



**HAL**  
open science

**Etude des phénomènes de non-linéarités ultrasonores :  
Analyse théorique et expérimentale de systèmes de  
mesure du paramètre B/A par la méthode d'amplitude  
finie**

Laurent Allies

► **To cite this version:**

Laurent Allies. Etude des phénomènes de non-linéarités ultrasonores : Analyse théorique et expérimentale de systèmes de mesure du paramètre B/A par la méthode d'amplitude finie. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1999. Français. NNT : 1999NAN10294 . tel-01747528

**HAL Id: tel-01747528**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747528v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



FACULTE DES SCIENCES

---

U.F.R. Sciences et Techniques, Mathématiques, Informatiques, Automatique  
Ecole Doctorale Informatique Automatique Electronique Electrotechnique Mathématiques  
Département de Formation Doctorale Electronique Electrotechnique

## Thèse

Présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré - Nancy I

en Instrumentation et Micro-Electronique

par **Laurent ALLIES**

**ETUDE DES PHENOMENES DE NON-LINEARITES  
ULTRASONORES : Analyse théorique et expérimentale de systèmes  
de mesure du paramètre B/A par la méthode d'amplitude finie.**

**Soutenue publiquement le 19 novembre 1999 devant le jury :**

**Président:** M. M. ROBERT                      Professeur à l'ESSTIN, Université H. Poincaré.

**Rapporteurs:** MM. M. LUMBRERAS            Professeur à l'Université de Metz.  
                         M. M. SCHAEFFER                      Professeur à l'Université L. Pasteur, Strasbourg.

**Examineurs:** M. M. NADI                      Professeur à l'Université H. Poincaré.

**Directeur de thèse:** M. D. KOURTICHE      Maître de Conférence à l'Université H. Poincaré.

---

Laboratoire d'Instrumentation Electronique de Nancy  
Faculté des Sciences – 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY

## REMERCIEMENTS

Ce travail de thèse a été effectué au sein du Laboratoire d'Instrumentation Electronique de Nancy (L.I.E.N.).

J'exprime toute ma gratitude à Madame Martine LUMBRERAS, Professeur à l'Université de Metz, et Monsieur Michel SCHAEFFER, Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, qui ont accepté la tâche de rapporteur de cette thèse.

Je remercie Monsieur Michel ROBERT, Professeur des Universités et Directeur de l'E.S.S.T.I.N., d'avoir accepté d'examiner ce travail par sa participation au jury de cette thèse.

Monsieur Djilali KOURTICHE, Maître de conférence à l'université Henri Poincaré de Nancy, a assuré la direction scientifique de cette étude. Sa rigueur et ses critiques constructives m'ont été précieuses toute au long de ces années de recherches, je lui exprime ma profonde gratitude.

Monsieur Mustapha NADI, Professeur des Universités et Directeur du L.I.E.N., m'a accueilli au sein de son équipe. Ses recommandations et ses conseils m'ont permis de mener à bien cette thèse. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur Patrice ROTH, Technicien au L.I.E.N., pour son aide précieuse dans les réalisations techniques de ce travail de thèse.

Ma sympathie et mes remerciements vont également à Monsieur Ahmed CHITNALAH, pour nos enrichissantes discussions sur ce travail de recherche.

J'associe à tous ces témoignages, mes collègues du laboratoire qui contribuent à l'ambiance chaleureuse qui y règne. Qu'ils soient tous assurés de mon amitié.



## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
Références bibliographiques.....	5
<b>CHAPITRE I : Bases théoriques de l'acoustique non linéaire.....</b>	<b>8</b>
<b>I.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>9</b>
<b>I.2 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE PROPAGATION DANS UN FLUIDE.....</b>	<b>9</b>
I.2.1 LOIS DE CONSERVATION ET D'ETAT.....	9
I.2.1.1 Conservation de la masse – équation de continuité .....	9
I.2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement – Equation dynamique.....	10
I.2.1.3 Conservation de l'énergie .....	10
I.2.1.4 Equations d'état.....	10
I.2.2 EQUATIONS DE PROPAGATION EN ACOUSTIQUE LINEAIRE.....	11
I.2.2.1 Milieu dissipatif.....	11
I.2.2.2 Milieu non dissipatif.....	12
I.2.3 EQUATIONS DE PROPAGATION EN ACOUSTIQUE NON LINEAIRE.....	13
I.2.3.1 Cas général: Equation KZK.....	13
I.2.3.2 Cas d'une onde plane : Equation de Burgers .....	14
I.2.3.3 Domaine de validité des équations : .....	15
<b>I.3 SOLUTIONS DE L'EQUATION DE BURGERS (ONDE PLANE EN MILIEU DISSIPATIF)..</b>	<b>16</b>
I.3.1 SOLUTIONS ANALYTIQUES .....	16
I.3.2 RESOLUTION NUMERIQUE.....	16
<b>I.4 EVOLUTION DE LA FORME D'ONDE AU COURS DE SA PROPAGATION.....</b>	<b>18</b>
I.4.1 ANALYSE PHYSIQUE DU PHENOMENE .....	18
I.4.2 MILIEU NON DISSIPATIF .....	19
I.4.3 MILIEU DISSIPATIF .....	20
<b>I.5 SOLUTIONS POUR UNE ONDE PLANE EN MILIEU NON DISSIPATIF .....</b>	<b>22</b>
I.5.1 SOLUTION DE FUBINI : ( $\sigma < 1$ ).....	23
I.5.2 SOLUTION DE FAY EN MILIEU NON DISSIPATIF: ( $\sigma > 3,5$ ).....	23
I.5.3 SOLUTION DE BLACKSTOCK : ( $\sigma > 0$ ) .....	23
<b>I.6 ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES ASYMPTOTIQUES DU FONDAMENTAL ET DU SECOND HARMONIQUE POUR UNE ONDE PLANE.....</b>	<b>25</b>
I.6.1 MILIEU NON DISSIPATIF : .....	25
I.6.2 MILIEU DISSIPATIF : .....	25
I.6.2.1 Atténuation du fondamental ( acoustique linéaire):.....	26
I.6.2.2 Atténuation du second harmonique ( acoustique non linéaire) : .....	26
<b>I.7 ERREUR APPORTEE PAR LES SOLUTIONS ANALYTIQUES ASYMPTOTIQUES.....</b>	<b>27</b>
<b>I.8 CONCLUSION.....</b>	<b>29</b>
Références bibliographiques.....	30
<b>CHAPITRE II : Solutions analytiques nécessaires à la mesure du paramètre B/A.....</b>	<b>34</b>
<b>II.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>35</b>
<b>II.2 CHAMP ACOUSTIQUE RAYONNE PAR UN TRANSDUCTEUR .....</b>	<b>35</b>
II.2.1 CHAMP ACOUSTIQUE ASSOCIE AU FONDAMENTAL (APPROXIMATION LINÉAIRE).....	35
II.2.1.1 Intégrale de surface de Rayleigh : .....	36

II.2.1.2	Intégrale de King .....	37
II.2.1.3	Approximation parabolique de l'équation de Helmholtz : .....	38
II.2.1.4	Intégrale de convolution : .....	39
II.2.1.5	Représentation du champ acoustique dans le cas d'une excitation sinusoïdale uniforme : ...	39
II.2.2	CHAMP ACOUSTIQUE ASSOCIE AU SECOND HARMONIQUE.....	42
II.2.2.1	Equations de propagation liant l'harmonique 2 au fondamental : .....	42
II.2.2.2	Solutions des équations de propagation : .....	43
II.2.2.3	Représentation du champ acoustique:.....	44
<b>II.3</b>	<b>VARIATION DE LA PRESSION MOYENNE SUIVANT L'AXE (OZ).....</b>	<b>46</b>
II.3.1	PRESSION MOYENNE EXERCEE PAR LE FONDAMENTAL .....	46
II.3.1.1	Potentiel moyen du fondamental : .....	46
II.3.1.2	Expression de la pression moyenne.....	47
II.3.2	FONCTION DE CORRECTION DE LA DIFFRACTION POUR LE FONDAMENTAL .....	48
II.3.3	PRESSION MOYENNE EXERCEE PAR LE SECOND HARMONIQUE .....	49
II.3.3.1	Potentiel moyen du second harmonique .....	49
II.3.3.2	Expression de la pression moyenne du second harmonique .....	50
II.3.3.3	Fonction de correction de la diffraction pour le second harmonique, $D_2(z)$ : .....	51
II.3.3.4	Simplification de la fonction $D_2(z)$ - Expressions simplifiées de $ \langle p_2(z) \rangle $ .....	52
II.3.3.5	Comparaison des différentes solutions pour la pression moyenne $ \langle p_2(z) \rangle $ .....	53
<b>II.4</b>	<b>RAYON EFFECTIF D'UN TRANSDUCTEUR.....</b>	<b>55</b>
<b>II.5</b>	<b>CONCLUSION.....</b>	<b>56</b>
	Références bibliographiques.....	57
<b>CHAPITRE III : Méthodes de mesure du paramètre B/A – Etat de l'art.....</b>		<b>60</b>
<b>III.1</b>	<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>61</b>
<b>III.2</b>	<b>METHODES THERMODYNAMIQUES .....</b>	<b>61</b>
<b>III.3</b>	<b>METHODES D'AMPLITUDE FINIE .....</b>	<b>64</b>
III.3.1	INTRODUCTION .....	64
III.3.2	METHODES HARMONIQUES.....	64
III.3.2.1	Méthodes directes .....	65
III.3.2.2	Méthodes comparatives .....	70
III.3.3	METHODES D'EXTRA-ATTENUATION.....	74
III.3.4	AUTRES METHODES D'AMPLITUDE FINIE .....	76
III.3.4.1	Méthodes utilisant une excitation composite .....	76
III.3.4.2	Méthodes utilisant une impulsion photoacoustique : .....	78
<b>III.4</b>	<b>CARACTERISTIQUES DE QUELQUES MILIEUX .....</b>	<b>79</b>
<b>III.5</b>	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>81</b>
	Références bibliographiques.....	82
<b>CHAPITRE IV : Analyses théorique et expérimentale de la méthode comparative... 85</b>		
<b>Analyse théorique de la méthode comparative.....</b>		<b>86</b>
<b>IV.1</b>	<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>87</b>
<b>IV.2</b>	<b>EXPRESSIONS DU PARAMETRE B/A POUR LA METHODE COMPARATIVE SIMPLE ..87</b>	
IV.2.1	EXPRESSIONS COMPLETES DU PARAMETRE B/A.....	87
IV.2.1.1	Principe du système de mesure .....	87
IV.2.1.2	Procédure par mesure des composantes $V_{s2}$ et $V_{s1}$ .....	88
IV.2.1.3	Procédure par mesure des composantes $V_{s2}$ et $V_o$ .....	89
IV.2.2	APPROXIMATIONS ET EXPRESSIONS SIMPLIFIEES DU PARAMETRE B/A.....	89

<b>IV.3</b>	<b>MODELISATION DU SYSTEME DE MESURE.....</b>	<b>91</b>
IV.3.1	SYSTEME DE MESURE .....	91
IV.3.2	MODELISATION DU TRANSDUCTEUR.....	91
IV.3.2.1	<i>Modèle d'un transducteur en émission et en réception.....</i>	<i>92</i>
IV.3.2.2	<i>Restrictions et validations des modèles théoriques.....</i>	<i>92</i>
IV.3.3	EXPRESSION DES SENSIBILITES .....	93
IV.3.3.1	<i>Sensibilités en réception <math>\eta_1</math> et <math>\eta_2</math> :.....</i>	<i>93</i>
IV.3.3.2	<i>Sensibilité en émission <math>\eta_0</math> :.....</i>	<i>93</i>
IV.3.4	EXPRESSION DE L'IMPEDANCE ELECTRIQUE DU TRANSDUCTEUR .....	94
IV.3.5	INFLUENCE DES CABLES DE LIAISON .....	94
IV.3.5.1	<i>Modélisation de l'ensemble :Générateur – Ligne – Transducteur source.....</i>	<i>94</i>
IV.3.5.2	<i>Modélisation de l'ensemble : Ligne – Instrument de mesure (<math>Z_{IM}</math>).....</i>	<i>95</i>
<b>IV.4</b>	<b>SIMULATIONS ET ANALYSES .....</b>	<b>95</b>
IV.4.1	SIMULATIONS ET ANALYSES DES CARACTERISTIQUES DES TRANSDUCTEURS ....	96
IV.4.1.1	<i>Impédance d'entrée du transducteur source : .....</i>	<i>96</i>
IV.4.1.2	<i>Sensibilité en émission du transducteur source : .....</i>	<i>97</i>
IV.4.1.3	<i>Sensibilité en réception du transducteur détecteur : .....</i>	<i>97</i>
IV.4.2	SIMULATIONS ET ANALYSES DES FONCTIONS DE SENSIBILITE.....	98
IV.4.2.1	<i>Procédure par mesure des composantes <math>V_{s2}</math> et <math>V_{s1}</math> : .....</i>	<i>98</i>
IV.4.2.2	<i>Procédure par mesure des composantes <math>V_{s2}</math> et <math>V_0</math> : .....</i>	<i>102</i>
IV.4.3	SIMULATIONS ET ANALYSES DES FONCTIONS DE DIFFRACTION .....	106
IV.4.3.1	<i>Procédure par mesure des composantes <math>V_{s2}</math> et <math>V_{s1}</math> : .....</i>	<i>106</i>
IV.4.3.2	<i>Procédure par mesure des composantes <math>V_{s2}</math> et <math>V_0</math> : .....</i>	<i>107</i>
IV.4.4	SIMULATIONS ET ANALYSES DU SYTEME DE MESURE.....	108
IV.4.4.1	<i>Procédure par mesure des composantes <math>V_{s2}</math> et <math>V_{s1}</math> : .....</i>	<i>108</i>
IV.4.4.2	<i>Procédure par mesure des composantes <math>V_{s2}</math> et <math>V_0</math> : .....</i>	<i>113</i>
IV.4.4.3	<i>Conclusion.....</i>	<i>116</i>
	<b>Analyse expérimentale de la méthode comparative.....</b>	<b>118</b>
<b>IV.5</b>	<b>EXPERIMENTATIONS ET ANALYSES .....</b>	<b>119</b>
IV.5.1	DISPOSITIF DE MESURE .....	119
IV.5.2	REALISATION ET CARACTERISATION ELECTRIQUE DES TRANSDUCTEURS .....	120
IV.5.2.1	<i>Transducteurs 2 et 4 MHz – milieu arrière = air (425 rayl) :.....</i>	<i>120</i>
IV.5.2.2	<i>Transducteurs 2 et 4 MHz – milieu arrière = plexiglas (3 Mrayl) : .....</i>	<i>122</i>
IV.5.3	PRINCIPE DE LA MESURE DES COMPOSANTES SPECTRALES $V_0$ , $V_{s1}$ , $V_{s2}$ .....	123
IV.5.4	MESURES ET ESTIMATIONS DES PARAMETRES DES MILIEUX .....	126
IV.5.5	UTILISATION DU DISPOSITIF POUR LA MESURE DU PARAMETRE B/A.....	127
IV.5.5.1	<i>Mise en évidence du caractère non linéaire de la propagation.....</i>	<i>127</i>
IV.5.5.2	<i>Relevés des composantes <math>V_{s1}</math> et <math>V_{s2}</math> dans l'eau et l'éthanol. ....</i>	<i>128</i>
IV.5.5.3	<i>Relevés des composantes <math>V_0</math> <math>V_{s1}</math> <math>V_{s2}</math> avec les transducteurs de type B et C. ....</i>	<i>131</i>
IV.5.5.4	<i>Tracés expérimentaux du paramètre B/A pour les deux procédures de mesure .....</i>	<i>134</i>
IV.5.5.5	<i>Mesure du paramètre B/A de quelques milieux. ....</i>	<i>137</i>
<b>IV.6</b>	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>140</b>
	<b>ANNEXE DU CHAPITRE IV.....</b>	<b>141</b>
A.I	<i>Modélisation d'un transducteur.....</i>	<i>141</i>
A.II	<i>Modélisation d'une ligne en régime harmonique.....</i>	<i>143</i>
	Références bibliographiques.....	144
	<b>CHAPITRE V : Mesure du paramètre B/A en mode pulse-écho.....</b>	<b>147</b>
<b>V.1</b>	<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>149</b>
<b>V.2</b>	<b>PRINCIPE DU SYSTEME DE MESURE .....</b>	<b>149</b>
<b>V.3</b>	<b>EXPRESSIONS THEORIQUES DU PARAMETRE B/A .....</b>	<b>149</b>



<b>V.4</b>	<b>SIMULATIONS .....</b>	<b>151</b>
V.4.1	PROCEDURE PAR MESURE DES COMPOSANTES $V_{S_2}$ ET $V_{S_1}$ .....	151
V.4.2	PROCEDURE PAR MESURE DES COMPOSANTES $V_{S_2}$ ET $V_0$ .....	154
<b>V.5</b>	<b>EXPERIMENTATIONS ET ANALYSES .....</b>	<b>156</b>
V.5.1	DISPOSITIF DE MESURE .....	156
V.5.2	MESURE DU PARAMETRE B/A PAR DETECTION DES COMPOSANTES DE L'ECHO. ....	156
V.5.2.1	<i>Observations des échos détectés - Mise en évidence du caractère non linéaire de la propagation. ....</i>	<i>156</i>
V.5.2.2	<i>Détection des composantes <math>V_{S_2}</math> et <math>V_{S_1}</math> de l'écho – Détermination du paramètre B/A .....</i>	<i>157</i>
V.5.3	AMELIORATION DE LA DETECTION DU SECOND HARMONIQUE .....	159
V.5.3.1	<i>Détermination des éléments du transformateur d'impédance et du filtre: .....</i>	<i>159</i>
V.5.3.2	<i>Influence du dispositif sur la fonction de sensibilité: .....</i>	<i>161</i>
V.5.3.3	<i>Exploitation du dispositif d'amélioration de la détection des composantes harmoniques. ....</i>	<i>162</i>
<b>V.6</b>	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>165</b>
	Références bibliographiques.....	167
	<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>168</b>

$\rho$ : masse volumique du milieu (densité)	$\text{kg.m}^{-3}$
$\rho_0$ : masse volumique à l'équilibre	$\text{kg.m}^{-3}$
$c$ : célérité ou vitesse de phase de propagation	$\text{m.s}^{-1}$
$c_0$ : célérité d'une onde d'amplitude infinitésimale	$\text{m.s}^{-1}$
$\alpha = \alpha_0.f^q$ : coefficient d'absorption du milieu	$\text{Np.m}^{-1}$
$\alpha_0$ : coefficient d'absorption caractéristique	$\text{Np.m}^{-1}.\text{Hz}^{-q}$
$q$ : coefficient caractéristique du milieu	sans dimension
$\alpha_1, \alpha_2$ : coefficients d'absorption aux fréquences $f_1$ et $f_2$	$\text{Np.m}^{-1}$
$f_1, f_2$ : fréquence du fondamental et du second harmonique	Hz
$u$ : vitesse de vibration des particules du milieu (vitesse particulière)	$\text{m.s}^{-1}$
$U_0$ : amplitude de la vitesse particulière à la source	$\text{m.s}^{-1}$
$p$ : pression acoustique dans le milieu	Pa
$p_0$ : pression dans le milieu au repos	Pa
$P_0$ : amplitude de la pression à la source	Pa
$s$ : entropie massique	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$s_0$ : $s$ au repos	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$T$ : température du milieu	K
$B/A$ : paramètre de non linéarité acoustique du milieu	sans dimension
$\beta=1+B/2A$ : autre paramètre de non linéarité	sans dimension
$\chi$ : coefficient de conductivité thermique	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$F$ : force visqueuse	N
$\mu$ : coefficient de viscosité transversal	Pa.s
$\kappa$ : coefficient de viscosité de compression	Pa.s
$\nu$ : coefficient de viscosité dynamique	Pa.s
$C_p, C_v$ : capacités calorifiques à pression constante et à volume constant	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\gamma = C_p/C_v$ : paramètre de non linéarité acoustique pour un gaz	sans dimension
$k = \omega/c_0$ : nombre d'onde	$\text{m}^{-1}$
$k' = k + j.\alpha$ : nombre d'onde complexe	$\text{m}^{-1}$
$\lambda = c/f$ : longueur d'onde	m
$\omega = 2.\pi.f$ : pulsation	$\text{rd.s}^{-1}$
$f$ : fréquence d'excitation de la source	Hz
$\phi$ : potentiel des vitesses	
$D$ : coefficient de diffusion du son	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
$z$ : abscisse sur la direction de propagation	m
$\tau = t - z/c_0$ : temps retardé	s
$M_0 = U_0/c_0$ : nombre de Mach à la source	sans dimension
$I$ : intensité acoustique moyenne	$\text{W.m}^{-2}$
$n$ : rang de l'harmonique	
$P_n(z)$ : amplitude de la pression à l'abscisse $z$ pour l'harmonique $n$ *	Pa
$l_D$ : distance de discontinuité	m
$\sigma = z/l_D$ : abscisse normalisée	sans dimension
$a$ : rayon du transducteur	m
$a_{\text{eff}}$ : rayon effectif du transducteur	m
$\eta_1, \eta_2$ : sensibilités du transducteur en détection aux fréquences $f_1$ et $f_2$	$\text{V.Pa}^{-1}$
$\eta_0$ : sensibilité du transducteur source en émission	$\text{Pa.V}^{-1}$
$F\eta_{\text{rx}}$ : fonction de sensibilité	sans dimension
$F\alpha_{12}$ : fonction d'atténuation	sans dimension
$FD_{12}$ : fonction de diffraction	sans dimension
$D_1$ : fonction de correction de la diffraction pour le fondamental	sans dimension
$D_2$ : fonction de correction de la diffraction pour le second harmonique	sans dimension
$A$ : aire de la surface active du transducteur	$\text{m}^2$
$Z = \rho.c$ : impédance acoustique	$\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} = \text{rayl}$
$Z_X$ : impédance acoustique du milieu X	rayl
$\Gamma_x$ : coefficient de réflexion milieu X -> réflecteur	sans dimension

\*  $P_n(z)$  dans le cas d'une onde plane, ou  $P_n(z) = \langle p_n(z) \rangle =$  pression moyenne dans le cas d'une source réelle.



# **INTRODUCTION GENERALE**



Si la première émission ultrasonore est obtenue mécaniquement par Savart en 1830, l'histoire des ultrasons commence réellement avec la découverte de la piézo-électricité du quartz en 1880 par les frères Curie. 37 ans plus tard Langevin utilise ce cristal pour réaliser le premier transducteur ultrasonore utilisé comme détecteur sous-marin. Depuis, les applications industrielles et médicales se développèrent graduellement à travers de nombreux travaux.

Le champ d'application des ultrasons est vaste, et chacun des domaines est caractérisé par les fréquences et les intensités utilisées, ainsi que par la technologie employée pour produire, contrôler et détecter le champ de pression ultrasonore. On peut distinguer deux groupes :

- Les applications utilisant des ondes ultrasonores de faibles intensités (contrôle non destructif, imagerie ultrasonore, caractérisation de certains matériaux dont les milieux biologiques in-vivo ou in-vitro ...).
- Les applications utilisant des intensités élevées (sondage sous-marin, usinage, hyperthermie<sup>1</sup>, lithotritie<sup>2</sup> ...).

Selon l'intensité ultrasonore et les phénomènes que l'on désire analyser, l'étude se fera dans le cadre de l'acoustique linéaire ou non linéaire.

L'acoustique linéaire traite des mouvements qui caractérisent une perturbation infinitésimale du milieu autour de l'état d'équilibre. Dans ce cas les variations locales de la densité du milieu et de la vitesse de propagation sont négligées, et les mouvements sont gouvernés par des équations différentielles linéaires. Cette théorie est utilisée pour décrire la propagation d'une onde ultrasonore dans un grand nombre de domaines.

Cependant, certains phénomènes accompagnant la propagation de l'onde ne peuvent s'expliquer dans le cadre de la théorie linéaire. Le plus apparent étant la déformation de la forme temporelle de l'onde ultrasonore, engendrée par la non linéarité acoustique du milieu.

Les variations locales de la célérité de l'onde et de la densité du milieu ne peuvent plus être négligées, et on aboutit à des équations différentielles non linéaires dont l'étude se fait dans le cadre de l'acoustique non linéaire. Les premiers travaux dans cette branche de l'acoustique ont été réalisés dans les années trente pour décrire le caractère non linéaire de la propagation d'une onde plane [1,2,3]. Mais il faut attendre les années soixante dix pour que les chercheurs russes établissent le modèle de propagation le plus complet et le plus utilisé à l'heure actuelle, et connu sous le nom de modèle K.Z.K (Kuznetsov-Khokhlov-Zaboltskaya).

Ce modèle prend en compte les effets de non linéarité, de diffraction et d'absorption, accompagnant la propagation de l'onde ultrasonore dans un milieu [4,5].

Le caractère non linéaire de la propagation se quantifie par une grandeur propre au milieu, appelée paramètre de non linéarité  $B/A$ .

Il est établi que cette non linéarité se manifeste par une déformation du profil temporel de l'onde ultrasonore initialement émise par la source. Ainsi, dans le cas d'une source sinusoïdale, cette distorsion se traduit dans le domaine spectral par la génération d'harmoniques, c'est-à-dire par l'apparition de composantes à des fréquences multiples de la fréquence fondamentale. Il se produit alors un transfert d'énergie du fondamental vers les harmoniques de rangs supérieurs et entre les harmoniques eux-mêmes. Ce phénomène est d'autant plus important que l'intensité ou la fréquence de l'onde émise sont élevées.

Comme l'absorption des ondes, se traduisant par un échauffement du milieu, est d'autant plus importante que la fréquence est élevée, l'étude des phénomènes de non linéarités ultrasonores est donc d'une grande utilité dans les applications biomédicales. En effet, dans les applications thérapeutiques telles que l'hyperthermie et la lithotritie<sup>2</sup>, il faut quitter le cadre de l'acoustique

---

<sup>1</sup> *Hyperthermie : élévation de la température des tissus au dessus de la normale.*

<sup>2</sup> *Lithotritie : fragmentation des calculs rénaux par variation rapide de la pression.*

linéaire pour analyser la génération d'harmoniques pouvant engendrer des lésions par échauffement dans les tissus sains [6,7].

De même qu'en imagerie médicale où l'utilisation de fréquences élevées, pour avoir une bonne résolution spatiale, peut engendrer des effets non linéaires importants [8].

Si les non linéarités ultrasonores engendrent des effets indésirables dans l'emploi de certaines techniques, elles ont aussi plusieurs applications.

Parmi ces applications on peut citer la production d'une onde sonore basse fréquence par émission de deux ondes ayant des fréquences élevées et proches. La non linéarité du milieu de propagation faisant apparaître une onde de fréquence basse égale à la différence des deux fréquences hautes. Ce principe trouve des applications en transmission sous-marine où on peut produire des ondes se propageant sur de grandes distances avec des transducteurs de petites tailles [9].

Citons également une application récente de ce procédé pour réaliser une enceinte Haute Fidélité, dans la gamme des fréquences audibles, avec un réseau de transducteurs ultrasonores. Dans ce cas une des deux ondes ultrasonores HF émises est modulée par le signal BF audio [10].

Des applications se développent également en imagerie médicale par utilisation des harmoniques. Les études montrent que le contraste est amélioré par rapport aux systèmes classiques qui ne détectent que le fondamental de l'onde transmise, réfléchi, ou diffractée par l'objet pour en déduire ses paramètres acoustiques [11,12,13].

L'analyse des harmoniques générés dans un milieu apporte donc des informations supplémentaires sur la nature du milieu. Ainsi, d'autres applications se développent dans le domaine biomédical telle que la caractérisation des milieux biologiques à l'aide du paramètre de non linéarité B/A [14].

La variation du paramètre B/A en fonction des constituants du milieu est en général assez différente de celles observées pour les autres grandeurs utilisées habituellement en caractérisation, comme la vitesse de propagation et l'atténuation.

Par exemple, la vitesse de propagation est plus faible dans les tissus gras que dans les tissus non gras, alors que c'est le phénomène inverse qui se produit pour la valeur du paramètre B/A [15,16].

En 1981 Dunn *et al.* [17] ont montré que le paramètre B/A augmente de façon presque linéaire en fonction de la concentration en protéine d'une solution aqueuse. En 1991 Zhang *et al.* [18] mettent en évidence la variation de ce paramètre en fonction de la composition du milieu biologique au niveau cellulaire et moléculaire.

La mesure du paramètre B/A des milieux biologiques présente donc un intérêt certain, et on peut espérer utiliser un jour ce type de caractérisation pour diagnostiquer certaines pathologies telles que les cancers par exemple.

De plus, les développements récents de l'imagerie médicale dans le domaine de l'acoustique non linéaire nécessitent pour ses modèles théoriques la connaissance du paramètre B/A des différents milieux biologiques rencontrés. Dans ce cas la mesure de ce paramètre *in vivo* est nécessaire, bien que des expérimentations réalisées en 1987 sur des foies de chat aient donné des valeurs pratiquement identiques *in vivo* et *in vitro* [19].

Différentes méthodes existent pour mesurer le paramètre B/A, et on peut les classer en deux catégories [14]:

- Les méthodes thermodynamiques, qui reposent sur la définition même du paramètre B/A liant les variations de la pression en fonction de la densité. Si ce sont les plus précises, elles nécessitent un appareillage complexe qui ne permet pas d'effectuer des

mesures *in vivo*. De plus, les variations de pression et de température nécessaires à leur processus peuvent limiter leur champ d'investigation dans les milieux biologiques.

- Les méthodes d'amplitude finie, dans lesquelles le paramètre B/A se déduit de la distorsion de l'onde ultrasonore. Moins précises, elles sont cependant plus simples à mettre en œuvre, et elles peuvent s'utiliser pour la caractérisation de tous les milieux y compris les mesures *in vivo* dans les milieux biologiques.

Dans les méthodes d'amplitude finie la procédure de mesure la plus simple consiste à effectuer l'analyse spectrale d'une onde ultrasonore, initialement sinusoïdale, détectée après sa traversée dans le milieu à analyser. Avec cette technique, on distingue deux types de méthodes:

- Les méthodes directes, qui permettent de déduire le paramètre B/A à partir de la mesure du second harmonique de l'onde détectée. Ces méthodes nécessitent la calibration préalable des transducteurs utilisés pour l'émission et la détection de l'onde ultrasonore, ce qui ne peut s'effectuer qu'avec une instrumentation particulière.
- Les méthodes comparatives, dans lesquelles le paramètre B/A se déduit des composantes harmoniques mesurées pour le milieu à caractériser et celles mesurées pour un milieu de référence de caractéristique connues. Ces méthodes permettent ainsi de s'affranchir de la calibration des transducteurs.

Si les méthodes comparatives ont déjà été exploitées efficacement [18,20], la précision de la mesure peut se dégrader si certaines conditions expérimentales ne sont pas respectées. Elles concernent la technologie des transducteurs, la fréquence d'utilisation, le choix du milieu de référence et la procédure de mesure en elle même <sup>3</sup>.

Les conditions expérimentales des méthodes comparatives n'ayant quasiment pas été développées dans la littérature, nous en avons fait le thème principal de ce travail de thèse. Et les modèles théoriques que nous avons élaborés ont permis de développer une nouvelle méthode du paramètre B/A en mode pulse-écho.

### **Ce travail se décompose en cinq chapitres.**

Dans le premier chapitre nous présentons les bases théoriques de l'acoustique non linéaire, ainsi que la définition du paramètre de non linéarité B/A du milieu de propagation.

Ensuite nous donnons et commentons les diverses solutions des équations de propagation dans le cas d'une onde plane, et en particulier les solutions analytiques asymptotiques nécessaire à la mesure du paramètre B/A.

Ces solutions asymptotiques pour le fondamental et le second harmonique sont ensuite comparées avec la solution numérique de l'équation complète (équation de Burgers), afin de déterminer leur domaine de validité.

Le deuxième chapitre est consacré dans un premier temps à l'étude du champ acoustique produit par une source réelle, et réalisée par un transducteur ayant la forme d'un disque plan vibrant comme un piston. Dans cette partie nous établissons les solutions analytiques du fondamental et du second harmonique prenant en compte la diffraction du faisceau ultrasonore.

La mesures des harmoniques s'effectuant à l'aide d'un autre transducteur utilisé en détection, nous développons dans une deuxième partie les solutions analytiques exprimant les pressions moyennes du fondamental et du second harmonique captées par le détecteur. Nous donnons

---

<sup>3</sup> Précisons toutefois qu'il existe une méthode comparative, dite d'insertion et substitution, qui ne nécessite pas toutes ces précautions particulières, mais qui demande par contre une réalisation mécanique de la cellule de mesure très délicate [20,21]



ensuite de nouvelles solutions analytiques pour le second harmonique, plus simples, mais tout aussi précises que celles présentées jusqu'à présent dans la littérature.

Le troisième chapitre est consacré aux différentes méthodes de mesure du paramètre B/A décrites dans la littérature. Les méthodes d'amplitude finie y sont particulièrement détaillées.

Le quatrième chapitre présente une analyse complète des deux procédures de mesure utilisées pour la détermination du paramètre B/A par la méthode comparative.

Dans une première partie nous décrivons ces deux procédures en donnant les formulations complètes du paramètre B/A. Ces formulations intègrent les corrections de diffraction sur le fondamental et le second harmonique, ainsi que les sensibilités des transducteurs. L'intérêt des méthodes comparative étant de s'affranchir de la calibration des transducteurs, nous définissons une nouvelle fonction, appelée fonction de sensibilité du système de mesure, et permettant de quantifier l'erreur sur la mesure du paramètre B/A en l'absence d'étalonnage des transducteurs.

Cette fonction dépend des paramètres électro-mécaniques des transducteurs et des grandeurs acoustiques des milieux de propagation, et si elle est unitaire la méthode comparative peut s'affranchir de la calibration des transducteurs. Ainsi, l'étude du comportement de la fonction de sensibilité en fonction des paramètres du système de mesure nous permettra d'effectuer les meilleurs choix pour les conditions expérimentales. Dans certains cas où ces conditions ne sont pas respectées, nous établissons des coefficients de correction pouvant être utilisés afin d'améliorer la précision sur la mesure du paramètre B/A.

Nous élaborons ensuite un modèle théorique reliant les grandeurs électriques aux grandeurs acoustiques, et permettant l'analyse de la chaîne de mesure associée aux différentes procédures.

La deuxième partie de ce chapitre traite de l'aspect expérimental mis en œuvre afin de vérifier et de valider les choix théoriques retenus. Les résultats expérimentaux confirment les prédictions théoriques. Les écarts entre les grandeurs électriques simulées et mesurées y sont analysés et justifiés. Nous exploitons ensuite la procédure de mesure la plus adéquate pour déterminer le paramètre B/A de différents milieux.

Dans le cinquième et dernier chapitre nous appliquons le modèle théorique précédent à la mesure du paramètre B/A en mode pulse-écho, un unique transducteur servant à la fois de source et de détecteur. Avec ce système nous montrons que seule une procédure de mesure peut être utilisée. Des expérimentations valident ensuite cette méthode originale.

Puis nous améliorons le système à l'aide d'un dispositif électrique permettant d'augmenter le taux de distorsion de l'écho détecté, afin de faciliter la mesure du second harmonique.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. FAY R.D. " Plane sound waves of finite amplitude ". J.Acoust,Soc,Am. Vol.3, pp. 222-241, 1931.
2. FUBINI E. " Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza ". Alta Frequenza , Vol.4, pp. 530-581, 1935.
3. THURAS A.L., JENKINS R.T., O'NEIL H.T. " Extraneous frequencies generated in air carrying intense sound waves ", J,Acoust.Soc.Am. Vol.VI, pp, 173-180, 1935.
4. KUZNETSOV V.P, " Equations of nonlinear acoustics " Sov. Phys. Acoust. Vol.16, N°4, pp. 467-470, 1971.
5. ZABOLTSKAYA E.A., KHOKHLOV R.V. " Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams ". Sov, Phys. Acoust. Vol. 15, N° 1, pp. 35-40, 1969.
6. LEWIN P.A., SCHAFER M. E., HARAN M. E " Nonlinear propagation models in ultrasound hyperthermia" Proc. Institute of Acoustics, Vol. 8, N° 2, pp. 85, 1986.
7. CHRISTOPHER T. "Modeling the Dornier HM3 lithotripter" J,Acoust.Soc.Am. Vol.96, N°5, pp, 3088, 1994.
8. BACON D.R, CARSTENSEN E.L. "Increased heating diagnostic ultrasound due to nonlinear propagation" J,Acoust.Soc.Am. Vol.88, N°1, pp, 26, 1990.
9. BERKTAY H.O 3possible exploitation of non-linear acoustics in underwater transmitting applications" J. Sound Vib. Vol 2, N°4, pp 435-461, 1965.
10. Electronique International Hebdo , N°261, 17 avril 1997.
11. CHRISTOPHER T. " Finite amplitude distortion-based inhomogeneous pulse-echo ultrasonic imaging" IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. , Vol.44, N°1, pp 125-139, 1997.
12. CHITNALAH A., KOURTICHE D., NADI M. " aspect des non-linéarités ultrasonores: Application à l'imagerie du second harmonique" Mediterranean Conference on Electronics and Automatic control, 17-19 septembre 1998, Marrakech, Maroc.
13. KOURTICHE D., CHITNALAH A., NADI M. " Exploitation du second harmonique en imagerie par tomographie ultrasonore" Colloque interdisciplinaire en instrumentation, 18-19 novembre 1998, ENS Cachan, France.
14. BJØRNØ L. "Characterization of biological media by means of their non-linearity" Ultrasonics, Vol. N°24, sept. 1986.
15. LAW W.K., FRIZZELL L.A., DUN F. " Ultrasonic determination of the nonlinearity parameter B/A for biological media ". J.Acoust.Soc.Am., Vol.69, N°4, pp. 1210-1212, 1981.

16. LAW W. K., FRIZZELL L.A. , DUNN F. " Determination of the nonlinearity parameter B/A of biological media " ". Ultrasound in Med. & Biol., Vol. 11, N°2, pp. 307-318, 1985.
17. DUNN F., LAW W.K., FRIZZELL L.A. " Nonlinear ultrasonic wave propagation in biological materials " Ultrasonics Symposium Proceedings, IEEE, New York, 1981.
18. ZHANG J., KUHLENSCHMIDT M.S., DUNN F. " Influences of structural factors of biological media on the acoustic nonlinearity parameter B/A " J.Acoust.Soc,Am., Vol.89, N1, pp. 80-91, 1991.
19. ZHANG J., DUNN F. "In vivo B/A determination in a mammalian organ" J.Acoust.Soc.Am., Vol.81, N°5, pp. 1635-1637, 1987.
20. GONG X.F., FENG R., ZHU C., SHI T. "Ultrasonic investigation of the nonlinearity parameter B/A in biological media " J.Acoust.Soc.Am., Vol.76, N°3, pp. 949-950, 1984.
21. GONG X.F., ZHU Z.M., SHI T., HUANG J. "Determination off the acoustic nonlinearity parameter in biological media using FAIS and ITD methods" J.Acoust.Soc.Am., Vol.86, N°1, pp. 1-5, 1989.

## **CHAPITRE I**

# **BASES THEORIQUES DE L'ACOUSTIQUE NON LINEAIRE**



## I.1 INTRODUCTION

Dans un premier temps nous établirons les bases théorique de l'acoustiques non linéaire ainsi que la définition du paramètre de non linéarité B/A d'un milieu. L'objectif principal de cette thèse étant la mesure du paramètre B/A par détection des harmoniques de l'onde acoustique se propageant dans le milieu à analyser, il sera nécessaire ensuite d'établir les différents modèles de propagation dans le cadre de l'acoustique non linéaire.

Le modèle KZK, établi dans les années soixante-dix par les chercheurs Russes, englobant les effets de diffraction, d'absorption, et de non linéarité, est le plus complet à l'heure actuelle. Ce chapitre sera ensuite consacré à l'étude du modèle de propagation d'une onde plane, dont sont issues les équations de base de la plupart des méthodes harmoniques de mesure du paramètre B/A.

Le modèle KZK appliqué au cas plus simple d'une onde plane conduit à l'équation de propagation de Burgers, dont nous établirons les différentes solutions et en particulier les solutions analytiques nécessaires à la mesure du paramètre B/A.

La mesure de ce paramètre par les méthodes harmoniques, dites "méthodes d'amplitude finie", peut être ensuite affinée en tenant compte de la diffraction du faisceau ultrasonore produit par une source réelle, ce que nous développerons au chapitre II.

## I.2 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE PROPAGATION DANS UN FLUIDE

*A des degrés différents, les fluides sont visqueux, isotropes et compressibles.*

L'onde acoustique est une vibration mécanique du milieu dans lequel il se produit alternativement en tout point des compressions et des expansions. Par "point" du fluide on désigne un élément de volume, appelé par la suite "particule", contenant un grand nombre de molécules et cependant considéré comme un point en mécanique des fluides.

Dans une description eulérienne, les grandeurs attachées à ces points de coordonnées  $(x,y,z)$ , sont :

- La vitesse des particules ou vitesse particulière :  $u(x, y, z, t)$
- Et les caractéristiques thermodynamiques telles que la pression  $p(x,y,z,t)$ , la masse volumique  $\rho(x,y,z,t)$ , la température  $T(x,y,z,t)$ , et l'entropie  $s(x,y,z,t)$ .

L'état d'équilibre  $E_0$  du fluide au repos se définit par :  $u = 0$  ,  $\rho = \rho_0$  ,  $p = p_0$  ,  $T = T_0$  et  $s = s_0$  où  $\rho_0$  ,  $p_0$  ,  $T_0$  et  $s_0$  sont des constantes.

Le champ acoustique, engendré par une perturbation de l'état  $E_0$ , est représenté par les grandeurs  $u'$  ,  $\rho'$  ,  $p'$  ,  $T'$  et  $s'$  telles que :

$$u = u' , \rho = \rho_0 + \rho' , p = p_0 + p' , T = T_0 + T' , s = s_0 + s' \quad (\text{I.1})$$

A partir des concepts de la mécanique des milieux continus, on peut établir les équations de l'acoustique exprimant les lois de conservation et d'état ainsi que celles liées à l'environnement du milieu considéré.

### I.2.1 LOIS DE CONSERVATION ET D'ETAT [1,2,3,4,5,6]

#### I.2.1.1 Conservation de la masse – équation de continuité

Elle se traduit par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho.u) = 0 \quad (\text{I.2})$$

### I.2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement – Equation dynamique

Elle traduit l'équilibre entre les différentes forces intrinsèques au milieu. Dans le cas d'un fluide non visqueux (non dissipatif), on obtient l'équation du mouvement établie par

L. Euler en 1755 :

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0 \quad (\text{I.3})$$

Dans le cas d'un fluide visqueux l'équation (I.3) devient l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mathbf{F} = \mu \cdot \Delta \mathbf{u} + \left( \kappa + \frac{\mu}{3} \right) \cdot \text{grad}(\text{div}(\mathbf{u})) \quad (\text{I.4})$$

où  $\mathbf{F}$  représente la force visqueuse,  $\mu$  le coefficient de viscosité transversal ou de cisaillement et  $\kappa$  le coefficient de viscosité de volume ou de compression.

(Ces coefficients sont exprimés en Pascal.seconde ( $Pa.s \equiv kg.m^{-1}.s^{-1}$ ) ou Poiseuille (Pl) )

En considérant le champ acoustique irrotationnel, il est utile d'introduire la fonction

$$\phi(x,y,z,t) \text{ représentant le potentiel scalaire des vitesses : } \mathbf{u} = -\text{grad}(\phi) = -\nabla \phi \quad (\text{I.5})$$

Dans ce cas, puisque  $\text{rot}(\mathbf{u}) = 0$ , l'équation (I.4) se simplifie sous la forme :

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 \right) + \nabla p = \mathbf{F} = \nu \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (\text{I.6})$$

où  $\nu = \kappa + \frac{4}{3} \mu$  ( $Pa.s$ ) représente le coefficient de viscosité dynamique du milieu.

### I.2.1.3 Conservation de l'énergie

Le bilan énergétique fait apparaître des termes de variation d'entropie liés à la dissipation visqueuse et à la conductivité thermique. L'équation de conduction thermique s'écrit :

$$\rho \cdot T \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \chi \cdot \Delta T \quad (\text{I.7})$$

où  $\chi$  ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ) est le coefficient de conductivité thermique supposé constant,  $T$  ( $K$ ) la température et  $s$  ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ ) l'entropie massique.

### I.2.1.4 Equations d'état

On utilise les équations constitutives du milieu liant les paramètres d'état  $p$ ,  $\rho$ ,  $s$  et  $T$  :  $p = p(\rho, T)$  et  $p = p(\rho, s)$  (I.8)

Pour les gaz parfaits on a [6] :

$$p(\rho, T) = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{et} \quad p(\rho, s) = \rho^\gamma \cdot R \cdot e^{\frac{s-s_0}{C_v}} \quad (\text{I.9})$$

avec  $\gamma = C_p / C_v$  et  $R = C_p - C_v$ , où  $C_p$  et  $C_v$  sont les capacités calorifiques à pression constante et volume constant.

Le développement de  $p(\rho, s)$  en fonction de la variation de la densité relative, ou condensation,  $(\rho - \rho_0)/\rho_0$  donne :

$$p' = p - p_0 = c_0^2 \cdot (\rho - \rho_0) + \frac{(\gamma - 1) \cdot c_0^2}{2 \cdot \rho_0} \cdot (\rho - \rho_0)^2 + \dots + \frac{c_0^2 \cdot \rho_0}{\gamma \cdot C_v} \cdot (s - s_0) + \dots \quad (\text{I.10})$$

avec  $c = \sqrt{\left| \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}$  et  $c_0 = \sqrt{\left| \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0, s}}$  = célérité adiabatique du son ( $m/s$ ). (I.11)

( $c_0$  = vitesse de propagation d'une onde d'amplitude infinitésimale)

*Pour les liquides*, à défaut d'expression analytique, on obtient une relation similaire en effectuant un développement en série de Taylor de l'équation d'état  $p = p(\rho, s)$  [5, chap7][7] :

$$(I.12) \quad p' = p - p_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0, s} (\rho - \rho_0) + \left. \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0, s} \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2} + \dots + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\rho, s_0} (s - s_0) + \left. \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \right|_{\rho, s_0} \frac{(s - s_0)^2}{2} + \dots$$

Dans le cadre de l'acoustique la variation d'entropie ( $s'$ ) est généralement négligeable, et on peut réduire le développement précédent aux seuls termes de densité relative. En se limitant au deuxième ordre, on obtient :

$$p' = A \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + B \frac{1}{2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \dots = A \frac{\rho'}{\rho_0} + B \frac{1}{2} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots \quad (I.13)$$

Le rapport  $B/A$  apparaît comme un paramètre significatif de la variation non linéaire de la pression en fonction de la masse volumique. Par identification, et avec (I.11), on obtient :

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0^2} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0, s} = 2 \rho_0 c_0 \left. \frac{\partial c}{\partial \rho} \right|_{\rho_0, s} \quad (I.14)$$

Cette relation est à la base des mesures du paramètre  $B/A$  par les méthodes thermodynamiques, comme nous le verrons au chapitre III.

En identifiant les développements (I.10) et (I.13) on peut écrire :  $\frac{B}{A} = \gamma - 1$  (I.15)

Pour les gaz le caractère non linéaire de la propagation sera lié au terme  $(\gamma - 1)$  et pour les liquides au paramètre  $B/A$  ou encore  $\beta = (\gamma + 1)/2 = 1 + B/2A$  [8]. (I.16)

*Les équations de conservation (I.2) (I.6) (I.7) et d'état (I.8) permettent d'établir l'équation de propagation, dans le cadre de l'acoustique non linéaire, d'une onde ultrasonore se propageant dans un fluide thermo-visqueux. Cependant il est utile d'établir en premier lieu l'équation de propagation dans le cadre de l'acoustique linéaire.*

## I.2.2 EQUATIONS DE PROPAGATION EN ACOUSTIQUE LINEAIRE

*(onde d'amplitude infinitésimale)*

L'acoustique linéaire traite des mouvements qui caractérisent une perturbation infinitésimale au voisinage du repos (I.1). Dans ce cas on a :

$$\frac{\rho'}{\rho_0} \equiv \frac{p'}{p_0} \equiv \frac{u'}{c_0} \equiv \vartheta \lll 1 \quad (I.17)$$

On établira l'équation de propagation dans un milieu avec pertes (dissipatif) et sans perte (non dissipatif). Les solutions dans le cas simple d'une onde plane seront également établies dans ce paragraphe.

### I.2.2.1 Milieu dissipatif

En ne conservant que les termes du premier ordre en  $\vartheta$ , et à l'aide de transformations thermodynamiques [4], le système d'équations (I.2, 6, 7, 12 et 5) conduit à l'équation de propagation linéaire dans un fluide thermo-visqueux :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \phi = \frac{\partial}{\partial t} [D \Delta \phi] \quad (I.18)$$



$$\text{où} \quad D = \frac{b}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left[ \nu + \chi \cdot \left( \frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right) \right] \quad (m^2/s) \quad (\text{I.19})$$

est le coefficient de diffusion du son,  $b$  (Pa.s) représentant l'effet global de viscosité et de conduction thermique du milieu.

Dans le cadre de l'acoustique les phénomènes dissipatifs dus à la conductivité thermique sont généralement négligeables devant ceux dus à la viscosité. Comme seule la conductivité thermique est susceptible d'engendrer une variation d'entropie, on peut adopter un modèle de propagation adiabatique où l'équation (I.7) n'est plus impliquée, ce qui revient à considérer  $b = \nu$ . (*Le mouvement induit par les ondes sonores étant rapide, les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire.*)

L'équation de propagation peut également s'écrire en fonction de la pression acoustique  $p'$ , la seule variable directement mesurable. Dans le cas de la propagation d'une onde d'amplitude infinitésimale, les équations (I.3) et (I.5) conduisent à la relation :

$$p' = p - p_0 = \rho_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{I.20})$$

Et l'équation de propagation (I.18) devient :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \cdot \Delta p' = \frac{\partial}{\partial t} (D \cdot \Delta p') \quad (\text{I.21})$$

Dans un modèle unidimensionnel, en considérant  $(oz)$  comme direction de propagation, la solution de l'équation (I.21) pour une perturbation à l'origine  $p'(0, t) = P_0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$  est l'onde plane progressive atténuée :

$$p'(z, t) = P_0 \cdot e^{j \cdot (k' \cdot z - \omega \cdot t)} = P_0 \cdot e^{j \cdot (k \cdot z - \omega \cdot t)} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \quad (\text{I.22})$$

où  $k' = k + j \cdot \alpha$  est le nombre d'onde complexe associé à la vibration de pulsation  $\omega$ , se propageant avec la célérité  $c_0$ , et affecté de l'atténuation linéique  $\alpha$  (Np/m).

En injectant cette solution (I.22) dans l'équation de propagation (I.21), et en considérant que dans pratiquement tous les cas :

$$k \gg \alpha \quad \text{et} \quad c_0^2 \gg D \cdot \omega \quad (\text{I.23})$$

$$\text{on obtient :} \quad k \cong \frac{\omega}{c_0} \quad \text{et} \quad \alpha \cong \frac{D \cdot \omega^2}{2 \cdot c_0^3} \quad (\text{I.24})$$

Ces grandeurs sont associées au fondamental, seule onde présente en acoustique linéaire.

### 1.2.2.2 Milieu non dissipatif

Dans un fluide sans perte ( $D = 0$ ) l'équation de propagation (I.21) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \cdot \Delta p' = 0 \quad (\text{I.25})$$

et sa solution harmonique dans un modèle unidimensionnel, à :

$$p'(z, t) = P_0 \cdot e^{j \cdot (k \cdot z - \omega \cdot t)} = P_0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (t - z / c_0)} \quad (\text{I.26})$$

$$\text{où} \quad k = \frac{\omega}{c_0} \quad \text{est le nombre d'onde réel} \quad (\text{I.27})$$

*Note* : pour une onde sinusoïdale de nombre d'onde  $k$ , (I.18) peut se mettre sous la forme (avec  $D=0$ ) :

$$\Delta \phi_{(x,y,z)} + k^2 \cdot \phi_{(x,y,z)} = 0 \quad (\text{I.28})$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Helmholtz [9] (voir § I.8.1.3).

### I.2.3 EQUATIONS DE PROPAGATION EN ACOUSTIQUE NON LINEAIRE (onde d'amplitude finie)

#### I.2.3.1 Cas général: Equation KZK

A l'aide des équations de conservation et d'état (I.2) (I.6) (I.7) (I.8) on obtient, en faisant des approximations du second ordre, l'équation générale de propagation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \cdot \Delta \phi = \frac{\partial}{\partial t} \left[ D \cdot \Delta \phi + (\nabla \phi)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (\text{I.29})$$

Cette équation, établie en 1970 par R.V Kuznetsov [6], constitue la base de toutes les études en acoustique non linéaire. Auparavant, en 1969, E.A Zabolotskaya et R.V Khoklov [10] ont proposé une équation pour le cas non dissipatif ( $D = 0$ ) dont (I.29) est la généralisation au cas dissipatif.

Dans un milieu non dissipatif et pour une source infiniment large d'amplitude infinitésimale, on peut négliger le membre de droite de (I.29) et on obtient une équation de propagation admettant pour solution une onde plane progressive (cf §I.2.2). C'est à dire que  $\phi(z,t)$  ne dépend que du temps retardé :  $\tau = t - \frac{z}{c_0}$  (I.30)

(oz) étant la direction de propagation. Dans le cas d'un faisceau ultrasonore étroit (source réelle), l'hypothèse de R.V Kuznetsov est que la non-linéarité ( $\beta = 1 + B/2A$ ) du milieu et les phénomènes de dissipation (D) engendrent des variations lentes de la forme d'onde dans la direction de propagation et dans la direction transverse, c'est à dire que la solution de l'équation (I.29) est une onde évoluant comme une onde plane sur des distances comparables à la longueur d'onde ( $\lambda = c/f$ ). Cela revient à introduire l'approximation parabolique qui consiste à supposer que la diffraction (effet de source de dimension finie), la dissipation et la non-linéarité se traduisent seulement par une modulation de l'onde plane. Cette approximation peut être traduite par l'introduction du temps retardé  $\tau$  et l'équation (I.29) devient [6] :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \tau} - \frac{c_0}{2} \cdot \Delta_{\perp} \phi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{D}{2 \cdot c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{\beta}{2 \cdot c_0^2} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 \right] \quad (\text{I.31})$$

Les justifications mathématiques de cette équation, dite équation KZK (Khoklov – Zabolotskaya - Kuznetsov) ou équation parabolique, ont été établies par J Naze TjØtta et S. TjØtta en 1981 [11]. Elle s'écrit en terme de variation de pression  $p' = p - p_0$  sous la forme [12] :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial \tau} - \frac{c_0}{2} \cdot \Delta_{\perp} p' = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{D}{2 \cdot c_0^3} \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} + \frac{\beta}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} \cdot \frac{\partial p'^2}{\partial \tau} \right] \quad (\text{I.32})$$

Récemment, en 1994, B.O. Enflo [4] a décrit les différentes manipulations et approximations qui ont conduit à l'équation (I.29) établie par R.V Kuznetsov.

Les équations (I.31-32) tiennent compte des effets de non-linéarité (2<sup>ème</sup> terme de droite), de diffraction (2<sup>ème</sup> terme de gauche) et d'absorption du milieu de propagation (1<sup>er</sup> terme de droite).

Une propriété importante de sa solution est la relation linéaire d'impédance d'une onde plane dans la direction de propagation :

$$p' = p - p_0 = Z \cdot u_z \quad (\text{I.33})$$

$$\text{Où } Z = \rho_0 \cdot c_0 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} = \text{rayl}) \quad (\text{I.34})$$

est l'impédance acoustique du milieu et  $u_z$  la composante de la vitesse particulière suivant l'axe (oz) de propagation.

La solution de l'équation générale KZK (I.31-32) pour des conditions aux limites réelles (par exemple, source réalisée par un transducteur ayant la forme d'un disque plan ou concave) permet d'obtenir la pression  $p'(x,y,z,t)$  en un point  $M(x,y,z)$  de l'espace.

On peut procéder de différentes manières :

- a) La résolution numérique de l'équation parabolique KZK. Cette méthode nécessite des programmes assez fastidieux et un temps de calcul très long. On peut toutefois réduire cette équation en supposant que le faisceau ultrasonore est à symétrie axiale, ce qui est généralement le cas pour les sources réelles [14, 15, 16].
- b) La méthode spectrale qui consiste à décomposer la solution en série de Fourier pour obtenir un système d'équations différentielles, et d'effectuer ensuite une résolution numérique en utilisant la méthode des différences finies. Le temps de calcul est assez long et dépend du nombre d'harmoniques retenus pour les calculs. Cette méthode ne s'applique évidemment qu'aux ondes périodiques [12, 17, 18, 19].
- c) Chercher une solution analytique. Dans ce cas on effectue une approximation quasi linéaire en ignorant les harmoniques de rang supérieur à 2, et en considérant que la génération de l'harmonique 2 n'engendre pas de décroissance appréciable du fondamental [20, 21, 22, 23].

L'objectif principal de cette thèse étant la mesure du paramètre de non-linéarité  $B/A$ , déterminable à partir du deuxième harmonique généré dans le milieu, nous n'analyserons que les deux cas suivants :

- Propagation d'une onde plane initialement sinusoïdale et permettant l'obtention de solutions analytiques  $p'(z,t)$ , la géométrie des systèmes de mesure choisis n'autorisant que des déplacements suivant une direction. Ces solutions sont à la base de la plupart des systèmes de mesure du paramètre  $B/A$ .
- Utilisation d'une solution analytique asymptotique (cas c précédent)  $p'(x,y,z,t)$  décrivant le champ acoustique dans le cas d'une source réelle (transducteur) excitée de façon sinusoïdale, afin d'établir la correction à apporter aux solutions précédentes. Cette partie sera développée au chapitre II.

Dans un premier temps nous étudierons donc la propagation d'une onde plane, initialement sinusoïdale, dans un milieu dissipatif et non dissipatif, afin d'établir les solutions analytiques adéquates.

### ***1.2.3.2 Cas d'une onde plane : Equation de Burgers***

Dans ce cas l'équation KZK (I.32) devient, en considérant la direction (oz) de propagation :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{D}{2 \cdot c_0^3} \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} + \frac{\beta}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} \cdot \frac{\partial p'^2}{\partial \tau} \quad (\text{I.35})$$

Exprimée en terme de vitesse particulaire ( $u = u_z$ ) avec les relations (I.33-34), on obtient

$$\text{l'équation de Burgers [4] :} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{D}{2 \cdot c_0^3} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\beta}{c_0^2} \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (\text{I.36})$$

Elle a été proposée pour la première fois en 1942 par J.M Burgers pour modéliser les turbulences dans les fluides en mouvement. Cette équation décrit la propagation d'une onde plane dans un fluide non linéaire et dissipatif.

Cas d'une excitation périodique :

Dans le cas d'une source périodique sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , l'équation (I.36) peut se mettre sous la forme non dimensionnelle plus pratique :

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} = \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (\text{I.37})$$

$$\text{Avec : } U = \frac{u}{U_0} \quad , \quad \theta = \omega \tau = \omega t - k \cdot z \quad , \quad \sigma = \frac{\beta \cdot \omega \cdot U_0 \cdot z}{c_0^2} = \frac{z}{l_D} \quad , \quad \varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \beta \cdot \text{Re}} \quad (\text{I.38})$$

$$\text{Où } \text{Re} = \frac{c_0 \cdot U_0}{D \cdot \omega} \quad \text{est le nombre acoustique de Reynolds (sans dimension)} \quad (\text{I.39})$$

$$\text{et } l_D = \frac{c_0^2}{\beta \cdot \omega \cdot U_0} = \frac{\rho_0 \cdot c_0^3}{\beta \cdot \omega \cdot P_0} \quad (m) \quad \text{la distance de discontinuité (cf § I.4.2)} \quad (\text{I.40})$$

$U_0$  et  $P_0$  sont les amplitudes de la source en terme de vitesse particulaire et de pression acoustique.

$\sigma$  est une abscisse normalisée prenant en compte la non-linéarité ( $\beta$ ), la distance ( $z$ ) parcourue par l'onde et l'amplitude ( $U_0$ ) de la source.

Le paramètre  $\varepsilon$  est une mesure de l'importance de la non-linéarité ( $\beta$ ) à celle de la dissipation ( $D$ ). Pour les applications numériques, il est utile de le redéfinir à l'aide de l'atténuation ( $\alpha$ ) du fondamental (I.24), grandeur donnée dans la littérature, en faisant intervenir le nombre de Gol'dberg  $\Gamma$  [24]:

$$\text{On a } \varepsilon = \frac{1}{\Gamma} \quad \text{avec } \Gamma = 2 \cdot \beta \cdot \text{Re} = \frac{2 \cdot \beta \cdot c_0 \cdot U_0}{D \cdot \omega} \quad \text{---- (éq. I.24)----> } \Gamma = \frac{\beta \cdot k \cdot M_0}{\alpha} \quad (\text{I.41})$$

Propagation dans un milieu non dissipatif :

Une situation fréquemment exploitée est la propagation d'une onde plane dans un milieu non linéaire et non dissipatif (sans perte). Dans ce cas ( $\alpha = 0$  donc  $D = 0$  et  $\varepsilon = 0$ ) les équations (I.36-37) deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\beta}{c_0^2} \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{I.42a}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I.42b})$$

**I.2.3.3 Domaine de validité des équations :**

Les approximations du second ordre nécessaires à l'établissement de l'équation de base (I.29) de Kuznetsov, engendrent un certain domaine de validité. On peut considérer que les équations non linéaires (I.29-31-32-35-36-37-42) sont valides pour un nombre de Mach à la source [13] :

$$M_0 = \frac{U_0}{c_0} < 0,1 \quad (\text{I.43})$$

Sa valeur maximale dans le milieu considéré ( $\rho_0, c_0$ ) détermine le domaine d'application des équations précédentes.

Dans l'eau ( $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3, c_0 = 1500 \text{ m/s}$ ), et avec (I.33), cela correspond à une amplitude de pression à la source  $P_0 = \rho_0 \cdot c_0 \cdot U_0 < 2,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}^4$ .

<sup>4</sup> Le pascal (Pa) est l'unité du système international, mais on rencontre souvent dans la littérature la pression exprimée en bar ou en atmosphère (1 bar (bar) = 10<sup>5</sup> Pascals (Pa) = 0,987 atmosphère normale (atm) [49]).

### I.3 SOLUTIONS DE L'EQUATION DE BURGERS (onde plane en milieu dissipatif)

#### I.3.1 SOLUTIONS ANALYTIQUES

L'équation de Burgers (I.37) peut être mise sous la forme d'une équation linéaire à l'aide d'une transformation trouvée indépendamment par J.D Cole et E Hopf en 1950 [4,1], ainsi, pour une condition de source :  $U(0, \theta) = U_0 \cdot \sin(\theta)$  (I.44) on obtient la solution exacte de l'équation de Burgers [24,25] que l'on peut écrire sous sa forme finale [5, chap 7][4]:

$$U(\sigma, \theta) = -4 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n \cdot \sin(n \cdot \theta) \cdot e^{-\sigma \cdot \varepsilon \cdot n^2} \cdot I_n\left(\frac{1}{2 \cdot \varepsilon}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2 \cdot \varepsilon}\right) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos(n \cdot \theta) \cdot e^{-\sigma \cdot \varepsilon \cdot n^2} \cdot I_n\left(\frac{1}{2 \cdot \varepsilon}\right)} \quad (\text{I.45})$$

où les  $I_n$  sont les fonctions de Bessel modifiées. Cette expression est valable pour toutes les valeurs de  $\sigma$ .

En 1989 H. Mitome [26] donne une solution exacte de l'équation de Burgers sous forme intégrale, dont l'intérêt est qu'elle peut s'appliquer à n'importe quelle forme temporelle du signal d'excitation. Dans le cas d'une source sinusoïdale (I.44) on obtient l'expression permettant une intégration numérique :

$$U(\sigma, \theta) = \frac{2}{\Gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \int_{\theta - \left(\frac{-4 \cdot \sigma}{\Gamma} \cdot \ln(C)\right)^{1/2}}^{\theta + \left(\frac{-4 \cdot \sigma}{\Gamma} \cdot \ln(C)\right)^{1/2}} \exp\left[\frac{-\Gamma}{2} \cdot \left(\frac{(\theta - \theta')^2}{2 \cdot \sigma} + \cos(\theta') - 1\right)\right] d\theta' \quad (\text{I.46})$$

C est une constante de faible valeur permettant de limiter l'intervalle d'intégration dans les régions où les variables  $\theta$  et  $\theta'$  sont voisines.

Comme nous le verrons au paragraphe I.4 l'onde se déforme lors de sa propagation dans un milieu non linéaire et s'enrichit en harmoniques. On peut donc décomposer l'onde  $U(\sigma, \theta)$  en

série de Fourier :

$$U(\sigma, \theta) = \frac{u(\sigma, \theta)}{U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\sigma) \cdot \sin(n \cdot \theta) \quad (\text{I.47})$$

En 1931 R.D. Fay [35] a analysé les modifications d'une onde périodique dans l'air en tenant compte des effets de la viscosité. Sa solution, exprimée sous la forme (I.47), est valide dans la région où les chocs sont pleinement formés et commencent à s'affaiblir (cf § I.4). Dans un fluide thermo-visqueux elle peut s'exprimer sous la forme (I.47) avec [34] :

$$b_n(\sigma) = \frac{2}{\Gamma \cdot \text{Sh}\left[\frac{n \cdot (1 + \sigma)}{\Gamma}\right]} = b_n(\text{Fay}) \quad (\text{I.48})$$

Son domaine de validité est fixé approximativement à :  $\sigma > 3,5$ .

#### I.3.2 RESOLUTION NUMERIQUE

Nous donnons également une résolution numérique de l'équation de Burgers qui nous permettra de déterminer rapidement les composantes spectrales de l'onde se propageant dans un milieu dissipatif. Elle nous servira de référence

En effectuant le changement de variable  $\tau = \frac{\theta}{\omega}$ , et en exprimant le coefficient de diffusion à l'aide de (I.24) :

$$D = \frac{2.c\omega^3.\alpha}{\omega^2} \quad (\text{I.49})$$

l'équation de Burgers (I.36) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\beta.\omega}{c\omega^2}.u.\frac{\partial u}{\partial \theta} + \alpha.\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{I.50})$$

où  $\alpha$  représente l'atténuation linéique pour le fondamental et  $\theta = \omega.\tau = \omega.t - k.z$  avec  $\omega =$  pulsation de la source.<sup>5</sup>

Dans le cas d'une source sinusoïdale  $u(0,\theta) = U_0.\sin(\theta)$ , la solution de l'équation (I.50) peut s'exprimer sous la forme de la série de Fourier :

$$u(z,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} U_0.b_n(z).\sin(n.\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z).\sin(n.\theta) \quad (\text{I.51})$$

comme nous le verrons ultérieurement (cf § I.6.2.1), l'atténuation  $\alpha$  du fondamental de fréquence  $f$  (I.24) peut se mettre sous la forme :  $\alpha = \alpha_0.f^q$  où  $\alpha_0$  et  $q$  sont des coefficients caractérisant le milieu de propagation.

En substituant (I.51) dans (I.50) on aboutit, après quelques transformations [27...30], à l'équation :

$$\frac{\partial u_n(z)}{\partial z} = \frac{\omega.\beta}{2.c\omega^2} \left[ \sum_{m=1}^{n-1} m.u_m(z).u_{n-m}(z) - n. \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m(z).u_{m-n}(z) \right] - \alpha_0.(f.n)^q.u_n(z) \quad (\text{I.52})$$

En limitant le développement en série de Taylor au premier ordre de la vitesse particulière, on obtient :

$$u(z + \Delta z, t) = u(z, t) + \frac{\partial u}{\partial z}.\Delta z \quad (\text{I.53})$$

En combinant les équations (I.52) et (I.53) on obtient la description itérative de la propagation d'une onde plane d'amplitude finie dans un milieu non linéaire et dissipatif :

$$u_n(z + \Delta z) = u_n(z) + \frac{\omega.\beta}{2.c\omega^2} \left[ \sum_{m=1}^{n-1} m.u_m(z).u_{n-m}(z) - n. \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m(z).u_{m-n}(z) \right] \Delta z - \alpha_0.(f.n)^q.u_n(z).\Delta z \quad (\text{I.54})$$

Le premier terme de sommation représente la contribution apportée à l'harmonique d'ordre  $n$  par l'interaction des harmoniques d'ordre inférieur. Le deuxième terme de sommation est dû à l'interaction des harmoniques de rang supérieur à  $n$ . Le dernier terme représente les pertes dues à l'absorption, et sont fonction de la fréquence de l'harmonique considéré.

Cette équation définit donc un algorithme numérique donnant l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  à la position  $z + \Delta z$  en fonction de toutes les harmoniques de l'onde à la position antérieure  $z$ .

Nous venons donc d'établir les différentes solutions décrivant une onde plane, en terme de vitesse particulière, se propageant dans un milieu non linéaire et dissipatif.

<sup>5</sup> Notons une erreur dans l'équation (2) des publications [27] et [28] où il faut remplacer le nombre de Gol'dberg  $\Gamma$  par l'atténuation  $\alpha$

Avant d'aborder les solutions dans le cas non dissipatif, base des principes de mesure du paramètre B/A, il est utile d'analyser l'évolution de la forme d'onde au cours de sa propagation dans un milieu non linéaire.

## I.4 EVOLUTION DE LA FORME D'ONDE AU COURS DE SA PROPAGATION

### I.4.1 ANALYSE PHYSIQUE DU PHENOMENE

La représentation de l'onde  $U(\sigma, \theta)$  fait apparaître une déformation de son profil temporel s'accroissant avec l'augmentation de la distance à la source (figures I.2).

Physiquement cela est dû au fait que les points du fluide qui ont une vitesse particulière plus élevée se déplacent plus rapidement dans la direction de propagation que ceux qui ont une vitesse particulière plus faible. C'est à dire que la vitesse de propagation  $c[u(z,t)]$  est fonction de la vitesse particulière  $u(z,t)$ .

Si on considère uniquement la non-linéarité du milieu et le cas simple de la propagation d'une onde plane, l'équation de Burgers (I.42a) pour les milieux sans pertes peut se mettre sous la forme, en revenant à la variable  $t$  [31,32]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c_0 + \beta \cdot u(z,t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.55})$$

où la vitesse de propagation de l'onde est :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial t} / \frac{\partial u}{\partial z} = c[u(z,t)] = c_0 + \beta \cdot u(z,t) \quad (\text{I.56})$$

En conséquence,  $c[u(z,t)]$  devient supersonique pendant les phases de compression ( $u(z,t) > 0$ ) et subsonique pendant les phases de détente ( $u(z,t) < 0$ ).

Pour une source de profil temporel :  $u(0,t) = U_0 \cdot f(t)$  l'onde progressive  $u(z,t)$  à une distance  $z$  de la source s'exprimera sous la forme :

$$u(z,t) = U_0 \cdot f\left(t - \frac{z}{c[u(z,t)]}\right) \quad (\text{I.57})$$

Généralement le nombre de Mach (I.43) est petit devant l'unité et (I.57) se ramène à :

$$u(z,t) = U_0 \cdot f\left[\left(t - \frac{z}{c_0}\right) + \frac{\beta \cdot z}{c_0^2} \cdot u(z,t)\right] \quad (\text{I.58})$$

Pour une source sinusoïdale  $u(0,t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , et en utilisant les variables réduites (I.38), l'équation (I.58) peut se mettre sous la forme non dimensionnelle :

$$U(\sigma, \theta) = \sin[\theta + \sigma \cdot U(\sigma, \theta)] \quad (\text{I.59})$$

*Rappelons que cette équation transcendante n'est valable que pour une onde plane d'amplitude finie à la source  $U_0 \ll c_0$  se propageant dans un milieu non linéaire, isotrope, homogène et non dissipatif.*

*Sous les mêmes conditions, mais dans un milieu linéaire, nous aurions :*

$$U(\sigma, \theta) = \sin[\theta] \quad (\text{I.60})$$

*La distinction entre les équations (I.59) et (I.60) est représentative de la différence entre l'acoustique linéaire (onde d'amplitude infinitésimale) et l'acoustique non linéaire (onde d'amplitude finie), la non-linéarité se manifestant par une distorsion de l'onde au cours de sa propagation.*

Dans un premier temps nous analyserons la déformation d'une onde initialement sinusoïdale se propageant dans un milieu sans perte sur la base de l'équation transcendante (I.59). L'évolution de cette onde sera ensuite comparée à celle obtenue dans un milieu réel avec perte.

Dans le paragraphe suivant nous décrirons les différentes solutions pour exprimer cette onde, dans le cas non dissipatif, sous la forme d'une série de Fourier.

#### I.4.2 MILIEU NON DISSIPATIF

A partir de l'équation transcendante (I.59) on peut déterminer la fonction  $U(\sigma, \theta)$  de façon simple à l'aide du logiciel Mathcad, sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta &:= 0, 0.1..3\pi & U &:= 0 \text{ (valeur de départ)} \\ U(\sigma, \theta) &:= \text{racine}(\sin(\theta + \sigma \cdot U) - U, U) \end{aligned}$$

Les résultats  $U(\sigma, \theta)$  sont présentés figures I.2 a,b,c pour  $\sigma \in \{0, 0.5, 1\}$ .

Notons que pour résoudre l'équation transcendante (I.57) J. Lelong *et al.* [33] ont élaboré un algorithme basé sur une méthode itérative et l'ont appliqué à diverses formes d'onde.

**Pour  $0 \leq \sigma < 1$ ,** la distorsion de l'onde est d'autant plus importante que le signal émis est intense et que l'on s'éloigne de la source. Ainsi, l'onde voit son spectre s'enrichir de toutes les combinaisons linéaires d'harmoniques, ce qui a pour effet la décroissance de la composante fondamentale au profit des harmoniques de rang supérieur (transfert d'énergie du fondamental vers les harmoniques - *figure I.2 a,b*).

**Pour  $\sigma = 1$ ,** à la distance de discontinuité  $z = l_D$  (I.40), apparaît le front de choc. C'est à dire que la dérivée  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$  en  $\theta = 0$  devient infinie (*figure I.2 c*).

Dans la réalité, l'onde ne peut se déformer indéfiniment car cela consisterait à attribuer à  $U$  plusieurs valeurs possibles pour  $\theta$  donnée, ce qui est physiquement impossible.

**Pour  $\sigma > 1$ ,** Il se présente donc une distorsion maximale caractérisée par une discontinuité verticale dans le profil de l'onde (profil en "dent de scie") et l'équation (I.59) cesse d'être valide car pour  $\theta$  donnée on obtient plusieurs valeurs de  $U$ , notamment à  $\theta = 0$  ( $U(\sigma, \theta)$  cesse d'être uni évaluée).

Dans cette région le profil de l'onde évolue vers une "dent de scie" dont l'amplitude  $U_c$  est celle du front de choc telle que [34] :

$$U_c = \sin[\sigma \cdot U_c] \quad (\text{I.61})$$

L'amplitude  $U_c$  du choc est donc solution de l'équation transcendante (I.61) :

- Pour  $0 \leq \sigma < 1$  on a  $U_c = 0$
- Pour  $\sigma > 1$  on ne retient que les racines ayant une signification physique et engendrant une variation monotone de la fonction  $U_c(\sigma)$  (*figure I.1*).

La fonction asymptotique de la solution de l'équation (I.61) est la relation :

$$U_c(\sigma) = \frac{\pi}{1 + \sigma} = \frac{u_c(\sigma)}{U_0} \quad (\text{I.62})$$

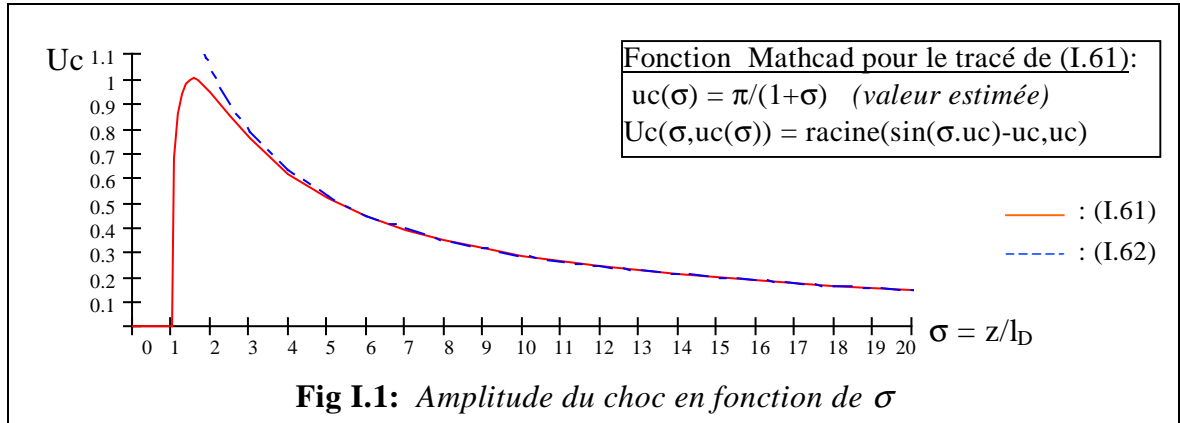
qui introduit une erreur inférieure à 2% pour  $\sigma > 3,6$  [34].

La transition ne s'effectue pas immédiatement pour  $\sigma > 1$ , mais apparaît pour  $\sigma > 3.5$  où l'onde prend la forme d'une dent de scie d'équation :

$$U(\sigma, \theta) = U_c(\sigma) \cdot \frac{(\pi - \theta)}{\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (\text{I.63})$$

dont l'amplitude décroît rapidement, même en milieu non dissipatif, suivant l'allure de la **figure I.1**.





Notons que l'équation (I.63) correspond à la solution de R.D. Fay [35] dans un milieu non dissipatif et sera abordée au paragraphe I.5.

Pour  $\sigma > 3.5$ ,  $U_c(\sigma)$  peut être remplacée avec une bonne précision par (I.51).

Pour  $\sigma \gg 1$  et en revenant aux variables dimensionnelles, l'équation (I.62) peut s'exprimer

sous la forme :

$$U_c(z) \cong \frac{\pi \cdot c_0}{z \cdot k \cdot \beta} \quad \text{(I.64)}$$

qui traduit le fait que l'amplitude  $u_c(z)$  de l'onde est indépendante de l'excitation initiale  $U_0$  aux grandes distances de la source ( $z \gg l_D$ ). Cela met en évidence l'effet de saturation acoustique d'un milieu.

La solution (I.63) est présentée **figures I.2 (d,e,f)** pour  $\sigma > 1$ .

### I.4.3 MILIEU DISSIPATIF

Dans la réalité l'absorption augmente lorsque le front de choc apparaît et n'autorise pas de discontinuité dans la forme de l'onde.

