



Processus stochastiques : application à l'équation de Navier-Stokes ; simulation de la loi de diffusions irrégulières ; vitesse de convergence du schéma d'Euler pour des fonctionnelles

Jean-Sébastien Giet

► To cite this version:

Jean-Sébastien Giet. Processus stochastiques : application à l'équation de Navier-Stokes ; simulation de la loi de diffusions irrégulières ; vitesse de convergence du schéma d'Euler pour des fonctionnelles. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2000. Français. NNT : 2000NAN10109 . tel-01747536

HAL Id: tel-01747536

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747536>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



FACULTÉ DES SCIENCES

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par Jean-Sébastien GIET

**Processus stochastiques :
Application à l'équation de Navier-Stokes ;
Simulation de la loi de diffusions irrégulières ;
Vitesse de convergence du schéma
d'Euler pour des fonctionnelles**

soutenance publique prévue le 30 novembre 2000

Membres du jury :

Président :	M. Charles SUQUET	Professeur, Université des Sciences et Technologies, Lille I
Rapporteurs :	Mme Sylvie MÉLÉARD	Professeur, Université de Nanterre, Paris X
	M. Philip PROTTER	Professeur, Université de Cornell, États-Unis
Examineurs :	M. Bernard ROYNETTE	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I (Dir. de thèse)
	M. Denis TALAY	Directeur de Recherche, I.N.R.I.A, Sophia-Antipolis
	M. Pierre VALLOIS	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

Remerciements

Ces trois années de travail m'ont permis d'apprécier l'aide scientifique et humaine de nombreuses personnes ; qu'elles en soient ici remerciées sincèrement.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse Bernard ROYNETTE. Sa disponibilité tout au long de ces années a instauré une ambiance propice au travail en collaboration. Je le remercie pour la confiance qu'il a su m'accorder en me proposant des sujets variés et passionnants. Enfin, il a su m'encourager par ses conseils et son attitude positive.

J'adresse mes sincères remerciements à Sylvie MÉLÉARD et Philip PROTTER pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Qu'ils sachent que je mesure la charge importante de travail qu'ils ont accordée à mon mémoire.

Je remercie Charles SUQUET qui me fait l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie Denis TALAY pour les conseils et l'intérêt qu'il a montré pour ce travail. Je tiens à remercier Pierre VALLOIS pour ses conseils et le temps qu'il m'a accordé tout au long de mes recherches au sein de l'équipe de probabilités de l'Institut Élie Cartan. Je les remercie tous les deux pour l'honneur qu'ils me font en participant à ce jury.

Je me dois de souligner l'aide matérielle que m'ont apportée à différents niveaux, l'INRIA, le CNRS, et bien sûr l'Institut Élie Cartan et l'Université Henri Poincaré. J'adresse mes remerciements à l'ensemble des secrétaires de l'Institut pour leur amabilité et leur disponibilité.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers l'ensemble de l'équipe de probabilités et plus particulièrement à Sophie MÉZIÈRES et Étienne TANRÉ avec lesquels j'ai toujours eu grand plaisir à travailler, ainsi qu'à Mădălina DEACONU pour sa gentillesse et ses conseils amicaux.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude à mes parents et à toute ma famille pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes études. Je suis heureux de pouvoir remercier Alexandrine pour ses tendres attentions et son soutien quotidien.

*À mes grands-parents,
à mes parents,
à Alexandrine et Julien.*

Table des matières

Introduction	1
Partie I	
Un processus de branchement non linéaire associé à l'équation de Navier-Stokes dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$	7
1 Introduction	10
1.1 L'équation de Navier-Stokes	10
1.2 Description de l'étude	10
2 Liens entre le tourbillon et l'équation de Navier-Stokes	12
2.1 Relation entre vitesse et tourbillon à temps fixé	12
2.2 Les équations du tourbillon et de Navier-Stokes	14
3 Représentation probabiliste du tourbillon	17
3.1 Un premier processus de Markov à valeurs dans le domaine borné . . .	17
3.2 Le processus de Markov dirigeant le processus de branchement	20
3.3 Le générateur infinitésimal du processus de Markov	21
3.4 Représentation du tourbillon impliquant le processus de Markov	26
3.5 Un système d'équations stochastiques	33
4 Le tourbillon comme densité d'un processus de branchement	35
4.1 Dualité	35
4.2 Processus de branchement associé au tourbillon	43
4.3 Algorithme particulière associé à l'équation de Navier-Stokes	48

Bibliographie	51
----------------------	-----------

Partie II

Schéma de simulation de la loi de certaines E.D.S. bidimensionnelles présentant localement des coefficients de très grande amplitude	53
---	-----------

5 Introduction	56
5.1 Présentation du problème	56
5.2 Motivation	56
5.3 Résultats	57
5.4 Plan de l'étude	57

6 Résultats	59
6.1 Notations et hypothèses	59
6.2 Énoncé du théorème	60
6.3 Simplification de l'E.D.S. initiale	60
6.4 Changement d'échelle dans l'E.D.S. simplifiée	75
6.5 Description de la loi de Y_T	76

Bibliographie	79
----------------------	-----------

Partie III

Approximation de l'espérance de fonctionnelles de la trajectoire d'une diffusion par le schéma d'Euler	81
---	-----------

7 Introduction	84
7.1 Quelques exemples de fonctionnelles intéressantes	84
7.1.1 L'équation de la chaleur	84
7.1.2 Le problème de Cauchy avec potentiel et Lagrangien	85
7.1.3 Le problème de Dirichlet	86
7.2 Calcul de l'espérance des fonctionnelles	86
7.2.1 Principe	86

7.2.2	Études réalisées dans la littérature	87
7.2.3	Fonctionnelles étudiées	87
7.2.4	Résultats	87
7.2.5	Plan de l'étude	89
8	Notations et hypothèses	90
8.1	Le processus de diffusion	90
8.2	La fonctionnelle de la trajectoire	92
9	Développement en δ de l'erreur pour des fonctionnelles à k points	94
9.1	Résultat principal	94
9.2	Dérivation de l'espérance d'une fonction du processus $\bar{X}_r^\delta(.)$	95
9.3	Limite en δ	100
9.4	Expression du coefficient devant δ	105
10	Majoration en δ et k de l'erreur pour l'intégrale de la trajectoire	108
10.1	Majorations des dérivées du noyau de la diffusion	109
10.2	Les moments d'ordre l	109
10.3	Convergence des sommes de Riemann	112
10.4	Convergence du schéma d'Euler pour le moment d'ordre l	118
10.5	Démonstration dans le cas du moment d'ordre un	118
10.6	Démonstration dans le cas du moment d'ordre deux	121
10.7	Démonstration dans le cas général	124
10.8	Les moments exponentiels	128
11	Majoration en $\delta = \frac{1}{k}$ de l'erreur pour l'intégrale de la trajectoire	131
11.1	Les moments d'ordre l	131
11.2	Les moments exponentiels	139
11.3	Amélioration de la majoration de la vitesse de convergence	140
11.3.1	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck	140
11.3.2	Simulations numériques sur une diffusion	142
12	Applications	144
12.1	Problème de Cauchy avec potentiel et donnée initiale nuls	144
12.2	Problème de Cauchy avec Lagrangien nul et donnée initiale constante .	145
12.3	Problème de Cauchy avec Lagrangien nul et donnée initiale non constante	145

12.4 Problème de Cauchy dans le cas général	146
13 Conclusion	151
13.1 Développement de l'erreur	151
13.2 Vitesse de convergence de l'algorithme	152
13.3 Affaiblissement des hypothèses	152
Bibliographie	153

Introduction

Introduction

La comparaison entre la quantité importante de travaux dédiés à l'étude de l'analyse classique et l'ensemble des résultats sur les probabilités laisse apparaître un grand déséquilibre. Deux éléments d'explication, parmi d'autres, permettent de mieux comprendre cet état de fait : l'évolution assez tardive des avancées qui ont conduit à la définition du mouvement brownien et la façon d'aborder la résolution des problèmes physiques.

C'est en effet une période de plus de soixante-dix ans qui sépare l'observation des trajectoires erratiques de particules de pollen par Robert Brown [BROWN, (1828)], des travaux d'Albert Einstein [EINSTEIN, (1905)]. Le physicien a démontré que l'équation que suit la densité des particules de Pollen est l'équation de la chaleur. La fonction

$(t, x) \mapsto u(t, x) = \frac{\exp - \frac{x^2}{2\sigma t}}{\sqrt{2\pi\sigma t}}$ en est une solution connue depuis longtemps ; mais Einstein établit alors le premier lien entre le mouvement erratique des grains de pollen observés par Brown et cette fonction qui apparaîtra plus tard comme la densité de transition du mouvement brownien. La découverte d'Einstein reste cependant dans l'optique générale des physiciens et mathématiciens qui prévaut jusqu'au milieu du vingtième siècle. Les scientifiques utilisent en effet des objets mathématiques qui mettent en œuvre des quantités continues correspondant le plus souvent à des données physiques macroscopiques, pour obtenir des résultats concernant des phénomènes physiques discrets. Ainsi, l'agitation des atomes dans une barre chauffée à une extrémité provoque au niveau macroscopique l'élévation de la température ; les calculs portent sur la fonction température, ils n'interviennent pas au niveau des atomes.

Cette dernière constatation est révélatrice de l'approche privilégiée dans l'étude d'un problème scientifique. La démarche classique devant un problème de la physique se compose de trois étapes : le scientifique définit une ou plusieurs grandeurs macroscopiques, il applique ensuite des lois théoriques de la physique au niveau microscopique, puis il analyse d'un point de vue mathématique les équations qui en découlent. Avant qu'un cadre rigoureux n'ait été établi pour les phénomènes aléatoires, l'infiniment petit au comportement erratique prononcé ne semble pas pouvoir être utilisé dans la partie mathématique de la résolution du problème.

La modélisation mathématique dès l'infiniment petit, devient possible à partir du développement des probabilités modernes et des travaux fondateurs de Kolmogorov pour le cadre général [KOLMOGOROV, (1933)] et de Lévy pour le mouvement brownien [LÉVY, (1948)] ; le mouvement des particules de pollen par exemple est décrit par des lois de probabilité qui dépassent l'apparente irrégularité de l'aléa. Les propriétés d'une particule

idéale font écho à celles qui définissent le mouvement brownien : les trajectoires dans les deux cas sont continues ; la dynamique de la particule semble indépendante de sa position, ce qui justifie en partie la propriété fondamentale d'indépendance des accroissements du brownien sur des périodes ne partageant aucun instant commun ; enfin, le théorème de la limite centrale, conjugué au très grand nombre de chocs que subit chaque particule, impose à la loi du mouvement brownien d'être gaussienne. Pour se convaincre davantage de cette similitude entre mouvement brownien et particule, on peut considérer la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$, $u(0,x) = \delta(x-y)$, égale à $u^{(y)}(t,x) = \frac{\exp -\frac{(x-y)^2}{2t}}{\sqrt{2\pi t}}$ et représentant la densité à l'instant t de la particule si cette seule particule est en y au temps initial ; elle est par ailleurs égale à la densité de probabilité qu'un mouvement brownien issu de y se retrouve en x au temps t .

Cette modélisation stochastique de l'infiniment petit ne s'arrête pas à la description de l'aléa d'une particule, elle permet de tisser un lien vers des quantités non aléatoires décrivant l'aspect macroscopique du problème. À la moyenne des particules formant la densité de présence des particules, la loi des grands nombres permet d'envisager d'associer l'espérance d'une fonction du processus aléatoire brownien. Plus précisément, au lieu qu'une seule particule soit placée en la position y à l'instant zéro, de très nombreuses particules sont supposées se trouver réparties dans le domaine suivant une densité représentée par une fonction u_0 ; cette dernière peut se voir comme une régularisation de la somme des masses de Dirac aux points où se trouvent les particules ; la densité à l'instant t deviendra alors $\int u_0(x) u^{(y)}(t,x) dx$; cette fonction s'écrit à l'aide d'une espérance impliquant le brownien : $\mathbb{E}\{u_0(B_t^y)\}$. Cette transition entre l'infiniment petit des atomes modélisé grâce aux probabilités et la quantité macroscopique de la chaleur qui représentent deux aspects d'une même réalité physique, dépasse le cadre de l'équation de la chaleur.

Des hypothèses plus générales portant sur la loi du processus aléatoire étendent le champ d'applications à la résolution d'autres problèmes classiques. Cette généralisation se paie par une altération de la symétrie du brownien qui modélise une particule au déplacement isotrope.

Le remplacement du Laplacien par l'opérateur différentiel $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}$ conduit à la définition d'un processus de *diffusion* qui permet d'étendre entre autres les résultats portant sur l'équation de la chaleur. Ainsi parmi les équations aux dérivées partielles (E.D.P.), le problème de Cauchy $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u$, $u(0,\cdot) = f(\cdot)$ possède une solution qui se représente à partir d'une diffusion, $u(t,x) = \mathbb{E}\{f(X_t^x)\}$, tout comme c'est le cas pour le problème de Dirichlet $\mathcal{L}u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = f$ avec $u(x) = \mathbb{E}\{f(X_\tau^x)\}$ où τ représente le temps d'atteinte de la frontière $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω par le processus de diffusion X^x .

Il peut également arriver que l'emploi des processus aléatoires sortent du cadre classique

de l'analyse pour proposer de nouvelles applications : le prix de couverture d'une option financière en est un exemple ; ce prix se définit à partir de l'espérance d'une fonction d'un processus stochastique.

D'une façon générale, la prise en compte des phénomènes aléatoires autorise de nouvelles modélisations d'un bon nombre de phénomènes dans pratiquement tous les domaines des sciences. Ces modélisations par des phénomènes aléatoires permettent d'envisager la résolution numérique des problèmes pour peu que l'on contrôle les approximations imposées et les variances représentant l'écart à la moyenne, solution du problème considéré.

La première partie de ce mémoire aborde la description de processus stochastiques pouvant jouer un rôle dans la résolution d'une équation fondamentale de la mécanique des fluides : l'équation de Navier-Stokes. Une représentation du tourbillon associé à la vitesse solution de cette équation est décrite sous la forme de la densité d'un processus stochastique. Prolongeant le lien heuristique qui existe entre le brownien et une particule idéale, on peut interpréter alors le tourbillon comme la moyenne d'un nuage de particules aléatoires dont les déplacements, les créations et les destructions sont conduites suivant le processus stochastique.

Les deuxième et troisième parties regroupent des études portant sur les simulations des processus de diffusions, solutions d'équations différentielles stochastiques (E.D.S.).

La partie deux propose un algorithme permettant d'adapter la simulation du schéma d'Euler à des E.D.S. bidimensionnelles présentant des coefficients de dérive et de diffusion de très grande amplitude au voisinage d'un nombre fini de points.

Dans la troisième partie, est considérée l'espérance de fonctions de l'intégrale de la trajectoire de $f(X_t)$ où X est une diffusion. Ce type de quantité intervient dans la représentation des solutions d'E.D.P. et la mise en œuvre de calculs sur ces espérances permet donc de trouver des approximations des solutions de ces E.D.P. Les diffusions que l'on peut construire comme solutions d'E.D.S. présentent l'inconvénient de ne pas avoir des trajectoires pouvant être simulées directement. Un recours à des processus stochastiques pouvant être simulés, obtenus par le schéma d'Euler par exemple, permet d'obtenir des algorithmes et d'approcher les espérances considérées. L'étude présentée dans la dernière partie de ce mémoire porte sur une majoration de l'erreur commise en remplaçant la diffusion intervenant dans les espérances par le processus obtenu grâce au schéma d'Euler.

Bibliographie

BROWN R., (1828), *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, Philos. Mag. Ann. of Philos. New ser. 4, p. 161-178.

EINSTEIN A., (1926), *Investigations on the theory of the Brownian movement*, London: Methuen.

FREIDLIN M., (1985), *Functional integration and partial differential equations*, Princeton university press.

HIDA T., (1980), *Brownian motion*, Applications of mathematics, Springer-Verlag.

KOLMOGOROV A. N., (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*, Ergeb. Math. 2, N. 3 [English translation: *Foundations of probability theory*, Chelsea Publishing Co., New York, (1950)].

LÉVY P., (1948), *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris.

Première partie

Un processus de branchement non
linéaire associé à l'équation de
Navier-Stokes dans un domaine borné
de $\mathbb{R}^3$

Résumé : On considère l'équation tridimensionnelle de Navier-Stokes dans un domaine Ω régulier et borné. La solution de cette équation d'évolution modélise la vitesse $\mathbf{u}$ d'un fluide visqueux et incompressible dans $\overline{\Omega}$, avec une vitesse nulle au bord.

Cette étude propose une représentation probabiliste du tourbillon $\boldsymbol{\omega}$, défini par $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$. Plus précisément, une équation différentielle stochastique non linéaire définit un processus de Markov réfléchi à la frontière de Ω . À partir de ce processus stochastique, est construit un processus de branchement $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ dont la densité est égale au tourbillon. En particulier, les branchements intervenant à la frontière et à l'intérieur de $\overline{\Omega}$ correspondent à des créations ou des annihilations de masses de tourbillon.

Classification AMS : 35K05, 76D05, 60G40, 60G44, 60G46, 60H30, 60J25, 60J55, 60J57, 60J60, 60J65, 60J80.

Mots-clés : Équation de Navier-Stokes 3d, processus de branchement, représentation probabiliste.

1

Introduction

1.1 L'équation de Navier-Stokes

Soit Ω un ouvert borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière est régulière. L'équation de Navier-Stokes consiste en un système de plusieurs équations dont les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p , définies sur $[0, \infty[\times \overline{\Omega}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

$$(NS) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) & (x \in \overline{\Omega}) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(t, x) = 0 & (t \geq 0) \quad (x \in \partial\Omega). \end{cases}$$

Le coefficient ν placé devant le Laplacien est un réel positif représentant la viscosité du fluide.

1.2 Description de l'étude

On ne s'intéresse pas ici à l'existence ou à l'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes. On se place sous des hypothèses suffisantes de régularité concernant le domaine et la vitesse initiale $\mathbf{u}_0$ pour garantir l'existence d'une unique solution jusqu'à un temps $T > 0$; ce dernier point est démontré dans [ITO, (1961)].

On considère donc la solution $(\mathbf{u}, p)$, définie sur $[0, T] \times \overline{\Omega}$, de l'équation de Navier-Stokes. Notre but est de décrire cette solution en termes d'objets probabilistes. Cette approche est similaire à celle de [BENACHOUR, ROYNETTE, VALLOIS, (1998)] où l'étude porte sur l'équation de Navier-Stokes en dimension deux.

Dans les deux cas des dimensions deux et trois, c'est au travers de la solution d'une équation distincte de (NS) , que sont introduits les processus stochastiques. Cette équation

(1.1) est celle que suit le tourbillon $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$.

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ \omega(0, x) = \omega_0(x) \quad (x \in \bar{\Omega}) \\ \text{div } \omega = 0. \end{cases}$$

Le tourbillon ω est une fonction vectorielle de dimension trois et non une fonction scalaire comme c'est le cas pour l'équation bidimensionnelle de Navier-Stokes. Il faut comprendre l'équation (1.1) comme un système de trois équations d'évolution pour chaque composante du tourbillon ω .

$$(1.2) \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \nu \Delta \omega_k - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_k + \nabla u_k \cdot \omega \quad \text{pour } k = 1, 2, 3.$$

Ces trois équations sont de la forme de celles intervenant dans un problème de Cauchy, mais elles présentent plusieurs non linéarités.

En effet, le coefficient devant ω_k ou devant son gradient $\nabla \omega_k$, dépend des trois composantes du tourbillon. De plus, cette dépendance n'est pas directement définie à partir du tourbillon, mais à partir de la vitesse $\mathbf{u}$. Et cette vitesse, à un point donné du domaine, ne peut être obtenue qu'à partir de l'ensemble des valeurs du tourbillon sur Ω : l'opérateur qui permet de passer de la vitesse au tourbillon est un opérateur différentiel local, c'est le rotationnel; inversement, l'opérateur qui transforme le tourbillon en la vitesse est un opérateur intégral différentiel, c'est l'opérateur $\mathbf{Q}$ décrit dans la section suivante.

La formule de Feynman-Kac [KARATZAS, SHREVE, (1994)] permet d'obtenir une représentation probabiliste de la solution d'un problème de Cauchy. Elle établit le lien entre la solution et un processus de Markov dont le générateur infinitésimal reprend les coefficients du problème de Cauchy.

Nous allons construire un tel processus de Markov qui tient compte des deux non linéarités (pour ω_k et son gradient $\nabla \omega_k$) apparaissant à l'intérieur de Ω . Il doit également rester dans $\bar{\Omega}$ et pour cela il est construit comme un processus réfléchi à la frontière de Ω . Cette réflexion se traduit par une troisième non linéarité concentrée cette fois au bord de Ω .

L'espace d'états du processus de Markov est en fait constitué de trois copies de l'ensemble $\bar{\Omega}$, chacune d'elles correspondant à l'une des trois composantes du tourbillon. On construit ensuite un processus de Markov dual du premier pour envisager les composantes ω_k comme des densités. Cependant, les non linéarités empêchent d'obtenir les composantes comme densités. Il reste à les prendre en compte dans un processus de branchement construit à partir du dual du processus de Markov.

Ce processus de branchement s'interprète, de manière heuristique, comme un système de particules évoluant dans trois strates $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3$. Chaque particule peut, à chaque instant où elle se trouve au bord de Ω , apparaître ou disparaître. C'est le même phénomène que pour l'équation de Navier-Stokes en dimension deux. Mais ici, chaque particule est également susceptible d'apparaître ou disparaître, ou de changer de strate, à l'intérieur de $\bar{\Omega}$.

2

Liens entre le tourbillon et l'équation de Navier-Stokes

Le système d'équations (NS) a pour inconnues la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p . Si l'on procède formellement au changement de variable $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ dans la première équation du système (NS), on obtient une équation dans laquelle la pression a disparu. Il reste cependant dans les coefficients de cette équation la vitesse qui ne s'exprime pas simplement en fonction du tourbillon $\boldsymbol{\omega}$. Cette partie précise comment passer d'un système (NS) où les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p à un système (T) où la seule inconnue est le tourbillon ($\boldsymbol{\omega}$).

Remarque :

Ce changement d'inconnues est moins avantageux en dimension trois qu'en dimension deux. En effet, dans ce dernier cas, on passe d'un couple d'inconnues (la vitesse et la pression) de dimension trois à une inconnue (le tourbillon) de dimension un. Pour ce qui concerne le passage de l'équation de Navier-Stokes en dimension trois (NS) à l'équation au tourbillon (T), on réduit la dimension des solutions de quatre (la vitesse est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, la pression un scalaire) à trois (le tourbillon est un vecteur de $\mathbb{R}^3$).

De plus, comme c'est le cas en dimension deux, l'équation du tourbillon (T) n'est pas équivalente à l'équation de Navier-Stokes (NS) puisque la condition de nullité de la vitesse au bord du domaine n'est pas assurée. Seule la composante normale de la vitesse sera supposée nulle.

2.1 Relation entre vitesse et tourbillon à temps fixé

La vitesse apparaît dans l'équation du tourbillon (1.1). Pour la faire disparaître, il suffit de l'exprimer en fonction du tourbillon.

Lorsque la vitesse est connue à un instant donné, il n'est pas difficile de calculer le tourbillon en procédant à quelques dérivations : $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$.

Par contre, obtenir la vitesse à partir du tourbillon présente davantage de difficultés. nous allons définir l'opérateur, noté $\mathbf{Q}$ dans la suite, dont l'argument est le tourbillon et qui donne la vitesse correspondant à ce tourbillon.

Nous commençons par introduire une grandeur qui permettra de décrire l'opérateur $\mathbf{Q}$, la fonction de courant ψ , liée à la vitesse $\mathbf{u}$ de la façon suivante :

Lemme 2.1. *Soit $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction régulière satisfaisant :*

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0 \end{cases} \quad (x \in \partial\Omega).$$

Alors, il existe une application $\psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \psi \\ \operatorname{div} \psi = 0 \\ \psi(x) \wedge \mathbf{n}(x) = 0 \end{cases} \quad (x \in \partial\Omega).$$

Démonstration du lemme 2.1.

Sous l'hypothèse de simple connexité de Ω , il est prouvé ([DAUTRAY, LIONS, (1985)] vol. 2, page 260) qu'il existe une application $\psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \psi \\ \psi(x) \wedge \mathbf{n}(x) = 0 \end{cases} \quad (x \in \partial\Omega).$$

Soit $h : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \Delta h = -\operatorname{div} \psi \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (x \in \partial\Omega).$$

On définit la fonction $\tilde{\psi}$ en posant : $\tilde{\psi} = \psi + \nabla h$.

Cette fonction vérifie le système (2.3) et la condition supplémentaire du système (2.2) : $\operatorname{div} \tilde{\psi} = \operatorname{div} \psi + \Delta h = 0$. $\square$

Il est maintenant possible d'obtenir le tourbillon ω à partir de la fonction de courant ψ .

Lemme 2.2. *Soit $\omega : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction régulière ; on considère le problème suivant :*

$$(2.5) \quad \begin{cases} \Delta \psi = -\omega \\ \psi(x) \wedge \mathbf{n}(x) = 0 \\ \operatorname{div} \psi(x) = 0 \end{cases} \quad (x \in \partial\Omega).$$

Alors,

- i) ce problème admet une unique solution,*
- ii) il y a équivalence entre $\operatorname{div} \omega = 0$ et $\operatorname{div} \psi = 0$ dans le domaine Ω .*

Démonstration du lemme 2.2.

i) L'existence et l'unicité de la solution pour le problème (2.5) sont démontrées dans la seconde partie de [LADWIG, (1981)].

ii) Supposons que $\operatorname{div} \omega = 0$; il s'ensuit que la fonction $\operatorname{div} \psi$ vérifie l'équation de Dirichlet $\Delta(\operatorname{div} \psi) = 0$ avec la condition au bord $\operatorname{div} \psi(x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$, et par conséquent la

fonction $\operatorname{div} \psi$ s'annule sur l'ensemble de $\overline{\Omega}$.

Réciproquement, si $\operatorname{div} \psi = 0$ alors $\operatorname{div} \omega = -\Delta \operatorname{div} \psi = 0$. $\square$

Définition :

Si ψ est la solution du système (2.5) correspondant à la fonction ω , alors l'opérateur $\mathbf{Q}$ est défini par :

$$\mathbf{Q}\omega = \operatorname{rot} \psi.$$

Remarque :

L'opérateur $\mathbf{Q}$ dépend exclusivement du domaine Ω .

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une nouvelle version (T) de l'équation au tourbillon (1.1) débarrassée de la vitesse $\mathbf{u}$.

2.2 Les équations du tourbillon et de Navier-Stokes

Théorème 2.3. *Il y a équivalence entre les deux systèmes d'équations suivants :*

$$(NS') \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x) \quad (x \in \overline{\Omega}) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (x \in \partial\Omega), \end{cases}$$

$$(T) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega - (\mathbf{Q}\omega \cdot \nabla) \omega + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{Q}\omega \\ \omega(0, x) = \omega_0(x) \quad (x \in \overline{\Omega}) \\ \operatorname{div} \omega = 0. \end{cases}$$

Ainsi, si $\mathbf{u}$ est une solution de (NS') , alors $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ est une solution de (T) dans lequel $\omega_0 = \operatorname{rot} \mathbf{u}_0$;

et inversement, si ω est une solution de (T) , alors $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\omega$ est une solution de (NS') avec $\mathbf{u}_0 = \mathbf{Q}\omega_0$.

Remarque :

Le système (T) n'est pas équivalent au système (NS) : la vitesse tangentielle peut être non nulle. En particulier, il n'y a plus unicité de la solution pour le système (T) .

Démonstration du théorème 2.3.

i) Soit $\mathbf{u}$ une solution de (NS') , on définit : $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$.

La seconde équation du système (NS') implique que la seconde du système (T) est vérifiée. Par le lemme 2.1, il existe ψ vérifiant (2.2). Donc $\omega = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = -\Delta \psi$; ψ est solution du problème (2.5) et par conséquent, la relation $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\omega$ est établie.

Si l'on applique l'opérateur $\mathbf{rot}$ à la première équation de (NS') , on obtient la première équation de (T) ;

on utilise la formule $\mathbf{rot}((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{rot} \mathbf{u}) - ((\mathbf{rot} \mathbf{u}) \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{rot} \mathbf{u})$.

La dernière équation de (T) est une conséquence de la seconde assertion du lemme 2.2 et de $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$.

ii) Réciproquement, soit $\boldsymbol{\omega}$ une solution de (T) .

Le système (2.5) admet une unique solution $\boldsymbol{\psi}$; on définit $\mathbf{u} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}$; cette définition implique que les trois dernières équations de (NS') sont satisfaites.

La seconde assertion du lemme 2.2 et la dernière équation de (T) impliquent que $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$ dans Ω .

Il s'ensuit : $\mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{rot} \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} = \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} - \Delta \boldsymbol{\psi} = -\Delta \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega}$.

On applique l'opérateur rotationnel à chacun des deux membres de la première équation de (NS') , et on remplace $\mathbf{rot} \mathbf{u}$ par $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega} - \nu \Delta \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Ainsi, il existe une fonction scalaire p telle que $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$; la première équation de (NS') est satisfaite et le théorème est démontré. $\square$

Définitions :

i) L'opérateur $\mathcal{L}$ est défini sur l'espace des fonctions de $[0, T] \times \bar{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^3$ par :

$$(2.6) \quad (\mathcal{L} \boldsymbol{\omega})_k = \nu \Delta \omega_k - \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \omega_k + \nabla (Q \boldsymbol{\omega})_k \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (k \in \{1, 2, 3\}).$$

ii) Soit $\mathbf{u}$ une solution de l'équation (NS') ; l'opérateur $\mathcal{L}^{\mathbf{u}}$ est défini sur l'espace des fonctions de $[0, T] \times \bar{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^3$ par :

$$(2.7) \quad (\mathcal{L}^{\mathbf{u}} \mathbf{f})_k = \nu \Delta f_k - \mathbf{u} \cdot \nabla f_k + \nabla u_k \cdot \mathbf{f} \quad (k \in \{1, 2, 3\}).$$

Ainsi, le système de trois équations scalaires du tourbillon peut s'écrire :

$$(T_k) \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial t} = (\mathcal{L} \boldsymbol{\omega})_k \quad \text{pour } k = 1, 2, 3.$$

et le système (1.2) :

$$(2.8) \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial t} = (\mathcal{L}^{\mathbf{u}} \boldsymbol{\omega})_k \quad \text{pour } k = 1, 2, 3.$$

Pour représenter la solution de l'équation (T_k) , on utilise l'inverse des composantes de $\boldsymbol{\omega}$ (voir la définition (3.41) de $\tilde{M}^{t, \boldsymbol{\omega}}$). Pour éviter une division par zéro, on introduit un vecteur $\mathbf{C} = (c, c, c)^t$ tel que les composantes de la fonction $\boldsymbol{\omega}^c = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}$ restent supérieures à un nombre $\alpha > 0$ sur l'intervalle $[0, T]$.

Contrairement au cas de la dimension deux, la fonction ω^c ne vérifie pas l'équation (T_k) , mais vérifie une équation assez proche :

$$(T'_k) \quad \frac{\partial \omega_k^c}{\partial t} = \nu \Delta \omega_k^c - (\mathbf{Q}\omega) \cdot \nabla \omega_k^c + \nabla(Q\omega)_k \cdot \omega^c - C \cdot \nabla(Q\omega)_k,$$

et en gardant la vitesse $\mathbf{u}$ parmi les inconnues, l'équation s'écrit :

$$(2.9) \quad \frac{\partial \omega_k^c}{\partial t} = (\mathcal{L}^u \omega^c)_k - \mathbf{C} \cdot \nabla u_k.$$

Définition :

On note pour condenser les écritures, τ le cycle défini sur $\{1,2,3\}$ par les égalités suivantes : $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 1$.

Remarque :

Les équations (2.8) et (2.9) présentent différents aspects de non linéarité. Par exemple, les coefficients $\mathbf{Q}\omega$ du terme de dérive dépendent du tourbillon ω . C'est aussi le cas en dimension deux, mais ici il apparaît en plus des termes de degré zéro : $\nabla u_k \cdot \omega$. Ces termes s'écrivent :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \omega_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} \omega_{\tau(k)} + \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} \omega_{\tau^{-1}(k)}.$$

Les projections de l'égalité vectorielle $\omega = \mathbf{rot} u$ peuvent s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(2.10) \quad \omega_{\tau^{-1}(k)} = \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}},$$

$$(2.11) \quad \omega_{\tau(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} - \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k}.$$

Et si l'on écrit le terme de degré zéro grâce à ces égalités, la non linéarité s'exprime alors comme suit :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \omega_k + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \omega_{\tau(k)} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \omega_{\tau^{-1}(k)}.$$

3

Représentation probabiliste du tourbillon

Cette partie est consacrée à la construction d'une représentation probabiliste des composantes ω_k ($k \in \{1,2,3\}$) du tourbillon.

Dans la section 3.1, est introduit un processus de Markov réfléchi $\left(\tilde{X}_s^t\right)_{(0 \leq s \leq t)}$, à valeurs dans l'espace $\bar{\Omega}$. Dans la section 3.2, deux autres processus lui sont adjoints pour former un triplet $\left(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t\right)$ markovien permettant d'obtenir (sections 3.3 et 3.4) une représentation des solutions de l'équation (2.9). Le processus de Markov $\left(\tilde{X}_s^t\right)_{(0 \leq s \leq t)}$ est défini à partir de la vitesse $\mathbf{u}$. Si l'on envisage d'utiliser cette représentation probabiliste pour calculer la vitesse $\mathbf{u}$, il faut alors résoudre en parallèle les équations pour obtenir la vitesse, le tourbillon et le processus de Markov $\left(\tilde{X}_s^t\right)_{(0 \leq s \leq t)}$. Dans la section 3.5 est présentée l'étude d'un système d'équations probabilistes équivalent à l'équation de Navier-Stokes.

Les équations $((T'_k); k = 1,2,3)$ décrivent l'évolution des composantes de la fonction ω^c . En explicitant les produits scalaires de (T'_k) , l'équation prend la forme suivante :

$$(3.1) \quad \frac{\partial \omega_k^c}{\partial t} = \nu \Delta \omega_k^c - u \cdot \nabla \omega_k^c + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \omega_k^c + \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} \omega_{\tau(k)}^c + \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} \omega_{\tau^{-1}(k)}^c - \mathbf{C} \cdot \nabla u_k.$$

Cette équation qui régit l'évolution de la $k^{\text{ème}}$ composante du tourbillon, contient les autres composantes $\omega_{\tau(k)}^c$ et $\omega_{\tau^{-1}(k)}^c$.

On parvient à les prendre en compte dans le processus stochastique en considérant un autre processus aléatoire, défini en parallèle avec le premier et à valeurs dans $\{1,2,3\}$; cette technique est décrite dans [FREIDLIN, (1985)] et [FREIDLIN, (1992)].

3.1 Un premier processus de Markov à valeurs dans le domaine borné

On désigne toujours par $(\mathbf{u}, p)$ la solution de l'équation (NS) de Navier-Stokes définie sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$.

Pour tout $t \in [0, T]$, on définit un processus $(\tilde{X}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ et une fonctionnelle additive $(\tilde{A}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ de ce processus comme étant les solutions de l'E.D.S. suivante :

$$(3.2) \quad (0 \leq s \leq t) \quad \begin{cases} d\tilde{X}_s^t &= \sigma d\tilde{B}_s^t - u(t-s, \tilde{X}_s^t) ds - n(\tilde{X}_s^t) d\tilde{A}_s^t \\ \tilde{A}_s^t &= \int_0^s \mathbb{1}_{\{\tilde{X}_r^t \in \partial\Omega\}} d\tilde{A}_r^t \\ \tilde{X}_s^t &\in \bar{\Omega} \end{cases}$$

où $(\tilde{B}_s^t)_{0 \leq s \leq T}$ est un mouvement brownien de dimension trois et σ un nombre strictement positif dépendant de la viscosité ($\sigma = \sqrt{2\nu}$).

Le processus croissant $\tilde{A}^t$ ne varie que lorsque $\tilde{X}^t$ se trouve à la frontière du domaine Ω ; il contraint $\tilde{X}^t$ à rester à l'intérieur du domaine.

Il est démontré dans [STROOCK, VARADHAN, (1971)] qu'un tel couple de processus stochastiques existe; la preuve est basée sur la résolution du problème de martingales associé. Par conséquent, le système (3.2) possède une solution faible qui par unicité trajectorielle devient forte et que l'on note: $((\tilde{X}^t, \tilde{B}^t, \tilde{A}^t), (\tilde{W}^t, \tilde{\mathcal{F}}^t, (\mathbb{P}_x)_{x \in \bar{\Omega}}), (\tilde{\mathcal{F}}_s^t))_{(0 \leq s \leq t)}$ avec $\mathbb{P}_x \left(\left\{ \tilde{X}_0^t = x \right\} \right) = 1$.

Le processus $\tilde{X}^t$ est construit à partir de la vitesse $\mathbf{u}$. Inversement, il est possible de récupérer cette vitesse $\mathbf{u}$ à partir du processus $\tilde{X}^t$.

Le terme de dérive d'une diffusion s'exprime à partir de la solution de l'E.D.S. ([KARATZAS, SHREVE, (1994)] page 282) :

$$(3.3) \quad u(t-s, x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbb{E}_y \left\{ \frac{\tilde{X}_{s+h}^t - \tilde{X}_s^t}{h} \mid \{\tilde{X}_s^t = x\} \right\} \quad (x \in \Omega) \quad (y \in \bar{\Omega}).$$

Si maintenant $x \in \partial\Omega$, on considère une fonction ρ de classe C^∞ , définie sur $\bar{\Omega}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

$$(3.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial n}(y) = 0 \quad (y \in \partial\Omega \cap \mathcal{V}_x),$$

$$(3.5) \quad \Delta \rho(y) = 0 \quad (y \in \Omega \cap \mathcal{V}_x).$$

Les conditions (3.4) et (3.5) permettent de dégager les composantes tangentielles de la vitesse au bord du domaine Ω .

En effet, l'application de la formule d'Itô [KARATZAS, SHREVE, (1994)] permet d'établir :

$$(3.6) \quad \nabla \rho(x) \cdot u(t-s, x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbb{E}_y \left\{ \frac{\rho(\tilde{X}_{s+h}^t) - \rho(\tilde{X}_s^t)}{h} \mid \{\tilde{X}_s^t = x\} \right\} \quad (x \in \partial\Omega) \quad (y \in \bar{\Omega}).$$

On considère $\mathbf{u}$ une solution de (NS') , on définit alors le processus $\tilde{X}^t$ correspondant à $\mathbf{u}$. Si la limite apparaissant au membre droite de (3.6) est nulle pour l'ensemble des fonctions test vérifiant (3.4) et (3.5), alors $\mathbf{u}$ est la solution de (NS) .

On peut énoncer un résultat analogue concernant un processus $\tilde{X}^t$ qui partirait d'un point $x \in \Omega$ et qui atteindrait la frontière avant le temps final t .

Proposition 3.1. *Soit u la solution de (NS) sur $[0, T] \times \overline{\Omega}$; soient les deux processus $\tilde{X}^t$ et $\tilde{A}^t$ définis par l'E.D.S. (3.2). On note $\tilde{T}$ le premier instant où le processus $\tilde{X}^t$ atteint la frontière $\partial\Omega$:*

$$(3.7) \quad \tilde{T} = \inf\{s \leq t \mid \tilde{X}_s^t \in \partial\Omega\}.$$

Alors pour toute fonction réelle ρ satisfaisant (3.4) et (3.5), on a :

$$(3.8) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbb{E}_y \left\{ \frac{\rho(\tilde{X}_{(\tilde{T}+h) \wedge t}^t) - \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t)}{h} \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}^t \right\} = 0 \quad (y \in \overline{\Omega}).$$

Démonstration de la proposition 3.1.

Sur l'événement $\{\tilde{T} = t\}$, $\rho(\tilde{X}_{(\tilde{T}+h) \wedge t}^t) = \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t)$; donc (3.8) est réalisée.

On peut par conséquent se restreindre à $\{\tilde{T} < t\}$ et appliquer la formule d'Itô :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \rho(\tilde{X}_{(\tilde{T}+h) \wedge t}^t) - \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t) &= \sigma \int_{\tilde{T}}^{(\tilde{T}+h) \wedge t} \nabla \rho(\tilde{X}_r^t) \cdot d\tilde{B}_r^t - \int_{\tilde{T}}^{(\tilde{T}+h) \wedge t} \nabla \rho(\tilde{X}_r^t) \cdot u(t-r, \tilde{X}_r^t) dr \\ &\quad + \nu \int_{\tilde{T}}^{(\tilde{T}+h) \wedge t} \Delta \rho(\tilde{X}_r^t) dr. \end{aligned}$$

Comme $\tilde{X}^t$ est continu, on peut choisir h suffisamment petit pour avoir $\tilde{X}_r^t \in \bigcap_{x \in \partial\Omega} \mathcal{V}_x$ pour tous les réels $r \in [\tilde{T}, (\tilde{T}+h) \wedge t]$. Et ainsi, la dernière intégrale dans (3.9) disparaît; il s'ensuit que sur $\{\tilde{T} < t\}$:

$$(3.10) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbb{E}_y \left\{ \frac{\rho(\tilde{X}_{(\tilde{T}+h) \wedge t}^t) - \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t)}{h} \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}^t \right\} = -\nabla \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t) \cdot \mathbf{u}(t - \tilde{T}, \tilde{X}_{\tilde{T}}^t) \quad (y \in \overline{\Omega}).$$

Mais si $\tilde{T} < t$, alors $\tilde{X}_{\tilde{T}}^t \in \partial\Omega$, et $\mathbf{u}(t - \tilde{T}, \tilde{X}_{\tilde{T}}^t) = 0$; donc la limite de (3.10) s'annule et on obtient (3.8). $\square$

Remarques :

i) Si f est une fonction réelle de classe C^∞ , définie sur $\overline{\Omega}$, et telle que $\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 1$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors la formule d'Itô permet de déterminer une expression du processus croissant $\tilde{A}^t$:

$$(3.11) \quad \tilde{A}_s^t = f(\tilde{X}_0^t) - f(\tilde{X}_s^t) + \sigma \int_0^s \nabla f(\tilde{X}_r^t) \cdot d\tilde{B}_r^t + \int_0^s \left(\nabla f(\tilde{X}_r^t) \cdot u(t-r, \tilde{X}_r^t) + \nu \Delta f(\tilde{X}_r^t) \right) dr,$$

et par suite :

$$(3.12) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \mathbb{E}_x \{\tilde{A}_s^t\} = 0.$$

ii) Un résultat concernant les moments de $\tilde{A}^t$ est démontré dans [STROOCK, VARADHAN, (1971)].

Pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $s \in [0, t]$:

$$(3.13) \quad \mathbb{E}_x \left\{ e^{\lambda \tilde{A}_s^t} \right\} < \infty \quad (x \in \bar{\Omega}).$$

3.2 Le processus de Markov dirigeant le processus de branchement

On définit, parallèlement à $\tilde{X}^t$ et sur le même espace de probabilité, deux processus càdlàg $(\tilde{k}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ et $(\tilde{\varepsilon}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ dépendant d'un nombre réel c et tels que le processus

$$\left(\left(\tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right)_{0 \leq s \leq t} ; (\tilde{\mathcal{G}}_s^t)_{0 \leq s \leq t} ; (\mathbb{P}_{(x,k,\varepsilon)})_{(x,k,\varepsilon) \in \bar{\Omega} \times \{1,2,3\} \times \{-1,1\}} \right) \text{ soit markovien.}$$

Sa loi de transition est décrite par (3.14), (3.15), (3.17), (3.19) et (3.20).

$$(3.14) \quad \mathbb{P}_{(x,k,\varepsilon)} \left(\left\{ \tilde{X}_0^t = x, \tilde{k}_0^t = k, \tilde{\varepsilon}_0^t = \varepsilon \right\} \right) = 1.$$

On note $\mathbb{P}_{(x,k)} = \mathbb{P}_{(x,k,1)}$.

Si l'on interprète le processus stochastique $\tilde{X}_s^t$ comme la position d'une particule à l'instant s , $\tilde{k}_s^t$ peut représenter son état et $\tilde{\varepsilon}_s^t$ sa charge à l'instant s .

On peut alors interpréter chacune des égalités décrivant les probabilités de transition des processus $\tilde{k}^t$ et $\tilde{\varepsilon}^t$.

La particule peut changer d'état et de charge au même instant :

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P} \left(\left\{ \tilde{k}_{s+h}^t = \tau(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t = -\tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \right| \mathbb{1} \left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c < 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P} \left(\left\{ \tilde{k}_{s+h}^t = \tau^{-1}(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t = -\tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \right| \mathbb{1} \left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c < 0 \right\}. \end{aligned}$$

La particule peut changer d'état en conservant la même charge :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P} \left(\left\{ \tilde{k}_{s+h}^t = \tau(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t = \tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \right| \mathbb{1} \left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.18) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P} \left(\left\{ \tilde{k}_{s+h}^t = \tau^{-1}(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t = \tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \right| \mathbb{I} \left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \geq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Par contre, la particule ne peut changer de charge sans changer d'état :

$$(3.19) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P} \left(\left\{ \tilde{k}_{s+h}^t = \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t = -\tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right) = 0.$$

Le plus souvent, la particule, entre les instants s et $s+h$ (h tendant vers zéro), conserve son état et sa charge :

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\mathbb{P} \left(\left\{ \tilde{k}_{s+h}^t = \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t = \tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right) - 1 \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \right| \\
&\quad - \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \right|.
\end{aligned}$$

Remarque :

Le processus $\tilde{X}^t$ existe sans les processus $\tilde{k}^t$ et $\tilde{\varepsilon}^t$; sa loi de probabilité ne dépend pas d'eux, contrairement à celle de $\tilde{k}^t$ qui dépend de $\tilde{X}^t$ au travers des dérivées partielles de la vitesse considérées au point $\tilde{k}^t$.

