



HAL
open science

Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications à la théorie analytique des nombres

Driss Essouabri

► **To cite this version:**

Driss Essouabri. Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications à la théorie analytique des nombres. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1995. Français. NNT : 1995NAN10354 . tel-01747945

HAL Id: tel-01747945

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01747945v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

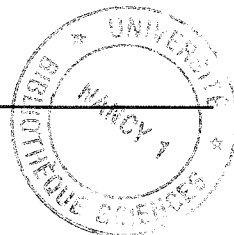
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE



présentée à

l'Université Henri Poincaré - Nancy I

pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Henri Poincaré - Nancy I
Option Mathématiques pures

par

Driss ESSOUABRI

Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applica- tions à la théorie analytique des nombres

Soutenue publiquement le 15 décembre 1995 devant le jury composé de

M. Bernard MALGRANGE	Président du jury - Rapporteur	Membre de l'Académie des Sciences et Professeur à l'Université de Grenoble
M. Daniel BARLET	Directeur de thèse	Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I
M. François LOESER	Rapporteur	Professeur à l'Université de Paris VI
M. Patrick SARGOS	Examineur	Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I
M. Gérald TENENBAUM	Examineur	Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I
M. Jean VAROUCAS	Examineur	Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I

A mes parents...

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à *Daniel BARLET*, qui a dirigé ce travail . J'ai bénéficié de sa grande connaissance de la géométrie complexe qui m'a permis de mener à bien ma thèse . Je le remercie aussi pour sa patience, sa disponibilité et le soutien constant qu'il m'a apporté pendant toute la réalisation de ce travail.

Je suis très honoré que les professeurs *Bernard MALGRANGE* et *François LOESER* aient bien voulu assumer la tâche de rapporteurs . Cela a été pour moi l'occasion d'apprécier leurs compétences ainsi que leur gentillesse.

Mes remerciements vont aussi à *Gérald TENENBAUM*, qui m'a initié à la théorie des nombres, et à *Patrick SARGOS*, dont l'expérience et la disponibilité n'ont jamais fait défaut . Je leur suis très reconnaissant d' avoir assuré le suivi de ma thèse en acceptant les tâches d'examineurs.

J'ai pu bénéficier des qualités pédagogiques de *Yannis VAROUCAS* dès la licence . Il m'a toujours encouragé et soutenu pendant la réalisation de ce travail, je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Mes pensées vont également au professeur *DENEF* qui m'a lancé sur la voie de la géométrie algébrique réelle .

Je tiens enfin à remercier tous les membres du département de Mathématiques de Nancy I, et en particulier, tous mes compagnons de thèse, pour leur accueil chaleureux.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

I) Motivations arithmétiques

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme. On appelle *série de Dirichlet associée à P* la fonction

$$s \mapsto Z(P; s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

quand elle existe.

L'étude des séries de Dirichlet est d'une importance capitale en théorie analytique des nombres. En effet, plusieurs problèmes arithmétiques peuvent se formuler en termes de problèmes concernant les singularités de ces séries ; plus précisément, on a essentiellement besoin de trois renseignements concernant la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$, à savoir :

- (1) Trouver un domaine D de \mathbb{C} où $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe.
- (2) Montrer l'existence du prolongement méromorphe à \mathbb{C} , déterminer un ensemble de candidats pôles et obtenir des majorations des ordres des pôles.
- (3) Obtenir des majorations du prolongement méromorphe sur des bandes verticales

$$\{s \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re} s < b\}$$

A titre d'exemple, prenons un problème classique en théorie analytique des nombres.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau(n) :=$ le nombre de diviseurs positifs de n et on cherche à estimer une valeur moyenne de $\tau(n)$. On considère alors la fonction

$$\phi(t) := \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} \tau(n).$$

Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} t \phi(t) &= \sum_{n \leq t} \tau(n) = \sum_{n \leq t} \sum_{d \mid n} 1 = \sum_{n \leq t} \sum_{md=n} 1 = \sum_{md \leq t} 1 \\ &= \# \{(m, d) \in \mathbb{N}^{*2} \mid P(m, d) \leq t\} \\ &= N_P(t) \end{aligned}$$

où $P(X_1, X_2) = X_1 X_2 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$.

Plus généralement, si $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ est positif sur $[1, +\infty[^n$ et si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} V_n &:= \text{le nombre de façons d'écrire } n \text{ sous la forme } n = P(m_1, \dots, m_n) \text{ où } (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \\ &= \# \left\{ (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m_1, \dots, m_n) = n \right\} \end{aligned}$$

alors il est facile de voir que l'ordre moyen de V_n , défini par

$$\psi(t) := \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} V_n$$

vérifie :

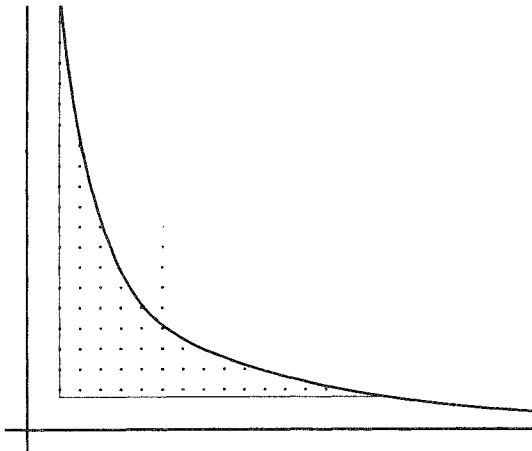
$$\begin{aligned}
 t \psi(t) &= \sum_{n \leq t} V_n \\
 &= \sum_{n \leq t} \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \\ P(m_1, \dots, m_n) = n}} 1 \\
 &= \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \\ P(m_1, \dots, m_n) \leq t}} 1 \\
 &= \# \left\{ (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m_1, \dots, m_n) \leq t \right\} \\
 &= N_p(t).
 \end{aligned}$$

Plus généralement encore, si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme à n variables positif sur $[1, +\infty[^n$, on pose

$$N_p(t) := \# \left\{ (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m_1, \dots, m_n) \leq t \right\}$$

C'est le nombre de points de \mathbb{R}^n à coordonnées entières strictement positives contenus dans l'ensemble semi-algébrique

$$S_p(t) := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 1, \dots, x_n \geq 1 \text{ et } P(\mathbf{x}) \leq t \right\}$$



Par exemple, dans le cas $n = 2$, et pour $P(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $N_p(t)$ représente le nombre de points à coordonnées entières strictement positives situés entre l'hyperbole $x_1 x_2 = t$ et les axes des coordonnées (voir figure). D'où l'intérêt de l'étude de $N_p(t)$. C'est ce qu'on appelle "Problème des diviseurs généralisé" qui sera traité dans le chapitre V de notre travail.

La connexion entre $t \mapsto N_p(t)$ et $s \mapsto Z(P; s)$ se fait par l'intermédiaire de la transformée de Mellin ; en fait, sous certaines hypothèses sur P , que nous précisons dans la suite, $s \mapsto \frac{Z(P; s)}{s}$ est la transformée de Mellin de $t \mapsto N_p(t)$, c'est-à-dire

$$Z(P; s) = s \int_0^{+\infty} N_p(t) t^{-s} \frac{dt}{t}$$

d'où, par inversion de Mellin, si $s \mapsto Z(P; s)$ est holomorphe pour $\text{Re } s > \sigma_0$, on obtient pour $c \gg \sigma_0$,

$$N_p(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(P; s) t^s \frac{ds}{s} + O(1)$$

et le développement asymptotique de $N_p(t)$ s'obtient en déplaçant la droite d'intégration vers la gauche par le théorème des résidus.

Nous avons besoin pour ceci de l'existence du prolongement méromorphe de $s \mapsto Z(P; s)$, de renseignements sur les pôles et de majorations du prolongement méromorphe de $s \mapsto Z(P; s)$ sur les bandes verticales.

Ceci est un exemple important qui illustre notre propos concernant l'intérêt de l'étude des singularités des séries de Dirichlet en théorie des nombres, et il y en a bien d'autres. Il suffit pour ceci de consulter des ouvrages spécialisés dans la matière. ([11], [23], [24]). On pourra aussi consulter les deux articles de Pierrette Cassou-Noguès [4] et [5], ainsi que celui de Ben Lichtin [14] où des exposés assez complets des motivations et des développements de ces problèmes sont donnés.