Au-delà de la distance de discontinuité ( $\sigma > 1$ ) l'onde prend un profil en dent de scie comme nous l'avons vu précédemment, mais dans le cas d'un milieu dissipatif et aux grandes distances de la source, l'absorption l'emporte sur les effets non linéaires en dissipant plus rapidement les harmoniques de rang supérieur ce qui conduit à une onde sinusoïdale fortement atténuée. La limite où l'onde cesse d'avoir ce profil est donc liée au nombre de Gol'dberg  $\Gamma$  (I.41) et vaut approximativement [34] (voir aussi [24]):

$$\sigma_{\max} = \Gamma - 1 \quad \text{ce qui correspond à} \quad z_{\max} \approx \frac{1}{\alpha} \quad \text{(I.65)}$$

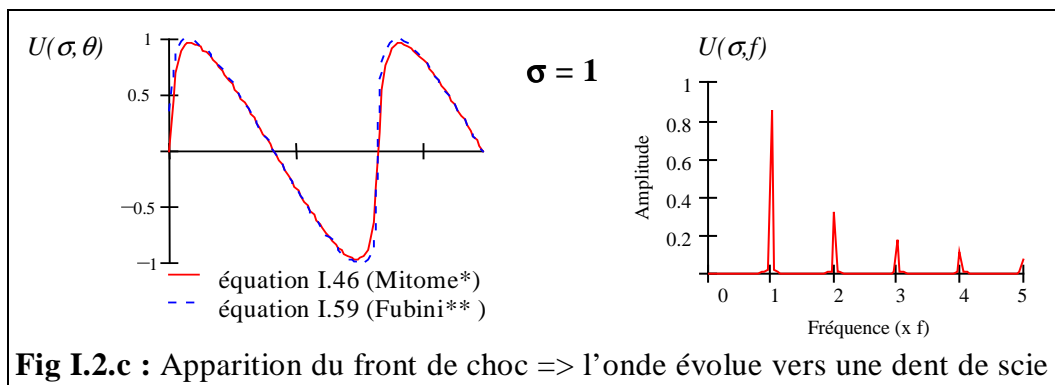
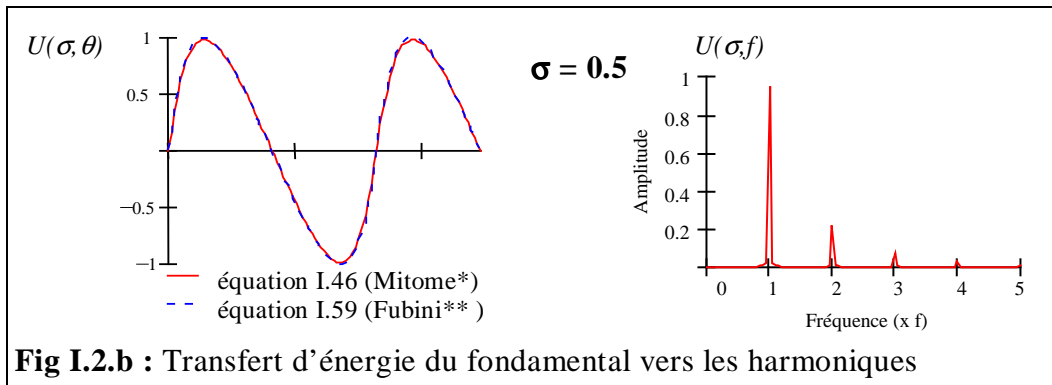
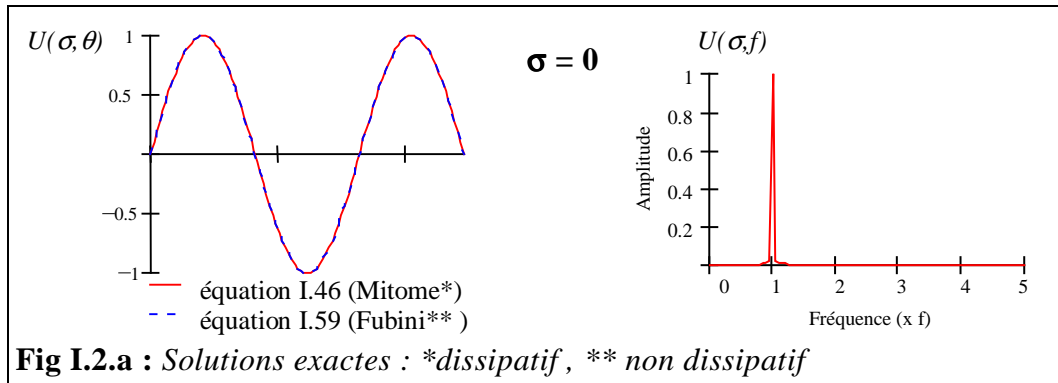
Nous représenteront l'onde  $U(\sigma, \theta)$  à l'aide de la solution exacte de H. Mitome (I.46) qui est valable pour toutes les valeurs de  $\sigma$ . Cette solution a été simulée avec le logiciel Mathcad en choisissant la constante  $C = 10^{-10}$  et en prenant l'eau comme milieu de propagation :

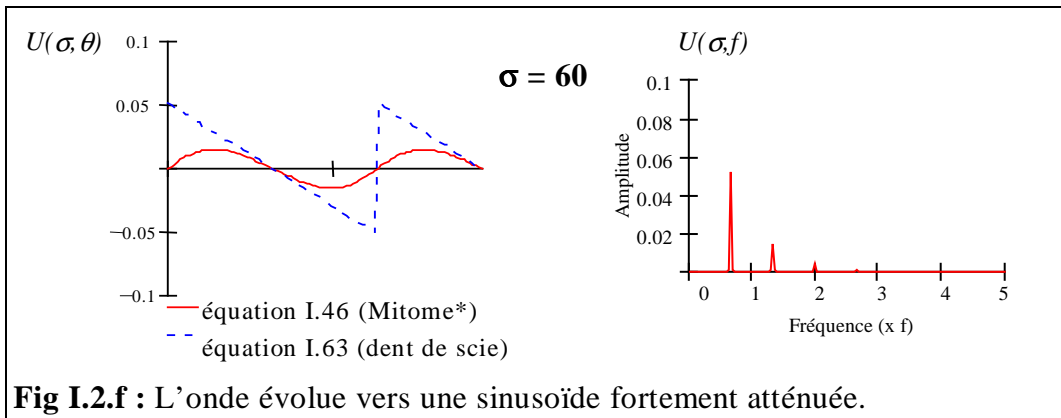
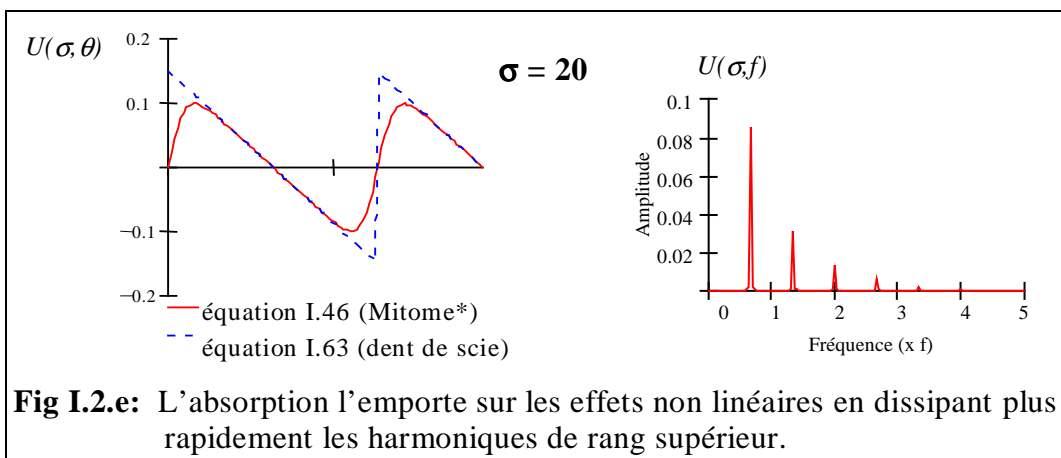
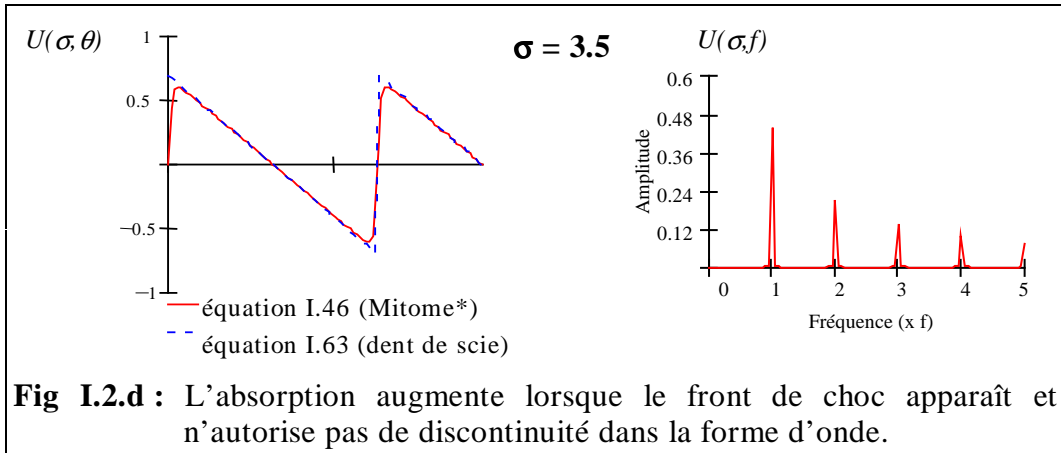
$$\begin{aligned} B/A &\cong 5, \quad c_0 \cong 1500 \text{ m/s}, \quad \alpha \cong 0,025 \text{ Np/m}, \\ f &= 1 \text{ MHz}, \quad P_0 = 1 \text{ atm} \implies l_D = 1,51 \text{ m} \quad \text{et} \quad \Gamma = 26,4 \end{aligned}$$

Les résultats sont présentés **figures I.2 (a,b,c)** conjointement à ceux de l'équation transcendante (I.59) pour  $\sigma \leq 1$  et **figures I.2 (d,e,f)** conjointement à ceux de l'équation (I.63) pour  $\sigma > 1$ . Pour  $\sigma > \sigma_{\max} = \Gamma - 1 \approx 25$  on observe l'évolution vers une sinusoïde.

Il est évident que les solutions en milieu non dissipatif différeront d'autant plus de la solution exacte en milieu dissipatif que l'excitation  $P_0$  à la source est faible, ou que l'absorption  $\alpha$  est

élevée, puisque cette dernière l'emportera plus rapidement sur les effets non linéaires. D'ailleurs il a été établi que pour  $\Gamma < 4,5$  [32] la formation du choc peut être ignorée. Parallèlement on donne la représentation spectrale de l'onde (I.46), calculée à l'aide de l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform) du logiciel Mathcad et cela pour 40 périodes et 1024 points afin d'obtenir une résolution fréquentielle satisfaisante.





### I.5 SOLUTIONS POUR UNE ONDE PLANE EN MILIEU NON DISSIPATIF

Nous avons vu (I.47) que l'onde  $U(\sigma, \theta)$  peut se décomposer en série de Fourier

$$U(\sigma, \theta) = \frac{u(\sigma, \theta)}{U_0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\sigma) \cdot \sin(n \cdot \theta) \quad \text{où les coefficients } b_n(\sigma) \text{ représentent les amplitudes relatives des différentes harmoniques à l'abscisse normalisée } \sigma = z/l_D.$$

Pour exprimer ces coefficients  $b_n(\sigma)$ , on trouve dans la littérature des solutions du type Fubini, Fay ou Blackstock qui sont valables chacune dans un domaine bien défini de la variable  $\sigma$ .

### I.5.1 SOLUTION DE FUBINI <sup>6</sup> : ( $\sigma < 1$ )

Pour  $\sigma < 1$ , et dans le cas non dissipatif ( $\Gamma \rightarrow \infty$ ), E. Fubini [36] a établi en 1935 la solution de l'équation transcendante (I.59) sous la forme d'une série de Fourier en sinus et cosinus qui peut s'exprimer sous la forme (I.47) avec [34]:

$$b_n(\sigma) = 2 \cdot \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} = b_n(\text{Fubini}) \quad (\text{I.66})$$

Les représentations temporelles de la solution (I.47-66) correspondent donc exactement à celles présentées *figures I.2.a,b,c* pour l'équation (I.59).

Récemment, en 1994, B.O. Enflo [4] a décrit une méthode conduisant à la solution de Bessel-Fubini à partir de la solution exacte (I.45) de l'équation de Burgers.

Par une autre approche R. Burvingt [37], en 1992, retrouve la solution de Fubini en réduisant par une transformation intégrale l'équation d'onde de Kuznetsov (I.29).

### I.5.2 SOLUTION DE FAY EN MILIEU NON DISSIPATIF: ( $\sigma > 3,5$ )

La solution de Fay (I.48) devient en milieu non dissipatif ( $\Gamma \rightarrow \infty$ ) :

$$b_n(\sigma) = \frac{2}{n(1+\sigma)} = b_n(\text{dent de scie}) \quad (\text{I.67})$$

ce qui correspond bien au développement en série de Fourier de la dent de scie annoncée précédemment (§ I.4.2).

### I.5.3 SOLUTION DE BLACKSTOCK : ( $\sigma > 0$ )

En 1965 D.T. Blackstock [34] a établi la connexion entre les solutions de Fubini (I.47-66) et de Fay (I.47-67) dans un milieu non dissipatif ( $\Gamma \rightarrow \infty$ ).

Il utilise les équations transcendantes (I.59) et (I.61) pour obtenir une solution valide également pour  $\sigma > 1$ , ce que ne permettait pas la seule relation (I.59) exploitée par Fubini comme nous l'avons vu précédemment.

Son résultat se résume comme la somme de la solution de Fubini et de Fay en milieu non dissipatif (*onde en dent de scie*), et s'exprime sous la forme d'une série de Fourier (I.47) avec:

$$\begin{aligned} b_n(\sigma) &= \frac{2.U_c(\sigma)}{n.\pi} + \frac{2}{n.\pi.\sigma} \int_{\sigma.U_c(\sigma)}^{+\pi} \cos[n.(\Phi - \sigma.\sin(\Phi))]d\Phi \\ &= b_n(\text{Blackstock}) = b_n(\text{dent de scie}) + b_n(\text{Fubini}) \end{aligned} \quad (\text{I.68})$$

où  $U_c(\sigma)$  représente l'amplitude du front de choc défini précédemment (I.61).

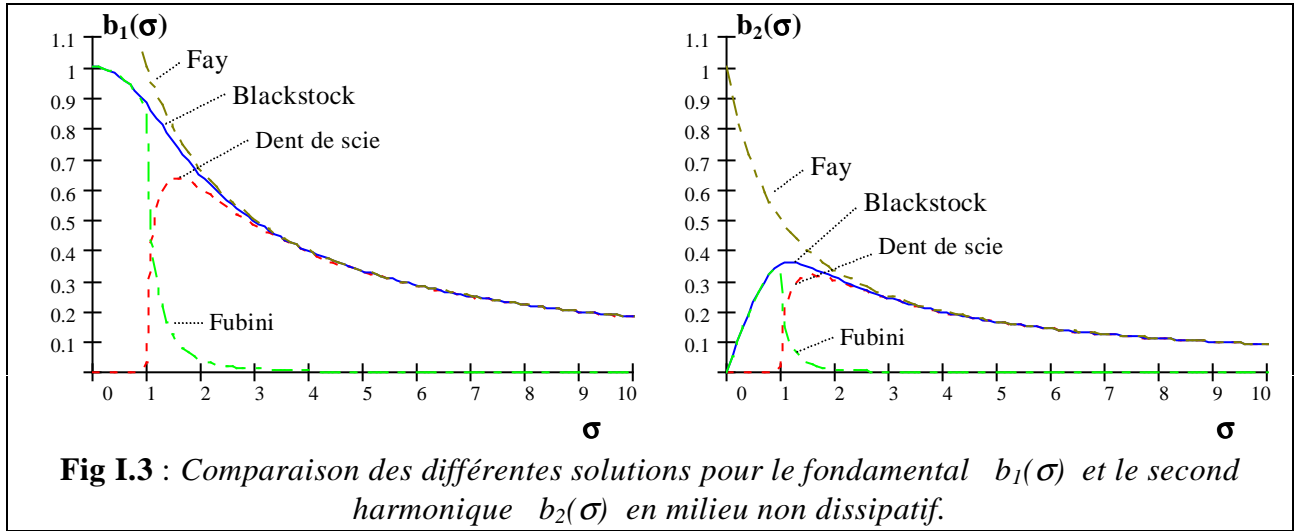
Lorsque  $0 < \sigma < 1$  nous avons vu que  $U_c(\sigma) = 0$  (fig I.1), et dans ce cas la solution ci-dessus devient la solution de Fubini (I.66) exprimée sous forme intégrale .

Pour  $\sigma > 1$ , le coefficient  $b_n(\text{Fubini})$  tend rapidement vers zéro et, comme le montre la *figure I.4* pour le fondamental  $b_1$  et le second harmonique  $b_2$  de l'onde  $U(\sigma, \theta)$ , la solution de

<sup>6</sup> D'ailleurs, parce que Bessel a résolu bien avant Fubini une équation transcendante similaire à l'aide des séries de Fourier, mais dans un tout autre domaine que l'acoustique, cette solution se nomme également *solution de Bessel-Fubini*

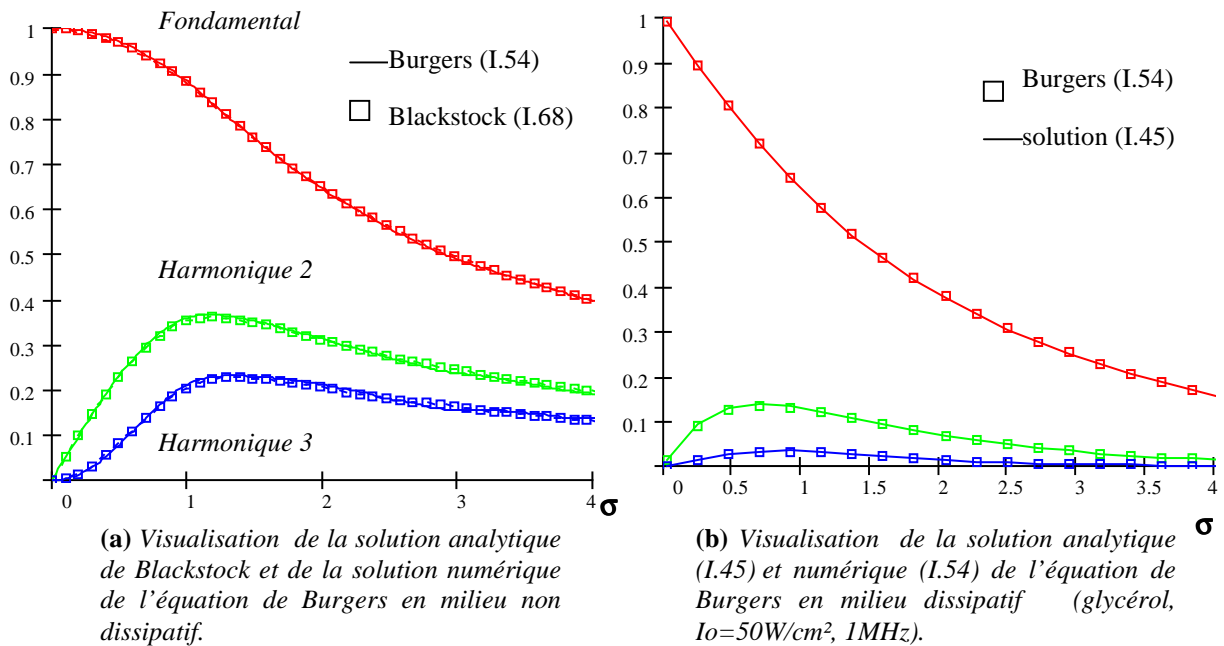
Blackstock devient celle de Fay (I.67) pour  $\sigma > 3,5$  en remplaçant  $Uc(\sigma)$  par sa fonction asymptotique (I.62)

Valide pour toutes les valeurs de  $\sigma$ , elle permet donc la connexion entre les solutions de Fubini et de Fay dans le cas d'un milieu non dissipatif .



Dans le cas d'un *milieu non dissipatif* nous avons vérifié la convergence de la solution numérique (I.54) de l'équation de Burgers, avec  $\alpha_0 = 0$ , vers la solution exacte de Blackstock (I.68) lorsque le nombre d'harmoniques pour (I.54) augmente et que le pas d'intégration  $\Delta z$  diminue (*figure I.4.a*). Dans ce cas la solution de **Blackstock** est plus adaptée, car plus rapide à évaluer avec un logiciel mathématique (Mathcad).

Dans le cas d'un *milieu dissipatif*, la solution numérique (I.54) de l'équation de **Burgers** est plus adaptée qu'une FFT sur les solutions analytiques (I.45-46) pour calculer les composantes harmoniques de l'onde (*figure I.4.b*).



La condition de source  $U_0$  n'est pas importante en milieu non dissipatif si on représente les harmoniques en coordonnées spatiales réduites  $\sigma = z/l_D$ . En milieu dissipatif la condition de source est indispensable, et pour la figure I.4.b elle est exprimée en intensité acoustique moyenne [38] :

$$I_0 = \frac{P_0^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0} = \frac{\rho_0 \cdot c_0 \cdot U_0^2}{2} \text{ (W/m}^2\text{)} \Rightarrow U_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot I_0}{\rho_0 \cdot c_0}} \quad (\text{I.69})$$

## I.6 ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES ASYMPTOTIQUES DU FONDAMENTAL ET DU SECOND HARMONIQUE POUR UNE ONDE PLANE

Pour effectuer une mesure simple du paramètre  $\beta$  par l'analyse harmonique de la variation de pression  $p'(z,t)$ , variable facilement détectable, il est nécessaire d'établir une expression analytique du fondamental  $P_1(z)$  et du second harmonique  $P_2(z)$  permettant d'aboutir à des relations du type :  $\beta = F[P_0, P_2(z)]$  ou  $\beta = F[P_1(z), P_2(z)]$ .

Toujours dans l'hypothèse de la propagation d'une onde plane, nous établirons ces expressions dans les deux cas : milieu dissipatif et milieu non dissipatif.

### I.6.1 MILIEU NON DISSIPATIF :

Pour ce cas nous disposons de la solution exacte de Blackstock (I.68), et afin de s'affranchir de la solution  $U_c(\sigma)$  de l'équation transcendante (I.61) nous devons nous limiter à l'expression exacte de Fubini (I.47,66) valable seulement pour  $\sigma < 1$ .

A l'aide de la relation d'impédance (I.33,34) nous obtenons :

$$P_n(\sigma) = \rho_0 \cdot c_0 \cdot U_0 \cdot b_n(\sigma) = P_0 \cdot b_n(\sigma) = 2 \cdot P_0 \cdot \frac{J_n(n \cdot \sigma)}{n \cdot \sigma} \quad (\text{I.70})$$

Où  $P_0$  est l'amplitude de la variation de pression de la source.

En utilisant l'expression asymptotique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [J_n(x)] = \frac{x^n}{2^n \cdot n!} \quad (\text{I.71})$$

Nous obtenons :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} [P_1(\sigma)] = P_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} [P_2(\sigma)] = \frac{P_0 \cdot \sigma}{2} \quad (\text{I.72})$$

Pour  $0 < \sigma = z/l_D < 0,25$  on peut remplacer la solution exacte par son expression asymptotique avec une erreur inférieure à 0,8 % pour le fondamental, et inférieure à 2 % pour le second harmonique.

En fonction de la distance  $z$  à la source, on obtient :

$$0 < z < 0,25 \cdot l_D \implies P_1(z) \approx P_0 \quad (\text{I.73})$$

$$P_2(z) \approx \lim_{z \rightarrow 0} [P_2(z)] = \frac{P_0 \cdot z}{2 \cdot l_D} = \beta \cdot \frac{P_0^2 \cdot \omega \cdot z}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} = K \cdot z \cdot P_0^2 \quad \text{avec} \quad K = \frac{\beta \cdot \omega}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} \quad (\text{I.74})$$

### I.6.2 MILIEU DISSIPATIF :

Pour ce cas nous ne disposons pas d'expression analytique exacte des composantes harmoniques de l'onde (exceptée la solution de Fay (I.48) seulement valable pour  $\sigma > 3,5$ ). L'idée est donc d'exploiter les solutions (I.73) et (I.74) du cas non dissipatif, et de les affecter d'une correction due à l'atténuation apportée par le milieu.

Les expressions obtenues seront ensuite comparées à la solution numérique (I.54) de l'équation de Burgers, mais il convient tout d'abord de définir plus précisément l'atténuation.

**I.6.2.1 Atténuation du fondamental (acoustique linéaire) [38,39,40] :**

L'atténuation représente la diminution de l'amplitude de l'onde se propageant dans un milieu. Outre les effets de diffraction, cette décroissance est principalement due à l'absorption et à la diffusion.

**L'absorption :**

C'est la conversion directe de l'énergie ultrasonore en chaleur ayant pour origine l'interaction entre les molécules du milieu. Elle est donc due aux phénomènes de viscosité (I.24) et dans le cas d'une onde plane l'amplitude de la pression s'exprime, selon l'équation

$$(I.22), \text{ par: } P(z) = P_0.e^{-\alpha.z} \quad (I.75)$$

Le terme  $\alpha$  représente le coefficient d'absorption propre au milieu. Il est exprimé en Néper par unité de longueur et est fonction de la fréquence de l'onde. On a [41] :

$$\alpha(f) = \alpha_0.f^q \quad (I.76)$$

$\alpha_0$  ( $Np.m^{-1}.Hz^{-q}$ ) et  $q$  sont des coefficients caractérisant le milieu.

pour les liquides [42] :

$$q = 2$$

pour la plupart des milieux biologiques [46,47] :  $q \approx 1$

Et pour l'ensemble des tissus mous on peut considérer [27,48] :

$$1 \leq q \leq 1.5$$

Exemple: pour l'eau à 24°C on a :  $\alpha_0 = 0,25.10^{-13} Np.m^{-1}.Hz^{-2}$ , ainsi à  $f = 1 MHz$   $\alpha = 0,025 Np.m^{-1}$

**La diffusion :**

Ce phénomène apparaît dans les milieux non homogènes dont les hétérogénéités se traduisent comme des "mini interfaces" au passage desquelles l'onde ultrasonore pourra être légèrement déviée et qui vont provoquer la réflexion d'une partie de son énergie. La diffusion se traduit donc par une atténuation de l'onde en fonction de sa propagation et aussi par une dissipation de l'énergie sous forme de rayonnement dans toutes les directions de l'espace.

Elle est d'autant plus importante que les hétérogénéités sont grandes comparées à la longueur d'onde, et par conséquent elle augmente avec la fréquence.

Les phénomènes d'absorption et de diffusion se superposent et on peut écrire :

$$\alpha = \alpha_{\text{absorption}} + \alpha_{\text{diffusion}} = \text{atténuation}$$

On s'intéresse ici à la propagation d'une onde plane dans un milieu absorbant et homogène, et par conséquent : Atténuation = Absorption =  $\alpha$ .

Sous la condition  $0 < z < 0,25.l_D$  nous avons, d'après (I.72) et (I.75) :

$$P_1(z) = P_0.e^{-\alpha_1.z} \quad (I.77)$$

où  $\alpha_1 = \alpha(f)$  représente le coefficient d'atténuation du milieu à la fréquence  $f$  du fondamental.

**I.6.2.2 Atténuation du second harmonique (acoustique non linéaire) :**

Selon (I.76) le coefficient d'atténuation du milieu à la fréquence  $2.f$  du second harmonique s'exprimera sous la forme :

$$\alpha_2 = \alpha_0.(2.f)^q = \alpha_1.2^q \quad (I.78)$$

En négligeant les harmoniques de rang supérieur à 2 dans la solution numérique (I.54) de l'équation de Burgers (approximation quasi linéaire) on obtient la forme différentielle :

$$du_2(z)/dz = \frac{\omega\beta}{2.c_0^2}.u_1(z)^2 - \alpha_2.u_2(z)$$

que l'on écrit à l'aide de la relation d'impédance (I.33,34) sous la forme :

$$dP_2(z)/dz = K.P_1(z)^2 - \alpha_2.P_2(z) \quad (\text{I.79})$$

En remplaçant  $P_1(z)$  par son expression (I.77) la solution de l'équation différentielle (I.79),

avec  $P_2(0) = 0$ , est :

$$P_2(z) = K.P_0^2 \frac{e^{-\alpha_2.z} - e^{-2\alpha_1.z}}{2.\alpha_1 - \alpha_2} \quad (\text{I.80})$$

On retrouve les relations établies en 1935 par Thuras *et al.* [43] en considérant que l'atténuation et l'effet non linéaire sont indépendants. C'est à dire que l'accroissement du second harmonique est la somme des accroissements dus à la génération harmonique et à l'absorption, soient les 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> termes du membre de droite de l'équation (I.79) <sup>7</sup>.

Si le terme  $(\alpha_2 - 2.\alpha_1).z$  est faible on peut écrire [44] :

$$\frac{e^{-\alpha_2.z} - e^{-2\alpha_1.z}}{2.\alpha_1 - \alpha_2} \approx z.e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} \quad (\text{I.81})$$

Avec  $(\alpha_2 - 2.\alpha_1).z < 0,5$  l'erreur introduite par cette approximation est inférieure à 1 %.

Dans ce cas l'expression (I.80) devient :

$$P_2(z) \approx K.z.P_0^2.e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} = \beta \frac{P_0^2.\omega.z}{2.\rho_0.c_0^3}.e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} \quad (\text{I.82})$$

On retrouve l'expression (I.74)<sup>8</sup> du cas non dissipatif en considérant une atténuation :

$$\alpha = -(\alpha_1 + \alpha_2/2).$$

## I.7 ERREUR APPORTEE PAR LES SOLUTIONS ANALYTIQUES ASYMPTOTIQUES

La solution numérique (I.54) de l'équation de Burgers, que l'on peut considérer comme exacte, nous servira de référence pour quantifier l'erreur apportée par les solutions analytiques asymptotiques (I.77), pour le fondamental, et (I.80-82) pour le second harmonique.

Soit l'erreur relative :  $e (\%) = | \text{solution asymptotique} - \text{solution exacte} | / \text{solution exacte}$

A titre d'exemple nous donnons les résultat des simulations pour un milieu faiblement dissipatif comme l'eau, et pour un autre très dissipatif comme le glycérol :

- **eau** ( $c_0 = 1483 \text{ m/s}$ ,  $\alpha_0 = 0,25.10^{-13} \text{ Np.m}^{-1}.\text{Hz}^{-2}$ ,  $B/A = 5.2$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ )
- **glycérol** ( $c_0 = 1909 \text{ m/s}$ ,  $\alpha_0 = 26.10^{-13} \text{ Np.m}^{-1}.\text{Hz}^{-2}$ ,  $B/A = 9.4$ ,  $\rho_0 = 1260 \text{ kg/m}^3$ )

<sup>7</sup> Les expressions (I.77) et (I.80) représentent donc l'amplitude de l'onde de pression en fonction de la distance  $z$  pour le fondamental et le second harmonique dans le cas d'une onde plane se propageant dans un milieu absorbant et homogène

<sup>8</sup> l'expression (I.74) pouvait se déduire aisément, sans passer par la solution de Fubini, à partir de l'équation différentielle (I.79) avec  $\alpha_2=0$ .

Les expressions analytiques asymptotiques (I.74,80) sont donc valides dans le cadre de l'approximation quasi linéaire qui consiste à ignorer les harmoniques de rang supérieur à 2, et à supposer que la génération de l'harmonique 2 n'engendre pas de décroissance appréciable du fondamental.



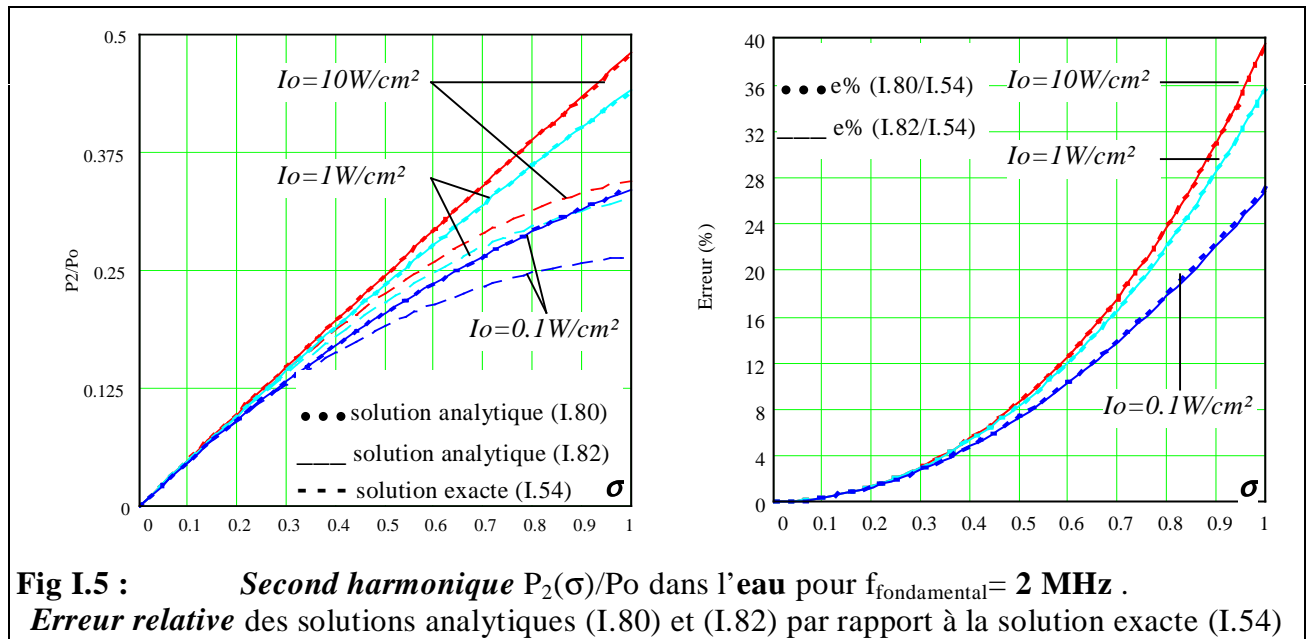
L'algorithme tournant sous Mathcad pour effectuer la résolution numérique (I.54) de l'équation de Burgers opère avec 10 harmoniques et un pas d'intégration  $\Delta z$  égal au  $10000^{\text{ème}}$  de la distance de discontinuité, une résolution trop faible donnerait un calcul d'erreur (e%) faux. Nous avons d'ailleurs vérifié la convergence vers les résultats obtenus pour un pas  $\Delta z = l_D/50000$ .

Dans les milieux faiblement dissipatifs (eau) les solutions analytiques (I.80) et (I.82), pour le second harmonique, sont équivalentes (**fig I.5**). Dans les milieux très dissipatifs (glycérol) elles divergent d'autant plus que  $I_0$  est faible, et l'emploi de la solution (I.82) avec une précision satisfaisante nécessite une intensité  $I_0$  importante (**fig I.6**). Ce qui est l'inverse pour la solution (I.80) liée à l'hypothèse quasi linéaire, d'autant plus vérifiée que  $I_0$  est faible (cf §I.6.2.2).

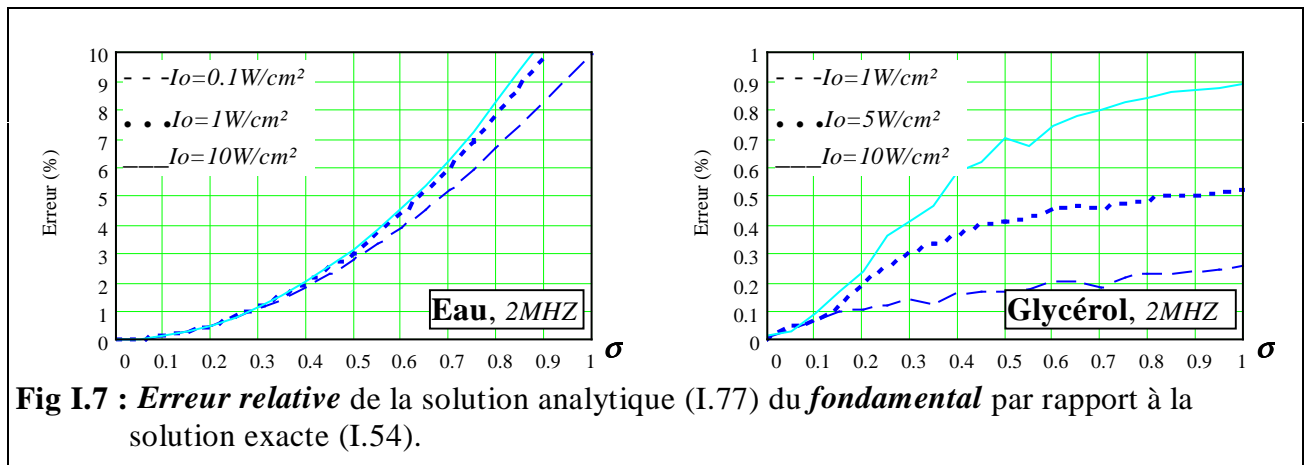
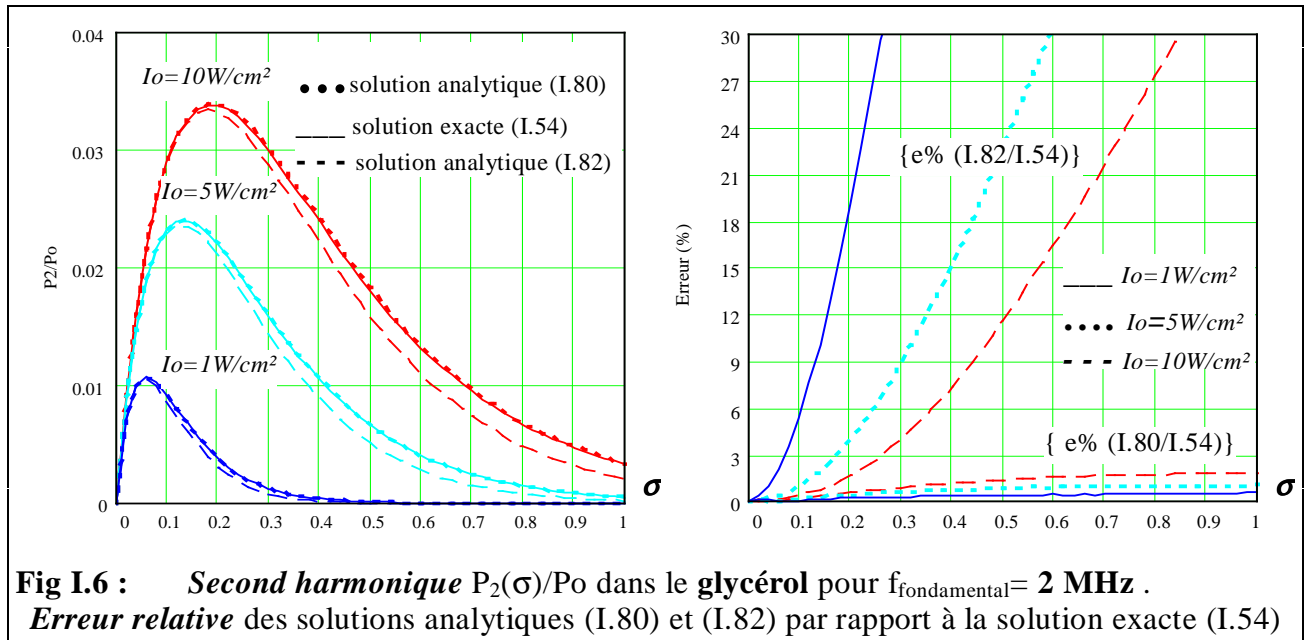
Pour le fondamental, la précision apportée par la solution (I.77) est d'autant meilleure que  $I_0$  est faible (**fig. I.7**).

Et d'une façon générale l'erreur est d'autant plus faible que l'on est proche de la source<sup>9</sup>.

Citons W. N. COBB [45] qui, outre une correction de diffraction, a exploité la solution (I.80) pour la mesure du paramètre B/A dans différents milieux à 3 MHz. Il a choisi  $I_0 = 0.22$  W/cm<sup>2</sup> pour l'eau, et  $I_0 = 8.2$  W/cm<sup>2</sup> pour le glycérol.



<sup>9</sup> Par exemple, pour  $0 < \sigma < 0.25$  dans le glycérol à  $f = 2$  MHz et  $I_0 = 10$  W/cm<sup>2</sup>, on peut remplacer la solution exacte (I.54) par (I.82) avec  $e\% < 3\%$  et par (I.80) avec  $e\% < 0.8\%$  pour le second harmonique (fig I.6). Pour le fondamental on peut remplacer (I.54) par (I.77) avec  $e\% < 0.4$ .



## I.8 CONCLUSION

Nous avons vu que le contenu harmonique d'une onde ultrasonore plane était fonction de la distance de propagation ( $z$ ), de l'excitation initiale à la source ( $u_o$  ou  $p_o$ ) et du paramètre de non linéarité  $B/A$  du milieu dans lequel se propage l'onde.

Nous avons également établi les expressions analytiques du fondamental de la pression acoustique  $P_1(z)$  et du second harmonique  $P_2(z)$ , cette dernière relation intégrant le paramètre  $B/A$  à déterminer.

Ainsi, dans l'hypothèse de la propagation d'une onde plane, ces expressions analytiques conduisent à la mesure du paramètre de non linéarité  $B/A$  par détection harmonique de l'onde acoustique. Ces solutions sont d'autant plus valides que la détection est effectuée proche de la source, la précision et le choix des expressions analytiques dépendent du milieu à analyser et de l'intensité initiale  $I_o$  (cf § I.7).

Pratiquement la source ultrasonore est constituée par un transducteur généralement sous forme d'un disque plan ou concave, ou éventuellement d'un parallélépipède rectangle.

Dans le chapitre suivant nous étudierons le cas des sources réelles (non planes) afin d'établir les corrections à apporter aux solutions analytiques précédentes pour décrire au mieux la réalité physique.

## BIBLIOGRAPHIE

1. LANDAU L., LIFCHITZ E. "Physique théorique : Mécanique des fluides " 3<sup>ème</sup> édition: Mir - Ellipses, 1994.
2. RIEUTORD M. "Une introduction à la dynamique des fluides " Masson, 1997.
3. TJØTTA J.N., TJØTTA S. " Non linear equations of acoustics " Frontiers of Nonlinear Acoustics. M.F. HAMILTON and D.T. BLACKSTOCK Eds. 12<sup>th</sup> ISNA. Elsevier, London , pp 80-97, 1990.
4. ENFLO B.O. " Some analytical results on nonlinear acoustics wave propagation in diffusive media " Plenum Publ. Corp., pp. 435-453, 1994.
5. BEYER R.T., LETCHER S.V. " Physical Ultrasonics ". Academic Press New York-London , 1969.
6. KUZNETSOV V.P, " Equations of nonlinear acoustics " Sov. Phys. Acoust. Vol.16, N°4, pp. 467-470, 1971.
7. BEYER R.T. "Parameter of nonlinearity in fluids " J,Acoust.Soc.Am. Vol.32, N°6, pp. 719-721, 1960.
8. HAMILTON M.F., BLACKSTOCK D.T. "On the coefficient of nonlinearity  $\beta$  in nonlinear acoustics " J,Acoust.Soc.Am., Vol.83, N°1, pp.74-77, 1988.
9. JESSEL M. " Acoustique théorique : propagation et holophonie ". Masson et C<sup>ie</sup> , 1973.
10. ZABOLTSKAYA E.A., KHOKHLOV R.V. " Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams ". Sov, Phys. Acoust. Vol. 15, N° 1, pp. 35-40, 1969.
11. TJØTTA J.N., TJØTTA S. "Nonlinear equations of acoustics, with application to parametric acoustic array ". J,Acoust,Soc.Am. Vol.69, N°6, pp.1644-1652, 1981.
12. AANONSEN S.I., BARKVE T., TJØTTA J.N, TJØTTA S. " Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam ". J,Acoust.Soc.Am. Vol.75, N°3, pp.749-768, 1984.
13. FENLON F.H. "A recursive procedure for computing the nonlinear spectral interactions of progressive finite-amplitude waves in nondispersive fluids". J,Acoust.Soc.Am. Vol.50, N°5 (part2), pp. 1299-1312, 1971.
14. LEE D., BOTSEAS G. " Finite-difference solution to the parabolic wave equation", J,Acoust.Soc.Am. Vol.70, N°3 , pp. 795-800, 1981.
15. BACON D.R., BAKER A. " Comparison of two theoretical models for predicting nonlinear propagation in medical US fields ". Phy. Med, Biol. Vol.34 ,N°1, pp. 1633- 1643, 1989.

16. YSTAD B., BERNTSEN J. " Numerical solution of the KZK equation for focusing sources" . Acta Acustica, 3 pp. 323-330, 1995.
17. HAMILTON M.F., TJØTTA J.N., TJØTTA S., "Non linear effects in the farfield of a directive sound source". J,Acoust,Soc.Am. Vol.78, N°1, pp. 202-216, 1985.
18. TENCATE J.A. "An experimental investigation of the nonlinear pressure field produced by a plane circular piston". J.Acoust.Soc.Am. Vol,94, N°2, pp, 1084-1089, 1993.
19. NACHEF S., CATHIGNOL D., TJØTTA J.N., BERG A.M., TJØTTA S., "Investigation of a high intensity sound beam from a plane transducer. Experimental and theoretical results". J.Acoust,Soc.Am. Vol.98, N°4, pp, 2303-2323, 1995.
20. INGENITO F., WILLIAMS A.O. " Calculation of second-harmonic generation in a piston beam". J.Acoust.Soc.Am. Vol.49, N°1 (part 2), pp. 319-328, 1971.
21. KUNITSYN V.E., RUDENKO O.V. " Second harmonic generation in the field of a piston radiator", Sov. Phys. Acoust. Vol.24, N°4, pp. 310-313, 1978.
- 22.LUCAS B.G., MUIR T.G. " Field of a finite-amplitude focusing source ". J,Acoust.Soc.Am. Vol.74, N°5, pp, 1522-1528, 1983.
- 23.BERNTSEN J., TJØTTA J.N., TJØTTA S., " Nearfield of a large acoustic transducer. PartIV: Second harmonic and sum frequency radiation". J.Acoust.Soc.Am. Vol,75, N°5, pp. 1383-1391, 1984.
24. BLACKSTOCK D.T. " Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite- amplitude sound waves". J.Acoust.Soc.Am. Vol.36, N°3, pp. 534-542, 1964.
- 25.NOVIKOV B.K. "Exact solutions of the Burgers equation". Sov. Phys. Acoust. Vol.24, N°4, pp. 326-328, 1978.
26. MITOME H. " An exact solution for finite-amplitude plane sound waves in a dissipative fluid ", J.Acoust,Soc.Am. Vol.86, N°6, pp. 2334-2338, 1989.
- 27.HARAN M.E., COOK B.D. " Distortion of finite amplitude ultrasound in lossy media ". J,Acoust,Soc.Am. Vol.73, N°3, pp, 774-779, 1983.
28. NGOC T.D.K, KING K.R., MAYER W.G. " A numerical model for nonlinear and attenuative propagation and reflection of an ultrasonic bounded beam ". J.Acoust.Soc.Am. Vol,81, N°4, pp. 874-880, 1987.
29. SWINDELL W. " A theoretical study of nonlinear effects with focused ultrasound in tissues : An "acoustic bragg peak" ", Ultrasound in Med. & Biol. Vol.11 , N°1, pp.121-130, 1985.
- 30.TRIVETT D.H., VAN BUREN A.L, " Propagation of plane, cylindrical, and spherical finite amplitude waves ". J.Acoust.Soc,Am. Vol,69, N°4, pp. 943-949, 1981.

31. BLACKSTOCK D.T. " On plane, spherical, and cylindrical sound waves of finite amplitude in lossless fluids". J.Acoust,Soc.Am. Vol.36, pp. 217-219, 1964.
32. BERKTAY H.O. " Finite-amplitude effects in acoustic propagation in fluids ". Proc. International School of Physics « Enrico Fermi » Course LXIII : New directions in physical acoustics. pp. 369-408, 5<sup>th</sup> –17<sup>th</sup> august 1974.
33. LELONG J., CHAPELON J.Y., CATHIGNOL D. " Simulation des effets non linéaires sur une onde ultrasonore plane de forme temporelle quelconque en milieu faiblement dissipatif". Innov. Tech. Biol. Med. Vol.11, N°1, pp.17-29, 1990.
34. BLACKSTOCK D.T. " Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude ". J.Acoust.Soc.Am. Vol.39, N°6, pp. 1019-1026, 1966.
35. FAY R.D. " Plane sound waves of finite amplitude ". J.Acoust,Soc,Am. Vol.3, pp. 222-241, 1931.
36. FUBINI E. " Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza ". Alta Frequenza , Vol.4, pp. 530-581, 1935.
37. BURVINGT R. " Réduction par une transformation intégrale d'une équation d'ondes non linéaire à une forme linéaire approchée analytiquement soluble ". J. Acoustique, Vol.5, pp. 1-18, 1992.
38. BLITZ J. " Fundamentals of ultrasonics ". London Butterworths , 1963.
39. SYROTA A. " Bases physiques de l'imagerie ultrasonore ",Paris Onze Edition , ISBN 2-87800-038-2.
40. LAMBERT A., PRALUS Y., RIVENEZ J. " Ultrasons ; propagation des ondes sonores, niveau 2 ", CETIM diffusion (Senlis).
41. NARAYANA P.A., OPPHIR J. " On the validity of the linear approximation in the parametric measurement of attenuation in tissues ", Ultrasound in Med. & Biol., Vol.9, N°4, pp. 357-361, 1983.
42. WILLARD G.W, " Ultrasonic absorption and velocity measurement in numerous liquids ". J.Acoust,Soc.Am. Vol.12, N°6, pp, 438-448, 1941.
43. THURAS A.L., JENKINS R.T., O'NEIL H.T. " Extraneous frequencies generated in air carrying intense sound waves ", J,Acoust.Soc.Am. Vol.VI, pp, 173-180, 1935.
44. DUNN F., LAW W.K., FRIZZELL L.A. " Nonlinear ultrasonic wave propagation in biological materials ". Ultrasonics Symposium Proceedings, IEEE, New York, 1981.
45. COBB W.N. " Finite amplitude method for the determination of the acoustic nonlinearity parameter B/A ". J.Acoust.Soc.Am. Vol.73, N°5, pp.1525-1531, 1935.

46. SEHGAL C.M., GREENLEM J.F. " Ultrasonic absorption and dispersion in biological media : A postulated model " J,Acoust.Soc.Am , Vol.72, N°6 , pp. 1711- 1718, 1982.
47. HANG J., KUHLENSCHMIDT M.S., DUNN F. "Influences of structural factors of biological media on the acoustic nonlinearity parameter B/A " J.Acoust.Soc,Am., Vol.89, N°1, pp. 80-91, 1991.
48. WATSON A.J., HUMPHREY V.F., ANDREW C.B., DUC F.A. "Nonlinear propagation of focused ultrasound in tissue-like media " Frontiers of Nonlinear Acoustics. M.F. HAMILTON and DT BLACKSTOCK Eds. 12<sup>th</sup> ISNA. Elsevier, London , pp 445-450, 1990.
49. HLADIK J. "Unités de mesure (étalons et symboles des grandeurs physiques)", Masson, 1992.



## **CHAPITRE II**

### **SOLUTIONS ANALYTIQUES NECESSAIRES A LA MESURE DU PARAMETRE B/A**





## II.1 INTRODUCTION

Dans les systèmes de mesure du paramètre B/A par les méthodes harmoniques, la détection de l'onde acoustique s'effectue à l'aide d'un transducteur fonctionnant en récepteur et permettant la conversion Pression acoustique---> Tension électrique grâce à l'effet piézo-électrique inverse.

Ce transducteur pourra être un hydrophone dont le petit diamètre et la composition (matériau large bande en PVDF) le destinent tout particulièrement à un relevé de la répartition spatiale du champ sur une large plage de fréquences (plusieurs MHz). L'hydrophone est donc adapté à la détection de l'onde ultrasonore en une région quasi-ponctuelle de l'espace et l'analyse fréquentielle du signal électrique recueilli permet la reconstitution des composantes harmoniques du champ de pression.

Cependant, à cause des phénomènes de diffraction comme nous le verrons plus loin, la petite taille de ce type de détecteur le rend peu adapté aux systèmes de mesure du paramètre de non linéarité B/A. Pour minimiser les effets de la diffraction dans le champ proche de la source on utilise généralement comme récepteur un transducteur de même dimension que l'émetteur. Les transducteurs traditionnels ne pouvant fonctionner que dans une bande étroite de fréquences, il conviendra donc de choisir un récepteur de fréquence de résonance égale au double de celle de l'émetteur afin de détecter l'harmonique 2 de l'onde ultrasonore, fonction du paramètre B/A, avec la plus grande sensibilité. Notons qu'il existe des hydrophones large bande de grand diamètre pouvant également convenir dans ce cas.

En conséquence, avant d'analyser les différents procédés de mesure du paramètre B/A par analyse harmonique de la forme d'onde ultrasonore, il convient tout d'abord de définir l'expression mathématique du champ de pression émis par un transducteur, en se limitant aux harmoniques de rang 1 et 2, et de déterminer la pression moyenne correspondante captée par un récepteur de même dimension que l'émetteur. La tension issue du capteur étant proportionnelle à la pression moyenne reçue sur sa surface.

Au paragraphe II.3.3 nous montrons qu'il est possible d'obtenir des solutions simples, mais précises, pour la pression moyenne exercée par le second harmonique. L'intérêt des solutions que nous établirons est confirmé par les simulations montrant la concordance avec d'autres, plus compliquées, exploitées dans la littérature et vérifiées expérimentalement [33].

Dans le cadre de l'approximation quasi linéaire, permettant l'établissement de solutions analytiques, les équations relient le second harmonique au fondamental. Il convient donc dans un premier temps d'établir l'expression du fondamental du champ de pression à laquelle est liée celle du second harmonique.

## II.2 CHAMP ACOUSTIQUE RAYONNE PAR UN TRANSDUCTEUR

### II.2.4 CHAMP ACOUSTIQUE ASSOCIE AU FONDAMENTAL (approximation linéaire)

Les premières études du champ acoustique rayonné par un piston vibrant utilisent la solution de l'intégrale de surface de Rayleigh (1877) transformée par la suite par King (1934) pour une source de forme circulaire.

Plus récemment (1980) des solutions basées sur l'approximation parabolique de l'équation linéaire de Helmholtz ont été proposées.

Les solutions de l'intégrale de King et de l'équation de Helmholtz sont applicables pour une excitation sinusoïdale, alors que dans le cas d'une source de profil temporel quelconque (impulsion par exemple) il est plus commode d'exprimer le champ acoustique sous la forme d'un produit de convolution.

Ces solutions, exprimées dans le cadre de l'acoustique linéaire, représentent donc le fondamental de l'onde ( $p_1(r,z,t)$  ou  $\phi_1(r,z,t)$ ) en supposant les autres harmoniques nulles ou négligeables.

### II.2.4.1 Intégrale de surface de Rayleigh :

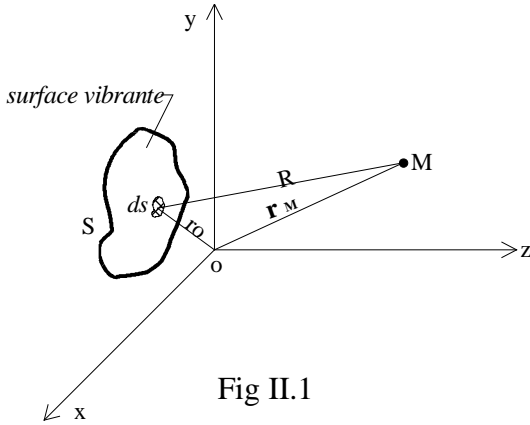


Fig II.1

La surface arbitraire S du piston est dans le plan rigide (x, y) et rayonne dans un milieu isotrope, homogène et non dissipatif.

D'après le principe de Huygens, chaque élément de surface dS donne naissance à une onde sphérique et le champ en un point M peut être considéré comme la superposition de ces ondes.

Mathématiquement, ce principe s'exprime ici à l'aide de l'intégrale de surface de Rayleigh donnant le potentiel des vitesses  $\phi_1$  en un point M de l'espace [1,2,3]:

$$\phi_1(r_M, t) = \int_S \frac{v_o(r_o, t - R/c)}{2 \cdot \pi \cdot R} dS \quad (\text{II.1})$$

c est la vitesse de propagation de l'onde ultrasonore et  $v_o(r_o, t)$  la composante normale au piston de la vitesse de l'élément vibrant ds.

Dans le cas d'une vibration sinusoïdale de pulsation  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  et d'amplitude  $U_o$ , on a:

$v_o(r_o, t) = U_o(r_o) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$  et l'expression spatio-temporelle du potentiel des vitesses devient:

$$\phi_1(r_M, t) = \left( \int_S \frac{U_o(r_o) \cdot e^{j \cdot k \cdot R}}{2 \cdot \pi \cdot R} dS \right) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} = \phi_1(r_M) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \quad (\text{II.2})$$

où  $\phi_1(r_M)$  est la composante spatiale et  $k = \omega/c$  le nombre d'onde.

On considère généralement la vibration uniforme sur toute la surface S, ainsi:

$$U_o(r_o) = U_o = \text{cte} \quad \text{et} \quad \phi_1(r_M) = U_o \cdot \int_S \frac{e^{j \cdot k \cdot R}}{2 \cdot \pi \cdot R} dS \quad (\text{II.3})$$

Certains auteurs ont analysé le cas d'une distribution  $U(r_o)$  non uniforme [2,4,5].

### Application à une source de forme circulaire (transducteur plan cylindrique):

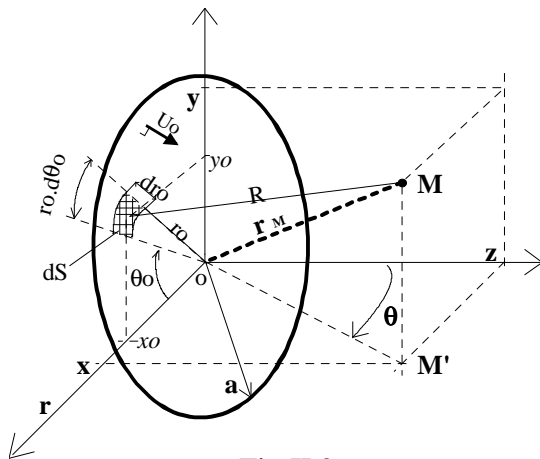


Fig II.2

Dans ce cas, conformément à la figure II.2, on a:  $dS = r_o \cdot dr_o \cdot d\theta_o$  et l'intégration sur la surface du transducteur donne :

$$\phi_1(r_M) = \frac{U_o}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{r_o=0}^a \int_{\theta_o=0}^{2\pi} \frac{e^{j \cdot k \cdot R}}{R} \cdot r_o \cdot dr_o \cdot d\theta_o \quad (\text{II.4})$$

avec  $R = [z^2 + (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]^{1/2}$

où  $(x_o, y_o)$  sont les coordonnées de la surface dS :

$x_o = r_o \cdot \cos(\theta_o)$  et  $y_o = r_o \cdot \sin(\theta_o)$ .

a est le rayon de la source.

De part la géométrie de la source, le champ présente une symétrie axiale (o,z) et on peut l'exprimer en coordonnées cylindriques avec :

$$R(r, z) = [r^2 + z^2 + r_0^2 - 2.r.r_0.\cos(\theta_0)]^{1/2} \quad (\text{II.5})$$

D'après (I.20) la pression acoustique s'exprime sous la forme:  $p_1(r, z, t) = \rho_0 \cdot \frac{\partial \phi_1(r, z, t)}{\partial t}$

$$\text{Soit } p_1(r, z, t) = -j.\rho_0.\omega.\phi_1(r, z).e^{-j.\omega.t} = p_1(r, z).e^{-j.\omega.t} \text{ et } p_1(r, z) = -j.\rho_0.\omega.\phi_1(r, z) \quad (\text{II.6})$$

La condition de source  $U_0$  peut s'exprimer en fonction de la pression acoustique moyenne à la surface du transducteur [6]:

$$P_0 = \langle p'(0) \rangle \approx \rho_0.c_0.U_0 \quad (\text{II.7})$$

Les premières évaluations numériques de l'intégrale double (II.4), afin de représenter le champ de pression  $|p_1(r, z)/P_0|$  pour différentes valeurs du rapport  $a/\lambda$ , ont été effectuées en 1970 par J. Zemanek [7].

L'intégrale de Rayleigh (II.1) peut également être utilisée dans le cas d'une excitation impulsionnelle (burst) à la source pour calculer le champ acoustique résultant [8].

Dans le cas d'une propagation dans un milieu dissipatif, le nombre d'onde réel  $k$  est remplacé par le complexe (§ I.2.2.1) [9]:

$$k_1' = k + j.\alpha_1 \quad (\text{II.8})$$

où  $\alpha_1$  représente l'atténuation linéique du fondamental.

#### II.2.4.2 Intégrale de King

En s'inspirant de la théorie électromagnétique, King a transformé l'intégrale de Rayleigh en une intégrale simple permettant la description du potentiel des vitesses dans le plan (x,z) pour une source de forme circulaire excitée de façon sinusoïdale [1,2].

L'intégrale de King avec les considérations géométriques de la figure II.2, s'exprime par :

$$\phi_1(r, z) = U_0.a \int_0^\infty J_0(\psi.r).J_1(\psi.a) \cdot \frac{e^{j.z.(k^2 - \psi^2)^{1/2}}}{(k^2 - \psi^2)^{1/2}} .d\psi \quad (\text{II.9})$$

Après quelques manipulations mathématiques cette expression peut se mettre sous la forme [3,10] :

$$\phi_1(r, z) = \frac{j.a.U_0}{2.\pi.k} \int_{-\pi}^{+\pi} [e^{j.k.(R^2 + z^2)^{1/2}} - e^{j.k.z}] \cdot \left( \frac{a - r.e^{-j\Psi}}{R^2} \right) .d\Psi \quad (\text{II.10})$$

avec  $R^2 = r^2 + a^2 - 2.a.r.\cos(\Psi) = (a - r.e^{-j\Psi}) \cdot (a - r.e^{j\Psi})$

Cette expression (II.10), équivalente à l'intégrale de Rayleigh (II.4), est plus simple à évaluer numériquement.

Elle peut se transformer sous la forme :

$$\phi_1(r, z) = j \cdot \frac{U_0}{k} \begin{bmatrix} 1 & r < a \\ 1/2 & r = a \\ 0 & r > a \end{bmatrix} e^{j.k.z} + j \cdot \frac{U_0}{\pi.k} \int_0^\pi e^{j.k.(R^2 + z^2)^{1/2}} \cdot \frac{(a.r.\cos(\Psi) - a^2)}{R^2} .d\Psi \quad (\text{II.11})$$

<sup>10</sup> Cette relation, qui correspond à la pression initiale dans le cas d'une onde plane (cf I.33), est d'autant plus exacte que le produit  $k.a$  est grand (d'après [6] nous trouvons une erreur d'environ 0.6% pour  $k.a = 100$ ).

Le premier terme représente une *onde plane* qui existe pour  $r < a$  et disparaît pour  $r > a$ . Le second terme constitue l'*onde de bord* qui participe à tout le champ rayonné par le transducteur et représente donc les *effets de la diffraction* engendrée par la géométrie de la source. Pour une source de dimension infinie ce terme s'annule et il ne reste plus qu'une onde plane rayonnée.

L'intégrale de Rayleigh (II.4), de King (II.9), et ses dérivées (II.10-11) sont des expressions équivalentes. Dans le cas d'un milieu dissipatif, on remplace  $k$  par  $k_1$  (II.8).

### II.2.4.3 Approximation parabolique de l'équation de Helmholtz :

Nous avons établi au chapitre I l'équation de propagation linéaire dans un milieu

$$\text{dissipatif (I.20-24) : } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - c_0^2 \cdot \Delta \phi_1 - \frac{2 \cdot c_0 \cdot \alpha_1}{k^2} \cdot \frac{\partial(\Delta \phi_1)}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Pour une onde monochromatique de nombre d'onde  $k = \omega/c_0$  cette équation devient l'équation de Helmholtz en milieu dissipatif :  $\Delta \phi_1 \cdot (1 - 2 \cdot j \cdot \alpha_1 / k) + k^2 \cdot \phi_1 = 0$  (II.13)

Sa solution exacte en milieu non dissipatif ( $\alpha_1=0$ ) est l'intégrale de King (II.9) ou de Rayleigh (II.4) [10,11].

Avec les considérations du § I.2.3.1 le potentiel des vitesses peut se mettre sous la forme [12,13,14]:  $\phi_1(x, y, z) = q_1(x, y, z) \cdot e^{j \cdot (k \cdot z)}$  (II.14)

Dans ce cas, en considérant  $\alpha_1 \ll k/2$ , l'équation de Helmholtz s'écrit :

$$\Delta_{\perp} q_1 + \frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} + 2 \cdot j \cdot k \cdot \frac{\partial q_1}{\partial z} + 2 \cdot j \cdot \alpha_1 \cdot k \cdot q_1 = 0 \quad (\text{II.15})$$

La plupart des sources sont à symétrie axiale, et le champ acoustique peut s'exprimer en coordonnées cylindriques. En appliquant l'approximation parabolique, qui consiste à négliger

le terme  $\frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2}$ , on peut donc écrire en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial q_1}{\partial r} \right) + 2 \cdot j \cdot k \cdot \frac{\partial q_1}{\partial z} + 2 \cdot j \cdot \alpha_1 \cdot k \cdot q_1 = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'approximation<sup>11</sup> transforme l'équation elliptique de Helmholtz en une équation parabolique mieux adaptée au calcul numérique [15].

En fait, en utilisant les coordonnées normalisées  $\xi = \frac{r}{a}$  et  $\eta = \frac{2 \cdot z}{k \cdot a^2}$ , l'approximation parabolique revient à considérer [11] :  $k \cdot a \gg 1$  (II.17)

A l'aide de la transformée de Hankel, la solution de (II.16) est :

$$q_1(r, z) = q_1'(r, z) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z} \quad \text{avec} \quad q_1'(r, z) = -j \cdot \frac{k}{z} \cdot \int_{r'=0}^{\infty} e^{j \cdot k \cdot \frac{r^2 + r'^2}{2 \cdot z}} \cdot q_1(r', 0) \cdot J_0 \left( \frac{k \cdot r \cdot r'}{z} \right) \cdot r' \cdot dr' \quad (\text{II.18})$$

<sup>11</sup> L'approximation parabolique est équivalente à l'approximation de Fresnel sur l'intégrale de Rayleigh, solution exacte de l'équation de Helmholtz. Cette approximation revient à considérer:

$$\frac{e^{-j \cdot k \cdot R(r, z)}}{R(r, z)} \cong \frac{e^{-j \cdot k \cdot R'(r, z)}}{z} \quad , \quad R'(r, z) = z + \frac{r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot \cos(\theta_0)}{2 \cdot z} \quad (\text{II.22})$$

dans l'intégrale de Rayleigh (II.4) [16].

où  $q_1(r',0)$  représente la vibration de la source. Soit, dans le cas d'un transducteur de rayon

$$a \text{ avec une vibration uniforme } U_0 : \begin{cases} q_1(r',0) = j \cdot \frac{U_0}{k} & \text{pour } r' < a \\ q_1(r',0) = 0 & \text{pour } r' > a \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Ainsi :

$$q_1'(r,z) = \frac{U_0}{z} \int_{r'=0}^a e^{j.k \cdot \frac{r^2+r'^2}{2.z}} J_0\left(\frac{k.r.r'}{z}\right) r'.dr' \quad (\text{II.20})$$

Et l'amplitude de la pression acoustique du fondamental s'exprimera sous la forme<sup>12</sup> :

$$p_1(r,z) = -j.\rho_0.\omega.q_1'(r,z).e^{j.(k+j.\alpha_1).z} \quad (\text{II.21})$$

#### II.2.4.4 Intégrale de convolution :

Dans le cas d'une distribution uniforme de la vitesse ( $v_0(r_0,t) = v_0(t)$ ) sur la surface d'un transducteur de forme quelconque, le champ acoustique peut s'exprimer sous la forme d'une convolution temporelle (\*):

$$\phi_1(r_M,t) = v_0(t) * h(r_M,t) \quad (\text{II.23})$$

Où  $h(r_M,t)$  est la réponse impulsionnelle de diffraction de la source de surface S :

$$h(r_M,t) = \frac{1}{2.\pi} \int_S \frac{\delta(t - R/c)}{R} .dS \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, connaissant la fonction  $h(r_M,t)$  pour le transducteur considéré, on peut obtenir le champ acoustique en réponse à une excitation  $v_0(t)$  quelconque de la source [2,3,17,18]. Ce procédé peut d'ailleurs être adapté au cas d'une distribution non uniforme de la vitesse  $v_0$  [19].

#### II.2.4.5 Représentation du champ acoustique dans le cas d'une excitation sinusoïdale uniforme :

Avec (II.7) nous représentons la variation relative  $|p_1(r,z)/P_0|$  de l'amplitude de la pression en milieu dissipatif, pour les solutions de Rayleigh ou King et de l'approximation parabolique de l'équation de propagation.

a) dans la direction axiale ( $oz$ ) ==>  $r = 0$  :

Intégrales de Rayleigh et de King :

$$\text{Elles se simplifient pour donner : } \left| \frac{p_1(0,z)}{P_0} \right| = \left| e^{j.(k+j.\alpha_1).(a^2+z^2)^{1/2}} - e^{j.(k+j.\alpha_1).z} \right| \quad (\text{II.25})$$

Solution de l'approximation parabolique de l'équation de Helmholtz :

$$\text{La solution (II.20-21) donne: } \left| \frac{p_1(0,z)}{P_0} \right| = \left| e^{j \frac{k.a^2}{2.z}} - 1 \right| e^{-\alpha_1.z} \quad (\text{II.26})$$

Les solutions (II.25-26), évaluées par le logiciel Mathcad 6.0, sont représentées **figures II.3 a,b,c** en fonction de la coordonnée axiale  $z.\lambda/a^2$  et pour différentes valeurs de  $k.a$ , dans

<sup>12</sup> L'introduction de l'atténuation fonction de la distance axiale  $z$  comme phénomène indépendant dans la solution de l'équation de propagation, n'est valable que pour les grandes valeurs de  $k.a$ , qui est d'ailleurs la condition d'écriture de l'équation parabolique, et pour des distances radiales  $r$  pas très éloignées de l'axe. Sinon l'atténuation doit être liée à la distance  $R$  fonction de  $(r,z)$  (figure II.1) et intervenir dans le nombre d'onde  $k$  (ég. II.8) de l'intégrale de Rayleigh ou de King. En fait, comme la décroissance radiale de la pression due à l'onde de bord (voir l'équation (II.11)) l'emporte généralement largement devant celle engendrée par l'atténuation, l'écriture (II.21) constitue une très bonne approximation de la réalité physique.

l'eau (  $c_0=1503$  m/s,  $\alpha_0=0,25.10^{-13}$  Np.m<sup>-1</sup>.Hz<sup>-2</sup> ) et le glycérol (  $c_0=1909$  m/s,  $\alpha_0=26.10^{-13}$  Np.m<sup>-1</sup>.Hz<sup>-2</sup> ).

L'approximation parabolique de l'équation de Helmholtz conduit à une solution (II.26) convergeant vers la solution exacte (II.25) lorsque  $k.a \rightarrow \infty$ , ce que l'on observe **figures II.3 a,b,c**.

D'autre part, la solution (II.26) n'est pas valide au voisinage du transducteur où elle présente d'importantes oscillations, minimisées dans nos représentations en limitant le nombre de points de calcul. J.N et S. Tjøtta [11] précisent que l'approximation parabolique et les solutions (II.21-26) cessent d'être valides lorsque  $z/a$  est négligeable devant  $(k.a)^{1/3}$  pour  $k.a$  grand.

Pour cette raison, **figure II.3.c**, nous n'avons pas représenté les variations de pression au voisinage du transducteur.

**b) dans le plan**  $(oz, or)$  :

Le champ, calculé à l'aide de l'intégrale de King (II.10) dans les mêmes conditions que la **figure II.3.b**, est présenté **figures II.5**. La **figure II.5.b** représente les courbes d'isopression relatives.

**c) Commentaires :**

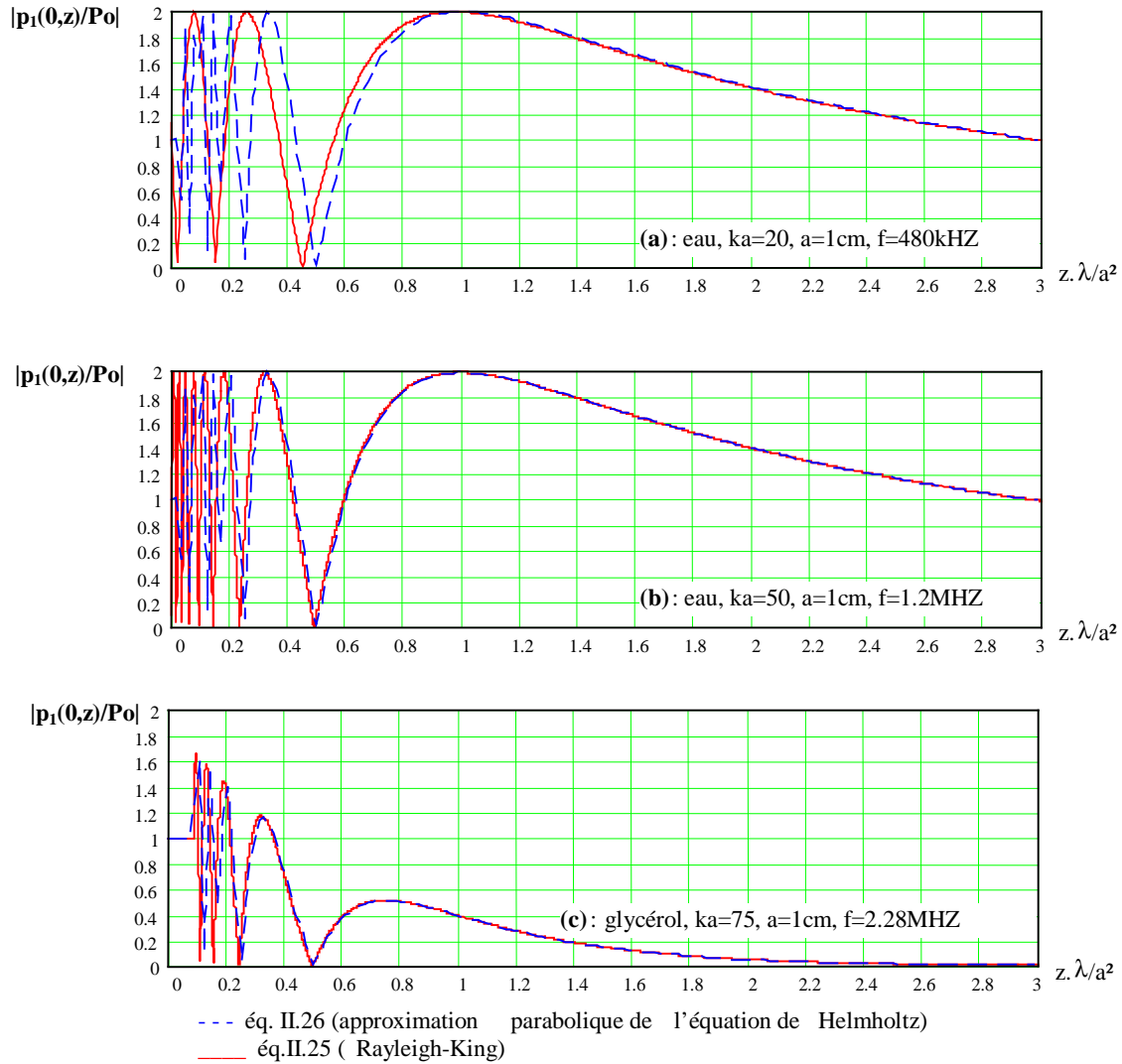
On distingue deux régions :

- Le champ proche ( $0 < z.\lambda/a^2 < 1$ ) ou région de Fresnel. Il est caractérisé par des phénomènes d'interférence engendrant des minima et des maxima de pression. Le champ acoustique est non régulier dans la région voisine du transducteur.
- Le champ lointain ( $z.\lambda/a^2 > 1$ ) ou région de Fraunhofer dans lequel l'amplitude de la pression décroît de façon monotone. C'est la région de formation normale du champ dans laquelle il diverge (**figure II.5.b**).

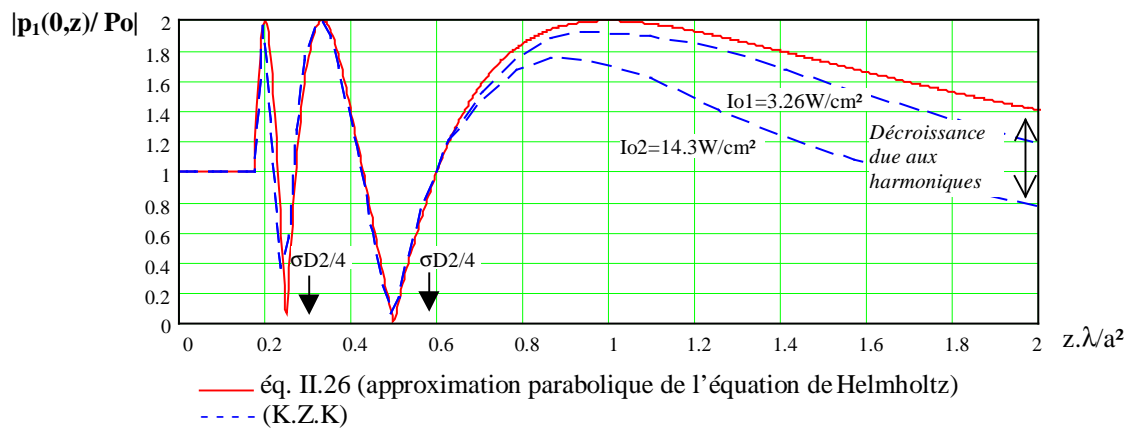
Les phénomènes d'interférence dans le champ proche sont d'autant plus importants que le rayon (a) de la source est grand devant la longueur d'onde ( $\lambda$ ). On emploie également le produit  $k.a = 2.\pi.(a/\lambda)$  comme critère.

Rappelons que nous nous sommes placés dans le cadre de l'acoustique linéaire en négligeant la décroissance du fondamental engendrée par l'apparition des harmoniques.

Cette décroissance est visualisée **figure II.4** par le résultat de la résolution numérique de l'équation K.Z.K (I.32) effectués par Aanonsen *et al.* [20] pour le fondamental à  $I_0 = 3.26$  W/cm<sup>2</sup> et 14.3 W/cm<sup>2</sup>. Pour information nous représentons les positions  $\sigma D1/4 = 0.25.l_{D1}.\lambda/a^2=0.59$  et  $\sigma D2/4 = 0.25.l_{D2}.\lambda/a^2=0.27$  où  $l_{D1,2}$  sont les distances de discontinuités associées aux intensités  $I_{o1}$  et  $I_{o2}$ .



**Fig II.3(a,b,c):** Variation de la pression du fondamental suivant l'axe ( $oz$ ). Comparaison de la solution exacte avec celle de l'approximation parabolique de l'équation de Helmholtz. [Solutions établies dans le cadre de l'acoustique linéaire].



**Fig II.4:** Variation de la pression du fondamental suivant l'axe ( $oz$ ). Comparaison de la solution établie dans le cadre de l'acoustique linéaire avec celle établie dans le cadre de l'acoustique non linéaire (K.Z.K). {eau,  $k.a = 74.8$ ,  $a = 3.81\text{ cm}$ ,  $f = 0.47\text{ MHz}$ }



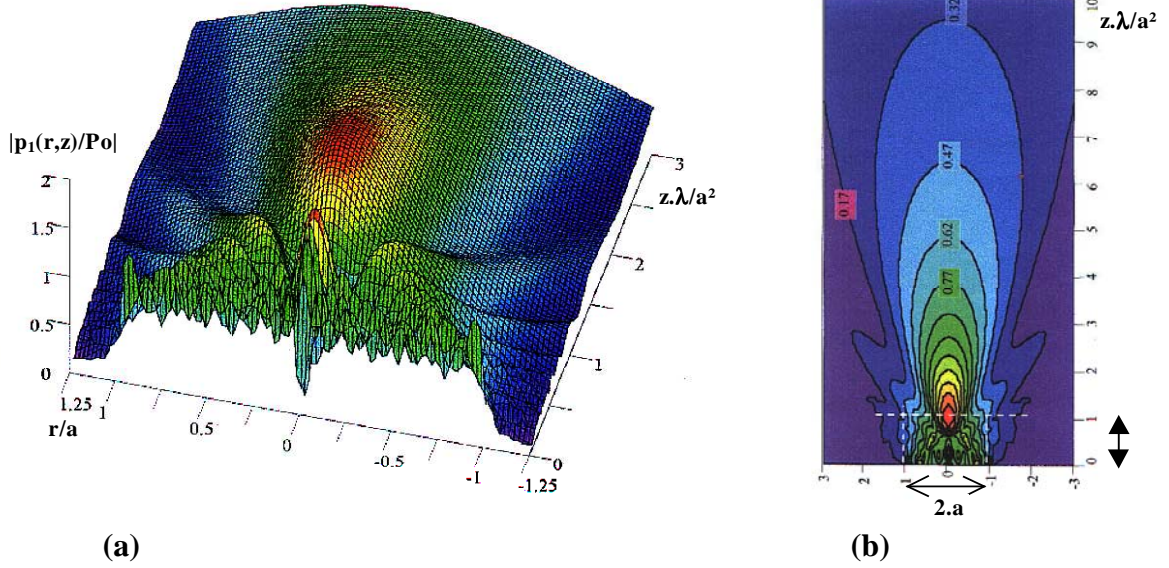


fig II.5 : Champ acoustique associé au fondamental ( $k.a = 50$ ).

## II.2.5 CHAMP ACOUSTIQUE ASSOCIE AU SECOND HARMONIQUE (approximation quasi linéaire)

La première formulation analytique du second harmonique du champ acoustique généré par un transducteur plan de forme circulaire a été réalisée par Ingenito et Williams [21] en 1969. Elle est basée sur une approximation quasi linéaire de l'équation de propagation en milieu non dissipatif. Toujours avec cette approximation, différents auteurs ont ensuite établi des expressions du second harmonique à partir de l'équation de Kuznetsov [22,23,24].

### II.2.5.1 Equations de propagation liant l'harmonique 2 au fondamental :

On applique la méthode de la perturbation consistant à écrire le potentiel des vitesses sous la forme [12,13,21,25] :

$$\phi = \sum_n \mu^n \cdot \phi_n \quad (\text{II.27})$$

et à l'introduire dans l'équation de Kuznetsov (I.29). En se limitant au 2<sup>ème</sup> ordre en  $\mu$ , et en égalant les termes de même puissance de  $\mu$ , on obtient :

- Pour le fondamental ( $\mu^1$ ) : l'équation (II.12) exploitée précédemment.
- Pour le second harmonique ( $\mu^2$ ) :

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - \text{co}^2 \cdot \Delta \phi_2 - \frac{2 \cdot \text{co} \cdot \alpha_1}{k^2} \cdot \frac{\partial (\Delta \phi_2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \phi_1)^2 + \frac{\beta - 1}{\text{co}^2} \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (\text{II.28})$$

les potentiels peuvent se mettre sous la forme :

$$\phi_2(x, y, z, t) = q_2(x, y, z) \cdot e^{j \cdot [2 \cdot (k \cdot z - \omega t) + j \alpha_2 \cdot z]} \quad \text{et} \quad \phi_1(x, y, z, t) = q_1(x, y, z) \cdot e^{j \cdot [(k \cdot z - \omega t) + j \alpha_1 \cdot z]} \quad (\text{II.29})$$

En les reportant dans l'équation et en considérant  $\alpha_1, \alpha_2 \ll k$  et les termes en  $(\nabla q_1)^2$  et  $q_1 \cdot \nabla q_1$  négligeables, on obtient :

$$\Delta_{\perp} q_2 + \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2} + 4 \cdot j \cdot k \cdot \frac{\partial q_2}{\partial z} = -j \cdot \frac{k^3 \cdot \beta}{\text{co}} \cdot q_1^2 \cdot e^{-(2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2) \cdot z} \quad (\text{II.30})$$

Pour une source à symétrie axiale, et en appliquant l'approximation parabolique qui consiste à négliger le terme  $\frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2}$ , l'équation (II.29) devient en coordonnées cylindriques:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial q_2}{\partial r} \right) + 4 \cdot j \cdot k \cdot \frac{\partial q_2}{\partial z} = -j \cdot \frac{k^3 \cdot \beta}{c_0} \cdot q_1^2 \cdot e^{-(2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2) \cdot z} \quad (\text{II.31})$$

avec comme condition à la source :  $q_2(r,0) = 0$ .

L'expression (II.30) réécrite pour le cas non dissipatif ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ) en terme de potentiel des vitesses avec (II.29), devient :

$$\Delta \phi_2 + 4 \cdot k^2 \cdot \phi_2 = -j \cdot \frac{k^3 \cdot \beta}{c_0} \cdot \phi_1^2 \quad (\text{II.32})$$

Nous retrouvons l'équation exploitée par Ingenito et Williams [21] dont la solution est décrite au paragraphe suivant.

