0} \iota \mathfrak{g}_j) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}D$.

Théorème 5.10 : *Toute forme presque-déployée d'algèbre de Kac-Moody affine est isomorphe à une forme construite comme ci-dessus.*

Plus précisément : Plaçons nous dans la situation de 5.8 alors \mathfrak{g}_K est isomorphe à $I_K(\mathfrak{g}_K, \theta, m)$.

Démonstration : a) Quitte à remplacer c par λc avec $\lambda \in \bar{K}^*$, on peut supposer que Γ fixe c : en effet \mathfrak{k} est stable par Γ , donc défini sur K et il suffit de prendre pour λc un élément non nul de \mathfrak{k}_K . Ce nouveau choix de c oblige à modifier la forme bilinéaire (.l.) sur \mathfrak{g} (par le facteur λ^{-1}) pour conserver la formule du crochet dans I explicitée en 5.1 et alors cette formule montre que (.l.) est invariante par Γ donc définie sur K .

b) Quitte à remplacer D par $D + \mu c$ avec $\mu \in \bar{K}$ on peut supposer que Γ fixe D :

En effet la graduation naturelle de $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ étant stable par Γ , on a pour tout $\gamma \in \Gamma$ $\gamma(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{g}_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$; or \mathfrak{g}_j est l'espace propre de $\text{ad}(D)$ associé à la valeur propre j donc $\text{ad}(\gamma(D)) = \text{ad}(D) \quad \forall \gamma \in \Gamma$. On en déduit que $\gamma(D) = D + \lambda_\gamma c$ avec $\lambda_\gamma \in \bar{K}$ et si $(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2$ on a $\lambda_{\gamma\gamma'} = \lambda_{\gamma'} + \gamma'(\lambda_\gamma)$. D'après le théorème 90 de Hilbert (version additive) il existe $\mu \in \bar{K}$ tel que $\lambda_\gamma = \mu - \gamma(\mu) \quad \forall \gamma \in \Gamma$; alors les éléments de Γ fixent $D + \mu c$.

c) Il reste à identifier l'action de Γ sur $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ avec celle définie en 5.9. Par construction elles coïncident sur $I/\mathfrak{c} = I''(\mathfrak{g}, \theta, m)$ et sur D (d'après b) donc sur I/\mathfrak{c} . Les deux actions stabilisent \mathfrak{h} et permutent ses espaces radiciels; ceux-ci étant disjoints de \mathfrak{c} , les deux actions coïncident sur ces espaces radiciels donc sur l'algèbre engendrée I' . Mais D est fixe par les deux actions, d'où le résultat.

Remarque 5.11 : On considère les formes réelles presque-déployées des algèbres affines non tordues. D'après 2.11, comme une algèbre semi-simple complexe a une unique forme réelle compacte, la détermination des formes de rang relatif $r \geq 2$ se ramène à des résultats connus sur les algèbres semi-simples. Pour le rang relatif $r = 1$, en utilisant 2.6, on voit facilement qu'il y a trois cas pour $\Pi - \Pi_0$:

- a) $\Pi - \Pi_0 = \{ \alpha_i \}$ avec $a_i = 1$.
- b) $\Pi - \Pi_0 = \{ \alpha_i \}$ avec $a_i = 2$.
- c) $\Pi - \Pi_0 = \{ \alpha_i, \alpha_j \}$ avec $i \neq j, a_i = a_j = 1$ et Γ^* échange α_i et α_j .

Ce résultat est confirmé par la classification ci-dessous au paragraphe 6.

On voit alors assez facilement que dans ce cas $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est de l'une des formes suivantes :

- $I_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \text{Id}, 1)$ avec $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ algèbre réelle simple compacte (cas a),
- $I_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \theta, 2)$ avec $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ algèbre réelle absolument simple non compacte et θ involution de Cartan (cas b et c).

Pour un rang relatif quelconque, si on suppose que $\{0\}$ (ou un transformé de $\{0\}$ par un automorphisme de diagramme) est une orbite de Γ^* dans $\Pi - \Pi_0$, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est de la forme $I_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \text{Id}, 1)$ avec $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ algèbre absolument simple réelle. Le diagramme de Dynkin relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est le complété de celui de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf. [R5;4.6]) si l'on admet que le complété de $BC_n = B_n^X$ est $A_{2n}^{(2)X}$ (voir les notations au §6).

Les détails et le cas plus compliqué des algèbres affines tordues seront traités ailleurs.

§ 6 TABLEAU DES FORMES REELLES PRESQUE-DEPLOYEES DES ALGEBRES DE KAC-MOODY AFFINES :

6.1 On trouvera ci-dessous la classification à isomorphisme près de ces formes réelles (qui sont entièrement déterminées par leur indice : cf. 2.5 et 4.5) . Elle est établie grâce aux résultats du paragraphe 4 et vérifiée, pour partie grâce à ceux du paragraphe 5 .

6.2 Dans le cas des séries infinies des algèbres affines on indique successivement dans le premier tableau (6.6) le nom de la forme réelle, son indice (représenté conformément à 2.5) , un système de représentants dans I de l'ensemble $I' = (I-I_0)/\Gamma^*$ des orbites distinguées, les conditions sur les paramètres et le système de racines relatives Δ' (avec son nom et son diagramme de Dynkin) .

Le nom de la forme réelle se présente dans ce cas sous la forme : $a_i X_{n,r}^{(k)}$.

où $X_n^{(k)}$ est le nom de l'algèbre affine complexe

$r = |I'|$ est le rang relatif

i (facultatif) est un paramètre : c'est souvent le cardinal de la plus petite composante connexe de I_0

$a = 1, 2, 2'$ ou $2''$ est l'ordre de l'automorphisme de diagramme représentant Γ^* . Il est omis s'il vaut 1 ; dans certains cas on différencie par $2, 2'$ ou $2''$ des involutions différentes .

6.3 Dans le cas des algèbres affines exceptionnelles (y compris $A_1^{(1)}$ et $A_2^{(2)}$) on indique successivement dans le second tableau (6.7) le nom de la forme réelle, son indice et le système de racines relatives (avec son nom et son diagramme de Dynkin).

Le nom de la forme réelle se présente dans ce cas sous la forme : $a X_{n,r}^{(k)m}$.

où $X_n^{(k)}$, r et a sont déterminés selon les mêmes conventions que ci-dessus et

m (omis s'il vaut 0 c'est à dire dans le cas quasi-déployé) est la dimension du noyau anisotrope $I = \mathfrak{m}^s(I_0)$.

6.4 Pour calculer le système de racines relatives on utilise les résultats du paragraphe 3. On peut utiliser le calcul direct préalable des $\alpha_i'^{\wedge}$, pour α_i' racine relative simple réelle, qui se ramène à des calculs classiques pour des algèbres de Lie semi-simples de rang relatif 1, cf. 3.4. On peut aussi utiliser des indications indirectes :

Si $i' \in I'$ et si J est une composante connexe de $i' \cup I_0$ rencontrant i' , on a $b'_{i'i'} = 0$ si et seulement si $J = I$ et sinon $b'_{i'i'} = 1$ ou 2 selon que la somme des coefficients de la plus grande racine de $\Delta(J)$ sur $i' \cap J$ est 2 ou 1 (cf. 3.3.1).

Si $i' \neq j' \in I'$ et si J est une composante connexe de $I_0 \cup i' \cup j'$ rencontrant i' , on a $b'_{i'j'} = 0$ si et seulement si J ne rencontre pas j' . Si J est de type fini (i.e. $J \neq I$) et rencontre j' , la plus grande racine de $\Delta(J)$ a pour restriction à \mathfrak{t} la plus grande racine du sous-système de racines de Δ' engendré par i' et j' , cela permet de déterminer (dans ce cas) $b'_{i'j'}$ et $b'_{j'i'}$ si l'on connaît déjà $b'_{i'i'}$ et $b'_{j'j'}$.

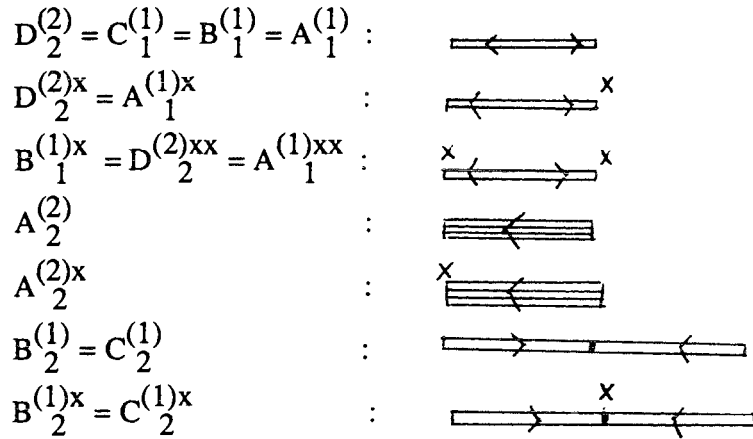
La restriction à \mathfrak{t} d'une racine imaginaire de Δ est une racine imaginaire de Δ' nulle sur les coracines. Sa connaissance permet de vérifier le calcul précédent des $b'_{i'j'}$ ou de calculer ces coefficients pour $r = 2$.

6.5 Le diagramme du système de racines relatives est indiqué selon les conventions de 3.6. Sauf dans les cas de rang relatif $r = 1$, on trouve en enlevant les croix éventuelles un diagramme de Dynkin affine (cela pouvait se prévoir d'après le dernier alinéa de 6.4), on prend donc comme nom le nom de ce dernier diagramme orné d'autant de croix qu'il y en a sur le diagramme; il se trouve que cela détermine entièrement le diagramme à un automorphisme près. Ces diagrammes avec leurs noms ont déjà été introduits dans [B;Vn°4], ce sont les graphes des échelonnages irréductibles de [BrT1;1.4.6] (cf. aussi [BrT2;E1 p 365]) mais le nom adopté ici paraît plus adapté à notre contexte.

Quand le rang relatif est $r = 1$ le graphe est toujours : $Z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0$. C'est le seul cas (quand Δ est affine) où il y a une racine imaginaire simple et alors $\Delta' = (\mathbb{Z} - \{0\})\alpha_1'$.

Pour ne pas alourdir le tableau I on ne fait pas figurer les cas particuliers r petit dans la dernière colonne. Pour $r = 1$ on vient de dire que l'on a toujours $Z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour $r = 2$ (et

pour certains cas où $r = 3$) le dessin du diagramme de Dynkin devient faux mais le nom de celui-ci est juste si l'on admet les équivalences suivantes :



Remarque : Le troisième diagramme semble suggérer la notation $B_1^{(1)xx}$ au lieu de $B_1^{(1)x}$, mais il s'agit bien pourtant du cas particulier $r=1$ de $B_r^{(1)x}$; voir la forme ${}^{2''}D_{n2}^{(1)}$ ci dessous dans le premier tableau.

6.6 Tableau I : Les paramètres utilisés sont tous des entiers positifs ou nuls. On a toujours $n \geq 1$ et $r \geq 1$ (r est le rang relatif).

6.7 Tableau II :

Tableau I

nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom
$A_{n,n+1}^{(1)}$		0, 1, 2, ..., n-1, n (toutes)	$n \geq 2$		$A_m^{(1)}$
$A_{2h-1,h}^{(1)}$		0, 2, 4, ..., 2h-4, 2h-2	$h \geq 2$		$A_{h-1}^{(1)}$
${}^2 A_{2h,2}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, n+i-1$	$h \geq 1$	$i < h-n+1$ 	$D_n^{(2) \times X}$
			$i = h-n+1$ 	$A_{2n-2}^{(2) \times}$	
${}^2 A_{2h-1,2}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, n+i-1$	$h \geq 2$	$0 < i \leq \frac{h-n+1}{2}$ 	$D_n^{(2) \times X}$
			$i = 0 < h-n+1$ 	$A_{2n-2}^{(2) \times}$	
			$i = 0; h = n-1$ 	$C_{n-1}^{(1)}$	

Tableau I (suite)

$2^1 A_{2l-1, 2l}^{(1)}$ i		$i, i+1, \dots, i+l-1$	$l \geq 2 ; 0 \leq i \leq \frac{l-1}{2}$		$D_n^{(2)} \times X$
$2^4 A_{2l-1, 2l}^{(1)}$		$0, 1, 2, \dots, l-1$ (toutes)	$l \geq 2$		$A_{l-1}^{(1)}$
$2^1 B_{m, 2}^{(1)}$ $2l, m, 2$		$2l, 2l+1, \dots, i+2l-1$	$0 < 2l \leq m-n+1$ $m \geq 3$		$D_n^{(2)}$
$2^1 B_{2l+1, m, 2}^{(1)}$		$2l+1, 2l+2, \dots, 2l+2$	$l=0, 2 \leq m+1$		$B_{n-1}^{(1)}$
$C_{m, m+1}^{(1)}$		$0, 1, \dots, m$ (toutes)	$m \geq 2$		$D_n^{(2)}$
$C_{m, 2}^{(1)}$ i		$i, i+2, \dots, i+2l-2$	$0 < i \leq \frac{m+1-2}{2}$ $m \geq 2$		$D_n^{(2)} \times X$
			$i=0, m > 2l-2$		$A_{2l-2}^{(2)} \times X$
			$i=0, m=2l-2$		$C_{n-1}^{(1)}$

$2 \begin{matrix} (1) \\ C_{n,r} \end{matrix}$		$0, 1, 2, \dots, n-1$	$n \geq 2$ $n = 2(n-1)$ $n < \frac{n}{2} - 1$		$C_{n-1}^{(2)}$ $A_{2n-2}^{(2)X}$
$2i \begin{matrix} D_{n,r}^{(1)} \end{matrix}$		$2i, 2i+1, \dots, 2i+n-1$	$n \geq 4$ $n-r$ <i>impair</i> $0 < i < \frac{n-r+1}{4}$ $i=0; n < n+1$ $i=0; n = n+1$		$D_n^{(2)}$ $B_{n-1}^{(1)}$ $D_n^{(1)}$
$D_{2h, h+1}^{(1)}$		$0, 2, 4, \dots, 2h-2, 2h$	$h \geq 2$		$C_h^{(1)}$
$2i+1 \begin{matrix} D_{n,r}^{(1)} \end{matrix}$		$2i+1, 2i+2, \dots, n+2i$	$n \geq 4$ $n-r$ <i>pair</i> $n+2i < n$ $n+2i = n$		$D_n^{(2)}$ $B_{n-1}^{(1)}$
$2 \begin{matrix} D_{2h+1, h+1}^{(1)} \end{matrix}$		$1, 3, 5, \dots, 2h-1, 2h+1$	$h \geq 2$		$A_{2h}^{(2)X}$

Tableau I (suite)

$2^{i+1} D_{m,n}^{(1)}$		$2i+1, 2i+2, \dots, 2i+n$	$m \geq 4, 0 \leq i \leq \frac{m-1}{4}$ $m-n$ impair		$D_n^{(2)}$
$2^i D_{2h,h}^{(1)}$		$1, 3, 5, \dots, 2h-1$	$h \geq 2$		$D_h^{(1) \times X}$
$2^n D_{m,n}^{(1)}$		$0, 1, 2, \dots, n-1$	$m \geq 4$ $n < \frac{m}{2} + 1$ $n = \frac{m}{2} + 1$		$B_{n-1}^{(1) \times X}$ $A_{2n-3}^{(2)}$
$A_{2h,n}^{(2)}$		$0, 1, 2, \dots, n-1$	$h \geq 2$ $1 \leq n \leq h+1$		$A_{2n-2}^{(2)}$
$A_{2h-1,n}^{(2)}$		$h-n+1, \dots, h-1, h$	$h \geq 3$ $h-n$ impair $n < h+1$ $n = h+1$		$A_{2n-2}^{(2)}$ $A_{2h-1}^{(2)}$
$2 A_{2h-1,n}^{(2)}$		$0, 2, 4, \dots, 2n-2$	$h \geq 3$ $n < \frac{h+2}{2}$ $n = \frac{h+2}{2}$		$A_{2n-2}^{(2) \times X}$ $C_{n-1}^{(1)}$

Tableau I (suite)

Tableau I (suite et fin)

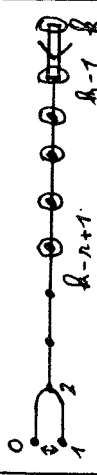

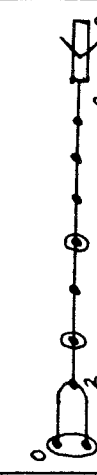

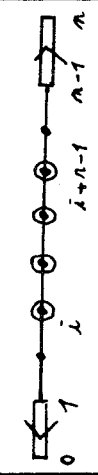

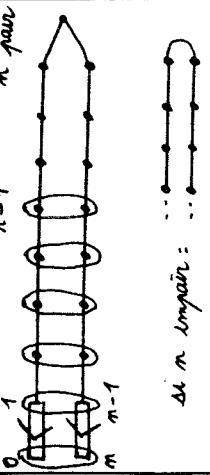
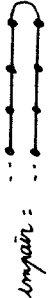
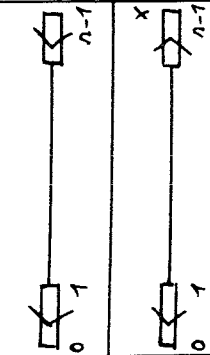

${}^2 A_{2h-1, 2h-1, 2h-1, 2h-1}^{(2)}$		$h-2, h-1, h, \dots, h-1, h$	$h \geq 3; 1 \leq n \leq h$ $h-n$ pair		$A_{2h-2}^{(2)}$
${}^2 A_{2h-1, 2h-1, 2h-1, 2h-1}^{(2)}$		$1, 3, 5, \dots, 2h-1$	$h \geq 3$ $n < \frac{h+1}{2}$ $n = \frac{h+1}{2}$		$D_n^{(2) \times \times}$
${}^i D_{m+1, 2, i}^{(2)}$		$i, i+1, \dots, i+n-1$	$m \geq 2$ $0 \leq i \leq \frac{m-n+1}{2}$		$A_{2n-2}^{(2) \times}$
${}^2 D_{m+1, 2}^{(2)}$	 <p>si m impair: </p>	$0, 1, 2, \dots, n-1$	$m \geq 2$ $n = \frac{m+2}{2}$ $n < \frac{m+2}{2}$		$A_{2n-2}^{(2)}$
					$D_n^{(2) \times}$

Tableau II

nom	indice	diagramme relatif	nom
$A_{1,2}^{(1)}$			$A_1^{(1)}$
$A_{1,1}^{(1)3}$			$\Sigma_0^{(1)}$
${}^2A_{1,1}^{(1)}$			$\Sigma_0^{(1)}$
$A_{2,2}^{(2)}$			$A_2^{(2)}$
$A_{2,1}^{(2)3}$			$\Sigma_0^{(1)}$
$E_{6,7}^{(1)}$			$E_6^{(1)}$
$E_{6,3}^{(1)12}$			$A_2^{(1)}$
$E_{6,3}^{(1)28}$			$A_2^{(1)}$
${}^2E_{6,5}^{(1)}$			$F_4^{(1)}$
${}^2E_{6,3}^{(1)6}$			$C_2^{(1)X}$
${}^2E_{6,3}^{(1)15}$			$A_4^{(2)X}$

Tableau II (suite)

${}^2 E_{6,1}^{(1)38}$			$\Sigma_0^{(1)}$
${}^2 E_{6,1}^{(1)45}$			$\Sigma_0^{(1)}$
${}^2 E_{6,1}^{(1)78}$			$\Sigma_0^{(1)}$
$E_{7,8}^{(1)}$			$E_7^{(1)}$
$E_{7,5}^{(1)9}$			$F_4^{(1)}$
$E_{7,4}^{(1)12}$			$A_5^{(2)}$
$E_{7,4}^{(1)28}$			$C_3^{(1)}$
$E_{7,1}^{(1)69}$			$\Sigma_0^{(1)}$
$E_{7,1}^{(1)133}$			$\Sigma_0^{(1)}$
${}^2 E_{7,5}^{(1)}$			$E_6^{(2)}$
${}^2 E_{7,3}^{(1)15}$			$C_2^{(1)X}$
${}^2 E_{7,1}^{(1)63}$			$\Sigma_0^{(1)}$
${}^2 E_{7,1}^{(1)78}$			$\Sigma_0^{(1)}$

Tableau II (suite)

$E_{8,3}^{(1)}$			$E_8^{(1)}$
$E_{8,5}^{(1)12}$			$E_6^{(2)}$
$E_{8,5}^{(1)28}$			$F_4^{(1)}$
$E_{8,1}^{(1)120}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{8,1}^{(1)136}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{8,1}^{(1)248}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{4,5}^{(1)}$			$F_4^{(1)}$
$F_{4,2}^{(1)19}$			$A_2^{(2)X}$
$F_{4,2}^{(1)21}$			$A_2^{(2)X}$
$F_{4,1}^{(1)24}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{4,1}^{(1)36}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{4,1}^{(1)52}$			$Z_0^{(1)}$
$G_{3,3}^{(1)}$			$G_2^{(1)}$
$G_{2,1}^{(1)6}$			$Z_0^{(1)}$
$G_{2,1}^{(1)14}$			$Z_0^{(1)}$

Tableau II (suite et fin)

$E_{6,5}^{(2)}$			$E_6^{(2)}$
$E_{6,3}^{(2)6}$			$A_4^{(2)}$
$E_{6,2}^{(2)13}$			$A_2^{(2)X}$
$E_{6,2}^{(2)21}$			$A_2^{(2)X}$
$E_{6,1}^{(2)36}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{6,1}^{(2)52}$			$Z_0^{(1)}$
$D_{4,3}^{(3)}$			$D_4^{(3)}$
$D_{4,1}^{(3)6}$			$Z_0^{(1)}$
$D_{4,1}^{(3)74}$			$Z_0^{(1)}$

BIBLIOGRAPHIE

- [A] Andruskiewitsch N. Some forms of Kac Moody algebras, J. of Algebra 147 (1992), 324-344.
- [Bp] Bardy-Panse N. , Systèmes de racines infinis, thèse , Nancy , Janvier 1993.
- [B] Bausch J. , Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines , Revue de l'Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 5-124.
- [B'] Bausch J. , Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines , C.R. Acad. Sci. Paris 302 (1986), 409-412 .
- [BR] Bausch J. et Rousseau G. , Involutions de première espèce des algèbres affines , Revue de l'Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 125-139 .
- [BeP] Berman S. et Pianzola A. , Generators and relations for real forms of some Kac-Moody Lie algebras, Comm. in algebra, 15(1987), 935-959.
- [Bo] Borcherds R. , Generalized Kac-Moody algebras, J. of Algebra 115 (1988), 501-512.
- [BoT] Borel A. et Tits J. , Groupes réductifs , Publ. Math. I.H.E.S. , 27 (1965) , 55-150.
- [BBK] Bourbaki N. , Groupes et algèbres de Lie , chapitres I à IX , Paris .
- [BrT1] Bruhat F. et Tits J. , Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, Publ. Math. I.H.E.S. , 41 (1972) , 5-252.
- [BrT2] Bruhat F. et Tits J. , Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes; existence d'une donnée radicielle valuée , Publ. Math. I.H.E.S. , 60 (1984) , 5-184 .
- [Hée] Hée J.Y. , Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné , Geometriae Dedicata, 37 (1991), 65-102.
- [K] Kac V. G. , Infinite dimensional Lie algebras , troisième édition, Cambridge University Press (1990) .
- [KP1] Kac V. G. et Peterson D. H. , Defining relations of certain infinite dimensional groups , in " Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui " Lyon 1984 , Astérisque n° hors série (1985) , 165-208 .
- [KP2] Kac V. G. et Peterson D. H. , On geometric invariant theory for infinite dimensional groups , in "Algebraic groups" Utrecht 1986 , Springer lecture note in math. 1271 (1987) , 109-142 .
- [KW] Kac V.G. et Wang S.P. , On automorphisms of Kac-Moody algebras and groups , Advances in Math. 92 (1992), 129,195.
- [PK] Peterson D. H. et Kac V. G. , Infinite flag varieties and conjugacy theorems , Proc. Natl. Acad. Sci. USA 80 (1983) , 1778-1782 .
- [R1] Rousseau G. , Espaces affines symétriques et algèbres affines ,Revue de l'Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 141-174 .