De plus, la loi de $\tilde{k}^t$ et même celle de $\tilde{\varepsilon}^t$ sont indépendantes de la valeur de $\tilde{\varepsilon}^t$. Cette dernière propriété sera utilisée dans la section 4.1.

3.3 Le générateur infinitésimal du processus de Markov

On note $L_s^{\tilde{X}^t}$ le générateur infinitésimal du processus de Markov non homogène $(\tilde{X}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$.

La formule d'Itô donne facilement l'expression de ce générateur infinitésimal.

Son domaine contient toutes les fonctions réelles C^2 définies sur $\bar{\Omega}$, admettant une dérivée normale à la frontière $\partial\Omega$ nulle ([REVUZ, YOR, (1991)] chapitre VII).

Pour toute $f \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$:

$$(3.21) \quad L_s^{\tilde{X}^t} f(x) = \nu \Delta f(x) - \mathbf{u}(t-s, x) \cdot \nabla f(x) \quad (0 \leq s \leq t) \quad (x \in \Omega).$$

On peut étendre ce résultat aux fonctions définies sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$ en considérant le processus $(t-s, \tilde{X}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$.

Le générateur infinitésimal $L^{(t, \tilde{X}^t)}$ de ce processus homogène, appliqué à une fonction f de l'espace $C^{1,2}([0, t] \times \bar{\Omega})$ et vérifiant $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ sur $[0, t] \times \partial\Omega$, donne :

$$(3.22) \quad L^{(t, \tilde{X}^t)} f(t-s, x) = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} + \nu \Delta f - \mathbf{u} \cdot \nabla f \right) (t-s, x) \quad (0 \leq s \leq t) \quad (x \in \Omega).$$

Définitions :

i) $\mathcal{K} = \{f : [0, t] \times \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ bornée, } C^1 \text{ en la première variable, } C^2 \text{ en la seconde} \}$

Dans la suite, nous écrirons indifféremment $f(t-s, x, k, \varepsilon)$ ou $f_k(t-s, x, \varepsilon)$ pour $f \in \mathcal{K}$.

ii) On définit un sous-espace $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ de $\mathcal{K}$ qui contient les fonctions dont la dérivée normale à la frontière $\partial\Omega$ est nulle :

$$\mathcal{K}_{\partial\Omega} = \left\{ f \in \mathcal{K} \mid \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ sur } [0, t] \times \partial\Omega \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\} \right\}.$$

Notations :

On désigne par $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ le générateur infinitésimal du processus $\left(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right)_{0 \leq s \leq t}$.

On est alors en mesure d'énoncer un résultat concernant le générateur infinitésimal du processus de Markov $\left(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right)_{0 \leq s \leq t}$.

Proposition 3.2. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_{\partial\Omega}$:*

$$\begin{aligned}
(3.23) \quad L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} f(t-s, x, k, \varepsilon) &= L^{(t, \tilde{X}^t)} f(t-s, x, k, \varepsilon) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \right) \\
&\mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \geq 0 \right\}} f(t-s, x, \tau(k), \varepsilon) \\
&- \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \right) \\
&\mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c < 0 \right\}} f(t-s, x, \tau(k), -\varepsilon) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \right) \\
&\mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \geq 0 \right\}} f(t-s, x, \tau^{-1}(k), \varepsilon) \\
&- \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \right) \\
&\mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c < 0 \right\}} f(t-s, x, \tau^{-1}(k), -\varepsilon) \\
&- \frac{1}{2} \left\{ \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) + c \right| \right. \\
&\left. + \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t-s, \tilde{X}_s^t) - c \right| \right\} f(t-s, x, k, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3.2.

On définit le premier instant après s où la particule change d'état ou de charge,

$$\zeta_s = \inf \left\{ h > 0 \mid (\tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) \neq (\tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right\}.$$

Soient une fonction $f \in \mathcal{K}_{\partial\Omega}$ et un réel $h > 0$; on calcule la limite suivante en distinguant les  v nements $\{\zeta_s > h\}$ et $\{\zeta_s \leq h\}$:

$$\begin{aligned}
(3.24) \quad &\frac{1}{h} \mathbb{E} \left\{ f(t-(s+h), \tilde{X}_{s+h}^t, \tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) - f(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \mid \tilde{\mathcal{G}}_s^t \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \left(f(t-(s+h), \tilde{X}_{s+h}^t, \tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) - f(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \frac{1}{h} \mathbb{1}_{\{\zeta_s > h\}} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \\
&+ \mathbb{E} \left\{ \left(f(t-(s+h), \tilde{X}_{s+h}^t, \tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) - f(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \frac{1}{h} \mathbb{1}_{\{\zeta_s \leq h\}} \mid \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right\}.
\end{aligned}$$

De (3.20), on déduit :

$$\mathbb{1}_{\{\zeta_s > h\}} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{p.s.} \mathbb{1}_A \text{ avec } \mathbb{P}(A) = 1.$$

Par conséquent, la limite du premier terme de (3.24), quand h tend vers zéro, est :

$$(3.25) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left\{ \left(f(t - (s + h), \tilde{X}_{s+h}^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) - f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \frac{1}{h} \mathbb{1}_{\{\zeta_s > h\}} | \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \\ = L^{(t, \tilde{X}^t)} f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t).$$

La somme

$$\frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) + c \right| + \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) - c \right|$$

apparaissant dans (3.20) ne contribue pas à cette limite puisque le processus $\tilde{X}^t$ est continu.

Le découpage

$$\mathbb{1}_{\{\zeta_s \leq h\}} = \mathbb{1}_{\{(\tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) = (\tilde{k}_s^t, -\tilde{\varepsilon}_s^t)\}} + \mathbb{1}_{\{(\tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) = (\tau(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_s^t)\}} + \mathbb{1}_{\{(\tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) = (\tau(\tilde{k}_s^t), -\tilde{\varepsilon}_s^t)\}} \\ + \mathbb{1}_{\{(\tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) = (\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_s^t)\}} + \mathbb{1}_{\{(\tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) = (\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t), -\tilde{\varepsilon}_s^t)\}}$$

et les égalités (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) permettent d'écrire :

$$(3.26) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left\{ \left(f(t - (s + h), \tilde{X}_{s+h}^t, \tilde{k}_{s+h}^t, \tilde{\varepsilon}_{s+h}^t) - f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \frac{1}{h} \mathbb{1}_{\{\zeta_s \leq h\}} | \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right\} \\ = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) + c \right) \\ \mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) + c \geq 0 \right\}} \left(f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tau(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_s^t) - f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) + c \right) \\ \mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) + c < 0 \right\}} \left(f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tau(\tilde{k}_s^t), -\tilde{\varepsilon}_s^t) - f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) - c \right) \\ \mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) - c \geq 0 \right\}} \left(f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tau^{-1}(\tilde{k}_s^t), \tilde{\varepsilon}_s^t) - f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) - c \right) \\ \mathbb{1}_{\left\{ \left(\frac{\partial u_{\tilde{k}_s^t}}{\partial x_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}}{\partial x_{\tilde{k}_s^t}} \right) (t - s, \tilde{X}_s^t) - c < 0 \right\}} \left(f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tau^{-1}(\tilde{k}_s^t), -\tilde{\varepsilon}_s^t) - f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) \right).$$

On retrouve le membre de droite de (3.23). $\square$

Par la suite, le générateur infinitésimal de $\left(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t \right)_{0 \leq s \leq t}$ sera appliqué à des fonctions de $\mathcal{K}$ qui ne dépendent de ε qu'au travers de leur signe.

Définitions :

i) Si $f \in \mathcal{K}$ ou $f \in \mathcal{K}_{\partial\Omega}$, on pose $f^\# : [0, t] \times \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f^\#(s, x, k) = f(s, x, k, 1)$. Nous écrirons indifféremment $f_k^\#(s, x)$ ou $f^\#(s, x, k)$.

ii) On considère les espaces de fonctions dépendant multiplicativement de ε :

$$\mathcal{K}^* = \{f \in \mathcal{K} \mid f(s, x, k, \varepsilon) = \varepsilon f^\#(s, x, k), \quad (s, x, k, \varepsilon) \in [0, t] \times \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}\},$$

$$\mathcal{K}_{\partial\Omega}^* = \mathcal{K}^* \cap \mathcal{K}_{\partial\Omega}.$$

La proposition 3.2 peut être appliquée à de telles fonctions ; elle devient :

Proposition 3.3. *Soit f une fonction de $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$.*

Alors le processus suivant est une martingale :

$$(3.27) \quad \left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t - s, \tilde{X}_s^t) - \int_0^s L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \tilde{\varepsilon}_r^t f_{\tilde{k}_r^t}^\#(t - r, \tilde{X}_r^t) dr \right)_{0 \leq s \leq t}.$$

De plus, l'opérateur $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ possède une expression plus simple que (3.23) lorsqu'il est appliqué à de telles fonctions.

Pour toute $f \in \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \varepsilon f_k^\#(t - s, x) &= \varepsilon L^{(t, \tilde{X}^t)} f_k^\#(t - s, x) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (t - s, x) + c \right) \varepsilon f_{\tau(k)}^\#(t - s, x) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (t - s, x) - c \right) \varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(t - s, x) \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (t - s, x) + c \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (t - s, x) - c \right| \right\} \varepsilon f_k^\#(t - s, x). \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3.3.

La formule de Dynkin affirme que le processus suivant est une martingale ([REVUZ, YOR, (1991)] chapitre VII) :

$$(3.29) \quad \left(f(t - s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) - \int_0^s L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} f(t - r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t, \tilde{\varepsilon}_r^t) dr \right)_{0 \leq s \leq t}.$$

Ceci est vrai à condition que la dérivée normale de f à la frontière $\partial\Omega$ soit nulle, comme c'est le cas ici puisque $f \in \mathcal{K}_{\partial\Omega}$.

Prendre f dans l'espace $\mathcal{K}^*$ permet de regrouper dans l'expression (3.23) les termes en $f(t - s, x, \tau(k), \varepsilon) = \varepsilon f_{\tau(k)}^\#(t - s, x)$ et $f(t - s, x, \tau^{-1}(k), \varepsilon) = \varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(t - s, x)$ avec $f(t - s, x, \tau(k), -\varepsilon) = -\varepsilon f_{\tau(k)}^\#(t - s, x)$ et $f(t - s, x, \tau^{-1}(k), -\varepsilon) = -\varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(t - s, x)$ respectivement.

Cela explique l'expression (3.28) du générateur infinitésimal $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$. $\square$

3.4 Représentation du tourbillon impliquant le processus de Markov

Dans cette section, nous allons proposer une représentation probabiliste du tourbillon ω . La proposition 3.3 s'applique à des fonctions dont les dérivées normales à la frontière $\partial\Omega$ s'annulent.

Or, la dérivée normale du tourbillon n'est pas nulle. Par conséquent, si l'on veut pouvoir lui appliquer une version modifiée de la proposition 3.3, on va devoir étudier les contributions de sa dérivée normale dans le processus $\left(\tilde{\varepsilon}^t f_{\tilde{k}_s^t}(t-s, \tilde{X}_s^t)\right)_{0 \leq s \leq t}$.

La proposition suivante est donc une adaptation de la proposition 3.3 pour des fonctions dont les dérivées normales sont non nulles.

Proposition 3.4. *Soit f une fonction de l'espace $\mathcal{K}^*$.*

Alors le processus suivant est une martingale :

$$(3.30) \quad \left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) - \int_0^s L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \tilde{\varepsilon}_r^t f_{\tilde{k}_r^t}^\#(t-r, \tilde{X}_r^t) dr + \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial n}(t-r, \tilde{X}_r^t) d\tilde{A}_r^t \right)_{0 \leq s \leq t}.$$

Démonstration de la proposition 3.4.

On applique la formule d'Itô à la semi-martingale càdlàg $(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t)_{(0 \leq s \leq t)}$. Cette formule est donnée pour des semi-martingales non continues dans [MÉTIVIER, PELLAUMAIL, (1980)] ou [DOLÉANS-DADE, MEYER, (1968)].

$$(3.31) \quad \begin{aligned} f(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) &= f(t, \tilde{X}_0^t, \tilde{k}_0^t, \tilde{\varepsilon}_0^t) + \int_0^s \nabla f(t-r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t, \tilde{\varepsilon}_r^t) d\tilde{X}_r^t \\ &\quad - \int_0^s \frac{\partial f}{\partial t}(t-r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t, \tilde{\varepsilon}_r^t) dr \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta f(t-r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t, \tilde{\varepsilon}_r^t) d\langle \tilde{X}^t \rangle_r \\ &\quad + \sum_{s \leq t} \left(f(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t) - f(t-s, \tilde{X}_s^t, \tilde{k}_{s-}^t, \tilde{\varepsilon}_{s-}^t) \right) \\ &\quad - \sum_{s \leq t} \frac{\partial f}{\partial k}(t-r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t, \tilde{\varepsilon}_r^t) (\tilde{k}_r^t - \tilde{k}_{r-}^t) \\ &\quad - \sum_{s \leq t} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t-r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t, \tilde{\varepsilon}_r^t) (\tilde{\varepsilon}_s^t - \tilde{\varepsilon}_{s-}^t). \end{aligned}$$

La contribution de la dérivée normale de f se restreint à la première intégrale du membre de droite de (3.31). Cet unique terme dépendant de $\frac{\partial f}{\partial n}$ est égal à :

$$- \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial n}(t-r, \tilde{X}_r^t) d\tilde{A}_r^t,$$

et c'est exactement le terme que nous devons soustraire de (3.27) pour obtenir la martingale (3.30). $\square$

Le générateur infinitésimal $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$, lorsqu'on l'applique aux fonctions de $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$, ressemble à l'opérateur $\mathcal{L}^u$ défini par (2.7) et qui apparaît dans l'équation (2.9). Si l'on remplace la fonction f_k par la $k^{\text{ième}}$ composante du tourbillon ω_k dans l'expression (3.28) de $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$, les termes en ω_k ne correspondent cependant pas à ceux de l'opérateur $\mathcal{L}^u$. La proposition suivante, en utilisant la formule de Feynman-Kac, permet de transformer ces termes en corrigeant par un facteur exponentiel. Elle exprime par ailleurs le lien qui unit l'opérateur $\mathcal{L}^u$ et le processus $(\tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$.

Définitions :

i) Soit la fonction $\psi_c : [0, t] \times \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \psi_c(s, x, k) = & \frac{\partial u_k}{\partial x_k}(s, x) + \left\{ \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}}(s, x) + \frac{c + \omega_{\tau^{-1}(k)}(s, x)}{2} \right| \right. \\ & \left. + \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}}(s, x) - \frac{c + \omega_{\tau(k)}(s, x)}{2} \right| \right\}. \end{aligned}$$

ii) Soit le processus $\tilde{N}^{t,c}$:

$$(3.33) \quad \tilde{N}_s^{t,c} = \exp \left(\int_0^s \psi_c(t-r, \tilde{X}_r^t, \tilde{k}_r^t) dr \right).$$

Proposition 3.5. *Soit f une fonction de l'espace $\mathcal{K}^*$.*

Alors le processus suivant est une martingale :

$$(3.34) \quad \begin{aligned} & \left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} + \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial n}(t-r, \tilde{X}_r^t) \tilde{N}_r^{t,c} d\tilde{A}_r^t \right. \\ & - \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_r^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_r^t)}^\# \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_r^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}^\# \right] (t-r, \tilde{X}_r^t) \tilde{N}_r^{t,c} dr \right)_{(0 \leq s \leq t)}. \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3.5.

On va tout d'abord établir le lien existant entre le générateur infinitésimal $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ et l'opérateur $\mathcal{L}^u$.

Si l'on remplace $L^{(t, \tilde{X}^t)}$ par son expression développée (3.22) dans l'égalité (3.28), on obtient pour toute fonction $f \in \mathcal{K}^*$:

$$\begin{aligned}
 L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \varepsilon f_k^\#(t-s, x) &= \varepsilon \left(-\frac{\partial f_k^\#}{\partial t} + \nu \Delta f_k^\# - \mathbf{u} \cdot \nabla f_k^\# \right) (t-s, x) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) + c \right) \varepsilon f_{\tau(k)}^\#(t-s, x) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) - c \right) \varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(t-s, x) \\
 &- \frac{1}{2} \left\{ \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) + c \right| \right. \\
 &\left. + \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) - c \right| \right\} \varepsilon f_k^\#(t-s, x).
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

En utilisant (2.10) et (2.11), on obtient les termes $\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}}$ et $\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}}$ devant $f_{\tau(k)}^\#$ et $f_{\tau^{-1}(k)}^\#$ respectivement, comme c'est le cas pour l'opérateur $\mathcal{L}^u$.

$$\begin{aligned}
 L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \varepsilon f_k^\#(t-s, x) &= \varepsilon \left(-\frac{\partial f_k^\#}{\partial t} + \nu \Delta f_k^\# - \mathbf{u} \cdot \nabla f_k^\# \right) (t-s, x) \\
 &+ \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} (t-s, x) + \frac{c + \omega_{\tau^{-1}(k)}(t-s, x)}{2} \right) \varepsilon f_{\tau(k)}^\#(t-s, x) \\
 &+ \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} (t-s, x) - \frac{c + \omega_{\tau(k)}(t-s, x)}{2} \right) \varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(t-s, x) \\
 &- \left\{ \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} (t-s, x) + \frac{c + \omega_{\tau^{-1}(k)}(t-s, x)}{2} \right| \right. \\
 &\left. + \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} (t-s, x) - \frac{c + \omega_{\tau(k)}(t-s, x)}{2} \right| \right\} \varepsilon f_k^\#(t-s, x).
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Introduisant les définitions (2.7) et (3.32), on obtient une relation entre les opérateurs $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ et $\mathcal{L}^u$:

$$\begin{aligned}
 &L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \varepsilon f_k^\#(t-s, x) + \varepsilon \psi_c(t-s, x, k) f_k^\#(t-s, x) \\
 &= \varepsilon \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_k - \frac{\partial f_k^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(k)} + c}{2} f_{\tau(k)}^\# - \frac{\omega_{\tau(k)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(k)}^\# \right] (t-s, x).
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

On peut maintenant démontrer que le processus (3.34) est une martingale.

Le produit $\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \right) \times \left(\tilde{N}_s^{t,c} \right)$ est développé grâce à la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
(3.38) \quad d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c}\right) &= \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) d\tilde{N}_s^{t,c} + \tilde{N}_s^{t,c} d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t)\right) \\
&\quad + d\langle \tilde{\varepsilon}_r^t f_{\tilde{k}_r^t}^\#(t-s, \tilde{X}_r^t) ; \tilde{N}_s^{t,c} \rangle_s.
\end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite de (3.38) est nul puisque le processus $\tilde{N}^{t,c}$ est à variation finie

Par (3.30), on peut remplacer dans (3.38) $d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t)\right)$ par

$L_s^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) ds - \tilde{\varepsilon}_s^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial n}(t-s, \tilde{X}_s^t) d\tilde{A}_s^t + dH_s$, où H désigne une martingale.

$$\begin{aligned}
(3.39) \quad d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c}\right) &= \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) d\tilde{N}_s^{t,c} + \tilde{N}_s^{t,c} dH_s \\
&\quad + \tilde{N}_s^{t,c} \left(L_s^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) ds \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\varepsilon}_s^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial n}(t-s, \tilde{X}_s^t) d\tilde{A}_s^t \right).
\end{aligned}$$

De (3.37) et (3.39), on déduit :

$$\begin{aligned}
(3.40) \quad d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c}\right) &= \tilde{N}_s^{t,c} dH_s + \tilde{N}_s^{t,c} \tilde{\varepsilon}_s^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_s^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_s^t)}^\# \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}^\# \right] (t-s, \tilde{X}_s^t) ds \\
&\quad - \tilde{\varepsilon}_s^t \tilde{N}_s^{t,c} \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial n}(t-s, \tilde{X}_s^t) d\tilde{A}_s^t.
\end{aligned}$$

Ainsi le processus (3.34) est égal à la martingale :

$$\left(\tilde{\varepsilon}_0^t f_{\tilde{k}_0^t}^\#(t, \tilde{X}_0^t) + \int_0^s \tilde{N}_r^{t,c} dH_r \right)_{(0 \leq s \leq t)}.$$

□

L'intégrale en $d\tilde{A}_r^t$ dans (3.34) peut également être supprimée en multipliant le processus $\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c}\right)_{s \geq 0}$ par une exponentielle de la trajectoire.

Définition :

On définit le processus $\tilde{M}^{t,f}$ par :

$$(3.41) \quad \tilde{M}_s^{t,f} = \exp \left(\int_0^s \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial n}(t-r, \tilde{X}_r^t) d\tilde{A}_r^t \right) \quad (0 \leq s \leq t).$$

La proposition suivante permet de se débarrasser de l'intégrale en $d\tilde{A}_r^t$ dans la martingale (3.34).

Proposition 3.6. *On suppose :*

i) $f \in \mathcal{K}^*$,

ii) $f_k^\#(s, x) \neq 0$ pour $0 \leq s \leq t$, $x \in \bar{\Omega}$ et $k \in \{1, 2, 3\}$.

Alors le processus suivant est une martingale :

$$(3.42) \quad \left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{M}_s^{t,f} \tilde{N}_s^{t,c} - \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_r^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial t} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_r^t)}^\# - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_r^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}^\# \right] (t-r, \tilde{X}_r^t) \tilde{M}_r^{t,f} \tilde{N}_r^{t,c} dr \right)_{(0 \leq s \leq t)}.$$

Démonstration de la proposition 3.6.

Comme dans la démonstration de la proposition 3.5, on utilise la formule d'intégration par parties pour calculer le produit $\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} \right) \times \left(\tilde{M}_s^{t,f} \right)$.

Ainsi, si l'on note H_s la martingale de la proposition 3.5, on obtient successivement :

$$(3.43) \quad \begin{aligned} d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} \tilde{M}_s^{t,f} \right) &= \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} d\tilde{M}_s^{t,f} + \tilde{M}_s^{t,f} d\left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} \right) \\ &\quad + d\langle \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} ; \tilde{M}_s^{t,f} \rangle_s \\ &= \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} d\tilde{M}_s^{t,f} + \tilde{M}_s^{t,f} \left(\tilde{\varepsilon}_s^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_s^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_s^t)}^\# - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}^\# \right] (t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} ds \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\varepsilon}_s^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial n}(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} d\tilde{A}_s^t + dH_s \right) \\ &= \tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} \left(\frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial n}(t-s, \tilde{X}_s^t) \right) \tilde{M}_s^{t,f} d\tilde{A}_s^t \\ &\quad + \tilde{\varepsilon}_s^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_s^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_s^t)}^\# \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}^\# \right] (t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{M}_s^{t,f} \tilde{N}_s^{t,c} ds \\ &\quad - \tilde{\varepsilon}_s^t \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial n}(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{N}_s^{t,c} d\tilde{A}_s^t + \tilde{M}_s^{t,f} dH_s \\ &= \tilde{\varepsilon}_s^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_s^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_s^t}^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_s^t)}^\# \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_s^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_s^t)}^\# \right] (t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{M}_s^{t,f} \tilde{N}_s^{t,c} ds + \tilde{M}_s^{t,f} dH_s. \end{aligned}$$

Et donc le processus (3.42) est égal à la martingale :

$$\left(\tilde{\varepsilon}_0^t f_{\tilde{k}_0^t}^\#(t, \tilde{X}_0^t) \tilde{N}_0^{t,c} \tilde{M}_0^{t,f} + \int_0^s \tilde{M}_r^{t,f} dH_r \right)_{(0 \leq s \leq t)}.$$

□

Une application directe de ce dernier résultat conduit à une représentation de la composante ω_k du tourbillon.

Plus précisément, soit $\mathbf{u}$ la solution de l'équation (NS) de Navier-Stokes ; soit $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{u}$; $\boldsymbol{\omega}$ est solution de l'équation (2.8). On suppose que les composantes de $\boldsymbol{\omega}$ ne s'annulent pas ; on applique alors le résultat de la proposition 3.6 avec $c = 0$.

L'égalité entre les espérances de la martingale aux temps $s = 0$ et $s = t$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,k,\varepsilon)} \left\{ \tilde{\varepsilon}_0^t \omega_{\tilde{k}_0^t}(t, \tilde{X}_0^t) \right\} &= \mathbb{E}_{(x,k,\varepsilon)} \left\{ \tilde{\varepsilon}_t^t \omega_{\tilde{k}_t^t}(0, \tilde{X}_t^t) \tilde{M}_t^{t,\omega} \tilde{N}_t^{t,c} \right. \\ &\quad - \int_0^t \tilde{\varepsilon}_r^t \left[(\mathcal{L}^{\mathbf{u}} \boldsymbol{\omega})_{\tilde{k}_r^t} - \frac{\partial \omega_{\tilde{k}_r^t}}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. \left. + \underbrace{\frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}}{2} \omega_{\tau(\tilde{k}_r^t)} - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_r^t)}}{2} \omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}}_{=0} \right] dr \right\}, \end{aligned}$$

et par (2.8), l'intégrale est nulle.

$$\varepsilon \omega_k(t, x) = \mathbb{E}_{(x,k,\varepsilon)} \left\{ \tilde{\varepsilon}_t^t \omega_{\tilde{k}_t^t}(0, \tilde{X}_t^t) \tilde{M}_t^{t,\omega} \tilde{N}_t^{t,c} \right\}.$$

Cependant, l'hypothèse ii) de la proposition 3.6 n'est pas satisfaite par la fonction $\boldsymbol{\omega}$.

Si $\mathbf{C} = (c, c, c)^t$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, constant par rapport au temps et à l'espace, tel que les composantes de la fonction $\boldsymbol{\omega}^c = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}$ restent supérieures à un réel $\alpha > 0$ (c'est-à-dire que $\boldsymbol{\omega}^c$ vérifie l'hypothèse ii) de la proposition 3.6), alors cette fonction n'est plus solution de l'équation (T_k) mais elle est solution de l'équation (2.9), assez proche de la précédente ; la seule différence entre ces équations étant la présence du terme $\mathbf{C} \cdot \nabla u_k$.

On va par conséquent modifier le générateur infinitésimal $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ pour y inclure ce terme. Ceci est réalisé dans le théorème suivant qui utilise les mêmes techniques que pour les propositions 3.5 et 3.6 lors de sa démonstration.

Définition :

On définit le processus $\tilde{O}^{t,f}$ par :

$$(3.44) \quad \tilde{O}_s^{t,f} = \exp \left(- \int_0^s \frac{\mathbf{C} \cdot \nabla u_{\tilde{k}_r^t}}{f_{\tilde{k}_r^t}}(t - r, \tilde{X}_r^t) dr \right) \quad (0 \leq s \leq t).$$

Théorème 3.7. Soit $\mathbf{u}$ la solution de l'équation (NS) de Navier-Stokes sur $[0, T] \times \overline{\Omega}$. On fixe $t \in [0, T]$. Soit $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{u}$, soit $\mathbf{C} = (c, c, c)^t$ tel que $\omega_k(s, x) + c \geq \alpha > 0$ pour $0 \leq s \leq t$, $x \in \overline{\Omega}$, $k \in \{1, 2, 3\}$. On définit $\boldsymbol{\omega}^c = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}$ (et ainsi $\text{rot} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}^c - \mathbf{C}$). Le processus $(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)$ est défini dans les sections 3.1 et 3.2, les processus $\tilde{M}^t$, $\tilde{N}^t$ et $\tilde{O}^t$ par (3.41), (3.33) et (3.44). Alors le processus suivant est une martingale :

$$(3.45) \quad \left(\tilde{\varepsilon}_s^t \omega_{\tilde{k}_s^t}^c(t - s, \tilde{X}_s^t) \tilde{M}_s^{t,\omega^c} \tilde{N}_s^{t,c} \tilde{O}_s^{t,\omega^c} \right)_{0 \leq s \leq t}.$$

Démonstration du théorème 3.7.

La formule d'intégration par parties, associée à la proposition 3.6, permet de démontrer que le processus suivant est une martingale :

$$(3.46) \quad \left(\tilde{\varepsilon}_s^t f_{\tilde{k}_s^t}^\#(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{M}_s^{t,f} \tilde{N}_s^{t,c} \tilde{O}_s^{t,f} - \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_r^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}^c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_r^t)}^\# - \frac{\omega_{\tau(\tilde{k}_r^t)}^c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}^\# - \mathbf{C} \cdot \nabla u_{\tilde{k}_r^t} \right] (t-r, \tilde{X}_r^t) \tilde{M}_r^{t,f} \tilde{N}_r^{t,c} \tilde{O}_r^{t,f} dr \right)_{(0 \leq s \leq t)}.$$

Si l'on prend $f_k = \omega_k^c$ pour $k = 1, 2, 3$, l'expression de cette martingale devient :

$$(3.47) \quad \left(\tilde{\varepsilon}_s^t \omega_{\tilde{k}_s^t}^c(t-s, \tilde{X}_s^t) \tilde{M}_s^{t,\omega^c} \tilde{N}_s^{t,c} \tilde{O}_s^{t,\omega^c} - \int_0^s \tilde{\varepsilon}_r^t \left[(\mathcal{L}^u \omega^c)_{\tilde{k}_r^t} - \frac{\partial \omega_{\tilde{k}_r^t}^c}{\partial t} - \mathbf{C} \cdot \nabla u_{\tilde{k}_r^t} \right] (t-r, \tilde{X}_r^t) \tilde{M}_r^{t,\omega^c} \tilde{N}_r^{t,c} \tilde{O}_r^{t,\omega^c} dr \right)_{(0 \leq s \leq t)},$$

puis par (2.9), on obtient pour la martingale l'expression (3.45). $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer ce résultat pour obtenir une première représentation probabiliste du tourbillon ω .

Corollaire 3.8. *Sous les hypothèses du théorème 3.7, les composantes du tourbillon s'écrivent :*

$$(3.48) \quad \omega_k(t, x) + c = \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \tilde{\varepsilon}_t^t ((\omega_0)_{\tilde{k}_t^t}(\tilde{X}_t^t) + c) \tilde{M}_t^{t,\omega^c} \tilde{N}_t^{t,c} \tilde{O}_t^{t,\omega^c} \right\}.$$

Remarque :

Dans le théorème 3.7, la vitesse $\mathbf{u}$ est supposée connue ; on peut donc déduire successivement les composantes du tourbillon et une constante c telle que $\omega_k + c \geq \alpha$.

Si inversement on ignore la vitesse $\mathbf{u}$ et que l'on cherche à la calculer, on doit choisir arbitrairement une constante c , et le processus du théorème 3.7 n'est plus une martingale. Cependant, ce processus peut être arrêté au temps $\tilde{T}$ d'atteinte du bord $\partial\Omega$ par $\tilde{X}^t$, défini en (3.7), et ainsi rester une martingale locale.

Proposition 3.9. *Soit $\mathbf{u}$ la solution de (NS) sur $[0, T] \times \overline{\Omega}$; soit $\omega = \text{rot} u$. Alors le processus suivant est une martingale locale :*

$$\left(\tilde{\varepsilon}_{s \wedge \tilde{T}}^t \omega_{\tilde{k}_{s \wedge \tilde{T}}^t}(t-s \wedge \tilde{T}, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{T}}^t) \tilde{N}_{s \wedge \tilde{T}}^{t,c} \right)_{0 \leq s \leq t}.$$

Démonstration de la proposition 3.9.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\tilde{T}_n = \inf \left\{ s \leq t \mid d(\tilde{X}_s^t, \partial\Omega) \leq \frac{1}{n} \right\}$.

Cette suite est croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_n = \tilde{T}$ p.s.

On intègre les deux membres de l'égalité (3.40) entre les instants zéro et $s \wedge \tilde{T}_n$, en remarquant que l'intégrale en $d\tilde{A}_r^t$ reste nulle puisque le processus $\tilde{X}^t$ n'atteint pas le bord $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{s \wedge \tilde{T}_n}^t f_{\tilde{k}_{s \wedge \tilde{T}_n}}^\#(t - s \wedge \tilde{T}_n, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{T}_n}^t) \tilde{N}_{s \wedge \tilde{T}_n}^{t,c} &= \tilde{\varepsilon}_0^t f_{\tilde{k}_0}^\#(t, \tilde{X}_0^t) + \int_0^{s \wedge \tilde{T}_n} \tilde{N}_r^{t,c} dH_r \\
 &+ \int_0^{s \wedge \tilde{T}_n} \tilde{N}_r^{t,c} \left[(\mathcal{L}^u f^\#)_{\tilde{k}_r^t} - \frac{\partial f_{\tilde{k}_r^t}^\#}{\partial t} + \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)} + c}{2} f_{\tau(\tilde{k}_r^t)}^\# \right. \\
 &\left. - \frac{\omega_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)} + c}{2} f_{\tau^{-1}(\tilde{k}_r^t)}^\# \right] (t - r, \tilde{X}_r^t) dr.
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

La conclusion s'obtient en prenant $c = 0$ et $f_k^\# = \omega_k$ pour $k = 1, 2, 3$ dans (3.49). $\square$

Dans cette section, nous avons construit plusieurs objets stochastiques à partir du tourbillon. Nous voulons maintenant décrire un système stochastique dont les solutions permettent d'obtenir le tourbillon ω et la vitesse u .

3.5 Un système d'équations stochastiques

On considère le système suivant d'équations liées ; t est un réel fixé dans l'intervalle $[0, T]$.

$$(SNS_t1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left((\tilde{X}_s^t, \tilde{B}_s^t, \tilde{A}_s^t), (\tilde{W}^t, \tilde{\mathcal{F}}^t, (\mathbb{P}_x)_{x \in \bar{\Omega}}), (\tilde{\mathcal{F}}_s^t) \right)_{(0 \leq s \leq t)} \text{ est une solution} \\ \text{de l'E.D.S. :} \\ (0 \leq s \leq t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_0^t = x \\ d\tilde{X}_s^t = \sigma d\tilde{B}_s^t - \mathbf{Q}\omega(t - s, \tilde{X}_s^t) ds - n(\tilde{X}_s^t) d\tilde{A}_s^t \\ \tilde{X}_s^t \in \bar{\Omega} \\ \tilde{A}_s^t = \int_0^s \mathbb{1}_{\{\tilde{X}_r^t \in \partial\Omega\}} d\tilde{A}_r^t. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(SNS_t2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left((\tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t, \tilde{\varepsilon}_s^t), (\tilde{\mathcal{G}}_s^t), (\mathbb{P}_{(x,k)})_{x \in \bar{\Omega}, k \in \{1,2,3\}} \right)_{0 \leq s \leq t} \text{ est un processus de Markov} \\ \text{dont les probabilités de transition vérifient (3.15), (3.16), (3.17),} \\ \text{(3.17), (3.18), (3.19), (3.20).} \end{array} \right.$$

$$(SNS_t3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T} = \inf \left\{ s \leq t \mid \tilde{X}_s^t \in \partial\Omega \right\} \\ \omega : [0, t] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est une fonction de classe } C^2 \\ \text{telle que le processus } \left(\tilde{\varepsilon}_{s \wedge \tilde{T}}^t \omega_{\tilde{k}_{s \wedge \tilde{T}}^t}(t - s \wedge \tilde{T}, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{T}}^t) \tilde{N}_{s \wedge \tilde{T}}^{t,c} \right)_{0 \leq s \leq t} \\ \text{soit une martingale locale.} \end{array} \right.$$

$$(SNS_t4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute fonction réelle } \rho \text{ vérifiant (3.4) et (3.5)} \\ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbb{E}_y \left\{ \frac{\rho(\tilde{X}_{(\tilde{T}+h) \wedge t}^t) - \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t)}{h} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}^t \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (y \in \bar{\Omega}).$$

Proposition 3.10. *Si le système $(SNS_t) = (SNS_t1) + (SNS_t2) + (SNS_t3) + (SNS_t4)$ admet une unique solution $(\omega, \tilde{X}^t, \tilde{A}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t, (\mathbb{P}_x)_{x \in \bar{\Omega}})$ pour tout $t \in [0, T]$, alors la fonction $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\omega$ est la solution de l'équation (NS) de Navier-Stokes.*

Démonstration de la proposition 3.10.

On peut expliciter la fonction ω en utilisant le théorème d'arrêt et $((SNS_t3), t \in [0, T])$:

$$(3.50) \quad \omega_k(t, x) = \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \tilde{\varepsilon}_{s \wedge \tilde{T}}^t \omega_{\tilde{k}_{s \wedge \tilde{T}}}^t (t - s \wedge \tilde{T}, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{T}}^t) \tilde{N}_{s \wedge \tilde{T}}^{t, c} \right\}.$$

Par ailleurs, en procédant comme dans la démonstration de la proposition 3.5, le membre de droite de (3.50) s'écrit de la façon suivante :

$$(3.51) \quad \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \tilde{\varepsilon}_{s \wedge \tilde{T}}^t \omega_{\tilde{k}_{s \wedge \tilde{T}}}^t (t - s \wedge \tilde{T}, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{T}}^t) \tilde{N}_{s \wedge \tilde{T}}^{t, c} \right\} = \omega_k(t, x) + \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^{s \wedge \tilde{T}} \tilde{\varepsilon}_r^t \left[(\mathcal{L}\omega)_{\tilde{k}_r}^t - \frac{\partial \omega_{\tilde{k}_r}^t}{\partial t} \right] (t - r, \tilde{X}_r^t) dr \right\}.$$

Par conséquent, la fonction ω est solution de l'équation (T_k) . La fonction $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\omega$ est quant à elle solution de l'équation (NS') . Il reste à prouver que la fonction $\mathbf{u}$ est nulle au bord de Ω et ainsi montrer qu'elle est la solution de l'équation (NS) .

Par la proposition 3.1, il vient :

$$(3.52) \quad u(t - \tilde{T}, \tilde{X}_{\tilde{T}}^t) \cdot \nabla \rho(\tilde{X}_{\tilde{T}}^t) = 0,$$

pour toute fonction ρ vérifiant (3.4) et (3.5).

Mais sur $\{\tilde{T} < t\}$, $\tilde{X}_{\tilde{T}}^t \in \partial\Omega$; il s'ensuit que les composantes tangentielles de $\mathbf{u}$ sont nulles à la frontière, et donc que $\mathbf{u}$ est la solution de l'équation (NS) . $\square$



4

Le tourbillon comme densité d'un processus de branchement

4.1 Dualité

On construit le processus dual du processus $(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)$. La dualité signifie ici que les deux processus ont la même distribution respectivement aux temps s et $t - s$ quand ils démarrent avec une distribution uniforme sur $\bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\}$.

Ce renversement du temps permet d'interpréter le tourbillon comme la densité d'une diffusion à certains facteurs exponentiels près.

On note toujours u la solution de l'équation (NS) .

Nous avons construit un processus stochastique pour représenter le tourbillon $\omega = \text{rot } u$ comme l'espérance d'une fonctionnelle de ce processus. Dans cette section, nous allons faire apparaître le tourbillon comme une densité.

Nous allons construire un processus de Markov dont le générateur infinitésimal sera le dual de l'opérateur $L^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ dans un sens précisé plus avant.

On considère une E.D.S. analogue à l'équation (3.2) :

$$(4.1) \quad (0 \leq s \leq t) \quad \begin{cases} dX_s = \sigma dB_s + u(s, X_s) ds - n(X_s) dA_s \\ A_s = \int_0^s \mathbb{1}_{\{X_r \in \partial\Omega\}} dA_r \\ X_s \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Ce système admet une solution forte que l'on note $((X, B, A), (W, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \bar{\Omega}}), (\mathcal{F}_s)_{(s \geq 0)})$ avec $\mathbb{P}_x(\{X_0 = x\}) = 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$.

Comme dans la section (3.2), nous définissons deux processus $(k_s)_{0 \leq s \leq t}$ et $(\varepsilon_s)_{0 \leq s \leq t}$.

Dans la suite, nous supposons que tous les processus (avec ou sans $\sim$) sont définis sur le même espace de probabilité $(W, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, W étant l'espace des trajectoires dans $\bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}$.

Les relations (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20) sans les symboles $\sim$ sont valables pour les processus $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$, $(k_s)_{0 \leq s \leq t}$ et $(\varepsilon_s)_{0 \leq s \leq t}$ si l'on remplace le réel c par son opposé.

Remarques :

i) La propriété (3.12) d'intégrabilité du processus croissant $\tilde{A}^t$ reste valable pour le processus A :

$$(4.2) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \sup_{x \in \bar{\Omega}} \mathbb{E}_x \{A_s\} = 0.$$

ii) L'indépendance entre la probabilité de transition de $\tilde{\varepsilon}^t$ et sa valeur reste valable pour le processus ε . En particulier, si f désigne une fonction réelle :

$$(4.3) \quad \mathbb{E}_{(x,k)} \{f(X_s, k_s, \varepsilon_s) \mid \varepsilon_r = -\varepsilon\} = \mathbb{E}_{(x,k)} \{f(X_s, k_s, -\varepsilon_s) \mid \varepsilon_r = \varepsilon\}.$$

Nous allons maintenant définir des espaces de fonctions réelles définies sur $\bar{\Omega} \times \{1,2,3\} \times \{-1,1\}$. Ces définitions sont similaires à celles de $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ ou $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$, mais les fonctions de ces nouveaux espaces ne dépendent plus du temps.

Définitions :

i) $\mathcal{H} = \{f : \bar{\Omega} \times \{1,2,3\} \times \{-1,1\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ bornée, } C^2 \text{ en la première variable}\}$

ii) $\mathcal{H}_{\partial\Omega} = \left\{f \in \mathcal{H} \mid \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$.

Si $f \in \mathcal{H}$ ou $f \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}$ on écrira $f^\#(x,k)$ ou $f_k^\#(x)$ pour $f(x,k,1)$.

iii) $\mathcal{H}^* = \{f \in \mathcal{H} \mid f(x,k,\varepsilon) = \varepsilon f^\#(x,k) \quad (x,k,\varepsilon) \in \bar{\Omega} \times \{1,2,3\} \times \{-1,1\}\}$.

iv) $\mathcal{H}_{\partial\Omega}^* = \mathcal{H}^* \cap \mathcal{H}_{\partial\Omega}$.

Proposition 4.1. *Le générateur infinitésimal $L_s^{(X,k,\varepsilon)}$ du processus $(X_s, k_s, \varepsilon_s)_{0 \leq s \leq t}$ vérifie pour $f \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}^*$:*

$$(4.4) \quad \begin{aligned} L_s^{(X,k,\varepsilon)} \varepsilon f_k^\#(x) &= \varepsilon L_s^X f_k^\#(x) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (s,x) - c \right) \varepsilon f_{\tau(k)}^\#(x) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (s,x) + c \right) \varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(x) \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (s,x) - c \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (s,x) + c \right| \right\} \varepsilon f_k^\#(x). \end{aligned}$$

De plus, $L_s^{(X,k,\varepsilon)}$ et $L_{t-s}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ commutent :

$$(4.5) \quad \langle L_s^{(X,k,\varepsilon)} h ; g \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \langle h ; L_{t-s}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} g \rangle_{\lambda \otimes m_3} \quad (g, h \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}^*),$$

λ représente la mesure de Lebesgue normalisée sur Ω et m_3 la mesure de comptage sur $\{1,2,3\}$.

Notations :

On désigne dans la suite les processus de Markov (X, k, ε) et $(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)$ par Z et $\tilde{Z}^t$ respectivement.

Démonstration de la proposition 4.1.

L'expression (4.4) du générateur infinitésimal $L_s^{(X, k, \varepsilon)}$ s'obtient de manière analogue à celle du générateur $L_{t-s}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$. Or la proposition 3.3 propose un développement (3.28) du générateur $L^{(t, \tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ dans lequel il suffit de remplacer $L^{(t, \tilde{X}^t)}$ par $L_{t-s}^{\tilde{X}^t}$:

$$\begin{aligned}
 L_{t-s}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)} \varepsilon f_k^\#(t-s, x) &= \varepsilon L_{t-s}^{\tilde{X}^t} f_k^\#(x) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) + c \right) \varepsilon f_{\tau(k)}^\#(x) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) - c \right) \varepsilon f_{\tau^{-1}(k)}^\#(x) \\
 &- \frac{1}{2} \left\{ \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}} + \frac{\partial u_{\tau(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) + c \right| \right. \\
 &\left. + \left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k)}}{\partial x_k} \right) (t-s, x) - c \right| \right\} \varepsilon f_k^\#(x).
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Il reste à démontrer l'égalité (4.5). On remarque tout d'abord, en comparant (4.4) et (4.6), que les deux générateurs infinitésimaux $L_s^{(X, k, \varepsilon)}$ et $L_{t-s}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t, \tilde{\varepsilon}^t)}$ sont définis avec les dérivées de la vitesse $\mathbf{u}$ considérées au même temps s .

Les générateurs infinitésimaux L_s^Z et $L_{t-s}^{\tilde{Z}^t}$ sont composés de trois termes de nature distincte :

- les générateurs de X ou $\tilde{X}^t$,
- les termes en f_k ,
- les termes en $f_{\tau(k)}$ et $f_{\tau^{-1}(k)}$.

Nous allons vérifier que chacun de ces trois types de termes commutent.

- Pour L^X et $L^{\tilde{X}}$, on intègre par parties relativement à la mesure de Lebesgue λ , en utilisant la formule de Green pour le terme du Laplacien.

Pour le terme avec gradient, les intégrales suivantes disparaissent :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(s, x) \cdot \nabla (h_k g_k)(x) d\lambda(x) = \int_{\partial\Omega} (h_k g_k)(\gamma) \mathbf{u}(s, \gamma) \cdot \mathbf{n}(\gamma) d\gamma - \int_{\Omega} (h_k g_k)(x) \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) d\lambda(x),$$

puisque $\mathbf{u}$ est solution de l'équation de Navier-Stokes ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et $\mathbf{u}(\cdot, \gamma) \cdot \mathbf{n}(\gamma) = 0$ pour $\gamma \in \partial\Omega$).