Enfin, il est intéressant de signaler que l'étude de $N_p(t)$ trouve des applications au-delà de la théorie des nombres, voir par exemple Ben Lichtin [14, sec.5] où on trouvera une application en théorie des opérateurs différentiels.

II) Notations

Quels que soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad |z| = |z_1| + \dots + |z_n|, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n! \quad \text{et} \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$$

Nous noterons aussi, pour $w, s \in \mathbb{C}$, $w^s = e^{s \log w}$ où \log désigne la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Nous utiliserons aussi la notation $\text{Arg } w := \text{Im } \log w \in]-\pi, \pi[$.

Les symboles

$$f(\lambda, \mathbf{x}) \ll g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X, \lambda \in \Lambda)$$

et

$$f(\lambda, \mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x} \in X, \lambda \in \Lambda)$$

ont le même sens et signifient qu'il existe une constante $A \geq 0$, ne dépendant ni de \mathbf{x} ni de λ , mais pouvant *a priori* dépendre de tous les autres paramètres du problème considéré, telle que l'on ait

$$|f(\lambda, \mathbf{x})| \leq A g(\mathbf{x})$$

pour tout $\mathbf{x} \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda$.

Le symbole $f \asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme qui dépend effectivement des n variables X_1, \dots, X_n .

On définit le *support* de P dans \mathbb{N}^n par

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \text{Supp } P} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha \quad (a_\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

et on définit le *polyèdre de Newton à l'infini* de P comme étant l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^n de l'ensemble $\text{Supp } P - \mathbb{R}_+^n$ (où le signe $-$ désigne la soustraction, non la différence d'ensembles). On écrit

$$\mathcal{E}^\infty(P) = \text{conv}(\text{Supp } P - \mathbb{R}_+^n)$$

On pose aussi $\text{Ext}(P)$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{E}^\infty(P)$, qui est inclus dans $\text{Supp } P$,
et

$$P^*(x) := \sum_{\alpha \in \text{Ext } P} x^\alpha$$

Il est évident que

$$P^*(x) \asymp \sum_{\alpha \in \text{Supp } P} x^\alpha \quad \text{sur } [1, +\infty[^n.$$

On note aussi

$$Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\}$$

l'hypersurface des zéros complexes de P .

On note enfin, pour $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + i\tau$, où $\sigma = \text{Re } s$ et $\tau = \text{Im } s$.

III) Présentation et historique du problème

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ qui dépend effectivement des n variables X_1, \dots, X_n et qui vérifie qu'il existe $B \in]0, 1[$ tel que $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$.

On note

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P(m)^{-s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

quand la somme existe. On l'appelle la *série de Dirichlet associée au polynôme P* . Le but de ce problème est de répondre aux trois questions citées dans le paragraphe 1 sous certaines hypothèses vérifiées par le polynôme P , et d'en déduire le comportement à l'infini de

$$N_P(t) = \# \{m \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m) \leq t\}$$

L'étude de la série de Dirichlet $Z(P; s)$ a été introduite par Robert Hjalmar Mellin [17], qui a démontré en 1900 le théorème suivant :

Théorème 0.1 (Mellin, 1900)

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme qui dépend effectivement des n variables X_1, \dots, X_n et dont les coefficients sont de partie réelle strictement positive. Alors, la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$ converge dans un certain demi-plan, la fonction $s \mapsto Z(P; s)$ définie et holomorphe dans ce demi-plan, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, dont les pôles sont situés sur l'axe réel. Si l'on restreint la variable s à une demi-bande du type $B = [\sigma_1, \sigma_2] + i[1, +\infty[\subset \mathbb{C}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$Z(P; s) = O_\varepsilon(\exp((\frac{\pi}{2} + \varepsilon) \text{Im } s))$$

L'idée de base dans le travail de Mellin est l'utilisation de la formule suivante :

$$\frac{\Gamma(s)}{(w_0 + \dots + w_p)^s} = \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{K_1-i\infty}^{K_1+i\infty} \dots \int_{K_p-i\infty}^{K_p+i\infty} \frac{\Gamma(s-z_1 \dots z_p)}{w_0^{s-z_1 \dots z_p}} \times \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_p)}{w_1^{z_1} \dots w_p^{z_p}} dz_1 \dots dz_p$$

valable pour tout $s \in \mathbb{C}$, $w_0, \dots, w_p \in \mathbb{C}$ et $K_1, \dots, K_p \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\operatorname{Re} s > K_1 + \dots + K_p$ et où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler.

Cette formule se démontre par récurrence à partir du cas $p = 2$, qui lui se démontre en déplaçant la droite d'intégration vers la gauche et en appliquant le théorème des résidus. D'où, si

$$P(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^R a_{I_j} z^{I_j}$$

a des coefficients de parties réelles strictement positives (i.e. si, pour tout j , $\operatorname{Re} a_{I_j} > 0$), alors, pour $K_1, \dots, K_R > 0$ et $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} s > K_1 + \dots + K_R$ et pour tout $x \in [1, +\infty[^n$, on a :

$$\frac{\Gamma(s)}{P(\mathbf{x})^s} = \frac{1}{(2i\pi)^R} \int_{K_1-i\infty}^{K_1+i\infty} \dots \int_{K_R-i\infty}^{K_R+i\infty} \frac{\Gamma(s-(y_1 + \dots + y_R))}{a_{I_0}^{s-(y_1 + \dots + y_R)}} \times \frac{\Gamma(y_1) \dots \Gamma(y_R)}{a_{I_1}^{y_1} \dots a_{I_R}^{y_R}} \frac{dy_1 \dots dy_R}{x_1^{u_1} \dots x_n^{u_n}}$$

où, pour $j = 1, \dots, R$, $I_j = (i_{1j}, \dots, i_{nj})$ et $l = 1, \dots, n$, on définit

$$u_l = i_{l,1}(s - (y_1 + \dots + y_R)) + i_{l,2} y_2 + \dots + i_{l,R} y_R$$

d'où, si ζ désigne la fonction zêta de Riemann, on obtient facilement par sommation que, pour $\operatorname{Re} s > K_1 + \dots + K_R$ on a :

$$\Gamma(s) Z(P; s) = \Gamma(s) \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(\mathbf{m})^s} = \frac{1}{(2i\pi)^R} \int_{K_1-i\infty}^{K_1+i\infty} \dots \int_{K_R-i\infty}^{K_R+i\infty} \frac{\Gamma(s-(y_1 + \dots + y_R))}{a_{I_0}^{s-(y_1 + \dots + y_R)}} \times \frac{\Gamma(y_1) \dots \Gamma(y_R)}{a_{I_1}^{y_1} \dots a_{I_R}^{y_R}} \zeta(u_1) \dots \zeta(u_n) dy_1 \dots dy_R$$

où les u_l ont été définis ci-dessus.

En utilisant les propriétés classiques du prolongement méromorphe de la fonction zêta de Riemann, on en déduit le théorème 0.1.

Les articles qui ont suivi celui de Mellin ont été consacrés au cas plus restrictif où le polynôme P vérifie en plus la *condition d'ellipticité* :

$$\text{Pour tout } \mathbf{x} \in [0, +\infty[^n \setminus \{0\}, P_N(\mathbf{x}) \neq 0$$

où P_N est la partie homogène de plus haut degré de P .

Théorème 0.2. (Mahler, [16] 1927)

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme à coefficients de parties réelles strictement positives et elliptique de degré N , donc en particulier dépendant effectivement des n variables X_1, \dots, X_n . Alors, la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$ converge dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \frac{n}{N}\}$ et possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles tous simples et contenus dans une progression arithmétique de la forme $s = \frac{n-k}{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) et $s \notin -\mathbb{N}$.

En outre, dans la demi-bande $B_k = \{s = \sigma + i\tau \mid \frac{n-k}{N} < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \text{ et } \tau \geq 1\}$, on a ;

$$Z(P; s) \ll e^{\rho\tau} \text{ pour un certain } \rho < \frac{\pi}{2}.$$

Si en plus P est à coefficients positifs, alors :

$$Z(P; s) \ll \tau^{kn} \text{ dans } B_k.$$

Les propriétés analytiques de $s \mapsto Z(P; s)$, dans le cas elliptique, ont suscité plusieurs travaux. Par exemple, Pierrette Cassou-Noguès calcule les valeurs aux entiers négatifs et les résidus aux pôles de $Z(P; s)$ [4] et en donne des applications arithmétiques [4] et [5].