- [R2] Rousseau G. , Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines , Revue de l' Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 175-205 .
- [R3] Rousseau G. , Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines , in " Harmonic Analysis " Luxembourg 1987 , Springer Lecture note in Math. 1359 (1988) , 252-264 .
- [R4] Rousseau G. , Almost split K-forms of Kac-Moody algebras , in " Infinite dimensional Lie Algebras and Groups " Marseille 1988 , V.G.Kac éditeur , Adv. Ser. in Math. Physics 7 , World Scientific (1989) , 70-85 .
- [R5] Rousseau G. , L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody, Bull. Soc. Math. Belg. 42 (1990) , 673-694 .
- [R6] Rousseau G. , On forms of Kac-Moody algebras, à paraître dans les comptes-rendus du Summer Research Institute of A.M.S., Pennsylvania State University , Juillet 1991.
- [Sa] Satake I. , Classification theory of semi-simple algebraic groups , lecture note in pure and applied math. 3 , Marcel Dekker , New-York , 1971.
- [T1] Tits J. , Classification of algebraic semi-simple groups, in "Algebraic groups and discontinuous subgroups" Boulder 1965, Proc. of Symposia in pure math. IX (1966), 33-62.
- [T2] Tits J. , Normalisateurs de tores I groupes de Coxeter étendus, J. of Algebra 4 (1966) ,96-116.
- [T3] Tits J. , Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples , Publ. Math. I.H.E.S. , 31 (1966) , 21-58.
- [T4] Tits J. , Groups and group functors attached to Kac-Moody data , in "Arbeitstagung Bonn 1984" , Springer Lecture note 1111 (1985) , 193-223 .
- [T5] Tits J. , Uniqueness and presentation of Kac-Moody Groups over fields , J. of Algebra 105 (1987) , 542-573.
- [T6] Tits J. , Immeubles jumelés , cours au Collège de France , 1988/89 et 1989/90.
- [T7] Tits J. , Twin buildings and groups of Kac-Moody type , in "Groups, combinatorics and geometry", Durham 1990, Liebeck et Saxl éditeurs, London math. soc. lecture note 165, Cambridge U. Press 1992, 249-286.
- [V] Vust T. , Opérations de groupes réductifs dans un type de cône presque-homogène, Bull. Soc. Math. France , 102 (1974) , 317-334.

Adresse des auteurs :

Institut Elie Cartan
Unité associée au C.N.R.S. n° 750
Département de mathématiques de l'Université Nancy 1
B.P. 239 54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex
FRANCE

§7 . Compléments sur les formes réelles presque déployées et les involutions de seconde espèce d’algèbres de Kac-Moody symétrisables et indécomposables :

Soient $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle presque déployée de l’algèbre de Kac-Moody symétrisable et indécomposable \mathfrak{g} et $\theta := \tau\omega Ad(n_X)Ad(s)$ l’involutions de seconde espèce correspondante. On rappelle que :

i) X est une partie de type fini de I telle que $\mathfrak{p}^+(X)$ est une sous algèbre parabolique θ -déployée minimale ou encore $\mathfrak{p}^+(X) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une sous algèbre parabolique minimale de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, et donc la restriction de θ à la sous algèbre de Levi $\mathfrak{m}^s(X) := \mathfrak{m}(X)'$ est triviale.

ii) τ un automorphisme de diagramme involutif de \mathfrak{g} qui stabilise X et qui y induit l’automorphisme d’opposition correspondant à l’élément de plus grande longueur $w_0(X)$ de $W(X)$ (= le sous groupe de W engendré par les $r_i, i \in X$).

iii) $n_X \in N^\tau \cap N^\omega \cap G(X)$ tel que $Ad(n_X)$ induit l’élément de plus grande longueur de $W(X)$.

iv) ω est l’involutions de Cartan standard de \mathfrak{g} et $s \in \tilde{H}^\theta$.

Ainsi l’indice de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (qui détermine entièrement $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$) est donné par le couple (τ, X) , (cf [B_3R] §4.5).

Pour déterminer $Ad(s)$, on a besoin de connaître la restriction de $Ad(n_X)$ à $\mathfrak{m}^s(X)$ et l’action de $Ad(n_X)^2$ sur \mathfrak{g} .

En utilisant les résultats de Tits sur le problème de mots, on donne dans [B_3R] une formule explicite de n_X et on démontre que la restriction de $Ad(n_X)$ à $\mathfrak{m}^s(X)$ est égale à celle de $\tau\omega$; plus précisément, pour n’importe quelle décomposition réduite de l’élément de plus grande longueur $w_0(X)$ de $W(X)$, l’automorphisme $Ad(n_X)$ coïncide avec le prolongement classique de $w_0(X)$ en un automorphisme de \mathfrak{g} d’ordre divisant 4. Ainsi on démontre que :

$$Ad(n_X)^2 = w_0(X)^2 = \exp(i\pi ad(2\rho_{\check{X}}))$$

où $2\rho_{\check{X}}$ est la somme des coracines positives de $\Delta(X)$.

Dans la table 1 ci-dessous on donne pour chaque algèbre de Lie simple complexe une décomposition réduite de l’élément de plus grande longueur w_0 du groupe de

Weyl correspondant, en constatant que dans le cas A_l , $l > 0$ on a :

$$w_0 = (r_1 r_2 \dots r_l) \cdot (r_1 \dots r_{l-1}) \dots (r_1 r_2) \cdot r_1$$

et que dans tous les autres cas le nombre de Coxeter h est pair, et donc $w_0 = (c)^{\frac{h}{2}}$, où c est une transformation de Coxeter choisie de façon que $(c)^{\frac{h}{2}}$ transforme la chambre fondamentale en son opposé, (cf [BBK], chap V §6, Prop 2.).

Dans la même table on donne également l'expression en fonction des α_i (extraite des planches de Bourbaki) de la somme des coracines positives 2ρ .

Dans notre situation on choisit pour n_X le produit des éléments correspondants aux composantes connexes de X , et ceux-ci sont les produits obtenus à partir de ceux de la table 1 si l'on remplace r_i par $m_i = \exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)$.

Ayant ceci et en utilisant le fait que $\theta/m^s(X) = id$, on peut écrire (cf la démonstration de 4.10.4) :

$$Ad(s) = \exp(i\pi ad(\sum_{j \in \Omega} \epsilon_j(p_j - p_{\tau(j)})))$$

où Ω est un système de représentants des orbites de τ dans $I \setminus X$ et $\epsilon_j \in \mathbb{Q}$, ($j \in \Omega$) tel que :

$$2\rho_X + \sum_{j \in \Omega} 2\epsilon_j(p_j - p_{\tau(j)}) \in \bigoplus_{i \in I} 2\mathbb{Z}p_i + \mathfrak{c}$$

Remarque : La relation ci-dessus a lieu modulo le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{g} (puisque les $(p_i)_{i \in I}$ sont définis modulo le centre, cf [B₃R], §4.1.); ceci n'a pas été précisé dans [B₃R], corollaire 4.10.4.

□

Soient $j \in \Omega$ et $u \in \mathbb{Z}$, alors en conjuguant θ par $\exp(\frac{i\pi}{2} ad(u(p_j + p_{\tau(j)})))$ on peut remplacer ϵ_j par $\epsilon_j + u$ sans modifier les autres ϵ_i ; ainsi $\forall j \in \Omega$, l'élément $\epsilon_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ est bien déterminé modulo \mathbb{Z} . Donc si on note $2\bar{\rho}_X$ la classe de $2\rho_X$ dans $(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}p_i + \mathfrak{c}) / (\bigoplus_{i \in I} 2\mathbb{Z}p_i + \mathfrak{c})$ qui est fixée par $(-\tau)$, on a :

$$2\bar{\rho}_X = \sum_{j \in \Omega} 2\epsilon_j(p_j - p_{\tau(j)})$$

Par conséquent

$$\theta = \tau \omega Ad(n_X) \exp(\frac{i\pi}{2} ad(2\bar{\rho}_X))$$

et donc pour un indice admissible (τ, X) , l'involution de seconde espèce θ correspondante sera entièrement déterminée si on connaît $2\bar{\rho}_X$.

Dans la table 2 on donne la liste des formes réelles presque déployées d'algèbres de Kac-Moody affines; les notations sont celles de $[B_3R]$, §6. on rappelle que X est le complémentaire dans l'ensemble d'indice I de la réunion des orbites distinguées (c'est à dire entourées). Pour chaque forme presque déployée on donne l'expression de $2\bar{\rho}_X$, ce qui détermine entièrement l'involution de seconde espèce correspondante.

Dans la table 3 on donne la liste des diagrammes strictement hyperboliques et symétrisables, c'est à dire les diagrammes dont tous les sous diagrammes propres sont de type fini et dont les matrices de Cartan généralisées sont symétrisables.

Enfin, dans la table 4 on donne la liste des formes réelles presque déployées d'algèbres de Kac-Moody strictement hyperboliques et symétrisables et les involutions de seconde espèce correspondantes (déterminées par la donnée de $2\bar{\rho}_X$).

Table 1

Nom	Diagramme de Dynkin	w_0	$2\rho^\vee$
$A_l, l > 0$		$(r_1 r_2 \dots r_l) \cdot (r_1 \dots r_{l-1}) \dots (r_1 r_2) \cdot r_1$	$l\alpha_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \dots + i(l-i+1)\alpha_i + \dots + l\alpha_l$
$B_l, l > 1$		$(r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_l)^l$	$2l\alpha_1 + 2(2l-1)\alpha_2 + \dots + i(2l-i+1)\alpha_i + \dots + (l-1)(l+2)\alpha_{l-1} + \frac{l(l+1)}{2}\alpha_l$
$C_l, l > 1$		$(r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_l)^l$	$(2l-1)\alpha_1 + 2(2l-2)\alpha_2 + \dots + i(2l-i)\alpha_i + \dots + (l-1)(l+1)\alpha_{l-1} + l^2\alpha_l$
$D_l, l > 3$		$(r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_l)^{l-1}$	$2(l-1)\alpha_1 + 2(2l-3)\alpha_2 + \dots + i(2l-i-1)\alpha_i + \dots + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l)$
E_6		$(r_1 r_4 r_6 \cdot r_2 r_3 r_5)^6$	$2(8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6)$
E_7		$(r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7)^9$	$34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7$
E_8		$(r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8)^{15}$	$2(46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8)$
F_4		$(r_1 r_2 r_3 r_4)^6$	$22\alpha_1 + 42\alpha_2 + 30\alpha_3 + 16\alpha_4$
G_2		$(r_1 r_2)^3$	$2(5\alpha_1 + 3\alpha_2)$

Table 2

Nom	Indice	Orbites distinguées	Paramètres	$2\bar{\rho}_X$
$A_{n,n+1}^{(1)}$		$0, 1, \dots, n-1, n$	$n > 1$	0
$A_{2k-1,k}^{(1)}$		$0, 2, 4, \dots, 2k-2$	$k > 1$	0
${}^2 A_{2k,r}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, r+i-1$	$i < k-r+1$ $k > 1$ $i = k-r-1$	$p_{r-i-1} - p_{2k-r-i+1}$ 0
${}^2 A_{2k-1,r}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, r+i-1$	$0 < i \leq \frac{k-r+1}{2}$ $k > 1$ $i = 0 < k-r+1$ $i = 0; k = r-1$	$(p_i - p_{2k-i}) +$ $(p_{2k-r-i+1} - p_{r+i-1})$ $p_{r-1} - p_{2k-r+1}$ 0
${}^{2'} A_{2k-1,r}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, r+i-1$	$k > 1$ $0 \leq i \leq \frac{k-r}{2}$	0
${}^{2''} A_{2k-1,k}^{(1)}$		$0, 1, \dots, k-1$	$k > 1$	0
${}_{2k} B_{n,r}^{(1)}$		$2k, 2k+1, \dots, r+2k-1$	$n > 2$ $0 \leq 2k \leq n-r+1$	0

Table 2 (suite)

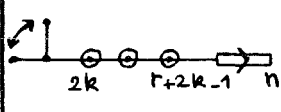
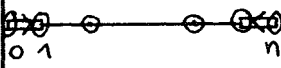
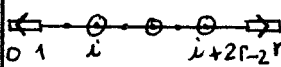
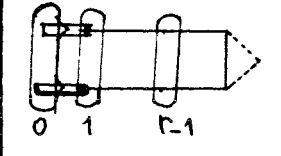
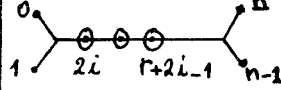
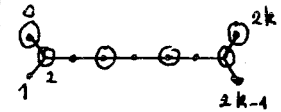
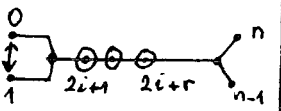
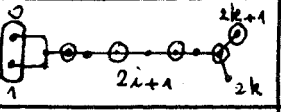
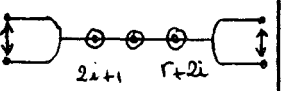
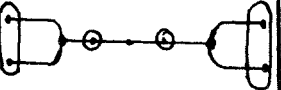
${}_{2k+1}^2 B_{n,r}^{(1)}$		$2k+1, 2k+2, \dots, 2k+r$	$n > 2;$ $r+2k \leq n$	0
$C_{n,n+1}^{(1)}$		$0, 1, \dots, n$	$n > 1$	0
${}_i C_{n,r}^{(1)}$		$i, i+2, \dots, i+2r-2$	$n > 1$	0
${}^2 C_{n,r}^{(1)}$		$0, 1, \dots, r-1$	$n > 1, r < \frac{n}{2} - 1$ $n = 2(r-1)$ n impair n pair	0 0 $p_{r-1} - p_{n-r+1}$
${}_{2i}^2 D_{n,r}^{(1)}$		$2i, 2i+1, \dots, 2i+r-1$	$n > 3$ $n-r$ impair	0
$D_{2k,k+1}^{(1)}$		$0, 2, 4, \dots, 2k$	$k > 1$	0
${}_{2i+1}^2 D_{n,r}^{(1)}$		$2i+1, 2i+2, \dots, 2i+r$	$n > 3$ $n-r$ pair	0
${}^2 D_{2k+1,k+1}^{(1)}$		$1, 3, 5, \dots, 2k+1$	$k > 1$	$p_0 - p_1$
${}_{2i+1}^{2'} D_{n,r}^{(1)}$		$2i+1, 2i+2, \dots, 2i+r$	$n > 3,$ $n-r$ impair $0 \leq i \leq \frac{n-r-1}{4}$	0
${}^2 D_{2k,k}^{(1)}$		$1, 3, 5, \dots, 2k-1$	$k > 1$	$(p_0 - p_1) +$ $(p_{2k-1} - p_{2k})$

Table 2 (suite)

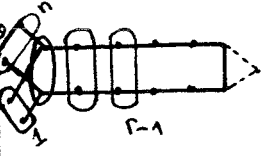
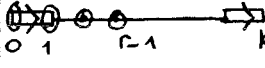
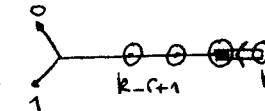
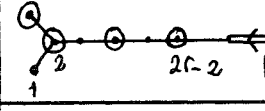
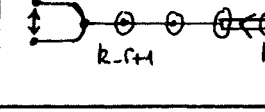
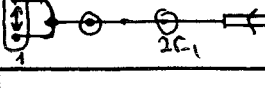
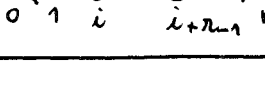
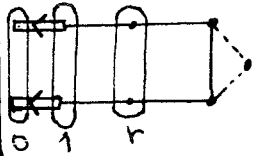
$2'' D_{n,r}^{(1)}$		$0, 1, 2, \dots$ $\dots, r-1$	n impair $n > 3$ n pair	0 $p_{r-1} - p_{n-r+1}$
$A_{2k,r}^{(2)}$		$0, 1, 2, \dots, r-1$	$k > 1$ $1 \leq r \leq k+1$	0
$A_{2k-1,r}^{(2)}$		$k-r+1, \dots,$ $\dots, k-1, k$	$k > 2$ $k-r$ pair	0
$2A_{2k-1,r}^{(2)}$		$0, 2, 4, \dots, 2r-2$	$k > 2$	0
$2A_{2k-1,r}^{(2)}$		$k-r+1, \dots,$ $\dots, k-1, k$	$k > 2; 1 \leq r \leq k$ $k-r$ pair	0
$2A_{2k-1,r}^{(2)}$		$1, 3, 5, \dots, 2r-1$	$k > 2$	$p_0 - p_1$
$iD_{n+1,r}^{(2)}$		$i, i+1, \dots,$ $\dots, i+r-1$	$n > 2$ $0 \leq i \leq \frac{n-r+1}{2}$	0
$2D_{n+1,r}^{(2)}$		$0, 1, 2, \dots,$ $\dots, r-1$	$r = \frac{n+2}{2}$ ou n impair $n > 2$ $r < \frac{n+2}{2}$ et n pair	0 $p_{r-1} - p_{n-r+1}$

Table 2 (suite)

Nom	Indice	$2\bar{\rho}_X$
$A_{1,2}^{(1)}$		0
$A_{1,1}^{(1)3}$		0
${}^2A_{1,1}^{(1)}$		0
$A_{2,2}^{(2)}$		0
$A_{2,1}^{(2)3}$		0
$E_{6,7}^{(1)}$		0
$E_{6,3}^{(1)12}$		0
$E_{6,3}^{(1)28}$		0
${}^2E_{6,5}^{(1)}$		0
${}^2E_{6,3}^{(1)6}$		$(p_3 - p_5)$

Table 2 (suite)

${}^2E_{6,3}^{(1)15}$		$(p_1 - p_6)$
${}^2E_{6,1}^{(1)38}$		0
${}^2E_{6,1}^{(1)45}$		0
${}^2E_{6,1}^{(1)78}$		0
$E_{7,8}^{(1)}$		0
$E_{7,5}^{(1)9}$		0
$E_{7,4}^{(1)12}$		0
$E_{7,4}^{(1)28}$		0
$E_{7,1}^{(1)69}$		0
$E_{7,1}^{(1)133}$		0
${}^2E_{7,5}^{(1)}$		0

Table 2 (suite)

${}^2E_{7,3}^{(1)15}$		$(p_1 - p_6)$
${}^2E_{7,1}^{(1)63}$		0
${}^2E_{7,1}^{(1)78}$		0
$E_{8,9}^{(1)}$		0
$E_{8,5}^{(1)12}$		0
$E_{8,5}^{(1)28}$		0
$E_{8,1}^{(1)120}$		0
$E_{8,1}^{(1)136}$		0
$E_{8,1}^{(1)248}$		0
$F_{4,5}^{(1)}$		0
$F_{4,2}^{(1)9}$		0

Table 2 (suite)

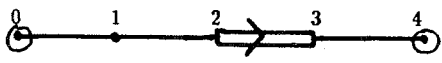
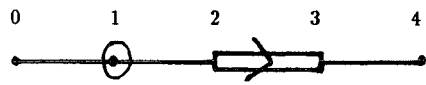
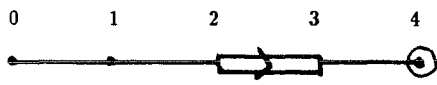
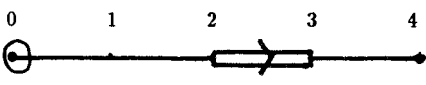
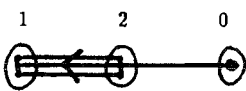
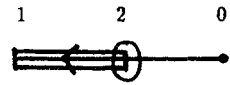
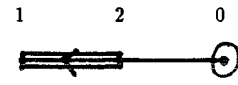
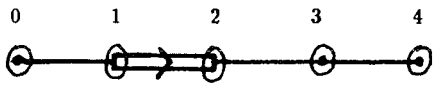
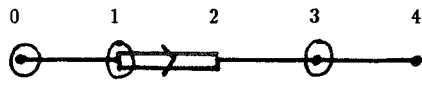
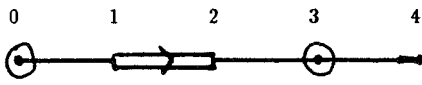
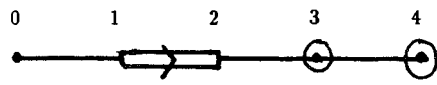
$F_{4,2}^{(1)21}$		0
$F_{4,1}^{(1)24}$		0
$F_{4,1}^{(1)36}$		0
$F_{4,1}^{(1)52}$		0
$G_{2,3}^{(1)}$		0
$G_{2,1}^{(1)6}$		0
$G_{2,1}^{(1)14}$		0
$E_{6,5}^{(2)}$		0
$E_{6,3}^{(2)6}$		0
$E_{6,2}^{(2)13}$		0
$E_{6,2}^{(2)21}$		0

Table 2 (suite et fin)

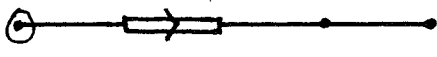
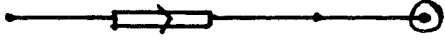
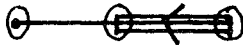