Rappelons que le processus de la perturbation, dans le cadre de l'approximation quasi linéaire, ignore tous les  $\phi_i$  pour  $i > 2$  et considère que la génération de l'harmonique 2 ( $\phi_2$ ) n'entraîne pas de décroissance appréciable du fondamental ( $\phi_1$ ).

### II.2.5.2 Solutions des équations de propagation :

A l'aide de la transformée de Hankel, la solution de l'équation (II.31) est [23,24] (adaptée pour le potentiel des vitesses) :

$$q_2(r, z) = \frac{-\beta \cdot k^4}{4 \cdot \pi \cdot c_0 \cdot z} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^z e^{-(2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2) \cdot z'} \cdot \frac{e^{\frac{j \cdot k \cdot F^+}{4 \cdot z'}}}{z'} \cdot \frac{j \cdot k \cdot F^-}{4 \cdot z} \times J_0 \left( \frac{k \cdot r \cdot \sqrt{F^-}}{z} \right) \cdot q_1(r_1, 0) \cdot q_1(r_2, 0) \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot dz' \cdot d\theta \cdot dr_1 \cdot dr_2 \quad (\text{II.33})$$

avec

$$F^\pm = r_1^2 + r_2^2 \pm 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta)$$

$q_1(r,0)$  représente la vibration de la source. Dans le cas d'un transducteur de rayon  $a$  avec

$$\text{une vibration uniforme } U_0, \text{ on a : } \begin{cases} q_1(r_1, 0) \cdot q_1(r_2, 0) = -\frac{U_0^2}{k^2} & \text{pour } r_1, r_2 < a \\ q_1(r_1, 0) \cdot q_1(r_2, 0) = 0 & \text{pour } r_1, r_2 > a \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{ainsi : } q_2(r, z) = \frac{\beta \cdot k^2 \cdot U_0^2}{4 \cdot \pi \cdot c_0 \cdot z} \cdot \int_0^a \int_0^a \int_0^\pi \int_0^z e^{-(2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2) \cdot z'} \cdot \frac{e^{\frac{j \cdot k \cdot F^+}{4 \cdot z'}}}{z'} \cdot \frac{j \cdot k \cdot F^-}{4 \cdot z} \times J_0 \left( \frac{k \cdot r \cdot \sqrt{F^-}}{z} \right) \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot dz' \cdot d\theta \cdot dr_1 \cdot dr_2 \quad (\text{II.35})$$

La pression acoustique correspondante s'exprime par :  $p_2(r, z, t) = \rho_0 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$

$$\text{Soit : } p_2(r, z) = -2 \cdot j \cdot \rho_0 \cdot \omega \cdot \phi_2(r, z) = -2 \cdot j \cdot \rho_0 \cdot \omega \cdot q_2(r, z) \cdot e^{j \cdot (2k + j\alpha_2) \cdot z} \quad (\text{II.36})$$

A l'aide de fonctions de Green, Ingenito et Williams [21] ont donné une bonne approximation de la solution de l'équation (II.32) sous une forme plus compacte en fonction

du fondamental:

$$\phi_2(r, z) = \frac{-\beta.k^2}{4.c_0} \int_0^z e^{j.k.\psi} \left[ \phi_1(r, z - \frac{\psi}{2}) \right]^2 d\psi \quad (II.37)$$

Sur la base d'une expression analogue pour la variation de densité ( $\rho'$ ) en milieu dissipatif établie par Kunitsyn et Rudenko [26], on peut modifier (II.37) pour ce cas :

$$\phi_2(r, z) = \frac{-\beta.k^2}{4.c_0} \int_0^z e^{j.k.\psi} . e^{-\alpha_2.\psi} \left[ \phi_1(r, z - \frac{\psi}{2}) \right]^2 . e^{-2.\alpha_1.(z-\psi)} d\psi \quad (II.38)$$

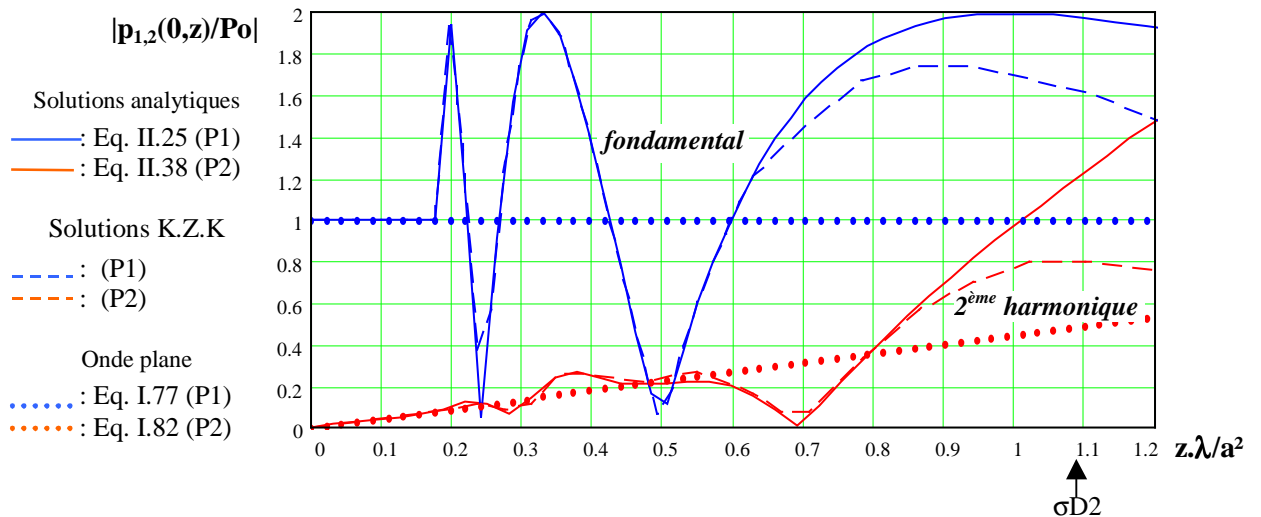
Le terme  $e^{-\alpha_2.\psi}$  traduit l'atténuation du second harmonique et  $e^{-2.\alpha_1.(z-\psi)}$  représente la correction à apporter pour l'atténuation du fondamental. (la pression s'exprime avec (II.36)).

### II.2.5.3 Représentation du champ acoustique:

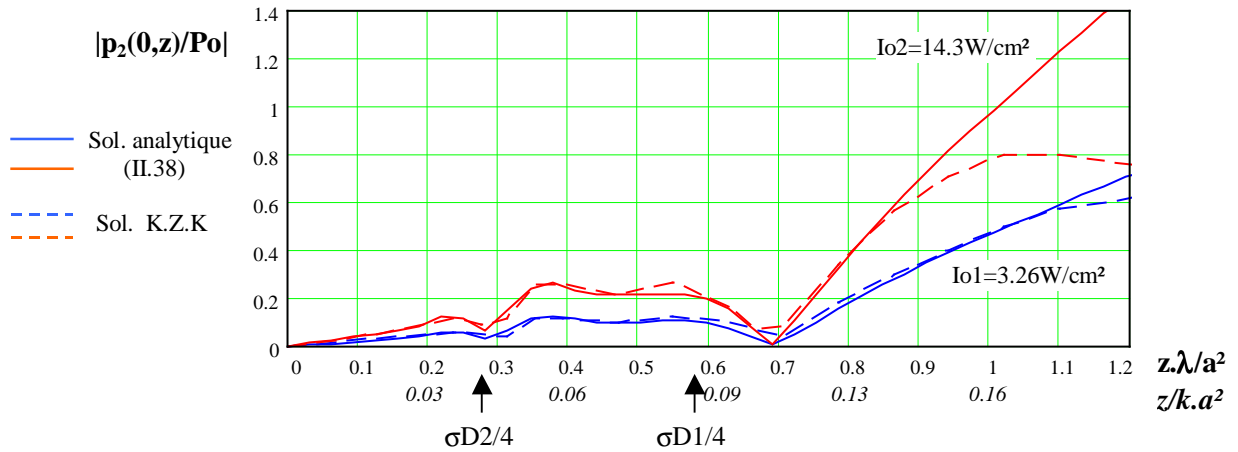
Nous choisissons de représenter le champ acoustique en milieu dissipatif avec la solution (II.38-36), plus simple à évaluer que (II.35). Nous prendrons pour le fondamental  $\phi_1(r, z)$  la solution de l'intégrale de King (II.10).

Pour visualiser le domaine de validité de cette solution analytique (II.38), nous la comparons avec les résultats de la résolution numérique de l'équation K.Z.K (I.32) effectués par Aanonsen *et al.* [20] pour le second harmonique à  $I_0 = 3.26 \text{ W/cm}^2$  et  $14.3 \text{ W/cm}^2$  dans l'eau ( $c_0 = 1503 \text{ m/s}$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha_0 = 0,25 \cdot 10^{-13} \text{ Np.m}^{-1}.\text{Hz}^{-2}$ ) pour  $a = 3.81 \text{ cm}$  et  $f = 470 \text{ kHz}$ . Ces simulations sont présentées *figures II.6.a, b* pour le champ acoustique dans la direction axiale, sur la *figure II.6.b* on représente également le fondamental en correspondance.

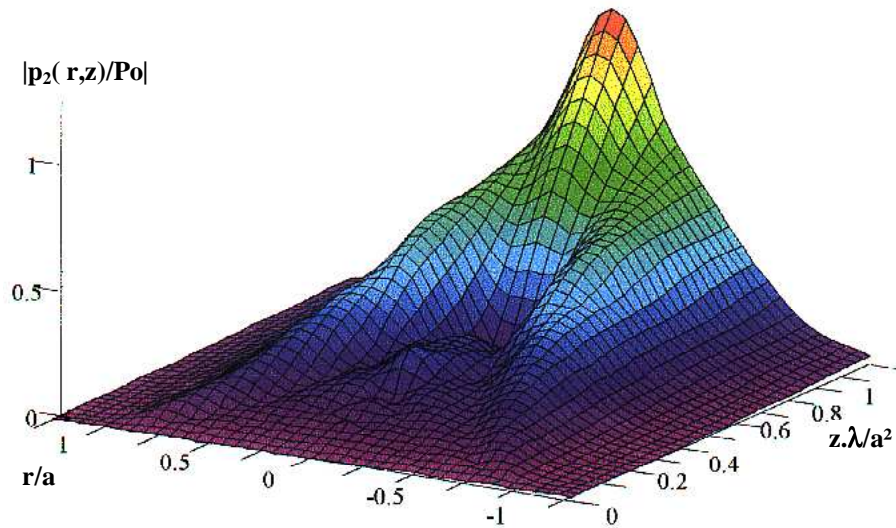
Dans le plan  $(oz, or)$  le champ acoustique associé au second harmonique est calculé dans les mêmes conditions que précédemment pour  $I_0 = 14.3 \text{ W/cm}^2$  (*figure II.6.c*).



**Fig II.6.a:** Fondamental et second harmonique. Comparaison K.Z.K et solutions analytiques (eau,  $ka = 75$ ).



**Fig II.6.b:** *Second harmonique. Comparaison K.Z.K et solutions analytiques pour différentes intensités acoustiques (eau,  $ka = 75$ ).*



**Fig II.6.c:** *Champ acoustique associé au second harmonique, solution analytique (II.38) (eau,  $ka = 75, I_o = 14.3 \text{ W/cm}^2$ ).*

On peut conclure que tant que la génération d'harmonique n'engendre pas de décroissance appréciable du fondamental, les solutions analytiques (II.37-38) sont une bonne approximation de la "solution exacte" de l'équation K.Z.K. Elles ne sont donc valides que dans le champ proche, et plus exactement pour les faibles valeurs de  $z/(k.a^2)$ . Toutefois pour une faible valeur de  $I_o$  ( $\sim 0.027 \text{ W/cm}^2$ ) Moffett M. B. [27] a constaté la bonne concordance des valeurs expérimentales  $|p_2(z)|$  avec la solution d'Ingenito et Williams jusqu'à  $z.\lambda/a^2 \approx 25$ .

Comme nous l'avons déjà précisé en introduction, la mesure des composantes harmoniques de l'onde de pression s'effectuera à l'aide d'un transducteur placé suivant l'axe  $(o,z)$  et assurant la conversion : *pression*  $\rightarrow$  *tension*. Si la surface de réception est très petite (hydrophone) le champ détecté sera voisin du champ réel (*figures II.3,4,5,6*) et les mesures dans le champ proche seront étroitement liées à la position du récepteur.

Ainsi, pour un système de mesure fixe ( $a, f$  et  $z_{\text{hydrophone}}$  constants), les variations d'amplitude dans le champ proche seront liées à la nature du milieu ( $\lambda=c_{\text{milieu}}/f$ ) et il faut tenir compte des

expressions compliquées (II.35) ou (II.38) pour déterminer le paramètre de non linéarité  $\beta = 1 + B/2.A$ .

Pour minimiser l'influence de ces fluctuations et se rapprocher de l'hypothèse théorique d'une onde plane, il convient d'utiliser un récepteur de surface plus grande. Puisque, comme le montre la **figure II.5.b**, la quasi totalité de l'énergie rayonnée dans le champ proche est confinée dans un cylindre de même diamètre que la source, on utilise généralement un récepteur de même surface que l'émetteur. Ainsi, les composantes harmoniques de la pression captée par le récepteur seront voisines de celles calculées par les relations (I.77) et (I.82) établies dans le cas de la propagation d'une onde plane, et permettant une détermination simple du paramètre de non linéarité B/A. Ces relations sont visualisées sur la **figure II.6.a** et nous rappelons qu'elles sont valides pour  $0 < z < \sim 0.25.l_D$ .

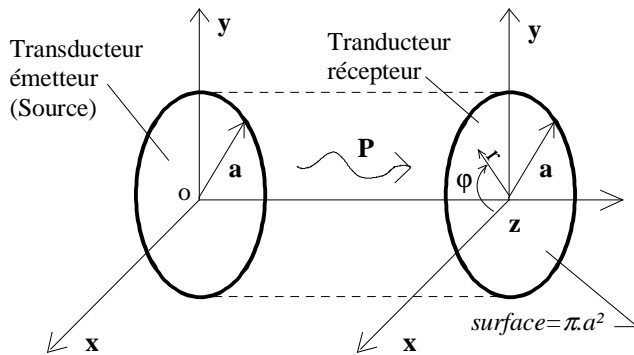
Pour une plus grande précision de la mesure il faut tenir compte de la diffraction engendrée par la source en déterminant la pression réellement captée. La tension générée par le récepteur étant proportionnelle à la pression moyenne sur sa surface, il faut maintenant établir l'expression de cette dernière.

### II.3 VARIATION DE LA PRESSION MOYENNE SUIVANT L'AXE (OZ)

#### II.3.4 PRESSION MOYENNE EXERCÉE PAR LE FONDAMENTAL

Différents auteurs [6,21,28,29,30] ont évalué la variation de la pression moyenne reçue par un transducteur de surface circulaire identique à celle de la source et placé dans l'axe de cette dernière (fig II.7).

##### II.3.4.1 Potentiel moyen du fondamental :



**Fig II.7:** Configuration géométrique.

Le potentiel moyen des vitesses sur la surface  $\pi.a^2$  du récepteur placé à une distance  $z$  de la source, vaut :

$$\langle \phi_1(z) \rangle = \frac{\int_S \phi_1(r,z).dS}{\pi.a^2} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a \phi_1(r,z).r.dr.d\varphi}{\pi.a^2}$$

$$\text{soit : } \langle \phi_1(z) \rangle = \frac{2. \int_0^a \phi_1(r,z).r.dr}{a^2} \quad (\text{II.39})$$

Williams A.O [28] a évalué le potentiel moyen à partir de l'expression établie par King (II.9) pour  $\phi_1(r,z)$ . Il obtient :

$$\langle \phi_1(z) \rangle = \frac{j.U_0}{k} . e^{j.k.z} - \frac{j.4.U_0}{k.\pi} \int_0^{\pi/2} e^{j.k.[z^2 + 4.a^2 . \cos(\theta)^2]^{1/2}} . \sin(\theta)^2 . d\theta \quad (\text{II.40})$$

Le premier terme représente le potentiel des vitesses dans le cas d'une onde plane, donc le potentiel moyen sur la surface de réception :  $\phi_{10}(z) = \frac{j.U_0}{k} . e^{j.k.z} = \langle \phi_{10}(z) \rangle$  (II.41)

La relation (II.41) n'est valable dans un milieu non dissipatif (ou faiblement) que si l'on néglige la décroissance du fondamental engendrée par la génération des harmoniques. L'expression de Williams met ainsi en évidence la décroissance du potentiel moyen par

rapport à une onde plane théorique, engendrée par les effets de diffraction du système Emetteur-Récepteur quantifiés par le second terme de la relation (II.40)<sup>13</sup>.

Pour  $z > a$  R. Bass [6] a donné une très bonne approximation de la solution (II.40)<sup>14</sup>, en terme de potentiel des vitesses on obtient :

$$\langle \phi_1(z) \rangle \cong \frac{j.U_0}{k} . e^{j.k.z} \cdot \left[ \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\xi(z)^2}{2.(k.a)^2} \right) \cdot (J_0(\xi(z)) + j.J_1(\xi(z))) \cdot e^{-j.\xi(z)} \right\} - \left\{ \frac{\xi(z)^2}{(k.a)^2} \cdot \frac{J_1(\xi(z))}{\xi(z)} \cdot e^{-j.\xi(z)} \right\} \right]$$

$$\text{Avec : } \xi(z) = \frac{k}{2} \cdot \left( \sqrt{z^2 + 4.a^2} - z \right) \quad (\text{II.42})$$

### Simplifications de la solution de Bass

Pour  $z > 2.a$ , et en limitant au 1<sup>er</sup> ordre le développement limité de  $\sqrt{\quad}$ , on peut simplifier la variable  $\xi(z)$  sous la forme<sup>15</sup> :  $\xi(z) \approx \frac{k.a^2}{z}$

De plus, si  $k.z \gg 1$ , ce qui correspond à la condition pratiquement toujours vérifiée  $k.a \gg 1$ , le second terme  $\{ \}$  de la solution de Bass est négligeable. On obtient ainsi une bonne approximation du potentiel moyen sous la forme :

$$\langle \phi_1(z) \rangle \cong \frac{j.U_0}{k} . e^{j.k.z} \cdot \left[ 1 - e^{-j.\frac{k.a^2}{z}} \cdot \left[ J_0\left(\frac{k.a^2}{z}\right) + j.J_1\left(\frac{k.a^2}{z}\right) \right] \right] \quad (\text{II.43})$$

Pour les grandes valeurs de  $k.a$ , plus exactement  $k.a^2/z$  grand, cette expression peut être encore simplifiée en utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel [32].

$$\text{On obtient : } \langle \phi_1(z) \rangle \cong \frac{j.U_0}{k} . e^{j.k.z} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2.z}{\pi.k.a^2} \right)^{1/2} \cdot e^{-j.\pi/4} \right] \quad (\text{II.44})$$

En réunissant les conditions précédentes, cette solution est valide pour :  $2 < z/a \ll k.a$

Sous ces conditions, nous donnons également une autre alternative de simplification de la solution de Bass, qui consiste à négliger le second terme  $\{ \}$  et utiliser les développements asymptotiques des fonctions de Bessel. Soit :

$$\langle \phi_1(z) \rangle \cong \frac{j.U_0}{k} . e^{j.k.z} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\xi(z)^2}{2.(k.a)^2} \right) \cdot \left( \frac{2}{\pi.\xi(z)} \right)^{1/2} \cdot e^{-j.\frac{\pi}{4}} \right] \quad (\text{II.45})$$

Nous donnons cette expression car, comme nous le verrons plus loin, elle est exploitée par Coob [33] dans le potentiel moyen du second harmonique utilisé pour la mesure du paramètre B/A (§ II.3.3.4).

### II.3.4.2 Expression de la pression moyenne

#### Cas non dissipatif :

La pression moyenne correspondante aux différents potentiels moyens exprimés précédemment, s'exprime à l'aide de (II.6) :  $\langle p_1(z) \rangle = -j.p_0.\omega.\langle \phi_1(z) \rangle \quad (\text{II.46})$

<sup>13</sup> Voir l'interprétation de l'expression (II.11), § II.2.1.2.

<sup>14</sup> Corrigée par Williams [29].

<sup>15</sup> L'erreur apportée sur (II.42) est inférieure à 1% pour  $z > 2.a$ .

**Cas dissipatif :**

A partir de l'expression (II.29) du potentiel des vitesses:

$$\phi_1(r, z)_{\text{dissipatif}} = \phi_1(r, z)_{\text{non dissipatif}} \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z}$$

et on peut écrire :  $\langle p_1(z) \rangle = \langle p_1(z) \rangle_{\text{non dissipatif}} \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z}$  **(II.47)**

où les phénomènes de diffraction et d'atténuation sont indépendants (voir note § II.2.1.3).

**II.3.5 FONCTION DE CORRECTION DE LA DIFFRACTION POUR LE FONDAMENTAL , D<sub>1</sub>(z) :**

Si l'onde rayonnée par la source (fig II.7) était plane, le module du potentiel moyen capté par la surface de réception (eq II.41) serait constant quelle que soit la position z dans un milieu non dissipatif. En fait, l'onde n'est pas plane et on observe une décroissance du potentiel moyen (eq II.40) . La fonction de correction de la diffraction D<sub>1</sub>(z) permet d'adapter mathématiquement l'onde plane théorique à une situation réelle.

En conséquence :  $\langle \phi_1(z) \rangle = D_1(z) \cdot \langle \phi_{10}(z) \rangle$  et  $D_1(z) = \frac{\langle \phi_1(z) \rangle}{\langle \phi_{10}(z) \rangle}$  **(II.48)**

Cette fonction vaut 1 si l'onde est plane et il s'exprime également en terme de pression acoustique moyenne :  $D_1(z) = \frac{\langle p_1(z) \rangle}{\langle p_{10}(z) \rangle}$  avec  $p_{10}(z) = P_0 \cdot e^{j \cdot k \cdot z} = \langle p_{10}(z) \rangle$  **(II.49)**

A partir des solutions précédentes (II.40-42-43-44-45) pour le potentiel moyen on définit donc différentes expressions pour la fonction de correction de la diffraction.

Son expression exacte est obtenue avec la solution de Williams (II.40) :

$$D_1(z) = 1 - \frac{4}{\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot z} \int_0^{\pi/2} e^{j \cdot k \cdot [z^2 + 4 \cdot a^2 \cdot \cos(\theta)^2]^{1/2}} \cdot \sin(\theta)^2 \cdot d\theta$$
 **(II.50)**

Avec l'approximation (II.43) de la solution de Bass établie précédemment, nous obtenons :

$$D_1(z) \cong 1 - e^{-j \cdot \frac{k \cdot a^2}{z}} \cdot \left[ J_0 \left( \frac{k \cdot a^2}{z} \right) + j \cdot J_1 \left( \frac{k \cdot a^2}{z} \right) \right]$$
 **(II.51)**

D'ailleurs Rogers et Van Buren [30] ont obtenu une expression identique en appliquant l'approximation de Fresnel (note 2) sur l'intégrale de Rayleigh (II.4) du potentiel des vitesses. Elle est liée aux conditions : k.a >> 1 et z/a > 2.

Cette fonction correspond à la limite de l'expression donnée par Williams (II.50) lorsque k.a → ∞.

L'écart entre |D<sub>1</sub>(z)| eqII.51 et |D<sub>1</sub>(z)| eqII.50 est inférieur à ±0,0015 pour k.a = 200 et inférieur à ±0,006 pour k.a = 60.

D'autres expressions de cette fonction sont obtenues avec les solutions (II.42-44-45) du potentiel moyen des vitesses particulières.

En milieu dissipatif, avec (II.47-49), le module de la pression moyenne s'écrit sous la forme :

$$|\langle p_1(z) \rangle| = P_0 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z} \cdot |D_1(z)|$$
 **(II.52)**

On retrouve l'expression asymptotique d'une onde plane en milieu dissipatif (I.77) corrigée par la fonction D<sub>1</sub>(z).

D'une façon générale cette fonction de correction peut se mettre sous la forme :

$$D_1(z) = 1 - g(z) \quad (\text{II.53})$$

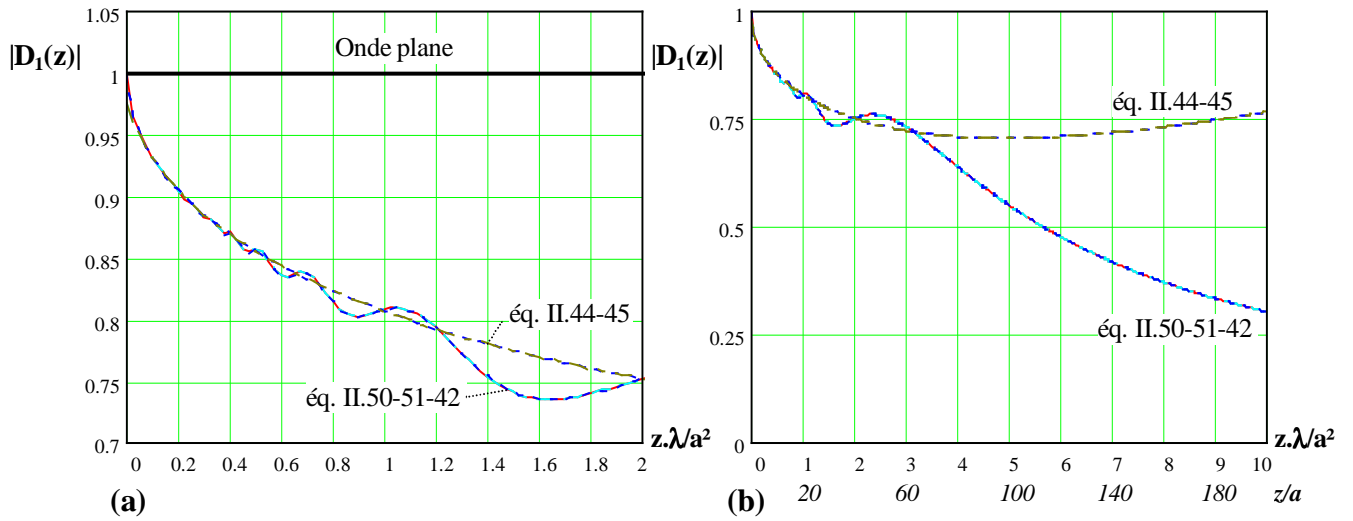
où nous définissons  $g(z)$  comme la fonction de diffraction, liée aux paramètres de source  $a$  et  $k$ , et possédant la propriété  $\lim_{ka \rightarrow \infty} [g(z)] = 0$  ( $\Rightarrow$  onde plane).

**Représentation de  $D_1(z)$  :**

Le module de  $D_1(z)$  vaut :  $|D_1(z)| = \frac{|\langle P_1(z) \rangle|}{|\langle P_{10}(z) \rangle|} = \frac{|\langle P_1(z) \rangle|}{P_0}$  et correspond à la variation

relative de la pression moyenne sur la surface du récepteur.

Nous présentons **figures II.8.a,b** les différentes expressions pour la fonction de correction de la diffraction  $|D_1(z)|$ , dont la formulation exacte est donnée par Williams (éq. II.50), avec comme critère : eau,  $f = 3 \text{ MHz}$ ,  $a = 1 \text{ cm} \Rightarrow ka = 125$ .



**Fig. II.8 :** Coefficients de correction de la diffraction  $|D_1(z)| = |\langle p_1(z) \rangle| / P_0$

Les expressions  $|D_1(z)|_{\text{éq. II.51}}$  et  $|D_1(z)|_{\text{avec éq. II.42}}$  sont pratiquement équivalentes à la solution exacte (II.50), excepté dans le voisinage immédiat du transducteur.

Les expressions asymptotiques  $|D_1(z)|_{\text{avec éq. II.44}}$  et  $|D_1(z)|_{\text{avec éq. II.45}}$  apparaissent équivalentes et sont des bonnes approximations de la solution exacte dans le champ proche, plus exactement pour  $z/a \ll ka$  c'est à dire  $z/a < \sim 10$  dans nos conditions de simulation. Au delà elles divergent nettement comme le montre la **figure II.8.b**.

Ces courbes mettent également en évidence la décroissance de la pression moyenne engendrée par la diffraction par rapport à une onde plane dans un milieu non dissipatif.

### II.3.6 PRESSION MOYENNE EXERCEE PAR LE SECOND HARMONIQUE

#### II.3.6.1 Potentiel moyen du second harmonique

Le potentiel moyen du second harmonique sur une surface de réception ( $S = \pi.a^2$ ) s'exprime de la même façon que pour le fondamental (II.39, figure II.7). Avec (II.37) on

obtient pour le cas non dissipatif : 
$$\langle \phi_2(z) \rangle = -\frac{\beta.k^2}{4.co} \cdot \int_0^z e^{j.k.\psi} \cdot \left\langle \phi_1 \left( r, z - \frac{\psi}{2} \right)^2 \right\rangle \cdot d\psi \quad (\text{II.54})$$

et pour le cas dissipatif, conformément à (II.38) :



$$\langle \phi_2(z) \rangle = -\frac{\beta.k^2}{4.co} \int_0^z e^{j.k.\psi} . e^{-\alpha_2.\psi} . \left\langle \phi_1 \left( r, z - \frac{\psi}{2} \right)^2 \right\rangle . e^{-2.\alpha_1.(z-\psi)} . d\psi \quad (\text{II.55})$$

Nous la qualifierons de solution analytique de référence pour le potentiel moyen du second harmonique en milieu dissipatif, car les expressions que nous exploiterons par la suite seront des approximations de cette solution.

En milieu non dissipatif, Ingenito et Williams [21] donnent une bonne approximation de la

$$\text{solution (II.54) sous la forme: } \langle \phi_2(z) \rangle = -\frac{\beta.k^2}{4.co} \int_0^z e^{j.k.\psi} . \left[ \left\langle \phi_1 \left( z - \frac{\psi}{2} \right) \right\rangle \right]^2 . d\psi \quad (\text{II.56})$$

La même démarche pour le cas dissipatif donne :

$$\langle \phi_2(z) \rangle = -\frac{\beta.k^2}{4.co} \int_0^z e^{j.k.\psi} . e^{-\alpha_2.\psi} . \left[ \left\langle \phi_1 \left( z - \frac{\psi}{2} \right) \right\rangle \right]^2 . e^{-2.\alpha_1.(z-\psi)} . d\psi \quad (\text{II.57})$$

Ainsi, le potentiel moyen du second harmonique  $\langle \phi_2(z) \rangle$  peut se calculer à partir de celui du fondamental  $\langle \phi_1(z) \rangle$  déterminé précédemment (§ II.3.1.1).

#### **Mise en forme de la solution $\langle \phi_2(z) \rangle$ :**

Avec la formulation générale de  $D_1(z)$  ( cf. éq. II.53 et II.48) on peut écrire  $\langle \phi_1(z) \rangle^2$  sous la forme :

$$\langle \phi_1(z) \rangle^2 = \langle \phi_{1o}(z) \rangle^2 . \left[ 1 - \left[ 2.g(z) - g(z)^2 \right] \right] = \langle \phi_{1o}(z) \rangle^2 . [1 - f(z)] \quad (\text{II.58})$$

L'introduction de cette fonction  $f(z)$  nous permet de distinguer les effets de la diffraction dans l'expression du potentiel moyen du second harmonique. En effet, après simplifications, l'expression (II.55) devient :

$$\langle \phi_2(z) \rangle = \frac{\beta.U_0^2}{4.co} . z . e^{j.2.k.z} - \frac{\beta.U_0^2}{4.co} . e^{j.2.k.z} . \int_0^z f \left( z - \frac{\psi}{2} \right) . d\psi \quad (\text{II.59})$$

Le premier terme représente le potentiel des vitesses du second harmonique dans le cas d'une onde plane, donc le potentiel moyen sur la surface de réception :

$$\phi_{2o}(z) = \frac{\beta.U_0^2}{4.co} . z . e^{j.2.k.z} = \langle \phi_{2o}(z) \rangle \quad (\text{II.60})$$

Cette expression, exprimée en terme de pression, correspond à la solution asymptotique (I.74) établie au chapitre I dans le cas d'une onde plane en milieu non dissipatif (ou faiblement). Elle n'est donc valable que dans le cas de l'approximation quasi linéaire, soit pour  $0 < z < \sim l_D/4$ .

L'expression de  $\langle \phi_2(z) \rangle$  (II.59) met donc en évidence la décroissance du potentiel moyen engendrée par les effets de la diffraction (*second terme*).

#### **II.3.6.2 Expression de la pression moyenne du second harmonique**

$$\text{Selon (II.36) elle s'exprime par : } \langle p_2(z) \rangle = -2.j.\rho.o.\omega \langle \phi_2(z) \rangle \quad (\text{II.61})$$

Et nous pouvons lui donner une forme compacte à l'aide de la fonction de correction de la diffraction pour le fondamental  $D_1(z)$  (cf. éq. II.58-48).

**Cas non dissipatif :**

On obtient :

$$\langle p_2(z) \rangle = K.z.Po^2 \left[ 1 - \frac{1}{z} \cdot \int_0^z f\left(z - \frac{\Psi}{2}\right).d\Psi \right] \cdot \frac{e^{j.2.k.z}}{j} \Rightarrow \left| \langle p_2(z) \rangle \right| = K.Po^2 \cdot \left| \int_0^z D_1^2\left(z - \frac{\Psi}{2}\right).d\Psi \right| \quad (\text{II.62})$$

où  $K = \frac{\beta.\omega}{2.\rho_0.co^3}$  est le coefficient déjà défini au chapitre I ( éq I.74).

Avec la première équation on retrouve la relation asymptotique (I.74) dans le cas d'une onde plane en milieu non dissipatif (1<sup>er</sup> terme :  $\langle p_{20}(z) \rangle = K.z.Po^2$ ) avec une correction due à la diffraction (2<sup>ème</sup> terme).

**Cas dissipatif :**

On utilise dans ce cas la solution (II.57) prenant en compte l'atténuation, et en calculant l'intégrale du premier terme, on obtient le module de la pression moyenne :

$$\left| \langle p_2(z) \rangle \right| = \left| K.Po^2 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha_2.z} - e^{-2.\alpha_1.z}}{2.\alpha_1 - \alpha_2} \right) - K.Po^2 \cdot e^{-2.\alpha_1.z} \cdot \int_0^z e^{-(\alpha_2 - 2.\alpha_1).\Psi} \cdot f\left(z - \frac{\Psi}{2}\right).d\Psi \right|$$

que l'on peut écrire sous la forme :  $\left| \langle p_2(z) \rangle \right| = K.Po^2 \cdot |I_1(z) - I_2(z)| \quad (\text{II.63})$

$I_1(z)$  prend en compte l'atténuation et  $I_2(z)$  la diffraction.

Le premier terme (  $K.Po^2.I_1(z)$  ) correspond à l'expression (I.80) établie au chapitre I dans le cas d'une onde plane se propageant dans un milieu dissipatif ( voir l'approximation (I.82) ).

Avec la fonction  $|D_1(z)|$  on obtient la forme équivalente, mais plus compacte :

$$\left| \langle p_2(z) \rangle \right| = \left| K.Po^2 \cdot e^{-2.\alpha_1.z} \cdot \int_0^z e^{(2.\alpha_1 - \alpha_2).\Psi} \cdot D_1\left(z - \frac{\Psi}{2}\right)^2 \cdot d\Psi \right| \quad (\text{II.64})$$

Cette équation (II.63 ou 64) est la forme la plus proche de la solution analytique de référence (II.55), toujours dans le cadre de l'approximation quasi linéaire de l'équation de propagation (II.28), c'est à dire que l'on néglige les composantes harmoniques d'ordre supérieur à 2 et que la génération du second harmonique n'engendre pas de décroissance appréciable du fondamental par transfert d'énergie.

**II.3.6.3 Fonction de correction de la diffraction pour le second harmonique,  $D_2(z)$  :**

Comme pour le fondamental, il s'exprime sous la forme :

$$D_2(z) = \frac{\langle \phi_2(z) \rangle}{\langle \phi_{20}(z) \rangle} = \frac{\langle p_2(z) \rangle}{\langle p_{20}(z) \rangle} \text{ avec } \langle p_{20}(z) \rangle = K.z.Po^2 \text{ (cf. II.60)} \quad (\text{II.65})$$

**Cas non dissipatif :**

A partir de la solution (II.62) on déduit :

$$D_2(z) = 1 - \frac{1}{z} \cdot \int_0^z f\left(z - \frac{\Psi}{2}\right).d\Psi = \frac{1}{z} \cdot \int_0^z D_1\left(z - \frac{\Psi}{2}\right)^2 \cdot d\Psi \quad (\text{II.66})$$

et le module de la pression moyenne s'exprime par :

$$\left| \langle p_2(z) \rangle \right| = \left| \langle p_{20}(z) \rangle \right| \cdot |D_2(z)| = K.Po^2 \cdot z \cdot |D_2(z)| \quad (\text{II.67})$$

Cette expression correspond à celle établie dans le cas d'une onde plane en milieu non dissipatif (chap. I, §I.6.1) corrigée par la fonction  $D_2(z)$ .

**Cas dissipatif :**

La solution (II.63) peut s'écrire sous la forme :

$$|\langle p_2(z) \rangle| = |\langle p_{20}(z) \rangle| |D_2(z)| = K.Po^2 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha_2 z} - e^{-2\alpha_1 z}}{2\alpha_1 - \alpha_2} \right) |D_2'(z)| \quad (\text{II.68})$$

avec :

$$|D_2'(z)| = \left| 1 - \frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{e^{(2\alpha_1 - \alpha_2)z} - 1} \int_0^z e^{(2\alpha_1 - \alpha_2)\psi} \cdot f\left(z - \frac{\psi}{2}\right) d\psi \right| \quad (\text{II.69})$$

En fait, cette écriture n'a d'intérêt par rapport à l'expression générale (II.63 ou 64) que si la correction de la diffraction  $D_2(z)$  est indépendante de l'atténuation.

Si on considère que  $(\alpha_2 - 2\alpha_1)z$  est faible, le terme devant l'intégrale tend vers  $1/z$  et l'exponentielle à l'intérieur tend vers 1. On peut par conséquent remplacer  $D_2'(z)$  par  $D_2(z)$  :

$$D_2'(z) \cong D_2(z) \quad (\text{II.70})$$

Dans ce cas, la simplification (I.81, § I.6.2.2) sur  $\Pi(z)$  peut s'appliquer, et on obtient :

$$|\langle p_2(z) \rangle| = |\langle p_{20}(z) \rangle| |D_2(z)| = K.Po^2 \cdot z \cdot e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right)z} |D_2(z)| \quad (\text{II.71})$$

On retrouve la relation asymptotique (I.82), établie au chapitre I (§ I.6.2.2) dans le cas d'une onde plane en milieu dissipatif, corrigée par  $D_2(z)$ .

La formulation de  $|\langle p_2(z) \rangle|$  avec la fonction de correction est donc une approximation de l'expression générale (II.63 ou 64).

Une expression intermédiaire, plus précise, est la solution (II.68) en remplaçant simplement  $D_2'(z)$  par son approximation  $D_2(z)$ .

En résumé, pour la pression moyenne exercée par le second harmonique, on dispose de la solution analytique (II.63 ou 64) et de ses approximations (II.68-70) et (II.71) en faisant intervenir une fonction de correction de la diffraction  $D_2(z)$ .

Avant de comparer ces solutions avec la solution de référence plus précise (II.55-61), nous montrons que l'on peut obtenir des solutions finales suffisamment précises en simplifiant la fonction  $D_2(z)$ .

**II.3.6.4 Simplification de la fonction  $D_2(z)$ - Expressions simplifiées de  $|\langle p_2(z) \rangle|$**

Nous avons montré précédemment (éq. II.66) que  $D_2(z)$  est fonction de  $D_1(z)^2$ , qui peut être simplifiée sous certaines conditions.

Puisque  $D_1(z)^2 = 1 - 2g(z) + g(z)^2$  et  $\lim_{ka \rightarrow \infty} [g(z)] = 0$  (cf. éq. II.53) nous pouvons

négliger le terme  $g(z)^2$  pour  $ka$  grand. Ainsi les solutions  $\langle \phi_1(z) \rangle$  (II.44) et (II.45) établies au §II.3.1.1, et valides pour  $2 < z/a \ll ka$ , conduisent respectivement aux expressions simplifiées :

$$D_1(z)^2 \cong 1 - 2 \cdot \left( \frac{2z}{\pi \cdot ka^2} \right)^{1/2} \cdot e^{-j\pi/4} \quad (\text{II.72})$$

$$D_1(z)^2 \cong 1 - 2 \cdot \left( 1 - \frac{\xi(z)^2}{2 \cdot (k \cdot a)^2} \right) \cdot \left( \frac{2}{\pi \cdot \xi(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad (\text{II.73})$$

Cette dernière expression a été utilisée par Coob [45] pour calculer la pression moyenne du second harmonique à l'aide d'une relation équivalente à notre solution (II.64).

Les mesures qu'il a réalisées à 3MHz dans l'eau ( $k a \sim 78$ ) et le glycérol ( $k a \sim 60$ ) pour  $2 < z/a < 14$  sont en très bonne concordance avec ses prédictions théoriques correspondant à la solution (II.64 avec II.73).

De ses expérimentations on peut étendre le domaine de validité à  $2 < z/a < k \cdot a / 5$ <sup>16</sup>.

En conséquence, comme nous avons montré que les fonctions de diffraction obtenues avec les potentiels moyens (II.44) et (II.45) sont pratiquement équivalentes (cf. figures II.8), nous pouvons exploiter l'expression plus simple (II.72) avec une bonne précision sous la condition  $2 < z/a \ll k \cdot a$ .

Dans ce cas l'intégrale (II.66) peut être calculée, et on obtient :

$$D_2(z) \cong 1 - C \cdot \sqrt{\frac{z}{k \cdot a^2}} \cdot e^{-j \cdot \pi / 4} \quad \text{avec} \quad C = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot (2\sqrt{2} - 1) \approx 1.375 \quad (\text{II.74})$$

Finalement, avec les relations précédentes (II.71-68), nous pouvons établir deux expressions simples, mais précises, permettant le calcul de la pression moyenne exercée par le second harmonique sur un récepteur de mêmes dimensions que la source :

En milieu moyennement dissipatif, et pour la plupart des milieux biologiques ( $q \approx 1$ ) :

$$\langle |p_2(z)| \rangle = K \cdot P_0^2 \cdot z \cdot e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) \cdot z} \cdot \left| 1 - C \cdot \sqrt{\frac{z}{k \cdot a^2}} \cdot e^{-j \cdot \pi / 4} \right| \quad (\text{II.75})$$

En milieu très dissipatif, et quelle que soit l'ampleur de l'atténuation :

$$\langle |p_2(z)| \rangle = K \cdot P_0^2 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha_2 \cdot z} - e^{-2 \cdot \alpha_1 \cdot z}}{2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2} \right) \cdot \left| 1 - C \cdot \sqrt{\frac{z}{k \cdot a^2}} \cdot e^{-j \cdot \pi / 4} \right| \quad (\text{II.76})$$

Comme nous l'avons déjà précisé au chapitre I (éq. I.81), la simplification sur l'atténuation transformant la relation (II.76) en (II.75) introduit une erreur inférieure à 1% si  $(\alpha_2 - 2 \cdot \alpha_1) \cdot z < 0.5$ . Et puisque l'atténuation de la plupart des milieux biologiques varie linéairement en fonction de la fréquence, c'est à dire que  $q \approx 1$  soit  $\alpha_2 \approx 2 \cdot \alpha_1$ , la condition précédente est pratiquement toujours vérifiée et on peut utiliser la relation (II.75) pour ces milieux, même si ils sont généralement très dissipatifs (cf tableau § III.4).

### II.3.6.5 Comparaison des différentes solutions pour la pression moyenne $\langle p_2(z) \rangle$

Nous simulons les différentes expressions de la pression moyenne relative  $\langle p_2(z) \rangle / P_0$  dans deux milieux extrêmes :

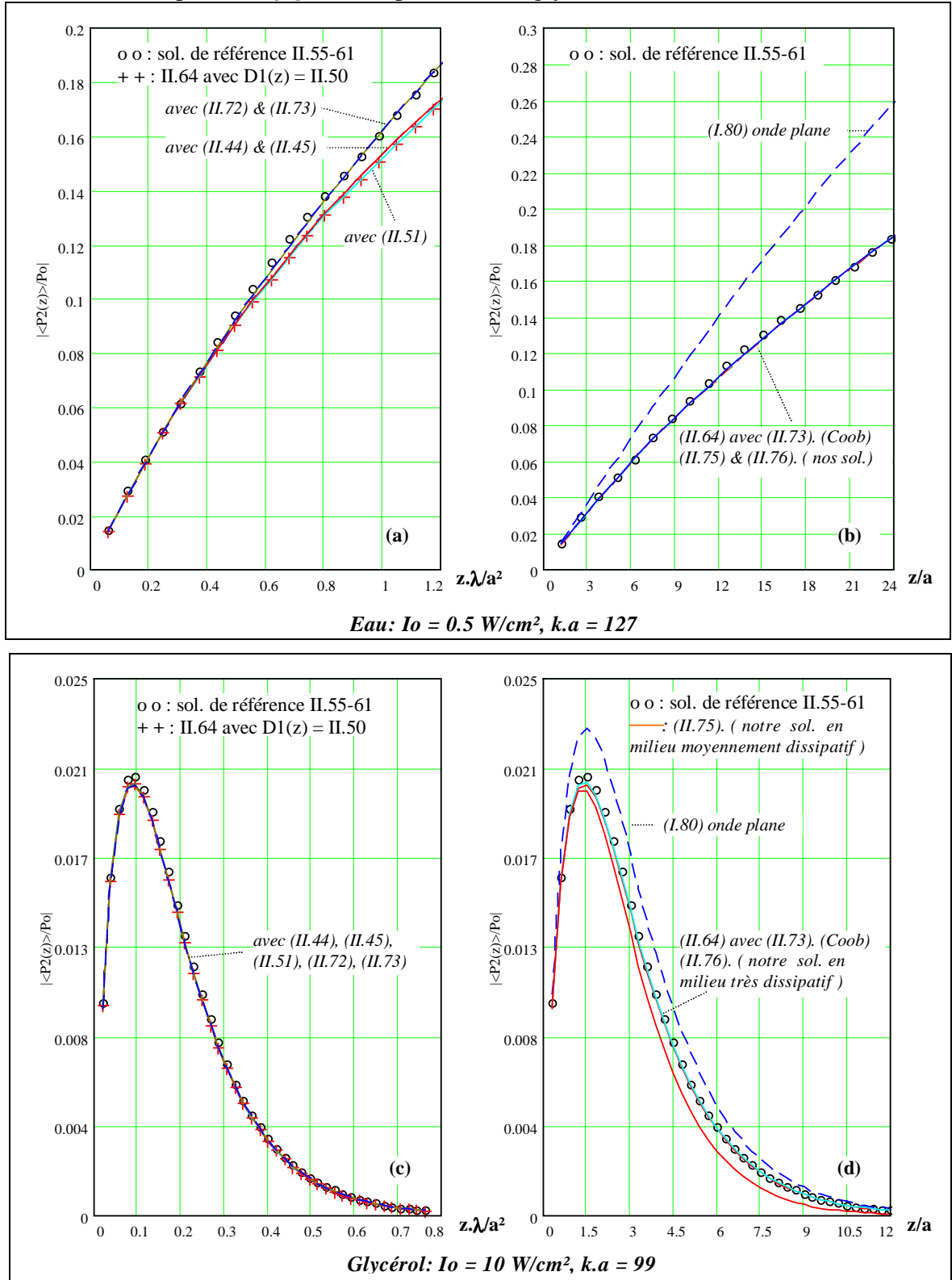
L'eau :  $c_0 = 1483 \text{ m/s}$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha_0 = 0.25 \cdot 10^{-13} \text{ Np} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-2}$ ,  $\alpha_2 = 4 \cdot \alpha_1$ ,  $B/A = 5.2$

Le glycérol :  $c_0 = 1909 \text{ m/s}$ ,  $\rho_0 = 1260 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha_0 = 26 \cdot 10^{-13} \text{ Np} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-2}$ ,  $\alpha_2 = 4 \cdot \alpha_1$ ,  $B/A = 9.4$

Les conditions sont :  $f = 3 \text{ MHz}$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $I_0 = 0.5 \text{ W/cm}^2$  pour l'eau et  $I_0 = 10 \text{ W/cm}^2$  pour le glycérol.

<sup>16</sup> La borne inférieure étant en fait limitée expérimentalement à l'apparition d'ondes stationnaires.

Les résultats sont présentés **figure II.9** pour l'eau le glycérol.



**Fig II.9:** Pression moyenne du second harmonique dans l'eau et le glycérol.  
**(a, c):** Les différents tracés, à l'exception de la solution de référence, correspondent à la solution (II.64) calculée avec les diverses expressions de la fonction  $D_1(z)$  (II.72,73,44,45,51).  
**(b, d):** Solution de Coob et nos solutions (II.75) et (II.76).

### Discussion des résultats de simulation

En milieu faiblement dissipatif (eau, **fig. II.9.a**) on observe une divergence entre la solution de référence (II.55-61) et son approximation (II.64) calculée avec la formulation exacte de  $D_1(z)$  (II.51). Cette divergence est par contre minime en milieu absorbant (**glycérol fig. II.9.c**).

On constate que l'application des simplifications (II.72-73) conduisent à des expressions pratiquement confondues avec la solution de référence. Et il en est de même avec nos solutions simplifiées (II.75-76) comme le montre la **figure II.9.b**<sup>17</sup>.

Les **figures II.9.b et II.9.d** confirment l'emploi de la solution (II.75) en milieu faiblement dissipatif (eau) et de la solution (II.76) en milieu très dissipatif (glycérol).

L'importance de la correction de diffraction  $D_2(z)$  est visualisée par la représentation de la solution (I.80) correspondant au cas simple d'une onde plane, c'est à dire pour  $D_2(z)=1$ .

En conclusion l'emploi de nos solutions (II.75-76) est parfaitement justifié car elles sont confondues avec la solution de Coob (II.62-73) vérifiée expérimentalement [33].

Rappelons que ces solutions, d'évaluation beaucoup plus aisées, ont été établies sous les conditions :  $2 < z/a \ll k.a$ .

Ce domaine de validité peut en fait être étendu à :  $2 < z/a < k.a/5$  (cf. § II.3.3.4).

## II.4 RAYON EFFECTIF D'UN TRANSDUCTEUR

Jusqu'à présent nous considérons un transducteur de rayon  $a$  avec une distribution uniforme de la vitesse  $U_0$  sur toute sa surface, ce qui ne correspond pas tout à fait à la réalité physique.

Pratiquement, pour pouvoir exploiter les relations précédentes, il faut considérer le rayon effectif  $a_{eff}$  du transducteur équivalent possédant une distribution uniforme de l'excitation  $U_0$  sur sa surface, et engendrant les mêmes effets acoustiques que le transducteur réel.

### Détermination du rayon effectif $a_{eff}$ [31]:

Dans le cas d'un transducteur idéal de rayon  $a$  et d'excitation uniforme  $P_0$ , la pression axiale relative s'exprimera à partir de la relation (II.25) en ne tenant pas compte de

l'atténuation :

$$\left| \frac{p_1(0, z)}{P_0} \right| = 2 \left| \sin \left[ \frac{k}{2} \cdot \left\{ (z^2 + a^2)^{1/2} - z \right\} \right] \right| \quad (\text{II.77})$$

La pression effectivement mesurée, à l'atténuation près, correspondra donc à cette relation en considérant un rayon  $a = a_{eff}$ .

Les maximums et les minimums de pression correspondent aux emplacements  $z_{maxi}$  et  $z_{mini}$

définis par :

$$\frac{k}{2} \cdot \left\{ \left( z_m^2 + a_{eff}^2 \right)^{1/2} - z_m \right\} = \frac{\pi}{2} \cdot m \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_m = z_{max i} & \text{pour } m = 1 + 2.n \\ z_m = z_{min i} & \text{pour } m = 2.n \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

<sup>17</sup> Les simplifications successives sur l'expression de la fonction de correction  $D_1(z)$  ont en quelque sorte compensé l'approximation initiale qui transformait la solution de référence (II.55) en la solution (II.57) dont sont issues nos expressions (II.75-76).

Soit

$$a_{\text{eff}} = \left( \left( \frac{\pi \cdot m}{k} \right)^2 + \frac{2 \cdot \pi}{k} \cdot m \cdot z_m \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\lambda^2 \cdot m^2}{4} + \lambda \cdot m \cdot z_m \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.78})$$

Le rayon effectif sera déterminé expérimentalement en effectuant la moyenne des  $a_{\text{eff}}$  obtenus avec la relation (II.78) pour différents extremums  $z_m$  détectés.

Pratiquement le rayon effectif est inférieur de 5 à 10 % du rayon réel du transducteur.

## II.5 CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre l'étude du champ acoustique produit par une source réelle générée par un transducteur plan de forme circulaire.

Dans un premier temps différentes solutions du champ acoustique rayonné par un piston ont été données.

L'exploitation des formulations mathématiques nous a permis d'établir deux expressions simples mais précises permettant le calcul de la pression moyenne exercée par le second harmonique sur un récepteur de mêmes dimensions que la source.

Pour cette configuration géométrique nous avons également donné des fonctions de correction de la diffraction, pour le fondamental et le second harmonique, permettant d'adapter le cas théorique d'une onde plane à une situation réelle.

Une série de simulations numériques valide les solutions simples et montre la concordance avec d'autres formulations exploitées dans la littérature et validées expérimentalement.

Ses solutions seront ensuite exploitées dans les chapitres IV et V pour déterminer le paramètre B/A, mais auparavant nous allons décrire les différentes méthodes utilisées dans la littérature pour mesurer ce paramètre.

### Bibliographie

22. BEYER R.T., LETCHER S.V. " Physical Ultrasonics ". Academic Press New York-London , 1969.
23. HARRIS G. R. "Review of transient field theory for a baffled planar piston" J.Acoust.Soc.Am.,Vol.70, N°1, pp. .10-20, 1981.
24. HUTCHINS D. A, HAYWARD G. "Radiated fields of ultrasonics transducers" in "Ultrasonic measurements methods" Physical acoustics, Vol XIX. Academic Press, Inc. pp. 1-80, 1990.
25. GREENSPAN M. " Piston radiator; Some extensions of the theorie" J.Acoust.Soc.Am.,Vol.65, N°3, pp. .608-621, 1979.
26. HARRIS G. R. " Transient field of a baffled planar piston having an arbitrary vibration amplitude distribution" J.Acoust.Soc.Am., Vol.70, N°1, pp. .186-204, 1981.
27. BASS R, " Diffraction effects in the ultrasonic field of a piston source " J.Acoust.Soc.Am., Vol.30, N°7, pp. 602-605, july 1958.
28. ZEMANECK J. " Beam behavior within the nearfield of a vibrating piston" J.Acoust.Soc.Am., Vol.49, N°1, pp. 181-191, 1971.
29. BEAVER W. L. "Sonic nearfields of a pulsed piston radiator " J.Acoust.Soc.Am., Vol.56, N°4, pp. 1043-1048, 1974.
30. NYBORG W. L., STEELE R. B. "Nearfield of a piston source of ultrasound in an absorbing medium " J.Acoust.Soc.Am., Vol.78, N°5, pp. 1882-1891, 1985,
31. HUTCHINS D. A, MAIR H. D., PUHACH P. A., OSEI A. J. " Continuous-wave pressure fields of ultrasonic transducer " J.Acoust.Soc.Am., Vol.80, N°1, pp. 1-12, 1986.
32. TJØTTA J. N, TJØTTA S. " An analytical model for the nearfield of a baffled piston transducer " J.Acoust.Soc.Am., Vol.68, N°1, pp. 334-339, july 1980.
33. KIM B. C., SAITO S. "Influence of inserted sample on second harmonic component in a finite-amplitude focused sound " J.Acoust.Soc.Apn. (E) 10, 3 pp. 143-151, 1989.
34. LUCAS B. G., MUIR T. G. "Field of a finite-amplitude focusing source " J.Acoust.Soc.Am., Vol.74, N°5, pp. 1522-1528, july 1983.
35. LUCAS B. G., MUIR T. G. " The field of a focusing source " J.Acoust.Soc.Am., Vol.72, N°4, pp. 1289-1296, july 1982.
36. HABAULT D. " Développements analytiques et méthodes d'approximations" Acoustique Générale ( coordonnateur; P.J.T FILIPP. I ), Les 6<sup>ème</sup> éditions de physique, pp. 203-235.



37. BERKTAY H.O., LANCASTER M.J. " An analytical expression for the nearfield of a circular piston radiator " *Journal of sound and vibration*, Vol. 137, N°2, pp. 319-325, 1990.
38. FAURE Ph., CATHIGNOL D. "Computation of the acoustic field of arbitrary plane or spherical transducer " *Ultrasonics Symposium*, pp. 987-990, 1994.
39. SAN EMETERIO J. L. " Diffraction impulse response of rectangular transducer " *J.Acoust.Soc.Am.*, Vol, 92, N°2, pp. 651-662, 1992.
40. TJØTTA J. N, TJØTTA S. "Nearfield and farfield of pulsed acoustic radiators" *J.Acoust.Soc.Am.*, Vol.71, N°4, pp. 824-834, 1982.
41. AANONSEN S.I., BARKVE T., TJØTTA J.N, TJØTTA S. " Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam ". *J,Acoust.Soc.Am.* Vol.75, N°3, pp.749-768, 1984.
42. INGENITO F., WILLIAMS A.O. " Calculation of second-harmonic generation in a piston beam". *J.Acoust.Soc.Am.* Vol.49, N°1 (part 2), pp. 319-328, 1971.
43. KUNITSYN V.E., RUDENKO O.V. " Second harmonic generation in the field of a piston radiator", *Sov. Phys. Acoust.* Vol.24, N°4, pp. 310-313, 1978.
44. BERNTSEN J., TJØTTA J. N, TJØTTA S. " Nearfield of a large acoustic transducer. Part IV: Second harmonic and sum frequency radiation" *J.Acoust.Soc.Am.*, Vol, 75, N°5, pp. 1383-1391, 1983.
45. KAMAKURA T., HASEGAWA M., KUMAMOTO Y. " Propagation of finite amplitude acoustic waves in Layered fluid media. Normal incidence on the layer " *J.Acoust.Soc.Jpn.* (E) 9, 2, pp. 89-96, 1988.
46. HEAPS H. S. " Waveform of finite amplitude derived from equations of hydrodynamics " *J.Acoust.Soc.Am.*, Vol.34, N°3, pp. 355-356, 1962.
47. KUNITSYN V.E., RUDENKO O.V. " Second harmonic generation in the field of a piston radiator", *Sov. Phys. Acoust.* Vol.24, N°4, pp. 310-313, 1978.
48. MOFFETT M. B. " Measurement of fundamental and second harmonic pressures in the field of a circular piston source " *J.Acoust.Soc.Am.*, Vol.65, N°2, pp. 318-323, 1979.
49. WILLIAMS A. O. " The piston source at high frequencies " *J.Acoust.Soc, Am.*, Vol.23, N°1, pp. 1-6, jan 1951.
50. WILLIAMS A. O, " Integrated signal on circular piston receiver centered in a piston beam " *J.Acoust.Soc.Am*, Vol.48, N°1, (part2), pp. 285-289, 1970.
51. ROGERS P. H, VAN BUREN A. L. " An exact expression for the Lommel correction integral " *J.Acoust.Soc.Am.*, Vol.55, N°4, april 1974.
52. KHUMININ A. S " Ultrasonic propagation parameter measurements incorporating exact diffraction corrections " *Acustica.* Vol.39, 1978.

- 53.** SPIEGEL M. R. "Formules et tables de mathématiques" Série Schaum , 1997.
- 54.** COBB W.N. " Finite amplitude method for the determination of the acoustic nonlinearity parameter B/A ". J.Acoust.Soc.Am. Vol.73, N°5, pp.1525-1531, 1983.



## **CHAPITRE III**

### **METHODES DE MESURE DU PARAMETRE B/A ETAT DE L'ART**



### III.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous passons en revue les différentes méthodes de mesure du paramètre de non linéarité B/A décrites dans la littérature. Elles se répartissent en deux groupes :

- *Les méthodes thermodynamiques*, qui sont déduites de la définition même du paramètre B/A dans l'équation d'état.
- *Les méthodes d'amplitude finie*, dans lesquelles le paramètre B/A est déduit de façon indirecte en quantifiant la distorsion d'une onde ultrasonore se propageant dans un milieu non linéaire.

L'objectif principal de cette thèse s'effectuant dans le cadre des méthodes d'amplitude finie, nous développerons plus particulièrement ces dernières.

Un récapitulatif des valeurs de ce paramètre mesurées dans différents milieux, liquides et biologiques, sera présenté à la fin de ce chapitre.

### III.2 METHODES THERMODYNAMIQUES

Le paramètre B/A est défini au chapitre I (§I.2.1.4) par : 
$$\frac{B}{A} = 2 \cdot \rho_0 \cdot c_0 \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial p} \right|_{\rho_0, s} \quad (\text{III.1})$$

Il est lié à la variation de la vitesse de propagation avec la variation de la pression dans une transformation réversible et adiabatique .

Au moyen de transformations thermodynamiques, ce paramètre peut se mettre sous la forme

$$[7,5 \text{ chap.7}] : \frac{B}{A} = 2 \cdot \rho_0 \cdot c_0 \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial p} \right|_{\rho_0, T} + \frac{2 \cdot c_0 \cdot T \cdot \eta}{c_p} \cdot \left. \frac{\partial c}{\partial T} \right|_{\rho_0, p} = \left( \frac{B}{A} \right)_T + \left( \frac{B}{A} \right)_p \quad (\text{III.2})$$

où  $\eta = \frac{1}{V} \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$  ( $K^{-1}$ ) est le coefficient de dilatation volumique et  $c_p$  ( $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ) la chaleur

spécifique à pression constante (*ex : eau (30°C) -->  $c_p = 4185 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ,  $\eta = 3,67 \cdot 10^{-4} K^{-1}$* ). Le premier terme  $(B/A)_T$  représente le coefficient de non linéarité isotherme lié à la variation de la vitesse de propagation avec la pression à température constante, le second terme  $(B/A)_p$  représente le coefficient de non linéarité isobare lié à la variation de la vitesse de propagation avec la température à pression constante.

La méthode thermodynamique, basée sur l'équation (III.2) pour la mesure du paramètre B/A, a été suggérée la première fois en 1965 pour la caractérisation des liquides [1].

Auparavant R. T. BEYER [2] a calculé le paramètre B/A de différents liquides à l'aide de l'expression (III.2) en exploitant les données expérimentales ( $\rho_0, c_0, \eta, c_p$ ) et les mesures de  $c$  en fonction de la température et de la pression.<sup>18</sup>

En 1983 W. K. LAW *et al.* [1,4] déterminent le paramètre B/A de différents

milieux biologiques à l'aide d'un système permettant la mesure des variations  $\left. \frac{\Delta c}{\Delta p} \right|_T$  et

$\left. \frac{\Delta c}{\Delta T} \right|_p$ , et donc des paramètres de non linéarités isotherme  $(B/A)_T$  et isobare  $(B/A)_p$  de la relation (III.2).

Si les grandeurs  $\rho_0$  et  $c_0$  peuvent aisément être mesurées à une température donnée, le problème de cette méthode est la méconnaissance, pour la plupart des milieux biologiques, des paramètres thermodynamiques  $\eta$  et  $c_p$  nécessaires au calcul du terme  $(B/A)_p$ . Cependant,

<sup>18</sup> Par exemple ref. [3] pour l'eau.

comme ces paramètres sont voisins de ceux de l'eau, les auteurs ont utilisé ces derniers en remplacement. Et comme la contribution du terme  $(B/A)_p$  est d'environ 3% de la valeur totale de B/A, l'erreur apportée en utilisant les coefficients de l'eau et approximativement de 1% sur les mesures effectuées dans les milieux biologiques.

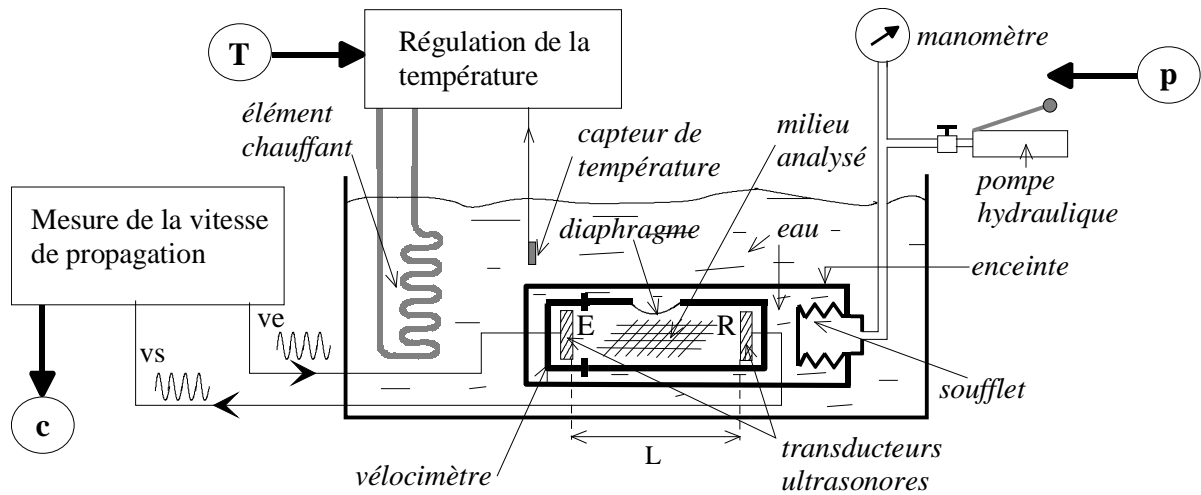
Exemples [4] : eau (30°C) -->  $(B/A)_T = 5,17$  et  $(B/A)_p = 0,14$  ==>  $B/A = 5,31$   
 Foie de bœuf (30°C) -->  $(B/A)_T = 7,13$  et  $(B/A)_p = 0,10$  ==>  $B/A = 7,23$

La prédominance du terme isotherme a d'ailleurs été exploitée par certains auteurs [5,6] pour simplifier la méthode avec l'approximation:

$$\frac{B}{A} \approx \left( \frac{B}{A} \right)_T \quad \text{(III.3)}$$

**Principe de Mesure expérimentale :**

Le principe de mesure du paramètre B/A à l'aide de la relation générale (III.2) est illustré figure III.1 :



**Fig III.1 :** Système de mesure du paramètre B/A par la méthode thermodynamique

Le milieu à analyser est inséré dans un vélocimètre placé dans une enceinte immergée dans une cuve remplie d'eau. Les différentes pressions hydrostatiques nécessaires à la mesure du paramètre  $(B/A)_T$  sont générées par une pompe hydraulique et transmises au milieu par l'intermédiaire du soufflet et du diaphragme, la température étant maintenue constante par le système de régulation. Par la suite, les différentes températures nécessaires à la mesure du paramètre  $(B/A)_p$  sont obtenues par le système de régulation thermique, la pression étant maintenue constante.

Dans ces deux procédures la vitesse de propagation est mesurée pour chaque couple (p,T) à l'aide d'un vélocimètre.

LAW *et al.* [1,4] utilisent une émission sinusoïdale pulsée de 3 MHz et de durée 5  $\mu$ s (ve) pour exciter le transducteur émetteur (E). l'onde acoustique résultante est détectée (vs) par le transducteur de réception (R). La mesure, à l'aide d'un oscilloscope, du temps de vol  $\Delta t$  de l'onde à travers le milieu d'épaisseur L donne la vitesse de propagation :

$$c = \frac{L}{\Delta t} \quad \text{(III.4)}$$

La variation de vitesse  $\Delta c$  engendrée par une variation de pression  $\Delta p$  étant très faible, il est nécessaire d'avoir une très bonne résolution pour la mesure de la vitesse de propagation<sup>19</sup>.

La méthode décrite permet la mesure du paramètre B/A avec une précision de  $\pm 3\%$  pour les liquides et  $\pm 5\%$  pour les milieux biologiques. La plage de variation pour la pression est comprise entre la pression atmosphérique (1 atm) et 2000 psi (136 atm) [ $1 \text{ psi} = 6,894757 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} = 68,046 \cdot 10^{-3} \text{ atm}$ ], les modifications de la longueur L (7,62 cm) en fonction de la température et de la pression sont prises en compte.

Une amélioration de la méthode permettant de s'affranchir de la connaissance des paramètres thermodynamiques  $\eta$  et  $c_p$ , non connus avec une grande précision pour les milieux biologiques, est l'exploitation de la définition (III.1) du paramètre B/A qui nécessite une transformation isentropique.

Ceci peut être réalisé si le processus s'effectue suffisamment rapidement pour qu'il n'y ait pas de transfert de chaleur appréciable par conduction (*transformation adiabatique*), et si la transformation est réversible, ce qui est généralement le cas. Précisons que les modifications biochimiques irréversibles ou permanentes dans les propriétés des biomolécules (enzyme, ADN ... ) interviennent à partir de pressions de l'ordre d'environ 60000 psi (4083 atm) [7].

Le procédé adopté consiste donc à mesurer la variation de vitesse  $\Delta c$  consécutive à une variation de pression  $\Delta p$  suffisamment rapide (quelques secondes).

Le système de mesure est analogue à celui de la **figure III.1**. La pression hydrostatique du milieu d'analyse est augmentée jusqu'à une certaine valeur ( $\sim 2 \text{ atm}$  [8,9],  $\sim 68 \text{ atm}$  [7]).

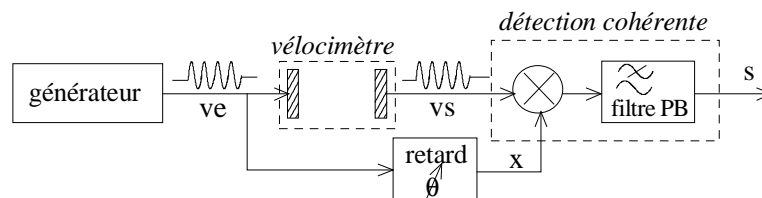
Après avoir contrôlé que la vitesse de propagation dans le milieu ne varie plus, ce qui correspond à la stabilisation de la température de mesure, la pression est ramenée rapidement à la pression atmosphérique par l'intermédiaire d'une valve. La mesure de  $\Delta c$  durant cette dépression  $\Delta p$  permet le calcul du paramètre B/A à l'aide de la relation (III.1). La variation  $\Delta c$  étant généralement déduite de la variation de temps  $\Delta t$  ou de phase  $\Delta \phi$  entre le signal émis et le signal reçu [7,8,9], on peut écrire :

$$\frac{B}{A} = - \frac{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3}{L \cdot \omega} \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta p} \Big|_{\rho_0, s} = - \frac{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^2}{t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta p} \Big|_{\rho_0, s} \quad \text{(III.5)}$$

où  $t$  est le temps mis par l'onde acoustique pour traverser le milieu d'épaisseur  $L$ .

Différentes techniques sont utilisées pour mesurer  $\Delta t$  ou  $\Delta \phi$  :

- Par détection cohérente (ou synchrone) [5,8,9] :



**Fig III.2:** Mesure de  $\Delta \phi$  par détection synchrone.

<sup>19</sup> Par exemple, pour l'eau à  $30^\circ\text{C}$  nous avons :  $(B/A)_T = 5,17$   $\rho_0 = 996 \text{ kg.m}^{-3}$   $c_0 = 1509 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui correspond à  $\Delta c/\Delta p = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$ , soit  $\Delta c = 0,17 \text{ m.s}^{-1}$  pour une variation de pression  $\Delta p = 1 \text{ atm}$ .



Le milieu d'analyse étant sous pression, on ajuste le retard  $\theta$  pour avoir  $s = 0 \implies \varphi(v_s, x) = 90^\circ$ . Après dépression, et pour des petites variations de phase, on obtient en  $s$  une tension continue proportionnelle à  $\Delta\phi$ .

- En utilisant un analyseur de réseau donnant directement  $\Delta\phi$  [7,11].
- En effectuant l'intercorrélation  $R_{v_e, v_s}(\tau)$  des signaux  $v_e$  et  $v_s$  préalablement numérisés. L'abscisse du maximum de la fonction  $R_{v_e, v_s}(\tau)$  correspond à la variation  $\Delta t$  recherchée [12].
- En utilisant un interféromètre acoustique [10] : une boucle à verrouillage de phase (P.L.L) ajuste la fréquence  $f$  du signal d'émission  $v_e$  de façon à avoir un déphasage constant ( $90^\circ$ ) entre  $v_e$  et  $v_s$  durant toute la phase de variation de pression  $\Delta p$ . Dans ce cas la fréquence  $f$  restituée sous forme numérique par l'interféromètre est liée directement à la vitesse sous la forme :  $\Delta f/f_0 = \Delta c/c_0$ ,  $f_0$  étant la fréquence du signal avant la phase de dépression.

Les précisions obtenues pour la mesure du paramètre B/A, exploitant les quatre techniques précédentes, sont :

4% [8], 3,3% [11], <0,7% [12], 0,85% en moyenne [10].

### III.3 METHODES D'AMPLITUDE FINIE

#### III.3.1 INTRODUCTION

L'appellation "méthodes d'amplitude finie" est employée pour les distinguer des méthodes thermodynamiques, en précisant l'espace de travail qui est l'acoustique non linéaire. *Une méthode d'amplitude infinitésimale se ferait dans le cadre de l'acoustique linéaire (cf. § I.2.2-I.2.3).*

Nous distinguons deux groupes principaux qui sont :

- **Les méthodes harmoniques** : elles exploitent les solutions analytiques asymptotiques  $P_2 = f(P_0 \text{ ou } P_1)$  de l'équation de Burgers, si on considère une onde plane, ou de l'équation K.Z.K si les effets de la diffraction sont considérés.
- **Les méthodes d'extra-atténuation** : elles exploitent les solutions du type  $P_1 = f(P_0, \beta)$  traduisant la décroissance du fondamental engendrée par les effets non linéaires.

Il existe d'autres méthodes d'amplitude finie originales qui n'appartiennent pas à ces deux groupes et qui seront décrites au paragraphe III.4.

#### III.3.2 METHODES HARMONIQUES

Historiquement, R. T. Beyer [2] en 1960 a été le premier à calculer le paramètre B/A à partir des relevés expérimentaux du second harmonique  $P_2(z)$  effectués dans l'eau [13]. Les méthodes de mesures, développées par la suite, sont donc basées sur les différentes expressions des composantes harmoniques  $P_1$  et  $P_2$  de l'onde acoustique générée par un transducteur dans le milieu à analyser. La mesure de ces grandeurs, et principalement du second harmonique, permet d'accéder à la connaissance du paramètre de non linéarité B/A. Suivant les expressions analytiques utilisées, différentes méthodes ont été développées. On distingue essentiellement deux techniques :

- **Les méthodes directes** : elles permettent d'accéder directement à la valeur du paramètre B/A.

- **Les méthodes comparatives** : elles nécessitent une mesure préalable avec un milieu de référence de paramètre B/A connu (généralement l'eau).

Comme pour les méthodes thermodynamiques, la connaissance ou la mesure des constantes  $\rho_0$  et  $c_0$  du milieu est nécessaire. Cependant, certaines méthodes harmoniques nécessitent de plus la mesure des coefficients d'atténuation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  du fondamental et du second harmonique.

### III.3.2.1 Méthodes directes

On distingue trois méthodes :

- La méthode directe par extrapolation, ne nécessitant pas la connaissance des atténuations.
- La méthode directe simple, nécessitant la mesure des coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .
- La méthode directe par moyennage, plus précise, mais nécessitant également la connaissance des atténuations.

#### III.3.2.1.1 Méthodes directes par extrapolation

##### a) Principe

Dans l'hypothèse de la propagation d'une onde plane en milieu dissipatif, l'amplitude exacte du second harmonique est donnée par la solution (I.54) de l'équation de Burgers (I.36). Dans un milieu non dissipatif, nous avons vu (chap. I, § I.5) que la solution exacte est équivalente à la solution de Blackstock (I.68) pour toutes les valeurs de  $z$ , elle même équivalente à la solution de Fubini (I.66) pour  $z <$  distance de discontinuité ( $l_D$ ). En terme de pression acoustique elle s'exprime, selon (I.70), par :

$$P_2(z) = P_0 \cdot \frac{J_2(2\sigma)}{\sigma} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{z \cdot \beta \cdot \omega \cdot P_0}{\rho_0 \cdot c_0^3}$$

Lorsque  $z \rightarrow 0$ , on a (I.74) :

$$\lim_{z \rightarrow 0} [P_2(z)] = K \cdot z \cdot P_0^2 \quad \text{et par conséquent} : K = \frac{\beta \cdot \omega}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} = \frac{(1 + B/2A) \cdot \omega}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{P_2(z)}{z \cdot P_0^2} \right]$$

Le principe consiste à mesurer  $P_2(z)$  et à tracer la courbe  $\frac{P_2(z)}{z \cdot P_0^2}$ .

Ensuite, en extrapolant cette courbe avec une pente nulle en  $z = 0$ , on détermine le coefficient

$K = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{P_2(z)}{z \cdot P_0^2} \right]$  dont on déduit le paramètre de non linéarité :

$$B/A = \frac{4 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3}{\omega} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{P_2(z)}{z \cdot P_0^2} \right] - 2 \quad \text{(III.6)}$$

Comme la détermination de B/A s'effectue en  $z = 0$ , ce principe s'applique également dans le cas d'une onde plane en milieu dissipatif. Il nécessite cependant la mesure préalable de la pression  $P_0$  à la source.

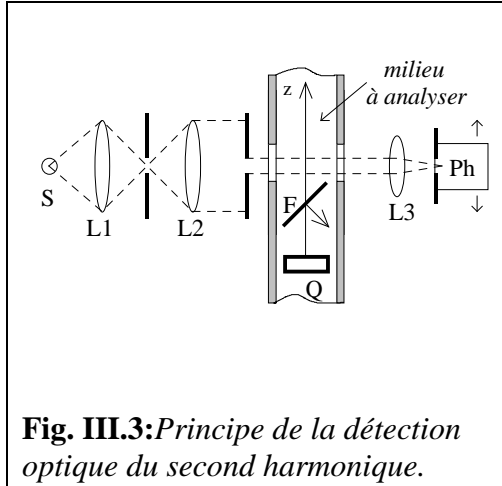
Le second harmonique  $P_2(z)$  peut être mesuré de deux façons :

- Par détection optique avec filtrage acoustique préalable
- Par détection acoustique directe

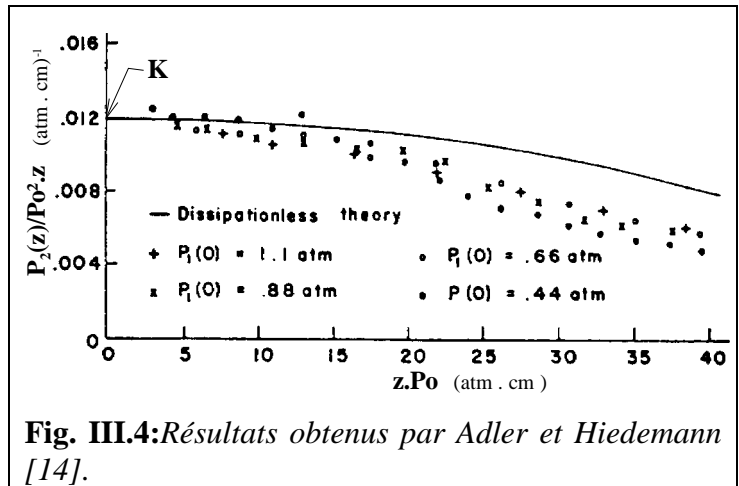
**b) Détection optique du second harmonique**

Les premières mesures utilisant cette méthode ont été effectuées par Adler et Hiedemann en 1961 [14].

Pour la mesure de l'amplitude du second harmonique ils utilisent une méthode optique basée sur la diffraction d'une onde lumineuse plane par une onde ultrasonore se propageant dans un milieu transparent pour les photons considérés (*figure III.3*).



**Fig. III.3:**Principe de la détection optique du second harmonique.



**Fig. III.4:**Résultats obtenus par Adler et Hiedemann [14].

S = Source lumineuse (à vapeur de mercure), L = Lentille , f = fente, Q = transducteur (source ultrasonore), F = filtre acoustique constitué par une lame d'acier (1 mm d'épaisseur).

Pour certains angles d'incidence le filtre F réfléchit le fondamental de l'onde acoustique et transmet le second harmonique [13].

Le photomultiplicateur (Ph) mesure l'intensité lumineuse diffractée I<sub>n</sub> définie par la relation [14,15] : I<sub>n</sub> = J<sub>n</sub><sup>2</sup>(v) où n est l'ordre de diffraction ,  $v = \frac{2\pi\delta_{\mu}\cdot D}{\lambda}$  le paramètre de Raman-

Nath, D la distance d'interaction avec les ondes acoustiques, λ la longueur d'onde de la lumière, et δ<sub>μ</sub> l'amplitude des variations de l'indice de réfraction du milieu proportionnelle à l'amplitude P de la pression acoustique et correspondant ici à P<sub>2</sub>(z) (après filtrage).

Ainsi la mesure de l'intensité I<sub>n</sub> permet la détermination du paramètre v et donc de la pression acoustique .

Par exemple, pour l'eau on a : P = 0.56.(v/D) atm avec D en cm et λ = 5461 Å

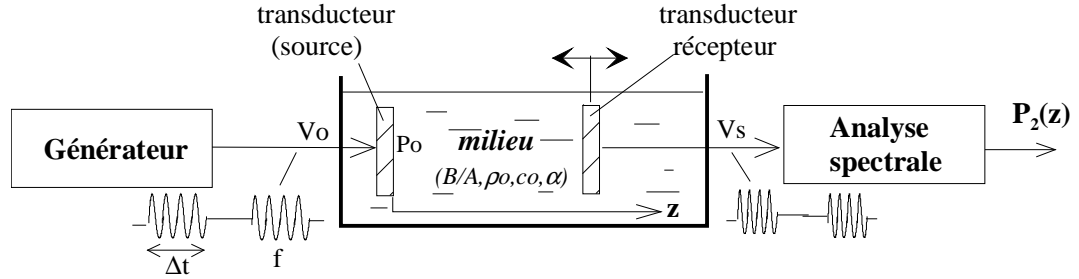
La *figure III.4* présente les résultats obtenus par Adler et Hiedemann pour l'eau, avec une fréquence du fondamental P<sub>1</sub> de 3 MHz, et pour différentes excitations P<sub>0</sub>=P<sub>1</sub>(0).