Ainsi,

$$\langle L_s^X h ; g \rangle_\lambda = \langle h ; L_{t-s}^{\tilde{X}^t} g \rangle_\lambda \quad (g, h \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}^*).
 \tag{4.7}$$

- Pour les termes en f_k , on obtient pour les mêmes raisons :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \left\langle \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^i(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^i(k)}}{\partial x_k} - i.c \right| h_k ; g_k \right\rangle_{m_3}(s, x) \\ &= \left\langle \left| \frac{\partial u_{\tau^{-i}(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{\tau^{-i}(k)}}{\partial x_k} - i.c \right| g_k ; h_k \right\rangle_{m_3}(s, x). \end{aligned}$$

- Pour les termes en $f_{\tau(k)}$ et $f_{\tau^{-1}(k)}$, on remarque que la dérivée $\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}}$ peut s'écrire $\frac{\partial u_{\tau^{-1}(\tilde{k})}}{\partial x_{\tilde{k}}}$ en posant $\tilde{k} = \tau(k)$.

Ainsi pour $i \in \{1, -1\}$,

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^i(k)}} + \frac{\partial u_{\tau^i(k)}}{\partial x_k} - i.c \right) h_{\tau^i(k)} ; g_k \right\rangle_{m_3}(s, x) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial u_{\tau^{-i}(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{\tau^{-i}(k)}}{\partial x_k} - i.c \right) g_{\tau^{-i}(k)} ; h_k \right\rangle_{m_3}(s, x). \end{aligned}$$

La conclusion de la proposition découle de l'intégration de (4.7) avec la mesure m_3 et de (4.9) et (4.8) avec la mesure λ . $\square$

Notations :

Si w est une fonction de $[0, t]$ à valeurs dans $\bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}$, on note respectivement $X_s(w)$, $k_s(w)$ et $\varepsilon_s(w)$ les projections canoniques sur $\bar{\Omega}$, $\{1, 2, 3\}$ et $\{-1, 1\}$.

Définitions :

- On pose $C_t = \{w : [0, t] \rightarrow \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\} ; X_*(w) \text{ est continue}\} \subset W$.
- Si $w \in C_t$, on définit $\tilde{w} \in C_t$ par $\tilde{w}_s = w_{t-s}$ pour $s \in [0, t]$.
- Soit $F : C_t \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle mesurable et bornée ; on définit $\tilde{F}$ par $\tilde{F}(w) = F(\tilde{w})$ pour $w \in C_t$.

On peut énoncer un résultat de dualité entre les processus $(Z_s)_{0 \leq s \leq t}$ et $(\tilde{Z}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$.

Notation :

Si H désigne une v.a. :

$$(4.10) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{H\} = \int \mathbb{E}_{(x, k)} \{H\} d\lambda(x) dm_3(k).$$

Proposition 4.2. Soit $F : C_t \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée. On suppose qu'il existe une fonction réelle G telle que la fonction F soit de la forme :

$$F(w) = \varepsilon_0(w) \varepsilon_t(w) G(X(w), k(w)).$$

Alors :

$$(4.11) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{F\} = \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{\tilde{F}\}.$$

Avant de démontrer cette proposition, on va énoncer et démontrer deux lemmes concernant les semi-groupes associés aux processus Z et $\tilde{Z}^t$.

Notations :

Si $g \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}^*$, on pose :

$$(4.12) \quad T_{r,s}^Z g(x, k, \varepsilon) = \mathbb{E} \left\{ g(Z_s) \mid X_r = x, k_r = k, \varepsilon_r = \varepsilon \right\} \quad (0 \leq r \leq s \leq t)$$

et

$$(4.13) \quad T_{r,s}^{\tilde{Z}^t} g(x, k, \varepsilon) = \mathbb{E} \left\{ g(\tilde{Z}_s^t) \mid \tilde{X}_r^t = x, \tilde{k}_r^t = k, \tilde{\varepsilon}_r^t = \varepsilon \right\} \quad (0 \leq r \leq s \leq t).$$

Lemme 4.3. Si $g \in \mathcal{H}^*$ alors $T_{r,s}^Z g \in \mathcal{H}^*$ et $T_{r,s}^{\tilde{Z}^t} g \in \mathcal{H}^*$.

Démonstration du lemme 4.3.

Les arguments de la démonstration pour $T_{r,s}^Z$ et $T_{r,s}^{\tilde{Z}^t}$ sont identiques. On se restreint par conséquent à la démonstration dans le cas de $T_{r,s}^Z$.

La continuité et la différentiabilité de $x \mapsto T_{r,s}^Z g(x, k, \varepsilon)$ sont classiques : le cas homogène est traité dans [REVUZ, YOR, (1991)] page 260, le cas non-homogène dans [PAZY, (1983)]. on va montrer pour $T_{r,s}^Z g$ la propriété des fonctions de $\mathcal{H}^*$ concernant ε .

Par (4.3), il vient :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} T_{r,s}^Z g(x, k, \varepsilon) &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \{ \varepsilon_s g^\#(X_s, k_s) \mid \varepsilon_r = \varepsilon \} \mid X_r = x, k_r = k \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \varepsilon \mathbb{E} \{ g^\#(X_s, k_s) \mid \varepsilon_r = 1 \} \mid X_r = x, k_r = k \right\} \\ &= \varepsilon T_{r,s}^Z g(x, k, 1). \end{aligned}$$

□

Un second lemme traite de la dualité entre T^Z et $T^{\tilde{Z}^t}$:

Lemme 4.4. Pour $g, h \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}^*$, on a :

$$(4.15) \quad \langle T_{r,s}^Z g ; h \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \left\langle g ; T_{t-s, t-r}^{\tilde{Z}^t} h \right\rangle_{\lambda \otimes m_3} \quad (0 \leq r \leq s \leq t).$$

Démonstration du lemme 4.4.

On effectue le calcul de dérivation suivant :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} \left\langle T_{r,s+u}^Z g ; T_{t-s, t-s-u}^{\tilde{Z}^t} h \right\rangle_{\lambda \otimes m_3} \\ &= \left\langle L_{s+u}^Z T_{r,s+u}^Z g ; T_{t-s, t-s-u}^{\tilde{Z}^t} h \right\rangle_{\lambda \otimes m_3} - \left\langle T_{r,s+u}^Z g ; L_{t-s-u}^{\tilde{Z}^t} T_{t-s, t-s-u}^{\tilde{Z}^t} h \right\rangle_{\lambda \otimes m_3}. \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule en vertu de (4.5).

En prenant $u = 0$ et $u = r - s$ dans l'expression $\left\langle T_{r,s+u}^Z g ; T_{t-s, t-s-u}^{\tilde{Z}^t} h \right\rangle_{\lambda \otimes m_3}$, on aboutit à (4.15). □

Démonstration de la proposition 4.2.

On note 1 la fonction de $\mathcal{H}_{\partial\Omega}$ identiquement égale à 1 , et l'on écrit 1^* pour la fonction de $\mathcal{H}_{\partial\Omega}^*$ telle que $1^*(x, k, \varepsilon) = \varepsilon$.

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq t$ et $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$:

$$(4.17) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \varepsilon_0 h_1^\#(Z_{s_1}) \times \dots \times h_n^\#(Z_{s_n}) \varepsilon_t \right\} = \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \tilde{\varepsilon}_0^t h_1^\#(\tilde{Z}_{t-s_1}^t) \times \dots \times h_n^\#(\tilde{Z}_{t-s_n}^t) \tilde{\varepsilon}_t^t \right\}.$$

On calcule le membre de gauche de (4.17):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \varepsilon_0 h_1^\#(Z_{s_1}) \times \dots \times h_n^\#(Z_{s_n}) \varepsilon_t \right\} \\ &= \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \varepsilon_0 h_1^\#(Z_{s_1}) \times \dots \times (h_n^\# \times T_{s_n, t}^Z 1^*)(Z_{s_n}) \right\} \\ &= \dots \\ &= \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \varepsilon_0 (h_1^\# \times T_{s_1, s_2}^Z (h_2^\# \times T_{s_2, s_3}^Z (\dots (h_n^\# \times T_{s_n, t}^Z 1^*) \dots)))(Z_{s_1}) \right\}. \end{aligned}$$

Le lemme 4.3 implique que la fonction $T_{s_n, t}^Z 1^*$ appartient à $\mathcal{H}_{\partial\Omega}^*$, tout comme la fonction $h_1^\# \times T_{s_1, s_2}^Z (h_2^\# \times T_{s_2, s_3}^Z (\dots (h_n^\# \times T_{s_n, t}^Z 1^*) \dots))$. On peut par conséquent appliquer la proposition 4.2, et procéder de la même manière avec le processus Z pour retrouver le membre de droite de (4.17):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \varepsilon_0 (h_1^\# \times T_{s_1, s_2}^Z (h_2^\# \times T_{s_2, s_3}^Z (\dots (h_n^\# \times T_{s_n, t}^Z 1^*) \dots)))(Z_{s_1}) \right\} \\ &= \left\langle 1^* ; T_{0, s_1}^Z (h_1^\# \times T_{s_1, s_2}^Z (\dots (h_n^\# \times T_{s_n, t}^Z 1^*) \dots)) \right\rangle_{\lambda \otimes m_3} \\ &= \left\langle h_1^\# \times T_{t-s_1, t}^{\tilde{Z}} 1^* ; T_{s_1, s_2}^Z (h_2^\# \times T_{s_2, s_3}^Z (\dots (h_n^\# \times T_{s_n, t}^Z 1^*) \dots)) \right\rangle_{\lambda \otimes m_3} \\ &= \dots \\ &= \left\langle T_{0, t-s_n}^{\tilde{Z}} (h_n^\# \dots (h_1^\# \times T_{t-s_1, t}^{\tilde{Z}} 1^*) \dots) ; 1^* \right\rangle_{\lambda \otimes m_3} \\ &= \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \tilde{\varepsilon}_0^t (h_n^\# \times T_{t-s_n, t-s_{n-1}}^{\tilde{Z}} (h_{n-1}^\# \times T_{t-s_{n-1}, t-s_{n-2}}^{\tilde{Z}} (\dots h_1^\# \times T_{t-s_1, t}^{\tilde{Z}} 1^*) \dots))(\tilde{Z}_{t-s_n}^t) \right\} \\ &= \dots \\ &= \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ \tilde{\varepsilon}_0^t h_1^\#(\tilde{Z}_{t-s_1}^t) \times \dots \times h_n^\#(\tilde{Z}_{t-s_n}^t) \tilde{\varepsilon}_t^t \right\}. \end{aligned}$$

□

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous allons préciser la notion de dualité qu'il existe entre les processus $(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)$ et (X, k) .

Proposition 4.5. $\lambda \otimes m_3$ est une mesure invariante pour les processus (X, k) et $(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)$. i.e. pour tout $s \in [0, t]$ et $f : \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée,

$$(4.18) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{f(X_s, k_s)\} = \int f d(\lambda \otimes m_3) = \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{f(\tilde{X}_s^t, \tilde{k}_s^t)\}.$$

Démonstration de la proposition 4.5.

Les deux processus sont markoviens; par conséquent, pour tout $s \geq 0$, $T_{0,s}^{(X,k)} 1 = 1 = T_{0,s}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)} 1$.

Par ailleurs, le lemme 4.4 reste valable si l'on remplace les processus Z et $\tilde{Z}^t$ par (X, k) et $(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)$ respectivement; (4.15) s'écrit pour $g, h : \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(4.19) \quad \langle T_{r,s}^{(X,k)} g ; h \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \langle g ; T_{t-s, t-r}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)} h \rangle_{\lambda \otimes m_3} \quad (0 \leq r \leq s \leq t).$$

Prenant $r = 0$, $g = f$ et $h = 1$ dans (4.19), il vient :

$$(4.20) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{f(X_s, k_s)\} = \langle T_{0,s}^{(X,k)} f ; 1 \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \langle f ; T_{t-s, t}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)} 1 \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \int f d(\lambda \otimes m_3).$$

Prenant $r = 0$, $h = f$ et $g = 1$ dans (4.19), il vient :

$$(4.21) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{f(\tilde{X}_{t-s}^t, \tilde{k}_{t-s}^t)\} = \langle T_{t-s, t}^{(\tilde{X}^t, \tilde{k}^t)} f ; 1 \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \langle f ; T_{0,s}^{(X,k)} 1 \rangle_{\lambda \otimes m_3} = \int f d(\lambda \otimes m_3).$$

Les égalités (4.20) et (4.21) impliquent (4.18). $\square$

Remarques :

i) λ est une mesure invariante pour les processus $\tilde{X}$ et X :
pour tout nombre $s \in [0, t]$ et toute fonction f borélienne et bornée,

$$(4.22) \quad \mathbb{E}_\lambda \{f(X_s)\} = \int f d\lambda = \mathbb{E}_\lambda \{f(\tilde{X}_s)\}.$$

Ceci est une conséquence de (4.7).

ii) On peut s'interroger sur la raison pour laquelle nous n'utilisons pas un principe de dualité similaire pour la mesure $\lambda \otimes m_3 \otimes m_2$, où m_2 serait la mesure de comptage sur $\{-1, 1\}$. En fait, en prenant cette mesure et en appliquant l'égalité de dualité (4.11), on obtient l'égalité triviale $0 = 0$. Cela est dû à la structure multiplicative en ε des fonctions de $\mathcal{H}^*$ et de (4.3). Nous sommes par conséquent contraint d'utiliser la mesure $\lambda \otimes m_3$ qui n'est pas invariante à cause des processus ε et $\tilde{\varepsilon}^t$.

On va maintenant appliquer les résultats de la proposition 4.2 à une fonctionnelle spécifique.

Théorème 4.6. Soit u la solution de (NS) définie sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$; on pose $\omega = \text{rot } u$ et on choisit $\mathbf{C} = (c, c, c)^t$ de sorte que $\omega_k(t, x) + c \geq \alpha > 0$ pour $0 \leq t \leq T$ et $x \in \bar{\Omega}$; on note $\omega^c = \omega + \mathbf{C}$.

Les processus M_t , N_t , O_t sont définis par (4.24), (4.25), (4.26).

Alors pour tout $h \in \mathcal{H}_{\partial\Omega}$ on a une égalité de dualité :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega \times \{1,2,3\}} h_k(x) (\omega_k(t, x) + c) d(\lambda \otimes m_3)(x, k) \\ &= \int_{\Omega \times \{1,2,3\}} (\omega_k(0, x) + c) \mathbb{E}_{(x, k)} \{ \varepsilon_t h_{k_t}(X_t) M_t N_t O_t \} d(\lambda \otimes m_3)(x, k) \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned}$$

Définitions :

On pose, pour tout $w \in W$,

$$(4.24) \quad M_t(w) = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial \omega_{k_r(w)}^c}{\omega_{k_r(w)}^c} (r, X_r(w)) dA_r(w) \right),$$

$$(4.25) \quad N_t(w) = \exp \left(\int_0^t \psi_c(r, X_r(w), k_r(w)) dr \right),$$

$$(4.26) \quad O_t(w) = \exp \left(- \int_0^t \frac{C \cdot \nabla u_{k_r(w)}}{\omega_{k_r(w)}^c} (r, X_r(w)) dr \right),$$

ψ_c est définie par (3.32).

Démonstration du théorème 4.6.

On définit la fonctionnelle F sur C_t : pour $w \in W$,

$$(4.27) \quad F(w) = \varepsilon_0(w) \omega_{k_0(w)}^c(0, X_0(w)) \varepsilon_t(w) h_{k_t(w)}(X_t(w)) M_t(w) N_t(w) O_t(w).$$

F satisfait aux hypothèses de la proposition 4.2. Elle admet comme fonction duale :

$$(4.28) \quad \tilde{F}(w) = \tilde{\varepsilon}_0(w) h_{\tilde{k}_0(w)}(\tilde{X}_0(w)) \tilde{\varepsilon}_t(w) \omega_{\tilde{k}_t(w)}^c(0, \tilde{X}_t(w)) \tilde{M}_t(w) \tilde{N}_t(w) \tilde{O}_t(w),$$

où les fonctionnelles $\tilde{M}_t(w)$, $\tilde{N}_t(w)$ et $\tilde{O}_t(w)$ sont respectivement égales à $\tilde{M}_t^{t, \omega^c}$, $\tilde{N}_t^{t, c}$ et $\tilde{O}_t^{t, \omega^c}$. Par conséquent, la proposition 4.2 donne :

$$(4.29) \quad \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \{ \omega_{k_0}^c(0, X_0) \varepsilon_t h_{k_t}(X_t) M_t N_t O_t \} = \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ h_{\tilde{k}_0^t}(\tilde{X}_0^t) \tilde{\varepsilon}_t^t \omega_{\tilde{k}_t^t}^c(0, \tilde{X}_t^t) \tilde{M}_t^{t, \omega^c} \tilde{N}_t^{t, c} \tilde{O}_t^{t, \omega^c} \right\}.$$

Par ailleurs, si l'on intègre l'égalité (3.48) avec $h_k(x) d(\lambda \otimes m_3)(x, k)$, on obtient :

$$(4.30) \quad \int_{\Omega \times \{1,2,3\}} h_k(x) (\omega_k^c(t, x)) d(\lambda \otimes m_3)(x, k) = \mathbb{E}_{\lambda \otimes m_3} \left\{ h_{\tilde{k}_0^t}(\tilde{X}_0^t) \tilde{\varepsilon}_t^t \omega_{\tilde{k}_t^t}^C(0, \tilde{X}_t^t) \tilde{M}_t^{t, \omega^c} \tilde{N}_t^{t, c} \tilde{O}_t^{t, \omega^c} \right\}.$$

La conclusion du théorème (4.23) vient de la confrontation entre (4.29) et (4.30). $\square$

4.2 Processus de branchement associé au tourbillon

Le but de cette partie consiste à décrire le tourbillon ω comme la densité d'un processus de branchement.

On peut se reporter à [DYNKIN, (1991)] pour une introduction précise sur les processus de branchement.

Soit u la solution de l'équation de Navier-Stokes (NS) ; ω représente le tourbillon associé à cette vitesse : $\omega = \text{rot} u$.

Soit $\alpha > 0$, on pose $c = \alpha + \sup_{1 \leq i \leq 3} \sup_{s \in [0, T]} \sup_{x \in \Omega} |\omega_i(s, x)|$, $C = (c, c, c)^t$ et $\omega^c = \omega + C$.

Cette fonction est solution de l'équation (2.9).

L'égalité (4.23) du théorème 4.6 ne permet pas d'envisager la composante $\omega_k^c(t, x)$ du tourbillon comme la densité du processus $(X_s, k_s, \varepsilon_s)_{0 \leq s \leq t}$ puisqu'il subsiste trois facteurs exponentiels M_t , N_t et O_t .

On pourrait concevoir les exposants de M , N et O comme des taux de destruction (killing rates) du processus de Markov $(X_s, k_s, \varepsilon_s)_{0 \leq s \leq t}$. Toutefois, ces quantités ne restent pas toujours négatives, et ces taux de destruction variables, lorsqu'ils sont positifs, doivent plutôt être assimilés à des taux de création.

On va décrire un processus de branchement construit à partir du processus de Markov Z , et expliquer comment peuvent être interprétés ces taux de destruction-crédation grâce à ce processus de branchement.

Un processus de branchement prend ses valeurs parmi les combinaisons linéaires de mesures de Dirac ; il peut être interprété comme un système de particules se déplaçant indépendamment les unes des autres suivant un processus de diffusion ; dans notre étude, ce processus est Z , et les mesures de Dirac du processus de branchement sont donc définies sur $\bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}$.

Notations :

Si le processus de branchement Y s'écrit : $Y_t = \sum_i \alpha_t^i \delta_{(X_t^i, k_t^i, \varepsilon_t^i)}$ alors on note l'intégration par rapport à cette mesure aléatoire :

$$\langle h ; Y_t \rangle = \sum_i \alpha_t^i h(X_t^i, k_t^i, \varepsilon_t^i) \quad (h \in \mathcal{H}^*).$$

Remarque :

Le mouvement d'une particule ne dépend pas directement des particules voisines. Cependant, le terme de dérive de l'E.D.S. gouvernant le processus X (et donc Z) est la vitesse qui dépend du tourbillon sur l'ensemble du domaine ; or ce tourbillon apparaît comme la densité des particules.

On va maintenant décrire les temps de branchements ; c'est-à-dire les dates de naissance et de mort des particules.

Définitions :

i)

$$\varphi_{\partial\Omega}(r, x, k) = \frac{\partial \omega_k^c}{\partial n}(r, x),$$

ii)

$$\begin{aligned} \varphi_{\Omega}(r, x, k) &= \psi_c(r, x, k) - \frac{C \cdot \nabla u_k(r, x)}{\omega_k(r, x)} \\ &= \frac{\partial u_k}{\partial x_k}(r, x) + \left\{ \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau(k)}}(r, x) + \frac{c + \omega_{\tau^{-1}(k)}(r, x)}{2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_{\tau^{-1}(k)}}(r, x) - \frac{c + \omega_{\tau(k)}(r, x)}{2} \right| \right\} - \frac{C \cdot \nabla u_k(r, x)}{\omega_k(r, x)}. \end{aligned}$$

iii) On définit une fonctionnelle croissante de $(X_s, k_s)_{0 \leq s \leq t}$:

$$(4.31) \quad K_s = \int_0^s |\varphi_{\partial\Omega}(r, X_r, k_r)| \, dA_r + \int_0^s |\varphi_{\Omega}(r, X_r, k_r)| \, dr \quad (0 \leq s \leq t).$$

Cette fonctionnelle de la trajectoire du processus Z va régler le temps entre deux branchements : au temps t , la probabilité pour qu'une particule survive jusqu'au temps $t + \delta t$ est $e^{-(K_t + \delta t - K_t)}$; et ainsi, la première date de branchement U_1 vérifie $\mathbb{P}(\{U_1 > u\}) = e^{-K_u}$. En utilisant l'inverse càdlàg K^{-1} de la fonction $s \mapsto K_s$ ($K_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 ; K_s > t\}$), on peut interpréter la loi de U_1 à partir d'une variable aléatoire ξ_1 de loi exponentielle de paramètre un :

$$U_1 \stackrel{\text{loi}}{\sim} K_{\xi_1}^{-1}.$$

La première intégrale dans (4.31) ne croît qu'à la frontière de Ω ; le mécanisme de branchement qu'il gouverne n'intervient par conséquent qu'à la frontière.

La seconde intégrale dans (4.31) induit un phénomène de branchement à l'intérieur du domaine Ω .

Afin de décrire la nature des branchements, on considère une fonction génératrice α .

Définitions :

On pose pour tout $t \in [0, T]$, tout $x \in \overline{\Omega}$, tout $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$(4.32) \quad \alpha(t, x, k, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(t, x, k, n) z^n$$

avec

$$(4.33) \quad p(t, x, k, n) = 0 \text{ si } n \notin \{0, 2\},$$

$$(4.34) \quad p(t, x, k, 0) = 1 \text{ si } \varphi_{\Omega}(t, x, k) < 0 \text{ et } x \notin \partial\Omega,$$

$$(4.35) \quad p(t, x, k, 2) = 1 \text{ si } \varphi_{\Omega}(t, x, k) \geq 0 \text{ et } x \notin \partial\Omega,$$

$$(4.36) \quad p(t, x, k, 0) = 1 \text{ si } \varphi_{\partial\Omega}(t, x, k) < 0 \text{ et } x \in \partial\Omega,$$

$$(4.37) \quad p(t, x, k, 2) = 1 \text{ si } \varphi_{\partial\Omega}(t, x, k) \geq 0 \text{ et } x \in \partial\Omega.$$

Cette fonction α n'intervient pas dans la détermination des instants de branchement, mais elle régit le nombre de particules qui naissent ou meurent à ces instants.

Définition :

On note Y le processus de branchement déterminé par le processus de Markov Z , la fonctionnelle K et la fonction génératrice α .

On commence par évaluer les effets de Y sur la masse de Dirac au point $(x, k, 1)$, notée $\delta_{(x, k, 1)}$ ou $\delta_{(x, k)}$.

Notation :

Si $h \in \mathcal{H}^*$ et que $h^\# \geq 0$, on note :

$$(4.38) \quad w_t(a, x, k) = \mathbb{E}_{\delta_{(x, k)}} \{ \exp(-a \langle h ; Y_t \rangle) \}.$$

Il est démontré dans [DYNKIN, (1991)] que la fonction $w(1, \dots)$ satisfait à l'équation suivante :

$$(4.39) \quad w_t(1, x, k) = \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^t \bar{\alpha}(s, X_s, k_s, w_{t-s}(1, X_s, k_s)) dK_s + \exp(-h(X_t, k_t, \varepsilon_t)) \right\},$$

où $\bar{\alpha}(s, x, k, z) = \alpha(s, x, k, z) - z$.

On note $\frac{\partial}{\partial a} w_t(0, x, k) = -\mathbb{E}_{\delta_{(x, k)}} \langle h ; Y_t \rangle$ par $v_t(x, k)$.

En remplaçant h par ah dans (4.39) et en prenant la dérivée par rapport à a en zéro, on obtient :

$$(4.40) \quad v_t(x, k) = \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^t [\beta(s, X_s, k_s) - 1] v_{t-s}(X_s, k_s) dK_s - h(X_t, k_t, \varepsilon_t) \right\},$$

où $\beta(s, x, k) = \sum_{n \geq 0} n.p(s, x, k, n)$;

$\beta(s, x, k)$ représente l'espérance du nombre de naissances à l'instant s au point $(x, k) \in \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\}$.

La bornitude de la fonction β assure que le nombre de particules n'explose pas en un temps fini ([HARRIS, (1963)], page 100).

Théorème 4.7. Soit $(Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ le processus de branchement associé à

$((X_s, k_s, \varepsilon_s)_{0 \leq s \leq t} ; (K_s)_{0 \leq s \leq t} ; \alpha)$.

Alors pour toute fonction $h \in \mathcal{H}^*$ avec $h^\#$ positive, et tout couple $(x, k) \in \bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\}$:

$$(4.41) \quad \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ h(X_t, k_t, \varepsilon_t) \exp \left(\int_0^t \varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) dA_s + \int_0^t \varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) ds \right) \right\} = \mathbb{E}_{\delta_{(x, k)}} \langle h ; Y_t \rangle.$$

Démonstration du théorème 4.7.

Les égalités (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) et (4.37) impliquent :

$$(4.42) \quad (\beta(s, x, k) - 1) dK_s = \varphi_{\partial\Omega}(s, x, k) dA_s + \varphi_{\Omega}(s, x, k) \mathbb{1}_{\{x \in \Omega\}} ds.$$

En remplaçant le membre de gauche de (4.42) dans (4.40), on obtient l'équation en v suivante :

$$(4.43) \quad \begin{aligned} v_t(x, k) = & \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^t \varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s) dA_s \right\} \\ & + \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^t \varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s) ds \right\} - \mathbb{E}_{(x, k)} \{ h(X_t, k_t, \varepsilon_t) \}. \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de démontrer que $-\tilde{v}$, avec $\tilde{v}$ définie par (4.44), est l'unique solution de l'équation (4.43) :

$$(4.44) \quad \tilde{v}_s(x, k) = \mathbb{E}_{(x, k, 1)} \left\{ h(X_s, k_s, \varepsilon_s) \exp \left(\int_0^s \varphi_{\partial\Omega}(r, X_r, k_r) dA_r \right) \exp \left(\int_0^s \varphi_{\Omega}(r, X_r, k_r) dr \right) \right\}.$$

La définition de la fonction $\varphi_{\partial\Omega}$ permet de réduire l'écriture de M_t :

$$M_t = \exp \left(\int_0^t \varphi_{\partial\Omega}(s, x_s, k_s) dA_s \right)$$

De même, le processus produit $N_t O_t$ s'exprime grâce à la fonction φ_{Ω} :

$$N_t O_t = \exp \left(\int_0^t \varphi_{\Omega}(s, x_s, k_s) ds \right)$$

On utilise la propriété de Markov pour calculer :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(x, k, 1)} \left\{ \int_0^t \varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) \tilde{v}_{t-s}(X_s, k_s, \varepsilon_s) dA_s + \int_0^t \varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) \tilde{v}_{t-s}(X_s, k_s) ds \right\} \\ &= \mathbb{E}_{(x, k, 1)} \left\{ \int_0^t \varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) h(X_t, k_t, \varepsilon_t) \frac{M_t(N_t O_t)}{M_s(N_s O_s)} dA_s \right\} \\ & \quad + \mathbb{E}_{(x, k, 1)} \left\{ \int_0^t \varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) h(X_t, k_t, \varepsilon_t) \frac{M_t(N_t O_t)}{M_s(N_s O_s)} ds \right\} \\ &= \mathbb{E}_{(x, k, 1)} \left\{ h(X_t, k_t, \varepsilon_t) M_t(N_t O_t) \int_0^t d \left(\frac{-1}{M_s(N_s O_s)} \right) \right\} \\ &= \tilde{v}_t(x, k) - \mathbb{E}_{(x, k, 1)} \{ h(X_t, k_t, \varepsilon_t) \}. \end{aligned}$$

Ce calcul démontre que $-\tilde{v}$ est solution de l'équation (4.43).

Il reste à démontrer l'unicité de la solution pour cette équation ; c'est l'objet du lemme suivant. $\square$

Lemme 4.8. *Sous les hypothèses du théorème 4.7, l'équation (4.43) admet une unique solution bornée.*

Démonstration du lemme 4.8.

On considère deux solutions bornées de l'équation (4.43) ; leur différence, notée v , vérifie l'équation suivante :

$$(4.45) \quad v_t(x, k) = \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^t \varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s) dA_s + \int_0^t \varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s) ds \right\}.$$

On définit alors une fonction croissante du temps qui majore la fonction v :

$$(4.46) \quad v_t^*(x, k) = \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_0^t |\varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s)| dA_s + \int_0^t |\varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s)| ds \right\}.$$

Puisque les fonctions $\varphi_{\partial\Omega}$, v et φ_{Ω} sont bornées, (4.45) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq u \leq t} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u^*(x, k)| \\ &= \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_t^*(x, k)| \leq C \sup_{0 \leq u \leq t} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u(x, k)| \times \left\{ \sup_{x \in \bar{\Omega}} \mathbb{E}_x [A_t] + t \right\}, \end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{0 \leq u \leq t} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u(x, k)| \leq C \sup_{0 \leq u \leq t} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u(x, k)| \times \left\{ \sup_{x \in \bar{\Omega}} \mathbb{E}_x [A_t] + t \right\}.$$

Mais par (4.2), $\sup_{x \in \bar{\Omega}} \mathbb{E}_x [A_t] + t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$; par conséquent, il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\sup_{u \leq t_0} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u(x, k)| = 0 \text{ i.e. } v_u(x, k) = 0 \text{ pour } u \in [0, t_0] \text{ et } x \in \bar{\Omega}.$$

Ainsi, on peut récrire l'égalité (4.45) :

$$(4.47) \quad \begin{aligned} v_t(x, k) &= \mathbb{E}_{(x, k)} \left\{ \int_{t_0}^t \varphi_{\partial\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s) dA_s \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \varphi_{\Omega}(s, X_s, k_s) v_{t-s}(X_s, k_s) ds \right\} \quad (t \geq t_0), \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq u \leq 2t_0} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u(x, k)| &\leq C \sup_{t_0 \leq u \leq 2t_0} \sup_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v_u(x, k)| \times \underbrace{\left\{ \sup_{x \in \bar{\Omega}} \mathbb{E}_x [A_{2t_0} - A_{t_0}] + t_0 \right\}}_{= \sup_{x \in \bar{\Omega}} \mathbb{E}_x \{A_{t_0}\}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $v_u(x, k) = 0$ pour $u \in [0, 2t_0]$ et $x \in \bar{\Omega}$.

On peut ainsi prouver que v s'annule sur la totalité de l'intervalle $[0, t]$. $\square$

Théorème 4.9. *Soit Y le processus de branchement associé au triplet $(Z ; K ; \alpha)$. Alors pour toute fonction $h \in \mathcal{H}^*$ avec $h^\#$ positive :*

$$(4.48) \quad \mathbb{E}_{(\omega_0)_k(x)d(\lambda \otimes m_3)(x, k)} \langle h ; Y_t \rangle = \langle h ; \omega^c(t, \cdot) \rangle_{\lambda \otimes m_3}.$$

Démonstration du théorème 4.9.

Les résultats du théorème 4.7 donnent après intégration :

(4.49)

$$\mathbb{E}_{(\omega_0^c)_k(x)d(\lambda \otimes m_3)(x,k)} \langle h ; Y_t \rangle = \int_{\Omega \times \{1,2,3\}} \mathbb{E}_{(x,k)} \{ \omega_{k_0}^c(0, X_0) h(X_t, k_t, \varepsilon_t) M_t N_t O_t \} d(\lambda \otimes m_3)(x, k).$$

La conclusion provient de (4.49) et (4.23). $\square$

Le théorème 4.9 établit le lien qui unit le tourbillon (augmenté de la constante $\mathbf{C}$) ω^c et le processus de branchement Y . La valeur du tourbillon à l'instant t est entièrement déterminée par la loi du processus de branchement à l'instant t . En fait, l'espérance de Y_t suffit pour déterminer la valeur du tourbillon à l'instant t . Si l'on interprète la mesure de Dirac $\delta_{(x,k)}$ par une particule placée en (x, k) , et ainsi le processus de branchement comme un processus décrivant l'évolution de particules plutôt que de masses de Dirac, le résultat de l'intégration contre la mesure $(\omega_0^c)_k(x)d(\lambda \otimes m_3)(x, k)$ pourra se concevoir ainsi : le processus Y part depuis un ensemble de particules dont la densité de présence est égale au tourbillon initial $(\omega_0^c)_k(x)$. Ainsi, le tourbillon $\omega_k^c(t, x)$ représente l'espérance de la densité de présence des particules au point (x, k) , à l'instant t .

4.3 Algorithme particulaire associé à l'équation de Navier-Stokes

Les représentations des composantes du tourbillon obtenues dans les sections précédentes utilisent le processus de Markov (X, k, ε) et le processus de branchement Y , déterminés grâce à la vitesse $\mathbf{u}$. Il est alors naturel d'essayer de trouver une approximation de la solution de l'équation de Navier-Stokes, c'est-à-dire de calculer le tourbillon puis la vitesse en simulant le processus de branchement Y pas à pas. Pour cela, on découpe l'intervalle de temps $[0, t]$ en petits intervalles de longueur δt . On fait ensuite évoluer un système de particules représentant les masses de Dirac du processus de branchement Y .

La convergence de l'algorithme présenté dans cette section n'est pas démontrée. Il correspond à une démarche heuristique laissant espérer que l'on obtient bien une approximation de la solution de l'équation de Navier-Stokes. Cette intuition est confortée par les démonstrations obtenues dans le cas de la dimension deux, sur l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier [MÉLÉARD, (1998)], [MÉLÉARD, (1999)].

L'initialisation du premier système de particules s'effectue en utilisant le tourbillon initial ω_0 obtenu comme le rotationnel la vitesse initiale $\mathbf{u}_0$.

On choisit alors un nombre réel c tel que chaque composante augmentée de c soit très grande devant 1.

On répartit N_t ($t = 0$ pour l'initialisation) particules dans l'espace d'états $\bar{\Omega} \times \{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}$ suivant la distribution ω_0 ; c'est-à-dire que pour la particule i , on tire au sort la strate $k^{(i)}$ uniformément parmi $\{1, 2, 3\}$, et la position $X^{(i)}$ suivant la densité $\frac{\omega_k + c}{\int (\omega_k + c)}$;

la charge $\varepsilon^{(i)}$ est fixée égale à un.

Le système de particules étant déterminé au temps t , on calcule son évolution jusqu'au temps $t + \delta t$: les particules se déplacent suivant la loi du processus de Markov (X, k, ε) ; les conditions de disparition ou création sont celles du processus de branchement Y . On va maintenant décrire successivement les règles de déplacement et de branchement des particules.

- Les déplacements.

La nouvelle position de la particule i est calculée en fixant la dérive, ce qui correspond à un schéma d'Euler classique si ce n'est que le processus est réfléchi à la frontière de Ω ; on pourra consulter [LÉPINGLE (1995)] pour une étude du schéma d'Euler des E.D.S. réfléchies. La position de la particule i à l'instant $t + \delta t$ est ainsi :

$$X_{t+\delta t}^{(i)} = X_t^{(i)} + B_{\delta t}^{(i)} + \mathbf{u}(t, X_t^{(i)}) \delta t - n(X_t^{(i)}) A_{\delta t}^{(i)},$$

tandis que son état est tiré au sort suivant la procédure suivante :

$$k_{t+\delta t}^{(i)} = \begin{cases} \tau(k_t^{(i)}) & \text{si } 0 \leq U < |p_1| \\ \tau^{-1}(k_t^{(i)}) & \text{si } |p_1| \leq U < |p_1| + |p_2| \\ k_t^{(i)} & \text{si } |p_1| + |p_2| \leq U \leq 1, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{k_t^{(i)}}}{\partial x_{\tau(k_t^{(i)})}} + \frac{\partial u_{\tau(k_t^{(i)})}}{\partial x_{k_t^{(i)}}} \right) (t, X_t^{(i)}) + c \right) \delta t, \\ p_2 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_{k_t^{(i)}}}{\partial x_{\tau^{-1}(k_t^{(i)})}} + \frac{\partial u_{\tau^{-1}(k_t^{(i)})}}{\partial x_{k_t^{(i)}}} \right) (t, X_t^{(i)}) - c \right) \delta t \end{aligned}$$

et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

Si un changement d'état intervient vers $\tau(k_t^{(i)})$ (respectivement vers $\tau^{-1}(k_t^{(i)})$), la charge $\varepsilon_{t+\delta t}^{(i)}$ de la particule change si la quantité p_1 est négative (respectivement si la quantité p_2 est négative).

- Les branchements.

Chaque particule est susceptible de disparaître ou de se dédoubler aussi bien à la frontière qu'à l'intérieur de Ω . Aussi, à chaque particule correspond deux v.a. exponentielles de paramètre un, $\Gamma^{(i),\Omega}$ et $\Gamma^{(i),\partial\Omega}$, qui déterminent le temps de branchement de la particule i respectivement à l'intérieur et à la frontière de Ω .

On considère également pour chaque particule deux processus aléatoires $K_t^{(i),\partial\Omega}$ et $K_t^{(i),\Omega}$ croissant respectivement à la frontière et à l'intérieur de Ω :

$$\begin{aligned} K_{t+\delta t}^{(i),\Omega} &= K_t^{(i),\Omega} + |\varphi_{\Omega}(t, X_t^{(i)}, k_t^{(i)})| \delta t, \\ K_{t+\delta t}^{(i),\partial\Omega} &= K_t^{(i),\partial\Omega} + |\varphi_{\partial\Omega}(t, X_t^{(i)}, k_t^{(i)})| A_{\delta t}^{(i)}. \end{aligned}$$

On compare les v.a. $\Gamma^{(i),\Omega}$ et $\Gamma^{(i),\partial\Omega}$ avec respectivement $K_{t+\delta t}^{(i),\Omega}$ et $K_{t+\delta t}^{(i),\partial\Omega}$.

Si $K_{t_1}^{(i),\partial\Omega} > \Gamma^{(i),\partial\Omega}$ alors il y a branchement à la frontière de Ω . On teste le signe de $\varphi_{\partial\Omega}(t, X_t^{(i)}, k_t^{(i)})$ qui détermine s'il y a dédoublement ou destruction de la particule i .

Si $K_{t_1}^{(i),\Omega} > \Gamma^{(i),\Omega}$ alors il y a branchement à l'intérieur de Ω . On teste le signe de $\varphi_{\Omega}(t, X_t^{(i)}, k_t^{(i)})$ qui détermine s'il y a dédoublement ou destruction de la particule i .

Le nombre de particules à l'instant $t + \delta t$ est $N_{t+\delta t}$. Ces particules représentent la densité du tourbillon au temps $t + \delta t$:

$$(4.50) \quad \omega_k^c(t + \delta t, x) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_{t+\delta t}} \varepsilon_{t+\delta t}^{(i)} \delta_{(X_{t+\delta t}^{(i)}, k_{t+\delta t}^{(i)})}(x, k).$$

Remarque :

Les coefficients devant les masses de Dirac peuvent être négatifs, mais globalement, si la constante c est choisie correctement par rapport au tourbillon, la somme totale de (4.50) donne une fonction positive avec une probabilité tendant vers un lorsque N_0 tend vers l'infini.

Il reste à déterminer la vitesse $\mathbf{u}$ au temps $t + \delta t$ en utilisant l'opérateur $\mathbf{Q}$. Cela revient à résoudre l'équation (2.5) avec la fonction $\omega^c(t + \delta t) - \mathbf{C}$ et à prendre le rotationnel de la solution. On obtient ainsi une vitesse, tangente à la frontière de Ω , que l'on corrige en ajoutant une vitesse $\mathbf{u}^{(cor)}$ de sorte que la vitesse résultante, définissant $\mathbf{u}(t + \delta t)$, soit nulle au bord. Il convient alors de créer des particules pour modéliser la densité du tourbillon de correction $\omega^{(cor)}$ égal à $\mathbf{rot} \mathbf{u}^{(cor)}$.

Bibliographie

BENACHOUR S., ROYNETTE B., VALLOIS P., (1998), *Branching process associated with 2d Navier-Stokes equation*, à paraître dans Revista Matematica Iberoamericana.

DYNKIN E.B., (1991), *Branching particle systems and superprocesses*, The annals of probability, vol. 19, N. 3, p. 1157-1194.

DAUTRAY R., LIONS J.L., (1985), *Analyse mathématiques et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, tome 2. CEA. MASSON.

DOLÉANS-DADE C., MEYER P.A., (1968), *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales*, Séminaire de Probabilités IV, Lecture notes in Math., N. 124, Springer-Verlag.

FREIDLIN M., (1985), *Functional integration and partial differential equations*, Princeton university press.

FREIDLIN M., (1992), *Semi-linear PDE's and limit theorems for large deviations*, Ec. d'Été XX, Saint-Flour/Fr. 1990, Lect. Notes Math. 1527, p. 1-109.

HARRIS T.E., (1963), *The theory of branching processes*, Springer-Verlag.

HEYWOOD J.G., (1980), *The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J., vol. 29, p. 639-681.

ITO S., (1961), *The existence and the uniqueness of regular solution of nonstationary Navier-Stokes equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A, 9, p. 103-140.

KARATZAS I., SCHREVE S.E., (1994), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag.

LADWIG J.A., (1981), *Existence, uniqueness, and regularity in boundary problems for mixed order elliptic systems*, Journal of Differential Equations, vol. 48, p. 1-16.

LÉPINGLE D., (1995), *Euler scheme for reflected stochastic differential equations*, [J] Math. Comput. Simul. 38, N. 1-3, p. 119-126.

MÉLÉARD S., (1998), *A probabilistic proof of the vortex method for the 2d Navier-Stokes equation*, Prépublication de mathématiques de l'Université Paris 10.

MÉLÉARD S., (1999), *Monte-Carlo approximations of the solution of the 2d Navier-Stokes equation with finite measure initial data*, Prépublication de mathématiques de l'Université Paris 10.

MÉTIVIER M., PELLAUMAIL J., (1980), *Stochastic integration*, Academic Press.

PAZY A., (1983), *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer.

REVUZ D., YOR M., (1991), *Continuous martingales and brownian motion*, Springer-Verlag.

STROOCK W., VARADHAN S.R.S., (1971), *Diffusion processes with boundary conditions*, Comm. Pure and Applied Math., vol. 24, p. 147-225.

Deuxième partie

Schéma de simulation de la loi de
certaines E.D.S. bidimensionnelles
présentant localement des coefficients
de très grande amplitude

Résumé : On s'intéresse à certaines E.D.S. bidimensionnelles présentant localement des coefficients de dérive et de diffusion de très grande amplitude. Cette particularité pose problème pour la simulation de la loi de ce type d'E.D.S. car les variations d'amplitude ne seront pas répercutées dans l'approximation. Nous proposons ici un schéma de simulation permettant de pallier cet inconvénient. En particulier, la méthode exposée conduit à remplacer la simulation de l'E.D.S. concernée au voisinage du point singulier, par la simulation d'une E.D.S. unidimensionnelle à coefficients réguliers.

Classification AMS : 60H10, 65C20, 65U05.

Mots-clés : Équation différentielle stochastique, schéma de simulation.

5

Introduction

5.1 Présentation du problème

Cette étude a fait l'objet d'une collaboration avec Sophie Mézières.

Le but de cette étude est de proposer un schéma de simulation de solution d'E.D.S. dont les coefficients de dérive ou de diffusion deviennent très grands au voisinage d'un point.

Les E.D.S. de dimension deux entrant dans le cadre du problème traité ici s'écrivent sous la forme suivante :

$$(E^{(1,\varepsilon)}) \quad \begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(\frac{X_s}{\varepsilon^2}, Y_s) ds \\ Y_t = z + \int_0^t [\frac{1}{\varepsilon} \rho(\frac{X_s}{\varepsilon^2}) + \sigma(X_s, Y_s)] dB_s + \int_0^t [\frac{1}{\varepsilon^2} \theta(\frac{X_s}{\varepsilon^2}) + b(X_s, Y_s)] ds. \end{cases}$$

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard.

Les fonctions b , σ et ϕ sont lipschitziennes, avec b et σ bornées et ϕ minorée par un réel strictement positif. Cette dernière condition interdit au processus $(X_t)_{t \geq 0}$ un second passage par le point critique qu'est l'origine.

Les supports des fonctions ρ et θ sont respectivement $]0, a_\rho[$ et $]0, a_\theta[$; les fonctions ρ et θ sont lipschitziennes à l'intérieur de leur support. ε est un paramètre amené à tendre vers zéro. L'origine apparaît alors comme un point singulier.

Dans un souci de simplification, c'est l'origine qui est l'endroit des pics. Tout autre point aurait pu être choisi. On peut également s'intéresser à une E.D.S. dont les coefficients présentent une succession finie de pics; cette situation se ramène alors au cas étudié en considérant successivement l'étude de l'équation au voisinage des pics. De même, les coefficients de dérive et de diffusion ne présentent pas nécessairement un pic au même point. Notre étude traite le cas le plus général et s'adapte à toutes ces situations particulières.