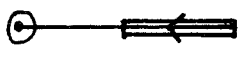
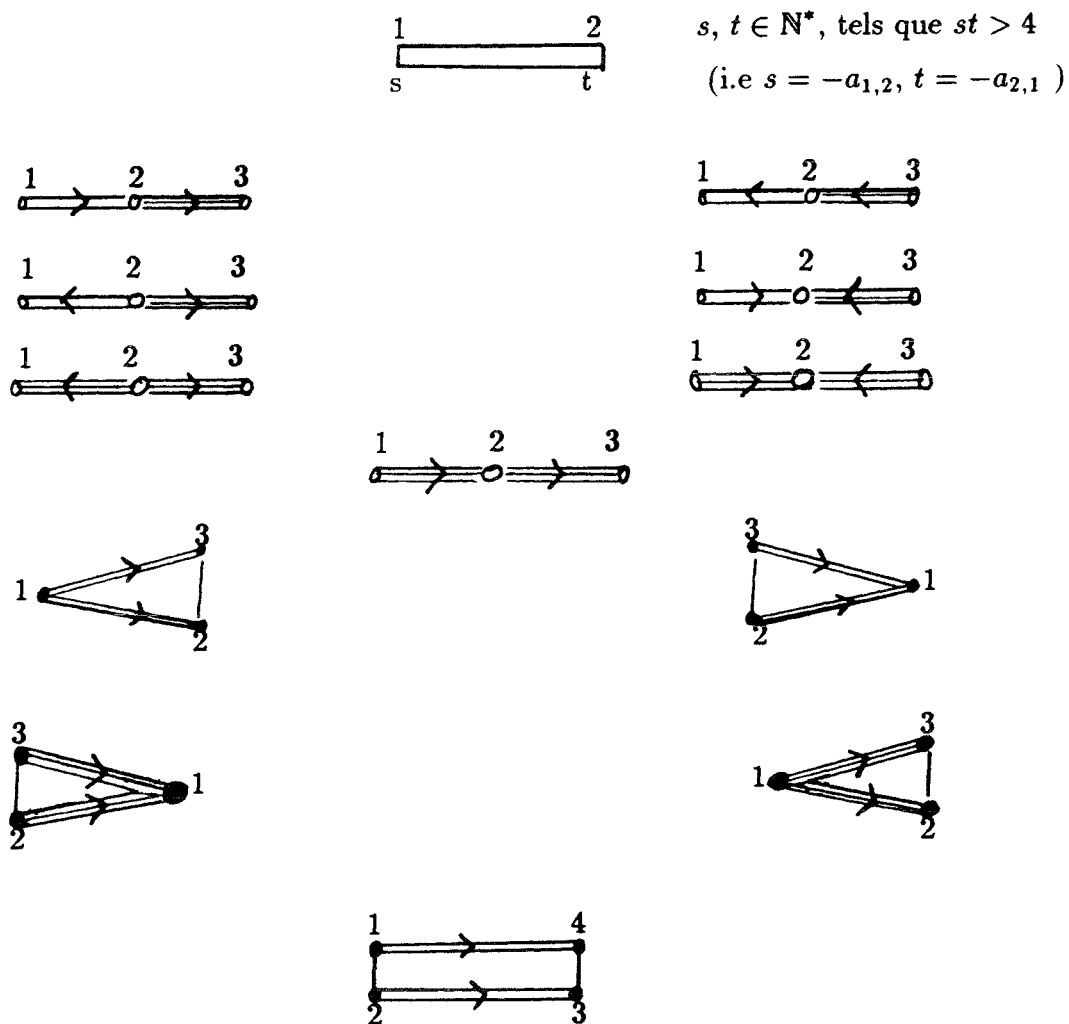
$E_{6,1}^{(2)36}$	<p>0 1 2 3 4</p> 	0
$E_{6,1}^{(2)52}$	<p>0 1 2 3 4</p> 	0
$D_{4,3}^{(3)}$	<p>0 1 2</p> 	0
$D_{4,1}^{(3)6}$	<p>0 1 2</p> 	0
$D_{4,1}^{(3)14}$	<p>0 1 2</p> 	0


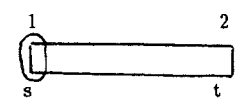
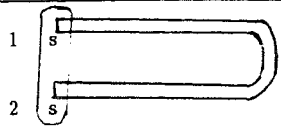
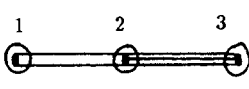
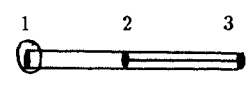
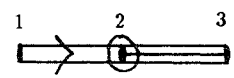
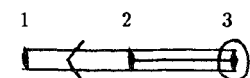

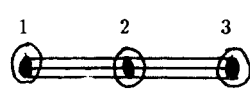

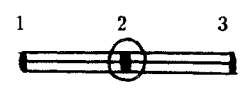
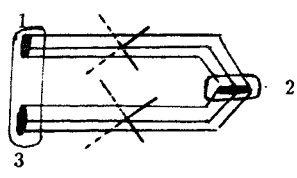
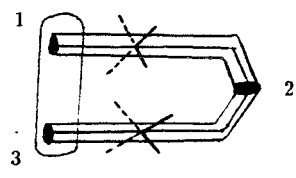
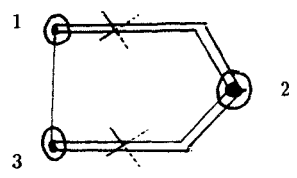
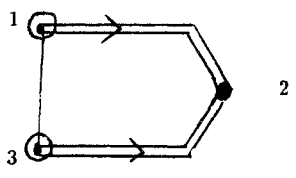
Table 3

Liste des diagrammes strictement hyperboliques et symétrisables (*)



(*) On suit la convention précisée en $[B_3R, 3.6.e]$

Table 4

Indice	$2\bar{\rho}_X$	Indice	$2\bar{\rho}_X$
	0		0
	0		
	0		0
	0		0
	0		0
	0		0
	0		$p_1 - p_3$
	0		0

(*) Le sens des flèches non indiquées sur les liaisons doubles ou triples n'a pas d'influence.

Table 4 (suite et fin)

Indice	$2\bar{\rho}_X$	Indice	$2\bar{\rho}_X$
	0		0
	0		$p_1 - p_3$
	0		0
	0		0
	$p_1 - p_3$		0
	0		0
	0		0
	0		

(*) Le sens des flèches non indiquées sur les liaisons doubles ou triples n'a pas d'influence.

Deuxième partie

**Réalisations
des
automorphismes d'ordre fini et de première espèce
et des
formes réelles presque compactes
d'algèbres de Kac-Moody affines**

Chapitre I

Algèbres de Kac-Moody affines Réalizations et automorphismes d'ordre fini de première espèce

1. Réalisations:

1.1. Soient \bar{K} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive sur \bar{K} , θ_0 un automorphisme de \mathfrak{g} d'ordre divisant m , ϵ_m une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité dans \bar{K} et (\cdot, \cdot) une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et $(ad(\mathfrak{g})$ et θ_0)-invariante sur \mathfrak{g} (lorsque \mathfrak{g} est semi-simple (\cdot, \cdot) sera la forme de Killing).

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on pose:

$$\mathfrak{g}_j := \{x \in \mathfrak{g}; \theta_0(x) = \epsilon_m^j x\}$$

ce sous espace de \mathfrak{g} ne dépend que de la classe de j modulo m et $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{g}_j$,

D'après Borel-Mostow ([BM]) θ_0 fixe un élément semi-simple régulier R de \mathfrak{g} . Notons \mathfrak{h} le centralisateur de R dans \mathfrak{g} ; alors \mathfrak{h} est une sous algèbre de Cartan θ_0 -stable de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h}_0 := (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)$ est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 .

Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie infinie:

$$l(\mathfrak{g}, \theta_0, \epsilon_m) := \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \mathfrak{g}_j) \right) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d$$

La structure d'algèbre de Lie sur \mathfrak{g} est telle que c est central et

$$[t^i \otimes x + \alpha d, t^j \otimes y] = t^{i+j} \otimes [x, y] + i\delta_{i,-j}(x, y)c + j\alpha t^j \otimes y$$

L'élément d agit diagonalement avec des valeurs propres entières et induit la \mathbb{Z} -graduation évidente sur \mathfrak{g} . Ainsi la sous algèbre $\mathfrak{h} := (1 \otimes \mathring{\mathfrak{h}}_0) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d$ est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Remarque: L'algèbre de Lie \mathfrak{g} ainsi définie est presque un produit d'algèbres de Kac-Moody affines; on l'appellera l'algèbre réductive affine associée au couple $(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_0)$, (cf [R₁]). Lorsque $\mathring{\mathfrak{g}}$ est simple on retrouve la réalisation des algèbres de Kac-Moody affines au sens de Kac, ([K]).

1.2. L'application translation : (cf [B₃R] ou [R₃])

On note:

1) $\mathfrak{g}^1 = (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_j)) \oplus \bar{K}c$ c'est une sous algèbre de \mathfrak{g} qui contient l'algèbre dérivée \mathfrak{g}' (et lui est égale si $\mathring{\mathfrak{g}}$ est semi-simple). De même $\bar{K}c$ est contenu dans le centre de \mathfrak{g}^1 ou \mathfrak{g}' (et leur est égal si $\mathring{\mathfrak{g}}$ est semi-simple).

2) \mathfrak{g}'' le \mathfrak{g}^1 -module $\mathfrak{g}^1 / \bar{K}c$ (identifié avec $(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_j))$) et \mathcal{T} l'application translation de \mathfrak{g}'' définie par:

$$\mathcal{T}(t^j \otimes x) = t^{j+m} \otimes x$$

L'application \mathcal{T} ainsi définie est un automorphisme de \mathfrak{g}^1 -modules.

L'application $\phi : \mathfrak{g}'' / (Id - \mathcal{T})\mathfrak{g}'' \longrightarrow \mathring{\mathfrak{g}}$ définie par :

$$\phi(t^j \otimes x) = (\epsilon_m)^j . x$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie et permet d'identifier ces deux algèbres.

(On peut en fait remplacer ϵ_m par n'importe quelle racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, mais on fixera ce choix pour la suite). En particulier si $\mathring{\mathfrak{g}}$ est simple $(Id - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ est un idéal propre maximal de \mathfrak{g}'' et d'après V.Back ([B₃R]), tout automorphisme de \mathfrak{g}^1 -modules T de \mathfrak{g}'' tel que $(Id - T)\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' est de la forme $T = a\mathcal{T}^{\pm 1}$, avec $a \in \bar{K}$.

1.3. Soient h un élément de $\mathring{\mathfrak{h}}_0$ à valeurs propres entières (via la représentation adjointe de $\mathring{\mathfrak{g}}$) et ϵ_{mp} une racine $p^{\text{ième}}$ de ϵ_m . On note H l'automorphisme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ défini par :

$$H(x) = (\epsilon_{mp})^N x, \quad \text{pour } x \in \mathring{\mathfrak{g}} \text{ tel que } [h, x] = Nx$$

L'automorphisme H ainsi défini commute à θ_0 , et $\theta := \theta_0 H$ est un automorphisme de \mathfrak{g} d'ordre divisant mp .

Quand $\bar{K} = \mathbb{C}$ et $\epsilon_{mp} = e^{\frac{2ik\pi}{mp}}$ on a : $H = \exp(\frac{2ik\pi}{mp} \text{ad } h)$.

On note \mathfrak{g}_1 l'algèbre de Kac-Moody réductive affine associée au triplet $(\mathfrak{g}, \theta, \epsilon_{mp})$, C et D les éléments de \mathfrak{g}_1 analogues de c et d dans \mathfrak{g} et \mathcal{T}_1 l'application translation de \mathfrak{g}_1'' .

Proposition 1.4. (cf [R₃] ou [B₃R])

L'application $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ définie par :

$$\psi(t^j \otimes x) = t^{pj+N} \otimes x + \delta_{j,0}(h, x)C; \quad \text{pour } x \in \mathfrak{g}_j \text{ tel que } [h, x] = Nx$$

$$\psi(c) = pC$$

$$\psi(d) = (D - h)/p$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie qui commute aux applications translations de \mathfrak{g}'' et \mathfrak{g}_1'' , (i.e. $\psi \mathcal{T} \psi^{-1} = \mathcal{T}_1$).

Corollaire 1.5.

Lorsque \mathfrak{g} est simple l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta_0, \epsilon_m)$ ne dépend (à un isomorphisme près) que du plus petit entier k tel que $(\theta_0)^k$ est intérieur. Dans ce cas l'algèbre de Kac-Moody affine \mathfrak{g} est dite de type Aff k .

Démonstration.

Il est assez facile (en adaptant la démonstration de [L] ou [B]) de démontrer que tout automorphisme d'ordre fini de \mathfrak{g} est de la forme $\theta_0 H$ ci-dessus avec θ_0 un automorphisme de diagramme, et il est alors clair que θ_0 est déterminé par k .

□

1.6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note:

i). $(\mathfrak{g})^n$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}$, (n fois).

ii). $(\cdot, \cdot)_n$ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $(\mathfrak{g})^n$ définie par :

$$((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))_n = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \dots + (x_n, y_n)$$

$$x_i, y_i \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

iii). η une racine $n^{\text{ième}}$ de ϵ_m , $\epsilon_n = \eta^m$ et θ_n l'automorphisme de $(\mathfrak{g})^n$ défini par :

$$\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_0(x_1)), \quad x_i \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

On a alors : $(\cdot, \cdot)_n$ est $(ad(\mathfrak{g})^n$ et $\theta_n)$ -invariante; $(\theta_n)^n = \theta_0 \times \theta_0 \times \dots \times \theta_0$ et n est la plus petite puissance de θ_n telle que $(\theta_n)^n$ stabilise tous les facteurs de $(\mathfrak{g})^n$; par conséquent $|\theta_n| = n |\theta_0|$, où $|\theta_i|$ est l'ordre de l'automorphisme θ_i , ($i = 0, n$).

Pour $j \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$(\mathfrak{g})_j^n := \{x \in (\mathfrak{g})^n, \theta_n(x) = \eta^j x\}$$

De la définition de θ_n on déduit :

$$(I) \quad (\mathfrak{g})_j^n = \{(x, \eta^j x, \eta^{2j} x, \dots, \eta^{(n-1)j} x), x \in \mathfrak{g}\}$$

En effet, soit $y = (x_1 = x, x_2, \dots, x_n) \in (\mathfrak{g})_j^n$, on a :

$$\eta^j y = \theta_n(y) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_0(x))$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} x_{i+1} &= \eta^j x_i & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \theta_0(x) &= \eta^j x_n \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_{i+1} &= \eta^{ij} x & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \theta_0(x) &= \eta^{nj} x = (\epsilon_m)^j x \end{cases}$$

L'inclusion dans l'autre sens est évidente et on a l'égalité entre les deux ensembles de (I).

□

Enfin on note ${}_n\mathfrak{g}$ l'algèbre réductive affine associée au triplet $((\mathfrak{g})^n, \theta_n, \eta)$; c_n , d_n , ${}_n\mathfrak{g}''$, ${}_n\mathfrak{g}^1$ et \mathcal{T}_n les éléments, sous quotients ou application relatifs à ${}_n\mathfrak{g}$ analogues à c , d , \mathfrak{g}'' , \mathfrak{g}^1 et \mathcal{T} pour \mathfrak{g} .

Proposition 1.7.

1) L'application $\phi_n : \mathfrak{g} \longrightarrow {}_n\mathfrak{g}$ définie par:

$$\phi_n(t^j \otimes x) = t^j \otimes (x, \eta^j x, \dots, \eta^{(n-1)j} x)$$

$$\phi_n(c) = nc_n$$

$$\phi_n(d) = d_n$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie, de plus on a: $\phi_n \mathcal{T}^n \phi_n^{-1} = \mathcal{T}_n$

2) L'automorphisme de ${}_n \mathfrak{g}^1$ -module $\phi_n \mathcal{T} \phi_n^{-1}$ commute à l'application translation \mathcal{T}_n et induit par passage au quotient un automorphisme d'espaces vectoriels de $(\mathring{\mathfrak{g}})^n$ (identifiée avec ${}_n \mathfrak{g}'' / (Id - \mathcal{T}_n) {}_n \mathfrak{g}''$, (voir (1.2))) d'ordre divisant n et qui agit de la manière suivante :

$$\phi_n \mathcal{T} \phi_n^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\epsilon_n \cdot x_1, (\epsilon_n)^2 \cdot x_2, \dots, x_n); \quad (\epsilon_n := \eta^m)$$

En particulier pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $\phi_n \mathcal{T} \phi_n^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\epsilon_n)^j (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si et seulement si $x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.

Démonstration.

D'après la relation (I) (voir (1.6)), il est clair que ϕ_n est bien définie, bijective et vérifie $\phi_n \mathcal{T}^n \phi_n^{-1} = \mathcal{T}_n$. D'autre part l'assertion 2) résulte aussitôt de l'assertion 1). Il reste donc à montrer que ϕ_n est un homomorphisme d'algèbres de Lie .

Soit $(x, y) \in \mathring{\mathfrak{g}}_i \times \mathring{\mathfrak{g}}_j, (i, j \in \mathbb{Z})$, et posons $z = [x, y], X_n = (x, \eta^i x, \dots, \eta^{(n-1)i} x), Y_n = (y, \eta^j y, \dots, \eta^{(n-1)j} y)$, et $Z_n = (z, \eta^{i+j} z, \dots, \eta^{(n-1)(i+j)} z)$, alors on a:

$$i). \phi_n([t^i \otimes x, t^j \otimes y]) = \phi_n(t^{i+j} \otimes z + i\delta_{i,-j}(x, y)c) = t^{i+j} \otimes Z_n + i\delta_{i,-j}(x, y)(n \cdot c_n) \quad (1)$$

d'autre part

$$[\phi_n(t^i \otimes x), \phi_n(t^j \otimes y)] = [t^i \otimes X_n, t^j \otimes Y_n] = t^{i+j} \otimes Z_n + i\delta_{i,-j}(X_n, Y_n)_n \cdot c_n \quad (2)$$

comme $\delta_{i,-j}(X_n, Y_n)_n = n\delta_{i,-j}(x, y)$, on a l'égalité entre (1) et (2)

$$ii). \phi_n([d, t^i \otimes x]) = \phi_n(it^i \otimes x) = it^i \otimes X_n \quad (1)'$$

$$[\phi_n(d), \phi_n(t^i \otimes x)] = [d_n, t^i \otimes X_n] = it^i \otimes X_n \quad (2)'$$

d'où l'égalité entre (1)' et (2)' .

Par suite ϕ_n est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

□

2. Automorphismes d'ordre fini et de première espèce d'algèbres de Kac-Moody affines

2.1. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Kac-Moody affine et $(\mathfrak{h}, e_i, f_i, i \in I)$ le système correspondant de générateurs. D'après Kac ([K]), \mathfrak{g} se réalise comme un $\mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k)$, où $\mathring{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie simple sur \bar{K} et ξ est un automorphisme de diagramme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ d'ordre k . Une telle réalisation est appelée la réalisation standard de \mathfrak{g} .

Un automorphisme linéaire ou semi-linéaire de \mathfrak{g} est dit de première (resp deuxième) espèce s'il conserve (resp ne conserve pas) la classe de conjugaison d'une sous algèbre de Borel de \mathfrak{g} . Il suffit pour cela qu'il vérifie cette même condition avec à la place d'une sous algèbre de Borel une sous algèbre parabolique propre.

Il y a une manière assez simple de construire des automorphismes de première espèce de la réalisation $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta_0, \epsilon_m)$ de \mathfrak{g} . Soit σ_0 un automorphisme de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ qui commute avec θ_0 ; alors $\sigma := 1 \otimes \sigma_0$ est un automorphisme de première espèce de \mathfrak{g} (l'action de σ est telle que $\sigma(t^i \otimes x) = t^i \otimes \sigma_0(x)$ et σ fixe c et d); ainsi σ fixe la sous algèbre parabolique propre $(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} (t^j \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_j) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d)$; de plus σ est d'ordre fini si et seulement si σ_0 l'est.

A la fin de ce paragraphe, on démontre que pour des choix convenables de la réalisation de \mathfrak{g} on obtient ainsi tous les automorphismes de première espèce et d'ordre fini de \mathfrak{g} .

Soit σ un automorphisme de première espèce de \mathfrak{g} d'ordre s . D'après Levstein ([L]), σ stabilise une paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_+)$ formée d'une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h} et d'une sous algèbre de Borel positive \mathfrak{b}_+ contenant \mathfrak{h} . Ainsi \mathfrak{h}^σ est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g}^σ et deux telles sous algèbres de Cartan sont conjuguées par un automorphisme intérieur commutant avec σ (cf [R₂] ou [KW]). Quitte à prendre un conjugué de σ par un automorphisme intérieur on peut supposer que $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_+)$ est la paire standard.

Proposition 2.2.

Il existe une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ préserve la \mathbb{Z} -graduation. Plus précisément cette réalisation est de la forme $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, \epsilon_m)$, avec $m = ks$ et $(\epsilon_m)^s = \epsilon_k$

Démonstration.

On regarde l'automorphisme σ sur la réalisation standard de \mathfrak{g} . Comme il est de première espèce il induit l'identité sur le centre $\bar{K}c$ de \mathfrak{g} et sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ (identifiée avec $\bar{K}d$), (cf [R₂], Lemme 2.8.). Par conséquent il existe $h' \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ tel que $\sigma(d) = d + h'$ (car \mathfrak{h} est σ -stable et \mathfrak{h} contient d). σ est d'ordre s et la relation $(\sigma^s(d) = d)$ équivaut à la relation suivante :

$$h' + \sigma(h') + \dots + \sigma^{s-1}(h') = 0 \quad (1)$$

Compte tenu de la relation (1) σ fixe $sd + \sum_{i=0}^{s-2} (s-i-1)\sigma^i(h')$

Comme d est à valeurs propres entières (via la représentation adjointe) il en est de même pour $\sigma(d)$ et h' et donc pour $h := \sum_{i=0}^{s-2} (s-i-1)\sigma^i(h')$.

L'action adjointe de h ne dépend que de la classe \bar{h} de h dans $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}')/\bar{K}c$ (identifiée à une sous algèbre de Cartan de $(\mathfrak{g})^\xi :=$ la sous algèbre de points fixes de ξ).

Soit ϵ_{sk} une racine $s^{i\bar{m}e}$ de ϵ_k . On note H l'automorphisme de \mathfrak{g} commutant à ξ et défini à partir de \bar{h} et de ϵ_{sk} comme dans (1.3). On pose $\theta := \xi H$, $m := sk$ et $\epsilon_m := \epsilon_{sk}$.

D'après la proposition 1.4. la réalisation $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, \epsilon_m) := (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \mathfrak{g}_j)) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d$ est isomorphe à la réalisation standard de \mathfrak{g} . En regardant cet isomorphisme et en tenant compte du fait que σ fixe $sd + h$ on s'aperçoit que l'automorphisme σ regardé sur la réalisation $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, \epsilon_m)$ fixe D modulo le centre; comme par ailleurs il fixe le centre et est d'ordre fini il fixe D et donc il respecte la \mathbb{Z} -graduation.