Ils obtiennent B/A = 6,2 ± 0.6, la température n'est pas spécifiée.

**c) Détection acoustique du second harmonique**

On utilise ici l'effet piézo-électrique inverse permettant à un transducteur de convertir les variations de pression acoustique en variations de tension électrique.

Le système de mesure est présenté *figure III.5* :



**Fig. III.5:** Principe de la détection acoustique du second harmonique.

Les deux transducteurs (source et détecteur) immergés dans le milieu analysé sont positionnés suivant le même axe (direction de propagation) avec leur face avant située dans deux plans parallèles.

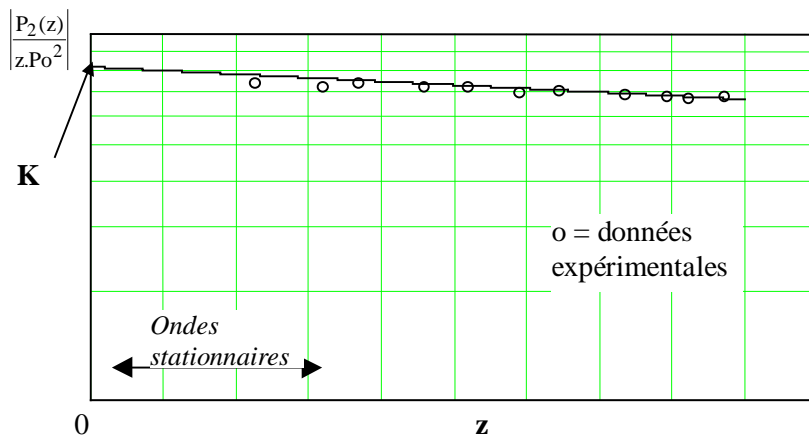
Le générateur attaque la source ultrasonore avec des trains d'onde de durée  $\Delta t$  suffisamment longue pour se placer dans la condition d'excitation sinusoïdale permanente, mais assez courte pour éviter l'apparition d'ondes stationnaires entre les transducteurs. La fréquence  $f$  de l'onde sinusoïdale correspond à la fréquence de résonance du transducteur d'émission.

L'analyse spectrale du signal  $V_s$  permet d'isoler le second harmonique  $V_{s2}$  et d'accéder à la valeur de  $P_2(z)$  à l'aide de la sensibilité  $\eta_2 = \frac{V_{s2}}{P_2}$  ( $V/Pa$ ) du récepteur à la fréquence  $2.f$

Les premières mesures utilisant cette méthode ont été effectuées par Law, Frizzell et Dunn en 1981 [16,17]. Les paramètres de leur système de mesure sont :  $f = 3.44\text{MHz}$ ,  $\Delta t = 5\mu s$ , source ( $a=0.635\text{cm} - 3.44\text{MHz}$ ), détecteur ( $a=0.95\text{cm} - \text{large bande (10MHz)}$ ),  $0.8\text{ cm} < z < 3\text{ cm}$ .

Ils considèrent l'hypothèse de la propagation d'une onde plane en milieu dissipatif et exploitent l'approximation (I.82) établie au chapitre I :

$$P_2(z) = K.z.P_o^2.e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} = \frac{(1 + B/2.A).\omega}{2.\rho_o.co^3}.z.P_o^2.e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} \quad \text{(III.7)}$$



**Fig. III.6:** Détermination expérimentale de la valeur de K.

Comme le montre la **figure III.6**, le comportement exponentiel de la fonction  $\frac{P_2(z)}{z.P_o^2}$  donnera une droite en échelle logarithmique qu'il suffira d'extrapoler en  $z = 0$  pour obtenir la valeur de B/A à l'aide de la relation (III.6).

L'apparition d'ondes stationnaires entre la source et le détecteur ne permettant pas d'effectuer des mesures précises à des distances trop faibles.

L'intérêt de ce principe, exploité principalement pour la mesure du paramètre B/A des milieux biologiques, est qu'il ne nécessite pas la connaissance des atténuations  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

L'écart entre les valeurs du paramètre B/A de quelques liquides (eau, glycol d'éthylène, glycérol) obtenues par cette méthode et celles citées dans la littérature est de  $\pm 10\%$  [16]. En fait, avec ce système, nous ne sommes pas en présence d'une onde plane et il est nécessaire de prendre en compte les effets de la diffraction pour améliorer la précision de la mesure.

En 1985 les mêmes auteurs [4] utilisent un détecteur de même dimension que la source (3MHz) et incorporent le terme de correction de diffraction  $D_2(z)$  dans l'expression de  $P_2(z)$ . Ils exploitent donc la relation (II.71) établie au chapitre II, où pour simplifier l'écriture nous poserons  $\langle P_i \rangle = P_i$  :

$$P_2(z) = K.z.P_0^2 \cdot e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} \cdot D_2(z) = \frac{(1 + B/2.A).\omega}{2.\rho_0.co^3} \cdot z.P_0^2 \cdot e^{-\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right).z} \cdot D_2(z) \quad (III.8)$$

Comme précédemment (figure 4), avec une régression linéaire des moindres carrés sur les données expérimentales et en extrapolant la droite en  $z = 0$ , ils déduisent :

$$B/A = \frac{4.\rho_0.co^3}{\omega} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{P_2(z)}{z.P_0^2} \right] \cdot D_2(0)^{-1} - 2 \quad (III.9)$$

Rappelons que la fonction de correction  $D_2(z)$  définie au chapitre I nécessite l'emploi d'une source et d'un détecteur circulaire de même diamètre. Et pour obtenir le maximum de sensibilité sur la détection du second harmonique, le transducteur récepteur devra avoir sa fréquence de résonance égale à  $2.f$  ou éventuellement être à large bande.

Pour la mesure du paramètre B/A l'erreur systématique totale est estimée à  $\pm 8\%$  et l'erreur aléatoire à  $\pm 6.6\%$  pour les liquides et à  $\pm 7.1\%$  pour les milieux biologiques. Ces erreurs étant évidemment fonction de la précision sur les mesures des différentes grandeurs  $\rho_0$ ,  $co$ ,  $P_0$ ,  $P_2$ , ces deux dernières nécessitant la calibration des transducteurs.

La détermination de la pression moyenne  $P_0$  à la source est généralement effectuée en mesurant la pression de radiation exercée sur un réflecteur à l'aide d'une balance de précision. De la même façon, la calibration d'une source à la fréquence  $2.f$  permet la détermination de la sensibilité  $\eta_2$  du récepteur.

Précisons que la relation (III.8) exploitée par la méthode précédente n'est qu'une approximation de l'expression analytique (II.63-64) décrivant plus fidèlement la réalité physique. Cette approximation porte essentiellement sur le terme d'atténuation (chap. I, eq. I.81) et introduit une erreur inférieure à  $1\%$  si  $(\alpha_2 - 2.\alpha_1) < \frac{1}{2}$ <sup>20</sup>.

Cependant l'approximation sur le terme d'atténuation n'est pas préjudiciable à la méthode car on effectue une extrapolation en  $z = 0$ .

<sup>20</sup> Pour l'eau à 3 MHz et  $z = 3$  cm, les conditions de l'expérimentation [4] étant  $0.8 \text{ cm} < z < 3.5 \text{ cm}$ , l'erreur est négligeable ( $7.6.10^{-4}\%$ ). Par contre, pour un milieu très dissipatif comme le glycérol, l'erreur à  $z = 3$  cm est d'environ  $8\%$ .

Sur le plan théorique la principale source d'erreur est l'approximation, nécessaire, du terme de correction  $D_2(z)$  par une exponentielle pour pouvoir linéariser la fonction  $\frac{P_2(z)}{z.P_0^2}$  en échelle logarithmique.

Plus récemment, en 1991, Wu J. et Zhu Z. [18] exploitent la relation (III.6) et un système de mesure analogue à celui de la **figure III.5** pour mesurer le paramètre B/A effectif de l'eau dans laquelle sont piégées des bulles d'air. Bien que le B/A de l'eau et de l'air soit respectivement de 5 et 0.4, ils mesurent un B/A effectif de l'ensemble variant de  $10^4$  à  $10^5$  si l'excitation acoustique se fait à la fréquence de résonance des bulles d'air. Cette augmentation énorme du paramètre B/A effectif, due aux oscillations non linéaires des bulles, peut créer des problèmes dans les mesures sur des milieux biologiques dans lesquels sont piégées des bulles d'air.

### III.3.2.1.2 Méthode directe simple

Cette méthode directe, exploitée par Zhang J. et Dunn F. [19], est utilisée lorsque la position  $z$  ne peut varier pour effectuer une extrapolation en  $z=0$ . A partir

de l'équation (III.8) on déduit : 
$$B/A = \frac{4.\rho_0.c\omega^3}{\omega} \cdot \frac{P_2(z)}{z.P_0^2} \cdot D_2(0)^{-1} \cdot e^{\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right)z} - 2 \quad \text{(III.10)}$$

Il est donc nécessaire d'effectuer une mesure préalable des coefficients d'atténuation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Pour effectuer des mesures *in vivo* sur des milieux biologiques (foie de chat), les auteurs utilisent une sorte de pied à coulisse sur lequel sont positionnés les transducteurs, afin d'obtenir un système de mesure analogue à celui de la **figure III.5**.

Ce système leur permet d'effectuer la mesure préalable de l'atténuation à l'aide de la

relation (II.52) établie au chapitre II et conduisant à : 
$$\alpha_i = -\frac{1}{z} \cdot \ln \left| \frac{P_1(z)}{P_0.D_1(z)} \right| \quad \text{(III.11)}$$

Avec  $i = 1, 2$  correspondant respectivement à une fréquence d'excitation du milieu  $f$  et  $2.f$ . La vitesse de propagation est également mesurée avec ce système (cf éq. III.4).

Les mesures, effectuées à  $f = 3$  MHz, sur plusieurs foies de chat donnent en moyenne :

$B/A_{in vivo} \approx 6.8$  et  $B/A_{in vitro} \approx 6.7$  (après sacrifice des chats et drainage partiel du sang).

### III.3.2.1.3 Méthode directe par moyennage

Cette méthode, mise au point par W. N. Cobb [20] en 1982, exploite la relation analytique (II.63-64) décrivant le mieux la réalité physique et détaillée au chapitre II :

$$P_2(z) = K.P_0^2 \cdot |I_1(z) - I_2(z)| \quad K = \frac{\beta.\omega}{2.\rho_0.c\omega^3} \quad \text{(III.12)}$$

$I_1(z)$  et  $I_2(z)$  prennent en compte respectivement l'atténuation et la diffraction.

Le système de mesure est analogue à celui présenté **figure III.5**, et la détermination du paramètre B/A s'effectue de la façon suivante :

- Pour chaque position  $z$  de mesure on calcule la valeur théorique de  $P_2(z)$  à l'aide de l'expression analytique précédente en posant  $\beta = 1$  ( $\rightarrow B/A=0$ ).
- On mesure la valeur réelle de  $P_2(z)$ .

- Le paramètre  $\beta$  est ensuite déterminé en effectuant la moyenne des

$$\frac{P_2(z)|_{\text{mesurée}}}{P_2(z)|_{\text{théorique}}|_{\beta=1}} = \beta_{\text{mesuré}} \quad \text{dont on déduit} \quad B/A = 2.(\beta - 1).$$

L'expérimentation a été conduite pour une fréquence du fondamental de 3 MHz et avec  $0 < z < 9$  cm.

La précision obtenue sur la mesure du paramètre B/A de différents liquides ( eau, glycol d'éthylène, glycérol ) est de  $\pm 4$  %. En plus de la calibration des transducteurs, cette méthode nécessite la mesure préalable des coefficients d'atténuation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , et comme les autres méthodes, la détermination des paramètres  $\rho_0$  et  $c_0$ .

### III.3.2.2 Méthodes comparatives

On distingue la méthode comparative simple et la méthode par insertion et substitution.

#### III.3.2.2.1 Méthode comparative simple

Le système de mesure est analogue à celui de la figure 3, et on procède de la façon suivante :

- Dans un milieu de référence (r), de paramètres acoustiques connus ( $B/A_r, \rho_r, c_r, \alpha_{1r}, \alpha_{2r}$ ), on mesure à une position  $z_r$  les grandeurs  $P_{2r}(z)$  et éventuellement  $P_{1r}(z)$ .
- Dans le milieu à analyser (x), de paramètres acoustiques ( $B/A_x, \rho_x, c_x, \alpha_{1x}, \alpha_{2x}$ ), on mesure à une position  $z_x$  les grandeurs  $P_{2x}(z)$  et éventuellement  $P_{1x}(z)$ .
- Avec les grandeurs mesurées et le choix d'une relation analytique les liant aux paramètres acoustiques on déduit  $B/A_x = f(B/A_r)$ .

Les premières mesures utilisant ce principe ont été effectuées dans les années 60 et reprises en 1984 par X. F. Gong *et al.* [21]. Ils considèrent la propagation d'une onde plane en milieu faiblement dissipatif, et exploitent la relation analytique (I.74) établie au chapitre I :

$$P_2(z) = K.z.P_0^2 = \frac{(1 + B/2.A).\omega}{2.\rho_0.c_0^3}.z.P_0^2 \quad \text{(III.13)}$$

En effectuant la procédure décrite plus haut pour une même position  $z_x = z_r$ , et en maintenant la même tension  $V_0$  d'excitation du transducteur source (*fig. III.5*) pour les deux milieux, ils obtiennent :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \frac{P_{2x}}{P_{2r}} \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \left[ \left(\frac{B}{A}\right)_r + 2 \right] - 2 \quad \text{(III.14)}$$

Les transducteurs utilisés ont un diamètre de 1.6 cm, les fréquences de résonance de la source et du détecteur sont respectivement de 3 et 6 MHz. Ils estiment la précision de la mesure meilleure que 8 % pour les liquides ( acétone, éthanol, glycol d'éthylène) par comparaison avec les données de la littérature, le milieu de référence étant l'eau.

Notons qu'ils supposent que la sensibilité  $\eta_0 = \frac{P_0}{V_0}$  du transducteur source est indépendante de l'impédance acoustique  $Z_m = \rho.c$  du milieu, ce qui permet d'éliminer  $P_0$  des expressions

pour obtenir la relation (III.14). En fait la sensibilité d'un transducteur varie en fonction de  $Z_m$ , et d'environ 5% pour  $Z_m$  variant de 1.6 à 1.7 Mrayls [22] . Le phénomène est d'ailleurs également présent en détection pour la mesure de  $V_{s_{2r,x}} = \eta_{2r,x} \cdot P_{2r,x}$  . De plus les effets de l'atténuation et de la diffraction ne sont pas considérés.

En 1991 J. Zhang *et al.* [22] ont pris en compte ces effets en exploitant l'expression analytique (III.8) pour le second harmonique et (I.77)  $P_1(z) = P_0 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z}$  pour le fondamental, ce qui conduit à la relation :

$$P_2(z) = \frac{(1 + B/2.A) \cdot \omega}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} \cdot z \cdot P_1(z)^2 \cdot D_2(z) \cdot e^{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}\right) \cdot z} \quad (III.15)$$

En appliquant la procédure précédente, ils obtiennent :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \frac{P_{2x}}{P_{2r}} \cdot \left(\frac{P_{1r}}{P_{1x}}\right)^2 \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \frac{z_r}{z_x} \cdot \frac{D_2(z_r)}{D_2(z_x)} \cdot \left[\left(\frac{B}{A}\right)_r + 2\right] - 2 \quad (III.16)$$

Et avec les tensions  $V_{s1} = \eta_1 \cdot P_1$  et  $V_{s2} = \eta_2 \cdot P_2$ , où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont les sensibilités du transducteur détecteur aux fréquences  $f$  et  $2.f$ , l'expression devient :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \frac{V_{s2x}}{V_{s2r}} \cdot \left(\frac{V_{s1r}}{V_{s1x}}\right)^2 \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \frac{z_r}{z_x} \cdot \frac{D_2(z_r)}{D_2(z_x)} \cdot \left[\left(\frac{B}{A}\right)_r + 2\right] - 2 \quad (III.17)$$

Les mesures s'effectuant dans les milieux biologiques, où l'on peut considérer une dépendance linéaire de l'atténuation en fonction de la fréquence ( $q \approx 1$ , chap. I § I.6.2.1), on obtient  $\alpha_2 = 2^q \cdot \alpha_1 = 2 \cdot \alpha_1 \implies \alpha_1 - \alpha_2/2 = 0$ . Le milieu de référence utilisé (solution aqueuse à 10% NaCl) possédant la même propriété, les termes d'atténuation s'éliminent dans l'expression finale (III.17).

De plus, le milieu étudié (foie de chat) et le milieu de référence (solution aqueuse à 10% NaCl) ayant des impédances acoustiques voisines, respectivement 1.64 et 1.66 Mrayls, l'influence des sensibilités  $\eta_1$   $\eta_2$  a été négligée dans l'expression (III.17).

Les fréquences de résonance des transducteurs source et détecteur sont 3 et 6 MHz . La précision de la méthode n'est pas mentionnée, mais une mesure sur un milieu test (solution aqueuse à 23% de BSA {Bovine Serum Albumin} –  $Z_x = 1.67$  Mrayls) donne  $B/A = 6.12$  par ce procédé et  $B/A = 6.31$  par la méthode thermodynamique, soit 3% d'erreur par comparaison. La valeur du paramètre B/A du milieu de référence déterminée par la méthode thermodynamique est  $B/A_r = 6.08$  .

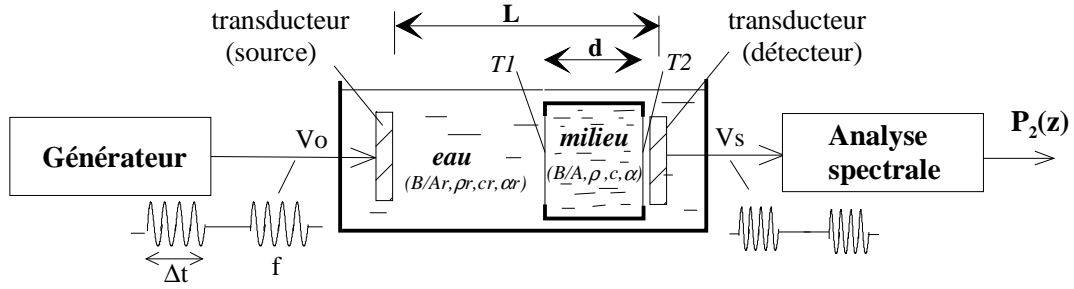
### III.3.2.2.2 Méthodes par insertion et substitution

#### a) Utilisation d'une source plane :

Dans cette méthode comparative, le milieu de référence et le milieu analysé sont placés dans une petite enceinte perméable aux ondes acoustiques et immergée dans l'eau entre les deux transducteurs, comme le montre la figure 4.

L'origine de cette méthode remonte en 1962, où V. V. Shklovskaya – Kordi [23] déterminait la pression interne dans des liquides, à partir de la mesure du paramètre B/A, pour estimer la distance intermoléculaire.





**Fig. III.7:** Système de mesure par insertion et substitution pour une source plane.

En 1984 X. F. Gong *et al.* [21] exploitent le principe pour mesurer le paramètre B/A de différents liquides et milieux biologiques.

La distance entre l'enceinte et le transducteur détecteur doit être faible pour pouvoir négliger l'apparition d'harmonique dans cet espace, et pour une transmission optimale il est nécessaire que les interfaces eau-milieu et milieu-eau, réalisée à l'aide d'une fine membrane, soient parallèles aux faces avants des transducteurs.

De plus, pour simplifier l'équation finale, il est judicieux de choisir également l'eau comme milieu de référence.

La procédure est identique à celle de la méthode comparative simple, et avec l'hypothèse de la propagation d'une onde plane en milieu faiblement dissipatif (équation III.13), ils obtiennent :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \left(\frac{P_{2x}}{P_{2r}} \cdot \frac{L}{d \cdot T1 \cdot T2} - \frac{L}{d} + 1\right) \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \frac{(B/A_r + 2)}{T1} - 2 \quad (\text{III.18})$$

où  $T1 = \frac{2 \cdot \rho_x \cdot c_x}{\rho_x \cdot c_x + \rho_r \cdot c_r}$  et  $T2 = \frac{2 \cdot \rho_r \cdot c_r}{\rho_x \cdot c_x + \rho_r \cdot c_r}$  sont respectivement les coefficients de

transmission de l'onde ultrasonore aux interfaces eau-milieu et milieu-eau, L est la distance entre les transducteurs et d l'épaisseur du milieu analysé.

L'intérêt de cette méthode est d'utiliser une petite quantité de milieu à analyser. De plus, les sensibilités des transducteurs n'interviennent plus puisque le milieu en contact est toujours de l'eau, ce qui permet de remplacer directement  $P_{2x,r}$  par  $V_{S2x,r}$ .

Outre une réalisation mécanique plus compliquée, l'inconvénient par rapport à la méthode comparative simple est d'avoir une impédance acoustique du milieu voisine de celle de l'eau afin de négliger les réflexions aux interfaces.

Les auteurs [21] estiment la précision de la mesure meilleure que 8 % pour les liquides (acétone, éthanol, glycol d'éthylène) par comparaison avec les données de la littérature.

Pour ne pas dégrader la précision de la mesure sur des milieux très absorbants comme les milieux biologiques, X. F. Gong *et al.* [9], en 1989, affinent la formulation du paramètre B/A en tenant compte de l'atténuation et également de la diffraction.

Ils exploitent donc l'expression analytique (III.8), en négligeant l'atténuation de l'eau devant celle du milieu analysé, et obtiennent <sup>21</sup>:

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \left(\frac{P_{2x}}{P_{2r}} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{e^{(\alpha_{1x} + \alpha_{2x} / 2) \cdot d}}{T1 \cdot T2} - \left(\frac{L}{d} - 1\right) \cdot e^{(\alpha_{1x} - \alpha_{2x} / 2) \cdot d} \cdot \frac{D_{2r}(L-d)}{D_{2r}(L)}\right) \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \frac{D_{2r}(L)}{D_{2x}(d)} \cdot \frac{(B/A_r + 2)}{T1} - 2 \quad (\text{III.19})$$

<sup>21</sup> Notons une inversion des termes T1 et T2 dans l'équation 8 ref [9].

Les caractéristiques de leur système de mesure sont : source (a=0.8cm – 2 MHz), détecteur (a=0.8cm – 4 MHz), L = 3.5 cm, d = 2.5 cm.

La précision est estimée à 8% pour les liquides et 12% pour les tissus mous.

Précisons que pour ces deux expérimentations [21,9] la mesure du second harmonique  $V_{s2}$  est effectuée à l'aide d'un filtre passe bande centré sur  $2.f$  et d'un oscilloscope.

**b) Utilisation d'une source focalisante :**

En considérant la longueur  $d$  de l'échantillon égale à  $L$ , et en exploitant les relations asymptotiques (I.77-82) pour le fondamental et le second harmonique d'une onde plane, on peut définir une nouvelle variable  $R_p$  sous la forme [24] : (III.20)

$$R_p = \left( \frac{P_{2x}}{P_{2r}} \right) \left( \frac{P_{1r}}{P_{1x}} \right)^{1+\alpha_{2x}/2\alpha_{1x}} \cong \frac{T1}{(T1.T2)^{1+\alpha_{2x}/2\alpha_{1x}}} \cdot \frac{\rho_r \cdot c_r^3}{\rho_x \cdot c_x^3} \cdot \frac{\beta_x}{\beta_r} \cdot \left\{ e^{L \cdot \alpha_r \cdot 2 \cdot (1-\alpha_{2x}/4\alpha_{1x})} \right\}$$

Si l'échantillon est un liquide ( $\alpha_{2x} = 4\alpha_{1x}$ ) le dernier terme  $\{ \}$  vaut 1, et si l'échantillon est un milieu biologique ( $\alpha_{2x} \approx 2\alpha_{1x}$ ) ce terme  $\{ e^{\alpha_r \cdot L} \}$  est pratiquement égal à 1 si le milieu de référence est peu absorbant comme par exemple l'eau.

Ce terme peut donc être supprimé dans tous les cas, et le calcul de la variable  $R_p$  par la mesure des pressions  $P_{1x,r}$  et  $P_{2x,r}$  permet la détermination du paramètre de non linéarité ( $\beta_x$ ) de l'échantillon sans qu'il soit nécessaire de connaître les atténuations  $\alpha_{1x,r}$  et  $\alpha_{2x,r}$ , puisque seul le rapport  $\alpha_{2x}/2\alpha_{1x}$  intervient (§ I.6.2.1) :

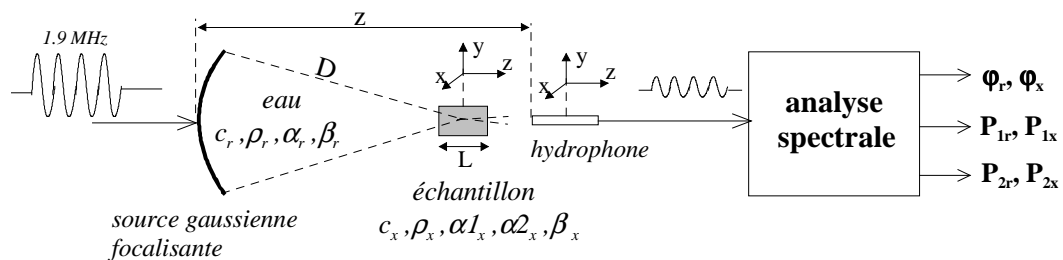
liquide ----->  $\alpha_{2x}/2\alpha_{1x} = 2$

biologique ---->  $\alpha_{2x}/2\alpha_{1x} \approx 1$

S. Saito [24] a appliqué ce principe dans le cas d'une source gaussienne focalisante pour mesurer le paramètre B/A de différents liquides et milieux biologiques.

L'intérêt de ce type de source dans le cas d'un faisceau focalisé est la simplification des solutions analytiques [25,26], car les champs axiaux et radiaux ont l'allure d'une courbe de Gauss et ne présentent plus les fluctuations observées dans le champ proche des sources non gaussiennes (cf chap. II, fig. 3 à 6). Une telle source est réalisée par une céramique (transducteur) dont une des électrodes d'alimentation a une forme telle que la distribution du champ électrique d'excitation soit une fonction de Gauss [25].

Le dispositif de mesure réalisé par Saito est présenté **figure III.8**.



**Fig. III.8:** Système de mesure par insertion et substitution pour une source focalisante.

La cellule cylindrique (4.5 ml), qui contiendra le milieu de référence puis l'échantillon à analyser, doit être positionnée précisément au point focal ( $D = 85$  mm). L'hydrophone est placé, suivant le même axe, 8mm après la cellule. L'excitation de la source (a=40mm) se fait par des trains d'onde à 1.9 MHz.

Dans ce cas la variable  $R_f$  prend en compte la focalisation du faisceau en intégrant le paramètre de phase  $\varphi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ , où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les phases du fondamental et du second harmonique. Ce paramètre est nul dans le cas d'une onde plane.

$$\text{On a :} \quad Rf = \left( \frac{\sin(\varphi_x)}{\sin(\varphi_r)} \right) \left( \frac{P_{2x}}{P_{2r}} \right) \left( \frac{P_{1r}}{P_{1x}} \right)^{1+\alpha_{2x}/2\alpha_{1x}} \quad (\text{III.21})$$

La formulation théorique de Rf (membre de droite de la relation III.20) devient dans ce cas plus compliquée, puisqu'il faut exploiter les expressions du champ de pression  $P_1(r,z)$  et  $P_2(r,z)$  analogues à celles établies au chapitre II (éq. II.21-36), mais simplifiées dans le cas d'une source gaussienne focalisante et en considérant uniquement la direction axiale ( $r=0$ ). Cette expression théorique ( $Rf_{th}$ ) est fonction des paramètres des milieux et du système, et varie linéairement en fonction du paramètre  $\beta_x$  de l'échantillon [24].

En appliquant le principe de la méthode par insertion et substitution avec l'eau comme milieu de référence, mise à la place de l'échantillon dans un premier temps, on mesure  $P_{1r}$ ,  $P_{2r}$  et  $\varphi_r$ , puis on mesure  $P_{1x}$ ,  $P_{2x}$  et  $\varphi_x$  en remplaçant l'eau par l'échantillon à analyser. On peut donc calculer la variable Rf avec l'équation (III.21), et en l'égalant avec son expression théorique ( $Rf_{th}$ ) on détermine le paramètre de non linéarité  $\beta_x = f(Rf)$ .

Les mesures effectuées sur différents liquides et milieux biologiques sont en bonne concordance avec les données de la littérature.

Cette méthode est cependant délicate à mettre en œuvre, du fait des positionnements précis de la cellule est de l'hydrophone. Et comme les autres méthodes précises, elle nécessite la mesure préalable des atténuations  $\alpha_{1x}$  et  $\alpha_{2x}$ , ce qui n'était pas nécessaire avec l'approximation d'une onde plane (cf. éq. III.20).

### III.3.3 METHODES D'EXTRA-ATTENUATION

#### a) Utilisation d'une source plane :

Nous avons vu au chapitre I (§ I.4, I.5) que la génération d'harmonique, due au caractère non linéaire de la propagation, est liée à la décroissance d'amplitude du fondamental par transfert d'énergie. En conséquence la mesure de cette décroissance permet d'accéder à la valeur du paramètre de non linéarité B/A.

Cette diminution d'amplitude, due à la génération d'harmonique, est appelée *extra-atténuation* car ses effets se superposent à l'atténuation classique ( $e^{-\alpha_1 \cdot z}$ ) de l'acoustique linéaire. Elle se définit par :

$$\text{exAt}(z) = \frac{P_1(z)}{P_0 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z}} \quad (\text{III.22})$$

Pour apprécier cette extra-atténuation il faut donc quitter une des conditions d'établissement des solutions asymptotiques établies jusqu'à présent, qui supposait que la génération d'harmonique n'engendrait pas de décroissance appréciable du fondamental.

Si on trouve dans la littérature des expressions exactes [27] ou des bonnes approximations [28] de l'extra-atténuation, Kashkooli *et al.* [29] exploitent l'approximation différentielle :

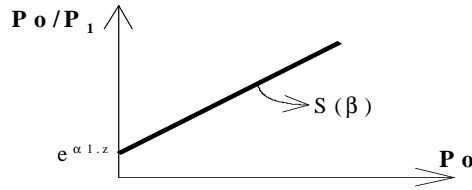
$$\frac{dP_1}{dz} = -\alpha_1 \cdot P_1 - K(\beta) \cdot P_1^2, \quad P_1(0) = P_0 \quad (\text{III.23})$$

où le premier terme représente la décroissance due à l'atténuation, et le second celle due à la génération du seul second harmonique (cf. chap. I, éq. I.79). Cette approximation permet d'obtenir une solution qui conduit à une forme facilement exploitable expérimentalement :

$$\frac{P_0}{P_1(z)} = e^{\alpha_1 \cdot z} + S(\beta) \cdot P_0 \quad \text{avec} \quad S(\beta) = K(\beta) \cdot (e^{\alpha_1 \cdot z} - 1) / \alpha_1 \quad (\text{III.24})$$

la représentation de la fonction  $P_0/P_1(z) = f(P_0)$  est donc une droite dont la pente  $S(\beta)$  est proportionnelle au paramètre de non linéarité  $\beta$ .

Le système de mesure est analogue à celui de la **figure III.5** où l'analyse spectrale est supprimée, le transducteur détecteur ne restituant principalement que le fondamental  $V_{S1}$ . Pour une distance  $z$  fixe on fait varier l'excitation  $V_0$  et on mesure l'amplitude  $V_{S1}$  correspondante.



**Fig. III.9:** Détermination de  $S(\beta)$ .

La courbe  $V_0/V_{S1} = f(V_0)$  est ensuite convertie en pression  $P_0/P_1 = f(P_0)$  avec le coefficient de transduction  $\eta$ , déterminable expérimentalement en constatant que  $\eta \cdot V_0/V_{S1} = P_0/P_1 = e^{\alpha_1 z}$  quand  $V_0 \rightarrow 0$ , et la sensibilité  $\eta_0$  du transducteur source telle que  $\eta_0 \cdot V_0 = P_0$ .

Ainsi, la mesure de la pente  $S(\beta)$  de la courbe linéarisée  $P_0/P_1 = f(P_0)$  permet la détermination du paramètre  $B/A = 2 \cdot (\beta - 1)$ .

Cette méthode directe nécessite cependant la connaissance de l'atténuation du fondamental  $\alpha_1$  et la calibration du transducteur source ( $\eta_0$ ).

Les mesures effectuées en 1987 par Kashkooli *et al.* [29] donnent un paramètre B/A de 6 pour l'eau et 11.2 pour le méthanol, soit une erreur relative respective de 20% et 8.7% en prenant les estimations thermodynamiques comme références.

La précision est moyenne et la méthode nécessite des intensités d'excitation suffisamment importantes pour observer l'extra-atténuation ( $I_{0\max} \approx 45 \text{ W/cm}^2$  pour le méthanol, d'après les relevés de [29]).

Notons également que les auteurs se placent dans l'hypothèse de propagation d'une onde plane et négligent les effets de la diffraction, ce qui est justifié par leurs conditions de mesure :  $f = 10 \text{ MHz}$  et  $a = 1 \text{ cm}$ , soit  $k \cdot a = 568$  pour le méthanol et  $k \cdot a = 419$  pour l'eau.

En utilisant une méthode de détection optique de la pression acoustique  $P_1$  (cf § III.3.2.1.1.b) et à partir d'une relation analytique du type  $\ln(P_1) = f(P_1, \beta)$ , ces mêmes auteurs [29] ont déterminé le paramètre de non linéarité  $\beta$  avec une meilleure précision en identifiant les courbes théoriques et expérimentales de  $\ln(P_1)$ .

**b) Utilisation d'une source focalisante :**

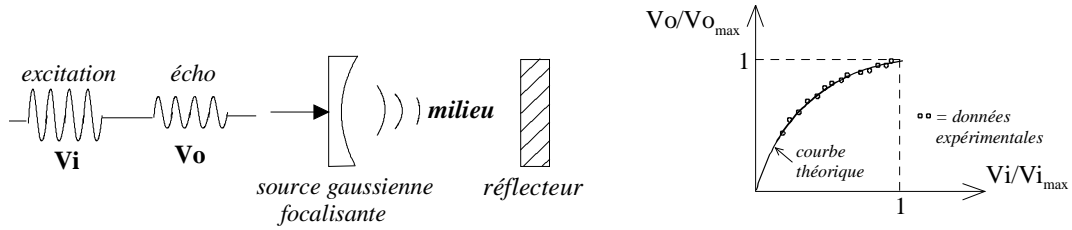
Si l'on veut prendre en compte les effets de la diffraction et de l'extra-atténuation pour le fondamental, il est nécessaire d'effectuer la résolution numérique de l'équation K.Z.K (I.31-32) et d'intégrer le champ  $P_1(r, z)$  sur la surface du transducteur détecteur pour obtenir la pression moyenne captée. Les calculs sont longs et ne débouchent pas directement sur une méthode de mesure du paramètre B/A.

Les équations sont cependant simplifiées dans le cas d'une source gaussienne [25,26], et on peut obtenir des solutions analytiques exploitables pour une mesure du paramètre B/A.

En utilisant une source gaussienne focalisante en mode pulse-écho, Liu et Nikoonahad [30] ont établi une approximation analytique pour traduire la tension captée  $V_0$  (écho) en réponse à un train d'onde d'excitation  $V_i$ , sous la forme :

$$\frac{V_0}{V_{0\max}} = \frac{V_i}{V_{i\max}} \cdot \frac{\cosh(C.Q.V_{i\max} \cdot \beta)}{\cosh(C.Q.V_i \cdot \beta)} \quad \text{(III.25)}$$

où  $Q$  dépend des paramètres du milieu et du système ( $c_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $z$ ,  $f$ ), et  $C$  une constante déterminée avec des mesures dans un milieu de référence.



**Fig. III.10:** Méthode d'extra-atténuation pour une source focalisante utilisée en mode pulse-écho.

Dans un milieu de référence on fait varier l'amplitude de l'excitation  $V_i$  et on représente les points de mesure dans le repère normalisé  $(V_i/V_{i_{max}}, V_o/V_{o_{max}})$ . La constante  $C$  est déterminée en faisant passer la courbe théorique (III.25) par ces points. Ensuite on opère de la même façon dans le milieu à analyser, en déterminant cette fois le paramètre de non linéarité  $\beta$ .

Les auteurs ont obtenu une bonne précision sur le paramètre B/A de l'éthanol, environ 5% en prenant les estimations thermodynamiques comme référence.

Le principal intérêt de cette méthode assez compliquée est le mode pulse-écho pouvant trouver des applications en imagerie non linéaire, mais il est nécessaire d'appliquer au milieu des excitations suffisantes pour apprécier les effets non linéaires sur le fondamental.

### III.3.4 AUTRES METHODES D'AMPLITUDE FINIE

#### III.3.4.1 Méthodes utilisant une excitation composite

Jusqu'à présent nous avons considéré une excitation du milieu par une source monochromatique. Dans le cas d'une source ultrasonore générant 2 ondes sinusoïdales de fréquences différentes, C. A. Cain *et al.* [31] dérivent une méthode originale de mesure du paramètre B/A.

Si le transducteur source est excité par la somme de deux tensions sinusoïdales de pulsation  $\omega_s$  et  $\omega_m$ , la pression initiale s'exprime sous la forme :

$$P(0, t) = P_s \sin(\omega_s t) + P_m \sin(\omega_m t) \quad (\text{III.26})$$

où le premier terme représente l'onde d'analyse, et le second, l'onde de pompage, avec  $\omega_s > \omega_m$ .

Selon Fenlon F. H. [32], on obtient à la position  $z$  dans le cas de la propagation d'une onde plane en milieu non dissipatif, l'équation transcendante (cf. chap. I, § I.4.1):

$$P(z, t) = P_s \sin[\omega_s t - k_s z + \gamma_s P(z, t)] + P_m \sin[\omega_m t - k_m z + \gamma_m P(z, t)] \quad (\text{III.27})$$

avec  $k_s = \omega_s / c_0$ ,  $k_m = \omega_m / c_0$ ,  $\gamma_s = \omega_s \beta z / \rho_0 c_0^3$ ,  $\gamma_m = \omega_m \beta z / \rho_0 c_0^3$

En considérant  $P_m \gg P_s$ , la partie variable de la phase de l'onde d'analyse reçue (1<sup>er</sup> terme de (III.27) s'exprime sous la forme :  $\tilde{\phi} \cong \gamma_s P_m \sin(\ )$ , et son amplitude crête à crête par :

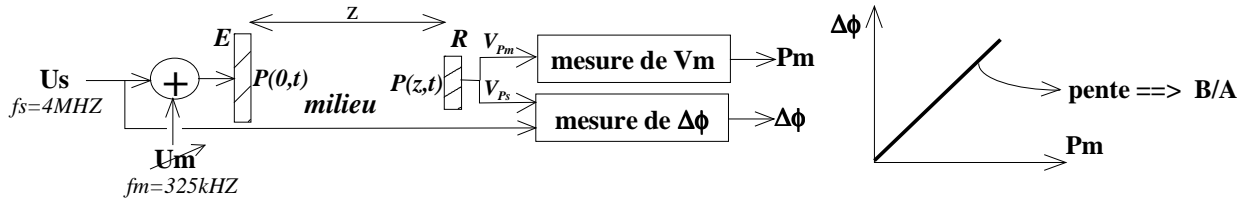
$$\Delta\phi \cong 2 \gamma_s P_m \quad (\text{III.28})$$

L'onde d'analyse est donc modulée en phase par l'onde de pompage, et peut être considérée comme une onde porteuse d'une information proportionnelle au paramètre de non linéarité B/A.

Ainsi la mesure de la déviation de phase  $\Delta\phi$  entre le signal d'analyse émis (porteuse) et reçu (porteuse modulée) permet d'accéder à la valeur du paramètre de non linéarité B/A :

$$B/A = 2.(\beta - 1) = \frac{\rho_0 \cdot \omega \cdot z^3}{\omega s \cdot z} \cdot \frac{\Delta\phi}{P_m} - 2 \quad (\text{III.29})$$

Le principe du système de mesure exploité par C. A. Cain *et al.* [31] est présenté *figure III.11*.



**Fig. III.11** : Système de mesure utilisant une excitation composite.

Le transducteur émetteur ( $a = 2.4$  cm) transmet à la fois l'onde de pompage (325 kHz) et l'onde d'analyse (4 MHz) située aux environs de 11 fois sa fréquence de résonance. Le transducteur récepteur ( $a = 0.32$  cm) est à bande étroite et de fréquence de résonance 5 MHz, il restitue donc principalement le signal d'analyse ( $V_{Ps}$ ) et rejette à plus de 30 dB le signal de pompage ( $V_{Pm}$ ).

La mesure de  $\Delta\phi$  est réalisée par deux boucles à verrouillage de phase (PLL) couplées à un analyseur de réseau. La mesure de  $V_m$ , image de  $P_m$ , est réalisée par un voltmètre sélectif.

Connaissant la sensibilité du récepteur ( $\eta = P_m/V_{Pm}$ ), la variation de  $U_m$  permet le relevé de la courbe  $\Delta\phi = f(P_m)$ , dont la pente donne une mesure du paramètre B/A à l'aide de la relation (III.29). La calibration du système ( $\eta$ ) peut être absolue, ou relative en utilisant un milieu de référence.

Le principal intérêt de cette méthode est que la mesure du paramètre B/A n'est pas affectée par l'atténuation de l'onde porteuse ( $P_s$ ), puisque qu'elle ne dépend pas de  $P_s$  (cf. éq. III.29) mais de  $P_m$  dont l'atténuation peut être négligée puisque sa fréquence est beaucoup plus faible. Cette méthode ne tient pas compte des effets de la diffraction et les auteurs ne mentionnent pas la précision obtenue avec leur système.

La solution de l'équation transcendante (III.27) est une série de Fourier de composantes fréquentielles en  $n \cdot f_s \pm m \cdot f_m$  avec  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ . En exploitant cette solution établie par Fenlon [32], et sous les conditions  $P_m \gg P_s$  et  $\omega s > \omega m$ , Gong X. F. *et al.* [33] aboutissent pour les composantes en  $f_s \pm f_m$  à la relation asymptotique :

$$P_{f_s \pm f_m}(z) \approx K_{\pm} \cdot z \cdot P_s \cdot P_m \quad \text{avec} \quad K_{\pm} = \frac{(\omega s \pm \omega m) \cdot \beta}{2 \cdot \rho_0 \cdot \omega^3} \quad (\text{III.30})$$

En tenant compte de l'atténuation ils obtiennent pour la composante en  $f_s + f_m$  :

$$P_+(z) = P_{f_s + f_m}(z) \approx K_+ \cdot P_s \cdot P_m \cdot \frac{e^{-\alpha_+ \cdot z} - e^{-(\alpha_m + \alpha_s) \cdot z}}{\alpha_m + \alpha_s - \alpha_+} \quad (\text{III.31})$$

où  $\alpha_m$ ,  $\alpha_s$  et  $\alpha_+$  sont les atténuations aux fréquences  $f_m$ ,  $f_s$  et  $f_s + f_m$ .

Ces relations (III.30-31) sont analogues à celles établies au chapitre I (I.74-80) dans le cas d'une excitation monochromatique et exploitées dans les méthodes directes et comparatives décrites précédemment.

Gong *et al.* [33] ont utilisé la relation (III.31) dans une méthode de mesure du paramètre B/A par insertion et substitution décrites par le dispositif **figure III.7**, dans lequel l'excitation est biharmonique (éq. III.26) et l'analyse spectrale centrée sur la composante en  $f_s + f_m$ . Ils obtiennent donc une expression du paramètre B/A analogue à celle déjà décrite (éq. III.19) et dans laquelle les corrections de la diffraction sont négligées.

Si les mesures effectuées dans différents milieux concordent bien avec ceux donnés dans la littérature, cette technique ne présente pas d'avantage sur la méthode traditionnelle par insertion et substitution (§ III.3.2.4.2.a), sinon une exploitation de la théorie établie par Fenlon [32].

### III.3.4.2 Méthodes utilisant une impulsion photoacoustique :

Cette méthode, mise au point par Y. Qi *et al.* [34], consiste à évaluer la déformation d'une onde sphérique ultrasonore générée par une impulsion optique. Dans le cas d'une onde sphérique, la vitesse de propagation peut s'exprimer sous la forme (cf. chap.I, éq. I.56) :

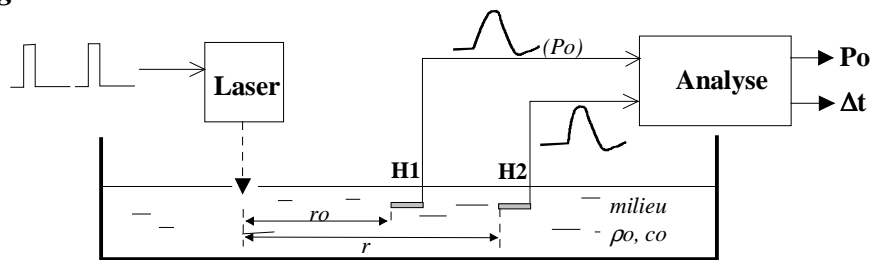
$$c = c_0 + \beta \cdot \frac{P_0 \cdot r_0}{\rho_0 \cdot c_0 \cdot r} \quad \text{(III.32)}$$

où  $P_0$  est le pic de pression à une distance de référence  $r_0$ .

Sous la condition  $\beta \cdot \frac{P_0 \cdot r_0}{\rho_0 \cdot c_0^2} \ll r_0$  le paramètre B/A peut s'exprimer en fonction de la décroissance  $\Delta t$  du temps de montée du front d'onde entre les positions  $r$  et  $r_0$ , soit :

$$B/A = 2 \cdot (\beta - 1) \cong 2 \cdot \left( \frac{\rho_0 \cdot c_0^3 \cdot \Delta t}{r_0 \cdot P_0 \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} - 1 \right) \quad \text{(III.33)}$$

Ainsi la mesure de  $P_0$  et  $\Delta t$  permet d'accéder à la valeur de B/A. Le système de mesure est présenté **figure III.12**.



**Fig. III.12:** Système de mesure utilisant une impulsion photoacoustique.

Un 1<sup>er</sup> hydrophone (H1) est placé en  $r_0 = 2\text{cm}$  et un 2<sup>ème</sup> (H2) en  $r = 4\text{cm}$ . Les valeurs de  $P_0$  et  $\Delta t$  sont obtenues en effectuant la moyenne des mesures sur 30 formes d'onde, soit 30 excitations photoacoustique du milieu.

Les mesures effectuées dans l'eau distillée donnent :  $\Delta t_{\text{moy}} = 6,5 \text{ ns}$  et  $P_{0\text{moy}} = 4,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  soit  $B/A = 4.8$ , ce qui est en bon accord avec les autres valeurs de la littérature.

### III.4 CARACTERISTIQUES DE QUELQUES MILIEUX

#### Méthodes de mesure du paramètre B/A :

- MT = Méthode thermodynamique  
 MAF = Méthode d'amplitude finie :  
     <sup>1</sup> directe par extrapolation  
     <sup>2</sup> directe par moyennage  
     <sup>3</sup> comparative  
     <sup>4</sup> par insertion et substitution (source plane)  
     <sup>5</sup> par mesure de l'extra-atténuation  
     <sup>6</sup> par insertion et substitution (source focalisante)

Sauf indication contraire la référence bibliographique [ ] pour  $c_0$ ,  $\rho_0$  et  $\alpha_0$  correspond à celle du paramètre B/A.

#### LIQUIDES :

Milieu	B/A		T (°C)	$c_0$ (m/s)	$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\alpha_0 \cdot 10^{13}$ (Np.m <sup>-1</sup> .Hz <sup>-2</sup> )
Eau distillée	4,985 ± 0,063	MT [10]	20	1482,1	998,2	0,265 [36]
	5,11 ± 0,20	MT [8]	25	1509	995	
	5,1	MT [9]	26	1497	997	
	5,18 ± 0,033	MT [12]	30			
	5,280 ± 0,021	MT [10]	30	1508,8	995,7	
	5,2	MT [2]	30			
	4,98	MAF <sup>2</sup> [20]	20			
	6,0	MAF <sup>5</sup> [29]	21			
5,3	MAF <sup>1</sup> [4]	30			0,2 [36]	
			24	1494[35,3]		0,25 [35,36]
Ethanol	9,9	MAF <sup>4</sup> [21]	26	1158	789	
	9,5	MAF <sup>4</sup> [21]	26			
	10,4	MT [21]	30			
			23-27	1150 [35]	790 [35]	0,9 [35]
Méthanol	10,0	MAF <sup>6</sup> [24]		1106	796	2,22
	11,2	MAF <sup>5</sup> [29]	21			
Glycol d'éthylène	9,88 ± 0,40	MT [8]	25			
	9,88 ± 0,035	MT [12]	30			
	9,7	MAF <sup>4</sup> [21]	26	1670	1114	
	9,1	MAF <sup>3</sup> [21]	26			
	9,9	MAF <sup>4</sup> [9]	26			
9,88	MAF <sup>2</sup> [20]	30			1,34	
Glycérol (avec 4% eau-->)	8,77	MT [7]	20	1923,1	1261	
	8,58 ± 0,34	MT [8]	25	1899	1239	
	8,96	MAF <sup>2</sup> [20]	30			23,9
				23-27	1986 [35]	1260 [35]



**MILIEUX BIOLOGIQUES :**

Milieu	B/A		T (°C)	co (m/s)	po (kg/m <sup>3</sup> )	$\alpha \cdot 10^{13}$ (Np.m <sup>-1</sup> .Hz <sup>-2</sup> )
	Sang frais (h)	<b>6,0</b>	MT [9]	26 22 37	1561	1075
Sang coagulé (h)	<b>7,3</b>	MAF <sup>4</sup> [9]	26	1586	1075	
Foie (h)	<b>6,54</b>	MT [7]	30	1573	1050	5,41.10 <sup>7</sup> , q = 1±0.1 [39]**
	<b>7,6</b>	MAF <sup>2</sup> [42]	30			
Tissu graisseux(h)	<b>10,9</b>	MT [9]	26	1445	950	7,25.10 <sup>7</sup> , q ≈ 1 [39]**
Tissu mou (h) (valeur moyenne)			in vivo	1540[39]	1058[39]	9,32.10 <sup>7</sup> , q ≈ 1 [39]**
Cerveau (h)			in vivo	1541[39]	1025[39]	9,78.10 <sup>7</sup> , q = 1 [39]**
Os (radius) (h)			≈ 20	3065[38]	1749[38]	
Boite crânienne(h)			in vivo	4080[39]	1912[39]	1,5.10 <sup>3</sup> , q = 2 [39]**
Lait	<b>5,9</b>	MT [9]	26	1531	1025	
	<b>5,88</b>	MAF <sup>4</sup> [33]	26			
	<b>5,1</b>	MAF <sup>4</sup> [9]	26			
(vache)			27			4,6.10 <sup>7</sup> , q = 1 [38]**
Jaune d’œuf	<b>9,5</b>	MAF <sup>6</sup> [24]	20	1487	1055	5,94.10 <sup>4</sup> , q = 1,485**
	<b>8,3±1.5</b>	MT [6]	25			
Blanc d’œuf	<b>5,8</b>	MAF <sup>6</sup> [24]	20	1526	1062	3.40.10 <sup>5</sup> , q = 1,263**
	<b>5,2±1.3</b>	MT [6]	25			

(h) : humain.

D’autres valeurs du paramètre B/A des milieux biologiques peuvent être trouvées dans la publication de L. BjørnØ [42].

**MILIEUX DIVERS :**

Milieu	co (m/s)	po (kg/m <sup>3</sup> )	$\alpha \cdot 10^{13}$ (Np.m <sup>-1</sup> .Hz <sup>-q</sup> )
Air	343[39]	1,21[39]	1,38.10 <sup>3</sup> , q = 2 [39]**
Aluminium	6300[39]	2700[39]	2,07.10 <sup>6</sup> , q = 1 [39]**
Plexiglas	2680[40]	1180[40]	2,88.10 <sup>8</sup> , q = 1 [41]**

\*\* : valeur de  $\alpha$  et q déduite des données de la référence [ ].

### III.5 CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes méthodes de mesure du paramètre de non linéarité B/A décrites dans la littérature.

Les méthodes thermodynamiques se basent sur la mesure de vitesse et de pression pour remonter au paramètre B/A. Ces méthodes sont précises mais nécessitent une instrumentation lourde et complexe. Elles ne permettent pas des mesures du paramètre B/A in vivo.

Dans les méthodes d’amplitude finie c’est la distorsion de l’onde acoustique qui permet l’obtention du paramètre B/A. Ce dernier est déduit de façon indirecte en quantifiant la distorsion d’une onde ultrasonore se propageant dans un milieu non linéaire.

Ces méthodes, moins précises mais plus simples à mettre en œuvre, peuvent s'adapter à des mesures in vivo pour la caractérisation des milieux biologiques.

Dans cette catégorie, les méthodes comparatives sont intéressantes puisqu'elles ne nécessitent pas la calibration préalable des transducteurs.

Dans le chapitre suivant nous effectuerons une analyse détaillée de la méthode comparative simple, afin de déterminer les meilleures conditions d'exploitations expérimentales pour la mesure du paramètre B/A.

Le dernier chapitre sera ensuite consacré à cette méthode utilisée en mode pulse-écho, qui est la technique la plus adaptée pour la caractérisation in vivo des milieux biologiques.

### Bibliographie

1. LAW W. K., FRIZZELL L.A., DUN F.," Comparison of thermodynamic and finite amplitude methods of B/A measurement in biological materials" J.Acoust.Soc.Am., Vol.74, N°4, pp. 1295-1297, 1983.
2. BEYER R.T. "Parameter of nonlinearity in fluids " J.Acoust.Soc.Am.,Vol.32, N°6, pp.719-721, 1960.
3. WILSON W. D. " Speed of sound in distilled water as a function of temperature and pressure " J.Acoust.Soc.Am., Vol.31, N°8, pp. 1067-1072, 1959.
4. LAW W. K., FRIZZELL L.A. , DUN F. " Determination of the nonlinearité parameter B/A of biological media " ". Ultrasound in Med. & Biol., Vol. 11, N°2, pp. 307-318, 1985.
5. ENDOH N., UEHARA M., OGATA H., MIYAWAKI K., KOHNO M. " Simple measurement method of nonlinearity parameter B/A of tissue by propagation time difference " Jpn. J. Appl. Phys., Vol.27, Sup. 27-1, pp. 76-78, 1987.
6. ENDOH N., ASHAHINA T., KOJIMA K., MOGI R., NISHIOKA T. " Experimental investigation of the nonlinearity parameter by time of flight method" Frontiers of Nonlinear Acoustics. M.F. HAMILTON and DT BLACKSTOCK Eds. 12<sup>th</sup> ISNA. Elsevier, London , pp 391-396, 1990.
7. SEHGAL C.M., BAHN R.C., GEENLEAF J.F. " Measurement of the acoustic nonlinearity parameter B/A in human tissues by a thermodynamic method" J.Acoust.Soc.Am., Vol.76, N°4, pp. 1023-1029, 1984.
8. ZHU Z. M., ROOS M.S., COBB W.N., JENSEN K." Determination of the acoustic nonlinearity parameter B/A from phase measurements " J.Acoust.Soc.Am., Vol.74, N°5, pp. 1518-1521, 1983.
9. GONG X.F., ZHU Z.M., SHI T., HUANG J. "Determination off the acoustic nonlinearity parameter in biological media using FAIS and ITD methods" J.Acoust.Soc.Am., Vol.86, N°1, pp. 1-5, 1989.
10. EVERBACH E.C., APFEL R.E.. "An interferometric technique for B/A measurement " J.Acoust.Soc.Am., Vol.98, N°6, pp. 3428-3438, 1995.
11. ERRABOLU R.L., SEHGAL C., BAHN R.C., GREENLEAF J.F. " Measurement of ultrasonic nonlinear parameter in excised fat tissues " Ultrasound in Med. & Biol., Vol.14, N°2, pp. 137-146, 1988.
12. ZHANG J., DUNN F. " A small volume thermodynamic system for B/A measurement" J.Acoust.Soc.Am., Vol.89, N°1, pp. 73-79, 1991.
13. KRASSILNIKOV V.A., SHKLOVSKAYA-KORDY V.V., ZAREMBO L.K., " On the propagation of ultrasonic waves of finite amplitude in liquids " J.Acoust.Soc.Am., Vol.29, N°5, pp. 642-647, 1957.

14. ADLER L., HIEDEMANN E.A. "Determination of the nonlinearity parameter B/A for water and m-xylene " J.Acoust.Soc.Am., Vol.34, N°4, pp. 410-412, 1962.
15. SAPRIEL J. " L'acousto - optique " Masson , 1976.
16. LAW W.K., FRIZZELL L.A., DUN F. " Ultrasonic determination of the nonlinearity parameter B/A for biological media ". J.Acoust.Soc.Am., Vol.69, N°4, pp. 1210-1212, 1981.
17. DUNN F., LAW W.K., FRIZZELL L.A. " Nonlinear ultrasonic wave propagation in biological materials " Ultrasonics Symposium Proceedings, IEEE, New York, 1981.
18. WU J., ZHU Z. "Measurements of the effective nonlinearity parameter B/A of water containing trapped cylindrical bubbles" J.Acoust.Soc.Am., Vol.89, N°6, pp. 2634-2639, 1991.
19. ZHANG J., DUNN F. "In vivo B/A determination in a mammalian organ" J.Acoust.Soc.Am., Vol.81, N°5, pp. 1635-1637, 1987.
20. COBB W.N " Finite amplitude method for the determination of the acoustic nonlinearity parameter B/A " J.Acoust.Soc.Am . Vol.73, N°5, pp. 1525-1531 ,1983.
21. GONG X.F., FENG R., ZHU C., SHI T. "Ultrasonic investigation of the nonlinearity parameter B/A in biological media " J.Acoust.Soc.Am., Vol.76, N°3, pp. 949-950, 1984.
22. ZHANG J., KUHLENSCHMIDT M.S., DUNN F. " Influences of structural factors of biological media on the acoustic nonlinearity parameter B/A " J.Acoust.Soc,Am., Vol.89, N1, pp. 80-91, 1991.
23. SHKLOVSKAYA-KORDY V.V. "An acoustic method of determining the internal pressure in a liquid " Sov.Phy. Acoust., Vol.9, N° 1, pp. 82-85, 1963.
24. SAITO S. "Measurement of the acoustic nonlinearity parameter in liquid media using focused ultrasound" J.Acoust.Soc.Am., Vol.93, N°1, pp. 162-172, 1993.
25. SAITO S., TANAKA H. "Harmonic components of finite amplitude sound in a focused gaussian beam" J.Acoust.Soc.Jpn., Vol. E11, N°4, pp. 225-233, 1990.
26. SAITO S., TANAKA H. "Harmonic components of finite amplitude sound in a focused gaussian beam transmitting through a liquid layer" J.Acoust.Soc.Jpn., Vol. E12, N°4, pp. 169-178, 1991.
27. BLACKSTOCK D.T. " Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite- amplitude sound waves". J.Acoust.Soc.Am. Vol.36, N°3, pp. 534-542, 1964.
28. BERKTAY H.O. " Finite-amplitude effects in acoustic propagation in fluids ". Proc. International School of Physics « Enrico Fermi » Course LXIII : New directions in physical acoustics. pp. 369-408, 5<sup>th</sup> –17<sup>th</sup> august 1974.

29. KASHOOLI H.A., DOLAN P.J., Jr., SMITH C.W. " Measurement of the acoustic nonlinearity parameter in water, methanol, liquid nitrogen, and helium-II by two different methods : A comparison " J.Acoust.Soc.Am., Vol.82, N°6, pp. 2086-2089, 1987.
30. LIU D. C., NIKOONAHAD M. "Pulse-echo measurement using variable amplitude excitation" Ultrasonic symposium, pp. 1047-1051, 1989.
31. CAIN C. A., NISHIYAMA H., KATAKURA K. "On ultrasonic methods for measurement of the nonlinear parameter B/A in fluid-like media" J.Acoust.Soc.Am., Vol.80, N°2, pp. 685-688, 1986.
32. FENLON F. H. "An extension of the Bessel-Fubini series for a multiple-frequency cw acoustic source of finite amplitude" J.Acoust.Soc.Am., Vol.51, N°1(2), pp. 284-289, 1972.
33. GONG X. F., ZHU Z. M., FAN B., ZHANG D. "Parametric effect and nonlinear parameter in biological media" Frontiers of Nonlinear Acoustics. M.F. HAMILTON and DT BLACKSTOCK Eds. 12<sup>th</sup> ISNA. Elsevier, London , pp 397-401, 1990.
34. QI Y., XU L., ZHANG D., ZHOU R., ZHANG X., GAN C., LIN J. "Determination of the nonlinearity parameter of the liquid using spherical finite-amplitude photoacoustic pulse" Journal de Physique IV, Colloque C7, vol. N°4, jui. 1994.
35. WILLARD G.W. " Ultrasonic absorption and velocity measurement in numerous liquids ". J.Acoust.Soc.Am. Vol.12, N°6, pp. 438-4d8, 1941.
36. SMITH M.C., BEYER R.T. " Ultrasonic absorption in water in the temperature range 0°- 80°C " J.Acoust.Soc.Am., Vol.20, N°5, pp. 608-610, 1948.
37. NARAYANA P.A., OPHIR J. "On the validity of the linear approximation in the parametric measurement of attenuation in tissues ". Ultrasound in Med. & Biol., Vol.9, N°4, pp. 357-361, 1983.
38. GOSS S.A., JOHNSTON R.L., DUNN F. "Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues" J.Acoust.Soc.Am., Vol.64, N°2, pp. 423-457, 1978.
39. JONES J.P., LEEMAN S. "La caracterisation des tissus par ultrasons" Acta Electronica , Vol.26, pp. 3-31, 1984.
40. GAZANHES C., JESSEL M. " Ultrasons " Techniques de l'ingénieur , Form. E 2694, 1970.
41. PERDIJON J. " Le contrôle non destructif par ultrasons " éd. Hermes, 1993.
42. BJØRNØ L. "Characterization of biological media by means of their non-linearity" Ultrasonics, Vol. N°24, sept. 1986.

## **CHAPITRE IV**

### **ANALYSES THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA METHODE COMPARATIVE**



**ANALYSE THEORIQUE DE LA METHODE  
COMPARATIVE**





## IV.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous établirons les expressions théoriques complètes du paramètre B/A, en vue de deux procédures de mesure utilisant le principe de la méthode comparative simple (chap. III, § 3.2.4.1).

Par la suite, l'étude de ces deux procédures se base sur l'élaboration d'un modèle théorique du système de mesure, permettant de relier les grandeurs électriques aux grandeurs acoustiques. Avec le modèle proposé nous pourrions analyser les conséquences sur les mesures lorsque les sensibilités des transducteurs ne sont pas prises en compte, l'intérêt de la méthode comparative étant de réussir à s'affranchir de la calibration de ces derniers.

Cette étude permettra donc de définir les meilleures conditions d'exploitation expérimentale du système pour la mesure du paramètre B/A.

Des expérimentations seront ensuite effectuées pour valider le modèle théorique, que nous exploiterons pour mesurer le paramètre B/A de différents milieux.

## IV.2 EXPRESSIONS DU PARAMETRE B/A POUR LA METHODE COMPARATIVE SIMPLE

### IV.2.1 EXPRESSIONS COMPLETES DU PARAMETRE B/A

#### IV.2.1.1 Principe du système de mesure

Le modèle théorique est établi sur la base de la configuration géométrique présentée *figure IV.1* :

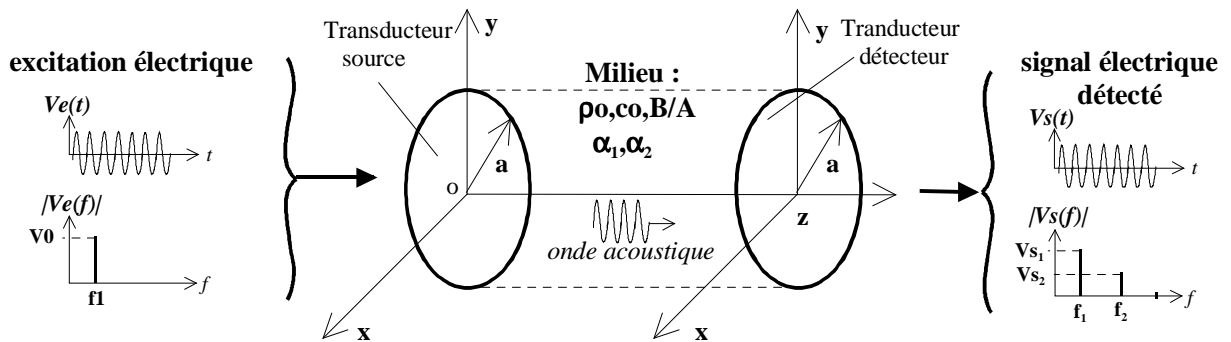


Fig IV.1: Géométrie de la cellule de mesure.

Les deux transducteurs sont circulaires, de même rayon  $a$ , et placés suivant le même axe avec leur face avant parallèles. L'excitation électrique  $V_e$  du transducteur source est supposée permanente et sinusoïdale de fréquence  $f_1$ . En fait, dans la pratique elle est constituée de trains d'onde de durée suffisamment longue pour se placer dans la condition d'excitation permanente (cw), mais suffisamment courte pour éviter l'apparition d'ondes stationnaires entre les transducteurs.

Le transducteur détecteur convertit la pression moyenne<sup>22</sup>  $P(z,t)$  reçue sur sa face avant en signal électrique  $V_s(z,t)$  de composantes spectrale  $(V_{s1}, f_1)$  et  $(V_{s2}, f_2)$ . Le milieu de propagation est défini par sa masse volumique  $\rho_0$ , la vitesse de propagation de l'onde acoustique  $c_0$ , son paramètre de non linéarité  $B/A$ , et ses atténuations  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  aux fréquences  $f_1$  et  $f_2=2.f_1$ . L'expression du fondamental  $(V_{s1}, f_1)$  sera établi dans le cadre de l'acoustique linéaire, et celle du second harmonique  $(V_{s2}, f_2)$  sera définie à l'aide de l'approximation quasi linéaire de l'équation de propagation de l'onde de pression acoustique. C'est à dire que l'on néglige les

<sup>22</sup> Pour simplifier l'écriture nous noterons  $P_i(z)$  le module de la pression moyenne  $|\langle p_i(z) \rangle|$ .

composantes harmoniques d'ordre supérieur à 2 et on suppose que la génération de l'harmonique d'ordre 2 n'engendre pas de décroissance appréciable du fondamental.

La pression moyenne  $P_0$  dont dépend le second harmonique  $P_2$  peut être déduite de l'excitation  $V_0$  ou de la mesure de la composante  $V_{s1}$  du fondamental détecté.

Ces deux cas génèrent deux procédés de mesure du paramètre  $B/A$  :

#### IV.2.1.2 Procédure par mesure des composantes $V_{s2}$ et $V_{s1}$ .

Nous avons vu au chapitre II que la pression moyenne du fondamental reçue sur la surface du détecteur s'exprimait sous la forme:  $P_1(z) = P_0 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot z} \cdot |D_1(z, a, k)|$  (IV.1)

où  $P_0$  est la pression moyenne à la surface du transducteur source et  $D_1(z, a, k)$  la fonction de correction de la diffraction pour le fondamental (§ II.3.2), qui dépend de la géométrie du système  $(a, z)$ , de la fréquence et de la vitesse de propagation ou plus simplement du nombre d'onde  $k=2 \cdot \pi \cdot f_1 / c_0$ .

Pour la pression moyenne du second harmonique nous prendrons notre solution analytique (II.76), valable quelle que soit l'ampleur de l'atténuation :

$$P_2(z) = K \cdot P_0^2 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha_2 \cdot z} - e^{-2 \cdot \alpha_1 \cdot z}}{2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2} \right) \cdot \left| 1 - C \cdot \sqrt{\frac{z}{k \cdot a^2}} \cdot e^{-j \cdot \pi / 4} \right| \text{ avec } K = \frac{\pi \cdot f_1 \cdot (2 + B/A)}{2 \cdot \rho_0 \cdot c_0^3} \quad (\text{IV.2})$$

Avec (IV.1) nous pouvons donc l'exprimer en fonction du fondamental, sous la forme :

$$P_2(z) = K \cdot P_1(z)^2 \cdot F(z, \alpha_1, \alpha_2) \cdot D_{12}(z, a, k) \quad (\text{IV.3})$$

Cette expression tient compte des effets de l'atténuation et de la diffraction, et est d'autant plus exacte que  $k \cdot a$  est grand (approximation parabolique).

$F(z, \alpha_1, \alpha_2)$  prend en compte l'atténuation, telle que  $\lim_{\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0} [F(z, \alpha_1, \alpha_2)] = z$  avec

- $F(z, \alpha_1, \alpha_2) = z \cdot e^{(\alpha_1 - \alpha_2 / 2) \cdot z}$  en milieu moyennement dissipatif et pour la plupart des milieux biologiques ( $q \approx 1$ ). (IV.4.a)

- $F(z, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{(2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2) \cdot z} - 1}{2 \cdot \alpha_1 - \alpha_2}$  en milieu très dissipatif, et quelle que soit l'ampleur de l'atténuation. (IV.4.b)

L'erreur introduite par l'approximation (IV.4.a) de l'expression (IV.4.b) est inférieure à 1% si  $(\alpha_2 - 2 \cdot \alpha_1) \cdot z < 0.5$ .

$D^{12}(z, a, k)$  prend en compte les effets de la diffraction sur le fondamental et le second harmonique, telle que  $\lim_{k \cdot a \rightarrow \infty} [D_{12}(z, a, k)] = 1$  et  $D_{12}(z, a, k) = \left| \frac{D_2(z, a, k)}{D_1(z, a, k)^2} \right|$  (IV.5)

Les fonctions de correction de la diffraction  $D_1$  et  $D_2$  ont été développées au chapitre II (§ 3.2 – 3.3.3 – 3.3.4).

Les grandeurs directement accessibles étant les composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  du spectre du signal électrique détecté à la sortie du système (fig. IV.1), nous définissons les sensibilités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  du transducteur détecteur telles que :

$$\eta_1 = \frac{V_{s1}}{P_1} \text{ (V/Pa)} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \frac{V_{s2}}{P_2} \text{ (V/Pa)} \quad (\text{IV.6})$$

Avec les relations (IV.3) et (IV.6), et en appliquant la procédure de la méthode comparative simple décrite au chapitre III (§ 3.2.4.1), nous pouvons établir l'expression complète du paramètre B/A :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \frac{Vs_{2x}}{Vs_{2r}} \left(\frac{Vs_{1r}}{Vs_{1x}}\right)^2 \cdot F\eta_{rx} \cdot \{FD_{12} \cdot F\alpha_{12}\} \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \left[\left(\frac{B}{A}\right)_r + 2\right] - 2 \quad (\text{IV.7.a})$$

où nous définissons :

$$F\eta_{rx} = \left| \frac{\eta_{2r} \cdot \eta_{1x}^2}{\eta_{1r}^2 \cdot \eta_{2x}} \right| = \left| F\eta_r \cdot F\eta_x^{-1} \right| \quad (\text{IV.7.b})$$

$$F\alpha_{12} = \frac{F(z_r, \alpha_{1r}, \alpha_{2r})}{F(z_x, \alpha_{1x}, \alpha_{2x})} \quad (\text{IV.7.c})$$

et 
$$FD_{12} = \left| \frac{D_{12}(z_r, a, k_r)}{D_{12}(z_x, a, k_x)} \right| = \left| \frac{D_2(z_r, a, k_r)}{D_2(z_x, a, k_x)} \right| \cdot \left| \frac{D_1(z_x, a, k_x)^2}{D_1(z_r, a, k_r)^2} \right| = FD_2 \cdot FD_1 \quad (\text{IV.7.d})$$

comme étant respectivement, la **fonction de sensibilité** du système de mesure, la **fonction d'atténuation**, et la **fonction de diffraction** pour le fondamental et le second harmonique. Les indices r et x désignent respectivement le milieu de référence et le milieu analysé.

#### IV.2.1.3 Procédure par mesure des composantes Vs<sub>2</sub> et Vo.

Dans ce cas la pression moyenne Po se déduit de l'excitation Vo avec la sensibilité en émission du transducteur source :

$$\eta_o = \frac{Po}{Vo} \quad (Pa/V) \quad (\text{IV.8})$$

Dans ce procédé on mesure donc les tensions Vo<sub>r</sub> et Vo<sub>x</sub> au lieu des composantes du fondamental Vs<sub>1r</sub> et Vs<sub>1x</sub>.

L'expression du paramètre B/A (IV.7.a) se trouve modifiée sous la forme :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \frac{Vs_{2x}}{Vs_{2r}} \left(\frac{Vo_r}{Vo_x}\right)^2 \cdot F\eta'_{rx} \cdot \{FD'_{12} \cdot F\alpha'_{12}\} \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \left[\left(\frac{B}{A}\right)_r + 2\right] - 2 \quad (\text{IV.9.a})$$

avec 
$$F\eta'_{rx} = \left| \frac{\eta_{2r} \cdot \eta_{o_r}^2}{\eta_{2x} \cdot \eta_{o_x}^2} \right| = \left| \frac{F\eta'_r}{F\eta'_x} \right| \quad (\text{IV.9.b}) \quad \text{et} \quad F\alpha'_{12} = F\alpha_{12} \cdot e^{-2 \cdot (\alpha_{1r} \cdot z_r - \alpha_{1x} \cdot z_x)} \quad (\text{IV.9.c})$$

La correction de diffraction sur le fondamental n'intervient plus, et :  $FD'_{12} = FD_2$  (IV.9.d)

#### IV.2.2 APPROXIMATIONS ET EXPRESSIONS SIMPLIFIEES DU PARAMETRE B/A

Les approximations portent sur les trois fonctions définies précédemment,  $F\eta^{(.)}_{rx}$ ,  $F\alpha^{(.)}_{12}$  et  $FD^{(.)}_{12}$ . Pour les deux procédures, elles conduisent à :

- $FD_{12} = FD'_{12} = 1$  si on néglige l'influence de la diffraction.
- $FD_{12} = FD_2$  si la diffraction sur le fondamental est négligée dans la première procédure (§IV.2.1.2).
- $F\alpha_{12} = F\alpha'_{12} = z_r/z_x$  si on néglige l'influence de l'atténuation.
- $F\eta_{rx} = F\eta'_{rx} = 1$  si on néglige l'influence des sensibilités des transducteurs.

Toutes ces approximations se feront évidemment au détriment de la précision sur la mesure du paramètre B/A.

- Sans dégrader la précision de la mesure il est possible, sous certaines conditions, de simplifier la fonction d'atténuation  $F\alpha_{12}$ . En effet, dans le cas de la procédure par mesure des composantes  $V_{s2}$  et  $V_{s1}$  (§IV.2.1.2) en milieu moyennement dissipatif et pour la plupart des milieux biologiques (IV.4.a), cette fonction s'exprime sous la forme :

$$F\alpha_{12} = \frac{z_r}{z_x} \cdot e^{[(\alpha_{1r} - \alpha_{2r}/2) \cdot z_r - (\alpha_{1x} - \alpha_{2x}/2) \cdot z_x]} \quad (\text{IV.10})$$

Cette relation est simplifiable en fonction des choix des milieux de référence et d'analyse. En effet, nous avons vu au chapitre I que :

- Pour les liquides on a  $\alpha_2 = 4 \cdot \alpha_1$
- Pour la plupart des milieux biologiques on a  $\alpha_2 \approx 2 \cdot \alpha_1$ , c'est à dire que  $q \approx 1$  (§ I.6.2.1 et § III.4).

Les différentes combinaisons sont présentées dans le tableau ci-dessous :

		Milieu de référence	
		Liquide ( $\alpha_2=4 \cdot \alpha_1$ )	Biologique ( $\alpha_2=2 \cdot \alpha_1$ )
Milieu à analyser	Liquide ( $\alpha_2=4 \cdot \alpha_1$ )	$\frac{z_r}{z_x} \cdot e^{\alpha_{1x} \cdot z_x - \alpha_{1r} \cdot z_r}$ [ a ]	$\frac{z_r}{z_x} \cdot e^{\alpha_{1x} \cdot z_x}$ [ b ]
	Biologique ( $\alpha_2=2 \cdot \alpha_1$ )	$\frac{z_r}{z_x} \cdot e^{-\alpha_{1r} \cdot z_r}$ [ c ]	$\frac{z_r}{z_x}$ [ d ]

**Tableau IV.1:** Simplifications de la fonction d'atténuation dans le cas d'un milieu moyennement dissipatif et pour la plupart des milieux biologiques.

Le cas [ d ] est intéressant car il dispense de la connaissance des coefficients d'atténuation, mais il ne s'applique que pour la mesure du paramètre B/A des milieux biologiques et nécessite un milieu de référence de caractéristiques équivalentes.

La procédure par mesure des composantes  $V_{s2}$  et  $V_o$  (§ IV.2.1.3) ne comporte pas ce cas particulier pour la fonction  $F\alpha_{12}'$ , puisque des termes d'atténuation seront toujours présents (cf éq. IV.9.c).

Notons que la précision est améliorée si la géométrie du système est fixe, c'est à dire  $z_x = z_r$   $\implies z_r/z_{zx} = 1$ , ce qui dispense de la mesure des positions.

On constate que les méthodes comparatives simples décrites dans la littérature, et présentées au chapitre précédent, utilisent en fait des approximations et simplifications de nos expressions complètes (IV.7.a) et (IV.9.a). Ainsi :

- Zhang *et al.* [2] exploitent la première procédure (§ IV.2.1.2) en se plaçant dans le cas [ d ] pour supprimer les effets de l'atténuation, et ils ne tiennent pas compte de la diffraction sur le fondamental en considérant  $FD_1 = 1$ , soit  $FD_{12} = FD_2$ . De plus, ils négligent l'influence de la fonction de sensibilité  $F\eta_{12}$ , soit  $F\eta_{12} = 1$ , car l'impédance acoustique du milieu de référence est voisine de celle du milieu analysé.
- Gong *et al.* [1] exploitent la deuxième procédure (§ IV.2.1.3) en maintenant l'excitation constante ( $V_{o_x} = V_{o_r}$ ). Ils ont exploité une simplification de l'expression (IV.9.a) en négligeant les effets de la diffraction, des sensibilités et de l'atténuation, soit :  $FD_2 = F\eta_{rx} = 1$ , et  $F\alpha_{12}' = F\alpha_{12} \cdot z_r/z_x = 1$  la géométrie de leur système étant fixe ( $z_x = z_r$ ).

Le principal intérêt des méthodes comparatives vient de la possibilité de mesurer le paramètre  $B/A$  sans qu'il soit nécessaire de calibrer les transducteurs, ce que ne permettent pas les méthodes directes. Mais pour cela il faut négliger l'influence de la fonction de sensibilité dans les expressions du paramètre  $B/A$ , ce qui dégrade inévitablement la précision de la mesure. Cependant, pour connaître l'importance de cette fonction il est possible d'établir son modèle théorique dépendant des paramètres du système de mesure (fréquence, transducteurs, milieux).

Cette démarche nous conduit tout naturellement à modéliser le système de mesure en couplant les fonctions de transfert électromécaniques des transducteurs aux solutions des équations de propagation de l'acoustique linéaire (IV.1) et non linéaire (IV.2).

Le modèle ainsi obtenu nous permettra de simuler les deux procédures de mesure décrites précédemment (IV.7.a et 9.a), afin d'établir les conditions optimales d'exploitation expérimentale.

### IV.3 MODELISATION DU SYSTEME DE MESURE

#### IV.3.1 SYSTEME DE MESURE

Le schéma suivant décrit les éléments fonctionnels du système de mesure.

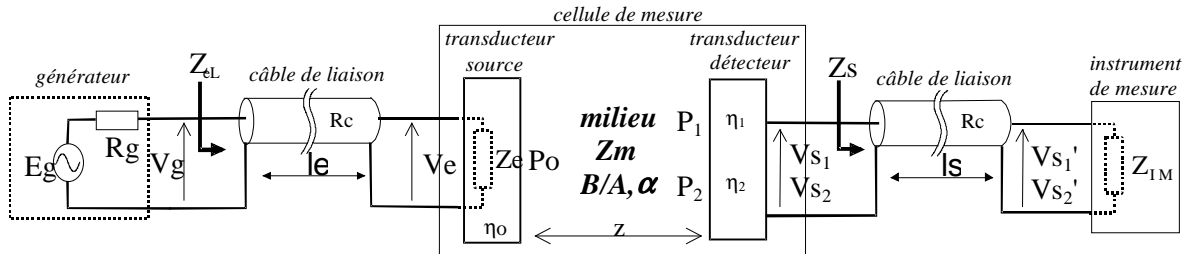


Fig IV.2 : Système de mesure du paramètre  $B/A$  par la méthode comparative<sup>23</sup>.

Pour simuler le système de mesure présenté *figure IV.2*, il est nécessaire d'établir le modèle électroacoustique des transducteurs afin de déterminer l'impédance d'entrée  $Z_e$  et les sensibilités  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . De plus, aux fréquences de travail de quelques MHz, l'influence des câbles de liaison doit être prise en compte, en particulier pour la procédure par mesure des composantes  $V_0$  et  $V_{S2}$ .

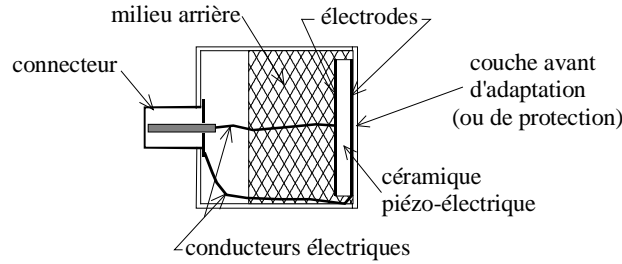
#### IV.3.2 MODELISATION DU TRANSDUCTEUR

Un transducteur ultrasonore est un convertisseur réciproque d'énergie acoustique en énergie électrique, cette conversion étant réalisée au moyen des effets piézo-électriques direct et inverse.

Dans sa version la plus simple un transducteur est constitué d'une céramique piézo-électrique métallisée sur ses deux faces, et d'un milieu arrière (*Fig IV.3*).