82 ans après l'article de Mellin, Pierrette Cassou-Noguès [6] a précisé son résultat dans le cas d'un polynôme à deux variables ($n = 2$) et à coefficients de parties réelles strictement positives. Elle donne une description plus complète de l'ensemble des pôles, ainsi que de leurs ordres et de leurs résidus.

Quelques années plus tard, Patrick Sargos [19] a généralisé ce travail au cas des polynômes P de plusieurs variables ($n \geq 2$) non dégénérés par rapport à leur polyèdre de Newton à l'infini, c'est-à-dire ceux qui vérifient $\text{Re } P(\mathbf{x}) \asymp P^*(\mathbf{x})$ sur $[1, +\infty[^n$. Cette classe de polynômes contient évidemment celle des polynômes à coefficients de parties réelles strictement positives.

Patrick Sargos a démontré que, si $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini, alors $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans un demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s > \sigma_0\}$, possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans une progression arithmétique de la forme $(\sigma_0 - \frac{k}{N})_{k \in \mathbb{N}}$ où $\sigma_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ ne dépendent que du polynôme P , et il a donné dans [19] une description de l'ensemble des candidats-pôles et de leurs ordres, ainsi que de σ_0 et N , en fonction de la géométrie du polyèdre de Newton.

Peu après, Ben Lichtin obtient le même résultat (à l'exception de la description en termes de polyèdre de Newton à l'infini) dans le cadre des polynômes de plusieurs variables dits *hypoelliptiques*, c'est-à-dire vérifiant qu'il existe une constante $B \in]0, 1[$ telle que,

(i) $\text{Re } P(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$

et

(ii) quel que soit le multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\frac{\text{Re } \partial^\alpha P(\mathbf{x})}{\text{Re } P(\mathbf{x})} \longrightarrow 0 \text{ quand } \|\mathbf{x}\| \longrightarrow \infty, \mathbf{x} \in [B, +\infty[^n.$$

Ils ont tous deux obtenu l'application arithmétique concernant $N_p(t)$, chacun dans le cadre de son hypothèse. Aucune de ces deux hypothèses n'implique l'autre et le lien entre les deux est un peu obscur.

Le but de notre travail est d'obtenir les mêmes résultats pour une classe de polynômes plus générale et qui contient comme cas particulier toutes les classes précédentes.

Pour des raisons de simplicité, nous nous placerons dans le cadre des polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Tous les résultats énoncés se généralisent sans difficulté au cas des polynômes $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Donc, si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, notre hypothèse, que nous appellerons $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, est la suivante :

Il existe $B \in]0, 1[$ tel que :

$\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ (i) $P(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$, et

(ii) $d(Z(P), [B, +\infty[^n) > 0$.

où $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\} =$ l'ensemble des zéros complexes de P .

D'après le lemme II.3 que nous établirons dans le chapitre II, on peut remplacer (ii) par

(ii)' il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$ et tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \neq 0$

ou par

(ii)'' pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\frac{\partial^\alpha P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})}$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$

laquelle permet de voir que cette classe contient celle des polynômes hypoelliptiques traitée par Ben Lichtin.

En outre, si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini, alors P vérifie $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. En effet, si l'on écrit

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha \quad (a_\alpha \in \mathbb{R}^*)$$

où $S = \text{supp } P$, on trouve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial^k P}{\partial x_j^k} = \frac{1}{x_j^k} \sum_{\alpha \in S} \alpha_j (\alpha_j - 1) \cdots (\alpha_j - k + 1) a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

d'où, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\beta P(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}^\beta} \sum_{\alpha \in S} \prod_{j=1}^n \alpha_j (\alpha_j - 1) \cdots (\alpha_j - \beta_j + 1) a_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Donc, pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\beta \partial^\beta P(\mathbf{x}) &\ll_{B, \beta, P} \left(\sum_{\alpha \in S} \mathbf{x}^\alpha \right) \sup_{\alpha \in S} |a_\alpha| \\ &\ll_{B, \beta, P} \sum_{\alpha \in S} \mathbf{x}^\alpha \\ &\ll_{B, \beta, P} P^*(\mathbf{x}) \\ &\ll_{B, \beta, P} P(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

donc
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\beta \frac{\partial^\beta P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})}$$
 est bornée sur $[B, +\infty[^n$

et, par suite, $\frac{\partial^\beta P}{P}$ l'est aussi, d'où P vérifie (ii)".

De plus, il est évident que, pour $B \in]0, 1[$,

$$P(\mathbf{x}) \gg P^*(\mathbf{x}) \gg x_1 + \dots + x_n \gg (x_1 \dots x_n)^{1/n} \quad \text{sur } [B, +\infty[^n$$

donc (i) a bien lieu.

En conclusion, un polynôme P non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini vérifie $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$.

Ainsi, la classe des polynômes vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ contient celle des polynômes hypoelliptiques et celle des polynômes non dégénérés par rapport à leurs polyèdres de Newton à l'infini. Mais elle en contient aussi d'autres. Pour s'en convaincre, il suffit de se placer dans le cas $n = 2$ et de considérer

$$P(X_1, X_2) = (X_1 - X_2)^2 X_1 + X_1$$

On fixe $B \in]0, 1[$. On fait varier x_1 et x_2 dans $[B, +\infty[$.

Si $x_2 \leq 2x_1$, alors
$$P(x_1, x_2) \geq x_1 \geq x_1^{1/2} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{1/2} \gg \sqrt{x_1 x_2}$$

Si $x_2 > 2x_1$, alors $x_2 - x_1 \geq \frac{1}{2}x_2$, d'où

$$P(x_1, x_2) \geq (x_1 - x_2)^2 x_1 \geq \frac{1}{4}x_2^2 x_1 \gg \sqrt{x_1 x_2}$$

donc
$$P(x_1, x_2) \gg \sqrt{x_1 x_2} \quad \text{sur } [B, +\infty[^2$$

ce qui implique que P vérifie (i).

De plus, un calcul facile montre que, sur $[B, +\infty[^2$:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2x_1(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^2 + 1 \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2)x_1 \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = 2x_1 + 4(x_1 - x_2) \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = -4x_1 + 2x_2 = -2(x_1 - x_2) - 2x_1 \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = 2x_1 \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3} = 6 \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x_1^2 \partial x_2} = -4 \ll P(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 2 \ll P(x_1, x_2), \text{ et}$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x_2^3} = 0.$$

Donc P vérifie (ii)" et, par suite, vérifie notre hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$.

Mais on a vu que, sur $[B, +\infty[$,

$$\left| \frac{\frac{\partial P}{\partial x_2}(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)} \right| = \frac{2 |x_1 - x_2| x_1}{(x_1 - x_2)^2 x_1 + x_1}$$

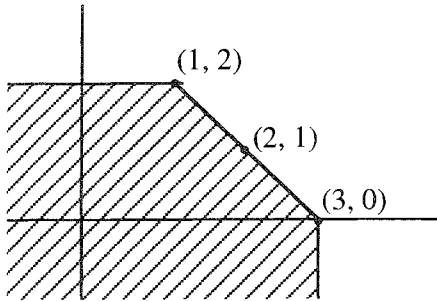
En particulier, pour $x_2 = x_1 + 1$, on obtient

$$\left| \frac{\frac{\partial P}{\partial x_2}(x_1, x_1 + 1)}{P(x_1, x_1 + 1)} \right| = 1$$

ce qui ne tend pas vers 0 quand x_1 tend vers $+\infty$, et, par suite, P n'est pas hypoelliptique.

En outre,

$$P(X_1, X_2) = (X_1 - X_2)^2 X_1 + X_1 = X_1^3 - 2X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_1$$



et, d'après le polyèdre de Newton à l'infini de P (voir figure), on a :

$$P^*(X_1, X_2) = X_1^3 + X_2^2 X_1$$

donc
$$P^*(X_1, X_1) = 2X_1^3$$

et
$$P(X_1, X_1) = X_1$$

et par suite
$$P(X_1, X_1) \not\sim P^*(X_1, X_2)$$

donc P est dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini $\mathcal{E}^\infty(P)$.

En conclusion, $P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 x_1 + x_1$ est un polynôme qui rentre dans le cadre de notre hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ sans être hypoelliptique et en étant dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini.

Il est évident qu'on peut généraliser cette construction aux polynômes à n variables pour $n > 2$. (Dans le cas $n = 1$, un polynôme a le même comportement à l'infini qu'un monôme et il n'y a rien à démontrer).