□

Proposition 2.3.

Il existe une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ respecte la \mathbb{Z} -graduation et commute à l'application translation. Plus précisément cette réalisation est de la forme $\mathfrak{l}((\mathfrak{g})^n, \theta_n, \epsilon_{m_n})$ construite en 1.6, avec n un diviseur de l'ordre s de σ .

Démonstration.

Soient $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta_0, \epsilon_m) := (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \mathfrak{g}_j)) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d$ une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ fixe d (et donc respecte la \mathbb{Z} -graduation, (cf proposition 2.2.)) et T son application translation. On regarde σ sur cette réalisation. $\sigma T \sigma^{-1}$ est un automorphisme de \mathfrak{g}' -module de \mathfrak{g}'' . Comme \mathfrak{g} est simple, $(Id - T)\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' et donc $(Id - \sigma T \sigma^{-1})\mathfrak{g}''$ l'est aussi, par conséquent il existe $(\alpha, a) \in \{-1, 1\} \times \bar{K}$ tel que $\sigma T \sigma^{-1} = aT^\alpha$ (cf (1.2)). Comme σ est de première espèce et d'ordre s on a nécessairement $\alpha = 1$ (cf [R₃]) et $a^s = 1$. Soit n le plus petit entier tel que $a^n = 1$. D'après la proposition 1.7. l'automorphisme σ regardé sur la réalisation associée au couple $((\mathfrak{g})^n, \theta_n)$ (voir (1.6) pour les notations) respecte la graduation et commute

à l'application translation.

□

Théorème 2.4.

On conserve les notations de 2.1, 2.2 et 2.3.

Il existe un automorphisme σ_0 d'ordre s de $(\mathring{\mathfrak{g}})^n$ qui commute avec θ_n et tel que $1 \otimes \sigma_0$ soit égal à σ sur la réalisation $\mathfrak{l}((\mathring{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \epsilon_{mn})$. Plus précisément, il existe un automorphisme u d'ordre fini de $\mathring{\mathfrak{g}}$ qui commute avec θ_0 et un entier $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tels que :

$$\sigma_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

avec

$$\begin{cases} y_i &= u(x_{n-l+i}) & 1 \leq i \leq l \\ y_{l+i} &= u\theta_0(x_i) & 1 \leq i \leq n-l \end{cases}$$

Démonstration.

D'après les démonstrations précédentes, σ regardé sur la réalisation $\mathfrak{l}((\mathring{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \epsilon_{mn})$ fixe $\bar{K}c_n \oplus \bar{K}d_n$ commute à l'application translation et induit par passage au quotient sur $(\mathring{\mathfrak{g}})^n$ un automorphisme σ_0 d'ordre s (cf (1.2)).

L'automorphisme σ_0 respecte la $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ -graduation de $(\mathring{\mathfrak{g}})^n$, il commute donc avec θ_n et on a nécessairement $\sigma = 1 \otimes \sigma_0$.

Soit \mathcal{T} l'application translation de $\mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_0, \epsilon_m)$, d'après la démonstration précédente, \mathcal{T} vérifie $\sigma\mathcal{T}\sigma^{-1} = a\mathcal{T}$ où a est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans \bar{K} . Regardée sur la réalisation $\mathfrak{l}((\mathring{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \epsilon_{mn})$, l'application translation \mathcal{T} induit sur $(\mathring{\mathfrak{g}})^n$ un automorphisme d'espaces vectoriels d'ordre n qu'on note encore \mathcal{T} . On a alors

$$\sigma_0\mathcal{T}\sigma_0^{-1} = a\mathcal{T} \quad (1)$$

Pour $j = 1, \dots, n$, on note $(\mathring{\mathfrak{g}})^n(j) = \{x \in (\mathring{\mathfrak{g}})^n; \mathcal{T}(x) = (\epsilon_n)^j x\}$; avec $\epsilon_n = (\epsilon_{mn})^m$. D'après la proposition 1.7 on a :

$$(\mathring{\mathfrak{g}})^n(j) = \{(0, 0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0); x_j \in \mathring{\mathfrak{g}}\}$$

Soit $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $a^{-1} = (\epsilon_n)^l$. De la relation (1) on en déduit que

$$\sigma_0((\mathring{\mathfrak{g}})^n(j)) = (\mathring{\mathfrak{g}})^n(j+l)$$

(où $j + l$ est considéré modulo n)

D'où σ_0 permute les composantes simples de $(\mathfrak{g})^n$ et il existe n automorphismes d'algèbres de Lie $u_1 = u, u_2, \dots, u_n$ de \mathfrak{g} tels que :

$$\sigma_0(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_{n-l+1}), u_2(x_{n-l+2}), \dots, u_l(x_n), u_{l+1}(x_1), \dots, u_n(x_{n-l}))$$

Le fait que σ_0 commute avec θ_n équivaut à la relation suivante :

$$\begin{cases} u_i = u & 1 \leq i \leq l \\ u_{l+i} = u\theta_0 = \theta_0 u & 1 \leq i \leq n-l \end{cases}$$

De l'expression de σ_0 (qui est d'ordre fini) on déduit qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^i(\theta_0)^j = id$, comme θ_0 est d'ordre fini, l'automorphisme u de \mathfrak{g} l'est aussi. D'où le résultat. □

Corollaire 2.5.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Kac-Mody affine et σ un automorphisme de \mathfrak{g} d'ordre fini et de première espèce. Alors la sous algèbre \mathfrak{g}^σ de points fixes de \mathfrak{g} sous σ est une algèbre réductive affine.

Remarque: *On obtient ainsi assez facilement et d'une manière plus précise l'un des résultats les plus techniques de [B] .*

Démonstration.

D'après le théorème 2.4, il existe une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} et deux automorphismes d'ordre fini σ_0 et θ qui commutent entre eux tels que $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, \epsilon_{|\theta|})$ soit une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ est égal à $1 \otimes \sigma_0$. Par conséquent on a : $\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{l}((\mathfrak{g})^{\sigma_0}, \theta, \epsilon_{|\theta|})$. Comme $(\mathfrak{g})^{\sigma_0}$ est réductive on a le résultat. □

Chapitre II

Formes réelles presque compactes d'algèbres de Kac-Moody affines

Le but de ce chapitre est de donner une description plus détaillée des formes réelles presque compactes d'algèbres de Kac-Moody affines complexes et un procédé de construction de sous algèbres toriques déployées maximales (en abrégé *SATDM*) en se basant sur les résultats de Rousseau ([R₂]) sur ces formes, ceux de Bausch-Rousseau ([BR]) sur les involutions de première espèce et ceux du chapitre précédent.

1. Généralités

1.1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Kac-Moody affine complexe et $l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k) (= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}) \oplus$

$\mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d)$ sa réalisation standard. Fixons $(\overset{\circ}{e}_i, \overset{\circ}{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n)$ un système de générateurs de Chevalley de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ sur lequel ξ agit comme un automorphisme de diagramme d'ordre k . Soit $\overset{\circ}{\omega}$ l'involution de Cartan de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ ($\overset{\circ}{\omega}(\overset{\circ}{e}_i) = -\overset{\circ}{f}_i$, et $(\overset{\circ}{\omega})^2 = id$) et posons $\overset{\circ}{\alpha}_i = [\overset{\circ}{e}_i, \overset{\circ}{f}_i]$ et $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}\overset{\circ}{\alpha}_i$. Alors $\mathfrak{h} := 1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} dite la sous algèbre de Cartan standard de \mathfrak{g} .

On note $\overset{\circ}{\Delta}$ (resp Δ) le système de racines $\Delta(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\mathfrak{h}})$ (resp $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$).

On rappelle que si $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est de type X_n alors \mathfrak{g} est de type $X_n^{(k)}$.

1.2. (cf [K] ou [B])

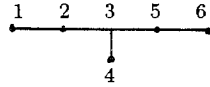
Il existe sur \mathfrak{h} une forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui induit un isomorphisme $\nu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ et donc une forme bilinéaire symétrique sur \mathfrak{h}^* .

Cette forme se prolonge en une unique forme bilinéaire symétrique B sur \mathfrak{g} vérifiant :

- i) B est invariante (i.e $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$; $x, y, z \in \mathfrak{g}$)
- ii) $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$; $\alpha, \beta \in \Delta$
- iii) $B/\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ est non dégénérée pour $\alpha \in \Delta$
- iv) $[x, y] = B(x, y)\nu^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$

1.3. (cf [B])

Soit J un système de représentants des orbites de ξ dans $\{1, \dots, n\}$; on peut supposer que $J = \{1, \dots, l\}$, avec $l \leq n$. Pour cela on choisit la numérotation de Bourbaki ([BBK]) sauf dans le cas $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ de type E_6 et ξ d'ordre 2 où l'on choisit la numérotation suivante :



Pour $i = 1, \dots, l$ on pose :

- i) n_i le cardinal de l'orbite de $\overset{\circ}{\alpha} \check{i}$ ou de i
- ii) $e_i = \overset{\circ}{e}_i + \xi(\overset{\circ}{e}_i) + \dots + \xi^{n_i-1}(\overset{\circ}{e}_i)$ sauf dans les cas de $A_{2l}^{(2)}$ où $e_l = \sqrt{2}(\overset{\circ}{e}_l + \overset{\circ}{e}_{l+1})$.
- iii) $f_i = \overset{\circ}{\omega}(e_i)$
- iv) $\alpha \check{i} = [e_i, f_i]$

Ainsi $(e_i, f_i, i = 1, \dots, l)$ est un système de générateurs de Chevalley de l'algèbre de Lie simple $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_0$.

1.4. Il existe un unique poids $\bar{\theta}_0 \in (\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0)^*$ du $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_0$ -module $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_1$ qui soit de hauteur maximale (cf [K] ou [B]). On choisit $E_0 \in (\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_1)_{-\bar{\theta}_0}$ et on pose :

$$F_0 = -\overset{\circ}{\omega}(E_0), \quad e_0 = t \otimes E_0, \quad f_0 = t^{-1} \otimes F_0 \text{ et } \alpha_0 = [e_0, f_0].$$

On normalise de façon convenable E_0 et la forme invariante sur $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ (cf [K]).

Alors $(\mathfrak{h}, e_i, f_i, i = 0, 1, \dots, l)$ est un système générateur de \mathfrak{g} . La numérotation de ces générateurs est la même que celle de Kac ([K]) sauf dans le cas $A_{2l}^{(2)}$ où elle est inversée.

On définit $\delta \in \mathfrak{h}^*$ en posant $\delta/\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0 \oplus \mathbb{C}_c = 0$ et $\langle \delta, d \rangle = 1$.

Soit $\overset{\circ}{\Delta}_j$ l'ensemble des poids du $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_0$ -module $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_j$, il ne dépend donc que de j modulo k . Pour $\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_j$ on prolonge α sur \mathfrak{h} en posant $\alpha/\mathbb{C}_c \oplus \mathbb{C}_d = 0$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= \{j\delta + \alpha, j \in \mathbb{Z}, \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_j\} \cup \{j\delta, j \in \mathbb{Z}^*\} \\ \mathfrak{g}_{j\delta + \alpha} &= t^j \otimes (\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_j)_\alpha \\ \mathfrak{g}_{j\delta} &= t^j \otimes (\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_j)\end{aligned}$$

1.5. Soit α_i ($i = 1, \dots, l$) le poids de Δ ou de $\overset{\circ}{\Delta}_0$ correspondant à e_i (on identifie $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_0$ avec $1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_0$) et posons $\alpha_0 = \delta - \bar{\theta}_0$. La famille $\overset{\circ}{\Pi} = (\alpha_i)_{i=1, \dots, l}$ définit une base de racines de $\overset{\circ}{\Delta}_0$, c'est aussi une base de racines de $\Delta(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0)$. Soient $(a_i)_{i=1, \dots, l}$ les coordonnées de $\bar{\theta}_0$ dans cette base (les coefficients $a_0 = 1, a_1, \dots, a_l$ sont ceux figurant sur le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} si on tient compte de la numérotation choisie pour $A_{2l}^{(2)}$) et $(\overset{\circ}{p}_i)_{i=1, \dots, l}$ une base de $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0$ duale de la base $(\alpha_i)_{i=1, \dots, l}$. (Cette notation diffère de celle de [B_3R , §5]).

Alors on a : $\langle \alpha_0, \overset{\circ}{p}_i \rangle = -a_i, \quad i = 1, \dots, l$.

La famille $\Pi = (\alpha_i)_{i=0, 1, \dots, l}$ est une base de racines de Δ ; en posant $p_0 = d$ et $p_i = \overset{\circ}{p}_i + a_i d, \quad i = 1, \dots, l$ on obtient une famille libre $(p_i)_{i=0, 1, \dots, l}$ d'éléments de \mathfrak{h} vérifiant : $\langle \alpha_i, p_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, l$.

Notons ω (resp ω') l'involution de Cartan standard (resp la semi-involution de Cartan standard) de \mathfrak{g} ($\omega(e_i) = \omega'(e_i) = -f_i, \quad \omega(d) = \omega'(d) = -d$ et $\omega^2 = \omega'^2 = id$).

On appelle *semi-involution de Cartan* tout conjugué de ω' par un automorphisme de \mathfrak{g} .

Pour une semi-involution $\overset{\circ}{\sigma}'$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ qui commute avec ξ on note $\iota \otimes \overset{\circ}{\sigma}'$ la semi-involution de \mathfrak{g} définie par :

$$\iota \otimes \overset{\circ}{\sigma}' (t^j \otimes x) = t^{-j} \otimes \overset{\circ}{\sigma}' (x), \quad \iota \otimes \overset{\circ}{\sigma}' (c) = -c \text{ et } \iota \otimes \overset{\circ}{\sigma}' (d) = -d.$$

Ainsi on a : $\omega' = \iota \otimes \overset{\circ}{\omega}'$ où $\overset{\circ}{\omega}'$ est la semi-involution de Cartan standard de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$.

Soit $\mathfrak{l}((\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \eta)$ une réalisation de \mathfrak{g} construite comme en I.1.6, on note $\overset{\circ}{\omega}'_n$ la semi-involution de Cartan $\overset{\circ}{\omega}' \times \overset{\circ}{\omega}' \times \dots \times \overset{\circ}{\omega}'$ de $(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^n$ (qui commute à θ_n) et $\omega'_n := \iota \otimes \overset{\circ}{\omega}'_n$. ω'_n est appelée la semi-involution de Cartan standard de $\mathfrak{l}((\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \eta)$.

Remarque : Si on regarde les différents isomorphismes entre les réalisations de \mathfrak{g} (cf chap I 1.4 et 1.7) on constate que ces isomorphismes échangent les semi-involutions de Cartan standards.

1.6. On sait qu'une forme réelle de \mathfrak{g} correspond à une semi-involution de \mathfrak{g} .

la forme est dite presque compacte lorsque la semi-involution correspondante est de deuxième espèce. La forme compacte (correspondant à la semi-involution de Cartan standard) est presque compacte.

Soit $\overset{\circ}{\sigma}'$ une semi-involution de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ commutant avec ξ , alors la semi-involution $\sigma' := \iota \otimes \overset{\circ}{\sigma}'$ est de deuxième espèce (elle échange en effet la sous algèbre parabolique propre $(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} (\iota^j \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_j) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d)$ en son opposée) et donc la forme réelle correspondante est presque compacte.

Dans le paragraphe suivant on démontre qu'en fixant une sous algèbre de Cartan maximale compacte et pour un bon choix de la réalisation de \mathfrak{g} toute forme réelle presque compacte de \mathfrak{g} s'obtient de cette façon.

2. Réalisation des formes réelles presque compactes d'algèbres de Kac-Moody affines

définition 2.1.

Soit σ' une semi-involution de deuxième espèce de \mathfrak{g} , une sous algèbre de Cartan σ' -stable \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est dite maximale compacte si $-\sigma'$ stabilise une base de racines de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

D'après ([R₂]) une telle sous algèbre existe, mais malheureusement on ne sait pas encore si deux telles sous algèbres sont conjuguées par un automorphisme intérieur qui commute avec σ' ou non.

Théorème 2.2. (cf [R₂])

On considère :

- 1) les involutions de première espèce de \mathfrak{g} .
- 2) les paires (σ', \mathfrak{h}) formées d'une semi-involution de deuxième espèce σ' et d'une sous algèbre de Cartan maximale compacte \mathfrak{h} .
- 3) la relation $(\sigma', \mathfrak{h}) \sim \sigma$ si et seulement si σ commute à σ' , stabilise \mathfrak{h} et $\sigma\sigma'$ est une semi-involution de Cartan de \mathfrak{g} .

Cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison (sous le groupe $Int(\mathfrak{g})$ des automorphismes intérieurs ou $Aut(\mathfrak{g})$ de tous les automorphismes) des involutions de première espèce et des paires (σ', \mathfrak{h}) .

2.3. Soient σ' une semi-involution de deuxième espèce de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} une sous algèbre de Cartan maximale compacte pour σ' et σ l'involution de première espèce

correspondant à la paire (σ', \mathfrak{h}) . En conjuguant σ' par un automorphisme intérieur on peut supposer que \mathfrak{h} est la sous algèbre de Cartan standard et que $\omega' := \sigma\sigma'$ est la semi-involution de Cartan standard de \mathfrak{g} .

Comme \mathfrak{h} est maximale compacte pour σ' il existe une base de racines Π de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur laquelle σ agit par un automorphisme de diagramme ρ d'ordre 1 ou 2; par conséquent σ s'écrit sous la forme : $\sigma = \rho H = H\rho$ avec $H = \exp(i\pi ad(h))$ où $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} := \{h \in \mathfrak{h} / \alpha(h) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\}$. On peut écrire $h = \epsilon d + h'$, avec $\epsilon \in \{0, 1\}$ et $h' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \cap \mathfrak{g}'$ et on peut supposer que h est fixé par ρ , (cf [B] ou [L]).

Lemme 2.4. (on conserve les notations de 2.3)

1) Si $\epsilon = 0$ ou $k = 2$ (i.e \mathfrak{g} est de type *Aff2*) alors l'involution intérieure H respecte la \mathbb{Z} -graduation de $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k)$, commute à l'application translation sur \mathfrak{g}'' et il existe une involution intérieure $\overset{\circ}{H}$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ qui commute à ξ telle que :

$$H = 1 \otimes (\xi^{\epsilon} \overset{\circ}{H}) \text{ sur } \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k).$$

2) Si $\epsilon = 1$ et $k \neq 2$ alors l'involution intérieure H induit sur \mathfrak{g}'' une application $\mathbb{C}[t^k, t^{-k}]$ -semi-linéaire (par rapport à l'automorphisme $t \rightarrow -t$ de cette algèbre) et donc elle est $\mathbb{C}[t^{2k}, t^{-2k}]$ -linéaire.

Regardée sur la réalisation $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi_2, \epsilon_{2k})$, (où $\xi_2(x, y) = (y, \xi(x))$ et ϵ_{2k} est une racine carrée de ϵ_k) l'involution intérieure H respecte la \mathbb{Z} -graduation et commute à l'application translation. Il existe donc un automorphisme v de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ commutant avec ξ tel que $H = 1 \otimes \overset{\circ}{\sigma}$ sur $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi_2, \epsilon_{2k})$,

$$\text{avec } \overset{\circ}{\sigma}(x, y) = (v(y), \xi v(x)) \text{ et } v^2 = \xi^{-1}.$$

Démonstration.

L'involution H fixe d et respecte donc la \mathbb{Z} -graduation de $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k)$. L'élément d agit sur le \mathfrak{g}' -module \mathfrak{g}'' et on a $[d, T] = kT$, par conséquent $HTH^{-1} = (-1)^{\epsilon k} T$. Dans le cas $k = 2$ il est clair que $\exp(i\pi ad(d)) = 1 \otimes \xi$. Soit $\overset{\circ}{h}$ la classe de h' modulo le centre; en identifiant $\overset{\circ}{h}$ avec un élément de $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0$ qu'on note encore $\overset{\circ}{h}$ et en notant $\overset{\circ}{H}$ l'involution $\exp(i\pi ad(\overset{\circ}{h}))$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ on a : $\exp(i\pi ad(h')) = 1 \otimes \overset{\circ}{H}$. D'où l'assertion 1). L'assertion 2) est également claire d'après ces calculs et I.1.7 sauf en ce qui concerne la dernière phrase qui s'obtient en adaptant la technique de la

démonstration de la proposition 2.3 et du théorème 2.4 (chap I).

□

Proposition 2.5.

1) Tout automorphisme de diagramme de \mathfrak{g} est $\mathbb{C}[t^k, t^{-k}]$ -linéaire (et donc commute à l'application translation) sauf dans le cas de $A_{2l}^{(1)}$ où il existe un automorphisme de diagramme ρ_1 ($\rho_1(0) = 0$ et $\rho_1(i) = 2l - i + 1$, $i = 1, \dots, 2l$) qui est $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -semi-linéaire (par rapport à l'automorphisme $t \rightarrow -t$ de cette algèbre) et donc il est $\mathbb{C}[t^2, t^{-2}]$ -linéaire.

2) Regardé sur la réalisation $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ de $A_{2l}^{(1)}$ ($\theta(x, y) = (y, x)$) ρ_1 respecte la \mathbb{Z} -graduation et commute à l'application translation. De plus il existe un automorphisme u de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, tel que:

$$\rho_1 = 1 \otimes \overset{\circ}{\sigma} \text{ sur } \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1), \text{ avec } \overset{\circ}{\sigma}(x, y) = (u(y), u(x)) \text{ et } u^2 = id.$$

Démonstration.

L'assertion 1) est un résultat de Bausch ([B]), la deuxième assertion est une conséquence du théorème 2.4 (chap I).

□

Proposition 2.6.

Tout automorphisme de diagramme involutif ρ de \mathfrak{g} respecte la \mathbb{Z} -graduation de $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k)$ sauf dans le cas où $\rho(0) \neq 0$. Dans un tel cas on a $\rho(0) = i$, $i \neq 0$, $\rho(\overset{\circ}{p}_i) = -\overset{\circ}{p}_i$ (modulo le centre).

Regardé sur la réalisation $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi \exp(\frac{i\pi}{k} ad(\overset{\circ}{p}_i)), \epsilon_{2k})$ l'automorphisme de diagramme ρ respecte la \mathbb{Z} -graduation.

Démonstration.

La famille $(p_i)_{i=0,1,\dots,l}$, (cf 1.5) est définie modulo le centre de \mathfrak{g} . Soit ρ un automorphisme de diagramme de \mathfrak{g} , alors on a : $\rho(d = p_0) = p_{\rho(0)} + \lambda c$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $\rho(0) = 0$, alors $\rho(d) = d$ (car ρ est d'ordre fini) et donc il respecte la \mathbb{Z} -graduation de $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k)$.