Précisons que par suite de leur faible rendement, les monocristaux piézo-électriques utilisés à l'origine, tel que le quartz ( $SiO_2$ ), sont remplacés par des céramiques ferroélectriques polarisées possédant les propriétés de la piézo-électricité naturelle. Les plus utilisées dans les applications d'acoustique sont les titanates zirconates de plomb (PZT) [3,4].

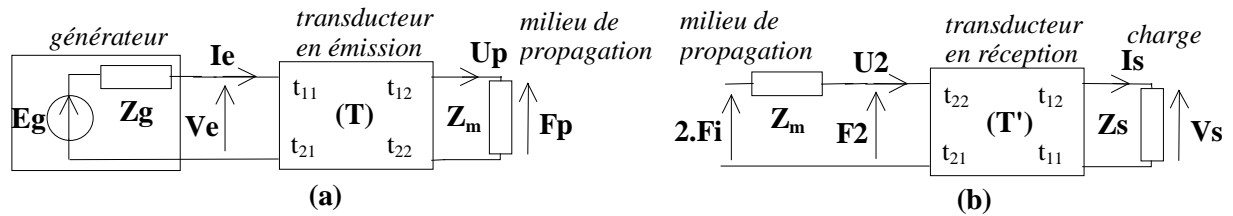
<sup>23</sup> Un transformateur d'impédance peut être placé entre le générateur et la source pour maximiser le transfert de puissance, mais nous l'omettrons dans cette étude car sa sélectivité perturberait l'analyse fréquentielle du système.



**Fig IV.3: Constitution d'un transducteur.**

**IV.3.2.1 Modèle d'un transducteur en émission et en réception [8,9,10,11,12,13]**

Sur la base du modèle électrique de Mason, adapté par Sittig pour une représentation matricielle, on peut modéliser le transducteur fonctionnant en émission (source) ou en réception (détecteur). Les différentes équations et relations (A4.xx) conduisant à ces modèles sont présentées en annexe du chapitre IV.



**Fig IV.4: Modélisation du transducteur en émission (a) et en réception (b).**

**Emission (fig IV.4.a):**

La relation (A4.7) définit directement le transducteur en mode émission, auquel on associe le générateur d'excitation électrique:

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} F_p \\ U_p \end{pmatrix} \quad \text{(IV.11)}$$

**Réception (fig IV.4.b):**

En mode réception la relation matricielle (A4.7) se transforme en :

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = T' \cdot \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T' = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix} \quad \text{puisque} \quad \det(T) = 1 \quad \text{(IV.12)}$$

Dans ce mode la force F2 communiquée au transducteur est composée de la force incidente  $F_i = F_p$  et de la force de réflexion  $F_r$  telle que  $F_2 = F_i + F_r$ . La vitesse vibratoire U2 vaut dans ce cas  $U_2 = (F_i - F_r)/Z_m$ , ce qui conduit à la relation  $F_2 = 2.F_i - U_2.Z_m$  modélisée **figure IV.4.b**.

Toutes les impédances acoustiques ( $Z_T, Z_B, Z_m$ ) de ces modèles, et ceux de l'annexe, sont exprimées en [Rayl.m<sup>2</sup>].

**IV.3.2.2 Restrictions et validations des modèles théoriques**

Les modèles précédents sont extrêmement souples d'emploi et permettent de prédire avec une précision satisfaisante le comportement du transducteur. Cependant, des écarts entre les caractéristiques théoriques et réelles peuvent apparaître pour les raisons suivantes [7,9] :

- Les pertes mécaniques et diélectriques sont négligées. Ces dernières sont d'autant plus importantes que la fréquence de travail est élevée.

- Les effets de bords sont négligés. Ceux-ci sont d'autant plus important que la section (A) du transducteur est petite.
- Le modèle propose des relations linéaires entre les grandeurs électriques et mécaniques, ce qui n'est pas rigoureusement exact surtout pour les puissances élevées.

Des simulations des différents modèles ont montré la bonne concordance entre la théorie et l'expérimentation [7,8,13,14,15].

### IV.3.3 EXPRESSION DES SENSIBILITES

#### IV.3.3.1 Sensibilités en réception $\eta_1$ et $\eta_2$ :

Elles ont été définies par  $\eta_1 = V_{s1}/P_1$  et  $\eta_2 = V_{s2}/P_2$  aux fréquences  $f_1$  et  $f_2 = 2.f_1$ ,  $f_2$  étant a priori la fréquence propre du transducteur détecteur (cf. A4.4.4) afin d'avoir la meilleure sensibilité sur le second harmonique  $P_2$ , celui ci étant beaucoup plus faible que le fondamental  $P_1$ . Nous verrons cependant que ce choix n'est pas forcément le plus judicieux.

La sensibilité en réception  $\eta_{rec} = V_s/P_i$ , avec  $P_i$  la pression moyenne incidente exercée sur le transducteur, s'exprime à l'aide de la force acoustique incidente  $F_i$  par :  $\eta_{rec} = \frac{V_s.A}{F_i}$  où A est la surface de réception du transducteur. Et avec le modèle du transducteur en réception (**fig. IV.5**) on obtient l'expression théorique de la sensibilité d'un transducteur utilisé en détecteur de pression acoustique :

$$\eta_{rec}(f, Z_m, Z_B, Z_s) = \frac{2.A}{Z_m.A \left( t_{21}(f, Z_B) + \frac{t_{11}(f, Z_B)}{Z_s} \right) + \left( t_{22}(f, Z_B) + \frac{t_{12}(f, Z_B)}{Z_s} \right)} \quad (V/Pa) \quad (\text{IV.13})$$

où ici  $Z_m = \rho_m.c_m$  (en rayl). Les paramètres de transfert  $t_{11}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$  et  $t_{22}$  déterminés à l'aide des relations (A4.7-6-5.2-5.1, annexe) sont fonction de la fréquence, des caractéristiques de la céramique, de l'impédance acoustique du milieu arrière ( $Z_B$ ) et de celle de la couche avant éventuelle ( $Z_C$ ).

En pratique les termes en  $Z_s$  peuvent être souvent négligés (câble + impédance d'entrée  $Z_{IM}$  de l'instrument de mesure ou sonde haute impédance), et l'expression de la sensibilité se simplifie sous la forme :

$$\eta_{rec}(f, Z_m, Z_B) \approx \frac{2.A}{Z_m.A.t_{21}(f, Z_B) + t_{22}(f, Z_B)} \quad (V/Pa) \quad (\text{IV.14})$$

Les sensibilités en réception sont donc définies par<sup>24</sup> :

$$\eta_1 = \eta_{rec}(f_1, Z_m, Z_B) \quad \text{et} \quad \eta_2 = \eta_{rec}(f_2, Z_m, Z_B) = \eta_{rec}(2.f_1, Z_m, Z_B) \quad (\text{IV.15})$$

#### IV.3.3.2 Sensibilité en émission $\eta_0$ :

Elle est définie par  $\eta_0 = P_o/V_o$  à la fréquence  $f_1$ , où  $P_o = F_p/A$  est la pression moyenne sur la face avant du transducteur engendrée par l'amplitude  $V_e = V_o$  de l'excitation. A partir du modèle du transducteur en émission (fig IV.4) on déduit :

<sup>24</sup> Nous supposons ici l'absence de couche avant, et dans le cas contraire il suffit de tenir compte de la matrice C dans l'expression des coefficients  $t_{ij}$  (cf A4.6).



$$\eta_{em}(f, Z_m, Z_B) = \frac{1}{A \left( t_{11}(f, Z_B) + \frac{t_{12}(f, Z_B)}{Z_m \cdot A} \right)} \quad (Pa/V) \quad (IV.16)$$

où ici  $Z_m = \rho_m \cdot c_m$  (en rayl), et  $\eta_0 = \eta_{em}(f_1, Z_m, Z_B)$  (IV.17)

#### IV.3.4 EXPRESSION DE L'IMPEDANCE ELECTRIQUE DU TRANSDUCTEUR

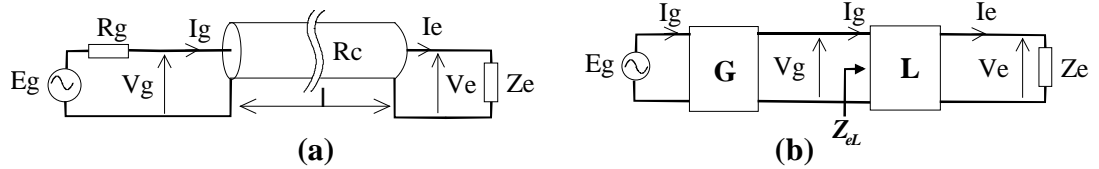
L'impédance d'entrée  $Z_e = V_e/I_e$  du transducteur se déduit du modèle en émission (fig IV.4). On obtient :

$$Z_e(f, Z_m, Z_B) = \frac{t_{11}(f, Z_B) \cdot Z_m \cdot A + t_{12}(f, Z_B)}{t_{21}(f, Z_B) \cdot Z_m \cdot A + t_{22}(f, Z_B)} \quad (IV.18)$$

#### IV.3.5 INFLUENCE DES CABLES DE LIAISON

Nous établissons ici les relations permettant de relier les tensions aux entrées/sorties des câbles de liaison du système de mesure (fig. IV.2). Ces relations, établies à partir du modèle d'une ligne de transmission décrit en annexe, mettront en évidence l'influence des câbles de liaison et les éventuelles précautions à prendre pour les mesures.

##### IV.3.5.1 Modélisation de l'ensemble : Générateur - Ligne - Transducteur source



**Fig IV.5:** Modélisation du circuit d'excitation.

Le générateur d'impédance  $R_g = 50 \Omega$  délivre un signal sinusoïdal d'amplitude  $E_g$  pour attaquer, par l'intermédiaire d'une ligne de transmission, un transducteur d'impédance d'entrée  $Z_e$  (fig IV.5.a). L'ensemble (Générateur + Ligne) peut être modélisé sous la forme matricielle<sup>25</sup> (fig IV.5.b):

$$\begin{pmatrix} E_g \\ I_g \end{pmatrix} = G.L. \begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix}$$

Soit, puisque  $\det(L) = 1$  :

$$\begin{pmatrix} V_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{22} & -(L_{12} + R_g.L_{22}) \\ -L_{21} & L_{11} + R_g.L_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_g \\ I_g \end{pmatrix} \quad (IV.19)$$

La relation (IV.19) et la configuration de la **figure IV.5.b** conduisent à :

$$V_e = E_g \cdot \frac{Z_e}{L_{11} \cdot (Z_e + R_g) + L_{21} \cdot (R_g \cdot Z_e + R_c^2)} \quad (IV.20.a)$$

La ligne étant adaptée au générateur ( $R_c = R_g$ ) on obtient:  $V_e = E_g \cdot \frac{Z_e}{Z_e + R_g} \cdot e^{-j\beta \cdot l}$  (IV.20.b)

et le câble n'engendre qu'un déphasage ( $\beta \cdot l$ ). Il n'aura pas d'influence dans la procédure par mesure des composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  (§IV.2.1.2).

<sup>25</sup> La matrice  $L$  est définie en annexe du chapitre IV, équation A4.8.

Par contre, dans la procédure par mesure des composantes  $V_o$  et  $V_{s2}$ , ce câble aura une influence si on mesure la tension à son entrée ( $V_o = V_g$ ) au lieu de la tension à sa sortie ( $V_o = V_e$ ) aux bornes du transducteur source.

En effet, l'impédance d'entrée  $Z_{eL}$  de l'ensemble ligne + transducteur s'exprime sous la forme (fig. IV.5.b) :

$$Z_{eL} = \frac{V_g}{I_g} = \frac{L_{11}.Z_e + L_{12}}{L_{21}.Z_e + L_{22}} = R_c \cdot \frac{Z_e + j.R_c.tg(\beta.l)}{R_c + j.Z_e.tg(\beta.l)} \quad (IV.21.a)$$

et on déduit: 
$$V_g = E_g \cdot \frac{Z_{eL}}{Z_{eL} + R_g} \quad (IV.21.b)$$

Les expressions de  $V_g$  (IV.21.b) et de  $V_e$  (IV.20.b) diffèrent donc dans des proportions fonction des caractéristiques du câble et de l'impédance d'entrée  $Z_e$  du transducteur source, elle même fonction de l'impédance acoustique du milieu.

Par conséquent dans la procédure par mesure des composantes  $V_o$  et  $V_{s2}$ , il est nécessaire de relever la tension aux bornes du transducteur source ( $V_o = V_e$ ) et non aux bornes du générateur ( $V_g \neq V_e$ ).

#### IV.3.5.2 Modélisation de l'ensemble : Ligne – Instrument de mesure ( $Z_{IM}$ )

##### a) Charge $Z_s$ du transducteur détecteur :

Elle est définie par la relation (IV.21.a) dans laquelle on remplace  $Z_{eL}$  par  $Z_s$  et  $Z_e$  par  $Z_{IM}$ . Le modèle équivalent de  $Z_{IM}$  étant généralement un dipôle  $R_s/C_s$  soit :

$$Z_{IM} = \frac{R_s}{1 + j.R_s.C_s.\omega} \quad (IV.22)$$

##### b) Relation entre $V_{s1,2}'$ mesurée et $V_{s1,2}'$ détectée (cf fig. IV.2) :

On a : 
$$\begin{pmatrix} V_{s1,2}' \\ I_{s1,2}' \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} V_{s1,2} \\ I_{s1,2} \end{pmatrix} \text{ et } V_{s1,2}' = I_{s1,2}' \cdot Z_{IM} \text{ donc :}$$

$$V_{s1,2}' = V_{s1,2} \cdot L_v \quad \text{avec} \quad L_v = \frac{1}{L_{11} + L_{12}/Z_{IM}} \quad (IV.23)$$

Si  $R_c.R_s.\omega \ll 1$ ,  $\beta.l \ll 1$ ,  $R_s \gg \beta.R_c$  on a  $|L_v| \approx 1$  et  $V_{s1,2}' \approx V_{s1,2}$ .

Aux fréquences de travail de quelques MHz ces conditions sont aisément réalisables et on peut considérer que l'influence de ce câble est négligeable. Dans le cas contraire il faudrait tenir compte de la correction  $L_v$  dans l'expression du paramètre B/A en remplaçant  $V_s$  par  $V_s' \cdot L_v^{-1}$ .

## IV.4 SIMULATIONS ET ANALYSES

L'objectif de ce paragraphe est la simulation complète du système, afin de déterminer les conditions optimales d'exploitations expérimentales pour les deux procédures de mesure, si on ne calibre pas les transducteurs ou si les caractéristiques de leur céramique sont inconnues.

Au préalable nous analyserons, à l'aide des simulations, le comportement des transducteurs et des fonctions de sensibilité et de diffraction. Nous établirons également des expressions simplifiées pour les fonctions de sensibilité, très utiles pour l'étude du système de mesure.

Les fonctions d'atténuation ont déjà été étudiées au paragraphe IV.2.2.

#### IV.4.1 SIMULATIONS ET ANALYSES DES CARACTERISTIQUES DES TRANSDUCTEURS

Nous avons effectué les simulations avec des céramiques en PZT de type P1 88 [16], et possédant les caractéristiques (cf annexe du chapitre IV):

$$\epsilon_{33}^S = 837 \cdot \epsilon_0 (F.m^{-1}), \quad C_{33}^D = 15,8 \cdot 10^{10} (N.m^{-2}), \quad \rho = 7700 (kg.m^{-3}), \quad kt = 0,49$$

Pour réaliser les transducteurs, sans couche avant, les céramiques ont les dimensions: (a = 8 mm, e<sub>s</sub> = 1 mm) pour la source 2 MHz et (a = 8 mm, e<sub>s</sub> = 0.5 mm) pour le détecteur 4MHz. Le détecteur est choisi pour être sensible au second harmonique<sup>26</sup>.

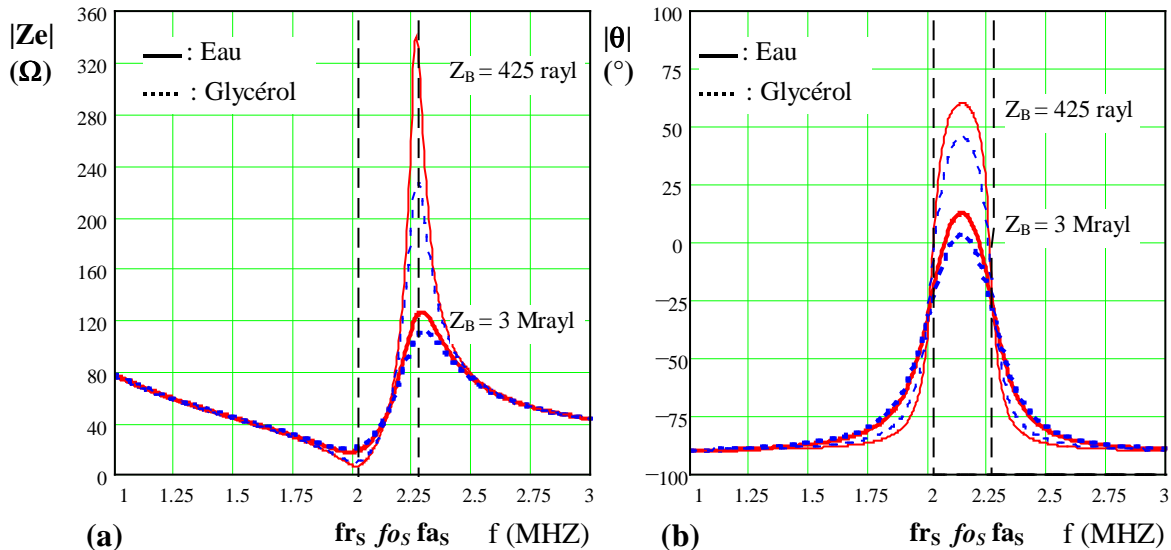
Leur milieu arrière sera de l'air (Z<sub>B</sub> = 425 rayl) ou une résine époxyde (Z<sub>B</sub> = 3 Mrayl).

Notons que l'impédance acoustique des céramiques est : Z<sub>T</sub> ≈ 34,9 Mrayl (cf. A4.3.2).

Les calculs sont exécutés à l'aide du logiciel de mathématiques Mathcad 6.0 fonctionnant sous un PC Pentium 100 MHz.

##### IV.4.1.1 Impédance d'entrée du transducteur source :

A l'aide de la relation (IV.18) nous calculons son module |Z<sub>e</sub>| et sa phase θ = arg(Z<sub>e</sub>), en choisissant comme milieu de propagation l'eau (Z<sub>m</sub> = 1,5 Mrayl) et le glycérol (Z<sub>m</sub> = 2,3 Mrayl). Les résultats sont présentés **figure IV.6**.



**Fig IV.6:** Impédance d'entrée du transducteur source immergé dans l'eau ou le glycérol pour Z<sub>B</sub> = 3 Mrayl (trait gras) ou Z<sub>B</sub> = 425 rayl (trait fin).

$$[f_{o_s} = 2,265 \text{ MHz}; f_{r_s} = 2,020 \text{ MHz}; f_{a_s} = 2,268 \text{ MHz}]$$

Ils mettent en évidence deux fréquences caractéristiques, repérées par des tirets verticaux :

- La fréquence de résonance **fr** pour laquelle |Z<sub>e</sub>| est minimale.
- La fréquence d'anti-résonance **fa** pour laquelle |Z<sub>e</sub>| est maximale.

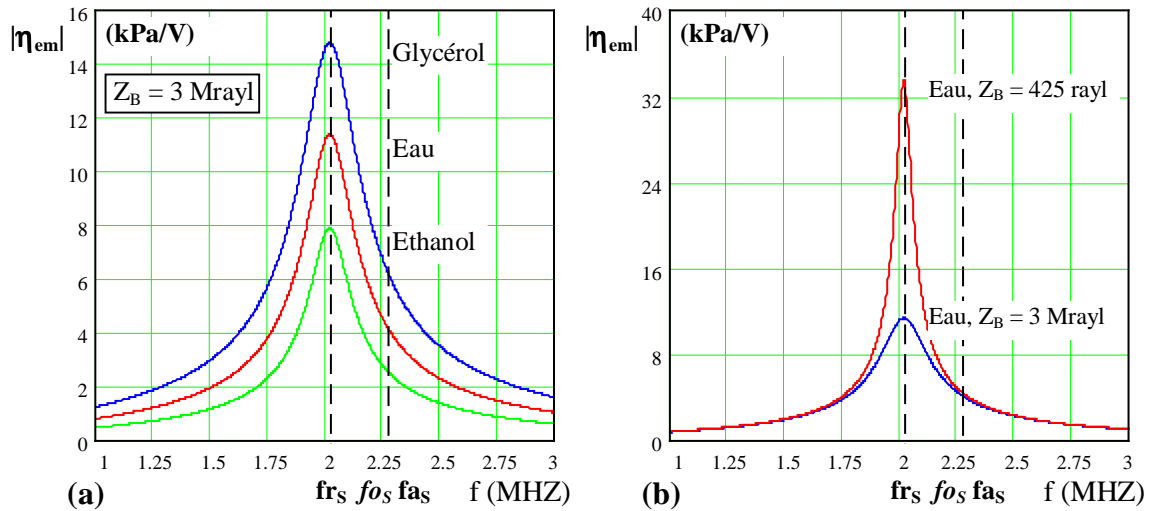
Si la céramique est faiblement amortie, ces fréquences correspondent aux annulations de la phase θ. D'une façon générale nous avons : fr < fo < fa où fo est la fréquence de résonance propre de la céramique.

On constate que l'impédance d'entrée |Z<sub>e</sub>| varie en fonction de l'impédance acoustique du milieu de propagation principalement au voisinage de la fréquence d'anti-résonance, et de façon d'autant plus marquée que Z<sub>B</sub> est faible.

<sup>26</sup> Les fréquences de résonance fr et fo des transducteurs peuvent se déduire des caractéristiques de la céramique: fr = N3/e où N3 est la constante de fréquence en épaisseur qui vaut N3 = 2020 (Hz.m) pour le PZT P1 88. Et fo = v<sup>D</sup>/2.e (cf. A4.4.4). Comme e<sub>s</sub> = 2.e<sub>D</sub> on a fr<sub>D</sub> = 2.fr<sub>s</sub> et fo<sub>D</sub> = 2.fo<sub>s</sub>.

**IV.4.1.2 Sensibilité en émission du transducteur source :**

Elle est simulée à l'aide de la relation (IV.16) et les résultats sont présentés **figure IV.7** pour l'eau, le glycérol et l'éthanol ( $Z_m = 0,9$  Mrayl).



**Fig IV.7 :** Sensibilité en émission  $|\eta_{em}|$  du transducteur source immergé dans différents milieux.

On constate que la sensibilité en émission est d'autant meilleure que l'impédance acoustique du milieu de propagation est élevée, et qu'elle est maximale au voisinage de la fréquence de résonance  $f_r$  du transducteur.

Si le milieu arrière est composé d'air ( $Z_B = 425$  rayl) nous observons une très nette augmentation de la sensibilité en émission, ce qui est logique puisque l'onde générée vers l'arrière est réfléchié totalement vers l'avant, par l'interface céramique-air, en phase avec l'onde incidente.

Cependant cette amélioration se fait au détriment de la bande passante du transducteur en émission, celui ci étant d'autant plus sélectif que l'impédance du milieu arrière est faible.

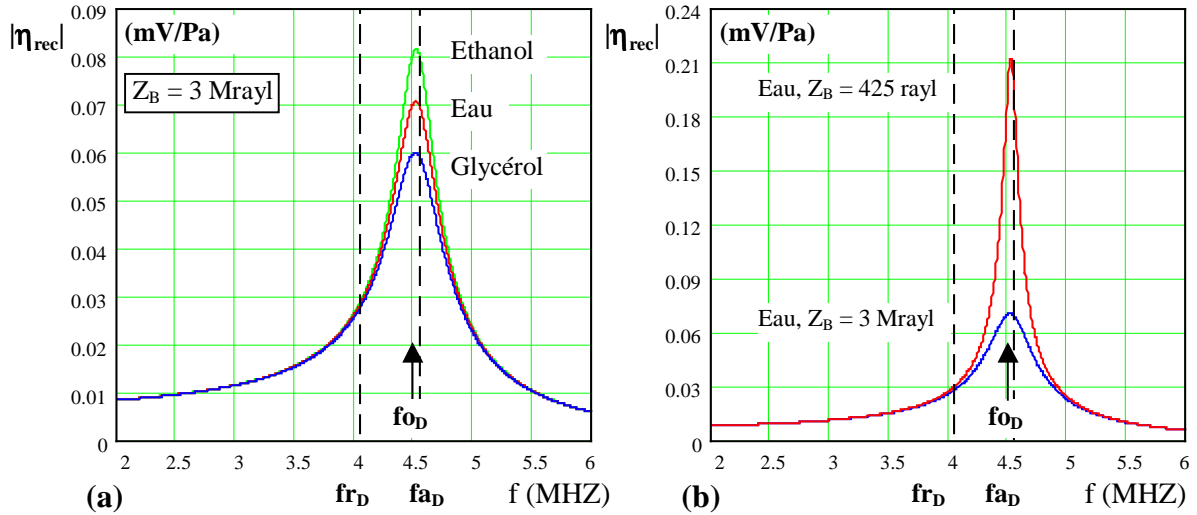
**IV.4.1.3 Sensibilité en réception du transducteur détecteur :**

Elle est simulée à l'aide de la relation (IV.14) et les résultats sont présentés **figure IV.8** pour l'eau, le glycérol et l'éthanol.

On constate que la sensibilité en détection est d'autant meilleure que l'impédance acoustique du milieu est faible, et qu'elle est maximale à la fréquence de résonance propre  $f_{o_D}$  de la céramique.

Si le milieu arrière est composé d'air ( $Z_B = 425$  rayl) nous observons une très nette augmentation de la sensibilité en détection.

Cependant, comme pour l'émission, cette amélioration se fait au détriment de la bande passante du transducteur en réception.



**Fig IV.8 :** Sensibilité en réception  $|\eta_{rec}|$  du transducteur détecteur immergé dans différents milieux. [  $f_{0D} = 4.53$  MHz ;  $f_{rD} = 4.04$  MHz ;  $f_{aD} = 4.536$  MHz ]

#### IV.4.2 SIMULATIONS ET ANALYSES DES FONCTIONS DE SENSIBILITE

L'intérêt de ces simulations est de montrer l'influence des sensibilités des transducteurs dans les deux procédures de la méthode comparative simple. Avec ces résultats nous pourrions établir les conditions de mesure permettant de négliger, ou d'annuler, l'influence de ces grandeurs.

##### IV.4.2.1 Procédure par mesure des composantes $V_{s2}$ et $V_{s1}$ :

La fonction  $F\eta_{rx}$  correspondante est donnée par la relation (IV.7.b) combinée avec les expressions (IV.14-15) des sensibilités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  du transducteur détecteur. Soit :

$$F\eta_{rx}(f, Z_r, Z_x, Z_B) = \frac{\eta_{rec}(2.f, Z_r, Z_B) \cdot \eta_{rec}(f, Z_x, Z_B)^2}{\eta_{rec}(f, Z_r, Z_B)^2 \cdot \eta_{rec}(2.f, Z_x, Z_B)} \quad (IV.24)$$

où  $f$  est la fréquence du fondamental ( $f_1$ ) et  $Z_r$ ,  $Z_x$ , et  $Z_B$  sont respectivement les impédances acoustiques des milieux de référence, d'analyse, et arrière.

Cette fonction de sensibilité n'est liée qu'aux caractéristiques de la céramique du détecteur et aux différents milieux.

Nous simulons cette expression en fonction de la fréquence d'excitation du transducteur source (fondamental) et pour différentes valeurs des impédances acoustiques, le couple de céramiques est identique à celui utilisé lors des simulations précédentes (§IV.4.1).

##### IV.4.2.1.1 Cas d'un transducteur détecteur avec $Z_B = 3$ Mrayl (résine) :

La **figure IV.9.a** montre les variations de cette fonction en prenant l'eau comme milieu de référence ( $Z_r = 1,5$  Mrayl) et l'éthanol ( $Z_x = 0,9$  Mrayl), l'eau, et le glycérol ( $Z_x = 2,3$  Mrayl) comme milieu d'analyse.

La **figure IV.9.b** est obtenue en faisant varier les impédances acoustiques  $Z_r$  et  $Z_x$  dans l'intervalle  $[0,9 ; 2,3]$  Mrayl.

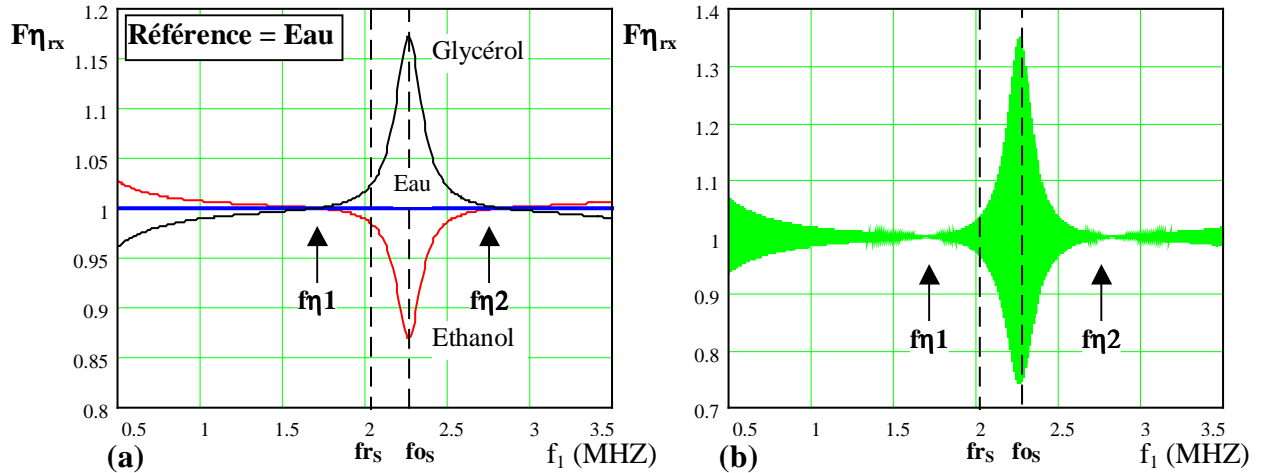


Fig IV.9 : Fonction de sensibilité  $F\eta_{rx}$  pour  $Z_B = 3$  Mrayl.

Sur ces courbes nous avons indiqué par des tirets verticaux les fréquences caractéristiques  $f_{rs}$ ,  $f_{os}$ , et  $f_{as}$  du transducteur source excité à la fréquence du fondamental ( $f_1$ ).

La fonction de sensibilité passe par un extremum à la fréquence de résonance propre  $f_{os}$  du transducteur source, ce qui correspond pour le second harmonique à la fréquence de résonance propre  $f_{oD}$  du transducteur détecteur, puisque :  $f_2 = 2.f_1 = 2.f_{os} = f_{oD}$ .

Nous pourrions omettre la calibration du détecteur sans trop dégrader la précision de la mesure si cette fonction est voisine de l'unité.

Les simulations nous montrent qu'il existe deux fréquences particulières  $f_{\eta 1}$  et  $f_{\eta 2}$  du fondamental ( $f_1$ ), de part et d'autre de  $f_{os}$ , pour lesquelles la fonction de sensibilité est égale à l'unité, quels que soient les milieux de référence ( $Z_r$ ) et d'analyse ( $Z_x$ ) utilisés.

Par conséquent, si la fréquence d'excitation de la source est choisie égale à une de ces fréquences, l'influence des sensibilités sur l'expression du paramètre B/A sera nulle.

Pour le couple de transducteurs utilisés on trouve  $f_{\eta 1} \approx 1.7$  MHz et  $f_{\eta 2} \approx 2.82$  MHz<sup>27</sup>.

Mais si nous choisissons de travailler à  $f_1 = 1.7$  ou 2.82 MHz, soit  $f_2 = 3.4$  ou 5.64 MHz, nous voyons d'après les courbes de sensibilité **figures IV.7 et IV.8** que les transducteurs sont peu sensibles à ces fréquences.

Un compromis serait de travailler à  $f_1 = f_{rSource} = 2.02$  MHz soit  $f_2 = 4.04$  MHz =  $f_{rDétecteur}$ , car il est nécessaire que la source génère correctement l'onde acoustique (**fig IV.7**). Dans ce cas la détection du second harmonique n'est pas optimale (**fig IV.8**) mais les variations de la fonction de sensibilité restent faibles<sup>28</sup>:  $0.99 < F\eta_{rx} < 1.02$ .

De toute façon, rechercher le maximum de sensibilité en détection conduirait à  $f_2 = f_{oDétecteur} = 4.53$  MHz (**fig IV.8**) soit  $f_1 = f_{oSource}$ , fréquence pour laquelle la source est moins efficace (**fig IV.7**) et la fonction de sensibilité maximale (**fig IV.9**).

<sup>27</sup> Afin d'étudier la position de ces fréquences nous avons simulé leurs variations en fonction de l'impédance acoustique du milieu arrière  $Z_B \in [0;10]$ Mrayl et pour différents couples de transducteurs ( $\neq f_{oD} = 2.f_{os}$  et  $\neq Z_r$ ). De ces simulations il apparaît que, quels que soient les transducteurs utilisés, ces fréquences sont liées par la relation : 
$$f_{os} = \frac{f_{\eta 1} + f_{\eta 2}}{2}$$

<sup>28</sup> En prenant l'eau comme milieu de référence et pour  $0.9$  Mrayl  $< Z_x < 2.3$  Mrayl, comme le montre la **figure IV.9.a**.

Pour calculer l'erreur apportée sur la mesure du paramètre de non linéarité en négligeant l'influence de la fonction de sensibilité, il est plus pratique de considérer le paramètre  $\beta = 1 + B/2A$ . Ainsi l'erreur relative sur  $\beta$  est (cf éq. IV.7.a) :

$$\epsilon_{\eta_{rx}} = \left| 1 - F\eta_{rx} \right|^{-1} \quad (\text{IV.25.a})$$

dont on déduit l'erreur sur B/A :

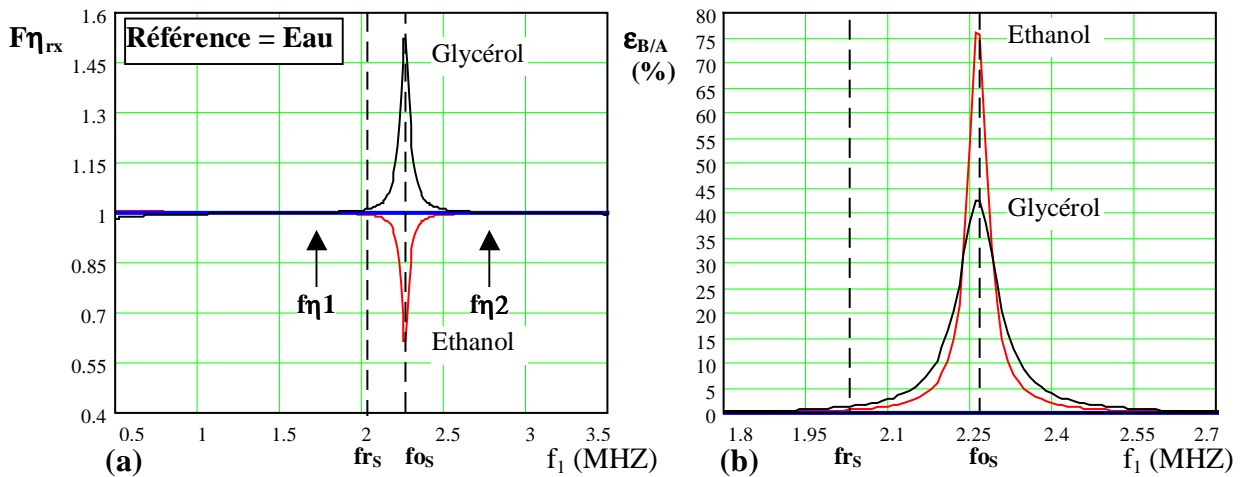
$$\epsilon_{B/A} = \epsilon_{\eta_{rx}} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot (B/A)^{-1} \right] \quad (\text{IV.25.b})$$

Par exemple, aux extremums de la fonction de sensibilité ( $f_1 = f_{0S}$ ) on obtient pour le glycérol ( $B/A = 8.58$ ) et l'éthanol ( $B/A = 9.9$ ) les valeurs respectives  $F\eta_{rx} = 1.17$  et  $F\eta_{rx} = 0.87$ , ce qui engendre pour ces deux milieux une erreur d'environ 18% sur la valeur du paramètre B/A si les sensibilités ne sont pas prises en compte ( $F\eta_{rx} = 1$ ) dans l'expression (IV.7.a).

Cette erreur<sup>29</sup> n'est pas négligeable mais elle peu devenir beaucoup plus importante si nous diminuons l'impédance acoustique du milieu arrière du détecteur pour le rendre plus sensible, comme nous allons le mettre en évidence.

#### IV.4.2.1.2 Cas d'un transducteur détecteur avec $Z_B = 425 \text{ rayl}$ (air) :

En modifiant  $Z_B$  et en conservant les mêmes conditions que précédemment, on obtient les résultats de simulations présentés **figure IV.10**.



**Fig IV.10 :** Fonction de sensibilité  $F\eta_{rx}$  et erreur  $\epsilon_{B/A}$  pour  $Z_B = 425 \text{ rayl}$ .

Dans ce cas, aux extremums de la fonction de sensibilité ( $f_1 = f_{0S}$ ), les erreurs sur la valeur du paramètre B/A pour le glycérol et l'éthanol sont respectivement de  $\sim 42\%$  et  $\sim 76\%$  (**fig. IV.10.b**).

Par contre, du fait du rétrécissement de la fonction au voisinage de  $f_{0S}$ , l'erreur est plus faible en  $f_{rs}$  que dans le cas d'un milieu arrière d'impédance élevée.

Pour quantifier l'erreur maximale apportée en négligeant l'influence des sensibilités, nous allons établir une expression simple du maximum de  $\epsilon_{\eta_{rx}}$ , donc de  $\epsilon_{B/A}$ , en montrant qu'il est possible de simplifier la fonction  $F\eta_{rx}$ .

<sup>29</sup> Nous précisons que ces erreurs, et toutes celles données dans les développements théoriques, correspondent à l'écart relatif certain entre la valeur théorique et la valeur vraie. Elles permettent de comparer les différentes situations analysées.

**IV.4.2.1.3 Simplification de la fonction de sensibilité  $F\eta_{rx}$ :**

Le développement de  $F\eta_{rx}$  (IV.24) en fonction des caractéristiques du transducteur détecteur, à l'aide des relations (IV.14 et A4.7-5-4), conduit à une formulation très lourde mais simplifiable au voisinage de la fréquence  $f_1 = fo_S$ .

En effet, en posant  $F(f) = \frac{A.t_{21}(f, Z_B)}{t_{22}(f, Z_B)}$  la fonction de sensibilité s'écrit :

$$F\eta_{rx}(f, Z_r, Z_x, Z_B) = \left| \left( \frac{1 + Z_r \cdot F(f)}{1 + Z_x \cdot F(f)} \right)^2 \cdot \left( \frac{1 + Z_x \cdot F(2f)}{1 + Z_r \cdot F(2f)} \right) \right| . \text{ Constatant que la fonction } F(f) \text{ est}$$

maximale en  $f = fo_D$  et décroît rapidement autour de cette fréquence, avec  $|F(f)|_{\max} \approx 3.8 \cdot 10^{-6}$  pour le transducteur détecteur utilisé ( $Z_B = 425 \text{ rayl}$ ), on peut négliger les termes en  $F(f)$  et conserver ceux en  $F(2f)$  qui seront maximum dans la zone utile (cf. **fig IV.9-13**) en  $f = f_1 = fo_S \Rightarrow 2f = fo_D$ .

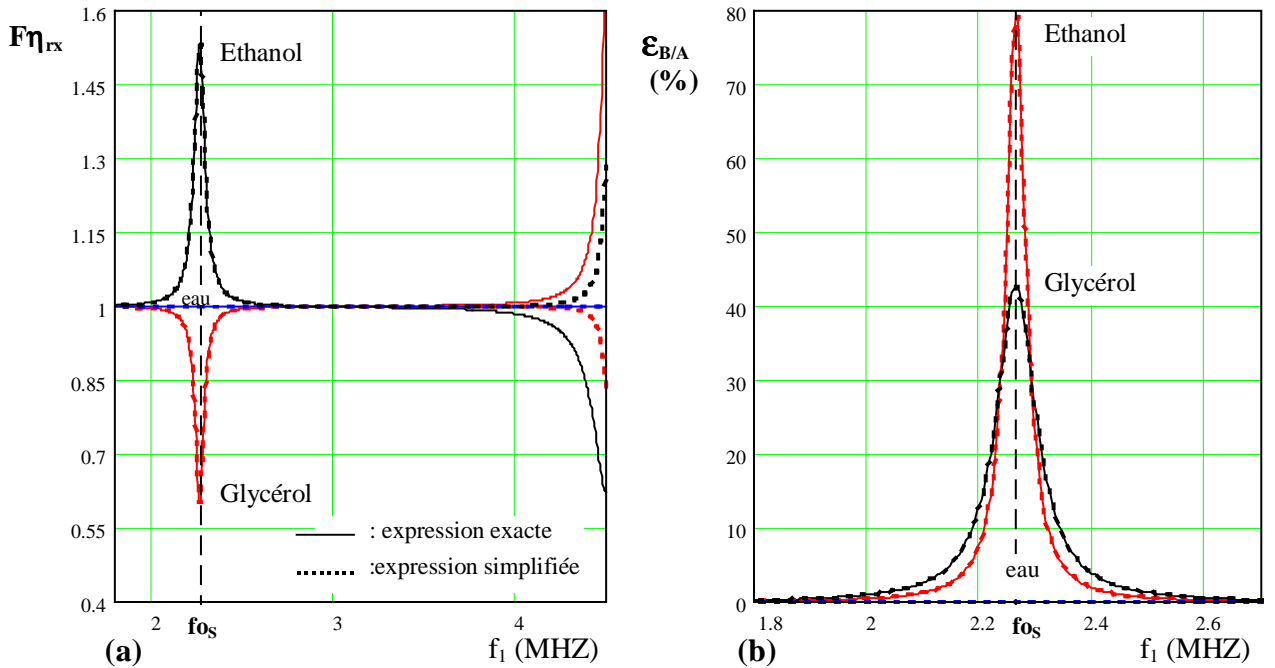
Puis en remplaçant les paramètres  $t_{21}, t_{22}$  de  $F(f)$  par leurs expressions définies en annexe (A4.7-5), et puisque  $\frac{Z_{x,r} \cdot Z_B}{Z_T^2} \ll 1$ , on obtient l'expression simplifiée de la fonction de

sensibilité au voisinage de la fréquence  $f = f_1 = fo_S$  (fréquence propre du transducteur source)

$$: \quad F\eta_{rx}(f, Z_r, Z_x, Z_B) \approx \left| \frac{Z_x + Z_B + j.tg(\gamma(2f)).Z_T}{Z_r + Z_B + j.tg(\gamma(2f)).Z_T} \right| \quad \text{(IV.26)}$$

Où  $\gamma(f) = \frac{\pi.f}{fo_D}$  et  $Z_T = \text{impédance acoustique } (\sim 35 \text{ Mrayl})$  de la céramique du détecteur.

Les simulations effectuées pour  $Z_B = 425 \text{ rayl}$ , et présentées **figure IV.11.a**, montrent la validité de cette expression simplifiée autour de  $fo_S$ .



**Fig IV.11 :** Fonctions de sensibilité  $F\eta_{rx}$  exacte (IV.24) et simplifiée (IV.26), et erreurs associées  $\epsilon_{B/A}$  pour  $Z_B = 425 \text{ rayl}$ .



La relation (IV.26) apporte une simplification dans les simulations de la procédure de mesure du paramètre B/A par détection des composantes  $V_{s2}$  et  $V_{s1}$ , et elle permet d'obtenir rapidement l'erreur maximale sur la mesure de  $\beta$  si on néglige l'influence des sensibilités. En effet, la résolution de  $dF\eta_{rx}/df = 0$  donne un extremum pour  $F\eta_{rx}$  en  $f = f_{oS}$ , ce que l'on avait déjà constaté, et pour cette fréquence les expressions exacte (IV.24) et simplifiée (IV.26)

$$\text{donnent : } F\eta_{rx}(f_{oS}) = \left( \frac{Z_x + Z_B}{Z_r + Z_B} \right) \left( \frac{Z_T^2 + Z_r \cdot Z_B}{Z_T^2 + Z_x \cdot Z_B} \right)^2 \approx \frac{Z_x + Z_B}{Z_r + Z_B} \quad \text{si } \frac{Z_{x,r} \cdot Z_B}{Z_T^2} \ll 1 \quad \text{(IV.27.a)}$$

$$\text{Soit } \epsilon_{B/A}_{\max} = \epsilon\eta_{rx}_{\max} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot (B/A)^{-1} \right] \quad \text{avec } \epsilon\eta_{rx}_{\max} \approx \left| \frac{Z_x - Z_r}{Z_x + Z_B} \right| \quad \text{(IV.27.b)}$$

De ces dernières expressions on peut conclure que l'influence des sensibilités est inversement proportionnelle à l'impédance  $Z_B$  du milieu arrière du détecteur.

#### IV.4.2.2 Procédure par mesure des composantes $V_{s2}$ et $V_o$ :

La fonction  $F\eta'_{rx}$  correspondante est donnée par la relation (IV.9.b) combinée avec les expressions (IV.14-15-16-17) des sensibilités  $\eta_o$  et  $\eta_2$  des transducteurs source et détecteur. Soit :

$$F\eta'_{rx}(f, Z_r, Z_x, Z_{BD}, Z_{BS}) = \left| \frac{\eta_{rec}(2.f, Z_r, Z_{BD}) \cdot \eta_{em}(f, Z_r, Z_{BS})^2}{\eta_{rec}(2.f, Z_x, Z_{BD}) \cdot \eta_{em}(f, Z_x, Z_{BS})^2} \right| \quad \text{(IV.28)}$$

Ici nous ferons la distinction entre l'impédance du milieu arrière du détecteur ( $Z_{BD}$ ) et celle de la source ( $Z_{BS}$ ). Précédemment, la seule impédance  $Z_B$  intervenant dans l'expression de la fonction de sensibilité était celle du détecteur.

Comme précédemment, nous simulons cette expression en fonction de la fréquence d'excitation du transducteur source (fondamental) et pour différentes valeurs des impédances acoustiques. Nous utiliserons toujours le même couple de céramiques (§IV.4.1).

##### IV.4.2.2.1 Cas d'un couple de transducteurs avec $Z_{BS} = Z_{BD} = 3 \text{ Mrayl}$ (résine) :

La **figure IV.12.a** montre les variations de cette fonction en prenant l'eau comme milieu de référence et l'éthanol, l'eau, et le glycérol comme milieu d'analyse.

La **figure IV.12.b** représente l'erreur relative sur le paramètre B/A si les sensibilités ne sont pas prises en compte, soit :

$$\epsilon'_{B/A} = \epsilon\eta'_{rx} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot (B/A)^{-1} \right] \quad \text{avec } \epsilon\eta'_{rx} = \left| 1 - F\eta'_{rx} \right| \quad \text{(IV.29)}$$

On constate que dans cette situation la fonction de sensibilité  $F\eta'_{rx}$  se comporte très différemment de celle étudiée précédemment ( $F\eta_{rx}$ ), et qu'il n'existe pas de zone particulière où l'influence des sensibilités peut être négligée.

De plus l'amplitude de cette fonction varie dans de grande proportion en fonction de l'impédance acoustique du milieu analysé.

L'erreur apportée sur le paramètre B/A, si on néglige l'influence des sensibilités, est minimale à la fréquence de résonance  $f_{rS}$  du transducteur source. Soit une erreur relative minimale sur le paramètre B/A d'environ 60% pour l'éthanol et d'environ 80% pour le glycérol.

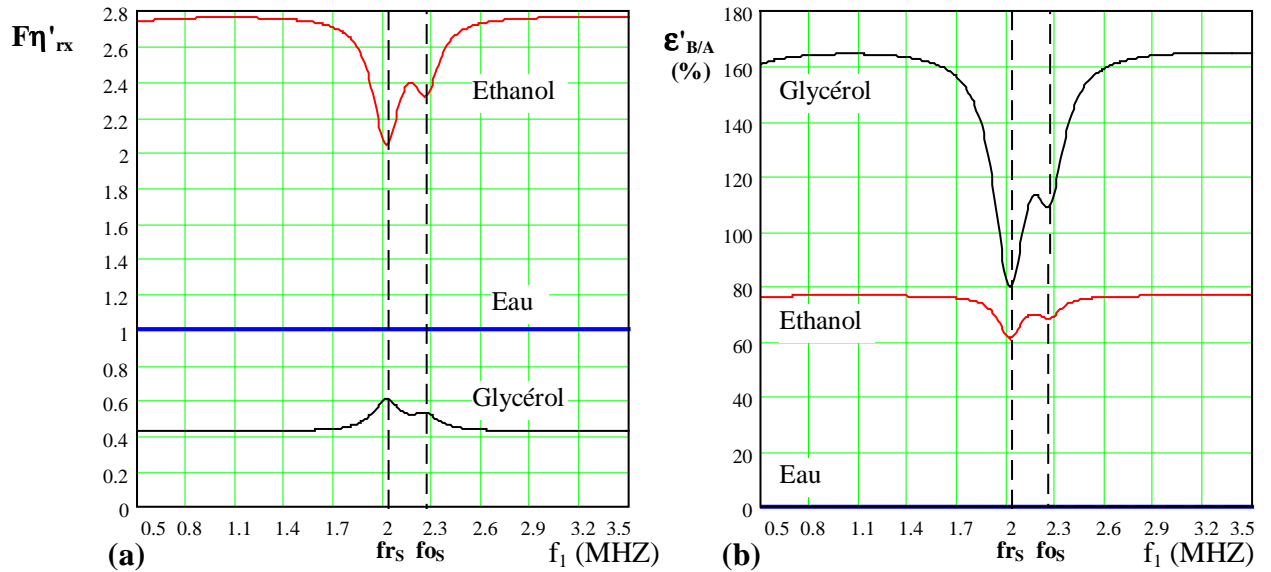


Fig IV.12 : Fonction de sensibilité  $F\eta'_{rx}$  et erreur  $\epsilon'_{B/A}$  pour  $Z_{BS} = Z_{BD} = 3 \text{ Mrayl}$ .

A priori la procédure par mesure des composantes  $V_{s2}$  et  $V_o$  donnera des résultats erronés si on néglige l'influence des sensibilités des transducteurs.

X. F. Gong *et al.* [1] (chap. III § 3.2.4.1) ont obtenu des résultats corrects avec cette procédure de mesure, une situation pour laquelle l'erreur  $\epsilon_{B/A}$  peut être rendue négligeable est donc envisageable.

Les fréquences de résonance des transducteurs source et détecteur qu'ils ont utilisés étaient respectivement de 3 et 6 MHz, mais aucune information n'était donnée sur la composition de leur milieu arrière. Par conséquent nous allons considérer cette fois un couple de transducteurs avec de l'air en milieu arrière.

#### IV.4.2.2.2 Cas d'un couple de transducteurs avec $Z_{BS} = Z_{BD} = 425 \text{ rayl (air)}$ :

Les résultats des simulations sont présentés *figure IV.13*.

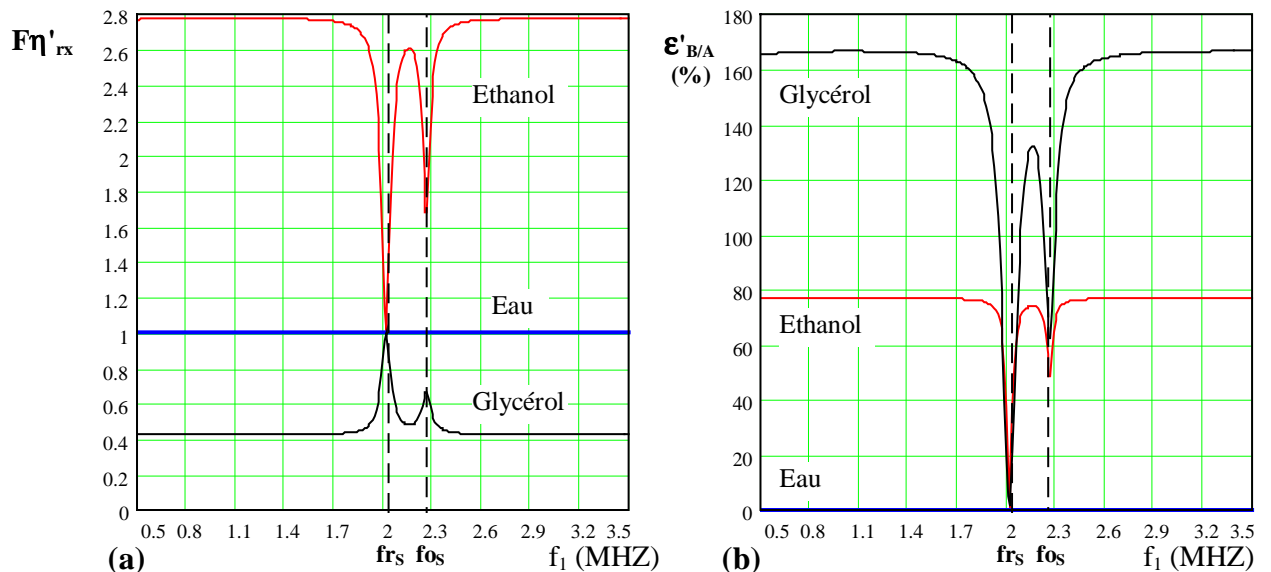


Fig IV.13 : Fonction de sensibilité  $F\eta'_{rx}$  et erreur  $\epsilon'_{B/A}$  pour  $Z_{BS} = Z_{BD} = 425 \text{ rayl}$ .

Dans ce cas l'influence des sensibilités peut être négligé si on travaille à la fréquence de résonance du transducteur source, et uniquement à cette fréquence car de part et d'autre l'erreur augmente rapidement ( $f_1 = fr_S \Rightarrow F\eta'_{rx} = 1$  et  $\epsilon_{B/A} = 0$ ).

X. F. Gong *et al.* ont certainement travaillé dans ces conditions, bien que cela ne soit pas mentionné.

Nous pouvons quantifier simplement l'erreur apportée en négligeant l'influence des sensibilités en montrant qu'il est possible de simplifier la fonction  $F\eta'_{rx}$ .

#### IV.4.2.2.3 Simplification de la fonction de sensibilité $F\eta'_{rx}$ :

En posant  $G(f, Z_B) = \frac{t_{12}(f, Z_B)}{A \cdot t_{11}(f, Z_B)}$ , nous pouvons exprimer  $F\eta'_{rx}$  comme au paragraphe

IV.4.2.1.3, sous la forme :

$$F\eta'_{rx}(f, Z_r, Z_x, Z_{BS}, Z_{BD}) = \left| \left( \frac{1 + Z_x \cdot F(2f, Z_{BD})}{1 + Z_r \cdot F(2f, Z_{BD})} \right) \left( \frac{1 + G(f, Z_{BS})/Z_x}{1 + G(f, Z_{BS})/Z_r} \right)^2 \right|$$

Cette fois ci, au voisinage de la fréquence de résonance  $fr_S$  les termes en  $F(2.f)$  peuvent être

négligés, et il reste : 
$$F\eta'_{rx}(f, Z_r, Z_x, Z_{BS}) \approx \left| \left( \frac{1 + G(f, Z_{BS})/Z_x}{1 + G(f, Z_{BS})/Z_r} \right)^2 \right| \quad \text{(IV.30)}$$

Puis en remplaçant les paramètres  $t_{11}, t_{12}$  de  $G(f)$  par leurs expressions définies en annexe (A4.7-5), et en constatant qu'à la fréquence  $fr_S$  certains termes sont négligeables, on obtient une expression simplifiée de  $G(f)$  sous la forme :

$$G(f) \approx Z_{BS} + jZ_T \cdot \left[ \text{tg}(\gamma(f)) + \frac{2 \cdot k_t^2}{\gamma(f)} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\cos(\gamma(f))} \right) \right] \quad \text{avec } \gamma(f) = \frac{\pi \cdot f}{fo_S} \quad \text{(IV.31)}$$

Les seules caractéristiques du transducteur intervenant dans ces approximations sont celles de la source.

Les simulations de l'expression simplifiée (IV.30-31), effectuées dans les mêmes conditions que celles de la figure IV.12 et présentées **figure IV.14**, montrent une bonne concordance avec l'expression exacte (IV.28) dans la région autour de  $fr_S$ .

Cette expression simplifiée au voisinage de  $fr_S$  permet de quantifier l'erreur apportée si on néglige l'influence des sensibilités. En effet, constatant qu'à la fréquence  $fr_S$ , correspondant à un extremum de  $F\eta'_{rx}$ , la partie imaginaire de  $G(f)$  est négligeable, on obtient : **(IV.32)**

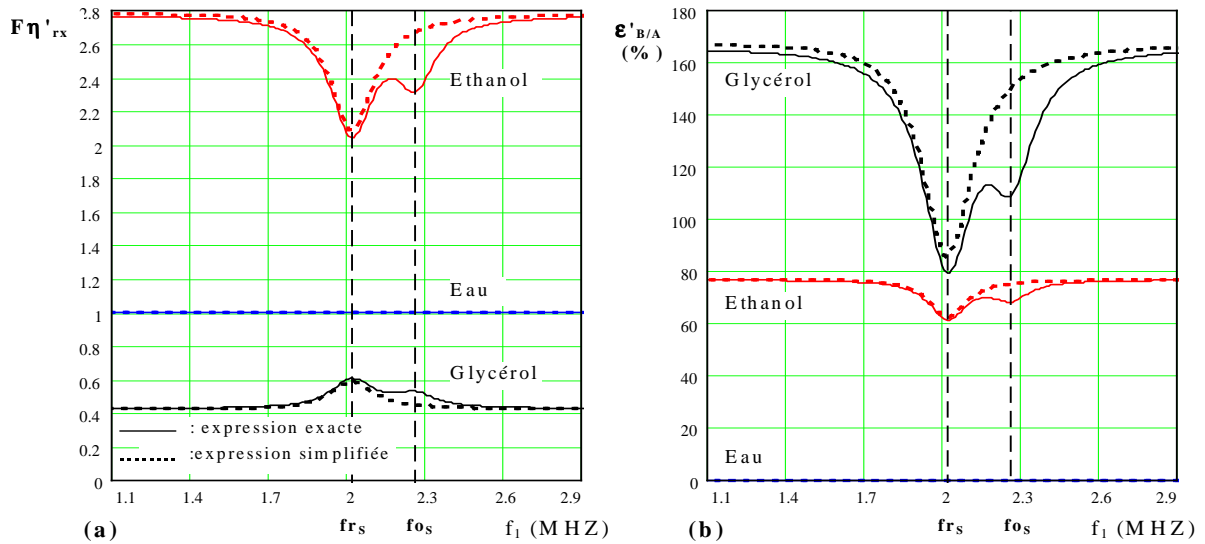
$$G(fr_S) \approx Z_{BS} \Rightarrow F\eta'_{rx}(fr_S) \approx \left| \left( \frac{Z_r \cdot (Z_x + Z_{BS})}{Z_x \cdot (Z_r + Z_{BS})} \right)^2 \right| \quad \text{et } \epsilon\eta'_{rx \min} \approx \left| 1 - \left( \frac{Z_x \cdot (Z_r + Z_{BS})}{Z_r \cdot (Z_x + Z_{BS})} \right)^2 \right|$$

Pour l'erreur maximale on peut se placer à la fréquence particulière  $f = fo_S/2$  engendrant

$$\text{Im}[G(f)] \rightarrow \infty \quad (\text{cf. éq. IV.31}), \text{ soit :} \quad F\eta'_{rx}(fo_S/2) \approx \left( \frac{Z_r}{Z_x} \right)^2 \quad \text{(IV.33.a)}$$

$$\text{Par conséquent}^{30} : \quad \epsilon\eta'_{rx \max} \approx \left| 1 - \left( \frac{Z_x}{Z_r} \right)^2 \right| \quad \text{(IV.33.b)}$$

<sup>30</sup> Les erreurs correspondantes sur le paramètre B/A se déduisent de la relation (IV.29).



**Fig IV.14 :** Fonctions de sensibilité  $F\eta'_{rx}$  exacte (IV.28) et simplifiée (IV.30-32), et erreurs associées  $\epsilon\eta'_{rx}$  pour  $Z_{BS} = Z_{BD} = 3$  Mrayl.

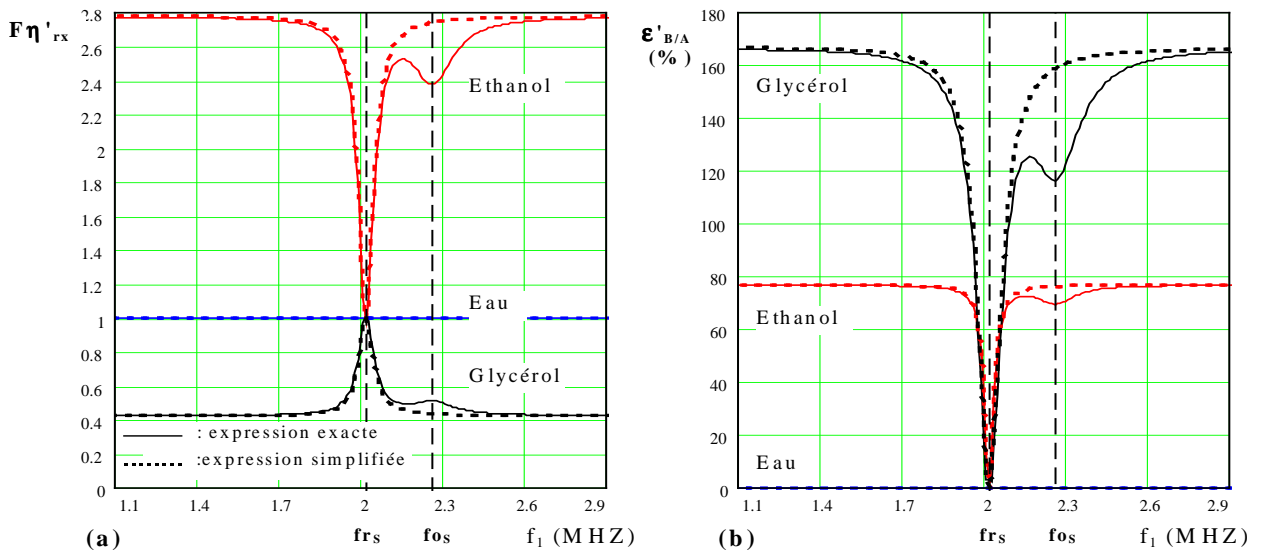
Cette dernière relation (IV.33.b) montre que l'erreur maximale est indépendante des milieux arrières des transducteurs, elle est seulement liée aux impédances acoustiques des milieux de référence ( $Z_r$ ) et d'analyse ( $Z_x$ ) comme nous l'observons sur les **figures IV.12.b** et **13.b**.

La relation (IV.32) montre que seule l'impédance du milieu arrière ( $Z_{BS}$ ) du transducteur source intervient dans l'erreur minimale, et qu'il suffit pour qu'elle soit négligeable ( $\epsilon\eta'_{rx} \approx 0$ ) d'avoir la condition :

$$Z_{BS} \ll Z_r \text{ et } Z_x \quad \text{(IV.34)}$$

Par conséquent, pour que cette procédure de mesure donne des résultats corrects il suffit d'amortir seulement la céramique du transducteur source avec un milieu de faible impédance acoustique ( $Z_{BS}$ ) comme l'air, et de l'exciter à sa fréquence de résonance ( $f_{rs}$ ).

Le milieu arrière du transducteur détecteur ( $Z_{BD}$ ) pourra être de l'air (**fig. IV.13**) ou un autre amortisseur comme une résine, ainsi que le montrent les simulations présentées **figure IV.15**.



**Fig IV.15 :** Fonctions de sensibilité  $F\eta'_{rx}$  exacte (IV.28) et simplifiée (IV.30-32), et erreurs associées  $\epsilon\eta'_{rx}$  pour  $Z_{BS} = 425$  rayl (air) et pour  $Z_{BD} = 3$  Mrayl (résine).

### IV.4.3 SIMULATIONS ET ANALYSES DES FONCTIONS DE DIFFRACTION

L'objectif de ce paragraphe est de montrer les effets de la diffraction, et l'erreur qui en découle sur la mesure du paramètre B/A si on néglige son influence.

#### IV.4.3.1 Procédure par mesure des composantes $V_{s2}$ et $V_{s1}$ :

Nous rappelons sa formulation (IV.7.d)<sup>31</sup> :

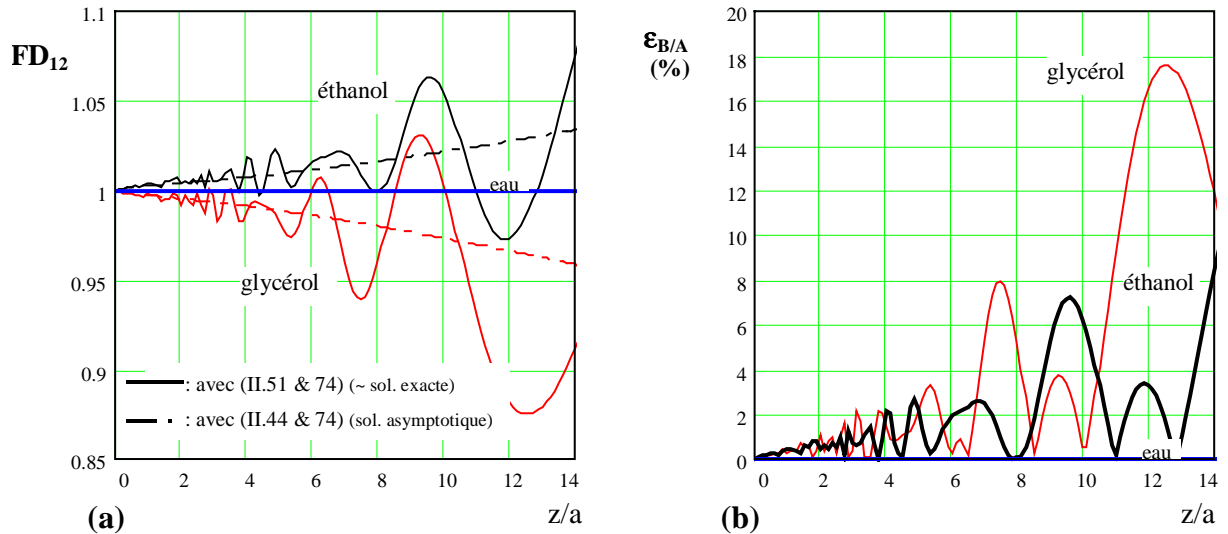
$$FD_{12} = \left| \frac{D_{12}(z_r, a, k_r)}{D_{12}(z_x, a, k_x)} \right| = \left| \frac{D_2(z_r, a, k_r)}{D_2(z_x, a, k_x)} \right| \cdot \left| \frac{D_1(z_x, a, k_x)^2}{D_1(z_r, a, k_r)^2} \right| = FD_2 \cdot FD_1$$

Les transducteurs seront fixes, donc  $z = z_r = z_x$ .

Pour la correction  $D_2(z,a,k)$  associée à la fonction  $FD_2$ , nous avons montré au chapitre II que l'on pouvait utiliser la forme simplifiée (II.74).

Pour la correction  $D_1(z,a,k)$  associée à la fonction  $FD_1$ , nous choisirons la simplification de l'expression de Bass (II.51)<sup>32</sup>, pratiquement équivalente à la solution exacte de Williams (II.50). Une asymptote simple de cette correction est donnée par la relation (II.44)<sup>33</sup>.

Les simulations sont effectuées à la fréquence de résonance du transducteur source (2.02 MHz) en prenant la position relative  $z/a$  comme variable. Nous supposons la vibration de la source uniforme avec  $a = a_{\text{eff}} = 8$  mm (cf. chap. II § 4). L'eau est le milieu de référence ( $c_r = 1500$  m/s), l'éthanol ( $c_x = 1158$  m/s) et le glycérol ( $c_x = 1900$  m/s) sont les milieux analysés. Les résultats sont présentés **figure IV.16.a**.



**Fig IV.16 :** Fonction de diffraction  $FD_{12}$  et erreur associée  $\epsilon_{B/A}$  pour  $f_1 = f_{r_s} = 2.02 \text{ MHz}$ .  
 $[k \cdot a_{\text{éthanol}} \approx 68, k \cdot a_{\text{glycérol}} \approx 53.5]$

On constate que l'asymptote obtenue avec  $D_1$  (II.44) est seulement valable dans le champ très proche ( $z/a < 5$ ), l'amplitude des ondulations de la solution exacte augmentant rapidement au delà. D'ailleurs dans cette zone la fonction de diffraction peut être négligée ( $FD_{12} = 1$ ) sans trop dégrader la précision de la mesure du paramètre B/A.

<sup>31</sup>  $z$  est la distance entre les transducteurs,  $k_{r,x} = \omega/c_{r,x}$ ,  $r$  et  $x$  désignent respectivement le milieu de référence et le milieu analysé.

<sup>32</sup> Valide pour  $z/a > 2$  et  $k \cdot a \gg 1$ .

<sup>33</sup> Valide pour  $2 < z/a \ll k \cdot a$ .

On peut définir l'erreur apportée sur la mesure du paramètre B/A si on néglige l'influence de la diffraction, sous la forme:

$$\epsilon_{B/A} = \left| 1 - FD_{12}^{-1} \right| \left[ 1 + 2.(B/A)^{-1} \right] \quad (IV.35)$$

Cette erreur, présentée **figure IV.16.b**, possède des maximums d'autant plus importants que le détecteur est éloigné de la source et que la longueur d'onde dans le milieu analysé est différente de celle dans le milieu de référence.

Le domaine de validité de la fonction de diffraction ainsi définie est limité par celui de la fonction D2 (cf. chap. II § 3.3.4), soit pour<sup>34</sup>:  $2 < z/a \ll k.a.$

#### IV.4.3.2 Procédure par mesure des composantes Vs<sub>2</sub> et Vo:

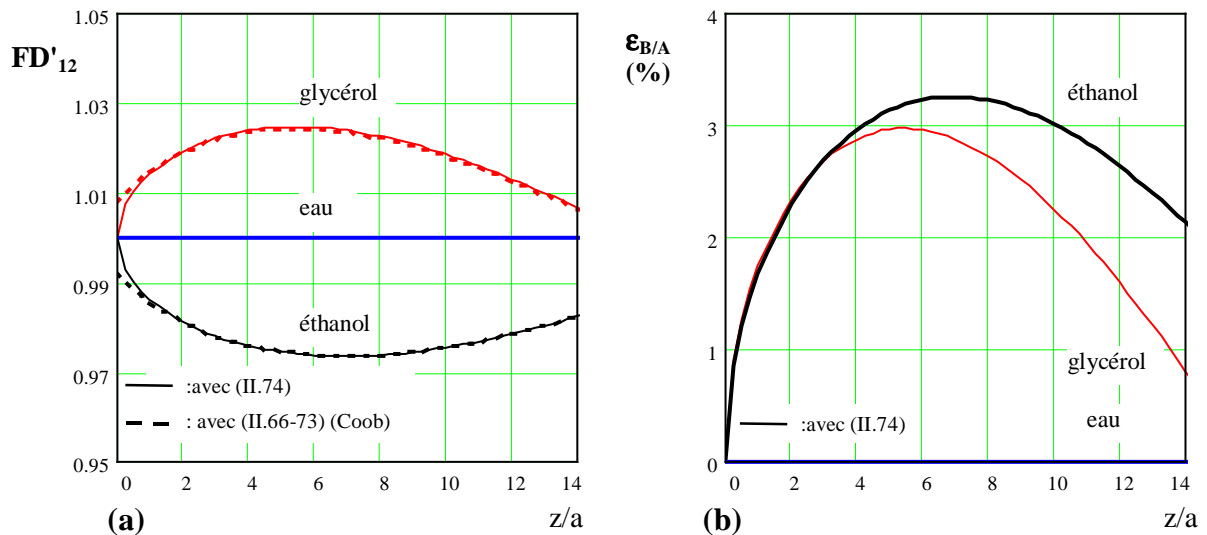
Dans ce cas la fonction de diffraction se réduit à (IV.9.d) :  $FD'_{12} = \left| \frac{D_2(z_r, a, k_r)}{D_2(z_x, a, k_x)} \right|$

avec pour correction D<sub>2</sub> notre expression simplifiée (II.74). Cette fonction n'est liée qu'aux corrections de diffraction pour le second harmonique dans le milieu de référence et le milieu analysé. Les simulations effectuées dans les mêmes conditions que précédemment sont présentées **figure IV.17**.

Pour confirmer la validité de notre fonction de diffraction, elle est comparée avec celle obtenue en employant la correction D<sub>2</sub> issue de la théorie de Coob (II.66-73) et vérifiée expérimentalement (cf. chap. II § 3.3.4).

La figure IV.17.b montre que l'erreur apportée sur la mesure du paramètre B/A, si on néglige la diffraction, n'exède pas 3.5% dans la région considérée.

Le domaine de validité de cette fonction de diffraction est toujours<sup>13</sup>:  $2 < z/a \ll k.a.$



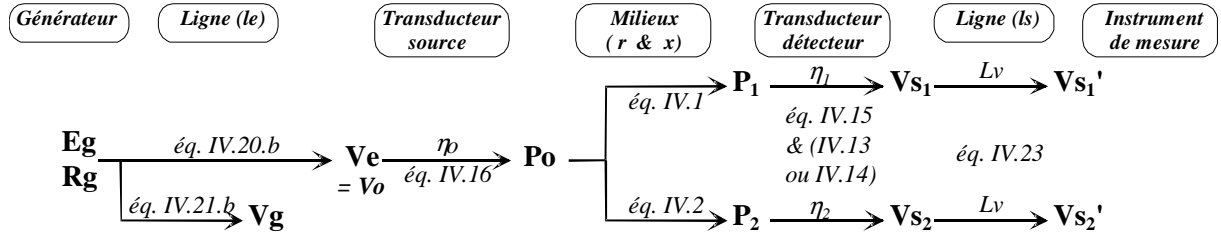
**Fig IV.17 : Fonction de diffraction  $FD_{12}$  et erreur associée  $\epsilon_{B/A}$ .**  
 [ $k.a_{\text{éthanol}} \approx 68$ ,  $k.a_{\text{glycérol}} \approx 53.5$ ]

Dans les deux procédures, on peut conclure que l'influence de la diffraction reste faible pour  $z/a < 5$ . Au delà ( $\sim 5 < z/a < k.a/5$ ), son influence peut devenir importante dans la procédure par mesure des composantes Vs<sub>2</sub> et Vs<sub>1</sub>.

<sup>34</sup> Cependant les expérimentations réalisées par Coob (cf. chap. II § 3.3.4), avec une correction D2 similaire, permettent d'étendre le domaine de validité à  $z/a < k.a/5$ .

#### IV.4.4 SIMULATIONS ET ANALYSES DU SYTEME DE MESURE

Le schéma du système de mesure (fig. IV.2) conduit au processus présenté *figure IV.18* où sont indiquées les équations liant les différentes étapes de la simulation. Pour s'appliquer à la méthode comparative ce processus doit être effectué pour le milieu de référence (r) et pour le milieu analysé (x). Les tensions issues de la simulation seront ensuite injectées dans les différentes expressions théoriques du paramètre B/A.



**Fig IV.18** : Processus de simulation

*Paramètres de simulation :*

- Générateur : suivant l'étude : Eg constante (10 V) ou Eg variable, Rg = 50Ω
- Lignes : le = ls = 1m, Rc = 50 Ω, v = 2.10<sup>8</sup> m/s
- Instrument de mesure : Z<sub>IM</sub> => Rs = 1 MΩ // Cs = 8 pF
- Transducteurs : identiques à ceux utilisés précédemment (§ IV.4.1). Le rayon effectif nécessaire au calcul de D1 et D2 sera choisi légèrement inférieur, soit a<sub>eff</sub> = 7.5 mm (cf. § II.4). Et selon l'étude, les impédances acoustiques des milieux arrières seront telles que Z<sub>B</sub> = 3 Mrayl (résine) ou Z<sub>B</sub> = 425 rayl (air).
- Géométrie fixe : z<sub>r</sub> = z<sub>x</sub> = z, avec z = 5 ou 6 cm
- Milieux :
  - De référence : \* **eau** (c<sub>r</sub> = 1500 m/s, ρ<sub>r</sub> = 1000 kg/m<sup>3</sup>, B/Ar = 5.1, α<sub>or</sub> = 0.25.10<sup>-13</sup>, q<sub>r</sub> = 2)
  - A analyser : \* **éthanol** (c<sub>x</sub> = 1158 m/s, ρ<sub>x</sub> = 789 kg/m<sup>3</sup>, B/Ax = 9.9, α<sub>ox</sub> = 0.9.10<sup>-13</sup>, q<sub>x</sub> = 2)
  - \* **glycérol** (c<sub>x</sub> = 1900 m/s, ρ<sub>x</sub> = 1239 kg/m<sup>3</sup>, B/Ax = 8.58, α<sub>ox</sub> = 26.10<sup>-13</sup>, q<sub>x</sub> = 2)

##### IV.4.4.1 Procédure par mesure des composantes Vs<sub>2</sub> et Vs<sub>1</sub> :

Ces simulations, dans la suite des précédentes, se feront également en prenant pour variable la fréquence d'excitation f<sub>1</sub> de la source. Les tensions détectées Vs<sub>1,2</sub> et mesurées Vs<sub>1,2</sub>' peuvent être simulées en tenant compte de l'expression exacte de la sensibilité en réception (IV.13) ou de son approximation dans le cas d'une charge Z<sub>IM</sub> élevée (IV.14). Nous considérerons dans cette procédure que Z<sub>BS</sub> = Z<sub>BD</sub> = 3 Mrayl.

Sur les *figures IV.19.a & b* nous représentons trois de ces tensions :

- Vs<sub>1,2d</sub> = Vs<sub>1,2</sub> avec η<sub>1,2</sub> (IV.13)
- Vs<sub>1,2m</sub> = Vs<sub>1,2</sub>' avec η<sub>1,2</sub> (IV.13)
- Vs<sub>1,2ms</sub> = Vs<sub>1,2</sub>' avec η<sub>1,2</sub> (IV.14)

On constate que l'influence de la ligne (ls) est négligeable, les courbes  $V_{s_{1,2}d}$  et  $V_{s_{1,2}m}$  étant confondues, et que la simplification  $V_{s_{1,2}ms}$  avec la charge considérée constitue une bonne approximation.

La ligne (ls) ayant peu d'influence, nous utiliserons les tensions mesurées  $V_{s_{1,2}m}$  (sans simplification sur  $\eta_{1,2}$ ) pour calculer le paramètre B/A à partir de l'expression complète (IV.7.a) et de ses approximations. Nous simulerons:

- Courbe **A** : expression complète (IV.7.a).
- Courbe **B** : (IV.7.a) en négligeant l'influence des sensibilités  $\Rightarrow F\eta_{rx} = 1$ .
- Courbe **C** : (IV.7.a) en négligeant l'influence des sensibilités et des diffractions  $\Rightarrow F\eta_{rx} = 1$  et  $FD_{12} = 1$ .
- Courbe **D** : (IV.7.a) en négligeant l'influence des sensibilités, des diffractions, et des atténuations  $\Rightarrow F\eta_{rx} = 1$ ,  $FD_{12} = 1$ , et  $F\alpha_{12} = z_T/z_X = 1$ .

Ces différentes expressions du paramètre B/A sont calculées en prenant l'éthanol et le glycérol comme milieux analysés, l'eau étant le milieu de référence, et pour les positions  $z = 5$  cm et  $z = 7$  cm du détecteur.

L'objectif des simulations qui suivent est d'optimiser le choix de la fréquence d'excitation ( $f_1$ ) et d'estimer l'amplitude de l'erreur possible sur la mesure si les caractéristiques de la céramique du détecteur sont inconnues, ou si ce dernier n'est pas calibré à la fréquence d'utilisation et pour différents milieux.

Dans la première série de simulation présentée *figures IV.19.c-d* et *IV.19.e-f*, on considère la tension  $E_g$  constante (10 V) et les milieux arrières des transducteurs choisis tels que  $Z_{BS} = Z_{BD} = 3$  Mrayl.

#### **IV.4.4.1.1 Analyses des diverses expressions du paramètre B/A:**

L'expression complète (IV.7.a), courbe A, donnera toujours la bonne valeur du paramètre B/A puisqu'elle intègre toutes les corrections.

Si l'on veut éviter la calibration des transducteurs en négligeant l'influence des sensibilités ( $F\eta_{rx} = 1$ ), il faut considérer les courbes restantes (B,C,D) :

Les expressions n'incluant pas de correction de diffraction ( $FD_{12} = 1$ , courbes C et D), sont soumises à des fluctuations dépendant de la distance  $z$  et du milieu analysé. Ces fluctuations sont celles de la fonction de diffraction analysée précédemment (cf. § 4.3.1).