L'hypothèse optimale sous laquelle on pourrait souhaiter traiter le problème est celle qui consiste à ne retenir que la condition (i), c'est-à-dire :

$$\mathbf{H}_0 : \left[\text{Il existe } B \in]0, 1[\text{ tel que } P(\mathbf{x}) \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty, \mathbf{x} \in [B, +\infty[^n \right]$$

Dans notre travail, nous avons franchi un pas dans cette direction. En effet, nous démontrons (théorème 1) que, sous l'hypothèse optimale \mathbf{H}_0 , la série de Dirichlet $Z(P; s)$ possède un demi-plan de

convergence et d'holomorphie. Cependant, si P vérifie \mathbf{H}_0 mais pas $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, des branches de l'hypersurface $Z(P)$ s'approchent de façon asymptotique de $[B, +\infty[^n$ au voisinage de l'infini. De ce fait, les propriétés analytiques de la série de Dirichlet $Z(P; s)$, contrairement à celles des intégrales, ne dépendent pas que de la nature de la singularité de P à l'infini, et, par suite, la méthode représentation intégrale-et-désingularisation ne suffit plus pour expliquer les propriétés analytiques de $Z(P; s)$. C'est dans ce sens que notre hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ est probablement optimale.

Pour illustrer notre propos, voici un exemple :

On considère, quels que soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq 4$,

$$P_\alpha(x, y) = (x - \alpha y)^2 x^k y^k + x \in \mathbb{R}[x, y]$$

Il est facile de voir que P_α vérifie \mathbf{H}_0 mais non $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, et que, si l'on note $\sigma_0(\alpha, k)$ l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P; s)$ (c'est aussi le premier pôle du prolongement méromorphe, s'il existe) on a : $\sigma_0(\alpha, k) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\sigma_0(\alpha, k) \leq \frac{1}{k-2} \leq \frac{1}{2}$ quel que soit $\alpha > 0$ irrationnel algébrique. Donc, $\sigma_0(\alpha, k)$ dépend des propriétés arithmétiques des coefficients du polynôme. Ce phénomène n'apparaît pas pour les intégrales. En effet, si l'on pose, par exemple,

$$Y(P_\alpha; s) := \int_{[1, +\infty[^n} P_\alpha^{-s}(x, y) dx dy$$

et $\sigma'(\alpha, k) = 1$ l'abscisse de convergence de l'intégrale, ce qui est aussi le plus grand pôle du prolongement méromorphe de $Y(P_\alpha; s)$, on a, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\sigma'(\alpha, k) = \frac{1}{k+1}$, ce qui est indépendant de la nature arithmétique de α , et ne dépend que de la nature de la singularité de P_α à l'infini.

IV) Enoncés des résultats

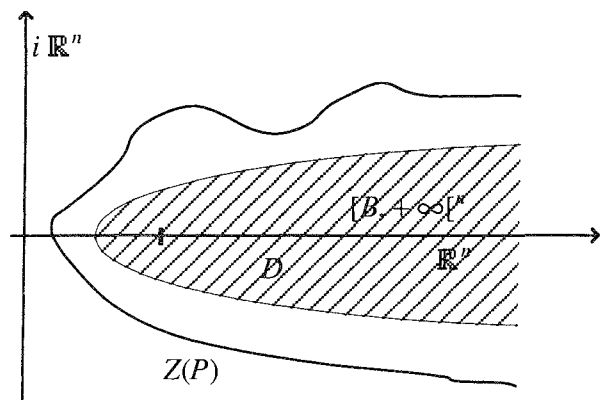
Voir le chapitre I.

V) Plan de travail et heuristiques

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant la condition \mathbf{H}_0 énoncée ci-dessus. En utilisant les techniques de géométrie algébrique réelle, nous démontrons que ceci équivaut au fait qu'il existe $c = c(P) > 0$ et $\alpha = \alpha(P) > 0$ tels que, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$,

$$P(x) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$$

ce qui entraîne que, pour $\sigma_0 = \frac{1}{\alpha} > 0$, on a que la fonction $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$; c'est le théorème 1 que nous établirons sous l'hypothèse \mathbf{H}_0 .



Ensuite, nous nous placerons dans le cadre des polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ qui vérifient $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ et, toujours à l'aide de techniques de géométrie algébrique réelle, nous établirons certains lemmes qui entraîneront l'existence d'un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ contenant $[B, +\infty[^n$ pour un $B \in]0, 1[$ et contenu à l'intérieur de l'hypersurface des zéros complexes de P et à l'intérieur duquel on a en particulier l'inégalité

$$(*) \quad \operatorname{Re} P(z) \geq c |z|^\alpha \quad (z \in D)$$

où c et $\alpha > 0$ sont deux constantes. Le choix du domaine D est crucial, et la difficulté du problème croît si la largeur de D diminue. En termes plus précis, il existe un $r_0 > 0$ tel que

$$]r_0, +\infty[\subset \{\|x\| \mid x \in [B, +\infty[^n\}$$

et, si l'on définit la fonction

$$d:]r_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$d(r) = \inf_{\substack{x \in [B, +\infty[^n \\ \|x\| = r}} d(x, Z(P))$$

Nous démontrerons dans le chapitre VI (corollaire VI.1) qu'il existe un $c > 0$ et $\beta = \beta(P) \in \mathbb{Q}$ tels que $d(r) = c r^\beta (1 + o(1))$ quand $r \rightarrow +\infty$.

En particulier, il existe $r_1 > r_0$ tel que, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ vérifiant $\|x\| \geq r_1$, on a

$$d(x, Z(P)) \geq \frac{c}{2} \|x\|^\beta$$

et, il existe une courbe $r \mapsto x(r)$ ($r \geq r_1$) tracée dans $[B, +\infty[^n$ et il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|x(r)\| \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad d(x(r), Z(P)) \sim \alpha \|x(r)\|^\beta \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

Ce $\beta = \beta(P) \in \mathbb{Q}$ caractérise en quelque sorte la façon dont l'hypersurface des zéros complexes $Z(P)$ s'approche de $[B, +\infty[^n$ à l'infini, et c'est lui qui détermine le choix du domaine D .

Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est quelconque, alors $\beta = \beta(P)$ est *a priori* de signe quelconque, et il peut même être, dans des cas extrêmes, strictement négatif, ce qui voudrait dire que l'hypersurface des zéros complexes $Z(P)$ est asymptotique à $[B, +\infty[^n$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Les techniques qui existaient jusqu'à maintenant ne permettaient de traiter que les classes de polynômes (non dégénérés, hypoelliptiques) pour lesquels $\beta > 0$, c'est-à-dire pour lesquels $d(x, Z(P)) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$, ce qui permettait de prendre des domaines D de largeur infinie à l'infini.

Dans notre travail, nous avons développé des techniques permettant de conclure dans le cas où D n'a pas forcément une largeur infinie à l'infini, ou, ce qui revient au même, dans le cas où $\beta \geq 0$, et il n'est pas difficile de voir que notre hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ est équivalente à l'hypothèse $\beta \geq 0$.

La deuxième étape de notre travail est la suivante : comme nous savons d'après le théorème 1 qu'il existe $\gamma > 0$ tel que la série de Dirichlet $Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\Pi = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \gamma\}$, et comme, d'après (*), on a pour $s \in \Pi$ fixé que

$$z \mapsto P^{-s}(z) = \exp(-s \operatorname{Log} z)$$

existe et est holomorphe dans le domaine D , alors on établit, à l'aide de techniques d'Analyse complexe (formules de représentation intégrale) une formule sommatoire permettant de représenter $Z(P; s)$ comme une intégrale. Plus précisément et pour des raisons que nous expliquerons dans la suite, nous choisirons une famille de surfaces $(\Gamma_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ contenues dans D et nous montrerons que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et pour $\operatorname{Re} s > \gamma$ on a :

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} P^{-s}(m) = \int_{\Gamma_\varepsilon} P^{-s}(z) K_\varepsilon(z) dz_1 \cdots dz_n$$

Le noyau K_ε est oscillant et n'est pas de classe \mathcal{C}^∞ à l'infini. Dans le cas non dégénéré, ainsi que dans le cas hypoelliptique, le noyau analogue qu'on trouvait s'amortissait à l'infini pour devenir essentiellement \mathcal{C}^∞ , ce qui permettait de conclure par les méthodes classiques de géométrie complexe (désingularisation). Dans notre cas, ceci n'est plus possible, et nous remédions à cette difficulté en utilisant des méthodes d'Analyse de Fourier. En effet, en développant $z \mapsto K_\varepsilon(z)$ en série de Fourier, nous parvenons à exprimer, pour $\operatorname{Re} s > \gamma$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, $Z(P; s)$ comme somme *infinie* d'intégrales du type

$$Y_m(P; \varepsilon; s) = G(m, \varepsilon) \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [1, +\infty]^{n_2}} Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) e^{2i\pi \langle m, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{y} d\mathbf{x}$$

où $n_1 + n_2 = n$, \mathbf{m} parcourt \mathbb{Z}^n et $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R} [X_1, \dots, X_n]$ qui tend vers P quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans un sens qui sera défini ultérieurement. Les coefficients $G(\mathbf{m}, \varepsilon)$ ont un bon comportement en \mathbf{m} , ce qui permet de contrôler la convergence de la série d'intégrales : c'est l'objet de la proposition II.1 du chapitre II.

