



**HAL**  
open science

# Sur l'existence de comportement chaotique dans les systèmes manufacturiers

Miguel Domingo Alfaro Marchant

► **To cite this version:**

Miguel Domingo Alfaro Marchant. Sur l'existence de comportement chaotique dans les systèmes manufacturiers. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1998. Français. NNT : 1998NAN10010 . tel-01747523

**HAL Id: tel-01747523**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747523v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

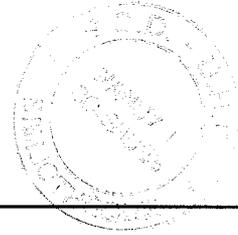
## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



FACULTE DES SCIENCES

UFR Sciences Techniques Mathématiques Informatique Automatique  
Ecole Doctorale IAE + M  
DFD Automatique et Production Automatisée.

## Thèse

Présentée en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy I  
en Production Automatisée

par Miguel Domingo ALFARO MARCHANT

## Sur l'existence de comportement chaotique dans les systèmes manufacturiers

Soutenue publiquement le 6 février 1998 devant la Commission d'Examen :

Membres du jury :

Président :	J. RICHARD	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I
Rapporteurs :	Y. FREIN	Professeur, Institut National Polytechnique de Grenoble ENSGI
	F. VERNADAT	Professeur, Université de Metz
Examineurs :	G. BONHOMME	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I
	P. CHARPENTIER	Maître de Conférences, Université Henri Poincaré, Nancy I ENSTIB
Directeur	P. MARTIN	Professeur, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Metz

*Algunas claves  
del futuro  
no están en el presente  
ni en el pasado  
están  
extrañamente  
en el futuro*

M. Benedetti

*... A Safia Tahri*



## Avant propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (C.R.A.N. - E.S.A. C.N.R.S. 7039) dans l'équipe Ingénierie de la Conception et de la Fabrication du Groupe Génie de la Production.

Je tiens tout d'abord à remercier l'Université de Santiago du Chili et le Ministère de la Planification Nationale du Chili (MIDEPLAN) de m'avoir donné le temps et les moyens financiers pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux personnes qui me font l'honneur de composer ce jury :

Monsieur le Professeur FREIN, de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour l'intérêt qu'il a témoigné à nos travaux, pour le temps qu'il nous a consacré, et pour avoir accepté d'en examiner la teneur.

Monsieur le Professeur VERNADAT de l'Université de Metz, pour ses précieux conseils et pour la lourde tâche de rapporteur qu'il a bien voulu accepter.

Monsieur le Professeur RICHARD de l'Université Henri Poincaré, pour la confiance qu'il nous manifeste, en acceptant d'être président de notre jury de thèse.

Monsieur le Professeur BONHOMME de l'Université Henri Poincaré, pour s'être fortement impliqué dans ce travail et également pour sa disponibilité à analyser et discuter les différentes étapes de notre démarche.

Monsieur le Professeur MARTIN de l'Ecole des Arts et Métiers de Metz, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, de m'avoir donné les conditions nécessaires aux développements de ces travaux, et pour sa disponibilité à discuter des différents aspects de cette thèse.

Monsieur le Maître de Conférences CHARPENTIER de l'Université Henri Poincaré, pour son implication dans ce travail, pour le temps important qu'il a consacré à discuter, analyser, remettre en cause, réfléchir et m'aider à résoudre les problèmes difficiles pendant les différentes phases de ce projet de recherche, et pour la mise en forme du document final. Je voudrais aussi souligner que ses qualités humaines ont permis de créer des relations facilitant l'émergence de ce travail.

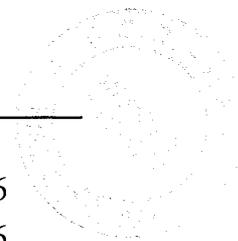
Je veux également associer à ces remerciements l'ensemble du personnel et de mes camarades du laboratoire et plus particulièrement (par ordre alphabétique) : Cédric, Denise, Karin, Mario, Olivier, Vincent, ainsi que Jean Pierre DRAPIER de l'A.I.P.L. Je n'oublie pas Olivier GARRO qui a été à l'origine de l'idée de cette thèse.

Enfin, que serait ce manuscrit sans l'apport essentiel et fondamental de Safia ...

## Table de Matières

<b>Avant-propos</b>	1
<b>Table de matières</b>	2
<b>Introduction</b>	7
<b>Chapitre 1 : Analyse Bibliographique</b>	11
<b>1.1. Les systèmes dynamiques non linéaires et le chaos</b>	11
1.1.1. Concepts fondamentaux	11
1.1.2. Théorème de Poincaré et Bendixon	13
1.1.3. La section de Poincaré	14
1.1.4. La transformation de Fourier	16
1.1.5. La notion de bifurcation	16
1.1.6. Les routes vers le chaos	17
1.1.7. Quantification du chaos	18
a) Les exposants de Lyapunov	19
b) L'entropie de Kolmogorov-Sinai	20
c) La dimension fractale	21
d) La dimension de corrélation	23
1.1.8. Reconstruction de l'espace de phases	24
a) Détermination du temps de retard $\tau$	25
b) Détermination de la dimension globale de plongement $d$	26
1.1.9. Dimension locale ou dimension de la dynamique du système	28
1.1.10. Généralisation des mesures	28
a) La dimension de capacité	28
b) L'entropie généralisée	29
1.1.11. Conjecture de Kaplan-Yorke	30
1.1.12. Résumé et conclusions	31
<b>1.2. L'état de l'art</b>	32
1.2.1. Introduction	32
1.2.2. Les articles principaux	32
1.2.3. D'autres articles en bref	36
1.2.4. Conclusions	37

<b>Chapitre 2 : Méthodologie de modélisation et simulation des systèmes flexibles de production</b>	<b>38</b>
<b>2.1 Introduction</b>	<b>38</b>
<b>2.2. La modélisation</b>	<b>38</b>
<b>2.3. Système et sous-systèmes</b>	<b>41</b>
2.3.1. Définitions	41
2.3.2. Propriétés	42
<b>2.4. Les variables</b>	<b>44</b>
<b>2.5. Résumé et conclusions</b>	<b>45</b>
<b>Chapitre 3 : Etude de la dynamique des systèmes productifs simples</b>	<b>46</b>
<b>3.1. Cas I : Un système composé d'une machine et d'un type de pièce</b>	<b>46</b>
3.1.1. Variables et paramètres	46
3.1.2. Fonctionnement du système	46
<b>3.2. Cas II : Un système composé d'une machine et de deux types de pièces</b>	<b>46</b>
3.2.1. Variables et paramètres	46
3.2.2. Schéma du système	47
3.2.3. Fonctionnement de l'atelier et règles de décision	47
3.2.4. Analyse des résultats des simulations	48
<b>3.3. Cas III : Un système composé de deux machines en parallèle et de deux types de pièces</b>	<b>49</b>
3.3.1. Variables et paramètres	49
3.3.2. Schéma du système	50
3.3.3. Fonctionnement de l'atelier et règles de décision	50
3.3.4. Analyse des résultats des simulations	51
<b>3.4. Résumé et conclusions</b>	<b>54</b>



<b>3.5. Cas IV : Etude d'un système simple de production chaotique</b>	<b>56</b>
3.5.1. Variables et paramètres	56
3.5.2. Schéma du système	56
3.5.3. Fonctionnement de l'atelier et règles de décision	57
3.5.4. Analyse des résultats des simulations avec différentes fonctions de décision.	58
3.5.4.1. Expériences avec la fonction $g_1$	58
3.5.4.2. Expériences avec la fonction $g_2$	59
a) le spectre de Fourier et la fonction d'autocorrélation	59
b) Reconstruction de l'espace de phase	61
c) Estimation de la dimension fractale	62
d) l'attracteur et la section de Poincaré	63
e) La dimension locale et les exposants de Lyapunov	64
3.5.4.3. Expériences avec la fonction $g_3$	65
3.5.4.4. Expériences avec la fonction $g_4$	66
3.5.5. Introduction des temps de reconfiguration et de transport	70
<b>3.6. Résumé et conclusions</b>	<b>72</b>
<b>Chapitre 4 : Analyse du comportement dynamique d'un atelier flexible de production automatisé</b>	<b>74</b>
<b>4.1. Introduction</b>	<b>74</b>
<b>4.2. Variables et paramètres</b>	<b>74</b>
<b>4.3. Schéma du système</b>	<b>74</b>
<b>4.4. Fonctionnement de l'atelier</b>	<b>75</b>
<b>4.5. Règles ou fonctions de décision</b>	<b>77</b>
<b>4.6. Résultats et analyses des résultats des simulations</b>	<b>78</b>
4.6.1. Expériences avec la fonction $g_1$	78
4.6.2. Expériences avec la fonction $g_2$	80
4.6.3. Expériences avec la fonction $g_3$	81
4.6.4. Expériences avec la fonction $g_4$	81

4.6.5. Expériences avec la fonction $g_5$	82
4.6.6. Expérience avec deux types de fonctions de décision	85
<b>4.7. Analyse de bifurcation</b>	<b>86</b>
<b>4.8. Résumé et conclusions</b>	<b>88</b>
<b>Chapitre 5 : Flexibilité et chaos</b>	<b>90</b>
<b>5.1. Introduction</b>	<b>90</b>
<b>5.2. Le concepts de flexibilité</b>	<b>91</b>
5.2.1. Les différents types de Flexibilités	91
5.2.2 Mesures de la flexibilité de routage	92
5.2.2.1. Axiomes pour une mesure de flexibilité	93
a) Axiomes essentiels	93
b) Axiomes attendus	93
5.2.3. Une mesure de flexibilité	95
<b>5.3. Simulation des systèmes avec différentes flexibilités</b>	<b>95</b>
5.3.1. Caractéristiques du système à simuler	95
5.3.1.1. Paramètres et variables	95
5.3.1.2. Règles ou fonctions de décision	95
5.3.2. Cas I avec une flexibilité de routage $S_1$	96
5.3.3. Cas II avec une flexibilité de routage $S_2$	99
5.3.4. Cas III avec une flexibilité de routage $S_3$	101
5.3.5. Cas IV avec une flexibilité de routage $S_4$	104
5.3.6. Cas V avec une flexibilité de routage $S_5$	106
<b>5.4. Relation entre flexibilité et complexité</b>	<b>109</b>
<b>5.5 Résumé et conclusions</b>	<b>111</b>

<b>Chapitre 6 : Modélisation et simulation de la cellule flexible de l'A.I.P.L.</b>	<b>112</b>
<b>6.1. Introduction</b>	<b>112</b>
<b>6.2 Description de la cellule</b>	<b>112</b>
<b>6.3. Etude du comportement dynamique de la cellule flexible de production</b>	<b>113</b>
6.3.1. Décomposition du système en sous-systèmes	113
6.3.2. Modélisation de chaque sous-système de l'atelier	113
6.3.2.1. Variables et paramètres	114
6.3.2.2. Fonctionnement du système et règles de décisions	114
6.3.3. Validation du modèle	115
6.3.4 Etudes préliminaires	115
6.3.4.1. Analyses des résultats des simulations	115
6.3.4.2. Sensibilité aux conditions initiales	117
6.3.4.3. Analyse de bifurcation	119
6.3.5. Détermination des invariants de la dynamique du système	120
<b>6.4. Résumé et conclusions</b>	<b>123</b>
<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>125</b>
<b>Références Bibliographiques</b>	<b>129</b>
<b>Annexe 1</b>	<b>134</b>
<b>Annexe 2</b>	<b>141</b>

## Introduction

### Approche intuitive du chaos dans les systèmes de production

Le terme chaos est devenu un terme à la mode. De nombreux chercheurs ont, pendant ces dernières années, travaillé sur ce sujet délicat à approcher dans des domaines très variés. Quelques uns d'entre eux ont même abordés ce thème pour les systèmes de production. Il semble en effet que certains systèmes de production laissent à penser que leur comportement peut être chaotique. Pour notre part, nous avons observé de façon tout à fait empirique la sensibilité de certains systèmes aux conditions initiales. En effet, l'évolution d'un système de production peut être radicalement différente, si l'on modifie de manière infime ses conditions initiales. Un exemple en est donné figure 1 pour l'évolution d'une variable "temps de séjour" des pièces à l'intérieur d'un atelier flexible pour deux conditions initiales voisines.

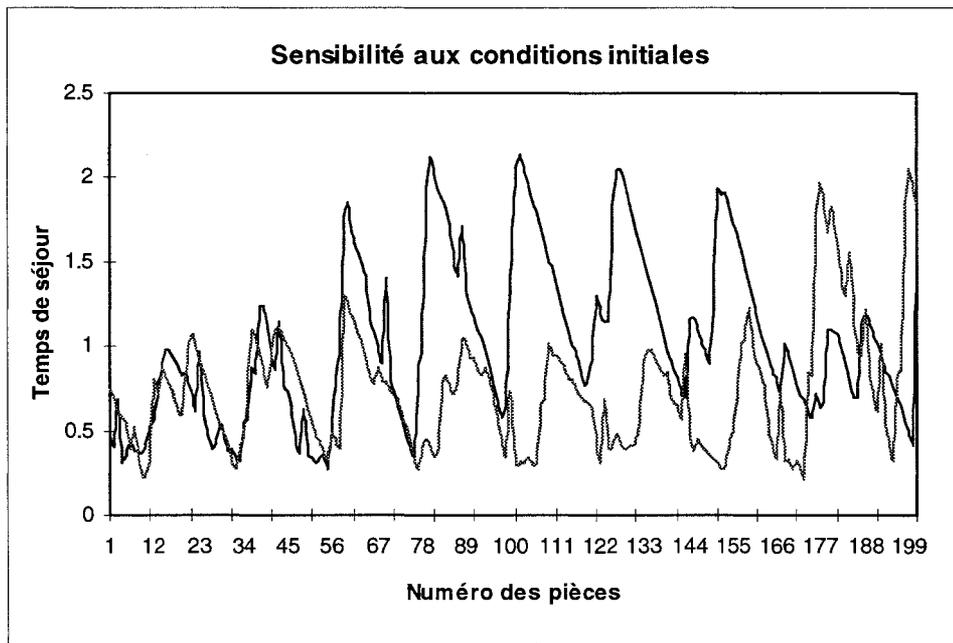


Figure 1: différentes évolutions pour des conditions initiales très proches.

Nous voyons qu'à partir d'un certain intervalle de temps, les trajectoires commencent à s'éloigner sans jamais se rejoindre. Nous avons réalisé, sur différents systèmes, de nombreux essais préliminaires à l'aide de conditions initiales différentes. Cela a consisté par exemple à faire arriver une pièce avec un léger retard par rapport à l'instant prévu, à supprimer ou ajouter une pièce d'une file d'attente, à imposer (une seule fois) une différence infinitésimale au temps d'une opération d'une pièce, etc... Dans certains cas, l'ensemble de ces nombreux essais nous a permis de constater que le comportement du système n'était jamais identique.

Nous avons également mené d'autres essais en modifiant cette fois les paramètres du système. Nous avons alors une nouvelle fois constaté, que le système avait des comportements différents.

Ces quelques essais nous montrent, semble t-il, qu'il existe des débuts de preuve, intuitives et empiriques, de l'existence du chaos dans les systèmes de production. Une des difficultés majeures, liée à cette théorie, réside dans la démonstration de cette existence. Comme l'écrivait l'un des pères du chaos E. Lorenz : "le chaos nous entoure, cependant il est très difficile de le mettre en évidence" [LOR.95]. A notre sens, la démonstration formelle de l'existence du chaos dans les systèmes de production, n'a pas, à ce jour, été réalisée.

### **Tour d'horizon historique**

Depuis les années 80 jusqu'à nos jours, s'est développée une quantité non négligeable de recherches destinées à démontrer l'existence d'un comportement chaotique tant dans le domaine de la science que de la technique. En 1983, pour la première fois des chercheurs français, spécialistes de la turbulence [BER.94] ont mis en évidence le chaos dans des systèmes réels. Avant cette découverte, le chaos appartenait au domaine des mathématiques, bien qu'un des premiers attracteurs chaotiques ait été découvert par un météorologue (E. Lorenz 1963). Néanmoins, ce sont bien des mathématiciens qui ont découvert que certains systèmes d'équations différentielles déterministes manifestent des caractéristiques très particulières, y compris dans les équations de différences déterministes très simples. Les exemples les plus classiques sont les systèmes d'équation de Lorenz et l'équation de croissance exponentielle. Ils ont en effet constaté qu'en fonction des paramètres des équations, le comportement des ces systèmes peut changer brutalement, et que de plus, ceux-ci sont sensibles aux conditions initiales : les trajectoires suivies pour deux conditions initiales très proches, s'éloignent de façon exponentielle au fur et à mesure que le temps s'écoule. D'ailleurs, Henri Poincaré (au début du siècle) avait déjà constaté ce phénomène lors de ses études sur le problème "à trois corps".

Une des idées les plus extraordinaires de cette découverte tient au fait que des systèmes déterministes semblent avoir des comportements complètement aléatoires. Laplace avait exprimé sa foi dans un univers déterministe en disant qu'il suffisait de connaître la position et la vitesse de toutes les particules pour connaître l'évolution future de l'univers. Cependant le travail de Poincaré a montré que même si nous arrivions à avoir la connaissance des conditions initiales, nous ne pourrions jamais connaître l'évolution du système. En effet, les équations n'ont pas de solutions analytiques, il faut donc les intégrer numériquement. A partir

de là, la moindre différence numérique entre deux "solutions" va conduire le système dans d'autres régions de l'espace de phases : l'évolution du système sera tout à fait différente.

"Aujourd'hui il n'y a plus aucun doute sur l'existence physique de ces comportements chaotiques, mais ils ne se manifestent pas de façon évidente autour de nous. Il a fallu - la démarche est classique en recherche - s'interroger sur les conditions les plus favorables pour observer ces dynamiques particulières" [BER.94].

Ce qui veut dire que lorsque nous observons un phénomène qui nous semble à première vue aléatoire, il est bien possible qu'en réalité se cache, derrière celui-ci, une racine tout à fait déterministe. Un des principaux problèmes qui se pose donc est d'être en possession d'un ensemble d'outils qui nous permettra de distinguer de quel type de comportement il s'agit. Nous sommes aujourd'hui en mesure d'analyser des systèmes dynamiques, toutefois, il n'y pas d'algorithme qui puisse nous conduire à une réponse [ABA.96]. Il faut appliquer les tests avec beaucoup de prudence et c'est l'analyse de tous les résultats des tests qui pourront fournir une réponse quant au type de comportement.

### **Les objectifs et le cadre du travail**

Notre objectif principal est donc ici d'amener une preuve de l'existence du chaos dans les systèmes de production. Cette étape est pour nous incontournable et constitue un premier pas dans une ligne de recherche qui restera à développer et à poursuivre.

Nous travaillerons avec des systèmes déterministes, tout simplement parce qu'il s'agit d'une contrainte imposée par le sujet lui-même. En effet, qui dit chaos dit systèmes déterministes. Un système productif déterministe est un système où les valeurs des paramètres et les règles de décision sont connues à l'avance et produites par des lois déterministes. Dans le domaine de la production, nous savons que de multiples phénomènes aléatoires se produisent. En apparence, le caractère déterministe peut être vu comme une contrainte empêchant la description d'un système productif, mais il n'en est rien. En effet, deux observations sont à faire : d'une part, il existe des systèmes de production où une approche déterministe est justifiée, c'est le cas des systèmes automatisés (le temps d'usinage et le temps d'arrivée de pièces peuvent être considérés comme fixes), d'autre part, le déterminisme élimine les événements stochastiques de la modélisation et mène au "cœur" du comportement du système (connaissance de la conduite du système sans les perturbations qui l'accompagnent).

Un autre aspect important est que le chaos se manifeste dans des systèmes non linéaires, autrement dit, là où les relations entre les variables d'états sont non linéaires. Quand un

système manufacturier est-il non linéaire ? Quand les relations entre les variables d'état d'un système productif sont elles non linéaires ? Nous montrerons qu'un système flexible de production est un système non linéaire.

Ces caractéristiques (déterminisme et non linéarité) nous dirigent vers un type de système bien précis qui sera la cible de cette thèse : "les systèmes flexibles de production automatisée". L'objectif central de cette thèse est donc de tenter de vérifier l'existence du comportement chaotique temporel dans un atelier flexible de production automatisée.

Nous étudierons le comportement dynamique d'un système de production au niveau le plus bas, c'est-à-dire au niveau "shop-floor". La gestion du système sera dans tous les cas réactive, l'allocation des pièces sur les machines se fera en fonction de l'état du système. Nous ferons la modélisation d'un atelier automatisé flexible dont nous analyserons le comportement par rapport à différents systèmes de gestion. La dynamique des systèmes sera étudiée par l'intermédiaire d'un simulateur à événements discrets qui semble être un outil bien adapté à notre problématique.

### **Contenu du mémoire**

Nous avons organisé ce mémoire en six chapitres : le premier est une revue de la bibliographie sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et le chaos. L'objectif de cette partie est de donner les éléments principaux de ces concepts de la façon la plus simple et la plus précise possible. Dans ce même chapitre nous balaierons les différents articles concernant le chaos dans les systèmes productifs. Il s'agit d'une analyse critique des travaux publiés ces dernières années. Le chapitre 2 nous permettra d'introduire la méthodologie employée pour aboutir à la démonstration formelle de l'existence du chaos temporel dans les systèmes flexibles manufacturiers. Nous étudierons dans le chapitre 3 la dynamique des systèmes simples de production. Le chapitre 4 sera consacré à l'étude d'un cas complexe : un atelier générique soumis à différents systèmes de gestion. Nous tenterons, sur ce cas, de trouver les conditions menant au comportement chaotique. Nous présenterons dans le chapitre 5 des applications du concept du chaos. Nous proposerons une mesure de la complexité dynamique d'un système manufacturier en utilisant la conjecture de Kaplan-Jorke. Puis nous étudierons l'impact de la flexibilité de routage sur la complexité dynamique du système. Le chapitre 6 nous servira à valider notre méthodologie sur un système existant, à savoir la cellule flexible de production automatisée de l'Atelier Inter-établissements de Productique Lorrain (AIPL).

# Chapitre 1

## Analyse Bibliographique

### 1.1.- Les systèmes dynamiques non linéaires et le chaos

#### Introduction

Nous verrons dans la première partie de ce chapitre, les aspects fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et de la théorie du chaos. L'objectif est de proposer une synthèse de ces matières pour mieux comprendre l'application de ces concepts dans le domaine qui nous concerne et ce, de la façon la plus claire et rigoureuse possible. Nous étudierons d'abord les aspects conceptuels des systèmes dynamiques, puis nous exposerons la démarche à suivre afin de spécifier ce qu'est une dynamique chaotique.

Nous présenterons dans la deuxième partie l'état de l'art de la problématique qui nous concerne.

#### 1.1.1. Concepts fondamentaux

Un système dynamique est un système qui évolue dans le temps en fonction de ses états précédents. On peut le représenter mathématiquement par un ensemble d'équations différentielles ou aux différences.

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t))$$

ou

$$x_{i,n+1} = f_i(x_{i,n})$$

Si la fonction  $f$  est non linéaire, le système ne l'est pas non plus. Alors, si le temps est exprimé explicitement dans la fonction  $f$ , le système est dit "non autonome". Néanmoins, il est possible de le rendre autonome par un simple changement de variables, par exemple :

$$\dot{u} = f(u, v, t)$$

$$\dot{v} = g(u, v, t)$$

Nous pouvons ne pas connaître explicitement les équations qui dirigent l'évolution du système. Comme nous le verrons plus tard, ce cas est semblable à celui des systèmes flexibles

manufacturiers. Mais cela n'empêche pas que nous puissions l'étudier comme un système dynamique.

Les variables qui décrivent le comportement d'un système sont dites "variables d'état". Elles sont représentées par le vecteur  $x$ . Leur nombre est le degré de liberté du système. Le mouvement d'une particule de masse  $m$  par exemple, dans un ressort idéal est régi par la loi de Hooke. Ce phénomène peut être représenté par un système dynamique selon la deuxième loi de mouvement de Newton :

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Les équations suivantes peuvent l'exprimer aussi :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m} x_1 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, les variables d'états sont  $(x_1, x_2)$ . Le degré de liberté du système est donc deux. L'espace de phases correspond à l'espace cartésien formé par les variables d'états du système. Une trajectoire dans l'espace de phases correspond à une évolution du système à partir d'une condition initiale particulière. Le portrait de phases est l'ensemble des trajectoires possibles.

Dans le monde physique qui nous entoure, la plupart des systèmes dynamiques sont dissipatifs. En effet, ils ne conservent pas l'énergie au fil du temps. C'est le cas d'un pendule qui oscille avec frottement ou d'un flux d'électricité qui traverse une résistance. D'un point de vue mathématique, le théorème de la divergence nous permet de distinguer ces systèmes. Ainsi, si  $\text{div}(f)$  est négative le système est dissipatif, c'est-à-dire :

$$\text{div}(f) \equiv \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$$

Où  $V$  est le volume qu'occupent les trajectoires dans l'espace des phases, et  $f_i$  les fonctions qui les décrivent.

La présence de dissipation dans un système se manifeste par le fait qu'un ensemble de conditions initiales aboutissent au même comportement. Celui-ci peut être un point fixe, un

cycle limite ou un attracteur chaotique. Cela signifie que l'espace qu'occupe le portrait de phases décroît au fil du temps, c'est le phénomène de "la contraction des aires". La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques. Il en existe quatre types distincts : le point fixe, le cycle limite, l'attracteur quasi périodique et l'attracteur étrange.

1. L'attracteur "point fixe" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
2. L'attracteur "cycle limite" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
3. L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".
4. Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, ils seront définis ultérieurement, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.

### 1.1.2. Théorème de Poincaré et Bendixon

Ce théorème est valide pour un système dynamique continu avec deux degrés de liberté et peut être formulé de la manière suivante :

- 1) Supposons que les trajectoires du système à long terme ne tendent pas vers l'infini.
- 2) Supposons qu'il existe une région  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  telle qu'une trajectoire qui part de  $A$  ne sorte plus de  $A$ .
- 3) Considérons une trajectoire particulière qui part de  $A$ .

Le théorème établit qu'il y a seulement deux alternatives pour cette trajectoire :

- 1) Elle s'approche d'un point fixe, ou
- 2) Elle tend vers un cycle limite.

Pour une démonstration de ce théorème, voir [PER.93]. Une des conclusions les plus importantes de ce théorème est que "les Trajectoires chaotiques ne peuvent pas arriver dans un espace de phases à deux dimensions". Donc, pour obtenir un comportement chaotique, il faut avoir au minimum trois degrés de liberté, c'est-à-dire, trois variables d'états.

### 1.1.3. La section de Poincaré

La section de Poincaré est une technique qui sert à caractériser les attracteurs, il s'agit de construire une fonction ("Poincaré map") à partir de l'intersection de l'attracteur par un plan. En termes mathématiques :

- 1) Soit  $\Gamma$  une solution d'un système dynamique :
- 2) Soit  $\Sigma$  un plan perpendiculaire à la trajectoire  $\Gamma$  en  $x_0$ .
- 3) Soit  $x \in V(x_0)$  qui appartient à  $\Sigma$ . En utilisant la même solution  $\Gamma$  du système, nous pouvons déterminer la trajectoire de  $x$  et le point  $P(x)$  où la trajectoire va traverser de nouveau le plan  $\Sigma$ . La figure 1.1 représente cette construction. Par exemple, prenons le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Si nous faisons une transformation de coordonnées:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

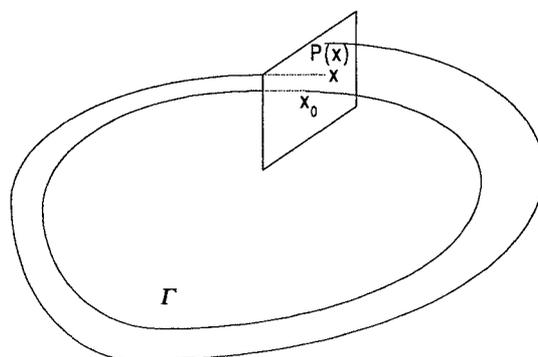


Figure 1.1 : la section de Poincaré.

Nous obtenons :

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

Donc, la solution pour ce système est :

$$r(t, r_0) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0$$

Dans ce cas le "plan de Poincaré" devient une ligne qui coupe la trajectoire perpendiculairement, (cf figure 1.2). Nous pouvons constater que si  $r = 1$ , la solution est un cercle de rayon  $r$ . Prenons maintenant un rayon  $r_1$  sensiblement supérieur à 1. Pour obtenir  $P(r_1)$  il doit se dérouler un temps égal à  $2\pi$ , ainsi la fonction  $P(r_1)$  est :

$$r_2 = P(r_1) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_1^2} - 1\right)e^{-4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

De cette façon, on obtient l'application de Poincaré  $P(r)$  qui permet d'analyser le comportement du système. Dans l'exemple on peut voir que la suite de valeurs  $r_1, r_2$ , s'éloigne de  $r_0$ , cela nous permet de conclure que ce cycle limite n'est pas stable.

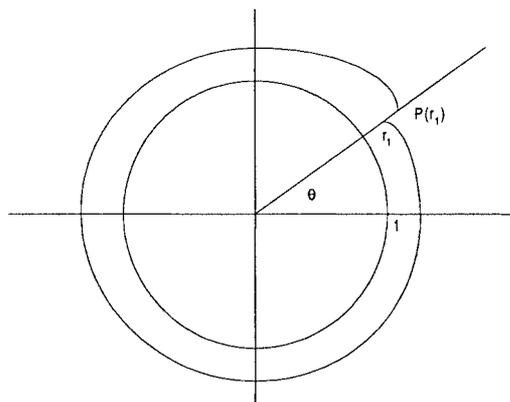
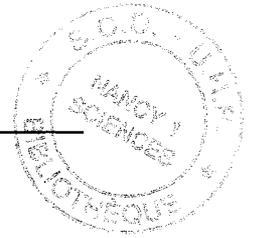


Figure 1.2 : section de Poincaré illustrant l'exemple précédent

La section de Poincaré est l'une des techniques très utilisée pour caractériser les attracteurs. En revanche, pour les systèmes de plus de trois degrés de liberté, son application devient complexe.



### 1.1.4. La transformation de Fourier

Une technique qui permet un premier diagnostic sur la nature du signal est la transformée de Fourier. En effet, elle nous dira si le signal appartient à un mouvement périodique, à une superposition de plusieurs oscillations, ou s'il est tout à fait irrégulier.

Soit  $\{x_j\}$  un échantillon d'un signal continu  $x(t)$ , régulièrement espacé dans le temps. La transformation de Fourier est définie comme :

$$\hat{x} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n x_j e^{-i2\pi jk/n}$$

Le graphe représentatif de cette nouvelle variable en fonction de la fréquence  $f$  ( $f = k\Delta t$ ) est couramment appelé "spectre de puissance du signal". Il nous aide à distinguer les caractéristiques du signal. En effet, si le spectre est composé d'un certain nombre de raies, alors le signal appartient à un mouvement périodique composé de quelques fréquences. Mais, si le spectre de fréquences est continu, alors on est en présence d'un signal aléatoire ou chaotique.

### 1.1.5. La notion de bifurcation

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la "bifurcation". Ce concept renvoie à l'étude des changements de comportement d'un système lorsque les paramètres de ce dernier changent. Nous n'en verrons ici que les aspects généraux. On parle de bifurcation lorsque, à cause d'une modification infinitésimale d'un paramètre, le système change radicalement de comportement. La naissance d'un cycle limite est un exemple de bifurcation. Soit par exemple le système d'équations suivant :

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)$$

Si nous étudions les valeurs propres de la matrice jacobienne pour le point  $(0,0)$ , il est possible de démontrer que si  $\mu$  est négatif, le point  $(0,0)$  est un attracteur point fixe. Mais si  $\mu$  est positif, alors le système tend vers un cycle limite. Donc, en  $\mu = 0$  il y a une bifurcation, le système passe d'un comportement à un autre radicalement différent. Ce type de bifurcation se nomme "bifurcation de Hopf". La figure 1.3 montre ce phénomène.

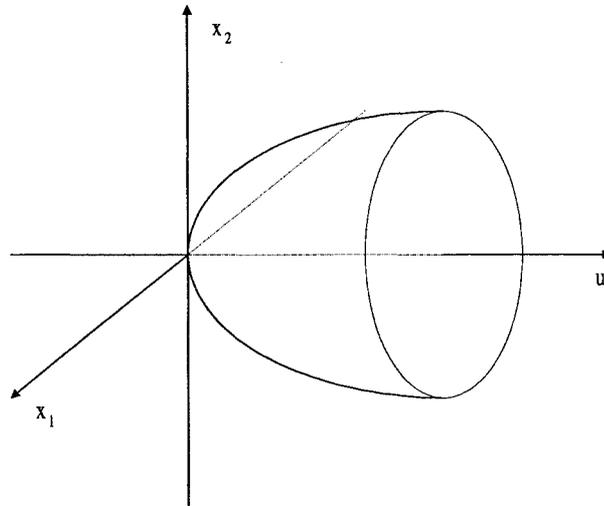


Figure 1.3 : Pour  $\mu < 0$  le système tend vers le point fixe  $(0,0)$ , pour  $\mu > 0$  le système tend vers un cycle limite.

### 1.1.6. Les Routes vers le chaos

Un système dynamique est dit chaotique s'il devient impossible de prédire son évolution à long terme. Cette impossibilité est due au fait que l'évolution du système est d'une extrême sensibilité aux conditions initiales. Cela se traduit par la divergence exponentielle de trajectoires qui, initialement, se trouvaient proches.

Nous l'avons déjà dit, pour observer des comportements chaotiques dans les systèmes dynamiques à temps continu, il faut avoir au minimum trois variables d'état. On peut alors se poser les questions suivantes : comment se développe le comportement chaotique ? Comment le système passe d'une conduite régulière à un comportement chaotique ? Quel type de changement dans les paramètres peut provoquer un mouvement chaotique ? Les réponses ne sont pas simples, bien au contraire. La conduite des systèmes dynamiques est très variée et le comportement dépend de la valeur des paramètres et des conditions initiales. Un système par exemple, peut avoir un comportement chaotique, mais il peut, sous l'influence de certaines conditions initiales, aboutir à une conduite tout à fait régulière, c'est-à-dire, périodique. Des phénomènes similaires peuvent se produire si les paramètres changent.

Il est reconnu qu'il existe différentes routes par lesquelles un système devient chaotique. En général, elles résultent de différentes bifurcations. Cela étant dit, "rien ne permet, d'énoncer avec précision sous quelles conditions nécessaires et/ou suffisantes ces routes prennent place" [HIL.94]. En d'autres termes, quand bien même nous connaîtrions la structure du système, nous ne serions toujours pas en mesure de déterminer la route qu'empruntera l'évolution du système pour arriver au chaos.

Les routes vers le chaos peuvent être les suivantes :

1) Le dédoublement de période : cette route commence par un cycle limite (il peut venir d'un point fixe) et lorsqu'un paramètre de contrôle change, le cycle limite devient instable et il y aura un dédoublement de période. Ensuite, nous changeons de nouveau le paramètre et nous obtenons un autre dédoublement de période, et ainsi de suite jusqu'au chaos, c'est-à-dire, jusqu'à ce que la trajectoire ne se répète jamais plus.

2) La quasi périodicité : cette route vers le chaos résulte de la "concurrence" de différentes fréquences dans le système dynamique. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnel le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas, les trajectoires couvrent la superficie d'un tore. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos. Il existe aussi des systèmes qui passent directement de deux fréquences au chaos.

3) L'intermittence : cette route se caractérise par l'apparition d'un comportement irrégulier dans un comportement régulier. Cette conduite se produit, comme dans tous les autres cas, quand on change un paramètre. Ces irrégularités sont de plus en plus étendues et dépendent le plus souvent des changements de paramètre et ce, jusqu'au chaos.

4) La crise : une crise est un autre type de bifurcation, elle a lieu lorsque, en face d'un changement de paramètre, l'attracteur disparaît ou change de taille.

### **1.1.7. Quantification du chaos**

Dans cette partie, nous définirons à partir de données expérimentales, différentes mesures servant à caractériser un comportement chaotique. Dans la plupart des cas, lorsque nous étudions un système complexe, nous ne connaissons pas les équations qui le dirigent. Il n'est pas rare de n'avoir à disposition qu'une série temporelle d'une des variables d'états du système. Les techniques développées pour mesurer le chaos prennent en compte cette constatation et nous permettent de :

1) Distinguer un comportement chaotique d'un autre dû au hasard.

2) Déterminer le nombre de variables nécessaires pour caractériser un système dynamique.

Pour quantifier le chaos, nous disposons de deux types de mesures. Le premier caractérise les aspects dynamiques du système, nous verrons "les exposants de Lyapunov et "l'entropie de Kolmogorov-Sinai". Le second type étudie les aspects géométriques de l'espace de phases du système, nous examinerons ici la dimension fractale et la dimension de corrélation. Ces deux types de mesures étant complémentaires, il faudra, pour caractériser un système dynamique, les utiliser conjointement.

### a) Les exposants de Lyapunov

Soit  $x(t)$  une des variables d'un système, et soit  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$  un échantillon de la variable  $x(t)$ . En d'autres termes,  $\{x(t_i)\}$  est une série temporelle où la distance temporelle entre chaque élément de la série est constante. Nous définissons alors, pour cette série temporelle, la séquence de distances de la façon suivante :

$$\begin{aligned}d_0 &= |x_j - x_i| \\d_1 &= |x_{j+1} - x_{i+1}| \\d_2 &= |x_{j+2} - x_{i+2}| \\&\vdots \\&\vdots \\d_n &= |x_{j+n} - x_{i+n}|\end{aligned}$$

Tout d'abord, nous supposons que la distance  $d$  augmente de façon exponentielle [HIL.94], nous pouvons donc écrire que :

$$d_n = d_0 e^{\lambda n}$$

Où  $\lambda$  se définit comme l'exposant de Lyapunov. Si  $\lambda$  est positif le comportement du système est chaotique. En principe nous pouvons déterminer l'exposant de Lyapunov directement d'une série donnée, cependant il faut tenir compte de certaines considérations :

- 1) Il est absolument nécessaire de vérifier la supposition de séparation exponentielle.
- 2) La valeur de  $\lambda$  est une fonction de  $x_i$  nous devons donc obtenir un ensemble de valeurs de  $\lambda(x_i)$  et déterminer la valeur moyenne.
- 3) Pour une série périodique  $\lambda$  est égal à zéro, cependant, pour un mouvement périodique dans l'espace de phases, la valeur de  $\lambda$  est négative car il montre l'effet de la convergence des

trajectoires. Cette différence est simplement due au fait qu'une série temporelle n'est pas une trajectoire.

4) Il est nécessaire de choisir  $x_j$  éloigné (dans le sens du temps) de  $x_i$  pour qu'aucune corrélation n'existe entre les deux; sinon nous aurions une sous-estimation de la valeur de  $\lambda$ .

5) Les valeurs de  $x_j$  et de  $x_i$  doivent être proches, toutefois il y a une limite dans leurs proximités, compte tenu de la précision des données. Si la précision est par exemple de trois décimales, on aura une valeur minimum de 0,001. D'un autre côté, cet aspect est très important car même si le système est chaotique il y aura des valeurs qui se répéteront.

6) Quelques auteurs [HIL.94] préfèrent utiliser la définition suivante de l'exposant de Lyapunov :

$$d_n = d_0 2^{\lambda n}$$

Ils interprètent la valeur de  $\lambda$  comme le taux de divergence en "bits par unité de temps", et ils traduisent comme une mesure de perte d'information contenue dans l'état initial.

#### b) L'entropie de Kolmogorov-Sinai [GRA.84]

D'un point de vue de la thermodynamique, l'entropie est une mesure du désordre d'un système. Sa définition est :

$$S = -k \sum p_r \ln(p_r)$$

Où  $k$  est la constante de Boltzmann, et  $p_r$  est la probabilité que le système se trouve dans l'état  $r$ . Nous constatons que si tous les états sont équiprobables, l'entropie augmente avec le nombre d'états. L'adaptation du concept d'entropie à un système dynamique, peut se faire par la démarche suivante :

- 1) Diviser la région où se trouve l'attracteur en carrés de même taille.
- 2) Faire évoluer  $M$  trajectoires qui sortent d'un carré spécifique.
- 3) Après  $n$  unité de temps ( $n\tau$ ), nous définissons l'entropie du système dans l'instant  $n$  :

$$S_n = -k \sum p_r \ln(p_r)$$

$p_r$  = le nombre de trajectoires qui se trouvent dans le carré  $r$  divisé par le nombre total de trajectoires.



Pour préciser les concepts précédents voici deux cas particuliers :

a) Si toutes les trajectoires se déplacent ensemble de carré en carré, alors  $p_r = 1$ , donc  $S_n = 0$  pour tout  $n$ , ce type de mouvement dans l'espace de phases appartient à un système dont le comportement n'est pas sensible aux conditions initiales.

b) Si toutes les trajectoires partent vers différents carrés, alors  $p_r = 1/M$ , donc l'entropie est  $S_n = \ln M$ . Ce type de mouvement dans l'espace de phases appartient à un comportement aléatoire. On peut voir que l'entropie augmente avec le nombre de trajectoires.

Donc, pour un comportement périodique l'entropie est zéro, et pour une conduite aléatoire l'entropie tend à s'accroître, le comportement chaotique se trouve entre les deux.

4) L'entropie de Kolmogorov-Sinai est définie comme le taux de changement de l'entropie par unité de temps :

$$K_n = \frac{1}{\tau} (S_{n+1} - S_n)$$

Pour caractériser l'attracteur comme un tout, nous déterminons  $K$ , le taux de changement moyen :

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} S_{n+1} - S_n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0)$$

Alors, si nous faisons tendre vers zéro  $\tau$  et  $l$  (arête du carré) pour avoir une description plus précise de l'attracteur nous obtenons :

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0)$$

### c) La dimension fractale

Penchons-nous sur la dimension topologique des attracteurs. Celle d'un point est 0 (zéro), d'une courbe est 1, d'une superficie est 2, etc... On peut se demander si tous les objets ont une dimension entière. La réponse est non. Il existe des objets dont la "fragmentation" est telle qu'ils se trouveront entre deux dimensions entières. Une façon de mesurer la dimension est :



Dans l'étape  $M$  l'on obtiendra  $2^M$  "morceaux" de ligne, où la longueur de chaque "morceaux" est  $1/3^M$ , nous pouvons donc dire que :

$$Db = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(2^M)}{\text{Ln}\left(\frac{1}{3}\right)^M} = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3} = 0.63\dots$$

L'objet "fractal" précédemment décrit s'appelle "l'ensemble triadique de Cantor" ou encore "poussière de Cantor".

Il est donc possible d'affirmer que la géométrie d'Euclide soit un cas particulier dans une géométrie plus générale : la géométrie fractale. Or, les systèmes dynamiques chaotiques ont des attracteurs fractals. Nous appellerons ces attracteurs : "attracteurs étranges". En général, un attracteur fractal appartient à une dynamique chaotique, mais il existe quelques exceptions [GRE.84].

#### **d) La dimension de corrélation**

Mesurer la dimension d'un attracteur à travers la méthode que nous avons vue est très difficile, car nous ne pouvons guère obtenir la limite quand  $R$  tend vers zéro, compte tenu de la précision des données. Pour résoudre ce problème, les physiciens P. Grassberger et I. Procaccia [GRA.84] ont développé le concept de dimension de corrélation.

Cette méthode a été très utilisée pour caractériser les attracteurs. Nous introduirons ces idées en pensant d'abord à un système unidimensionnel :

- 1) Soit une trajectoire que l'on va laisser évoluer pendant très longtemps.
- 2) Soit  $N$  le nombre de points de la trajectoire.
- 3) Soit  $R$  une distance autour de chaque point  $i$  de la trajectoire.
- 4) Soit  $N_i(R)$  le nombre de points de la trajectoire qui se trouvent dans la distance  $R$  autour du point  $i$ .
- 5) Soit  $p_i(R)$  la fréquence du point  $i$  définie comme :

$$p_i(R) = \frac{N_i(R)}{N-1}$$

6) Définition de la Somme de corrélation  $C(R)$  :

$$C(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i(R)$$

La somme de corrélation  $C(R)$  est la fréquence moyenne de tous les points, et l'expression la plus fréquemment utilisée dans la littérature est :

$$C(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta(R - |x_i - x_j|)$$

où  $\theta$  est la fonction "Heavyside" définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La dimension de corrélation  $D_c$  est définie comme :

$$C(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{D_c}$$

Donc :

$$D_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log C(R)}{\log R}$$

Pour déterminer la valeur de la dimension  $D_c$  à partir des données expérimentales, une des méthodes est de faire un graphique entre le  $\log C(R)$  et le  $\log (R)$ . A l'endroit où se trouve la région linéaire de cette courbe,  $D_c$  est la pente.

### 1.1.8. Reconstruction de l'espace de phases

La reconstruction de l'espace de phases constitue un des outils clés pour l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. C'est à partir de cette reconstruction que nous pouvons déterminer si un système quelconque a ou non un comportement chaotique.

Takens [TAK.81] a démontré que l'espace de phases d'un système à plusieurs variables peut être obtenu à partir d'une seule variable du système. La technique s'appelle "la méthode des retards".

Pour reconstruire l'espace de phases, nous adoptons la démarche suivante :

1) Soit  $x(t)$  une variable du système et  $x_1, x_2, x_3 \dots$  une série temporelle obtenue comme un échantillon de la variable  $x(t)$ .

2) Soit le vecteur  $v$  de dimension  $d$  défini comme :

$$v = (x_n, x_{n+\tau}, x_{n+2\tau}, \dots, x_{n+(d-1)\tau})$$

Où  $\tau$  "le retard" représente la distance temporelle entre chaque composant du vecteur,  $d$  la "dimension de plongement" représente la dimension de l'espace de phases qui contient l'attracteur du système. Par exemple, si  $d = 3$  et si le retard est égal à 2, nous avons la suite  $(x_1, x_3, x_5), (x_2, x_4, x_6) \dots$  etc. La figure 1.5 montre cette construction.

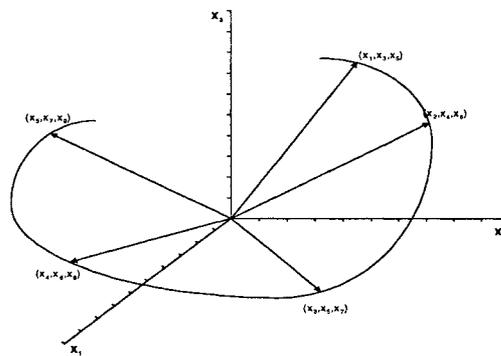


Figure 1.5 : Reconstruction d'un espace de phase tridimensionnel

Ainsi, à partir d'une seule variable, on a obtenu trois variables qui décrivent une trajectoire, l'évolution de celle-ci reproduit l'attracteur du système. Le problème qui se pose est la détermination des valeurs du retard  $\tau$  et de la dimension de plongement  $d$ . Pour cela plusieurs critères sont développés, nous verrons les plus répandus.

### a) Détermination du temps de retard $\tau$

a) A partir de la fonction d'autocorrélation de la série temporelle

Cette fonction mesure la ressemblance d'une série temporelle avec elle même. Elle se définit comme :

$$g(n) = \frac{\sum_k x_k x_{k+n}}{\sum_k |x_k|^2}$$

Cette fonction fait la comparaison, à travers la série des données décalées de  $n$  unités de temps. S'il existe une similitude parfaite entre les données, alors  $g(n) = 1$ . Pour une série de données chaotique ou aléatoire,  $g(n)$  tend vers zéro quand  $n$  augmente. Cela signifie que la similitude de la série disparaît au fur et à mesure que le temps s'écoule. Pour estimer la valeur du temps de retard, il existe un critère qui consiste à prendre l'abscisse du premier zéro de la fonction d'autocorrélation.

b) A partir de l'information mutuelle moyenne

Ce critère est basé sur la théorie de l'information de Shannon. Si nous avons deux ensembles  $A$  et  $B$ ,  $a_i$  un élément qui appartient à  $A$  et  $b_j$  un élément qui appartient à  $B$ . Alors, l'information mutuelle entre les mesures  $a_i$  et  $b_j$  est définie comme :

$$MI = \log_2 \left( \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right)$$

Si  $a_i$  est indépendant de  $b_j$  alors  $MI = 0$ , la valeur de l'information mutuelle moyenne entre les ensembles  $A$  et  $B$  est définie comme :

$$MMI = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left( \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right)$$

Donc, si nous appliquons ces concepts à une série temporelle  $x(t)$  nous avons l'expression suivante :

$$I(T) = \sum_{x(t), x(t+T)} P(x(t), x(t+T)) \log_2 \left( \frac{P(x(t), x(t+T))}{P(x(t))P(x(t+T))} \right)$$

Si, pour un signal chaotique, nous augmentons  $T$ , la valeur de  $I(T)$  va décroître. Dans ce cas, le temps de retard sera celui où la fonction  $I(T)$  a son premier minimum.

L'idée de base de ces deux critères est la même, c'est-à-dire, choisir une valeur pour le retard de manière à ce que les composantes du vecteur  $v$  soient indépendantes.

**b) Détermination de la dimension globale de plongement  $d$**

Pour obtenir la valeur de la dimension de l'espace de phases nous utiliserons la méthode appelée : "pourcentage de faux voisins". Elle consiste à faire la reconstruction de l'espace de phases pour une dimension  $d$  et à déterminer les voisins dans cet espace. Puis, l'on procède à

la reconstruction pour une dimension  $d+1$  et l'on détermine de nouveau les voisins. Le processus s'arrête lorsque les voisins sont semblables dans les étapes  $d$  et  $d+1$ . Alors la dimension acceptée est  $d$ . L'idée est que deux vecteurs peuvent être voisins dans une dimension  $d$ . Mais si  $d$  n'est pas la "vraie" dimension de l'attracteur, ils sont voisins à cause d'une projection dans cet espace  $d$  dimensionnel. Lorsque nous passons à une dimension  $d+1$ , ils ne le sont plus. Si  $y^d_1(k)$  et  $y^d_2(k)$  sont deux vecteurs faux voisins dans l'espace  $d$  dimensionnel, le passage à la dimension  $d+1$  impliquera un éloignement de ces deux vecteurs.

Une fois la reconstruction de l'espace de phase faite, il faut déterminer les valeurs des dimensions fractales et la sensibilité aux conditions initiales. Pour déterminer la dimension fractale nous utilisons la dimension de corrélation qui pour le cas  $d$  dimensionnelle est :

$$C^{(d)}(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta(R - \left\| \vec{x}_i - \vec{x}_j \right\|)$$

$$D^{(d)}_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln C^{(d)}(R)}{\ln R}$$

On voit maintenant que la somme de corrélation et la dimension de corrélation dépendent de la dimension  $d$ . Dans la pratique, pour un attracteur étrange, on vérifie qu'à partir d'une certaine valeur de  $d$ , la dimension  $D_c$  n'augmente plus, cette valeur de  $d$  s'appelle "dimension de saturation"  $d_s$ . La figure 1.6 montre cet effet :

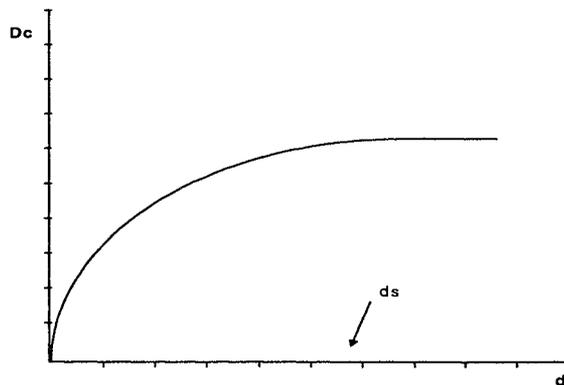


Figure 1.6: Relation entre la dimension de corrélation et la dimension de l'espace de phase

### 1.1.9. Dimension locale ou dimension de la dynamique du système

Une fois que l'on a trouvé la dimension globale du système, nous devons déterminer le degré de liberté de la dynamique du système, c'est-à-dire, celui qui détermine l'évolution du système à travers l'attracteur.

Une façon de mesurer la dimension locale s'effectue à partir de l'obtention des exposants de Lyapunov. La méthode consiste à déterminer les exposants dans une direction à travers les données "forward" puis dans l'autre direction "backward". Le nombre des exposants égaux est la dimension locale. Pour avoir plus de détails voir Abarbanel [ABA.96].

Un système peut avoir un grand nombre de degrés de liberté, mais celui de sa dynamique peut être petit. Cette idée n'est pas sans importance car elle signifie qu'un petit nombre d'équations peut décrire l'évolution du système.

### 1.1.10. Généralisation des mesures

Il s'agit maintenant de parler de la généralisation des mesures qui caractérisent un système dynamique. Toutes les mesures vues jusqu'alors sont des moyennes. Statistiquement, nous savons que deux ensembles de données peuvent avoir les mêmes moyennes, et en revanche avoir une distribution très différente. Nous allons donc introduire des fonctions pour capturer l'information locale. Celles-ci sont analogues aux différents moments des distributions suivants :

$$M_q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^q$$

D'une façon similaire, nous redéfinissons la dimension et l'entropie de Kolmogorov.

#### a) La dimension de capacité

La démarche pour la définition est semblable au cas précédent. Soit  $N$  le nombre de "points trajectoires",  $N(R)$  le nombre de carrés nécessaires pour couvrir l'attracteur, et soit  $p_i$  la probabilité définie comme le nombre de points dans le carré  $i$ . La dimension est donc :

$$D_q = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(R)} p_i^q}{\ln R}$$

Pour caractériser un attracteur, on utilise généralement les dimensions  $D_0, D_1, D_2$ . Il est possible de démontrer que pour un attracteur autosimilaire  $Dq = D_0$  pour tout  $q$  et que  $D_0$  est la dimension de capacité  $D_b$ , c'est-à-dire :

$$D_0 = D_b = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln N(R)}{\ln R}$$

Pour le cas  $q = 1$  il est possible de démontrer que :

$$D_1 = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\sum_i \ln R}$$

La dimension  $D_1$  est la "dimension d'information". Avant de trouver la dimension  $D_2$  définissons la somme de corrélation généralisée :

$$C_q^{(d)}(R) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta(R - \left\| \vec{x}_i - \vec{x}_j \right\|) \right]^{q-1} \right\}^{\frac{1}{q-1}}$$

Pour le cas  $q = 2$ , il est possible de démontrer que  $D_2$  est justement la dimension de corrélation  $D_c$  :

$$D_2 = D_c^{(d)} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln C_2^{(d)}(R)}{\ln R}$$

Il est possible de démontrer aussi que :  $D_0 \geq D_1 \geq D_2$ . Dans la pratique, toutes les valeurs de dimensions peuvent être obtenues à partir de l'expression de la somme de corrélation généralisée.