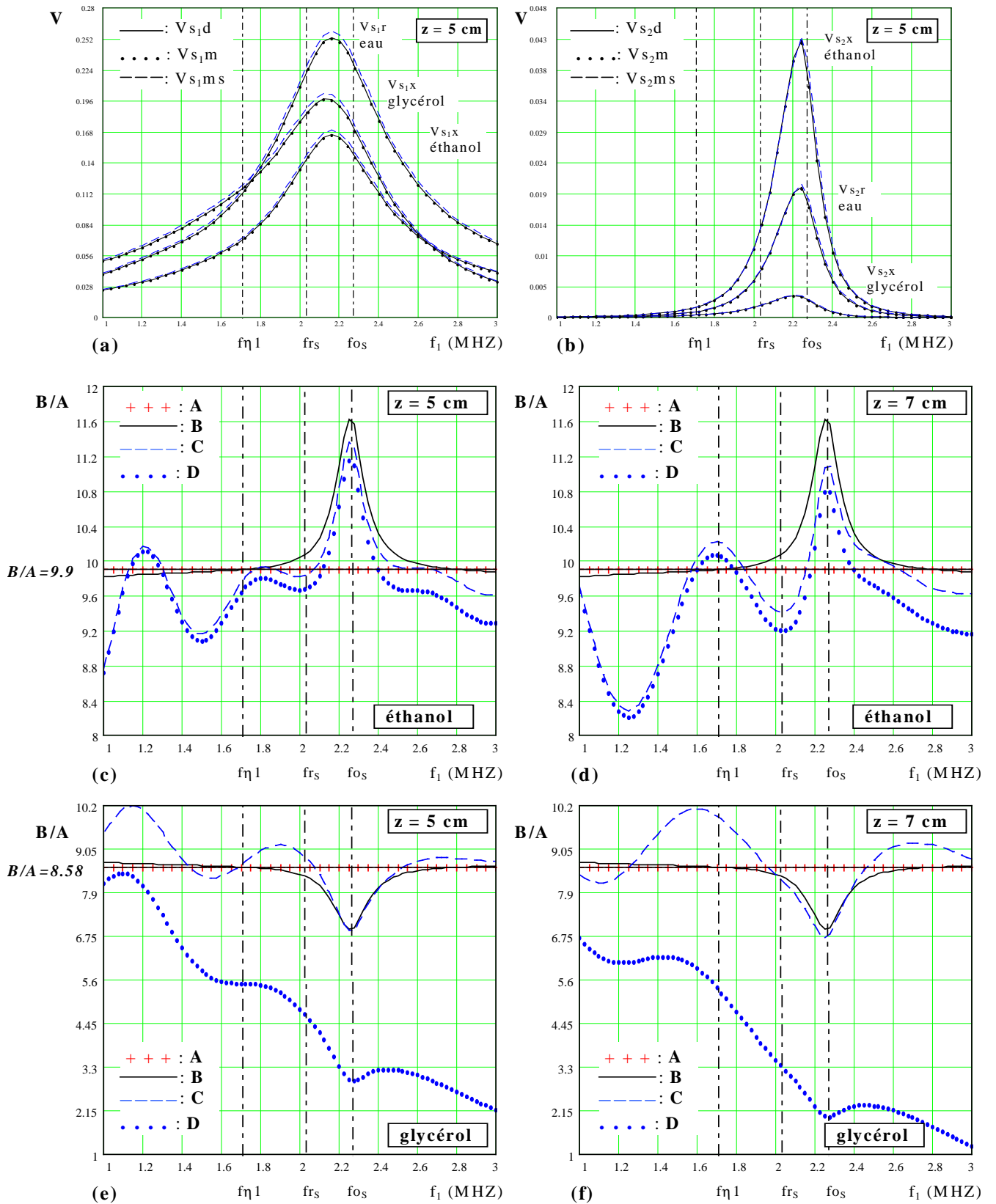
L'expression ne prenant pas en compte les atténuations ( $F\alpha_{12} = 1$ , courbes D) n'est évidemment plus exploitable pour les milieux très absorbants comme le glycérol.

Finalement, l'expression la plus précise n'incluant pas de correction sur la sensibilité du détecteur, est celle représentée par la courbe B. Elle donnera la valeur exacte du paramètre B/A si on travaille à la fréquence  $f_1 = f\eta_1 = 1.7$  MHz, et cela quel que soit le milieu analysé (cf. § 4.2.1.1). L'erreur sera maximale à la fréquence  $f_{0S}$ , et minimale à la fréquence  $f_{rS}$ .

#### **IV.4.4.1.2 Choix de la fréquence d'excitation de la source ( $f_1$ ) :**

Pour effectuer des mesures correctes il faut bien sur que les composantes soient détectables, et en particulier le second harmonique  $V_{s_2}$  qui le plus faible. Cela nous conduit naturellement à travailler à la fréquence pour laquelle la composante  $V_{s_2}$  est maximale.



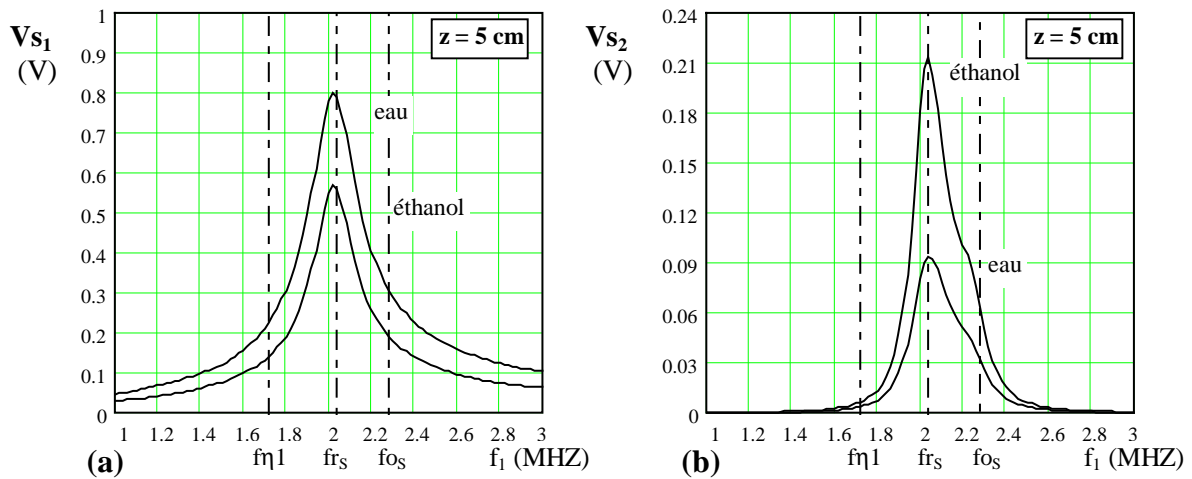


**Fig IV.19 :** (a,b):Tensions détectées ( $V_{s_{1,2}d}$ ) et mesurées ( $V_{s_{1,2}m}$ ) dans l'eau, l'éthanol et le glycérol. (c,d,e,f): Simulations correspondantes des différentes expressions du paramètre  $B/A$  pour  $z= 5$  et  $7$  cm.  $Eg = 10V$ ,  $Z_{BS} = Z_{BD} = 3$  Mrayl ;  $k.a_{eff}$  à  $f_1=fr_s$ : eau( $\sim 63.5$ ), éthanol( $\sim 82$ ), glycérol( $\sim 50$ ).  
**Courbes:** (A)=expression complète, (B):avec  $F\eta_{rx} = 1$ , (C) avec  $F\eta_{rx} = 1$  et  $FD_{12} = 1$ , (D): avec  $F\eta_{rx} = 1$ ,  $FD_{12} = 1$ , et  $F\alpha_{12} = 1$ .

D'après la **figure IV.19.b** ce maximum est obtenu au voisinage de  $f_1 = f_{0S}$ , mais cette constatation n'est valable que dans ces simulations où la tension  $E_g$  est maintenue constante. Dans ce cas, la tension  $V_e$  responsable de l'émission acoustique suit les variations de l'impédance  $Z_e$  du transducteur source, et elle sera effectivement maximale au voisinage de  $f_{0S}$ .

Si on maintient l'excitation  $V_e$  constante, pour s'affranchir de l'influence de  $Z_e$ , les composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  auront un comportement différent en fonction de la fréquence. En imposant par exemple  $V_e = 10 \text{ V}^{35}$  ( $\forall f_1$ ), on obtient les composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  présentées **figure IV.20** pour l'eau et l'éthanol.

Dans ce cas le maximum en détection apparaît à la fréquence de résonance  $f_{rS}$  de la source, ce qui est logique puisque l'émission acoustique est maximale à cette fréquence comme nous l'avons montré au paragraphe IV.4.1.2 (fig. IV.7). La déformation en  $f_{0S}$  observée **figure IV.20.b** pour le second harmonique est due au fait que la sensibilité en réception est maximale à la fréquence  $f_2=f_{0D} \Rightarrow f_1=f_{0D}/2=f_{0S}$  (cf. fig. IV.8). Et bien sur, travailler avec  $V_e$  constant ne modifie pas les expressions du paramètre  $B/A$  et les analyses qui en découlent, ces premières étant indépendantes de  $V_e$ .



**Fig IV.20 :** Composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  pour  $V_e$  maintenue constante (10 V).  
 $Z_{BS} = Z_{BD} = 3 \text{ Mrayl}$

Le choix de la fréquence  $f_1 = f_{rS}$  est donc intéressant, même si l'influence des sensibilités n'est pas nulle. On trouve d'après les **figures IV.19.c--f** une erreur sur le paramètre  $B/A$  de  $\sim 1.6\%$  pour l'éthanol et  $\sim 2.7\%$  pour le glycérol si on ne tient pas compte des sensibilités (courbes B).

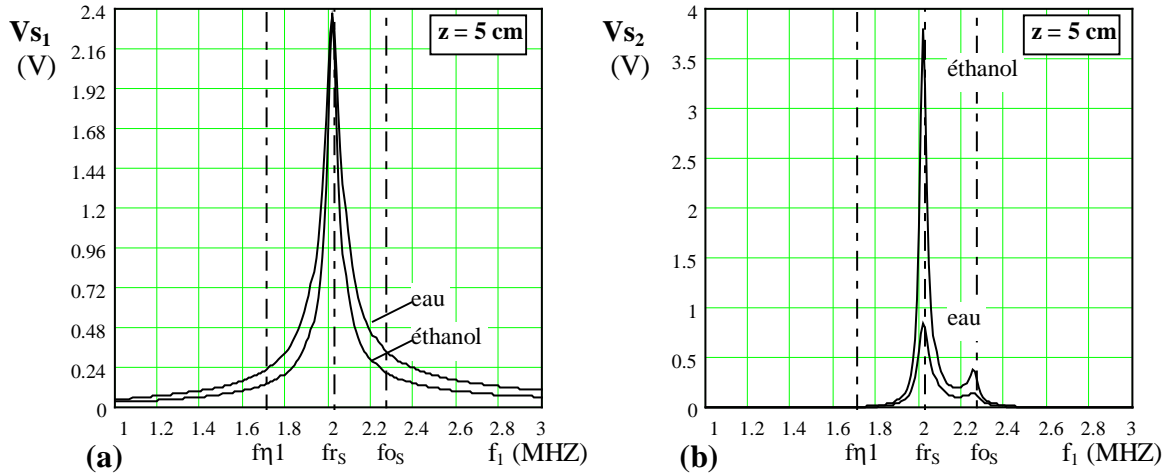
De toute façon, si travailler à la fréquence source  $f_1 = f_{\eta 1}$  permet de s'affranchir de l'influence des sensibilités, l'amplitude du second harmonique sera apparemment trop faible pour effectuer une mesure correcte de la composante  $V_{S2}$  (cf. **figures IV.19.b & 20.b**).

Pour augmenter le niveau d'émission acoustique il faut diminuer l'impédance du milieu arrière du transducteur source, et nous avons vu<sup>36</sup> que la diminution de celle du détecteur engendrait une augmentation de la fonction de sensibilité en  $f_{0S}$ , mais une diminution à la fréquence  $f_{rS}$ .

Par conséquent le système sera optimisé si on choisit  $Z_{BS} = Z_{BD} = 425 \text{ rayl}$  (air) comme le montrent les simulations de la **figure IV.21** où  $V_e$  est maintenue constante (10 V) pour les comparer aux précédentes.

<sup>35</sup> Dans ce cas  $E_g$  évolue pour compenser les variations de  $Z_e$ . On obtient:  $E_g(f_{rS}) \approx 40V$  et  $E_g(f_{0S}) \approx 14V$ .

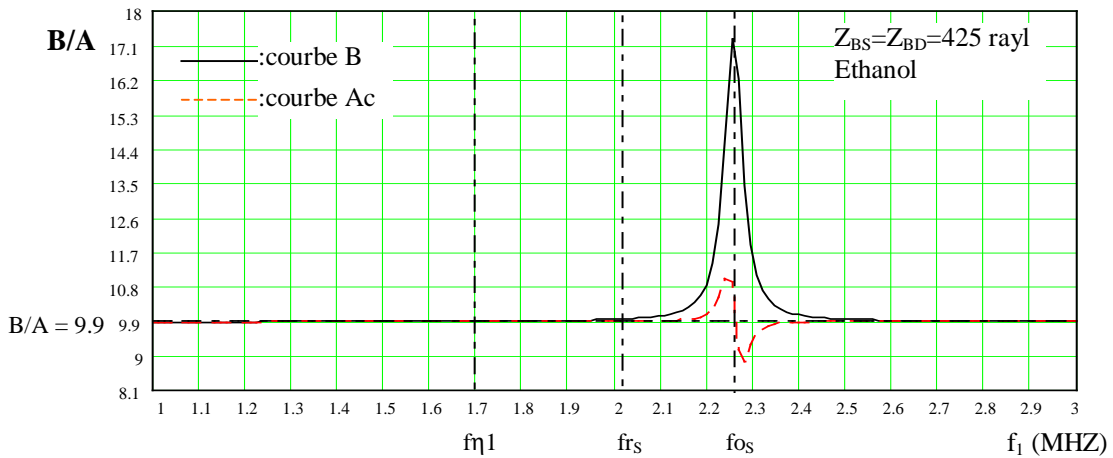
<sup>36</sup> Cf. § IV.4.2.1.2.



**Fig IV.21 :** Composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  pour  $V_e$  maintenue constante (10 V).  
 $Z_{BS} = Z_{BD} = 425$  rayl

L'amplitude des composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  est bien augmentée<sup>37</sup>, et la valeur du paramètre B/A obtenue en négligeant l'influence des sensibilités (*courbe B- figure IV.22*) est de  $\sim 9.96$  à la fréquence  $f_1 = f_{rs}$ , soit une erreur de  $\sim 0.6\%$ .

La courbe Ac représente l'expression complète (IV.7.a) du paramètre B/A dans laquelle la fonction de sensibilité est remplacée par notre simplification (IV.26), ce qui rend l'erreur théorique pratiquement nulle à la fréquence  $f_{rs}$ , et à la fréquence  $f_{os}$ , mais nécessite la connaissance des paramètres  $f_{oD}$  et  $Z_T$  du détecteur.



**Fig IV.22 :** Simulation du paramètre B/A pour les composantes de la figure IV.21.

Si toutefois on utilise le système de mesure à  $E_g$  constante, et que l'on recherche le maximum d'amplitude en détection, on travaillera au voisinage de la fréquence  $f_1 = f_{os}$  qui engendre l'erreur la plus importante sur la mesure du paramètre B/A si on néglige l'influence des sensibilités. Soit une erreur relative théorique de  $\sim 17.5\%$  pour l'éthanol et de  $\sim 19\%$  pour le glycérol si  $Z_{BD} = 3$  Mrayl, et jusqu'à  $\sim 75\%$  pour l'éthanol si  $Z_{BD} = 425$  rayl<sup>38</sup>.

Dans ce cas il est impératif de tenir compte de la fonction de sensibilité  $F_{\eta_{rx}}$ , dont la définition est compliquée et nécessite la connaissance de tous les paramètres du détecteur

<sup>37</sup> Précisons que pour avoir  $V_e = 10$  V dans cette situation, il faut :  $E_g(f_{rs}) \approx 134$  V et  $E_g(f_{os}) \approx 86$  V.

<sup>38</sup> D'après les simulations présentées figures IV.19 et IV.22.

( $\epsilon_{33}^S, C_{33}^D, \rho, kt, e_D, Z_{BD} \dots$ ). Cependant nous avons montré qu'à la fréquence  $f_{oS}$  elle se simplifiait sous la forme (IV.27.a)  $F\eta_{rx}(f_{oS}) \approx \frac{Z_x + Z_{BD}}{Z_r + Z_{BD}}$  où le seul paramètre du détecteur à connaître est l'impédance acoustique  $Z_{BD}$  de son milieu arrière, et dans ce cas l'erreur théorique est pratiquement nulle comme le montre la courbe Ac **figure IV.22**.

#### IV.4.4.1.3 Conclusion pour la procédure par mesure des composantes $V_{S1}$ et $V_{S2}$ ne nécessitant pas la calibration du détecteur :

Il faudra travailler à la fréquence  $f_1 = f_{rS}$  pour obtenir le maximum d'amplitude en détection, avec une erreur faible si on ne connaît pas les caractéristiques de la céramique du détecteur, soit ~0.6% [si  $Z_{BD} = 425$  rayl (air)] à ~1.6% [si  $Z_{BD} = 3$  Mrayl (résine)] pour l'éthanol en prenant l'eau comme milieu de référence. Précisons que cette erreur relative théorique constitue un seuil minimal d'erreur sur la mesure expérimentale du paramètre B/A. A cette fréquence, l'erreur peut être rendue pratiquement nulle si le milieu arrière du détecteur est de l'air et si on connaît au moins ses paramètres  $f_{oD}$  et  $Z_T$ .

Avec une efficacité beaucoup moins bonne en émission, il sera également possible de travailler à la fréquence  $f_1 = f_{oS}$  si on connaît au moins l'impédance acoustique  $Z_{BD}$  du milieu arrière du détecteur.

#### IV.4.4.2 Procédure par mesure des composantes $V_{S2}$ et $V_o$ :

Dans les mêmes conditions que celles de la procédure précédente, nous simulerons :

- Courbe **A** : expression complète (IV.9.a).
- Courbe **B** : (IV.9.a) en négligeant l'influence des sensibilités  $\Rightarrow F\eta'_{rx} = 1$ .
- Courbe **C** : (IV.9.a) en négligeant l'influence des sensibilités et de la diffraction  $\Rightarrow F\eta'_{rx} = 1$  et  $FD'_{12} = FD_2 = 1$ .
- Courbe **D** : (IV.9.a) en négligeant l'influence des sensibilités, de la diffraction, et des atténuations  $\Rightarrow F\eta'_{rx} = 1$ ,  $FD'_{12} = 1$ , et  $F\alpha'_{12} = z_r/z_x = 1$ .
- Courbe **Ac** : (IV.9.a) en remplaçant la fonction de sensibilité  $F\eta'_{rx}$  par la simplification (IV.30).

Pour cette procédure nous effectuerons les simulations uniquement pour l'éthanol, en considérant toujours l'eau comme milieu de référence.

Celles de la **figure IV.23**, effectuées à tension  $E_g$  constante (10 V), présentent les couples de tensions mesurées ( $V_e=V_o, V_{S2}$ ) et les expressions du paramètre B/A correspondantes, en considérant les milieux arrière des transducteurs constitués par une résine (3 Mrayl) ou par de l'air (425 rayl).

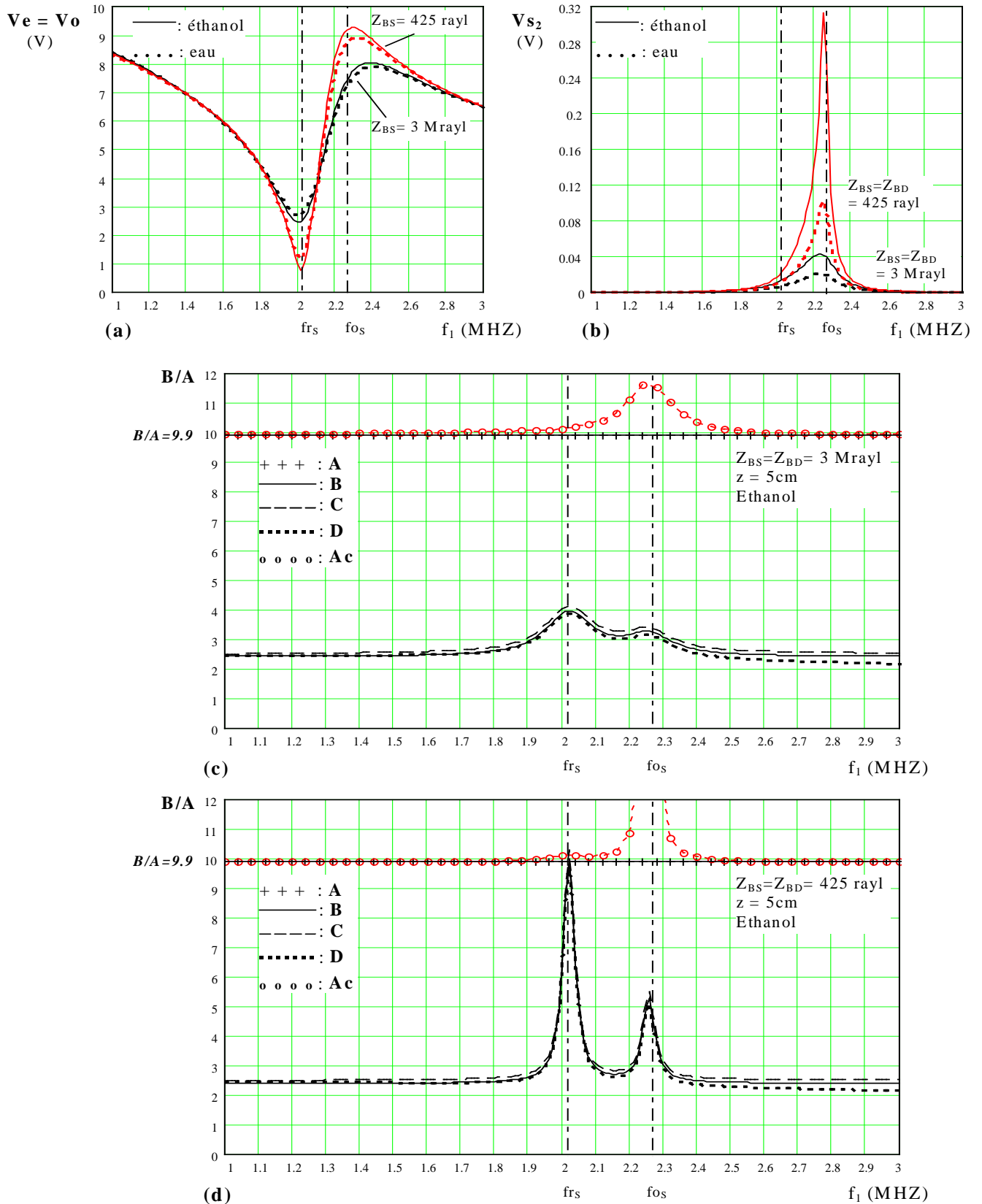


Fig IV.23 :

(a,b): Tensions mesurées  $V_o$  et  $V_{s_2}$  dans l'eau et l'éthanol ( $z=5 \text{ cm}$ ,  $E_g=10V$ ,  $Z_B=425 \text{ rayl}$  et  $3 \text{ Mrayl}$ ). Simulations des expressions du paramètre  $B/A$  pour  $Z_{BS} = Z_{BD} = 3 \text{ Mrayl}$  (c) et  $Z_{BS} = Z_{BD} = 425 \text{ rayl}$  (d).  
**Courbes:** (A)=expression complète, (B):avec  $F\eta'_{rx}=1$ , (C) avec  $F\eta'_{rx}=1$  et  $FD'_{12}=1$ , (D): avec  $F\eta'_{rx}=1$ ,  $FD'_{12}=1$ , et  $F\alpha'_{12}=1$ , (AC): avec  $F\eta'_{rx}$  simplifiée.

#### IV.4.4.2.1 Analyses des diverses expressions du paramètre B/A:

L'expression complète (IV.9.a, courbe A) donnera toujours la bonne valeur du paramètre B/A, mais à la différence de l'autre procédure, si le milieu arrière du transducteur source est d'impédance trop élevée (résine) il est impossible de mesurer une valeur correcte du paramètre en négligeant l'influence des sensibilités, comme le montre la **figure IV.23.c** (courbes B, C, D).

Par contre, comme annoncé au paragraphe IV.4.2.2.2, si on diminue fortement l'impédance du milieu arrière du transducteur source (air) on peut mesurer la bonne valeur du paramètre B/A en négligeant l'influence des sensibilités, mais seulement à la fréquence de résonance  $f_1 = fr_s$  de ce transducteur comme le montre la **figure IV.23** (courbe B).

Dans ces conditions on obtient  $B/A = \sim 9.96$ , soit une erreur d'environ 0.6% par rapport à la valeur exacte.

Si on néglige en plus l'influence de la diffraction et celles des atténuations, on obtient à cette fréquence une erreur de  $\sim 3.7\%$  (courbe C) et de  $6\sim\%$  (courbe D).

On pourrait toutefois obtenir une valeur correcte du paramètre B/A avec des milieux arrières d'impédance élevée (résine), si on connaît au moins celle du transducteur source. En effet, nous avons montré (§IV.4.2.2.3) qu'à la fréquence de résonance  $fr_s$  on pouvait simplifier la

fonction de sensibilité sous la forme (IV.32):  $F\eta'_{rx}(fr_s) \approx \left| \frac{Z_r \cdot (Z_x + Z_{BS})}{Z_x \cdot (Z_r + Z_{BS})} \right|^2$  qui ne dépend

plus que de  $Z_{BS}$ , ce qui ramène l'erreur de  $\sim 60\%$  à  $\sim 2.7\%$  comme le montre la **figure IV.23.c** (courbes B et Ac).

#### IV.4.4.2.2 Choix de la fréquence d'excitation de la source ( $f_1$ ):

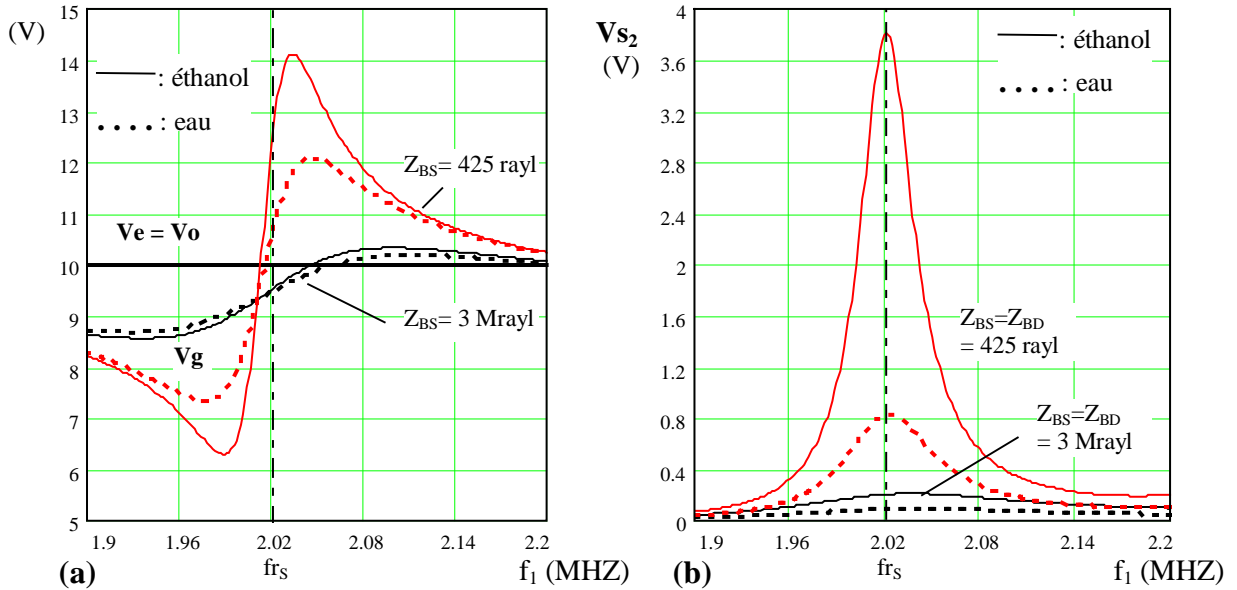
Sans tenir compte de l'influence des sensibilités, il est impératif avec cette méthode de travailler à la fréquence de résonance du transducteur source  $f_1 = fr_s$ , et que l'impédance de son milieu arrière soit faible (air).

Dans une expérimentation où  $E_g$  serait constante, la recherche du maximum d'amplitude en détection ( $V_{s2}$ ) conduirait à travailler au voisinage de la fréquence  $f_1 = fo_s$  (**fig. IV.23.b**). Mais dans ce cas la mesure du paramètre B/A, sans calibration ou connaissance de la céramique des transducteurs, serait fautive quel que soit le milieu arrière de ces derniers (**fig. IV.23.c-d**). Toutefois cette erreur peut être minime si les milieux de référence ( $Z_r$ ) et analysés ( $Z_x$ ) ont des impédances acoustiques voisines, comme nous l'avons montré avec la relation (IV.33).

Finalement il sera nécessaire de travailler à  $f_1 = fr_s$ . Et c'est d'ailleurs à cette fréquence que l'émission acoustique est maximale, ainsi que  $V_{s2}$ , comme le montrent les simulations effectuées à  $V_e$  constante (**fig. IV.24**)<sup>39</sup>.

Dans cette procédure il faudra mesurer la tension  $V_o$  en fin de ligne ( $l_e$ ), aux bornes de la source, et non au début ( $V_g$ ). Les simulations (**fig. IV.24.a**) montrent que l'influence de cette ligne n'est pas négligeable ( $V_g \neq V_e$ ), et cela d'autant plus que l'impédance  $Z_{BS}$  est faible. Cette tension ( $V_o$ ) pourra être mesurée avec une sonde haute impédance, ou avec une dérivation coaxiale vers l'instrument de mesure comme pour  $V_{s2}$ , mais dans ce dernier cas l'excitation ( $V_e = V_o$ ) diminuera par la présence de cette charge additionnelle (ligne + instrument de mesure) en parallèle sur  $Z_e$ .

<sup>39</sup> Les courbes de la figure IV.24.b sont identiques à celles de la figures IV.21.b, le système étant excité de la même façon.



**Fig IV.24 :** Composantes  $V_g$  et  $V_{s2}$  pour  $V_e$  maintenue constante (10 V)  
 . Milieu arrière des transducteurs = résine (3 Mrayl) ou 425 rayl (air).

#### IV.4.4.2.3 Conclusion pour la procédure par mesure des composantes $V_o$ et $V_{s2}$ ne nécessitant pas la calibration du détecteur :

Là aussi il faudra travailler à la fréquence  $f_1 = f_{r_s}$  pour obtenir le maximum d'amplitude en détection, mais ici il est impératif que l'impédance du milieu arrière du transducteur source soit faible (air) pour que l'erreur soit minimale, et cela quels que soient les milieux de référence et analysés considérés.

Soit un seuil minimal d'erreur sur la mesure expérimentale du paramètre B/A de  $\sim 0.6\%$  si  $Z_{BS} = Z_{BD} = 425 \text{ rayl}$  (air), et de  $\sim 60\%$  si  $Z_{BS} = Z_{BD} = 3 \text{ Mrayl}$  (résine), )] pour l'éthanol en prenant l'eau comme milieu de référence.

Avec une efficacité beaucoup moins bonne en émission et en détection, il sera également possible de mesurer le paramètre B/A à  $f_1 = f_{r_s}$  dans le cas de milieux arrière d'impédance élevées, si on connaît au moins la valeur de l'impédance acoustique  $Z_{BS}$  de celle du transducteur source.

#### IV.4.4.3 Conclusion

Si on s'affranchit de la calibration des transducteurs, ou si les caractéristiques des céramiques sont inconnues, le seuil minimal d'erreur théorique pour les deux procédures est identique (par exemple  $\sim 0.6\%$  pour l'éthanol avec  $Z_{BS} = Z_{BD} = 425 \text{ rayl}$  (air)).

Cependant c'est la procédure par mesure des composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  qui est la plus stable au voisinage de la fréquence de travail  $f_1 = f_{r_s}$ , l'autre procédure nécessitant un positionnement fréquentiel précis (fig. IV.26 et 33).

De plus cette première procédure est intéressante car sa fonction de sensibilité, et l'erreur qui en découle, est uniquement fonction des caractéristiques du détecteur.

A la fréquence de travail choisie ( $f_1 = f_{r_s}$ ), on pourra éventuellement maximiser le transfert de puissance en intercalant entre la ligne (le) et la source un transformateur d'impédance.

Nous avons également montré qu'il est impossible d'obtenir une valeur correcte du paramètre B/A, en négligeant l'influence des sensibilités et par la procédure de mesure des composantes  $V_o$  et  $V_{s2}$ , si la céramique du transducteur source est amortie.

Toutefois, si la fréquence de travail est dans certaines zones particulières où l'influence des sensibilités ne peut être négligée, nous pouvons utiliser les expressions asymptotiques simples de la fonction  $F\eta_{rx}$  (IV.27.a-32-33.a) pour corriger la valeur du paramètre B/A, sous la forme:

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{corrigé}} = \left[ \left(\frac{B}{A}\right)_{\text{mesuré}} + 2 \right] F\eta_{rx} - 2$$

La fréquence particulière  $f\eta_1$ , qui permet théoriquement d'annuler l'influence des sensibilités, n'est guère exploitable en pratique car le détecteur est très peu sensible à cette fréquence. Le niveau de l'émission acoustique pourrait être cependant relevé en choisissant un transducteur source tel que  $f_{r_s} = f\eta_1$ .





**ANALYSE EXPERIMENTALE DE LA METHODE  
COMPARATIVE**



## IV.5 EXPERIMENTATIONS ET ANALYSES

L'objectif principal de cette partie est la validation expérimentale du modèle théorique proposé pour le système de mesure.

Après un descriptif du dispositif et des méthodes de mesure, nous expérimenterons le système dans des conditions similaires à celles étudiées lors des simulations précédentes.

Ensuite, nous appliquerons une des procédures de mesure la plus adéquate pour déterminer le paramètre B/A de différents milieux.

### IV.5.1 DISPOSITIF DE MESURE

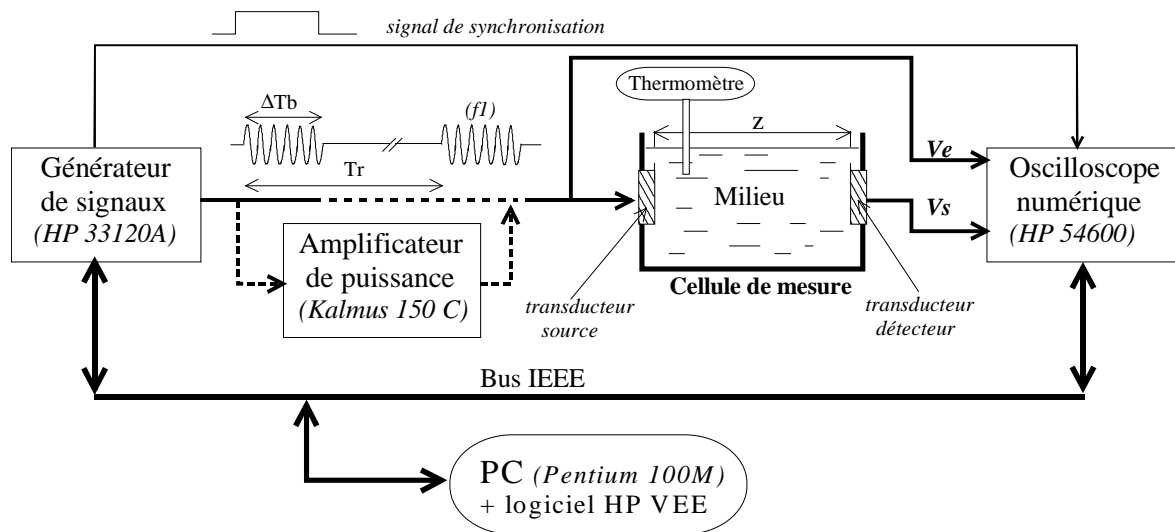


Fig IV.25: Dispositif de mesure

Le dispositif de mesure se compose essentiellement :

- D'un générateur de signaux HP 33120A : les grandeurs (forme, amplitude, fréquence,  $\Delta T_b$ ,  $T_r$  ...) du signal généré sont programmées ici par le logiciel HP VEE via une liaison IEEE.
- D'une cellule de mesure constituée de deux transducteurs (source et détecteur), dont les faces avant, séparées par la distance  $z$ , sont en contact avec le milieu de propagation.
- D'un oscilloscope numérique HP 54600 : le traitement des formes d'ondes ( $V_e(t)$ ,  $V_s(t)$ ) se fera par le logiciel HP VEE [17] via la liaison IEEE.

Si les composantes spectrales  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  de  $V_s(t)$  sont trop faibles pour être détectées, comme dans le cas d'un milieu très absorbant, un amplificateur de puissance sera placé entre le générateur et le transducteur source pour augmenter le niveau de l'excitation. Cet amplificateur de type Kalmus modèle 150C fabriqué par KMP, peut délivrer jusqu'à 50 W sous  $50\Omega$  dans la plage de fréquence 0.15-50 MHz.

Les expérimentations s'effectuant en régime harmonique, le générateur sera programmé pour délivrer des trains d'onde sinusoïdale de durée  $\Delta T_b$  et de période de récurrence  $T_r$ .

Avec ce type d'excitation l'oscilloscope sera synchronisé par le signal TTL (sync) issu du générateur de signaux.

Les différents paramètres du milieu étant dépendants de la température, celle ci sera contrôlée à l'aide d'un thermomètre digital.

## IV.5.2 REALISATION ET CARACTERISATION ELECTRIQUE DES TRANSDUCTEURS

La caractérisation électrique consiste à mesurer l'impédance complexe, module et phase, des transducteurs en fonction de la fréquence. Pour ces expérimentations nous avons utilisé un analyseur de réseau HP 4195A (10MHz – 500 MHz) couplé à un PC via une liaison IEEE, et piloté par le logiciel HP VEE. Les résultats expérimentaux sont ensuite visualisés et exploités par le logiciel Mathcad.

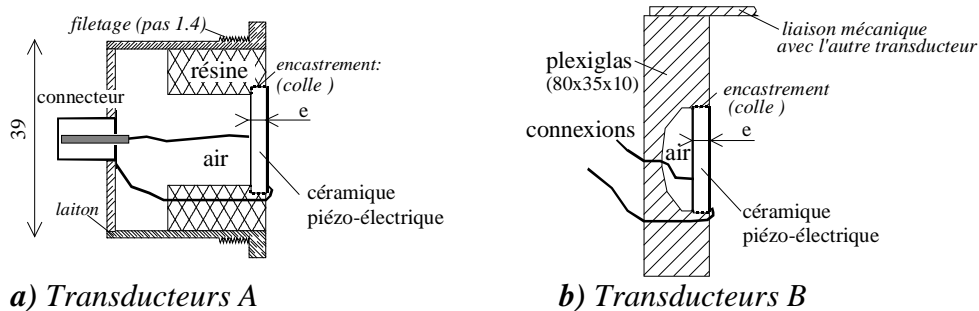
La précision obtenue par l'analyseur est de 0.17 %. Au préalable il est nécessaire d'effectuer une calibration de l'appareil, dans la bande de fréquence choisie pour les mesures, avec des impédances normalisée: 0 S - 0Ω - 50Ω. Pour la caractérisation des transducteurs utilisés, l'analyseur a été calibré dans la bande 0.1 – 10 MHz. Tous les relevés qui suivent sont constitués de 401 points de mesure.

Pour la réalisation des transducteurs nous avons utilisé les céramiques piézo-électriques du type P1 88 [16] de la société quartz & silice. Les caractéristiques principales sont:

$$\epsilon_{33}^S = 837 \cdot \epsilon_0 (F \cdot m^{-1}), \quad C_{33}^D = 15,8 \cdot 10^{10} (N \cdot m^{-2}), \quad \rho = 7700 (kg \cdot m^{-3}), \quad kt = 0,49$$

### IV.5.2.1 Transducteurs 2 & 4 MHz – milieu arrière = air (425 rayl) :

Nous avons réalisé deux couples (A & B) de transducteurs en montant les céramiques selon les schémas de la **figure IV.26**.



**Fig IV.26:** Montage des transducteurs 2 MHz et 4 MHz avec  $Z_B = 425 \text{ rayl}$ .

Ces céramiques sont des disques de diamètre  $2 \cdot a = 16 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $e$  telle que:

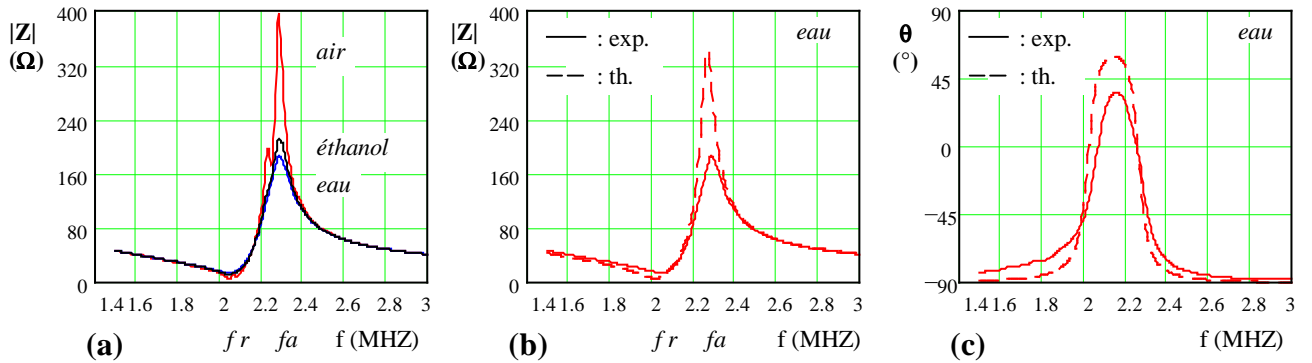
- $e = 1 \text{ mm}$  pour le transducteur 2 MHz
- $e = 0.5 \text{ mm}$  pour le transducteur 4 MHz

Ces épaisseurs, définissant les fréquences de résonance, sont celles indiquées par le constructeur.

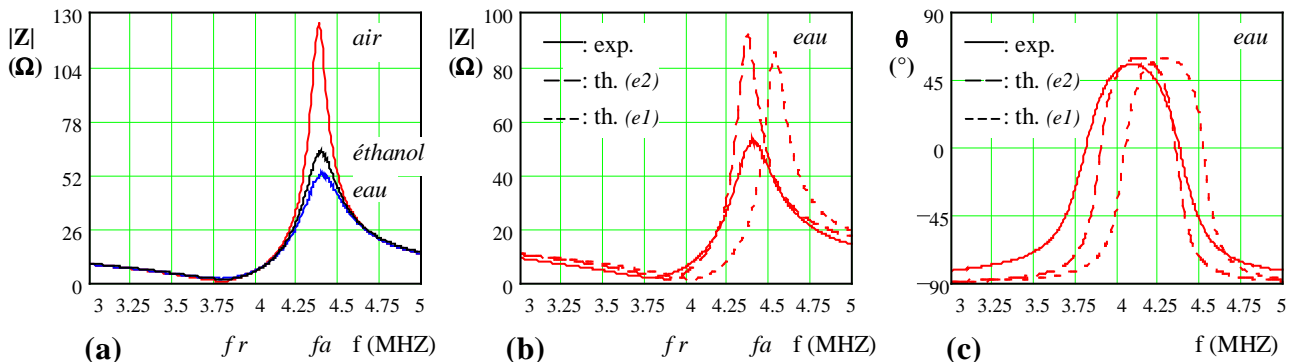
### Résultats expérimentaux

Nous ne donnons que la caractérisation du couple A de transducteurs, les céramiques utilisées étant identiques.

Les milieux en contact avec la face avant des transducteurs, sont: l'air ( $\sim 425 \text{ rayl}$ ), l'éthanol ( $\sim 0.9 \text{ Mrayl}$ ), et l'eau ( $\sim 1.5 \text{ Mrayl}$ ). Le module ( $|Z|$ ) et la phase ( $\theta = \arg(Z)$ ), pour les transducteurs 2 et 4 MHz, sont représentés sur les **figures IV.27 et IV.28**. Pour l'eau, nous comparons les résultats expérimentaux et théoriques (figures b et c).



**Fig IV.27:** Caractérisation du transducteur 2 MHz ( $Z_B = 425 \text{ rayl}$ ). Comparaison avec les simulations théoriques ( $e = 1 \text{ mm}$ ).

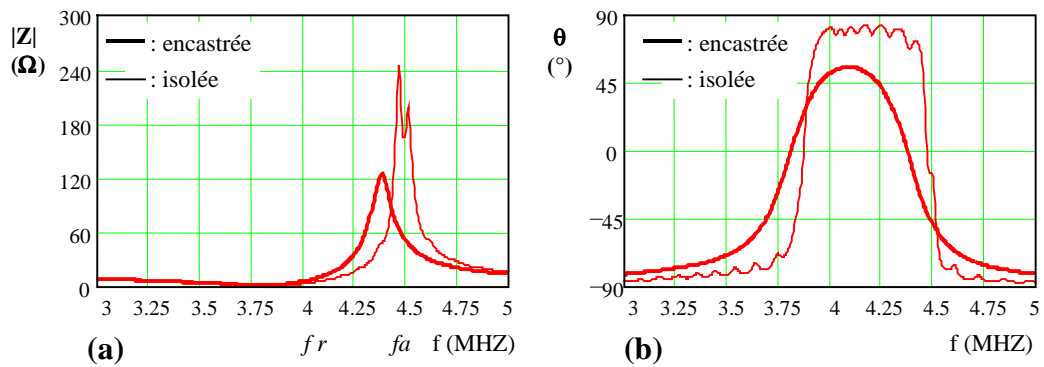


**Fig IV.28:** Caractérisation du transducteur 4 MHz ( $Z_B = 425 \text{ rayl}$ ). Comparaison avec les simulations théoriques ( $e1 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $e2 = 0.52 \text{ mm}$ ).

Sur les *figures a* nous observons que l'impédance  $|Z|$  varie en fonction de l'impédance acoustique du milieu avant, et principalement au voisinage de la fréquence d'anti-résonance ( $f_a$ ) comme le prévoyait les simulations du paragraphe IV.4.1.

Les allures des courbes expérimentales et théoriques sont identiques (*figures b et c*), et celles du module  $|Z|$  sont presque confondues, excepté au voisinage de la fréquence d'anti-résonance ( $f_a$ ). Principalement trois raisons justifient cet écart :

- Le modèle théorique ne tient pas compte des pertes mécaniques et diélectriques.
- A cela s'ajoutent toutes les incertitudes sur les caractéristiques de la céramique données par le constructeur.  
Ainsi, pour le transducteur 4 MHz, on observe un décalage fréquentiel entre les courbes théoriques et expérimentales si on considère une épaisseur de céramique  $e = 0.5 \text{ mm}$  (*figure IV.28 b et c*). En fait, l'épaisseur réelle de la céramique mesurée à l'aide d'un micromètre numérique, est de 0.52 mm, ce que confirme les simulations (*courbes b et c*).
- Le modèle théorique ne tient pas compte des effets de bords, et l'encastrement de la céramique engendre une diminution de son impédance électrique au voisinage de  $f_a$ , comme le montre la *figure IV.29*. Cette expérimentation est réalisée avec deux céramiques (4 MHz –  $a = 8 \text{ mm}$ ), l'une isolée dans l'air, l'autre encadrée pour réaliser le transducteur ( *fig. IV.26*) en contact avec l'air. Le décalage fréquentiel observé est dû à la différence d'épaisseur des deux céramiques.



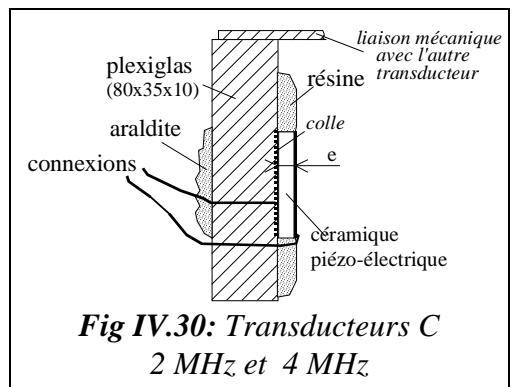
**Fig IV.29:** Influence de l'encastrement d'une céramique dont les deux faces sont en contact avec l'air.

#### IV.5.2.2 Transducteurs 2 et 4 MHz – milieu arrière = plexiglas (3 Mrayl)

Ces transducteurs ont été réalisés selon le schéma de la **figure IV.30**.

La couche d'araldite, d'impédance acoustique identique à celle du plexiglas (3 Mrayl), permet de réduire les réflexions sur la face arrière de la céramique (milieu arrière semi-infini).

Les céramiques sont des disques de diamètre  $2.a = 20$  mm et d'épaisseur 1 et 0.5 mm (non mesurée avec précision au préalable).



**Fig IV.30:** Transducteurs C 2 MHz et 4 MHz

#### Résultats expérimentaux

Les milieux en contact avec la face avant des transducteurs, sont: l'air ( $\sim 425$  rayl), le glycérol ( $\sim 2.3$  Mrayl), et l'eau ( $\sim 1.5$  Mrayl). Le module ( $|Z|$ ) et la phase ( $\theta = \arg(Z)$ ), pour les transducteurs 2 et 4 MHz, sont représentés sur les **figures IV.31 et IV.32**. Pour l'eau, nous comparons les résultats expérimentaux et théoriques (figures b et c).

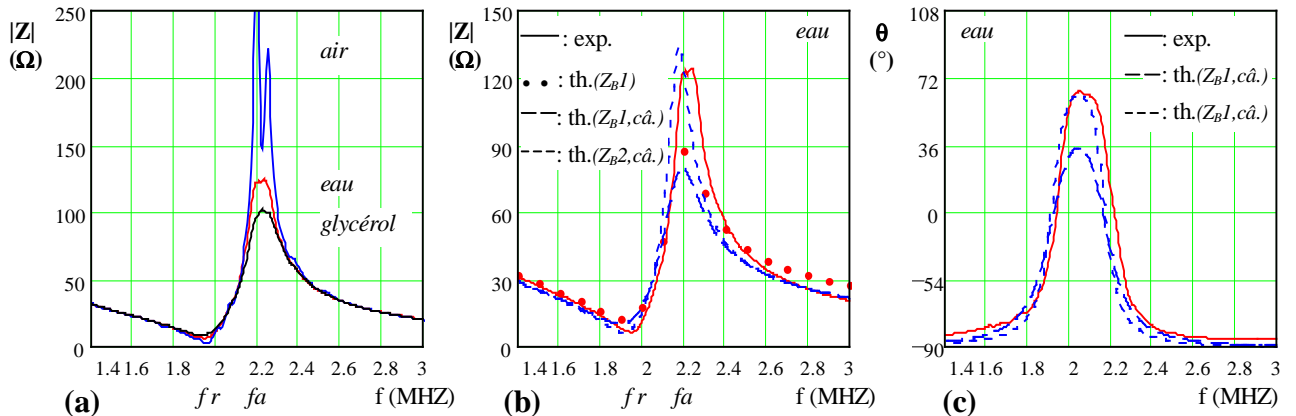
Afin de mettre en évidence l'influence de la connectique, la caractérisation a été effectuée avec un câble de mesure coaxial (1 m), et l'impédance mesurée par l'analyseur correspond à l'ensemble : câble + transducteur.

Les simulations sont donc effectuées à l'aide de la relation (IV.22.a) (*courbes th. (câ.)*), et à titre de comparaison nous présentons également les courbes d'impédance sans câble (*courbes th.*).

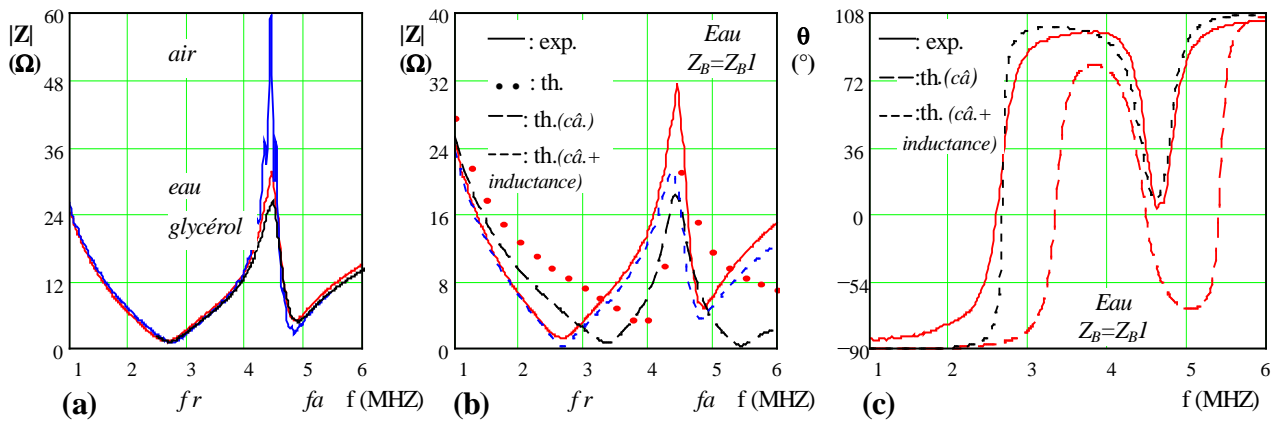
On constate que l'impédance à la fréquence  $f_a$  est plus importante qu'en théorie, alors que l'influence des pertes aurait dû engendrer le contraire. Nous attribuons cet effet à la constitution même du transducteur avec une couche de colle, d'impédance acoustique inférieure à celle du plexiglas, sur la face arrière de la céramique (cf. simulation avec  $Z_B = Z_{B2} = 1$  Mrayl).

L'influence du câble est très nette pour le transducteur 4 MHz, mais elle ne suffit pas à expliquer l'allure des résultats expérimentaux. En effet, le câble devrait ramener la fréquence  $f_r$  à environ 3.4 MHz, alors que l'on mesure  $\sim 2.7$  MHz. Cet écart est justifié si on considère que les fils de connexion reliant la céramique à l'adaptateur BNC possèdent une inductance série équivalente  $L \approx 260$  nH, comme le montrent les simulations **figures IV.32.b & c** où on considère l'impédance: câble  $\rightarrow (Z_{\text{transducteur}} + j.L.\omega)$ .

Une mesure de la fréquence de résonance en supprimant ces fils confirme cette hypothèse, puisque l'on obtient bien les 4 MHz prévus par la théorie (courbe (th.))<sup>40</sup>.



**Fig IV.31:** Caractérisation du transducteur 2 MHz (+ câble). Comparaison avec les simulations théoriques ( $e = 1.03$  mm,  $Z_{B1} = 3$  Mrayl,  $Z_{B2} = 1$  Mrayl).



**Fig IV.32:** Caractérisation du transducteur 4 MHz (+ câble). Comparaison avec les simulations théoriques ( $e = 0.51$  mm,  $z_{B1} = 3$  Mrayl, inductance = 260 nH).

#### IV.5.3 PRINCIPE DE LA MESURE DES COMPOSANTES SPECTRALES $V_o$ , $V_{s1}$ , $V_{s2}$ POUR UNE EXCITATION $V_e$ A FREQUENCE ( $f_1$ ) VARIABLE

Les composantes spectrales sont déduites de l'enregistrement temporel du signal, sur lequel on effectue une transformée de Fourier discrète (DFT), version numérisée de la transformée de Fourier continue (FT).

HP VEE utilise un algorithme spécifique appelé transformée de Fourier rapide (FFT) pour calculer la DFT, dont nous donnons les principales grandeurs et propriétés:

- $N_t$  = nombre de points de l'enregistrement temporel du signal  $U(t)$
- $\Delta T$  = longueur de l'enregistrement temporel.
- $f_{\text{eff}}$  = fréquence effective d'échantillonnage du signal  $U(t)$ .
- $[0, f_{\text{max}}]$  = domaine fréquentiel de la FFT du signal échantillonné  $U(t)^*$ .
- $N_f = 1 + N_t/2$  = nombre de points de la FFT.
- $\Delta f$  = résolution fréquentielle.

<sup>40</sup> D'ailleurs, dans les expérimentations ultérieures avec ce détecteur, on utilisera une sonde d'oscilloscope directement reliée à la céramique par des fils courts.



- $F_{ca} = \frac{2000}{N_t} = \text{facteur de correction des amplitudes de la FFT.}$

Nous avons  $f_{\max} = \frac{Nf}{\Delta T} = \frac{f_{e\text{eff}}}{2}$  et  $\Delta f = \frac{1}{\Delta T}$

Tous les points d'abscisse  $f$  de la FFT, tels que  $f \in \{0, \dots, f_{\max}\}$ , sont distants de la résolution fréquentielle  $\Delta f$ . La troncature temporelle ( $\Delta T$ ) doit être un multiple entier de la période ( $1/f_i$ ) du signal, et la FFT restituera l'amplitude correcte des composantes fréquentielles  $f_i$  d'un signal  $U(t)$ , si :

$$f_i \in \{0, \dots, f_{\max}\} \text{ soit } f_i = n \cdot \Delta f \implies f_i \cdot \Delta T = n \text{ avec } n \text{ entier} \quad (\text{IV.36})$$

Lors des expérimentations, surtout celles à fréquence variable, il faudra donc veiller à ce que cette condition soit vérifiée.

la fréquence  $f_1 = f_i$  du générateur sera incrémentée dans l'intervalle  $[f_{\min}, f_{\max}]$  avec :

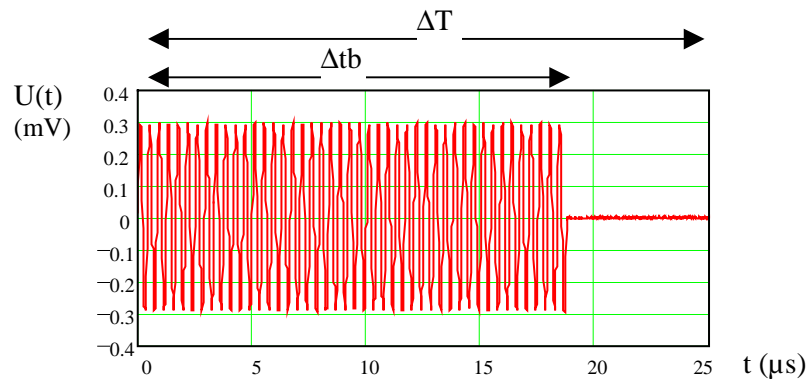
$$f_i = f_{\min} + \left[ \frac{f_{\max} - f_{\min}}{n_p} \right] \cdot i \quad \text{où } n_p + 1 \text{ est le nombre entier de points de mesure.}$$

Pratiquement, le générateur produira un train d'onde de durée suffisamment longue pour se placer dans la condition d'excitation permanente, mais assez courte pour éviter l'apparition d'ondes stationnaires dans la cellule de mesure. La durée  $\Delta t_b$  de ce train d'onde (ou burst) est définie par :  $\Delta t_b = n_c \cdot T_i = \frac{n_c}{f_i}$ , où  $n_c$  est le nombre de périodes ou cycles.

Par conséquent, pour que la mesure des amplitudes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  soit correcte, il faut respecter la condition (IV.36), ce qui implique:

$$\left( f_{\min} + \left[ \frac{f_{\max} - f_{\min}}{n_p} \right] \cdot i \right) \cdot \Delta T = n \text{ (entier) pour } i \in \{0, \dots, n_p\} \quad (\text{IV.37})$$

La **figure IV.33** présente un enregistrement temporel de durée  $\Delta T$  effectué par l'oscilloscope sur un train d'onde de durée  $\Delta t_b$ . Le signal  $U(t)$  analysé est généré directement par le générateur.

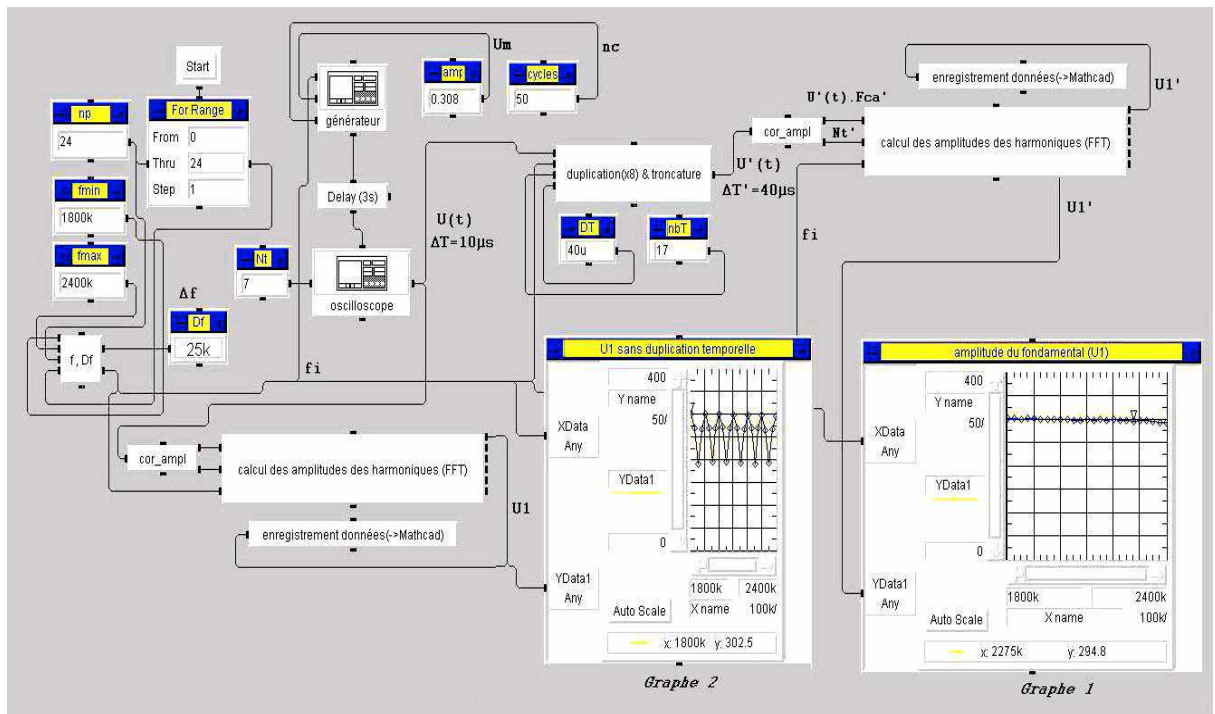


**Fig IV.33:** Exemple d'enregistrement temporel ( $\Delta T$ ) observé sur l'écran de l'oscilloscope.

Pour effectuer une mesure correcte des composantes du signal en fonction de la fréquence  $f_1 = f_i$  d'excitation, il faut avoir  $\Delta T \leq \Delta t_b$  et respecter la condition (IV.37).

Cette double condition nécessite généralement la duplication de l'enregistrement, et sa troncature à la durée  $\Delta T$  adéquate.

Ces opérations, ainsi que le calcul des harmoniques, sont réalisées par un programme mis en œuvre à l'aide du logiciel HP VEE et présenté **figure IV.34**.



**Fig IV.34:** Programme HP VEE réalisant l'automatisation de l'expérience et les traitements mathématiques du signal.

Dans cette application l'oscilloscope réalisera un enregistrement temporel de durée  $\Delta T = 10 \mu s$  ( $1 \mu s/div$ ) au voisinage du centre de  $\Delta tb$ , et nous effectuerons  $np + 1 = 25$  points de mesure sur la plage [1.8; 2.4] MHz.

Ainsi, pour respecter la condition (IV.37), la durée minimale de l'enregistrement temporel doit être  $\Delta T' = 40 \mu s$ . Dans ces conditions, nous avons sélectionné  $nbT = 17$  périodes de  $U(t)$  et effectué une duplication par 8, soit un enregistrement temporel de durée :

$\sim 56.7 \mu s < \frac{nbT.8}{f_i} < \sim 75.5 \mu s$ . Ensuite, la troncature de durée  $\Delta T' = 40 \mu s$  est réalisée sur cet enregistrement.

A titre de comparaison ce programme effectue le traitement du signal  $U(t)$  et du signal dupliqué et tronqué  $U'(t)$  dont les résultats sont affichés respectivement sur les graphes 2 et 1. Le graphe 2 met en évidence le non respect de la condition (IV.37), puisque l'on devrait obtenir une valeur constante pour le fondamental.

Pour éviter l'apparition d'ondes stationnaires dans les trains d'onde, se traduisant par des fluctuations d'amplitude en fonction de la fréquence, il faut avoir la condition:

$$\Delta tb < \frac{2.z}{c} \Rightarrow nc < \frac{2.z}{\lambda} \quad (IV.38)$$

qui traduit la séparation temporelle des différents échos présents dans la cellule de mesure. Le relevé des signaux  $V_e(t)$  et  $V_s(t)$  *figure IV.35* représente le non respect de cette condition (voir aussi la *figure IV.36.a* où cette condition est respectée).

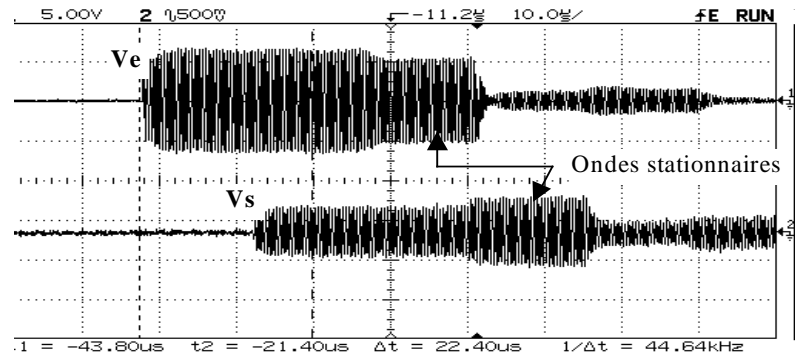


Fig IV.35: Présence d'ondes stationnaires.

#### IV.5.4 MESURES ET ESTIMATIONS DES PARAMETRES DES MILIEUX

Pour la détermination du paramètre  $B/A_x$ , outre la mesure des composantes spectrales ( $V_{S2}$ ,  $V_{S1}$  ou  $V_0$ ) pour le milieu de référence (r) et d'analyse (x), il est nécessaire de connaître:

- Les vitesses de phase de propagation ( $c_r$  et  $c_x$ ).
- Les masses volumiques ( $\rho_r$  et  $\rho_x$ ).
- Les atténuations ( $\alpha_{0r}$  &  $q_r$  et  $\alpha_{0x}$  &  $q_x$ ).
- Le paramètre  $B/A_r$  du milieu de référence.

Le milieu de référence choisi étant l'eau (non distillée), on considérera  $B/A_r = 5.2$ .

Les atténuations seront celles de la littérature. La détermination classique de l'atténuation par la mesure de la décroissance d'amplitude des échos détectés par la source ( $V_{e\acute{c}ho1}$  et  $V_{e\acute{c}ho2}$ , **fig. IV.36.a**) serait trop imprécise. La variation d'amplitude entre ces échos étant principalement due au coefficient de réflexion (milieu-transducteur), à la diffraction, et au défaut de parallélisme entre les transducteurs comme nous l'aborderons ultérieurement. Par exemple, l'atténuation dans l'eau à 2 MHz sur 2 x 66 mm engendre seulement une décroissance de 1.3 %, pour environ 35% observé (**fig. IV.36.a**). Par contre dans les milieux très absorbants l'atténuation l'emporte sur les autres effets.

Les masses volumiques pourront être trouvées dans la littérature, ou mesurées à l'aide d'une éprouvette graduée de 250 ml ( $\Delta V = 1\text{ml}$ ) et d'une balance numérique ( $\Delta m = 4\text{g}$ ).

Les vitesses de propagation seront mesurées. La vitesse ( $c$ ) intervenant dans les expressions théoriques est une vitesse de phase ( $c_\phi$ ), alors qu'en toute rigueur on mesure une vitesse de groupe ( $c_g$ ).

Ces deux vitesses sont reliées par l'expression :

$$c_g = \frac{c_\phi}{1 - \frac{f}{c_\phi} \cdot \frac{\partial c_\phi}{\partial f}} \quad (\text{IV.39})$$

Elles sont identiques si la vitesse de phase est indépendante de la fréquence ( $\partial c_\phi / \partial f = 0$ ), ce qui est le cas pour les ondes ultrasonores dans les fluides, au moins jusqu'à 100 MHz.

La mesure du temps de propagation de groupe ( $\tau$ ) donnera donc la vitesse  $c = z/\tau$ .

Par exemple, la **figure IV.36** montre les signaux  $V_e(t)$  et  $V_s(t)$  obtenus avec le dispositif de mesure (fig IV.25) pour l'eau à  $T = 22.5$  °C. Les curseurs doivent être positionnés précisément, par exemple au 3<sup>ème</sup> passage à zéro, comme le montre la figure b.

Avec  $z = 66$  mm, on mesure  $\tau = 44.53$   $\mu\text{s}$ , donc :  $c = z/\tau = 1482$  m/s.

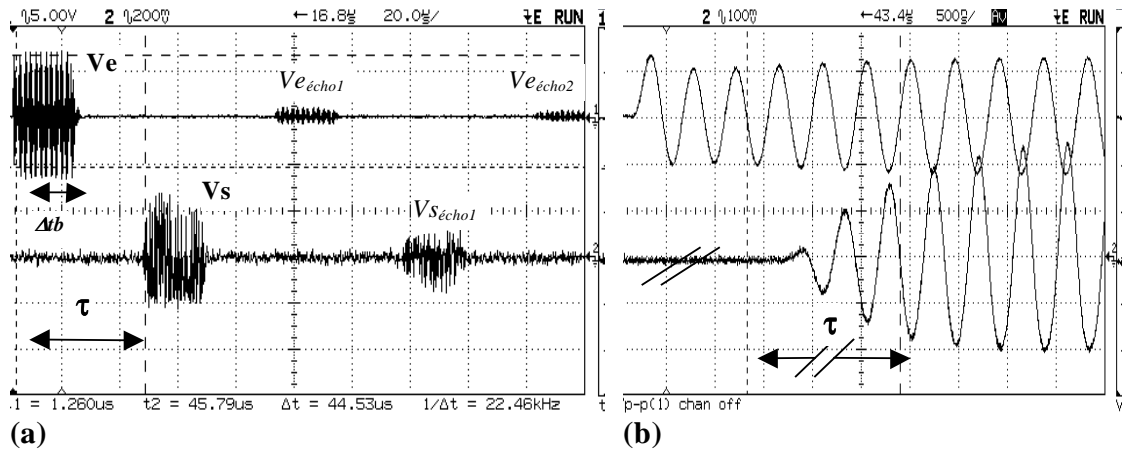


Fig IV.36: Mesure de la vitesse de propagation.

Une technique plus précise, et permettant de s'affranchir du retard apporté par les transducteurs, serait de mesurer l'intervalle de temps entre 2 échos captés par la source: on superpose l'écho2 sur l'écho1 mémorisé, et on mesure le retard ( $2.\tau$ ) correspondant. Avec cette méthode on trouve  $2.\tau = 88.96 \mu\text{s}$ , soit  $c = 1484 \text{ m/s}$ .

En toute rigueur, il faudrait également tenir compte du déphasage apporté par la diffraction de la source ( $\theta(z) = \arg(D1(z))$  sous la forme d'une correction temporelle:

$$\tau_{\text{corrigé}} = \tau_{\text{mesuré}} + \frac{\theta(4.z) - \theta(2.z)}{2.\pi.f}$$
. Par exemple, dans l'eau à 2 MHz avec  $z = 66\text{mm}$  et  $a = 8\text{mm}$ , la correction à apportée serait d'environ  $0.02\mu\text{s}$ . Cet écart est négligeable dans la mesure du paramètre B/A, puisque seul intervient le rapport des vitesses  $\frac{c_x}{c_r} = \frac{\tau_r}{\tau_x}$ .

Pour cette même raison nous utiliserons la première méthode proposée, qui est la plus simple expérimentalement.

#### IV.5.5 UTILISATION DU DISPOSITIF POUR LA MESURE DU PARAMETRE B/A

##### IV.5.5.1 Mise en évidence du caractère non linéaire de la propagation

En faisant varier la distance  $z$  entre les transducteurs, et en relevant la tension  $V_s(t)$  détectée, on met en évidence la déformation de l'onde en fonction du trajet acoustique.

La déformation observée (fig IV.37.a) est conforme à celle attendue par la théorie (cas d'une onde plane), en précisant toutefois que l'onde est filtrée par le détecteur privilégiant le second harmonique. La fréquence du fondamental est  $f_1 = f_s = 2.03 \text{ MHz}$ , le milieu choisi est l'éthanol. Pour une meilleure observation, les échelles d'amplitude de ces trois formes d'onde ont été choisies différentes.

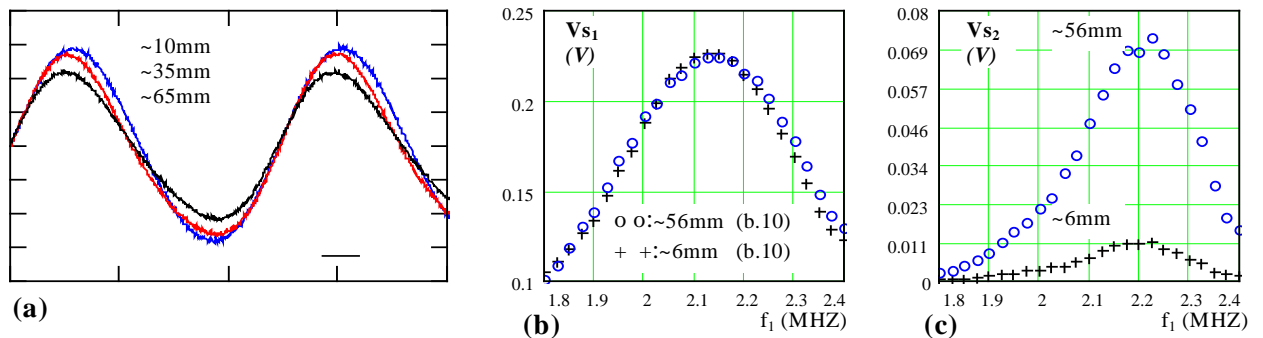


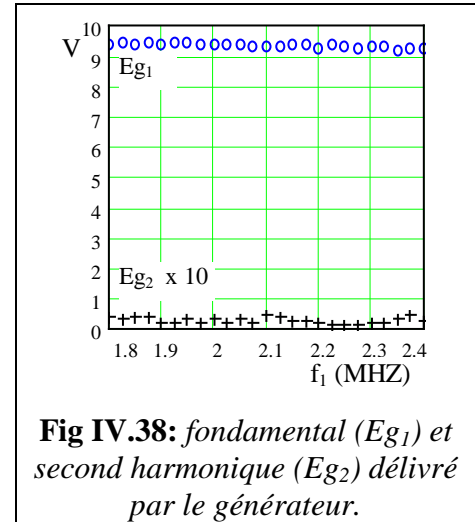
Fig IV.37: Evolution de la forme d'onde et de ses composantes spectrales en fonction de la distance et de la fréquence ( $f_1$ ). Transducteurs B.

Pour valider le modèle théorique nous effectuerons le relevé des amplitudes des composantes spectrales de l'onde détectée, en fonction de la fréquence du fondamental ( $f_1$ ) de l'excitation (source). Les **figures IV.37 b & c** montrent les amplitudes du fondamental ( $V_{s1}$ ) et du second harmonique ( $V_{s2}$ ) à deux positions (6mm et 56 mm). Le générateur délivre 10 cycles d'amplitude 9.4V avec une période de récurrence  $Tr=100$  Hz.

On constate nettement le caractère non linéaire dû au milieu de propagation, et non au système de mesure.

Pour s'assurer toutefois de la pureté spectrale de l'excitation, nous avons relevé les composantes harmoniques du signal  $E_g$  délivré par le générateur (**fig. IV.38**), les amplitudes du second harmonique sont multipliées par 10.

En fait ce dernier est beaucoup trop faible pour être mesuré correctement par l'oscilloscope associé au processus HP VEE décrit précédemment (fig. IV.34).



**Fig IV.38:** fondamental ( $E_{g1}$ ) et second harmonique ( $E_{g2}$ ) délivré par le générateur.

#### IV.5.5.2 Relevés des composantes $V_{s1}$ et $V_{s2}$ dans l'eau et l'éthanol

##### IV.5.5.2.1 Transducteurs de type A

Ces transducteurs sont vissés dans une petite cuve en laiton (50x50x65mm), ce qui donne  $z = 51.5$  mm.

Les caractéristiques des milieux mesurées à 24 °C, sont:

- Eau (r): (courante),  $c_r = 1484$  m/s ,  $\rho_r = 0.99 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.
- Ethanol (x): (95%, 3 à 5% de méthanol),  $c_x = 1206$  m/s ,  $\rho_x = 0.82 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Les **figures IV.39** montrent les résultats d'une première série de mesure pour l'eau (a,b) et l'éthanol (b,c), avec deux amplitudes d'excitation ( 7 et 9.4 V).

Le nombre de cycles du train d'onde est  $n_c = 55$  ( $Tr=100$ Hz), l'analyse fréquentielle se fera sur 17 x 8 périodes tronquées à  $\Delta T = 40$   $\mu$ s.

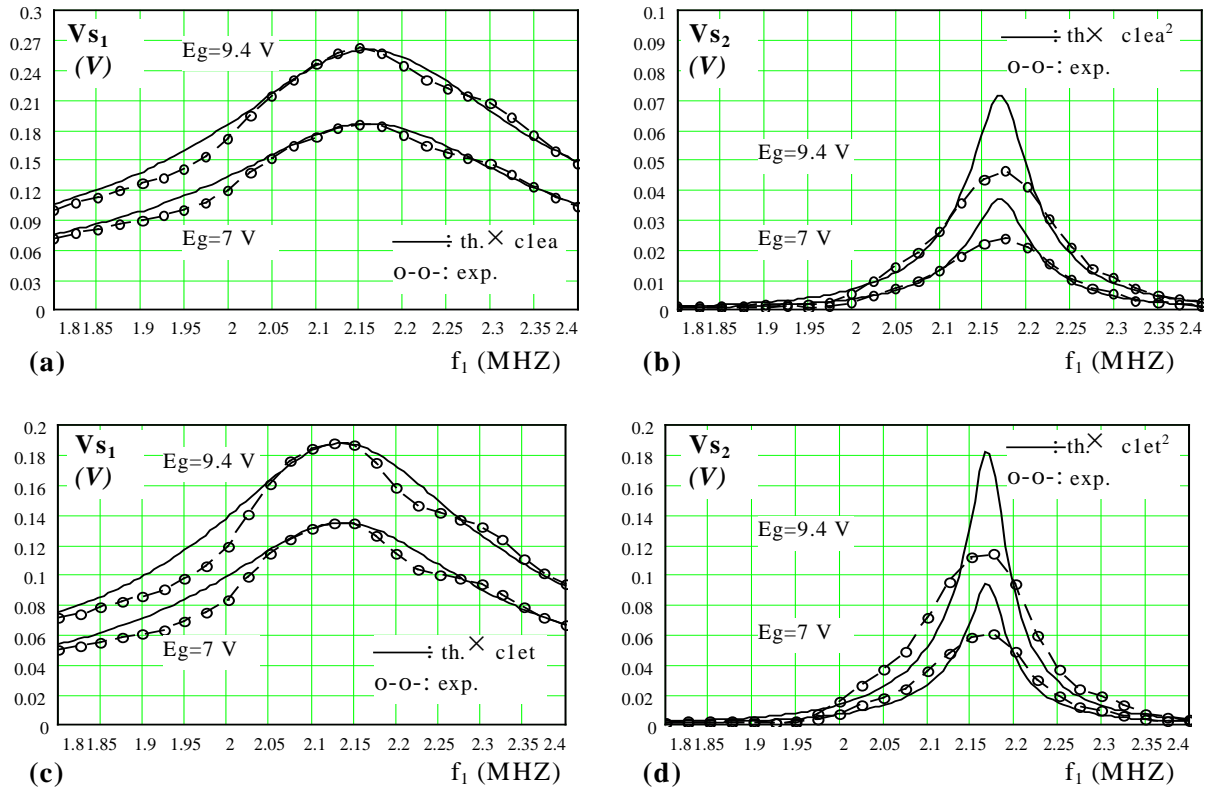
Les simulations sont effectuées en considérant:  $B/A_r = 5.2$ ,  $B/A_x = 9.5$ ,  $a_{eff} = 7.5$  mm.

Les allures des courbes expérimentales et théoriques sont voisines, en appliquant toutefois un facteur de correction d'amplitude  $c_{lea}$  et  $c_{let}$  sur les courbes théoriques du fondamental ( $V_{s1}$ ). Comme le second harmonique ( $V_{s2}$ ) est une fonction de  $V_{s1}^2$ , nous appliquons sur celui ci les corrections  $c_{lea}^2$  et  $c_{let}^2$ . L'intérêt de ces corrections et de comparer les variations, et de quantifier les écarts, entre la théorie et l'expérimentation.

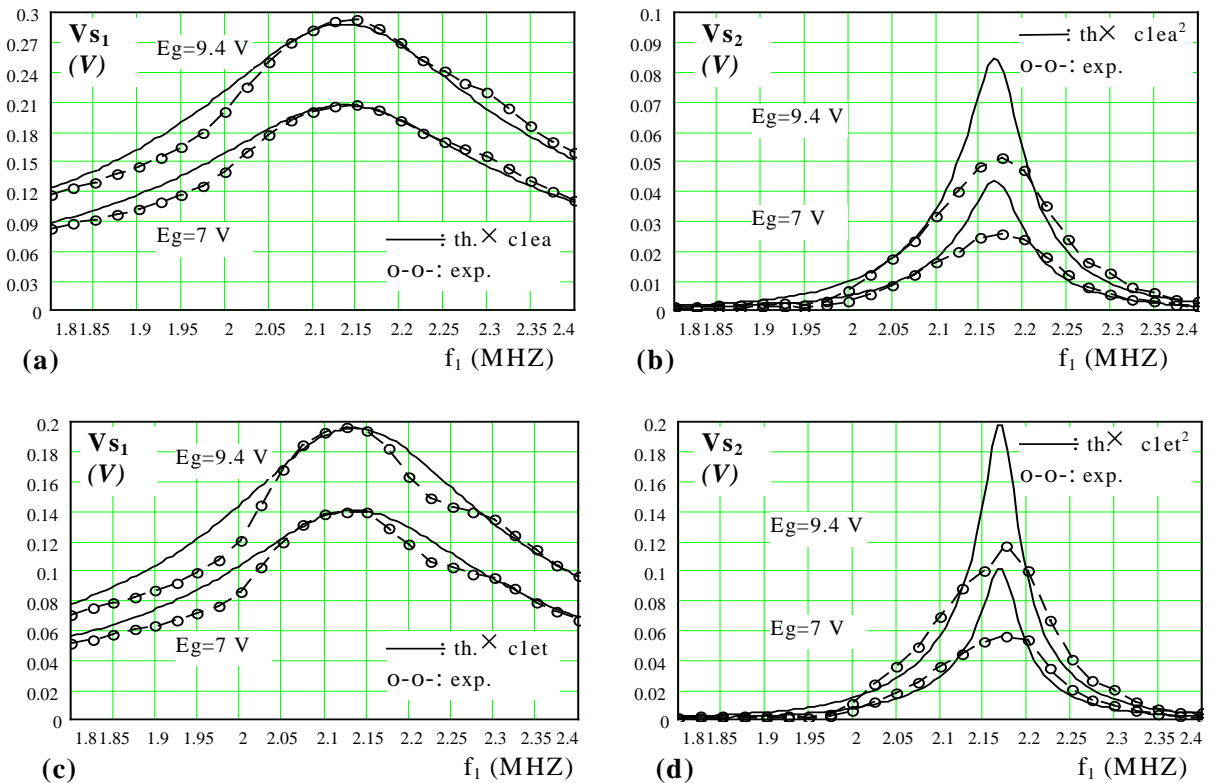
En conséquence, l'amplitude des composantes détectées est inférieure aux prévisions théoriques. Cela était prévisible puisque le modèle théorique ne tient pas compte des pertes diélectriques et mécaniques, ainsi que des effets de bords, comme nous l'avons déjà précisé précédemment (§ IV.5.2).