Si $\rho(0) = i$, $i \neq 0$, alors $\rho(d) = d + \overset{\circ}{p}_i + \lambda_i c$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Comme ρ est involutif $\rho(\overset{\circ}{p}_i + \lambda_i c) = -(\overset{\circ}{p}_i + \lambda_i c)$ et donc $\rho(\overset{\circ}{p}_i) = -\overset{\circ}{p}_i$ modulo $\mathbb{C}c$.

Avec la même technique utilisée dans la proposition 2.2 (chap I) on montre que ρ regardé sur la réalisation $l(\mathfrak{g}, \xi \exp(\frac{i\pi}{k} \text{ad}(\mathring{p}_i)), \epsilon_{2k})$ respecte la \mathbb{Z} -graduation.

□

2.7. Revenons à l'involution de première espèce $\sigma = \rho H = H\rho$ de (2.3). On va décrire la réalisation de \mathfrak{g} adaptée à σ , c'est à dire la réalisation $l(\mathring{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ de \mathfrak{g} sur laquelle σ respecte la \mathbb{Z} -graduation et commute à l'application translation et donc telle qu'il existe un automorphisme involutif $\mathring{\sigma}$ de $\mathring{\mathfrak{s}}$ commutant avec θ et vérifiant $\sigma = 1 \otimes \mathring{\sigma}$ sur $l(\mathring{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ (cf chap I, Th 2.4).

D'abord on regarde σ sur la réalisation standard $l(\mathfrak{g}, \xi, \epsilon_k)$ de \mathfrak{g} .

Il est clair que : $\sigma(d) = \rho(d)$ et $\sigma T \sigma^{-1} = (-1)^{k\epsilon} \rho T \rho^{-1} = (-1)^{(k\epsilon+\alpha)} T$, où α est un entier pair sauf dans le cas $A_{2l}^{(1)}$ où il peut être égal à 1 (cf Prop 2.5.). En particulier si $\epsilon = 0$ ou $k = 2$ la réalisation adaptée à σ est celle qui est adaptée à ρ et on sait la déterminer en utilisant les deux propositions précédentes.

Si $\epsilon = 1$ et $k = 1$ ou 3, alors on distingue deux cas :

1) Si $\rho(d) = d$, on regarde la parité de $k\epsilon + \alpha$; si c'est pair alors la réalisation standard de \mathfrak{g} est adaptée à σ , sinon la réalisation $l(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \xi_2, \sqrt{\epsilon_k})$, ($\xi_2(x, y) = (y, \xi(x))$) est adaptée à σ (cf chap I, Prop 1.7.) .

2) Si $\rho(d) \neq d$, alors l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est nécessairement de type *Aff1* (i.e $\xi = id$ et $k = 1$) et $\alpha = 0$ (cf Prop 2.5.). Dans ce cas on a : $\sigma(d) = d + \mathring{p}_j$ et donc σ regardée sur la réalisation $l(\mathfrak{g}, \exp(i\pi \text{ad}(\mathring{p}_j)), -1)$ respecte la \mathbb{Z} -graduation. Si on note ψ l'isomorphisme qui envoie $l(\mathfrak{g}, id, 1)$ sur $l(\mathfrak{g}, \exp(i\pi \text{ad}(\mathring{p}_j)), -1)$, alors $T_1 = \psi T \psi^{-1}$ est l'application translation de $l(\mathfrak{g}, \exp(i\pi \text{ad}(\mathring{p}_j)), -1)$ (cf chap I Prop 1.4) et donc $\sigma T_1 \sigma^{-1} = (-1)^{k\epsilon} T_1$, de plus si on regarde la classification de [BR] on s'aperçoit dans ce cas que ϵ est toujours nul et par suite la réalisation $l(\mathfrak{g}, \exp(i\pi \text{ad}(\mathring{p}_j)), -1)$ est adaptée à σ .

Proposition 2.8.

*En fixant une sous algèbre de Cartan maximalement compacte et pour une bonne réalisation $l((\mathring{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \eta)$ de \mathfrak{g} (avec $n = 1$ ou 2) une semi-*involution* de deuxième espèce σ' de \mathfrak{g} s'écrit : $\sigma' = \iota \otimes \mathring{\sigma}'$, avec $\mathring{\sigma}' = \mathring{\sigma} \mathring{\omega}' = \mathring{\omega}' \mathring{\sigma}$, où $\mathring{\sigma}$ (resp $\mathring{\omega}'$) est une *involution* (resp une semi-*involution* de Cartan) de $(\mathring{\mathfrak{g}})^n$ qui commute avec θ_n .*

Remarque : *En utilisant le résultat du paragraphe 2.7 on peut déterminer explicitement la réalisation $l((\mathring{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \eta)$. La donnée explicite de cette réalisation*

est expliquée dans une table à la fin de cette thèse, elle sera utile après pour la construction des sous algèbres toriques déployées maximales.

Démonstration.

c'est une conséquence du théorème 2.2 précédent, du théorème 2.4 (chp I) (appliqué aux involutions de première espèce) et de la remarque 1.5.

□

3. Sous algèbres toriques déployées maximales des formes réelles presque compactes d'algèbres de Kac-Moody affines :

3.1. Soient $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle presque compacte de \mathfrak{g} , σ' la semi-involution de deuxième espèce correspondante, \mathfrak{h} une sous algèbre de Cartan maximale compacte pour σ' et σ l'involution de première espèce associée à la paire (σ', \mathfrak{h}) (cf théorème 2.2).

Notons ω' la semi-involution de Cartan $\sigma.\sigma'$ de \mathfrak{g} et B' la forme sesquilinéaire non dégénérée sur \mathfrak{g} définie par :

$$B'(x, y) = -B(x, \omega'(y)); \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

(où B est la forme bilinéaire invariante sur \mathfrak{g} (cf 1.2)).

on a : $B' / (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha})$ est définie positive et l'orthogonal par rapport à B' de \mathfrak{g}' est égal au centre. (Ceci est valable quelque soit la sous algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} [K, 11.7])

Décomposition de Cartan : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

avec $\sigma/\mathfrak{k} = 1$, $\sigma/\mathfrak{p} = -1$

L'involution σ de \mathfrak{g} qui est de première espèce induit l'identité sur le centre $\mathbb{C}c$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$, (cf [R₂]); en particulier le centre $i\mathbb{R}c$ ($i \in \mathbb{C}, i^2 = -1$) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenu dans \mathfrak{k} et \mathfrak{p} est inclus dans l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$.

Lemme 3.1.

Soit \mathfrak{h} une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , α une racine réelle de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et ω' une semi-involution de Cartan de \mathfrak{g} stabilisant \mathfrak{h} . Soit $e \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus \{0\}$ et $f = -\omega'(e) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, quitte à remplacer e par λe , avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut supposer $[e, f] = \alpha$.

Démonstration.

Soit e un élément non nul de \mathfrak{g}_α , alors $B(e, f) = B'(e, e) > 0$.

$[e, f] = B(e, f)\nu^{-1}(\alpha) = \mu\check{\alpha}$, avec $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. En remplaçant e par $\frac{1}{\sqrt{\mu}}e$ on peut supposer $[e, f] = \check{\alpha}$. D'où le lemme. □

Lemme 3.2.

Soit $g \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) g est $ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}$ -diagonalisable.
- ii) g est $ad_{(\mathfrak{g}_\mathbb{R}')}$ -diagonalisable.
- iii) g est $ad_{(\mathfrak{g}_\mathbb{R}'/(i\mathbb{R}c))}$ -diagonalisable.

Sous ces conditions g est contenu dans $\mathfrak{g}'_\mathbb{R}$.

Remarque : D'après [PK; corollaire 9] les assertions sur \mathbb{C} sont aussi équivalentes.

Démonstration.

Il est clair que i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) et il suffit donc de montrer que iii) \Rightarrow i). Soit g un élément $ad_{(\mathfrak{g}_\mathbb{R}'/(i\mathbb{R}c))}$ -diagonalisable de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, alors g est $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable d'après la remarque. $ad(g)$ annule le centre $i\mathbb{R}c$ et donc il est diagonalisable sur $\mathfrak{g}'_\mathbb{R}$. Soit \mathfrak{t} une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ contenant g , alors on a : $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}'_\mathbb{R}$. Comme g agit trivialement sur \mathfrak{t} , alors il est $ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}$ -diagonalisable. D'où l'équivalence.

Regardons maintenant le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$, il est stable par σ' ainsi que $\Delta^{im} = \mathbb{Z}^*\delta$; on a donc $\sigma'(\delta) = \pm\delta$. Si $\sigma'(\delta) = \delta$ alors il existe dans Δ un système parabolique propre de racines stable par σ' et donc σ' est de première espèce, ce qui est absurde. Donc $\sigma'(\delta) = -\delta$.

Comme g est $ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}$ -diagonalisable $\delta(g) \in \mathbb{R}$. De la relation $\sigma'(g) = g$ et $\sigma'(\delta) = -\delta$ on déduit que $\delta(g) \in i\mathbb{R}$; ainsi $\delta(g) = 0$ et $g \in \mathfrak{g}'$. □

Lemme 3.3.

1) Les éléments $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables de \mathfrak{k} ont des valeurs propres imaginaires pures, et sont contenus dans le centre $i\mathbb{R}c$ si ces valeurs propres sont toutes nulles.

2) Les éléments $ad(\mathfrak{g})$ -diagonalisables et non nuls de \mathfrak{p} sont à valeurs propres réelles non toutes nulles.

Remarque : Contrairement au cas classique, un élément de \mathfrak{k} ou de \mathfrak{p} n'est pas $ad(\mathfrak{g})$ -diagonalisable en général.

Démonstration.

1) Le centre de \mathfrak{g} est totalement isotrope pour B' ; par conséquent B' induit un produit hermitien sur $\mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$.

Soit k un élément $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable de \mathfrak{k} , alors on distingue deux cas :

i) Si $k \in i\mathbb{R}c$, alors $ad(k) = 0$ et le résultat est trivial.

ii) Si $k \notin i\mathbb{R}c$, alors il existe une sous algèbre de Cartan \mathfrak{t} de \mathfrak{g} qui contient k et vérifie : $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}'$ par conséquent $ad(k)$ induit sur $\mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$ un homomorphisme non trivial, diagonalisable et antihermitien; en particulier $ad(k)$ a toutes ses valeurs propres imaginaires pures et l'une d'entre elles est non nulle. D'où l'assertion 1).

2) Soit p un élément $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable de \mathfrak{p} , alors $ad(p)$ induit sur $\mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$ un homomorphisme non trivial (car \mathfrak{p} ne rencontre pas le centre), et autoadjoint par rapport à B' ; et par suite p agit sur \mathfrak{g}'/\mathbb{C} ou \mathfrak{g}' avec des valeurs propres réelles non toutes nulles. D'après le lemme 3.2 $ad(p)$ est à valeurs propres réelles sur \mathfrak{g} . D'où l'assertion 2).

□

Définition 3.4.

Une sous algèbre torique déployée (en abrégé *SATD*) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une sous algèbre commutative $ad_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$ -diagonalisable. Elle est dite sous algèbre torique déployée maximale (en abrégé *SATDM*) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ si de plus elle est maximale parmi les *SATD*.

3.5. Notons π' la projection canonique de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ sur $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$. Comme σ stabilise $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ et $i\mathbb{R}c$ il induit une involution encore notée σ de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/i\mathbb{R}c$. La restriction de π' à \mathfrak{p} est injective et on peut identifier \mathfrak{p} avec son image dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$.

Soit \mathfrak{a} une *SATD* σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, et posons : $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$. Alors on a : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_1$. D'après le lemme 3.3 \mathfrak{a}_0 est égale à $\mathfrak{a} \cap (i\mathbb{R}c)$, (en particulier \mathfrak{a} est contenue dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$) et \mathfrak{a}_1 est une *SATD* σ -stable de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$. Inversement, d'après le lemme 3.2 l'image réciproque d' une *SATD* σ -stable de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$ est une *SATD* σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

D'une façon plus générale, d'après le lemme 3.2 une *SATD* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ et son image par π' est une *SATD* de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$. Inversement d'après le

même lemme, l'image réciproque d'une *SATD* de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$ est une *SATD* de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. D'où la proposition suivante :

Proposition 3.6.

Les *SATDM* (resp *SATDM* σ -stables) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ sont en bijection avec les *SATDM* (resp *SATDM* σ -stables) de $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c) =: \mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.

3.7 Soit $l(\mathring{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ et σ' s'écrivent : $\sigma = 1 \otimes \mathring{\sigma}$ et $\sigma' = \iota \otimes \mathring{\sigma}'$ (cf proposition 2.8.), où $\mathring{\mathfrak{s}}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, θ un automorphisme d'ordre fini de $\mathring{\mathfrak{s}}$, $\mathring{\sigma}$ une involution de $\mathring{\mathfrak{s}}$ commutant avec θ et $\mathring{\sigma}'$ une semi-involution de $\mathring{\mathfrak{s}}$ commutant avec θ et telle que $\mathring{\sigma}\mathring{\sigma}'$ est une semi-involution de Cartan de $\mathring{\mathfrak{s}}$.

Notons $\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}$ la forme réelle de $\mathring{\mathfrak{s}}$ correspondant à $\mathring{\sigma}'$ et soit : $\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}} = \mathring{\mathfrak{k}} \oplus \mathring{\mathfrak{p}}$ sa décomposition de Cartan par rapport à $\mathring{\sigma}$.

Pour un sous espace vectoriel θ -stable V de $\mathring{\mathfrak{s}}$, on note V^{θ} son sous espace de points fixes sous l'action de θ et $l''(V, \theta, \eta)$ le sous espace : $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (v^j \otimes V_j)$ de $\mathfrak{g}'' := \mathfrak{g}'/c\mathbb{C}$, (avec $V_j = V \cap \mathring{\mathfrak{s}}_j$).

Ainsi on a :

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = l(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \theta, \eta)$$

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = l''(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \theta, \eta)$$

Soient \mathcal{T} l'application translation de $\mathfrak{g}'' (= l''(\mathring{\mathfrak{s}}, \theta, \eta))$ et λ la projection canonique de \mathfrak{g}'' sur $\mathfrak{g}''/(id - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ identifiée avec $\mathring{\mathfrak{s}}$ (cf chap I, §1.2.).

Les sous algèbres de Cartan de \mathfrak{g} , \mathfrak{g}' ou \mathfrak{g}'' sont conjuguées par le groupe adjoint associé à \mathfrak{g} (cf [PK]).

La restriction de λ à la sous algèbre de Cartan standard de \mathfrak{g}'' est injective; comme \mathcal{T} est un automorphisme de \mathfrak{g}' -modules et grâce au théorème de conjugaison des sous algèbres de Cartan, la restriction de λ à toute sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g}'' est injective.

Soit $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ une *SATDM* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, d'après le lemme 3.2 $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$; on note $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ son image par π' dans $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/i\mathbb{R}c$.

Lemme 3.7.1.

La semi-involution σ' de \mathfrak{g} stabilise l'idéal $(id - T)\mathfrak{g}''$ et l'image par la projection λ de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ est égale à $\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

On a : $\sigma'(id - T)\mathfrak{g}'' = \omega'\sigma(id - T)\mathfrak{g}'' = \omega'(id - T)\mathfrak{g}'' = (id - T^{-1})\mathfrak{g}'' = (id - T)(-T^{-1})\mathfrak{g}'' = (id - T)\mathfrak{g}''$ et donc σ' stabilise l'idéal $(id - T)\mathfrak{g}''$.

Soit B une base de \mathfrak{g}'' formée d'éléments de la forme $(t^i \otimes x)$, alors on a : $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} = \sum_{e \in B} (\mathbb{R}(e + \sigma'(e)) + i\mathbb{R}(e - \sigma'(e)))$.

Soit $e \in B$ tel que $e = (t^j \otimes x)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \text{i) } \lambda(e + \sigma'(e)) &= \lambda(t^j \otimes x + t^{-j} \otimes \overset{\circ}{\sigma}'(x)) = (\eta^j x + \eta^{-j} \overset{\circ}{\sigma}'(x)) \\ &= (\eta^j x + \overset{\circ}{\sigma}'(\eta^j x)) \in \mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}} \\ \text{ii) } i\lambda(e - \sigma'(e)) &= i\lambda(t^j \otimes x - t^{-j} \otimes \overset{\circ}{\sigma}'(x)) = i(\eta^j x - \eta^{-j} \overset{\circ}{\sigma}'(x)) \\ &= i(\eta^j x - \overset{\circ}{\sigma}'(\eta^j x)) \in \mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Ainsi on voit clairement que l'ensemble $\{\lambda(e + \sigma'(e)), i\lambda(e - \sigma'(e)), e \in B\}$ engendre $\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}$ et par suite $\lambda(\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}) = \mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}$.

□

Lemme 3.7.2.

Soit $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, alors on a :

$$\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) \leq \inf(\text{rang}(\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}) + 1, \text{rang}(\mathfrak{g}) - 1)$$

Démonstration.

Il existe une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g}'' qui contient $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$, en particulier la restriction de λ à $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ est injective. $\lambda(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})$ est une SATD de $\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}$ et on a :

$$\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = \dim(\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}) + 1 = \dim(\lambda(\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}})) + 1 \leq \text{rang}(\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}) + 1.$$

D'autre part comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est presque compacte, on ne peut pas avoir une sous algèbre de Cartan définie sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (sinon la forme est déployée), par conséquent $\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) \leq \text{rang}(\mathfrak{g}) - 1$. D'où le résultat.

□

Lemme 3.7.3.

On suppose qu'il existe un sous espace abélien maximal θ -stable $\mathring{\mathfrak{a}}$ de $\mathring{\mathfrak{p}}$ tel que:

$$C_{\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}}(\mathring{\mathfrak{a}})^{\theta} = C_{\mathring{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}}(\mathring{\mathfrak{a}})$$

Alors la sous algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus (1 \otimes (\mathring{\mathfrak{a}})^{\theta})$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

D'après la proposition 3.5 il suffit de montrer que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}'' := (1 \otimes (\mathring{\mathfrak{a}})^{\theta})$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}'' := \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/(i\mathbb{R}c)$.

Soit $\mathring{\mathfrak{r}}$ (resp \mathfrak{r}'') le centralisateur de $\mathring{\mathfrak{a}}$ (resp $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}''$) dans $\mathring{\mathfrak{s}}$, (resp \mathfrak{g}''). Alors on a :

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{l}''(\mathring{\mathfrak{r}}, \theta, \eta)$$

$$\text{et donc } \mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{l}''(\mathring{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}}, \theta, \eta)$$

Comme $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}'' \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, on a $\mathfrak{r}'' = (\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \oplus (\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}'')$. Soit $x \in \mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, alors $ad(x)$ est semi-simple (sur \mathfrak{g} ou $\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$) si et seulement si $x \in (1 \otimes (\mathring{\mathfrak{a}}_{\mathbb{C}})^{\theta})$.

$[(\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}''), (\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})] = 0$ et on en déduit alors qu'un élément $x \in \mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ est torique déployé si et seulement si $x \in (1 \otimes (\mathring{\mathfrak{a}})^{\theta})$ (cf lemme 3.3).

□

Proposition 3.8.

On considère une réalisation $\mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ de \mathfrak{g} .

Soient $\mathring{\mathfrak{m}}$ une sous algèbre de Lie réductrice de $\mathring{\mathfrak{s}}$ stable par θ et dont le centre $\mathring{\mathfrak{c}}$ est diagonalisable dans $\mathring{\mathfrak{s}}$ et $g \in \mathfrak{m} := \mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{m}}, \theta, \eta)$. Alors on a :

1) $ad(g)$ est diagonalisable dans \mathfrak{m} si et seulement si $ad(g)$ est diagonalisable dans \mathfrak{g} . Dans ce cas $g \in \mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{m}}', \theta, \eta) \oplus (1 \otimes (\mathring{\mathfrak{c}})^{\theta})$.

2) Si de plus $\mathring{\mathfrak{m}}$ est semi-simple et les valeurs propres de $ad(g)$ dans \mathfrak{m} sont réelles, alors il en est de même des valeurs propres de $ad(g)$ dans \mathfrak{g} .

Démonstration.

La sous algèbre $\mathcal{H} := (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}^*} j \otimes \mathring{\mathfrak{c}}_j) \oplus \mathbb{C}c$ est une algèbre de Heisenberg infinie et d en est l'élément de graduation; par conséquent les éléments de $\mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{c}}, \theta, \eta)$ diagonalisables sur $\mathfrak{l}''(\mathring{\mathfrak{c}}, \theta, \eta) \oplus \mathbb{C}c$ sont contenus dans $(1 \otimes (\mathring{\mathfrak{c}})^{\theta}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ et donc sont diagonalisables sur \mathfrak{g} .

Soit g un élément diagonalisable de \mathfrak{m} ; il existe $(g', s) \in \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}', \theta, \eta) \times \mathfrak{l}''(\overset{\circ}{\mathfrak{c}}, \theta, \eta)$ tel que $g = g' + s$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (qui dépend de g) tel que les actions de $ad(g)$ et $ad(s + \lambda d)$ sur $\mathfrak{l}''(\overset{\circ}{\mathfrak{c}}, \theta, \eta) \oplus \mathbb{C}c$ coïncident et donc sont diagonalisables; par conséquent $s \in 1 \otimes (\overset{\circ}{\mathfrak{c}})^\theta$ (donc diagonalisable dans \mathfrak{g}). Ainsi $ad(g)$ et $ad(s)$ commutent et g' est diagonalisable dans \mathfrak{m} .

Un élément diagonalisable (resp diagonalisable à valeurs propres réelles) de $(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}')^\theta$ est diagonalisable (resp diagonalisable à valeurs propres réelles) dans $\overset{\circ}{\mathfrak{s}}$. Par conséquent les éléments (resp les éléments à valeurs propres réelles) de la sous algèbre de Cartan standard de $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}', \theta, \eta)$ sont diagonalisables (resp diagonalisables à valeurs propres réelles) dans \mathfrak{g} .

Grâce au théorème de conjugaison des sous algèbres de Cartan qui est encore valable pour $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}', \theta, \eta)$, le résultat est vrai pour un élément g' quelconque diagonalisable (resp diagonalisable à valeurs propres réelles) de $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}', \theta, \eta)$. D'où la proposition.

□

Lemme 3.9.

On considère une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et Δ le système de racines associé.