La troisième étape de notre travail consistera à utiliser de façon astucieuse le théorème de désingularisation de Hironaka pour prolonger méromorphiquement les intégrales $s \mapsto Y_m(P; \varepsilon; s)$ en faisant très attention aux problèmes d'uniformité en \mathbf{m} et ε . C'est l'objet du théorème 5 qui sera établi dans le chapitre III.

Le chapitre IV sera une compilation des résultats des chapitres II et III qui seront utilisés pour construire le prolongement méromorphe $\tilde{Z}(P; s)$ de $Z(P; s)$ et permettra de constater que ce prolongement vérifie les résultats énoncés dans les théorèmes II et III. Nous nous limiterons ici à dire que le choix d'une famille $(\Gamma_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de contours à la place d'un seul n'est pas fortuite. En fait, ce n'est qu'en

utilisant l'uniformité en $\varepsilon > 0$ assez petit et en optimisant ε en fonction des autres paramètres que nous obtenons le théorème 3.

Le chapitre V sera consacré à l'application arithmétique que nous avons énoncé plus haut. Dans ce chapitre, nous montrerons d'abord comment les résultats concernant le prolongement méromorphe de $s \mapsto Z(P; s)$ permettent de comprendre le comportement à l'infini de

$$t \mapsto N_p(t) = \#\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(\mathbf{m}) \leq t\}$$

Ensuite, nous nous intéresserons à une conjecture de Leon Ehrenpreis démontrée par Ben Lichtin dans le cadre hypoelliptique, résultat qui nous permettra de comparer les comportements à l'infini de $N_p(t)$ et

$$V_p(t) = \text{volume } \{\mathbf{x} \in [1, +\infty[^n \mid P(\mathbf{x}) \leq t\}$$

et, en ce qui nous concerne, nous montrerons comment ce résultat peut être étendu à la classe des polynômes vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$.

Le chapitre VI sera consacré à l'étude de la répartition des zéros complexes d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Nous établirons essentiellement un théorème et trois corollaires qui permettent de comprendre comment l'hypersurface des zéros complexes $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\}$ s'approche des sous-ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n .

Bien que les résultats de ce dernier chapitre ne soient pas indispensables pour l'étude des séries de Dirichlet, et en plus de leur intérêt propre, ils permettent une nouvelle approche du problème et situent notre hypothèse dans son cadre naturel comme nous l'avons déjà citée plus haut.

CHAPITRE I

Énoncés des résultats

Notons $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point courant de \mathbb{R}^n et $x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ le point courant de \mathbb{C}^n .

Dans toute la suite, $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ sera un polynôme qui vérifie l'hypothèse suivante.

\mathbf{H}_0 : Il existe une constante $B \in]0, 1[$ telle que $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$ et $x \in [B, +\infty[^n$.

Nous noterons $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ l'hypothèse suivante :

$\mathbf{H}_0\mathbf{S}$: $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$ et $P(x + iy) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ et tout $y \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_0)$ où $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ sont fixés.

Le but de ce travail est de démontrer les résultats suivants.

Théorème 1 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme vérifiant \mathbf{H}_0 . Alors, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que la fonction

$$s \mapsto Z(P; s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} (P(m))^{-s}$$

existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$.

Définition : Le meilleur σ_0 possible dans le théorème 1 sera appelé l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P; s)$. On le notera $\sigma_0(P)$.

Remarque : Comme il est évident que la série de Dirichlet $Z(P; s)$ ne converge pas pour $s = 0$, alors $\sigma_0(P) \geq 0$.

Théorème 2 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. Notons $\sigma_0(P)$ l'abscisse de convergence donnée par le théorème 1. Alors la fonction $s \mapsto Z(P; s)$, qui est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0(P)\}$, possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordre au plus n et contenus dans une suite de la forme $\sigma_0 - \frac{k}{M}$ ($k \in \mathbb{N}$) où $M = M(P) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend que de P .

En outre, l'abscisse de convergence $\sigma_0 = \sigma_0(P)$ est effectivement un pôle de cette fonction méromorphe.

Théorème 3 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. On note $\tilde{Z}(P; s)$ le prolongement méromorphe de $Z(P; s)$ qui existe d'après le théorème 2. Alors, il existe $A = A(P) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N > 0$ et tout $\delta > 0$, on a :

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{N, \varepsilon, \delta} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

pour $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0 - N$ et $\tau = \operatorname{Im} s$ vérifiant $|\tau| \geq \delta$.

Le dernier résultat, qui est une application arithmétique, nécessite quelques préliminaires :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. D'après le théorème 2, la fonction $s \mapsto \frac{1}{s} Z(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et ses pôles peuvent être rangés par ordre décroissant en une suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$ par la relation :

$$Q_k(x) = e^{-\sigma_k x} \operatorname{Res}_{s=\sigma_k} \left(\frac{1}{s} Z(P; s) e^{sx} \right)$$

Soit $A = A(P)$ le nombre donné par le théorème 3. Notons $m = m(P)$ le plus grand entier k tel que $\sigma_k > \sigma_0 - \frac{1}{A}$. Alors on a :

Théorème 4 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. Alors, avec les notations ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$N_P(t) := \# \{ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(\mathbf{m}) \leq t \} = \sum_{k=0}^m t^{\sigma_k} Q_k(\ln t) + O_\varepsilon(t^{\sigma_0 - 1/A + \varepsilon}).$$

Remarque 1 :

Les énoncés des théorèmes sont les mêmes que ceux de Ben Lichtin [13] sous l'hypothèse plus restrictive que P est hypoelliptique. Dans le cas où P est en plus non dégénéré par rapport à son polynôme de Newton à l'infini, Patrick Sargos [18, 19] donne les mêmes énoncés avec les précisions suivantes :

(1) Si $P(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ et $S = \{ \alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0 \}$ est son support, on note

$$\mathcal{E}_\infty(P) = \operatorname{conv}(S - \mathbb{R}_+^n)$$

son polyèdre de Newton à l'infini (voir introduction générale) et Δ^+ la demi-droite $\mathbb{R}(1, \dots, 1)$. Soit (t_0, \dots, t_0) le point d'intersection de Δ^+ avec le bord de $\mathcal{E}_\infty(P)$. Alors l'abscisse de convergence $\sigma_0(P)$ est égale à $1/t_0$, c'est-à-dire à l'inverse de l'éloignement à l'infini du polyèdre de Newton.

(2) Dans le théorème 4, on peut prendre A égal au degré total de P .

Remarque 2 :

Le théorème 1 tel qu'il est énoncé est optimal dans le sens que nous l'avons établi sous l'hypothèse \mathbf{H}_0 seulement, laquelle est l'hypothèse minimale que l'on puisse imposer au polynôme P pour que la série de Dirichlet $Z(P; s)$ ait un sens.

Remarque 3 :

Dans le chapitre III, nous énoncerons et établirons un résultat intermédiaire (théorème 5) qui présente un intérêt propre. Ce résultat concerne le prolongement méromorphe et les majorations dans les bandes verticales d'intégrales oscillantes dépendant de paramètres.