5.2 Motivation

Lors de la simulation de la solution d'une E.D.S., les schémas d'Euler ou de Milshtein ne tiennent pas compte de la forme des coefficients. En particulier, si l'un d'eux devient

très grand sur un intervalle plus petit que le pas de discrétisation, l'effet de cette grande variation d'amplitude n'est pas répercuté dans l'approximation. Notre but est donc de supprimer cet inconvénient, en proposant une méthode qui décrit la loi de la solution au sortir de la zone de turbulence.

Une étude similaire a déjà été réalisée dans l'article "Study of a brownian impulse" [MÉZIERES, ROYNETTE, (1999)] dans lequel le modèle limite, appelé impulsion brownienne, est une fonction indicatrice dont le support et la valeur sont paramétrés par un réel strictement positif amené à tendre vers 0. Mais dans cet article, les auteurs choisissent pour ρ et θ des fonctions indicatrices de même support. Ici, les fonctions ρ et θ sont plus générales : elles n'admettent pas le même support, et s'écrivent comme le produit d'une fonction indicatrice par une fonction lipschitzienne.

En fait, nos travaux conduisent à remplacer la simulation de l'équation $(E^{(1,\varepsilon)})$ à coefficients très irréguliers, par la simulation de deux E.D.S. à coefficients réguliers.

5.3 Résultats

Soit $(X_t^{(1,\varepsilon)}, Y_t^{(1,\varepsilon)})$ la solution de l'équation $(E^{(1,\varepsilon)})$. Nous décrivons, lorsque ε tend vers zéro, la loi du processus $Y^{(1,\varepsilon)}$ considéré à l'instant t où le processus $X_t^{(1,\varepsilon)}$ atteint le niveau $\varepsilon^2(a_\rho \vee a_\theta)$. Cet instant correspond au moment où le processus $X_t^{(1,\varepsilon)}$ sort de la zone d'influence des fonctions ρ et θ .

Le théorème suivant décrit cette loi à l'aide d'une E.D.S. sans zone de forte amplitude :

Théorème 6.1 Soient $(X_t^{(1,\varepsilon)}, Y_t^{(1,\varepsilon)})_{t \geq 0}$ la solution de l'E.D.S. $(E^{(1,\varepsilon)})$ et $\tilde{T}^{(1,\varepsilon)}$ le temps d'arrêt défini par :

$$\tilde{T}^{(1,\varepsilon)} = \inf\{t > 0 ; X_t^{(1,\varepsilon)} = \varepsilon^2(a_\rho \vee a_\theta)\}.$$

Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ la solution de l'E.D.S. scalaire :

$$(E^{(5)}) \quad Z_t = z + \int_0^t \frac{\rho(s)}{\sqrt{\phi(s, Z_s)}} dB_s + \int_0^t \frac{\theta(s)}{\phi(s, Z_s)} ds.$$

Alors la variable aléatoire $Y_{\tilde{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)}$ converge en loi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers $Z_{a_\rho \vee a_\theta}$.

Ce théorème permet ainsi de passer d'une E.D.S. bidimensionnelle présentant des coefficients de grande amplitude autour d'un point, à une E.D.S. scalaire à coefficients réguliers.

5.4 Plan de l'étude

La démonstration du théorème 6.1 se décompose en trois étapes :

- la première est consacrée à l'étude de la convergence, lorsque ε tend vers zéro, de la solution de l'E.D.S. $(E^{(1,\varepsilon)})$ vers la solution de cette même E.D.S. dans laquelle on néglige les termes de dérive et de diffusion ne dépendant pas du paramètre ε (respectivement b et σ) ; cette dernière équation sera référencée $(E^{(2,\varepsilon)})$ (partie 6.3) ;
- la deuxième étape permet, par un changement d'échelle, de se débarrasser du paramètre ε (partie 6.4) ;
- la troisième étape permet quant à elle de décrire la loi limite de la variable aléatoire $Y_{\tilde{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)}$ au moyen d'une E.D.S. régulière (partie 6.5).

6

Résultats

6.1 Notations et hypothèses

Quelques notations concernant les fonctions définies précédemment sont tout d'abord précisées ; Soient K_ρ et K_θ deux réels positifs vérifiant les inégalités :

$$(6.1) \quad |\rho(x) - \rho(x')| \leq K_\rho |x - x'| \quad \text{pour tout } x, x' \in [0, a_\rho],$$

$$(6.2) \quad |\theta(x) - \theta(x')| \leq K_\theta |x - x'| \quad \text{pour tout } x, x' \in [0, a_\theta].$$

Les réels a_ρ et a_θ désignant les bornes supérieures des supports des fonctions ρ et θ , nous notons :

$$(6.3) \quad \hat{a} = a_\rho \wedge a_\theta \quad ; \quad \check{a} = a_\rho \vee a_\theta.$$

La fonction réelle ϕ de deux variables, minorée par un réel η strictement positif et majorée, vérifie l'inégalité suivante, où K_ϕ est un réel positif :

$$(6.4) \quad |\phi(x, y) - \phi(x', y')| \leq K_\phi [|x - x'| + |y - y'|].$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$(N_2) \quad \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \quad \theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \quad \phi_\varepsilon(x, y) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon^2}, y\right).$$

Remarque :

Les supports respectifs de ρ_ε et θ_ε sont $[0, \varepsilon^2 a_\rho]$ et $[0, \varepsilon^2 a_\theta]$ et les deux intégrales $\int \rho_\varepsilon^2(x) dx$ et $\int \theta_\varepsilon(x) dx$ sont constantes. Ceci permettra (partie 6.4) d'obtenir une limite non triviale lorsque le paramètre ε tend vers zéro.

6.2 Énoncé du théorème

Le théorème qui suit permet de remplacer la simulation de l'E.D.S. initiale $(E^{(1,\varepsilon)})$ de dimension deux, au niveau où l'amplitude des coefficients de dérive et de diffusion devient très grande, par une E.D.S. unidimensionnelle $(E^{(5)})$ où les coefficients gardent une amplitude plus mesurée.

Théorème 6.1 Soient $(X_t^{(1,\varepsilon)}, Y_t^{(1,\varepsilon)})_{t \geq 0}$ la solution de l'E.D.S.

$$(E^{(1,\varepsilon)}) \quad \begin{cases} X_t = \int_0^t \phi\left(\frac{X_s}{\varepsilon^2}, Y_s\right) ds \\ Y_t = z + \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{X_s}{\varepsilon^2}\right) + \sigma(X_s, Y_s) \right] dB_s + \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \theta\left(\frac{X_s}{\varepsilon^2}\right) + b(X_s, Y_s) \right] ds \end{cases}$$

et $\check{T}^{(1,\varepsilon)}$ le temps d'arrêt défini par

$$\check{T}^{(1,\varepsilon)} = \inf\{t > 0 ; X_t^{(1,\varepsilon)} = \varepsilon^2(a_\rho \vee a_\theta)\}.$$

Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ la solution de l'E.D.S. scalaire :

$$(E^{(5)}) \quad Z_t = z + \int_0^t \frac{\rho(s)}{\sqrt{\phi(s, Z_s)}} dB_s + \int_0^t \frac{\theta(s)}{\phi(s, Z_s)} ds.$$

Alors la variable aléatoire $Y_{\check{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)}$ converge en loi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers $Z_{a_\rho \vee a_\theta}$.

6.3 Simplification de l'E.D.S. initiale

Le but de cette partie est de simplifier le problème. En effet, nous allons établir une équivalence en loi entre l'E.D.S. $(E^{(1,\varepsilon)})$ et une équation de même type avec des coefficients simplifiés : l'E.D.S. $(E^{(2,\varepsilon)})$. Cela nous permettra de réduire notre étude de la loi limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de $Y_{\check{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)}$ à la loi limite d'un processus solution d'une équation plus simple. On rappelle la forme de l'équation $(E^{(1,\varepsilon)})$:

$$(E^{(1,\varepsilon)}) \quad \begin{cases} X_t = \int_0^t \phi_\varepsilon(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + \int_0^t [\rho_\varepsilon(X_s) + \sigma(X_s, Y_s)] dB_s + \int_0^t [\theta_\varepsilon(X_s) + b(X_s, Y_s)] ds. \end{cases}$$

Supprimant les coefficients (σ et b) ne dépendant pas du paramètre ε , l'équation se simplifie :

$$(E^{(2,\varepsilon)}) \quad \begin{cases} X_t = \int_0^t \phi_\varepsilon(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + \int_0^t \rho_\varepsilon(X_s) dB_s + \int_0^t \theta_\varepsilon(X_s) ds. \end{cases}$$

Les hypothèses imposées sur les coefficients de ces équations assurent de manière classique l'existence d'unique solutions fortes pour ces deux équations.

Définition :

Si $(X_t^{(i,\varepsilon)}, Y_t^{(i,\varepsilon)})$ désigne la solution de l'équation $(E^{(i,\varepsilon)})$, $i = 1$ ou 2 , on définit les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned}
 T_\rho^{(i,\varepsilon)} &= \inf\{t > 0 ; X_t^{(i,\varepsilon)} = \varepsilon^2 a_\rho\} \quad i \in \{1, 2\}, \\
 T_\theta^{(i,\varepsilon)} &= \inf\{t > 0 ; X_t^{(i,\varepsilon)} = \varepsilon^2 a_\theta\} \quad i \in \{1, 2\}, \\
 \hat{T}^{(i,\varepsilon)} &= T_\rho^{(i,\varepsilon)} \wedge T_\theta^{(i,\varepsilon)} ; \check{T}^{(i,\varepsilon)} = T_\rho^{(i,\varepsilon)} \vee T_\theta^{(i,\varepsilon)} \quad i \in \{1, 2\}, \\
 \hat{T}_*^{(\varepsilon)} &= T_*^{(1,\varepsilon)} \wedge T_*^{(2,\varepsilon)} ; \check{T}_*^{(\varepsilon)} = T_*^{(1,\varepsilon)} \vee T_*^{(2,\varepsilon)}, \\
 \hat{T}^{(\varepsilon)} &= \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)},
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

où $*$ remplace ρ ou θ .

On peut alors énoncer un résultat concernant les solutions des E.D.S. $(E^{(1,\varepsilon)})$ et $(E^{(2,\varepsilon)})$ lorsque le paramètre ε tend vers zéro.

Proposition 6.2 *On désigne respectivement par $(X_t^{(1,\varepsilon)}, Y_t^{(1,\varepsilon)})_{t \geq 0}$ et $(X_t^{(2,\varepsilon)}, Y_t^{(2,\varepsilon)})_{t \geq 0}$ les deux solutions fortes des équations $(E^{(1,\varepsilon)})$ et $(E^{(2,\varepsilon)})$.*

Alors, $Y_{\check{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\check{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}$ converge en norme L^2 vers zéro, lorsque ε tend vers zéro, avec la vitesse de convergence suivante :

$$\text{il existe une constante } K \text{ telle que } \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\check{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\check{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq K \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Quelques majorations préliminaires sont nécessaires avant d'aborder la démonstration de la Proposition 6.2.

- On établit tout d'abord une majoration des temps d'arrêt $T_\rho^{(i,\varepsilon)}$ et $T_\theta^{(i,\varepsilon)}$; écrivant l'expression de $X^{(i,\varepsilon)}$ aux temps $T_\rho^{(i,\varepsilon)}$ et $T_\theta^{(i,\varepsilon)}$ respectivement, la minoration de la fonction ϕ par la constante η conduit à :

$$T_*^{(i,\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon^2 a_*}{\eta} \quad (i \in \{1, 2\}).
 \tag{6.6}$$

Remarque :

Ces majorations interviennent constamment par la suite, et il semble par conséquent difficile d'affaiblir l'hypothèse concernant la minoration de la fonction ϕ .

- Le lemme suivant concerne l'écart entre les processus $X^{(1,\varepsilon)}$ et $X^{(2,\varepsilon)}$ considérés à un même temps t .

Lemme 6.3 *Les hypothèses sont celles de la proposition 6.2.*

Alors :

$$(6.7) \quad |X_t^{(1,\varepsilon)} - X_t^{(2,\varepsilon)}| \leq K_\phi \exp\left(\frac{K_\phi}{\varepsilon^2} t\right) \int_0^t |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}| ds.$$

Démonstration du lemme 6.3.

On majore la différence $|X_t^{(1,\varepsilon)} - X_t^{(2,\varepsilon)}|$ par son intégrale jusqu'au temps t .

$$\begin{aligned} |X_t^{(1,\varepsilon)} - X_t^{(2,\varepsilon)}| &= \left| \int_0^t [\phi_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}) - \phi_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}, Y_s^{(2,\varepsilon)})] ds \right|, \\ |X_t^{(1,\varepsilon)} - X_t^{(2,\varepsilon)}| &\leq \int_0^t \left| \phi\left(\frac{X_s^{(1,\varepsilon)}}{\varepsilon^2}, Y_s^{(1,\varepsilon)}\right) - \phi\left(\frac{X_s^{(2,\varepsilon)}}{\varepsilon^2}, Y_s^{(2,\varepsilon)}\right) \right| ds, \\ |X_t^{(1,\varepsilon)} - X_t^{(2,\varepsilon)}| &\leq K_\phi \int_0^t |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}| ds + \frac{K_\phi}{\varepsilon^2} \int_0^t |X_s^{(1,\varepsilon)} - X_s^{(2,\varepsilon)}| ds. \end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall [KARATZAS, SHREVE, (1994)] pour conclure. $\square$

- Le lemme 6.4 majore la distance entre les temps de sortie du support des fonctions ρ ou θ pour les processus solutions de $(E^{(1,\varepsilon)})$ et $(E^{(2,\varepsilon)})$.

Lemme 6.4 *Les hypothèses sont celles de la proposition 6.2.*

Alors, pour tout $\alpha \geq 1$:

$$(6.8) \quad |T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}|^\alpha \leq K_1 \left(\hat{T}_*^{(\varepsilon)}\right)^{\alpha-1} \int_0^{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}} |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}|^\alpha ds.$$

Démonstration du lemme 6.4.

La fonction ϕ étant minorée par $\eta \geq 0$, on a :

$$\left| X_{T_*^{(1,\varepsilon)}}^{(i,\varepsilon)} - X_{T_*^{(2,\varepsilon)}}^{(i,\varepsilon)} \right| = \left| \int_{T_*^{(1,\varepsilon)}}^{T_*^{(2,\varepsilon)}} \phi_\varepsilon(X_s^{(i,\varepsilon)}, Y_s^{(i,\varepsilon)}) ds \right| \geq \eta |T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}|,$$

c'est-à-dire, pour $\{i,j\} = \{1,2\}$

$$|T_*^{(i,\varepsilon)} - T_*^{(j,\varepsilon)}| \leq \frac{1}{\eta} \left| \varepsilon^2 a_* - X_{T_*^{(j,\varepsilon)}}^{(i,\varepsilon)} \right| = \frac{1}{\eta} \left| X_{T_*^{(j,\varepsilon)}}^{(j,\varepsilon)} - X_{T_*^{(j,\varepsilon)}}^{(i,\varepsilon)} \right|,$$

et donc par symétrie

$$(6.9) \quad |T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}| \leq \frac{1}{\eta} \left| X_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - X_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right|.$$

Par ailleurs, le lemme 6.3 et la majoration (6.6) permettent d'écrire :

$$(6.10) \quad \left| X_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - X_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right| \leq K_\phi \exp\left(\frac{K_\phi a_*}{\eta}\right) \int_0^{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}} |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}| ds.$$

De (6.9) et (6.10), on obtient :

$$|T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}| \leq k \int_0^{\hat{T}_*} |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}| ds.$$

En élevant à la puissance α , puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient la conclusion du lemme. $\square$

• Dans les majorations (6.7) et (6.8) des lemmes 6.3 et 6.4, apparaît la valeur absolue $|Y_t^{(1,\varepsilon)} - Y_t^{(2,\varepsilon)}|$; le processus $(Y_t^{(1,\varepsilon)} - Y_t^{(2,\varepsilon)})_{t \geq 0}$ est une semi-martingale. L'idée principale de la démonstration de la Proposition 6.2 est de majorer son carré par une sous-martingale dont les moments sont plus faciles à majorer :

$$\begin{aligned} Z_t &= 2 \int_0^t [Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}] [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] dB_s \\ (6.11) \quad &+ 2 \int_0^t |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}| |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})| ds \\ &+ \int_0^t [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})]^2 ds. \end{aligned}$$

Une nouvelle formulation du lemme 6.4 donne une majoration en moyenne entre les temps de sortie des deux processus $X_t^{(1,\varepsilon)}$ et $X_t^{(2,\varepsilon)}$.

Jusqu'à présent, les majorations établies sont vérifiées p.s. puisque les processus $X_t^{(i,\varepsilon)}$ ne possèdent pas de terme de diffusion ; au contraire, les majorations impliquant les processus $Y_t^{(i,\varepsilon)}$ se feront en moyenne.

Lemme 6.5 *Les hypothèses sont celles de la proposition 6.2.*

Alors, pour tout $p \geq 2$:

$$(6.12) \quad \mathbb{E} \left\{ |T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}|^p \right\} \leq K_2 \varepsilon^{2p} \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{\frac{p}{2}} \right\}.$$

Démonstration du lemme 6.5.

Récrivons la majoration (6.8) en fonction de Z , avec $p = \alpha$:

$$|T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}|^p \leq K_1 \left(\hat{T}_*^{(\varepsilon)} \right)^{p-1} \int_0^{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}} Z_s^{\frac{p}{2}} ds,$$

ce qui donne en passant à l'espérance et en utilisant (6.6) :

$$\mathbb{E} \left\{ |T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}|^p \right\} \leq k \varepsilon^{2(p-1)} \int_0^\infty \mathbb{E} \left\{ Z_{s \wedge \hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{\frac{p}{2}} \mathbb{1}_{\{s < \hat{T}_*^{(\varepsilon)}\}} \right\} ds.$$

Si $p \geq 2$, le processus $(Z_t^{\frac{p}{2}})_{t \geq 0}$ est une sous-martingale ; ainsi, $Z_{s \wedge \hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{\frac{p}{2}} | \mathcal{F}_{s \wedge \hat{T}_*^{(\varepsilon)}} \right\}$, et donc :

$$\mathbb{E} \left\{ |T_*^{(1,\varepsilon)} - T_*^{(2,\varepsilon)}|^p \right\} \leq K_2 \varepsilon^{2p} \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_*^{(\varepsilon)}}^{\frac{p}{2}} \right\}. \quad \square$$

Nous pouvons à présent passer à la démonstration de la Proposition 6.2.

Démonstration de la proposition 6.2.

La démonstration se décompose en trois parties.

On établira, dans une première partie, la convergence L^2 de la différence entre les processus $Y^{(1,\varepsilon)}$ et $Y^{(2,\varepsilon)}$ considérés au temps d'arrêt $\hat{T}^{(\varepsilon)}$ où $\hat{T}^{(\varepsilon)} = \inf\{T_\rho^{(1,\varepsilon)}; T_\rho^{(2,\varepsilon)}; T_\theta^{(1,\varepsilon)}; T_\theta^{(2,\varepsilon)}\}$. Pour ce faire, on utilisera la majoration par la sous-martingale Z .

La deuxième partie traitera du cas où le support de θ est contenu dans celui de ρ , et la troisième du cas où le support de θ contient celui de ρ .

Première partie : on majore la norme L^2 du carré de la différence entre les deux processus $Y^{(1,\varepsilon)}$ et $Y^{(2,\varepsilon)}$ considérés au temps $\hat{T}^{(\varepsilon)}$; on ne se préoccupe pas de savoir lequel des supports, de θ ou de ρ , contient l'autre.

On considère tout d'abord la majoration de la différence $\left(Y_t^{(1,\varepsilon)} - Y_t^{(2,\varepsilon)}\right)^2$ par la sous-martingale Z_t .

En développant le carré de la différence au moyen de la formule d'Itô [KARATZAS, SHREVE, (1994)], on obtient :

$$\begin{aligned}
 Y_t^{(1,\varepsilon)} - Y_t^{(2,\varepsilon)} &= 2 \int_0^t [Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}] [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] dB_s \\
 (6.13) \quad &+ 2 \int_0^t [Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}] [\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] ds \\
 &+ \int_0^t [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})]^2 ds.
 \end{aligned}$$

On majore alors le terme de l'intégrale en ds en y introduisant des valeurs absolues de sorte que le terme de dérive reste toujours positif; ce qui s'écrit, compte tenu de (6.11) :

$$(6.14) \quad \left(Y_t^{(1,\varepsilon)} - Y_t^{(2,\varepsilon)}\right)^2 \leq Z_t.$$

Appliquant l'inégalité maximale de Doob, on obtient que pour tout temps d'arrêt T :

$$(6.15) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left(Y_t^{(1,\varepsilon)} - Y_t^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right)^2 \right\} \leq \mathbb{E} \left\{ \left(\sup_{0 \leq t \leq T} Z_t \right)^2 \right\} \leq 4 \mathbb{E} \{ Z_T^2 \}.$$

On va établir l'existence d'une constante K_3 vérifiant :

$$(6.16) \quad \mathbb{E} \{ Z_{\hat{T}^{(\varepsilon)}}^2 \} \leq K_3 \varepsilon^4,$$

ce qui, avec (6.15), impliquera l'existence d'une constante K_4 telle que :

$$(6.17) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\hat{T}^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq K_4 \varepsilon^2.$$

Considérons le carré de Z_t auquel nous appliquons la formule d'Itô puis le théorème d'arrêt au temps $t \wedge T$, où T est un temps d'arrêt borné par $\frac{\check{\alpha}}{\eta} \varepsilon^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Z_{t \wedge T}^2\} = & 4 \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})| \cdot |Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)}| ds\right\} \\ & + 2 \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})]^2 ds\right\} \\ & + 4 \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})]^2 \right. \\ & \left. (Y_s^{(1,\varepsilon)} - Y_s^{(2,\varepsilon)})^2 ds\right\}. \end{aligned}$$

L'inégalité (6.14) permet le regroupement des deux derniers termes :

$$(6.18) \quad \mathbb{E}\{Z_{t \wedge T}^2\} \leq 4 I_1(T) + 4 I_2(T) + 12 I_3(T) + 12 I_4(T)$$

où

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s^{\frac{3}{2}} \cdot |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)})| ds\right\}, \\ I_2(T) &= \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s^{\frac{3}{2}} \cdot |b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})| ds\right\}, \\ I_3(T) &= \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)})]^2 ds\right\}, \\ I_4(T) &= \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s \sigma^2(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}) ds\right\}. \end{aligned}$$

Nous allons majorer successivement $I_1(T)$, $I_2(T)$, $I_3(T)$ et $I_4(T)$.

Utilisant la propriété de Lipschitz de la fonction θ , on obtient pour un temps d'arrêt $T \leq \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}$:

$$I_1(T) \leq \frac{K_\theta}{\varepsilon^4} \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s^{\frac{3}{2}} \cdot |X_s^{(1,\varepsilon)} - X_s^{(2,\varepsilon)}| ds\right\}$$

et, par le lemme 6.3 :

$$\begin{aligned} I_1(T) &\leq \frac{K_\theta}{\varepsilon^4} \mathbb{E}\left\{\int_0^{t \wedge T} Z_s^{\frac{3}{2}} K_\phi \exp\left(\frac{K_\phi S}{\varepsilon^2}\right) \left(\int_0^s |Y_u^{(1,\varepsilon)} - Y_u^{(2,\varepsilon)}| du\right) ds\right\} \\ &\leq \frac{k}{\varepsilon^4} \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{t \wedge T} \left(\int_0^s Z_u^{\frac{1}{2}} du\right)^4 ds\right)^{\frac{1}{4}}\right\}. \end{aligned}$$

Des applications successives de l'inégalité de Hölder conduisent à :

$$\begin{aligned}
I_1(T) &\leq \frac{k}{\varepsilon^4} \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{t \wedge T} \left(\int_0^s Z_u^2 du \right) s^3 ds \right)^{\frac{1}{4}} \right\} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}} \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{t \wedge T} \int_0^s Z_u^2 du ds \right)^{\frac{1}{4}} \right\} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds \right)^{\frac{1}{4}} \right\}.
\end{aligned}$$

Retenons que :

$$(6.19) \quad I_1(T) \leq \frac{K_5}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E}(Z_{s \wedge T}^2) ds \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \leq \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}.$$

Pour $I_2(T)$, nous appliquons successivement le fait que la fonction b est bornée et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
I_2(T) &\leq \|b\|_\infty \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s \cdot |Y_s^{(1, \varepsilon)} - Y_s^{(2, \varepsilon)}| ds \right\} \\
&\leq \|b\|_\infty \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s^{\frac{3}{2}} ds \right\} \\
&\leq \|b\|_\infty \frac{\check{a}^{\frac{1}{4}}}{\eta^{\frac{1}{4}}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds \right)^{\frac{3}{4}} \right\}.
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité $x \leq c^3 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{2c}$ avec $c = \varepsilon^{\frac{5}{2}}$ pour obtenir :

$$I_2(T) \leq \|b\|_\infty \frac{\check{a}^{\frac{1}{4}}}{\eta^{\frac{1}{4}}} \left[\varepsilon^8 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s^2 ds \right\} \right].$$

On a ainsi établi :

$$(6.20) \quad I_2(T) \leq K_6 \varepsilon^8 + \frac{K_7}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \{ Z_{s \wedge T}^2 \} ds \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \leq \frac{\check{a}}{\eta} \varepsilon^2.$$

On effectue pour le terme $I_3(T)$ le même type de majorations, en prenant soin d'imposer

$T \leq \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}$ pour conserver le caractère lipschitzien de la fonction ρ :

$$\begin{aligned}
I_3(T) &\leq \frac{K_\rho^2}{\varepsilon^6} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s (X_s^{(1,\varepsilon)} - X_s^{(2,\varepsilon)})^2 ds \right\} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon^6} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s \left(\int_0^s |Y_u^{(1,\varepsilon)} - Y_u^{(2,\varepsilon)}| du \right)^2 ds \right\} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon^4} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s \left(\int_0^s Z_u du \right) ds \right\} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon^4} \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^{t \wedge T} Z_s ds \right)^2 \right\} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \{ Z_{s \wedge T}^2 \} ds.
\end{aligned}$$

D'où :

$$(6.21) \quad I_3(T) \leq \frac{K_8}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \{ Z_{s \wedge T}^2 \} ds \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \leq \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}.$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
I_4(T) &\leq \|\sigma^2\|_\infty \mathbb{E} \left\{ \int_0^{t \wedge T} Z_s ds \right\} \\
&\leq \|\sigma^2\|_\infty \int_0^t \mathbb{E}(Z_{s \wedge T}) ds \\
&\leq \|\sigma^2\|_\infty \int_0^t \mathbb{E} \left\{ \varepsilon^2 + \frac{Z_{s \wedge T}^2}{\varepsilon^2} \right\} ds \\
&\leq \|\sigma^2\|_\infty \frac{\check{a}}{\eta} \varepsilon^4 + \frac{\|\sigma^2\|_\infty}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E}(Z_{s \wedge T}^2) ds,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(6.22) \quad I_4(T) \leq K_9 \varepsilon^4 + \frac{K_{10}}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \{ Z_{s \wedge T}^2 \} ds \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \leq \frac{\check{a}}{\eta} \varepsilon^2.$$

On obtient finalement en regroupant (6.19), (6.20), (6.21) et (6.22) dans (6.18) :

$$\mathbb{E} \{ Z_{t \wedge T}^2 \} \leq \frac{K_{11}}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \{ Z_{s \wedge T}^2 \} ds + K_{12} \varepsilon^4 \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \leq \hat{T}^{(\varepsilon)}.$$

On applique le lemme de Gronwall pour obtenir :

$$\mathbb{E} \{ Z_{t \wedge T}^2 \} \leq K_{12} \varepsilon^4 \exp \left(\frac{K_{11}}{\varepsilon^2} t \right) \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \leq \hat{T}^{(\varepsilon)}.$$

Cette inégalité, où l'on choisit $t = \frac{\varepsilon^2 \check{a}}{\eta}$ et $T = \hat{T}^{(\varepsilon)}$, établit (6.16) et assure la convergence en norme L^2 de la différence $Y_{\hat{T}^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}$ (l'inégalité (6.17) est vérifiée).

Deuxième partie : on considère le cas où le support de θ est contenu dans celui de ρ . On a alors $T_\theta^{(i,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(i,\varepsilon)}$ pour $i = 1, 2$, et on s'intéresse à $\mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\}$ qui vérifie :

$$(6.23) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq 2 \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} + 2 \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} + Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\}.$$

Concernant le premier terme du membre de droite, il suffit, d'après (6.15), de majorer $\mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^2 \right\}$; pour ce faire, nous utilisons l'inégalité (6.18) avec $T = \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}$.

$$(6.24) \quad \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t}^2 \right\} \leq 4 I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) + 4 I_2(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) + 12 I_3(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) + 12 I_4(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})$$

où

$$\begin{aligned} I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t} Z_s^{\frac{3}{2}} |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)})| ds \right\}, \\ I_2(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t} Z_s^{\frac{3}{2}} |b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})| ds \right\}, \\ I_3(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t} Z_s (\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}))^2 ds \right\}, \\ I_4(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t} Z_s (\sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}))^2 ds \right\}. \end{aligned}$$

Une majoration des termes $I_2(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})$, $I_3(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})$ et $I_4(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})$ a déjà été conduite précédemment : les inégalités (6.20), (6.21) et (6.22) sont toutes valables pour un temps d'arrêt $T \leq \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}$. Par contre, le caractère lipschitzien de θ n'est pas assuré jusqu'au temps $\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}$; on va donc traiter différemment de la première partie le terme impliquant la fonction $\theta : I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})$. Ce terme peut s'écrire sous la forme suivante, puisque la différence sous l'intégrale est nulle au delà de $\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}$:

$$I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}} Z_s^{\frac{3}{2}} |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)})| ds \right\}.$$

On ne peut utiliser le caractère lipschitzien de la fonction θ que si l'on se place avant le temps $\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}$:

$$\begin{aligned} I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t} Z_s^{\frac{3}{2}} |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)})| ds \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_{\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t}^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}} Z_s^{\frac{3}{2}} |\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) - \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)})| ds \right\}. \end{aligned}$$

Le premier terme a déjà été majoré dans (6.19) ; dans le second, on majore la différence en θ :

$$I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) \leq \frac{K_5}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \left\{ Z_{s \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}}^2 \right\} ds + \frac{\|\theta\|_\infty}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left\{ \int_{\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t}^{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \check{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t} Z_s^{\frac{3}{2}} ds \right\}.$$

$Z_s^{\frac{3}{2}}$ étant une sous-martingale,

$$I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) \leq \frac{K_5}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \left\{ Z_{s \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}}^2 \right\} ds + \frac{\|\theta\|_\infty}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \check{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t}^{\frac{3}{2}} |\check{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t - \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t| \right\}.$$

Par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) &\leq \frac{K_5}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \left\{ Z_{s \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}}^2 \right\} ds \\ &\quad + \frac{\|\theta\|_\infty}{\varepsilon^2} \left(\mathbb{E} \left\{ \left(Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \check{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\mathbb{E} \left\{ \left(|\check{T}_\theta^{(\varepsilon)} - \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}| \right)^4 \right\} \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

et par les inégalités (6.12) et (6.16) pour le second facteur :

$$I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) \leq \frac{K_5}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \left\{ Z_{s \wedge \hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}}^2 \right\} ds + K_{13} \varepsilon \left(\mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge \check{T}_\theta^{(\varepsilon)} \wedge t}^2 \right\} \right)^{\frac{3}{4}}.$$

On élimine la puissance $\frac{3}{4}$ dans le dernier terme grâce à l'inégalité $x \leq c^3 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{2c}$ avec $c = 4 K_{13} \varepsilon$:

$$(6.25) \quad I_1(\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}) \leq K_{14} \varepsilon^4 + \frac{1}{8} \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t}^2 \right\}.$$

Combinant (6.20), (6.21), (6.22), (6.24) et (6.25), on obtient :

$$(6.26) \quad \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t}^2 \right\} \leq K_{15} \varepsilon^4 + \frac{K_{16}}{\varepsilon^2} \int_0^t \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge s}^2 \right\} ds.$$

On conclut en appliquant le lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \wedge t}^2 \right\} \leq \exp \left(K_{16} \frac{t}{\varepsilon^2} \right) K_{15} \varepsilon^4.$$

Si $t = \frac{\varepsilon^2 \check{a}}{\eta}$ alors $\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)} \leq t$, et compte tenu de (6.15), il existe deux constantes K_{17} et K_{18} telles que :

$$(6.27) \quad \mathbb{E} \left\{ Z_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^2 \right\} \leq K_{17} \cdot \varepsilon^4,$$

$$(6.28) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq K_{18} \cdot \varepsilon^2.$$

On considère à présent le second terme du membre de droite de (6.23), que l'on décompose suivant les événements $\mathbb{I}_{\{\hat{T}_\rho^{(1,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}}$ et $\mathbb{I}_{\{\hat{T}_\rho^{(1,\varepsilon)} > T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}}$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} + Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \left(\left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} \right) \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} > T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} + \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right) \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right)^2 \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} > T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} + \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\}.
\end{aligned}$$

Dans chacun des deux carrés, on distingue les intégrales browniennes et classiques :

$$(6.29) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} + Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq 2 J_1 + 2 J_2 + 2 J_3 + 2 J_4,$$

où :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} (\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})) dB_s \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} > T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\}, \\
J_2 &= \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} (\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})) ds \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} > T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\}, \\
J_3 &= \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{T_\rho^{(2,\varepsilon)}} \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) dB_s \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\}, \\
J_4 &= \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{T_\rho^{(2,\varepsilon)}} \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) ds \right)^2 \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\}.
\end{aligned}$$

Les termes en carré des martingales présentes dans J_1 et J_3 se développent selon le schéma suivant, où M désigne une martingale, S et T deux temps d'arrêt bornés :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ (M_T - M_S)^2 \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \} &= \mathbb{E} \{ (M_T^2 - M_S^2 - 2M_S(M_T - M_S)) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \}, \\
\mathbb{E} \{ (M_T - M_S)^2 \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \} &= \mathbb{E} \{ (M_T^2 - M_S^2) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \} \\
&\quad - 2 \mathbb{E} \{ M_S \underbrace{\mathbb{E} \{ (M_T - M_S) | \mathcal{F}_S \}}_{=0} \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \},
\end{aligned}$$

soit

$$(6.30) \quad \mathbb{E} \{ (M_T - M_S)^2 \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \} = \mathbb{E} \{ (M_T^2 - M_S^2) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \}.$$

Si, de plus, la martingale M est une intégrale brownienne $M_t = \int_0^t R_s dB_s$, la formule d'Itô entraîne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ (M_T^2 - M_S^2) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \} &= \mathbb{E} \left\{ 2 \left(\int_0^T M_u R_u dB_u - \int_0^S M_u R_u dB_u \right) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\} \\
&\quad + \mathbb{E} \left\{ \left(\int_S^T R_u^2 du \right) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ (M_T^2 - M_S^2) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ 2 \left(\underbrace{\mathbb{E} \left\{ \int_0^T M_u R_u dB_u - \int_0^S M_u R_u dB_u \middle| \mathcal{F}_S \right\}}_{=0} \right) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \left(\int_S^T R_u^2 du \right) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\}, \end{aligned}$$

soit

$$(6.31) \quad \mathbb{E} \left\{ (M_T^2 - M_S^2) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left(\int_S^T R_u^2 du \right) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\}.$$

Ainsi, recombinaut (6.30) et (6.31), on obtient :

$$(6.32) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(\int_S^T R_u dB_u \right)^2 \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left(\int_S^T R_u^2 du \right) \mathbb{1}_{\{S \leq T\}} \right\}.$$

On applique cette dernière égalité aux termes J_1 et J_3 :

$$\begin{aligned} J_1 + J_3 &\leq \mathbb{E} \left\{ \int_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} (\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}))^2 ds \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} > T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{T_\rho^{(2,\varepsilon)}} (\rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}))^2 ds \mathbb{1}_{\{T_\rho^{(1,\varepsilon)} \leq T_\rho^{(2,\varepsilon)}\}} \right\}, \end{aligned}$$

et on majore les fonctions ρ et σ :

$$(6.33) \quad J_1 + J_3 \leq \left(\frac{\|\rho\|_\infty^2}{\varepsilon^2} + \frac{2 \|\rho\|_\infty \|\sigma\|_\infty}{\varepsilon} + \|\sigma\|_\infty^2 \right) \mathbb{E} \left\{ |T_\rho^{(1,\varepsilon)} - T_\rho^{(2,\varepsilon)}| \right\}.$$

Par ailleurs, on majore de même les deux autres termes :

$$(6.34) \quad J_2 + J_4 \leq \left(\frac{\|\theta\|_\infty^2}{\varepsilon^4} + \frac{2 \|\theta\|_\infty \|b\|_\infty}{\varepsilon^2} + \|b\|_\infty^2 \right) \mathbb{E} \left\{ (T_\rho^{(1,\varepsilon)} - T_\rho^{(2,\varepsilon)})^2 \right\}.$$

L'écart entre les temps $T_\rho^{(1,\varepsilon)}$ et $T_\rho^{(2,\varepsilon)}$ est contrôlé par l'inégalité (6.12) du lemme 6.5 ; on choisit $p = 2$ et on utilise la majoration (6.27) pour obtenir :

$$(6.35) \quad \mathbb{E} \left\{ (T_\rho^{(1,\varepsilon)} - T_\rho^{(2,\varepsilon)})^2 \right\} \leq K_{19} \varepsilon^6.$$

Par l'inégalité de Hölder, il vient :

$$(6.36) \quad \mathbb{E} \left\{ |T_\rho^{(1,\varepsilon)} - T_\rho^{(2,\varepsilon)}| \right\} \leq K_{20} \varepsilon^3.$$

Les majorations (6.29), (6.33), (6.34), (6.35) et (6.36) conduisent à :

$$(6.37) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} + Y_{\hat{T}_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq K_{21} \varepsilon.$$

On revient à (6.23) pour conclure avec (6.37) et (6.28) :

$$\mathbb{E} \left\{ (Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)})^2 \right\} \leq 2 K_{18} \varepsilon^2 + 2 K_{21} \varepsilon.$$

Ceci établit la convergence L^2 vers zéro et achève la démonstration dans le cas où le support de θ est contenu dans celui de ρ .

Troisième partie : on considère enfin le cas où le support de θ contient celui de ρ . On cherche donc à majorer la norme L^2 de la différence $Y_{T_\theta^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\theta^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}$.

Le schéma de démonstration utilisé dans la deuxième partie ne peut s'appliquer ici ; en effet, dans la décomposition (6.24) où l'on remplace $\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}$ par $\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)}$, le terme qui ne peut pas être majoré comme dans la première partie n'est plus $I_1(\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)})$ mais $I_3(\hat{T}_\theta^{(\varepsilon)})$ dans lequel la sous-martingale Z_t intervient à la puissance 1 au lieu de $\frac{3}{2}$; il en découle une majoration d'ordre ε^2 en (6.27). Mais ceci ne permet plus d'obtenir ε^6 dans la majoration (6.35) où il faut lire θ en lieu et place de ρ ; on obtient seulement un majorant en ε^4 , ce qui est insuffisant pour conclure.

On va par conséquent appréhender différemment la différence à majorer.

On note $\tau^{(i,\varepsilon)}$ l'inverse du processus strictement croissant $X^{(i,\varepsilon)}$. On a une correspondance entre variables spatiale et temporelle :

$$a_\rho \leq x \leq a_\theta \quad \Longleftrightarrow \quad T_\rho^{(i,\varepsilon)} \leq \tau_{\varepsilon^2 x}^{(i,\varepsilon)} \leq T_\theta^{(i,\varepsilon)}.$$

On va majorer la différence entre les processus $Y^{(1,\varepsilon)}$ et $Y^{(2,\varepsilon)}$ en des temps différents pour chacun, mais correspondant à une même distance x :

$$\begin{aligned} \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 &= \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} + \int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}} dY_s^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - \int_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}} dY_s^{(2,\varepsilon)} \right)^2, \\ \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 &\leq 2 \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 + 4 \left(\int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}} \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}) dB_s \right)^2 \\ &\quad + 4 \left(\int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}} [\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}} \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) ds \right)^2. \end{aligned}$$

On majore alors l'espérance de chacune des intégrales stochastiques ; dans les intégrales

du dernier terme, on distingue les termes dépendant de ε des autres pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} &\leq 2 \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \\
 &+ 4 \mathbb{E} \left\{ \int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}} \sigma^2(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}) ds \right\} \\
 &+ 8 \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}} b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)}) ds \right)^2 \right\} \\
 &+ 8 \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}} \theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) ds - \int_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}} \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) ds \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{6.38}$$

On majore tout d'abord le premier terme du membre de droite de (6.38). Deux applications de l'inégalité triangulaire permettent d'écrire :

$$|Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}| \leq \underbrace{|Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)}|}_{L_1} + \underbrace{|Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}|}_{L_2} + \underbrace{|Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}|}_{L_3}.$$

Nous traitons dans un premier temps les termes L_1 et L_3 de nature identique, puis le terme L_2 .

• Les termes L_1 et L_3 font respectivement intervenir les processus $Y^{(1,\varepsilon)}$ et $Y^{(2,\varepsilon)}$; la variation de $Y^{(1,\varepsilon)}$ entre $\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}$ et $T_\rho^{(1,\varepsilon)}$ s'écrit :

$$L_1 = \int_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] dB_s + \int_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} [\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] ds,$$

tandis que pour $Y^{(2,\varepsilon)}$:

$$L_3 = \int_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{T_\rho^{(2,\varepsilon)}} \rho_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) dB_s + \int_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{T_\rho^{(2,\varepsilon)}} \theta_\varepsilon(X_s^{(2,\varepsilon)}) ds.$$

La majoration de L_3 sera exactement celle réalisée pour L_1 dans laquelle on aura pris soin d'imposer $\sigma = b = 0$.

$$\begin{aligned}
 L_1^2 &\leq 2 \left(\int_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} [\rho_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + \sigma(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] dB_s \right)^2 \\
 &+ 2 \left(\int_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{T_\rho^{(1,\varepsilon)}} [\theta_\varepsilon(X_s^{(1,\varepsilon)}) + b(X_s^{(1,\varepsilon)}, Y_s^{(1,\varepsilon)})] ds \right)^2.
 \end{aligned}$$

Passant à l'espérance, on peut utiliser les propriétés de bornitude des différentes fonctions :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} \right)^2 \right\} &\leq 2 \left(\frac{\|\rho\|_\infty}{\varepsilon} + \|\sigma\|_\infty \right)^2 \mathbb{E} \left\{ (T_\rho^{(1,\varepsilon)} - \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})^2 \right\} \\
 &+ 2 \left(\frac{\|\theta\|_\infty}{\varepsilon^2} + \|b\|_\infty \right)^2 \mathbb{E} \left\{ (T_\rho^{(1,\varepsilon)} - \hat{T}_\rho^{(\varepsilon)})^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Les majorations (6.35) et (6.36) conduisent à :

$$\mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\hat{T}_\rho^{(\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq 2 \left(\frac{\|\rho\|_\infty}{\varepsilon} + \|\sigma\|_\infty \right)^2 K_{20} \varepsilon^3 + 2 \left(\frac{\|\theta\|_\infty}{\varepsilon^2} + \|b\|_\infty \right)^2 K_{19} \varepsilon^6.$$

• La majoration du terme L_2 a été établie dans la première partie de la preuve en (6.17). En regroupant ces différentes majorations, on établit l'existence d'une constante K_{22} vérifiant :

$$\mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\rho^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\rho^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq K_{22} \varepsilon^2.$$

On s'intéresse à présent aux autres termes de (6.38). On utilise les hypothèses vérifiées par les fonctions σ et b . Par ailleurs, on effectue deux changements de variables dans les intégrales du dernier terme ; on passe d'intégrales en temps à des intégrales en espace en posant pour $i \in \{1, 2\}$:

$$y = \frac{X_s^{(i,\varepsilon)}}{\varepsilon^2} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \tau_{\varepsilon^2 y}^{(i,\varepsilon)}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} &\leq K_{22} \varepsilon + 4 \|\sigma^2\|_\infty \mathbb{E} \left\{ \tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)} - T_\rho^{(1,\varepsilon)} \right\} \\ &\quad + 8 \|b^2\|_\infty \mathbb{E} \left\{ \left(\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)} - T_\rho^{(1,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \\ &\quad + 8 \mathbb{E} \left\{ \left(\int_{a_\rho}^x \frac{\theta(y)}{\phi(y, Y_{\tau_{\varepsilon^2 y}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)})} dy - \int_{a_\rho}^x \frac{\theta(y)}{\phi(y, Y_{\tau_{\varepsilon^2 y}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)})} dy \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

On regroupe les deux intégrales et on utilise les propriétés de la fonction ϕ pour faire apparaître le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} &\leq K_{22} \varepsilon + 4 \|\sigma^2\|_\infty \frac{a_\theta - a_\rho}{\eta} \varepsilon^2 \\ &\quad + 8 \|b^2\|_\infty \frac{(a_\theta - a_\rho)^2}{\eta^2} \varepsilon^4 \\ &\quad + 8 \|\theta\|_{L^2(a_\rho, a_\theta)} \frac{K_\phi^2}{\eta^4} \int_a^x \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 y}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 y}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} \right)^2 \right\} dy. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet d'établir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left(Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tau_{\varepsilon^2 x}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} &\leq \left(K_{22} \varepsilon + 4 \|\sigma^2\|_\infty \frac{a_\theta - a_\rho}{\eta} \varepsilon^2 + 8 \|b^2\|_\infty \frac{(a_\theta - a_\rho)^2}{\eta^2} \varepsilon^4 \right) \\ &\quad \times \exp \left(8 \|\theta\|_{L^2(a_\rho, a_\theta)} \frac{K_\phi^2}{\eta^4} (x - a_\rho) \right). \end{aligned}$$

Cette inégalité est valable en $x = a_\theta$:

$$\mathbb{E} \left\{ \left(Y_{T_\theta^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{T_\theta^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \right)^2 \right\} \leq k \varepsilon.$$

La convergence en norme L^2 est ainsi également établie dans cette situation. Ceci achève la démonstration de la Proposition 6.2. $\square$

6.4 Changement d'échelle dans l'E.D.S. simplifiée

Nous continuons dans cette section à transformer le problème. Nous allons à présent nous ramener, par un changement d'échelle, à une solution d'une E.D.S. indépendante de ε .