### b) L'entropie généralisée

Nous l'avons déjà dit, l'entropie est aussi une mesure de divergence des trajectoires. Il existe une autre interprétation selon laquelle l'entropie est le taux de création ou la perte d'information contenue dans l'état initial du système. Pour un système ordonné l'entropie est donc égale à zéro, pour un système aléatoire l'entropie tend vers l'infini, et pour un système chaotique l'entropie est positive. Nous généraliserons dans cette partie, le concept d'entropie comme nous l'avons fait pour le concept de dimension. Définissons tout d'abord l'entropie  $K_1$ :

$$K_1 = -\frac{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_d} \ln p(i_1, i_2, \dots, i_d)}{d}$$

Où  $p(i_1, i_2, \dots, i_d)$  est la probabilité conjointe de passer du carré  $i_1$ , au carré  $i_2$ , et ainsi de suite jusqu'à  $i_d$ . Il est possible de démontrer [HIL.94] que :

$$C_1^{(d)}(R) = -dK_1$$

Une façon pratique de déterminer  $K_1$  est de le faire à partir du graphique de  $C_1^d(R)$  et  $d$ , dont  $-K_1$  sera la pente. L'entropie généralisée est définie comme :

$$K_q = \frac{-\ln \sum_{i_1, i_2, \dots, i_d} p(i_1, i_2, \dots, i_d)^q}{(q-1)d}$$

Grassberger et Proccacia ont développé une méthode pour déterminer  $K_2$  en utilisant la somme de corrélation pour  $q = 2$ . Il s'agit de faire le graphique entre  $\ln C_2^d(R)$  et le  $\ln R$ , pour différentes valeurs de  $d$ , et obtenir  $K_2$  en faisant :

$$\ln C_2^{(d-1)}(R) - \ln C_2^{(d)}(R)$$

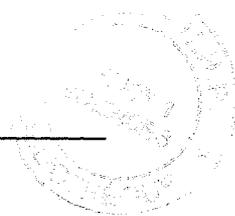
Cette différence doit être faite dans la région du graphique où se trouve la relation linéaire entre les logarithmes de la somme de corrélation et la distance  $R$ .

### 1.1.11. Conjecture de Kaplan-Yorke

Kaplan et Yorke ont déterminé que la dimension fractale d'un attracteur chaotique pouvait être obtenue à partir des exposants de Lyapunov. La méthode consiste à arranger les exposants, selon ces valeurs, en ordre décroissant :  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_d$  (pour un espace de dimension  $d$ ). Puis à prendre  $j$  l'entier le plus grand tel que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0$ . Alors, la dimension est :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{-\lambda_{j+1}}$$

Où  $D_L$  s'appelle "dimension fractale de Lyapunov".



### 1.1.12. Résumé et conclusions

Nous avons vu les définitions des concepts relatifs à la théorie des systèmes dynamiques non linéaires et les différents outils servant à caractériser un système dynamique à partir d'une série temporelle. Une synthèse de la démarche à suivre pour faire l'analyse des données peut donc être présentée. Celle ci est la suivante :

- 1) Obtenir le spectre de puissance afin de voir la nature du signal. Si le spectre est continu, le signal peut alors provenir d'un système chaotique ou d'un système aléatoire.
- 2) Obtenir la fonction d'autocorrélation, de façon à disposer d'une mesure du degré de ressemblance du signal avec lui-même lorsque le temps s'écoule. Dans le cas d'une dynamique aléatoire cette fonction d'autocorrélation tend rapidement vers zéro. Pour une dynamique chaotique, la décroissance de cette fonction est plus lente et maintient des oscillations autour d'une valeur généralement proche de zéro.
- 3) Reconstruire l'espace de phases, il faut pour cela : a) obtenir le temps de retard en utilisant la technique de la moyenne de l'information mutuelle et b) trouver la dimension de l'espace de phase qui contient l'attracteur du système à travers la technique des faux voisins.
- 4) Déterminer le degré de liberté de la dynamique du système par la méthode des faux voisins locaux ou par la détermination des exposants de Lyapunov.
- 5) Déterminer les dimensions topologiques de l'attracteur, la méthode utilisée est celle de P. Grassberger et I. Procaccia. Si les dimensions topologiques ne sont pas entières, nous dirons que l'attracteur est étrange.
- 6) Vérifier la sensibilité aux conditions initiales par l'obtention des exposants de Lyapunov et des entropies de Kolmogorov. Si un exposant est positif, alors la dynamique du système est chaotique. De même, si l'entropie de Kolmogorov est positive aussi le système est chaotique.

## **1.2. L'état de l'art**

### **1.2.1. Introduction**

Dans la littérature on trouve une quantité foisonnante de publications tentant de démontrer l'existence de comportement chaotique dans des domaines très variés et en dépit des difficultés que suppose une telle entreprise. Le chaos est devenu une propriété universelle des systèmes complexes. En revanche, dans notre domaine, la productique, les travaux sur ce sujet sont beaucoup moins abondants. Nous en ferons une analyse et nous citerons en particulier ceux où apparaît la relation entre les systèmes de production et la théorie du chaos. Nous citerons brièvement d'autres travaux ne relevant pas directement de la productique mais que nous semblent néanmoins utiles.

### **1.2.2. Les articles principaux**

#### **a) Complexity in Manufacturing Systems : Definitions and Measurements [DES.95]**

Cette publication tente de formaliser le concept de complexité dans les systèmes manufacturiers. L'auteur a défini deux types de complexité : l'une statique et l'autre dynamique. Pour la première, nommée aussi "complexité structurelle", il a développé un ensemble d'axiomes et une mesure qui permettent de caractériser un système de production. Cette mesure prend en compte le nombre de pièces, de machines, d'opérations et de séquences. En ce qui concerne la complexité dynamique, elle est définie par la conduite imprévisible du système. Ainsi, une des mesures adoptée pour calculer ce type de complexité peut être les exposants de Lyapunov.

Il est nécessaire de dire que la définition de la complexité dynamique donnée par l'auteur ainsi que la méthode de mesure qu'il propose (les exposants de Lyapunov) rendent implicite l'idée qu'un système flexible manufacturier est chaotique. En effet, les exposants de Lyapunov mesurent la sensibilité aux conditions initiales d'un système dynamique, autrement dit, ils mesurent le caractère imprévisible du système. Mais, pour démontrer qu'un système est plus complexe qu'un autre, il faut au préalable que les systèmes soient chaotiques. Lorsque l'auteur parle de complexité dynamique, la notion de chaos est sous-jacente.

Cet article rend compte des résultats d'un modèle de simulation représentant un atelier flexible de production composé de trois machines (figure 1.6). La variable d'intérêt est l'intervalle de temps entre la sortie de pièces successives de l'atelier. Deshmukh montre, à l'aide d'un calcul d'un exposant de Lyapunov, que pour des règles de décision de type FIFO

(First In, First Out), ou SPT (Shortest Processing Time), le système devient chaotique, alors que pour une règle de type et HPT (Highest Processing Time), il a un comportement périodique.

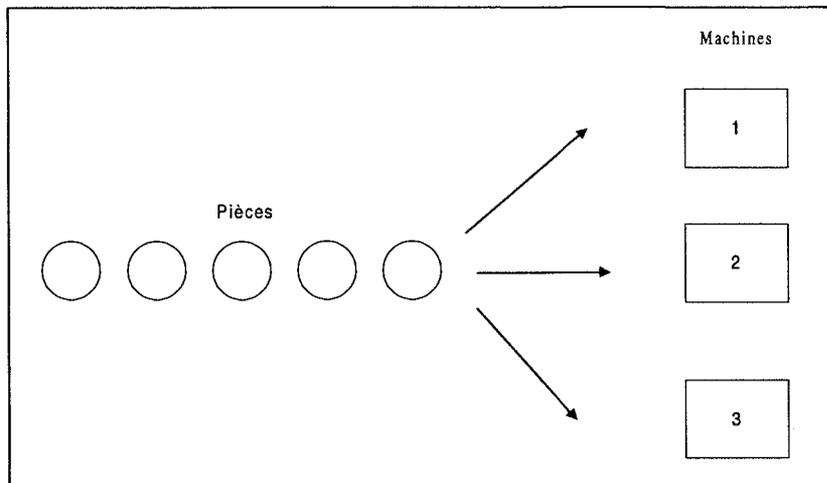


Figure 1.6 : les pièces arrivent selon un taux de 5 pièces par unité de temps, les machines travaillent avec un temps d'usinage distribué uniformément entre 35 et 45 unité de temps.

Deux observations sont à faire : d'une part, dans son modèle, le temps d'usinage de chaque machine est aléatoire, et d'autre part, les conditions de travail de l'atelier impliquent que le nombre de pièces dans l'atelier peut tendre vers l'infini, c'est-à-dire, que le système travaille complètement chargé. Les deux observations sont d'une importance non négligeable. En effet, dans ces conditions de travail, les temps d'usinage vont fortement influencer les variations de la variable d'intérêt.

Le problème est donc le suivant : nous ne pouvons pas distinguer s'il s'agit d'un comportement stochastique ou d'un comportement chaotique. Dans ce cas, le calcul de l'exposant de Lyapunov ne peut amener à une conclusion définitive.

### b) Behavioural Analysis of a Complex System [MAS.93]

Le second travail est celui de Massotte. Massotte montre que dans des conditions très particulières, une croissance exponentielle de la quantité de produits à l'intérieur d'une cellule de production peut être exprimée par des relations de récurrences du type  $X_{n+1} = f(X_n, R)$ . Les expressions qu'il a utilisées sont classiques dans les systèmes dynamiques [BER.84] et l'on sait que, en fonction des valeurs du paramètre  $R$ , le comportement de la variable  $X_n$  peut devenir chaotique. On peut donc en conclure que, sur ce point précis, il n'y a pas une démonstration formelle du comportement chaotique d'un atelier de production.

L'auteur s'est penché sur le problème du comportement de deux types de systèmes de production : le "système planifié" et le "système flexible". En ce qui concerne le premier système, il a pu observer des comportements oscillatoires, mais il n'a pas trouvé de régime chaotique. Quant au second système, l'auteur a pu remarquer une conduite irrégulière qu'il qualifie de chaotique. Il explique que ce comportement chaotique est dû à l'interaction entre chaque cellule et aux fonctions non linéaires qui régissent le système. Malheureusement, l'auteur ne donne ni le détail du modèle ni celui des méthodes qui lui ont permis d'aboutir à ces conclusions.

### c) Chaos und Produktionsprozesse [TÖN.92]

Dans le troisième travail cité, celui de Tönshoff et Glöckner, des observations intéressantes sont faites concernant l'effet que peuvent avoir sur l'ordonnancement certains changements dans les conditions de travail : la panne d'une machine, un retard dans l'arrivée des pièces, par exemple. Ces perturbations peuvent amener le système à un comportement chaotique. Toutefois, cette affirmation n'a pas été démontrée. Le travail de Horns [HOR.89], qui avait travaillé avec Tönshoff dans le même sens, n'a pas non plus permis d'aboutir à une réponse définitive.

Les auteurs ont établi une analogie entre le flux de pièces dans un système de production et un flux de matière qui passe par des entonnoirs (machines), selon un itinéraire bien défini. Ils ont étudié ce modèle avec un système d'équations différentielles couplées. Ils ont mis en évidence pour ce modèle mathématique un comportement périodique, et ont conclu que pour éviter le comportement chaotique d'un système de production, une solution consiste à concevoir la structure de l'atelier avec l'aide de l'analogie qu'ils ont établie.

### d) Chaos in a Simple Deterministic Queueing System [FEI.94]

Ce travail étudie le comportement de deux files d'attente, en face d'un serveur, modélisées à l'aide d'un système d'équations aux différences non linéaires. Chaque file représente des activités différentes. Le nombre d'activités par période qui arrivent dans chacune de ces deux files est noté respectivement  $(\alpha, \beta)$ . Ces deux valeurs, comme les temps de services (pris égaux à 1) sont fixes. Le modèle est donc complètement déterministe. Le système travaille en équilibre, le nombre d'activités présent dans le système et dans chaque période est constant.

La règle de décision du serveur est une fonction non linéaire du type :

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + e^{k(y-x)}}$$

Cette règle prend en compte la différence entre les longueurs des files  $(x,y)$  et définit l'activité que le serveur va exécuter. Le modèle est défini pour les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= x_t + \alpha - f(x_t, y_t) \\y_{t+1} &= y_t + \beta - f(x_t, y_t)\end{aligned}$$

Ce modèle est intrinsèquement simple; cependant pour certaines valeurs des paramètres, il aboutit à un comportement complexe, c'est-à-dire chaotique. L'analyse que les auteurs ont faite, pour caractériser la conduite du système est une analyse de bifurcation à l'aide des paramètres  $\alpha$  et  $k$ .

Dans ce travail il y a un aspect qui est intéressant de remarquer : le comportement du système dépend fondamentalement de la fonction de décision de serveur et des taux d'arrivées des activités, si le système ne se trouve pas dans l'équilibre le comportement est tout à fait prévisible, d'ailleurs nous retrouverons cette même condition dans les systèmes que nous étudierons.

#### e) Oscillations and Chaos in a Flow Model of a Switching System [ERR.91]

Ce travail étudie le comportement d'un flux de communications dans un système digital de trafic. Sous certaines conditions de charge et pour certains paramètres du système, celui-ci se comporte de manière chaotique.

Le système est composé de deux types d'appel  $A, B$  et d'un serveur. A la sortie du serveur le type d'appel  $A$  est transformé en type  $B$ , qui retourne sur le serveur avec un délai constant. Le type  $B$  a la priorité sur le type  $A$ , autrement dit le serveur ne travaille avec le type  $A$  que lorsque la file d'attente des types  $B$  est vide.

La formulation mathématique du système correspond à un ensemble d'équations aux différences du type :

$$\begin{aligned}A_{k+1} &= A_k + \lambda_k - C_k \\C_k &= \min(A_k + \lambda_k, \mu_A (1 - \frac{D_k}{\mu_B})) \\B_{k+1} &= B_k + C_{k-l} - D_k \\D_k &= \min(B_k + C_{k-l}, \mu_B)\end{aligned}$$

Les paramètres du modèle sont : la taux de arrivée  $\lambda$ , les taux de services  $\mu_A, \mu_B$  et l'intervalle de "feedback"  $l$ .

Les variables d'états sont : les longueurs des files d'attente ( $A$ ,  $B$ ) et les quantités de sortie du serveur  $C$ ,  $D$ .

Les auteurs ont réalisé une étude analytique du modèle en utilisant les sections de Poincaré. Ils ont conclu que pour certaines valeurs des paramètres le système devient chaotique.

Nous voyons qu'avec ce modèle il est possible d'établir une analogie avec un système de production malgré certaines caractéristiques peu réalistes. Par exemple, le fait que le serveur (machine) soit destiné à travailler avec un type d'appel (un type de pièces) pendant un intervalle de temps fixé, même s'il n'y a plus d'appel de ce type. Nous avons fait une grande quantité de simulations numériques du modèle, et nous nous sommes aperçus que pour d'autres paramètres que ceux présents dans l'article le système devient périodique.

### **1.2.3. D'autres articles en bref**

Nous verrons ici divers articles dans lesquels on peut observer aussi une certaine relation avec le problème qui nous intéresse.

Ramussen et Mosekilde [RAM.88] ont démontré qu'un comportement chaotique peut être généré par un système classique de gestion. Le modèle représente une entreprise devant assigner des ressources aux secteurs de production et de marketing en fonction du stock et de la demande. Si cette demande est faible, alors il est nécessaire de destiner des ressources au marketing. Si la demande est importante et les stocks faibles, on doit attribuer des ressources à la production.

Le modèle de simulation a été construit selon le point de vue des systèmes dynamiques et programmé avec le logiciel "Dynamo". Les variables d'étude sont : stockage des produits finis, nombre de consommateurs, niveaux de ressources en production et marketing.

Ce modèle présente un comportement oscillatoire produit par les réponses aux perturbations externes. Ces oscillations représentent une forme simple du phénomène non linéaire et pour certaines valeurs des paramètres, le modèle devient chaotique.

Grâce aux séries de données obtenues par la simulation, il a été possible de déterminer les attracteurs du système, les sections de Poincaré et les exposants de Lyapunov.

Sterman [STE.88] en étudiant le modèle "Beer distribution game" a démontré, à partir de résultats expérimentaux (modèle de simulation), que les preneurs de décision peuvent amener

le système à un comportement chaotique. L'article de Mosekilde et Larsen [MOS.88] se trouve dans la même ligne de pensée.

Whitt [WHI.93] a étudié un simple modèle analytique composé de quatre files et un serveur. Il a observé, en utilisant la règle de service FIFO de grandes fluctuations dans la longueur des files d'attentes. Il a montré aussi l'importance de l'effet du feed-back dans ces fluctuations.

Les travaux de Perkins et al [PER.89], [PER.94] et Kumar et al [KUM.90] développent divers modèles analytiques pour déterminer les conditions sous lesquelles une politique d'ordonnement rend le système stable.

#### 1.2.4. Conclusions

Tous ces travaux nous offrent des idées et des pistes de recherche. Dans son travail, Deshmukh fait une relation importante entre la complexité dynamique d'un système et les exposants de Lyapunov. Les réflexions de Massotte elles aussi ont leur importance dans la mesure où il établit le lien entre les systèmes de production et les comportements complexes. Les travaux de Tönshoff, Glöckner, et Horns, d'un point de vue conceptuel mettent en relation l'ordonnement et la sensibilité aux perturbations de l'environnement. Enfin, les recherches de Feichtinger, Erramilli et Floy, montrent comment de simples équations aux différences peuvent avoir des comportements complexes. Nous devons toutefois préciser, que dans le cas qui nous concerne, la modélisation des ateliers flexibles de production avec des équations aux différences nous semble être une trop grande simplification du fonctionnement d'un atelier.

Les travaux de Whitt, Perkins et Kumar, montrent de façon analytique qu'un système de production est sensible aux règles de fonctionnement, et que pour certaines règles le comportement change complètement. Même s'il est vrai que ces chercheurs ne parlent pas du chaos, excepté Whitt (qui ne l'a pas d'ailleurs démontré), ceux-ci montrent cependant l'importance de la gestion pour avoir un système stable.

Une constatation importante est que la plupart des travaux, que nous avons analysé basent leurs conclusions à partir de modèles qui représentent le système. En effet, lorsque nous prenons des données à partir d'un système réel en fonctionnement, sauf expériences de laboratoires bien contrôlées, du bruit peut être présent dans les données, ce qui rend les analyses plus difficiles encore [HIL.94], [ABA.96].

## Chapitre 2

# Méthodologie de modélisation et de simulation des systèmes flexibles de production

### 2.1. Introduction

Notre objectif est de vérifier l'existence de comportement chaotique temporel dans un atelier flexible de production. Comme nous l'avons déjà vu, ce comportement est un type parmi d'autres dans les systèmes dynamiques non linéaires déterministes.

Nous savons que dans le domaine de la production, de nombreux phénomènes stochastiques se manifestent, par exemple : répartition aléatoire des pièces sur les machines, un retard dans l'arrivée des matières premières, des temps d'usinage aléatoires. Néanmoins, le sujet même de cette thèse est axé sur les systèmes déterministes, les systèmes automatisés de production rentrant dans cette catégorie. En effet, les temps opératoires ainsi que les temps entre l'arrivée des pièces peuvent être considérés fixes. Ainsi, une approche déterministe peut les représenter de façon adéquate. L'objet de cette partie est de présenter la démarche de modélisation et d'analyse que nous avons retenue pour cette étude.

### 2.2. La modélisation

L'objectif d'un modèle est d'améliorer la compréhension du comportement d'un système. Une fois le problème identifié, la modélisation implique plusieurs étapes, telles que : définir l'objectif, choisir le type de représentation adéquate au type de problème, faire certaines hypothèses, savoir quels aspects du système mettre de côté, etc... Etant donnée la nature purement qualitative de ces différents options, il est difficile de choisir le paradigme idéal pour un problème donné.

Dans ce travail, nous modéliserons l'organisation d'un système manufacturier au niveau le plus bas (shop floor), c'est à dire au niveau machine. Pour ce niveau, plusieurs paradigmes ont été développés pour représenter l'atelier. Voici une présentation des différents paradigmes les plus couramment utilisés suivant différentes classes de modèles.

On peut d'abord répertorier les modèles analytiques et les modèles de simulation. Les modèles analytiques ont une structure formelle qui peut être analysée et résolue par des moyens mathématiques, tandis que les modèles de simulation sont basés sur une description mathématique et logique de l'interaction des composants du système.

Une autre classification distingue les modèles descriptifs ou "évaluatifs" utilisés pour estimer les performances de certains paramètres du système et les modèles dit "génératifs" qui eux, déterminent les paramètres pour obtenir certaines performances [SUR.85]. Plusieurs autres sous-classifications de ces types de modèles ont été faites à partir de la nature des variables et de leurs interactions : déterministe, stochastique, linéaire, non linéaire, statique, dynamique, etc...

On peut aussi [KOC.94] séparer les modèles en "approches structurelles" et en "approches dynamiques". Dans le premier type, on trouve les modèles d'optimisation, de transition de probabilités (chaînes de Markov), et ceux basés sur la théorie des files d'attente, etc... Dans la deuxième catégorie, on trouve les différents types de modèles de simulation et les modèles du type "projection-based state space analysed" dont l'idée générale est de réduire l'espace de phases (projection) en prenant seulement en compte les aspects les plus importants du système, c'est-à-dire ceux qui décrivent sa conduite (pour plus de détails voir [KOC.93]).

Le schéma de la figure 2.1 présente les différents types de modèles de production d'après la technique de modélisation (classification faite à partir de [DES.93]).

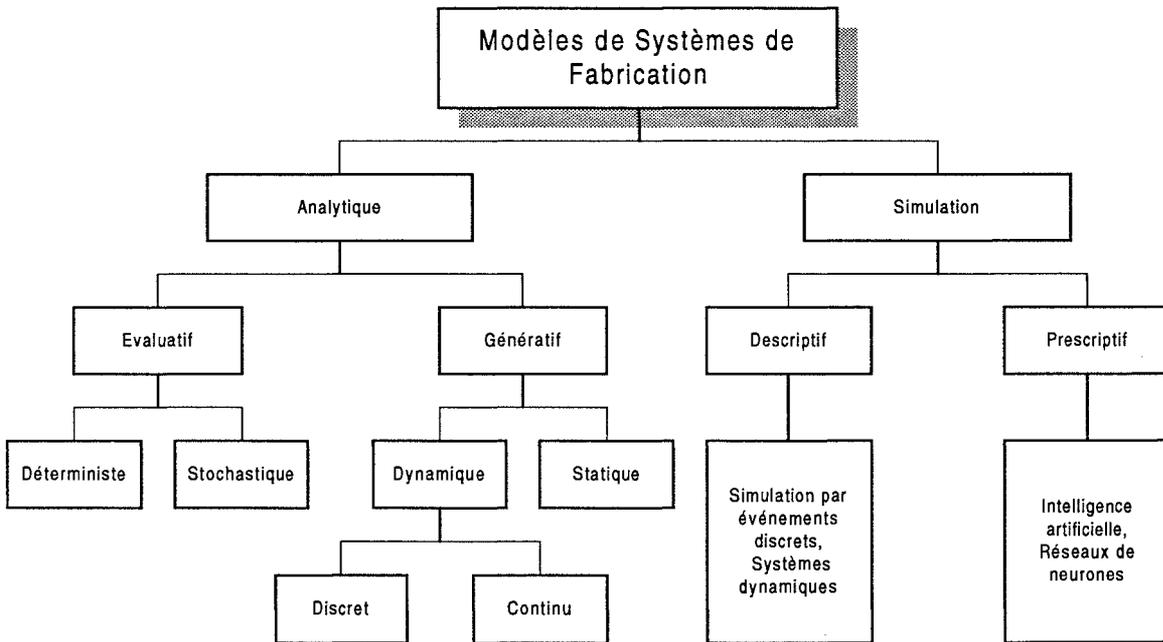


Figure 2.1 : classification des modèles des systèmes de fabrication selon la technique de modélisation.

Notre objectif étant d'étudier le comportement dynamique du système de production au niveau opérationnel, et à partir des classifications précédentes, nous nous situons dans une approche par simulation. Ce choix peut s'expliquer par le fait qu'une modélisation analytique et sa résolution devient très vite complexe, même pour des systèmes très simples. Donc, si nous adoptons cette démarche, nous serions contraints de procéder à des simplifications

réductrices qui nous éloigneraient de notre objectif : proposer une représentation adéquate du système.

Par ailleurs, une des approches les plus répandues pour décrire l'évolution des systèmes manufacturiers est la simulation par événements discrets. Celle-ci nous permet de suivre l'évolution du système, même pour un haut niveau de complexité. Cet outil nous semble donc davantage approprié à notre objectif.

Comme toute modélisation, un modèle de simulation par événements discrets est une abstraction mathématique et logique du comportement d'un système où, tant les éléments composants ce modèle que les interactions entre eux, sont définis par les objectifs du concepteur du modèle. En fait, un seul et même système peut avoir une quantité infinie de représentations.

Par conséquent, nous ferons une modélisation des systèmes manufacturiers en prenant parmi eux les éléments essentiels pouvant nous amener à répondre à la question qui nous intéresse. Dans la modélisation nous mettrons de côté tout ce qui est inutile et redondant et qui nous empêche de comprendre l'essentiel par rapport aux objectifs recherchés dans ce travail.

Pour nous, un atelier flexible sera donc, un système composé d'un ensemble de machines flexibles vers lesquelles se dirigent les différents types de pièces pour être transformés. Ces machines sont capables de faire diverses opérations avec des temps de reconfiguration que nous considérerons dans un premier temps comme négligeables. Le parcours des pièces dans l'atelier dépendra exclusivement de l'état du système à un instant donné : lorsqu'une pièce arrive à l'entrée du système, elle devra choisir la machine capable de réaliser sa première opération d'après une règle qui prendra en compte l'état du système. Plusieurs machines peuvent bien sûr réaliser une même opération. Une fois cette première opération terminée, ce processus d'affectation de la pièce à la machine se répétera pour les autres opérations de sa gamme, cependant l'ordonnancement des opérations est figé. Dans tous les systèmes étudiés, pour toutes les machines considérées, les pièces n'auront aucun droit de préemption. Autrement dit quoiqu'il arrive, une opération de transformation commencée, ne sera jamais interrompue. Un schéma général est présenté sur la figure 2.2.

Le système sera déterministe, ce qui veut dire que les temps d'arrivée des pièces, les temps opératoires, ainsi que toutes les règles de décision seront connus. Cette condition est fondamentale pour essayer de répondre à notre question, sans ajouter inutilement de bruit sur notre système.

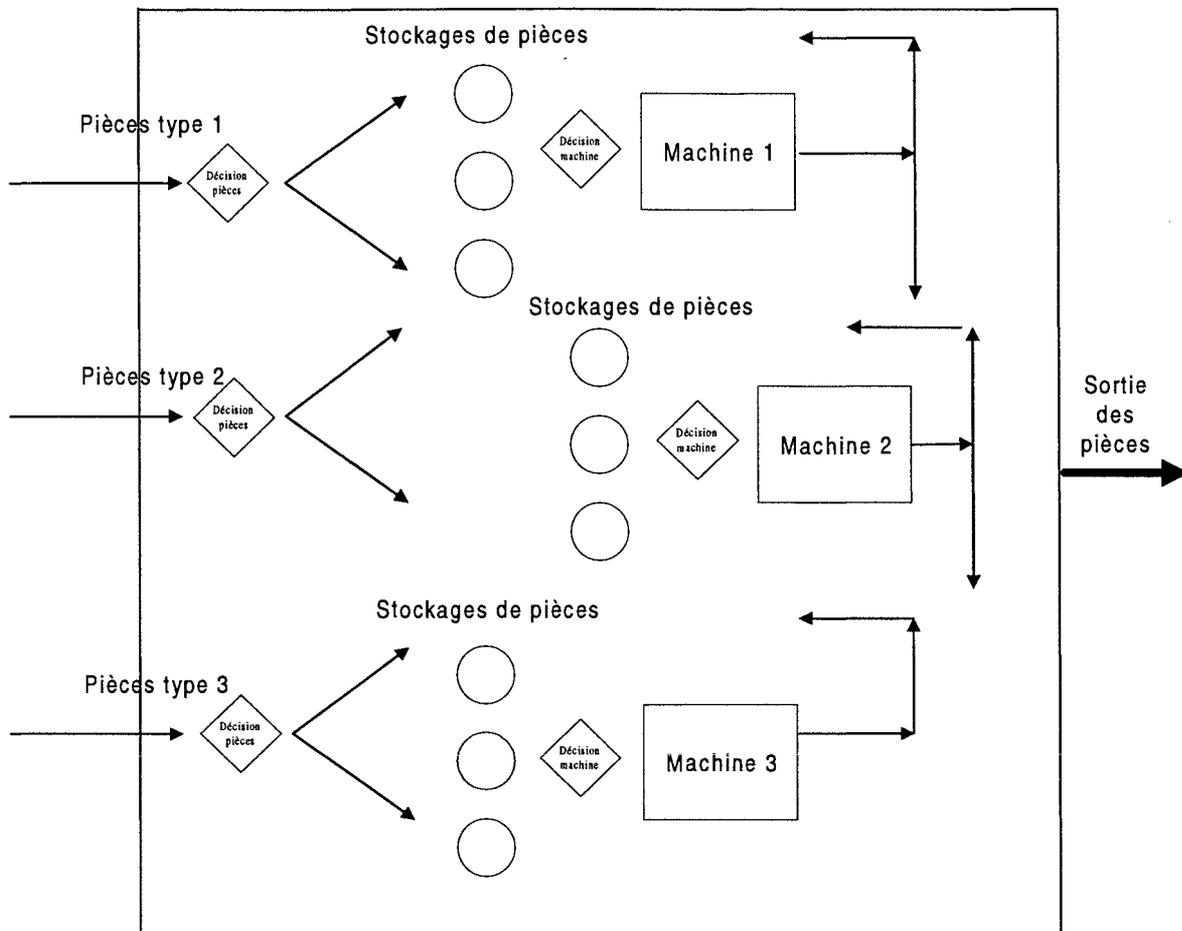


Figure 2.2 : schéma général de représentation du système.

### 2.3. Système et sous-systèmes

L'étude de la dynamique des systèmes de production, avec les outils des systèmes dynamiques non linéaires, ne peut s'effectuer que si ceux-ci possèdent des caractéristiques appropriées. L'application du théorème de Takens en est un exemple [TAK.81]. Nous allons dans cette partie nous intéresser à une décomposition d'un système en sous-systèmes (d'un atelier en plusieurs cellules) sur un critère lié aux interactions entre les différentes machines. L'approche est analogue dans sa philosophie à celle de la "technologie de groupe". Nous nous intéressons ici cependant uniquement à la dynamique du système. Ces concepts sont analogues aux concepts développés dans la théorie de graphes.

#### 2.3.1. Définitions

1. Un système de production est composé de machines, de pièces et de relations entre elles.
2. Relation  $R(a,b)$  : deux machines sont en relation lorsqu'il existe entre elles un flux de pièces même si celui-ci n'est pas direct.

3. Relation dominante  $R(a \rightarrow b)$  : une machine  $a$  établit une relation dominante (unidirectionnelle) avec une autre machine  $b$  si un changement dans les paramètres de la machine  $a$  modifie la dynamique des stocks de la machine  $b$ . Cet exemple est représenté figure 2.3.

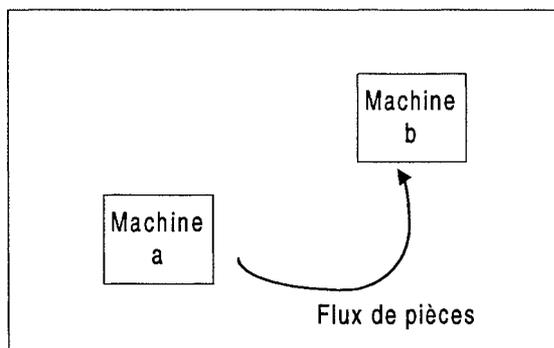


figure 2.3 : Exemple de relation dominante entre la machine a et la machine b.

4. Relation réciproque  $R(a \leftrightarrow b)$  : deux machines sont en relation réciproque si un changement dans les paramètres de  $a$  change la dynamique des stocks de  $b$  et inversement.

### 2.3.2. Propriétés :

a) Transitivité 1 : s'il existe  $R(a,b)$  et  $R(b,c)$  alors il existe une relation  $R(a,c)$ .

b) Transitivité 2 : si la machine  $a$  est dominante sur  $b$ , et  $b$  est sur la machine  $c$ , alors la machine  $a$  est dominante sur  $c$ .

$$R(a \rightarrow b) \text{ et } R(b \rightarrow c) \Rightarrow R(a \rightarrow c)$$

c) Transitivité 3 : si la machine  $a$  est en relation réciproque avec une machine  $b$  et  $b$  en relation réciproque avec une machine  $c$ , alors il existe une relation réciproque entre les machines  $a$  et  $c$ .

$$R(a \leftrightarrow b) \text{ et } R(b \leftrightarrow c) \Rightarrow R(a \leftrightarrow c)$$

c) Réflexivité :  $R(a,a)$  existe si le flux qui sort de la machine  $a$  revient sur la machine  $a$ . Ceci couvre les cas où une pièce retourne directement sur la machine  $a$  après y avoir subi une première opération, mais également le cas où après une première opération sur  $a$ , elle passe sur d'autres machines et revient sur  $a$ .

Afin de pouvoir appliquer le théorème de Takens il faut absolument que l'ensemble des équations différentielles d'un système, quel qu'il soit, soient couplées. Nos définitions des différentes relations entre des machines tendent à représenter cette notion de couplage sans

pour autant connaître les équations différentielles régissant le fonctionnement du système. Les relations de réciprocité entre deux machines sont cependant analogues. Ceci nous permet, lors de l'étude du comportement de système complet de regrouper, sur ce critère de couplage, des machines en des sous-ensembles cohérents, aux qualités propres. Ce sont ces sous-systèmes que nous pourrions analyser.

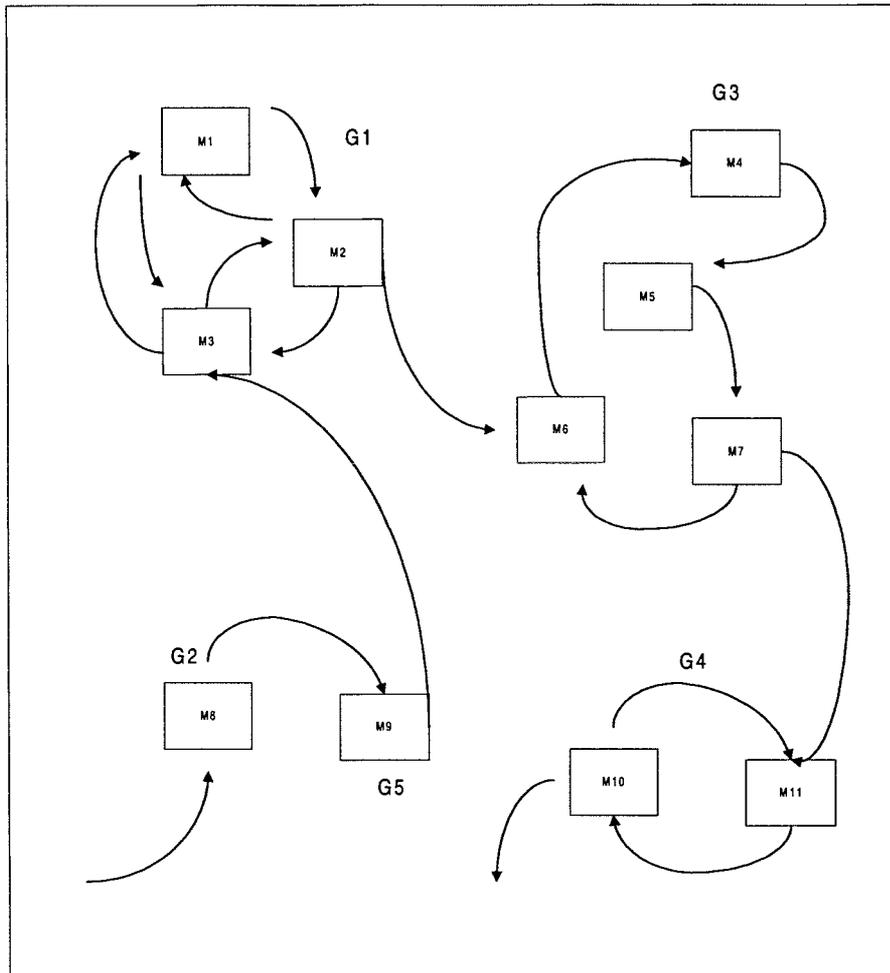


Figure 2.4 : construction de sous-systèmes de production d'après le type de relation.

Dans la figure 2.4, nous avons un système composé de 11 machines dont les relations sont représentées par les arcs. D'après la définition des relations ci-dessus, nous pouvons construire trois sous-systèmes où les machines se trouvent en relation réciproque : G1, G3, et G4. Nous constatons aussi que les machines du sous-système G1 se trouvent en relation dominante sur les machines du sous-système G3. Il existe également une relation dominante entre G5 et G1.

La dynamique de chaque sous-système peut être différente, mais celle se trouvant à l'intérieur de chaque sous-système est la même (sous la condition de stabilité du système qui sera

présentée ultérieurement). L'identification des cellules, ou sous-systèmes, nous permet d'étudier le comportement de chacune d'entre elles de façon séparée.

On ne peut pas globalement étudier le comportement d'un système de production. En effet, chacune des cellules constitutives du système peut avoir un comportement différent des autres. Une cellule peut, par exemple, avoir un comportement périodique, une autre un comportement aléatoire, une troisième un comportement chaotique, et ce dans un même temps.

## 2.4. Les variables

Les modèles de simulation mettent à notre disposition tout un ensemble de variables qu'il nous est par la suite possible d'analyser. Le problème se pose donc sur le choix d'une variable capable d'une part, de représenter le comportement du système, et d'autre part, de rester analysable par les outils appropriés à l'étude de la dynamique des systèmes non linéaires. Nous avons donc procédé à de multiples essais sur différentes variables : le temps de passage des pièces, la fréquence de sortie des pièces, le temps dans des files d'attente, le temps de permanence du système dans le même état, etc ... Ces tests nous ont permis de façon progressive de nous orienter vers un choix de variables, les moyennes temporelles du nombre de pièces dans les files d'attente, c'est à dire :

si  $x(t)$  est le nombre instantané de pièces d'un certain type dans une file d'attente, nous définissons la variable  $y(t)$  comme :

$$y(t) = \frac{\int_t^{t+\Delta T} x(\tau) d\tau}{\Delta T}$$

$y(t)$  est une moyenne temporelle d'un niveau de stock pour un type de pièce. La figure 2.5 représente  $x(t)$  et  $y(t)$ , le choix de  $\Delta T$  se fait de manière à obtenir un nombre suffisant de points par rapport à la pseudo-période de  $x(t)$  (minimum 10 points). Ces variables  $y(t)$  permettent d'une part, de décrire l'évolution dynamique du système, et d'autre part, de fournir un indicateur de performance du système de gestion de l'atelier. Ainsi, les variables  $y(t)$  définies auparavant se soumettront aux analyses avec l'ensemble d'outils dédiés (cf chapitre 2). De cette façon, nous pourrons caractériser la dynamique du système.

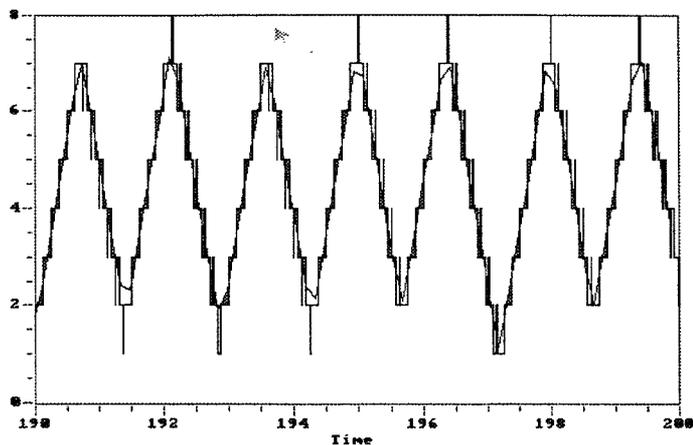


figure 2.5 : représentation de  $x(t)$  et  $y(t)$  avec  $\Delta T = 0.15$  unité de temps.

## 2.5. Résumé et conclusions

1. Nous avons choisi d'adopter une démarche allant du plus simple au plus complexe. Nous commencerons par l'étude d'un système simple en augmentant progressivement la complexité afin de maîtriser, à chaque étape, toutes les lois de comportement du système.
2. Comme nous l'avons déjà exposé, la dynamique du système, fonctionnera avec des règles locales,. Ici, nous n'aborderons pas le problème de l'ordonnancement prédictif. Nous avons employé le logiciel SIMAN (Systems Modeling Corp.) pour faire les simulations. Pour caractériser le comportement des systèmes, nous avons fait l'analyse des résultats numériques des simulations, en utilisant principalement le logiciel CSPW (Applied Nonlinear Science, Llc and Randle, Inc.).

## Chapitre 3

### Etude de la dynamique des systèmes productifs simples

Cette partie sera consacrée à l'analyse du comportement dynamique d'un certain nombre de systèmes de production simples. Nous déterminerons les paramètres utilisés pour rendre ces systèmes stables, c'est-à-dire où le nombre de pièces ne tend pas vers l'infini, puis nous étudierons leur dynamique.

#### 3.1. Cas I : Un système composé d'une machine et d'un type de pièce

##### 3.1.1. Variables et paramètres :

1. Soit un type de pièce arrivant à une fréquence  $\beta$  [pièces/unité de temps].
2. Soit  $\mu$  le taux [pièces/unité de temps] de fabrication de la machine.
3. Soit  $q(t)$  le nombre de pièces qui attendent dans le système, à l'instant  $t$ .
4. Les pièces ont une seule opération.

##### 3.1.2. Fonctionnement du système

Le système étant tout à fait déterministe, les paramètres  $\beta$ ,  $\mu$  et le nombre de pièces initiales  $q_0$  le caractérisent complètement. Dans ce cas, il suffit que  $\beta$  soit inférieur à  $\mu$  pour que le nombre de pièces soit stable. En effet, si  $\beta < \mu$ ,  $q(t)$  tend vers zéro, et si  $\beta = \mu$ , alors,  $q(t)$  tend vers  $q_0$ .

#### 3.2. Cas II : Un système composé d'une machine et de deux types de pièces

Nous allons sur ce cas, a priori simple, donner les équations qui régissent le fonctionnement du système. A partir de celles-ci nous tenterons de conclure quant à la stabilité globale du système.

##### 3.2.1. Variables et paramètres :

1. Soient  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  respectivement les taux d'arrivée des pièces de type 1 et 2.

2. Soient  $\mu_1, \mu_2$  respectivement les taux de fabrication des pièces de type 1 et 2.
3. Soient  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  respectivement le nombre de pièces de type 1 et 2.
4. Les deux types de pièces ont seule une opération.

### 3.2.2. Schéma du système :

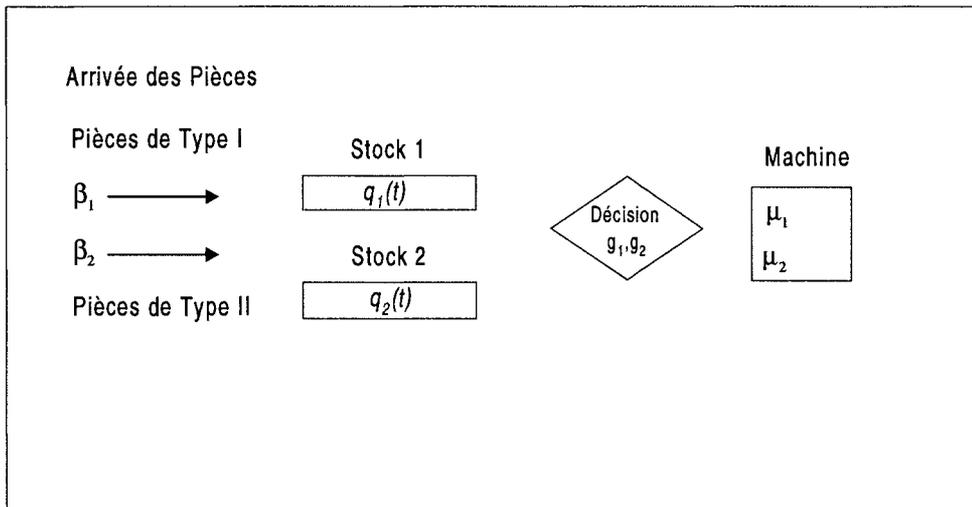


Figure 3.1 : La machine choisit le type de pièce à usiner selon une règle de décision

### 3.2.3. Fonctionnement de l'atelier et règles de décision :

1. Ici, nous montrerons une manière d'obtenir un système dans des conditions d'équilibre. Soit  $T$  le temps opératoire du système et soit  $T_1, T_2$  respectivement les temps où la machine travaille avec les pièces de type 1 et de type 2. Pour obtenir les valeurs des paramètres qui rendent le système stable, nous pouvons faire :

$$\begin{aligned} T \beta_1 &= T_1 \mu_1 \\ T \beta_2 &= T_2 \mu_2 \end{aligned}$$

A partir des équations ci-dessus, on obtient la relation suivante. Celle-ci doit être respectée pour que le système soit stable :

$$\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \leq 1$$

Dans le cas où le membre de gauche de cette équation est strictement inférieur à 1, le nombre de pièces dans le système tend vers zéro. Dans le cas où il est égal à 1, le nombre de pièces dans le système sera constant. Cependant, le nombre de pièces de chaque type va osciller entre certaines valeurs.

2) Nous savons *a priori* que le système ne peut pas avoir un comportement chaotique (théorème de Poincaré et Bendixon). Nous simulerons donc quelques règles de décision parmi toutes les possibilités [PAN.77], [BLA.82]. Soient les fonctions de décision suivantes :

a)  $g_1$  : "règle LNQ" (Largest Number in Queue), la machine choisit le stock quantitativement le plus important et travaille avec lui tant que cette condition est vraie, et ainsi de suite.

b)  $g_2$  : la machine travaille alternativement sur chaque type de pièce pendant un intervalle de temps variable en fonction du nombre de pièces en stock :

$$\Delta t = \frac{kq_1(t)}{q_1(t) + q_2(t)}$$

Où  $k$  est une constante arbitraire.

Les règles décrit ci-dessus peuvent être modélisées sous forme de fonctions mathématiques. La figure 3.2 représente une de ces fonctions. Celle-ci est binaire et prend la valeur 1 quand la machine travaille avec un type de pièce et la valeur zéro quand elle travaille avec l'autre type de pièce.

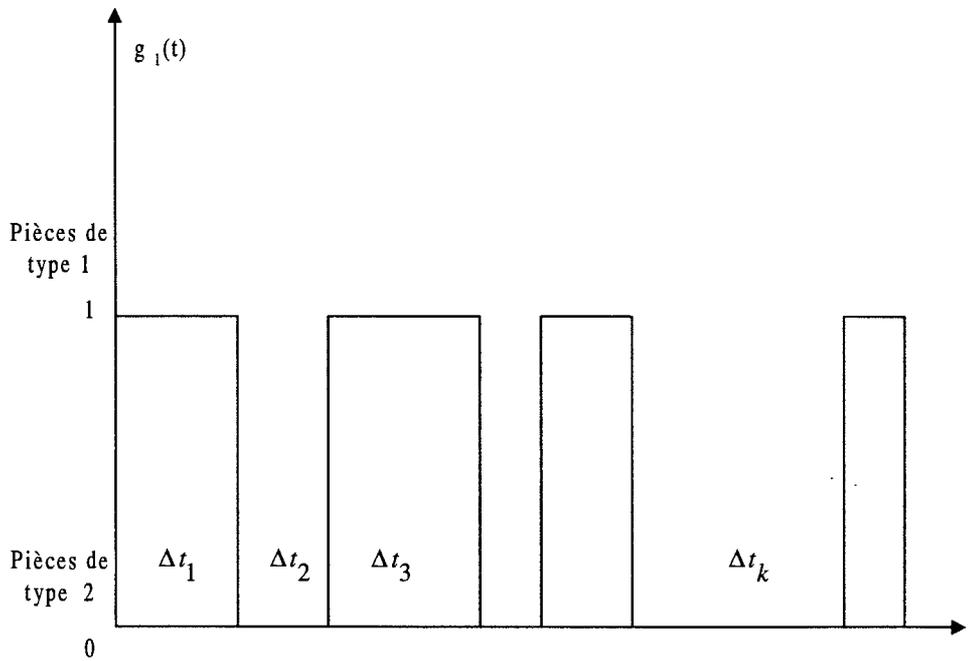


Figure 3.2 : la fonction  $g_1(t)$ .

### 3.2.4. Analyse des résultats des simulations

Nous avons défini un stock pour chaque type de pièce. La machine n'ayant qu'une opération pour chaque type de pièce, l'ordre des files d'attente n'a pas d'importance. Nous simulerons donc les deux alternatives décrites ci-dessus.

Les taux d'arrivée employés sont  $\beta_1 = 2,4$  et  $\beta_2 = 2$  pièces par unité de temps respectivement, les taux d'usinage sont  $\mu_1 = 4$  et  $\mu_2 = 5$  pièces par unité de temps et  $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0$ .

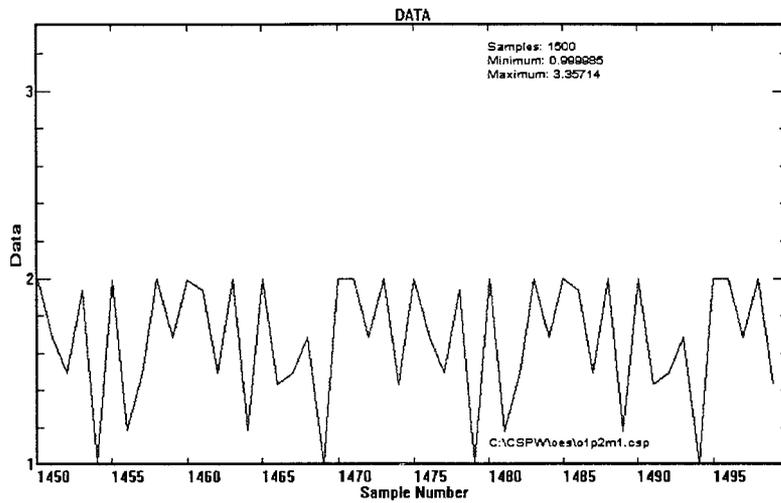


Figure 3.3 : valeur moyenne temporelle du stock de pièces de type 2 en utilisant la fonction  $g_1$ .

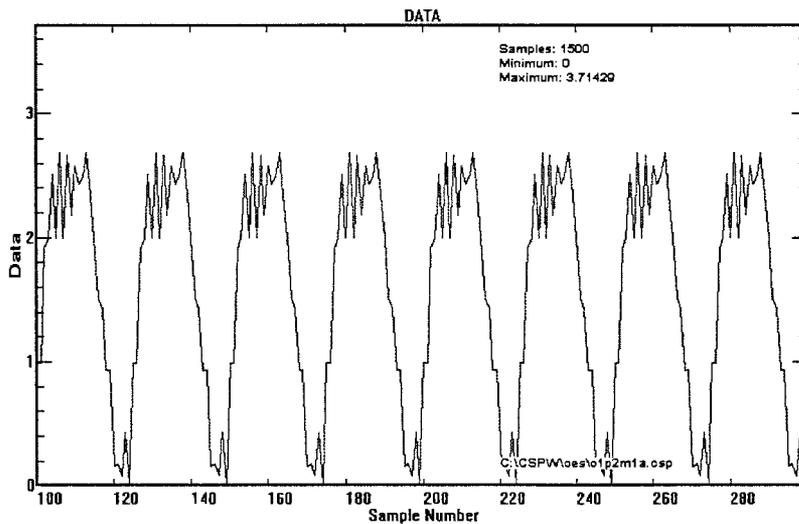


Figure 3.4 : valeur moyenne temporelle du stock de pièces de type 2 en utilisant la fonction  $g_2$ .

Les figures 3.3 et 3.4 montrent l'évolution des moyennes temporelles des stocks de pièces de type 2 pour les fonctions de décision  $g_1$  et  $g_2$ . Pour les pièces de type 1, les résultats sont similaires. Les graphiques montrent que les mouvements sont périodiques.

### 3.3. Cas III : Un système composé de deux machines en parallèle et de deux types de pièces

#### 3.3.1. Variables et paramètres :

1. Soient  $\beta_1, \beta_2$  respectivement les taux d'arrivée des pièces de type 1 et 2.

2. Soient  $\mu_{ij}$  les taux d'usinage des pièces de type  $j$  dans la machine  $i$ .
3. Soit  $q_i(t)$  le nombre de pièces devant la machine  $i$  (dans ce cas est la somme de pièces de type 1 et de type 2).
4. Les pièces ont seule une opération qui peut être usinée sur l'une ou l'autre machine.