A cela s'ajoute un autre phénomène important, qui est la décroissance d'amplitude consécutive à un mauvais parallélisme entre les faces des transducteurs.

En effet, en intervertissant les transducteurs dans la cellule de mesure, on obtient les relevés présentés **figures IV.40**.



**Fig IV.39:** Variations du fondamental ( $V_{s1}$ ) et du second harmonique ( $V_{s2}$ ) dans l'eau (a & b) et l'éthanol (c & d). Comparaisons avec les simulations théoriques en considérant les corrections :  $c_{lea} = 0.73$  et  $c_{let} = 0.73$ .  $\sim 57 < k.a_{eff}(\text{eau}) < \sim 76$ ,  $\sim 70 < k.a_{eff}(\text{éthanol}) < \sim 94$



**Fig IV.40:** Autre série de mesures: Variations du fondamental ( $V_{s1}$ ) et du second harmonique ( $V_{s2}$ ) dans l'eau (a & b) et l'éthanol (c & d). Comparaisons avec les simulations théoriques en considérant les corrections :  $c_{lea} = 0.81$  et  $c_{let} = 0.76$ .

Normalement les résultats devraient être identiques, ce n'est pas le cas puisque l'on observe une augmentation d'amplitude. Par conséquent ce phénomène n'est attribuable qu'à la seule géométrie du système, c'est à dire à un défaut de parallélisme entre les transducteurs, et dans une proportion moindre, à un décalage axial.

D'ailleurs cela se confirme par l'observation d'une variation d'amplitude lorsque l'on tourne légèrement les transducteurs, non imputable à la seule décroissance engendrée par la diffraction sur ce déplacement.

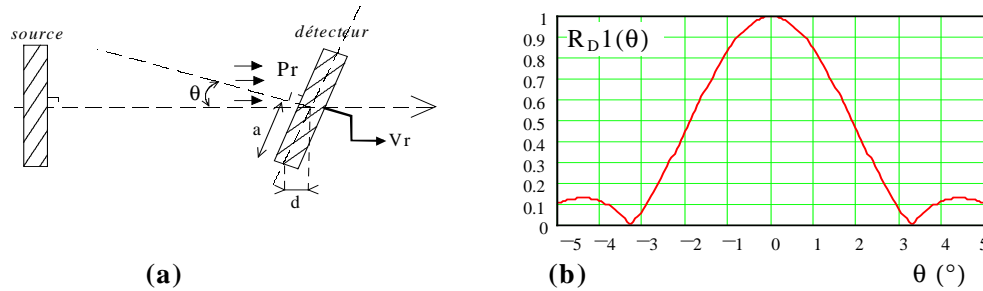
Avant de poursuivre les expérimentations il convient de justifier théoriquement l'influence d'un défaut de parallélisme sur les mesures.

#### IV.5.5.2.2 Influence d'un défaut de parallélisme:

En considérant la réversibilité électro-acoustique d'un transducteur, et à partir de l'expression du champ acoustique  $P_1(r,\theta)$  rayonné, on peut définir la réponse directionnelle d'un transducteur à une onde plane incidente, sous la forme :

$$R_{D1}(\theta) = \frac{|P_1(r,\theta)|}{|P_1(r,0)|} = \frac{|2.J_1[k.a.\sin(\theta)]|}{k.a.\sin(\theta)} \quad \text{avec } k = \frac{2.\pi.f}{c} \quad \text{(IV.40)}$$

où  $\theta$  est l'angle traduisant le défaut de parallélisme selon la **figure IV.41.a**.

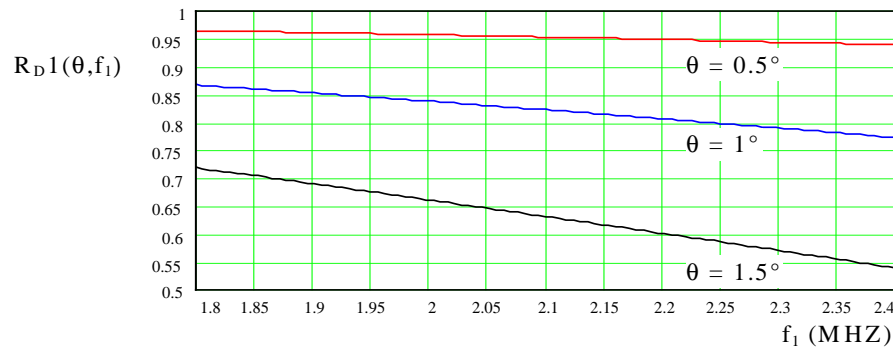


**Fig IV.41:** Configuration géométrique et réponse directionnelle d'un transducteur  $R_{D1}(\theta)$ , simulée avec:  $a = 8 \text{ mm}$ ,  $f = 2 \text{ MHz}$ ,  $c = 1500 \text{ m/s}$  (eau).

La tension  $V_r(\theta) = \eta_r.Pr.R_{D1}(\theta)$  générée par le détecteur est maximum pour  $\theta = 0$ , et chute de 50% pour  $\theta = 2^\circ$  dans l'exemple figure b. Notons que dans ces conditions, une déviation de  $0.5^\circ$  correspond à un écart  $d = a.\cos(90 - \theta)$  d'environ  $70\mu\text{m}$ , et nous ne pensons pas obtenir un meilleur parallélisme avec les cellules de mesure utilisées.

Cette réponse directionnelle, s'appliquant au fondamental  $V_{s1}$ , est bien sur fonction de la longueur d'onde dans le milieu de propagation ( $\lambda = c/f_1$ ).

Par exemple, dans l'eau avec  $1.8 \text{ MHz} < f_1 < 2.4 \text{ MHz}$  et  $a = 8\text{mm}$ , nous obtenons les courbes théoriques:



**Fig IV.42:** Variation relative de l'amplitude du fondamental détecté en fonction de la fréquence et d'un décalage angulaire entre les transducteurs.

En conséquence, il est sensé d'attribuer en grande partie l'écart d'amplitude entre les résultats expérimentaux et théoriques à un défaut de parallélisme.

Par exemple, en considérant la courbe **fig. IV.40.a** et en négligeant les pertes, la solution de  $R_D1(\theta) = c1ea$  donne un angle d'environ  $1^\circ$ . Et avec les pertes, un angle inférieur à  $1^\circ$  correspond à une configuration géométrique tout à fait plausible.

Pour le second harmonique on peut supposer le transducteur détectant une onde de fréquence  $2.f$ , ce qui revient à considérer une réponse directionnelle  $R_D2(\theta, f) = R_D1(\theta, 2.f)$ .

Par exemple, à 2 MHz et pour  $\theta = 1^\circ$ , on a :  $R_D1(\theta, f) = 0.83$  et  $R_D2(\theta, f) = 0.44$ . Cela justifie l'écart plus important observé pour le second harmonique, avec des pertes plus importantes lorsque la fréquence augmente.

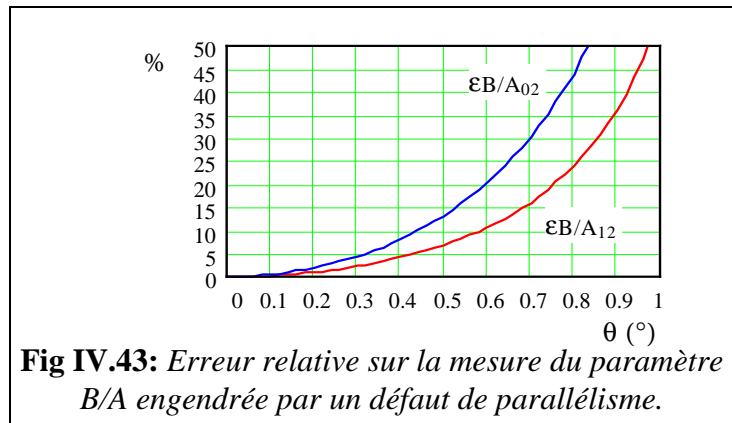
Comme ces réponses directionnelles sont fonctions de la longueur d'onde, elles ne seront pas complètement compensées dans les procédures de mesure de la méthode comparative. On peut définir l'erreur relative apportée sur la valeur théorique du paramètre B/A, sous la forme :

$$\varepsilon_{B/A} = \varepsilon_{RD} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot (B/A)^{-1} \right] \text{ avec } \varepsilon_{RD_{02}} = \left| 1 - \frac{R_D 2_r}{R_D 2_x} \cdot \left( \frac{R_D 1_x}{R_D 1_r} \right)^2 \right|, \varepsilon_{RD_{12}} = \left| 1 - \frac{R_D 2_r}{R_D 2_x} \right| \quad (\text{IV.41})$$

où  $\varepsilon_{RD_{02}}$  et  $\varepsilon_{RD_{12}}$  correspondent respectivement à la procédure par mesure des composantes  $V_0$  et  $V_{S2}$  et à celle par mesure des composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$ .

Pour ces deux procédures on donne les simulations (**fig. IV.43**) effectuées à 2 MHz pour l'éthanol ( $c_x = 1200\text{m/s}$ ,  $B/A_x = 10$ ), avec l'eau comme milieu de référence ( $c_r = 1500\text{m/s}$ ).

La procédure par mesure des composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  est la moins sensible à un défaut de parallélisme.



**Fig IV.43:** Erreur relative sur la mesure du paramètre B/A engendrée par un défaut de parallélisme.

Les mesures suivantes seront exploitées pour le tracé expérimental du paramètre B/A en fonction de la fréquence, et cela pour les deux procédures de mesure et pour deux couples de transducteurs de milieu arrière différent ( B(air) et C(plexiglas)).

#### IV.5.5.3 Relevés des composantes $V_0$ $V_{S1}$ $V_{S2}$ avec les transducteurs de type B et C

Les caractéristiques des milieux mesurées à  $T = 25^\circ\text{C}$ , sont:

- Milieu de référence: eau courante,  $c_r = 1489\text{ m/s}$ ,  $\rho_r = 992\text{ kg/m}^3$ .
- Milieu analysé: Ethanol (95%, 3 à 5% de méthanol),  $c_x = 1230\text{ m/s}$ ,  $\rho_x = 832\text{ kg/m}^3$  (la concentration d'éthanol devant être un peu plus faible, du fait de l'évaporation).

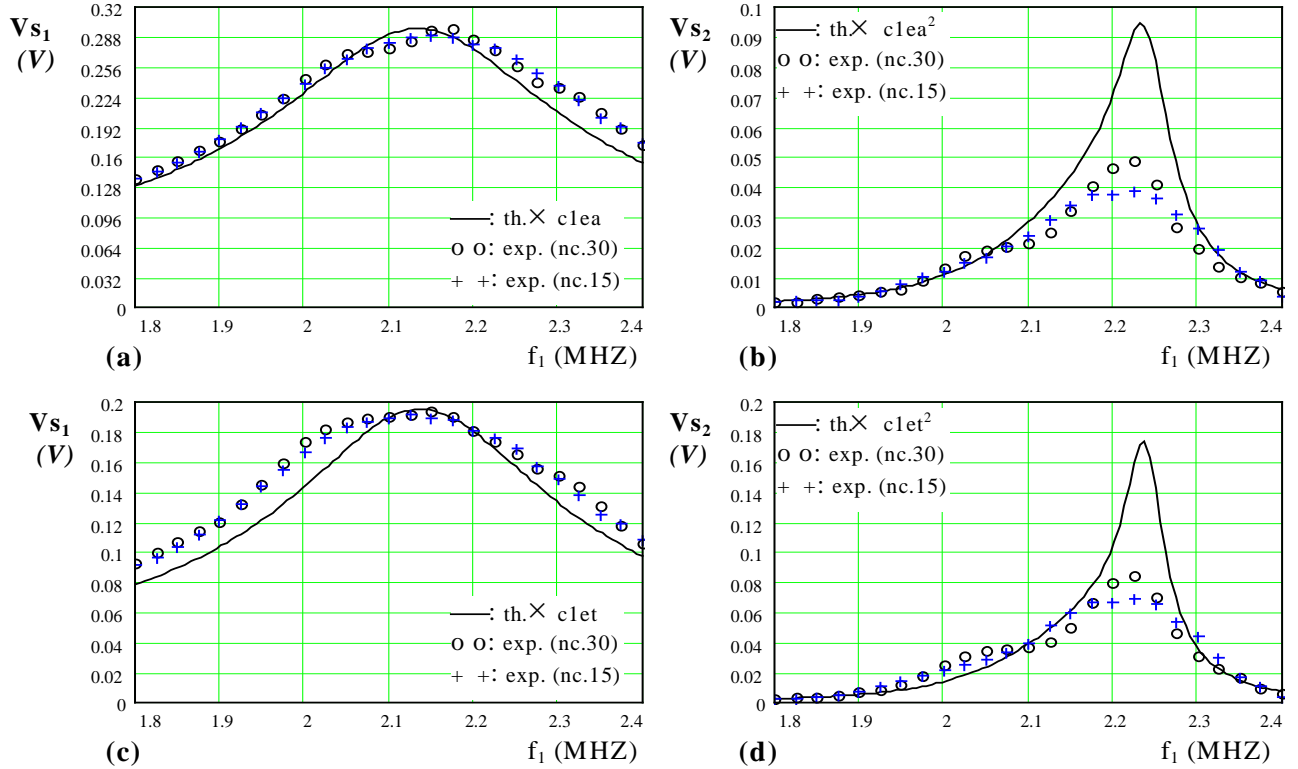
##### IV.5.5.3.1 Transducteurs de type B (milieu arrière = air)

La constitution de ces transducteurs permet un positionnement plus précis en les reliant mécaniquement par une barre en plexiglas (**fig IV.26.b**). Le U ainsi obtenu est immergé dans une cuve (140x75x75mm) contenant le milieu de propagation. La distance entre les transducteurs est  $z = 66\text{mm}$ .



Deux séries de mesures seront effectuées pour  $E_g = 9.4 \text{ V}$ , avec  $nc = 15$  cycles et  $nc = 30$  cycles ( $Tr=100\text{Hz}$ ). Une routine HPVÉE intégrée au processus initial (fig IV.34) effectuera la moyenne de 3 mesures successives pour chaque point représenté. L'analyse fréquentielle se fera sur  $3 \times 32$  périodes tronquées à  $\Delta T = 40 \mu\text{s}$ .

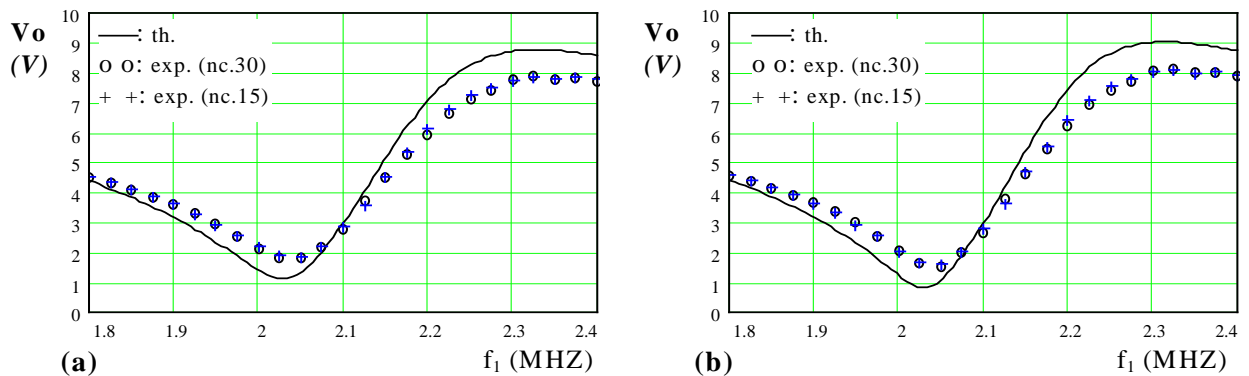
Les simulations sont effectuées en considérant:  $B/A_f = 5.2$ ,  $B/A_x = 9$ ,  $a_{\text{eff}} = 7 \text{ mm}$ .



**Fig IV.44:** Variations du fondamental ( $V_{s1}$ ) et du second harmonique ( $V_{s2}$ ) dans l'eau (a & b) et l'éthanol (c & d). Comparaisons avec les simulations théoriques en considérant les corrections :  $c1ea = 0.92$  et  $c1et = 0.81$ . Transducteurs B.  
 $\sim 53 < k.a_{\text{eff}}(\text{eau}) < \sim 71$ ,  $\sim 64 < k.a_{\text{eff}}(\text{éthanol}) < \sim 86$

Dans cette situation on constate que l'écart entre théorie et expérimentation est plus faible que précédemment, ce qui témoigne d'un parallélisme amélioré, les céramiques des transducteurs A et B étant identiques. Notons une diminution de l'amplitude maximale du second harmonique engendrée par une diminution de la durée du train d'onde.

Avec le même processus de mesure, nous présentons **figure IV.45** les résultats obtenus pour le fondamental  $V_o$  de la tension d'excitation du transducteur source.



**Fig IV.45:** Variations de l'excitation  $V_o$  dans l'eau (a) et l'éthanol (b). Comparaisons avec les simulations théoriques. Transducteurs B.

Ici l'écart entre la théorie et l'expérimentation est uniquement dû à celui existant entre les courbes théorique et expérimentale de l'impédance du transducteur source (**fig IV.27**).

#### IV.5.5.3.2 Transducteurs de type C (milieu arrière = plexiglas)

Ces transducteurs (**fig IV.30**) sont montés comme précédemment pour réaliser la cellule de mesure avec  $z = 54.8$  mm.

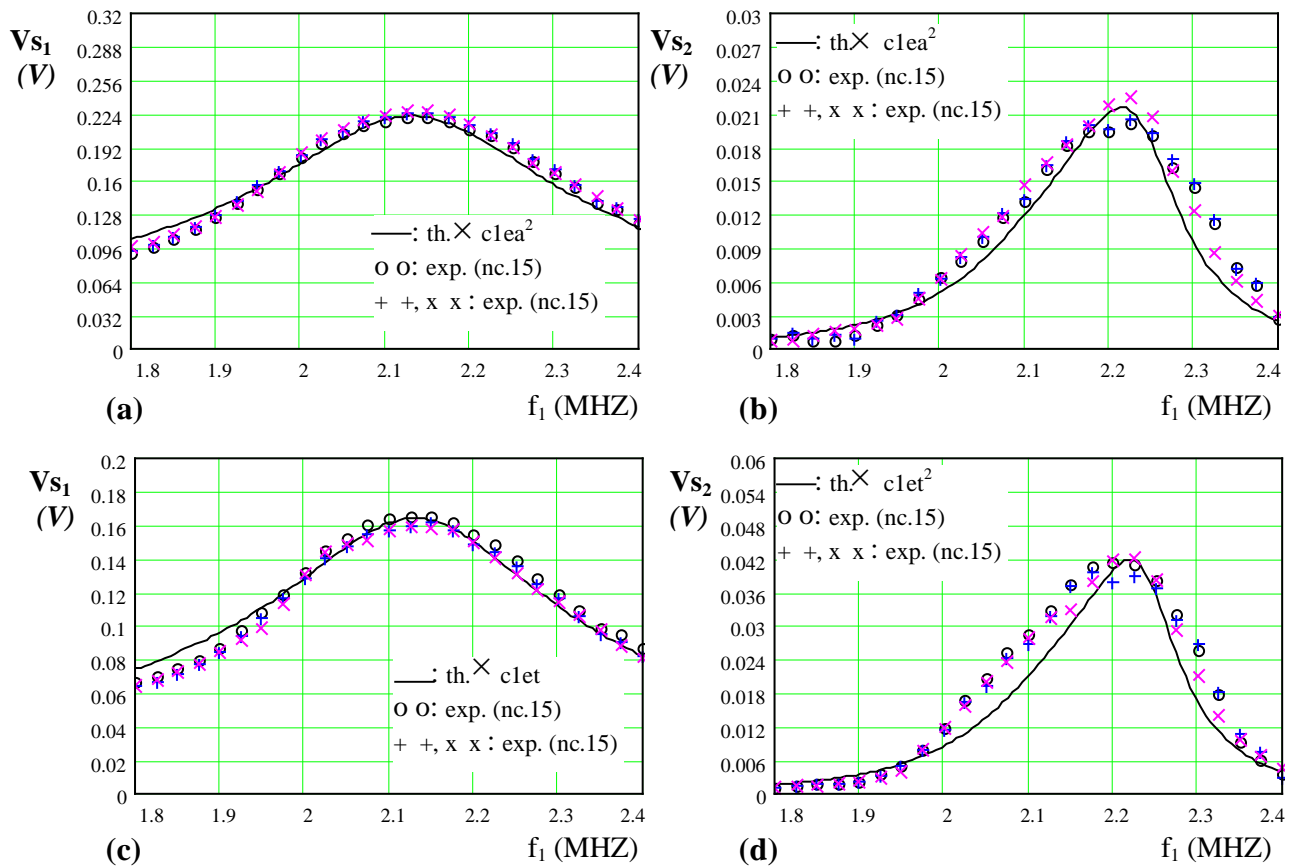
Avec  $E_g = 9.4V$ , chaque point représente la moyenne de 3 mesures successives, et les nombres de cycles utilisés sont  $nc = 15$  et 50 ( $Tr=100Hz$ ) avec une analyse fréquentielle effectuée respectivement sur  $3 \times 32$  et  $17 \times 8$  périodes tronquées à  $\Delta T = 40 \mu s$ .

Les caractéristiques des milieux sont les mêmes que précédemment (§ a), et les résultats sont présentés **figures IV.46 & 47**.

Les simulations sont effectuées en considérant:  $B/A_r = 5.2$ ,  $B/A_x = 9$ ,  $a_{eff} = 9.5$  mm, et pour les milieux arrières on choisira une impédance équivalente  $Z_{BS} = Z_{BD} = 1.5$  Mrayl.

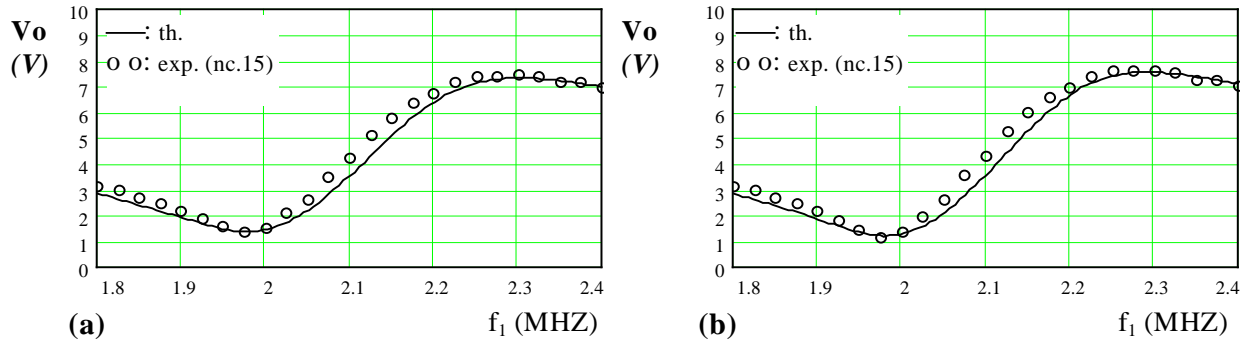
Les deux séries de mesures effectuées dans les mêmes conditions ( $nc = 15$ ) montrent la bonne répétabilité de l'expérience.

Ici, la corrélation entre les courbes théoriques et expérimentales est bonne, mais nous avons estimé l'impédance  $Z_B$  à 1.5 Mrayl. Des simulations réalisées pour  $1 \text{ Mrayl} < Z_{BS} = Z_{BD} < 1.8 \text{ Mrayl}$  donnent les corrections  $0.87 \leq c_{lea} \approx c_{let} \leq 1$ , et dans ce cas la corrélation est très bonne pour 1.8 Mrayl, mais cela supposerait des pertes nulles.



**Fig IV.46:** Variations du fondamental ( $V_{s1}$ ) et du second harmonique ( $V_{s2}$ ) dans l'eau (a & b) et l'éthanol (c & d). Comparaisons avec les simulations théoriques en considérant les corrections :  $c_{lea} = 0.94$  et  $c_{let} = 0.95$ . Transducteurs C.

$$\sim 72 < k.a_{eff}(\text{eau}) < \sim 96, \quad \sim 87 < k.a_{eff}(\text{éthanol}) < \sim 116$$



**Fig IV.47:** Variations de l'excitation  $V_o$  dans l'eau (a) et l'éthanol (b). Comparaisons avec les simulations théoriques. Transducteurs C.

#### IV.5.5.4 Tracés expérimentaux du paramètre B/A pour les deux procédures de mesure

##### IV.5.5.4.1 Procédure par mesure des composantes $V_{s1}$ et $V_{s2}$ :

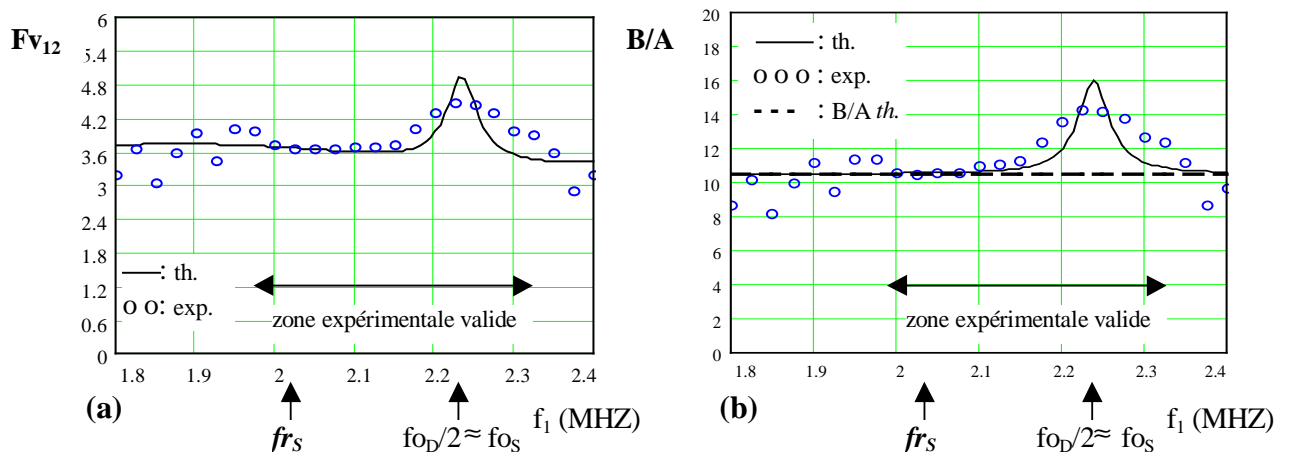
Les tensions  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  mesurées pour le milieu de référence (eau) et le milieu analysé (éthanol), interviennent sous la forme  $Fv_{12} = \frac{V_{s2x}}{V_{s2r}} \cdot \left( \frac{V_{s1r}}{V_{s1x}} \right)^2$  dans l'expression (IV.7.a) du paramètre B/A sans tenir compte de la fonction de sensibilité :

$$\left( \frac{B}{A} \right)_x = Fv_{12} \cdot \{FD_{12} \cdot F\alpha_{12}\} \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \left[ \left( \frac{B}{A} \right)_r + 2 \right] - 2 \quad (\text{IV.42})$$

La fonction  $Fv_{12}$  sera calculée en faisant la moyenne de toutes les séries de mesures effectuées pour chaque couple de transducteurs, pour être ensuite injectée dans l'expression du paramètre B/A.

##### Couple de transducteurs de type B (milieu arrière = air):

Le paramètre B/A et la fonction  $Fv_{12}$  associée sont représentés *figure IV.48*.



**Fig IV.48:** Fonction  $Fv_{12}$  et paramètre B/A obtenu pour l'éthanol avec l'eau comme milieu de référence. Comparaisons avec les simulations théoriques. Transducteurs B ( $fr_s = 2.03$  MHz,  $fo_D/2 = 2.23$  MHz).

Dans la "zone expérimentale valide" les résultats sont en bon accord avec la théorie. Hors de cette zone, les tensions  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  détectées sont trop faibles, et mesurées avec une précision insuffisante, pour donner un résultat correct dans la fonction  $F_{V12}$ .

La courbe théorique a été simulée avec  $B/A_x = 10.5$ , et c'est la valeur expérimentale obtenue au voisinage de la fréquence de résonance ( $fr_s$ ) du transducteur source.

Cette valeur correspond en fait au  $B/A$  moyen obtenu à la suite de plusieurs séries de mesures, au cours desquelles les différents grandeurs des milieux ont évoluées, du fait des variations de température et d'une certaine évaporation de l'éthanol.

A la fréquence  $f_{0D}/2 \approx f_{0S}$  l'erreur sur la mesure du paramètre  $B/A$  est maximale si on ne tient pas compte des sensibilités, comme le prévoyait la théorie.

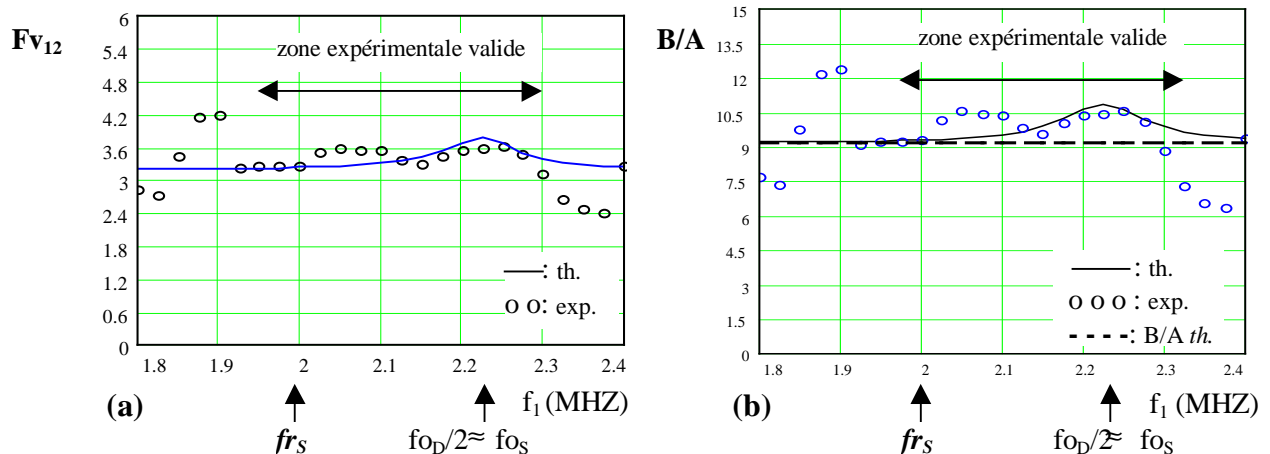
A cette fréquence nous avons donné une formulation simple de la fonction de sensibilité (éq. IV.27.a), qui intervient dans l'expression du paramètre  $B/A$  sous la forme d'un coefficient de correction  $F\eta_{rx}$  simplifiable si  $Z_{BD}$  est faible (air) :

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{corrigé}} = \left[ \left(\frac{B}{A}\right)_{\text{mesuré}} + 2 \right] \cdot F\eta_{rx} - 2 \quad \text{avec} \quad F\eta_{rx} \approx \frac{Z_x + Z_{BD}}{Z_r + Z_{BD}} \approx \frac{Z_x}{Z_r} \quad \text{(IV.43)}$$

Et bien que nous n'ayons pas de mesure à cette fréquence, la correction appliquée au point voisin donne :  $B/A = 9.3$ , au lieu des 14.3 mesuré, ce qui est une valeur convenable.

### Couple de transducteurs de type C (milieu arrière = plexiglas)

Le paramètre  $B/A$  et la fonction  $F_{V12}$  associée sont représentés *figure IV.49*.



**Fig IV.49:** Fonction  $F_{V12}$  et paramètre  $B/A$  obtenu pour l'éthanol avec l'eau comme milieu de référence. Comparaisons avec les simulations théoriques. Transducteurs C ( $fr_s = 2$  MHz,  $f_{0D}/2 = 2.23$  MHz).

A l'exception de quelques points dans la "zone expérimentale valide", les résultats théoriques et expérimentaux sont en bon accord. La courbe théorique est obtenue avec  $B/A = 9.2$ , ce qui correspond au paramètre mesuré à la fréquence de résonance  $fr_s$ .

Cette fois ci, l'amortissement de la céramique du détecteur engendre un écart, entre les valeurs extrêmes du paramètre  $B/A$  mesuré, plus faible que précédemment:  $(10.6 - 9.2) = 1.4$  contre  $(14.3 - 10.5) = 3.8$  avec un détecteur non amorti.

Par conséquent, si la céramique du détecteur est amortie, un mauvais choix de la fréquence d'excitation engendrera une erreur plus faible sur la valeur du paramètre  $B/A$ .

**IV.5.5.4.2 Procédure par mesure des composantes  $V_o$  et  $V_{s2}$ :**

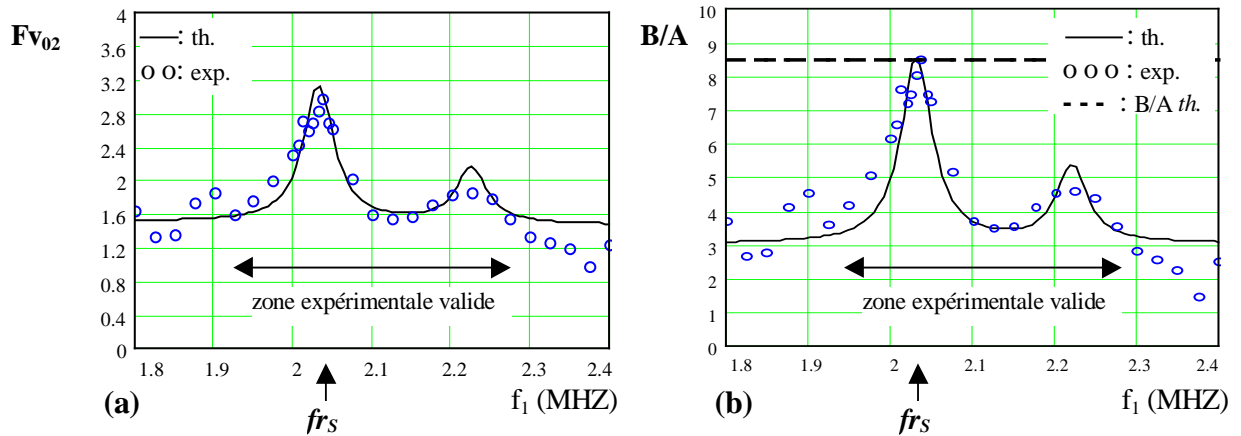
Les tensions  $V_o$  et  $V_{s2}$  mesurées pour le milieu de référence (eau) et le milieu analysé (éthanol), interviennent sous la forme  $F_{V_{02}} = \frac{V_{s2x}}{V_{s2r}} \left( \frac{V_{O_r}}{V_{O_x}} \right)^2$  dans l'expression (IV.9.a) du paramètre B/A sans tenir compte de la fonction de sensibilité :

$$\left( \frac{B}{A} \right)_x = F_{V_{02}} \cdot \{FD_{12} \cdot F\alpha_{12}\} \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \left[ \left( \frac{B}{A} \right)_r + 2 \right] - 2 \quad (IV.44)$$

La fonction  $F_{V_{02}}$  sera calculée en faisant la moyenne de toutes les séries de mesures effectuées pour chaque couple de transducteurs, pour être ensuite injectée dans l'expression du paramètre B/A.

**Couple de transducteurs de type B (milieu arrière = air)**

Le paramètre B/A et la fonction  $F_{V_{02}}$  associée sont représentés **figure IV.50**. Dans ce cas une série de mesure supplémentaire entre 2 et 2.05 MHz s'est avérée nécessaire. La corrélation entre les résultats expérimentaux et théoriques est très bonne, en prenant  $B/A = 8.5$  pour les simulations. Cette valeur correspond à celle mesurée à la fréquence de résonance  $fr_s$ . En fait, une meilleure résolution fréquentielle dans cette zone aurait donné une valeur un peu plus grande pour le paramètre B/A. En dehors de cette zone la valeur mesurée est rapidement erronée.



**Fig IV.50:** Fonction  $F_{V_{02}}$  et paramètre B/A obtenu pour l'éthanol avec l'eau comme milieu de référence. Comparaisons avec les simulations théoriques. Transducteurs B ( $fr_s = 2.03$  MHz)

En dehors de cette fréquence ( $fr_s$ ) on ne peut donc pas effectuer une mesure correcte du paramètre B/A en négligeant l'influence des sensibilités.

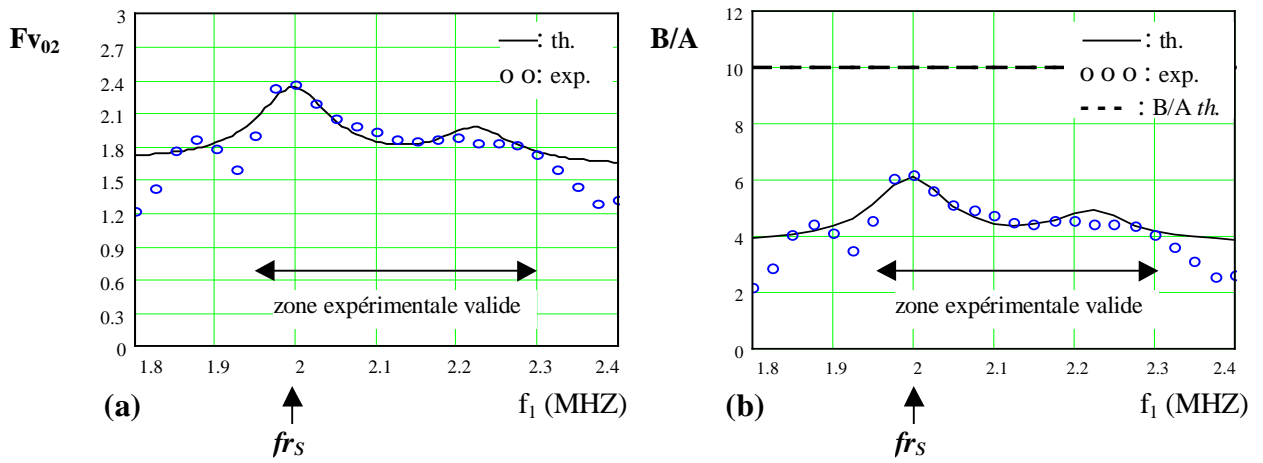
Toutefois au alentour de 2.15 MHz, zone des valeurs extrêmes mesurables, on peut appliquer l'expression asymptotique de la fonction de sensibilité (éq. IV.33.a) sous la forme d'un coefficient correcteur (cf éq. IV.43). Ainsi:

$$\left( \frac{B}{A} \right)_{\text{corrigé}} = \left[ \left( \frac{B}{A} \right)_{\text{mesuré}} + 2 \right] \cdot F\eta_{rx} - 2 \quad \text{avec} \quad F\eta_{rx} \approx \left( \frac{Z_r}{Z_x} \right)^2 \quad (IV.45)$$

Dans ce cas on passe de  $B/A_{\text{mesuré}} = 3.5$  à  $B/A_{\text{corrigé}} = 9.5$ , valeur convenable.

**Couple de transducteurs de type C (milieu arrière = plexiglas)**

Le paramètre B/A et la fonction  $F_{V_{O_2}}$  associée sont représentés **figure IV.51**.



**Fig IV.51:** Fonction  $F_{V_{O_2}}$  et paramètre B/A obtenu pour l'éthanol avec l'eau comme milieu de référence. Comparaisons avec les simulations théoriques. Transducteurs C ( $fr_s = 2$  MHz).

Ici aussi la corrélation est très bonne entre les résultats expérimentaux et théoriques.

La valeur du paramètre utilisé pour les simulations est  $B/A = 10$ , et on voit que les mesures ne permettent pas d'atteindre la valeur correcte.

Par conséquent, si la céramique du transducteur source est amortie, il n'est pas possible d'obtenir la valeur correcte du paramètre B/A avec cette procédure de mesure, si l'influence des sensibilités est négligée.

Si on connaît l'impédance  $Z_{BS}$  du milieu arrière de la source, on peut obtenir une valeur correcte du paramètre B/A à la fréquence de résonance  $fr_s$  en appliquant la correction (cf éq. IV.32):

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{corrigé}} = \left[ \left(\frac{B}{A}\right)_{\text{mesuré}} + 2 \right] \cdot F\eta_{\text{RX}}^{-2} \quad \text{avec} \quad F\eta_{\text{RX}}'(fr_s) \approx \left| \frac{Z_r \cdot (Z_x + Z_{BS})}{Z_x \cdot (Z_r + Z_{BS})} \right|^2 \quad \text{(IV.46)}$$

Avec  $Z_{BS} = 1.5$  Mrayl on passe de  $B/A_{\text{mesuré}} = 6.2$  à  $B/A_{\text{corrigé}} = 10.3$

On peut aussi appliquer l'expression précédente (IV.45) aux valeurs extrêmes mesurables, soit avec  $B/A_{\text{mesuré}} \approx 4$  on obtient  $B/A_{\text{corrigé}} = 10.5$ .

**IV.5.5.5 Mesure du paramètre B/A de quelques milieux**

Des conclusions précédentes il ressort que la meilleure méthode est celle par mesure des composantes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$ , et l'erreur apportée en négligeant l'influence des sensibilités sera minimale si on travaille à la fréquence de résonance  $fr_s$  du transducteur source.

A cette fréquence la puissance acoustique générée est maximale, et cela d'autant plus que l'impédance du milieu arrière de la source est faible. A cette fréquence la sensibilité du détecteur au second harmonique est pratiquement indépendante de l'impédance de son milieu arrière.

Ainsi, pour la mesure du paramètre B/A, on utilisera le couple de transducteurs B en travaillant à la fréquence de résonance  $fr_s = 2.03$  MHz.

Pour améliorer le transfert de puissance on placera un transformateur d'impédance entre le générateur et le transducteur source (**fig. IV.52**).

On choisira un transformateur (L,C) à deux éléments de type passe-bas.

La caractérisation électrique de ce transducteur (**fig IV.27**) donne une impédance, à la fréquence  $f_{rs}$

$$= 2.03 \text{ MHz} : zT = 14.5.e^{j(-30^\circ)} (\Omega)$$

Que l'on modélise par une résistance  $rT = 12.5 \Omega$  en série avec une capacité  $cT = 10.8 \text{ nF}$ .

Les conditions d'adaptation d'impédance conduisent aux valeurs des éléments:

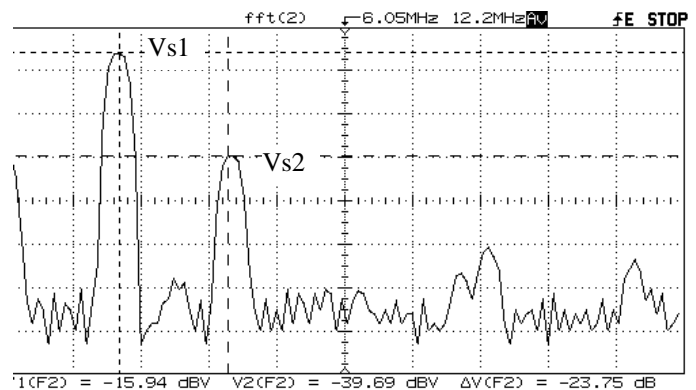
$$C = \frac{1}{R_g \cdot \omega} \sqrt{\frac{R_g}{rT} - 1} = 2.7 \text{ nF} \quad \text{et} \quad L = \frac{1 + R_g^2 \cdot \omega^2 \cdot C \cdot (C + cT)}{cT \cdot \omega^2 \cdot (1 + R_g^2 \cdot \omega^2 \cdot C^2)} = 2.3 \mu\text{H} \quad (\text{IV.47})$$

Des mesures de l'onde détectée avec ou sans transformateur, donnent:

$$V_{s \text{ sans transfo}} \approx 235 \text{ mV} \quad \rightarrow \quad V_{s \text{ avec transfo}} \approx 320 \text{ mV}, \text{ soit une augmentation de } 33\%.$$

De plus, la sélectivité du transformateur améliore la pureté spectrale du signal d'excitation.

La mesure des composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  s'effectuera directement à l'oscilloscope en mode FFT. La **figure IV.53** donne un exemple de spectre du signal détecté dans l'eau pour  $f_1 = 2.03 \text{ MHz}$  (fenêtre flat top et moyennage temporel du signal). Les tensions sont exprimées en dBV ( $1 \text{ dBV} = 20 \cdot \text{Log}(V_{s \text{ eff}}/1 V_{\text{eff}})$ ), et elles seront mesurables si les composantes sont supérieures au niveau de bruit ( $\sim -70 \text{ dBV}$  pour la figure IV.53).



**Fig IV.53:** Représentation spectrale obtenue avec l'oscilloscope HP 54600 équipé du module FFT.

Nous donnons dans le tableau suivant les valeurs obtenues pour trois milieux, elles sont comparées à celles trouvées dans la littérature (cf tableau § III.4).

Le paramètre B/A est calculé à l'aide de 4 expressions ne prenant pas en compte l'influence des sensibilités:

- Expression complète (IV.42).
- Expression (IV.42) sans tenir compte de l'atténuation.
- Expression (IV.42) sans tenir compte de la diffraction.
- Expression (IV.42) sans tenir compte de l'atténuation et de la diffraction.

Les mesures sont effectuées à 2.03 MHz sans amplificateur de puissance, excepté pour le glycérol où une mesure a été faite avec, pour augmenter le niveau faible mais détectable du second harmonique ( $-55 \text{ dBV} \rightarrow -43.13 \text{ dBV}$ ). Les résultats restent cependant voisins.

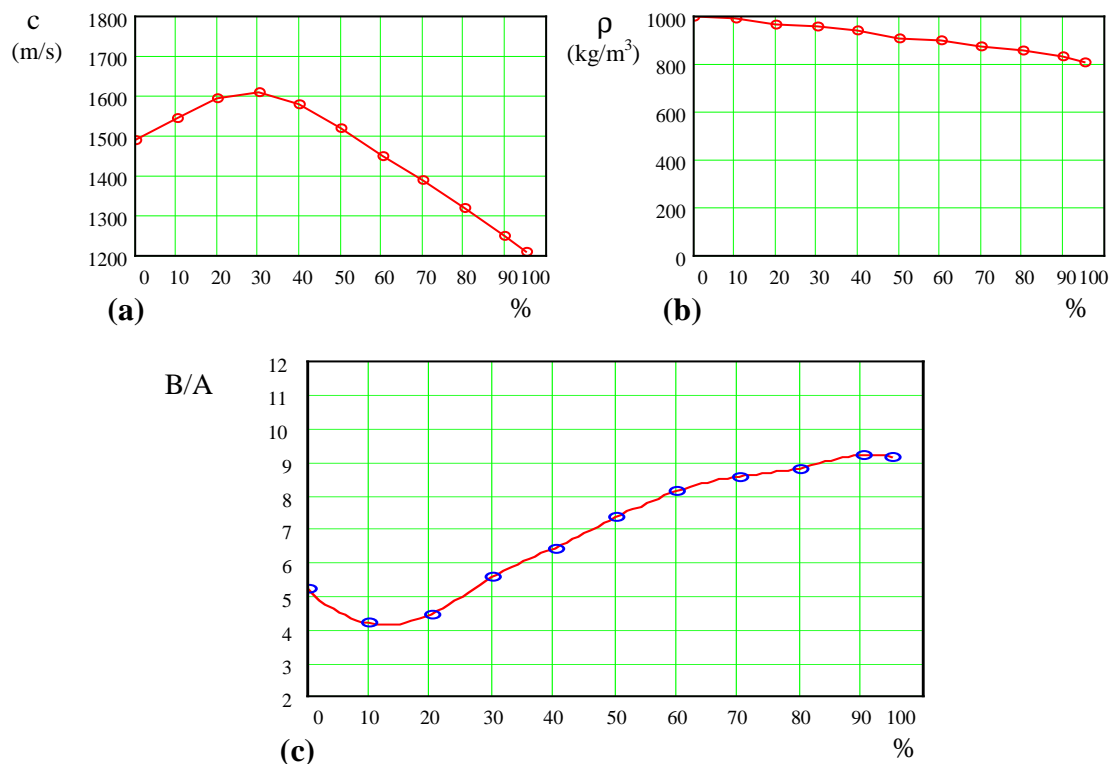
Milieu	B/A	B/A (sans att)	B/A (sans diff)	B/A (sans att & diff)	Littérature
Ethanol (95%) 23°C	9.3	9.1	9.3	9.1	9.9 26°C [21]
Glycérol (23°C) sans amplificateur	8.3	3.5	8.8	3.8	8.58 25 °C [ 8]
avec amplificateur	8.6	3.1	9.1	4	
Lait entier (22°C)	4.6	6.5	4.5	6.4	5.1 (22°C) [9]

Les résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature. L'influence de la diffraction reste faible à cette fréquence et pour la distance  $z = 66\text{mm}$ . Par contre, dans un milieu très absorbant comme le glycérol, on obtient un résultat erroné si on ne tient pas compte de l'atténuation.

Une mesure faite pour l'éthanol à  $2.23\text{ MHz}$  ( $f_{0D}/2$ ) donne  $B/A = 15.7$ , et en appliquant à cette valeur erronée notre coefficient de correction (IV.46), valable à cette fréquence, on obtient la valeur correcte:  $B/A = 9.7$  (avec  $Z_x/Z_r = 0.66$ )

### Mesure du paramètre B/A d'un mélange eau-éthanol

Pour conclure ces expérimentations, nous avons effectué la mesure du paramètre B/A dans un mélange eau-éthanol en fonction de la concentration d'éthanol <sup>41</sup>. En fait, dans les dix mélanges analysés il existe un faible pourcentage de méthanol. Les mesures de vitesse de propagation, de masse volumique et du paramètre B/A, sont présentés **figure IV.54**.



**Fig IV.54:** Variations de la vitesse de propagation (a), de la masse volumique (b), et du paramètre B/A (c) de l'éthanol en fonction de sa concentration dans l'eau. ( $T = 23\text{ °C}$ ).

<sup>41</sup> L'atténuation n'est pas prise en compte ici.



On constate que la loi de variation du paramètre B/A en fonction de la concentration n'est pas linéaire. Et il existe une concentration (~15%) pour laquelle ce paramètre est minimal, et inférieur au B/A des constituants.

Ne possédant pas d'expérience identique présentée dans la littérature, on peut toutefois constater que la loi de variation pour l'éthanol est similaire à celle du méthanol. Les résultats pour ce milieu [ref. 6, chap. III], obtenus à l'aide d'une méthode thermodynamique, sont présentés *figure IV.55*.

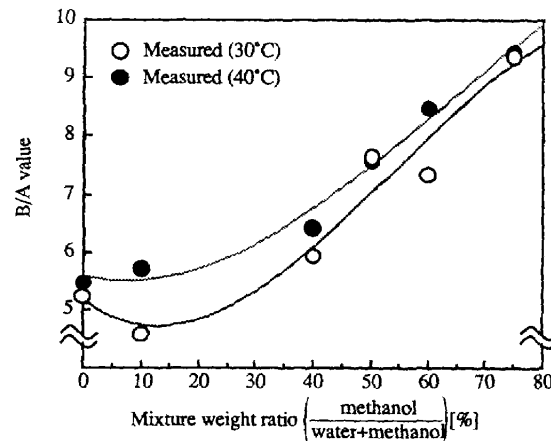


Fig IV.55: Paramètre B/A du méthanol en fonction de sa concentration dans l'eau [ref. 6, chap. III].

#### IV.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons étudié l'influence théorique des sensibilités des transducteurs dans la mesure du paramètre B/A à l'aide des deux procédures de la méthode comparative simple. Les expérimentations ont confirmées les prédictions théoriques, et il ressort que la meilleure méthode est celle par mesure des composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$ .

Afin d'éviter la calibration des transducteurs, qui est le principal intérêt de la méthode comparative, nous avons montré qu'il faut travailler à la fréquence de résonance du transducteur source ( $f_{r_s}$ ) pour minimiser les effets des sensibilités, d'autant plus importants que les impédances acoustiques du milieu de référence et du milieu analysé sont différentes. Et cela dans un système de mesure où la fréquence de résonance de la source est moitié de celle du détecteur.

De plus, nous avons montré l'inefficacité de la procédure par mesure des composantes  $V_o$  et  $V_{s2}$  si le transducteur source est amorti, dans le cas bien sur où les impédances des deux milieux sont différentes.

Toutefois, si la fréquence et la procédures utilisées ne permettent pas de négliger l'influence des sensibilités, il est possible d'appliquer un coefficient de correction simple pour obtenir une valeur correcte du paramètre B/A.

Les résultats obtenus pour quelques milieux analysés sont en bon accord avec ceux donnés dans la littérature, mais n'étant pas certain du parallélisme entre les transducteurs et de la bonne valeur du rayon effectif, nous ne pouvons donner une incertitude exacte sur les paramètres B/A mesurés. L'objectif principal étant de valider, ou d'invalider, des principes de mesure.

ANNEXE DU CHAPITRE IV

A.I) MODELISATION D'UN TRANSDUCTEUR

Equations de la piézo-électricité [3,5,6,]

On considère une lame de céramique piézo-électrique d'aire A et d'épaisseur e (fig. A4.1). L'effet direct (J. et P. Curie, 1880) se traduit par l'apparition d'une densité de charge q sur les faces soumises a une force F et s'exprime par la relation :  $q = d_D.F$  où  $d_D$  ( $C.N^{-1}$ ) est le module piézo-électrique direct.

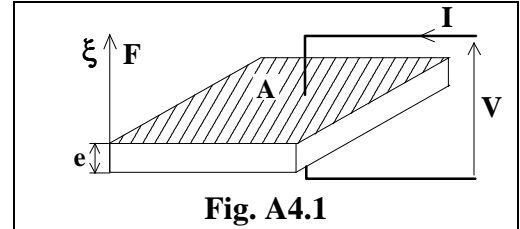


Fig. A4.1

L'effet inverse (G. Lippmann, 1881) se traduit par une elongation  $\xi$  de la lame soumise à une différence de potentiel V et s'exprime par la relation :  $Q = d_I.V$  où  $d_I$  ( $m.V^{-1}$ ) est le module piézo-électrique inverse.

On définit la déformation relative  $S = \xi/e$ , la contrainte  $T=F/A$ , l'induction électrique  $D = q/A$  et le champ électrique  $E=V/e$ .

Un milieu piézo-électrique est anisotrope, et la modélisation dans les 3 dimensions de l'espace d'une céramique soumise à une tension V et à des contraintes T, conduit aux équations tensorielles :

$$T_I = C_{IJ}^D.S_J - h_{Ii}.D_i \quad \text{: piézo-électricité inverse} \quad (A4.1.1)$$

$$E_i = -h_{ij}.S_j + \beta_{iI}^S.D_I \quad \text{: piézo-électricité directe} \quad (A4.1.2)$$

avec  $I, J \in [1,6]$  et  $i, j \in [1,3]$

$C^D$  et  $h$  représentent respectivement les constantes élastiques et piézo-électriques à induction constante  $\beta^S$  représente les constantes diélectriques à déformation constante.

Modélisation de la céramique piézo-électrique [7]

L'exploitation des équations (A4.1) nécessite des hypothèses simplificatrices ne trahissant pas le comportement réel du transducteur.

Le modèle le plus utilisé pour la céramique est celui de W. P. Mason pour une plaque mince piézo-électrique dont les faces sont métallisées (électrodes) et d'épaisseur e petite devant ses dimensions latérales (fig A4.2).

$F_1(t)$  et  $F_2(t)$  sont les forces acoustiques en face arrière et avant,  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  sont les vitesses vibratoires en face arrière et avant, A la surface des faces.

On suppose que seul le mode de vibration en épaisseur soit privilégié et qu'aucune variables caractéristiques de la céramique ne dépendent de ses coordonnées latérales.

Avec ces hypothèses, c'est à dire en considérant les axes de polarisation et de vibration colinéaires à l'axe  $x_3$ , les équations (A4.1) se réduisent à :

$$T_3 = C_{33}^D.S_3 - h_{33}.D_3 \quad \text{et} \quad E_3 = -h_{33}.S_3 + \beta_{33}^S.D_3 \quad (A4.2.1)$$

Auxquelles il convient d'ajouter :

$$\text{Le bilan des forces } (\rho = \text{masse volumique de la plaque}): \quad \partial T_3 / \partial x_3 = \rho . \partial^2 \xi_3 / \partial t^2 \quad (A4.2.2)$$

$$\text{Le théorème de Gauss :} \quad \partial D_3 / \partial x_3 = 0 \quad (A4.2.3)$$

$$\text{Le courant électrique à travers la plaque :} \quad I = A . \partial D_3 / \partial t \quad (A4.2.4)$$

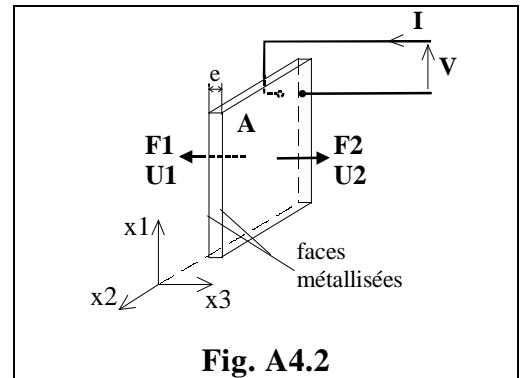


Fig. A4.2

La différence de potentiel aux bornes de la plaque : 
$$V = \int_0^e E_3 \cdot dx_3 \quad (\text{A4.2.5})$$

Ce modèle doit être complété par les conditions initiales et aux limites, correspondant aux expressions de la vitesse vibratoire  $U(t)$  et de la force acoustique  $F(t)$  sur les deux faces de la céramique :

$$U1(t) = \partial\xi/\partial t|_{x3=0} \quad U2(t) = \partial\xi/\partial t|_{x3=e} \quad F1(t) = -A \cdot T_3|_{x3=0} \quad F2(t) = -A \cdot T_3|_{x3=e} \quad (\text{A4.2.6})$$

Par réduction des relations (A.4.2), et en utilisant la transformée de Laplace, on obtient la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} F1(s) \\ F2(s) \\ V(s) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} U1(s) \\ U2(s) \\ I(s) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} Z_T / \text{th}(\tau \cdot s) & -Z_T / \text{sh}(\tau \cdot s) & h_{33}/s \\ Z_T / \text{sh}(\tau \cdot s) & -Z_T / \text{th}(\tau \cdot s) & h_{33}/s \\ h_{33}/s & -h_{33}/s & 1/Co \cdot s \end{pmatrix} \quad (\text{A4.3.1})$$

où  $M$  est la matrice d'impédance acoustoélectrique de la plaque piézo-électrique, avec :

$$Z_T = A \cdot C_{33}^D / v^D = A \cdot \rho \cdot v^D \quad (\text{rayl} \cdot m^2) \text{ l'impédance acoustique de la céramique} \quad (\text{A4.3.2})$$

$$v^D = \sqrt{C_{33}^D / \rho} \quad (m \cdot s^{-1}) \text{ la vitesse de propagation des ondes longitudinales} \quad (\text{A4.3.3})$$

$$\tau = e / v^D \quad (s) \text{ le temps de vol des ondes acoustiques à travers la plaque} \quad (\text{A4.3.4})$$

$$Co = A / \beta_{33}^S \cdot e = \epsilon_{33}^S \cdot A / e \quad (F) \text{ la capacité du condensateur constitué par la plaque} \quad (\text{A4.3.5})$$

W. P. Mason a développé un modèle électrique représentatif de la matrice d'impédance acoustoélectrique de la plaque, dans lequel les grandeurs mécaniques et électriques sont couplées par l'intermédiaire d'un transformateur idéal (fig A4.3).

$$Z_T = j \cdot Z_T \cdot \text{tg}(\gamma/2) \quad \text{et} \quad Z = -j \cdot Z_T / \sin(\gamma/2) \quad (\text{A4.4.1})$$

$$\phi = h_{33} \cdot Co = k_t \cdot \sqrt{2 \cdot fo \cdot Co \cdot Z_T} \quad (\text{A4.4.2})$$

$$k_t = h_{33} \cdot \sqrt{\epsilon_{33}^S / C_{33}^D} \quad (\text{A4.4.3})$$

$k_t$  est le coefficient de couplage électromécanique dans le mode épaisseur pour une plaque piézo-électrique, il traduit l'efficacité de la conversion : *Energie appliquée* <--> *Energie convertie*.

$$\gamma = \pi \cdot f / fo = \text{fréquence normalisée} \quad \text{et} \quad fo = v^D / 2 \cdot e \text{ la fréquence propre de la lame.} \quad (\text{A4.4.4})$$

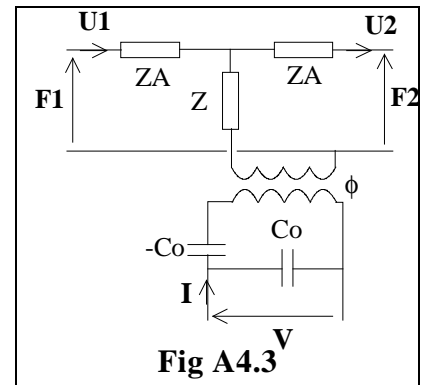


Fig A4.3

### Modélisation d'un transducteur sans couche sur la face avant [7,8,9,10,11,12]

On peut maintenant aisément modéliser les transducteurs ultrasonores qui sont des plaques piézo-électriques ayant des conditions de charges électriques et acoustiques particulières.

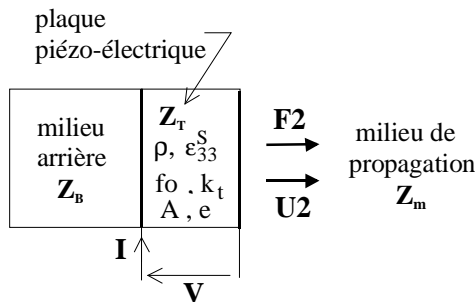


Fig A4.4

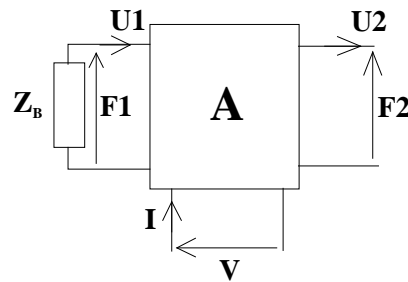


Fig A4.5

Le modèle décrit par W. P. Mason a été adapté par E. K. Sittig [9] pour une représentation matricielle, et le modèle (**fig A4.5**) du transducteur (**fig A4.4**) peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F2 \\ U2 \end{pmatrix} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{pmatrix} \text{ est la matrice de transduction définie par :}$$

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi \cdot H} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) + j \cdot \sin(\gamma) \cdot Z_B / Z_T & Z_B \cdot \cos(\gamma) + j \cdot Z_T \cdot \sin(\gamma) \\ j \cdot \sin(\gamma) / Z_T & 2 \cdot (\cos(\gamma) - 1) + j \cdot \sin(\gamma) \cdot Z_B / Z_T \end{pmatrix} \quad (\text{A4.5.1})$$

avec :

$$a' = 1, b' = j \cdot \phi^2 / (2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_0), c' = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_0, d' = 0, H = \cos(\gamma) - 1 + j \cdot \sin(\gamma) \cdot Z_B / Z_T \quad (\text{A4.5.2})$$

$Z_B$  et  $Z_T$  sont les impédances acoustiques du milieu arrière et de la céramique exprimées en rayl.m<sup>2</sup>. L'impédance acoustique du milieu de propagation sera notée  $Z_m$ .

Avec les caractéristiques  $Z_T, \epsilon_{33}^S, f_0, k_t, A, e$  du constructeur de la céramique et l'impédance acoustique  $Z_B = \rho_B \cdot c_B \cdot A$  (rayl.m<sup>2</sup>) du milieu arrière on peut donc calculer la matrice de transduction du transducteur.

Pour améliorer le transfert d'énergie entre la céramique et le milieu de propagation, il est nécessaire de placer une couche d'adaptation sur la face avant. En effet, l'impédance acoustique ( $Z_T$  en rayl) des céramiques est de l'ordre de 30 Mrayl (pour les PZT), alors que celle de l'eau ou de la plupart des milieux biologiques analysés ( $Z_m$  en rayl) est de l'ordre de 1.5 Mrayl, donc seulement

$$\frac{4 \cdot Z_T \cdot Z_m}{(Z_T + Z_m)^2} \cdot 100 \approx 18\% \quad \text{de l'énergie est transmise.}$$

On réalise l'adaptation en collant sur la face avant du transducteur une ou plusieurs couches d'impédance acoustique intermédiaire entre celle du milieu de propagation et celle de la céramique. L'adaptation est optimale quand  $Z_{\text{couche}} = \sqrt{Z_T \cdot Z_m}$ .

#### Modélisation d'un transducteur avec couche avant d'adaptation [8,9,10,11,12,13]

Une couche (C) d'épaisseur  $e_c$  sera caractérisée par son impédance acoustique  $Z_c = \rho_c \cdot v_c \cdot A$  (en rayl.m<sup>2</sup>) et par le temps de vol de l'onde acoustique  $\tau_c = e_c / v_c$  (**fig A4.6**). Pratiquement il faut que l'épaisseur  $e_c$  soit telle que  $e_c = \lambda_c / 4$ . La couche étant dépourvue de piézo-électricité, on peut reprendre l'équation matricielle (A4.3.1) en ne conservant que les termes de la partie mécanique, on obtient :

$$\begin{pmatrix} F_c1 \\ U_c1 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} F_c2 \\ U_c2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } C = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_c) & j \cdot Z_c \sin(\gamma_c) \\ j \cdot \sin(\gamma_c) / Z_c & \cos(\gamma_c) \end{pmatrix} \quad \text{et } \gamma_c = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot e_c / v_c \quad (\text{A4.6})$$

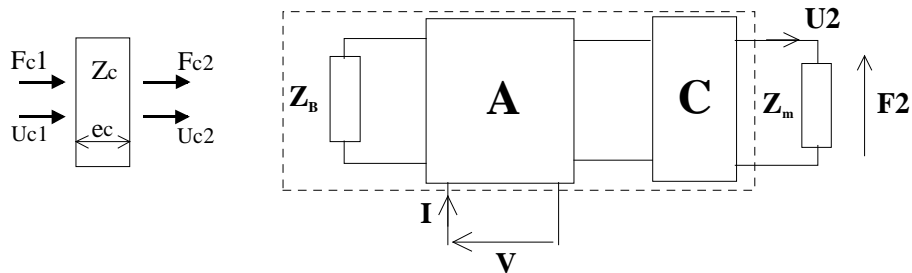


Fig A4.6

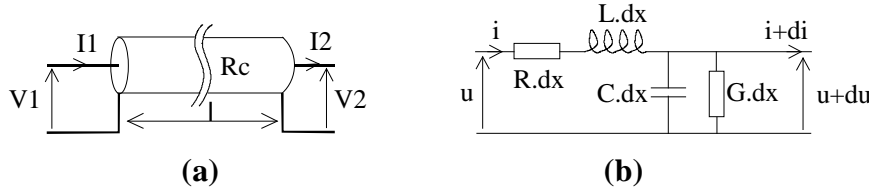
Fig A4.7

La continuité des forces et des vitesses vibratoires aux interfaces permet la multiplication des matrices, et on obtient la matrice définitive du transducteur liant les grandeurs électriques aux grandeurs acoustiques (**fig A4.7**) :

$$\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} F2 \\ U2 \end{pmatrix} \text{ avec } T = A.C = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A4.7})$$

Cette modélisation peut d'ailleurs être aisément étendue, par multiplication matricielle, à III.5.1.1 des transducteurs multicouches [8].

### A.II) MODELISATION D'UNE LIGNE EN REGIME HARMONIQUE



**Fig A4.8:** Modèle d'une ligne de transmission.

Un élément de ligne de longueur  $dx$  peut être modélisé par le circuit à constantes réparties de paramètres linéiques primaires :  $R$  ( $\Omega/m$ ),  $G$  ( $\Omega^{-1}/m$ ),  $C$  ( $F/m$ ),  $L$  ( $H/m$ ) (**fig A4.8.b**). Dans nos applications les fréquences et longueurs de câble utilisées permettent de considérer la ligne sans perte ( $R=0, G=0$ ) et les paramètres ( $L, C$ ) constants. L'impédance caractéristique de la ligne,  $Rc = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , est donc réelle.

Les équations de propagation, issues du circuit à constantes réparties (**fig A4.8.b**), conduisent en régime harmonique à la modélisation de la ligne (**fig A4.8.a**) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V1 \\ I1 \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} V2 \\ I2 \end{pmatrix} \text{ avec } L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } L_{11} = \cos(\beta.l), \quad L_{21} = j.\sin(\beta.l)/Rc, \quad L_{12} = L_{21}.Rc^2, \quad L_{22} = L_{11} \quad (\text{A4.8})$$

où  $\beta = \frac{\omega}{v}$  est la constante de phase de propagation,  $v$  la vitesse de phase, et  $l$  la longueur de la ligne.

### Bibliographie

1. GONG X. F., FENG R., ZHU C., SHI T. " Ultrasonic investigation of the nonlinearity parameter B/A in biological media " J.Acoust.Soc.Am., Vol. 76, N°3, pp. 949-950, 1984.
2. ZHANG J., KUHLENSCHMIDT M. S. , DUNN F. " Influences of structural factors of biological media on the acoustic nonlinearity parameter B/A " J. Acoust.Soc.Am., Vol. 89, N°1, pp. 80-91, 1991.
3. ROSSI M. " Electro-acoustique " Presse polytechniques Romandes, pp. 233-281, 1986.
4. COURSANT R. H., GAUCHET M., NECTOUX R., TELLIER J. M, " Nouveaux matériaux piézo-électriques pour transducteurs ultrasonores " LEP 1983.
5. BERLINCOURT D. A., CURRAN D.R., JAFFE H." Piezoelectric and piezomagnetic materials " Physical acoustics, Mason vol. I part A, 1964.
6. BLITZ J. " Fundamentals of ultrasonics " London Butterworths, 1963.
7. COURSANT R. H. " Les transducteurs ultrasonores " Acta Electronica, Vol.22, N°2, pp. 129-141, 1979.
8. RENAUD P., CHAPELON J. Y., CATHIGNOL D., JOSSINET J. " Estimation des caractéristiques électromécaniques du transducteur ultrasonore, confrontation théorie-expérimentation " RBM, vol. 7, N°6, pp. 369-373.
9. SITTIG E. K. " Design and technology of piezoelectric transducers above 100 MHz" Physical acoustics, Mason and Thurston, Vol. IX, p 221-275.
10. SITTIG E. K. "Effects of bonding and electrode layers on the transmission parameters of piezoelectric transducers used in ultrasonic digital delay lines", IEEE Trans. on sonics and ultrasonic, Vol. SU-16, N° 1, 1969.
11. SITTIG E. K. "Definitions relating to conversion losses in piezoelectric transducers", IEEE Trans. on sonics and ultrasonic, Vol. SU-18, N° 14, 1971.
12. FUKAMOTO A., KAWABUCHI M., SATO J. I. " Design of ultrasound transducers using new piezoelectric ceramic materials " Ultrasound in Med & Biol, Vol. 7, pp 275-284, 1981.
13. MEQUIO C., COURSANT R. H, PESQUE P. " Simulation de la réponse acousto-électrique de structures piézoélectriques au moyen d'un algorithme de transformée de Fourier rapide " Acta Electronica, Vol. 25, N°4, pp. 311-323, 1983.
14. SOUQUET J., DEFRANOULD P., DESBOIS J. " Design of low-loss wide-band ultrasonic transducers for non invasive medical application " IEEE Trans. Sonics Ultrason., Vol. SU-26, N°2, pp. 75-81, 1979.

15. MARSHALL LEACH W..Jr.," Controlled-source analogous circuits and SPICE models for piezoelectric transducers " IEEE Trans. Ultrason. Ferro-elect. Freq. Contr. , Vol. 41, N°1, pp. 60-66, 1994.
16. Quartz & Silice. Céramiques piézoélectriques (Caractérisation tensorielle complète du P1 88).
17. HP VEE. Hewlett Packard.

## **CHAPITRE V**

### **MESURE DU PARAMETRE B/A EN MODE PULSE-ECHO**





## V.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous adaptons le modèle théorique précédent à la mesure du paramètre B/A en mode pulse-écho. Nous montrons qu'il est possible de mesurer ce paramètre en effectuant l'analyse harmonique de l'écho réfléchi vers le transducteur après sa traversé dans le milieu, de référence et d'analyse.

L'intérêt de cette méthode réside dans l'emploi d'un seul transducteur fonctionnant en émission réception.

Dans un premier temps nous déterminerons, à l'aide du modèle théorique, les meilleures conditions pour effectuer une mesure correcte du paramètre B/A en mode pulse-écho.

Les prédictions théoriques seront ensuite validées expérimentalement en effectuant la mesure du paramètre B/A de l'éthanol.

Puis, pour faciliter la mesure du second harmonique, nous élaborerons un dispositif améliorant la détection de ce dernier.

## V.2 PRINCIPE DU SYSTEME DE MESURE

Le schéma ci-dessous décrit les éléments fonctionnels du système de mesure utilisé en mode pulse-écho.

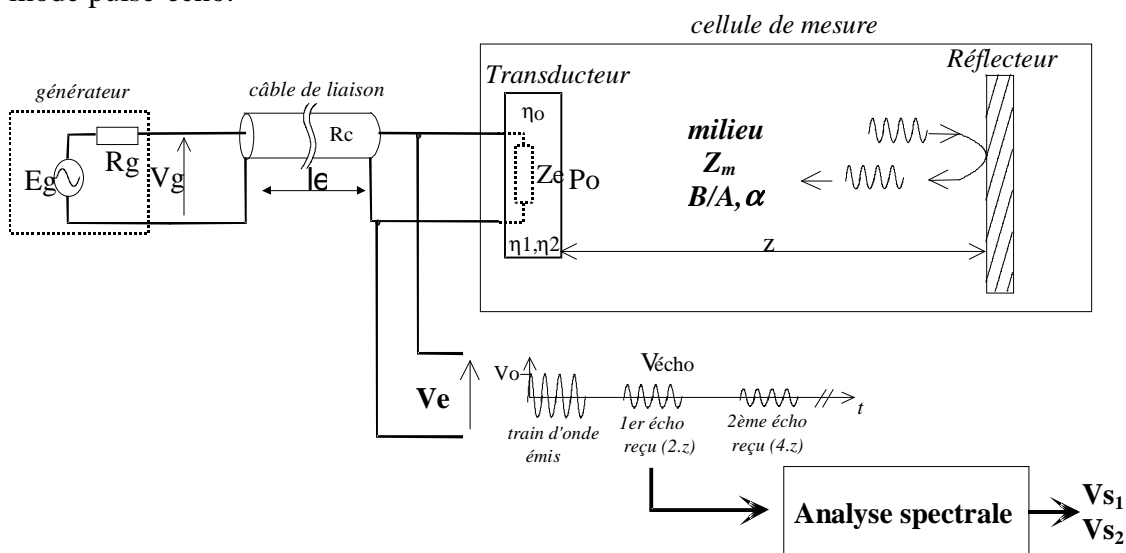


Fig V.1: Principe du système de mesure

Le transducteur, utilisé en émetteur récepteur, est excité par des trains d'onde sinusoïdale. Après avoir traversé le milieu le train d'onde est réfléchi vers la source, puis converti en tension ( $V_{\text{écho}}$ ) dont l'analyse spectrale fournira les amplitudes  $V_{S1}$  et  $V_{S2}$  du fondamental et du second harmonique.

## V.3 EXPRESSIONS THEORIQUES DU PARAMETRE B/A

On considère la surface du réflecteur suffisamment grande pour considérer que la pression acoustique réfléchi en  $z - d$  soit identique à celle obtenue en  $z + d$  si il n'y avait pas de réflecteur, au coefficient de réflexion ( $\Gamma$ ) près (fig V.2):

$$\Gamma = \frac{Z_R - Z_m}{Z_R + Z_m} \quad (\text{V.1})$$

$Z_R$  est l'impédance acoustique du réflecteur supposé perpendiculaire à la direction de propagation (oz).

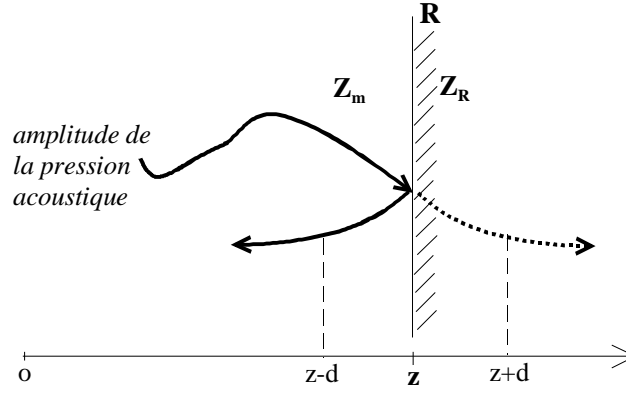


Fig V.2: Echo sur un réflecteur étendu

Le réflecteur replie le faisceau sur lui même, et les pressions acoustiques moyennes  $P_1$  et  $P_2$  du premier écho détecté par le transducteur s'exprimeront de la même façon que dans la configuration du chapitre IV (éq. IV.1-2) en remplaçant  $z$  par  $2.z$  et en tenant compte du coefficient de réflexion  $\Gamma$  :

$$P_1(2.z) = P_0.e^{-2.\alpha_1.z} \cdot |D_1(2.z, a, k)| \cdot \Gamma \quad (\text{V.2})$$

$$P_2(2.z) = K.P_0^2 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha_2.2.z} - e^{-2.\alpha_1.2.z}}{2.\alpha_1 - \alpha_2} \right) \cdot \left| 1 - C \cdot \sqrt{\frac{2.z}{k.a^2}} \cdot e^{-j.\pi/4} \right| \cdot \Gamma \quad \text{avec } K = \frac{\pi.f_1.(2 + B/A)}{2.\rho_0.c_0^3} \quad (\text{V.3})$$

Les deux procédures de mesure décrites au chapitre IV conduisent à des expressions similaires du paramètre  $B/A$ :

**Procédure par mesure des composantes  $V_{s2}$  et  $V_{s1}$ :**

$$\left( \frac{B}{A} \right)_x = \frac{V_{s2x}}{V_{s2r}} \cdot \left( \frac{V_{s1r}}{V_{s1x}} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma_x}{\Gamma_r} \cdot F\eta_{rx} \cdot \{FD_{12} \cdot F\alpha_{12}\} \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \left[ \left( \frac{B}{A} \right)_r + 2 \right] - 2 \quad (\text{V.4})$$

**Procédure par mesure des composantes  $V_{s2}$  et  $V_o$ :**

$$\left( \frac{B}{A} \right)_x = \frac{V_{s2x}}{V_{s2r}} \cdot \left( \frac{V_{or}}{V_{ox}} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma_x}{\Gamma_r} \cdot F\eta'_{rx} \cdot \{FD'_{12} \cdot F\alpha'_{12}\} \cdot \frac{\rho_x \cdot c_x^3}{\rho_r \cdot c_r^3} \cdot \left[ \left( \frac{B}{A} \right)_r + 2 \right] - 2 \quad (\text{V.5})$$

Les fonctions de sensibilité  $F\eta_{rx}^{(i)}$ , d'atténuation  $F\alpha_{12}^{(i)}$  et de diffraction  $FD_{12}^{(i)}$ , sont identiques à celles établies au chapitre IV en remplaçant  $z$  par  $2.z$ .

Cependant les allures des fonctions de sensibilité seront différentes puisque le transducteur joue le rôle de source et de détecteur, et dans ce cas on a  $e_D = e_S$  au lieu de  $e_D = e_S/2$ .

De plus, l'impédance de charge du transducteur en détection, intervenant dans la sensibilité  $\eta_{rec}$  (éq. IV.14), sera celle du générateur ( $R_g$ ), le câble étant adapté ( $R_c = R_g$ ).

L'utilisation d'un unique transducteur en mode pulse-écho ne permet pas de favoriser à la fois l'émission du fondamental et la détection du second harmonique.

Une excitation à la fréquence de résonance  $f_r$  (ou  $f_0$ ) privilégie l'émission du fondamental au détriment de la détection du second harmonique, et inversement pour une excitation à la fréquence  $f_r/2$  (ou  $f_0/2$ ).

Il est donc nécessaire d'effectuer des simulations pour définir les conditions optimales d'utilisation du système de mesure.