Nous introduisons une équation où le paramètre ε intervenant dans les équations $(E^{(1,\varepsilon)})$ et $(E^{(2,\varepsilon)})$ n'apparaît pas.

$$(E^{(3)}) \quad \begin{cases} X_t &= \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t &= z + \int_0^t \rho(X_s) dB_s + \int_0^t \theta(X_s) ds. \end{cases}$$

Le lien entre les équations $(E^{(2,\varepsilon)})$ et $E^{(3)}$ est précisé par la proposition suivante :

Proposition 6.6 *Soient $(X^{(2,\varepsilon)}, Y^{(2,\varepsilon)}, B)$ et $(X^{(3)}, Y^{(3)}, \tilde{B})$ les solutions respectives des E.D.S. $(E^{(2,\varepsilon)})$ et $(E^{(3)})$.*

On définit deux nouveaux processus par un changement d'échelle :

$$(6.39) \quad \begin{cases} X_t^{(3,\varepsilon)} &= \varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}}^{(3)} \\ Y_t^{(3,\varepsilon)} &= Y_{\frac{t}{\varepsilon^2}}^{(3)}. \end{cases}$$

Alors, le couple de processus $(X^{(3,\varepsilon)}, Y^{(3,\varepsilon)})$ a la même loi que $(X^{(2,\varepsilon)}, Y^{(2,\varepsilon)})$.

Démonstration de la proposition 6.6.

On va déterminer l'équation que suit le processus $(X^{(3,\varepsilon)}, Y^{(3,\varepsilon)})$:

$$(6.40) \quad \begin{aligned} X_t^{(3,\varepsilon)} &= \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \phi \left(\frac{X_{\varepsilon^2 s}^{(3,\varepsilon)}}{\varepsilon^2}, Y_{\varepsilon^2 s}^{(3,\varepsilon)} \right) ds \\ &= \int_0^t \phi \left(\frac{X_s^{(3,\varepsilon)}}{\varepsilon^2}, Y_s^{(3,\varepsilon)} \right) ds. \end{aligned}$$

Le processus $(Y^{(3,\varepsilon)})$ vérifie quant à lui :

$$\begin{aligned} Y_t^{(3,\varepsilon)} &= z + \int_0^{t/\varepsilon^2} \rho\left(\frac{X_{\varepsilon^2 s}^{(3,\varepsilon)}}{\varepsilon^2}\right) d\tilde{B}_s + \int_0^{t/\varepsilon^2} \theta\left(\frac{X_{\varepsilon^2 s}^{(3,\varepsilon)}}{\varepsilon^2}\right) ds \\ &= z + \int_0^{t/\varepsilon^2} \varepsilon \rho_\varepsilon(X_{\varepsilon^2 s}^{(3,\varepsilon)}) d\tilde{B}_s + \int_0^{t/\varepsilon^2} \varepsilon^2 \theta_\varepsilon(X_{\varepsilon^2 s}^{(3,\varepsilon)}) ds \\ &= z + \int_0^t \rho_\varepsilon(X_s^{(3,\varepsilon)}) \varepsilon d\tilde{B}_{s/\varepsilon^2} + \int_0^t \theta_\varepsilon(X_s^{(3,\varepsilon)}) ds. \end{aligned}$$

Si on pose $\tilde{B}_t^\varepsilon = \varepsilon \tilde{B}_{t/\varepsilon^2}$, alors $(X^{(3,\varepsilon)}, Y^{(3,\varepsilon)}, \tilde{B}^\varepsilon)$ est solution de l'E.D.S. $(E^{(2,\varepsilon)})$.

Par unicité au sens des lois de probabilités pour l'E.D.S. $(E^{(2,\varepsilon)})$, les lois de $(X^{(3,\varepsilon)}, Y^{(3,\varepsilon)})$ et $(X^{(2,\varepsilon)}, Y^{(2,\varepsilon)})$ sont identiques. $\square$

En particulier, on a le corollaire suivant :

Corollaire 6.7 *Les notations étant celles de la proposition 6.6, on définit le temps d'arrêt $\tilde{T}^{(3)}$:*

$$(6.41) \quad \tilde{T}^{(3)} = \inf\{t > 0 ; X_t^{(3)} = \check{a}\}.$$

Alors, les v.a. $Y_{\tilde{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}$ et $Y_{\tilde{T}^{(3)}}^{(3)}$ ont la même loi.

Démonstration du corollaire 6.7.

La proposition précédente implique que les v.a. $Y_{\tilde{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)}$ et $Y_{\tilde{T}^{(3,\varepsilon)}}^{(3,\varepsilon)}$ ont même loi, avec $\tilde{T}^{(3,\varepsilon)} = \inf\{t > 0 ; X_t^{(3,\varepsilon)} = \varepsilon^2 \check{a}\}$.

Or,

$$(6.42) \quad \tilde{T}^{(3,\varepsilon)} = \inf\{t > 0 ; X_{t/\varepsilon^2}^{(3)} = \check{a}\} = \varepsilon^2 \tilde{T}^{(3)}.$$

Par conséquent,

$$Y_{\tilde{T}^{(3,\varepsilon)}/\varepsilon^2}^{(3)} = Y_{\tilde{T}^{(3)}}^{(3)},$$

et ainsi

$$Y_{\tilde{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \stackrel{\text{loi}}{=} Y_{\tilde{T}^{(3,\varepsilon)}}^{(3,\varepsilon)} = Y_{\tilde{T}^{(3,\varepsilon)}/\varepsilon^2}^{(3)} = Y_{\tilde{T}^{(3)}}^{(3)}.$$

$\square$

6.5 Description de la loi de Y_T

Nous décrivons, dans cette dernière partie, la loi de $Y_{\tilde{T}^{(3)}}^{(3)}$, où $(X^{(3)}, Y^{(3)})$ est solution de $(E^{(3)})$ et $\tilde{T}^{(3)}$ est défini dans le corollaire 6.7.

Soit $(B_t; \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien issu de zéro.

On considère $(Z_t)_{t \geq 0}$ la solution forte par rapport à $(B_t)_{t \geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$(E^{(5)}) \quad Z_t = z + \int_0^t \frac{\rho(s)}{\sqrt{\phi(s, Z_s)}} dB_s + \int_0^t \frac{\theta(s)}{\phi(s, Z_s)} ds.$$

Définitions :

i) On pose $M_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\phi(s, Z_s)}} dB_s$; c'est une martingale dont le crochet $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ est strictement croissant et continu.

$$(6.43) \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\phi(s, Z_s)} ds.$$

ii) On note τ l'inverse de $\langle M \rangle$ et on définit le processus $(\beta_t)_{t \geq 0}$ en arrêtant la martingale M au temps $\tau_t \wedge \tilde{a}$:

$$\beta_t = M_{\tau_t \wedge \tilde{a}}$$

$(\beta_t)_{t \geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien arrêté en $\langle M \rangle_{\tilde{a}}$; c'est une conséquence directe du Théorème de Dambis-Dubins-Schwarz [KARATZAS, SCHREVE, (1994)].

Proposition 6.8 *Le triplet $(\tau_t; Z_{\tau_t}; \beta_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'E.D.S. $(E^{(3)})$.*

Démonstration de la proposition 6.8.

Le processus strictement croissant $(\tau_t)_{t \geq 0}$ est dérivable presque partout, et sa dérivée, là où elle est définie, se calcule en dérivant l'égalité (6.43) :

$$\tau'_t = \phi(\tau_t, Z_{\tau_t}).$$

On peut donc exprimer τ sous la forme :

$$(6.44) \quad \tau_t = \int_0^t \phi(\tau_s, Z_{\tau_s}) ds ;$$

ceci constitue la première équation du système $(E^{(3)})$.

Par ailleurs, un changement de variable permet d'établir :

$$z + \int_0^t \rho(\tau_s) d\beta_s + \int_0^t \theta(\tau_s) ds = z + \int_0^{\tau_t} \rho(s) d\beta_{\langle M \rangle_s} + \int_0^{\tau_t} \theta(s) d\langle M \rangle_s.$$

Or,

$$\beta_{\langle M \rangle_s} = M_{s \wedge \tilde{a}} = \int_0^{s \wedge \tilde{a}} \frac{1}{\sqrt{\phi(u, Z_u)}} dB_u.$$

On obtient alors :

$$z + \int_0^t \rho(\tau_s) d\beta_s + \int_0^t \theta(\tau_s) ds = z + \int_0^{\tau_t} \frac{\rho(s)}{\sqrt{\phi(s, Z_s)}} dB_s + \int_0^{\tau_t} \frac{\theta(s)}{\phi(s, Z_s)} ds = Z_{\tau_t},$$

ce qui correspond à la deuxième équation du système $(E^{(3)})$. □

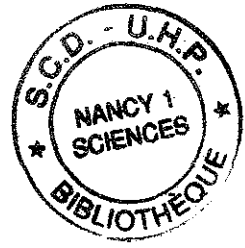
Corollaire 6.9 *La variable aléatoire $Y_{\tilde{T}(3)}^{(3)}$ a même loi que $Z_{\tilde{a}}$.*

Démonstration du Corollaire 6.9

Le corollaire vient directement de la proposition 6.8 avec les notations de la section. $\square$

Ce dernier résultat nous permet d'achever la démonstration du théorème principal ; nous avons successivement prouvé :

$$Y_{\tilde{T}^{(1,\varepsilon)}}^{(1,\varepsilon)} - Y_{\tilde{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{loi}} 0 \quad \text{et} \quad Y_{\tilde{T}^{(2,\varepsilon)}}^{(2,\varepsilon)} \stackrel{\text{loi}}{=} Y_{\tilde{T}^{(3)}}^{(3)} \stackrel{\text{loi}}{=} Z_{\tilde{a}}.$$



Bibliographie

IKEDA N., WATANABE S., (1989), *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland mathematical library.

KARATZAS I., SCHREVE S.E., (1994), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag.

MÉZIÈRES S., ROYNETTE B., (2000), *Study of a brownian impulse*, Ann. Appl. Probab., vol. 10, N. 2, p. 493-516.

1. *Journal of the American Medical Association*, 1998; 279: 100-105.

Troisième partie

Approximation de l'espérance de
fonctionnelles de la trajectoire d'une
diffusion par le schéma d'Euler

Résumé : On considère l'E.D.S. homogène en temps, dont les coefficients σ et b sont très réguliers :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(X(s)) ds \quad (t \geq 0).$$

On désigne par $(X(s))_{0 \leq s \leq 1}$ sa solution, et par $(\bar{X}^\delta(\cdot))_{0 \leq s \leq 1}$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler de pas $\delta > 0$. Le but de cette étude est de préciser les vitesses de convergence de $\mathbb{E}\{\Phi_k(\bar{X}^\delta(\frac{1}{k}), \dots, \bar{X}^\delta(\frac{k}{k}))\}$ vers $\mathbb{E}\{\Phi(X(\cdot))\}$ en fonction des paramètres δ et k , où $\Phi : \mathcal{C}([0,1] ; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle donnée et où $\Phi_k : (\mathbb{R}^d)^k \longrightarrow \mathbb{R}$ représente une approximation de Φ . Les cas où $\Phi(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 f(x(s)) ds\right)^l$ et $\Phi(x(\cdot)) = \exp\left(\int_0^1 f(x(s)) ds\right)$ sont étudiés ; l est un entier positif et f une fonction mesurable et bornée.

Classification AMS : 60H10, 60J60, 65U05.

Mots-clés : Équation différentielle stochastique, approximation par le schéma d'Euler, vitesse de convergence.

7

Introduction

Cette étude a fait l'objet d'une collaboration avec Étienne Tanré.

Pour certaines fonctionnelles $\Phi : \mathcal{C}([0, \infty[; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, l'espérance de la variable aléatoire $\Phi(X(s)_{s \geq 0})$, où $(X(s))_{s \geq 0}$ est la solution de l'E.D.S. (8.1), représente une quantité intervenant dans de nombreux problèmes d'E.D.P. et de mathématiques financières.

$$(8.1) \quad X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(X(s)) ds \quad (t \geq 0).$$

La section suivante rappelle différentes équations dont les solutions peuvent s'exprimer comme l'espérance de fonctionnelles de trajectoires stochastiques, ainsi que certaines grandeurs liées à la finance.

7.1 Quelques exemples de fonctionnelles intéressantes

7.1.1 L'équation de la chaleur

L'exemple le plus simple est sans doute celui d'un mouvement brownien $(B(s))_{s \geq 0}$ issu de zéro.

La solution de l'équation de la chaleur,

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{1}{2} \Delta u(t, x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0, x) &= f(x) & (x \in \mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où f est une fonction continue, s'exprime sous la forme d'une espérance de ce mouvement brownien :

$$(7.2) \quad u(t, x) = \mathbb{E}\{f(x + B(t))\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d).$$

En considérant la diffusion $(X(t))_{t \geq 0}$ à la place du mouvement brownien, on obtient la solution de l'équation de la chaleur généralisée, au sens où le Laplacien Δ est remplacé par l'opérateur de différentiation $\mathcal{A}$ associé à l'E.D.S. (8.1) :

$$(7.3) \quad \mathcal{A}g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \quad (g \in C^2) \quad (x \in \mathbb{R}^d),$$

où

$$(7.4) \quad a_{i,j}(x) = \sum_{k=1}^l (\sigma_{i,k} \sigma_{j,k})(x) \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Si on note $(X^x(t))_{t \geq 0}$ la solution de l'E.D.S. (8.1) pour laquelle $X(0) = x$, la solution de l'équation,

$$(7.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}u(t,x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0,x) = f(x) & (x \in \mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où f est une fonction continue, s'écrit d'une manière analogue à la solution (7.2) de l'équation (7.1):

$$(7.6) \quad u(t,x) = \mathbb{E}\{f(X^x(t))\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}).$$

Il est également possible d'interpréter le membre de droite de (7.6) en terme de prix d'options financières européennes en particulierisant la fonction $f: f(y) = (K - y)_+$.

Tous ces exemples présentent le même type de fonctionnelles qui ne dépendent que de la seule valeur à un instant t de la trajectoire. Ces fonctionnelles élémentaires ne sont toutefois pas les seules à fournir des solutions d'E.D.P. ou des grandeurs économiques.

7.1.2 Le problème de Cauchy avec potentiel et Lagrangien

Deux exemples, où la totalité de la trajectoire du processus stochastique intervient, peuvent être considérés en parallèle: ils utilisent le même type de fonctionnelles. Il s'agit des solutions du problème de Cauchy présentant un potentiel non nul et du prix des options asiatiques.

Le problème de Cauchy avec potentiel r et Lagrangien g , est une extension de l'équation de la chaleur (7.5):

$$(7.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}u(t,x) - r(x)u(t,x) + g(x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où les fonctions r et g sont continues; r est de plus supposée minorée.

La formule de Feynman-Kac [KARATZAS, SHREVE, (1994)] permet d'exprimer la solution du problème de Cauchy sous la forme suivante:

$$(7.8) \quad u(t,x) = \mathbb{E} \left\{ u_0(X^x(t)) \exp \left(- \int_0^t r(X^x(s)) ds \right) + \int_0^t g(X^x(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X^x(s)) ds \right) d\theta \right\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d),$$

Quant aux prix des options asiatiques, l'allure de leur expression ressemble à celle des solutions ci-dessus. Plus précisément, soit $(r(t)_{0 \leq t \leq T})$ un processus stochastique représentant le taux d'intérêt. On suppose, pour ne pas avoir à changer de probabilité, qu'il compense exactement le taux de croissance de l'ensemble des actions. On considère une option ("contingent claim") de valeur terminale de paiement u_T et de taux de paiement $(g(t)_{0 \leq t \leq T})$; il est alors démontré [KARATZAS, SHREVE, (1994)] que le prix initial qu'il faut investir dans un portefeuille d'actions pour couvrir le paiement de l'option est donné par :

$$(7.9) \quad \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^T r(u) du \right) u_T + \int_0^T \exp \left(- \int_0^s r(u) du \right) g(s) ds \right\}.$$

7.1.3 Le problème de Dirichlet

D'autres types de fonctionnelles apparaissent à la fois dans l'analyse des E.D.P. et dans les mathématiques financières.

Si D est un domaine régulier de l'espace d'état d'un processus X^x issu de x , le temps de sortie τ_D^x de l'ensemble D est une information contenue dans l'ensemble de la trajectoire du processus : $\tau_D^x = \inf \{s > 0 ; X_s^x \notin D\}$.

La solution du problème de Dirichlet (7.10) :

$$(7.10) \quad \begin{cases} Au = 0 & (x \in D) \\ u(x) = f(x) & (x \in \partial D), \end{cases}$$

où f est une fonction continue sur ∂D , s'exprime sous la forme suivante :

$$(7.11) \quad u(x) = \mathbb{E} \left\{ f(X_{\tau_D^x}^x) \right\}.$$

Contenant lui aussi la v.a. τ_D^x du temps de sortie du domaine D pour la diffusion issue de x , le prix d'une option barrière admet comme expression :

$$(7.12) \quad \mathbb{E} \left\{ \mathbb{1}_{T < \tau_D^x} f(X_T^x) \right\}.$$

Ces différents exemples illustrent l'intérêt qu'il peut y avoir à estimer, à défaut de calculer, des espérances de fonctionnelles de la trajectoire de diffusions puisque ces quantités représentent des solutions d'E.D.P. ou des prix de couverture d'options financières.

7.2 Calcul de l'espérance des fonctionnelles

7.2.1 Principe

Le point de vue adopté ici ne consiste pas à résoudre numériquement les éventuelles E.D.P. dont ces espérances sont solutions. D'ailleurs, l'existence et l'unicité des solutions des E.D.P. décrites ci-dessus ne sont assurées que si la fonction f est suffisamment régulière.

L'optique est d'approcher ces quantités par des méthodes probabilistes, moins sensibles à la régularité des fonctions mises en jeu.

La méthode de Monte-Carlo constitue un moyen classique pour calculer des espérances de v.a., et il est naturel d'y avoir recours pour estimer ces espérances de fonctionnelles de la trajectoire de processus. Toutefois, cette approche présente un problème : il est en effet impossible de simuler des trajectoires du processus initial $(X(s))_{s \geq 0}$. On est alors amené à remplacer ce dernier par un processus proche de X et que l'on peut simuler. Une méthode est privilégiée par sa simplicité : le schéma d'Euler.

L'objectif est donc ici d'apprécier les vitesses de convergence de quantités calculables, en faisant intervenir le schéma d'Euler et des approximations de fonctionnelles, vers les espérances contenant le processus initial de diffusion.

7.2.2 Études réalisées dans la littérature

Plusieurs travaux ont déjà été conduits dans cette voie. En particulier, les études des cas où la fonctionnelle est réduite à la valeur en un seul point de la trajectoire ont permis d'obtenir des développements en δ de l'erreur commise en remplaçant le processus initial par celui obtenu grâce au schéma d'Euler de pas δ [TALAY, TUBARO, (1990)], [BALLY, TALAY, (1996)]. Ce dernier article se distingue du premier par un affaiblissement des hypothèses portant sur la fonction f qui apparaît dans (7.6). En effet, aucune régularité n'est demandée à cette fonction si ce n'est la mesurabilité ; une hypothèse de bornitude peut être relaxée pour ne conserver qu'une croissance polynomiale en $-\infty$ et $+\infty$.

Plus récemment, des travaux portant sur l'erreur lors de l'évaluation du prix des options barrière par une méthode impliquant le schéma d'Euler conduisent également à des développements de l'erreur [SEUMEN, (1997)], [GOBET, (1998)].

7.2.3 Fonctionnelles étudiées

L'étude présentée ici s'articule autour de plusieurs sortes de fonctionnelles. Dans un premier temps, une étude de fonctionnelles faisant intervenir plusieurs points de la trajectoire est réalisée. Cette extension, sans applications directes, permet dans un second temps d'aboutir à des résultats concernant des fonctionnelles plus intéressantes, qui reprennent l'information de l'intégrale de la trajectoire de la diffusion. Ceci permet alors de connaître les comportements de l'erreur, lors du calcul du prix d'options tel que le laisse apparaître (7.9), ou lors du calcul de solutions de l'équation (7.7) qui s'expriment par (7.8).

7.2.4 Résultats

Plus précisément, on démontre (théorème 9.1) que pour un nombre fixé k de points de la trajectoire, l'écart existant entre $\mathbb{E}\{\Phi(X(t_1), \dots, X(t_k))\}$ et $\mathbb{E}\{\Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k))\}$, où Φ désigne une fonction réelle définie sur $(\mathbb{R}^d)^k$ et $(t_i)_{(0 \leq i \leq k)}$ une subdivision, se comporte en δ . Cette démonstration a déjà été présentée lorsque ces espérances se ramènent au membre de droite de (7.6), avec f très régulière [TALAY, TUBARO, (1990)] et avec f

seulement supposée mesurable et bornée [BALLY, TALAY, (1996)] . C'est cette dernière hypothèse qui est imposée dans le cadre de cette étude.

Ce premier résultat permet d'aboutir à des cas de fonctionnelles $x(.) \mapsto \left(\int_0^1 f(x(s)) ds \right)^l$ et $x(.) \mapsto \exp \left(\int_0^1 f(x(s)) ds \right)$ au travers de l'étude des convergences des fonctionnelles du type précédent $x(.) \mapsto \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f \left(x\left(\frac{i}{k}\right) \right) \right)^l$ et $x(.) \mapsto \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f \left(x\left(\frac{i}{k}\right) \right) \right)$.

Il est ensuite démontré dans les théorèmes 10.2, 10.4 et 10.7 que chaque erreur est majorée par une quantité comportant un terme en δ et un autre en $\frac{\log k}{k}$. Toutefois, si l'on sait majorer uniformément en k le coefficient devant δ , il n'a pas été possible de contrôler uniformément le reste $\varepsilon_{\delta,k}$. Par conséquent, la vitesse de convergence des quantités contenant l'approximation d'Euler du processus n'est pas connue.

Enfin, en imposant l'égalité $k = \frac{1}{\delta}$, on obtient une majoration de l'erreur, énoncée dans le théorème 11.1, concernant les moments d'ordre l de l'intégrale de la trajectoire du processus.

Théorème 11.1 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(.)$ la solution de (8.1); soit $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(.)$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler; $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(.)$ est la solution de (8.2).

Alors il existe C tel que :

$$(11.1) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq C l \|f\|_{\infty}^l \frac{\log k}{\sqrt{k}} \quad (k, l \in \mathbb{N}^*) \quad \left(\lim_{k, l \rightarrow \infty} \frac{l \log k}{\sqrt{k}} = 0 \right).$$

Ce théorème fournit des majorations des vitesses de convergence pour les algorithmes permettant de calculer des prix d'options ou des solutions du problème de Cauchy.

La majoration (11.1) n'est certainement pas optimale puisque l'on peut démontrer dans des cas particuliers que la convergence est au moins en $\frac{\log k}{k}$. C'est le cas pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck; une démonstration directe établit la vitesse de convergence entre les deux sommes de Riemann dans la partie 11.3.1.

Par ailleurs, des simulations numériques concernant une diffusion solution d'une E.D.S. présentant deux coefficients non constants, indiquent que la vitesse réelle de convergence est plus élevée que la majoration en $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$ que nous avons démontrée.

7.2.5 Plan de l'étude

- Quelques notations et hypothèses intervenant dans l'ensemble de l'étude sont précisées dans la partie 8.

- À partir de là, le théorème 9.1, indiquant la vitesse de convergence pour des fonctionnelles faisant intervenir plusieurs points de la trajectoire, est énoncé dans la partie 9.1. Sa démonstration s'articule autour de trois parties : 9.2, 9.3 et 9.4.

- Avant l'étude des fonctionnelles de la trajectoire, qui sont cette fois-ci des fonctions de l'intégrale de la trajectoire, la partie 10.1 est consacrée au rappel d'un résultat concernant la dérivation des noyaux de transition pour des diffusions suivant les hypothèses décrites en 8.1. On y démontre la majoration de noyaux dérivés que l'on peut trouver dans [KUSUOKA, STROOCK, (1987)] ou [SÁNCHEZ-CALLE, (1984)].

Ensuite, un développement de l'erreur par rapport à δ est établi pour les moments d'ordre l de l'intégrale de la trajectoire (partie 10.2) ainsi que pour les moments exponentiels (partie 10.8). La démonstration de ce développement pour les moments (théorème 10.4) est réalisée dans le cas des ordres 1, 2, puis l dans les paragraphes 10.5, 10.6 et 10.7 respectivement. La partie 10.3 est réservée à la majoration de la vitesse de convergence

des sommes de Riemann $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ f \left(X \left(\frac{i}{k} \right) \right) \right\}$ vers $\int_0^1 \mathbb{E} \{ f(X(s)) \} ds$.

- La partie 11 est réservée à l'étude de majorations uniformes en $\delta = \frac{1}{k}$.

- Enfin, la partie 12 reprend les exemples de cette introduction et précise les vitesses de convergence des différents algorithmes.

8

Notations et hypothèses

8.1 Le processus de diffusion

Soit $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien de dimension r , issu de zéro et défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition :

On désigne par $X(\cdot)$ la solution de l'E.D.S. :

$$(8.1) \quad X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(X(s)) ds \quad (t \geq 0),$$

où $X(0)$ est une v.a. possédant des moments de tout ordre, et où σ , b et $a = \sigma\sigma^t$ (7.3) sont des fonctions vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(H\ 1) \quad \begin{aligned} & b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ et } \sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^r ; \mathbb{R}^d) \text{ sont de classe } C^\infty \\ & \text{les dérivées } b', b'', \sigma', \sigma'' \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^d \\ & \text{il existe } \eta \text{ tel que } \sum_{i,j} \xi_i a_{i,j}(x) \xi_j \geq \eta > 0 \quad (x \in \mathbb{R}^d) \quad (\xi \in \mathbb{R}^d ; \|\xi\| = 1). \end{aligned}$$

Notation :

On note, pour $r \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $X^{r,x}(\cdot)$ la diffusion correspondant à $X(\cdot)$ partant à l'instant r du point x ; $X^{r,x}(\cdot)$ est la solution de l'E.D.S. :

$$(8.2) \quad X^{r,x}(t) = x + \int_r^t \sigma(X^{r,x}(s)) dB(s) + \int_r^t b(X^{r,x}(s)) ds \quad (t \geq r) \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Définitions :

i) $\{\varphi_\delta\}_{\delta > 0}$ désigne une famille de fonctions réelles, définies sur $[0,1]$ vérifiant les hypothèses :

$$(H\ 2) \quad \begin{aligned} & \text{Pour tout } \delta > 0, \varphi_\delta \text{ est une fonction en escalier croissante} \\ & \text{telle que pour tout } t \in [0,1], \varphi_\delta(t) \leq t \text{ et } \frac{t - \varphi_\delta(t)}{\delta} \leq 1, \\ & \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_\delta(t) = t \end{aligned}$$

ii) On définit, pour toute fonction φ_δ , le processus $\bar{X}^\delta(\cdot)$ comme la solution de l'E.D.S. :

$$(8.3) \quad \bar{X}^\delta(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)) dB(s) + \int_0^t b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)) ds \quad (t \geq 0).$$

$\bar{X}^\delta(\cdot)$ correspond à la solution approchée par le schéma d'Euler de l'équation (8.1) si $\varphi_\delta(t) = \left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor \delta$, où $[v]$ représente la partie entière de $v \in [0, +\infty[$.

Notation :

On note, le cas échéant, la quantité $\left\lfloor \frac{t}{\delta} \right\rfloor \delta$ par $t^{(\delta)}$.

Remarque :

On ne s'interdit pas, sauf mention contraire, de choisir des familles de fonctions vérifiant seulement les hypothèses (H 2).

Un résultat classique (voir par exemple [KARATZAS, SHREVE, (1994)] ou [GIHMAN, SKOROHOD, (1972)]) consiste en une majoration des moments de $Y(t)$ où (Y, W) est une solution faible de l'E.D.S. générale :

$$(8.4) \quad Y(t) = Y(0) + \int_0^t f(s, Y) dW(s) + \int_0^t g(s, Y) ds \quad (t \geq 0),$$

les fonctionnelles f et g étant définies sur $[0, +\infty[\times \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)$.

Proposition 8.1 *On suppose que les fonctionnelles f et g vérifient l'hypothèse de majoration suivante :*

il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(8.5) \quad \|f(t, y)\|^2 + \|g(t, y)\|^2 \leq K \left(1 + \sup_{0 \leq s < t} \|y(s)\|^2 \right) \quad (y \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)) \quad (t \geq 0).$$

Alors pour toute solution faible (Y, W) de (8.4) :

$$(8.6) \quad \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|Y(s)\|^{2m} \right\} \leq C(1 + \mathbb{E} \{ \|Y(0)\|^{2m} \}) \exp(Ct) \quad (0 \leq t \leq T),$$

le nombre C dépendant uniquement de m , T et K .

Les E.D.S. (8.3) entrent dans le cadre des E.D.S. (8.4), puisqu'il suffit de choisir $f(s, y) = \sigma(y(\varphi_\delta(s)))$ et $g(s, y) = b(y(\varphi_\delta(s)))$ pour obtenir l'équation suivie par $\bar{X}^\delta$. Les conclusions de la proposition 8.5 permettent d'établir un résultat concernant la famille de processus $(\bar{X}^\delta(\cdot))_{\delta > 0}$:

Corollaire 8.2 *Sous les hypothèses (H 1) vérifiées par b et σ , il existe un nombre C tel que pour tout $\delta > 0$:*

$$(8.7) \quad \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|\bar{X}^\delta(s)\|^{2m} \right\} \leq C(1 + \mathbb{E} \{ \|X(0)\|^{2m} \}) \exp(Ct) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Démonstration du corollaire 8.2.

L'hypothèse (8.5) de la proposition 8.1 est réalisée dans le cas de la famille $(\bar{X}^\delta(\cdot))_{\delta>0}$:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} & \|\sigma(y(\varphi_\delta(t)))\|^2 + \|b(y(\varphi_\delta(t)))\|^2 \\ & \leq K \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \|y(s)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (y \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R}^d)) \quad (t \geq 0),$$

où K est un réel indépendant de δ .

Donc la majoration (8.8) est uniforme en $\delta > 0$, et le nombre C de la majoration (8.7) ne dépend pas de δ . $\square$

Définition :

Pour toute famille $\{\varphi_\delta\}_{\delta>0}$ et tout $r \in]0,1[$, on définit le processus $\bar{X}_r^\delta(\cdot)$ comme étant la solution $\bar{X}^\delta(\cdot)$ de l'équation (8.3) jusqu'au temps r , puis la solution $X^{r, \bar{X}^\delta(r)}$ de l'équation (8.2) au-delà de l'instant r .

$\bar{X}_r^\delta(\cdot)$ est ainsi la solution de l'E.D.S. suivante :

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \bar{X}_r^\delta(t) = & X(0) + \int_0^t (\sigma(\bar{X}_r^\delta \circ \varphi_\delta(s)) \mathbb{1}_{[0,r]}(s) + \sigma(\bar{X}_r^\delta(s)) \mathbb{1}_{[r,1]}(s)) dB(s) \\ & + \int_0^t (b(\bar{X}_r^\delta \circ \varphi_\delta(s)) \mathbb{1}_{[0,r]}(s) + b(\bar{X}_r^\delta(s)) \mathbb{1}_{[r,1]}(s)) ds \end{aligned} \quad (t \geq 0).$$

Cette famille de processus a été introduite par Kurtz et Protter. Elle est au cœur du principe de la démonstration du théorème 9.1.

8.2 La fonctionnelle de la trajectoire

Les résultats des parties 9, 10 et 11 correspondent à un horizon de temps fini. Pour simplifier les notations, ils sont énoncés et démontrés sur l'intervalle $[0,1]$.

Nous nous intéressons, dans un premier temps (partie 9), à des fonctionnelles qui ne font intervenir qu'un nombre fini de points de la trajectoire.

Définition :

Une fonctionnelle $\tilde{\Phi} : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, ne dépendant que d'un nombre fini k de points de la trajectoire, est entièrement déterminée par la donnée :

- d'une subdivision $\{t_i ; 1 \leq i \leq k\}$ de l'intervalle $[0,1]$ avec $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$,
- d'une fonction $\Phi : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$(8.10) \quad \tilde{\Phi}(x(\cdot)) = \Phi(x(t_1), \dots, x(t_k)) \quad (x(\cdot) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^d)).$$

La fonction Φ vérifie l'hypothèse (H 3) :

(H 3) Φ est une fonction mesurable,
il existe $C \in \mathbb{R}$ et $p > 0$ tels que :

$$(M_p) \quad |\Phi(x_1, \dots, x_k)| \leq C \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k} \|x_j\|^p \right).$$

9

Développement en δ de l'erreur pour des fonctionnelles à k points

9.1 Résultat principal

Le théorème 9.1 propose un développement de l'erreur induite par le remplacement de X par $\bar{X}^\delta$ dans l'expression $\mathbb{E}\{\Phi(X(t_1), \dots, X(t_k))\}$. La dimension de la diffusion est restreinte à $d = 1$. Cependant, lors de la démonstration du théorème 9.1, le théorème 9.2 dont le résultat sera également utilisé dans la partie 11 est énoncé dans le cas général $d \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 9.1 *On considère une fonctionnelle $\tilde{\Phi}$ définie à partir d'une fonction $\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une subdivision $\{t_i ; 1 \leq i \leq k\}$ de $[0, 1]$.*

On suppose que Φ vérifie l'hypothèse (H 3).

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d = 1$; soit $\bar{X}^\delta(\cdot)$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler; $\bar{X}^\delta(\cdot)$ est la solution de (8.2).

Alors,

$$(9.1) \quad \mathbb{E}\{\Phi(X(t_1), \dots, X(t_k))\} - \mathbb{E}\{\Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k))\} = R(\tilde{\Phi})\delta + \varepsilon_{\delta,k},$$

la quantité $\varepsilon_{\delta,k}$ vérifiant pour tout entier k : $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{\delta,k}}{\delta} = 0$, et la quantité $R(\tilde{\Phi})$ pouvant s'exprimer comme la somme de trois intégrales faisant intervenir la fonction $H_{r,k}$ définie plus avant par (9.3):

$$(9.2) \quad \begin{aligned} R(\tilde{\Phi}) = & \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z} (X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) \left(\frac{ab''}{2} + bb' \right) (X(r)) \right\} dr \\ & + \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2} (X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) \right. \\ & \quad \left. \left(ab' + \frac{aa''}{4} + \frac{ba'}{2} \right) (X(r)) \right\} dr \\ & + \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^3 H_{r,k}}{\partial z^3} (X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) \frac{aa'}{2} (X(r)) \right\} dr. \end{aligned}$$

Lorsque k est égal à 1, ce théorème est une version assez proche du théorème 3.1 de [BALLY, TALAY, (1996)]. Il faut noter que nos hypothèses concernant les coefficients de la diffusion sont simplifiées, et que celles portant sur la fonction f sont identiques ; l'hypothèse (H 3), dans le cas $k = 1$, correspond à la mesurabilité de f et à sa croissance polynomiale.

Par contre, la démonstration du théorème 9.1 ne reprend pas celle de [BALLY, TALAY, (1996)] mais s'inspire d'une idée de Kurtz et Protter. En particulier, l'introduction de la famille de processus paramétrés, qui sont les solutions de l'E.D.S. (8.9), leur revient. De plus, le théorème 9.2 et le lemme 9.5 ont été adaptés ici à des valeurs de k supérieures à 1.

Plan de la démonstration du théorème 9.1.

La démonstration qui suit se compose de trois parties.

Dans une première partie, l'écart entre $\mathbb{E}\{\Phi(X(t_1, \dots, t_k))\}$ et $\mathbb{E}\{\Phi(\bar{X}^\delta(t_1, \dots, t_k))\}$ est représenté comme l'intégrale d'une dérivée ; cette dérivée est calculée, dans le théorème 9.2, en fonction du seul processus $\bar{X}^\delta$.

Une seconde partie est consacrée au calcul des limites des quotients des termes obtenus au théorème 9.2 pour cette dérivée par δ , quand δ tend vers zéro.

Une dernière partie regroupe les résultats précédents pour établir (9.1) et l'expression (9.2) de $R(\tilde{\Phi})$.

9.2 Dérivation de l'espérance d'une fonction du processus $\bar{X}_r^\delta(\cdot)$

Les processus $\bar{X}_r^\delta(\cdot)$, lorsque r décrit $[0,1]$, constituent une paramétrisation dans l'espace des solutions des équations (8.3) où φ_δ vérifie (H 2), allant de la solution $X(\cdot)$ de (8.1) pour $r = 0$ à la solution $\bar{X}^\delta(\cdot)$ de (8.3) pour $r = 1$. La différence $\mathbb{E}\{\Phi(X(t_1), \dots, X(t_k))\} - \mathbb{E}\{\Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k))\}$ peut ainsi s'écrire comme l'intégrale entre $r = 0$ et $r = 1$ de la dérivée $\frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E}\{\Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k))\}$.

Le théorème suivant exprime cette dérivée en fonction des coefficients σ et b .

Théorème 9.2 *On considère une fonctionnelle $\tilde{\Phi}$ définie à partir d'une fonction $\Phi : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une subdivision $\{t_i ; 1 \leq i \leq k\}$ de $[0,1]$.*

On suppose que Φ vérifie l'hypothèse (H 3).

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^$; soit $\bar{X}^\delta(\cdot)$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler ; $\bar{X}^\delta(\cdot)$ est la solution de (8.2).*

On définit la famille de fonctions à valeurs réelles indexées par r et k :

$$(9.3) \quad \begin{aligned} H_{r,k} : (\mathbb{R}^d)^{k_r} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{k_r}, z) &\longmapsto \mathbb{E}\{\Phi(x_1, \dots, x_{k_r}, X^{r,z}(t_{k_r+1}), \dots, X^{r,z}(t_k))\}, \end{aligned}$$

où $k_r = \sup\{i ; t_i \leq r\}$.

Alors pour tout $r \in]0,1[\setminus \{t_i ; 1 \leq i \leq k\}$,

$$(9.4) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbb{E} \left\{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k)) \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^d [b_i(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) - b_i(\bar{X}^\delta(r))] \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z_i}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i,j=1}^d [a_{ij}(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) - a_{ij}(\bar{X}^\delta(r))] \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z_i \partial z_j}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\}. \end{aligned}$$

Notations :

Si g désigne une fonction réelle C^∞ définie pour $x = (y, z) \in (\mathbb{R}^d)^i \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on écrira dans la suite :

$$\begin{aligned} & b(x) \frac{\partial g}{\partial z}(x) \text{ pour } \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial g}{\partial z_i}(x), \\ & a(x) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x) \text{ pour } \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}(x). \end{aligned}$$

La conclusion du théorème 9.2 s'écrit alors :

$$(9.5) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbb{E} \left\{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k)) \right\} \right) \\ &= \mathbb{E} \left\{ [b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) - b(\bar{X}^\delta(r))] \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ [a(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) - a(\bar{X}^\delta(r))] \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\}. \end{aligned}$$

L'énoncé du théorème appelle quelques commentaires avant d'aborder sa démonstration.

- Premièrement, la fonction $H_{r,k}$ est correctement définie en tant qu'espérance d'une v.a. intégrable. En effet, en appliquant successivement (M_p) et (8.6), on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \{ |\Phi(x_1, \dots, x_{k_r}, X^{r,z}(t_{k_r+1}), \dots, X^{r,z}(t_k))| \} \\ & \leq C \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k_r} \|x_j\|^p + \mathbb{E} \left\{ \sup_{k_r+1 \leq j \leq k} \|X^{r,z}(t_j)\|^p \right\} \right) \\ & \leq \tilde{C} \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k_r} \|x_j\|^p + \|z\|^p \right), \end{aligned}$$

où C et $\tilde{C}$ sont des constantes.

- Deuxièmement, la fonction $H_{r,k}$ est dérivable par rapport à la dernière variable. Il suffit d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe d'intégration pour le démontrer.

Plus précisément, soit $a > 0$, les fonctions $\Phi(x_1, \dots, x_{k_r}, X^{r,z}(t_{k_r+1}), \dots, X^{r,z}(t_k))$ sont $\mathbb{P}$ -intégrables pour tout $z \in]-a, a[$.

En introduisant le noyau de transition du processus $X^{r,z}(\cdot)$ entre les temps r et t_{k_r+1} , on isole le paramètre z par rapport auquel on veut dériver.

Notation :

La densité de la probabilité de transition du processus $X(\cdot)$ entre les instants s_1 et s_2 est notée q_{s_1,s_2} , parfois $q_{s_2-s_1}$:

$$(9.6) \quad \mathbb{P}(\{X^{s_1,x}(s_2) \in dy\}) = q_{s_1,s_2}(x,y) dy.$$

La fonction $H_{r,k}$ s'écrit alors :

$$H_{r,k}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) = \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \Phi(x_1, \dots, x_{k_r+1}, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_{k_r+2}), \dots, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_k)) \right. \\ \left. q_{r, t_{k_r+1}}(z, x_{k_r+1}) dx_{k_r+1} \right\}.$$

Pour tout entier strictement positif γ , l'application de l'inégalité (10.2) permet de majorer la famille des dérivées

$$\left\{ \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} (\Phi(x_1, \dots, x_{k_r+1}, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_{k_r+2}), \dots, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_k)) q_{r, t_{k_r+1}}(z, x_{k_r+1})) \right\}_{z \in]-a, a[}$$

par :

$$C \left| \Phi(x_1, \dots, x_{k_r+1}, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_{k_r+2}), \dots, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_k)) \right| \\ \times \frac{1}{(t_{k_r+1} - r)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \frac{\exp \left(-\frac{x_{k_r+1}^2 - 2|a|x_{k_r+1}}{2M(t_{k_r+1} - r)} \right)}{\sqrt{2\pi M}};$$

cette fonction est intégrable par rapport à $\mathbb{P} \otimes dx_{k_r+1}$.

Par conséquent, pour $\gamma \in \mathbb{N}^*$,

$$(9.7) \quad \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) = \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \Phi(x_1, \dots, x_{k_r+1}, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_{k_r+2}), \dots, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_k)) \frac{\partial^l q_{r, t_{k_r+1}}}{\partial z^l}(z, x_{k_r+1}) dx_{k_r+1} \right\}.$$

• Enfin, le lemme suivant, qui interviendra lors de la démonstration du lemme 9.5, démontre en outre que les espérances apparaissant dans le membre de droite de (9.4), impliquant les dérivées $\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}$, sont finies.

Lemme 9.3 *Les hypothèses du théorème 9.2 sont restreintes à $d = 1$; q désigne un entier naturel non nul.*

Alors, pour $\gamma \in \mathbb{N}^$, il existe un réel C et un entier N tels que :*

$$(9.8) \quad \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), (1-\theta)\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r) + \theta\bar{X}^\delta(r)) \right|^q \right\} \\ \leq C \mathbb{E} \left\{ 1 + \sup_{0 \leq s \leq r} |\bar{X}^\delta(s)|^N \right\}.$$

Démonstration du lemme 9.3.

On note :

$$I = \left| \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) \right|.$$

Par (9.7), I s'exprime sous la forme suivante :

$$I = \left| \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \Phi(x_1, \dots, x_{k_r+1}, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_{k_r+2}), \dots, X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_k)) \frac{\partial^\gamma q_{r, t_{k_r+1}}(z, x_{k_r+1})}{\partial z^\gamma} dx_{k_r+1} \right\} \right|.$$

On majore la fonction Φ et la dérivée du noyau $q_{r, t_{k_r+1}}$ en utilisant respectivement (M_p) et (10.2) :

$$I \leq C_1 \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k_r} |x_j|^p + \sup_{k_r+2 \leq j \leq k} |X^{t_{k_r+1}, x_{k_r+1}}(t_j)|^p \right) \frac{\exp\left(-\frac{(x_{k_r+1} - z)^2}{2M(t_{k_r+1} - r)}\right)}{\sqrt{2\pi M(t_{k_r+1} - r)}^{\frac{\gamma+1}{2}}} dx_{k_r+1} \right\}.$$

On échange espérance et intégrale, puis on utilise la majoration (8.6) avant qu'un changement de variable dans l'intégrale ne conduise à :

$$I \leq C_2 \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k_r} |x_j|^p + \int_{\mathbb{R}} |x|^p \frac{\exp\left(-\frac{(x - z)^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dx \right),$$

où le réel C_2 dépend de M et du temps $t_{k_r+1} - r$.

L'intégrale en x est clairement dominée par une fonction polynomiale en $|z|$ de degré p .

On obtient alors successivement :

$$I \leq C_3 \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k_r} |x_j|^p + |z|^p \right)$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), (1 - \theta)\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r) + \theta\bar{X}^\delta(r)) \right|^q \right\} \\ & \leq C \mathbb{E} \left\{ 1 + \sup_{0 \leq s \leq r} |\bar{X}^\delta(s)|^{qp} \right\}. \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 9.2.

On considère la différence suivante dans laquelle le réel strictement positif h est choisi pour que $r + h < t_{k_r+1}$, de sorte que $k_{r+h} = k_r$:

$$(9.9) \quad \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_{r+h}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_{r+h}^\delta(t_k)) \} - \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k)) \}.$$

Chacun des deux termes peut s'exprimer au moyen de la fonction $H_{r+h,k}$.