### 3.3.2. Schéma du système :

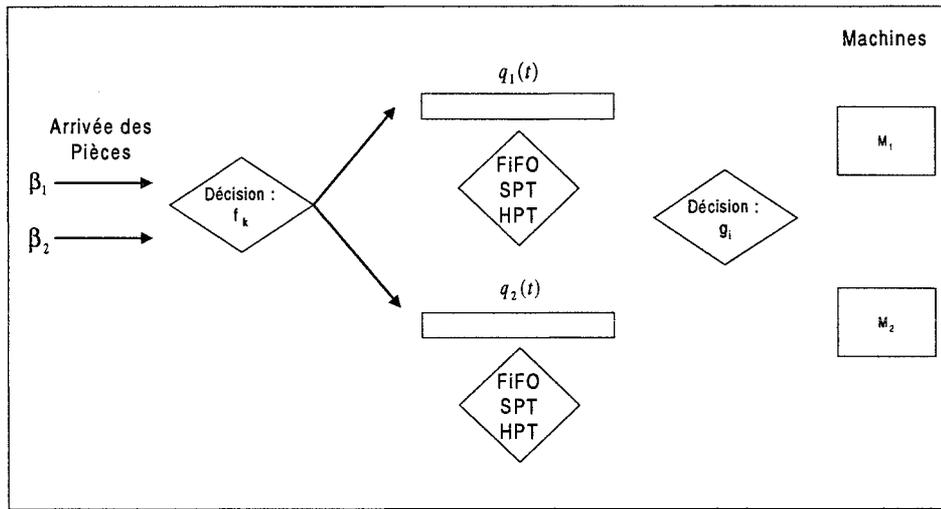


Figure 3.5 : schéma de l'atelier

### 3.3.3. Fonctionnement de l'atelier et règles de décision :

1. Dans ce cas, pour déterminer les paramètres qui rendent le système stable, il faut considérer les règles de décision que le système utilise. En effet, soit  $f_k(q_1(t), q_2(t))$  la règle d'affectation des pièces, soit  $r_i$  la règle d'arrangement des files d'attente (FIFO, SPT, par exemple) et soit  $g_i$  la règle de sélection. Le flux de pièces vers les machines est donc une fonction de ces règles :  $\beta_{ij}(\beta_j, f_k(q_1(t), q_2(t)), r_i, g_i)$ . Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{1}{\mu_{11}}\right)\beta_{11}(\beta_1, f_k(q_1(t), q_2(t)), r_i, g_i) + \left(\frac{1}{\mu_{12}}\right)\beta_{12}(\beta_2, f_k(q_1(t), q_2(t)), r_i, g_i) = 1$$

$$\left(\frac{1}{\mu_{21}}\right)\beta_{21}(\beta_1, f_k(q_1(t), q_2(t)), r_i, g_i) + \left(\frac{1}{\mu_{22}}\right)\beta_{22}(\beta_2, f_k(q_1(t), q_2(t)), r_i, g_i) = 1$$

2) Nous obtiendrons les valeurs des paramètres par simulation en fixant les règles. Dans ce cas, nous simulerons le système avec les règles de décision suivantes :

a) Pour l'affectation des pièces aux files d'attente, nous utiliserons comme règle  $f_k$  la règle "SNQ" (Smallest Number in Queue), la pièce choisira la file d'attente ayant le minimum de pièces.

b) Pour la file d'attente associée à la machine 1 et celle associée à la machine 2, nous emploierons simultanément la même règle. Nous utiliserons, pour nos différents essais, les règles : FIFO (First In, First Out), SPT (Shortest Processing Time) et HPT (Highest Processing Time).

c) Deux alternatives de fonctionnement pour les machines seront utilisées. La première consiste à subir directement les règles de gestion des files d'attente. La seconde consiste à employer  $g_l$  qui sélectionne le type de pièce le plus nombreux à transformer (dans ce cas l'arrangement des files d'attente n'a pas d'influence).

### 3.3.4. Analyse des résultats des simulations :

Le comportement du système sera obtenu par simulation, car ces équations différentielles sont difficiles à résoudre analytiquement. Nous déterminerons également, par simulation, les paramètres pour chacune des règles précédentes. Pour les règles  $g_l$  et pour HPT, nous avons employé les valeurs suivantes des paramètres :  $\mu_{11} = 4$ ,  $\mu_{21} = 3$ ,  $\mu_{12} = 5$ ,  $\mu_{22} = 6$ ,  $\beta_1 = 2,2$  et  $\beta_2 = 7,8$  (condition d'équilibre).

Les résultats obtenus sont résumés par les figures ci-dessous. Elles montrent l'évolution de la moyenne temporelle du stock des pièces de type 2 en utilisant la fonction  $g_l$  puis la règle HPT.

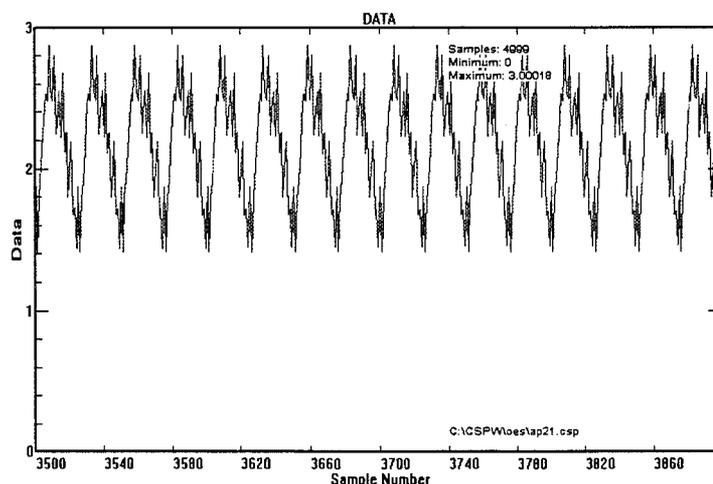


Figure 3.6 : série temporelle du stock des pièces de type 2 en utilisant  $g_l$ .

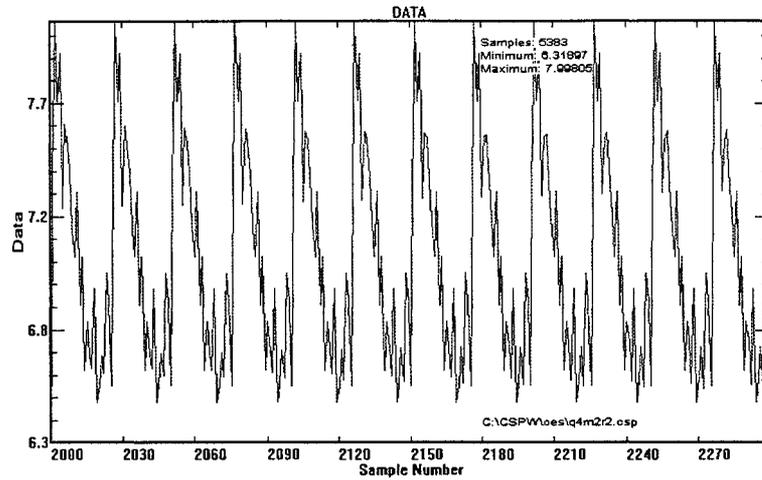


Figure 3.7 : série temporelle du stock des pièces de type 2 en utilisant HPT.

Nous constatons que le système a un comportement périodique lorsque nous utilisons la règle  $g_1$  (cf figure 3.6). Le même comportement a été observé avec la règle HPT figure 3.7.

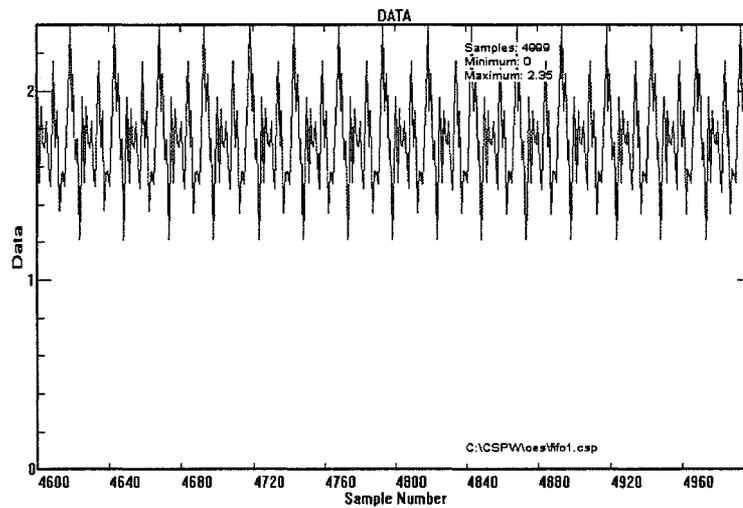


Figure 3.8 : série temporelle du stock des pièces de type 2 en utilisant FIFO (stock initial vide).

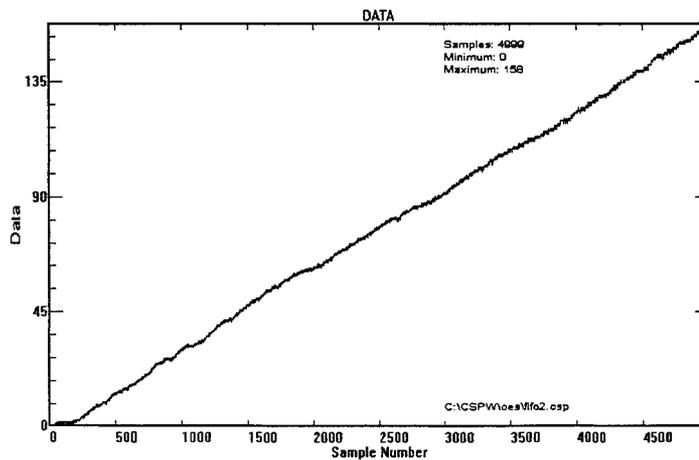


Figure 3.9: stock des pièces de type 2 en utilisant FIFO (stock initial non vide).

Nous avons constaté qu'avec les mêmes paramètres et en utilisant la règle FIFO, le système devient instable pour certaines conditions initiales. En effet, si le système est vide au début de la simulation, le comportement est périodique (figure 3.8). En revanche, si l'on modifie les conditions initiales du système, celui devient instable. Une seule pièce initialement sur le système conduit à cette instabilité (figure 3.9). Lorsque nous utilisons les règles SPT et les mêmes valeurs de paramètres, le système devient instable pour toutes les conditions initiales (figure 3.10).

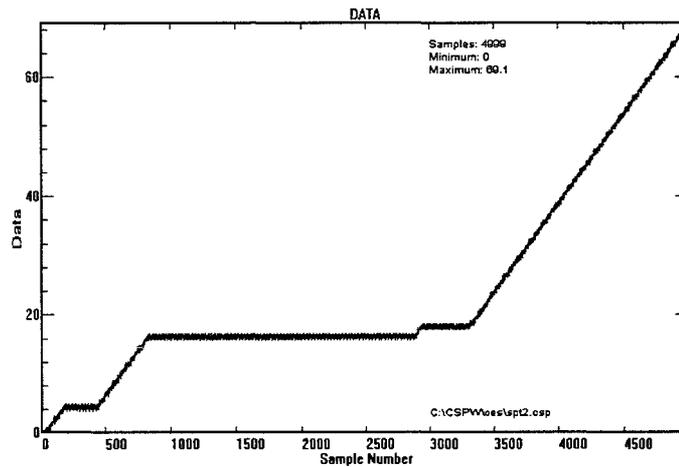


Figure 3.10 : série temporelle du stock des pièces de type 2 en utilisant SPT.

Les résultats obtenus nous indiquent que pour avoir un système stable, il faut changer les paramètres lorsque nous changeons les règles. En effet, une modification des valeurs des taux d'arrivée ( $\beta_1 = 3.5$  et  $\beta_2 = 5.5$ ) pour la règle FIFO et pour la règle SPT, stabilise le système dont le comportement devient alors périodique (figures 3.11, et 3.12).

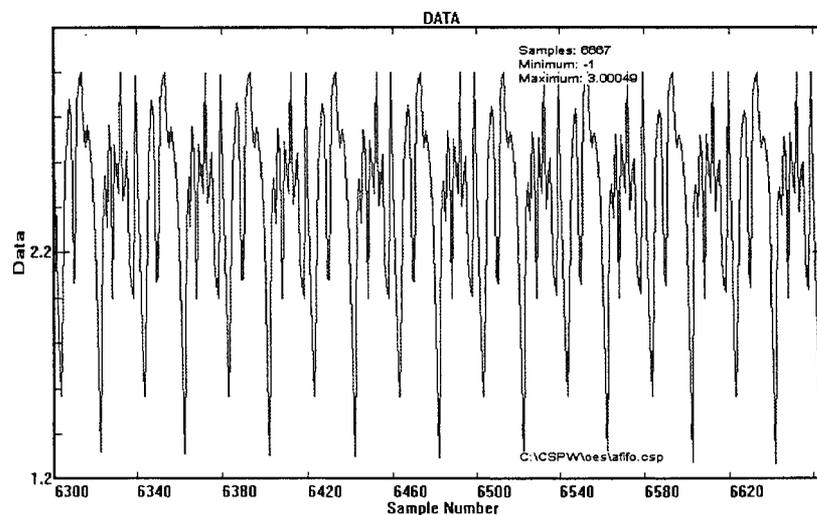


Figure 3.11 : série temporelle du stock des pièces de type 2 en utilisant FIFO.

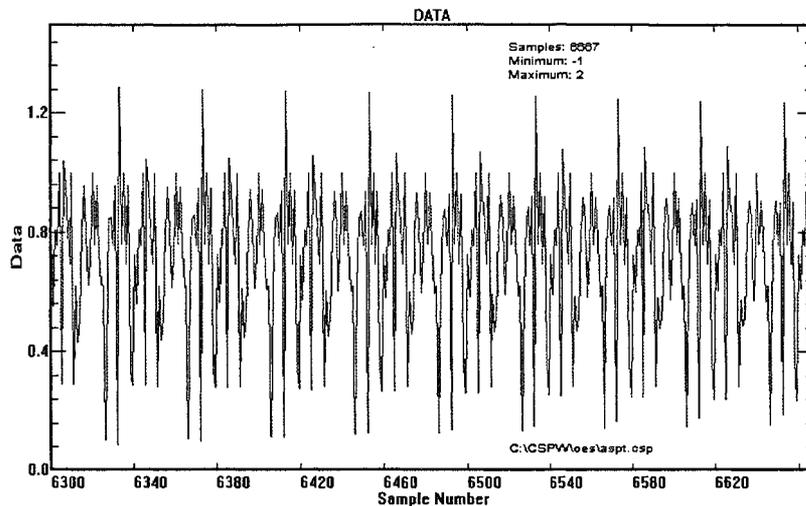


Figure 3.12 : série temporelle du stock des pièces de type 1 en utilisant SPT.

### 3.4. Résumé et conclusions

Nous avons constaté que la stabilité du système dépend des paramètres et des règles de décision. Le comportement que nous avons remarqué par rapport à la règle FIFO, avec les premières valeurs de paramètres, a également été remarqué par Kumar [KUM.90] et Whitt [WHI.93] dans des systèmes déterministes.

Dans tous les cas étudiés, où le système est stable, les valeurs vers lesquelles tendent les variables d'état dépendent des conditions initiales du système.

Pour le cas II, avec la fonction  $g_2$ , l'amplitude de l'oscillation ainsi que l'évolution des stocks dépendent aussi des conditions initiales. En effet, la figure 3.13 montre ce fait pour deux conditions initiales différentes (une pièce de plus dans l'un des cas dans le système). On peut observer qu'au début les deux trajectoires sont jointes, et qu'au fur et à mesure que le temps s'écoule les trajectoires s'éloignent.

Le système composé d'une machine et de deux types de pièce a deux degrés de liberté. Nous savons donc *a priori* qu'il aboutira soit à un point fixe soit à un cycle limite (théorème de Poincaré et Bendixon, [PER.93]). Alors, si un autre type de pièce arrive, nous aurions trois degrés de liberté, et auquel cas nous pourrions être en présence d'un comportement chaotique, même si la fonction de décision utilisée par la machine est non linéaire. Ici ce n'est pas le cas. En effet, la figure 3.14 montre la reconstruction de l'attracteur pour trois types de pièce qui arrivent et une machine. Nous avons employé comme règle de décision la fonction  $g_2$ . Même si la dynamique est plus complexe, l'attracteur est un cycle limite.

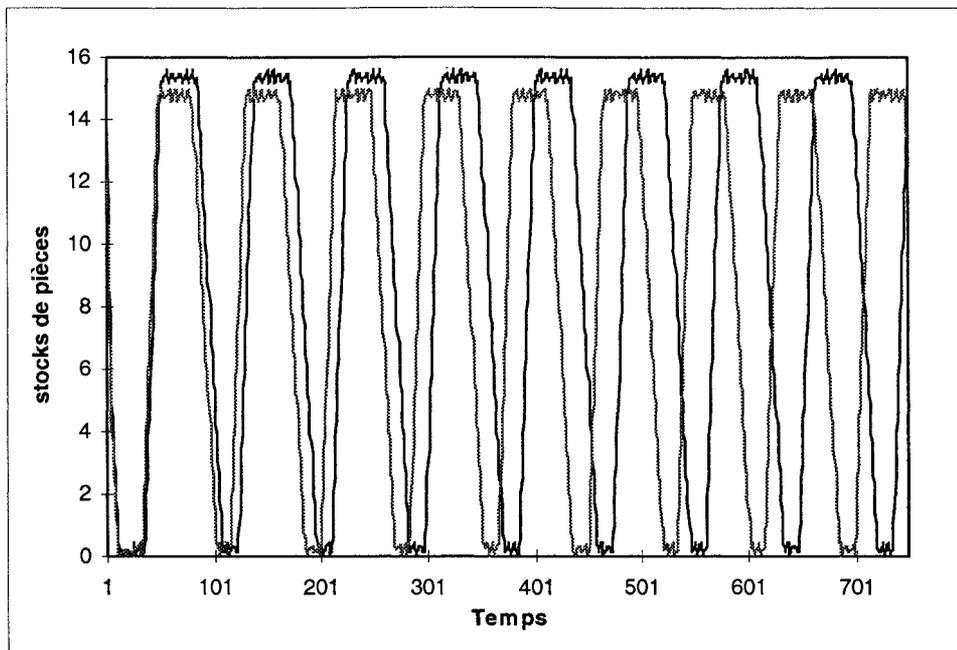


Figure 3.13 : deux trajectoires des stocks avec des conditions initiales proches.

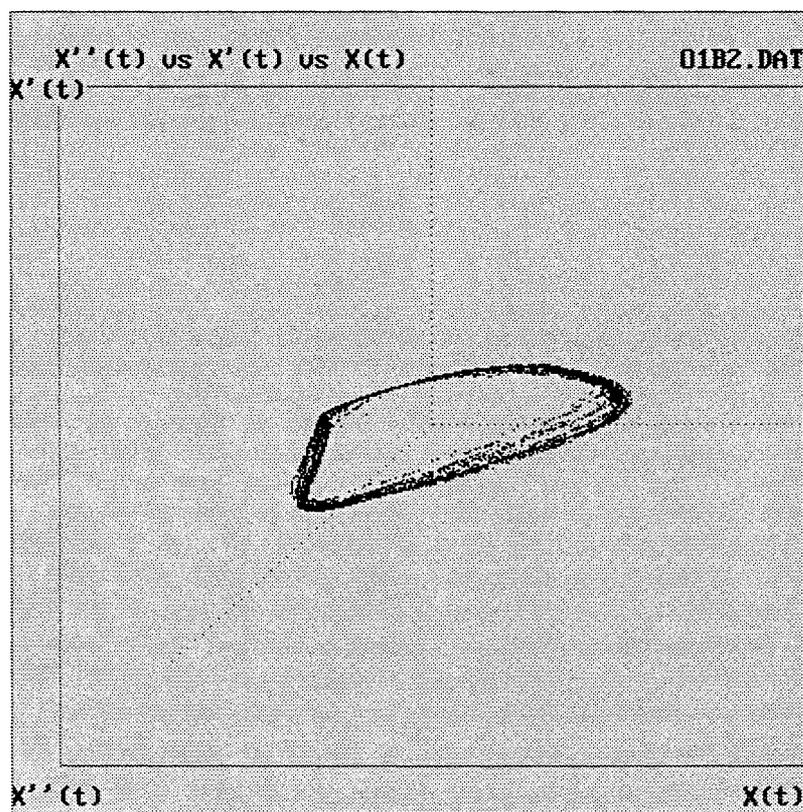


Figure 3.14 : attracteur pour le système composé d'une machine et de trois types de pièce ( $x(t), x'(t), x''(t)$  représentent les moyennes des stocks de chaque type de pièce obtenues avec la méthode des retards).

Nous verrons dans la prochaine partie comment un système de production simple, en fonction de certaines règles de décision, peut aboutir à une dynamique plus complexe.

### 3.5. Cas IV : Etude d'un système simple de production chaotique

Nous allons montrer que même un système simple, composé d'une seule machine et deux types de pièces peut avoir un comportement complexe, c'est-à-dire, chaotique, en fonction des paramètres et des règles de décision employés.

#### 3.5.1. Variables et paramètres :

- 1) Soient  $\beta_1, \beta_2$ , respectivement les taux d'arrivée des pièces de type 1 et 2.
- 2) Les pièces de type 1 ont deux opérations dont les taux d'usinage sont respectivement  $\mu_{11}$  et  $\mu_{12}$ . Les pièces de type 2 quant à elles subissent une seule opération avec un taux d'usinage  $\mu_2$ .
- 3) Soient  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  respectivement le nombre de pièces de type 1 et 2.
- 4) Les valeurs des paramètres employés sont telles que le nombre de pièces dans le système ne tend pas vers l'infini. Le tableau suivant en fait état :

Type de pièce	Taux d'arrivée	Taux de fabrication	
		Opération 1	Opération 2
1	7,7	58	21
2	8,0	16	---

Tableau 3.1 : temps d'arrivée des pièces et temps d'usinage.

#### 3.5.2. Schéma du système :

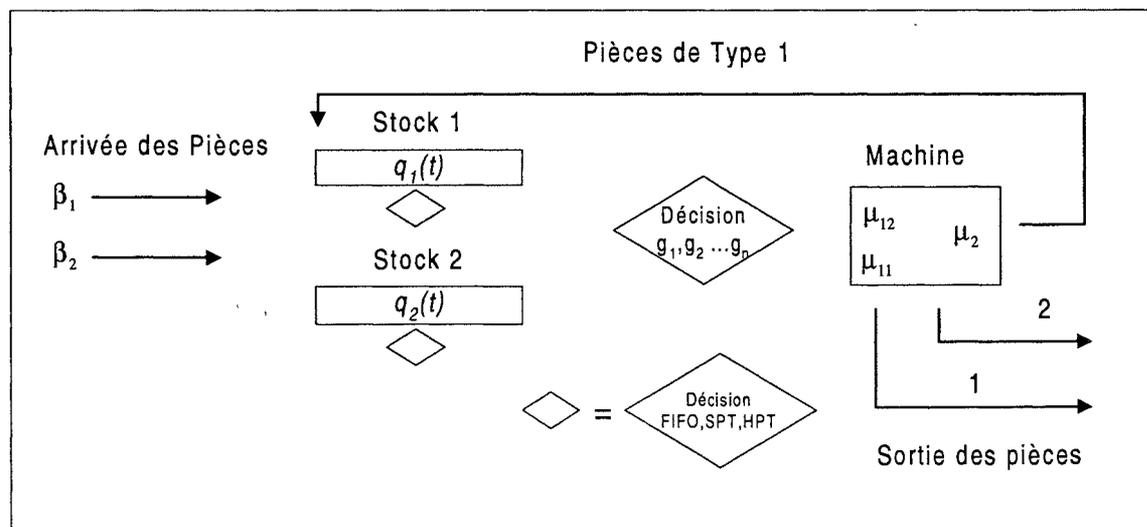


Figure 3.14 : schéma de fonctionnement de l'atelier.

### 3.5.3. Fonctionnement de l'atelier et règles de décision :

1) Pour la transformation complète de la pièce de type 1, il existe deux alternatives. La première consiste après l'opération 1, à ce que la pièce retourne dans la file d'attente, et entre à nouveau en concurrence avec les autres pièces pour la réalisation de sa deuxième opération. La seconde alternative consiste à considérer que les opérations 1 et 2 peuvent avoir lieu sans que la pièce n'ait à quitter la machine. Ceci revient au cas II traité dans la section précédente de ce chapitre et ne sera donc pas traité ici.

2) Pour la file d'attente associée aux pièces de type 1, nous emploierons successivement les règles suivantes : FIFO, SPT et HPT. Pour les pièces de type 2, l'arrangement de la file d'attente n'a aucune importance puisqu'elles ne subissent qu'une seule opération.

3) Le fonctionnement de la machine sera testé avec les fonctions de décision suivantes qui sont dans la pratique couramment utilisées :

a )  $g_1$  : cette fonction consiste à choisir le type de pièce existant en plus grand nombre.

b)  $g_2$  : la machine travaille de manière cyclique avec un type de pièce pendant un intervalle de temps proportionnel à la quantité de pièces en attente, selon la fonction :

$$\Delta t_i = \frac{k q_i(t)}{\sum q_j(t)}$$

où  $k$  est une constante arbitraire. Nous utiliserons  $k = 1$ .

c)  $g_3$  : la machine travaille de manière cyclique avec un type de pièce pendant un intervalle de temps égal au temps nécessaire à l'achèvement du stock estimé à l'instant de la décision.

d)  $g_4$  : la machine travaille de manière cyclique pendant un intervalle de temps  $T$  constant, mais si, pendant cet intervalle le stock se vide, la machine choisit alors l'autre stock.

### 3.5.4. Analyse des résultats des simulations :

Le tableau 3.2 montre sous forme synthétique l'ensemble des expériences réalisées à partir des règles choisies.

Règles pour la file d'attente 1 (stock 1)	Fonction de décision de machines			
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
SPT	1	4	7	10
FIFO	2	5	8	11
HPT	3	6	9	12

Tableau 3.2 : ensemble des expériences.

Les résultats obtenus se résument dans les figures ci-dessous. Elles montrent l'évolution de la moyenne temporelle du stock d'un type de pièce (nous l'appellerons MTS dans la suite du document pour alléger la notation). Nous présentons ici un seul cas pour chaque fonction  $g_i$ . Les autres cas associés à chacune des fonctions se trouvent exposés dans l'annexe 1.

#### 3.5.4.1. Expériences avec la fonction $g_1$ (1, 2 et 3) :

Pour ces trois expériences où nous avons employé la fonction  $g_1$ , les résultats sont similaires. Dans ces cas, MTS tend pratiquement vers une valeur fixe, avec de petites oscillations périodiques, comme le montre la figure 3.15.

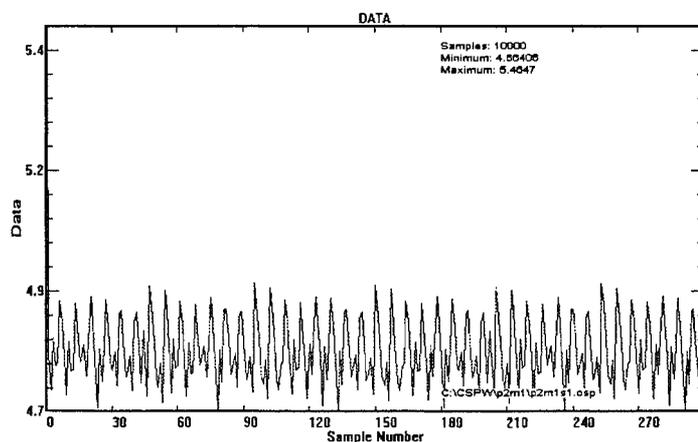


Figure 3.15 : résultat de simulation avec utilisation de la règle SPT et la fonction  $g_1$ .

Ces résultats sont dus au fonctionnement même du système. En effet, la machine cesse de travailler avec un stock pour se diriger automatiquement vers celui ayant le plus grand

nombre de pièces. L'opération se répète de façon systématique. La machine empêche ainsi d'importantes fluctuations dans les quantités de pièces de chaque stock.

### 3.5.4.2. Expériences avec la fonction $g_2$ (4, 5 et 6) :

En utilisant la fonction  $g_2$  et les règles SPT, FIFO et HPT, nous avons constaté que le comportement du système est chaotique. Nous montrerons ici les résultats de l'expérience 5.

Nous savons que pour caractériser la dynamique d'un système, il suffit d'une seule série temporelle. Nous avons choisi celle qui correspond au stock de pièces du type 2 devant la machine 1. La figure 3.16 montre l'évolution de cette série.

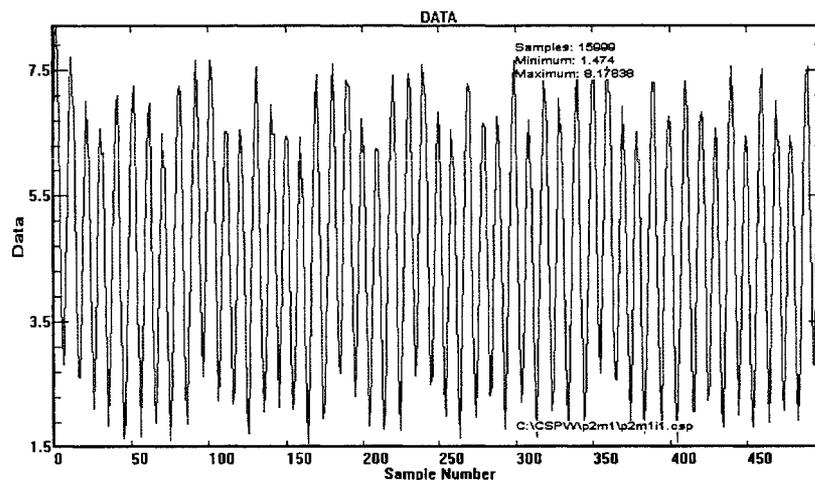


Figure 3.16 : évolution de la moyenne temporelle du stock des pièces de type 2.

Dans ce cas, nous constatons que l'évolution de la série nous semble erratique, autrement dit, qu'il n'y a pas de période. Les rangs de variation des variables dépendent dans ce cas, des paramètres employés. En effet, si nous utilisons une valeur de  $k$  supérieure à 1, les fluctuations seront plus grandes.

Nous adopterons la démarche présentée dans le chapitre 1 servant à déterminer les caractéristiques de la dynamique du système.

#### a) Premières analyses : le spectre de Fourier et la fonction d'autocorrélation

La figure 3.17 montre un spectre continu duquel émergent des raies élargies, ceci indique que le signal a un nombre infini de fréquences c'est-à-dire que la série n'est pas périodique.

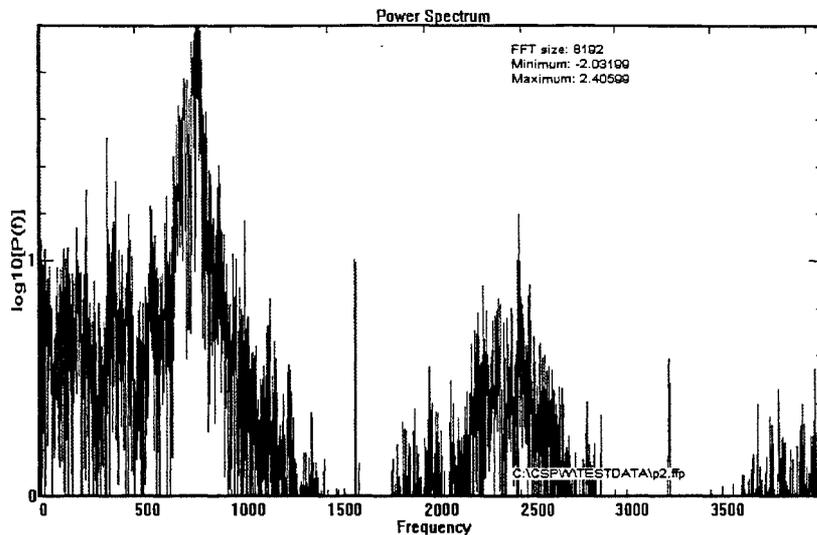


Figure 3.17 : spectre de puissance du signal.

Si nous comparons ce spectre avec le spectre d'un signal aléatoire et d'un signal périodique (figures 3.18a et 3.18b) nous observons que pour le cas du signal aléatoire, il n'y a pas de fréquence "dominante", et dans le cas d'un signal périodique (c'est le cas de la fonction  $g_1$  et de la règle SPT), il est composé de raies.

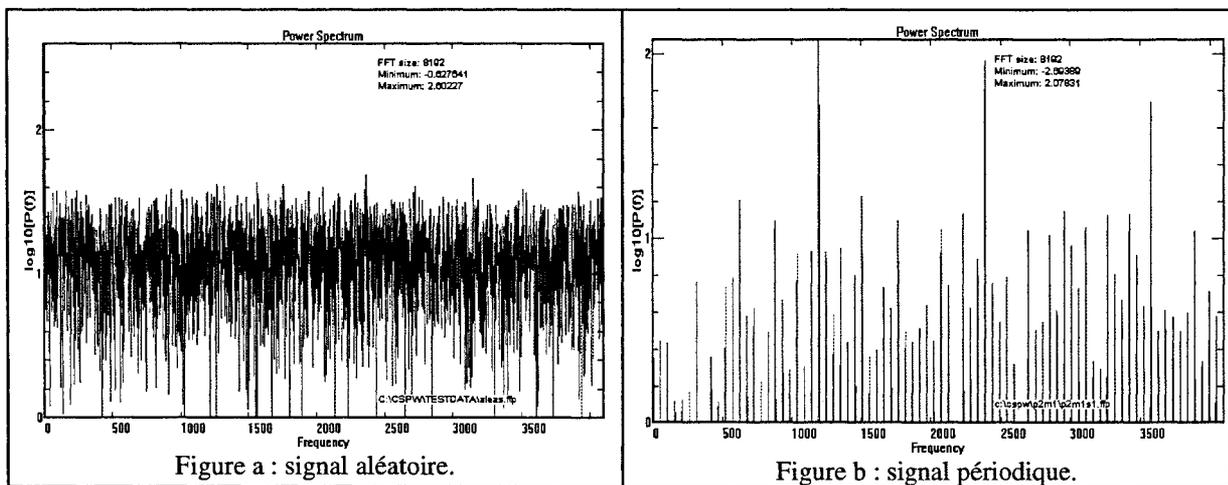


Figure 3.18 : spectre de Fourier pour deux types de signal

Donc, on constate que la dynamique du système se trouve entre une dynamique tout à fait aléatoire et une dynamique périodique. Ces résultats sont déjà très surprenants, car notre système est tout à fait déterministe.

La figure 3.19 montre la fonction d'autocorrélation. On peut voir que le signal présente une certaine régularité qui diminue au cours du temps.

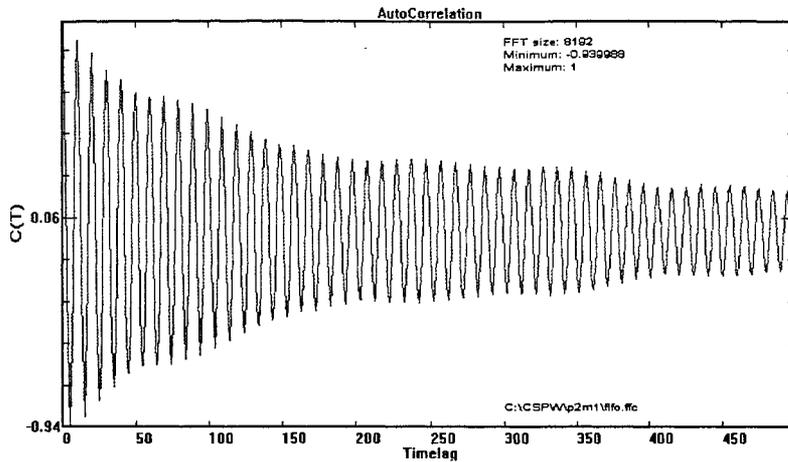


Figure 3.19 : fonction d'autocorrélation.

A partir de ces résultats, nous constatons que la dynamique est effectivement erratique. En effet, le spectre de puissance est continu et la fonction d'autocorrélation décroît avec le temps.

### b) Reconstruction de l'espace de phase

Pour reconstruire l'espace de phases, nous déterminons le retard optimum et la dimension de plongement. La figure 3.20 montre l'obtention du retard optimum avec l'utilisation de la fonction d'information mutuelle. Le graphique représenté figure 3.21 permet l'obtention de la dimension de plongement.

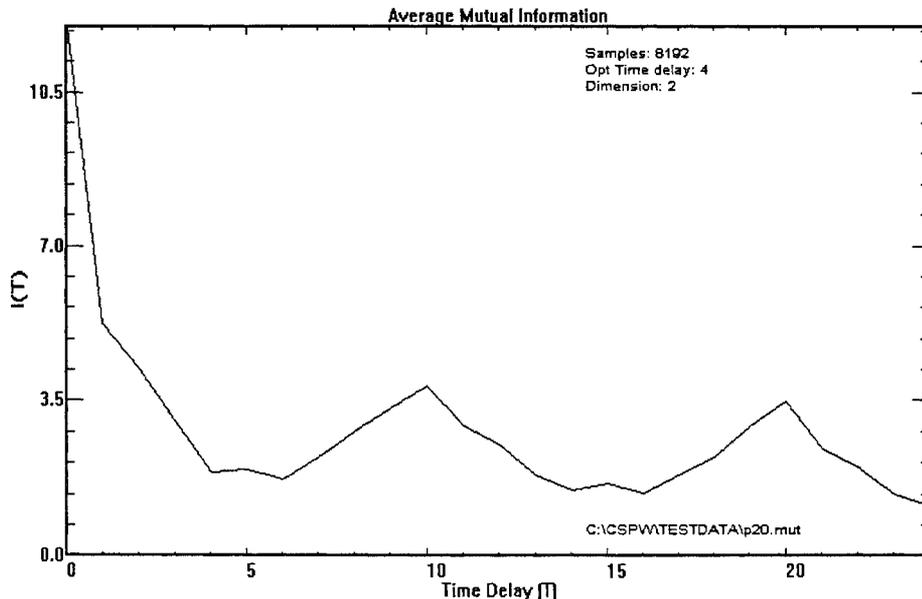


Figure 3.20 : fonction d'information mutuelle.

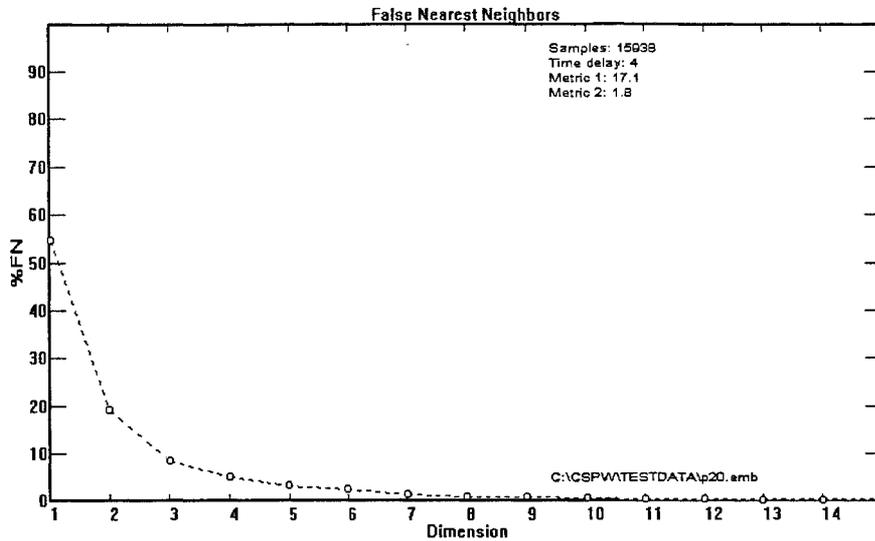


Figure 3.21 : pourcentage des faux voisins.

Nous avons obtenu un temps de retard égal à 4 et une dimension de plongement égale à 11 (ou le pourcentage de faux voisins est zéro). Cette dimension est grande, mais la dimension locale (cf figure 3.26) est de 3. Cette valeur implique que l'attracteur du système peut avoir une certaine structure géométrique dans un espace à trois dimensions.

**c) Estimation de la dimension fractale**

Nous estimerons la dimension fractale à partir de la dimension de corrélation  $D_2$  d'après la méthode de P. Grassberger et I. Procaccia. Pour déterminer la dimension de corrélation  $D_2$ , prenons le retard  $\tau$  estimé auparavant, puis calculons  $D_2$  pour différentes valeurs de la dimension de plongement  $d$ . Nous savons qu'à partir d'une certaine valeur de  $d$ ,  $D_2$  est indépendante de  $d$ .

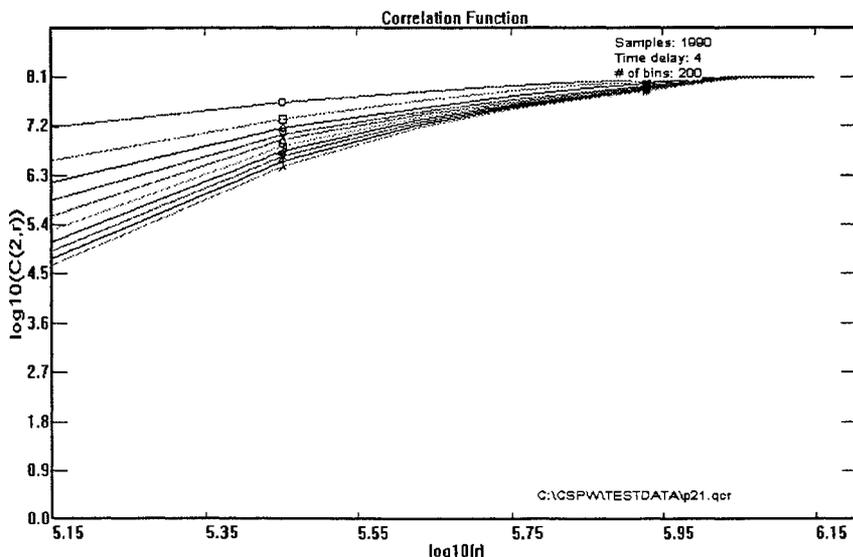


Figure 3.22 : fonction de corrélation de dimension.

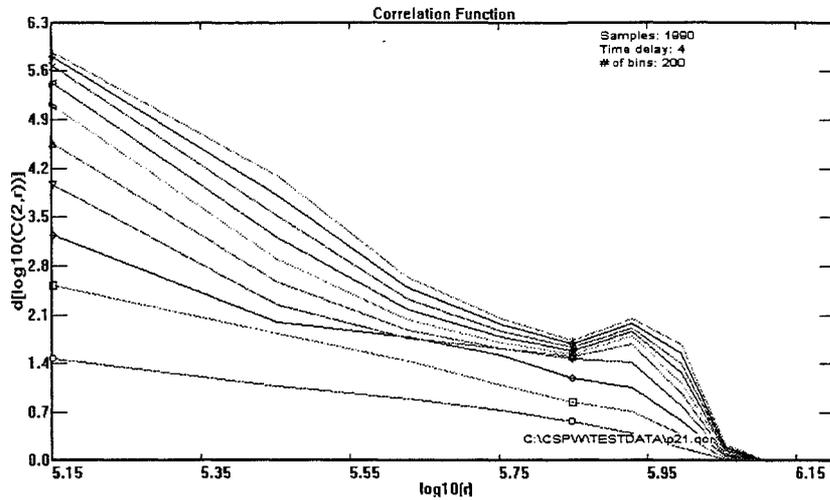


Figure 3.23 : estimation de la dimension fractale de l'attracteur à travers la dimension de corrélation.

Nous constatons sur la figure 3.22 qu'à partir d'une dimension de plongement égale à 5, la fonction de corrélation de dimension est indépendante de la dimension de plongement. Sur la figure 3.23, nous voyons qu'une estimation approximative de la dimension fractale est de 2,1.

#### d) L'attracteur et la section de Poincaré

Les figures 3.24 et 3.25 montrent la reconstruction de l'attracteur et de la section de Poincaré. Le schéma confirme que l'attracteur présente effectivement une certaine structure géométrique dans l'espace de phases à trois dimensions.

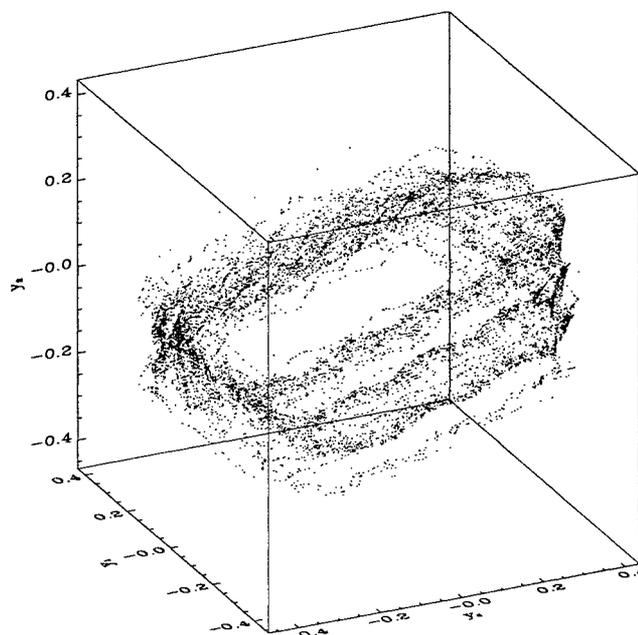


Figure 3.24 : l'attracteur du système dans un espace de phases à trois dimensions.

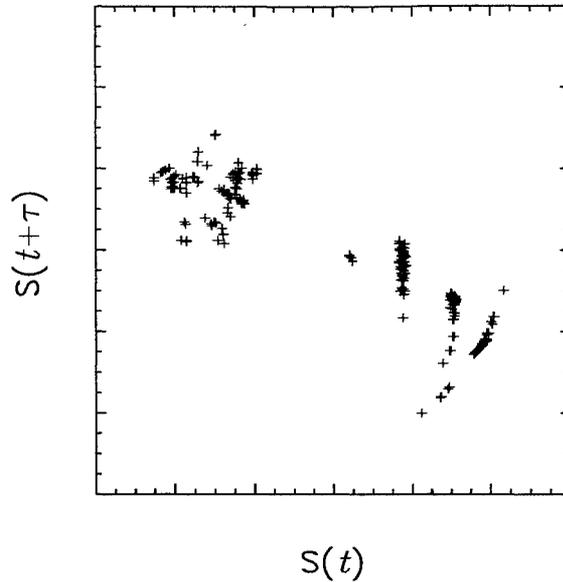


Figure 3.25 : section de Poincaré.

La section de Poincaré montre que l'attracteur passe par une certaine région de l'espace de phase. Ceci est une des manifestations d'un comportement chaotique et permet de le distinguer d'un comportement aléatoire.

**e) La dimension locale et les exposants de Lyapunov**

Comme nous l'avons déjà dit, une des manières de mesurer la sensibilité aux conditions initiales s'effectue à l'aide des exposants de Lyapunov. Pour déterminer ces exposants, nous devons d'abord faire une estimation de la dimension locale de la dynamique. Pour cela, nous pouvons employer la technique des faux voisins locaux ou estimer la dimension en utilisant le premier entier supérieur à la dimension fractale [HIL.94]. La figure 3.26 montre l'estimation de la dimension locale à travers la technique des faux voisins locaux.

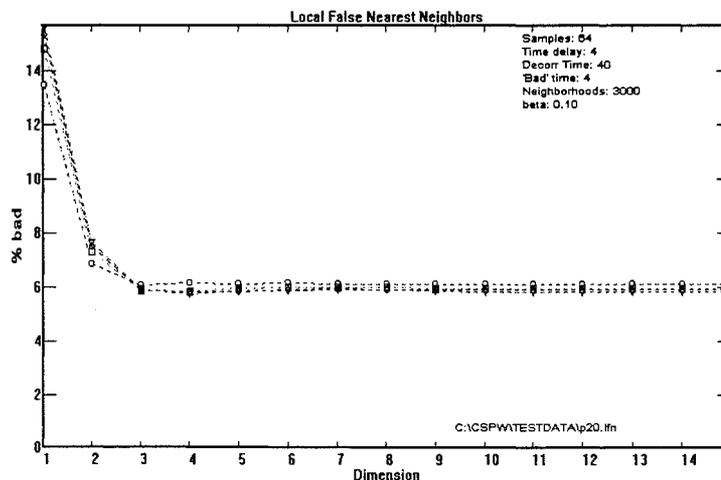


Figure 3.26 : estimation de la dimension locale.

La figure 3.26 montre que le pourcentage de mauvaises prédictions se maintient constant à partir de la dimension 3. Cela signifie que la dimension locale est égale à 3. Ce résultat confirme l'estimation faite à partir de la dimension fractale.

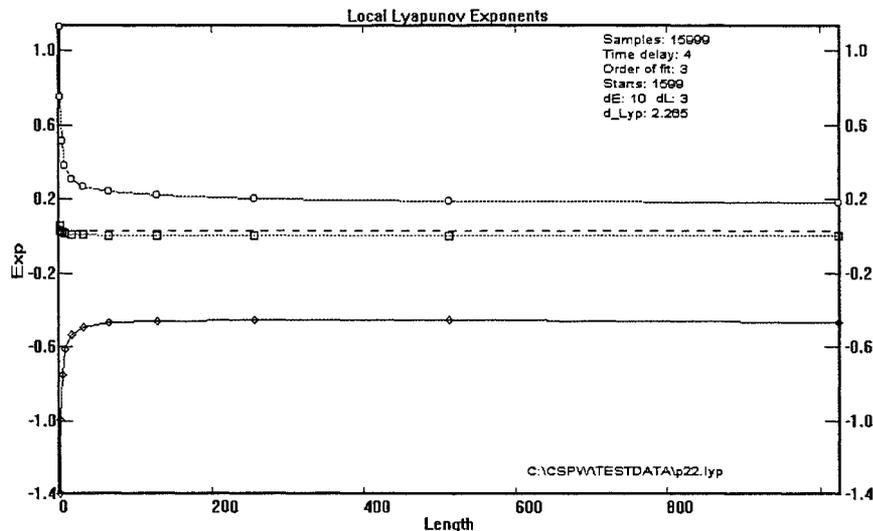


Figure 3.27 : les exposants de Lyapunov.

Sur la figure 3.27, nous voyons qu'il y a un exposant positif :  $\lambda_1 = 0,15$  et deux exposants négatifs :  $\lambda_2 = -0,0257$  et  $\lambda_3 = -0,496$ . La valeur de la dimension de Lyapunov (conjecture de Yorke-Kaplan) est de 2,265. Elle est supérieure à celle que nous avons obtenue par la méthode de Grasberger et Procaccia.

L'existence d'un exposant positif nous permet d'affirmer que la dynamique du système est chaotique.

Les résultats pour les règles SPT et HPT sont similaires aux résultats précédents et se trouvent dans l'annexe 1.

### 3.5.4.3. Expériences avec la fonction $g_3$ (7, 8 et 9) :

Les figures suivantes résument les résultats obtenus où nous avons utilisé la fonction  $g_3$  et la règle SPT. Pour les règles FIFO et HPT, les résultats sont dans l'annexe 1.

Dans ce cas, la machine travaille dans un intervalle de temps variable avec chaque type de pièce. Cet intervalle est une fonction linéaire des longueurs des files d'attentes et cependant, nous voyons que la dynamique des stocks est erratique.

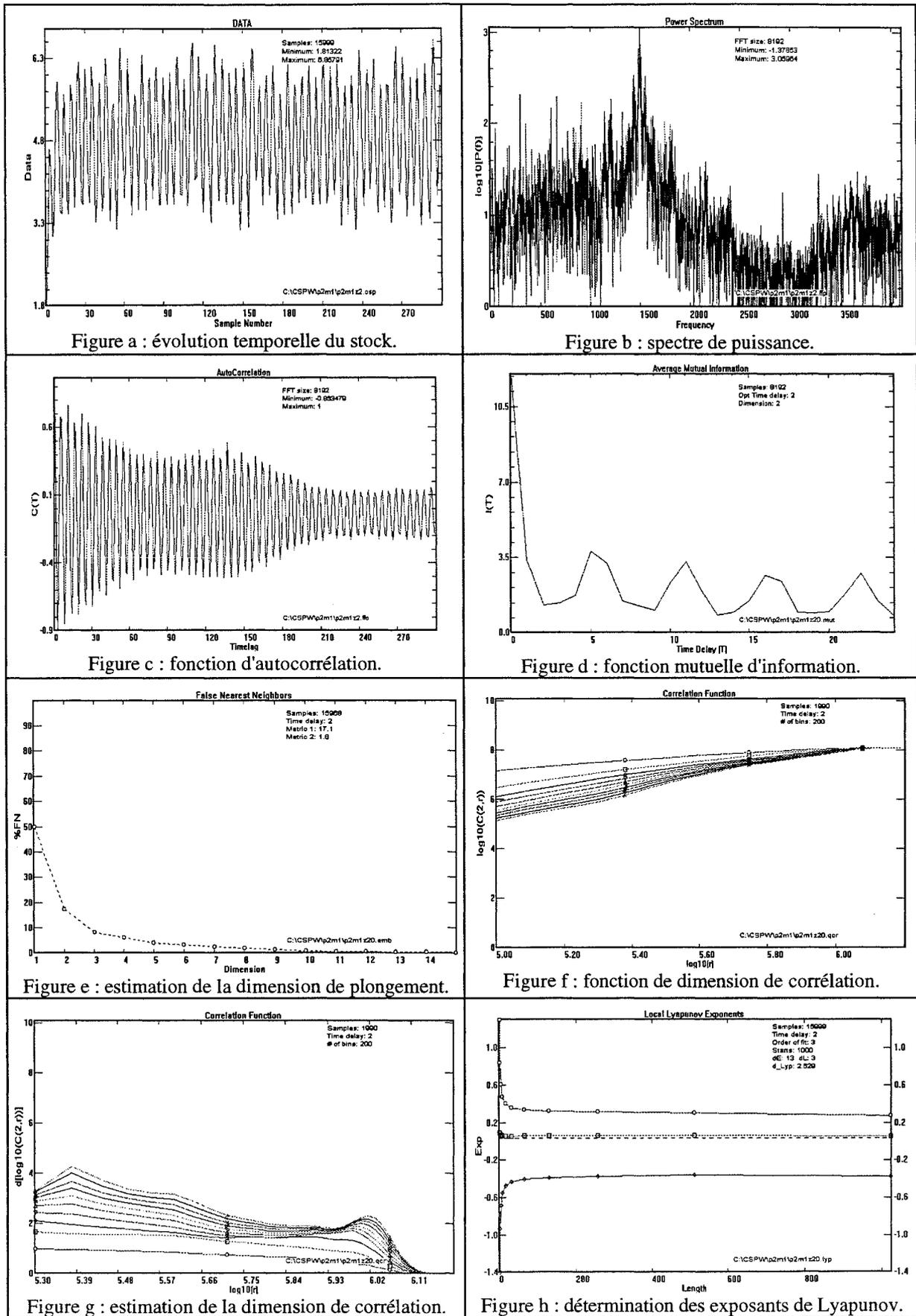


Figure 3.28 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_3$  et la règle SPT.