Soient α une racine réelle de Δ et $(e, f) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[e, f] = \alpha^\vee$.

on pose :

$$A = \exp(ad(f)).\exp(\log(\frac{\sqrt{2}}{2})ad(\alpha^\vee)).\exp(ad(-e))$$

$$B = \exp(ad(-if)).\exp(\log(\frac{\sqrt{2}}{2})ad(\alpha^\vee)).\exp(ad(-ie))$$

Alors on a :

$$e + f = A(\alpha^\vee) \quad \text{et} \quad i(e - f) = B(\alpha^\vee)$$

et en particulier $e + f$ et $i(e - f)$ comme α^\vee sont $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables à valeurs propres réelles.

Démonstration:

C'est un calcul dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

□

Remarque : Dans les conditions de 3.9, si on suppose \mathfrak{h} stable par σ et σ' (par exemple \mathfrak{h} maximalement compacte) et α fixe par σ , alors $\sigma'(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$, donc $i\alpha^\vee \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures. Choisissons e et f comme au lemme 3.1 . Si $(-\sigma)$ fixe \mathfrak{g}_{α} , alors $e+f \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable à valeurs propres réelles. Si σ fixe \mathfrak{g}_{α} , alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap (\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) = i\mathbb{R}\alpha^\vee \oplus \mathbb{R}(e-f) \oplus i\mathbb{R}(e+f)$ est une algèbre de Lie simple compacte.

4. Construction d'une SATDM σ -stable dans le cas où \mathfrak{g} est de type *Aff1* :

La construction se fait en se servant de la forme explicite de la réalisation $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ de \mathfrak{g} , satisfaisant aux conditions de 3.7 . On distingue 4 cas, (cf la table de ces réalisations).

4.1. Cas où $\overset{\circ}{\mathfrak{s}} = \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, et $\theta = id$ (i.e $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ est la réalisation standard de \mathfrak{g}) :

Soit $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$ un sous espace abélien maximal de $\overset{\circ}{\mathfrak{p}}$, alors d'après le lemme 3.7.3, la sous algèbre :

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus (1 \otimes (\overset{\circ}{\mathfrak{a}})^{\theta})$$

est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. □

4.2. Cas où $\overset{\circ}{\mathfrak{s}} = \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et $\theta = \exp(i\pi ad(\overset{\circ}{p}_i))$:

Dans ce cas on a : $\overset{\circ}{\sigma}(\overset{\circ}{p}_i) = -\overset{\circ}{p}_i$ (donc $\overset{\circ}{p}_i \in (\overset{\circ}{\mathfrak{p}})^{\theta}$).

Soit $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$ un sous espace abélien maximal de $\overset{\circ}{\mathfrak{p}}$ contenant $\overset{\circ}{p}_i$, alors $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$ est contenu dans $(\overset{\circ}{\mathfrak{p}})^{\theta}$ et d'après le lemme 3.7.3, la sous algèbre :

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus (1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{a}})$$

est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. □

4.3. Cas où $\overset{\circ}{\mathfrak{s}} = \overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et $\theta(x, y) = \overset{\circ}{\sigma}(x, y) = (y, x)$, $x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$:

Dans ce cas on a $\overset{\circ}{\omega}'_2 = \overset{\circ}{\omega}' \times \overset{\circ}{\omega}'$, $\overset{\circ}{\sigma}' = \overset{\circ}{\omega}'_2 \overset{\circ}{\sigma}$ et $\sigma' = \iota \otimes \overset{\circ}{\sigma}'$ (et donc $(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}})^{\theta}$ est compacte).

Pour V un sous espace vectoriel de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, on note $D(V) = \{(x, x), x \in V\}$ et $A(V) = \{(x, -x), x \in V\}$; et on a alors :

$$(\overset{\circ}{\mathfrak{s}})^{\theta} = D(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}), \quad \text{et} \quad (\overset{\circ}{\mathfrak{s}})^{-\theta} = A(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$$

Lemme 4.3.1 .

Le rang maximal d'un système de racines fortement orthogonales de $\overset{\circ}{\Delta}$ est égal au rang r de l'algèbre de Lie réductive $(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^{\overset{\circ}{\omega}}$

Démonstration.

Soient $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$ un système de racines fortement orthogonales de $\overset{\circ}{\Delta}$ et $X_i \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\beta_i}$ tel que : $\{X_i, \beta_i, Y_i = -\overset{\circ}{\omega}(X_i)\}$ forme un \mathfrak{sl}_2 -triplet de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ (cf lemme 3.1).

Alors $\mathfrak{t} = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{C}(X_i - Y_i)$ est une sous algèbre torique de $(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^{\overset{\circ}{\omega}}$ (cf lemme 3.9) et donc $l \leq r$.

D'autre part le résultat de Sugiura ([S], Théorème 2.5) appliqué à la forme déployée de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ montre qu'il existe un système de racines fortement orthogonales de rang r . D'où le lemme. □

Corollaire 4.3.2 .

Si $(-id)$ est dans le groupe de Weyl de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, alors il existe un système de racines fortement orthogonales de rang n , ($n = \text{rang de } \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$).

Remarque : Ce résultat est énoncé sous forme d'exercice dans [BBK], de plus la réciproque est clairement vraie (cf Exercice 15 chap VI §1).

Démonstration.

Si $(-id)$ est dans le groupe de Weyl de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, alors l'involution de Cartan $\overset{\circ}{\omega}$ est intérieure et on a : $r = n$. Le corollaire découle donc du lemme précédent. □

Soit $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ un système de racines fortement orthogonales de rang maximal de $\overset{\circ}{\Delta}$. Pour $i = 1, 2, \dots, r$, soient $X_i \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\gamma_i}$ tel que $\{X_i, \gamma_i, Y_i = -\overset{\circ}{\omega}'(X_i)\}$ forme un \mathfrak{sl}_2 -triplet de la forme déployée de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et E_i, F_i et H_i les éléments de \mathfrak{g} ou \mathfrak{g}'' définis par :

$$E_i = t \otimes (X_i, -X_i).$$

$$F_i = t^{-1} \otimes (Y_i, -Y_i).$$

$$H_i = [E_i, F_i].$$

Ces éléments forment un \mathfrak{sl}_2 -triplet de \mathfrak{g} .

Pour $i = 1, 2, \dots, r$, soit A_i l'automorphisme introduit dans 3.9 et qui transforme H_i en $E_i + F_i$, et posons $A_0 = \prod_{i=1}^r A_i$.

Lemme 4.3.3.

La sous algèbre torique déployée $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}(E_i + F_i) \right)$ est une *SATDM* σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

Par construction on a : $\sigma'(E_i) = F_i$, $\sigma(E_i) = -E_i$, et $\sigma(F_i) = -F_i$; donc $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est σ -stable et contenue dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$. Il suffit alors de montrer que $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}} := \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}(E_i + F_i) \right)$ est une *SATDM* de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ (cf 3.5).

Comme les racines γ_i , $i = 1, 2, \dots, r$ sont fortement orthogonales $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ est une algèbre commutative et on déduit de 3.9 que $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable dans \mathfrak{g} . Comme elle est contenue dans \mathfrak{p} , $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ est une *SATD* σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf 3.3.). D'autre part

$$C_{\mathfrak{g}''}(\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}) = A_0 \left(C_{\mathfrak{g}''} \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}H_i \right) \right) = A_0 \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (t^{2i} \otimes D(\mathring{\mathfrak{h}}) \oplus t^{2i+1} \otimes A(\mathring{\mathfrak{h}})) \right)$$

(car $C_{\mathring{\mathfrak{g}}} \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}\gamma_i \right) = \mathring{\mathfrak{h}}$).

On en déduit alors que les éléments $ad_{\mathfrak{g}''}$ -diagonalisables à valeurs propres réelles de $C_{\mathfrak{g}''}(\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}})$ sont contenus dans $A_0(1 \otimes D(\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}))$ (si l'on note $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ les éléments de $\mathring{\mathfrak{h}}$ à valeurs propres réelles dans $\mathring{\mathfrak{g}}$) qui lui même est inclus dans :

$$V := (1 \otimes D(\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^r (\mathbb{R}E_i \oplus \mathbb{R}F_i) \right)$$

Or $V \cap \mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} = ((1 \otimes D(\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}})) \cap \mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ et par suite $\mathfrak{t}''_{\mathbb{R}}$ est une *SATDM* σ -stable de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$. □

4.4. Cas où $\mathring{\mathfrak{s}} = \mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}}$, $\theta(x, y) = (y, x)$ et $\mathring{\sigma}(x, y) = (u(y), u(x))$,

avec $u^2 = id_{\mathring{\mathfrak{g}}}$:

Dans ce cas on a :

$$(\mathring{\mathfrak{s}})^{\theta} = D(\mathring{\mathfrak{g}})$$

$$(\mathring{\mathfrak{s}})^{-\theta} = A(\mathring{\mathfrak{g}})$$

$$(\mathring{\mathfrak{s}})^{\mathring{\sigma}} = \{(x, u(x)), \quad x \in \mathring{\mathfrak{g}}\}$$

$$(\mathring{\mathfrak{s}})^{-\mathring{\sigma}} = \{(x, -u(x)), \quad x \in \mathring{\mathfrak{g}}\}$$

L'involution $\mathring{\sigma}$ commute avec $\mathring{\omega}'_2$ et donc u commute avec $\mathring{\omega}'$.

Posons : $u' = u \mathring{\omega}'$ et $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ la forme réelle de $\mathring{\mathfrak{g}}$ associée à la semi-involution u' .

Soit $\mathring{\mathfrak{a}}$ une *SATDM* u -stable de $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$; on pose :

$$\mathring{\mathfrak{l}} = C_{\mathring{\mathfrak{g}}}(\mathring{\mathfrak{a}}), \text{ et } \mathring{\mathfrak{m}} = \mathring{\mathfrak{l}}' = [\mathring{\mathfrak{l}}, \mathring{\mathfrak{l}}].$$

Alors $D(\overset{\circ}{\mathfrak{a}})$ est une $SATDM$ $\overset{\circ}{\sigma}$ -stable de $(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}})^{\theta}$ (qui est isomorphe à $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$) et

$$C_{\overset{\circ}{\mathfrak{s}}}(D(\overset{\circ}{\mathfrak{a}})) = \overset{\circ}{\mathfrak{l}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{l}}$$

Comme $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$ est une $SATDM$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ on a :

$$u/\overset{\circ}{\mathfrak{m}} = id \quad \text{et} \quad \theta/\overset{\circ}{\mathfrak{m}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{m}} = \overset{\circ}{\sigma} / \overset{\circ}{\mathfrak{m}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{m}}$$

En appliquant le résultat du cas précédent (qui est encore valable lorsque $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est semi-simple) à l'algèbre $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{m}}, \theta, -1)$ on obtient une $SATDM$ σ -stable \mathfrak{a} de cette algèbre qui est évidemment une $SATD$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$, par conséquent

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := (1 \otimes D(\overset{\circ}{\mathfrak{a}})) \oplus \mathfrak{a}$$

est une $SATDM$ σ -stable de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$.

□

5. Construction d'une $SATDM$ σ -stable dans le cas où \mathfrak{g} est de type A_{ff2} :

5.1. En regardant la classification de [BR] reproduite en table à la fin de cette thèse, on constate que la réalisation $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ satisfaisant aux conditions de 3.7 est la réalisation standard de \mathfrak{g} sauf dans les deux cas où σ n'est pas intérieure, c'est à dire :

5.1.1. \mathfrak{g} est de type $A_{2l-1}^{(2)}$ et $\sigma = \rho \cdot \exp(i\pi ad(h))$, avec $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ et ρ est l'automorphisme de diagramme non trivial de $A_{2l-1}^{(2)}$.

Dans ce cas on a : (cf proposition 2.6)

$$\sigma(d) = p_1 = d + \overset{\circ}{p}_1, \quad (\text{donc } \overset{\circ}{\sigma}(\overset{\circ}{p}_1) = -\overset{\circ}{p}_1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta) = \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi \cdot \exp(\frac{i\pi}{2} ad(\overset{\circ}{p}_1)), i).$$

Or $\overset{\circ}{p}_1 = {}_1p + (2l-1)p$, où les $({}_i p)_{i=1, \dots, 2l-1}$ sont les poids fondamentaux de $\overset{\circ}{\Delta}$, par conséquent :

$$\overset{\circ}{\mathfrak{r}} := C_{\overset{\circ}{\mathfrak{g}}}(\overset{\circ}{p}_1) = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} + \overset{\circ}{\mathfrak{m}}$$

où $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ est l'algèbre de Lie simple engendrée par $(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha_i}, \quad i = 2, 3, \dots, 2l-2)$.

En particulier on a : $\theta/\overset{\circ}{\mathfrak{m}} = \xi/\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ et $\xi/\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ est un automorphisme de diagramme de $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$, par conséquent une $SATDM$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ contenant $\overset{\circ}{p}_1$ est contenue dans $(\mathbb{R} \overset{\circ}{p}_1 \oplus \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}, \xi, -1) \cap \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})$ (cf Prop 3.8.) et la restriction de σ à $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}, \xi, -1)$ est intérieure.

Ainsi on se ramène au cas où $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ est la réalisation standard (qui sera traité ultérieurement).

□

5.1.2. \mathfrak{g} est de type $D_{l+1}^{(2)}$ et $\sigma = \rho.exp(i\pi ad(h))$, avec $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ et ρ est l'automorphisme de diagramme non trivial de $D_{l+1}^{(2)}$.

Dans ce cas on a : (cf proposition 2.6)

$$\sigma(d) = p_l = d + \overset{\circ}{p}_l, \text{ (donc } \overset{\circ}{\sigma}(\overset{\circ}{p}_l) = -\overset{\circ}{p}_l) \text{ et } \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta) = \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi.exp(\frac{i\pi}{2}ad(\overset{\circ}{p}_l)), i).$$

Or $\overset{\circ}{p}_l = \overset{\circ}{l}p + \overset{\circ}{(l+1)}p$, où les $(\overset{\circ}{i}p)_{i=1, \dots, l+1}$ sont les poids fondamentaux de $\overset{\circ}{\Delta}$, par conséquent :

$$\overset{\circ}{\mathfrak{r}} := C_{\overset{\circ}{\mathfrak{g}}}(\overset{\circ}{p}_l) = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} + \overset{\circ}{\mathfrak{m}}$$

où $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ est l'algèbre de Lie simple engendrée par $(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, l-1)$.

En particulier on a : $\theta / \overset{\circ}{\mathfrak{m}} = id_{\overset{\circ}{\mathfrak{m}}}$, le centre de $\overset{\circ}{\mathfrak{r}}$ est égal à $(\mathbb{C} \overset{\circ}{l}p \oplus \mathbb{C} \overset{\circ}{(l+1)}p)$ et donc son sous espace des points fixes par θ est réduit à $\mathbb{C} \overset{\circ}{p}_l$. De plus $\overset{\circ}{\sigma}$ et $\overset{\circ}{\sigma}'$ stabilisent la sous algèbre de Lie semi-simple $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ et par conséquent une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ contenant $\overset{\circ}{p}_l$ est contenue dans $(\mathbb{R} \overset{\circ}{p}_l \oplus \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}, \theta = id, 1) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ (cf Prop 3.8.).

Soient $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_{\mathbb{R}}$ la forme réelle de $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ correspondant à $\overset{\circ}{\sigma}'$ et $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$ un sous espace abélien de $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_{\mathbb{R}}$ fixe par $(-\overset{\circ}{\sigma})$ et maximal pour cette propriété (c'est donc une SATDM de $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_{\mathbb{R}}$ contenue dans $\overset{\circ}{\mathfrak{p}}$).

Alors d'après le lemme 3.7.3 la sous algèbre $i\mathbb{R}c \oplus (1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{a}})$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}, \theta = id, 1) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et donc

$$\overset{\circ}{\mathfrak{t}}_{\mathbb{R}} = i\mathbb{R}c \oplus (1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{a}}) \oplus \mathbb{R} \overset{\circ}{p}_l$$

est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

□

5.2. Cas où $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{s}}, \theta, \eta)$ est la réalisation standard de \mathfrak{g} :

Par hypothèse $\theta = \xi$ est un automorphisme de diagramme involutif par rapport à une sous algèbre de Cartan $(\overset{\circ}{\mathfrak{h}})^1$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{s}} = \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$.

Soient $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}_0$ une SATDM $\overset{\circ}{\sigma}$ -stable de $(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})^{\xi}$ (i.e $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}_0$ est contenue dans $(\overset{\circ}{\mathfrak{p}})^{\xi}$) et $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0$ une sous algèbre de Cartan de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_0 (= (\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^{\xi})$ contenant $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}_0$. On pose $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} = C_{\overset{\circ}{\mathfrak{g}}}(\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0)$; en conjuguant par $Int(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})^{\xi}$ on peut supposer que $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} = (\overset{\circ}{\mathfrak{h}})^1$ et la base $\overset{\circ}{\Delta}$ est compatible avec $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}_0$, donc ξ est ainsi un automorphisme de diagramme involutif par rapport à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$.

On pose : $\overset{\circ}{\mathfrak{r}} = C_{\overset{\circ}{\mathfrak{g}}}(\overset{\circ}{\mathfrak{a}}_0)$, $\overset{\circ}{\mathfrak{m}} = (\overset{\circ}{\mathfrak{r}})' = [\overset{\circ}{\mathfrak{r}}, \overset{\circ}{\mathfrak{r}}]$ et $\Phi = \Delta(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}, \overset{\circ}{\mathfrak{h}} \cap \overset{\circ}{\mathfrak{m}})$; une des bases de Φ s'identifie à une partie de la base de $\overset{\circ}{\Delta}$ donc est stable par ξ .

Comme $\mathring{\mathfrak{a}}_0$ est une *SATDM* de $(\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})^{\xi}$ on a : $(\mathring{\mathfrak{m}})^{\xi} \subset (\mathring{\mathfrak{m}})^{\mathring{\sigma}}$.

On va compléter $(1 \otimes \mathring{\mathfrak{a}}_0)$ en une *SATDM* σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; une telle *SATDM* est nécessairement contenue dans $(1 \otimes \mathring{\mathfrak{a}}_0) \oplus \mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$, avec $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}} = ((\mathring{\mathfrak{m}}, \xi, -1) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ (cf Prop 3.8.).

Lemme 5.2.1. (cf [Ka] ou [Be, 11.1])

Soient \mathfrak{s} une algèbre de Lie simple complexe et θ_1 et θ_2 deux automorphismes involutifs de \mathfrak{s} vérifiant :

$$\mathfrak{s}^{\theta_2} \subset \mathfrak{s}^{\theta_1}$$

Si de plus θ_1 est non trivial, alors on a : $\theta_1 = \theta_2$.

Lemme 5.2.2.

Soient \mathfrak{s} une algèbre de Lie semi-simple complexe qui est somme de deux algèbres de Lie simples et isomorphes et θ_1 et θ_2 deux automorphismes de \mathfrak{s} vérifiant :

- i) θ_2 est involutif et échange les deux idéaux de \mathfrak{s} .
- ii) $\mathfrak{s}^{\theta_2} \subset \mathfrak{s}^{\theta_1}$.

Alors si θ_1 n'est pas égale à l'identité de \mathfrak{s} , on a nécessairement : $\theta_1 = \theta_2$

Démonstration.

Quitte à changer θ_1 en $\theta_2\theta_1$, on peut supposer que θ_1 stabilise les deux idéaux de \mathfrak{s} et on déduit alors de la condition ii) que θ_1 est l'identité de \mathfrak{s} .

□

Proposition 5.2.3.

La sous algèbre $\mathring{\mathfrak{m}}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ est somme directe d'idéaux $\mathring{\mathfrak{m}}^k$ stables par ξ et $\mathring{\sigma}$ et minimaux pour cette propriété qui sont de types :

- i) $\mathring{\mathfrak{m}}^k$: simple.
- ii) $\mathring{\mathfrak{m}}^k = \mathring{\mathfrak{m}}_1^k \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_2^k$: somme de deux idéaux simples échangés par ξ .

Dans ces deux cas $\mathring{\sigma} = id$ ou ξ sur $\mathring{\mathfrak{m}}^k$.

Démonstration.

Pour une base du système de racines Φ déterminée par un élément de $(\mathring{\mathfrak{h}}_0 \cap \mathring{\mathfrak{m}})$ qui est régulier dans $\mathring{\mathfrak{m}}$ les deux involutions $\mathring{\sigma}$ et ξ agissent sur Φ par des automorphismes de diagramme.

Soient I_1, I_2, \dots, I_l les composantes connexes du diagramme de Dynkin de Φ et $\mathring{\mathfrak{m}}_1, \mathring{\mathfrak{m}}_2, \dots, \mathring{\mathfrak{m}}_l$ les idéaux simples de $\mathring{\mathfrak{m}}$ correspondants. Les automorphismes ξ et $\mathring{\sigma}$ permutent les composantes connexes I_j et les idéaux $\mathring{\mathfrak{m}}_j$. Comme $(\mathring{\mathfrak{m}})^\xi \subset (\mathring{\mathfrak{m}})^{\mathring{\sigma}}$ il est clair que $\mathring{\sigma}$ stabilise $(\mathring{\mathfrak{m}})_j \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

1)- Si $\xi(j) = j$, alors $\mathring{\sigma}$ et ξ stabilisent la sous algèbre de Lie simple $\mathring{\mathfrak{m}}_j$ et on a d'après le lemme 5.2.1 :

$$\mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}_j} = id_{\mathring{\mathfrak{m}}_j} \quad \text{ou} \quad \mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}_j} = \xi /_{\mathring{\mathfrak{m}}_j}$$

2)- Si $\xi(j) \neq j$, alors dans ce cas ξ échange les deux idéaux $\mathring{\mathfrak{m}}_j$ et $\mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}$; $\mathring{\sigma}$ stabilise $\mathring{\mathfrak{m}}_j \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}$ et on a d'après le lemme 5.2.2 :

$$\mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}_j \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}} = id_{\mathring{\mathfrak{m}}_j \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}} \quad \text{ou} \quad \mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}_j \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}} = \xi /_{\mathring{\mathfrak{m}}_j \oplus \mathring{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}}$$

D'où le résultat. □

Remarque : En tenant compte de la proposition précédente on se ramène aux trois cas suivants :

i) $\mathring{\mathfrak{m}} = \mathring{\mathfrak{m}}_1 \times \mathring{\mathfrak{m}}_1$, où $\mathring{\mathfrak{m}}_1$ est une algèbre de Lie simple et $\xi(x, y) = (y, x)$, pour $x, y \in \mathring{\mathfrak{m}}_1$.

Si l'involution $\mathring{\sigma}$ agit trivialement sur $\mathring{\mathfrak{m}}$, alors $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est compacte et $i\mathbb{R}c$ est son unique *SATDM*.