En effet, la variable aléatoire $\bar{X}_{r+h}^\delta(s)$ étant égale à $\bar{X}^\delta(s)$ ou à $X^{r+h, \bar{X}^\delta(r+h)}(s)$, suivant que le temps s est respectivement inférieur ou supérieur à $r + h$, le premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_{r+h}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_{r+h}^\delta(t_k)) \} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), X^{r+h, \bar{X}^\delta(r+h)}(t_{k_r+1}), \dots, X^{r+h, \bar{X}^\delta(r+h)}(t_k)) \right\}. \end{aligned}$$

Un conditionnement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{r+h}$ laisse apparaître la fonction $H_{r+h,k}$:

$$(9.10) \quad \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_{r+h}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_{r+h}^\delta(t_k)) \} = \mathbb{E} \{ H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(r+h)) \}.$$

En procédant à l'identique, on peut écrire le second terme de (9.9) comme suit :

$$\mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k)) \} = \mathbb{E} \{ H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(r+h)) \}.$$

On applique alors à la fonction $H_{r+h,k}$ la formule d'Itô [KARATZAS, SHREVE, (1994)] avec les processus $\bar{X}_r^\delta(\cdot)$ et $\bar{X}_{r+h}^\delta(\cdot)$, entre les instants r et $r + h$:

$$\begin{aligned} & H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(r+h)) = H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(r)) \\ & + \int_r^{r+h} \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(s)) \sigma(\bar{X}_{r+h}^\delta(s^{(\delta)})) dB(s) \\ (9.11) \quad & + \int_r^{r+h} \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(s)) b(\bar{X}_{r+h}^\delta(s^{(\delta)})) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_r^{r+h} \frac{\partial^2 H_{r+h,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(s)) a(\bar{X}_{r+h}^\delta(s^{(\delta)})) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(r+h)) = H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(r)) \\ & + \int_r^{r+h} \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) \sigma(\bar{X}_r^\delta(s)) dB(s) \\ (9.12) \quad & + \int_r^{r+h} \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) b(\bar{X}_r^\delta(s)) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_r^{r+h} \frac{\partial^2 H_{r+h,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) a(\bar{X}_r^\delta(s)) ds. \end{aligned}$$

On choisit le réel positif h suffisamment petit pour que $s^{(\delta)} \leq r$ lorsque $r < s < r + h$; ainsi, on peut remplacer $\bar{X}_{r+h}^\delta(s^{(\delta)})$ par $\bar{X}^\delta(s^{(\delta)})$ dans les intégrales de (9.11).

Par ailleurs, comme $s < r + h$ dans les intégrales de (9.11), on peut remplacer $\bar{X}_{r+h}^\delta(s)$ par $\bar{X}^\delta(s)$.

Soustrayant (9.12) à (9.11), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (9.13) \quad & H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_{r+h}^\delta(r+h)) - H_{r+h,k}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(r+h)) \\
 &= \int_r^{r+h} \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(s)) [\sigma(\bar{X}^\delta(s^{(\delta)})) dB(s) + b(\bar{X}^\delta(s^{(\delta)})) ds] \\
 &\quad - \int_r^{r+h} \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) [\sigma(\bar{X}_r^\delta(s)) dB(s) + b(\bar{X}_r^\delta(s)) ds] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_r^{r+h} \frac{\partial^2 H_{r+h,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(s)) a(\bar{X}^\delta(s^{(\delta)})) ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_r^{r+h} \frac{\partial^2 H_{r+h,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) a(\bar{X}_r^\delta(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 9.3 et du corollaire 8.2 que les intégrales en $dB(s)$ sont des martingales de carré intégrable. Par conséquent, en prenant l'espérance dans l'égalité (9.13), on fait disparaître ces intégrales en $dB(s)$, et par (9.10) on obtient :

$$\begin{aligned}
 (9.14) \quad & \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_{r+h}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_{r+h}^\delta(t_{k_r})) \} - \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_{k_r})) \} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \int_r^{r+h} \left(\frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(s)) b(\bar{X}^\delta(s^{(\delta)})) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial H_{r+h,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) b(\bar{X}_r^\delta(s)) \right) ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ \int_r^{r+h} \left(\frac{\partial^2 H_{r+h,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(s)) a(\bar{X}^\delta(s^{(\delta)})) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 H_{r+h,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}_r^\delta(s)) a(\bar{X}_r^\delta(s)) \right) ds \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

La conclusion du théorème s'obtient en divisant cette dernière égalité par h et en faisant tendre h vers zéro. $\square$

Les résultats de cette première partie sont utilisés dans la dernière partie de la démonstration. Par ailleurs, l'égalité (9.4) oriente les calculs menés dans la deuxième partie.

9.3 Limite en δ

L'égalité (9.4) fournit une expression de la dérivée par rapport au paramètre r , de la fonctionnelle $\tilde{\Phi}$ appliquée au processus $\bar{X}_r^\delta$. L'écriture de cette dérivée ne fait apparaître que le seul processus $\bar{X}^\delta$.

Le but de cette section est de préciser les comportements des espérances du membre de droite de l'égalité (9.4), lorsque le paramètre δ converge vers zéro. Les résultats de cette section sont restreints au cas où la diffusion est de dimension un.

Avant d'étudier ces comportements, nous comparons les vitesses de convergence vers zéro, de la norme L^p de $\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)$ et de $r - \varphi_\delta(r)$.

Lemme 9.4 Soit un entier $p \geq 1$. Il existe un nombre C tel que pour tout $\delta > 0$:

$$(9.15) \quad \mathbb{E} \left\{ |\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)|^{2p} \right\} \leq C (r - \varphi_\delta(r))^p.$$

Démonstration du lemme 9.4.

La fonction φ_δ reste constante entre $\varphi_\delta(r)$ et r ; par conséquent, l'équation (8.3) se simplifie :

$$(9.16) \quad \bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r) = \sigma(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))(B(r) - B \circ \varphi_\delta(r)) + b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))(r - \varphi_\delta(r)).$$

Cette égalité et l'indépendance de l'accroissement du brownien $B(r) - B \circ \varphi_\delta(r)$ par rapport à $\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)$ vont permettre de démontrer que la norme L^{2p} de $\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)$ se comporte au voisinage de $\delta = 0$ comme $\sqrt{r - \varphi_\delta(r)}$. En effet, si l'on élève à la puissance $2p$ les deux membres de l'égalité (9.16) et que l'on développe le membre de droite, on obtient le développement de la puissance $2p^{\text{ème}}$ de la norme L^{2p} de la différence $\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)$:

$$(9.17) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ |\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)|^{2p} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{2p} \binom{2p}{i} (r - \varphi_\delta(r))^{2p-i} \mathbb{E} \{ B(1)^i \} \mathbb{E} \{ (\sigma^i b^{2p-i})(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \}. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de bornitude de σ' et au corollaire 8.7, on peut alors majorer toutes les espérances faisant intervenir la v.a. $\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)$ par un nombre dépendant des moments d'ordre 1 à $2p$ de $X(0)$.

La plus faible puissance de $r - \varphi_\delta(r)$ provient du terme correspondant à $i = 2p$ dans la somme. On obtient par conséquent la majoration (9.15) du lemme. $\square$

Remarque :

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la majoration (9.15) lorsque $p = 1$ implique l'existence d'un nombre C tel que pour tout $\delta > 0$:

$$(9.18) \quad \mathbb{E} \{ |\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)| \} \leq C \sqrt{r - \varphi_\delta(r)}.$$

Lemme 9.5 Soit g une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 telle qu'il existe une constante C :

$$(9.19) \quad |g(x) - g(y)| \leq C|x - y|(1 + |x| + |y|) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \{1, 2\}$ et $r \in]0, 1[\setminus \{t_i ; 1 \leq i \leq k\}$.

Alors :

$$(9.20) \quad \begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{r - \varphi_\delta(r)} \mathbb{E} \left\{ [g(\bar{X}_r^\delta(r)) - g(\bar{X}_r^\delta \circ \varphi_\delta(r))] \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k), \bar{X}_r^\delta(r)) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{ag''}{2} + bg' \right)(X(r)) \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \right\} \\ &+ \mathbb{E} \left\{ a(X(r))g'(X(r)) \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 9.5.

On développe l'expression apparaissant dans la limite à calculer, en utilisant la dérivée par rapport à la dernière variable de la fonction $H_{r,k}$.

$$\begin{aligned}
(9.21) \quad & [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))] \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \\
& = [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))] \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right. \\
& \quad - \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \\
& \quad \left. - \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))(\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right\} \\
& + [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))] \left\{ \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \right. \\
& \quad \left. \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))(\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right\} \\
& + [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))] \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right\}.
\end{aligned}$$

Chacun des termes du membre de droite de (9.21) va être étudié.

- On va démontrer que l'espérance du premier terme du membre de droite de (9.21) divisée par $r - \varphi_\delta(r)$ converge vers zéro lorsque δ tend vers zéro.

L'espérance de ce premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned}
(9.22) \quad & \mathbb{E} \left\{ (g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))) \right. \\
& \left[\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) - \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
& \left. \left. - (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

En appliquant à plusieurs reprises l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant l'hypothèse (9.19) suivie par g , on obtient une majoration de (9.22) par :

$$\begin{aligned}
(9.23) \quad & C \left(\mathbb{E} \{ (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))^4 \} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\mathbb{E} \{ (1 + |\bar{X}^\delta(r)| + |\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)|)^4 \} \right)^{\frac{1}{4}} \\
& \left(\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Le premier facteur de (9.23) se comporte comme $\sqrt{r - \varphi_\delta(r)}$ lorsque δ tend vers zéro. Le second facteur est borné en vertu de la proposition 8.1. Il reste à démontrer que le dernier facteur converge vers zéro avec δ .

Le développement de Taylor à l'ordre 2 permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 (9.24) \quad & \left(\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) - \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
 & \left. - (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right)^2 \\
 & = \left((\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))^2 \int_0^1 (1-\theta) \frac{\partial^{\gamma+2} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+2}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \right. \\
 & \quad \left. (1-\theta)\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r) + \theta\bar{X}^\delta(r)) d\theta \right)^2 \\
 & \leq (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))^4 \\
 & \quad \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left(\frac{\partial^{\gamma+2} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+2}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), (1-\theta)\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r) + \theta\bar{X}^\delta(r)) \right)^2.
 \end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la majoration (9.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) - \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right)^2 \right\} \\
 & \leq C \left(\mathbb{E} \left\{ (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))^8 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq r} |\bar{X}^\delta(s)|^N \right\} \right).
 \end{aligned}$$

Le corollaire 8.2 et le lemme 9.15 impliquent l'existence d'une constante C permettant la majoration de l'espérance ci-dessus par $C \sqrt{r - \varphi_\delta(r)}$.

- L'espérance du second terme du membre de droite de (9.21) est développée grâce à la formule d'Itô.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}} (\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
& \quad \left. [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))] (\bar{X}^\delta(r) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}} (\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \int_{\varphi_\delta(r)}^r (\bar{X}^\delta(s) - \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
& \quad \left. \left[g'(\bar{X}^\delta(s)) b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)) + \frac{1}{2} g''(\bar{X}^\delta(s)) a(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)) \right] ds \right\} \\
(9.26) \quad & + \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}} (\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
& \quad \left. \int_{\varphi_\delta(r)}^r (g(\bar{X}^\delta(s)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))) b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)) ds \right\} \\
& + \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}} (\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
& \quad \left. \int_{\varphi_\delta(r)}^r g'(\bar{X}^\delta(s)) a(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Dans le membre de droite de (9.26), l'application du lemme 9.3 et du corollaire 8.2 permet de vérifier les hypothèses des théorèmes de Fubini et de Lebesgue; il est alors possible d'échanger les signes d'intégration et d'espérance, puis d'obtenir la limite lorsque δ converge vers zéro des espérances. Les deux premiers termes divisés par $r - \varphi_\delta(r)$ convergent vers zéro avec δ . Seul le troisième terme divisé par $r - \varphi_\delta(r)$ possède une limite non nulle :

$$\mathbb{E} \left\{ a(X(r)) g'(X(r)) \frac{\partial^{\gamma+1} H_{r,k}}{\partial z^{\gamma+1}} (X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) \right\}.$$

• L'espérance du troisième terme du membre de droite de (9.21) s'écrit grâce à la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma} (\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) (g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r))) \right\} \\
(9.27) \quad &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma} (\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right. \\
& \quad \left. \int_{\varphi_\delta(r)}^r \left[g'(\bar{X}^\delta(s)) b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) + \frac{1}{2} g''(\bar{X}^\delta(s)) a(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) \right] ds \right\}.
\end{aligned}$$

L'égalité (9.27) et le troisième terme de (9.26) donnent les termes de (9.20); ce qui achève la démonstration du lemme 9.5 et clôt la deuxième partie de la démonstration du théorème 9.1. $\square$

9.4 Expression du coefficient devant δ

Il reste à établir l'expression (9.2) de la quantité $R(\tilde{\Phi})$ pour achever la démonstration du théorème 9.1.

Le lemme 9.5 appliqué à $g = b$ puis $g = a$ et le théorème 9.2 permettent de majorer $R(\tilde{\Phi})$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 |R(\tilde{\Phi})| &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left| \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k)) \} - \mathbb{E} \{ \Phi(X(t_1), \dots, X(t_k)) \} \right| \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k)) \} dr \right| \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_0^1 \frac{r - \varphi_\delta(r)}{\delta} \frac{1}{r - \varphi_\delta(r)} \right. \\
 &\quad \mathbb{E} \left\{ (b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) - b(\bar{X}^\delta(r))) \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k), \bar{X}^\delta(r)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (a(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(r)) - a(\bar{X}^\delta(r))) \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k), \bar{X}^\delta(r)) \right\} dr \Big| \\
 (9.28) \quad &\leq \left| \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \left(\frac{ab''}{2} + bb' \right)(X(r)) \right\} dr \right. \\
 &\quad + \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \right. \\
 &\quad \left. \left(ab' + \frac{aa''}{4} + \frac{ba'}{2} \right)(X(r)) \right\} dr \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^3 H_{r,k}}{\partial z^3}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \left(\frac{aa'}{2} \right)(X(r)) \right\} dr \right|.
 \end{aligned}$$

Si l'on choisit la fonction φ_δ correspondant au schéma d'Euler, c'est-à-dire si $\varphi_\delta(r) = \left\lfloor \frac{r}{\delta} \right\rfloor \delta = r^{(\delta)}$, on peut établir un lemme qui permettra d'obtenir une égalité dans (9.28) :

Lemme 9.6 Soit $\{g_\delta ; \delta > 0\}$ une famille uniformément bornée de fonctions réelles continues sur $[0,1]$ convergeant simplement vers une fonction continue g ; c'est-à-dire que pour tout $r \in [0,1]$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(r) = g(r)$.

Alors

$$(9.29) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{r - r^{(\delta)}}{\delta} g_\delta(r) dr = \frac{1}{2} \int_0^1 g(r) dr.$$

Démonstration du lemme 9.6.

La famille de fonctions $\{g_\delta ; \delta > 0\}$ étant bornée, la convergence simple de g_δ vers g entraîne la convergence en norme L^1 .

Ce qui, après que la quantité $\frac{r - r^{(\delta)}}{\delta}$ est majorée par 1, permet d'établir :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 \frac{r - r^{(\delta)}}{\delta} g_\delta(r) dr - \int_0^1 \frac{r - r^{(\delta)}}{\delta} g(r) dr \right] = 0.$$

On calcule maintenant la limite du second terme :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{r - r^{(\delta)}}{\delta} g(r) dr = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \{\frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}\}}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{\delta}} \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{r}{\delta} - (k-1) \right) g(r) dr.$$

On peut remplacer dans cette expression $g(r)$ par $g((k-1)\delta)$. En effet, en majorant $\frac{r}{\delta} - (k-1)$ par 1 et la différence impliquant la fonction g , on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{\delta}} \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{r}{\delta} - (k-1) \right) |g(r) - g((k-1)\delta)| dr \leq \sup_{|s-t| \leq \delta} |g(s) - g(t)|,$$

et comme la fonction g est uniformément continue puisque continue sur un compact, le module de continuité converge vers zéro lorsque δ tend vers zéro.

Il reste à remplacer l'intégrale $\int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \left(\frac{r}{\delta} - (k-1) \right) dr$ par sa valeur $\frac{\delta}{2}$ pour obtenir :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{r - r^{(\delta)}}{\delta} g(r) dr = \frac{1}{2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \{\frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}\}}} \delta \sum_{k=1}^{\frac{1}{\delta}} g((k-1)\delta) = \frac{1}{2} \int_0^1 g(r) dr.$$

□

On peut reprendre le calcul de la limite (9.28) sans avoir recours à des majorations :

$$\begin{aligned}
 R(\tilde{\Phi}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k)) \} - \mathbb{E} \{ \Phi(X(t_1), \dots, X(t_k)) \} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E} \{ \Phi(\bar{X}_r^\delta(t_1), \dots, \bar{X}_r^\delta(t_k)) \} dr \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{r - r^{(\delta)}}{\delta} \frac{1}{r - r^{(\delta)}} \mathbb{E} \left\{ (b(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)})) - b(\bar{X}^\delta(r))) \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k), \bar{X}^\delta(r)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (a(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)})) - a(\bar{X}^\delta(r))) \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k), \bar{X}^\delta(r)) \right\} dr \\
 (9.30) \quad &= \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \left(\frac{ab''}{2} + bb' \right) (X(r)) \right\} dr \\
 &\quad + \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \right. \\
 &\quad \left. \left(ab' + \frac{aa''}{4} + \frac{b(\sigma^2)'}{2} \right) (X(r)) \right\} dr \\
 &\quad + \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^3 H_{r,k}}{\partial z^3}(X(t_1), \dots, X(t_k), X(r)) \left(\frac{aa'}{2} \right) (X(r)) \right\} dr.
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel k fixé, les trois intégrales composant la quantité $R(\tilde{\Phi})$ et apparaissant dans (9.30) sont finies.

Le théorème 9.1 est démontré. $\square$

Le paramètre k reste fixé dans toute la partie précédente. Notre objectif est d'obtenir des résultats de convergence pour des fonctionnelles qui dépendent de la trajectoire complète du processus stochastique et non plus d'un nombre fini de points de la trajectoire. Pour cela, on va étudier l'influence de k dans le coefficient $R(\tilde{\Phi})$.

Majoration en δ et k de l'erreur pour l'intégrale de la trajectoire

Ce qui suit est consacré à plusieurs exemples de fonctionnelles dépendant de la totalité de la trajectoire. Imaginons que les fonctionnelles $\tilde{\Phi}$ soient des approximations d'une fonctionnelle Ψ . Il est alors possible de faire tendre k vers l'infini dans le membre de gauche de (9.1). Le membre de droite de (9.1) possède donc une limite, mais on ignore s'il en est de même pour chacun de ses deux termes $R(\tilde{\Phi})\delta$ et $\varepsilon_{\delta,k}$.

La suite de l'étude se restreint à l'utilisation de l'approximation usuelle $\bar{X}^\delta$ donnée par le schéma d'Euler. C'est-à-dire que la famille de fonctions $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ est définie par :

$$\varphi_\delta(r) = \left\lfloor \frac{r}{\delta} \right\rfloor \delta \quad (r \in [0,1])$$

Les deux sections 10.2 et 10.3 ont pour objet de démontrer que la quantité $R(\tilde{\Phi})$ reste bornée uniformément en k , pour plusieurs types de fonctionnelles spécifiques. En effet, toutes les v.a. $\tilde{\Phi}(X(\cdot))$ étudiées ne dépendent que de l'intégrale de la trajectoire $s \mapsto f(X(s))$.

Mais auparavant, on va énoncer le résultat fondamental permettant de contrôler le coefficient $R(\tilde{\Phi})$ par rapport au paramètre k .

Le développement (9.1) de l'erreur $\mathbb{E}\{\Phi(X(t_1), \dots, X(t_k))\} - \mathbb{E}\{\Phi(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_k))\}$ présente une expression du coefficient $R(\tilde{\Phi})$ devant le paramètre δ . Au vu de (9.2), le comportement de $R(\tilde{\Phi})$ lorsque k tend vers l'infini est lié à ceux des trois premières dérivées de la fonction $H_{r,k}$. La fonction $H_{r,k}$, définie par (9.3), est égale à l'espérance de la fonctionnelle $\tilde{\Phi}$ sur une trajectoire, aléatoire seulement au-delà du temps r . Ce morceau de trajectoire aléatoire est $(X^{r,z}(s))_{r \leq s \leq 1}$. Ainsi, les dérivées de la fonction $H_{r,k}$ mesure l'impact d'une variation du point de départ de la diffusion à l'instant r . Ces dérivations pourront être contrôlées au travers des majorations des dérivées du noyau de transition du processus X .

10.1 Majorations des dérivées du noyau de la diffusion

Une des conséquences de la définition (9.3) de $H_{r,k}$ est que l'expression (9.2) du coefficient $R(\tilde{\Phi})$ fait intervenir des dérivées de l'espérance de la trajectoire de la diffusion $X^{r,z}$ par rapport à son point de départ z . Et si l'on utilise le noyau de transition $q_t(x,y)$ de la diffusion $X(\cdot)$ pour écrire la fonction $H_{r,k}$,

$$(10.1) \quad H_{r,k}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) = \int_{\mathbb{R}^{k-k_r}} \Phi(x_1, \dots, x_k) q_{r, t_{k_r+1}}(z, x_{k_r+1}) \dots q_{t_{k-1}, t_k}(x_k - x_{k-1}) dx_{k_r+1} \dots dx_k,$$

cette dérivation se concentre exclusivement sur un des noyaux de transition. C'est clairement le cas pour l'expression (10.46) correspondant à l'un des trois termes de $R(\tilde{\Phi})$.

Par conséquent, il est possible de contrôler $R(\tilde{\Phi})$ si l'on peut majorer les dérivées en espace du noyau de transition. Les hypothèses imposées à l'opérateur différentiel $\mathcal{A} = \frac{1}{2}a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x}$ au travers des fonctions σ et b (H 1) permettent d'obtenir de telles majorations. L'opérateur $\mathcal{A}$ est en effet uniformément elliptique. Il s'ensuit que l'on peut utiliser des résultats classiques sur les noyaux [KUSUOKA, STROOCK, (1987)] ou [SÁNCHEZ-CALLE, (1984)]. Le théorème II de ce dernier article démontre la proposition suivante dans un cadre plus général.

Proposition 10.1 *Sous les hypothèses (H 1) de régularité des coefficients de l'opérateur associé à l'E.D.S. (8.1) et de son uniforme ellipticité, pour tout entier naturel l , il existe deux constantes C et M telles que :*

$$(10.2) \quad \left\| \frac{\partial^l q_t}{\partial z^l}(z, x) \right\| \leq \frac{C}{t^{\frac{l}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi M t}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2Mt}\right),$$

$$(10.3) \quad \left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l}(q_t(z, x)) \right\| \leq \frac{C}{t^l} \frac{1}{\sqrt{2\pi M t}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2Mt}\right).$$

Le fait remarquable tient à ce que l'ordre de la dérivation en espace apparaît, au dénominateur du majorant, comme exposant de la racine carrée du temps. C'est cette racine qui évite l'explosion de $R(\tilde{\Phi})$, lorsque k tend vers l'infini et que les dérivations portent sur des noyaux dont le paramètre du temps converge vers zéro.

La majoration (10.3) de la dérivée par rapport au temps intervient lors de l'étude sur la convergence des fonctionnelles $\tilde{\Phi}_{k,l}$, définies à partir de la fonction (10.4) et de la subdivision $\left\{ \frac{i}{k} ; 1 \leq i \leq k \right\}$, vers l'intégrale de la trajectoire.

10.2 Les moments d'ordre l

On se propose d'étudier le coefficient $R(\tilde{\Phi})$ au travers des dérivées de la fonction $H_{r,k}$ dans le cas où la fonctionnelle $\tilde{\Phi}$ représente la moyenne arithmétique considérée aux

points $\left\{ \frac{i}{k} ; 1 \leq i \leq k \right\}$ de la trajectoire de $(f(X(s)))_{(0 \leq s \leq 1)}$. Lorsque k tend vers l'infini, cette moyenne converge vers l'intégrale de $(f(X(s)))_{(0 \leq s \leq 1)}$. Les hypothèses à imposer et la vitesse de convergence sont discutées dans la section (10.3).

Définition :

Soit f une fonction borélienne, définie sur $\mathbb{R}^d$, vérifiant la condition de croissance (M_p) :

(M_p) Il existe une constante $C > 0$ et un entier naturel p tels que :

$$|f(x)| \leq C (1 + \|x\|^p) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction réelle $\Phi_{k,l}$ définie sur $(\mathbb{R}^d)^k$ par :

$$(10.4) \quad \Phi_{k,l}(x_1, \dots, x_k) = \left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_k)}{k} \right)^l.$$

$\tilde{\Phi}_{k,l}$ désigne la fonctionnelle associée à la fonction $\Phi_{k,l}$ et à la subdivision $\left\{ \frac{i}{k} ; 1 \leq i \leq k \right\}$.

Ainsi définie, la fonction $\Phi_{k,l}$ vérifie la condition (M_{lp}) . Il suffit en effet d'appliquer la majoration (M_p) à chaque fonction f rencontrée dans l'expression de $\Phi_{k,l}$:

$$\begin{aligned} |\Phi_{k,l}(x_1, \dots, x_k)| &\leq \left(\frac{|f(x_1)| + \dots + |f(x_k)|}{k} \right)^l \\ &\leq C^l \left(1 + \frac{\|x_1\|^p + \dots + \|x_k\|^p}{k} \right)^l \\ &\leq C^l \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k} \|x_j\|^p \right)^l \\ &\leq \tilde{C} \left(1 + \sup_{1 \leq j \leq k} \|x_j\|^{lp} \right). \end{aligned}$$

L'application du théorème 9.1 permet d'obtenir (9.1) qui s'écrit pour la fonctionnelle $\tilde{\Phi}_{k,l}$ associée à la fonction $\Phi_{k,l}$ et à la subdivision $\left\{ t_i = \frac{i}{k} ; 1 \leq i \leq k \right\}$:

$$(10.5) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} = R(\tilde{\Phi}_{k,l}) \delta + \varepsilon_{\delta,k,l},$$

avec

$$(10.6) \quad \sup_{k,l \in \mathbb{N}^*} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_{\delta,k,l}|}{\delta} = 0.$$

Le théorème suivant explique dans quelle mesure on peut faire tendre k vers $+\infty$ dans le premier terme du membre de gauche de (10.5) pour obtenir l'intégrale de la trajectoire $s \mapsto f(X(s))$.

Théorème 10.2 Soit f une fonction mesurable et bornée.

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d = 1$; soit $\bar{X}^\delta(\cdot)$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler; $\bar{X}^\delta(\cdot)$ est la solution de (8.2).

Alors il existe C , $(\tilde{\varepsilon}_{\delta,k,l})_{k,l \in \mathbb{N}^*, 0 < \delta < 1}$ et $(\tilde{C}_{k,l})_{k,l \in \mathbb{N}^*}$ tels que :

$$(10.7) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \leq \tilde{C}_{k,l} \delta + \tilde{\varepsilon}_{\delta,k,l} \\ + C l^2 \|f\|_\infty^l \frac{\log k}{k} \quad (0 < \delta < 1) \quad (k, l \in \mathbb{N}^*) \quad (1 \leq l \leq \frac{k}{6}).$$

Le nombre C est indépendant de l , k et δ ; les quantités $\tilde{C}_{k,l}$ et $\tilde{\varepsilon}_{\delta,k,l}$ vérifient :

$$(10.8) \quad \sup_{k,l} \frac{\tilde{C}_{k,l}}{l^2} < \infty, \quad \sup_{\delta,k,l} \frac{\tilde{\varepsilon}_{\delta,k,l}}{l^2(\|f\|_\infty^l \vee 1)} < \infty,$$

$$(10.9) \quad \sup_{k,l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\tilde{\varepsilon}_{\delta,k,l}}{\delta} = 0.$$

Démonstration du théorème 10.2.

L'inégalité triangulaire appliquée au membre de gauche de (10.7) définit le schéma de la démonstration.

$$(10.10) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ + \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right|.$$

Cette inégalité décompose l'erreur en une partie indépendante du schéma d'Euler (et donc du pas δ), et en une autre sans l'intégrale sur $[0,1]$.

Le second terme du membre de droite de (10.10), sans la valeur absolue, est égal à $R(\tilde{\Phi}_{k,l})\delta + \varepsilon_{\delta,k,l}$ d'après (10.5); cette expression est transformée dans le théorème 10.4 pour appréhender le comportement en l et k . Il est ainsi démontré que

$$(10.11) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} = C_{k,l} \delta + \varepsilon_{\delta,k,l};$$

et par conséquent que sont réalisées l'inégalité (10.12) et les conditions (10.8) et (10.9).

$$(10.12) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \leq \tilde{C}_{k,l} \delta + \tilde{\varepsilon}_{\delta,k,l}.$$

La majoration du premier terme est liée à l'évaluation de la vitesse de convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale, pour la fonction C^∞ sur $]0,1]$, $s \mapsto \mathbb{E}\{f(X(s))\}$. Cette majoration est réalisée dans le lemme (10.3) et ainsi (10.7) est une conséquence de (10.10), (10.11) et (10.14). $\square$

10.3 Convergence des sommes de Riemann

La partie de la majoration de l'erreur comportant le facteur $\frac{\log k}{k}$ provient de l'approximation de l'intégrale $\int_0^1 f(X(s)) ds$ par les sommes de Riemann $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f\left(X\left(\frac{i}{k}\right)\right)$, ou plus exactement de $\int_0^1 \mathbb{E}\{f(X(s))\} ds$ par $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\left\{f\left(X\left(\frac{i}{k}\right)\right)\right\}$.

Or, pour une fonction continue sur $[0,1]$ la vitesse de convergence est de l'ordre de $\frac{1}{k}$. Il est donc possible d'obtenir cette vitesse si la fonction $s \mapsto \mathbb{E}\{f(X(s))\}$ est continue, ce qui est le cas dès que f est continue par exemple. Par contre, si notre hypothèse plus générale de simple mesurabilité suffit à assurer que la fonction soit C^∞ sur $]0,1]$, elle ne garantit pas sa continuité en zéro et conduit à conserver le facteur $\log k$.

Cependant, d'autres cas permettent d'obtenir une convergence en $\frac{1}{k}$. Par exemple, la monotonie de la fonction $s \mapsto \mathbb{E}\{f(X(s))\}$ suffit ; et ce cas comprend l'important exemple des temps de séjour ou de sortie de la diffusion dans un ensemble donné.

Un autre cas entraîne la régularisation de la fonction en question : si la diffusion démarre d'un point aléatoire dont la distribution est suffisamment régulière, la fonction $s \mapsto \mathbb{E}\{f(X(s))\}$ devient alors C^∞ sur $[0,1]$.

Cette régularité en zéro est à comparer à la régularité C^∞ de cette même fonction $s \mapsto \mathbb{E}\{f(X(s))\}$ en $s > 0$. En effet, si par exemple la v.a. $X(0)$ suit une loi normale d'espérance m , de variance σ^2 , le processus $(X(s))_{s \geq 0}$ a même loi que $(Y(s))_{s \geq 0}$ où Y est la solution de l'E.D.S. suivante

$$(10.13) \quad \begin{aligned} Y(t) = & m + \int_{-1}^t [\sigma \mathbb{1}_{\{s < 0\}} + \sigma(Y(s)) \mathbb{1}_{\{s \geq 0\}}] dB(s) \\ & + \int_{-1}^t b(Y(s) \mathbb{1}_{\{s \geq 0\}}) ds \end{aligned} \quad (t \geq -1)$$

et la fonction $s \mapsto \mathbb{E}\{f(X(s))\}$ est C^∞ en $s = 0 > -1$.

Nous allons nous placer dans un cas moins favorable que celui mentionné ci-dessus. Nous supposons pour toute la suite de l'étude que la v.a. $X(0)$ est égale presque sûrement à un réel x_0 .

Sans hypothèse supplémentaire de régularité, le lemme suivant établit la convergence des sommes de Riemann.

Lemme 10.3 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^$.*

Alors il existe un réel C tel que :

$$(10.14) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f\left(X\left(\frac{i}{k}\right)\right) \right)^l \right\} \right| \leq C l^2 \|f\|_\infty^l \frac{\log k}{k} \quad (k, l \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1 \leq l \leq \frac{k}{6}\right).$$

Démonstration du lemme 10.3.

On note $D_{k,l}$ la différence entre les intégrales et les sommes de Riemann apparaissant dans le membre de gauche de (10.14).

En échangeant les signes d'intégration et d'espérance, $D_{k,l}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(10.15) \quad D_{k,l} = \sum_{i_l=1}^k \cdots \sum_{i_1=1}^k \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \cdots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \cdots f(X(s_l)) \} ds_1 \cdots ds_l - \frac{1}{k^l} \sum_{i_l=1}^k \cdots \sum_{i_1=1}^k \mathbb{E} \left\{ f\left(X\left(\frac{i_1}{k}\right)\right) \cdots f\left(X\left(\frac{i_l}{k}\right)\right) \right\}.$$

On distingue parmi les termes des sommes sur $(i_1, \dots, i_l)$ ceux dont aucun indice ne se trouve à moins de deux unités de son plus proche voisin.

On définit $J_{k,l} = \{(i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, k\}^l; (\forall \alpha, \beta) \alpha \neq \beta \Rightarrow |i_\alpha - i_\beta| \geq 2\}$ pour pouvoir scinder la somme sur $(i_1, \dots, i_l)$; par convention, $i_0 = 0$.

$$\begin{aligned} & \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, k\}^l} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \cdots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \cdots f(X(s_l)) \} ds_1 \cdots ds_l \\ & - \frac{1}{k^l} \mathbb{E} \left\{ f\left(X\left(\frac{i_1}{k}\right)\right) \cdots f\left(X\left(\frac{i_l}{k}\right)\right) \right\} \\ & = \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in J_{k,l}} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \cdots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \cdots f(X(s_l)) \} ds_1 \cdots ds_l - \frac{1}{k^l} \mathbb{E} \left\{ f\left(X\left(\frac{i_1}{k}\right)\right) \cdots f\left(X\left(\frac{i_l}{k}\right)\right) \right\} \\ & + \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in J_{k,l}^c} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \cdots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \cdots f(X(s_l)) \} ds_1 \cdots ds_l - \frac{1}{k^l} \mathbb{E} \left\{ f\left(X\left(\frac{i_1}{k}\right)\right) \cdots f\left(X\left(\frac{i_l}{k}\right)\right) \right\}. \end{aligned}$$

On note cette dernière somme $R_{k,l}$:

$$(10.16) \quad R_{k,l} = \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in J_{k,l}^c} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \dots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \dots f(X(s_l)) \} ds_1 \dots ds_l - \frac{1}{k^l} \mathbb{E} \left\{ f \left(X \left(\frac{i_1}{k} \right) \right) \dots f \left(X \left(\frac{i_l}{k} \right) \right) \right\}.$$

Ce partage de la somme sur $\{1, \dots, k\}^l$ revient seulement à écarter le premier terme lorsque $l = 1$; c'est-à-dire que $J_{k,1} = \{2, \dots, k\}$.

L'ensemble $J_{k,l}$ est non vide dès que $2l \leq k+1$ mais son cardinal devient "significatif" devant celui de $\{1, \dots, k\}^l$ lorsque k est grand par rapport à l ; c'est sous cette condition, précisée plus avant, que l'on aura recours à l'ensemble $J_{k,l}$.

Comme les indices de sommation sont tous différents, il est possible de transformer les sommes pour ne conserver que des indices triés par ordre croissant.

On écrit $i \ll j$ pour signifier $j - i > 1$, et ainsi:

$$(10.17) \quad D_{k,l} = l! \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \dots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \dots f(X(s_l)) \} ds_1 \dots ds_l - \frac{1}{k^l} \mathbb{E} \left\{ f \left(X \left(\frac{i_1}{k} \right) \right) \dots f \left(X \left(\frac{i_l}{k} \right) \right) \right\} + R_{k,l}.$$

Le reste $R_{k,l}$ peut être contrôlé par le nombre de termes de la somme, c'est-à-dire par le cardinal de l'ensemble $J_{k,l}^c$.

$$(10.18) \quad R_{k,l} \leq 2 \|f\|_\infty^l \frac{k^l - \text{card } J_{k,l}}{k^l}.$$

Il découle de (10.15) et (10.17):

$$D_{k,l} = l! \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \dots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \dots f(X(s_l)) \} ds_1 \dots ds_l - \frac{1}{k^l} \mathbb{E} \left\{ f \left(X \left(\frac{i_1}{k} \right) \right) \dots f \left(X \left(\frac{i_l}{k} \right) \right) \right\} + R_{k,l},$$

ce qui s'écrit, en utilisant les noyaux de transition:

$$D_{k,l} = l! \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k} \int_{\frac{i_l-1}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \dots \int_{\frac{i_1-1}{k}}^{\frac{i_1}{k}} \int_{\mathbb{R}^l} f(x_1) \dots f(x_l) [q_{s_1}(x_0, x_1) q_{s_2-s_1}(x_1, x_2) \dots q_{s_l-s_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) - q_{\frac{i_1}{k}}(x_0, x_1) q_{\frac{i_2-i_1}{k}}(x_1, x_2) \dots q_{\frac{i_l-i_{l-1}}{k}}(x_{l-1}, x_l)] dx_1 \dots dx_l ds_1 \dots ds_l + R_{k,l}.$$

La différence entre les deux produits de noyaux peut s'exprimer comme une somme de l termes; chaque terme laissant apparaître une différence de la forme $q_{s_{j+1}-s_j}(x_j, x_{j+1}) -$

$q_{\frac{i_{j+1}-i_j}{k}}(x_j, x_{j+1})$ peut s'écrire comme l'intégrale d'une dérivée :

$$\begin{aligned} & q_{s_1}(x_0, x_1) q_{s_2-s_1}(x_1, x_2) \dots q_{s_l-s_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) \\ & - q_{\frac{i_1}{k}}(x_0, x_1) q_{\frac{i_2-i_1}{k}}(x_1, x_2) \dots q_{\frac{i_l-i_{l-1}}{k}}(x_{l-1}, x_l) \\ & = \sum_{j=0}^{l-1} q_{s_1}(x_0, x_1) q_{s_2-s_1}(x_1, x_2) \dots q_{s_j-s_{j-1}}(x_{j-1}, x_j) \int_{\frac{i_{j+1}-i_j}{k}}^{s_{j+1}-s_j} \frac{\partial}{\partial t} (q_t(x_j, x_{j+1})) dt \\ & \quad q_{\frac{i_{j+2}-i_{j+1}}{k}}(x_{j+1}, x_{j+2}) \dots q_{\frac{i_l-i_{l-1}}{k}}(x_{l-1}, x_l), \end{aligned}$$

avec $i_0 = 0$ dans cette expression.

On peut alors utiliser (10.3) pour majorer les dérivées en temps des noyaux et majorer le produit $f(x_1) \dots f(x_l)$ par $\|f\|_\infty^l$.

L'intégration en les variables $x_1, \dots, x_l$ donne 1 par l'identité de Chapman-Kolmogorov.

(10.19)

$$|D_{k,l}| \leq C \|f\|_\infty^l l! \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq k} \int_{\frac{i_{l-1}}{k}}^{\frac{i_l}{k}} \dots \int_{\frac{i_1}{k}}^{\frac{i_2}{k}} \sum_{j=0}^{l-1} \left| \int_{\frac{i_{j+1}-i_j}{k}}^{s_{j+1}-s_j} \frac{1}{t} dt \right| ds_1 \dots ds_l + |R_{k,l}|.$$

Quel que soit l'ordre des bornes de l'intégrale en t ,

$$t \geq (s_{j+1} - s_j) \wedge \left(\frac{i_{j+1} - i_j}{k} \right),$$

ces deux quantités ont été minorées par $\frac{i_{j+1} - i_j - 1}{k}$.

Par conséquent,

$$(10.20) \quad \left| \int_{\frac{i_{j+1}-i_j}{k}}^{s_{j+1}-s_j} \frac{1}{t} dt \right| \leq \frac{|k s_{j+1} - i_{j+1} - k s_j + i_j|}{i_{j+1} - i_j - 1} \leq \frac{2}{i_{j+1} - i_j - 1}.$$

On a pris soin d'écarter les indices de sommation pour lesquels le dénominateur $i_{j+1} - i_j - 1$ s'annule, en imposant aux indices i_{j+1} et i_j d'appartenir à $J_{k,l}$.

La majoration (10.20) appliquée à (10.19) rend immédiates les intégrations en $ds_1, \dots, ds_l$ puisque les fonctions à intégrer ne dépendent pas de $s_1, \dots, s_l$.

$$(10.21) \quad |D_{k,l}| \leq 2 C \|f\|_\infty^l \frac{l!}{k^l} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq k} \frac{1}{i_{j+1} - i_j - 1} + |R_{k,l}|.$$

On procède maintenant à la majoration des différents termes de la somme en j .

• Lorsque $j = 0$,

$$(10.22) \quad \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq k} \frac{1}{i_1 - 1} \leq \int_{1 < x_1 < \dots < x_l < k} \frac{1}{x_1} dx_1 \dots dx_l.$$

Le calcul de cette dernière intégrale est menée en intégrant d'abord en x_l , puis en x_{l-1} , et ainsi de suite jusqu'en x_2 .

$$(10.23) \quad \int_{1 < x_1 < \dots < x_l < k} \frac{1}{x_1} dx_1 \dots dx_l = \int_1^k \int_{x_1}^k \dots \int_{x_{l-1}}^k \frac{1}{x_1} dx_l \dots dx_2 dx_1 \\ = \int_1^k \frac{(k-x_1)^{l-1}}{(l-1)! x_1} dx_1.$$

On procède ensuite au changement de variable $x = \frac{k-x_1}{k}$, et on décompose en éléments simples la fraction rationnelle obtenue.

$$(10.24) \quad \int_1^k \frac{(k-x_1)^{l-1}}{(l-1)! x_1} dx_1 = \frac{k^{l-1}}{(l-1)!} \int_0^{1-\frac{1}{k}} \frac{x^{l-1}}{1-x} dx \\ = \frac{k^{l-1}}{(l-1)!} \left(\log k - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^i \right).$$

La somme sur l'indice i , négligeable devant $\log k$, est supprimée; ceci revient en fait à remplacer $k - x_1$ par k pour majorer l'intégrale du membre de gauche de (10.24). Regroupant (10.22), (10.23) et (10.24), on obtient :

$$(10.25) \quad \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \ll k} \frac{1}{i_1 - 1} \leq \frac{k^{l-1}}{(l-1)!} \log k.$$

• Pour $j > 0$, on effectue le changement d'indice $\hat{i}_j = i_{j+1} - i_j - 1$ dans la somme portant sur les indices $i_1, \dots, i_l$ vérifiant $0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k$.

$$(10.26) \quad \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k} \frac{1}{i_{j+1} - i_j - 1} = \sum_{i_l=2l}^k \dots \sum_{i_{j+1}=2(j+1)}^{i_{j+2}-2} \sum_{\hat{i}_j=1}^{i_{j+1}-2j-1} \sum_{i_{j-1}=2(j-1)}^{i_{j+1}-\hat{i}_j-3} \dots \sum_{i_1=2}^{i_2-2} \frac{1}{\hat{i}_j}.$$

La somme sur l'indice $\hat{i}$ se majore en remplaçant la borne $i_{j+1} - 2j - 1$ par la quantité $k - 2j - 1$ indépendante des indices de sommations de sorte que :

$$(10.27) \quad \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k} \frac{1}{i_{j+1} - i_j - 1} \leq \sum_{i_l=2l}^k \dots \sum_{i_{j+1}=2(j+1)}^{i_{j+2}-2} \sum_{i_{j-1}=2(j-1)}^{i_{j+1}-4} \dots \sum_{i_1=2}^{i_2-2} \log k.$$

Le nombre de termes de la somme du membre de droite de (10.27) est inférieur à $\frac{k^{l-1}}{(l-1)!}$; donc :

$$(10.28) \quad \sum_{0 \ll i_1 \ll \dots \ll i_l \leq k} \frac{1}{i_{j+1} - i_j - 1} \leq \frac{k^{l-1}}{(l-1)!} \log k \quad (1 \leq j \leq l-1).$$

Regroupant (10.25) et (10.28) dans (10.21), on obtient :

$$(10.29) \quad |D_{k,l}| \leq 2 C \|f\|_{\infty}^l \frac{l^2}{k} \log k + |R_{k,l}|.$$

Il reste alors à majorer $|R_{k,l}|$.

En utilisant la minoration du cardinal de $J_{k,l}$ par $(k-1)(k-4)\dots(k-1-3(l-1))$, valable pour $k > 3(l-1)$, et la majoration (10.18), on obtient :

$$(10.30) \quad |R_{k,l}| \leq \|f\|_\infty^l \left(1 - \prod_{j=0}^{l-1} \left(1 - \frac{1+3j}{k} \right) \right).$$

En remarquant que $\exp(x) \geq 1+x$ pour tout réel x , le produit peut être minoré de la façon suivante ; on pose par convention $\log 0 = -\infty$ et $\exp(-\infty) = 0$.