La figure 3.28b montre un spectre semblable au cas précédent, c'est-à-dire, continu et composé de longues raies. Cela implique que la dynamique du système est irrégulière et qu'il n'y a pas un patron identique. La conclusion est la même pour la figure 3.28c où nous constatons que la fonction d'autocorrélation décroît avec le temps, mais le signal maintient une certaine régularité.

Les premières analyses nous montrent donc que le système a un comportement irrégulier. Sur la figure 3.28d, nous avons obtenu le retard optimum en utilisant la fonction d'information mutuelle : sa valeur est de 2 et elle est inférieure au cas précédent (4).

Sur la figure 3.28e nous avons obtenu la dimension de plongement. Comme dans le cas précédent, la valeur de celle-ci est grande, approximativement 12 ou 13. Cependant la valeur de la dimension locale est 3. En effet, comme nous le voyons dans la figure 3.28g, l'estimation de la dimension fractale est de 2,1.

La figure 3.28h montre la détermination des exposants de Lyapunov. Nous constatons qu'il y a une très bonne convergence.

L'estimation de la dimension fractale de l'attracteur par la dimension de Lyapunov est égale à 2,629 et les valeurs des exposants sont :  $\lambda_1 = 0,237$ ,  $\lambda_2 = 0,0194$  et  $\lambda_3 = -0,408$ . A partir de ces résultats, nous pouvons donc affirmer que le système a un comportement chaotique.

#### **3.5.4.4. Expériences avec la fonction $g_4$ (10, 11 et 12) :**

En utilisant la fonction  $g_4$  et les règles SPT, FIFO et HPT, nous avons observé que la dynamique du système est aussi chaotique. Voici les résultats des simulations où nous avons employé la règle HPT.

Dans ce cas, la machine travaille avec un intervalle de temps relativement constant avec chaque type de pièce. En effet, il varie si le stock se vide pendant cet intervalle. Nous remarquons aussi que le système a une dynamique erratique.

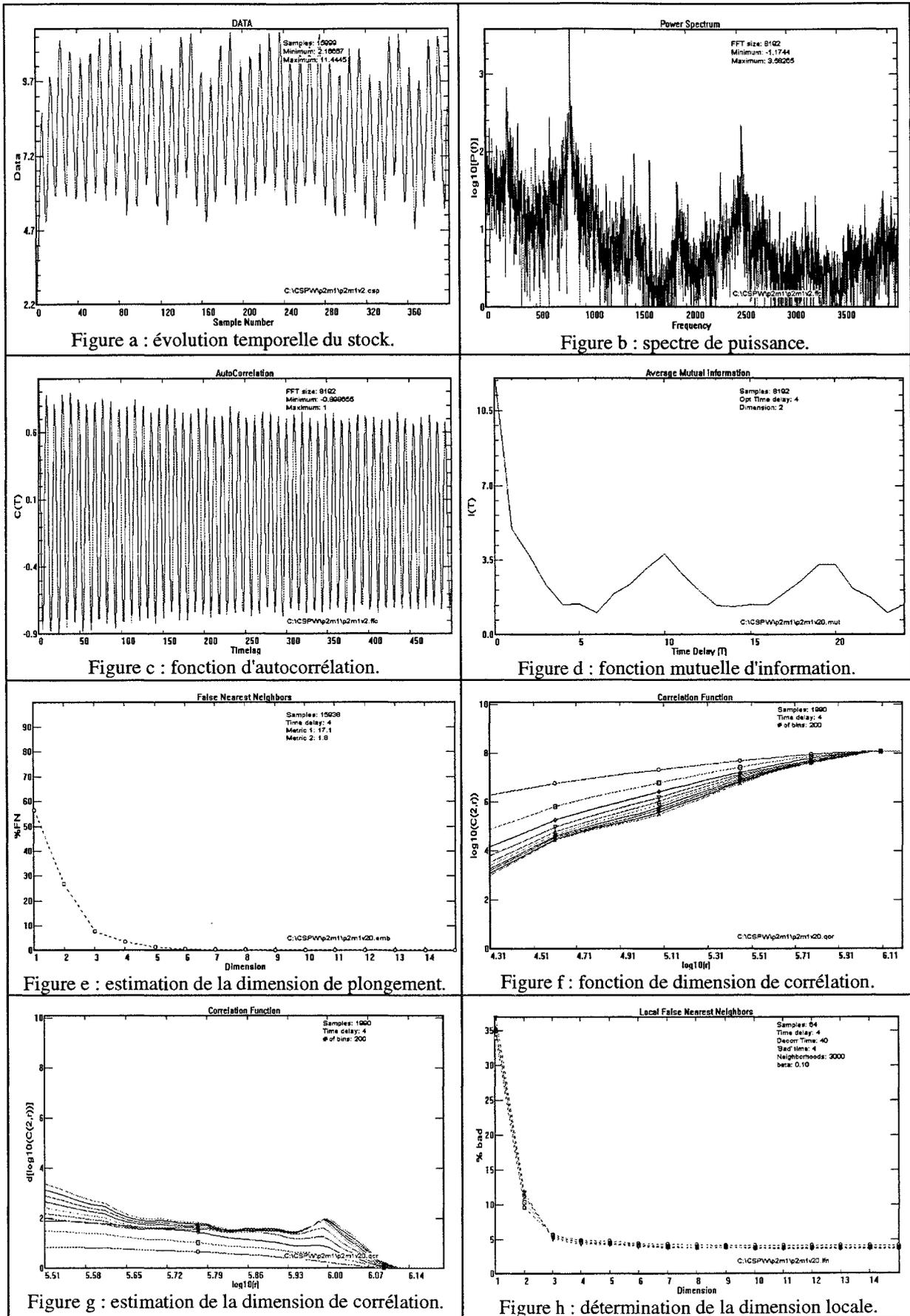


Figure 3.29 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_4$  et la règle HPT.

La figure 3.29b montre le spectre de Fourier. Nous constatons qu'il est continu, comme dans le cas précédent, avec les mêmes propriétés.

La figure 3.29c montre la fonction d'autocorrélation. Nous observons que dans ce cas la fonction d'autocorrélation présente une régularité supérieure aux cas antérieurs. D'ailleurs, nous savons que pour certains systèmes chaotiques, comme le système de Rössler [RÖS.76] par exemple, les séries temporelles manifestent également une régularité.

La figure 3.29d montre l'obtention du retard optimum. Nous avons obtenu une valeur de 4, chaque composant du vecteur qui décrit l'attracteur se trouve donc décalé en 4 unités de temps.

La figure 3.29e montre l'obtention de la dimension de plongement. A la différence des cas précédents, nous obtenons ici une dimension de 7. Cela implique qu'un espace de 7 dimensions peut contenir complètement l'attracteur.

La figure 3.29f montre l'obtention de la fonction de dimension de corrélation. Nous voyons que celle-ci devient indépendante de la dimension de plongement à partir d'une dimension égale à 6.

Sur la figure 3.29g, nous avons une estimation de la dimension fractale de l'attracteur par la dimension de corrélation avec une valeur de 2,1 comme dans les cas précédents. A partir de cette valeur, nous estimons que la dimension locale de la dynamique est 3, valeur confirmée par la méthode des faux voisins locaux (cf figure 3.29h).

Sur la figure 3.30, nous présentons les exposants de Lyapunov. Nous voyons qu'il y a une très bonne convergence des exposants.

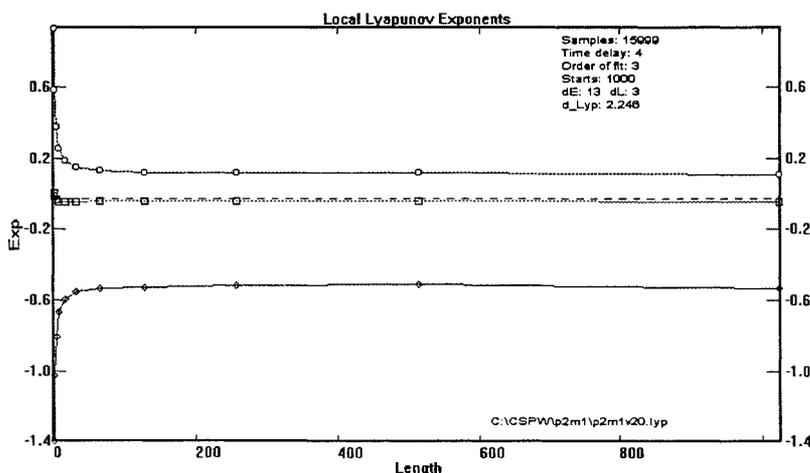


Figure 3.30 : détermination des exposants de Lyapunov.

L'estimation de la dimension fractale par la dimension de Lyapunov est de 2,246 et les valeurs des exposants sont :  $\lambda_1 = 0,139$ ,  $\lambda_2 = -0,01507$  et  $\lambda_3 = -0,5026$ . La présence d'un exposant positif, nous indique que la dynamique du système est chaotique et une dimension fractale non entière indique que l'attracteur est "étrange".

### 3.5.5. Introduction des temps de reconfiguration et de transport :

Nous nous intéressons maintenant à la même structure d'atelier que dans le cas précédent (cf paragraphe 2.3) avec un type de règle de gestion de file d'attente (FIFO) et une fonction de décision machine (g2) (cas n°5). Nous allons ici faire intervenir les temps de reconfiguration machine entre chaque opération, ainsi que les temps de transport des pièces, afin de déterminer l'influence de ces paramètres dans la conduite chaotique du système. Ceux-ci avaient jusqu'alors été considérés comme nuls ou inclus dans le temps d'usinage.

Nous avons dans un premier temps étudié l'influence de ces deux types de temps de manière séparée. Dans ces deux cas, nous avons trouvé que le comportement du système est aussi chaotique.

Enfin, nous avons étudié l'effet combiné de ces deux facteurs. Les temps de reconfiguration de la machine pour le passage d'une opération à une autre sont présentés dans la matrice  $Tc$  suivante :

$$Tc = \begin{matrix} & \begin{matrix} O_{11} & O_{12} & O_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} O_{11} \\ O_{12} \\ O_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0,01 & 0,005 \\ 0,02 & 0 & 0,003 \\ 0,01 & 0,007 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cette matrice est non symétrique, ainsi le temps de configuration pour passer d'une opération  $O_k$  à une opération  $O_l$  n'est pas obligatoirement identique à celui pour passer de l'opération  $O_l$  à l'opération  $O_k$ .

Le temps de transport des pièces de la machine vers le stock est constant et de valeur 0,1 unité de temps.

Les figures suivantes résument les principaux résultats. La figure 3.31a montre l'évolution du stock de pièces de type 1. Nous constatons que la dynamique dans ce cas est plus complexe que dans le cas vu précédemment (cas n°5).

La figure 3.31b montre le spectre de Fourier. Nous remarquons que le spectre est continu comme dans le cas n°5.

La figure 3.31c montre l'estimation de la dimension de plongement qui est 11, cela veut dire qu'un espace de 11 dimensions contient l'attracteur du système. La figure 3.31e montre qu'une estimation de la dimension fractale par l'intermédiaire de la dimension de corrélation est de 2,6.

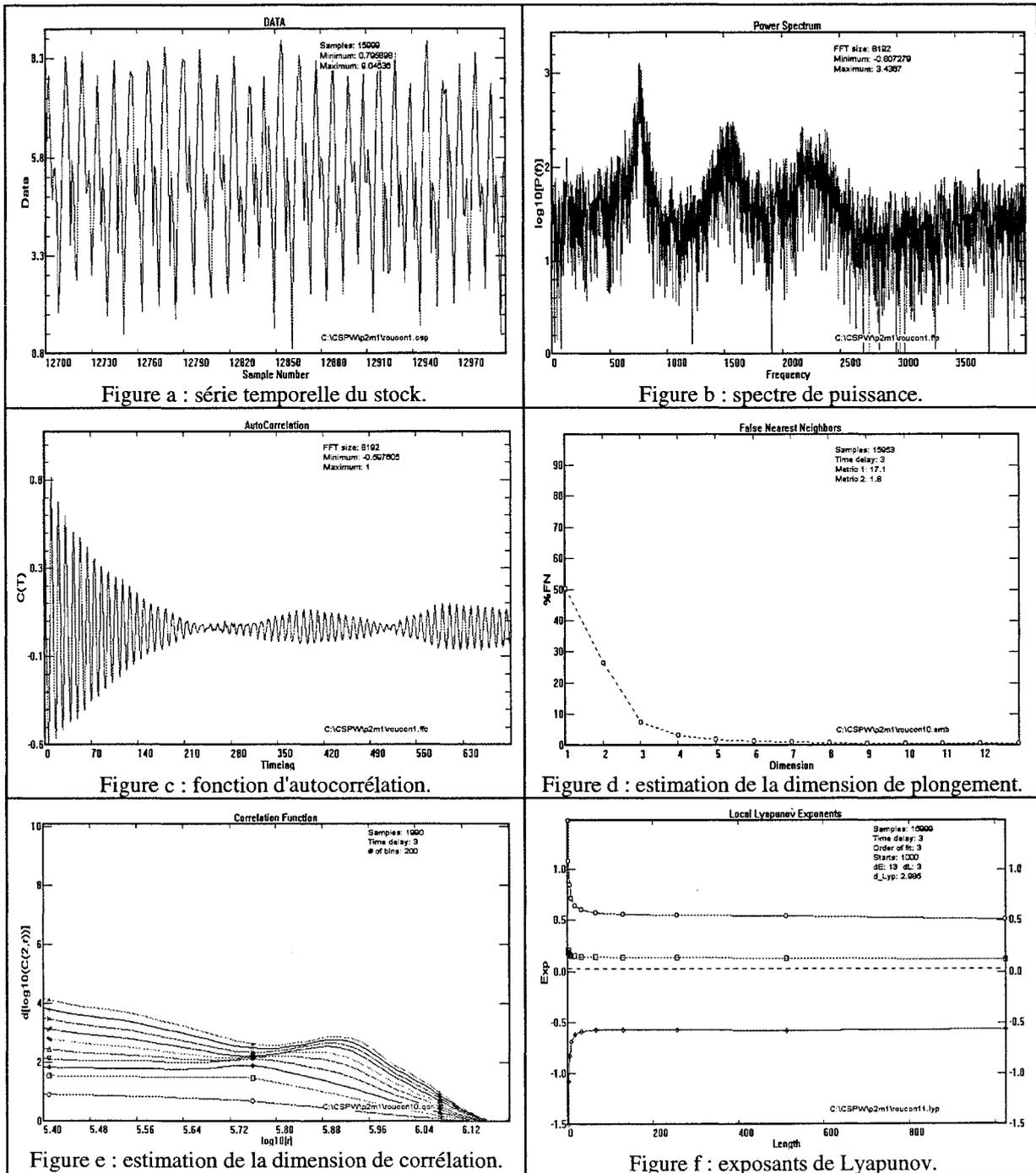


Figure 3.31 : résultats obtenus pour le cas où nous avons introduit les temps de reconfiguration et de transport.

La figure 3.31f montre les exposants de Lyapunov, les valeurs sont :  $\lambda_1 = 0,485$ ,  $\lambda_2 = 0,0941$  et  $\lambda_3 = -0,588$ , et la valeur de la dimension fractale estimée par la dimension de Lyapunov est de 2,905. Ces résultats impliquent que la dynamique du système est chaotique.

En première conclusion, on peut dire que l'introduction des temps de reconfiguration et de transport ne modifient en rien le caractère chaotique du système. Nous allons préciser cette conclusion dans la partie suivante.

### 3.6. Résumé et conclusions

1. Nous constatons qu'un système déterministe très simple peut avoir un comportement complexe, c'est-à-dire chaotique.

2. Dans ce système, les règles de gestion de la file d'attente des pièces de type 1 n'ont aucune influence significative sur les résultats. C'est la fonction de décision de la machine qui détermine le comportement du système. Lorsque la machine utilise la fonction  $g_1$  (elle consiste à choisir le type de pièce existant en plus grand nombre) le système tend vers un point fixe avec un mouvement périodique autour de cette valeur. Dans les autres cas, le comportement a été chaotique. Le tableau 3.3 donne un résumé des résultats obtenus :

Règles pour la file d'attente 1 (stock 1)	Fonction de décision de machines			
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
SPT	point fixe	chaotique	chaotique	chaotique
FIFO	point fixe	chaotique	chaotique	chaotique
HPT	point fixe	chaotique	chaotique	chaotique

Tableau 3.3 : résultats obtenus.

3. Le tableau 3.4 montre les exposants de Lyapunov positifs les plus élevés pour chaque cas. La valeur de cet invariant de la dynamique ne change pas de façon significative pour les cas où l'on utilise la même fonction de décision pour la machine. Nous présentons donc un cas par fonction de décision.

Règles	Exposants
FIFO- $g_2$	0,157
SPT- $g_3$	0,237
HPT- $g_4$	0,139
FIFO- $g_2^*$	0,485

Tableau 3.4 : exposants de Lyapunov, (\*) avec temps de configuration et de transport.

Nous pouvons mesurer la complexité de la dynamique avec la valeur de l'exposant de Lyapunov (dans le cas où il y a seulement un exposant positif). Nous pouvons conclure que dans les cas où nous avons une seule machine, l'utilisation de la fonction  $g_3$  (la machine travaille avec un type de pièces pendant un intervalle de temps égal au temps estimé nécessaire à l'usinage de toutes les pièces se trouvant dans cet instant devant la machine) rend la dynamique plus complexe. Cependant, lorsque nous avons introduit les temps de reconfiguration et les temps de transport, nous observons que l'exposant de Lyapunov est significativement supérieur aux autres cas. Ce résultat a toute son importance, car le fait de prendre en compte ces deux temps augmente la complexité du système, donc faciliterait notre travail de mise en évidence du chaos. Quand bien même nous simplifierions le système en excluant ces deux temps, nous serions toujours face à une dynamique complexe.

Comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre 1, il n'y a pas de théorie qui permette de savoir dans quelle circonstance nous pouvons avoir une dynamique chaotique [HIL.94]. D'une part, un système ayant un comportement tout à fait régulier peut changer brusquement son comportement suite à un changement de l'un de ses paramètres. D'autre part, un système ayant un comportement chaotique possède des points de départ, ou des conditions initiales, à partir desquelles il va se comporter de façon tout à fait régulière, c'est-à-dire périodique [FEI.93]. Le problème est donc très compliqué lorsque nous voulons caractériser la dynamique d'un système. En effet, il faut réaliser un grand nombre de simulations et de tests pour divers ensembles de paramètres et pour différentes conditions initiales. Dans notre cas, ceci est particulièrement difficile, car les règles, les fonctions de décision et les paramètres font exploser la combinatoire du problème. Ainsi, chaque résultat présenté est le fruit d'un grand nombre de simulations et de tests.

Nous avons vu que le système tend vers un point fixe lorsque nous utilisons la fonction  $g_1$ . Nous obtenons le même comportement lorsque nous introduisons les temps de configuration entre chaque opération et un temps de transport. Nous avons également constaté ce même comportement, dans le cas d'une file d'attente unique devant la machine gérée avec les règles FIFO, SPT ou HPT.

Donc, on peut se poser la question suivante par rapport à ces derniers résultats : un système plus complexe, avec plusieurs machines et plusieurs types de pièces va-t-il avoir le même comportement ? Nous étudierons dans le prochain chapitre un système de cette nature et nous constaterons des résultats inverses, c'est-à-dire des comportements dynamiques plus complexes que dans les cas où les fonctions de décision  $g_2$ ,  $g_3$  et  $g_4$  ont été utilisées.

## Chapitre 4

### Analyse du comportement dynamique d'un atelier flexible de production automatisé

#### 4.1. Introduction

Nous consacrerons cette partie à la modélisation et à l'analyse d'un système de production plus complexe. Complexe car, en effet, un nombre de composants et d'interactions est supérieur aux cas précédents. L'analyse consistera à étudier le comportement dynamique du système lors de l'emploi de différents types de règles et de fonctions de décision. A priori, rien ne nous laisse supposer, que pour un système plus complexe les mêmes causes ont les mêmes effets, à savoir que tel type de règle de décision conduit à un comportement chaotique.

#### 4.2. Variables et paramètres

- 1) Un ensemble de  $M$  machines flexibles  $\{1, \dots, i, \dots, M\}$  et un ensemble de  $N$  types de pièces  $\{1, \dots, j, \dots, N\}$  qui arrivent sur le système pour être transformées.
- 2) Chaque pièce  $j$  doit subir un ensemble d'opérations  $O_{kj}$  où  $k = \{1, \dots, L_j\}$
- 3) Chaque opération  $O_{kj}$  possède différentes alternatives de fabrication représentées par un sous-ensemble de machines  $S_{kj} \subseteq M$ .
- 4) Soit  $\beta_j$  le taux d'arrivée des pièces de type  $j$ .
- 5) Soit  $\mu_{kij}$  le taux d'usinage de l'opération  $k$  dans la machine  $i$  des pièces de type  $j$ .
- 6) Soit  $q_{ij}(t)$  le nombre de pièces de type  $j$  devant la machine  $i$ .

#### 4.3. Schéma du système

Nous étudierons un atelier particulier composé de trois machines flexibles et de trois types de pièce. Le schéma de principe est présenté figure 4.1.

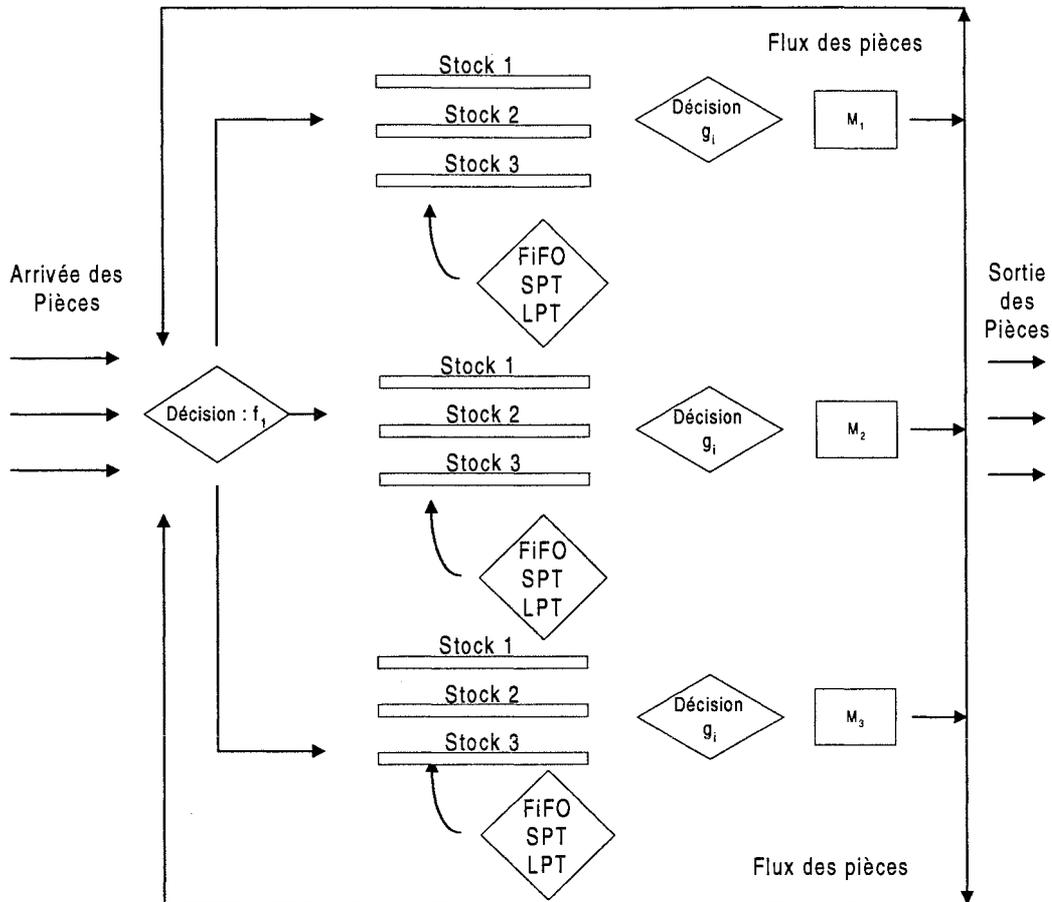


Figure 4.1: schéma général de fonctionnement de l'atelier.

#### 4.4. Fonctionnement de l'atelier

1) Le tableau 4.1 montre les temps et les alternatives de fabrication. Par exemple, l'opération 2 de la pièce de type 1 peut être usinée sur les machines 1 et 2. Nous supposons que les temps de reconfiguration des machines entre les opérations sont négligeables, ou fixes et inclus dans le temps d'usinage.

2) Le flux d'arrivée de chaque type de pièce  $\beta_j$  est constant pour ne pas introduire des composantes non linéaires ou stochastiques "extérieures" au système. Les pièces arrivent donc dans l'atelier selon un taux d'arrivée constant : 7,5 pièces de type I par unité de temps, 4,3 pièces de type II par unité de temps par exemple. Pour des raisons semblables, les taux d'usinage  $\mu_{kij}$  sont fixes et connus à l'avance.

3) La séquence des opérations pour chaque type de pièces est fixe. Autrement dit, il n'y a pas de flexibilité d'opération pour les pièces (opération 1, puis opération 2, puis opération 3).



Opérations	Machines		
Pièce type 1, $\beta_1=7.28$	M1	M2	M3
$O_{11}$	1/58	1/32	1/36
$O_{21}$	1/21	1/47	
$O_{31}$	1/60		4/105
Opérations	Machines		
Pièce type 2, $\beta_2=7.94$	M1	M2	M3
$O_{12}$	1/16		1/38
$O_{22}$		1/31	
$O_{32}$		1/58	
$O_{42}$	1/34		1/36
Opérations	Machines		
Pièce type 3, $\beta_3=15.81$	M1	M2	M3
$O_{13}$	1/32	1/22	1/57
$O_{23}$			1/49
$O_{33}$	1/42	1/38	1/40

Tableau 4.1 : alternatives d'usinage pour les opérations des différentes pièces.

4) Le rapport entre les taux d'arrivée et les taux d'usinage sera inférieur ou égal à 1. Cette condition est nécessaire pour s'assurer que le nombre de pièces dans le système ne tend pas vers l'infini. Nous travaillerons donc avec des systèmes stables.

5) Lorsqu'une pièce arrive sur le système, celle-ci choisit une machine en fonction de critères préalablement déterminés. Dans notre simulation, une pièce choisit la machine selon deux critères : capacité de la machine à réaliser l'opération en attente et niveau minimum de stock. Ce processus est réitéré après chaque opération jusqu'à la sortie du système. La gamme opératoire de chaque pièce est donc construite au fur et à mesure de l'évolution du système.

6) Si nous supposons que le flux de pièces est continu, alors nous pouvons écrire une expression analytique générale pour le stock  $j$  devant la machine  $i$ . Cette expression est ici uniquement destinée à montrer le caractère non linéaire de l'évolution de cette variable :

$$\frac{dq_{ij}(t)}{dt} = f_{i1}(q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, \bar{v}) + f_{i1}(q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, \bar{v})f_{i2}(q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, \bar{v}) + f_{i1}(q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, \bar{v})f_{i2}(q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, \bar{v})f_{i3}(q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, \bar{v}) + \dots + -g_i(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \bar{v})$$

où  $\bar{v} = (\text{vecteur de paramètres du système})$

Les fonctions  $f_{ik}$  représentent les fonctions de décision qui dirigent le flux des pièces. Les fonctions  $g_i$  représentent quant à elles les règles de décision qu'utilise la machine pour gérer ses niveaux de stockage et  $\vec{v}$  le vecteur de paramètres. Cependant, il est très difficile d'écrire dans des termes analytiques précis les règles de décision employées dans un système manufacturier. C'est par exemple le cas d'une machine qui gère ses stocks selon la règle SPT (Shortest Processing Time).

#### 4.5. Règles ou fonctions de décision

Plusieurs méthodes de gestion du système de production sont possibles. Il est en effet possible de mixer un nombre important de règles pour un même système de production. Pour nos simulations, nous distinguerons trois types de règles de décision : règle d'affectation, de gestion de file d'attente et de sélection.

La règle dite "d'affectation" consiste à choisir la machine devant effectuer l'opération :  
"Une pièce choisit la machine de destination parmi celles susceptibles de réaliser la prochaine opération selon un critère de niveau minimum de stock devant la machine".

Le second type de règle concerne la façon de gérer les files d'attentes, nous emploierons les règles suivantes : FIFO, SPT et HPT.

Le troisième type, nommé règle de "sélection", consiste à choisir le type de pièce à usiner et la quantité de temps durant lequel la machine va travailler avec ce type de pièce. Nous utiliserons les règles suivantes (note : dans chaque cas étudié nous redéfinissons les fonctions  $g_i$ ) :

a)  $g_1$  : Pour ce cas précis, on considère que la machine ne possède qu'une file d'attente. La sélection des pièces s'effectue selon trois possibilités : FIFO, SPT et HPT. Ici, règle de sélection et de gestion de file d'attente sont confondues.

b)  $g_2$  : chaque machine  $i$  travaille durant un intervalle de temps avec le type de pièce  $j$  existant en plus grand nombre dans le stock.

c)  $g_3$  : chaque machine travaille de manière cyclique avec un type de pièce, durant un intervalle de temps proportionnel au rapport du nombre de pièces de ce type et le nombre total des pièces en attente devant la machine  $i$ , selon :

$$\Delta t_{ij} = \frac{k q_{ij}(t)}{\sum_j q_{ij}(t)}$$

où  $k$  est une constante arbitraire. Nous utiliserons  $k = 1$  [unité de temps].

d)  $g_4$  : chaque machine travaille de manière cyclique avec un type de pièce, durant un intervalle de temps égal au temps nécessaire estimé à l'achèvement du stock au moment de la décision.

e)  $g_5$  : chaque machine travaille de manière cyclique pendant un intervalle de temps  $T$  constant. Mais, si pendant cet intervalle le stock se vide, la machine choisit alors un autre stock.

4) Le tableau 4.2 montre l'ensemble des expériences que nous étudierons à partir des règles choisies.

Numéro de l'expérience	Fonction de décision de machines				
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
Règles pour les files d'attente					
SPT	1	4	7	10	13
FIFO	2	5	8	11	14
HPT	3	6	9	12	15

Tableau 4.2 : ensemble des expériences.

## 4.6. Résultats et analyses des résultats des simulations

Nous présentons ici les résultats d'un seul cas pour chaque fonction de décision  $g_i$ . Les autres cas associés à chacune des fonctions se trouvent exposés dans l'annexe 2.

### 4.6.1. Expériences avec la fonction $g_1$ (1, 2 et 3) :

Ici, la machine travaille avec son stock de manière "directe". Pour ces trois expériences, les résultats obtenus sont similaires. La figure 4.2 montre les résultats obtenus lorsque la gestion des stocks est de type FIFO.

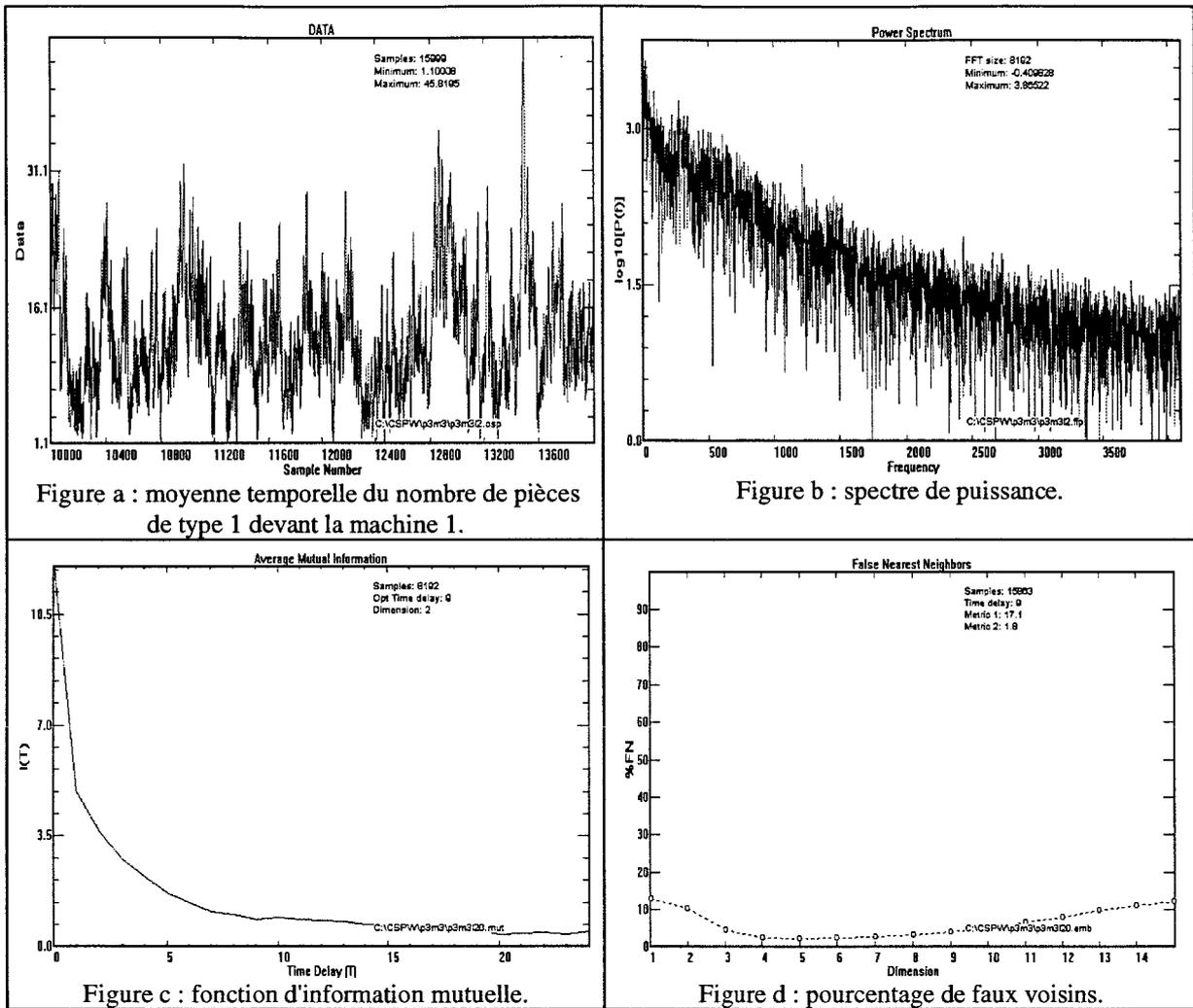


Figure 4.2 : résultats pour fonction  $g_1$  et FIFO

Nous constatons que la courbe du stock de pièces 1 est complètement erratique, il n'y a pas de patron qui se répète. En effet, la figure 4.2b montre le spectre de puissance où nous observons que celui-ci appartient à une dynamique "aléatoire" ou "bruit blanc".

Sur la figure 4.2c, nous obtenons le retard optimum dont la valeur est de 9. Avec cette valeur, nous pouvons essayer d'obtenir la dimension de plongement. La figure 4.2d montre qu'il n'existe pas une dimension de plongement pour laquelle le pourcentage de faux voisins est zéro. Ceci implique qu'il n'existe pas de dimension contenant l'attracteur du système. En d'autres termes, le degré de liberté du système est grand.

Nous avons fait plusieurs simulations avec différents paramètres, en travaillant toujours dans des conditions d'équilibre. S'il est vrai que les courbes sont très différentes, les résultats, eux, d'un point de vu qualitatif ont été similaires. En effet, le système a un comportement erratique.

### 4.6.2. Expériences avec la fonction $g_2$ (4, 5 et 6) :

La figure 4.3 montre les résultats obtenus :

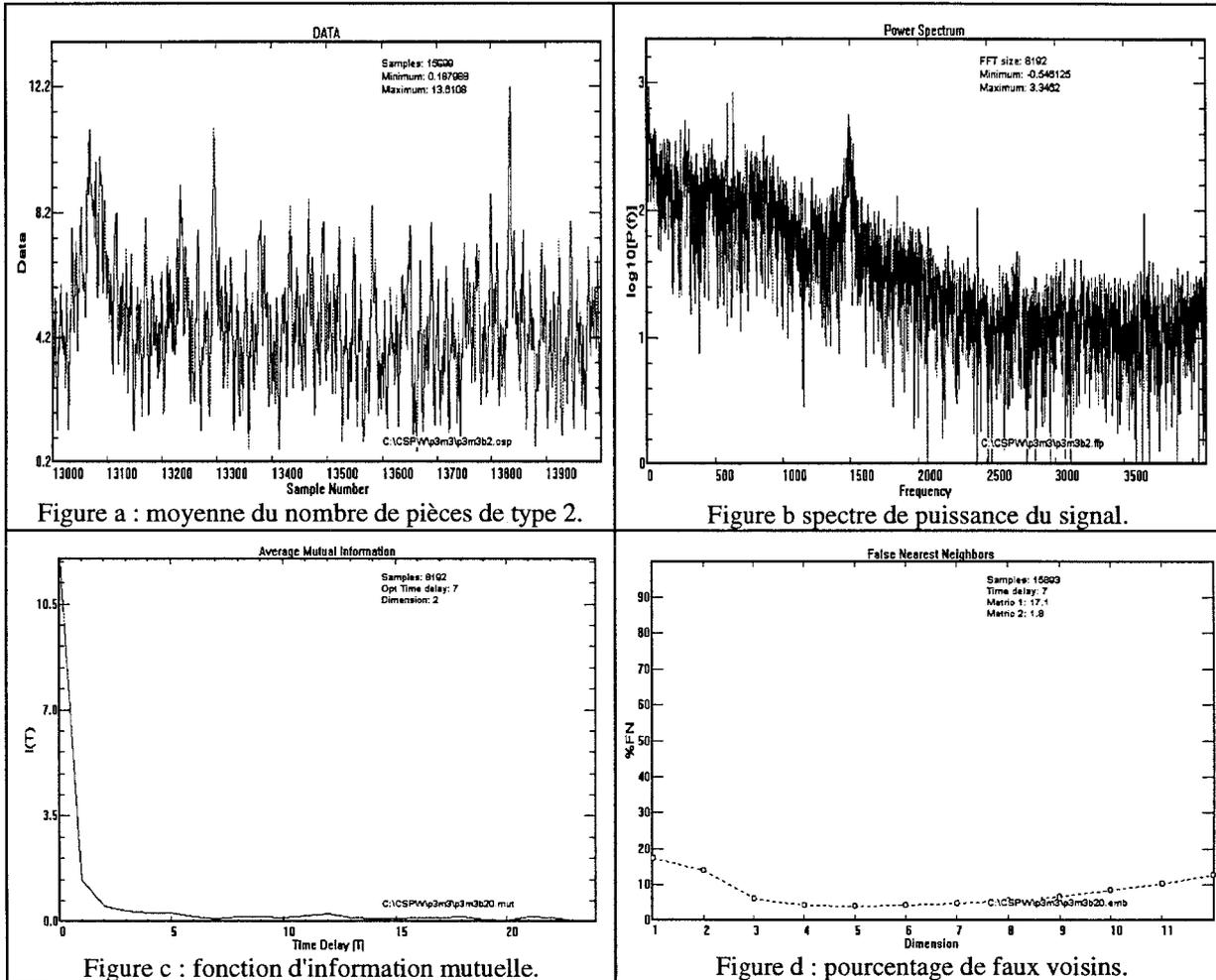


Figure 4.3 : résultats pour fonction  $g_2$  et SPT.

La figure 4.3a montre l'évolution de la moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2. Nous constatons que le comportement est aussi erratique que dans le cas antérieur. La figure 4.3b montre le spectre de puissance du signal. Nous remarquons qu'il est continu, ceci implique à nouveau la présence d'un comportement erratique.

Le retard optimum dans ce cas est de 7. La figure 4.3d montre l'obtention de la dimension de plongement. Comme dans le cas précédent, il n'y a pas une dimension pour laquelle le pourcentage de faux voisins est égal à zéro. Ceci implique que la dynamique a un degré de liberté élevé.

### 4.6.3. Expériences avec la fonction $g_3$ (7, 8 et 9) :

La figure 4.4 montre les résultats lorsque nous employons la fonction de décision  $g_3$ .

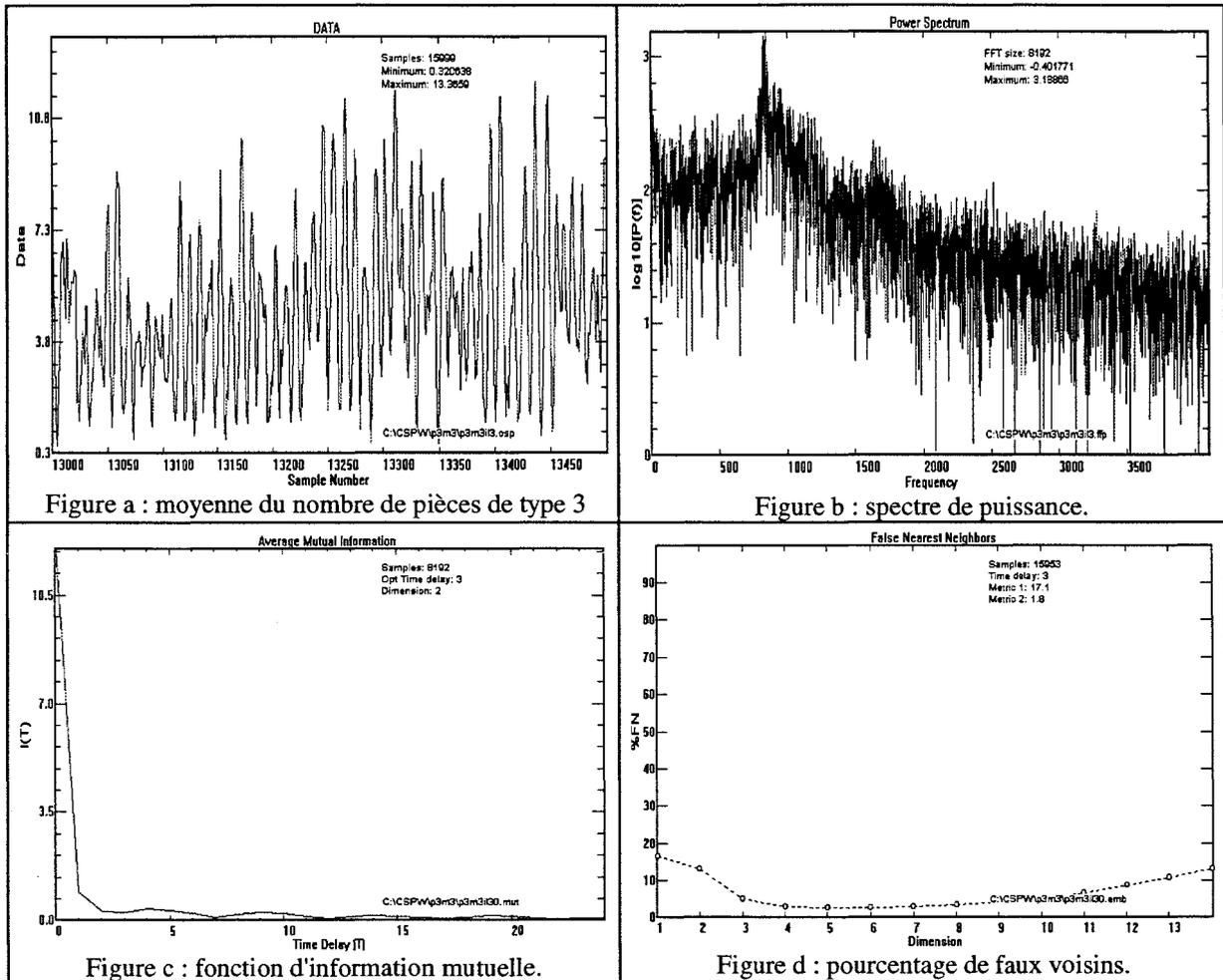


Figure 4.4 résultats pour fonction  $g_3$  et SPT.

Nous observons que les résultats sont similaires aux cas précédents, c'est-à-dire, que le comportement du système est erratique avec un haut degré de liberté. La conduite du système est donc "aléatoire". Pour les autres règles (FIFO et HPT), les résultats sont semblables.

### 4.6.4. Expériences avec la fonction $g_4$ (10, 11 et 12) :

La figure 4.5 présente les résultats obtenus en utilisant SPT pour les files d'attente. Sur la figure 4.5b nous voyons que le spectre de puissance est continu comme dans les cas précédents. Cependant, nous remarquons l'existence d'une fréquence dominante autour de laquelle on voit d'autres fréquences. Cela implique que même si la dynamique du système est irrégulière, elle n'est pas complètement aléatoire. Sur la figure 4.5c, nous constatons que la

fonction d'autocorrélation décroît avec le temps et qu'en même temps elle maintient une certaine régularité.

Le retard optimum est égal à 3 (figure 4.5d). En utilisant cette valeur, nous avons obtenu la dimension de plongement, dimension pour laquelle le pourcentage de faux voisins est zéro est de 8. Sur la figure 4.5e, nous observons que la dimension de corrélation est légèrement supérieure à 2. Ceci implique que la dimension locale est de 3. En effet, une autre estimation de la dimension fractale par la dimension de Lyapunov donne une valeur de 2,304 (figure 4.5f). Nous pouvons donc affirmer que la dimension locale est 3. Les valeurs des exposants de Lyapunov sont:  $\lambda_1 = 0,188$ ,  $\lambda_2 = -0,0314$  et  $\lambda_3 = -0,516$ . Le système a donc un comportement chaotique. Pour les règles FIFO et HPT, les résultats sont similaires et se trouvent dans l'annexe 2.

#### **4.6.5. Expériences avec la fonction $g_5$ (13, 14 et 15) :**

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6 en utilisant SPT pour les files d'attente. Le spectre de puissance, comme la fonction d'autocorrélation montrent une dynamique erratique du système (figure 4.6b et 4.6c). La valeur que nous avons employée, dans ce cas, pour le retard est de 2, obtenue avec la fonction d'autocorrélation. Avec cette valeur, on obtient de meilleurs résultats que la valeur obtenue avec la fonction d'information mutuelle. La dimension de plongement, pour laquelle le pourcentage de faux voisins est zéro, est de 6 (figure 4.6e). Une estimation de la dimension fractale est de 2,6 (figure 4.6g). La figure 4.6h montre la détermination des exposants de Lyapunov dont les valeurs sont :  $\lambda_1 = 0,442$ ,  $\lambda_2 = 0,087$  et  $\lambda_3 = -0,632$ , avec une dimension de Lyapunov de 2,836. Nous pouvons conclure que la dynamique du système est chaotique.

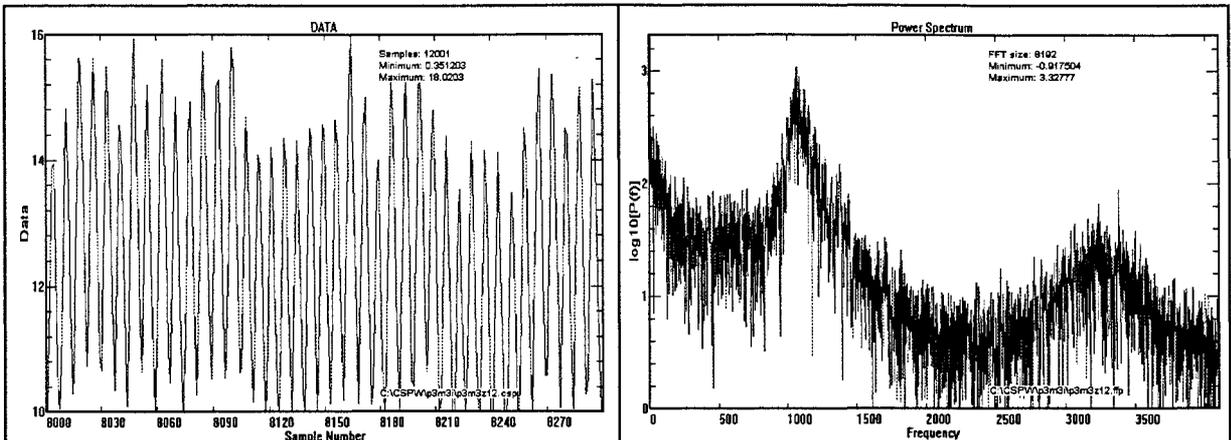


Figure a: stock des pièces de type 2 dans la machine 1.

Figure b: spectre de puissance.

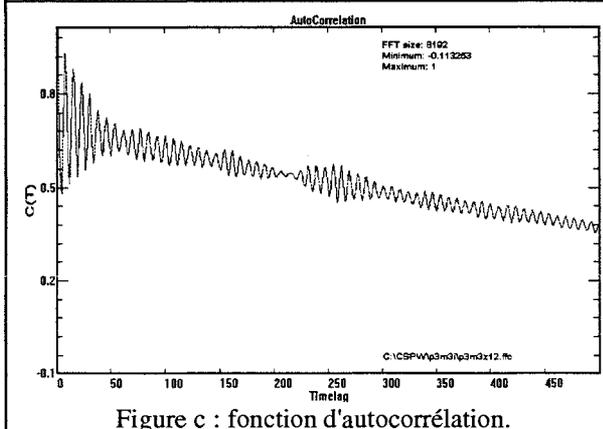


Figure c : fonction d'autocorrélation.

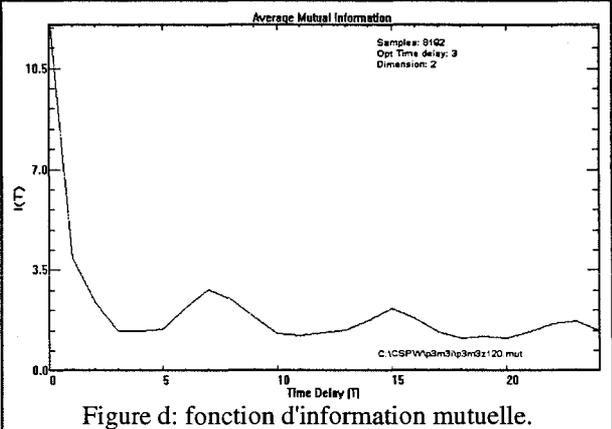


Figure d: fonction d'information mutuelle.

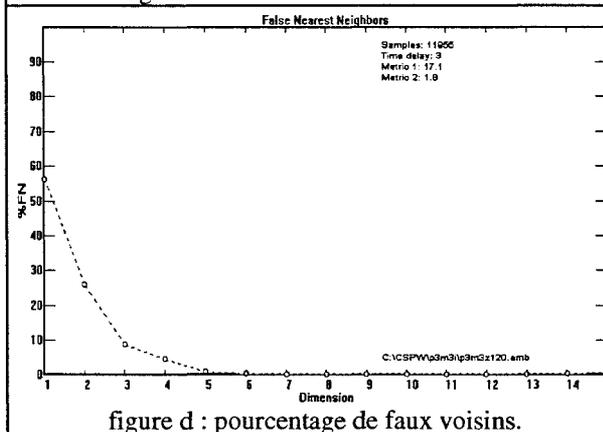


figure d : pourcentage de faux voisins.

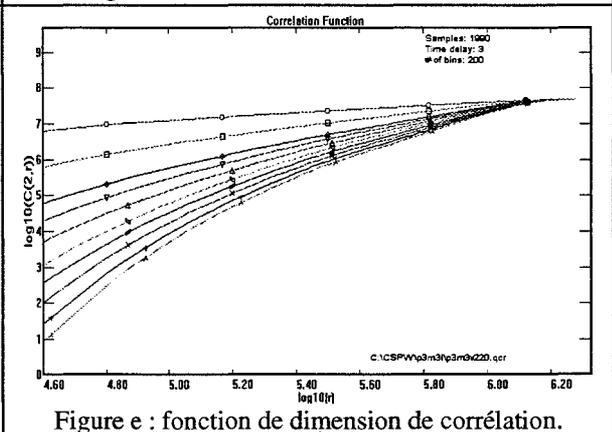


Figure e : fonction de dimension de corrélation.

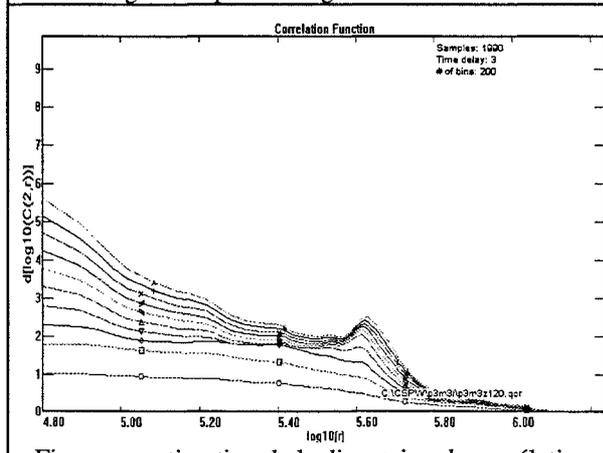


Figure e : estimation de la dimension de corrélation.

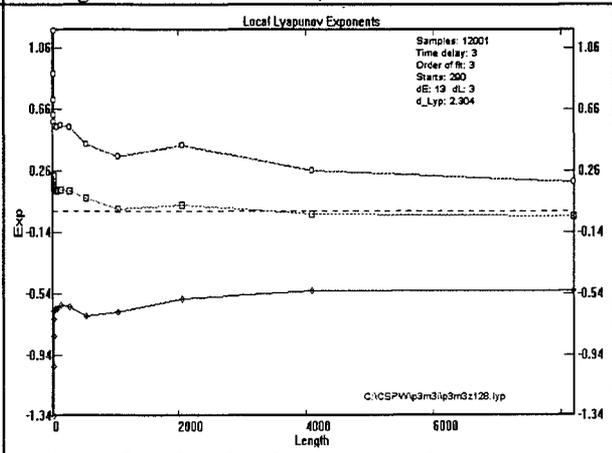


figure f : estimation des exposants de Lyapunov.

Figure 4.5 : résultats pour fonction  $g_4$  et SPT.