Il va découler de ce théorème 5 comme cas particulier que, si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme qui vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, et si l'on pose

$$Y(P; s) := \int_{[1, +\infty[^n} P^{-s}(x) dx$$

alors on a des énoncés analogues aux théorèmes 1, 2 et 3, à savoir que :

- 1) Il existe un demi-plan de convergence et d'holomorphie de $s \mapsto Y(P; s)$.
- 2) La fonction $s \mapsto Y(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordre au plus n et contenus dans une suite de la forme $\sigma'_0 - \frac{k}{m}$ ($k \in \mathbb{N}$) où $\sigma'_0 = \sigma'_0(P)$ est l'abscisse de convergence $s \mapsto Y(P; s)$ et où $m = m(P) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend que de P .
- 3) Il existe une constante $B = B(P) > 0$ telle que le prolongement méromorphe $\tilde{Y}(P; s)$ de $Y(P; s)$ vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \forall N > 0, \forall \delta > 0$, on a $\tilde{Y}(P; s) \ll_{N, \delta, \varepsilon} 1 + |\tau|^{B(\sigma'_0 - \sigma) + \varepsilon}$ et ceci uniformément pour $\sigma = \text{Re } s \geq \sigma'_0 - N$ et $\tau = \text{Im } s$ vérifiant $|\tau| > \delta$.

Ceci étant, si l'on classe les pôles de $\frac{Y(P; s)}{s}$ en une suite décroissante $(\sigma'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q'_k(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$ par la relation

$$Q'_k(x) = e^{-\sigma'_k x} \text{Res}_{s=\sigma'_k} \left(\frac{1}{s} Y(P; s) e^{sx} \right)$$

et, si l'on pose $m' = m'(P) =$ le plus grand entier tel que $\sigma'_k > \sigma'_0 - \frac{1}{B}$, alors on a l'analogie suivant du théorème 4 : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \int_{\{P(x) \leq t\} \cap [1, +\infty[^n} dx = \text{Volume } \{x \in]1, +\infty[^n \mid P(x) \leq t\} \\ &= \sum_{k=0}^{m'} t^{\sigma'_k} Q'_k(\ln t) + O_\varepsilon \left(t^{\sigma'_0 - \frac{1}{B} + \varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

Corollaire 1 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ qui vérifie $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. Alors, il existe $\rho_1, \lambda_1, \theta > 0$ et $A_1(X), B_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ non identiquement nuls tels que :

$$N_p(t) = t^{\rho_1} A_1(\ln t) (1 + O(t^{-\theta})) \text{ et}$$

$$V_p(t) = t^{\lambda_1} B_1(\ln t) (1 + O(t^{-\theta})).$$

Ceci étant, il est naturel de vouloir comparer $N_p(t)$ et $V_p(t)$, car $V_p(t)$ n'est que la forme continue de $N_p(t)$. Ceci a conduit L. Ehrenpreis à conjecturer le résultat suivant.

Théorème (conjecture de L. Ehrenpreis démontrée par B. Lichtin) :

Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme hypoelliptique sur $]1, +\infty[^n$, alors $\rho_1 = \lambda_1$ et $A_1(u) = B_1(u)$.

En fait, la conjecture de Ehrenpreis est un peu plus générale que la version que nous avons donné. Pour plus de renseignements, voir "Volumes and lattice points proof of a conjecture of L. Ehrenpreis" de Ben Lichtin, [14, p. 215]. Dans le cadre de notre hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, nous montrerons par des exemples

que la conclusion de ce résultat, tel qu'il est formulé est fausse. Cependant, on peut l'étendre sous la forme suivante :

Corollaire 2 :

Soit $P \in \mathbb{R} [X_1, \dots, X_n]$ un polynôme qui vérifie $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. Alors $\rho_1 = \lambda_1 = \lambda$, c'est-à-dire il existe $\lambda > 0, \theta > 0$ et $A_1(X), B_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ non identiquement nuls tels que :

$$N_p(t) = t^\lambda A_1(\ln t) (1 + O(t^{-\theta})) \text{ et}$$

$$V_p(t) = t^\lambda B_1(\ln t) (1 + O(t^{-\theta})).$$

Ce corollaire montre qu'une partie de la conjecture d'Ehrenpreis peut se généraliser à la classe des polynômes vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. Par contre, nous monterons par un exemple que la condition $A_1(u) = B_1(u)$ n'est plus valable en général pour cette classe de polynômes.

Les derniers résultats concernent la répartition des zéros des polynômes à plusieurs variables. Il s'agit d'un théorème (théorème 6) et de trois corollaires. Les énoncés et les démonstrations de ces résultats sont donnés dans le chapitre VI.

CHAPITRE II

Lemmes de géométrie algébrique réelle et applications

I) Introduction

Dans toute la suite, on suppose que $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme qui vérifie qu'il existe $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

- (i) $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$
- (ii) $P(x + iy) \neq 0$ pour $x \in [B, +\infty[^n$ et $\|y\| < \varepsilon_0$.

Nous allons établir deux lemmes qui nous permettront de quantifier les conditions limites (i) et (ii) en termes de croissances monomiales dans des domaines de \mathbb{C}^n contenant strictement $[B, +\infty[^n$. Ensuite, comme application, nous obtiendrons l'existence d'un demi-plan de convergence de $Z(P; s)$ pour P vérifiant (i) et une formule sommatoire qui relie $Z(P; s)$ à des intégrales si P vérifie (i) et (ii). Ce passage est crucial car c'est lui qui ramène l'objet arithmétique, donc discret, $Z(P; s)$ à des intégrales, dont l'étude rentre dans le domaine de la géométrie complexe.

Le dernier paragraphe de ce chapitre sera consacré à la démonstration d'un troisième lemme qui donne une version équivalente des conditions (i) et (ii). L'avantage de cette nouvelle version est quelle ne comporte que des vérifications sur \mathbb{R}^n .

II) Deux lemmes de Géométrie algébrique

1) Énoncés des lemmes

Le but de ce paragraphe est d'établir les deux lemmes suivants.

Lemme II.1

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant :

- (i) il existe $B \in]0, 1[$ tel que $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$ et $x \in [B, +\infty[^n$ et
- (ii) $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$.

Alors, il existe un réel $c > 0$, et un rationnel $\alpha > 0$ tels que :

pour tout $x \in [B, +\infty[^n$, $P(x) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$.

Lemme II.2

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant :

- (i) il existe $B \in]0, 1[$ tel que $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$ et $x \in [B, +\infty[^n$ et
- (ii) $P(x + iy) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| < \varepsilon_0$.

Alors : il existe $B' \in]0, 1[$, $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$, α, c et $K > 0$ tels que :

$$\frac{P(x + iy)}{P(x)} = 1 + O(\|y\|) \text{ uniformément en } x \in [B', +\infty[^n \text{ et } y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_1).$$

En particulier, on a

- (a) $\operatorname{Re} P(x+iy) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$ pour tout $x \in [B', +\infty[$ et tout $y \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$
- (b) $|\operatorname{Arg} P(x+iy)| \leq K\|y\|$ si $x \in [B', +\infty[$ et si $y \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$, où Arg désigne la détermination de l'argument comprise entre $-\pi$ et π .

Les constantes $B', \varepsilon_1, \alpha$ et K ne dépendent que de P, B, ε_0 et n .

2) Préliminaires

Avant la démonstration des lemmes, nous allons énoncer quelques résultats que nous utiliserons. Mais avant donnons quelques définitions.

Définition II.1 :

Les *ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n* forment la plus petite collection de parties de \mathbb{R}^n contenant les parties du genre $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\}$ ($P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$) et stable par intersection finie, union finie et passage au complémentaire. De façon équivalente, si l'on appelle *condition de signe sur le polynôme P* une des conditions $P(x) > 0, P(x) = 0$ ou $P(x) < 0$, un ensemble semi-algébrique est donné par une condition booléenne (obtenue par disjonction, conjonction et négation) de conditions de signe sur un nombre fini de polynômes.

Pour plus de renseignements sur les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n et leurs propriétés on pourra consulter l'article de Michel Coste "Ensembles semi-algébriques" [7] dans lequel on trouve la démonstration du résultat suivant :

Théorème P.1 "Principe de Tarski-Seidenberg" (version géométrique) :

Soit $\pi: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection canonique. Alors, pour tout sous-ensemble semi-algébrique A de \mathbb{R}^{n+p} , $\pi(A)$ est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

En fait, dans l'article de Michel Coste ce résultat est énoncé pour $p = 1$, mais une récurrence évidente permet de voir qu'il est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition II.2

Une fonction $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-algébrique si son graphe est un ensemble semi-algébrique dans \mathbb{R}^{n+1} .

Définition II.3.