Dans le cas où $\mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}} = \xi /_{\mathring{\mathfrak{m}}}$, on sait déjà construire une *SATDM* σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ (cf §4.3).

ii) $\mathring{\mathfrak{m}}$ est simple et l'involution $\mathring{\sigma}$ agit trivialement sur $\mathring{\mathfrak{m}}$; la forme réelle $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est alors évidemment compacte et donc $i\mathbb{R}c$ est son unique *SATDM*.

iii) $\mathring{\mathfrak{m}}$ est simple et $\mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}} = \xi /_{\mathring{\mathfrak{m}}}$; on va traiter ce cas au n° 5.3 suivant.

5.3. Dans ce qui suit on va construire une *SATDM* σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ dans le cas où $\mathring{\mathfrak{m}}$ est simple et $\mathring{\sigma} /_{\mathring{\mathfrak{m}}} = \xi /_{\mathring{\mathfrak{m}}}$.

On rappelle qu'une base du système de racines Φ de $\mathring{\mathfrak{m}}$ s'identifie à une partie stable par ξ de la base de $\mathring{\Delta}$ et on note τ l'automorphisme de diagramme de Φ induit par la restriction de ξ à $\mathring{\mathfrak{m}}$ (cf 5.2.), alors on distingue deux cas :

5.3.1. Cas où l'automorphisme de diagramme τ est trivial :

1). Si $\mathring{\mathfrak{g}}$ est de type A_{2l} , alors ξ agit par $(-id)$ sur les sous espaces radiciels $\mathring{\mathfrak{g}}_\alpha$ stables par ξ , en particulier sur les $\mathring{\mathfrak{m}}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$.

Les racines de $\overset{\circ}{\Delta}$ ($= \Delta(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\mathfrak{h}})$) qui sont fixes par ξ (en particulier celles de Φ) sont fortement orthogonales et comme $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ est simple elle est necessairement de type A_1 et donc $|\Phi| = 2$. Sous ces hypotheses on a le lemme suivant :

Lemme 5.3.1.

Soient $\alpha \in \Phi$ et $x_\alpha \in \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_\alpha \setminus \{0\}$, alors la sous algèbre :

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}(t \otimes x_\alpha - t^{-1} \otimes (\overset{\circ}{\omega}'(x_\alpha)))$$

est une *SATDM* σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

Il est clair que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une *SATD* σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ (cf lemme 3.9.) et que $\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = \text{rang}(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}) + 1 = 2$. Comme $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est presque compacte la *SATD* σ -stable $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est maximale (puisque elle a la dimension maximale que peut avoir une *SATD* cf lemme 3.7.2.).

□

2). Si $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ n'est pas de type A_{2l} , alors l'automorphisme de diagramme ξ fixe (point par point) les sous espaces radiciels $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_\alpha$ qu'il stabilise, en particulier il fixe $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$, par conséquent $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est compacte et donc $i\mathbb{R}c$ est son unique *SATDM*.

□

5.3.2. Cas où l'automorphisme de diagramme τ est non trivial :

1). Si $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est de type A_{2l} , alors les racines de $\overset{\circ}{\Delta}$ qui sont fixées par ξ sont fortement orthogonales (et $(-\xi)$ fixe les espaces radiciels correspondants); par conséquent la sous algèbre de Lie simple $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ ne peut pas être de type E_6 ou D_n , $n > 3$, et donc necessairement elle est de type A_n .

i) Si $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ est de type A_{2k} , alors dans ce cas aucune racine de la base de Φ n'est fixée par τ ; quitte à choisir convenablement la base de Chevalley de $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ on peut supposer que : $\xi / \overset{\circ}{\mathfrak{m}} = \tau$.

On note Ψ^+ le sous ensemble des racines positives de Φ qui sont fixées par τ . Les racines de Ψ^+ sont fortement orthogonales et $(-\xi)$ fixe les espaces radiciels correspondants; d'où le lemme suivant :

Lemme 5.3.2.

Sous ces hypthèses on choisit pour chaque racine α de Ψ^+ un élément non nul x_α de \mathfrak{m}_α ; alors la sous algèbre :

$$\mathfrak{t}_\mathbb{R} := i\mathbb{R}c \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Psi^+} \mathbb{R}(t \otimes x_\alpha - t^{-1} \otimes \omega'(x_\alpha)) \right)$$

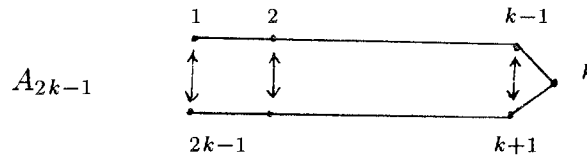
est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_\mathbb{R}$.

Démonstration.

Comme les racines de Ψ^+ sont fortement orthogonales, $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ est une algèbre commutative, il est alors clair que $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ est une SATD σ -stable de $\mathfrak{m}_\mathbb{R}$ (cf 3.9). Mais $\dim(\mathfrak{t}_\mathbb{R}) = 1 + |\Psi^+| = 1 + k = \text{rang}(\mathfrak{m}) - 1$ et donc $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_\mathbb{R}$ (cf lemme 3.7.2.) .

□

ii) Si \mathfrak{m} est de type A_{2k-1} , notons $(\gamma_i)_{i=1,2,\dots,2k-1}$ la base du système de racines Φ de \mathfrak{m} qui est stable par τ .



Alors τ fixe γ_k et $(-\xi)$ fixe l'espace radiciel correspondant \mathfrak{m}_{γ_k} .

Soit p^k le poids fondamental correspondant à γ_k (i.e $\gamma_i(p^k) = \delta_{i,k}$

$i = 1, \dots, 2k - 1$); alors pour un bon choix de la base de Chevalley de \mathfrak{m} on a :

$$\xi / \mathfrak{m} = \tau.exp(i\pi ad(p^k)).$$

On note Ψ^+ le sous ensemble des racines positives de Φ qui sont fixées par τ .

Les racines de Ψ^+ sont fortement orthogonales et $(-\xi)$ fixe les espaces radiciels correspondants.

Choisissons pour chaque racine α de Ψ^+ un élément non nul x_α de \mathfrak{m}_α , alors sous ces hypothèses on a le lemme suivant :

Lemme 5.3.3.

La sous algèbre $\mathfrak{t}_\mathbb{R} := i\mathbb{R}c \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Psi^+} \mathbb{R}(t \otimes x_\alpha - t^{-1} \otimes \omega'(x_\alpha)) \right)$

est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_\mathbb{R}$.

Démonstration.

C'est la même démonstration que celle du lemme précédent.

□

2). Si $\mathring{\mathfrak{g}}$ n'est pas de type A_{2l} , dans ce cas pour toute racine α de $\mathring{\Delta}$ qui est fixée par ξ alors l'espace radiciel correspondant $\mathring{\mathfrak{g}}_\alpha$ est également fixé par ξ . D'où pour un bon choix de la base de Chevalley de $\mathring{\mathfrak{m}}$, la restriction à $\mathring{\mathfrak{m}}$ de l'automorphisme de diagramme ξ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ est également un automorphisme de diagramme de $\mathring{\mathfrak{g}}$. Finalement on se ramène au cas où $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{m}}, \tau, -1)$ et $\sigma/\mathfrak{m} = 1 \otimes \tau$. Ce cas sera traité en détail dans le paragraphe qui suit.

5.4. Construction d'une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ dans le cas où

$\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ et $\sigma = 1 \otimes \xi$, avec ξ un automorphisme de diagramme involutif et non trivial de $\mathring{\mathfrak{g}}$:

La construction se fait cas par cas suivant le type de l'algèbre de Lie simple $\mathring{\mathfrak{g}}$. Le cas où $\mathring{\mathfrak{g}}$ est de type A_{2l} est déjà traité dans le lemme 5.3.2. Il reste alors trois cas à considérer; mais on aura besoin d'un résultat général :

Lemme 5.4.

Soient β_1 et β_2 deux racines réelles et orthogonales de Δ (i.e $\beta_1(\beta_2^\vee) = \beta_2(\beta_1^\vee) = 0$) telles que : $(\beta_1 \pm \beta_2) \in \Delta$ et $\beta_1 \pm n\beta_2 \notin \Delta$ si $n > 1$.

Alors l'automorphisme r_1 (: le prolongement à \mathfrak{g} de la réflexion par rapport à β_1) stabilise \mathfrak{g}_{β_2} et agit dessus par (-1) .

Démonstration.

Soit $e_{\beta_1} \in \mathfrak{g}_{\beta_1}$ tel que $[e_{\beta_1}, (f_{\beta_1} := -\omega'(e_{\beta_1}))] = \beta_1^\vee$

On a $r_1 = \exp(\text{ad}(e_{\beta_1})).\exp(-\text{ad}(f_{\beta_1})).\exp(\text{ad}(e_{\beta_1}))$.

Il est clair que $r_1(\mathfrak{g}_{\beta_2}) = \mathfrak{g}_{r_1(\beta_2)} = \mathfrak{g}_{\beta_2}$; il reste donc à montrer que $(-r_1)$ fixe \mathfrak{g}_{β_2} . Soit $x \in \mathfrak{g}_{\beta_2}$, alors on a :

$$\exp(\text{ad } e_{\beta_1})(x) = x + [e_{\beta_1}, x].$$

$$\exp(-\text{ad } f_{\beta_1})(x) = x - [f_{\beta_1}, x].$$

$$\exp(-\text{ad } f_{\beta_1})([e_{\beta_1}, x]) = [e_{\beta_1}, x] - [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]] + \frac{1}{2}[f_{\beta_1}, [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]]].$$

$$\text{avec } \frac{1}{2}[f_{\beta_1}, [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]]] = \frac{1}{2}[-\beta_1^\vee, [f_{\beta_1}, x]] = [f_{\beta_1}, x].$$

$$\text{D'où } \exp(-\text{ad } f_{\beta_1}).\exp(\text{ad } e_{\beta_1})(x) = x + [e_{\beta_1}, x] - [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]].$$

Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $[e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]] = \mu x$ et donc :

$$\exp(-\text{ad } f_{\beta_1}).\exp(\text{ad } e_{\beta_1})(x) = (1 - \mu)x + [e_{\beta_1}, x].$$

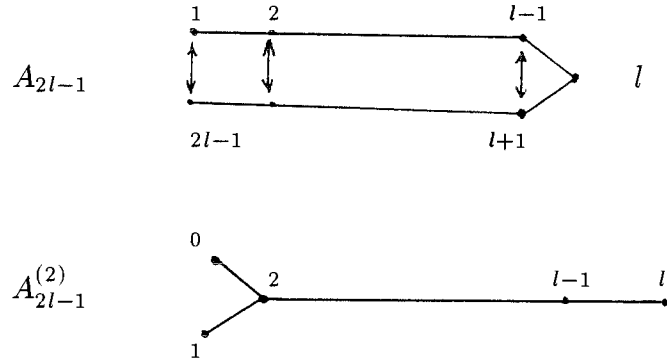
Par conséquent

$$r_1(x) = (1 - \mu)(x + [e_{\beta_1}, x]) + [e_{\beta_1}, x] = (1 - \mu)x + (2 - \mu)[e_{\beta_1}, x]$$

Comme $r_1(x) \in \mathfrak{g}_{\beta_2}$ et $\beta_1 + \beta_2$ est une racine de Δ , on a nécessairement $[e_{\beta_1}, x] \neq 0$ et $\mu = 2$, donc $r_1(x) = -x$.

□

5.4.1. Cas où $\mathring{\mathfrak{g}}$ est de type A_{2l-1} , $l > 1$:



Si $l = 2k$ ou $2k + 1$, on pose pour $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$:

i) $\beta_i = \alpha_{2i+1} + \delta$, avec $\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$. Les racines β_i de Δ ainsi définies sont deux à deux fortement orthogonales.

ii) $e_{\beta_i} \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$, $f_{\beta_i} = -\omega'(e_{\beta_i})$, tel que $[e_{\beta_i}, f_{\beta_i}] = \beta_i^\vee$

iii) $A_i = \exp(\text{ad}(f_{\beta_i})) \cdot \exp(\log(\frac{\sqrt{2}}{2})\text{ad}(\beta_i^\vee)) \cdot \exp(-\text{ad}(e_{\beta_i}))$.

iv) $A = \prod_{i=0}^{k-1} A_i$.

v) r_i la réflexion par rapport à β_i^\vee . r_i se prolonge en un automorphisme d'ordre fini de \mathfrak{g} qu'on note encore r_i et qui est défini par :

$$r_i = \exp(\text{ad}(e_{\beta_i})) \cdot \exp(-\text{ad}(f_{\beta_i})) \cdot \exp(\text{ad}(e_{\beta_i})).$$

vi) $r = \prod_{i=0}^{k-1} r_i$.

Alors $\sigma/\mathfrak{g}_{\beta_i} \oplus \mathfrak{g}_{-\beta_i} = -id$ (donc $\sigma(\beta_i^\vee) = \beta_i^\vee$ et $(e_{\beta_i} + f_{\beta_i}) \in \mathfrak{p}$) et $A_i(\beta_i^\vee) = (e_{\beta_i} + f_{\beta_i})$ (cf 3.9).

Lemme 5.4.1.1.

Avec les notations ci-dessus et pour $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ on a :

$$\sigma A_i \sigma^{-1} = A_i r_i H_i, \text{ avec } H_i = \exp(\text{ad}(s\beta_i^\vee)) \text{ et } s \in \mathbb{C}.$$

Démonstration.

Il suffit de vérifier le lemme dans le \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e_{\beta_i}, \beta_i^{\check{}}, f_{\beta_i}\}$. On a :

$$\sigma A_i \sigma^{-1}(\beta_i^{\check{}}) = \sigma A_i(\beta_i^{\check{}}) = \sigma(e_{\beta_i} + f_{\beta_i}) = -(e_{\beta_i} + f_{\beta_i}) = -A_i(\beta_i^{\check{}}) = A_i r_i(\beta_i^{\check{}}).$$

D'où il existe un automorphisme H_i comme dans le lemme tel que : $\sigma A_i \sigma^{-1} = A_i r_i H_i$.

□

Pour $i = 0, 1, \dots, k-2$ soit γ_i la racine de $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\mathfrak{h}}_0)$ définie par :

$$\gamma_i = \alpha_{2i+1} + 2(\alpha_{2i+2} + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l.$$

$$\gamma_{k-1} = \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k} \text{ si } l = 2k.$$

$$\gamma_{k-1} = \alpha_{2k-1} + 2\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1} \text{ si } l = 2k + 1.$$

$$\gamma_k = \alpha_{2k+1} \text{ si } l = 2k + 1.$$

Il est clair que les γ_i sont fortement orthogonales et que pour $0 \leq i \leq k-1$, γ_i est la restriction de deux racines fortement orthogonales de $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\mathfrak{h}})$ échangées par ξ .

On pose : \mathfrak{l}^i la sous algèbre engendrée par $\mathring{\mathfrak{g}}_{\pm\gamma_i}$, $i = 0, 1, \dots, k$ ($\mathfrak{l}^k = \{0\}$ si $l = 2k$) et $\mathfrak{l} = \sum_{i=0}^k \mathfrak{l}^i$.

Soit $\mathring{\mathfrak{t}} = C_{\mathring{\mathfrak{g}}}(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{C}\beta_i^{\check{}})$ et notons $\mathring{\mathfrak{c}}$ son centre. Alors on a : $\mathring{\mathfrak{t}}' = \mathfrak{l}$ et par conséquent

$$C_{\mathfrak{g}''}(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{C}\beta_i^{\check{}}) = \mathfrak{l}''(\mathring{\mathfrak{c}}, \xi, -1) \oplus \mathfrak{l}''(\mathfrak{l}, \xi, -1)$$

(il s'agit d'une somme d'algèbres).

Lemme 5.4.1.2.

L'involution σ agit trivialement sur la sous algèbre $A(\mathfrak{l}''(\mathfrak{l}, \xi, -1))$ de \mathfrak{g}'' .

Démonstration.

il est clair que ξ fixe \mathfrak{l}^k et donc σ fixe $\mathfrak{l}''(\mathfrak{l}^k, \xi, -1)$ ($= A(\mathfrak{l}''(\mathfrak{l}^k, \xi, -1))$). On a donc à montrer que σ fixe $A(\mathfrak{l}''(\mathfrak{l}^i, \xi, -1))$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

On va faire le calcul pour le cas $i = 0$ (c'est pareil pour les autres cas).

D'après le lemme précédent on a : $\sigma A \sigma^{-1} = A.r.H$, avec $H = \prod_{i=0}^{k-1} H_i$; par conséquent : pour $x \in \mathfrak{g}$, $\sigma(Ax) = Ax$ si et seulement si $(rH\sigma)(x) = x$ et il suffit donc de montrer que $(rH\sigma = r\sigma H)$ ou $r\sigma$ fixe $\mathfrak{l}''(\mathfrak{l}^0, \xi, -1)$.

La sous algèbre $\mathfrak{l}''(\mathfrak{l}^0, \xi, -1)$ de \mathfrak{g}'' est engendrée par $\{\mathfrak{g}_{(\pm\gamma_0+n\delta)}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Il est clair que $r\sigma$ fixe $\mathfrak{g}_{(\pm\gamma_0+2n\delta)}$, $n \in \mathbb{Z}$ (car les racines $(\beta_i)_{i=0,\dots,k-1}$ sont fortement orthogonales à $(\pm\gamma_0+2n\delta)$); il suffit donc de montrer que $r\sigma$ fixe $\mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta}$.

Soit $x_0 \in \mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta} \setminus \{0\}$, comme $\gamma_0 + \delta$ est fortement orthogonale à β_i , $\forall i = 1, \dots, k-1$, alors $\mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta}$ est fixe par les r_i pour $i > 0$, mais $(\gamma_0 + \delta)$ et β_0 vérifient bien les conditions du Lemme 5.4. , donc $(-r_0)$ fixe $\mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta}$, et par suite $r\sigma(x_0) = -r(x_0) = -r_0(x_0) = x_0$.

□

Lemme 5.4.1.3.

la sous algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{R}(e_{\beta_i} + f_{\beta_i}) \right)$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

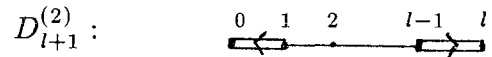
On va montrer que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}''$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Soit $\mathfrak{r}'' := C_{\mathfrak{g}''}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}'') = A(l''(\overset{\circ}{c}, \xi, -1) \oplus l''(l, \xi, -1))$. Les éléments $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables de \mathfrak{r}'' sont contenus dans $A((1 \otimes \overset{\circ}{c}_0) \oplus l''(l, \xi, -1))$ (cf 3.8).

D'après le lemme précédent l'involution σ fixe $l''(l, \xi, -1)$ et par suite les éléments $ad_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables et à valeurs propres réelles de $\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont contenus dans $(A(1 \otimes \overset{\circ}{c}_0)) \cap \mathfrak{p}$ qui est égale à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}''$. D'où le lemme.

□

5.4.2. Cas où $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est de type D_{l+1} :



Lemme 5.4.2.

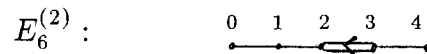
la sous algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}(e_0 + f_0)$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

On a $\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = 2 = \text{rang}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}) + 1$ et donc $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf lemme 3.7.2.).

□

5.4.3. Cas où $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est de type E_6 :



Lemme 5.4.3.

la sous algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}(e_0 + f_0)$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Lemme 6.1..

la sous algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus (\mathbb{R}(e_{\beta_1} + f_{\beta_1}) \oplus \mathbb{R}(e_{\beta_2} + f_{\beta_2}))$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

On a $\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = 3 = \text{rang}(\mathfrak{g}) - 1$ et donc $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf lemme 3.7.2.).

□

6.2. Ce cas correspond à l'involution $\sigma = \exp(i\pi \text{ad}(p_0))$.

Regardée sur la réalisation $\mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}}, \xi_2, \sqrt{j})$, $(\xi_2(x, y) = (y, \xi(x)))$ l'involution σ est égale à $1 \otimes (\xi_2)^3$.

Explicitement on a :

$$\mathring{\sigma}(x, y) = (\xi_2)^3(x, y) = (\xi(y), \xi^2(x)).$$

$$(\mathring{\mathfrak{s}})^{\mathring{\sigma}} = \{(x, \xi^2(x)), x \in \mathring{\mathfrak{g}}\}.$$

$$(\mathring{\mathfrak{s}})^{-\mathring{\sigma}} = \{(x, -\xi^2(x)), x \in \mathring{\mathfrak{g}}\}$$

avec $\mathring{\mathfrak{s}} = \mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}}$.

Soient α la racine de $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}}_0, \mathring{\mathfrak{h}}_0)$ égale à $2\alpha_1 + \alpha_2$, et e_{α} et e_{α_2} deux éléments non nuls de $(\mathring{\mathfrak{g}}_0)_{\alpha}$ et $(\mathring{\mathfrak{g}}_0)_{\alpha_2}$ respectivement. Les deux racines α et α_2 sont fortement orthogonales. On pose :

$$e_{\alpha+3\delta} = t^3 \otimes (e_{\alpha}, -e_{\alpha})$$

$$f_{\alpha+3\delta} = t^{-3} \otimes (-\mathring{\omega}'(e_{\alpha}), \mathring{\omega}'(e_{\alpha}))$$

$$e_{\alpha_2+3\delta} = t^3 \otimes (e_{\alpha_2}, -e_{\alpha_2})$$

$$f_{\alpha_2+3\delta} = t^{-3} \otimes (-\mathring{\omega}'(e_{\alpha_2}), \mathring{\omega}'(e_{\alpha_2}))$$

Ces éléments sont contenus dans $\mathfrak{g}^{-\sigma}$.

Lemme 6.2.

la sous algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := i\mathbb{R}c \oplus (\mathbb{R}(e_{\alpha+3\delta} + f_{\alpha+3\delta}) \oplus \mathbb{R}(e_{\alpha_2+3\delta} + f_{\alpha_2+3\delta}))$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration.

Il est clair que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATD σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et que :

$$\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = 3 = \text{rang}(\mathfrak{g}) - 1$$

D'après le lemme 3.7.2, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

□

7. Dans la table 5 ci-dessous on reproduit la classification de [BR] des involutions de première espèce d'algèbres de Kac-Moody affines.

Pour chaque involution de première espèce σ on donne la réalisation adaptée à σ (i.e la réalisation sur la quelle σ respecte la \mathbb{Z} -graduation et commute à l'application translation).

La notation τ_j désigne l'involution intérieure $\exp(i\pi \operatorname{ad} p_j)$ et $\overset{\circ}{\tau}_j$ est l'involution $1 \otimes \exp(i\pi \operatorname{ad} \overset{\circ}{p}_j)$ de la réalisation standard $l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, \epsilon_k)$ de l'algèbre de Kac-Moody affine donnée (parfois on regarde $\overset{\circ}{\tau}_j$ comme une involution de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$).