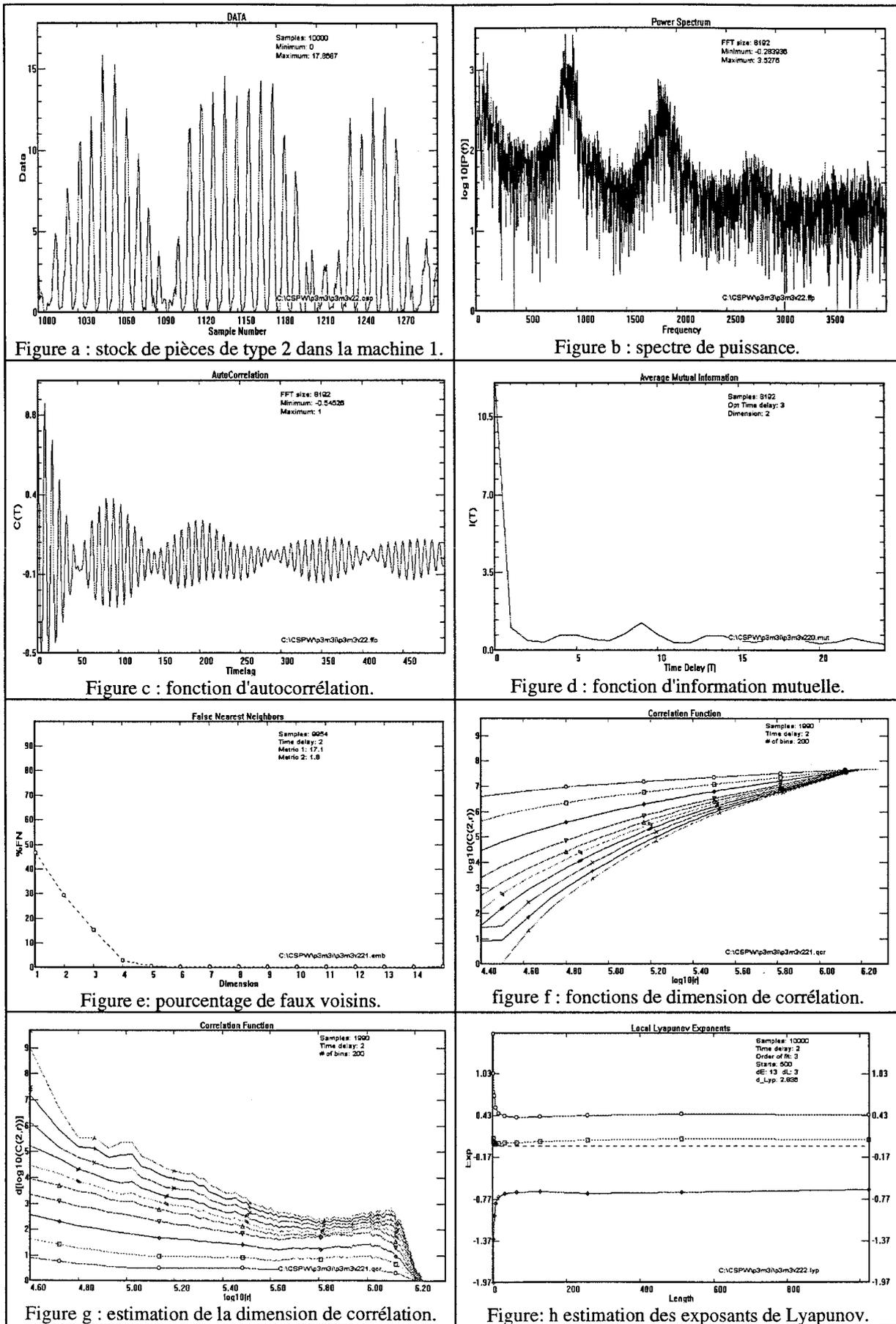


Figure 4.6 : résultats pour fonction  $g_5$  et SPT.

Lorsque nous ordonnons les files d'attentes FIFO et HPT, les résultats sont différents. Dans ces deux cas, il n'existe aucune dimension de plongement qui rende le pourcentage de faux voisins égal à zéro. La dynamique est donc, dans ces cas, aléatoire (annexe 2).

#### 4.6.6. Expérience avec deux types de fonctions de décision [ALF.97]

Finalement, nous avons effectuée une simulation avec deux fonctions de décision, il s'agit de l'utilisation de la fonction  $g_3$  pour la machine 1 et de la fonction  $g_5$  pour les machines 2 et 3. Les files d'attentes sont toutes ordonnées avec SPT. La figure 4.7 montre les résultats obtenus.

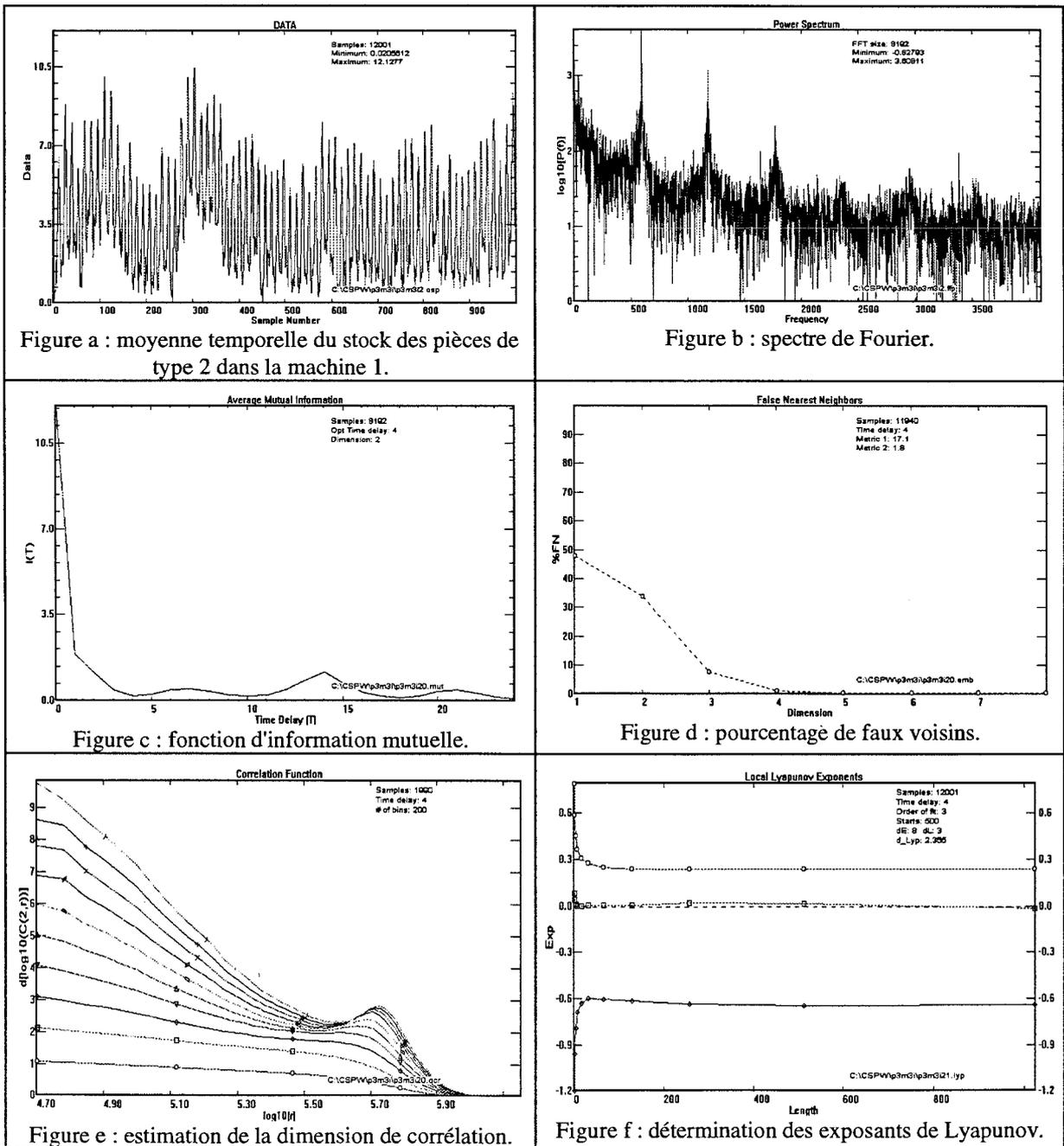


Figure 4.7 : résultats pour fonction  $g_5$  et SPT.

La figure 4.7b montre un spectre continu duquel émerge des rais élargies. Ceci implique que le comportement dynamique du système peut être aléatoire ou chaotique. La figure 4.7c, fonction d'information mutuelle donne un retard :  $\tau = 4$ , la dimension de plongement de l'attracteur obtenu par la technique des faux voisins est 6 (figure 4.7d). La figure 4.7e montre l'estimation de la dimension de corrélation dont la valeur est approximativement de 2,4. Sur la figure 4.7f, nous voyons qu'il y a un exposant positif,  $\lambda_1=0,245$ , et deux exposants négatifs,  $\lambda_2=-0,0132$  et  $\lambda_3=-0.635$ . La valeur de la dimension de Lyapunov (conjecture de Yorke-Kaplan) est de 2,365, ce qui est aussi une bonne approximation de la dimension fractale de l'attracteur (nous avons obtenu une dimension de corrélation de 2,4).

Comme la dimension fractale de l'attracteur est fractionnaire et comme il y a un exposant de Lyapunov positif, nous pouvons donc conclure que la dynamique du système présente un régime chaotique.

#### **4.7. Analyse de bifurcation**

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, l'analyse de bifurcation consiste à choisir un paramètre du système qui permet de faire passer le système d'un certain type de comportement dynamique à un autre. Un système peut, par exemple, tendre vers un point fixe, mais il suffit d'en changer un paramètre pour qu'il tende vers un cycle limite ou vers un comportement chaotique.

Dans notre cas, nous avons conclu que le comportement du système dépend du niveau de charge. Ainsi, si le système travaille avec une faible charge, son comportement n'est plus le même que lorsqu'il travaille avec une charge équilibrée ou lorsqu'il est surcharge. Il est donc possible de modifier le comportement en changeant le rapport entre les taux de fabrication et les taux d'arrivée. Pour simplifier le problème, nous choisirons un taux d'arrivée d'un type de pièce et à partir de ce taux nous conduirons le système vers différents comportements. Prenons le système étudié dans la section précédente, avec l'utilisation de la fonction  $g_4$  et une gestion des files d'attente par SPT. Nous allons étudier le stock des pièces de type 1 devant la machine 1. Nous changerons le taux d'arrivée des pièces de type 2. Voici dans la figure 4.8 un schéma du diagramme de bifurcation. Nous voyons sur cette figure que le système passe par différents comportements en fonction du taux d'arrivée. Jusqu'à approximativement la valeur 5,37, le stock tend vers un point fixe différent pour chaque valeur de ce taux. Puis, entre 5,37 et 5,94, le système a un comportement périodique avec bruit. Pour les valeurs des taux d'arrivée supérieures, le comportement du système est chaotique. A partir de valeurs supérieures à 7,96, le nombre de pièces dans le système tend vers l'infini.

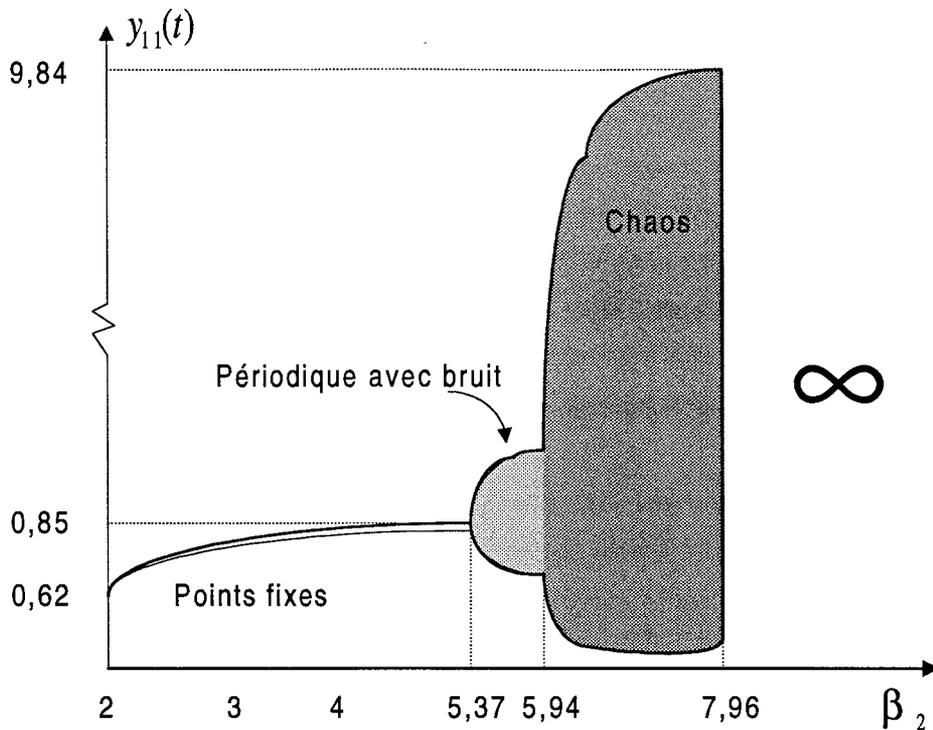


Figure 4.8 : diagramme de bifurcation du niveau de stock en fonction du taux d'arrivée.

Le chemin que suit le système pour aboutir à un comportement chaotique est du type "la quasi périodicité". Cependant, nous avons constaté dans d'autres systèmes que les chemins suivis est plutôt du type "intermittence". Il y a apparition de comportements irréguliers à l'intérieur d'un comportement régulier, comme on peut le voir sur les figures suivantes.

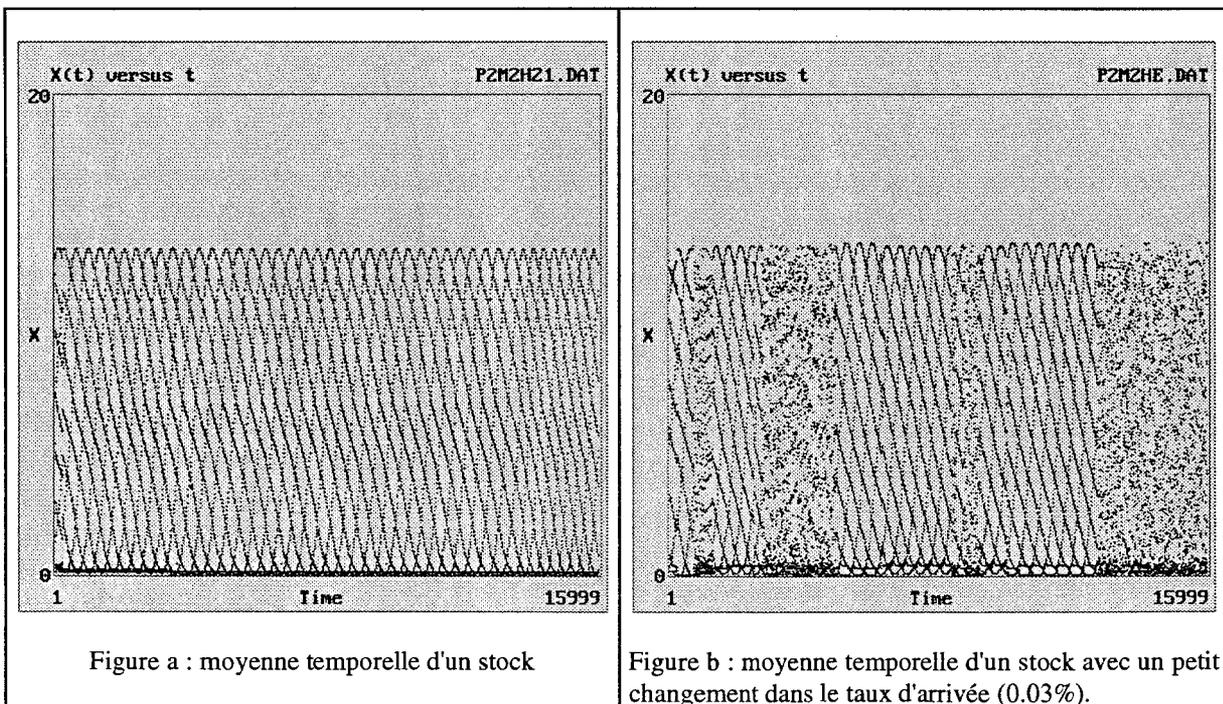


Figure a : moyenne temporelle d'un stock

Figure b : moyenne temporelle d'un stock avec un petit changement dans le taux d'arrivée (0.03%).

Figure 4.9 : une autre route vers le chaos dans un système composé de deux machines et deux types de pièces.

La figure 4.9 montre l'évolution des stocks pour un système composé de deux machines et deux types de pièces. Pour certaines conditions de paramètres, le système aboutit à un comportement périodique. Cependant, si nous changeons la taux d'arrivée d'un type de pièce (quelque soit le type), on observe l'apparition d'un comportement irrégulier.

#### 4.8. Résumé et conclusions

1) Nous avons pu remarquer qu'en fonction des règles de décision, un système générique peut avoir différentes dynamiques. Le tableau 4.3 donne un résumé des résultats obtenus :

Résultats	Fonction de décision de machines				
	g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>4</sub>	g <sub>5</sub>
Règles pour les files d'attente					
SPT	Al	Al	Al	Ch	Ch
FIFO	Al	Al	Al	Ch	Al
HPT	Al	Al	Al	Ch	Al

Tableau 4.3 : résultats obtenus pour les expériences. Al : aléatoire, Ch : chaotique.

Nous constatons aussi que le comportement du système ne dépend pas de l'arrangement des files d'attentes, sauf les expériences avec la fonction g<sub>5</sub>.

2) Le comportement aléatoire que nous avons pu observer peut lui aussi être qualifié de "chaotique" mais d'un très haut degré de liberté, car nous savons que dans la construction du modèle il n'y a aucune composante aléatoire. Nous sommes donc en présence d'un comportement erratique déterministe.

3) Si l'on compare les résultats obtenus dans la section 3.5.4.1 avec ceux obtenus ici, on s'aperçoit que les mêmes règles (FIFO, SPT, HPT) produisent des résultats de types différents. Dans le cas précédent (cf 3.5.4.1), le système tend soit vers à un point fixe ou vers un cycle limite. Dans le cas de cette section, lorsque nous employons ces mêmes règles, le système aboutit à un comportement "aléatoire".

4) D'une part, nous avons vu que le caractère flexible du système implique un caractère non linéaire, condition fondamentale pour qu'un système puisse aboutir à une conduite chaotique. D'autre part, la condition d'équilibre du système implique que celui-ci travaille presque au maximum de sa capacité. Ces deux conditions peuvent expliquer une telle conduite. En effet, nous avons constaté qu'un système flexible (non linéaire) qui travaille avec une charge faible aboutit à un comportement périodique.

5) A partir de l'analyse de bifurcation, nous sommes donc en mesure de conclure que le taux d'arrivée de pièces du système, peut constituer un paramètre de contrôle. Cependant, lorsque les taux sont inférieurs aux taux d'équilibre, la productivité du système baisse également. Cette dernière conclusion a toute son importance, car, si nous voulons contrôler un système chaotique et maintenir la productivité du système, nous devons tenir compte de ce phénomène.

Dans le prochain chapitre de la thèse, nous étudierons la relation entre la complexité dynamique et la flexibilité de routage des pièces. Comme le montre l'analyse de bifurcation, en fonction de la charge du système, nous obtenons différents comportements. Nous ferons donc cette étude avec des charges équivalentes pour chaque système analysé.

## Chapitre 5

### Flexibilité et chaos

#### 5.1. Introduction

La littérature est riche d'études sur la flexibilité et la complexité des systèmes productifs [HOL.88], [COH.95], [MAS.97], [FEN.95] entre autres. Cependant, il semble ne pas y avoir eu d'étude formelle pour mettre en relation ces deux concepts. Nous nous proposons donc d'étudier la relation entre la flexibilité d'un système de production et sa complexité dynamique. En premier lieu, nous établirons une synthèse des définitions sous-tendues par le concept de flexibilité et les différentes manières de la mesurer. Nous simulerons ensuite un atelier présentant différents types de flexibilité afin d'établir une relation entre la flexibilité du système et sa dynamique.

Nous avons constaté qu'un système flexible peut avoir différentes dynamiques en fonction de ses règles de décision et des valeurs de ses paramètres. Ainsi, un système ayant une flexibilité déterminée peut avoir divers comportements. Il peut, par exemple, passer d'un comportement régulier à un comportement chaotique par la simple modification de l'un de ses paramètres. La difficulté est de comparer les dynamiques des systèmes lorsque ces derniers contiennent à l'intérieur d'eux-mêmes des dynamiques différentes. Pour étudier ce problème et comparer les effets de la flexibilité sur la dynamique des systèmes, nous fixerons d'abord toutes les règles de décision. La deuxième condition est liée à l'équilibre de chacun des systèmes étudiés. Il faudra en effet que pour chacun d'entre eux les rapports entre les taux d'arrivée et les taux d'usure pour toutes les machines soient égaux à 1. De cette façon, nous comparerons des systèmes dans les mêmes conditions de fonctionnement. Cela nous impose de recalculer les paramètres du système, afin de maintenir les conditions d'équilibre, à chaque changement de flexibilité.

L'étude portera sur un système susceptible d'avoir une conduite chaotique, dont nous modifierons la flexibilité. Nous avons choisi pour cela un système simple composé de deux machines en relation réciproque et de deux types de pièces ayant respectivement trois et deux opérations. Un atelier de cette taille permet de déterminer à l'avance et sans difficulté les paramètres qui le rendent stable. Nous commencerons donc avec une flexibilité égale à  $S_1$  puis nous l'augmenterons progressivement.

Comme dans les cas étudiés précédemment, nous analyserons la dynamique du système en étudiant l'évolution des stocks de chaque type de pièces devant chaque machine.

## 5.2. Le concept de flexibilité

### 5.2.1. Les différents types de flexibilité

Une quantité volumineuse de travaux définissant le concept de flexibilité et analysant la manière de la mesurer dans les systèmes manufacturiers a été réalisée : [BRO.84], [YAO.85], [BUZ.86], [KUM.87], [TAY.89], [BRI.89], [YAO.90], [SET.90], [SIN.92], [GUP.92], [NAG.92], [CHA.92], [DAS.93], [GUP.93], etc... De manière générale, on entendra par flexibilité la capacité d'un système à reconfigurer ses ressources afin de produire différents produits d'une qualité acceptable.

La plupart des auteurs s'accordent à reconnaître l'existence de plusieurs flexibilités dans les systèmes manufacturiers, mais divergent sur la manière de les mesurer. Voici quelques unes de ces définitions :

- 1) La flexibilité des machines : c'est leur capacité à effectuer diverses opérations sans "effort prohibitif" de reconfiguration pour passer d'une opération à une autre. Cette flexibilité est fondamentale pour obtenir les autres types de flexibilité. On peut la mesurer par le nombre d'opérations que la machine réalise avec un "effort" particulier. Le temps, le coût ou la combinaison des deux servent à mesurer l'effort.
- 2) La flexibilité de processus : c'est la capacité du système à produire un ensemble de produits en utilisant de différentes manières leurs ressources.
- 3) La flexibilité de produit : c'est la capacité du système de production à changer ou à introduire de nouveaux produits. Les coûts résultants de ce changement peuvent servir à la mesurer.
- 4) La flexibilité d'opération : c'est la capacité des pièces à suivre différentes séquences opératoires (ou gammes). Le nombre de séquences possibles sert de mesure.
- 5) La flexibilité de la quantité de production : c'est la capacité du système productif à changer les niveaux de production tout en continuant à faire du profit.
- 6) La flexibilité de routage : c'est la capacité du système à produire une pièce par différents chemins. Les opérations des pièces peuvent être réalisées par plusieurs machines. La flexibilité de routage existe si les machines et/ou les opérations sont flexibles.

Pour notre étude, nous changerons la flexibilité de routage des pièces en augmentant la flexibilité des machines dans l'atelier. La flexibilité de routage est une propriété du système [SET.90] et nous l'utiliserons pour le caractériser. Nous nous centrerons donc sur la manière de la mesurer.

### 5.2.2. Mesures de la flexibilité de routage

Il existe plusieurs méthodes. La première consiste à quantifier le nombre de chemins pouvant être suivis par une pièce dans l'atelier [CHU.89]. D'autres mesures basées sur le concept d'entropie [YAO.85], [KUM.87] servent également à quantifier ce type de flexibilité. Il faut dans ce cas dénombrer le nombre de routes et la probabilité qu'ont les pièces de les choisir. Par exemple pour un système composé de trois machines, d'un type de pièce possédant trois opérations, et où chaque opération ne peut se réaliser que sur une seule machine, la flexibilité de routage du système est alors égale à zéro. Si maintenant, une des opérations peut être réalisée selon les possibilités suivantes : 1) sur deux machines où chacune peut être choisie avec la même probabilité 2) sur trois machines où chacune peut être choisie avec la même probabilité 3) sur deux machines où chacune peut être choisie avec des probabilités différentes. La figure 5.1 montre les différentes alternatives sur ces trois différents systèmes :

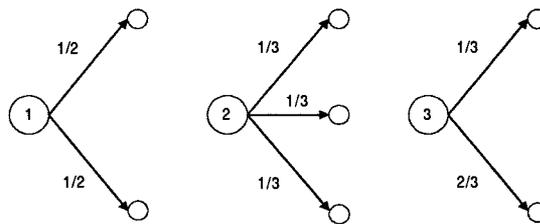


Figure 5.1 : représentation graphique des trois cas de figure précédents.

De manière intuitive, nous pouvons dire que l'alternative 2 est plus flexible que les deux autres. On vérifiera plus tard que l'alternative 1 l'est davantage que l'alternative 3. Nous choisirons l'approche proposée par Kumar [KUM.87], car elle nous semble être la plus simple et la plus adéquate à notre objectif.

#### 5.2.2.1. Axiomes pour une mesure de flexibilité

##### a) Axiomes essentiels

Soit  $S$  la mesure de flexibilité :

a)  $S$  sera une fonction de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  où  $n$  est le nombre de possibilités et  $x_i$  est la probabilité de choisir l'alternative  $i$  ( $\sum x_i = 1$ ).

b)  $S$  sera une fonction continue, de cette façon un petit changement de  $x_i$  produira un petit changement en  $S$ .

c)  $S$  sera une fonction symétrique dans le sens où si nous permutons les  $x_i$ ,  $S$  ne change pas.

d)  $S = 0$  si  $x_j = 1$  et  $x_i = 0 \forall i \neq j$ , cela veut dire qu'il n'existe pas de liberté de choix.

e) La valeur de  $S$  aura son maximum lorsque  $x_i = k \forall i$ , c'est-à-dire que toutes les possibilités ont la même probabilité.

f) La valeur maximum de  $S$  augmente (au moins ne décroît pas) avec le nombre de possibilités de choix.

g) La valeur de  $S$  ne change pas lorsqu'une nouvelle option s'introduit avec une probabilité de choix égale à zéro.

### b) Axiomes attendus :

a)  $S$  devrait être dérivable par rapport à  $x_i$ . Cette propriété serait adaptée pour pouvoir maximiser  $S$ .

b)  $S$  devrait être concave ou quasi concave pour obtenir un maximum local ou global (si les contraintes sont linéaires).

c) Nous avons des contraintes de non négativité ( $x_i \geq 0$ ). Nous savons que toute méthode d'optimisation soumise à des contraintes linéaires (en particulier la méthode de Lagrange) est plus facile à résoudre si ces contraintes se satisfont automatiquement. Nous voudrions donc que cette condition s'accomplisse dans la mesure  $S$ .

d) Nous voudrions décomposer la mesure  $S$  comme le montre la figure 5.2 :

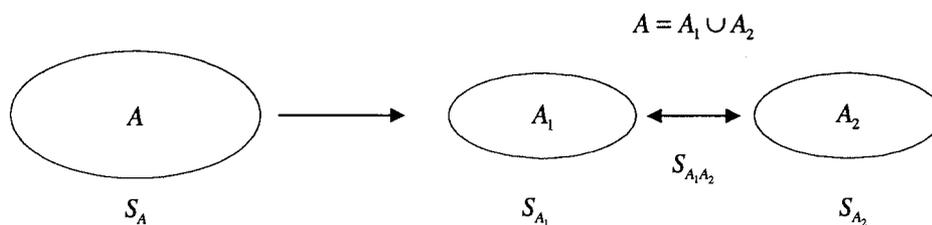


Figure 5.2 : décomposition de la mesure de flexibilité.

et obtenir :  $S_A = S_{A_1} \otimes S_{A_1 A_2} \otimes S_{A_2}$  c'est-à-dire une mesure entre groupes et une mesure à l'intérieur du groupe.

e) La propriété de décomposition nous amène à la propriété de récursivité. Par exemple, si nous avons  $n$  alternatives et deux options (1 et 2) regroupées, nous pouvons alors écrire :

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_{n-1}(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) + W(x_1, x_2) S_2\left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

c'est-à-dire que si une option peut se diviser en deux ou plus que deux, la valeur originale de  $S$  sera égale à la somme pondérée des valeurs individuelles de  $S_i$ , par exemple :

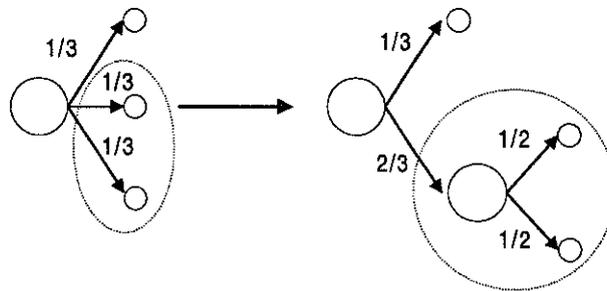


Figure 5.3 : exemple de décomposition de flexibilité.

Alors nous pouvons écrire :

$$S\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = S\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Nous utiliserons très fréquemment cette propriété dans notre expérience.

f) Nous voudrions que la mesure  $S$  : a) augmente lorsque les probabilités s'approchent. b) qu'elle puisse avoir des paramètres. De cette façon, ces paramètres pourraient prendre en compte d'autres facteurs et c) qu'elle soit mathématiquement traitable.

### 5.2.3. Une mesure de flexibilité

Kumar propose différentes expressions mathématiques pour mesurer la flexibilité. Nous utiliserons l'expression qui correspond à l'entropie, car celle-ci satisfait tous les axiomes sauf celui concernant les paramètres. Dans notre cas, le but est de mesurer la flexibilité et non de l'optimiser, l'absence de paramètre n'a donc aucune importance. Nous emploierons l'expression suivante :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$$

### 5.3. Simulation des systèmes avec différentes flexibilités

#### 5.3.1. Caractéristiques du système à simuler

Le système est composé de deux machines qui se trouvent en relation réciproque par le flux de deux types de pièces ayant deux opérations différentes.

##### 5.3.1.1. Paramètres et variables :

- 1) Soit  $\beta_i$  le taux d'arrivée des pièces et soit  $\mu_{ijk}$  le taux d'usinage de l'opération  $i$  de la pièce de type  $j$  sur la machine  $k$ .
- 2) Soit  $A^m_{ijk}$  le flux des pièces de type  $j$  qui sort de la machine  $m$  et va vers la machine  $k$  pour usiner l'opération  $i$ . Par définition, quand le flux vient de l'extérieur du système  $m = 0$ .
- 3) Soit  $q_{jk}(t)$  le nombre de pièces de type  $j$  se trouvant devant la machine  $k$ . A partir de cette variable, nous obtiendrons la variable à analyser ( $y_{jk}(t)$ ).
- 4) Pour avoir un système en équilibre, l'équation suivante doit se vérifier pour chaque machine  $k$  :

$$\sum_{i,j} \frac{A^m_{ijk}}{\mu_{ijk}} = 1 \quad \forall k$$

##### 5.3.1.2. Règles ou fonctions de décision :

Pour tous les cas sur lesquels va porter notre étude, nous avons choisi les règles de décision suivantes :

- a) La règle de gestion des stocks de chaque type de pièces devant chaque machine sera FIFO.
- b) Lorsqu'une pièce doit choisir une machine, elle choisira celle qui aura le stock minimum.
- c) Une machine  $k$  travaillera avec un type de pièce  $j$  dans un intervalle de temps proportionnel au nombre de pièces  $j$  présent selon l'équation suivante :

$$\Delta t_{jk} = \frac{h q_{jk}(t)}{\sum_j q_{jk}(t)} \quad \forall k$$

où  $h$  est une constante arbitraire. Nous utiliserons  $h = 1$ .

Ces conditions de fonctionnement ont été choisies, car ce sont elles qui ont mené au comportement chaotique dans les études précédentes. Le tableau 1 donne les différents cas à simuler, où le croix montrent les possibilités d'usinage.

Alternatives d'usinage		Opérations				
		Pièce de type1			Pièce de type 2	
		O11	O21	O31	O12	O22
Cas I	Machine 1	x		x	x	
	Machine 2		x		x	x
Cas II	Machine 1	x		x	x	
	Machine 2	x	x		x	x
Cas III	Machine 1	x		x	x	x
	Machine 2	x	x		x	x
Cas IV	Machine 1	x	x	x	x	x
	Machine 2	x	x		x	x
Cas V	Machine 1	x	x	x	x	x
	Machine 2	x	x	x	x	x

Tableau 5.1 : les cas à simuler.

### 5.3.2. Cas I avec une flexibilité de routage $S_1$

1) Chacun des systèmes étudiés sera représenté de manière graphique, afin de mettre en évidence les différents flux de pièces. Nous représenterons les ateliers à l'aide d'un graphe pour mieux voir comment le fait d'augmenter la flexibilité d'une machine implique plusieurs flux qui s'installent dans le système. Les noeuds du graphe représentent les machines (nommées  $M_k$ ) et les décisions (nommées  $D_i$ ). Les arcs représentent les flux des pièces.

Dans ce cas, nous avons un système où une seule des quatre opérations des deux types de pièces possède deux alternatives d'usinage. Seule l'opération 1 de la pièce de type 2 peut en effet être réalisée soit sur  $M_1$  ou sur  $M_2$ . Les autres opérations sont réalisées sur une machine prédéterminée. La figure 5.4 représente l'atelier sous cette condition :

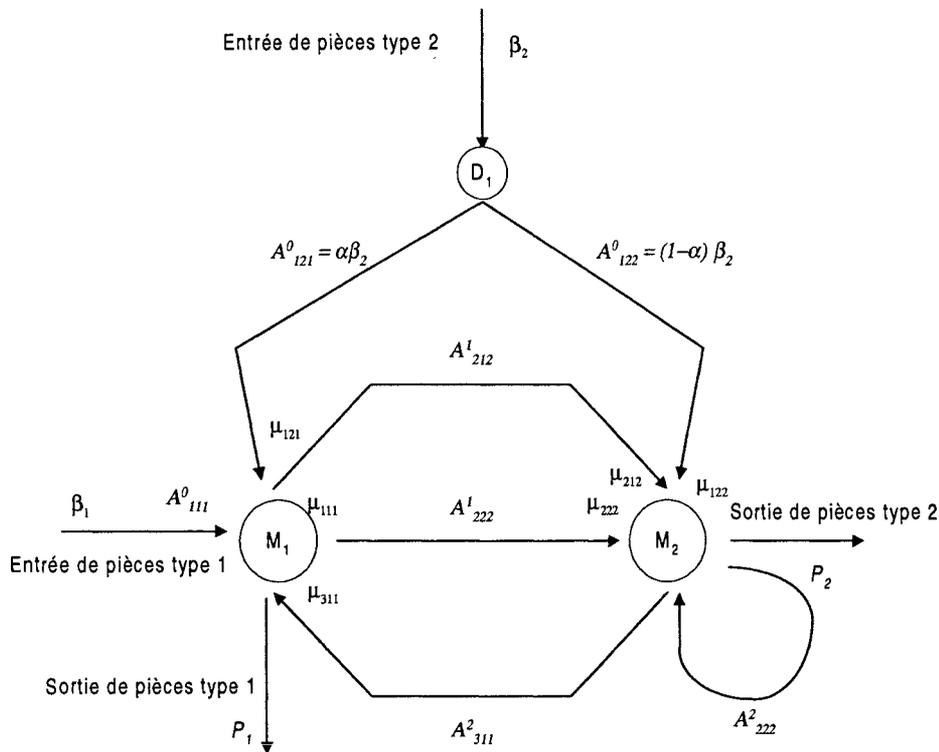


Figure 5.4 : graphe qui représente l'atelier.

2) Les équations pour chaque noeud ou chaque machine sont :

$$\frac{A^0_{111}}{\mu_{111}} + \frac{A^2_{311}}{\mu_{311}} + \frac{A^0_{121}}{\mu_{121}} = 1 \quad \text{machine 1}$$

$$\frac{A^1_{212}}{\mu_{212}} + \frac{A^0_{122}}{\mu_{122}} + \frac{A^1_{222} + A^2_{122}}{\mu_{222}} = 1 \quad \text{machine 2}$$

$$A^0_{121} = \alpha\beta_2$$

$$A^0_{122} = (1-\alpha)\beta_2$$

3) A partir de ces expressions, nous pouvons trouver un ensemble de paramètres qui rendent le système stable. La valeur de  $\alpha$  peut être déterminée de plusieurs manières, soit par programmation linéaire [FRE.88], soit en définissant une valeur arbitraire et en cherchant les valeurs de paramètres (voir chapitre 2) ou enfin par simulation. Nous avons employé la deuxième alternative. Le tableau 5.2 montre ces valeurs et les alternatives d'usinage pour chaque opération :

	Pièces type 1, $\beta_1=8,00$			Pièces type 2, $\beta_2=8,33$	
	Opérations			Opérations	
	$O_{11}$	$O_{21}$	$O_{31}$	$O_{12}$	$O_{22}$
Machine 1	1/58		1/21	1/16	
Machine 2		1/50		1/20	1/32

Tableau 5.2 : temps d'usinage pour les opérations.

## 4) Mesure de la flexibilité

La figure 5.5 schématise la décision à prendre pour l'opération 1 de la pièce de type 2. Nous déterminerons l'entropie à partir de celle-ci :

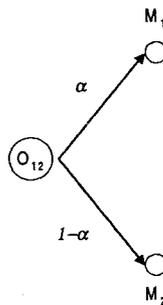


Figure 5.5 : l'opération 1 des pièces du type 2 peuvent choisir les machines 1 et 2.

Dans ce cas, nous savons que l'opération 1 des pièces de type 2 a le choix entre la machine 1 et la machine 2. La valeur de  $\alpha$  représente la proportion des pièces de type 2 qui choisissent la machine 1. Dans tous les cas, pour le calcul de la flexibilité nous déterminerons la valeur de  $\alpha$  *a posteriori*, c'est-à-dire les valeurs obtenues à partir de la simulation.

La valeur obtenue pour  $\alpha$  est de 0,51. La valeur de l'entropie  $S_1$  est donc de 0,693.

$$S_1 = 0,51 \ln 0,51 + 0,49 \ln 0,49 = 0,693$$

5) Notre objectif étant de présenter la relation entre flexibilité et complexité dynamique nous nous contenterons ici de présenter les résultats concernant les exposants de Lyapunov.

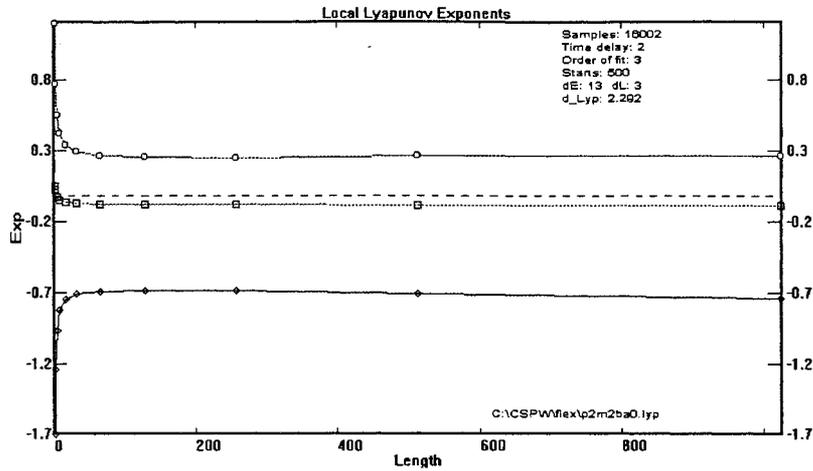


Figure 5.6 : Exposants de Lyapunov pour une flexibilité de  $x_1$ .

Les valeurs des exposants sont :  $\lambda_1 = 0.277$ ,  $\lambda_2 = -0.0664$  et  $\lambda_3 = -0.723$ . Ces valeurs donnent une dimension de Lyapunov de 2.292.

### 5.3.3. Cas II avec une flexibilité de routage $S_2$

1) Dans ce cas nous augmentons la flexibilité de la machine 2 afin qu'elle puisse réaliser, en plus du cas précédent, l'opération 1 des pièces de type 1. La figure 5.7 représente l'atelier sous cette flexibilité :

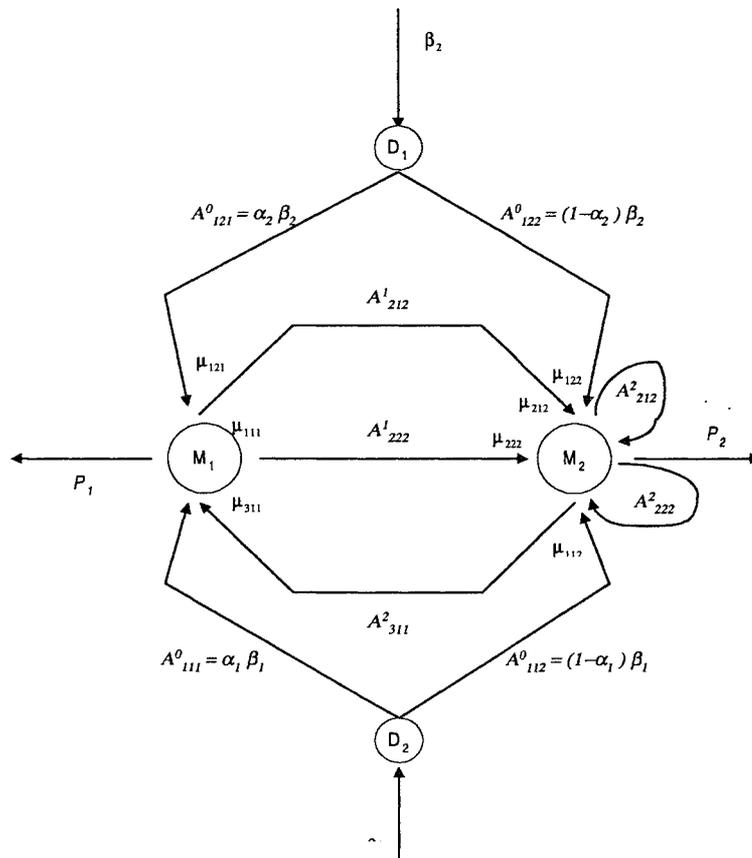


Figure 5.7 : graphe qui représente l'atelier avec une flexibilité  $S_2$ .

Les noeuds D1 et D2 sont des noeuds de décision. Lorsqu'une pièce, soit de type 1 soit de type 2 arrive, elle doit choisir la machine qui va usiner l'opération 1.

2) Les équations pour chaque noeud ou machine sont :

$$\frac{A^0_{111}}{\mu_{111}} + \frac{A^2_{311}}{\mu_{311}} + \frac{A^0_{121}}{\mu_{121}} = 1 \quad \text{machine 1}$$

$$\frac{A^0_{112}}{\mu_{112}} + \frac{A^1_{212} + A^2_{212}}{\mu_{212}} + \frac{A^0_{122}}{\mu_{122}} + \frac{A^1_{222} + A^2_{222}}{\mu_{222}} = 1 \quad \text{machine 2}$$

$$A^0_{111} = \alpha_1 \beta_1$$

$$A^0_{112} = (1 - \alpha_1) \beta_1$$

$$A^0_{121} = \alpha_2 \beta_2$$

$$A^0_{122} = (1 - \alpha_2) \beta_2$$

3) Le tableau 5.3 montre les valeurs des paramètres pour ce cas :

	Pièces type 1, $\beta_1=9,6401$			Pièces type 2, $\beta_2=13,6024$	
	Opérations			Opérations	
	O <sub>11</sub>	O <sub>21</sub>	O <sub>31</sub>	O <sub>12</sub>	O <sub>22</sub>
Machine 1	1/58		1/21	1/16	
Machine 2	1/70	1/50		1/20	1/32

Tableau 5.3 : temps et alternatives d'usinage.

4) Mesure de flexibilité : Dans ce cas les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement 0,518 et 0,378. Pour obtenir l'entropie du système, nous ferons la somme des entropies de chaque type de pièce.

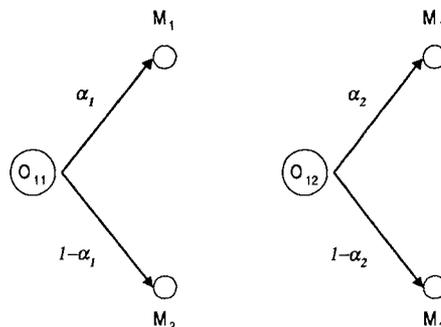


Figure 5.8 : alternatives d'usinages pour les opérations.

La valeur de l'entropie est donc :

$$S_2 = 0,518 \ln 0,518 + 0,482 \ln 0,482 + 0,377 \ln 0,378 + 0,623 \ln 0,622 = 1,355$$

5) La figure 5.9 montre les exposants de Lyapunov pour ce système, dont les valeurs sont :  $\lambda_1 = 0,256$ ,  $\lambda_2 = 0,00429$  et  $\lambda_3 = -0,517$ . Ces valeurs donnent une dimension de Lyapunov de 2,503.

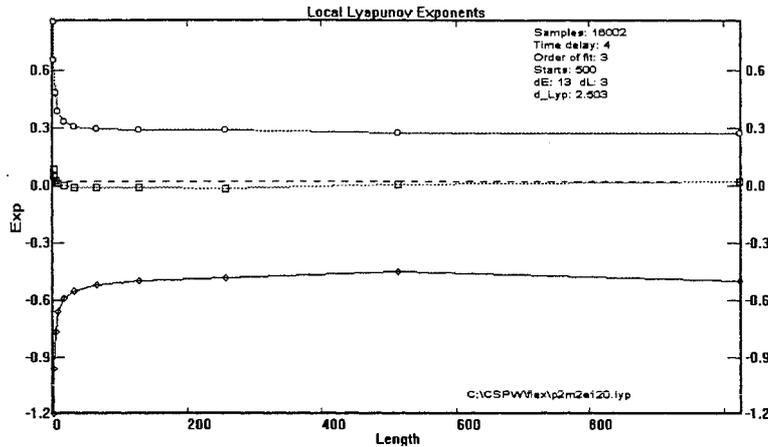


Figure 5.9 : Exposants de Lyapunov pour une flexibilité de  $S_2$ .

### 5.3.4. Cas III avec une flexibilité de routage $S_3$

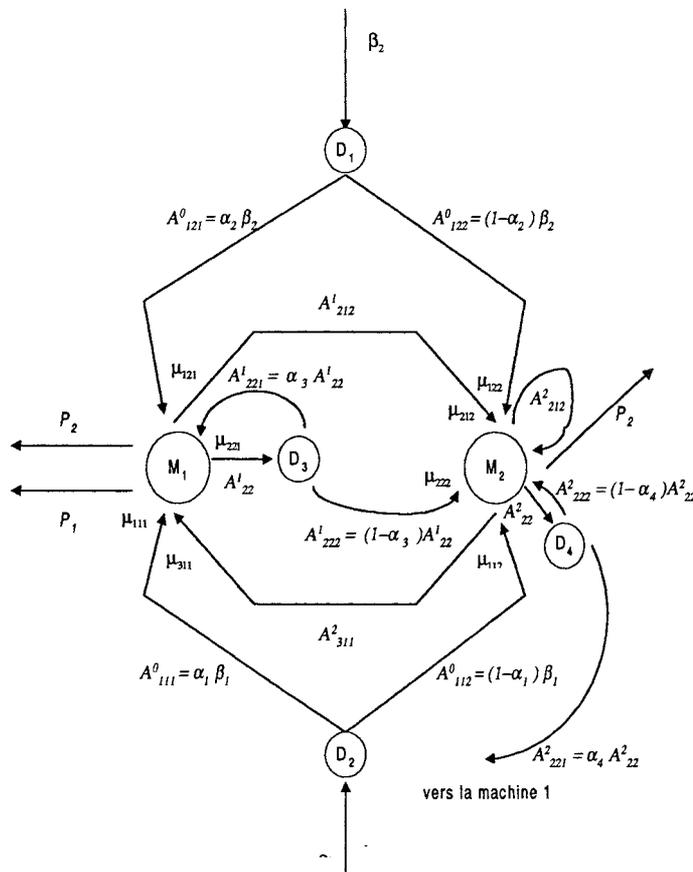


Figure 5.10 : graphe qui représente l'atelier avec une flexibilité  $S_3$ .

1) Dans ce cas nous augmentons la flexibilité de la machine 1 afin qu'elle puisse réaliser, en plus du cas précédent, l'opération 2 des pièces de type 2. La figure 5.10 représente l'atelier dans ces conditions.

Sur cette figure, nous avons deux nouveaux noeuds de décision :  $D_3$  et  $D_4$ . Ils représentent respectivement les décisions que prennent les pièces de type 2 à la sortie des machines 1 et 2, pour choisir la machine qui réalisera leur deuxième opération.

2) Voici les équations pour chaque noeud :

$$\frac{A^0_{111}}{\mu_{111}} + \frac{A^2_{311}}{\mu_{311}} + \frac{A^0_{121}}{\mu_{121}} + \frac{A^1_{221} + A^2_{221}}{\mu_{221}} = 1 \quad \text{machine 1}$$

$$\frac{A^0_{112}}{\mu_{112}} + \frac{A^1_{212} + A^2_{212}}{\mu_{212}} + \frac{A^0_{122}}{\mu_{122}} + \frac{A^1_{222} + A^2_{222}}{\mu_{222}} = 1 \quad \text{machine 2}$$

$$A^0_{111} = \alpha_1 \beta_1$$

$$A^0_{112} = (1 - \alpha_1) \beta_1$$

$$A^0_{121} = \alpha_2 \beta_2$$

$$A^0_{122} = (1 - \alpha_2) \beta_2$$

$$A^1_{221} = \alpha_3 A^1_{22}$$

$$A^1_{222} = (1 - \alpha_3) A^1_{22}$$

$$A^2_{221} = \alpha_4 A^2_{22}$$

$$A^2_{222} = (1 - \alpha_4) A^2_{22}$$

3) Le tableau 5.4 montre les valeurs des paramètres pour ce cas :

	Pièces type 1, $\beta_1=7,8522$			Pièces type 2, $\beta_2=16,6490$	
	Opérations			Opérations	
	$O_{11}$	$O_{21}$	$O_{31}$	$O_{12}$	$O_{22}$
Machine 1	1/58		1/21	1/16	1/70
Machine 2	1/70	1/50		1/20	1/32

Tableau 5.4 : temps et alternatives d'usinage.

4) Mesure de flexibilité : La figure 5.11 représente les décisions à prendre pour les différentes opérations où des alternatives se présentent :

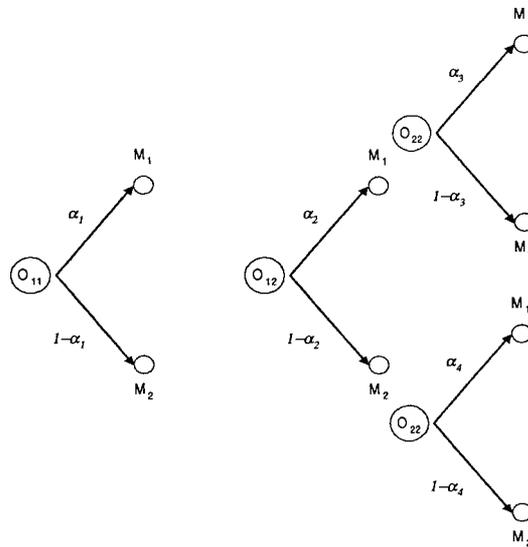


Figure 5.11 : arbre des possibilités.

Les valeurs des  $\alpha_i$  sont :  $\alpha_1 = 0,764$ ,  $\alpha_2 = 0,42$ ,  $\alpha_3 = 0,623$  et  $\alpha_4 = 0,167$ . La valeur de l'entropie est égale à 1,767; on l'obtient dans l'expression suivante :

$$S_3 = -(0,764 \ln 0,764 + 0,236 \ln 0,236 + 0,42 \ln 0,42 + 0,58 \ln 0,58 + 0,42 S_3^1 + 0,58 S_3^2)$$

où  $S_3^1 = 0,623 \ln 0,623 + 0,377 \ln 0,377$  et  $S_3^2 = 0,167 \ln 0,167 + 0,833 \ln 0,833$

5) La figure 5.12 montre les exposants de Lyapunov pour ce cas.

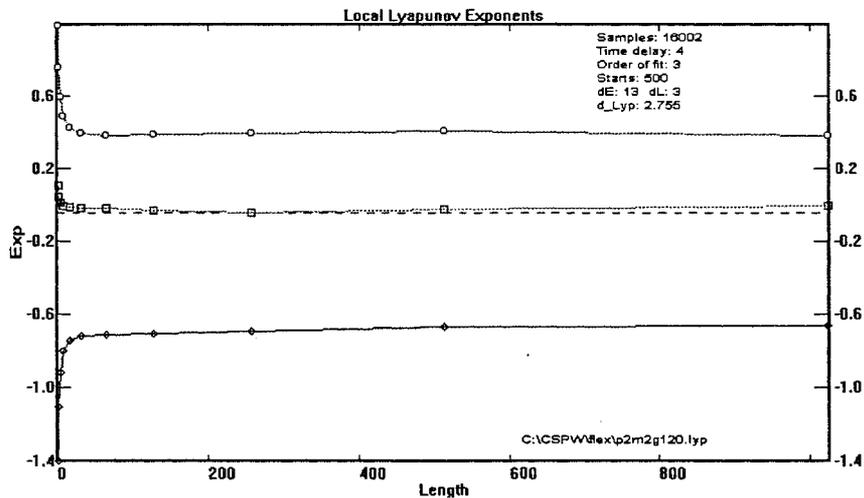


Figure 5.12 : Exposants de Lyapunov pour une flexibilité de  $x_3$ .