Une fonction $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède un développement en série de Puiseux à l'infini (sous-entendu : $+\infty$) s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ et des $a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$T(x) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n x^{-\frac{n}{k}} \quad \text{pour } x \geq x_0.$$

Le résultat suivant que nous allons utiliser concerne les courbes algébriques.

Théorème P.2 :

Soit $P(x, y) \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$. On écrit $P(x, y) = \sum_{j=0}^m c_j(x) y^j$ où $c_m(x) \neq 0$.

Alors il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geq x_0$, $c_m(x) \neq 0$, et on peut écrire, pour $x \geq x_0$,

$$P(x, y) = c_m(x) \prod_{j=1}^m (y - T_j(x))$$

où, pour tout j , T_j est une fonction continue semi-algébrique et possède un développement en série de Puiseux à l'infini.

Pour la démonstration de ce théorème on peut consulter par exemple "Algebraic Curves" de R. J. Walker, [27] ou "Modern Algebra" de B. L. Van der Wærdén [26].

3) Démonstration du lemme II. 1

Dans la démonstration de ce lemme, nous suivrons de près les idées de Hörmander [9] concernant le cas hypoelliptique et que nous adapterons à notre cas.

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. On suppose qu'il existe $B \in]0, 1[$ tel que $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$ et $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$. On pose, pour tout $r > 0$,

$$\mu_p(r) := \min \{P(x) \mid x \in [B, +\infty[^n \text{ et } r = x_1 \cdots x_n\}.$$

Alors, la condition imposée à P implique de façon évidente que $\mu_p(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$. On pose aussi

$$A = \{(x, r, \mu) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid P(x) - \mu = 0, r - x_1 \cdots x_n = 0, r > 0 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j - B \geq 0\}$$

Alors, d'après la définition II.1, A est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+2} . Soit

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{n+2} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 && \text{la projection canonique.} \\ (x, r, \mu) &\longmapsto (r, \mu) \end{aligned}$$

Alors, d'après le principe de Tarski-Seidenberg (théorème P.1), $B = \pi(A)$ est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^2 . Donc, d'après la définition II.1, B s'écrit

$$B = \bigcup_{1 \leq i \leq p} B_i$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe des polynômes $(f_{ij})_{1 \leq j \leq p_i}$ et $(g_{ij})_{1 \leq j \leq q_i}$ de $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ tels que :

$$B_i = \{(r, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall j = 1, \dots, p_i, f_{ij}(r, \mu) > 0 \text{ et } \forall j = 1, \dots, q_i, g_{ij}(r, \mu) = 0\}$$

On pose $I = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \exists r > 0 \text{ avec } (r, \mu_p(r)) \in B_i\}$. On a alors que, pour tout $i \in I$, il existe $j_i \in \{1, \dots, q_i\}$ tel que $g_{ij_i} \not\equiv 0$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $i_0 \in I$ tel que, pour tout $j \in \{1, \dots, q_{i_0}\}$, $g_{i_0j} \equiv 0$. Alors, B_{i_0} serait égal à $\{(r, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall j = 1, \dots, p_{i_0}, f_{i_0j}(r, \mu) > 0\}$, donc serait un ouvert de \mathbb{R}^2 . Mais comme $i_0 \in I$, il existe $r_0 > 0$ tel que $(r_0, \mu_p(r_0)) \in B_{i_0}$. Et, comme B_{i_0} est ouvert, il existe $\mu_1 < \mu_p(r_0)$ tel que $(r_0, \mu_1) \in B_{i_0} \subset \pi(A)$, donc il existe $x^0 \in [B, +\infty[^n$ tel que $r_0 = x_1^0 \cdots x_n^0$ et $\mu_1 = P(x^0)$, donc

$$\mu_1 \geq \min \{P(x) \mid x \in [B, +\infty[^n \text{ et } r_0 = x_1 \cdots x_n\}$$

ce qui implique $\mu_1 > \mu_{r_0}(P)$: absurde.

Donc : pour tout $i \in I$, il existe $j_i \in \{1, \dots, q_i\}$ tel que $g_{ij_i} \not\equiv 0$.

On pose :
$$h(r, \mu) = \prod_{i \in I} g_{ij_i}(r, \mu) \in \mathbb{R} [X_1, X_2].$$

Alors on a évidemment, pour tout $r > 0$, $h(r, \mu_p(r)) = 0$.

Soit $F \in \mathbb{R} [X_1, X_2]$ le polynôme qui a les mêmes facteurs irréductibles que h , mais sans répétition. On a $F \neq 0$, et, pour tout $r > 0$, $F(r, \mu_p(r)) = 0$. De plus, pour r assez grand, $m = \deg_{\mu} F$ est indépendant de r . On écrit alors

$$F(r, \mu) = \sum_{j=0}^m c_j(r) \mu^j$$

avec $c_m(r) \neq 0$ pour $r > r_0$. Le théorème P.2 implique alors que, pour tout $r > r_0$,

$$F(r, \mu) = c_m(r) \prod_{j=1}^m (\mu - T_j(r)),$$

où, pour tout $r > r_0$, $c_m(r) \neq 0$, et pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $r \mapsto T_j(r)$ est continue et possède un développement en série de Puiseux à l'infini. Et comme F est sans facteur carré, les T_j sont deux à deux distinctes. D'où, comme pour tout $r > r_0$, $F(r, \mu_p(r)) = 0$, on a que, pour tout $r > r_0$, il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mu_p(r) = T_j(r)$. D'où, par continuité, il existe $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que, pour tout $r > r_0$, $\mu_p(r) = T_{j_0}(r)$, donc $\mu_p(r)$ possède un développement en série de Puiseux à l'infini. Il en résulte qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu_p(r) \sim c_1 r^\alpha$ quand $r \rightarrow +\infty$. Mais $\mu_p(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$, donc $c_1 > 0$ et $\alpha > 0$. D'où, il existe $c_2 > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$ avec $x_1 \cdots x_n > r_0$, on a : $P(\mathbf{x}) \geq c_2 (x_1 \cdots x_n)^\alpha$.

On pose :
$$c_3 := \min \left\{ \frac{P(\mathbf{x})}{(x_1 \cdots x_n)^\alpha} \mid \mathbf{x} \in [B, +\infty[^n \text{ et } x_1 \cdots x_n \leq r_0 \right\}$$

On a $c_3 > 0$, et, si l'on pose $c := \min(c_2, c_3)$, alors, pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$,

$$P(\mathbf{x}) \geq c (x_1 \cdots x_n)^\alpha$$

avec $c > 0$ et $\alpha > 0$, α rationnel.

Ceci termine la démonstration du lemme II.1. C.Q.F.D.

4) Démonstration du lemme II.2.

Soit $P \in \mathbb{R} [X_1, \dots, X_n]$. On suppose qu'il existe $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

- (i) $P(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$ et $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$,
- (ii) $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$ et pour tout \mathbf{y} tel que $\|\mathbf{y}\| < \varepsilon_0$.

Soient B' et ε_1 tels que $B < B' < 1$ et $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. On pose $\mu := \min(B' - B, \varepsilon_0 - \varepsilon_1) > 0$.

Soient $\xi = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ avec $\mathbf{x} \in [B', +\infty[^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_1)$ et $\mathbf{z} = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}^n$ avec $P(\mathbf{z}) = 0$.

Alors, deux cas sont possibles :

Premier cas : $\sigma \notin [B, +\infty[^n$. Alors, il existe $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma_{j_0} < B$. On a alors

$$\|z - \xi\| = \|\sigma - x + i(\tau - y)\| \geq \|\sigma - x\| \geq |\sigma_{j_0} - x_{j_0}| \geq B' - B \geq \mu$$

car $\sigma_{j_0} < B < B' \leq x_{j_0}$. D'où $\|z - \xi\| \geq \mu$.

Second cas : $\sigma \in [B, +\infty[^n$. Alors, comme $z = \sigma + i\tau$ vérifie $P(z) = 0$, l'hypothèse (ii) implique $\|\tau\| \geq \varepsilon_0$, d'où :

$$\|z - \xi\| = \|\sigma - x + i(\tau - y)\| \geq \|\tau - y\| \geq \|\tau\| - \|y\| \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \geq \mu.$$

Donc, on a établi le fait suivant :

(*) Pour tout $\xi = x + iy \in [B', +\infty[^n + i\mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1) \subset \mathbb{C}^n$ et tout $z \in \mathbb{C}^n$ avec $P(z) = 0$, on a $\|z - \xi\| \geq \mu$.