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{l-1} \left(1 - \frac{1+3j}{k} \right) &= \exp \left(\sum_{j=0}^{l-1} \log \left(1 - \frac{1+3j}{k} \right) \right) \\ &\geq \exp \left(l \log \left(1 - \frac{3l-2}{k} \right) \right) \\ &\geq 1 + l \log \left(1 - \frac{3l-2}{k} \right). \end{aligned}$$

Or, pour $0 < x < 1$, $\log(1-x) \geq x(\log(1-x) - 1)$, d'où :

$$(10.31) \quad \prod_{j=0}^{l-1} \left(1 - \frac{1+3j}{k} \right) \geq 1 + \frac{(3l-2)l}{k} \left(\log \left(1 - \frac{3l-2}{k} \right) - 1 \right),$$

et ainsi, (10.30) et (10.31) donnent :

$$(10.32) \quad |R_{k,l}| \leq \|f\|_\infty^l \frac{l}{k} (3l-2) \left(1 - \log \left(1 - \frac{3l-2}{k} \right) \right).$$

Finalement, les majorations (10.29) et (10.32) conduisent à l'inégalité suivante :

$$(10.33) \quad |D_{k,l}| \leq 2 C \|f\|_\infty^l \frac{l^2}{k} \log k + \|f\|_\infty^l \frac{l(3l-2)}{k} \left(1 - \log \left(1 - \frac{3l-2}{k} \right) \right) \quad (k > 3(l-1)).$$

La condition $1 \leq l < \frac{k}{6}$, plus restrictive que $k > 3(l-1)$, permet, par quelques majorations mineures, de simplifier l'écriture du majorant de (10.33) et d'aboutir à :

$$(10.34) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \leq l^2 \|f\|_\infty^l \left(C_1 \frac{\log k}{k} + \frac{C_2}{k} \right) \quad (k, l \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1 \leq l \leq \frac{k}{6} \right).$$

Cette dernière inégalité entraîne (10.14). □

10.4 Convergence du schéma d'Euler pour le moment d'ordre l

Comme annoncé dans la démonstration du théorème 10.2, le théorème 10.4 permet d'obtenir l'erreur commise en remplaçant X par $\bar{X}^\delta$ dans l'expression du moment d'ordre l de la somme de Riemann d'ordre k .

Théorème 10.4 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d = 1$; soit $\bar{X}^\delta(\cdot)$ l'approximation de $X(\cdot)$ donnée par le schéma d'Euler ; $\bar{X}^\delta(\cdot)$ est la solution de (8.2).

Alors l'erreur commise en remplaçant X par $\bar{X}^\delta$, pour calculer le moment d'ordre l de la v.a. $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k}))$, s'exprime sous la forme suivante :

$$(10.35) \quad \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} = C_{k,l} \delta + \varepsilon_{\delta,k,l},$$

les quantités $C_{k,l}$ et $\varepsilon_{\delta,k,l}$ vérifiant les conditions (10.8) et (10.9) du théorème 10.2 :

$$(10.8) \quad \sup_{k,l} \frac{|C_{k,l}|}{l^2} < \infty, \quad \sup_{\delta,k,l} \frac{|\varepsilon_{\delta,k,l}|}{l^2(\|f\|_\infty^l \vee 1)} < \infty,$$

$$(10.9) \quad \sup_{k,l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_{\delta,k,l}|}{\delta} = 0.$$

10.5 Démonstration dans le cas du moment d'ordre un

Lorsque $l = 1$, les résultats (10.35), (10.8) et (10.9) du théorème 10.4 s'écrivent :

$$(10.36) \quad \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right\} - \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right\} = C_k \delta + \varepsilon_{\delta,k},$$

$$(10.37) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |C_k| < \infty, \quad \sup_{\delta \in]0,1], k \in \mathbb{N}^*} |\varepsilon_{\delta,k}| < \infty,$$

$$(10.38) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_{\delta,k}|}{\delta} = 0.$$

Compte-tenu de (10.5) et (10.6), il suffit de montrer que la quantité $R(\tilde{\Phi}_{k,1})$, qui correspond à C_k dans (10.36), est bornée uniformément en k .

En effet, on peut alors transformer (10.36) pour obtenir :

$$\varepsilon_{\delta,k} = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right\} - \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right\} - C_k \delta,$$

puis

$$|\varepsilon_{\delta,k}| \leq 2\|f\|_{\infty} + \delta \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |C_k|,$$

et ainsi

$$(10.39) \quad \sup_{\delta \in]0,1[, k \in \mathbb{N}^*} |\varepsilon_{\delta,k}| < \infty.$$

Démontrons donc que $R(\tilde{\Phi}_{k,1})$ est bornée en k .

L'expression de $R(\tilde{\Phi}_{k,1})$ apparaissant en (9.2) conduit à examiner la fonction $H_{r,k}$ définie en (9.3) et associée à la fonction $\Phi_{k,1}$.

Pour tout $r \in]0,1[$ et tout entier strictement positif k , la fonction $H_{r,k}$ s'écrit pour $\Phi_{k,1}$:

$$(10.40) \quad H_{r,k}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) = \frac{1}{k} \left[f(x(t_1)) + \dots + f(x(t_{k_r})) \right. \\ \left. + \mathbb{E} \{ f(X^{r,z}(t_{k_r+1})) + \dots + f(X^{r,z}(t_k)) \} \right].$$

La linéarité de l'expression de $H_{r,k}$ élimine les k_r premiers termes des dérivées par rapport à z ; pour $\gamma = 1, 2$, ou 3 :

$$(10.41) \quad \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) = \frac{1}{k} \sum_{j=k_r+1}^k \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \mathbb{E} \{ f(X^{r,z}(t_j)) \}.$$

Le lemme suivant permet de contrôler les trois termes apparaissant dans le membre de droite de l'égalité (9.2).

Lemme 10.5 *Soit g une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^3 à croissance au plus polynomiale ainsi que ses dérivées ; c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$(10.42) \quad |g^{(j)}(x)| \leq C(1 + |x|^\beta) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (j \in \{0,1,2,3\}).$$

Sous les hypothèses du théorème 10.4 et si la fonction $\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}$ est définie par (10.41).

Alors pour $\gamma = 1, 2$ ou 3 , la famille d'intégrales

$\int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) g(X(r)) \right\} dr$ paramétrée par k est uniformément bornée.

Démonstration du lemme 10.5.

Si $]a,b[$ désigne un intervalle de $]0,1[$, on note :

$$(10.43) \quad \mathcal{I}_\gamma([a,b]) = \int_a^b \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) g(X(r)) \right\} dr.$$

En tenant compte de (10.41) et en remarquant que $k_r = i$ lorsque $t_i < r < t_{i+1}$, on obtient :

$$\mathcal{I}_\gamma([t_i, t_{i+1}[) = \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \{ \mathcal{I}_{\gamma,j}(X(r)) \} dr,$$

où

$$\mathcal{I}_{\gamma,j}(z) = g(z) \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\mathbb{E} \{ f(X^{r,z}(t_j)) \} \right).$$

On écrit $\mathcal{I}_\gamma([t_i, t_{i+1}[)$ en utilisant les noyaux de transition :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma([t_i, t_{i+1}[) &= \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}} q_{t_1}(x_0, x_1) \dots q_{t_i-t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i) g(z) q_{r-t_i}(x_i, z) \\ &\quad \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} f(x_j) q_{t_{i+1}-r}(z, x_{i+1}) q_{t_{i+2}-t_{i+1}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots \right. \\ &\quad \left. q_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) dx_1 \dots dx_k dz dr. \end{aligned}$$

L'application successive de l'égalité de Chapman-Kolmogorov permet d'établir :

$$\mathcal{I}_\gamma([t_i, t_{i+1}[) = \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} q_r(x_0, z) g(z) \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}} q_{t_j-r}(z, x_j) f(x_j) dx_j \right) dz dr.$$

En sommant les contributions de chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, et en inversant les sommes en i et j , on obtient :

$$\mathcal{I}_\gamma([0, 1]) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \int_0^{t_j} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}} q_{t_j-r}(z, x_j) f(x_j) dx_j \right) q_r(x_0, z) g(z) dz dr.$$

L'intégrale en temps est scindée en deux parties et l'une d'elles est transformée par une intégration par parties. Les termes de bord sont nuls puisqu'ils comportent le facteur $q_r(x_0, z)$ qui tendent vers zéro à une vitesse exponentielle lorsque z tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma([0, 1]) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\int_0^{\frac{t_j}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}} q_{t_j-r}(z, x_j) f(x_j) dx_j \right) q_r(x_0, z) g(z) dz dr \right. \\ &\quad \left. + (-1)^\gamma \int_{\frac{t_j}{2}}^{t_j} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} q_{t_j-r}(z, x_j) f(x_j) dx_j \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} (q_r(x_0, z) g(z)) dz dr \right). \end{aligned}$$

On utilise la majoration (10.2) de la valeur absolue de la dérivée en la variable d'espace du noyau $q_t(x, y)$. Il existe par conséquent un réel K indépendant de r , j et k tel que :

$$\mathcal{I}_\gamma([0, 1]) \leq \frac{K}{k} \sum_{j=1}^k \left(\int_0^{\frac{t_j}{2}} \frac{1}{(t_j - r)^{\frac{\gamma}{2}}} dr + \sum_{i=0}^{\gamma} \int_{\frac{t_j}{2}}^{t_j} \frac{1}{r^{\frac{i}{2}}} dr \right).$$

Par deux changements de variables, on obtient :

$$\mathcal{I}_\gamma([0, 1]) \leq \frac{K}{k} \sum_{j=1}^k \left(t_j^{1-\frac{\gamma}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{\gamma}{2}}} du + \sum_{i=0}^{\gamma} t_j^{1-\frac{i}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{i}{2}}} du \right).$$

On majore alors les intégrales par 1 et les sommes par des intégrales.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\gamma([0,1]) &\leq K \left(\int_0^1 x^{1-\frac{\gamma}{2}} dx + \sum_{i=0}^{\gamma} \int_0^1 x^{1-\frac{i}{2}} dx \right), \\ \mathcal{I}_\gamma([0,1]) &\leq K \left(\frac{2}{4-\gamma} + \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{2}{4-i} \right).\end{aligned}$$

□

10.6 Démonstration dans le cas du moment d'ordre deux

La démonstration se différencie du cas $l = 1$ par l'expression de la fonction $\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}$. En particulier, $\frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(x_1, \dots, x_{k_r}, z)$ ne dépend plus seulement de z comme il apparaissait dans (10.41).

Nous allons démontrer un lemme, analogue au lemme 10.5, mais où la fonction $H_{r,k}$ est définie par :

$$(10.44) \quad \begin{aligned} H_{r,k}(x_1, \dots, x_{k_r}, z) &= \frac{1}{k^2} \left[f(x(t_1)) + \dots + f(x(t_{k_r})) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \{ f(X^{r,z}(t_{k_r+1})) + \dots + f(X^{r,z}(t_k)) \} \right]^2. \end{aligned}$$

Lemme 10.6 *Soit g une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^3 à croissance polynomiale ainsi que ses dérivées ; c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$(10.42) \quad |g^{(j)}(x)| \leq C (1 + |x|^\beta) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (j \in \{0, 1, 2, 3\}).$$

Sous les hypothèses du théorème 10.4 et si la fonction $H_{r,k}$ est définie par (10.44). Alors pour $\gamma = 1, 2$ ou 3 :

$$(10.45) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \left| \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(X(t_1), \dots, X(t_{k_r}), X(r)) g(X(r)) \right\} dr \right| < \infty.$$

Démonstration du lemme 10.6.

En utilisant les noyaux de transition, on peut écrire la quantité $\mathcal{I}_\gamma([0,1])$ comme suit :

$$(10.46) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma([0,1]) &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} \left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_k)}{k} \right)^2 q_{t_{i+1}-r}(z, x_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. q_{t_{i+2}-t_{i+1}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots q_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) g(z) \\ &\quad q_{t_1}(x_0, x_1) \dots q_{t_i-t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i) q_{r-t_i}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr. \end{aligned}$$

Le carré de la somme peut se développer de la façon suivante :

$$(10.47) \quad (f(x_1) + \dots + f(x_k))^2 = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}),$$

où les coefficients C_{j_1, j_2} valent 1 ou 2 suivant que $j_1 = j_2$ ou non.

L'interversion des sommes et des intégrales entraîne :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma([0, 1]) &= \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) q_{t_{i+1}-r}(z, x_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. q_{t_{i+2}-t_{i+1}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots q_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) g(z) \\ &\quad q_{t_1}(x_0, x_1) \dots q_{t_i-t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i) q_{r-t_i}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr. \end{aligned}$$

En distinguant les sommes sur les indices vérifiant $0 \leq i \leq j_1 - 1$, $j_1 \leq i \leq j_2 - 1$ et $j_2 \leq i \leq k$, on applique plusieurs fois l'identité de Chapman-Kolmogorov pour simplifier l'écriture des deux premières sommes et montrer que la dernière est nulle :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma([0, 1]) &= \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} \left[\sum_{i=0}^{j_1-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) q_{t_{j_1}-r}(z, x_{j_1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) dx_{j_1} dx_{j_2} \right) g(z) q_r(x_0, z) dz dr \right. \\ (10.48) \quad &+ \sum_{i=j_1}^{j_2-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) q_{t_{j_2}-r}(z, x_{j_2}) dx_{j_2} \right) \\ &\quad \left. g(z) q_{t_{j_1}}(x_0, x_{j_1}) q_{r-t_{j_1}}(x_{j_1}, z) dx_{j_1} dz dr \right]. \end{aligned}$$

On remarque que l'indice de sommation i n'apparaît plus que dans les bornes des intégrales en temps. On peut, par conséquent, faire totalement disparaître l'indice i de l'expression ci-dessus.

Par ailleurs, on découpe chacune des intégrales de temps en deux. En prenant soin d'intégrer par parties en la variable z deux des quatre termes obtenus, on échange ensuite les signes d'intégration et de dérivation.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\gamma([0,1]) &= \frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} \left[\int_0^{\frac{t_{j_1}}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \right. \\
&\quad (q_{t_{j_1}-r}(z, x_{j_1})) q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) dx_{j_1} dx_{j_2} g(z) q_r(x_0, z) dz dr \\
&\quad + (-1)^\gamma \int_{\frac{t_{j_1}}{2}}^{t_{j_1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) \\
&\quad \times q_{t_{j_1}-r}(z, x_{j_1}) q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) dx_{j_1} dx_{j_2} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} (g(z) q_r(x_0, z)) dz dr \\
&\quad + \int_{t_{j_1}}^{\frac{t_{j_1}+t_{j_2}}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} (q_{t_{j_2}-r}(z, x_{j_2})) dx_{j_2} g(z) \\
&\quad \times q_{t_{j_1}}(x_0, x_{j_1}) q_{r-t_{j_1}}(x_{j_1}, z) dx_{j_1} dz dr \\
&\quad + (-1)^\gamma \int_{\frac{t_{j_1}+t_{j_2}}{2}}^{t_{j_2}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) q_{t_{j_2}-r}(z, x_{j_2}) dx_{j_2} q_{t_{j_1}}(x_0, x_{j_1}) \\
&\quad \left. \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} (g(z) q_{r-t_{j_1}}(x_{j_1}, z)) dx_{j_1} dz dr \right].
\end{aligned}$$

On utilise la majoration (10.2) de la valeur absolue de la dérivée en la variable d'espace du noyau $q_t(x, y)$. On est alors en mesure de majorer les intégrales en les variables d'espace x_{j_1} , x_{j_2} et z ; par exemple pour la première des quatre intégrales, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^3} f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) g(z) q_r(x_0, z) \frac{\partial^\gamma q_{t_{j_1}-r}}{\partial z^\gamma}(z, x_{j_1}) q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) dz dx_{j_1} dx_{j_2} \right| \\
&\leq \frac{C}{(t_{j_1} - r)^{\frac{\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) g(z)| q_r(x_0, z) \\
&\quad \exp\left(-\frac{(z-x_{j_1})^2}{2M(t_{j_1}-r)}\right) \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi M(t_{j_1}-r)}} q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) dz dx_{j_1} dx_{j_2},
\end{aligned}$$

et cette dernière intégrale peut s'interpréter en terme de l'espérance d'une diffusion $\tilde{X}(\cdot)$ solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(t) &= \tilde{X}(0) + \int_0^t \left(\sigma(\tilde{X}(s)) \mathbb{I}_{[0, r] \cup [t_{j_1}, 1]}(s) + \sqrt{M} \mathbb{I}_{[r, t_{j_1}]}(s) \right) dB(s) \\
&\quad + \int_0^t \left(b(\tilde{X}(s)) \mathbb{I}_{[0, r] \cup [t_{j_1}, 1]}(s) \right) ds
\end{aligned} \quad (t \geq 0),$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |f(x_{j_1}) f(x_{j_2}) g(z)| q_r(x_0, z) \frac{\exp\left(-\frac{(z-x_{j_1})^2}{2M(t_{j_1}-r)}\right)}{\sqrt{2\pi M(t_{j_1}-r)}} q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) dz dx_{j_1} dx_{j_2} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \left| f(\tilde{X}(t_{j_1})) f(\tilde{X}(t_{j_2})) g(\tilde{X}(r)) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction f est bornée et la fonction g à croissance polynomiale, la majoration (8.6) implique que cette espérance est contrôlée par une quantité indépendante de j_1 , j_2 , k ou r . Il s'ensuit l'existence d'un nombre K ne dépendant que de f , b et σ permettant d'écrire :

$$(10.49) \quad |\mathcal{I}_\gamma([0,1])| \leq \frac{K}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} \left[\int_0^{t_{j_1}} \frac{1}{(t_{j_1} - r)^{\frac{\gamma}{2}}} dr + \int_{\frac{t_{j_1}}{2}}^{t_{j_1}} \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{1}{r^{\frac{i}{2}}} dr \right. \\ \left. + \int_{t_{j_1}}^{\frac{t_{j_1}+t_{j_2}}{2}} \frac{1}{(t_{j_2} - r)^{\frac{\gamma}{2}}} dr + \int_{\frac{t_{j_1}+t_{j_2}}{2}}^{t_{j_2}} \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{1}{(r - t_{j_1})^{\frac{i}{2}}} dr \right].$$

Ce qui s'écrit, après quatre changements de variables :

$$|\mathcal{I}_\gamma([0,1])| \leq \frac{K}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} \left[t_{j_1}^{1-\frac{\gamma}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{\gamma}{2}}} du + \sum_{i=0}^{\gamma} t_{j_1}^{1-\frac{i}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{i}{2}}} du \right] \\ + \frac{K}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} C_{j_1, j_2} \left[(t_{j_2} - t_{j_1})^{1-\frac{\gamma}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{\gamma}{2}}} du + \sum_{i=0}^{\gamma} (t_{j_2} - t_{j_1})^{1-\frac{i}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{i}{2}}} du \right].$$

Toutes les intégrales ci-dessus sont majorées par 1.

Les sommes en j_1 , j_2 divisées par k^2 possèdent des limites simples à calculer lorsque k tend vers l'infini.

$$\frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k} \left(\frac{j_1}{k} \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{k} \sum_{j_1=1}^k \left(\frac{j_1}{k} \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} \left(1 - \frac{j_1}{k} \right) \\ \simeq \int_0^1 x^{1-\frac{\gamma}{2}} (1-x) dx = \frac{4}{(4-\gamma)(6-\gamma)},$$

et

$$\frac{1}{k^2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} \left(\frac{j_2 - j_1}{k} \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} \simeq \int_0^1 \int_y^1 (x-y)^{1-\frac{\gamma}{2}} dx dy = \frac{4}{(4-\gamma)(6-\gamma)}.$$

Par conséquent, $|\mathcal{I}_\gamma([0,1])|$ est majorée par un nombre indépendant de k et le lemme 10.6 est démontré. $\square$

La réunion de (9.2) et (10.45) entraîne que $R(\tilde{\Phi}_{k,2}) = C_{k,2}$ est uniformément bornée en k .

10.7 Démonstration dans le cas général

Démonstration du théorème 10.4.

Il suffit de démontrer que la valeur absolue de la quantité $R(\tilde{\Phi}_{k,l}) = C_{k,l}$ est majorée par une quantité indépendante de k et inférieure à un polynôme de degré deux en l :

$$(10.50) \quad \sup_{k,l} \frac{|C_{k,l}|}{l^2} < \infty.$$

En effet, si l'on exprime $\varepsilon_{\delta,k,l}$ grâce à (10.35) et que l'on majore :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\delta,k,l} &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - C_{k,l} \delta, \\ |\varepsilon_{\delta,k,l}| &\leq 2 (\|f\|_\infty^l \vee 1) + l^2 \delta \frac{|C_{k,l}|}{l^2}, \\ \frac{|\varepsilon_{\delta,k,l}|}{l^2 (\|f\|_\infty^l \vee 1)} &\leq \frac{2}{l^2} + \delta \sup_{k,l} \frac{|C_{k,l}|}{l^2}, \end{aligned}$$

et ainsi, (10.8) est démontrée.

Nous allons maintenant démontrer (10.50) en reprenant la démonstration du lemme 10.6.

On exprime $\mathcal{I}_\gamma([0,1])$ à l'aide des noyaux de transition, comme il a été fait en (10.46) dans le cas $l = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\gamma([0,1]) &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} \left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_k)}{k} \right)^l q_{t_{i+1}-r}(z, x_{i+1}) \right. \\ (10.51) \quad & \left. q_{t_{i+2}-t_{i+1}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots q_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) g(z) \dots \\ & q_{t_1}(x_0, x_1) q_{t_i-t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i) q_{r-t_i}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr. \end{aligned}$$

La puissance l se développe comme suit :

$$(10.52) \quad (f(x_1) + \dots + f(x_k))^l = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}),$$

où le coefficient $C_{j_1, \dots, j_l}$ vérifie

$$(10.53) \quad C_{j_1, \dots, j_l} \leq l!, \quad \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} = k^l.$$

Comme dans le cas $l = 2$, on échange les sommations en i , les sommations en $j_1, \dots, j_l$ et les intégrales. Puis, on prend soin de distinguer les sommes sur i telles que $0 \leq i \leq j_1 - 1$, $j_1 \leq i \leq j_2 - 1$, ..., $j_{p-1} \leq i \leq j_p$ et $j_p \leq i \leq k$.

On obtient alors l'analogue de l'expression (10.48) de $\mathcal{I}_\gamma([0,1])$:

$$\begin{aligned}
 (10.54) \quad \mathcal{I}_\gamma([0,1]) &= \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \left[\sum_{i=0}^{j_1-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. q_{t_{j_1}-r}(z, x_{j_1}) q_{t_{j_2}-t_{j_1}}(x_{j_1}, x_{j_2}) \dots q_{t_{j_l}-t_{j_{l-1}}}(x_{j_{l-1}}, x_{j_l}) dx_{j_1} \dots dx_{j_l} \right) \right. \\
 &\quad \left. g(z) q_r(x_0, z) dz dr \right. \\
 &\quad + \sum_{i=j_1}^{j_2-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{l-1}} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) q_{t_{j_2}-r}(z, x_{j_2}) \right. \\
 &\quad \left. q_{t_{j_3}-t_{j_2}}(x_{j_2}, x_{j_3}) \dots q_{t_{j_l}-t_{j_{l-1}}}(x_{j_{l-1}}, x_{j_l}) dx_{j_2} \dots dx_{j_l} \right) g(z) q_{t_{j_1}}(x_0, x_{j_1}) \\
 &\quad q_{r-t_{j_1}}(x_{j_1}, z) dx_{j_1} dz dr \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \sum_{i=j_{l-1}}^{j_l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^l} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) q_{t_{j_l}-r}(z, x_{j_l}) dx_{j_l} \right) g(z) \\
 &\quad \left. q_{t_{j_1}}(x_0, x_{j_1}) \dots q_{r-t_{j_{l-1}}}(x_{j_{l-1}}, z) dx_{j_1} \dots dx_{j_{l-1}} dz dr \right].
 \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration correspondant au cas $l = 2$, on peut regrouper les sommes en i avec les intégrales en temps pour n'obtenir que des intégrales sur $]0, t_{j_1}[$, $]t_{j_1}, t_{j_2}[$, ..., $]t_{j_{l-1}}, t_{j_l}[$.

De même, on intègre par parties une intégrale sur deux. Puis on utilise pour chacun des termes la majoration (10.2), de sorte que l'on peut écrire une majoration analogue à (10.49) :

$$\begin{aligned}
 (10.55) \quad |\mathcal{I}_\gamma([0,1])| &\leq \frac{K}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \left[\int_0^{t_{j_1}} \frac{1}{(t_{j_1} - r)^{\frac{\gamma}{2}}} dr + \int_{t_{j_1}}^{t_{j_2}} \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{1}{r^{\frac{i}{2}}} dr \right. \\
 &\quad + \int_{t_{j_1}}^{t_{j_1}+t_{j_2}} \frac{1}{(t_{j_2} - r)^{\frac{\gamma}{2}}} dr + \int_{t_{j_1}+t_{j_2}}^{t_{j_2}} \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{1}{(r - t_{j_1})^{\frac{i}{2}}} dr \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad \left. + \int_{t_{j_{l-1}}}^{t_{j_{l-1}}+t_{j_l}} \frac{1}{(t_{j_l} - r)^{\frac{\gamma}{2}}} dr + \int_{t_{j_{l-1}}+t_{j_l}}^{t_{j_l}} \sum_{i=0}^{\gamma} \frac{1}{(r - t_{j_{l-1}})^{\frac{i}{2}}} dr \right].
 \end{aligned}$$

Un changement de variable dans chaque intégrale permet de faire sortir les indices de sommations.

Les intégrales obtenues sont du type $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u^{\frac{\alpha}{2}}} du$ où α est un entier compris entre zéro et γ . Elles sont ainsi toutes majorées par 1 ; ce qui permet d'écrire en utilisant (10.53) :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{I}_\gamma([0,1])| &\leq \frac{K}{k^l} l! \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \left[t_{j_1}^{1-\frac{\gamma}{2}} + \sum_{i=0}^{\gamma} t_{j_1}^{1-\frac{i}{2}} \right. \\
 (10.56) \quad &\quad \left. + (t_{j_2} - t_{j_1})^{1-\frac{\gamma}{2}} + \sum_{i=0}^{\gamma} (t_{j_2} - t_{j_1})^{1-\frac{i}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (t_{j_l} - t_{j_{l-1}})^{1-\frac{\gamma}{2}} + \sum_{i=0}^{\gamma} (t_{j_l} - t_{j_{l-1}})^{1-\frac{i}{2}} \right].
 \end{aligned}$$

Les sommes sur les indices croissants $j_1, \dots, j_l$ vont compenser en partie le facteur $l!$. Nous allons examiner ces sommes lorsque le paramètre k devient grand.

L'exposant $1 - \frac{\gamma}{2}$ ou $1 - \frac{i}{2}$ peut prendre les valeurs 1, $\frac{1}{2}$, 0 ou $-\frac{1}{2}$.

Dans les trois premiers cas, on peut majorer chaque facteur de ces sommes par 1, et ainsi chaque somme se comporte comme $\frac{k^l}{l!}$. Par conséquent, on a :

$$(10.57) \quad \sup_{k,l} \frac{|\mathcal{I}_\gamma([0,1])|}{l} < \infty \quad (\gamma \in \{1,2\}).$$

Dans le cas $\gamma = 3$, les sommes apparaissant dans le membre de droite de (10.56) sont des sommes de Riemann qui approximent des intégrales sur le domaine $\{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l ; 0 < x_1 < \dots < x_l < 1\}$:

$$(10.58) \quad \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \left(\frac{j_1}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \int_{0 < x_1 < \dots < x_l < 1} x_1^{-\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_l \leq \frac{2}{(l-1)!},$$

et pour tout entier q compris entre 2 et l :

$$(10.59) \quad \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \left(\frac{j_q - j_{q-1}}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \int_{0 < x_1 < \dots < x_l < 1} (x_q - x_{q-1})^{-\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_l \leq \frac{2}{(l-1)!} ;$$

cette dernière inégalité est obtenue en intégrant par parties l'intégrale en x_{q-1} .

Par conséquent, (10.56), (10.58) et (10.59) donnent :

$$(10.60) \quad \sup_{k,l} \frac{|\mathcal{I}_3([0,1])|}{l(l+1)} < \infty.$$

La conclusion du théorème vient alors de la réunion de (9.2), (10.43), (10.57) et (10.60).

□

10.8 Les moments exponentiels

Cette partie est consacrée à l'estimation de l'erreur commise en approchant

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right) \right\} \text{ par } \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right) \right\} \text{ en } \delta \text{ et } k.$$

Théorème 10.7 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d = 1$; soit $\bar{X}^\delta(\cdot)$ l'approximation, définie pour tout réel $\delta > 0$, de $X(\cdot)$ par le schéma d'Euler; $\bar{X}^\delta(\cdot)$ est solution de (8.2).

Alors il existe C_0, C_1 et $(\varepsilon_{\delta,k,l})_{k,l \in \mathbb{N}^, 0 < \delta < 1}$ tels que :*

$$(10.61) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right) \right\} - \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right) \right\} \right| \\ \leq C_0 \delta + \left(\sum_{l \geq 1} \frac{1}{(l-1)!} \frac{\varepsilon_{\delta,k,l}}{\delta} \right) \delta + C_1 \frac{\log k}{k},$$

C_0 et C_1 sont deux nombres indépendants de l, k et δ et la quantité $(\varepsilon_{\delta,k,l})_{k,l \in \mathbb{N}^*, 0 < \delta < 1}$ vérifie les conditions (10.8) et (10.9) du théorème 10.2 :

$$(10.8) \quad \sup_{\delta,k,l} \frac{|\varepsilon_{\delta,k,l}|}{l^2(\|f\|_\infty^l \vee 1)} < \infty,$$

$$(10.9) \quad \sup_{k,l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon_{\delta,k,l}|}{\delta} = 0.$$

Démonstration du théorème 10.7.

La démonstration du résultat est basée sur un développement en série de l'exponentielle et sur une exploitation des résultats obtenus dans la section précédente.

Soit p un entier positif,

$$(10.62) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq \left| \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right] \right| \\ + \left| \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right] \right|.$$

Le second terme du membre de droite de (10.62) est contrôlé par (10.35).

$$(10.63) \quad \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right] \\ = \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} [C_{k,l} \delta + \varepsilon_{\delta,k,l}],$$

et par suite,

$$(10.64) \quad \left| \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right] \right| \\ \leq 2 \exp(1) \left(\sup_{k,l} \frac{|C_{k,l}|}{l^2} \right) \delta + \left(\sum_{l \geq 1} \frac{1}{(l-1)!} \frac{\varepsilon_{\delta,k,l}}{\delta} \right) \delta.$$

La convergence du premier terme est quant à elle démontrée dans le lemme suivant :

Lemme 10.8 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1).

Alors pour tout entier $p > 0$ et tout entier $l > 0$, il existe C_1 tel que :

$$(10.65) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f\left(X\left(\frac{i}{k}\right)\right) \right)^l \right\} \right| \leq C_1 \frac{\log k}{k}.$$

Démonstration du lemme 10.8.

Si p_k désigne une suite d'entiers positifs, on peut écrire :

$$(10.66) \quad \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f\left(X\left(\frac{i}{k}\right)\right) \right)^l \right\} \\ = \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbb{E} \{ f(X(s_1)) \dots f(X(s_l)) \} ds_1 \dots ds_l \\ - \frac{1}{k^l} \sum_{i_l=1}^k \dots \sum_{i_1=1}^k \mathbb{E} \left\{ f\left(X\left(\frac{i_1}{k}\right)\right) \dots f\left(X\left(\frac{i_l}{k}\right)\right) \right\} \\ = \sum_{l=1}^{p \wedge (p_k-1)} \frac{1}{l!} D_{k,l} + \sum_{p_k \leq l \leq p} \frac{1}{l!} D_{k,l}.$$

On utilise (10.33) ou sa forme simplifiée (10.14) pour majorer la somme dont l'indice l va de zéro à $p \wedge (p_k - 1)$.

$$(10.67) \quad \sum_{l=1}^{p_k-1} \frac{1}{l!} |D_{k,l}| \leq \|f\|_\infty \exp(\|f\|_\infty) \left(C_1 \frac{\log k}{k} + (C_2 + C_3 \|f\|_\infty) \frac{1}{k} \right) \quad \left(p_k \leq \frac{k}{6} \right).$$

Pour la somme allant de p_k à p , on choisit p_k tel que l'on puisse se contenter de la majoration triviale $|D_{k,l}| \leq 2\|f\|_\infty^l$; ainsi :

$$(10.68) \quad \sum_{l=p_k}^p \frac{1}{l!} |D_{k,l}| \leq 2 \sum_{l=p_k}^p \frac{\|f\|_\infty^l}{l!} \leq 2 \exp(\|f\|_\infty) \frac{\|f\|_\infty^{p_k}}{p_k!}.$$

On remarque que ces deux majorations (10.67) et (10.68) sont indépendantes de p . En les réunissant dans (10.66), on obtient :

$$(10.69) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X_s) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f \left(X \left(\frac{i}{k} \right) \right) \right)^l \right\} \right| \\ \leq 2 \exp(\|f\|_\infty) \frac{\|f\|_\infty^{p_k}}{p_k!} + \|f\|_\infty \exp(\|f\|_\infty) \left(C_1 \frac{\log k}{k} + (C_2 + C_3 \|f\|_\infty) \frac{1}{k} \right).$$

Il reste à choisir la suite $(p_k)_{k>0}$ pour préciser la vitesse de convergence en k . La seule restriction concernant cette suite est la majoration $p_k \leq \frac{k}{6}$. En choisissant cette borne pour p_k , on obtient

$$(10.70) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq 2 \exp(\|f\|_\infty) \frac{\|f\|_\infty^{\frac{k}{6}}}{(\frac{k}{6})!} + \|f\|_\infty \exp(\|f\|_\infty) \left(C_1 \frac{\log k}{k} + (C_2 + C_3 \|f\|_\infty) \frac{1}{k} \right)$$

et la conclusion (10.65) du lemme. $\square$

Remarque :

Le terme $\frac{\|f\|_\infty^{\frac{k}{6}}}{(\frac{k}{6})!}$ est négligeable devant les autres termes du membre de droite de (10.70) lorsque k tend vers l'infini : par exemple, dès que $k \geq 12 \|f\|_\infty e$, on a la majoration suivante :

$$(10.71) \quad \frac{\|f\|_\infty^{\frac{k}{6}}}{(\frac{k}{6})!} \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{6}}}.$$

En injectant (10.63) et (10.70) dans (10.62), on obtient l'existence de trois nombres C_1 , C_2 et C_3 tels que :

$$(10.72) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq 2 \exp(1) \left(\sup_{k,l} \frac{|C_{k,l}|}{l^2} \right) \delta + \left(\sum_{l \geq 1} \frac{1}{(l-1)!} \frac{\varepsilon_{\delta,k,l}}{\delta} \right) \delta \\ + 2 \exp(\|f\|_\infty) \frac{\|f\|_\infty^{\frac{k}{6}}}{(\frac{k}{6})!} + \|f\|_\infty \exp(\|f\|_\infty) \left(C_1 \frac{\log k}{k} + (C_2 + C_3 \|f\|_\infty) \frac{1}{k} \right).$$

Le membre de droite est indépendant de p . En faisant tendre p vers $+\infty$ dans (10.72) et en ne conservant que les termes dominants, on obtient la conclusion (10.61). $\square$

11

Majoration en $\delta = \frac{1}{k}$ de l'erreur pour l'intégrale de la trajectoire

Dans la section précédente, nous avons présenté un développement en δ de l'erreur. Il a été montré que le coefficient $R(\tilde{\Phi}(k,l))$ devant δ est borné par rapport à k . Mais ceci ne suffit pas pour obtenir la vitesse de convergence de l'erreur puisque l'on ne contrôle pas le reste $\frac{\varepsilon_{\delta,k,l}}{\delta}$ uniformément en k .

Nous allons reprendre l'étude de l'erreur en faisant tendre, en même temps et à la même vitesse ($\delta = \frac{1}{k}$), les paramètres δ vers zéro et k vers l'infini.

Ensuite, deux exemples seront présentés dans le cadre de l'amélioration de la majoration de la vitesse de convergence : la partie 11.3.1 reprend une démonstration établissant une majoration de la vitesse de convergence pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ; la partie 11.3.2 présente des résultats de simulations numériques laissant apparaître une vitesse de convergence strictement supérieure à $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

11.1 Les moments d'ordre l

Théorème 11.1 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^$; soit $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\cdot)$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler ; $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\cdot)$ est la solution de (8.2).*

Alors il existe C tel que :

$$(11.1) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq C l \|f\|_{\infty}^l \frac{\log k}{\sqrt{k}} \quad (k, l \in \mathbb{N}^*) \quad \left(\lim_{k, l \rightarrow \infty} \frac{l \log k}{\sqrt{k}} = 0 \right).$$

Démonstration du théorème 11.1.

On applique l'inégalité triangulaire (10.10) au membre de gauche de (11.1), puis la conclusion (10.14) du lemme 10.3 et enfin celle (11.3) du théorème 11.2 ci-dessous. Ainsi il existe

C_1 et C_2 tels que :

$$(11.2) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \leq l \|f\|_\infty^l \left(C_1 \frac{\log k}{\sqrt{k}} + C_2 l \frac{\log k}{k} \right) \quad (k, l \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1 \leq l \leq \frac{k}{6} \right).$$

Cependant, pour que le facteur $C_1 l \frac{\log k}{\sqrt{k}} + C_2 l^2 \frac{\log k}{k}$ converge vers zéro, il faut que la limite de $l \frac{\log k}{\sqrt{k}}$ lorsque k et l tendent vers l'infini soit nulle. Sous cette condition, le second terme $C_2 l^2 \frac{\log k}{k}$ est négligeable devant le premier $C_1 l \frac{\log k}{\sqrt{k}}$ et l'inégalité (11.1) est démontrée. $\square$

Théorème 11.2 Soit f une fonction mesurable et bornée.

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1); soit $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\cdot)$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler; $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\cdot)$ est la solution de (8.2).

Alors il existe un réel C tel que pour tous les entiers strictement positifs k et l :

$$(11.3) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \leq C l \|f\|_\infty^l \frac{\log k}{\sqrt{k}}.$$

Démonstration du théorème 11.2.

Le théorème 9.2 donne une expression de la dérivée de l'erreur comprenant deux termes où interviennent les dérivées première et seconde de la fonction $H_{r,k}$. Ces deux termes sont de la forme suivante, où tantôt $g = b$ et $\gamma = 1$, tantôt $g = a$ et $\gamma = 2$:

$$(11.4) \quad I = \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)}))] \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\} dr.$$

Si l'on écrit l'erreur comme l'intégrale de sa dérivée et que l'on utilise le résultat (9.4) du théorème 9.2,

$$(11.5) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \\ &= \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ [b(\bar{X}^\delta(r)) - b(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)}))] \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\} dr \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E} \left\{ [a(\bar{X}^\delta(r)) - a(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)}))] \frac{\partial^2 H_{r,k}}{\partial z^2}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_{k_r}), \bar{X}^\delta(r)) \right\} dr, \end{aligned}$$

il est clair qu'il suffit de majorer I pour $g = b$, $\gamma = 1$ d'une part, et pour $g = a$, $\gamma = 2$ d'autre part.

Contrairement au processus X , $\bar{X}^\delta$ n'est pas markovien. En effet si $0 < s < t < 1$, la v.a. $\mathbb{E}\{f(\bar{X}^\delta(t)) \mid \sigma(\bar{X}^\delta(u)), 0 \leq u \leq s\}$ dépend de $\bar{X}^\delta(s)$.

Cependant, si N est un entier compris entre zéro et $\frac{1}{\delta}$, le processus $(\bar{X}^\delta(s))_{(N\delta \leq s \leq (N+1)\delta)}$ est markovien à la donnée de $\bar{X}^\delta(N\delta)$ près. La loi de ses accroissements est même indépendante de sa position : elle est celle d'un mouvement brownien avec dérive, au facteur $a(\bar{X} \circ \varphi_\delta(N\delta))$ près.

Aussi, si s et t sont dans le même intervalle de découpage en δ , c'est-à-dire si $\varphi_\delta(s) = \varphi_\delta(t)$, la loi de transition entre s et t s'exprime en fonction de $t - s$ et de la valeur de $\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s)$; il s'agit de la loi normale de moyenne $b(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s))(t - s)$ et de variance $a(\bar{X}^\delta \circ \varphi_\delta(s))(t - s)$. L'expression de la densité de transition est alors dans ce cas :

$$(11.6) \quad p_{s,t}^{(x_{\varphi_\delta(s)})}(x,y) = \exp\left(-\frac{(y-x-b(x_{\varphi_\delta(s)})(t-s))^2}{2a(x_{\varphi_\delta(s)})(t-s)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi a(x_{\varphi_\delta(s)})(t-s)}}.$$

On choisit $\delta = \frac{1}{k}$ et on conserve la subdivision $t_i = \frac{i}{k}$; ainsi $r^{(\delta)} = \frac{i}{k}$ si $t_i \leq r < t_{i+1}$. On découpe l'intégrale en dr suivant le découpage en δ , et on exprime la fonction $H_{r,k}$ à l'aide des densités de transition du processus X :

$$(11.7) \quad \begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \left\{ [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)}))] \frac{\partial^\gamma H_{r,k}}{\partial z^\gamma}(\bar{X}^\delta(t_1), \dots, \bar{X}^\delta(t_i), \bar{X}^\delta(r)) \right\} dr \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \left\{ [g(\bar{X}^\delta(r)) - g(\bar{X}^\delta(r^{(\delta)}))] \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} \left(\frac{f(\bar{X}^\delta(t_1)) + \dots + f(\bar{X}^\delta(t_i)) + f(x_{i+1}) + \dots + f(x_k)}{k} \right)^l q_{r,t_{i+1}}(z, x_{i+1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. q_{t_{i+1}, t_{i+2}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) \Big|_{z=\bar{X}^\delta(r)} \right\} dr. \end{aligned}$$

En remplaçant l'espérance dans l'égalité (11.7) par des intégrales contre les densités de transition $p_{t_p, t_{p+1}}^{(x_p)}(x_p, x_{p+1})$ du processus markovien $(\bar{X}^\delta(s))_{(t_p \leq s \leq t_{p+1})}$, on obtient :

$$(11.8) \quad \begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^{i+1}} [g(z) - g(x_i)] \\ &\quad \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} \left(\frac{f(x_1) + \dots + f(x_i) + f(x_{i+1}) + \dots + f(x_k)}{k} \right)^l q_{r, t_{i+1}}(z, x_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. q_{t_{i+1}, t_{i+2}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots \\ &\quad p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr. \end{aligned}$$

On développe la puissance l suivant (10.52), puis on inverse les sommes en i et $j_1, \dots, j_l$.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\mathbb{R}^{i+1}} [g(z) - g(x_i)] \\
 (11.9) \quad &\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^{k-i}} C_{j_1, \dots, j_l} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) q_{r, t_{i+1}}(z, x_{i+1}) q_{t_{i+1}, t_{i+2}}(x_{i+1}, x_{i+2}) \dots \right. \\
 &\left. q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{i+1} \dots dx_k \right) p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) \\
 &p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr.
 \end{aligned}$$

On précise la position de l'indice i parmi les indices $j_1, \dots, j_l$ en caractérisant l'indice α comme étant celui vérifiant $j_{\alpha-1} \leq i < j_\alpha$ et on pose $j_0 = 0$ pour homogénéiser les écritures.

Entre les deux instants r et $t_{j_\alpha-1}$, on ne rencontre les variables d'intégration $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j_\alpha-1}$ que dans les noyaux de transition $q_{s,t}(x,y)$. On peut par conséquent utiliser l'identité de Chapman-Kolmogorov et ainsi regrouper les $j_\alpha - i$ noyaux $q_{r, t_{i+1}}(z, x_{i+1}), \dots, q_{t_{j_\alpha-1}, t_{j_\alpha}}(x_{j_\alpha-1}, x_{j_\alpha})$ dans le noyau $q_{r, t_{j_\alpha}}(z, x_{j_\alpha})$.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_\alpha-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int [g(z) - g(x_i)] \\
 (11.10) \quad &\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \left(\int C_{j_1, \dots, j_l} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) q_{r, t_{j_\alpha}}(z, x_{j_\alpha}) q_{t_{j_\alpha}, t_{j_\alpha+1}}(x_{j_\alpha}, x_{j_\alpha+1}) \dots \right. \\
 &\left. q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{j_\alpha} \dots dx_k \right) p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) \\
 &p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr.
 \end{aligned}$$

• Premier cas : $\gamma = 1$ et $g = b$.

On échange la dérivation et l'intégrale.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_\alpha-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int [b(z) - b(x_i)] \\
 (11.11) \quad &\int C_{j_1, \dots, j_l} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) \frac{\partial q_{r, t_{j_\alpha}}}{\partial z}(z, x_{j_\alpha}) q_{t_{j_\alpha}, t_{j_\alpha+1}}(x_{j_\alpha}, x_{j_\alpha+1}) \dots \\
 &q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{j_\alpha} \dots dx_k p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) \\
 &p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr.
 \end{aligned}$$

On majore le produit $f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l})$ par $\|f\|_\infty^l$ et la dérivée du noyau $q_{r, t_{j_\alpha}}(z, x_{j_\alpha})$ en utilisant la proposition 10.1.

$$\begin{aligned}
(11.12) \quad I &\leq \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int |b(z) - b(x_i)| \\
&\quad \int C_{j_1, \dots, j_l} \|f\|_{\infty}^l \frac{C}{\sqrt{t_{j_{\alpha}} - r}} \frac{1}{\sqrt{2\pi M(t_{j_{\alpha}} - r)}} \exp\left(-\frac{(z - x_{j_{\alpha}})^2}{2M(t_{j_{\alpha}} - r)}\right) \\
&\quad q_{t_{j_{\alpha}}, t_{j_{\alpha}+1}}(x_{j_{\alpha}}, x_{j_{\alpha}+1}) \dots q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) \\
&\quad dx_{j_{\alpha}} dx_{j_{\alpha}+1} \dots dx_k p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) \\
&\quad p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr.
\end{aligned}$$

Les intégrales en les variables $x_{j_{\alpha}}, x_{j_{\alpha}+1}, \dots, x_k$ disparaissent du fait de l'identité de Chapman-Kolmogorov. Les intégrales en $dx_1, \dots, dx_i, dz$ peuvent s'écrire comme l'espérance d'une fonctionnelle du processus $\bar{X}^{\delta}$.

$$\begin{aligned}
(11.13) \quad I &\leq C \frac{\|f\|_{\infty}^l}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} C_{j_1, \dots, j_l} \frac{1}{\sqrt{t_{j_{\alpha}} - r}} \\
&\quad \mathbb{E} \{ |b(\bar{X}^{\delta}(r)) - b(\bar{X}^{\delta}(t_i))| \} dr.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (9.19) étant vérifiée par b , les majorations (9.18) et (8.7) impliquent l'existence d'une constante C telle que :

$$(11.14) \quad \mathbb{E} \{ |b(\bar{X}^{\delta}(r)) - b(\bar{X}^{\delta}(t_i))| \} \leq C \sqrt{r - t_i}.$$

Par (11.13) et (11.14), il existe une constante C telle que :

$$(11.15) \quad I \leq C \frac{\|f\|_{\infty}^l}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\frac{r - t_i}{t_{j_{\alpha}} - r}} dr.$$

Après un changement de variable dans l'intégrale et une majoration du numérateur de l'intégrant $\sqrt{u}$ par 1, on obtient :

$$(11.16) \quad I \leq C \frac{\|f\|_{\infty}^l}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-1} \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{j_{\alpha} - i - u}} du,$$

c'est-à-dire :

$$(11.17) \quad I \leq 2 C \frac{\|f\|_{\infty}^l}{k^{l+1}} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-1} \left(\sqrt{j_{\alpha} - i} - \sqrt{j_{\alpha} - i - 1} \right).$$

Les termes de la somme en i se télescopent.

$$(11.18) \quad I \leq 2 C \frac{\|f\|_\infty^l}{k^{l+1}} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \sqrt{j_\alpha - j_{\alpha-1}}.$$

Enfin, on majore $j_\alpha - j_{\alpha-1}$ par k (Les sommes sont indépendantes de α dès que $\alpha \geq 1$).

$$(11.19) \quad I \leq C \frac{\|f\|_\infty^l}{\sqrt{k}} l.$$

• Second cas : $\gamma = 2$ et $g = a$.