Les valeurs des exposants sont :  $\lambda_1 = 0,424$ ,  $\lambda_2 = 0,0421$  et  $\lambda_3 = -0,617$ . Ces valeurs donnent une dimension de Lyapunov de 2,755.

### 5.3.5. Cas IV avec une flexibilité de routage $S_4$

1) Dans ce cas, nous augmentons la flexibilité de la machine 1 afin qu'elle puisse réaliser, en plus du cas précédent, l'opération 2 des pièces de type 1. La figure 5.13 représente l'atelier dans ces conditions.

Ici, nous avons incorporé deux noeuds de décision  $D_5$  et  $D_6$ . Le noeud  $D_5$  représente la décision que prennent les pièces de type 1 à la sortie de la machine 1.  $D_6$  représente la décision que prennent les pièces à la sortie de la machine 2.

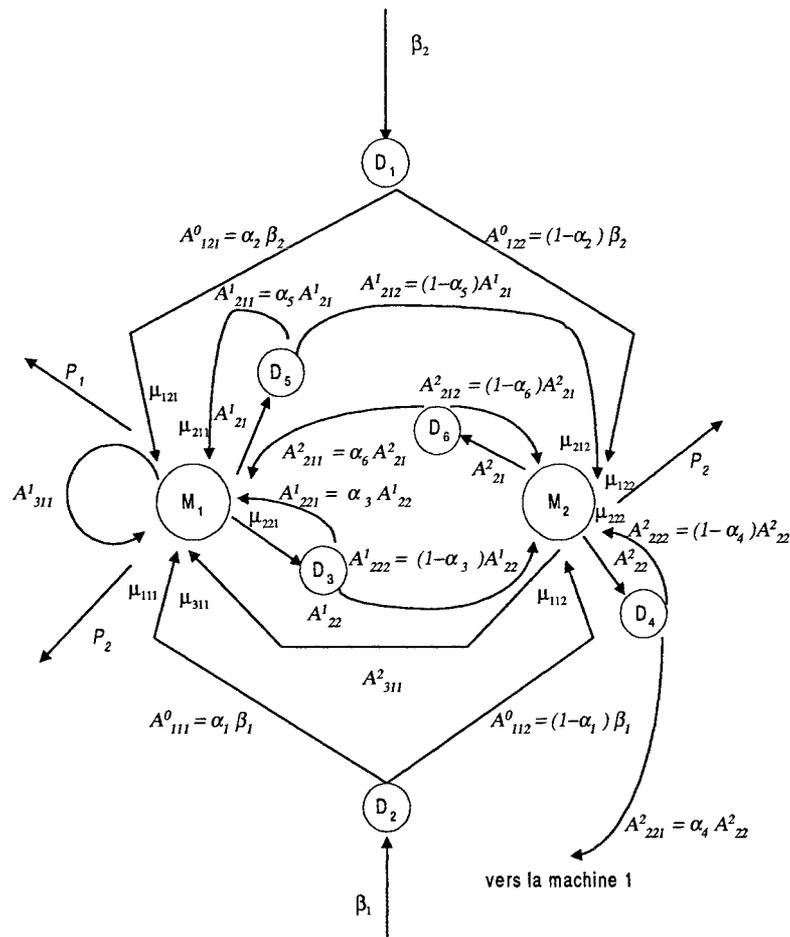


Figure 5.13 : graphe représentant l'atelier avec une flexibilité de  $S_4$ .

2) Les équations pour chaque noeud ou pour chaque machine sont :

$$\frac{A^0_{111}}{\mu_{111}} + \frac{A^1_{211} + A^2_{211}}{\mu_{211}} + \frac{A^1_{311} + A^2_{311}}{\mu_{311}} + \frac{A^0_{121}}{\mu_{121}} + \frac{A^2_{221} + A^1_{221}}{\mu_{221}} = 1 \quad \text{machine 1}$$

$$\frac{A^0_{112}}{\mu_{112}} + \frac{A^1_{212} + A^2_{212}}{\mu_{212}} + \frac{A^0_{122}}{\mu_{122}} + \frac{A^1_{222} + A^2_{222}}{\mu_{222}} = 1 \quad \text{machine 2}$$

$$\begin{aligned}
 A^0_{111} &= \alpha_1 \beta_1 \\
 A^0_{112} &= (1 - \alpha_1) \beta_1 \\
 A^0_{121} &= \alpha_2 \beta_2 \\
 A^0_{122} &= (1 - \alpha_2) \beta_2 \\
 A^1_{221} &= \alpha_3 A^1_{22} \\
 A^1_{222} &= (1 - \alpha_3) A^1_{22} \\
 A^2_{221} &= \alpha_4 A^2_{22} \\
 A^2_{222} &= (1 - \alpha_4) A^2_{22} \\
 A^1_{211} &= \alpha_5 A^1_{21} \\
 A^1_{212} &= (1 - \alpha_5) A^1_{21} \\
 A^2_{211} &= \alpha_6 A^2_{21} \\
 A^2_{212} &= (1 - \alpha_6) A^2_{21}
 \end{aligned}$$

3) Le tableau 5.5 montre les valeurs des paramètres pour ce cas :

	Pièces type 1, $\beta_1=6,8601$			Pièces type 2, $\beta_2=18,1670$	
	Opérations			Opérations	
	O <sub>11</sub>	O <sub>21</sub>	O <sub>31</sub>	O <sub>12</sub>	O <sub>22</sub>
Machine 1	1/58	1/80	1/21	1/16	1/70
Machine 2	1/70	1/50		1/20	1/32

Tableau 5.5 : temps et alternatives d'usinage.

4) Mesure de flexibilité : la figure 5.14 représente les décisions à prendre pour les différentes opérations où des alternatives se présentent.

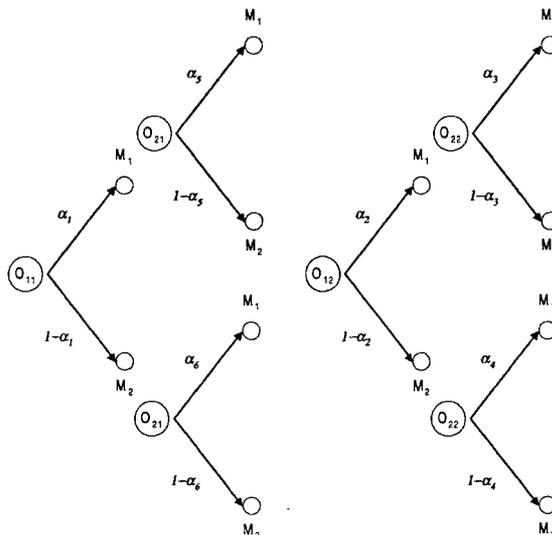


figure 5.14 : arbre des possibilités.

Les valeurs des  $\alpha_i$  sont :  $\alpha_1 = 0,875$ ,  $\alpha_2 = 0,385$ ,  $\alpha_3 = 0,714$ ,  $\alpha_4 = 0,235$ ,  $\alpha_5 = 0,312$  et  $\alpha_6 = 0,008$ . De manière analogue aux cas précédents, nous avons déterminé la flexibilité de routage du système :  $S_4 = 2,159$

5) La figure 5.15 montre les exposants de Lyapunov pour ce cas :

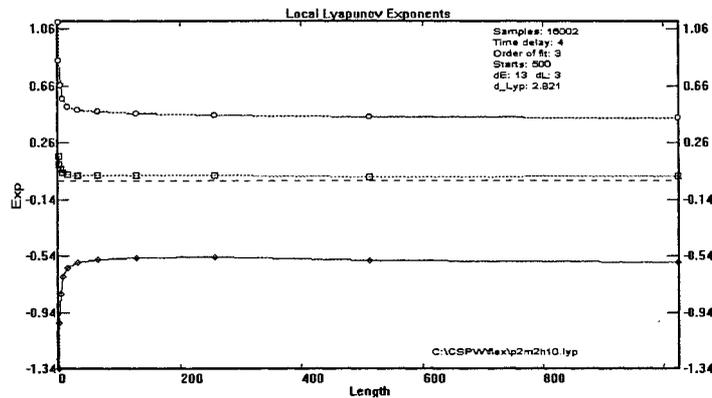


Figure 5.15 : exposants de Lyapunov avec une flexibilité de  $S_4$ .

Les valeurs des exposants sont :  $\lambda_1 = 0,442$ ,  $\lambda_2 = 0,0300$  et  $\lambda_3 = -0,5747$ . Ces valeurs donnent une dimension de Lyapunov de 2,821.

### 5.3.6. Cas V avec une flexibilité de routage $S_5$

1) Dans ce cas nous augmentons la flexibilité de la machine 2 afin qu'elle puisse réaliser, en plus du cas précédent, l'opération 3 des pièces de type 1. La figure 5.16 représente l'atelier dans ces conditions.

Ici, nous avons incorporé deux noeuds de décision  $D_7$  et  $D_8$ . Le noeud  $D_7$  représente la décision que prennent les pièces de type 1 pour effectuer leur troisième opération à la sortie de la machine 2.  $D_8$  représente le même type de décision pour les mêmes pièces en sortie de machine 1.

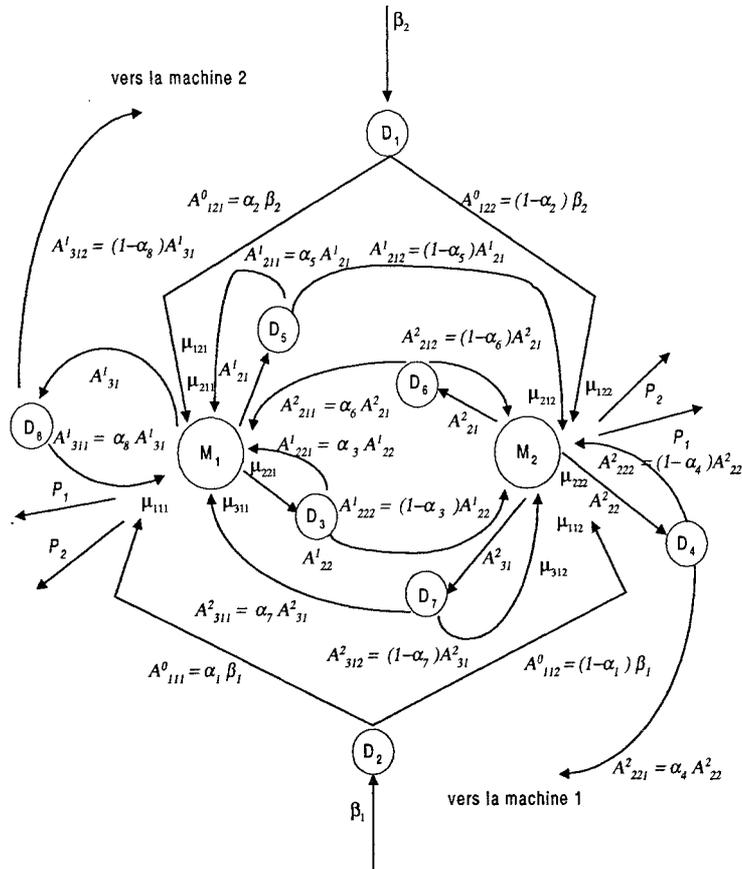


Figure 5.16 : graphe représentant l'atelier avec une flexibilité de  $S_5$ .

2) Les équations pour chaque noeud ou pour chaque machine sont :

$$\frac{A^0_{111}}{\mu_{111}} + \frac{A^1_{211} + A^2_{211}}{\mu_{211}} + \frac{A^1_{311} + A^2_{311}}{\mu_{311}} + \frac{A^0_{121}}{\mu_{121}} + \frac{A^2_{221} + A^1_{221}}{\mu_{221}} = 1 \quad \text{machine 1}$$

$$\frac{A^0_{112}}{\mu_{112}} + \frac{A^1_{212} + A^2_{212}}{\mu_{212}} + \frac{A^1_{312} + A^2_{312}}{\mu_{312}} + \frac{A^0_{122}}{\mu_{122}} + \frac{A^1_{222} + A^2_{222}}{\mu_{222}} = 1 \quad \text{machine 2}$$

$$A^0_{111} = \alpha_1 \beta_1$$

$$A^0_{112} = (1 - \alpha_1) \beta_1$$

$$A^0_{121} = \alpha_2 \beta_2$$

$$A^0_{122} = (1 - \alpha_2) \beta_2$$

$$A^1_{221} = \alpha_3 A^1_{22}$$

$$A^1_{222} = (1 - \alpha_3) A^1_{22}$$

$$A^2_{221} = \alpha_4 A^2_{22}$$

$$A^2_{222} = (1 - \alpha_4)A^2_{22}$$

$$A^1_{211} = \alpha_5 A^1_{21}$$

$$A^1_{212} = (1 - \alpha_5)A^1_{21}$$

$$A^2_{211} = \alpha_6 A^2_{21}$$

$$A^2_{212} = (1 - \alpha_6)A^2_{21}$$

$$A^2_{311} = \alpha_7 A^2_{31}$$

$$A^2_{312} = (1 - \alpha_7)A^2_{31}$$

$$A^1_{311} = \alpha_8 A^1_{31}$$

$$A^1_{312} = (1 - \alpha_8)A^1_{31}$$

3) Le tableau 5.6 montre les valeurs des paramètres pour ce cas :

	Pièces type 1, $\beta_1=9,900$			Pièces type 2, $\beta_2=18,8999$	
	Opérations			Opérations	
	O <sub>11</sub>	O <sub>21</sub>	O <sub>31</sub>	O <sub>12</sub>	O <sub>22</sub>
Machine 1	1/58	1/80	1/21	1/16	1/70
Machine 2	1/70	1/50	1/65	1/20	1/32

Tableau 5.6 : temps et alternatives d'usinage.

4) Mesure de flexibilité : La figure 5.17 représente l'ensemble des alternatives d'usinage.

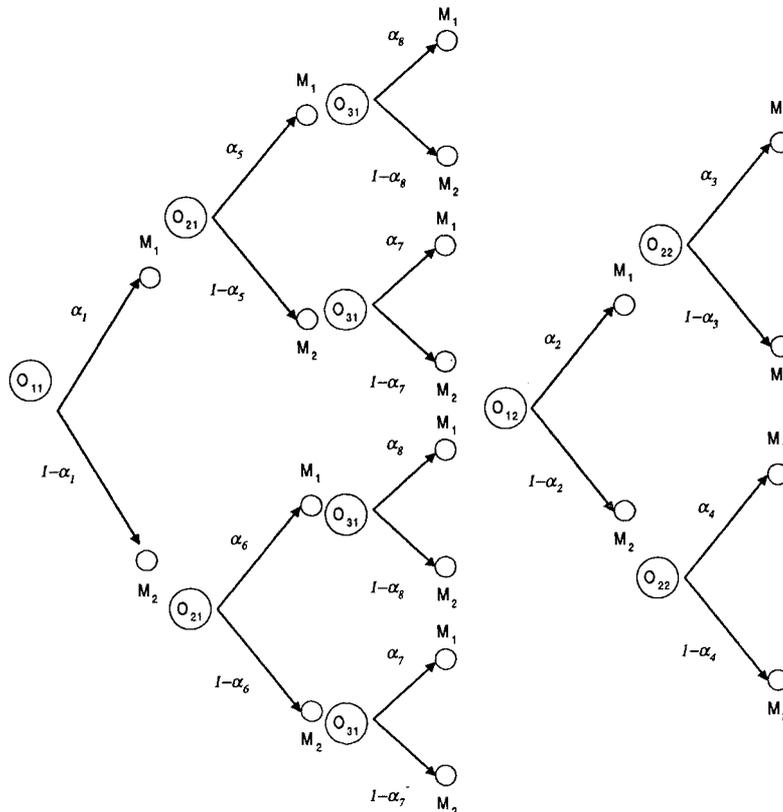


Figure 5.17 : arbre des possibilités d'usinage.

Les valeurs des  $\alpha_i$  sont :  $\alpha_1 = 0,645$ ,  $\alpha_2 = 0,371$ ,  $\alpha_3 = 0,96$ ,  $\alpha_4 = 0,473$ ,  $\alpha_5 = 0,834$ ,  $\alpha_6 = 0,07$ ,  $\alpha_7 = 0,026$  et  $\alpha_8 = 0,854$ . Ces valeurs donnent une flexibilité égale à 2,693.

5) La figure 5.18 montre les exposants de Lyapunov, dont les valeurs sont :  $\lambda_1 = 0.465$ ,  $\lambda_2 = 0.0762$ ,  $\lambda_3 = -0.6381$ . Ces valeurs donnent une dimension de Lyapunov de 2,849. Dans ce cas, nous avons obtenu 2 exposants de Lyapunov positifs.

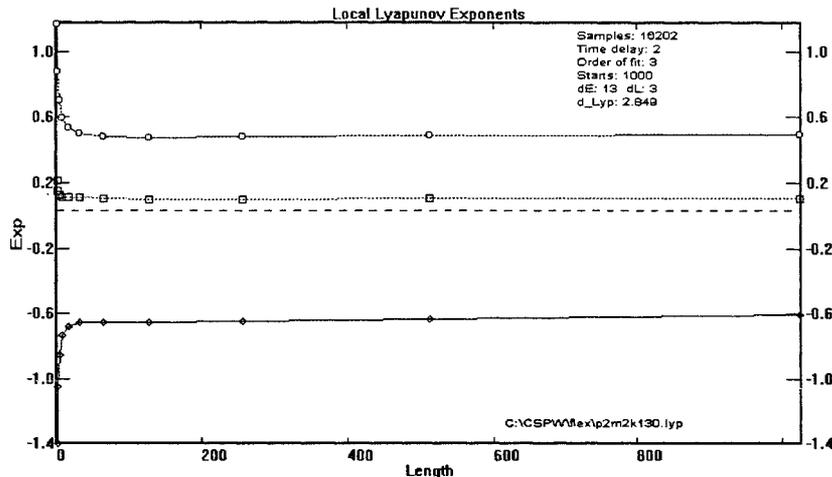


Figure 5.18 : exposants de Lyapunov avec une flexibilité de  $S_5$ .

#### 5.4. Relation entre flexibilité et complexité

Deshmukh [DES.95] propose de mesurer la complexité dynamique d'un système de production en utilisant l'exposant de Lyapunov le plus élevé. Cependant un problème se pose pour distinguer deux systèmes, le premier ayant un seul exposant positif de 1,8 et le second ayant deux exposants positifs de 1,5 et 0,8, par exemple. Il est difficile dans ce cas de déterminer lequel des deux a la dynamique la plus complexe. Par conséquent, nous proposons ici une autre méthode de mesure prenant en compte les exposants de Lyapunov les plus significatifs. Pour ce faire, nous proposons la dimension fractale de Lyapunov obtenue par la formule de Kaplan-Yorke. Cette formule utilise les exposants de Lyapunov les plus significatifs. Elle permet, de plus, d'obtenir une caractérisation des aspects géométriques de l'attracteur du système. Nous pensons que la proposition de Deshmukh est motivée par l'algorithme qu'il a employé, c'est-à-dire l'algorithme de A. Wolf [WOL.85], qui permet uniquement de déterminer l'exposant le plus élevé.

Le tableau 5.6 montre les valeurs de la flexibilité, la dimension de Lyapunov et les exposants de Lyapunov (le plus élevé) pour chaque système étudié.

Les figure 5.19 et 5.20 représentent respectivement la dimension fractale en fonction de la flexibilité et l'exposant de Lyapunov le plus élevé en fonction de la flexibilité.

Système	Flexibilité (entropie)	Complexité (dimension fractale)	Exposant de Lyapunov
1	0,693	2,292	0,277
2	1,355	2,503	0,256
3	1,767	2,755	0,424
4	2,159	2,821	0,442
5	2,693	2,849	0,465

Tableau 5.6 : valeurs de flexibilité et complexité.

Si nous prenons la dimension fractale comme une mesure de la complexité, nous constatons que la complexité dynamique du système augmente avec la flexibilité de routage. Ce résultat était prévisible. Nous l'avons ici vérifié expérimentalement. Nous remarquons aussi qu'il y a une certaine saturation dans la dimension fractale par rapport à la flexibilité.

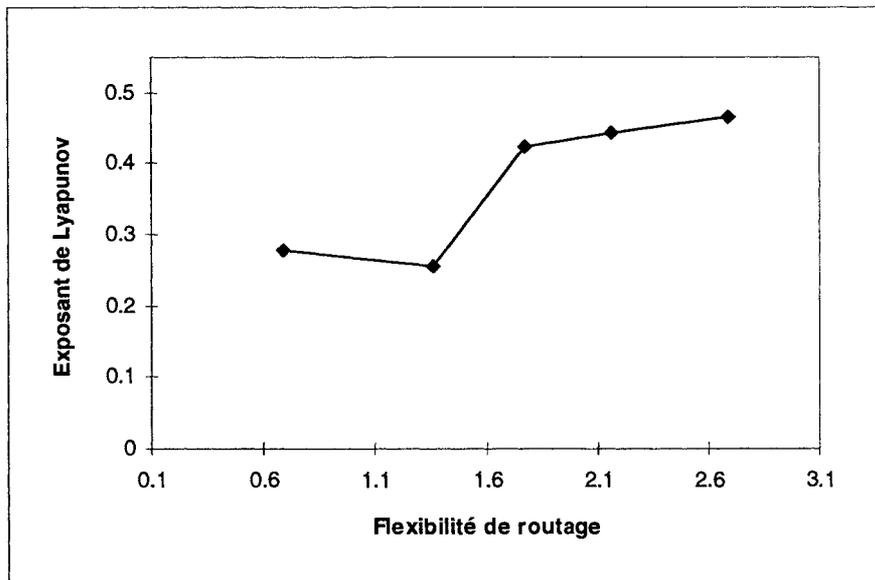


Figure 5.19 : relation entre l'exposant de Lyapunov et la flexibilité.

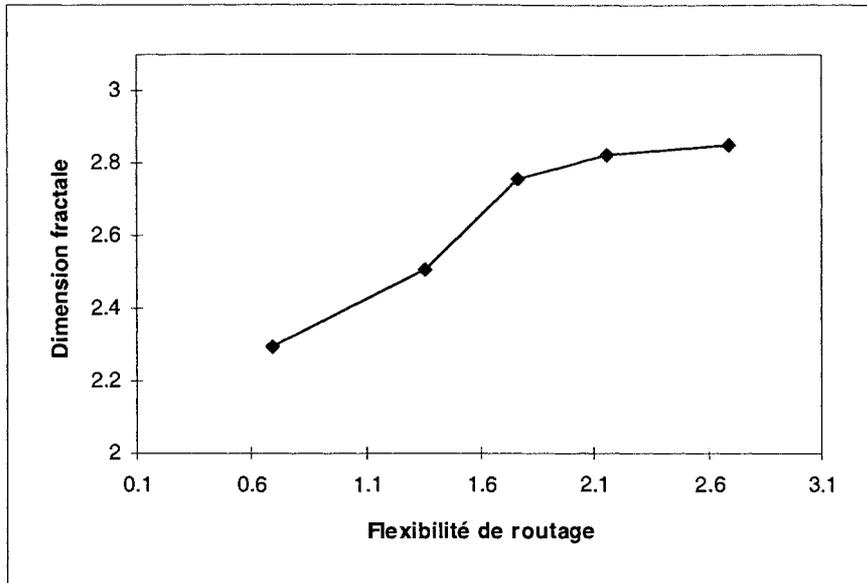


Figure 5.20 : relation entre la dimension fractale de Lyapunov et la flexibilité.

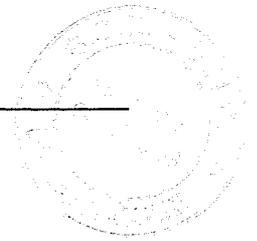
Sur la figure 5.19, nous observons que pour le système 2, l'exposant de Lyapunov est légèrement inférieur à celui de système 1, qui, pourtant, a une flexibilité inférieure. Ce résultat est inattendu. Il peut indiquer que l'exposant de Lyapunov le plus élevé n'est pas adéquat pour mesurer la complexité.

### 5.5. Résumé et conclusions

Dans cette partie, nous avons proposé une mesure de la complexité dynamique d'un atelier de production : la dimension fractale de Lyapunov. Cette mesure nous a permis d'étudier la relation entre la flexibilité de routage et la complexité dynamique du système. Nous avons ainsi constaté que cette dernière augmente avec la flexibilité de routage et que la relation entre les deux est non linéaire.

L'augmentation progressive de la flexibilité des machines du système simulé génère de nouveaux flux qui ont été mis en évidence sur les différents graphes. La mesure d'entropie proposée par Kumar prend en compte ce phénomène par les possibilités de choix offertes aux pièces pour ces nouveaux chemins.

La conception d'un atelier flexible de production prend traditionnellement en compte des critères technologiques et des critères économiques [SIN.92]. Nous proposons ici d'ajouter un autre critère : la complexité dynamique du système. Nous avons ainsi une mesure du degré d'imprévisibilité du système.



## Chapitre 6

### Modélisation et simulation de la cellule flexible de l'AIPL

#### 6.1. Introduction

Ce chapitre va nous permettre de valider l'ensemble de notre méthodologie d'analyse de la dynamique d'un système de production sur un système réel. Elle sera appliquée à la cellule flexible de production automatisée de l'Atelier Inter-établissements de Productique Lorrain (AIPL). Dans un premier temps, nous effectuerons une description du système en question, puis nous passerons à l'application de la démarche proposée.

#### 6.2 Description de la cellule

Le système flexible de production reproduit un processus d'assemblage de pièces mécaniques. Celles-ci peuvent s'assembler de diverses façons afin d'obtenir différents produits. Le système est constitué de :

- a) Quatre postes de travail reliés entre eux par un convoyeur de palettes et permettant d'assembler un produit (Sté Technimodern).
- b) Des palettes qui transportent les pièces et les produits et qui sont équipées d'étiquettes électroniques permettant d'avoir une image de l'état d'avancement des opérations.
- c) Quatre automates Série S7-315 (Sté Siemens) avec Entrées-Sorties déportées et coupleur Profibus-DP.
- d) Quatre pupitres opérateur OP15 (Siemens) pour le dialogue Homme-Machine.
- e) Quatre systèmes de Lecture-Ecriture d'étiquettes électroniques ASM440 (Siemens-Moby-I) permettant d'identifier les palettes et de gérer les informations mémorisées.
- f) Une console de développement PG740 (Siemens) pour le développement et la mise au point des programmes automates.
- h) Sept micro-ordinateurs équipés, d'une carte réseau MPI (Siemens) permettant de développer, de mettre au point, et de télécharger les programmes automates, et d'une carte Ethernet assurant la connexion au réseau Ethernet et l'accès aux Bases de Données.

La figure 6.1 montre un schéma de la cellule :

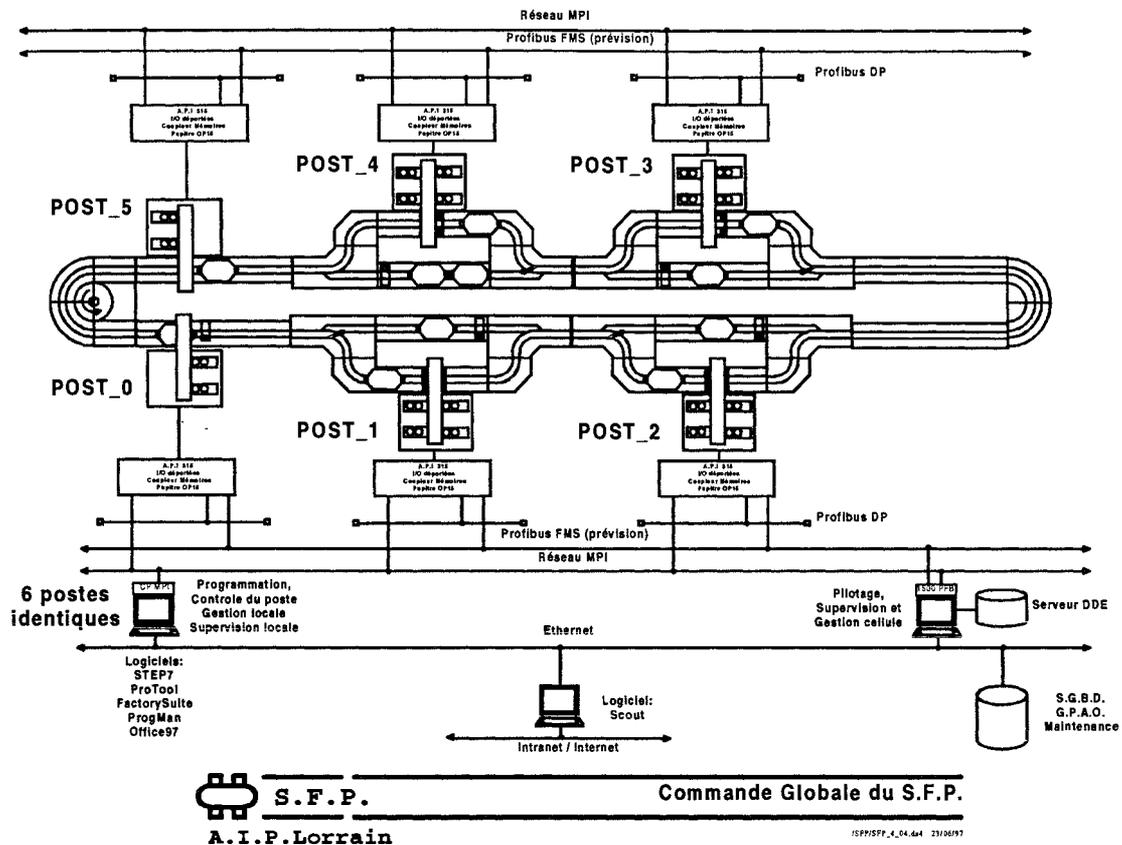


Figure 6.1: schéma de la cellule flexible de production.

### 6.3. Etude du comportement dynamique de la cellule flexible de production

Pour étudier le comportement dynamique du système nous appliquerons la même méthodologie que celle développée et employée dans les chapitres précédents et dont les étapes sont les suivantes :

#### 6.3.1. Décomposition du système en sous-systèmes

Chaque sous-système doit être composé de machines étant en relation réciproque. Dans le cas de la cellule, les machines se trouvent toutes en relation réciproque, car tous les postes de travail sont inter-reliés.

#### 6.3.2. Modélisation de chaque sous-système de l'atelier

Ici le sous-système est le système même. Nous avons, pour étudier son comportement, le choix entre deux méthodes : la première consiste à mesurer les données sur le système en

fonctionnement, la seconde consiste à les obtenir par simulation. Nous proposons la seconde pour pouvoir soumettre le système à différentes conditions de travail et pour avoir des données sans bruit. Le modèle de simulation a été construit avec SIMAN et l'interface ARENA.

### **6.3.2.1. Variables et paramètres (tous les paramètres sont déterministes) :**

- a) Soit  $q_{ij}(t)$  le nombre de pièces de type  $j$  qui attend son passage sur le poste de travail  $i$ .
- b) Soit  $T_j$  le temps de passage total des pièces de type  $j$  sur le système.
- c) Soit  $N_p$  le nombre de palettes dans le système.
- d) Soit  $V$  la vitesse du convoyeur.
- e) Soit  $1/\mu_{ij}$  le temps d'usinage ou assemblage des pièces de type  $j$  dans le poste de travail  $i$ .
- f) Chaque pièce a un ensemble d'opérations d'assemblage.

### **6.3.2.2. Fonctionnement du système et règles de décision.**

Comme nous l'avons déjà dit, la cellule est composée de quatre postes de travail liés par un convoyeur. Une poste est utilisé pour les entrées et sorties des pièces du système. Lorsqu'une pièce entre dans le système, elle est placée sur une palette. Celle-ci se déplace par l'action du convoyeur. Nous simulerons l'assemblage de deux types de pièces différents. Les entrées des pièces sur le système se font séquentiellement : deux pièces de type 1, une pièce de type 2 et ainsi de suite.

Une fois qu'une pièce entre dans le système le convoyeur la dirige vers le premier poste disponible qui peut réaliser la première opération. Si le nombre de palettes en attente devant le poste est supérieur à un certain nombre (4), la palette contenant la pièce est conduite vers le prochain poste où la même règle est reconduite. Toutes les opérations obéissent à ces conditions. Une fois la pièce entrée dans une file d'attente, elle devra attendre que les autres pièces qui la précèdent soient passées sur le poste (FIFO). Lorsque la pièce est totalement terminée, elle sort du système et la palette libre est occupée par une autre pièce du même type.

Dans un premier temps, nous travaillerons avec une gamme fixe pour chaque type de pièce. Si les résultats indiquent que le système tend vers un comportement périodique (point fixe ou cycle limite), nous simulerons alors le système avec des gammes flexibles.

Le tableau suivant montre les valeurs des paramètres employés dans toutes les simulations :

Type de Pièce	Temps opératoires [sec]			Vitesse du convoyeur [cm/sec]	Nombre de palettes
	Opération 1	Opération 2	Opération 3		
1	60	70	50	16,4	21
2	70	100	60		

Tableau 6.1 : valeurs des paramètres.

### 6.3.3 Validation du modèle

Le modèle de la cellule a déjà été réalisé dans le cadre de l'enseignement (M. Roesch, O. Million). Il a donc été testé et validé à de nombreuses reprises par des enseignants et des étudiants.

### 6.3.4 Etudes préliminaires

Cette étape consiste à simuler le système pour savoir s'il manifeste une conduite irrégulière. Puis nous verrons si le système est sensible aux conditions initiales c'est-à-dire si, lorsqu'on modifie légèrement les conditions de départ, il donne des réponses différentes. Puis, nous tenterons de mesurer les invariants de la dynamique à l'aide des outils des systèmes dynamiques non linéaires.

#### 6.3.4.1. Analyses des résultats des simulations

Sur les figures suivantes se trouvent résumés les résultats des simulations sous les conditions expliquées dans les paragraphes précédents. La figure 6.2 montre la moyenne temporelle des pièces de type 1 qui attendent l'accès au poste de travail 1. La figure 6.3 et 6.4 montrent respectivement le temps de passage total de chaque pièce de type 1 et 2.

Le nombre moyen de pièces de type 1 qui attendent le poste 1 tend vers un intervalle qui oscille approximativement entre 1,3 et 3,5. La valeur n'est certes pas très grande (il y a en effet un nombre limité de pièces de type 1 dans le système) mais l'amplitude qu'elle produit

dans le temps de passage (ou séjour) des pièces dans le système n'est pas négligeable. Nous le constatons sur les figures 6.3 et 6.4.

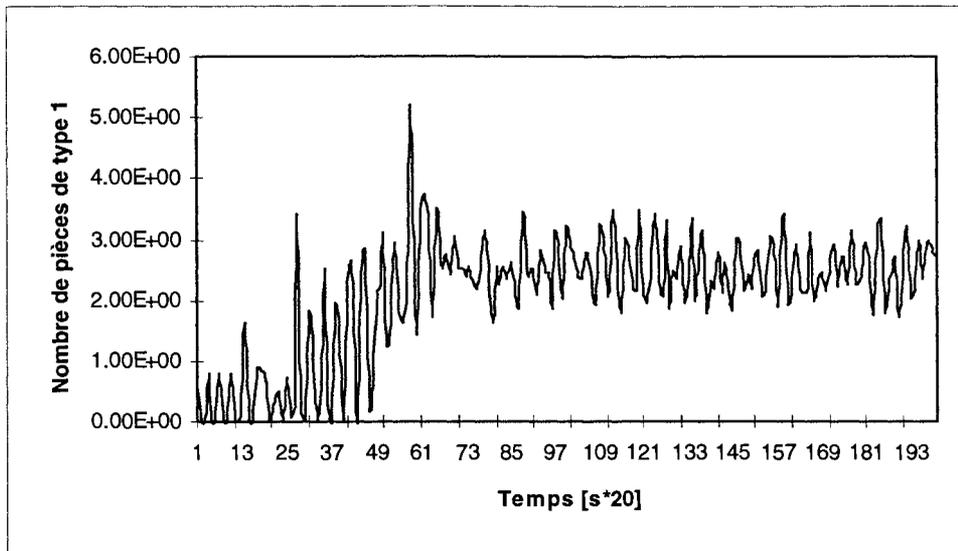


Figure 6.2 : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 1 dans le poste 1.

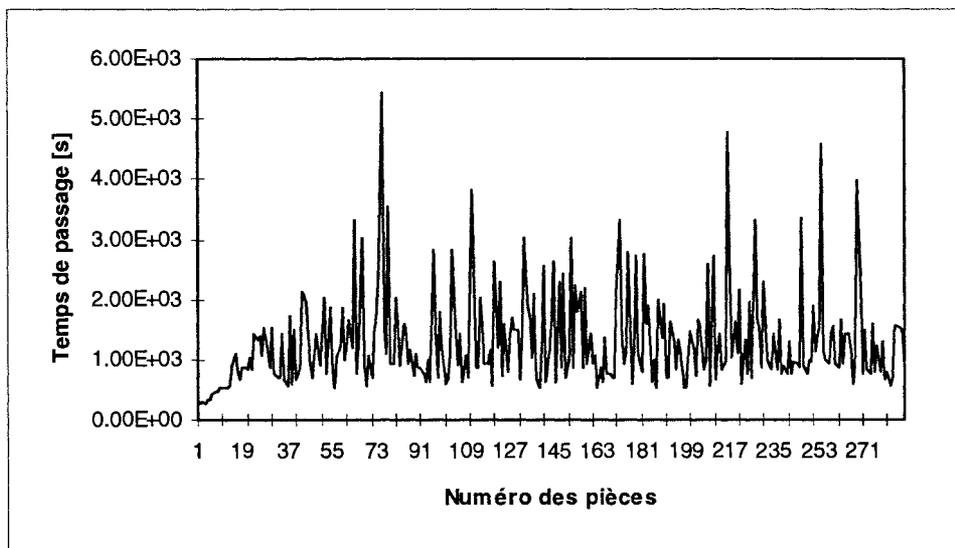


Figure 6.3 : Temps de passage des pièces de type 1.

Les valeurs maximum et minimum des temps de passage des pièces varient entre 132 minutes et 4 minutes, ces variations étant donc très importantes. Ceci s'explique par le (ou les) tour(s) que les palettes peuvent être amenées à effectuer avant de pouvoir accéder à un poste. Elles sont alors considérées comme en attente du poste. On peut également remarquer que le temps de passage des pièces a une évolution irrégulière.

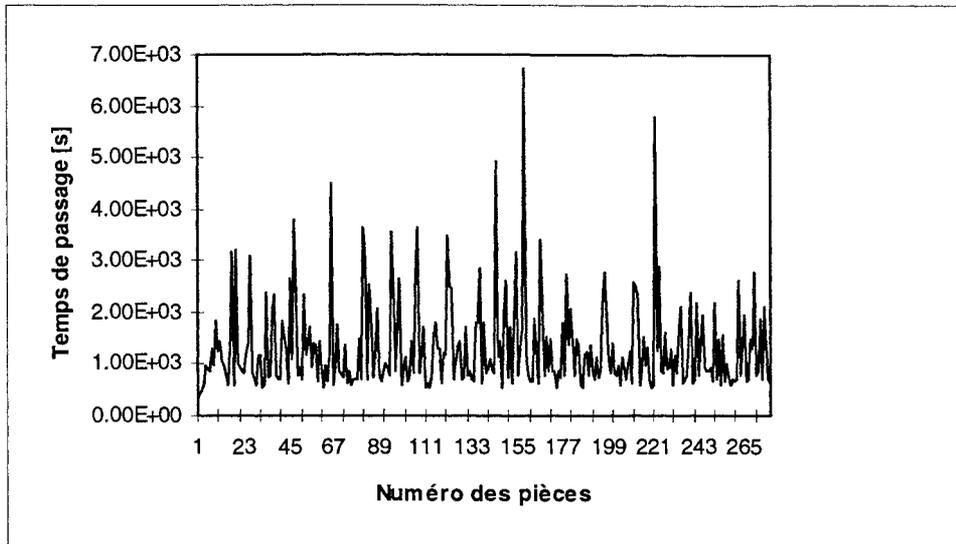


Figure 6.4 : Temps de passage des pièces de type 2.

### 6.3.4.2. Sensibilité aux conditions initiales

Nous avons vu que les variables du système étudié suivent des trajectoires erratiques. Nous rendons compte dans cette partie des résultats obtenus pour une condition de départ différente du système. L'objectif est de vérifier si celui-ci a une réponse distincte pour des conditions initiales proches. Ainsi, nous aurons un premier aperçu du comportement dynamique du système. La modification que nous ferons consiste à changer le type de la première pièce qui entre dans le système.

Cette expérience consiste à commencer la simulation en modifiant le type de pièce par rapport à la simulation précédente. Dans le cas antérieur nous avons commencé la simulation avec une pièce de type 1. Nous la commencerons ici avec une pièce de type 2. Nous maintiendrons par la suite deux pièces de type 1 et une pièce de type 2. L'idée est d'observer la réaction du système à ce changement.

La figure 6.5 montre les deux courbes des moyennes temporelles des pièces qui attendent le poste 1 pour le premier système et pour le système modifié. Nous constatons sur cette figure qu'au bout d'un certain temps de fonctionnement (5 minutes environ) les courbes ne se superposent plus.

La figure 6.6 présente pour les deux systèmes les temps de passage des pièces de type 1 dans leur ordre d'entrée dans le système. La figure 6.7 montre les différences entre ces deux temps.

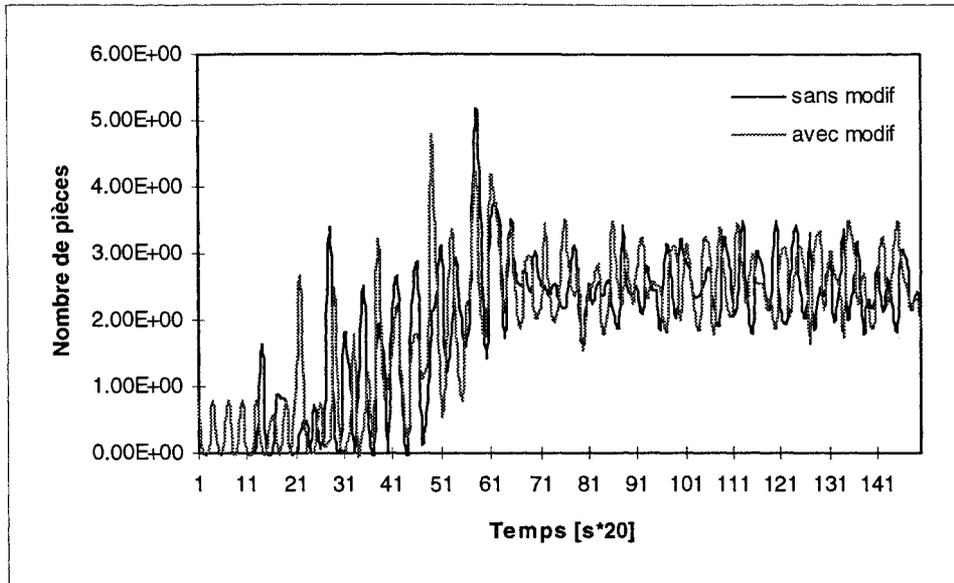
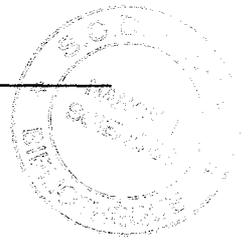


Figure 6.5 : moyennes temporelles des pièces de type 1 qui attendent le poste 1 pour les deux systèmes.

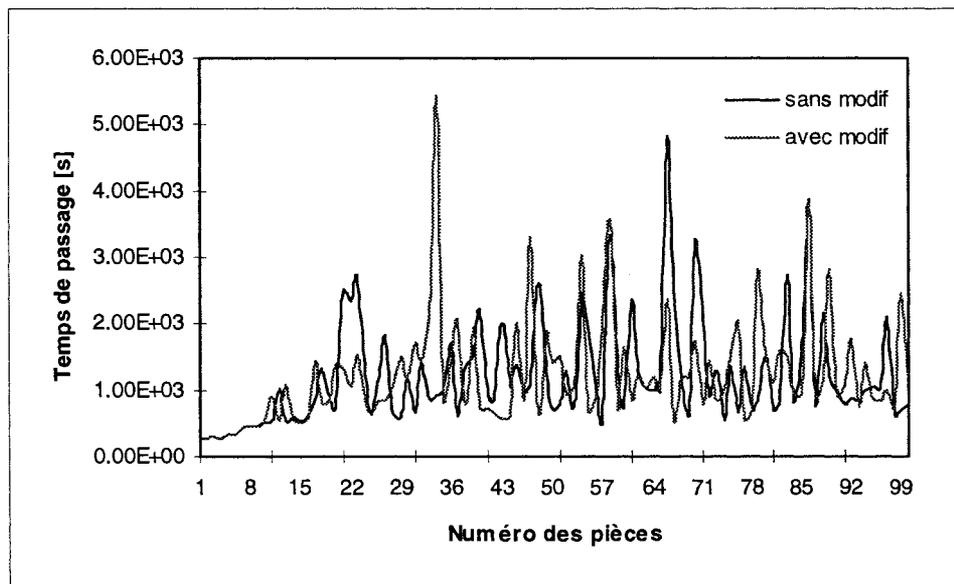


Figure 6.6 : temps de passage des pièces de type 1 pour les deux systèmes.

Nous remarquons, par exemple, que le temps de passage de la pièce 85 (type 1) dans le premier système est de 95 minutes supérieur au temps de passage dans le second. Nous constatons donc que si nous modifions simplement le type de la première pièce qui entre sur le système, l'évolution du système est différente.

Nous avons fait d'autres changements dans les conditions initiales, comme par exemple la modification de l'instant d'arrivée d'une pièce ou la disposition d'une palette dans le convoyeur etc... Dans tous les cas, nous avons pu observé que l'évolution du système était à chaque fois différente.

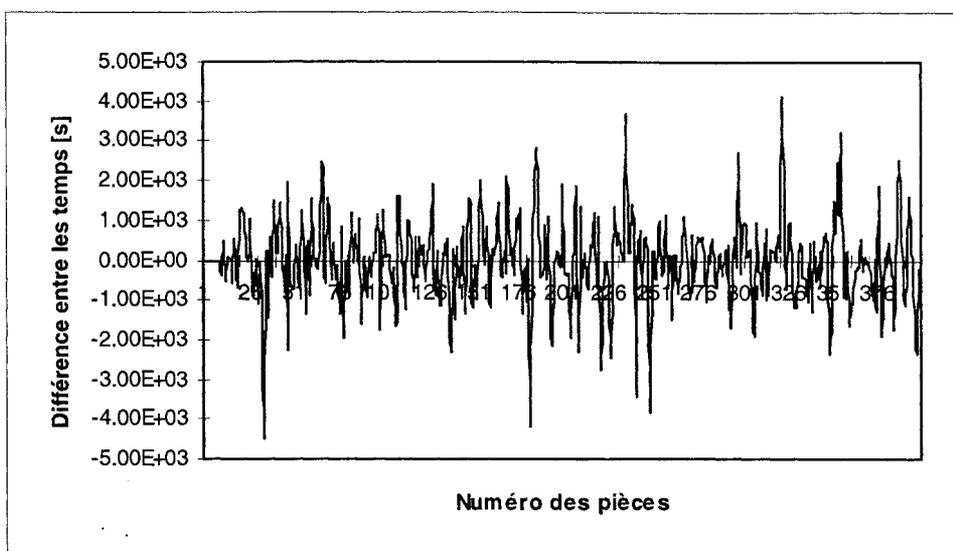


Figure 6.7 : différence entre les temps de passage.

### 6.3.4.3. Analyse de bifurcation

A travers d'autres simulations nous avons constaté que le comportement du système dépendait du nombre de palettes dans le convoyeur. Nous avons par conséquent décidé d'en changer le nombre sur le convoyeur. Cette étude est quasi semblable à une analyse de bifurcation. La différence est que le paramètre change de façon discrète.

La figure 6.8 montre les valeurs lors de l'étape finale de la simulation des temps de passage des pièces de type 1. Les valeurs des autres paramètres employés sont les mêmes que dans les cas précédents.

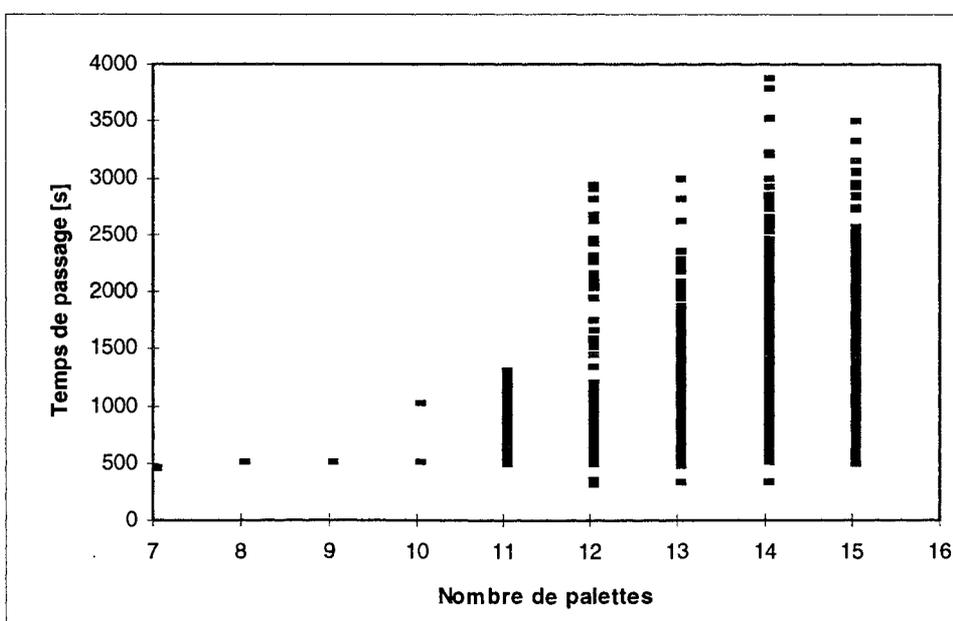


Figure 6.8 : variation du temps de passage par rapport au nombre de palettes.

Le temps de passage des pièces tend vers une valeur fixe pour un nombre de palettes compris entre 7 et 9. Pour 10 palettes les valeurs des temps de passage oscillent de manière périodique entre deux valeurs: 517 et 1034. Cependant, lorsque nous passons à 11 palettes il n'existe plus de période. La même observation pour un nombre de palettes supérieur à 11. L'évolution du temps de passage des pièces est donc erratique.

### 6.3.5. Détermination des invariants de la dynamique du système

Nous avons vu par simulation que le système est sensible aux conditions initiales, et qu'il suit des trajectoires qui semblent aléatoires. Pour caractériser la dynamique nous adopterons la démarche proposée par la théorie des systèmes dynamiques non linéaires (voir chapitre 2). Pour cela nous prendrons les résultats du système étudié précédemment. Nous analyserons les moyennes temporelles des pièces en attente même si l'amplitude des oscillations de ces moyennes est relativement petite. Celles-ci produisent en revanche de grandes amplitudes dans les temps de passage des pièces, ce sont donc des variables significatives dans la dynamique du système.

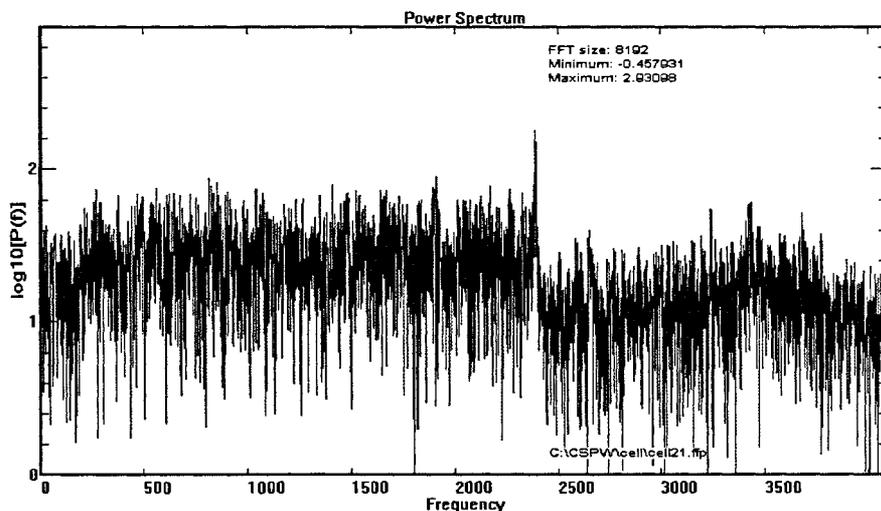


Figure 6.9 : spectre de Fourier.

Nous prendrons, pour cette étude, les mêmes données que celles représentées figure 6.2, c'est à dire les moyennes temporelles des pièces de type 1 en attente du poste de travail 1. La figure 6.9 montre le spectre de Fourier de ce signal.

Le spectre de Fourier produit par le signal est composé par un nombre infini de fréquences. Cependant, nous constatons qu'il y a une fréquence dominante. Cela pourrait indiquer que la dynamique du système se trouve entre une dynamique aléatoire et une dynamique périodique. En effet, la figure 6.10 montre la fonction d'autocorrélation dans laquelle nous relevons la

même caractéristique : la fonction tend rapidement vers zéro, mais elle maintient une certaine régularité. Ces deux tests nous indiqueraient que nous sommes peut-être dans le cas d'une dynamique chaotique.

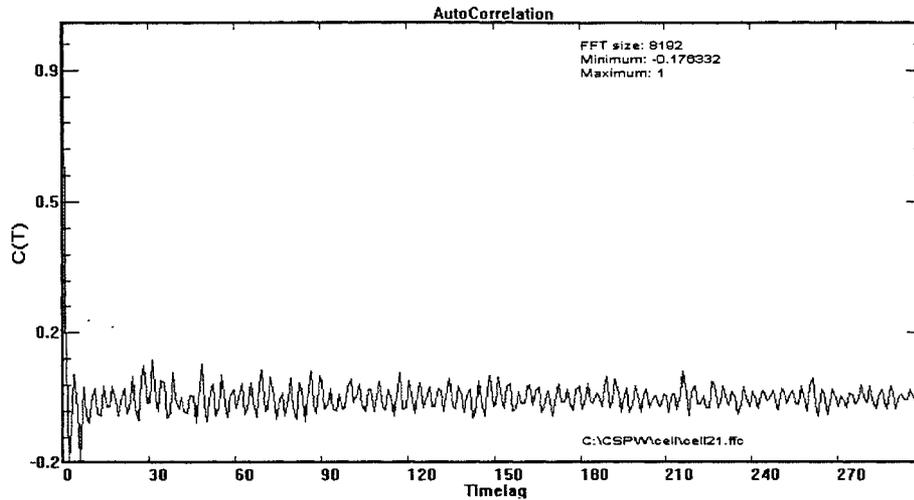


Figure 6.10 : fonction d'autocorrélation.