Les involutions rencontrées dans cette table s'écrivent toutes comme suit:

$\sigma = \rho\tau_i$ ou $\sigma = \rho \overset{\circ}{\tau}_i$, où ρ est un automorphisme de diagramme involutif.

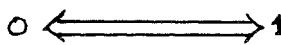
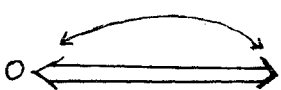
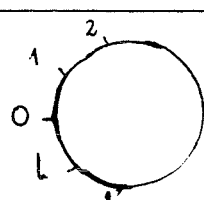
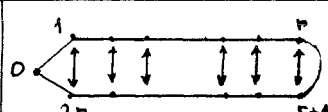
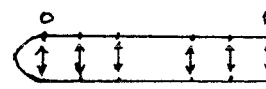
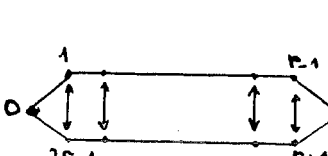
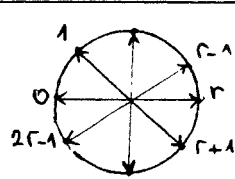
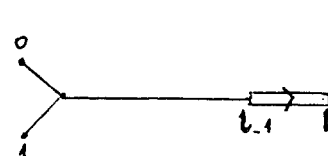
Ainsi, avec les notations de 2.3 et 2.7 on a :

$$\epsilon = \begin{cases} a_i \bmod(2) & \text{si } \sigma = \rho\tau_i \\ 0 & \text{si } \sigma = \rho \overset{\circ}{\tau}_i \end{cases}$$

où a_i est l'entier vérifiant $p_i = \overset{\circ}{p}_i + a_i d$ (cf chap II, 1.5)

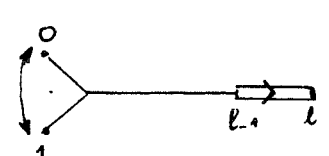

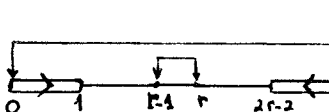
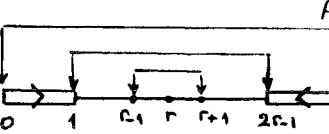
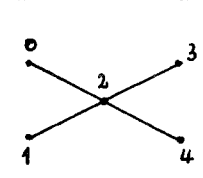
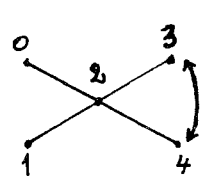
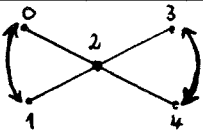
Ayant ceci et en utilisant 2.7, on peut déterminer la réalisation explicite adaptée à l'involution σ .

Table 5

\mathfrak{g}	ρ	σ	Réalisation adaptée à σ
$A_1^{(1)}$		$\tau_0 \tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$A_1^{(1)}$		ρ	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_1, -1)$
$A_l^{(1)}, l > 1$		$\tau_0 \tau_i = \overset{\circ}{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{l+1}{2}$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$A_{2r}^{(1)}, r > 0$		ρ_1	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
		$\rho_1 \tau_0$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
$A_{2r-1}^{(1)}, r > 1$		ρ_1	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_{2r-1}, -1)$
$A_{2r-1}^{(1)}, r > 1$		ρ_2	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\rho_2 \overset{\circ}{\tau}_r$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$A_{2r-1}^{(1)}, r > 1$		ρ_3	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_r, -1)$
$B_l^{(1)}, l > 2$		$\tau_0 \tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$ $\tau_i = \overset{\circ}{\tau}_i$ $2 \leq i \leq l$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)

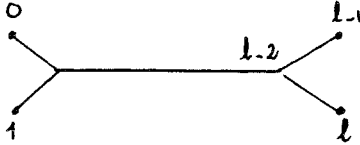
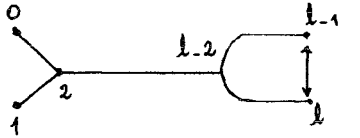
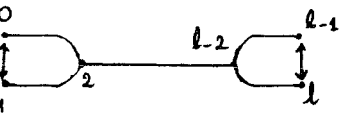
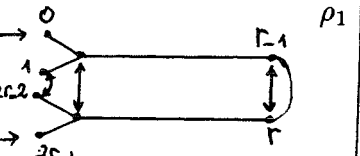
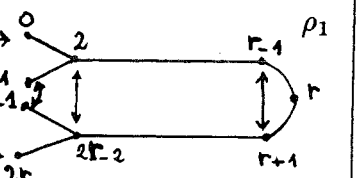
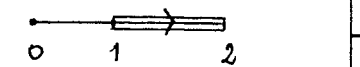
(*) $\theta(x, y) = (y, x); x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$

Table 5 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	Réalisation adaptée à σ
$B_l^{(1)}, l > 2$		ρ $\rho\tau_i = \rho\dot{\tau}_i$ $2 \leq i \leq l$	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, \dot{\tau}_1, -1)$
$C_l^{(1)}, l > 1$		$\tau_0\tau_l = \dot{\tau}_l$ $\tau_i = \dot{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{l}{2}$	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$C_{2r-1}^{(1)}, r > 1$		ρ	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, \dot{\tau}_{2r-1}, -1)$
$C_{2r}^{(1)}, r > 1$		ρ $\rho\tau_r = \rho\dot{\tau}_r$	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, \dot{\tau}_{2r}, -1)$ $l(\mathring{\mathfrak{g}}, \dot{\tau}_{2r}, -1)$
$D_4^{(1)}$		$\tau_0\tau_1 = \dot{\tau}_1$ $\tau_2 = \dot{\tau}_2$	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$D_4^{(1)}$		ρ_0 $\rho_0\tau_0\tau_1 = \rho_0\dot{\tau}_1$	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\rho_0\tau_0$	$l(\mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$D_4^{(1)}$		ρ_2 $\rho_2\tau_2 = \rho_2\dot{\tau}_2$	$l(\mathring{\mathfrak{g}}, \dot{\tau}_1, -1)$ $l(\mathring{\mathfrak{g}}, \dot{\tau}_1, -1)$

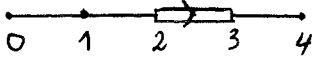
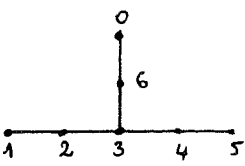
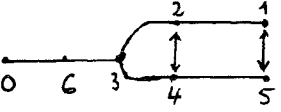
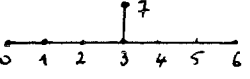
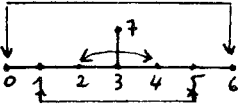
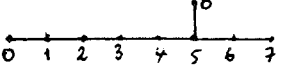
(*) $\theta(x, y) = (y, x); x, y \in \mathring{\mathfrak{g}}$

Table 5 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	Réalisation adaptée à σ
$D_l^{(1)}, l > 4$		$\tau_0 \tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$ $\tau_i = \overset{\circ}{\tau}_i$ $2 \leq i \leq \frac{l}{2}$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$ $l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$D_l^{(1)}, l > 4$		$\rho_0 \tau_i = \rho_0 \overset{\circ}{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{l-1}{2}$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$ $l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\rho_0 \tau_0$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$D_l^{(1)}, l > 4$		$\rho_2 \tau_i = \rho_2 \overset{\circ}{\tau}_i$ $2 \leq i \leq l-2$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_1, -1)$ $l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_1, -1)$
$D_{2r-1}^{(1)}, r > 2$		ρ_1	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_{2r-1}, -1)$
$D_{2r}^{(1)}, r > 2$		ρ_1 $\rho \tau_r = \rho \overset{\circ}{\tau}_r$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_{2r}, -1)$ $l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_{2r}, -1)$
$G_2^{(1)}$		$\tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\overset{\circ}{\tau}_0$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)

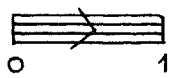
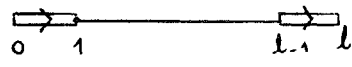
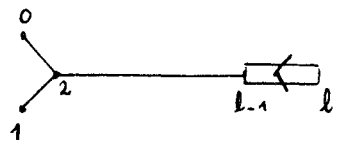


(*) $\theta(x, y) = (y, x); x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$

Table 5 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	Réalisation adaptée à σ
$F_4^{(1)}$		$\tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\tau_4 = \overset{\circ}{\tau}_4$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$E_6^{(1)}$		$\tau_0 \tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\tau_6 = \overset{\circ}{\tau}_6$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$E_6^{(1)}$	ρ_0 	ρ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\rho_0 \tau_6 = \rho_0 \overset{\circ}{\tau}_6$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\rho_0 \tau_0$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$E_7^{(1)}$		$\tau_0 \tau_6 = \overset{\circ}{\tau}_6$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\tau_7 = \overset{\circ}{\tau}_7$	
		$\tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$	
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)
$E_7^{(1)}$	ρ 	ρ	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\tau}_6, -1)$
		$\rho \tau_7 = \rho \overset{\circ}{\tau}_7$	
$E_8^{(1)}$		$\tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, id, 1)$
		$\tau_7 = \overset{\circ}{\tau}_7$	
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \theta, -1)$ (*)

(*) $\theta(x, y) = (y, x); x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$

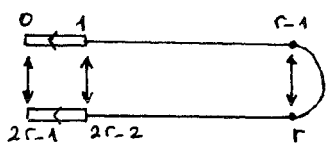
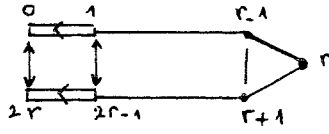
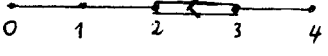
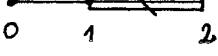
Table 5 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	Réalisation adaptée à σ
$A_2^{(2)}$		$\tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$ τ_0	$\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$
$A_{2l}^{(2)}, l > 1$		$\tau_i = \overset{\circ}{\tau}_i$ $1 \leq i \leq l$ τ_0	$\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ $\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$
$A_{2l-1}^{(2)}, l > 2$		$\overset{\circ}{\tau}_i, 1 \leq i \leq \frac{l}{2}$ $\tau_0 \tau_l = \overset{\circ}{\tau}_l$ τ_l τ_0	$\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$
$A_{2l-1}^{(2)}, l > 2$	ρ 	ρ $\rho \tau_i = \rho \overset{\circ}{\tau}_i$ $2 \leq i \leq \frac{l+1}{2}$ $\rho \tau_l$	$\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi(\overset{\circ}{\tau}_1)^{\frac{1}{2}}, i)$ (**)
$D_{l+1}^{(2)}, l > 1$		$\tau_0 \tau_i = \overset{\circ}{\tau}_i$ $1 \leq i \leq l$ τ_i $0 \leq i \leq \frac{l}{2}$	$\mathfrak{l}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$

(*) $\theta(x, y) = (y, x); (x, y) \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$

(**) $(\overset{\circ}{\tau}_j)^{\frac{1}{2}} := \exp(\frac{i\pi}{2} ad(\overset{\circ}{p}_j)); i \in \mathbb{C}, i^2 = -1$

Table 5 (suite et fin)

\mathfrak{g}	ρ	σ	Réalisation adaptée à σ
$D_{2r}^{(2)}, r > 1$		ρ	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi(\overset{\circ}{\tau}_{2r-1})^{\frac{1}{2}}, i) \quad (**)$
$D_{2r+1}^{(2)}, r > 0$		ρ $\rho\tau_r$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi(\overset{\circ}{\tau}_{2r})^{\frac{1}{2}}, i) \quad (**)$
$E_6^{(2)}$		$\tau_1 = \overset{\circ}{\tau}_1$ $\tau_4\tau_0 = \overset{\circ}{\tau}_4$ τ_4 τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$
$D_4^{(3)}$		$\tau_0\tau_2 = \overset{\circ}{\tau}_2$	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi, j), \quad j^3 = 1$
		τ_0	$l(\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \times \overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \xi_2, \sqrt{j}) \quad (**)'$

(**) $(\overset{\circ}{\tau}_j)^{\frac{1}{2}} := \exp(\frac{i\pi}{2} ad(\overset{\circ}{p}_j)); \quad i \in \mathbb{C}, i^2 = -1$

(*)' $\xi_2(x, y) = (y, \xi(x)); \quad x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$

Références bibliographiques

- [A] Andruskiewitsch N. Some forms of Kac-Moody algebras,
J. of algebra 147 (1992), 324-344.
- [B] Bausch J. Etude et classification des automorphismes d'ordre
fini et de première espèce des algèbres de
Kac-Moody affines, Revue de l'institut Elie Cartan,
N^o 11, Nancy (1988), 5-124.
- [B'] Bausch J. Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines,
C.R. Acad. Sci. Paris 302 (1986), 409-412.
- [BBK] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, chapitres I à IX, Paris
- [Be] Berger M. Les espaces symétriques non compacts,
Ann. E.N.S 74 (1957), 85-177.
- [BeP] Berman S. et Piansola A. Generators and relations for real forms
of some Kac-Moody Lie algebras.
Comm. in algebra 15 (1987), 935-959
- [BM] Borel A. et Mostow G.D. On semi-simple automorphisms of Lie algebras,
Ann. of Math. 61 (1955), 389-405.
- [Bo] Borchers R. Generalized Kac-Moody algebras,
J. of algebra 115 (1988), 501-512.
- [BoT] Borel A. et Tits J. Groupes réductifs,
publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965), 55-510.
- [Bp] Bardy-Panse N. Systèmes de racines infinis,
Thèse, Nancy, Janvier 1993.
- [BR] Bausch J. et Rousseau G. Involutions de première espèce des algèbres affines,
Revue de l'institut Elie Cartan 11,
Nancy (1988), 125-139.
- [B₃R] Back-Valente V., Bardy-Panse N., Ben Messaoud H. et Rousseau G. Formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody,
Classification et racines relatives.
à paraître au J. of Algebra.
(voir cette thèse, 9-68).

- [BrT1] Bruhat F. Groupes réductifs sur un corps local,I.
et Tits J. Données radicielles valuées,
Publ.Math. I.H.E.S. 41 (1972), 5-252.
- [BrT2] Bruhat F. Groupes réductifs sur un corps local,II. Schéma en
et Tits J. groupes; existence d'une donnée radicielle valuée,
Publ. Math. I.H.E.S. 60 (1984), 5-184.
- [Hée] Hée J.Y. Systèmes de racines sur un anneau
 commutatif totalement ordonné,
Geometriae Dedicata, 37 (1991), 65-102.
- [Ka] Kabbaj S. Classification locale des espaces affines symétriques,
Thèse, Nancy, Janvier 1986.
- [K] Kac V.G. Infinite dimensional Lie algebras, Troisième édition,
Cambridge University Press (1990).
- [KP1] Kac V.G et Defining relations of certain infinite dimensional
Peterson D.H groups "Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui"
Lyon 1984,Astérisque n⁰ hors série (1985), 165-208.
- [KP2] Kac V.G. et On geometric invariant theory for infinite dimens-
Peterson D.H. -ional groups, in "Algebraic groups" Utrecht 1986,
Springer lecture note in math. 1271 (1987), 109-142.
- [KW] Kac V.G. et On automorphisms of Kac-Moody algebras and
Wang S.P. groups, Advances in Math. 92 (1992), 129-195.
- [PK] Peterson D.H Infinite flag varieties and conjugacy theorems,
et Kac V.G. Proc. Natl. Acad. Sc. USA 80 (1983), 1778-1782.
- [R1] Rousseau G. Espaces affines symétriques et algèbres affines,
Revue de l'institut Elie Cartan 11, Nancy (1988),
141-174.
- [R2] Rousseau G. Formes réelles presque compactes des algèbres
de Kac-Moody affines, Revue de l'institut
Elie Cartan 11, Nancy (1988), 175-205.

- [R3] Rousseau G. Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines,
in “Harmonic Analysis” Luxembourg 1987,
Springer lecture note in Math. 1359 (1988), 252-264.
- [R4] Rousseau G. Almost split K -forms of Kac-Moody algebras,
in “Infinite dimensional Lie algebras and groups”
Marseille 1988, V.G. Kac éditeur,
Adv. Ser. in Math. Physics 7,
World Scientific (1989), 70-85.
- [R5] Rousseau G. L’immémorable jumulé d’une forme presque déployée
d’une algèbre de Kac-Moody,
Bull. Soc. Math. Belg. 42 (1990), 673-694.
- [R6] Rousseau G. On forms of Kac-Moody algebras,
à paraître dans les compte-rendus du
Summer research institute of A.M.S.
Pennsylvania state University, Juillet 1991.
- [Sa] Satake I. Classification theory of semi-simple algebraic groups,
Lecture note in pure and applied math. 3,
Marcel Dekker, New-York, 1971.
- [S] Sugiura M. Conjugate classes of Cartan subalgebras
in real semi-simple algebras,
J. of the Math. Soc. of Japon, Vol 11 n^o4 (1959).
- [T1] Tits J. Classification of algebraic semi-simple groups,
in “Algebraic groups and discontinuous subgroups”
Boulder 1965, Proc. of Symposia in pure math. IX
(1966), 33-62.
- [T2] Tits J. Normalisateurs de tores I, groupes de Coxeter
étendus, J. of Algebra 4 (1966), 96-116.
- [T3] Tits J. Sur les constantes de structure et le théorème
d’existence des algèbres de Lie semi-simples,
Publ. Math. I.H.E.S. 31 (1966), 21-58.

- [T4] Tits J. Groups and group functors attached to Kac-Moody data, in “Arbeitstagung Bonn 1984 ” Springer Lecture note 1111 (1985), 193-223.
- [T5] Tits J. Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, J. of Algebra 105 (1987), 542-573.
- [T6] Tits J. Immeubles jumulés, Cours au collège de France, 1988/89 et 1989/90.
- [T7] Tits J. Twin buildings and groups of Kac-Moody type, in “ groups combinatorics and geometry ” Durham 1990, Liebeck et Saxl éditeurs, London Math. Soc. Lecture note 165, Cambridge U. Press (1992), 249-286.
- [V] Vust T. Opérations de groupes réductifs dans un type de cone presque homogène, Bull. Soc. Math. France, 102 (1974), 317-334.

Sommaire

Introduction	4
Première partie : Formes réelles presque déployées d'algèbres de Kac-Moody symétrisables	8
L'article $[B_3R]$	9
§1 Algèbres de Kac-Moody et formes presque déployées	10
§2 L'indice des formes presque déployées	15
§3 Le système des racines relatives	27
§4 Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody symétrisables	36
§5 Formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines	47
§6 Tableau des formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines	55
Bibliographie	67
Fin de l'article $[B_3R]$	68
§7 Compléments sur les formes réelles presque déployées et les involutions de seconde espèce des algèbres de Kac-Moody symétrisables	69
Table 1	72
Table 2	73
Table 3	81
Table 4	82
Deuxième partie : Réalisations des automorphismes d'ordre fini et de première espèce et des formes presque compactes d'algèbres de Kac-Moody affines	84

Chapitre I : Algèbres de Kac-Moody affines. Réalisations et automorphismes	
d'ordre fini et de première espèce	85
1. Réalisations	85
2. Automorphismes d'ordre fini et de première espèce	89
Chapitre II : Formes réelles presque compactes d'algèbres	
de Kac-Moody affines	94
1. Généralités	94
2. Réalisation des formes réelles presque compactes	
d'algèbres de Kac-Moody affines	97
3. Sous algèbres toriques déployées maximales	101
4. Construction d'une <i>SATDM</i> σ -stable	
dans le cas où \mathfrak{g} est de type <i>Aff1</i>	108
5. Construction d'une <i>SATDM</i> σ -stable	
dans le cas où \mathfrak{g} est de type <i>Aff2</i>	111
6. Construction d'une <i>SATDM</i> σ -stable	
dans le cas où \mathfrak{g} est de type <i>Aff3</i>	121
Table 5	124
Bibliographie	130

UNIVERSITE DE NANCY I

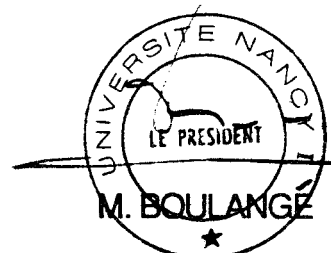
NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur BEN MESSAOUD Hechmi

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I
en MATHEMATIQUES PURES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 01 OCT. 1993 - u: 359

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



Abstract

We look to real forms of indecomposable and symmetrizable Kac-Moody Lie algebras, we distinguish between two kinds of real forms : almost split real forms and almost compact real forms.

As in the classical case, any almost split real form is entirely determined by its index. We establish a one to one correspondance between the conjugacy classes of almost split real forms and those of involutions of second kind. This correspondance allows us to give a convenient criterion to recognize the admissible indexes, and so to give a satisfactory classification of almost split real forms or involutions of second kind in terms of the Dynkin diagram.

For the almost compact real forms, only those of affine Kac-Moody Lie algebras are considered, the reason is that an affine Kac-Moody Lie algebra is realized as a central extension of a twisted loop algebra. We prove that any almost compact real form of an affine Kac-Moody Lie algebra may be realised as a central extension of a twisted (in a more complicated meaning) loop algebra over a real semi-simple Lie algebra.

A complete list (which may be redundant) of representatives of almost compact real forms of affine Kac-Moody Lie algebras is known, and we compute for each of them the corresponding realisation and a maximal split toral subalgebra.

Key words : Lie algebra, Kac-Moody Lie algebra, Loop algebra, affine Lie algebra, involutive automorphism, real form.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse à la classification des formes réelles des algèbres de Kac-moody symétrisables et indécomposables. On distingue deux types de formes réelles : les formes réelles presque déployées et les formes réelles presque compactes.

L'approche utilisée par Satake et Tits pour classier les formes réelles des algèbres semi-simples complexes a été étendue par Rousseau aux formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody symétrisables, elle consiste essentiellement à représenter une forme réelle par un diagramme appelé indice de la forme. On démontre que la classification des formes réelles presque déployées est équivalente à celle des automorphismes involutifs de seconde espèce, ceci donne un critère commode pour reconnaître l'admissibilité d'un indice donné et aboutit à une classification complète de ces formes.

Enfin, on se restreint aux algèbres de Kac-Moody affines pour étudier leurs formes réelles presque compactes, ces formes ont un lien avec les automorphismes involutifs de première espèce, on démontre que pour un choix convenable de la réalisation de l'algèbre affine, une forme réelle presque compacte s'obtient à partir d'une forme réelle de l'algèbre de Lie semi-simple de la réalisation en question, on obtient ainsi une "réalisation réelle" des formes presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines. Pour une telle réalisation, on indique un procédé de construction d'une sous algèbre torique déployée maximale.

Mots clés : Algèbre de Lie, algèbre de Kac-Moody, algèbre de lacets, algèbre de Lie affine, automorphisme involutif, forme réelle.