On note I_1 l'expression de I dans laquelle la somme sur i va de $j_{\alpha-1}$ à $j_\alpha - 2$ et I_2 l'expression de I dans laquelle $i = j_\alpha - 1$.

◊ Pour I_1 , on procède exactement de la même façon que dans le premier cas. On reprend donc l'égalité (11.10) mais en ne sommant que de $i = j_{\alpha-1}$ à $i = j_\alpha - 2$.

$$(11.20) \quad \begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_\alpha-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int [a(z) - a(x_i)] \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\int C_{j_1, \dots, j_l} f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) q_{r, t_{j_\alpha}}(z, x_{j_\alpha}) q_{t_{j_\alpha}, t_{j_\alpha+1}}(x_{j_\alpha}, x_{j_\alpha+1}) \dots \right. \\ & \left. q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{j_\alpha} \dots dx_k \right) p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) \\ & p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr. \end{aligned}$$

On échange la dérivation et l'intégrale, et on majore la dérivée seconde grâce à (10.1).

$$(11.21) \quad \begin{aligned} I_1 \leq & \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_\alpha-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int |a(z) - a(x_i)| \\ & \int C_{j_1, \dots, j_l} \|f\|_\infty^l \frac{C}{t_{j_\alpha} - r} \frac{1}{\sqrt{2\pi M(t_{j_\alpha} - r)}} \exp\left(-\frac{(z - x_{j_\alpha})^2}{2M(t_{j_\alpha} - r)}\right) \\ & q_{t_{j_\alpha}, t_{j_\alpha+1}}(x_{j_\alpha}, x_{j_\alpha+1}) \dots q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{j_\alpha} \dots dx_k p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots \\ & p_{t_{i-1}, t_i}^{(x_{i-1})}(x_{i-1}, x_i) p_{t_i, r}^{(x_i)}(x_i, z) dx_1 \dots dx_i dz dr. \end{aligned}$$

Les intégrales en $dx_{j_\alpha}, \dots, dx_k$ disparaissent, et les intégrales en $dx_1, \dots, dx_i, dz$ peuvent se transformer en une espérance.

$$(11.22) \quad \begin{aligned} I_1 \leq & \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_\alpha-2} C_{j_1, \dots, j_l} \|f\|_\infty^l \\ & \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{C}{t_{j_\alpha} - r} \mathbb{E}\{|a(\bar{X}^\delta(r)) - a(\bar{X}^\delta(t_i))|\} dr. \end{aligned}$$

On utilise (11.14) pour obtenir l'existence d'une constante C permettant de majorer I_1 :

$$(11.23) \quad I_1 \leq \frac{C}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-2} C_{j_1, \dots, j_l} \|f\|_{\infty}^l \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\sqrt{r-t_i}}{t_{j_{\alpha}}-r} dr.$$

On pose $u = k(r - t_i)$ et on majore par $\sup_{0 < u < 1} \sqrt{u} = 1$ pour obtenir :

$$(11.24) \quad I_1 \leq \tilde{C} \frac{\|f\|_{\infty}^l}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=j_{\alpha-1}}^{j_{\alpha}-2} \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^1 \frac{1}{j_{\alpha}-i-u} du.$$

Les termes en logarithme provenant de l'intégration se télescopent :

$$(11.25) \quad I_1 \leq \tilde{C} \frac{\|f\|_{\infty}^l}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\alpha=1}^l \log(j_{\alpha} - j_{\alpha-1}).$$

En majorant $j_{\alpha} - j_{\alpha-1}$ par k , il vient en tenant compte de (10.53) :

$$(11.26) \quad I_1 \leq C l \|f\|_{\infty}^l \frac{\log k}{\sqrt{k}}.$$

◇ Pour I_2 , la majoration est plus délicate : on ne peut en effet majorer directement le noyau $q_{t_{j_{\alpha}}-r}(z, x_{j_{\alpha}-1})$: la fraction $\frac{1}{t_{j_{\alpha}}-r}$ ne serait pas intégrable pour $r \in]t_{j_{\alpha}-1}, t_{j_{\alpha}}[$.

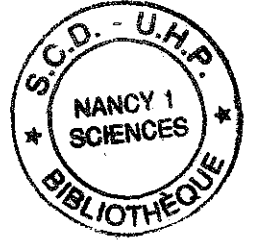
On peut par contre faire porter la dérivation par rapport à z sur la fonction $z \mapsto (g(z) - g(x_{j_{\alpha}})) p_{t_{j_{\alpha}-1}, r}^{(x_{j_{\alpha}-1})}(x_{j_{\alpha}-1}, z)$ en intégrant par parties.

Les termes tout intégrés comprennent le facteur exponentiel $p_{t_{j_{\alpha}-1}, r}^{(x_{j_{\alpha}-1})}(x_{j_{\alpha}-1}, z)$; leurs limites en $z \rightarrow -\infty$ et $z \rightarrow +\infty$ sont donc nulles.

$$(11.27) \quad \begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{t_{j_{\alpha}-1}}^{t_{j_{\alpha}}} \int \int f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l}) q_{r, t_{j_{\alpha}-1+1}}(z, x_{j_{\alpha}-1+1}) \\ & q_{t_{j_{\alpha}-1+1}, t_{j_{\alpha}-1+2}}(x_{j_{\alpha}-1+1}, x_{j_{\alpha}-1+2}) \dots q_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, x_k) dx_{j_{\alpha}-1+1} \dots dx_k \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(p_{t_{j_{\alpha}-1}, r}^{(x_{j_{\alpha}-1})}(x_{j_{\alpha}-1}, z) [g(z) - g(x_{j_{\alpha}-1})] \right) p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots \\ & p_{t_{j_{\alpha}-1-1}, t_{j_{\alpha}-1}}^{(x_{j_{\alpha}-1-1})}(x_{j_{\alpha}-1-1}, x_{j_{\alpha}-1}) p_{t_{j_{\alpha}-1}, r}^{(x_{j_{\alpha}-1})}(x_{j_{\alpha}-1}, z) dx_1 \dots dx_{j_{\alpha}-1} dz dr. \end{aligned}$$

Le produit $f(x_{j_1}) \dots f(x_{j_l})$ majoré par $\|f\|_{\infty}^l$, on applique plusieurs fois l'identité de Chapman-Kolmogorov.

$$(11.28) \quad \begin{aligned} I_2 \leq & \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{t_{j_{\alpha}-1}}^{t_{j_{\alpha}}} \int \|f\|_{\infty}^l \\ & \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(p_{t_{j_{\alpha}-1}, r}^{(x_{j_{\alpha}-1})}(x_{j_{\alpha}-1}, z) [g(z) - g(x_{j_{\alpha}-1})] \right) \right| p_{t_0, t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots \\ & p_{t_{j_{\alpha}-1-1}, t_{j_{\alpha}-1}}^{(x_{j_{\alpha}-1-1})}(x_{j_{\alpha}-1-1}, x_{j_{\alpha}-1}) dx_1 \dots dx_{j_{\alpha}-1} dz dr. \end{aligned}$$



La double dérivation par rapport à z donne trois termes où apparaissent respectivement le noyau $p_{t_{j_\alpha-1},r}^{(x_{j_\alpha-1})}(x_{j_\alpha-1},z)$, sa dérivée et sa dérivée seconde (par rapport à z).

$$(11.29) \quad I_2 \leq \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{t_{j_\alpha-1}}^{t_{j_\alpha}} \int \|f\|_\infty^l \left[\left| p_{t_{j_\alpha-1},r}^{(x_{j_\alpha-1})}(x_{j_\alpha-1},z) g''(z) \right| \right. \\ \left. + \left| \frac{\partial p_{t_{j_\alpha-1},r}^{(x_{j_\alpha-1})}}{\partial z}(x_{j_\alpha-1},z) g'(z) \right| + \left| \frac{\partial^2 p_{t_{j_\alpha-1},r}^{(x_{j_\alpha-1})}}{\partial z^2}(x_{j_\alpha-1},z) [g(z) - g(x_{j_\alpha-1})] \right| \right] \\ p_{t_0,t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{j_\alpha-1-1}, t_{j_\alpha-1}}^{(x_{j_\alpha-1-1})}(x_{j_\alpha-1-1}, x_{j_\alpha-1}) dx_1 \dots dx_{j_\alpha-1} dz dr.$$

On utilise la majoration du noyau (10.2) pour les deuxième et troisième termes.

$$(11.30) \quad I_2 \leq \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{\frac{t_{j_\alpha-1} + t_{j_\alpha}}{2}}^{t_{j_\alpha}} \int \|f\|_\infty^l \\ \left[\left| p_{t_{j_\alpha-1},r}^{(x_{j_\alpha-1})}(x_{j_\alpha-1},z) |g''(z)| \right| \right. \\ \left. + \frac{C}{\sqrt{r-t_{j_\alpha-1}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi M(r-t_{j_\alpha-1})}} \exp\left(-\frac{(z-x_{j_\alpha-1})^2}{2M(r-t_{j_\alpha-1})}\right) |g'(z)| \right. \\ \left. + \frac{C}{r-t_{j_\alpha-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi M(r-t_{j_\alpha-1})}} \exp\left(-\frac{(z-x_{j_\alpha-1})^2}{2M(r-t_{j_\alpha-1})}\right) |g(z) - g(x_{j_\alpha-1})| \right] \\ p_{t_0,t_1}^{(x_0)}(x_0, x_1) \dots p_{t_{j_\alpha-1-1}, t_{j_\alpha-1}}^{(x_{j_\alpha-1-1})}(x_{j_\alpha-1-1}, x_{j_\alpha-1}) dx_1 \dots dx_{j_\alpha-1} dz dr.$$

Ces trois intégrales s'interprètent comme des espérances :

$$(11.31) \quad I_2 \leq \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{\frac{t_{j_\alpha-1} + t_{j_\alpha}}{2}}^{t_{j_\alpha}} \|f\|_\infty^l \\ \mathbb{E} \left\{ \left| g''(\bar{X}^\delta(r)) \right| + \frac{C}{\sqrt{r-t_{j_\alpha-1}}} \left| g'(\bar{X}^\delta(t_{j_\alpha-1} + \sqrt{M}\tilde{B}(t_{j_\alpha-1} - r)) \right| \right. \\ \left. + \frac{C}{r-t_{j_\alpha-1}} \left| g(\bar{X}^\delta(t_{j_\alpha-1} + \sqrt{M}\tilde{B}(t_{j_\alpha-1} - r)) - g(\bar{X}^\delta(t_{j_\alpha-1})) \right| \right\} dr.$$

La fonction g vérifiant la condition (9.19), il existe une constante $\tilde{C}$ telle que :

$$(11.32) \quad I_2 \leq \frac{1}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{\frac{t_{j_\alpha-1} + t_{j_\alpha}}{2}}^{t_{j_\alpha}} \|f\|_\infty^l \left[\mathbb{E} \left\{ \left| g''(\bar{X}^\delta(r)) \right| \right\} \right. \\ \left. + \frac{C}{\sqrt{r-t_{j_\alpha-1}}} \mathbb{E} \left\{ \left| g'(\bar{X}^\delta(t_{j_\alpha-1} + \sqrt{M}\tilde{B}(t_{j_\alpha-1} - r)) \right| \right\} \right. \\ \left. + \frac{C \tilde{C}}{\sqrt{r-t_{j_\alpha-1}}} \mathbb{E} \left\{ \left(1 + \left| \bar{X}^\delta(t_{j_\alpha-1} + \sqrt{M}\tilde{B}(t_{j_\alpha-1} - r)) \right| + \left| \bar{X}^\delta(t_{j_\alpha-1}) \right| \right) \right\} \right] dr.$$

Une légère modification du corollaire 8.2 pour l'adapter au processus

$\left(\bar{X}^\delta(s \wedge t_{j_\alpha-1}) + \sqrt{M} \tilde{B}((s - t_{j_\alpha-1}) \vee 0)\right)_{0 \leq s \leq t_{j_\alpha}}$ permet de contrôler les trois espérances de (11.32) par un nombre ne dépendant que des moments de $X(0)$.

Par conséquent, il existe un nombre K tel que :

$$(11.33) \quad I_2 \leq K \frac{\|f\|_\infty^l}{k^l} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l \leq k} C_{j_1, \dots, j_l} \sum_{\alpha=1}^l \int_{\frac{t_{j_\alpha-1} + t_{j_\alpha}}{2}}^{t_{j_\alpha}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r - t_{j_\alpha-1}}}\right) dr,$$

et ainsi,

$$(11.34) \quad I_2 \leq K \|f\|_\infty^l l \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{\sqrt{k}}\right).$$

Compte tenu de (11.5), les inégalités (11.19), (11.26) et (11.34) conduisent à

$$(11.35) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \leq l \|f\|_\infty^l \left(C_1 \frac{\log k}{\sqrt{k}} + \frac{C_2}{\sqrt{k}} + \frac{C_3}{k} \right)$$

et à la conclusion (11.3) après que les seuls termes dominants sont conservés. $\square$

11.2 Les moments exponentiels

Théorème 11.3 *Soit f une fonction mesurable et bornée.*

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^$; soit $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\cdot)$ l'approximation, définie pour tout entier $k > 0$, de $X(\cdot)$ par le schéma d'Euler ; $\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\cdot)$ est solution de (8.2).*

Alors il existe C tel que :

$$(11.36) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right) \right\} - \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right) \right\} \right| \leq C \frac{\log k}{\sqrt{k}} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Démonstration du théorème 11.3.

La démarche est identique à celle de la démonstration du théorème 10.7.

Soit p un entier positif,

$$(11.37) \quad \begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ & \leq \left| \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right] \right| \\ & \quad + \left| \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left[\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{1}{k}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right] \right|. \end{aligned}$$

On applique (10.70) et (11.35). Il existe alors C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 tels que :

$$(11.38) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\int_0^1 f(X(s)) ds \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{(\frac{1}{k})}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \right| \\ \leq 2 \exp(\|f\|_\infty) \frac{\|f\|_\infty^{\frac{k}{6}}}{(\frac{k}{6})!} + \|f\|_\infty \exp(\|f\|_\infty) \left(C_1 \frac{\log k}{k} + (C_2 + C_3 \|f\|_\infty) \frac{1}{k} \right) \\ + \sum_{l=1}^p \frac{1}{l!} l \|f\|_\infty^l \left(C_4 \frac{\log k}{\sqrt{k}} + \frac{C_5}{\sqrt{k}} + \frac{C_6}{k} \right).$$

Il suffit de réduire le membre de droite de (11.38) en ne conservant que les termes dominants, et de faire tendre p vers $+\infty$ pour obtenir (11.36). $\square$

11.3 Amélioration de la majoration de la vitesse de convergence

11.3.1 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le choix du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le schéma général du calcul amenant à la conclusion de la proposition 11.4 m'ont été indiqués par Denis Talay.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck partant de zéro est solution de l'E.D.S. suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = -X(t) dt + dB_t \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

Ce processus possède une densité de transition explicite. De plus, la fonction σ valant un et la fonction b étant linéaire, l'approximation donnée par le schéma d'Euler est gaussienne. Ceci permet d'envisager de calculer directement l'écart induit par le remplacement de la diffusion X par l'approximation $\bar{X}^{(\frac{1}{k})}$ dans la somme de Riemann.

X est un processus gaussien centré dont la variance $u(t) = \mathbb{E}\{X_t^2\}$ est égale à $\frac{1 - \exp(-2t)}{2}$.

L'approximation $\bar{X}^{(\frac{1}{k})}(\frac{i}{k})$ donnée par le schéma d'Euler au point $\frac{i}{k}$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $v_i = \frac{1 - (1 - \frac{1}{k})^{2i}}{2 - \frac{1}{k}}$.

Proposition 11.4 *L'erreur entre les deux sommes de Riemann est de l'ordre de $\frac{1}{k}$;*

$$(11.39) \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\mathbb{E} \left\{ f(X(\frac{i}{k})) \right\} - \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{k})}(\frac{i}{k})) \right\} \right] = \mathcal{O}(\frac{1}{k}).$$

Démonstration de la proposition 11.4.

On note $u_i = u(\frac{i}{k}) = \frac{1 - \exp(-\frac{2i}{k})}{2}$.

Il est aisé de démontrer que $v_i = u_i \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right)$. En effet, en développant v_i en la variable $\frac{1}{k}$ jusqu'à l'ordre deux, on obtient :

$$\begin{aligned}
 v_i &= \frac{1 - \exp\left(2i\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^3})\right)\right)}{2 - \frac{1}{k}} \\
 &= \frac{1 - \exp\left(-\frac{2i}{k}\right)\left(1 - \frac{i}{k^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\right)}{2} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right) \\
 &= \left(u_i + \frac{i}{k^2} \exp\left(-\frac{2i}{k}\right) + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\right) \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right) \\
 &= u_i \left(1 + \frac{i}{k u_i} \left(\frac{\exp\left(-\frac{2i}{k}\right)}{k} + \frac{k}{i} \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\right)\right) \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right) \\
 &= u_i \left(1 + \frac{i}{k u_i} \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right) \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right).
 \end{aligned}$$

Il reste à observer que $\frac{i}{k u_i}$ est majorée par $\frac{2}{1 - e^{-2}}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left\{f\left(X\left(\frac{i}{k}\right)\right)\right\} - \mathbb{E}\left\{f\left(\bar{X}^{(\frac{1}{k})}\left(\frac{i}{k}\right)\right)\right\} &= \int \frac{f(z)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u_i}\right)}{\sqrt{u_i}} - \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u_i(1+\mathcal{O}(\frac{1}{k}))}\right)}{\sqrt{u_i(1+\mathcal{O}(\frac{1}{k}))}} \right) dz \\
 &= \int \frac{f(z\sqrt{v_i})}{\sqrt{2\pi}} \left(\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) - \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\mathcal{O}(\frac{1}{k}))}\right)}{\sqrt{1+\mathcal{O}(\frac{1}{k})}} \right) dz \\
 &= \int \frac{f(z\sqrt{v_i})}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2} \mathcal{O}(\frac{1}{k})} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right) \right) dz.
 \end{aligned}$$

L'intégration sur l'ensemble $\{z^2 > \sqrt{k}\}$ est négligeable devant l'intégration sur l'ensemble $\{z^2 \leq \sqrt{k}\}$; elle converge exponentiellement vite vers zéro.

$$\begin{aligned}
 \int_{\{z^2 > \sqrt{k}\}} f(z\sqrt{v_i}) \left(e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2} \mathcal{O}(\frac{1}{k})} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right) \right) dz &\leq 3\|f\|_{\infty} \int_{\{z^2 > \sqrt{k}\}} e^{-\frac{z^2}{4}} dz \\
 &\leq 12\|f\|_{\infty} \frac{e^{-\frac{\sqrt{k}}{4}}}{k^{\frac{1}{4}}}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $\{z^2 \leq \sqrt{k}\}$, la convergence n'est pas exponentielle, mais l'on peut écrire un développement limité en zéro de $\mathbb{1}_{\{z^2 \leq \sqrt{k}\}} e^{-\frac{z^2}{2} \mathcal{O}(\frac{1}{k})} = \mathbb{1}_{\{z^2 \leq \sqrt{k}\}} \left(1 - z^2 \mathcal{O}(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\frac{1}{k})\right)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\{z^2 \leq \sqrt{k}\}} f(z\sqrt{v_i}) \left(e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2} \mathcal{O}(\frac{1}{k})} \left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \right) \right) dz &= \\ \int_{\{z^2 \leq \sqrt{k}\}} f(z\sqrt{v_i}) \left(e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{-\frac{z^2}{2}} \left(1 - z^2 \mathcal{O}(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \right) \right) dz &= \\ \int_{\{z^2 \leq \sqrt{k}\}} f(z\sqrt{v_i}) \left(e^{-\frac{z^2}{2}} \left(z^2 \mathcal{O}(\frac{1}{k}) + \mathcal{O}(\frac{1}{k}) \right) \right) dz &= \mathcal{O}(\frac{1}{k}). \end{aligned}$$

□

11.3.2 Simulations numériques sur une diffusion

On considère la diffusion X , solution de l'E.D.S. suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = \frac{X(t)}{1 + X^2(t)} dt + X(t) dB_t \\ X(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Le coefficient σ n'est pas une constante contrairement au cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Rappelons que la démonstration du théorème 11.2 permet de conclure à une vitesse de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour les diffusions dont le coefficient σ est constant.

On se place, comme pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dans le cas de la fonctionnelle $x(\cdot) \mapsto \int_0^1 f(x(s)) ds$ que l'on approche avec la somme de Riemann $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(x(\frac{i}{k}))$.

On choisit pour ces simulations une fonction f non continue, valant un si la première décimale de l'argument est le chiffre cinq, et valant zéro sinon ;

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}[}(x - m).$$

On procède pour chaque valeur de k testée à 10^8 réalisations de sorte que l'erreur de l'approximation de l'espérance par la moyenne des réalisations soit de l'ordre de 10^{-4} .

10^8 réalisations	$k = 10$	$k = 20$	$k = 50$	$k = 100$	$k = 500$
$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{k})}(\frac{i}{k})) \right\}$	0,1334	0,1419	0,1480	0,1501	0,1515

Si l'on fait l'hypothèse que la convergence vers la limite est de l'ordre de $\frac{1}{k^\alpha}$, α est solution de l'équation suivante :

$$(11.40) \quad 1 - 5^\alpha = r (1 - 10^\alpha)$$

où r désigne le rapport

$$\frac{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{500})}(\frac{i}{500})) \right\} - \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{100})}(\frac{i}{100})) \right\}}{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{500})}(\frac{i}{500})) \right\} - \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{50})}(\frac{i}{50})) \right\}}.$$

Afin d'encadrer le paramètre α , on commence par encadrer le rapport r :

$$0,36 \leq r \leq 0,45.$$

Et on obtient par une résolution graphique de l'équation (11.40) un encadrement assez large pour l'exposant α :

$$0,9 \leq \alpha \leq 1,4.$$

Cet encadrement nous permet de conclure que la vitesse de convergence pour la diffusion et la fonction f considérées, n'est pas en $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$. Mais la précision de ces simulations n'est absolument pas suffisante pour émettre une hypothèse sur la vitesse exacte de convergence. Par conséquent d'autres simulations pour des valeurs plus élevées du nombre n seront nécessaires pour obtenir la vitesse réelle de convergence dans ce cas précis.

Elles permettraient également, dans le cas où le premier terme du développement de l'erreur est en $\frac{1}{k}$, de déterminer le deuxième terme en considérant une combinaison linéaire éliminant le premier terme : c'est la méthode de Romberg ; elle permet d'écrire le second terme du développement sous la forme suivante :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{2k} \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{2k})}(\frac{i}{2k})) \right\} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ f(\bar{X}^{(\frac{1}{k})}(\frac{i}{k})) \right\}.$$

12

Applications

12.1 Problème de Cauchy avec potentiel et donnée initiale nuls

Quand le potentiel r et la donnée initiale u_0 sont nuls, l'équation (7.7) se simplifie :

$$(12.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \mathcal{A}u(t, x) + g(x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0, x) &= 0 & (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Et l'expression (7.8) de la solution devient :

$$(12.2) \quad u(t, x) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X^x(\theta)) d\theta \right\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d).$$

Si l'on échange intégrale et espérance, l'erreur commise en remplaçant le processus $X^x(\theta)$ par l'approximation fournie par le schéma d'Euler $\bar{X}^{x, \delta}(\theta)$ dans l'expression de $u(t, x)$ s'écrit :

$$(12.3) \quad \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X^x(\theta)) d\theta \right\} - \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(\bar{X}^{x, \delta}(\theta)) d\theta \right\} = \int_0^t [\mathbb{E} \{g(X^x(\theta))\} - \mathbb{E} \{g(\bar{X}^{x, \delta}(\theta))\}] d\theta.$$

L'article [BALLY, TALAY, (1996)] donne un développement de la différence entre les espérances apparaissant dans le membre de droite de (12.3) :

$$(12.4) \quad \mathbb{E} \{g(X^x(\theta))\} - \mathbb{E} \{g(\bar{X}^{x, \delta}(\theta))\} = -C_g(\theta, x) \delta + Q_{\frac{1}{\delta}}(g, \theta, x) \delta^2.$$

Or, il existe une fonction croissante $K(\cdot)$, et deux réels strictement positifs q et Q tels que les majorations suivantes sont réalisées :

$$(12.5) \quad |C_g(\theta, x)| + \sup_{\delta} \left| Q_{\frac{1}{\delta}}(g, \theta, x) \right| \leq \frac{K(\theta)}{\theta^q} \|g\|_{\infty} (1 + \|x\|^Q).$$

Par conséquent, la dépendance en θ des majorants des coefficients du développement ne permettent pas de conclure : on ne sait pas si la fonction $\frac{K(\theta)}{\theta^q}$ est intégrable en zéro. Cependant, si cette fonction est intégrable, le développement est d'ordre deux, contrairement à celui d'ordre un obtenu en (10.36).

12.2 Problème de Cauchy avec Lagrangien nul et donnée initiale constante

Quand le Lagrangien g est nul et que la donnée initiale u_0 est une fonction constante, l'équation (7.7) s'écrit :

$$(12.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}u(t, x) - r(x)u(t, x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0, x) = u_0 & (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Et l'expression (7.8) de la solution devient :

$$(12.7) \quad u(t, x) = u_0 \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^t r(X^x(s)) ds \right) \right\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d).$$

Le théorème 11.3 établit l'erreur commise en approchant l'espérance du membre de droite de (12.7) par $\mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r \left(\bar{X}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{i}{k} t \right) \right) \right) \right\}$. L'ordre de la vitesse de convergence entre ces deux espérances est $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$.

12.3 Problème de Cauchy avec Lagrangien nul et donnée initiale non constante

Lorsque l'on ne suppose plus que la donnée initiale u_0 est constante, elle doit être intégrée dans l'espérance donnant la solution.

L'équation (7.7) s'écrit dans ce cas :

$$(12.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}u(t, x) - r(x)u(t, x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Et l'expression (7.8) de la solution s'exprime comme l'espérance d'une fonctionnelle dépendant de u_0 :

$$(12.9) \quad u(t, x) = \mathbb{E} \left\{ u_0(X^x(t)) \exp \left(- \int_0^t r(X^x(s)) ds \right) \right\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d).$$

Il est possible d'adapter les démonstrations des théorèmes 11.1, 11.2, 11.3 et des lemmes 10.3 et 10.8, au cas de la partition $\left(t_i = \frac{i}{k} t \right)_{(1 \leq i \leq k)}$ de l'intervalle $[0, t]$, et des fonctions $\Phi_{k,l}(x_1, \dots, x_k) = u_0(x_k) \left(- \frac{r(x_1) + \dots + r(x_k)}{k} \right)^l$, approchant les fonctionnelles de la trajectoire $\Phi(x(\cdot)) = u_0(x(t)) \left(- \int_0^t r(x(s)) ds \right)^l$.

L'analogie du théorème 11.3 s'écrit alors :

Théorème 12.1 Soient r et u_0 deux fonctions mesurables et bornées.

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^*$; pour $t > 0$ fixé, on considère $\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\cdot)$ l'approximation, définie pour tout entier $k > 0$, de $X(\cdot)$ par le schéma d'Euler.

Alors il existe C tel que :

$$(12.10) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ u_0(X(t)) \exp \left(- \int_0^t r(X(s)) ds \right) \right\} - \mathbb{E} \left\{ u_0(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(t)) \exp \left(- \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \right) \right\} \right| \leq C \frac{\log k}{\sqrt{k}} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

12.4 Problème de Cauchy dans le cas général

La solution du problème de Cauchy (7.7) peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$(12.11) \quad u(t, x) = \mathbb{E} \left\{ u_0(X^x(t)) \exp \left(- \int_0^t r(X^x(s)) ds \right) \right\} + \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X^x(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X^x(s)) ds \right) d\theta \right\} \quad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d).$$

Le premier terme correspond au cas du Lagrangien nul ; le théorème 12.1 donne la vitesse de convergence lors de l'approximation par $\mathbb{E} \left\{ u_0(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(t)) \exp \left(- \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \right) \right\}$; elle est de l'ordre de $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$.

Le second terme peut être approché par $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{j}{k}t)) \right) \right\}$,

et la vitesse de convergence est également de l'ordre de $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$ comme il est démontré dans le théorème suivant :

Théorème 12.2 Soient r et g deux fonctions mesurables et bornées.

Soit $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^*$; pour $t > 0$ fixé, on considère $\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\cdot)$ l'approximation, définie pour tout entier $k > 0$, de $X(\cdot)$ par le schéma d'Euler.

Alors il existe C tel que :

$$(12.12) \quad \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) d\theta \right\} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{j}{k}t)) \right) \right\} \right| \leq C \frac{\log k}{\sqrt{k}} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Démonstration du théorème 12.2.

L'inégalité triangulaire permet de scinder la démonstration en une partie concernant la convergence des sommes de Riemann et une seconde ayant trait à la convergence du schéma d'Euler.

$$\begin{aligned}
 (12.13) \quad & \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) d\theta \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{j}{k}t)) \right) \right\} \right| \\
 & \leq \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) d\theta \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(X(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right\} \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(X(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{j}{k}t)) \right) \right\} \right|.
 \end{aligned}$$

La majoration du second terme est une conséquence du théorème 12.1 :

$$\begin{aligned}
 (12.14) \quad & \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(X(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right\} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r(\bar{X}^{\frac{t}{k}}(\frac{j}{k}t)) \right) \right\} \right| \leq C \frac{\log k}{\sqrt{k}}.
 \end{aligned}$$

La majoration du premier terme est assurée par le lemme suivant :

Lemme 12.3 *Soient g et r deux fonctions mesurables et bornées.*

Soient $X(\cdot)$ la solution de (8.1) avec $d \in \mathbb{N}^$ et un réel $t > 0$.*

Alors il existe C tel que :

$$\begin{aligned}
 (12.15) \quad & \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^t g(X(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) d\theta \right\} - \right. \\
 & \left. \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left\{ g(X(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right\} \right| \leq C \frac{\log k}{k} \quad (k \in \mathbb{N}^*).
 \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 12.3.

La quantité à majorer peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \mathbb{E} \left\{ g(X(\theta)) \exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) - \right. \\
& \left. g(X(\frac{i}{k}t)) \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right\} d\theta \\
(12.16) \quad &= \sum_{i=1}^k \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \mathbb{E} \left\{ g(X(\theta)) \left[\exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) - \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right] \right. \\
&+ g(X(\frac{i}{k}t)) \left[\exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) - \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right] \\
&+ \left. \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} d\theta.
\end{aligned}$$

Les deux différences des fonctions exponentielles du membre de droite de (12.16) se majorent aisément :

$$\left| \exp \left(- \int_0^\theta r(X(s)) ds \right) - \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right| \leq \exp(\|r\|_\infty t) \|r\|_\infty \frac{2t}{k}$$

et

$$\left| \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) - \exp \left(- \int_0^{\frac{i}{k}t} r(X(s)) ds \right) \right| \leq \exp(\|r\|_\infty t) \|r\|_\infty \frac{2t}{k}.$$

Ainsi, la valeur absolue de la somme des deux premiers termes du membre de droite de (12.16) est majorée par :

$$\|g\|_\infty \exp(\|r\|_\infty t) \|r\|_\infty \frac{4t}{k}.$$

Le troisième terme, contenant la différence des fonctions g , se majore sur un principe déjà utilisé lors de la démonstration du lemme 10.3 ; les fonctions g et r ne sont pas continues, mais leur intégrale contre le noyau de la diffusion est, elle, très régulière. C'est ce point qui assure la convergence des sommes de Riemann.

Afin de faire porter la régularisation apportée par les noyaux sur la fonction r , on développe l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) \, ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) \, ds \right)^l \int_{\mathbb{R}} [g(X(\theta)) - g(y)] q_{\frac{i}{k}t-\theta}(X(\theta), y) \, dy \right\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \cdots \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \mathbb{E} \left\{ \int r(X(s_1)) \cdots r(X(s_l)) [g(X(\theta)) - g(y)] \right. \\
&\quad \left. q_{\frac{i}{k}t-\theta}(X(\theta), y) \, dy \right\} ds_1 \cdots ds_l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \cdots \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \int_{\mathbb{R}^{l+2}} r(x_1) \cdots r(x_l) [g(z) - g(y)] q_{s_1}(x_0, x_1) \cdots \\
&\quad q_{s_l-s_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) q_{\theta-s_l}(x_l, z) q_{\frac{i}{k}t-\theta}(z, y) \, dx_1 \cdots dx_l \, dz \, dy \, ds_1 \cdots ds_l.
\end{aligned}$$

L'expression $g(z) - g(y)$ est transformée en une différence entre deux noyaux de transition en intégrant soit en dz , soit en dy .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) \, ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \cdots \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \int_{\mathbb{R}^{l+1}} r(x_1) \cdots r(x_l) g(z) q_{s_1}(x_0, x_1) \cdots q_{s_l-s_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) \\
&\quad [q_{\theta-s_l}(x_l, z) - q_{\frac{i}{k}t-s_l}(x_l, z)] \, dx_1 \cdots dx_l \, dz \, ds_1 \cdots ds_l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \cdots \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \int_{\mathbb{R}^{l+1}} r(x_1) \cdots r(x_l) g(z) q_{s_1}(x_0, x_1) \cdots q_{s_l-s_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) \\
&\quad \int_{\frac{i}{k}t-s_l}^{\theta-s_l} \frac{\partial q_u(x_l, z)}{\partial u} \, du \, dx_1 \cdots dx_l \, dz \, ds_1 \cdots ds_l.
\end{aligned}$$

Il est alors possible d'utiliser la majoration (10.3) de la dérivée des noyaux par rapport au temps.

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) \, ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} \right| \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \cdots \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \int_{\theta-s_l}^{\frac{i}{k}t-s_l} \int_{\mathbb{R}^{l+1}} \|r\|_{\infty}^l \|g\|_{\infty} q_{s_1}(x_0, x_1) \cdots q_{s_l-s_{l-1}}(x_{l-1}, x_l) \\
&\quad \frac{C}{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi Mu}} \exp \left(- \frac{(z-x_l)^2}{2Mu} \right) \, dx_1 \cdots dx_l \, dz \, du \, ds_1 \cdots ds_l.
\end{aligned}$$

On applique l'identité de Chapman-Kolmogorov pour les intégrations en $dx_1, \dots, dx_l, dz$;

puis on intègre en $ds_1, \dots, ds_{l-1}$.

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} \right| \\ & \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \cdots \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \|r\|_{\infty}^l \|g\|_{\infty} \int_{\theta-s_l}^{\frac{i}{k}t-s_l} \frac{C}{u} du ds_1 \dots ds_l \\ & \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \|r\|_{\infty}^l \left(\frac{i-1}{k}t \right)^{l-1} \|g\|_{\infty} \int_{\theta-s_l}^{\frac{i}{k}t-s_l} \frac{C}{u} du ds_l. \end{aligned}$$

Le troisième terme du membre de droite de (12.16) vérifie par conséquent la majoration :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^k \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} d\theta \right| \\ & \leq C \|g\|_{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l \|r\|_{\infty}^l}{l!} \sum_{i=2}^k \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \int_{\theta-s_l}^{\frac{i}{k}t-s_l} \frac{1}{u} du ds_l d\theta. \end{aligned}$$

Les trois dernières intégrales se majorent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \int_{\theta-s_l}^{\frac{i}{k}t-s_l} \frac{1}{u} du ds_l d\theta & \leq \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \int_0^{\frac{i-1}{k}t} \left(\frac{i}{k}t - \theta \right) \frac{1}{\theta - s_l} ds_l d\theta \\ & \leq \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \left(\frac{i}{k}t - \theta \right) \log \left(\frac{\theta}{\theta - \frac{i-1}{k}t} \right) d\theta \\ & \leq \int_0^1 \frac{t^2}{k^2} (1-x) \log \left(1 + \frac{i-1}{x} \right) dx \\ & \leq \int_0^1 \frac{t^2}{k^2} \log \left(1 + \frac{k}{x} \right) dx \\ & \leq \frac{t^2}{k^2} \log k. \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^k \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_0^{\frac{i-1}{k}t} r(X(s)) ds \right) \left[g(X(\theta)) - g(X(\frac{i}{k}t)) \right] \right\} d\theta \right| \\ & \leq C \|g\|_{\infty} t^2 \exp(t\|r\|_{\infty}) \frac{\log k}{k}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme (12.3). $\square$

Réunissant (12.14) et (12.15) dans (12.13), et négligeant le terme en $\frac{\log k}{k}$, on obtient la conclusion (12.12) du théorème 12.2. $\square$

13

Conclusion

13.1 Développement de l'erreur

Le théorème 10.4 établit un développement (10.35) de l'erreur

$$\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\}$$

en fonction du paramètre δ . Bien que le coefficient apparaissant devant δ dans ce développement soit uniformément borné en k , le reste $\varepsilon_{\delta,k,l}$ n'a pas pu être contrôlé par rapport à k . On a cependant pu démontrer une majoration uniforme en δ et k dans le chapitre 11, mais en imposant l'égalité $\delta = \frac{1}{k}$.

L'avantage du développement par rapport à la simple majoration obtenue dans le cas $k = \frac{1}{\delta}$ se trouve accru en considérant la méthode de Romberg [TALAY, TUBARO, (1990)].

En effet, si l'on simule les processus donnés par le schéma d'Euler de pas δ et $\frac{\delta}{2}$, on peut supprimer les termes d'ordre un en δ de l'erreur :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(X(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} + \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^\delta(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} - 2 \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(\bar{X}^{\frac{\delta}{2}}(\frac{i}{k})) \right)^l \right\} \\ &= 2(C_{k,l} \frac{\delta}{2} + \varepsilon_{\frac{\delta}{2},k,l}) - (C_{k,l} \delta + \varepsilon_{\delta,k,l}) = 2 \varepsilon_{\frac{\delta}{2},k,l} - \varepsilon_{\delta,k,l}. \end{aligned}$$

Il serait alors intéressant de connaître une expression du reste $\varepsilon_{\delta,k,l}$ pour pouvoir le majorer en fonction de k . Il faut noter en outre, qu'au paramètre k fixé, on a seulement démontré que $\varepsilon_{\delta,k,l}$ est un $o(\delta)$ et pas un $O(\delta^2)$.

Les résultats des sections 10 et 11 concernent l'intégrale définie sur l'intervalle $[0,1]$. Si l'on remplace ce dernier par $[0,t]$, les quantités, constantes par rapport aux paramètres k , l et δ , apparaissant dans les majorations des différentes erreurs, deviennent des fonctions du temps. Il est envisageable de préciser dans ces quantités l'influence du temps final t .

13.2 Vitesse de convergence de l'algorithme

Le seul résultat de contrôle uniforme de l'erreur est la majoration établie dans le cas $k = \frac{1}{\delta}$. On n'est pas parvenu à démontrer une majoration de l'erreur meilleure que $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$. Ce majorant n'est certainement pas le plus petit des majorants. Le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et les simulations permettent de s'en convaincre. La question de l'ordre de convergence de l'algorithme reste donc ouverte.

De plus, la technique de Romberg laisse à penser qu'il est peut-être plus efficace de considérer un algorithme mettant en jeu des approximations en δ et $\frac{\delta}{2}$.

13.3 Affaiblissement des hypothèses

Les résultats présentés dans les sections 10, 11 et 12 ont été obtenus grâce aux majorations des dérivées des noyaux de transition (partie 10.1). Ces majorations imposent de choisir un coefficient de diffusion σ uniformément elliptique pour que chaque dérivation en espace puisse être majorée par le produit d'un noyau régulier et du facteur $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

On peut par conséquent s'interroger sur la possibilité d'affaiblir les hypothèses sur les coefficients de diffusion σ de l'E.D.S. En particulier, les quantités définies à partir du processus donné par le schéma d'Euler convergent-elles lorsque les paramètres $\frac{1}{\delta}$ et k tendent vers l'infini, si l'on remplace la condition d'uniforme ellipticité par une condition de type Hörmander?

L'ensemble des résultats énoncés ici se restreint aux processus de Markov homogènes. L'astuce consistant à inclure le temps dans une composante supplémentaire du processus de Markov pour le rendre homogène ne peut être utilisée ici, puisque le coefficient de diffusion du nouveau processus ne serait alors plus elliptique.

Bibliographie

BALLY V., TALAY D., (1995), *The Euler scheme for stochastic differential equations: Error analysis with Malliavin calculus*, [J] Math. Comput. Simul. 38, N. 1-3, p 35-41.

BALLY V., TALAY D., (1996), *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. I: Convergence rate of the distribution function*, [J] Probab. Theory Relat. Fields 104, N. 1, p. 43-60.

GIHMAN I.I., SKOROHOD A.V., (1972), *Stochastic differential equations*, Springer-Verlag.

GOBET E., (1998), *Schémas d'Euler pour diffusion tuée. Application aux options barrière*, Thèse Univ. Paris 7.

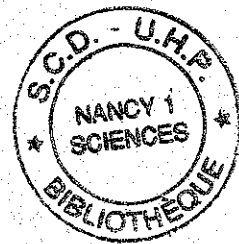
KARATZAS I., SCHREVE S.E., (1994), *Brownian motion and stochastic calculus*, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag.

KUSUOKA S., STROOCK D., (1987), *Applications of the Malliavin calculus. III*, [J] J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 34, p. 391-442.

SÁNCHEZ-CALLE A., (1984), *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields*, [J] Invent. Math. 78, p. 143-160.

SEUMEN P., (1997), *Méthodes numériques probabilistes pour la résolution d'équations du transport et pour l'évaluation d'options exotiques*, Thèse Univ. de Provence.

TALAY D., TUBARO L., (1990), *Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations*, [J] Stochastic Anal. Appl. 8, N. 4, p. 483-509.



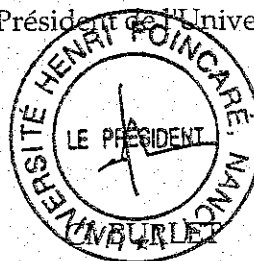
Monsieur GIET Jean-Sébastien

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I
en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 6 décembre 2000 n° 455

Le Président de l'Université



Résumé

La première partie de cette thèse est consacrée à l'élaboration d'une représentation probabiliste de la solution de l'équation de Navier-Stokes considérée dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$, régulier et borné. À la solution qui représente la vitesse d'un fluide visqueux et incompressible dans le domaine Ω est associé le tourbillon. Ce dernier sera interprété comme la densité d'un processus de branchement, les phénomènes aléatoires de branchements correspondant à des créations ou des destructions de masse du tourbillon.

Dans la deuxième partie, nous considérons certaines E.D.S. bidimensionnelles présentant localement des coefficients de dérive et de diffusion de très grande amplitude. Nous proposons un schéma de simulation, adapté à cette particularité. La méthode développée ici conduit à remplacer la simulation de l'E.D.S. initiale, par la simulation de deux E.D.S. unidimensionnelles à coefficients réguliers.

Dans la troisième partie, nous étudions l'erreur commise en remplaçant une diffusion régulière par l'approximation donnée par le schéma d'Euler, dans l'espérance de différentes fonctionnelles de la trajectoire. Une majoration, établie dans le cas de l'intégrale d'une fonction mesurable et bornée de la trajectoire, permet de proposer une série d'applications dont une majoration de l'erreur dans l'approximation de la solution d'un problème de Cauchy par des méthodes probabilistes.

Mots-clés: équation de Navier-Stokes 3d, processus de branchement, représentation probabiliste, équation différentielle stochastique, schéma de simulation, approximation par le schéma d'Euler.

Abstract

The first part of this thesis is devoted to establish a probabilistic representation of the solution of the Navier-Stokes equations in a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^3$, with regular boundary. The vorticity is associated to the solution that represents the speed of a viscous incompressible flow in Ω . The vorticity will be interpreted as the density of a branching process: random branching phenomena correspond to creation-annihilation of vortices.

In the second part, we consider some two dimensional S.D.E. that contains locally coefficients of drift and diffusion with very large range. We suggest a simulation scheme adapted to this special case. The method we develop consists in putting simulation of two one-dimensional S.D.E.'s with regular coefficients in place of the initial S.D.E.

In the third part, we study the error made when a regular diffusion is replaced by its approximation given by the Euler scheme in the expectation of some functionals of the trajectory. A majorization, when it is established in the case of a measurable bounded function of the trajectory, allows us to give some applications as a majorization of the error in the approximation of the solution of the Cauchy problem by probabilistic methods.

Keywords: 3d Navier-Stokes equations, branching process, probabilistic representation, stochastic differential equations, approximation scheme, Euler scheme.