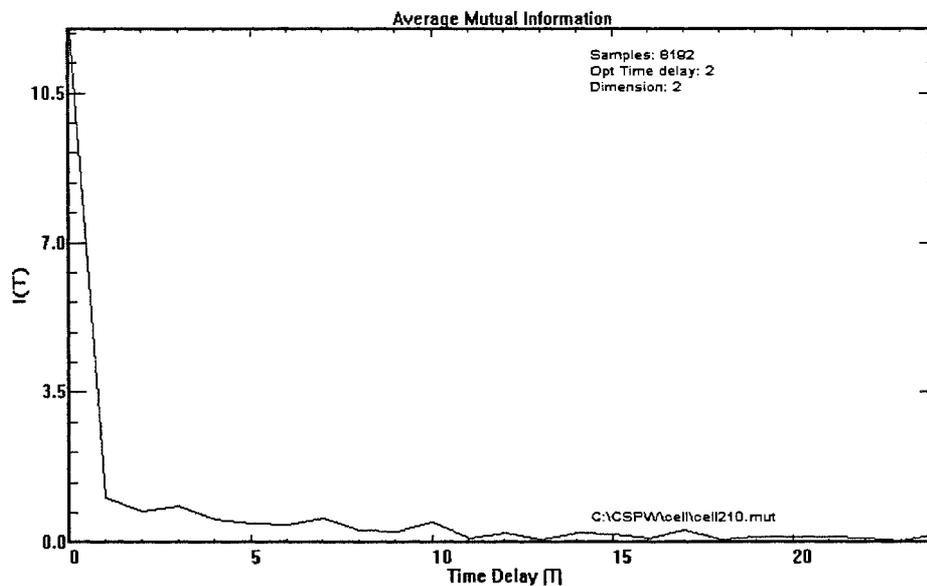


Figure 6.11 : fonction d'information mutuelle.

La figure 6.11 montre l'obtention du retard optimum à l'aide de la fonction d'information mutuelle, sa valeur étant égale à 2. En utilisant cette valeur, nous déterminons la dimension de plongement de l'attracteur. Pour cela, nous employons la fonction "dimension de corrélation".

Nous constatons sur la figure 6.11 qu'à partir d'une dimension de plongement égale à 8. La pente de la fonction "dimension de corrélation" est indépendante de la dimension de

plongement. Avec ce résultat, nous pouvons affirmer que la dimension de l'espace de phases qui contient l'attracteur du système peut être 8 ou 9 (cette dimension est appelée dimension globale). Dans ce cas, nous n'avons pas de signal avec un nombre suffisant de points pour obtenir une estimation propre de la dimension fractale de l'attracteur à partir de la fonction dimension de corrélation. Nous employons donc cette fonction uniquement comme un indicateur de l'existence d'une dimension globale qui contient l'attracteur.

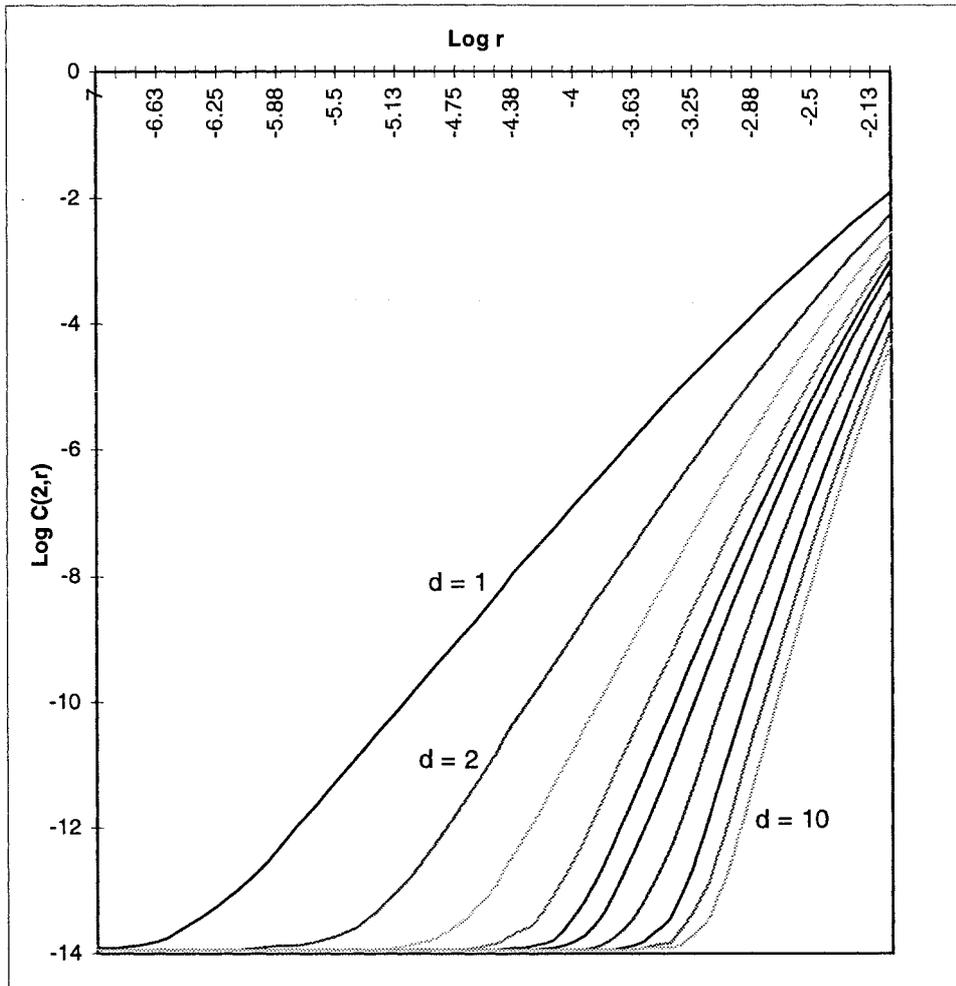


Figure 6.11 : la fonction dimension de corrélation.

Nous estimerons la dimension fractale de l'attracteur à partir de la dimension fractale de Lyapunov. Dans ce cas nous utiliserons l'algorithme de Krueel [KRU.93] pour obtenir les exposants de Lyapunov, car cet algorithme s'est avéré plus adéquat (dans ce cas) que celui qu'utilise le logiciel CSPW.

La figure 6.12 montre tout le spectre des exposants de Lyapunov. Nous voyons qu'il existe une bonne convergence de ceux-ci et qu'il y a une valeur positive significative égale à  $\lambda_1 = 0.0137$ . A partir des exposants nous déterminons la dimension fractale de Lyapunov dont la

valeur est égale à 2.096. Cette valeur indique que l'attracteur est étrange. Nous sommes donc en présence d'une dynamique chaotique.

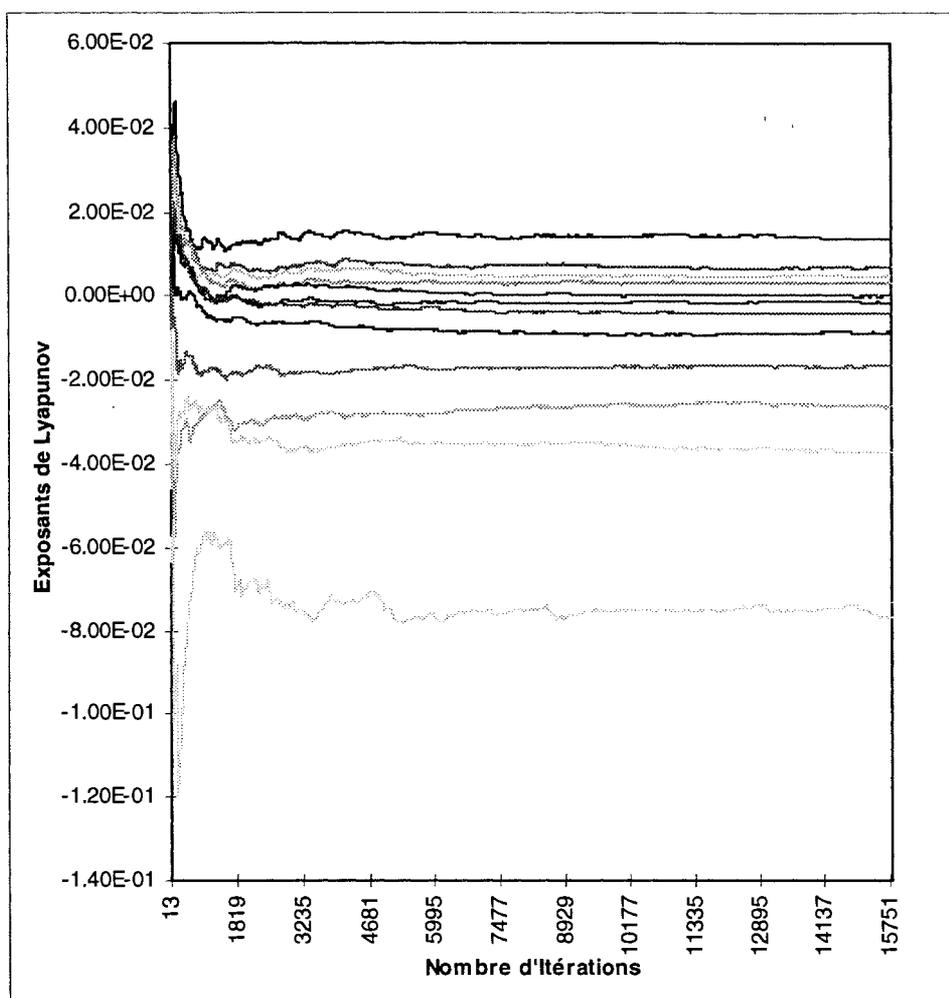


Figure 6.12 : exposants de Lyapunov.

#### 6.4. Résumé et conclusions

1. La dynamique du système dépend du nombre de palettes sur le convoyeur, nous avons vu qu'avec un nombre supérieur à 10 elle devient complexe, tant pour le nombre de pièces qui attend un poste que pour le temps de passage de celles-ci.
2. Nous avons vu d'abord de manière intuitive, puis formelle, que le comportement du système est chaotique. En effet, nous avons observé que pour différentes conditions initiales le comportement du système est distinct. Puis, nous avons obtenu l'existence d'un exposant de Lyapunov positif et de l'attracteur étrange. Ce résultat ouvre des perspectives de recherche orientées vers le contrôle du système. En effet, étant donnée sa dynamique chaotique, il faudra étudier la possibilité d'application des techniques de contrôle [SHIN.95] qui s'utilisent

dans d'autres domaines : physiques des plasmas [PIE.96], [BON.97] par exemple ou le développement d'autres outils appropriés au cas précis de la cellule.

## Conclusions générales et perspectives

Cette thèse nous a permis pendant ces quelques années de travail d'aborder une nouvelle voie de recherche dans le domaine des systèmes manufacturiers. Outre les aspects théoriques, parfois difficiles à appréhender, la quantité de tests et de simulation a représenté une charge de travail importante. En effet, l'état de l'art de la théorie du chaos jusqu'alors, ne permettait guère de savoir à priori quand et sous quelles valeurs de paramètres un système peut avoir une dynamique chaotique. Il n'existe pas de théorème nous indiquant le moment où a lieu une bifurcation, ou qui nous fournisse l'ensemble des conditions initiales qui conduisent le système vers un régime périodique ou chaotique. Lorsque nous faisons une étude de la dynamique d'un système productif, il faut donc faire des simulations et soumettre le système à toutes les conditions possibles et réalistes dans lesquelles le système peut fonctionner.

Nous sommes conscients que cette contribution n'est qu'une première étape dans cette nouvelle voie de recherche, et qu'un nombre de travaux considérables restent à mener. Nous allons ici présenter sous forme synthétique nos conclusions générales et les différents apports issus de nos travaux. Nous tenterons enfin d'ébaucher quelques perspectives sans forcément être complètement exhaustif.

### Conclusions générales

Nous avons étudié la dynamique d'un atelier de production flexible et générique et observé deux types de comportement en fonction des règles de décision choisies. Le système se comporte soit de manière aléatoire ou soit de manière chaotique. Le comportement aléatoire du système est en particulier intervenu lorsqu'aucune règle de sélection n'était employée (règle permettant à une machine de définir le type de pièce avec lequel elle va travailler et la durée de ce travail). Dans ce cas, la dynamique du système était d'un haut degré de liberté. L'utilisation de règles de sélection nous a permis d'obtenir dans certains cas, des dynamiques de bas degré de liberté, c'est-à-dire chaotiques. Dans le dernier chapitre, l'étude menée sur le cas de la cellule flexible de l'AIPL, montre que sous certaines conditions de travail, la dynamique de la cellule est chaotique. Cependant, dans ce cas, aucune règle de sélection n'avait été introduite pour les postes de travail. Ceci confirme la prudence avec laquelle il faut interpréter ces résultats et leur généralisation.

Nous soutenons, qu'un système productif n'a pas de dynamique chaotique en soit et en tant que système artificiel. Sa dynamique dépend des conditions de travail, des fonctions de décision employées, des niveaux de charge, etc... La connaissance de l'existence du

comportement chaotique d'un système de production est essentielle, puisqu'elle implique la non prévisibilité à long terme du comportement de celui-ci.

## **Les apports**

### **Une preuve de l'existence d'un comportement chaotique dans les systèmes flexibles de production automatisée :**

Le principal objectif de ce travail a consisté à répondre à la question : Est-il possible qu'un système de production puisse manifester une dynamique chaotique ? En effet, nous avons montré que même des systèmes dits "simples" peuvent, en fonction des règles de décision, avoir un comportement chaotique parmi d'autres comportements (points fixes et cycles limites).

### **Une méthodologie d'analyse de la dynamique d'un système productif :**

Notre contribution est également méthodologique, puisque nous avons développé une méthodologie d'analyse pour déterminer le type de dynamique d'un système manufacturier. Les étapes en sont les suivantes :

- a) Décomposition du système en sous-systèmes où chaque sous-système doit être composé de machines étant en relation réciproque.
- b) Modélisation et validation de chaque sous-système de l'atelier.
- c) Etudes préliminaires : cette étape consiste à simuler le système avec différents fonctionnements et à vérifier si son comportement est irrégulier et sensible aux conditions initiales. Les résultats de ces études préliminaires nous indiquent si le système peut ou non présenter un comportement chaotique ou aléatoire. En effet, s'il n'a pas de conduite irrégulière, son comportement est périodique. Il doit de plus présenter une certaine sensibilité aux conditions initiales pour que la démarche puisse être poursuivie.
- d) Analyse de bifurcation : on identifie un paramètre avec lequel le système peut avoir différents comportements (ou scénarios) en fonction de ses valeurs. Cette étude nous permet de trouver les valeurs des paramètres qui peuvent impliquer un comportement chaotique.

e) Application des outils provenant de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires pour caractériser la dynamique du système (voir chapitre 2). Nous avons appliqué cette démarche pour faire l'analyse de la dynamique de la cellule flexible de production de l'AIPL.

### **La proposition d'une mesure de la complexité dynamique d'un atelier flexible :**

Pour les systèmes chaotiques, nous avons proposés un quantificateur de la complexité du système. La mesure de la complexité dynamique du système est effectuée par la dimension de Lyapunov déterminée à partir de la conjecture de Kaplan-Yorke.

### **Illustrer la relation entre flexibilité de routage et complexité dynamique :**

Une application du concept de chaos a été faite dans l'étude de la relation entre la flexibilité de routage et la complexité dynamique d'un atelier. Nous avons conclu que la complexité dynamique du système augmente lorsque nous augmentons la flexibilité de routage. Cette relation n'est pas linéaire, car la complexité atteint un certain seuil.

### **Montrer qu'un système réel peut avoir un comportement chaotique**

Nous avons appliqué notre méthodologie à l'étude du comportement dynamique de la cellule flexible de production automatisée de l'Atelier Inter-établissements de Productique Lorrain (AIPL). Nous avons alors démontré que sous certaines conditions de travail, la dynamique du système est chaotique.

### **Les perspectives**

Avant de penser à de possibles applications de la théorie du chaos dans les systèmes de production, il a fallu démontrer que ce comportement pouvait exister. Ce travail a constitué le premier pas dans cette ligne de recherche. Or, dans d'autres domaines, physiques des plasmas [BON.97], [PIE.96], laser, par exemple, diverses techniques sont développées pour contrôler le chaos. Une ligne de recherche est d'examiner l'applicabilité de ces méthodes dans le cas des ateliers flexibles de production chaotiques.

Une autre ligne de recherche est l'étude de la dynamique d'un système à partir de signaux, représentatifs d'une certaine réalité, qui permettent de représenter la dynamique du système avec des équations différentielles. Cette construction devrait permettre de prévoir le comportement du système à court terme [ABA.96].

D'autres études peuvent être réalisées telles que : l'analyse des niveaux de performances pour des ateliers possédant des comportements chaotiques, et une taxonomie des systèmes de production selon les différentes règles de décision et leurs comportements dynamiques.

Les différentes études que nous avons menées pourraient être reprises à l'aide d'autres outils développés dans le cadre des systèmes dynamiques non linéaires. Par exemple, l'utilisation de modèles statistiques [FAR.87], [CAS.92], [SER.94], [GUE.95], [TAK.96], ou de la décomposition en valeurs singulières [BAG.93].

## Références Bibliographiques

- [ABA.96] ABARBANEL H., *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer, 1996.
- [ALF.97] ALFARO M., BONHOMME G., CHARPENTIER P., MARTIN P., *Vers la mise en évidence d'un régime chaotique d'un atelier flexible de production automatisé*, 2ème Congrès International Franco-Québécois. Albi, France, 1997.
- [BAG.93] BAGLIO S., FORTUNA L., *A singular value decomposition approach to detect chaotic dynamics*, Proceeding of the 36th Midwest Symposium on Circuits and System, New York IEEE, Vol 2, pp 982-986, 1993.
- [BER.84] BERGE P., POMEAU Y., VIDAL C., *L'ordre dans le chaos*, Hermann, France, 1984.
- [BER.94] BERGE P., POMEAU Y., DUBOIS-GANCE M., *Des rythmes au chaos*, Editions Odile Jacob, France, 1994.
- [BON.97] BONHOMME G., *Le chaos et son contrôle dans les plasmas de laboratoire*, Congrès Société Française Physique section Plasmas, Autrans France, Février 1997.
- [BLA.82] BLACKSTONE J., PHILLIPS D., HOGG G., *A state-of-the-art survey of dispatching rules for manufacturing job shop operations*, International Journal Production Research, Vol. 20, N° 1, 27-45, 1982.
- [BRI.89] BRILL P., MANDELBAUM M., *On measures of flexibility in manufacturing systems*, International Journal Production Research, Vol. 27, N° 5, 747-756, 1989.
- [BRO.84] BROWNE J., DUBOIS D., RAHMILL K., SETHI S., STECKE K., *Classification of flexible manufacturing systems*, The FMS Magazine, pp 114-117, Avril 1984.
- [BUZ.86] BUZACOTT J., YAO D., *Flexible manufacturing systems : A review of analytical models*, Management Sciences, Vol. 32, N° 7, 1986.
- [CAS.92] CASDAGLI M., JARDINS D., EUBANK S., FARMER J., GIBSON J., THEILER J., *Nonlinear modeling of chaotic time series : theory and applications*, Applied Chaos, Edité par Kim H. Stringer J., John Wiley & Sons, Inc. 1992.
- [COH.95] COHENDET P., LLERENA P., MUTEL B., *Complexity control, flexibility and the coherence of production*, Recherche Opérationnelle, Vol. 29, N° 3, pp 245-257, 1995.
- [CHA.92] CHANDRA P., TOMBAK M., *Models for the evaluation of routing and machine flexibility*, European Journal Operation Research, Vol 60, pp 156-165, 1992.

- [CHU.89] CHUNG C., CHEN I., *A systematic assessment of the value flexibility froms FMS*, Proceeding 3rd ORSA/TIMS Special Interest Conference on FMS Edité par Steke K. Suri R. Elsevier, Amsterdams The Netherlans pp 27-34, 1989.
- [DAS.93] DAS S., NAGENDRA P., *Investigations into the impact of flexibility on manufacturing performance*, International Journal Production Research, Vol. 31, N° 10, pp 2337-2354, 1993.
- [DES.93] DESHMUKH A., *Complexity and chaos in manufacturing systems*, PhD thesis, School of Industrial Engineering, Purdue University, Août 1993.
- [DES.95] DESHMUKH A., TALAVAGE J., *Complexity in Manufacturing Systems : Definitions and Measurements*, Flexible Automation and Intelligent Manufacturing, Proceeding of the Fifth International FAIM Conference, University of Stuttgart, pp. 35-43, 1995.
- [ERR.91] ERRAMILI A., FORYS L., *Oscillations and Chaos in a Flow Model of a Switching System*, IEEE Journal on Selected Areas in Comuncations, Vol. 9, N° 2, pp. 171-178, 1991.
- [FAR.87] FARMER J., SIDOROWICH J., *Predicting chaotic times series*, Physical Review Letters, Vol. 59, N° 4, pp 845-848, 1987.
- [FEI.93] FEICHTINGER G., KOPEL M., *Chaos in nonlinear dynamical systems exemplified by an R&D model*, European Journal of Operational Research, Vol. 68, pp 145-159, 1993.
- [FEI.94] FEICHTINGER G., HOMMES C., HEROLD W., *Chaos in a Simple Deterministic Queueing System*, Mathematical Methods of Operations Research, pp. 109-119, 1994.
- [FEN.95] FENCHEL J., CHEN Y., *A stable, distributed routing policy for flexible manufacturing systems*, Flexible Automation and Intelligent Manufacturing, Proceeding of the Fifth International FAIM Conference, University of Stuttgart, pp. 790-809, 1995.
- [FRE.88] FREIN Y., DALLERY Y., PIERRAT J., DAVID R., *Optimisation du routage des pièces dans atelier flexible par des méthodes analytiques*, R.A.I.R.O. APII, Vol 22, pp 489-507, 1988.
- [GRA.84] GRASSBERGER P., PROCACCIA I., *Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach*, Physica 13D, pp. 34-54, 1984.
- [GRE.84] GREBOGI E., OTT E., PELIKAN S., YORKE J., *Strange attractors that are not chaotic*, Physica13D, pp 261-268, 1984.
- [GUE.95] GUEGAN D., LEORAT G., *Consistent estimation to determine the embedding dimension in financial data*, Prépublication Mathématiques de l'Université Paris-Nord 95-07, Mai 95.

- [GUP.92] GUPTA Y., SOMERS T., *The measurement of manufacturing flexibility*, European Journal of Operational Research, Vol 60, pp 166-182, 1992.
- [GUP.93] GUPTA D., *On measurement and valuation of manufacturing flexibility*, International Journal Research, Vol. 31, N° 12, pp 2947-2958, 1993.
- [HIL.94] HILBORN R., *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford Student Edition, 1994.
- [HOL.88] HOLLARD M., LAMOTTE B., MARGIRIER G., *Flexibilité et complexité des systèmes de production*, Congrès Automatique, AFCET Grenoble, pp 125-132, 1988.
- [HOR.89] HORNS A., *Job shop control under influence of chaos phenomena*, Proceeding IEEE International Symposium on Intelligent Control, Comput. Soc. Press, Washington DC, pp 227-232, 1989.
- [KOC.94] KOCHIKAR V., NARENDRAN T., *On using abstract models for analysis of flexible manufacturing systems*, International Journal Production Research, Vol. 32, N° 10, pp 2303-2322, 1994.
- [KOC.93] KOCHIKAR V., NARENDRAN T., *A state space approach for qualitative analysis of flexible manufacturing systems*, Computer Integrated Manufacturing System N° 6, pp 9-17, 1993.
- [KUM.87] KUMAR V. *Entropic measures of manufacturing flexibility*, International Journal Production Research, Vol. 25, N° 7, pp 957-966, 1987.
- [KUM.90] KUMAR P., SEIDMAN T., *Dynamics instabilities and stabilizatatio methods in distributed real-time scheduling of manufacturing systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, N° 3, pp 289-297, 1990.
- [KRU.93] KRUEL Th., EISWIRTH M., SCHNEIDER F., *Computacion of Lyapunov spectra : Effect of interactive noise and application to a chemical oscillator*, Physica D, Vol. 63 pp 117-137, 1993.
- [LOR.95] LORENZ E., *La Esencia del Caos*, Ed. Debate, Espagne, 1995.
- [MOS.88] MOSEKILDE E., LARSEN E., *Deterministic chaos in the beer production distribution model*, System Dynamics Review, Vol. 4, N°1 pp 131-147, 1988.
- [MAS.93] MASSOTTE P., *New concepts and approaches for the Management of Complex Production Systems*, International Conference on Industrial Engineering and Production, FUCAM. Belgique Juin, pp 425-426,1993.
- [MAS.97] MASSOTTE P., *Application of self-organisation principles to systems control*, 3rd IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications - SICICA'97 Annecy France, pp 675-680, 1997.
- [NAG.92] NAGARUR N., *Some performance mesures of flexible manufacturing systems*, International Journal Production Research, Vol. 30, N° 4, pp 799-809, 1992.

- [PAN.77] PANWALKAR S., ISKANDER W., *A survey of scheduling rules*, Operations Research, Vol 25, N° 1, 1977.
- [PIE.96] PIERRE T., BONHOMME G., ATIPO A., *Controlling the chaotic regime of nonlinear ionization waves using the time-delay autosynchronization method*, Physical Review Letters, Vol. 76, p 2290, 1996.
- [PER.93] PERKO L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1993.
- [PER.89] PERKINS J., KUMAR P., *Stable, distributed, real-time scheduling of flexible manufacturing / assembly / disassembly systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, N° 2, pp 139-148, 1989.
- [PER.94] PERKINS J., HUMES C., KUMAR P., *Distributed scheduling of flexible manufacturing systems : Stability and Performance*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 10, N° 2, pp 133-141, 1994.
- [RAM.88] RASMUSSEN R., MOSEKILDE E., *Bifurcations and chaos in a generic management model*, European Journal of Operational Research, Vol 35, pp 80-88, 1988.
- [RÖS.76] RÖSLER *An equation for continuous chaos*, Physical Letters 57A, pp 397, 1976.
- [SAN.85] SANO M., SAWADA W., *Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series*, Physica Rev. Letters 55, pp 1082-11085, 1985.
- [SHI.95] SHINBROT T., *Progress in the control of chaos*, Advances in Physics, Vol. 44, pp 73-111, 1995.
- [SER.94] SERIO C., *Detecting chaos in time series*, Fractals in the Natural and Applied Sciences (A-41), pp 371-383, 1994.
- [SET.90] SETHI A., SETHI S., *Flexibility in manufacturing : A survey*, The International Journal of Flexible Manufacturing Systems, Vol. 2, pp 289-328, 1990.
- [SIN.92] SINGH N., ANEJA Y., RANA S., *A bicriterion framework for operations assignment and routing flexibility analysis in cellular manufacturing systems*, European Journal of Operational Research, Vol. 60, pp 200-210, 1992.
- [SUR.85] SURI R., *An overview of evaluative models for flexible manufacturing systems*, Annals of Operations Research, Vol. 3, pp 13-21, 1985.
- [STE.93] STERMAN J., *Deterministic chaos in models of human behavior : methodological issues and experimental results*, System Dynamics Review 4 pp 148-178, 1988.
- [TAK.81] TAKENS F., *Detecting strange attractors in turbulence*, in *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics N° 898, editeurs : D. Rand et L. Young, pp 366-381. Springer Verlag, 1981.

- [TAK.96] TAKALA K., VIREN M., *Chaos and nonlinear dynamics in financial and nonfinancial time series : Evidence from Finland*, European Journal of Operational Research, Vol. 93, pp 155-172, 1996.
- [TAY.89] TAYMAZ E., *Types of flexibility in a single-machine production system*, International Journal Production Research, Vol. 27 N° 11, pp 1891-1899, 1989.
- [TÖN.92] TÖNSHOFF H., GLÖCKNER M., *Chaos und Produktionsprozesse*, Fabrikanlagen und Materialfluss, pp 336-339, 1992.
- [WHI.93] WHITT W., *Large fluctuations in a deterministic multiclass network of queues*, Management Science, Vol. 39, N° 8, pp 1020-1028, 1993.
- [WOL.85] WOLF A., SWIFT J., SWINNEY H., VASTANO A., *Determining Lyapunov Exponent from a Time Series*, Physica 16D, 1985, pages 285-317.
- [YAO.85] YAO D., *Material and information flows in flexible manufacturing systems*, Material Flow, Vol. 2, pp 143-149, 1985.
- [YAO.90] YAO D., PEI F., *Flexible parts routing in manufacturing systems*, IIE Transactions, Vol. 22 N° 1, pp 48-55, 1990.

**Annexe 1 (Chapitre 3)**  
**"Un système simple de production  
chaotique"**

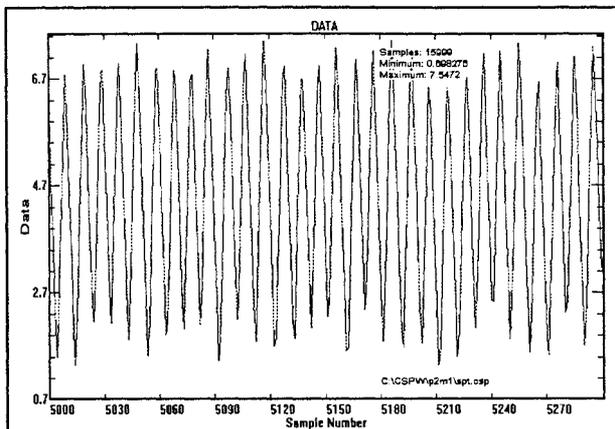


Figure a : évolution temporelle du stock.

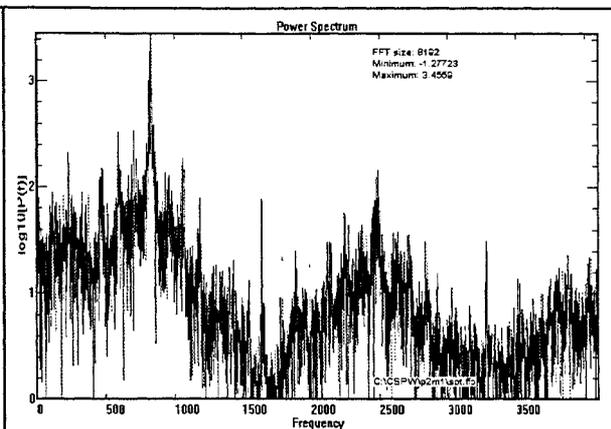


Figure b : spectre de puissance.

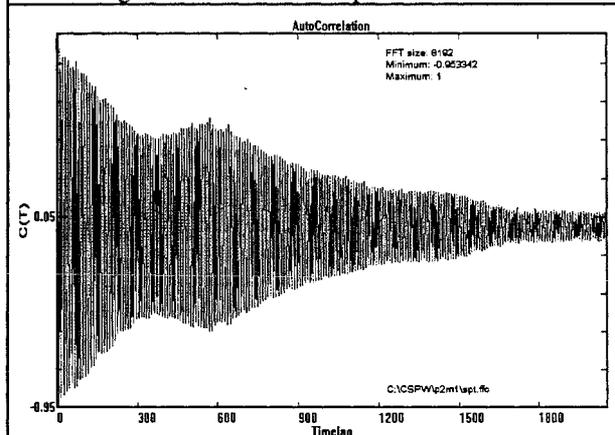


Figure c : fonction d'autocorrélation.

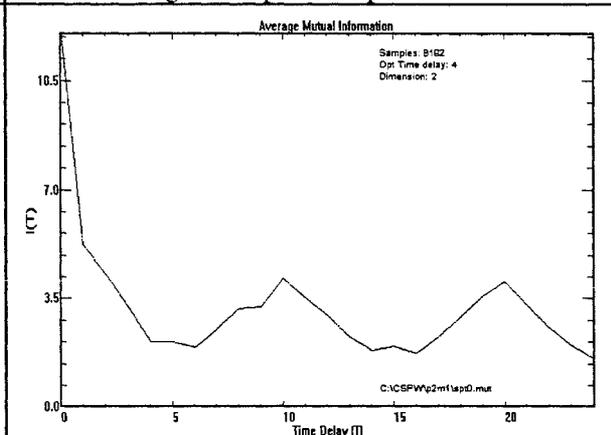


Figure d : fonction mutuelle d'information.

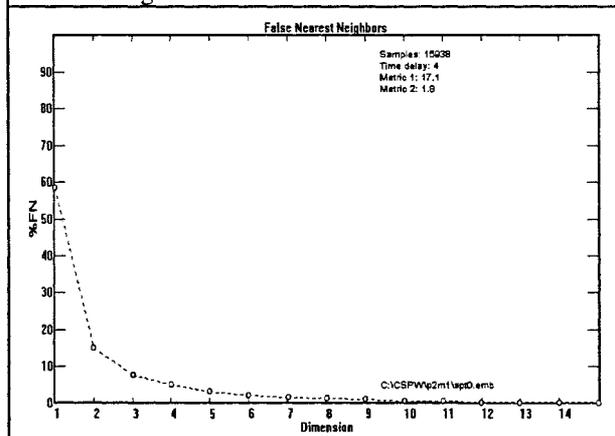


Figure e : estimation de la dimension de plongement.

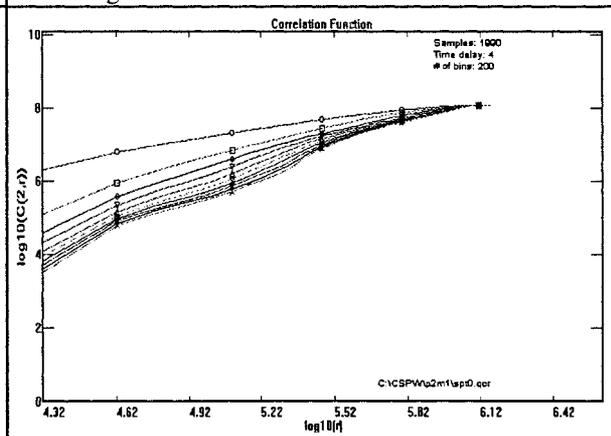


Figure f : fonction de dimension de corrélation.

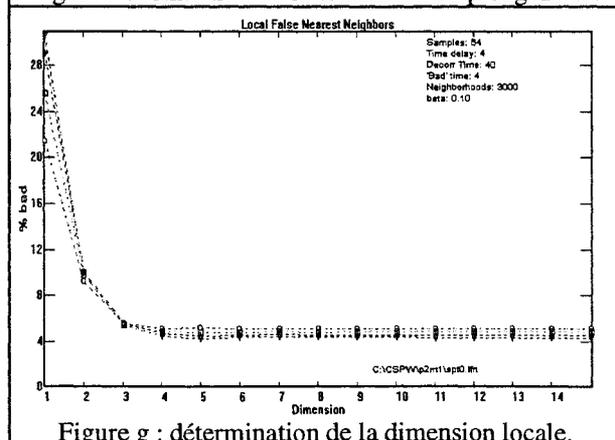


Figure g : détermination de la dimension locale.

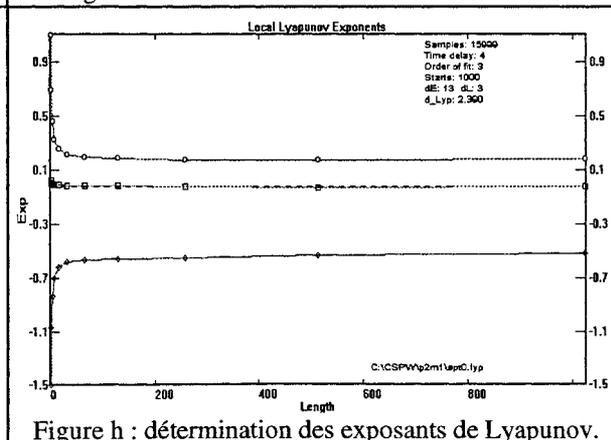


Figure h : détermination des exposants de Lyapunov.

Figure 1 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_2$  et la règle SPT.

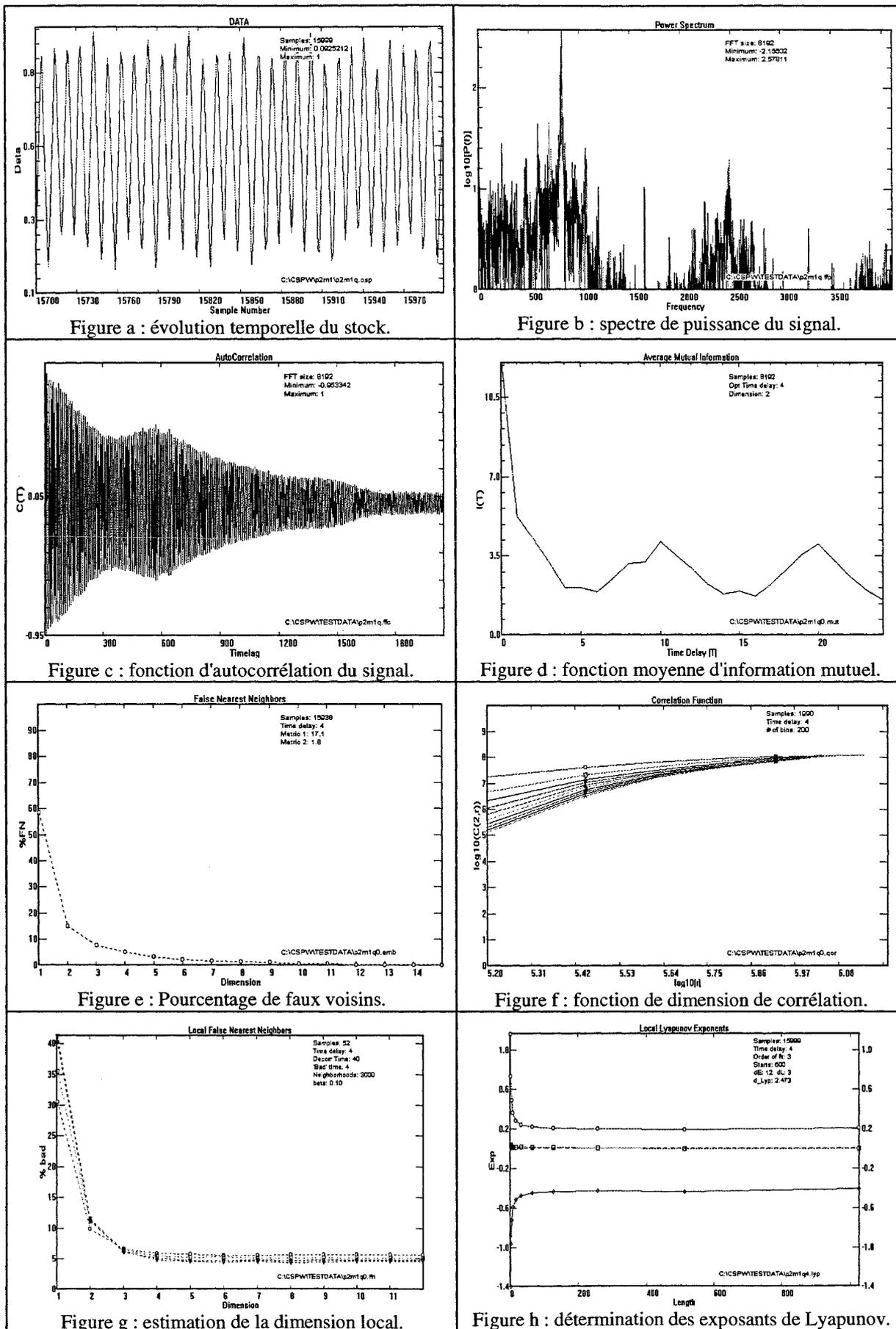


Figure 2 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_2$  et la règle HPT.

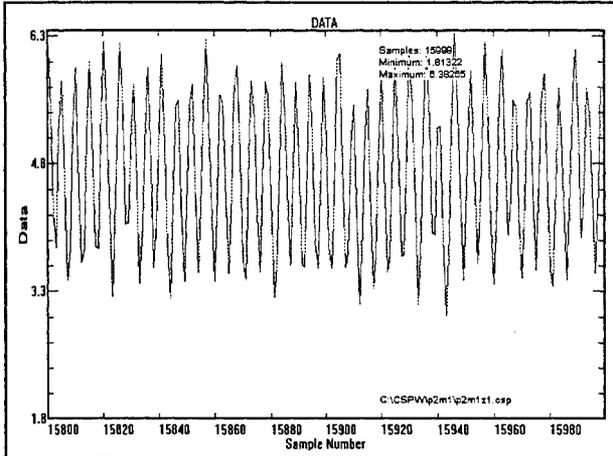


Figure a : évolution temporelle du stock.

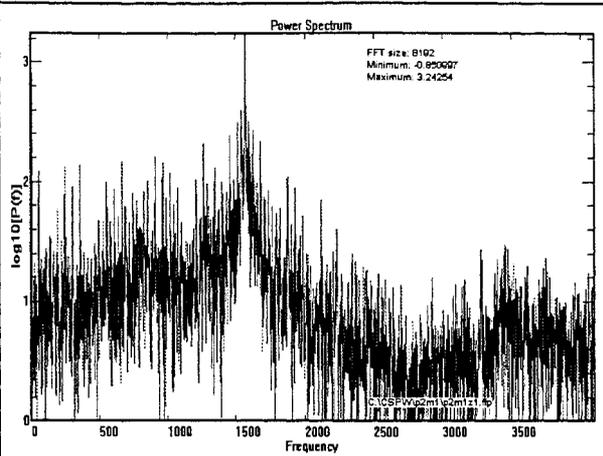


Figure b : spectre de puissance du signal.

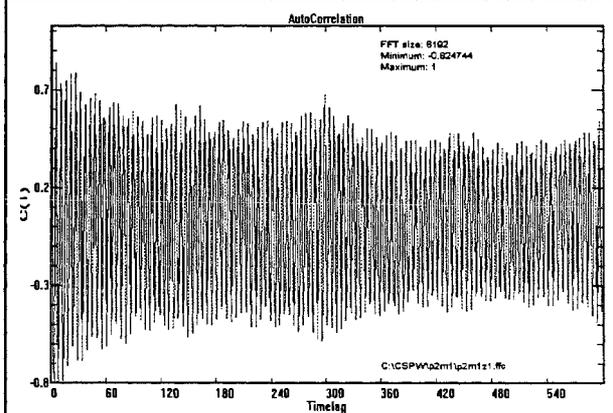


Figure c : fonction d'autocorrélation du signal.

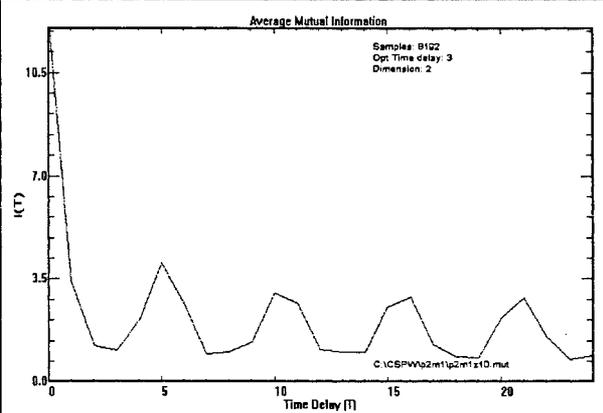


Figure d : fonction moyenne d'information mutuel.

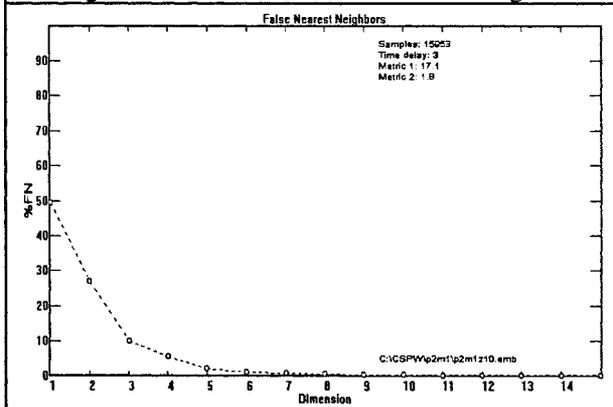


Figure e : Pourcentage de faux voisins.

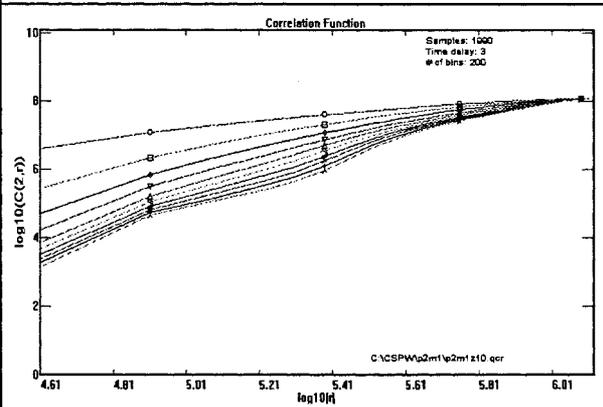


Figure f : fonction de dimension de corrélation.

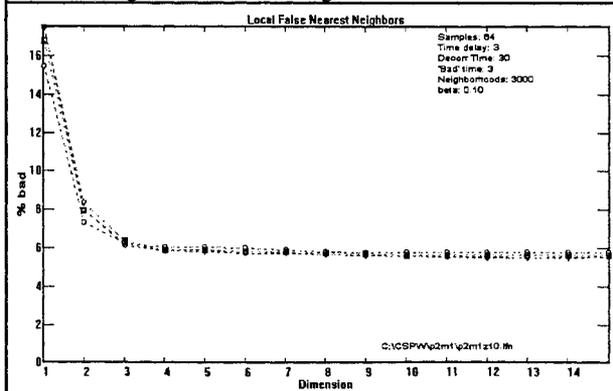


Figure g : estimation de la dimension local.

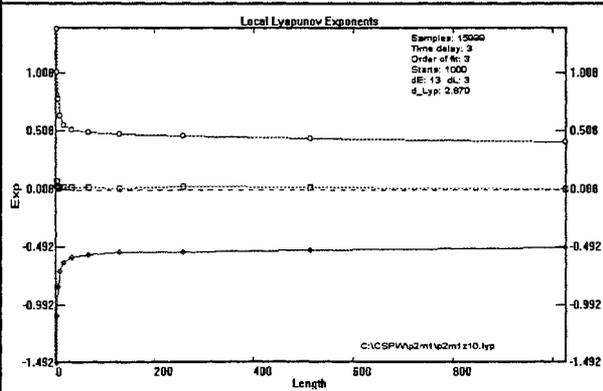


Figure h : détermination des exposants de Lyapunov.

Figure 3 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_3$  et la règle FIFO.

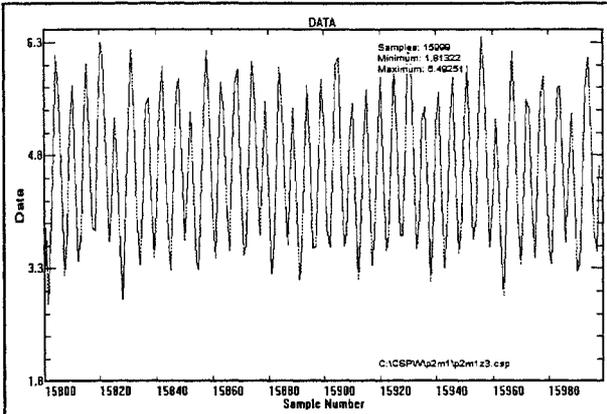
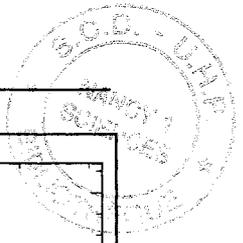


Figure a : évolution temporelle du stock.

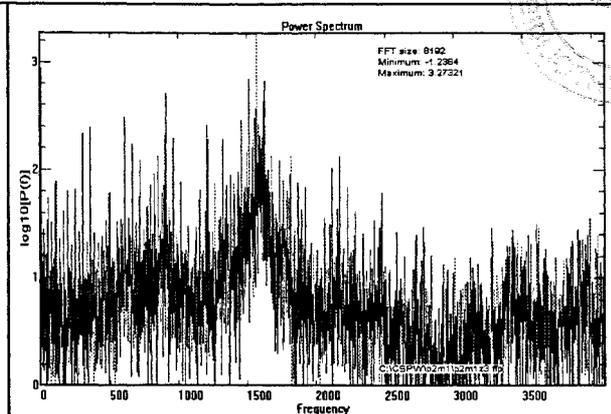


Figure b : spectre de puissance du signal.

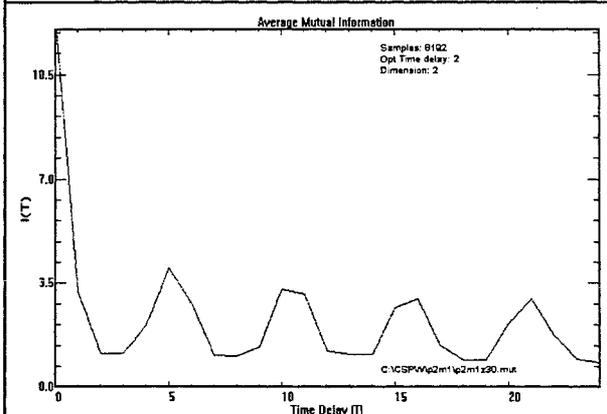


Figure c : fonction moyenne d'information mutuel.

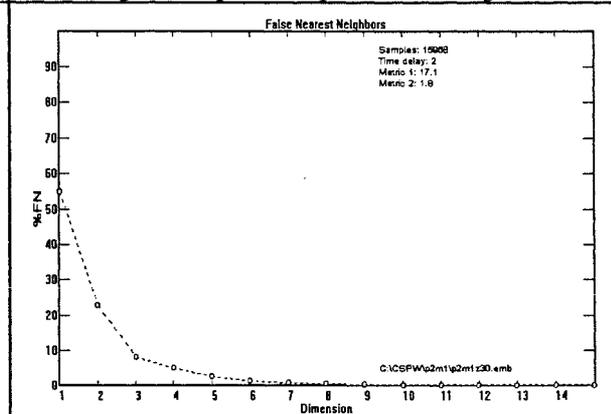


Figure d : Pourcentage de faux voisins.

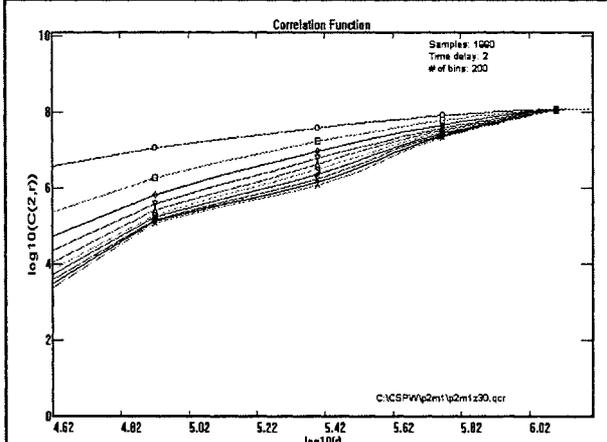


Figure e : fonction de dimension de corrélation.

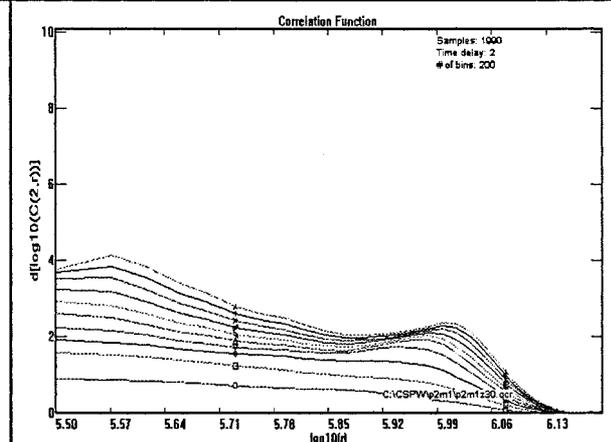


Figure f : estimation de la dimension de corrélation.

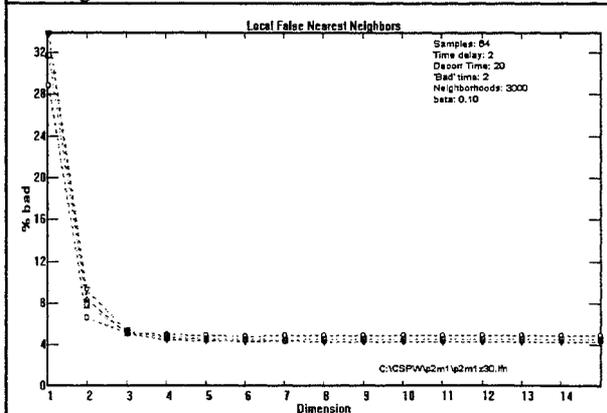


Figure g : estimation de la dimension local.

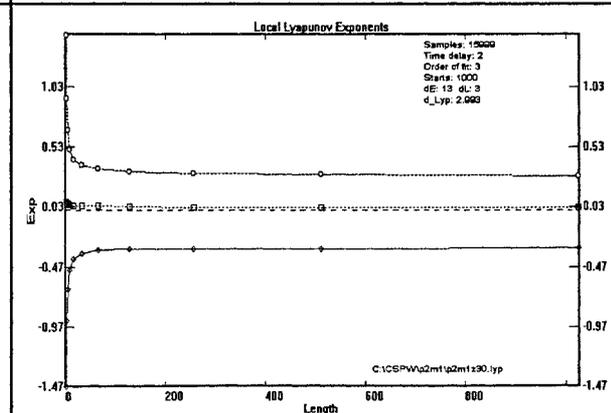


Figure h : détermination des exposants de Lyapunov.

Figure 4 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_3$  et la règle HPT.