## V.4 SIMULATIONS

La céramique est du type P1 88 avec  $a = 8$  mm et  $e = 1$  mm, le milieu arrière sera de l'air ( $Z_{B1} = 425$  rayl) ou un matériau absorbant ( $Z_{B2} = 3$  Mrayl) . Les fréquences de résonance se déduisent des caractéristiques de la céramique :

$$f_r = N3/e = 2.02 \text{ MHz} \quad \text{et} \quad f_o = v^D/2e = \frac{1}{2.e} \sqrt{\frac{C_{33}^D}{\rho}} = 2.26 \text{ MHz}$$

Ne pouvant privilégier à la fois l'émission et la réception, on choisira une excitation plus importante pour avoir des composantes harmoniques détectables, soit  $E_g = 50$  V ( $R_g = 50 \Omega$ )

Les paramètres de simulation sont:  $z = 50$  mm,  $a_{ef} = 7.5$  mm,  $l_e = 1$  m, et :

Milieu de référence : \* **eau** ( $c_r = 1500$  m/s,  $\rho_r = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $B/A_r = 5.1$ ,  $\alpha_{O_r} = 0.25 \cdot 10^{-13}$ ,  $q_r = 2$ )

Milieus à analyser : \* **éthanol** ( $c_x = 1158$  m/s,  $\rho_x = 789$  kg/m<sup>3</sup>,  $B/A_x = 9.9$ ,  $\alpha_{O_x} = 0.9 \cdot 10^{-13}$ ,  $q_x = 2$ )

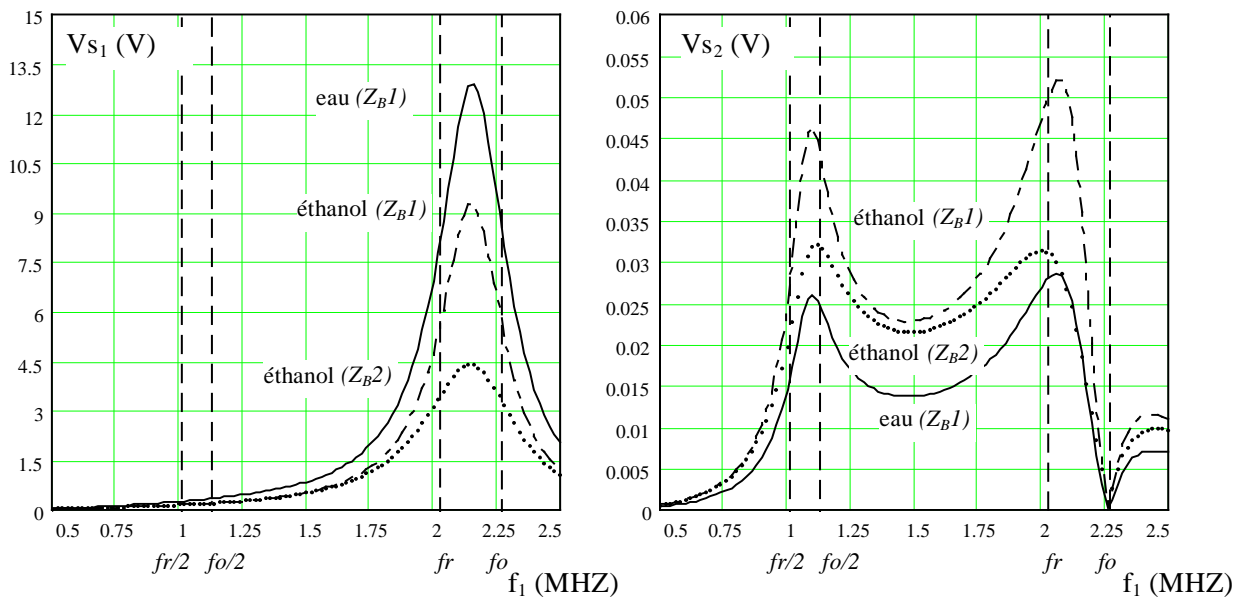
\* **glycérol** ( $c_x = 1900$  m/s,  $\rho_x = 1239$  kg/m<sup>3</sup>,  $B/A_x = 8.58$ ,  $\alpha_{O_x} = 26 \cdot 10^{-13}$ ,  $q_x = 2$ )

Le processus de simulation appliqué au système en mode pulse-écho (**fig. V.1**) est le même que celui exploité au chapitre IV (**fig. IV.22**). La tension  $V_e$ , émise et détectée, sera supposée être mesurée à l'aide d'une sonde haute impédance n'ayant pas d'influence sur les grandeurs du système. On supposera également la réflexion totale, soit  $\Gamma_r = \Gamma_x = 1$ .

### V.4.1 PROCEDURE PAR MESURE DES COMPOSANTES $V_{s2}$ ET $V_{s1}$

Les simulations pour un milieu arrière absorbant ( $Z_{B2}$ ) ne seront effectuées que pour l'éthanol.

La **figure V.3** présente les résultats obtenus pour les composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  du premier écho détecté dans l'eau et l'éthanol, en fonction de la fréquence  $f_1$  du train d'onde émis.



**Fig V.3:** Composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  du premier écho détecté dans l'eau et l'éthanol.  
Milieu arrière du transducteur:  $Z_{B1} = 425$  rayl (air),  $Z_{B2} = 3$  Mrayl

Le maximum pour le fondamental ( $V_{s1}$ ) entre  $f_r$  et  $f_o$  est dû au fait que les sensibilités sont maximales en  $f_r$ , pour l'émission, et en  $f_o$ , pour la détection (cf § IV.4.1.2-4).

Pour le second harmonique ( $V_{s2}$ ) on observe deux maximums au voisinage de  $f_o/2$  et  $f_r$ .

Le premier maximum est dû au fait que la détection est privilégiée à la fréquence de résonance  $f_o$  du transducteur, donc  $f_2 = f_o \rightarrow f_1 = f_o/2$ . Le deuxième maximum est dû au fait que l'émission du fondamental, engendrant le second harmonique, est privilégiée à la fréquence de résonance  $f_r$  du transducteur.

Ces deux zones fréquentielles semblent être un choix judicieux pour la fréquence d'excitation ( $f_1$ ), mais la deuxième ( $\sim f_r$ ) ne permettra pas la détection correcte du second harmonique devant l'ampleur du fondamental. Par exemple, pour l'eau  $V_{s2} \approx 28\text{mV}$  et  $V_{s1} \approx 9\text{V}$ .

Il est donc utile de définir un taux de distorsion de l'écho détecté, limité au second harmonique, sous la forme:

$$T_{\text{dis}} = \frac{V_{s2}}{V_{s1}} \cdot 100 \quad (\text{V.6})$$

Ce taux de distorsion présenté **figure V.4.a** indique que la fréquence d'excitation ( $f_1$ ) la plus adaptée est située au voisinage des fréquences  $f_r/2$  et  $f_o/2$ .

Le maximum obtenu est d'environ 8.5% dans l'eau, alors que les simulations du chapitre IV, avec deux transducteurs, donneraient par exemple  $T_{\text{dis}} \approx 34\%$  avec  $E_g \approx 10\text{ V}$  (cf. fig. IV.55.a & b).

Il apparaît donc clairement qu'avec ce type de transducteur en mode pulse-écho une détection correcte du second harmonique ne peut être obtenue que pour une excitation importante (ici  $E_g = 50\text{ V}$ ).

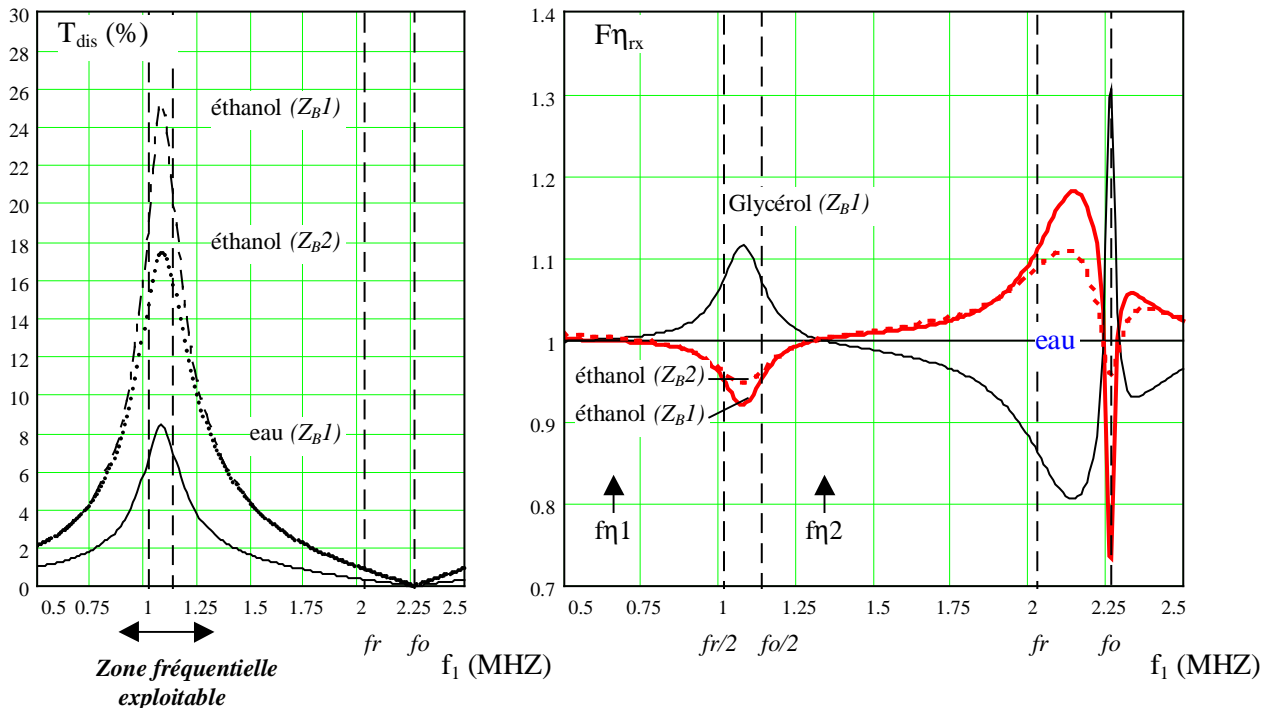
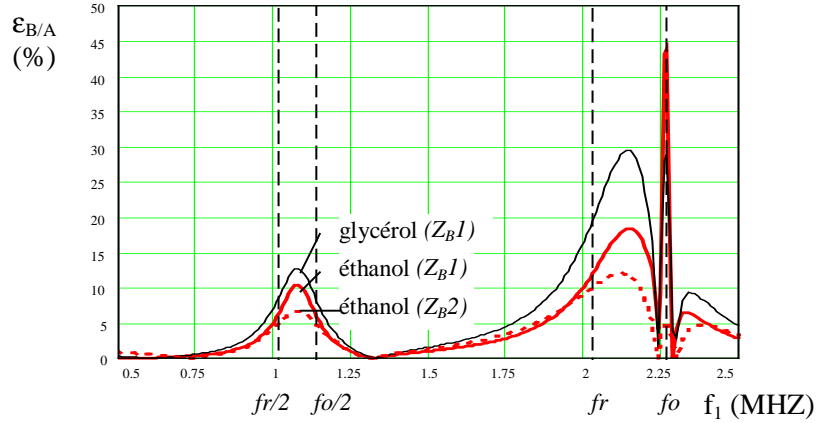


Fig V.4: Taux de distorsion et fonction de sensibilité.

La fonction de sensibilité de cette procédure est présentée **figure V.4.a** pour trois milieux, l'eau étant le milieu de référence.

Dans la zone fréquentielle exploitable cette fonction n'est pas unitaire, et elle introduira une erreur sur la mesure du paramètre B/A si l'influence des sensibilités est négligée. Cette erreur théorique, exprimée par :  $\varepsilon_{B/A} = |1 - F_{n_{rx}}^{-1}| \cdot (1 + 2 \cdot (B/A)^{-1})$  est présentée **figure V.5**.



**Fig V.5:** Erreur sur la mesure du paramètre B/A si l'influence des sensibilités est négligée.

Comme pour la méthode comparative développée au chapitre IV, on constate l'existence de deux fréquences particulières  $f_{\eta 1} \approx 0.56$  MHz et  $f_{\eta 2} \approx 1.32$  MHz pour lesquelles la fonction de sensibilité est unitaire, ce qui engendre une erreur nulle (**fig V.4.b**). Mais à ces fréquences le taux de distorsion est faible, et la détection du second harmonique délicate. De plus elles sont difficiles à déterminer expérimentalement.

L'utilisation d'un milieu arrière absorbant ( $Z_{B2} = 3$  Mrayl) permet de diminuer l'erreur sur la mesure si les sensibilités sont négligées (**fig V.5**), mais diminue également le taux de distorsion et l'efficacité de la détection du second harmonique (**fig V.4.a**).

Pour minimiser l'erreur on choisira  $f_1 = f_r/2$  comme fréquence de travail.

A cette fréquence, aisément déterminable expérimentalement par la caractérisation électrique du transducteur, nous montrons que la fonction de sensibilité peut être simplifiée.

**Simplification de la fonction de sensibilité au voisinage des fréquences  $f_r/2$  et  $f_o/2$ :**

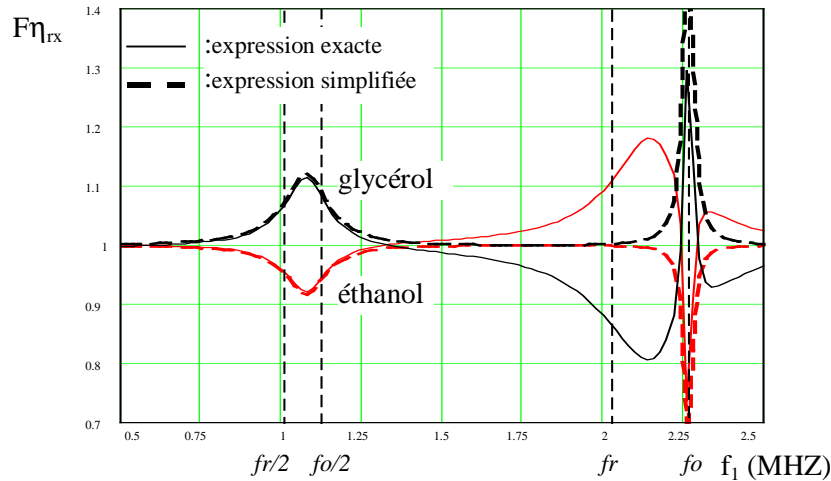
En posant :  $F(f) = \frac{A.t_{21}(f)}{t_{22}(f)}$  et  $G(f, Z) = \frac{t_{12}(f) + Z.A.t_{11}(f)}{Rg.t_{22}(f)}$ , la fonction de sensibilité s'écrit:

$$F\eta_{rx}(f, Z_x, Z_r) = \left( \frac{1 + Z_x.F(2.f) + G(2.f, Z_x)}{1 + Z_r.F(2.f) + G(2.f, Z_r)} \right) \left( \frac{1 + Z_r.F(f) + G(f, Z_r)}{1 + Z_x.F(f) + G(f, Z_x)} \right)^2 = F\eta(2.f, Z_x, Z_r).F\eta(f, Z_r, Z_x)^2 \quad (V.7)$$

Au voisinage des fréquences  $f_r/2$  et  $f_o/2$  les termes en  $F(f)$  et  $G(f)$  sont négligeables, soit  $F\eta(f, Z_r, Z_x)^2 \approx 1$ , et la fonction de sensibilité peut se réduire au premier terme de l'équation (V.7) :

$$F\eta_{rx}(f, Z_x, Z_r) \approx F\eta(2.f, Z_x, Z_r) \quad (V.8)$$

La **figure V.6** montre la validité de cette approximation au voisinage des fréquences  $f_r/2$  et  $f_o/2$ , pour l'éthanol et le glycérol.



**Fig V.6:** Fonctions de sensibilité exacte et simplifiée.

De plus, à la fréquence  $fr/2$ , on peut obtenir une forme simple de la fonction de sensibilité en constatant que:  $Z_{r,x} \cdot \text{Re}[F(2.f)] \ll 1$  et  $1 + Z_{r,x} \cdot \text{Im}[F(2.f)] \gg G(2.f, Z_{r,x})$ .  
Et en remplaçant les paramètres  $t_{21}$  et  $t_{22}$  de  $F(2.f)$  par leur expression définie en annexe (A4.7-5), on obtient:

$$F\eta_{RX}(fr/2, Z_x, Z_T) \approx \frac{\text{tg}(\gamma) \cdot Z_T - Z_x}{\text{tg}(\gamma) \cdot Z_T + Z_x} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\pi \cdot fr}{fo} \quad (\text{V.9})$$

$Z_T$  est l'impédance acoustique de la céramique.

A la fréquence  $fr/2$  l'écart relatif entre l'expression exacte de la fonction de sensibilité et sa simplification (V.9), est de  $\sim 0.4\%$  pour l'éthanol et de  $\sim 0.6\%$  pour le glycérol.

Cette expression peut donc être utilisée comme coefficient de correction du paramètre  $B/A$  mesuré à la fréquence  $fr/2$ , sous la forme:

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{corrigé}} = \left[ \left(\frac{B}{A}\right)_{\text{mesuré}} + 2 \right] \cdot F\eta_{RX}(fr/2, Z_x, Z_T) - 2 \quad (\text{V.10})$$

#### V.4.2 PROCEDURE PAR MESURE DES COMPOSANTES $V_{S2}$ ET $V_o$

Dans ce cas la composante  $V_o$  correspondra à l'amplitude du train d'onde émis. La composante  $V_{S2}$  est la même que précédemment, et la composante  $V_o$  est identique à celle obtenue pour la méthode comparative analysée au chapitre IV.

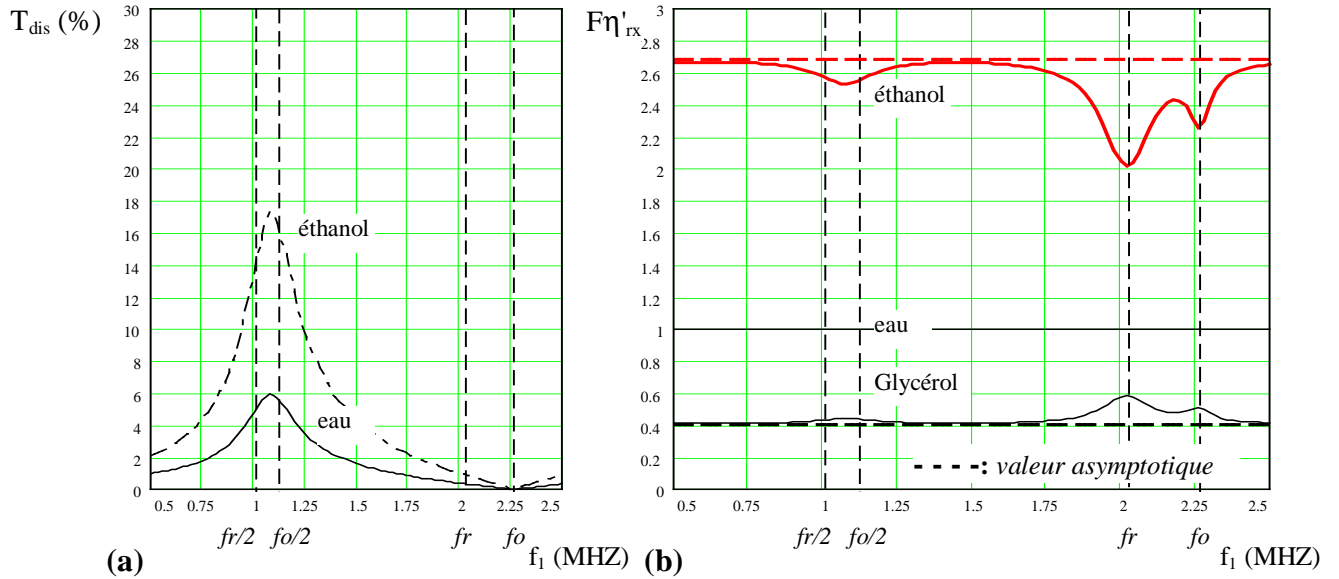
Dans ce cas nous ne simulerons que la fonction de sensibilité du système et le taux de distorsion de l'écho.

Les résultats pour une céramique amortie ( $Z_B = 3 \text{ Mrayl}$ ), et non amortie ( $Z_B = 425 \text{ rayl}$ ), sont présentés respectivement **figures V.7** et **V.8**.

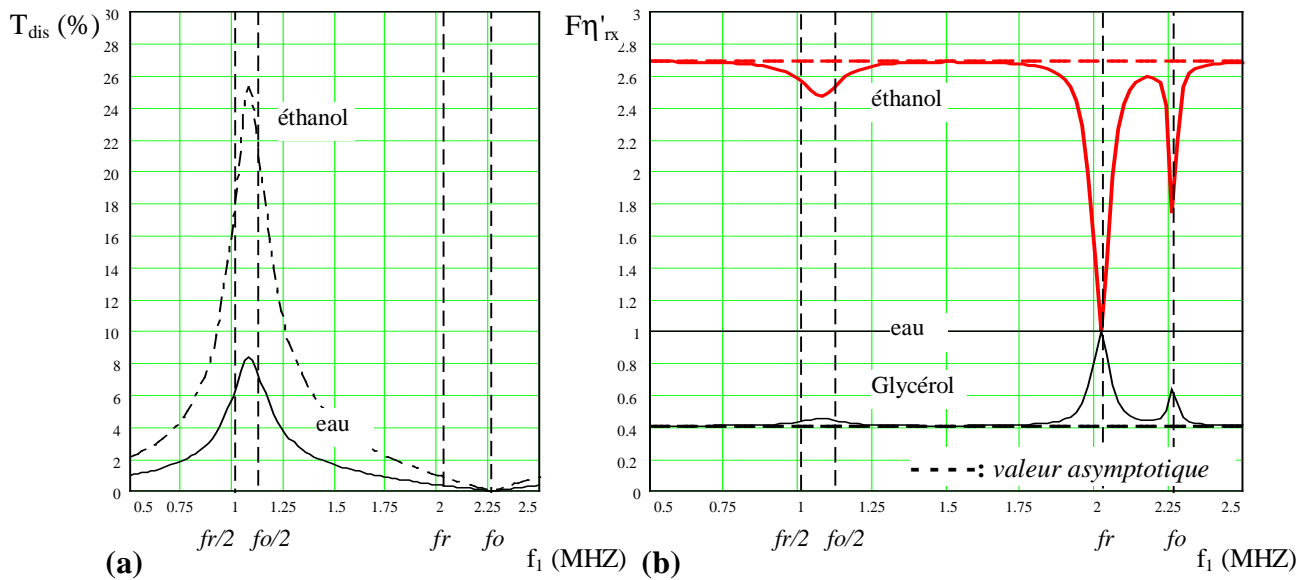
Les constatations sont les mêmes que celles établies au chapitre IV pour cette procédure de mesure, c'est à dire que l'influence des sensibilités peut être négligée seulement si on travaille à la fréquence de résonance ( $fr$ ) avec un transducteur non amorti ( $Z_B = 425 \text{ rayl}$ ).

Mais en mode pulse-écho, travailler à la fréquence de résonance ne permet pas une détection correcte de la composante  $V_{S2}$ , le taux de distorsion étant trop faible (**fig V.8.a**).

En conséquence, la procédure par mesure des composantes  $V_{s2}$  et  $V_o$  n'est pas exploitable en mode pulse-écho si on néglige l'influence des sensibilités. L'erreur apportée étant trop importante.



**Fig V.7:** Taux de distorsion ( $T_{dis}$ ) et fonction de sensibilité ( $F\eta'_{rx}$ ) pour  $Z_B = 3$  Mrayl.



**Fig V.8:** Taux de distorsion ( $T_{dis}$ ) et fonction de sensibilité ( $F\eta'_{rx}$ ) pour  $Z_B = 425$  rayl.

Toutefois, pour minimiser l'erreur dans la zone fréquentielle exploitable, au voisinage de  $fr/2$ , il est possible d'utiliser comme coefficient de correction la valeur asymptotique de la fonction de sensibilité établie au chapitre IV (éq. IV.33.a). L'exploitation de cette correction

$$F\eta'_{rx} \approx \left( \frac{Z_r}{Z_x} \right)^2, \text{ présentée sur les figures V.7 \& 8, se fait avec l'expression (V.10).}$$



## V.5 EXPERIMENTATIONS ET ANALYSES

### V.5.1 DISPOSITIF DE MESURE

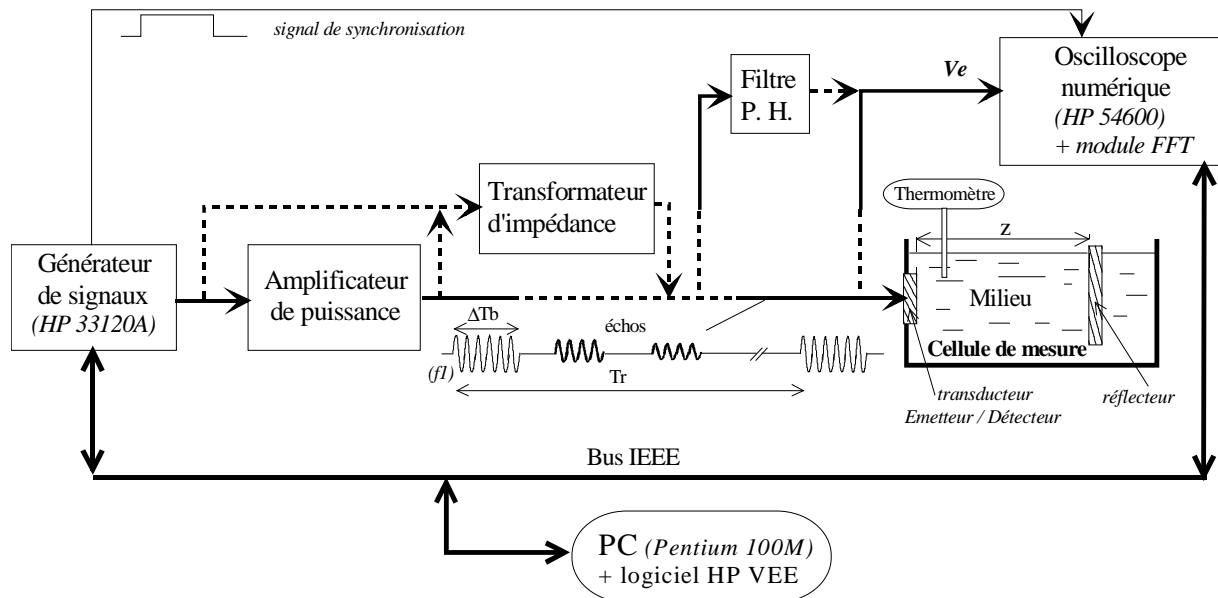


Fig V.9: Dispositif de mesure.

Pour les premières expérimentations, le dispositif de mesure sera constitué d'un générateur de signaux, d'un amplificateur de puissance, de la cellule de mesure, et d'un oscilloscope numérique. Le système sera piloté par le logiciel HP VEE via une liaison IEE.

Le dispositif sera ensuite complété par:

- Un transformateur d'impédance, pour augmenter le niveau de l'excitation.
- Un filtre passif Passe-Haut, dont le rôle est de privilégier la mesure du second harmonique. Cela revient à augmenter le taux de distorsion de l'écho détecté.

Dans ce cas les expérimentations se feront avec et sans amplificateur de puissance.

La mesure des composantes spectrales de l'écho pourront également se faire en manuel à l'aide du module FFT de l'oscilloscope.

### V.5.2 MESURE DU PARAMETRE B/A PAR DETECTION DES COMPOSANTES $V_{s2}$ ET $V_{s1}$ DE L'ECHO

Dans cette première série de mesures le transformateur d'impédance et le filtre Passe – Haut ne sont pas utilisés.

#### V.5.2.1 Observations des échos détectés - Mise en évidence du caractère non linéaire de la propagation

On utilise un transducteur 2 MHz avec de l'air en milieu arrière (transducteur de type A). Le réflecteur est une plaque d'acier ( $Z_R = 44 \text{ Mrayl}$ ,  $e = 1.5 \text{ mm}$ ) positionnée à  $z = 41.5 \text{ mm}$ .

L'amplificateur délivre des trains d'onde constitués de 35 cycles d'amplitude 55 V (à vide et à 2 MHz), la période de récurrence est  $Tr = 100 \text{ Hz}$ .

Les figures V.10 & 11 présentent les signaux  $V_e(t)$  détectés avec l'éthanol comme milieu de propagation.

Pour une excitation à la fréquence de résonance du transducteur ( $f_1 = 2 \text{ MHz} \approx fr.$ ) les différents échos sont nettement apparents (*fig. V.10.a*).

Mais l'observation de la forme d'onde des trois premiers échos ne met pas en évidence le caractère non linéaire de la propagation, le taux de distorsion étant très faible à cette fréquence (*fig. V.10.b*).

La même expérimentation effectuée à la fréquence  $f_1 = 1.05 \text{ MHz}$  montre la nette décroissance de l'amplitude des échos (*fig. V.11.a*). Mais cette fois l'observation de leur forme d'onde met en évidence le caractère non linéaire de la propagation, la déformation s'accroissant avec la distance. Cette fréquence est située au voisinage de la demie fréquence de résonance ( $fr/2$ ), zone fréquentielle dans laquelle le taux de distorsion observable est maximum.

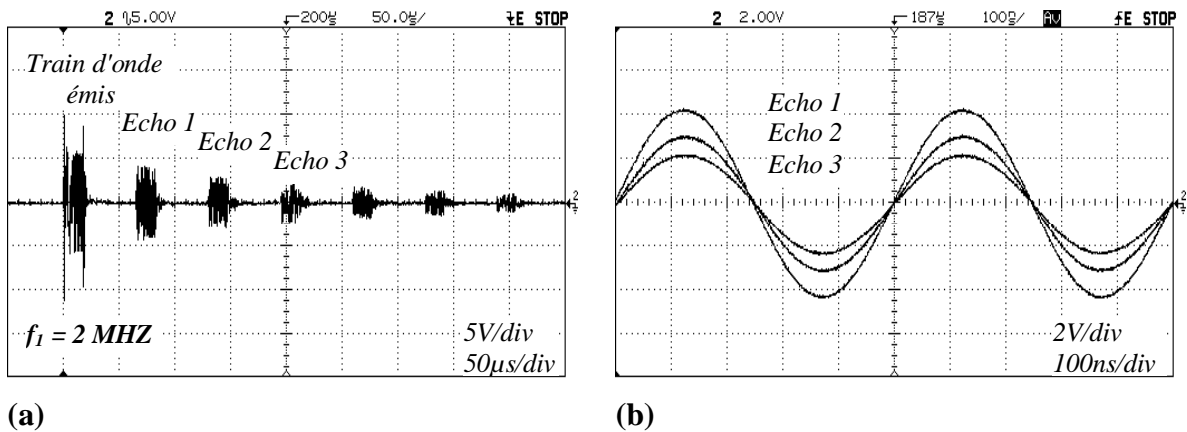


Fig V.10 : Visualisation des échos pour une excitation  $f_1 = 2 \text{ MHz}$ .

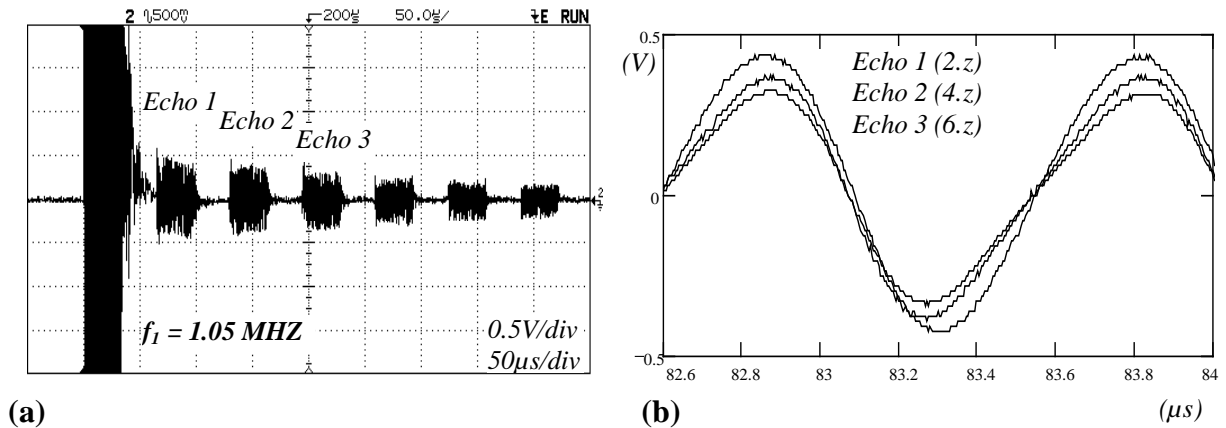


Fig V.11 : Visualisation des échos pour une excitation  $f_1 = 1.05 \text{ MHz}$ .

### V.5.2.2 Détection des composantes $V_{s2}$ et $V_{s1}$ de l'écho – Détermination du paramètre $B/A$

Pour cette expérimentation le réflecteur en acier est positionné à la distance  $z = 57 \text{ mm}$ , le milieu arrière du transducteur est composé d'air et sa fréquence de résonance est  $fr = 2.03 \text{ MHz}$  (type B). Seules les composantes harmoniques du 1<sup>er</sup> écho seront détectées.

Les mesures seront effectuées automatiquement par le processus HP VEE sur la plage de fréquences :  $0.9 - 1.7 \text{ MHz}$ . L'analyse fréquentielle se fera sur  $4 \times 32$  périodes tronquées à  $\Delta T = 40 \mu\text{s}$ , et chacune des valeurs restituées représentent la moyenne de 3 mesures successives.

Les caractéristiques des milieux ( $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ), sont:

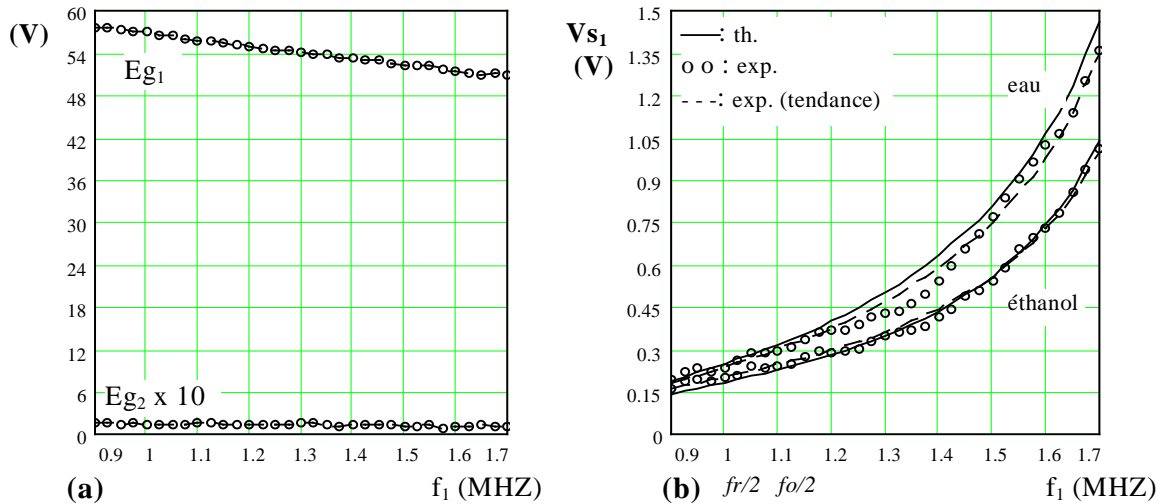
- Milieu de référence: eau courante:  $c_r = 1489 \text{ m/s}$ ,  $\rho_r = 992 \text{ kg/m}^3$ .

- Milieu analysé: Ethanol (95%, 3 à 5% de méthanol):  $c_x = 1230$  m/s ,  $\rho_x = 832$  kg/m<sup>3</sup>.

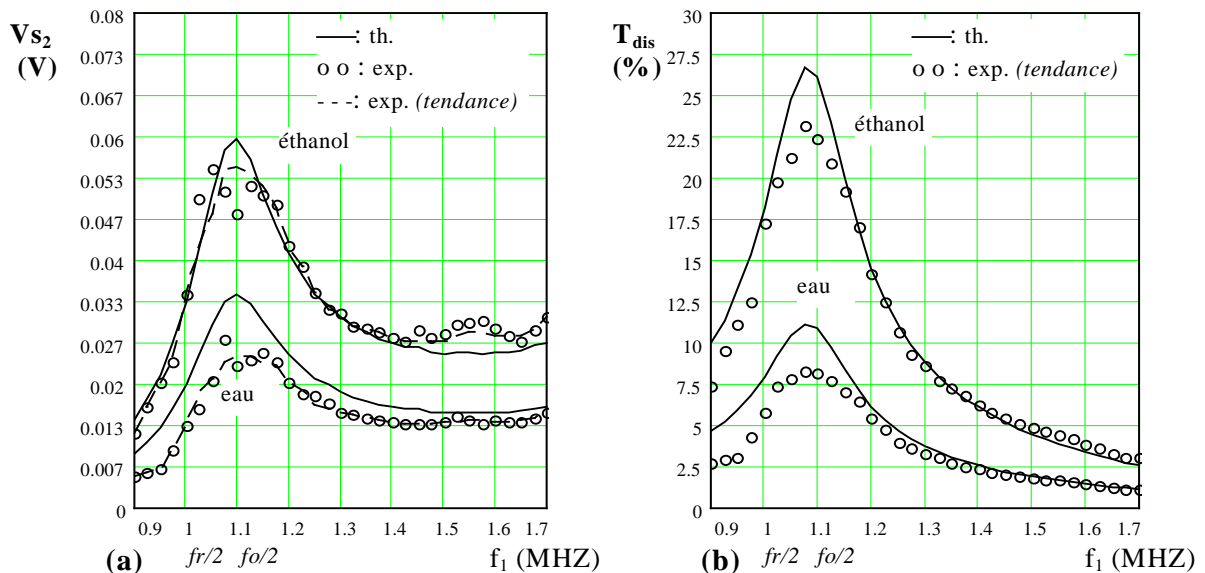
Les simulations seront effectuées en considérant:  $B/A_r = 5$ ,  $B/A_x = 9.5$ ,  $a_{\text{eff}} = 7.5$  mm.

Et chaque point sera calculé avec la valeur mesurée de  $E_g$ , qui correspond à l'amplitude du fondamental du train d'onde généré par l'amplificateur à vide. En effet, celle ci n'est pas constante sur la plage de fréquence considérée comme le montre la **figure V.12.a**.

Pour s'assurer de la pureté spectrale de l'excitation, nous avons également relevé le second harmonique ( $E_{g2}$ ) dont l'amplitude a été multipliée par 10 pour la visualisation.



**Fig V.12:** (a) Fondamental ( $E_{g1}$ ) et second harmonique ( $E_{g2}$ ) délivré par l'amplificateur. (b) Fondamental du 1<sup>er</sup> écho détecté dans l'eau et l'éthanol.



**Fig V.13:** (a) Second harmonique du 1<sup>er</sup> écho détecté dans l'eau et l'éthanol, et taux de distorsion associé (b).

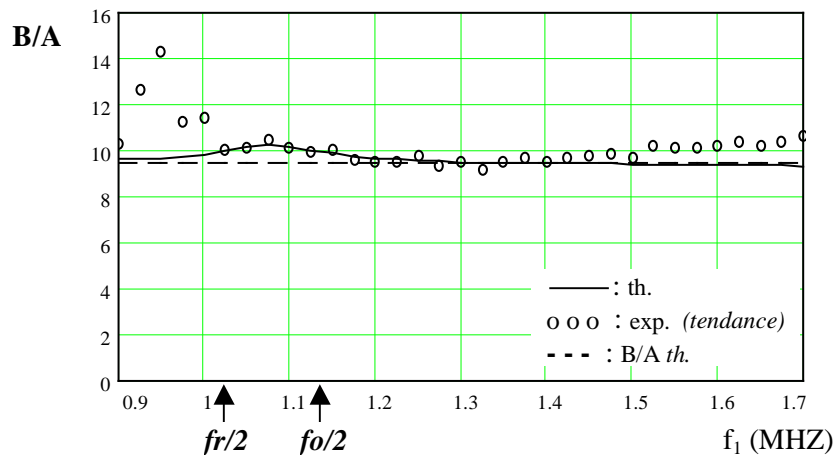
Les **figures V.12.b et V.13.a** montrent les composantes  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  du premier écho dans l'eau et l'éthanol.

Les valeurs expérimentales sont comparées aux simulations théoriques, présentées sans correction, et nous donnons également les courbes de tendance des points de mesure.

La qualité de la détection du second harmonique est quantifiée par le taux de distorsion présenté *figure V.13.b*.

La corrélation entre les courbes théoriques et expérimentales est bonne, en particulier pour l'éthanol. Pour l'eau, elles seraient quasiment confondues si on considérait un coefficient de correction  $c_{lea} = 0.91$ .

Ensuite, pour minimiser les fluctuations dans le résultat final, nous utiliserons les points des courbes de tendance pour déterminer le paramètre B/A à l'aide de l'expression (V.4) pour  $F\eta_{rx} = 1$ .



**Fig V.14:** Paramètre B/A obtenu pour l'éthanol avec l'eau comme milieu de référence. Comparaison avec la courbe théorique.

Le résultat obtenu est présenté *figure V.14*, conjointement à la prédiction théorique. Il est en bon accord avec la prévision théorique, excepté dans les zones fréquentielles extrêmes de la plage de mesure, où l'amplitude des composantes harmoniques devient trop faible pour être mesurée correctement. Et en particulier pour le second harmonique détecté dans l'eau aux fréquences inférieures à  $f_r/2$ .

### V.5.3 AMELIORATION DE LA DETECTION DU SECOND HARMONIQUE

Pour augmenter l'amplitude du second harmonique, il faut relever le niveau de l'excitation. Et pour améliorer sa détection, en augmentant le taux de distorsion, il faut diminuer l'amplitude du fondamental de l'écho.

Ces deux opérations seront réalisées à l'aide d'un transformateur d'impédance et d'un filtre Passe – Haut.

#### V.5.3.1 Détermination des éléments du transformateur d'impédance et du filtre:

La fréquence de résonance du transducteur utilisé est  $f_r = 2.03$  MHz, et la fréquence d'excitation choisie sera  $f_1 = f_r/2 = 1.015$  MHz.

Pour optimiser le transfert de puissance à cette fréquence, on placera un transformateur d'impédance entre le générateur et la source (*fig V.15.a*).

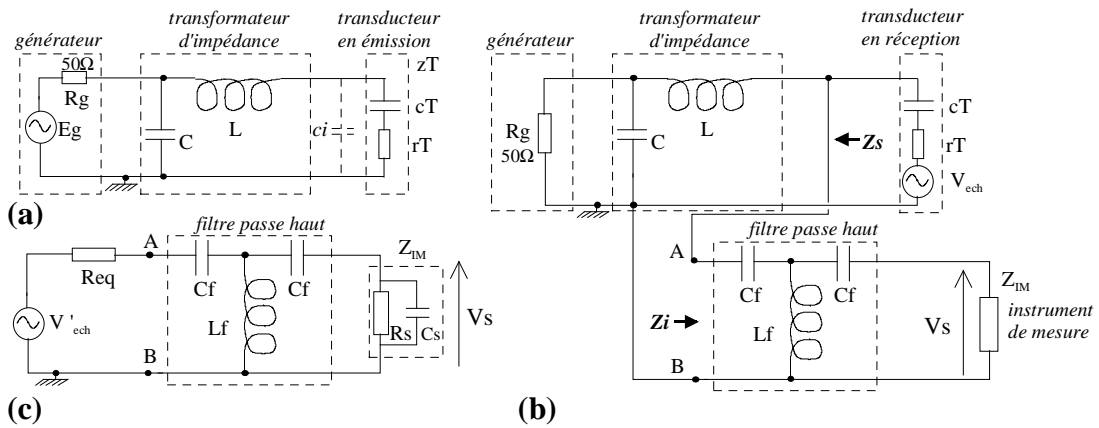
Le bloc (Eg, Rg) modélise les ensembles (Générateur + câble) ou (Amplificateur + câble).

La caractérisation électrique du transducteur dans l'eau à  $f_1 = 1.015$  MHz donne :

$z_T = 88.1.e^{j(-83.8^\circ)}$  ( $\Omega$ ), que l'on modélise par une résistance  $r_T \approx 9.5 \Omega$  en série avec une capacité  $c_T \approx 1.8$  nF.

Les conditions d'adaptation (IV.47) donnent:  $L \approx 16.8 \mu\text{H}$  et  $C \approx 6.4 \text{ nF}$ .

Lors de la détection de l'écho, l'excitation a disparue et le générateur se modélise par son impédance interne  $R_g$  (**fig V.15.b**).



**Fig V.15:** Amélioration de la détection par adaptation d'impédance et filtrage P H.

L'impédance interne d'un transducteur en mode réception est la même qu'en mode émission. Et comme le second harmonique détecté est faible devant le fondamental, on peut considérer que le transducteur en mode réception est principalement excité par une onde de pression de fréquence  $f_1 = 1.015 \text{ MHz}$ .

Dans ce cas le transducteur sera modélisé par la même impédance  $z_T$  en série avec la tension d'écho  $V_{ech}$ .

Pour améliorer la détection du second harmonique par l'instrument de mesure, on augmentera le taux de distorsion en atténuant le fondamental ( $f_1$ ) à l'aide d'un filtre passe haut de fréquence de coupure  $f_c = 2.f_1$ .

On choisira la structure simple d'un filtre passif en T, dont la fréquence de coupure ( $f_c$ ) et l'impédance caractéristique ( $R_c$ ) sont données par les relations :

$$f_c = \frac{1}{4.\pi.\sqrt{L_f.C_f}} \quad \text{et} \quad R_c = \sqrt{\frac{L_f}{C_f}} \quad (\text{V.10})$$

$L_f$  sera choisie suffisamment grande pour minimiser les capacités  $C_f$  et l'influence du filtre sur l'étage d'adaptation d'impédance.

Avec  $f_c = 2.f_1 = f_r = 2.03 \text{ MHz}$  et  $L_f = 100 \mu\text{H}$ , on obtient:

$$C_f \approx 30.7 \text{ pF} \quad \text{et} \quad R_c \approx 1.8 \text{ k}\Omega$$

Une simulation de la réponse  $|V_s/V'_{ech}|$  de ce filtre (**fig V.15.c**), effectuée dans les conditions classiques d'adaptation ( $R_{eq} = Z_{IM} = R_c = 1.8\text{k}\Omega$ ), est présentée figure **V.16.(a)**.

En fait la charge du filtre est une sonde impédance, telle que  $Z_{IM} = 1 \text{ M}\Omega // 8\text{pF}$ .

Et  $R_{eq}$  correspond à l'impédance équivalente vue des points A et B, constituée par l'ensemble Générateur – Transformateur – Transducteur en réception.

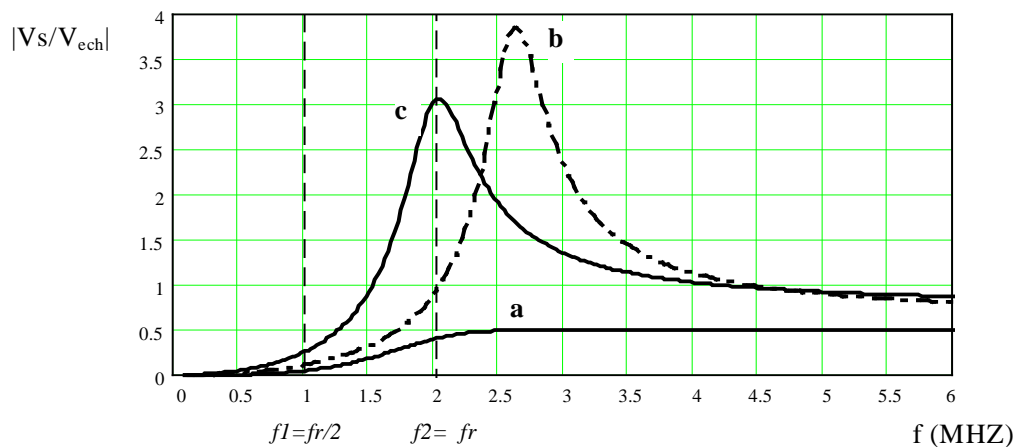
Avec les conditions d'adaptation cette impédance est réelle et s'exprime sous la forme :

$$R_{eq} = \frac{1}{2} \left[ r_T + \frac{1}{r_T.(c_T.2.\pi.f_1)^2} \right] \approx 408 \Omega$$

Dans ce cas la réponse du filtre devient la courbe **figure V.16.(b)**, et présente une surtension au environ de 2.6 MHz.

On peut donc utiliser cette surtension pour améliorer encore la détection du second harmonique, en augmentant la valeur des capacités Cf afin de décaler le maximum de la réponse en  $f_2 = fr$ .

Ce résultat est obtenu avec  $C_f = 56 \text{ pF}$  (**fig V.16.(c)**).



**Fig V.16:** Réponse du filtre Passe – Haut.

De plus, il faut que l'impédance d'entrée  $Z_i$  du filtre ne modifie pas les conditions d'adaptation d'impédance. A la fréquence d'adaptation  $f_1 = 1.015 \text{ MHz}$  on trouve que  $Z_i$  est équivalente à une capacité  $C_i \approx 73 \text{ pF}$ .

L'influence de cette capacité en parallèle sur le transducteur (**fig V.15.a**) sera faible, et le transfert de puissance restera optimal avec les valeurs de C et L précédemment calculées.

Finalement, les valeurs définitives des composants sont:

$$L = 16.8 \text{ } \mu\text{H}, \quad C = 6.4 \text{ nF}, \quad C_f = 56 \text{ pF}, \quad L_f = 100 \text{ } \mu\text{H}$$

La fonctions de transfert du filtre  $|V_s/V'_{ech}|$ , liant la tension mesurée à celle générée par le transducteur, dépend de l'impédance équivalente  $Req$  (**fig. V.15.c**).

Et comme aux fréquences considérées l'impédance du transducteur, intervenant dans  $Req$ , ne varie pratiquement pas en fonction du milieu de propagation, ce dispositif sera exploitable avec la méthode comparative, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer une correction liée à l'impédance acoustique des milieux.

En effet, l'impédance d'un transducteur varie en fonction du milieu principalement au voisinage de la fréquence d'anti-résonance, qui est hors de la zone fréquentielle utilisée ici (cf. chapitre IV § 4.1.1)

Par contre, avec ce système la fonction de sensibilité est modifiée car l'impédance de charge  $Z_s$  du transducteur en détection ne vaut plus  $R_g$ .

### V.5.3.2 Influence du dispositif sur la fonction de sensibilité:

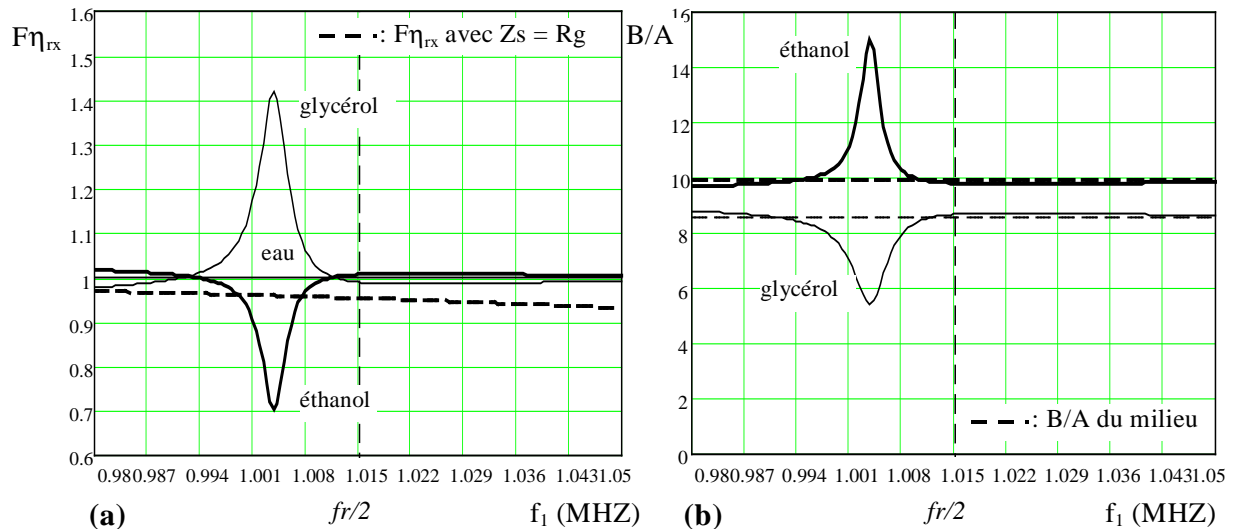
La fonction de sensibilité est simulée avec l'impédance équivalente  $Z_s$  de l'ensemble: Générateur ( $R_g$ ), Transformateur, Filtre, Instrument de mesure (**fig V.15.b**).

Du fait de la sélectivité du dispositif, les calculs sont effectués au voisinage de la fréquence  $fr/2$ . Les résultats pour l'éthanol et le glycérol, l'eau étant le milieu de référence, sont présentés **figure V.17.a**. Les caractéristiques des milieux sont les mêmes que celles utilisées au paragraphe V.3.2.

Pour comparaison, nous avons également représenté la fonction de sensibilité obtenue sans le dispositif d'amélioration de la détection, c'est à dire pour  $Z_s = R_g$ .

On constate que la fonction présente un extremum relativement important à la fréquence  $f_1 = 1.004$  MHz. A cette fréquence l'erreur théorique sur la mesure du paramètre B/A, si on néglige l'influence des sensibilité, sera d'environ 51% pour l'éthanol, comme le montre la **figure V.17.b**.

Mais à la fréquence de travail choisie ( $f_1 = fr/2$ ) cette fonction est proche de l'unité, ce qui engendrera une erreur plus faible que précédemment, c'est à dire avec le système sans dispositif d'amélioration de la détection.



**Fig V.17:** (a) Fonction de sensibilité associée au dispositif d'amélioration de la détection. (b) Paramètre B/A obtenu en négligeant l'influence des sensibilités.

A priori le dispositif semble apporter des améliorations au système de mesure sur tous les plans, mais nous avons constaté que la fonction de sensibilité est sensible aux dispersions sur les composants réactif du filtre et de sa charge. En effet, une valeur de  $L_f = 97.5\mu\text{H}$  (au lieu de  $100\mu\text{H}$ ), ou une valeur de  $C_s = 6\text{ pF}$  (au lieu de  $8\text{ pF}$ ), engendre un glissement de l'extremum de la fonction en  $f_1 = fr/2 = 1.015$  MHz.

En conséquence, pour exploiter efficacement ce dispositif, il est nécessaire d'effectuer des mesures préalables au voisinage de  $fr/2$  pour déterminer la fréquence de travail la plus adaptée.

### V.5.3.3 Exploitation du dispositif d'amélioration de la détection des composantes harmoniques.

Avec ce dispositif nous n'utiliserons pas d'amplificateur, puisque le taux de distorsion du signal mesuré est suffisant pour effectuer une mesure correcte de ses composantes fréquentielles.

#### a) Observation de l'écho et des ses composantes fréquentielles:

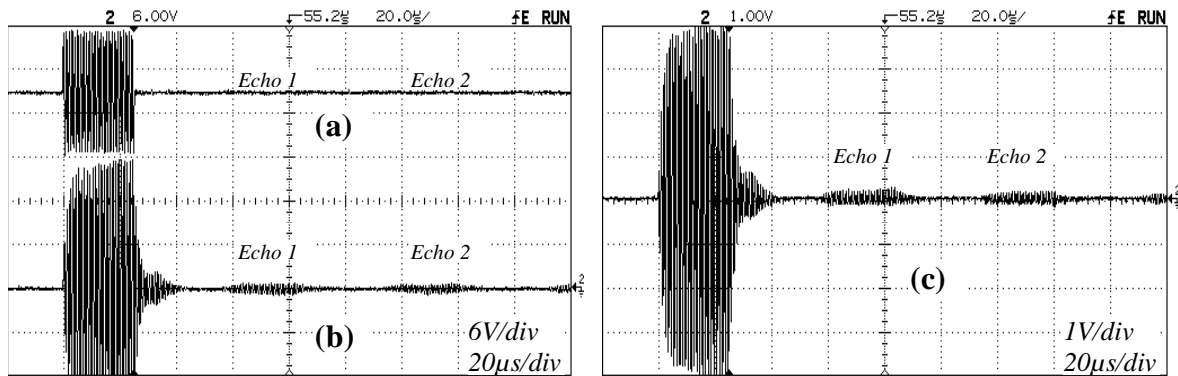
Dans cette expérimentation le générateur délivre des trains d'onde constitués de 25 cycles d'amplitude 10 V. Le réflecteur en acier est positionné à  $z = 41.5$  mm, la fréquence de travail est  $f_1 = 0.99$  MHz.

La **figure V.18** montre les signaux relevés avec et sans le dispositif. L'emploi du transformateur d'impédance permet de multiplier par 2 l'amplitude de l'excitation (**fig a et b**), et l'analyse fréquentielle du 1er écho se fera sur le signal en sortie du filtre Passe-Haut (**fig c**).

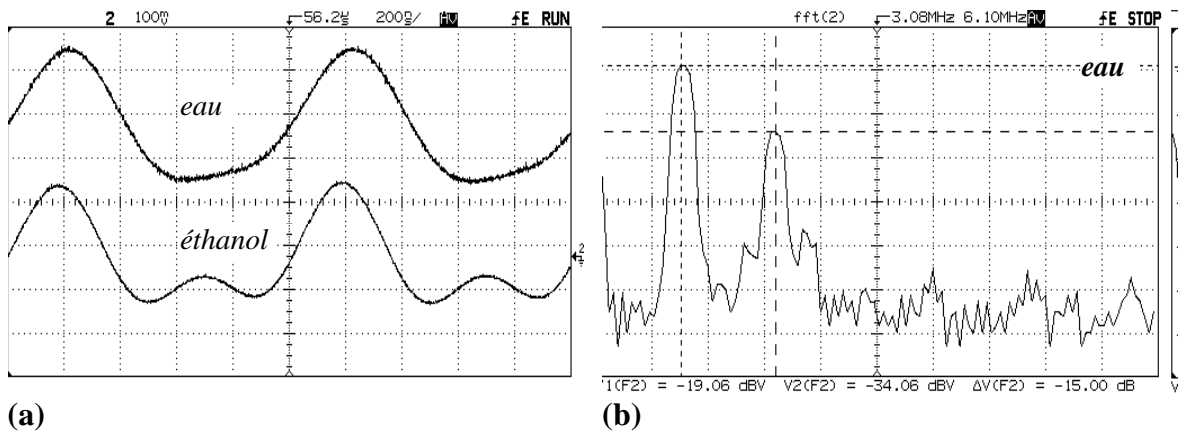
La *figure V.19.a* montre les formes d'onde du 1<sup>er</sup> écho pour l'eau et l'éthanol, après augmentation du taux de distorsion par filtrage.

Les *figures V.19.b & V.20.a,b* montrent les composantes spectrales de ces formes d'onde, ainsi que pour celle du glycérol, obtenues à l'aide du module FFT intégré à l'oscilloscope numérique.

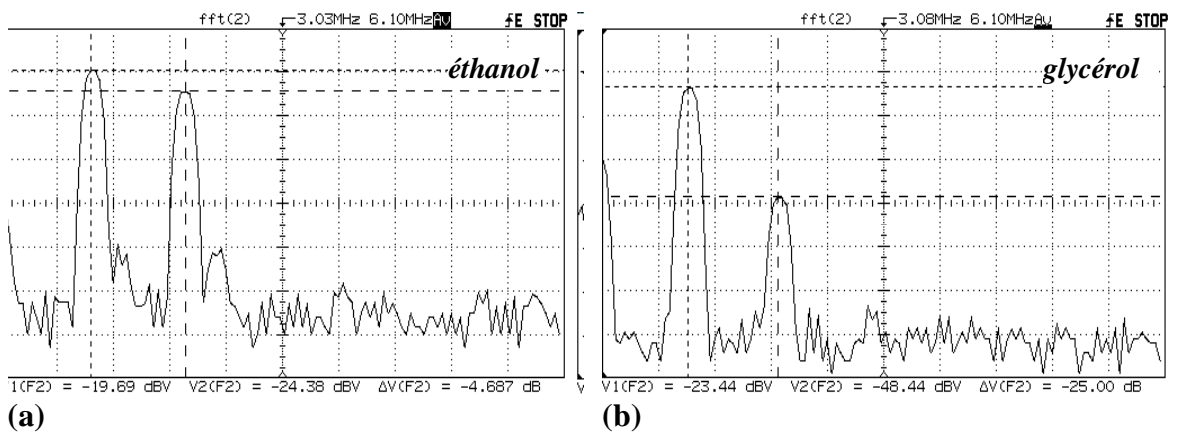
On voit nettement que ce dispositif permet la détection des composantes spectrales de l'écho sans utiliser d'amplificateur, ce qui n'aurait pas été possible autrement.



**Fig V.18:** Signal aux bornes du transducteur, sans transformateur et filtre (a), et avec transformateur seulement (b). (c) Signal  $V_s$  en sortie du filtre, avec transformateur.



**Fig V.19:** (a) Formes d'onde du 1<sup>er</sup> écho à la sortie du filtre pour l'eau et l'éthanol. (b) Spectre correspondant pour l'eau.



**Fig V.20:** Spectre du 1<sup>er</sup> écho en sortie du filtre pour l'éthanol (a) et le glycérol (b).



**b) Validation du système pour la mesure du paramètre B/A:**

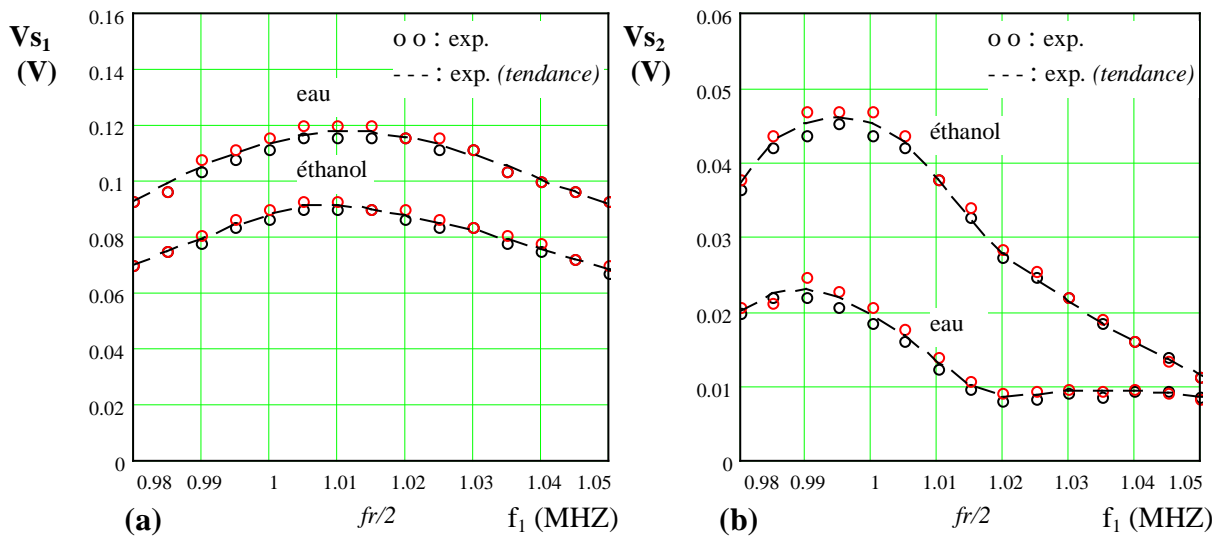
L'objectif de cette expérimentation est de montrer qu'il existe une zone fréquentielle, au voisinage de la demi-fréquence de résonance ( $fr/2$ ), permettant d'effectuer une mesure correcte du paramètre B/A par la méthode comparative.

La cellule de mesure est la même que précédemment, et les caractéristiques des milieux ( $T = 23\text{ }^\circ\text{C}$ ), sont:

- Milieu de référence: eau courante:  $c_r = 1482\text{ m/s}$ ,  $\rho_r = 994\text{ kg/m}^3$ ,  $B/A_r = 5$ .
- Milieu analysé: Ethanol (95%):  $c_x = 1215\text{ m/s}$ ,  $\rho_x = 825\text{ kg/m}^3$ .  
Glycérol:  $c_x = 1911\text{ m/s}$ ,  $\rho_x = 1246\text{ kg/m}^3$ .

Les mesures qui suivent ont été réalisées à l'aide du module FFT.

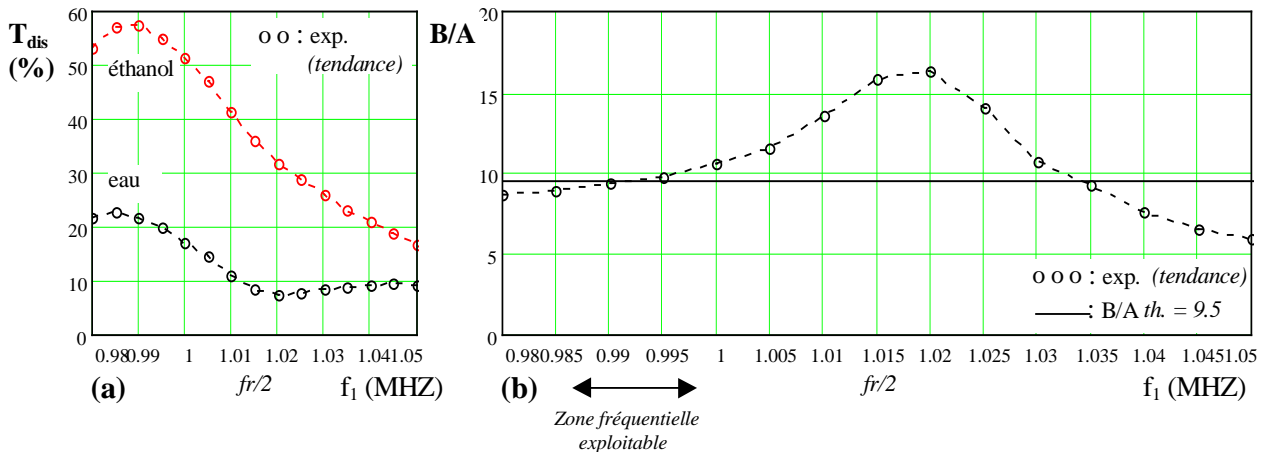
La **figure V.21** montrent deux séries de mesures effectuées dans la plage [ 0.98, 1.05 MHz] pour l'eau et l'éthanol.



**Fig V.21:** Composantes harmoniques du 1<sup>er</sup> écho détecté dans l'eau et l'éthanol, après augmentation du taux de distorsion par filtrage.

Les courbes de tendance sont ensuite utilisées pour déterminer le paramètre B/A à l'aide de l'expression (V.4) pour  $F\eta_{rx} = 1$ .

Le résultat obtenu, ainsi que le taux de distorsion associé, sont présentés **figure V.22**.



**Fig V.22:** Taux de distorsion et paramètre B/A obtenu pour l'éthanol avec l'eau comme milieu de référence.

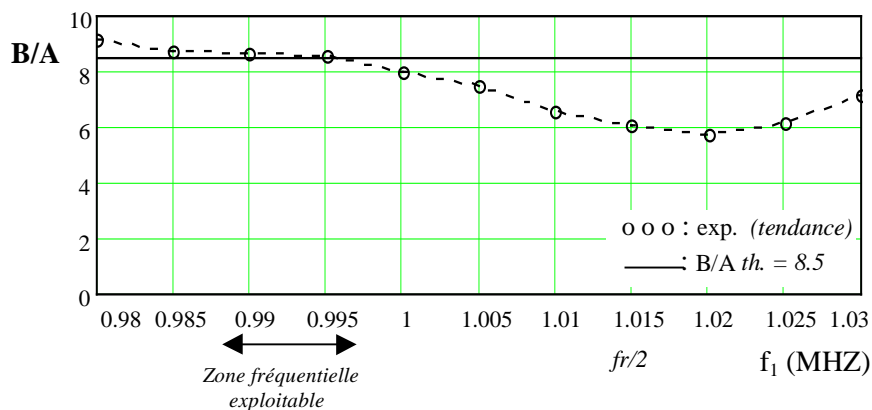
Avec ce dispositif le taux de distorsion est pratiquement doublé par rapport à celui obtenu lors des précédentes expérimentations, avec l'amplificateur seul (fig V.13.b).

Et on constate qu'il existe bien une zone fréquentielle au voisinage de 0.99 MHz permettant d'obtenir la valeur théorique estimée du paramètre B/A.

Ici l'erreur maximale sur la mesure du paramètre B/A se situe aux alentours de 1.02 MHz, alors que les prédictions théoriques la situaient à 1.004 MHz

Ce léger glissement est principalement dû aux écarts entre les valeurs réelles et calculées des éléments du filtre Passe-Haut.

La validation du dispositif serait incomplète si on ne vérifiait pas que cette "zone fréquentielle exploitable" est identique pour autre milieu. Des séries de mesures similaires ont donc été effectuées pour le glycérol dans la zone [0.98, 1.03 MHz], dont le résultat final est présenté *figure V.23*.



**Fig V.23:** Paramètre B/A obtenu pour le glycérol avec l'eau comme milieu de référence.

On constate que la "zone fréquentielle exploitable" est quasiment la même que précédemment, et on peut conclure que le dispositif permettra d'effectuer une mesure correcte du paramètre B/A en mode pulse-écho si on travaille entre 0.99 MHz et 0.995 MHz.

Dans ces expérimentations le parallélisme entre le transducteur et le réflecteur s'est avéré très bon, car en mode pulse-écho son influence est plus grande que pour la méthode comparative à deux transducteurs (chap. IV).

En effet, un défaut de parallélisme  $\theta$  engendrera un retour du faisceau avec un angle  $2.\theta$  par rapport à la normale du transducteur. Dans ce cas l'erreur apportée peut être estimée avec la formulation établie au chapitre IV (éq. IV.41) en considérant  $2.\theta$  au lieu de  $\theta$ . Notons qu'à cela s'ajoute une diminution de la pression moyenne reçue.

## V.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré la possibilité de mesurer le paramètre B/A en mode pulse-écho.

Les résultats obtenus pour quelques milieux comme l'éthanol et le glycérol montrent que la démarche utilisée reste valable si on respecte certaines conditions. Les valeurs des paramètres B/A mesurées par cette méthode concordent avec celles données dans la littérature.

Nous avons démontré que la sensibilité du transducteur émetteur-récepteur joue un rôle déterminant dans la précision des mesures.

La difficulté de cette méthode étant la détection du second harmonique, nous avons amélioré cette dernière en augmentant le taux de distorsion du signal, image de l'écho reçu. Cette opération a été réalisée en optimisant l'émission du fondamental, et en privilégiant la détection du second harmonique de l'écho reçu.

L'originalité de cette méthode est de n'utiliser qu'un seul transducteur pour l'émission, et la détection des composantes harmoniques de l'écho.

Et l'intérêt majeur de ce procédé est la possibilité de mesurer le paramètre B/A in vivo grâce à une sonde échographique par exemple.

Une autre méthode n'utilisant qu'un seul transducteur a déjà été exploitée [1] (cf. chap. III, § 3.3.b), mais basée sur l'extra atténuation du fondamental, elle nécessite une excitation importante et un traitement des données assez compliqué. Il existe d'autres méthodes de mesure en mode pulse-écho, mais elles utilisent pour la détection de l'écho, soit un 2<sup>ème</sup> transducteur annulaire entourant la source [2], soit un hydrophone placé au centre de la source [3].

L'obtention d'informations à partir des harmoniques réfléchis peut être utile dans de nombreuses situations en diagnostic médical. Dans le domaine de l'imagerie échographique ( mode B ) des résultats récents [4,5,6] ont démontré l'amélioration de la qualité des images obtenue en utilisant le second harmonique réfléchi dans le tissu biologique. Les images obtenues sont purement qualitative. La connaissance du paramètre B/A permet de réaliser une imagerie quantitative.

### **Bibliographie**

- 43.** LIU D. C., NIKOONAHAD M. "Pulse-echo measurement using variable amplitude excitation" Ultrasonic symposium, pp. 1047-1051, 1989.
- 44.** IWAKI AKIYAMA " Nonlinearity parameter B/A imaging by using ultrasound echo signal" Frontiers of Nonlinear Acoustics. M.F. HAMILTON and DT BLACKSTOCK Eds. 12<sup>th</sup> ISNA. Elsevier, London , pp 379-384, 1990.
- 45.** KOURTICHE D., CHITNALAH A., NADI M. "Nonlinéarités ultrasonores: approches théorique et expérimentale de la détermination du paramètre B/A en utilisant l'onde réfléchie" I.T.B.M. 20 (2), pp 117-124, 1999.
- 46.** KOURTICHE D., CHITNALAH A., NADI M. " Exploitation du second harmonique en imagerie par tomographie ultrasonore" Colloque interdisciplinaire en instrumentation, 18-19 novembre 1998, ENS Cachan, France.
- 47.** CHRISTOPHER T. " Finite amplitude distortion-based inhomogeneous pulse-echo ultrasonic imaging" IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. , Vol.44, N°1, pp 125-139, 1997.
- 48.** CHITNALAH A., KOURTICHE D., NADI M. " aspect des non-linéarités ultrasonores: Application à l'imagerie du second harmonique" Mediterranean Conference on Electronics and Automatic control, 17-19 septembre 1998, Marrakech, Maroc.



## **CONCLUSION GENERALE**



## CONCLUSION GENERALE

L'étude développée dans ce travail concerne les principes de mesure du paramètre de non linéarité ultrasonore  $B/A$ , et plus particulièrement l'analyse des méthodes comparatives appartenant à la famille des méthodes dites d'amplitude finie.

La mesure du paramètre  $B/A$  reposant sur l'exploitation de solutions analytiques reliant ce paramètre aux composantes harmoniques de l'onde détectée, nous avons consacré les deux premiers chapitres à l'établissement de telles solutions.

Après une présentation des bases théoriques de l'acoustique non linéaire, le chapitre 1 met en évidence la possibilité de déduire le paramètre  $B/A$  à partir de la détection du second harmonique de l'onde ultrasonore, mais cela seulement dans le cas d'une onde plane se propageant en milieu dissipatif ou non dissipatif.

Comme la production d'onde ultrasonore est réalisée dans la pratique par des sources de dimensions finies, nous avons consacré le chapitre 2 au développement des solutions analytiques, pour le fondamental et le second harmonique, intégrant les phénomènes de diffraction de la source. En pratique la détection de l'onde s'effectue avec un transducteur de mêmes dimensions que la source. Cela permet, en calculant la pression moyenne captée sur sa surface, de définir des fonctions de correction de la diffraction venant compléter les solutions analytiques simples, établies dans le cas de la propagation d'une onde plane, pour les adapter à une situation réelle.

Nous avons également montré dans cette partie que l'on pouvait formuler la pression moyenne du second harmonique d'une façon plus simple, mais tout aussi précise, que les solutions exploitées jusqu'à présent dans la littérature et vérifiées expérimentalement.

D'une façon générale, un des intérêts des solutions analytiques est de mettre en évidence la dépendance de la fonction avec les variables, ce qui permet d'imaginer des principes de mesure de ces dernières. Par exemple, la formulation de l'équation de propagation KZK et sa résolution numérique sont peu génératrices d'un principe de mesure.

Après une revue des différentes méthodes de mesure du paramètre  $B/A$ , présentée dans le chapitre 3, nous avons consacré le quatrième chapitre à l'analyse complète des deux procédures de mesure de la méthode comparative.

L'intérêt d'une méthode comparative est de s'affranchir de la calibration des transducteurs. Aussi avons nous défini une nouvelle fonction, appelée fonction de sensibilité du système de mesure, permettant de quantifier l'erreur apportée sur la détermination du paramètre  $B/A$  en l'absence d'étalonnage des transducteurs.

Si cette fonction est unitaire, la méthode comparative peut s'affranchir de la calibration des transducteurs.

Ainsi, pour chacune des procédures, l'étude de cette fonction de sensibilité permet de prévoir l'influence des grandeurs du système d'expérimentation sur la valeur mesurée du paramètre  $B/A$ . Ces grandeurs représentent la fréquence d'utilisation, la technologie des transducteurs, et les caractéristiques acoustiques du milieu de référence.

Des expérimentations ont parfaitement confirmé les prédictions théoriques quant aux choix des meilleures conditions d'exploitation du système de mesure. Cela nous a permis de mettre en évidence l'inefficacité d'une procédure de mesure, exploitée dans la littérature, si la technologie du transducteur source n'était pas adaptée.

L'exploitation de la procédure la plus adéquate pour la mesure du paramètre  $B/A$  de différents milieux a donné des valeurs en très bon accord avec celles trouvées dans la littérature.



En simplifiant la fonction de sensibilité, nous avons également établi des coefficients de correction simples pouvant être utilisés dans certains cas pour améliorer la précision de la mesure.

De plus, afin de simuler le comportement de la chaîne de mesure, nous avons élaboré un modèle théorique reliant les grandeurs électriques aux grandeurs acoustiques. Ce modèle ne tient pas compte des pertes diélectriques et mécaniques au sein du transducteur, ce qui justifie en partie les écarts entre les valeurs mesurées et simulées. Nous avons également discuté de l'influence d'un défaut de parallélisme entre les transducteurs de la cellule de mesure, et proposé une formulation montrant son influence sur la précision du système.

Sous cet aspect, la modélisation est d'une grande utilité, puisqu'elle permet de vérifier rapidement par simulation le comportement d'un système de mesure. La simulation est également d'une aide précieuse pour imaginer de nouveaux principes de mesure. Par exemple, en complétant le modèle par les équations adéquates, on pourrait peut-être dégager une méthode de mesure originale en régime d'ondes stationnaires.

Précisons également que le modèle proposé permet l'analyse d'un système composé de transducteurs avec plusieurs couches d'adaptation.

L'automatisation du processus de mesure que nous avons mis en oeuvre pour valider les résultats théoriques, pourrait très bien s'appliquer pour étudier les variations du paramètre B/A des milieux biologiques en fonction de grandeurs telles que la température ou le temps. Ce qui serait utile aux recherches effectuées dans ce domaine.

Dans le chapitre 5 nous avons montré théoriquement et expérimentalement qu'il était possible de mesurer le paramètre B/A en mode pulse-écho avec un unique transducteur servant à la fois de source et de détecteur. Cette méthode originale a été ensuite améliorée par un dispositif électrique permettant de faciliter la détection du second harmonique.

Un des intérêts de la technique en mode pulse-écho est de pouvoir mesurer *in vivo* le paramètre B/A des milieux biologiques dans des situations que ne permettaient pas les autres méthodes. Nous étendons actuellement le procédé au cas d'un transducteur focalisant, l'intérêt étant de pouvoir réduire la zone que l'on désire analyser.

Par ailleurs le procédé que nous avons décrit peut très bien s'appliquer en imagerie, où la détection du second harmonique permet d'améliorer le contraste des objets. La richesse d'informations apportée par ce second harmonique constitue sans nul doute une perspective prometteuse des travaux de notre équipe.

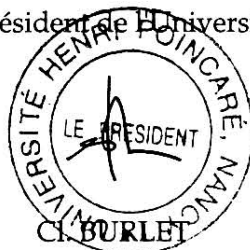
Monsieur ALLIES Laurent

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I  
en INSTRUMENTATION & MICRO-ELECTRONIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 13 mars 2000 n° 328

Le Président de l'Université





## RESUME

L'objectif de cette thèse est l'étude théorique et expérimentale des méthodes comparatives utilisées pour la mesure du paramètre de non linéarité ultrasonore B/A de milieux liquides et biologiques. Ces principes de mesure, appartenant à la famille des méthodes dites d'amplitude finie, reposent sur l'analyse harmonique de l'onde ultrasonore détectée après sa traversée dans le milieu à caractériser.

Dans une première partie, après une présentation des bases théoriques de l'acoustique non linéaire, nous développons les différentes solutions analytiques reliant le paramètre B/A aux composantes harmoniques de l'onde détectée, puis nous proposons de nouvelles solutions pour le second harmonique, plus simples et exploitables expérimentalement. Ces solutions intègrent les phénomènes de diffraction, d'absorption, et de non linéarité.

Après une revue des différentes méthodes de mesure décrites dans la littérature, nous consacrons le quatrième chapitre à l'analyse théorique et expérimentale des méthodes comparatives utilisant deux transducteurs, pour l'émission et la détection de l'onde ultrasonore.

L'originalité de ce travail repose sur la prise en compte des sensibilités des transducteurs dans les différentes expressions du paramètre B/A. Nous développons ainsi une fonction de sensibilité du système de mesure permettant de définir les situations expérimentales les plus adaptées à la méthode comparative. Le principal intérêt de cette méthode est de s'affranchir de la calibration des transducteurs, ce qui est envisageable si la fonction de sensibilité est voisine de l'unité. Des expérimentations valident ensuite les différents développements théoriques.

Dans le dernier chapitre nous proposons une méthode de mesure originale du paramètre B/A en mode pulse-écho n'utilisant qu'un seul transducteur en émission-réception. Ce procédé est ensuite complété par un dispositif de filtrage améliorant la détection du second harmonique de l'écho. Les expérimentations confirment les prédictions théoriques et montrent la possibilité d'exploiter ce système en imagerie médicale quantitative, par la connaissance supplémentaire du paramètre B/A du milieu biologique analysé.

**MOTS – CLES:** Acoustique non linéaire, Solutions analytiques, Mesure du paramètre B/A, Méthode comparative, Mode pulse-écho, Transducteurs, Imagerie.

## SUMMARY

The objective of this thesis is the theoretical and experimental study comparative methods used for measurement of the ultrasonic parameter of nonlinearity B/A of liquid media and biological. These principles of measurement, pertaining to the family known as finite amplitude methods, rest on the harmonic analysis of the ultrasonic wave detected after its crossing in the medium to characterize. In a first part, after a presentation of the theoretical bases of nonlinear acoustics, we develop the various analytical solutions connecting parameter B/A to the harmonic components of the detected wave, then we propose new solutions for the second harmonic, simpler and exploitable in experiments. These solutions integrate the phenomena of diffraction, absorption, and nonlinearity.

After a review of the various methods of measurement described in the literature, we devote the fourth chapter to the theoretical and experimental analysis of the comparative methods using two transducers, for the emission and the detection of the ultrasonic wave. The originality of this work rests on the taking into account of the sensitivities of the transducers in the various expressions of parameter B/A. We thus develop a function of sensitivity of the system of measurement allowing to define the experimental situations most adapted to the comparative method. The principal interest of this method is to free itself from the calibration of the transducers, which is possible if the function of sensitivity is close to the unit. Experiments validate then the various theoretical developments.

In the last chapter we propose a method of original measurement of parameter B/A in pulse-echo mode using one transducer in emission-reception. This process is then supplemented by a device of filtering improving detection of the second harmonic of the echo. The experiments confirm the theoretical predictions and show the possibility of exploiting this system in quantitative medical imagery, by the additional knowledge of parameter B/A of the analyzed biological environment.

**KEYWORDS:** Nonlinear acoustics, Analytical solutions, Measurement of the parameter B/A, Comparative method, Pulse-echo mode, Transducers, Imagery.