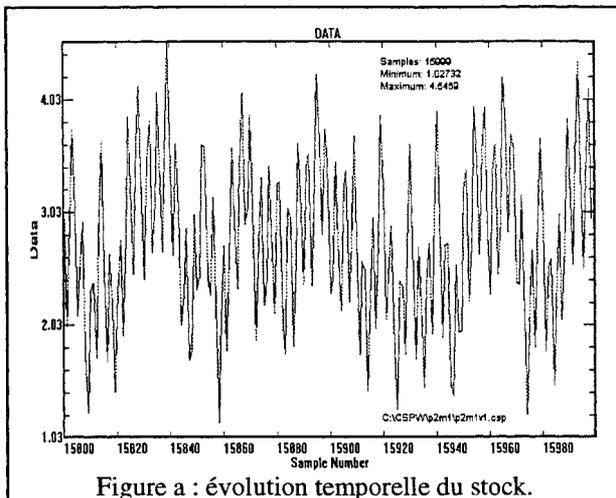


Figure a : évolution temporelle du stock.

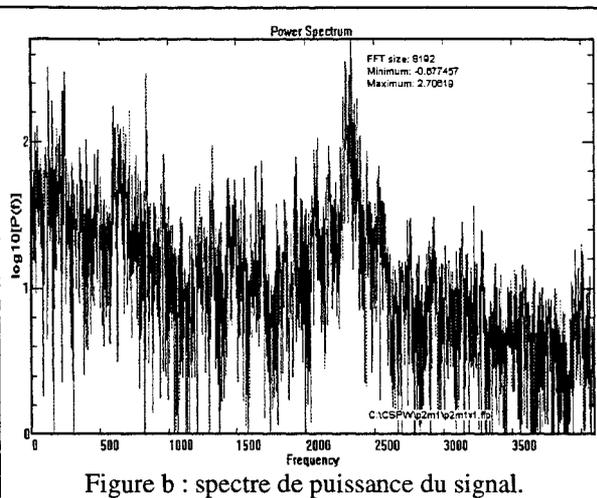


Figure b : spectre de puissance du signal.

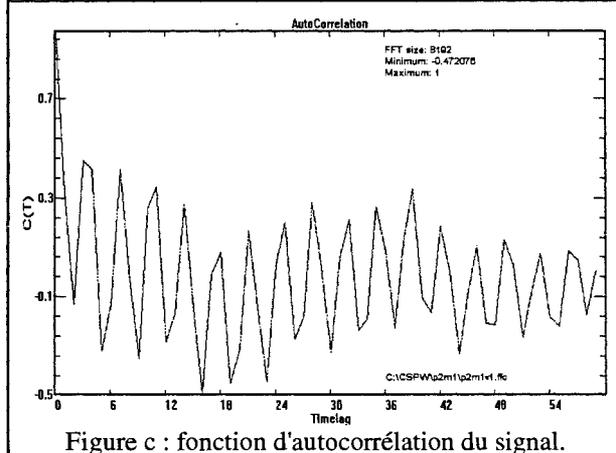


Figure c : fonction d'autocorrélation du signal.

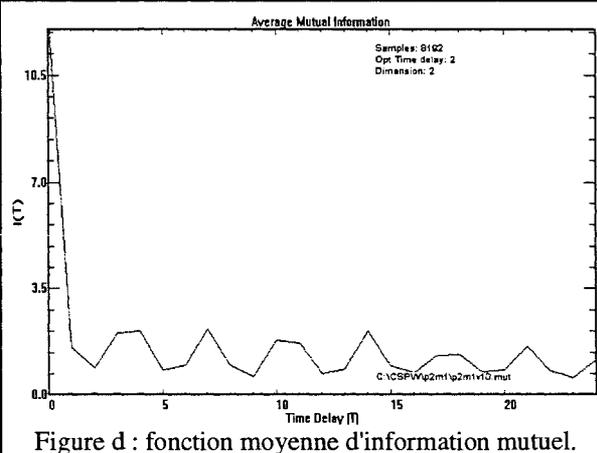


Figure d : fonction moyenne d'information mutuel.

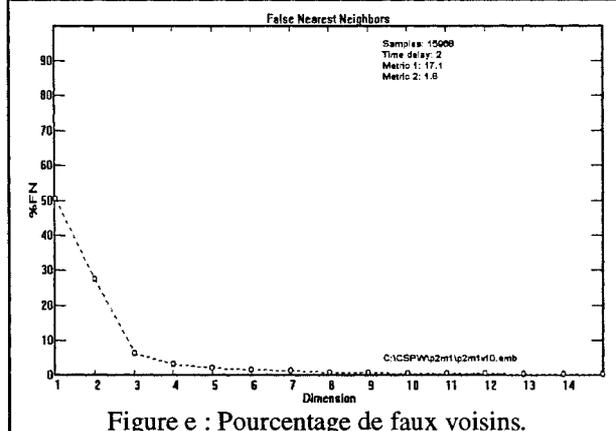


Figure e : Pourcentage de faux voisins.

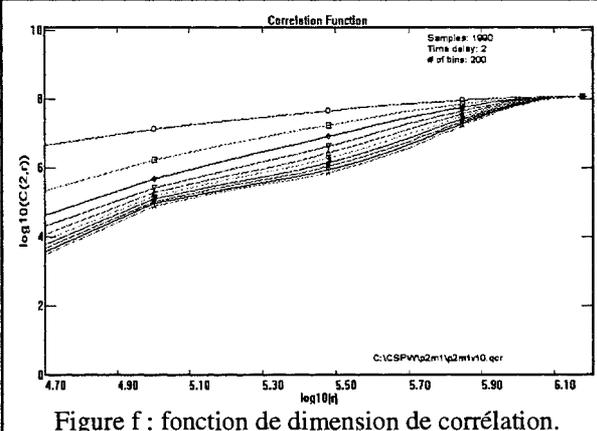


Figure f : fonction de dimension de corrélation.

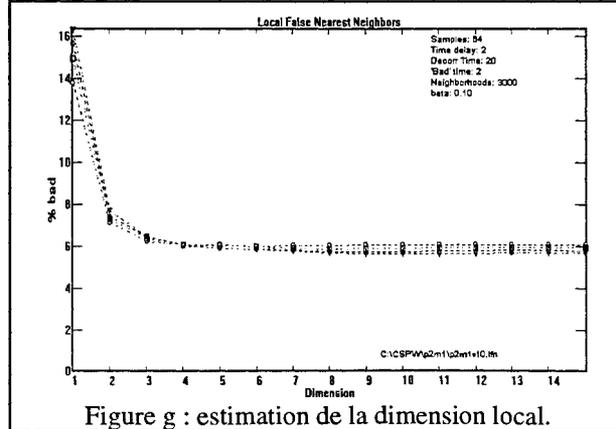


Figure g : estimation de la dimension local.

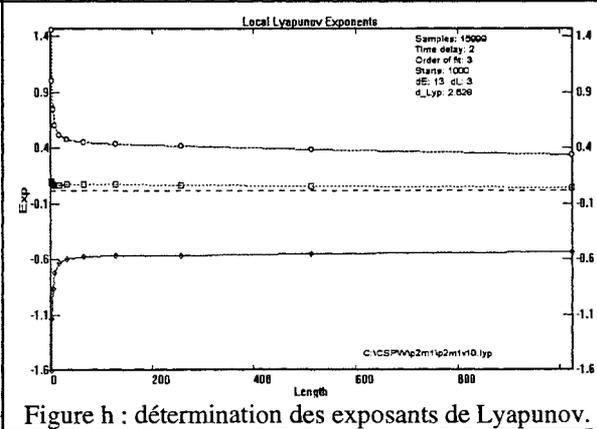


Figure h : détermination des exposants de Lyapunov.

Figure 5 : résultats obtenus en utilisant la fonction de décision  $g_4$  et la règle SPT.

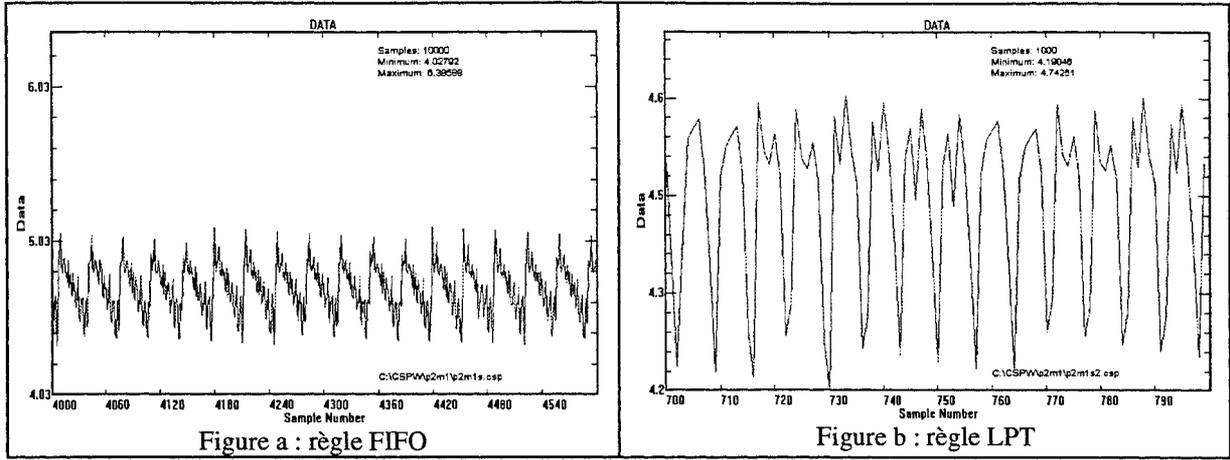


Figure 6: résultat de simulation avec utilisation de la fonction  $g_1$ .

**Annexe 2 (Chapitre 4) :**  
**"Analyse du comportement dynamique  
d'un atelier flexible de production  
automatisé"**

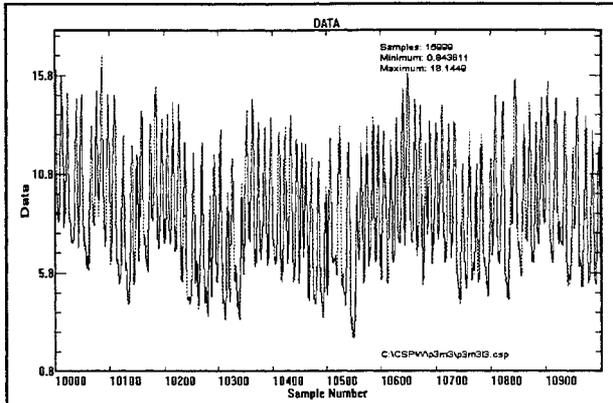


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 1 devant la machine 1.

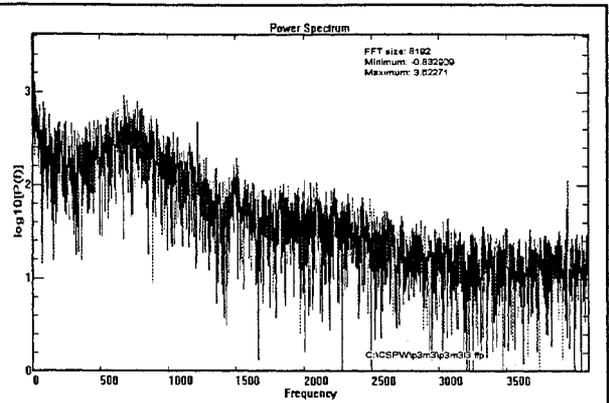


Figure b : spectre de puissance.

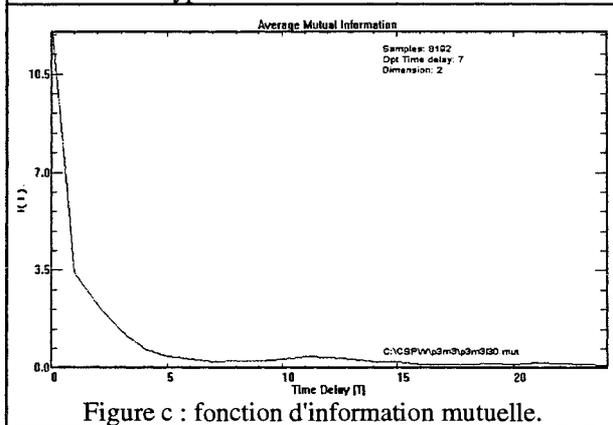


Figure c : fonction d'information mutuelle.

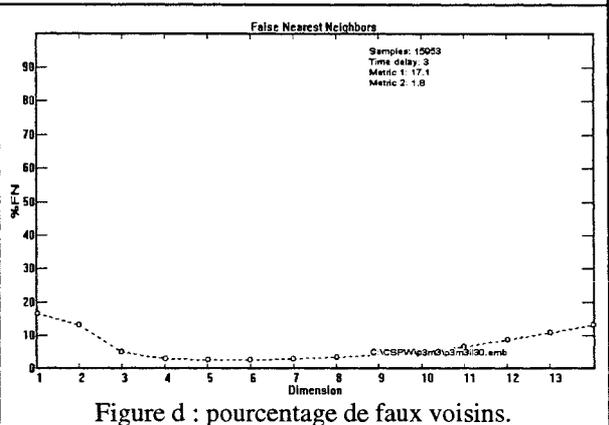


Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 1 : résultats obtenus pour la "fonction  $g_1$ " avec les files d'attente arrangés SPT

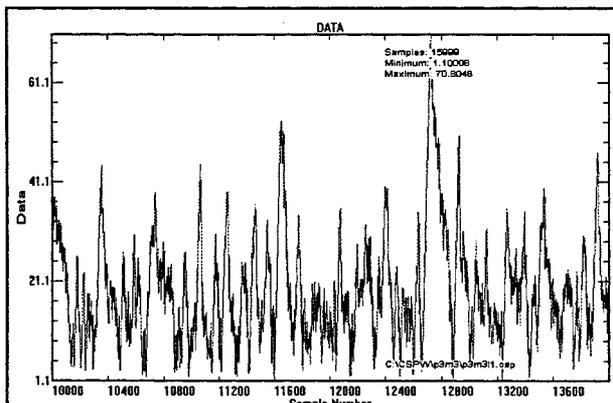


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 1 devant la machine 1.

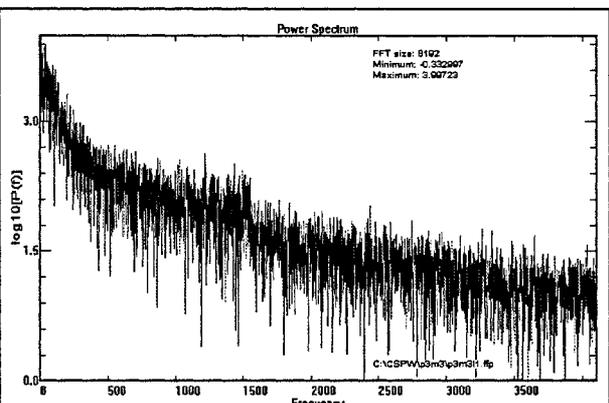


Figure b : spectre de puissance.

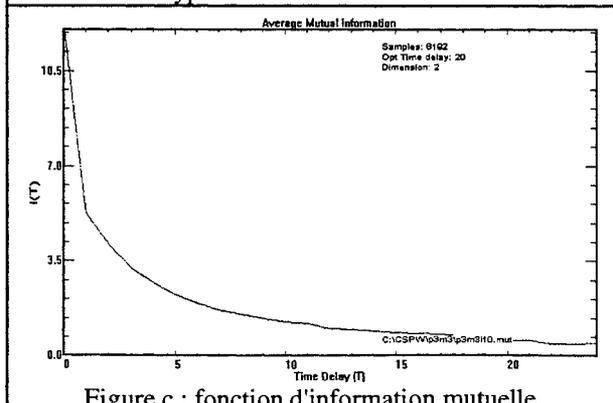


Figure c : fonction d'information mutuelle.

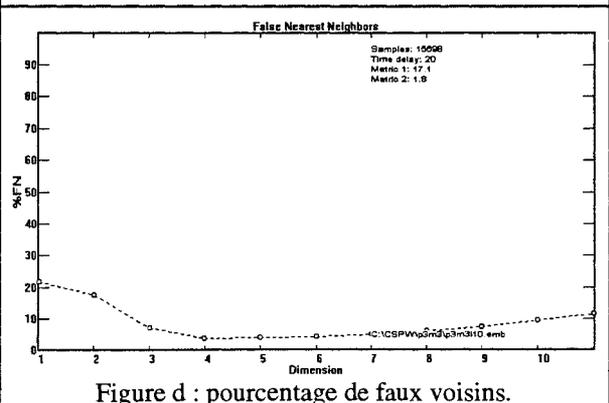


Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 2 : résultats obtenus pour la "fonction  $g_1$ " avec les files d'attente arrangés HPT

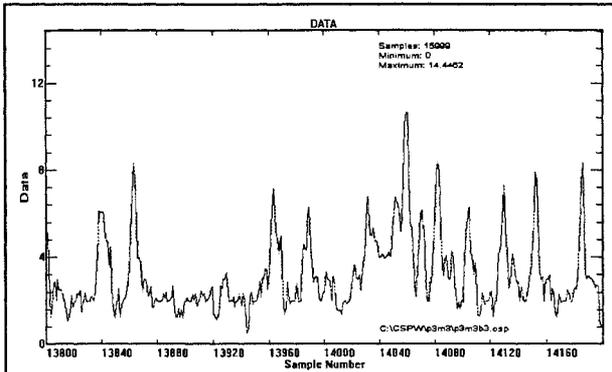


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 3 devant la machine 1.

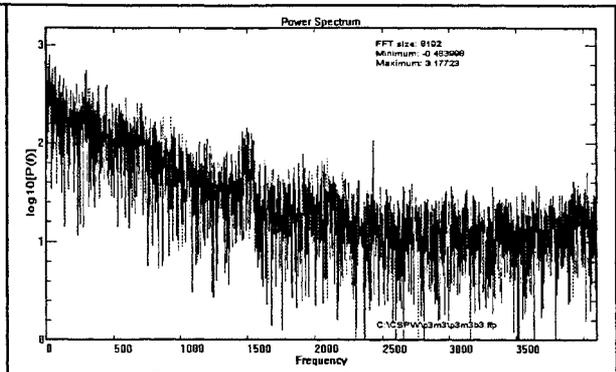


Figure b : spectre de puissance.

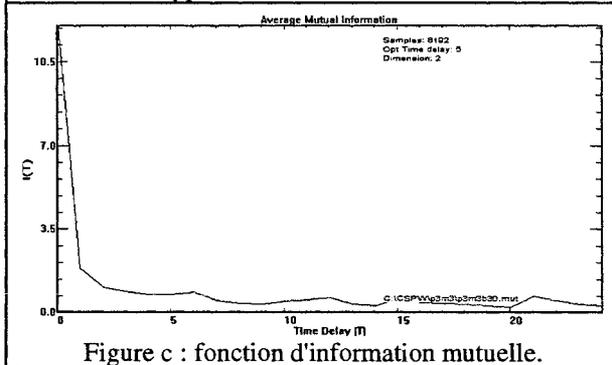


Figure c : fonction d'information mutuelle.

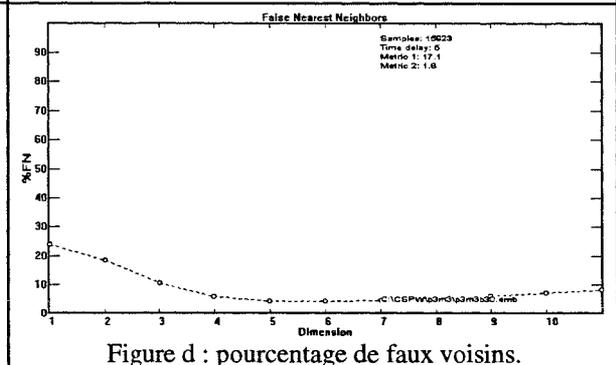


Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 3 : résultats obtenus pour la fonction  $g_2$  avec les files d'attente arrangés FIFO.

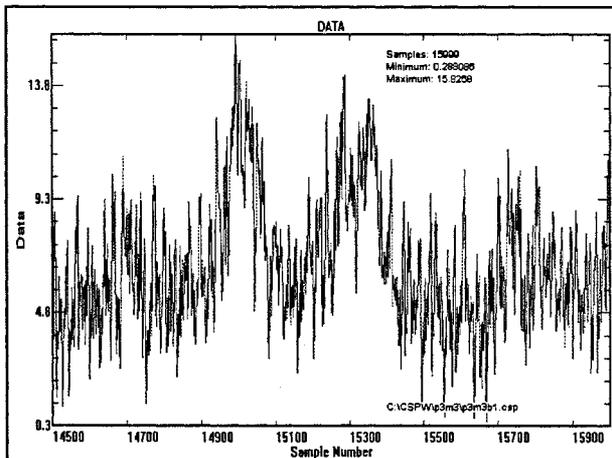


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2 devant la machine 2.

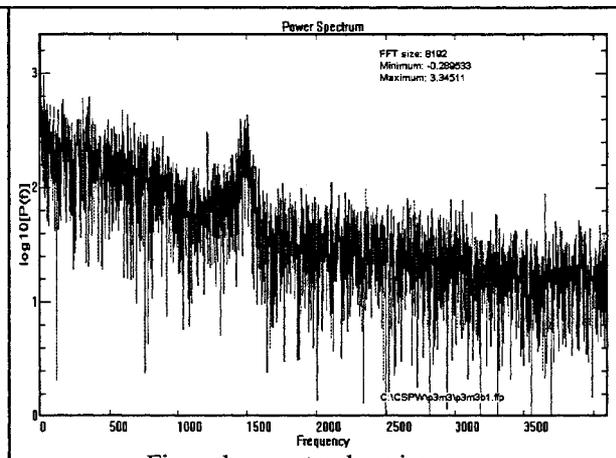


Figure b : spectre de puissance.

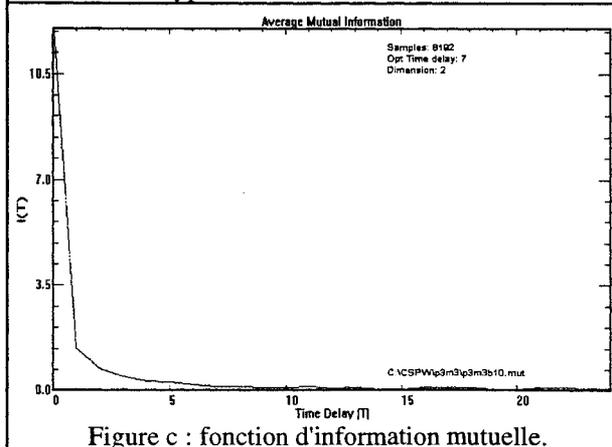


Figure c : fonction d'information mutuelle.

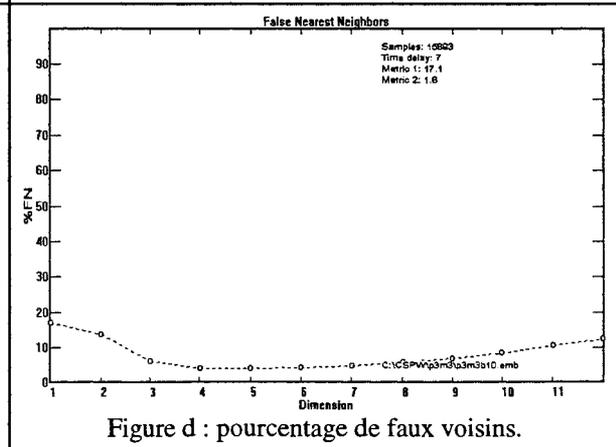


Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 4 : résultats obtenus pour la fonction  $g_2$  avec les files d'attente arrangés HPT

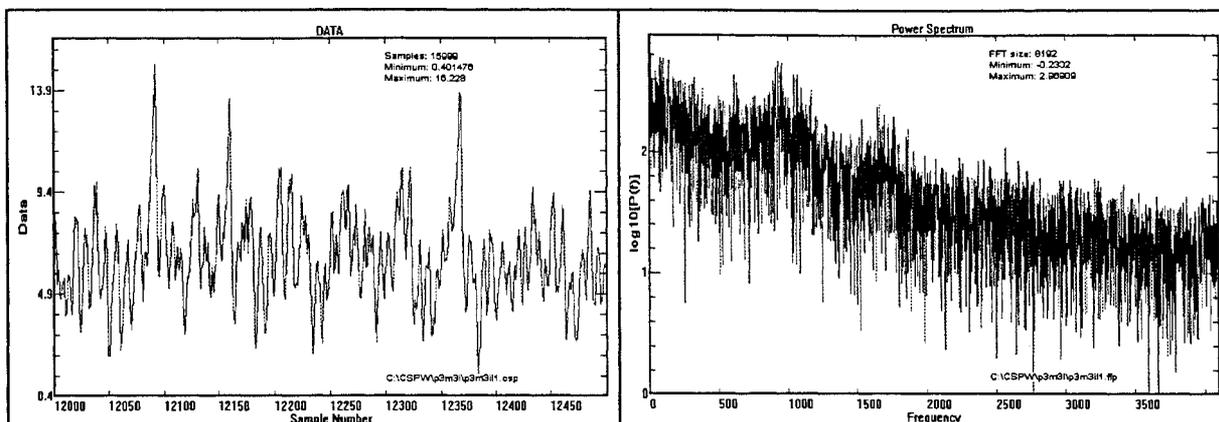


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 1 devant la machine 2.

Figure b : spectre de puissance.

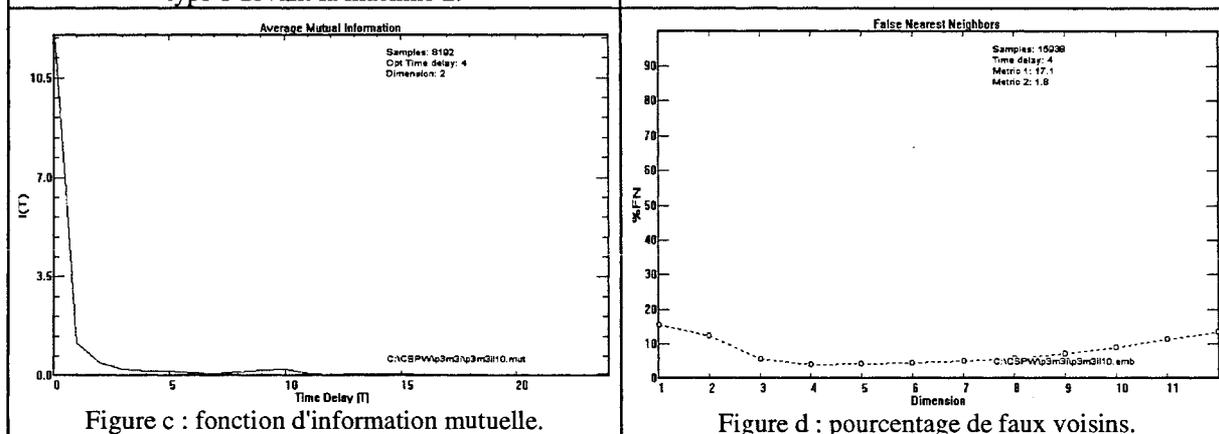


Figure c : fonction d'information mutuelle.

Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 5 : résultats obtenus pour  $g_3$  et FIFO.

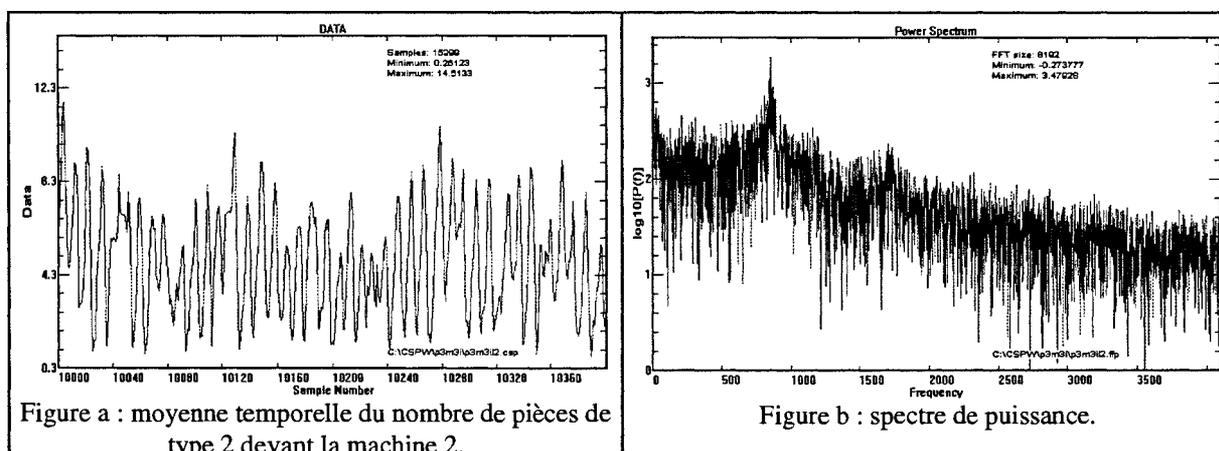


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2 devant la machine 2.

Figure b : spectre de puissance.

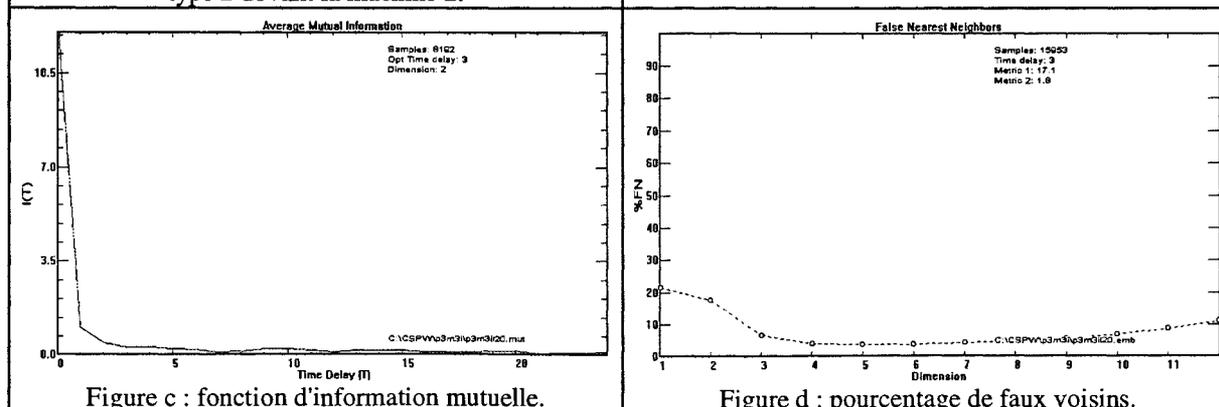


Figure c : fonction d'information mutuelle.

Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 6 : résultats obtenus pour  $g_3$  et HPT.

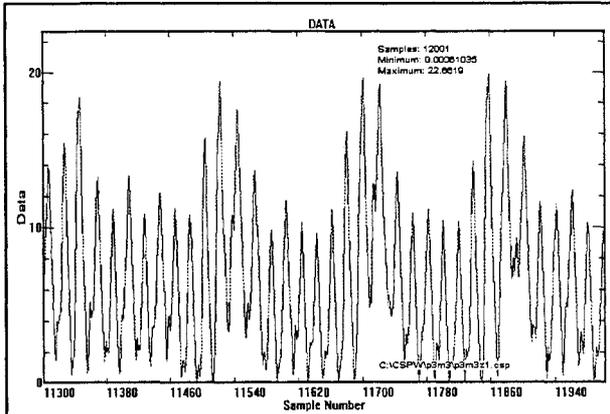


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2 devant la machine 1.

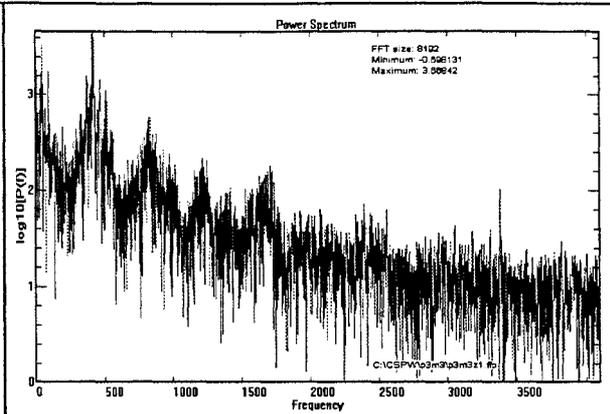


Figure b : spectre de puissance.

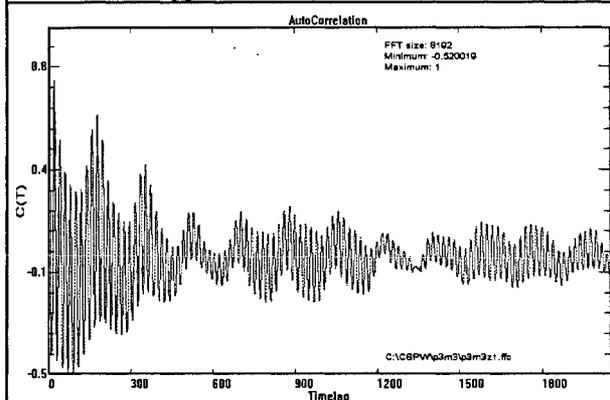


Figure c : fonction d'autocorrélation.

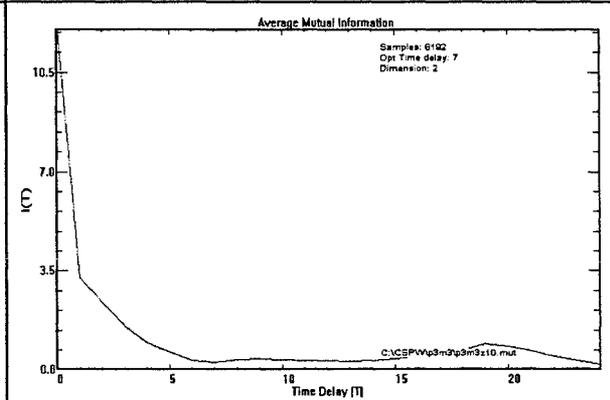


Figure d : fonction d'information mutuelle.

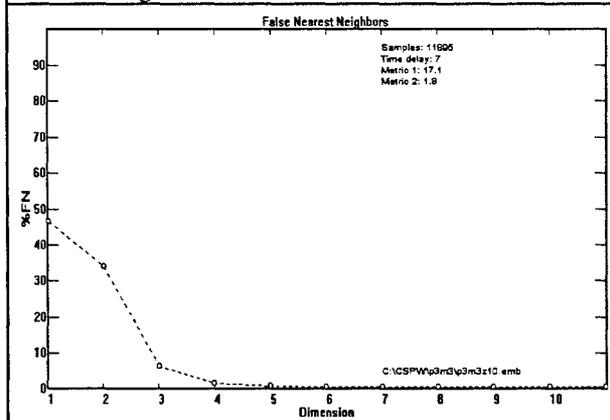


Figure e : pourcentage de faux voisins.

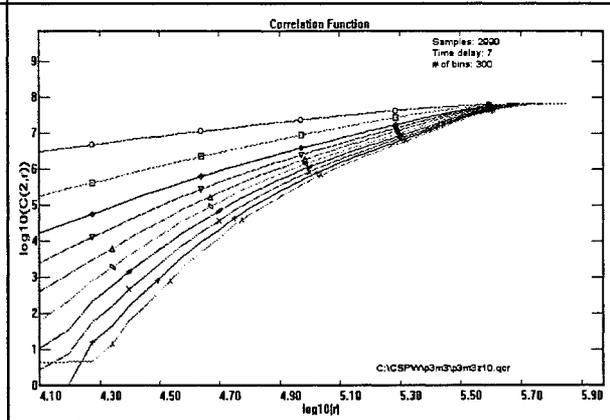


Figure f : fonction de dimension de corrélation.

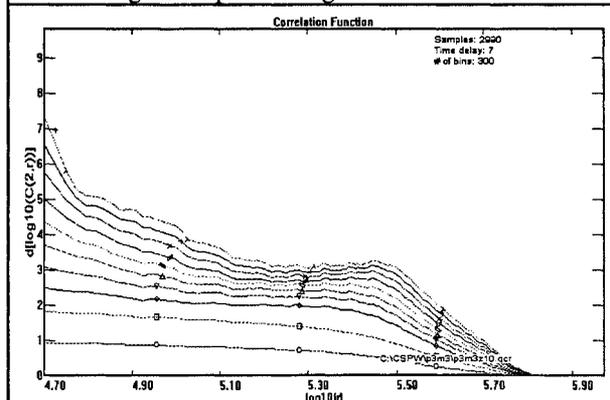


Figure g : estimation de la dimension fractale.

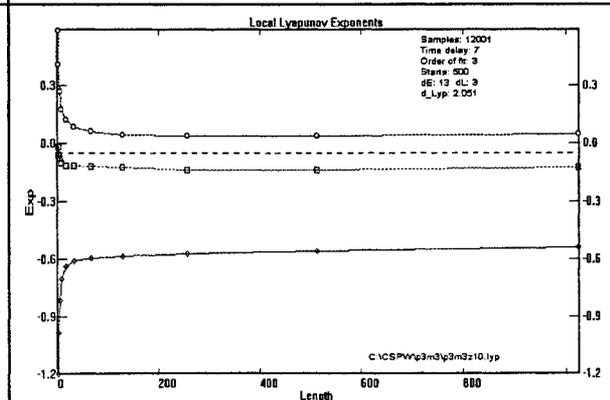


Figure h : estimation des exposant de Lyapunov.

Figure 7 : résultats obtenus pour  $g_4$  et FIFO.

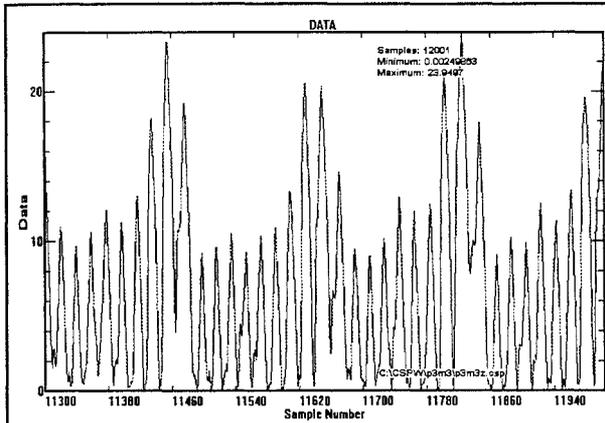


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2 devant la machine 1.

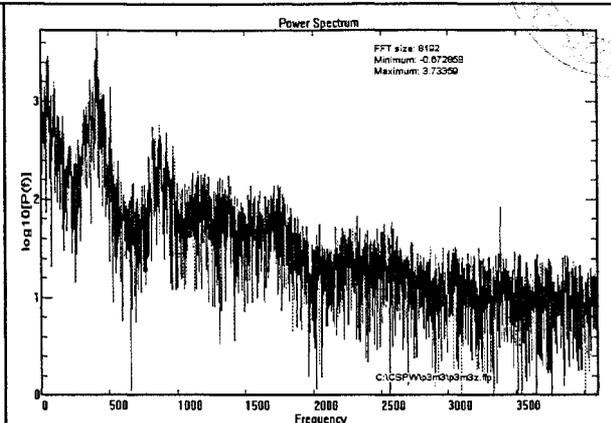


Figure b : spectre de puissance.

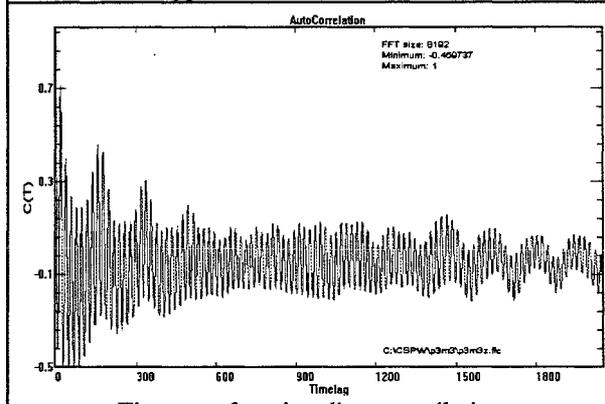


Figure c : fonction d'autocorrelation.

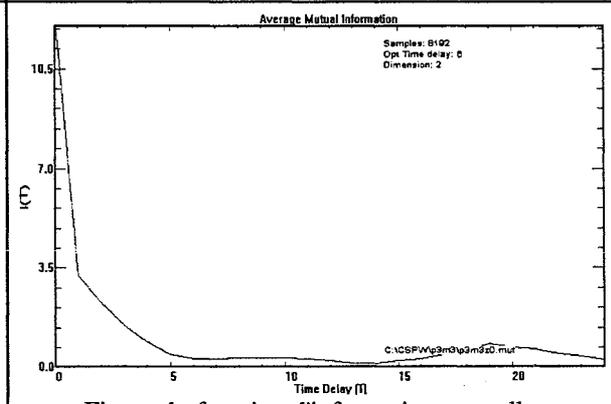


Figure d : fonction d'information mutuelle.

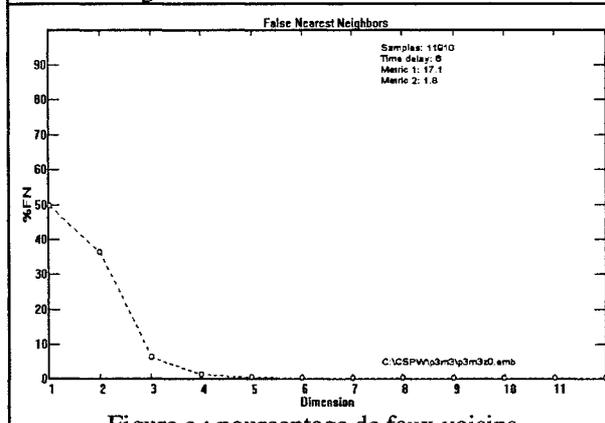


Figure e : pourcentage de faux voisins.

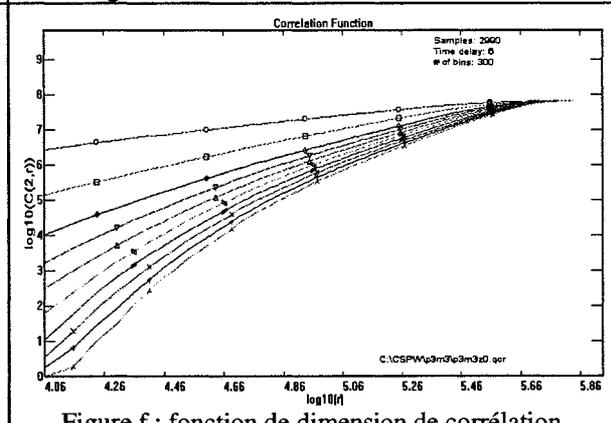


Figure f : fonction de dimension de corrélation.

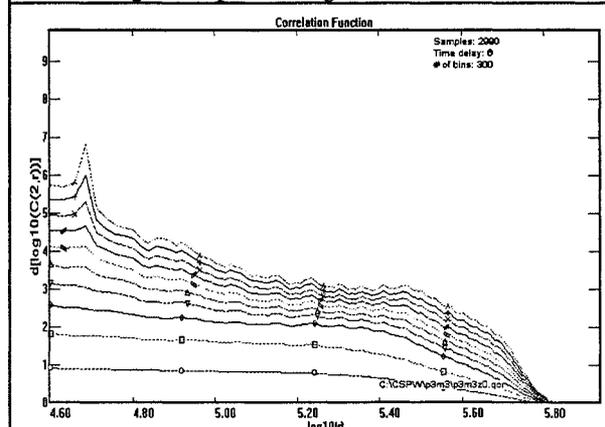


Figure g : estimation de la dimension fractale.

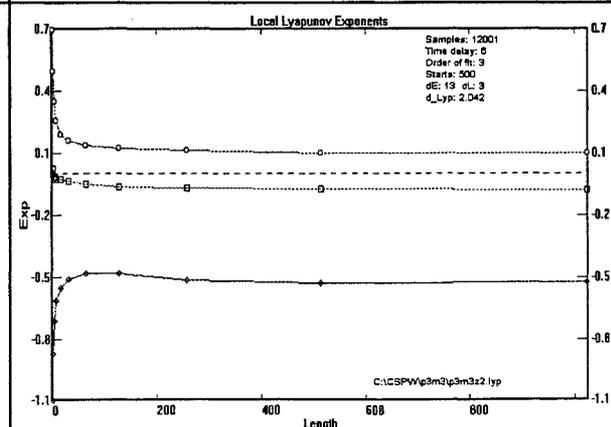


Figure h : estimation des exposant de Lyapunov.

Figure 8 : résultats obtenus pour  $g_4$  et HPT.

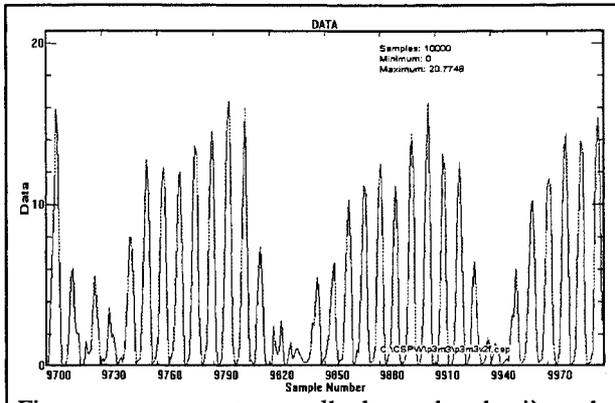
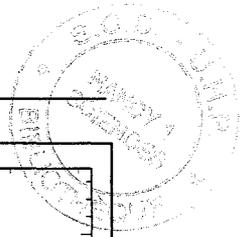


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2 devant la machine 1.

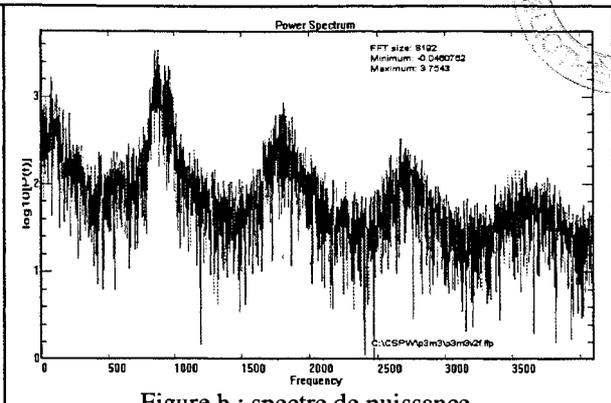


Figure b : spectre de puissance.

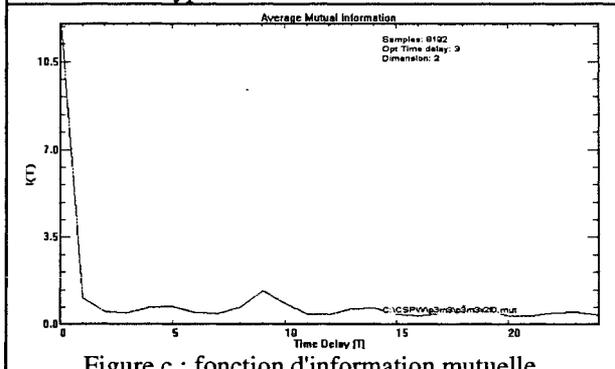


Figure c : fonction d'information mutuelle.

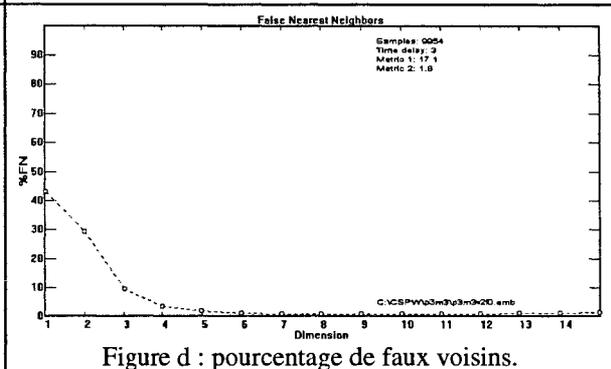


Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 9 : résultats obtenus pour  $g_5$  et FIFO.

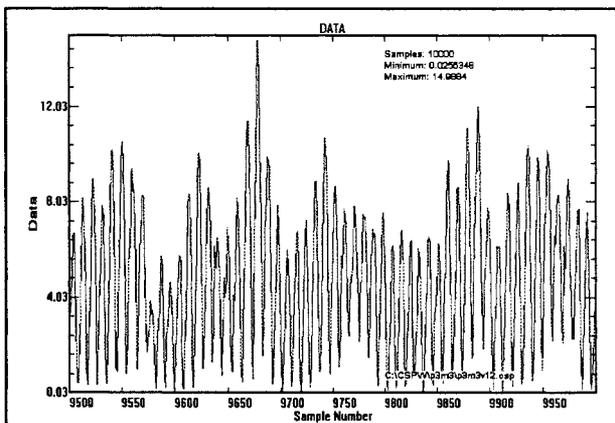


Figure a : moyenne temporelle du nombre de pièces de type 2 devant la machine 1.

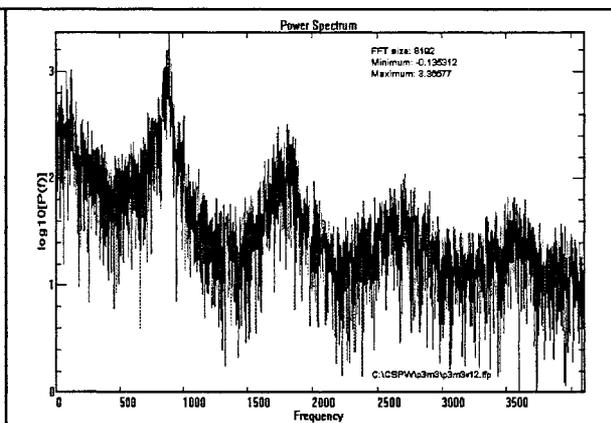


Figure b : spectre de puissance.

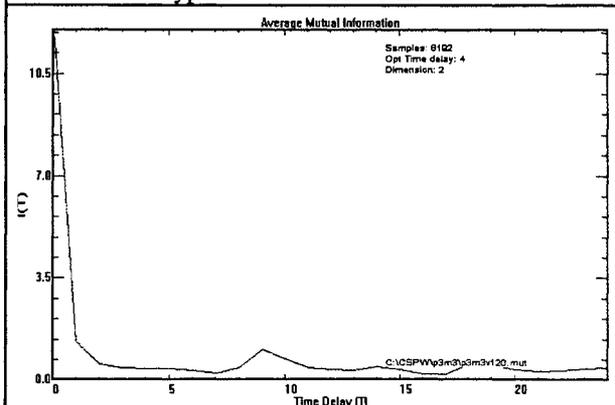


Figure c : fonction d'information mutuelle.

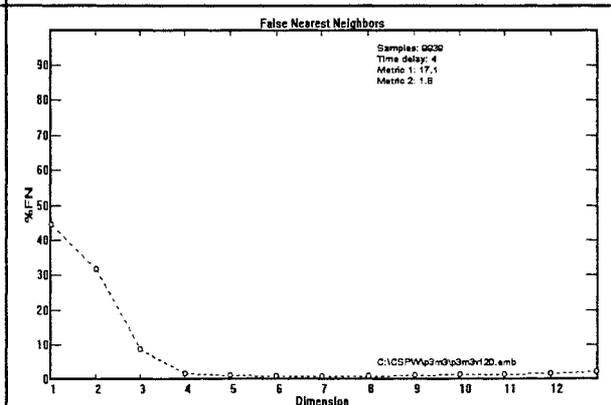


Figure d : pourcentage de faux voisins.

Figure 10 : résultats obtenus pour  $g_5$  et HPT.

Monsieur ALFARO MARCHANT Miguel Domingo

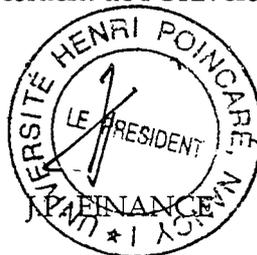
DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I

en PRODUCTION AUTOMATISEE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 11 FÉV 1998 n° 13

Le Président de l'Université



## Résumé

Depuis les années 80 jusqu'à nos jours, s'est développée une quantité non négligeable de recherches destinées à démontrer l'existence du comportement chaotique, tant dans le domaine de la science que de la technique. Certains travaux ont abordé le domaine des systèmes de production. Néanmoins, les résultats publiés ne sont pas entièrement convaincants. L'objectif principal de notre travail a été par conséquent de vérifier l'existence de comportements chaotiques temporels dans un atelier flexible de production.

Dans ce mémoire nous présentons une méthodologie d'analyse de la dynamique d'un système de production. Dans un premier temps, nous avons abouti à la vérification qu'un atelier automatisé flexible et générique peut avoir un comportement chaotique. Nous avons ensuite proposé une mesure de la complexité dynamique d'un atelier de production : la dimension fractale de Lyapunov. Cette mesure nous a permis d'étudier la relation entre la flexibilité de routage et la complexité dynamique du système. Nous avons ainsi constaté que cette dernière augmente avec la flexibilité de routage et que la relation entre les deux est non linéaire.

Nous avons appliqué notre méthodologie à l'étude du comportement dynamique de la cellule flexible de production automatisée de l'Atelier Inter-établissements de Productique Lorrain (AIPL). Nous avons alors montré que sous certaines conditions de travail, la dynamique du système est chaotique.

Mots clés : chaos, systèmes flexibles de production, complexité dynamique.

## Summary

Since the eighties, a number of researchers have attempted to demonstrate the existence of chaotic behaviour in both science and technology. Some works have approached the area of production systems, however the published results are not entirely convincing. Consequently the principal objective of our work has been to verify the existence of temporal chaotic behaviours in a flexible production workshop.

We have developed a methodology to analyse the dynamics of production systems. First we have verified that a generic and flexible workshop can have a chaotic behaviour. Then we have proposed a measure of the dynamic complexity of a production workshop : the Lyapunov fractal dimension. This measure allowed us to study the relationship between the routing flexibility and the dynamic complexity of the system. We have observed an increment of dynamic complexity when the routing flexibility is increased, but this relationship is not linear.

We have applied our methodology to the study of dynamic behaviour of the flexible cell in an automated production workshop (A.I.P.L.). Then we have shown that under some work conditions, the dynamics of the system is chaotic.

Keywords : chaos, flexible manufacturing system, dynamic complexity.