Maintenant, soit $\xi = x + iy \in [B', +\infty[^n + i\mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$. On pose

$$\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } \tilde{y} := (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

On considère le polynôme

$$G(z_n) := P(x_1 + iy_1, \dots, x_{n-1} + iy_{n-1}, z_n) = P(\tilde{x} + i\tilde{y}, z_n)$$

\tilde{x} et \tilde{y} étant fixés. Le polynôme G se factorise de la façon suivante :

$$G(z_n) = H(\tilde{x} + i\tilde{y}) \prod_{j=1}^m (z_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y}))$$

On a alors :

$$\frac{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n + iy_n)}{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n)} = \prod_{j=1}^m \frac{x_n + iy_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})}{x_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})} = \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{iy_n}{x_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})} \right)$$

Mais, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$P(\tilde{x} + i\tilde{y}, t_j(\tilde{x}, \tilde{y})) = 0, \text{ et } (\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n) \in [B', +\infty[^n + i\mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1).$$

Donc, d'après (*), on a, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$|x_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})| = \|(\tilde{x} + i\tilde{y}, t_j(\tilde{x}, \tilde{y})) - (\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n)\| \geq \mu.$$

De plus, on sait que $|iy_n| = |y_n| \leq \|y\|$. D'où :

$$\frac{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n + iy_n)}{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n)} = 1 + O_{\mu, n}(\|y\|)$$

et une récurrence descendante permet de voir facilement que

$$\frac{P(x + iy)}{P(x)} = 1 + O_{\mu, n}(\|y\|)$$

et ceci démontre la première partie de notre lemme. En outre, il implique :

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{Re} P(x+iy)}{P(x)} = 1 + O_{\mu,n}(\|y\|) \\ \frac{\operatorname{Im} P(x+iy)}{P(x)} = O_{\mu,n}(\|y\|) \end{cases}$$

d'où il résulte que, toujours pour $x + iy \in [B', +\infty[+ i\mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$,

$$\begin{cases} \operatorname{Re} P(x+iy) = P(x) (1 + O_{\mu,n}(\|y\|)) \\ |\operatorname{Arg} P(x+iy)| = O_{\mu,n}(\|y\|) \end{cases}$$

Ceci ajouté à l'inégalité établie dans le lemme II.1 permet de retrouver de façon évidente les points (a) et (b) du lemme II.2 et par suite termine la démonstration de ce lemme. C.Q.F.D.

III) Applications : démonstration du théorème 1 et formule sommatoire

1) Démonstration du théorème 1.

Commençons par rappeler l'énoncé.

Théorème 1 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. On suppose qu'il existe $B \in]0, 1[$ tel que :

- (i) $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty, x \in [B, +\infty[^n$, et
- (ii) $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$.

Alors il existe $\sigma_0 > 0$ tel que la fonction

$$s \mapsto Z(P; s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s}$$

existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$.

Démonstration du théorème 1 :

D'après le lemme II.1, il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$, telles que, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$, $P(x) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$.

On pose $\sigma_0 := \frac{1}{\alpha}$. Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^{*n}$,

$$|P(m)^{-s}| = P(m)^{-\sigma} \leq c^{-\sigma} (m_1 \cdots m_n)^{-\frac{\sigma}{\alpha}}$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, la série

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s}$$

converge uniformément en s dans le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re} s \geq \sigma_0 + \varepsilon$ et, comme $s \mapsto P(m)^{-s}$ est une fonction entière de s , $Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$. C.Q.F.D.

2) **Formule sommatoire.**

D'après le théorème 1, la fonction $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$. Le but de cette partie est d'établir une formule sommatoire qui permet de représenter $Z(P; s)$ par des intégrales, ce qui nous permettra dans la suite d'établir l'existence du prolongement méromorphe de $Z(P; s)$ via l'étude des prolongements méromorphes de ces intégrales.

Dans toute la suite, nous désignerons par $\operatorname{Log} z$ ($z \in \mathbb{C}$) la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Si $H \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on définit le polynôme

$$H_\tau(z_1, \dots, z_n) = H(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)}).$$

On utilisera la même notation même si H n'est pas un polynôme, mais n'importe quelle fonction de n variables réelles ou complexes.

Dans toute la suite, on suppose que $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme qui vérifie qu'il existe $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

- (i) $P(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$
- (ii) $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \neq 0$ pour $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$ et $\|\mathbf{y}\| < \varepsilon_0$.

Nous avons vu alors d'après le lemme II.2 que ceci implique qu'il existe des constantes $B' \in]0, 1[$, $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_0]$, $\alpha > 0$, $c > 0$ et $K > 0$ telles que :

- (a) pour tout $\mathbf{x} \in [B', +\infty[^n$ et tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$, $\operatorname{Re} P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$ et
- (b) pour tout $\mathbf{x} \in [B', +\infty[^n$ et tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$, $|\operatorname{Arg} P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})| \leq K\|\mathbf{y}\|$,

où B' , ε_1 , α , c et K ne dépendent que de P , B , ε_0 et n .

La condition (a) implique en particulier que pour tout $\mathbf{x} \in [B', +\infty[^n$ et pour tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$, on a $\operatorname{Re} P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) > 0$, et donc

$$s \mapsto (P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}))^{-s} := \exp(-s \operatorname{Log} P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}))$$

est une fonction entière.

On pose $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}$. Soit aussi $B'' \in]B', 1[$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on pose

$$L_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq B'' \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\} = [B'', +\infty[+ i] - \varepsilon, \varepsilon[.$$

Alors il est facile de voir que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$, on a :

$$(L_\varepsilon)^n \subset [B'', +\infty[^n + i\mathbf{B}(\mathbf{0}, \sqrt{n}\varepsilon) \subset [B', +\infty[^n + i\mathbf{B}(\mathbf{0}, \varepsilon_1)$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$. D'après ce qui précède, pour tout $z = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in (L_\varepsilon)^n$, la fonction $s \mapsto P(\mathbf{z})^{-s}$ est entière. Posons

$$f_s(z) := \frac{P(z)^{-s}}{\prod_{k=1}^n (e(z_k) - 1)}$$

où $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $e(z) = e^{2i\pi z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. Alors, pour z_2, \dots, z_n fixés dans $L_\varepsilon \setminus \mathbb{N}^*$,

$$f_s^1 : z_1 \mapsto f_s(z_1, \dots, z_n)$$

est une fonction méromorphe au voisinage de L_ε avec comme pôles les entiers strictement positifs, et ces pôles sont tous simples. En plus, pour tout $m_1 \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Res}_{z_1=m_1} f_s^1 = \frac{(P(m_1, z_2, \dots, z_n))^{-s}}{2i\pi \prod_{k=2}^n (e(z_k) - 1)}$$

De plus, on sait que, pour tout $z \in [B', +\infty[^n + i\mathbf{B}(0, \varepsilon_1)$ (qui est un voisinage de $(L_\varepsilon)^n$) on a, d'après (a) et (b) :

$$\begin{aligned} |P(z)^{-s}| &= |e^{-s \text{Log} P(z)}| = |e^{-(\sigma+i\tau)(\text{Log} P(z) + i \text{Arg} P(z))}| = e^{-\sigma \text{Re} P(z) + \tau \text{Im} P(z)} \\ &\leq |P(z)|^{-\sigma} e^{|\tau| |\text{Arg} P(z)|} \leq c^{-\sigma} (x_1 \dots x_n)^{-\sigma\alpha} e^{|\tau| K\varepsilon \sqrt{n}} \end{aligned}$$

si $\sigma = \text{Re } s > 0$. Et ceci permet de voir, *via* le théorème des résidus que, si $\sigma > \sigma_0 = \frac{1}{\alpha} > 0$, on a, pour z_2, \dots, z_n fixés dans $L_\varepsilon \setminus \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} P^{-s}(m_1, z_2, \dots, z_n) = \int_{\partial L_\varepsilon} \frac{P^{-s}(z_1, \dots, z_n)}{\prod_{k=1}^n (e(z_k) - 1)} dz_1$$

et en répétant ce procédé n fois on obtient :

pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re } s > \sigma_0 > 0$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$,

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m) = \int_{(\partial L_\varepsilon)^n} \frac{P^{-s}(z_1, \dots, z_n)}{\prod_{k=1}^n (e(z_k) - 1)} dz_1 \dots dz_n$$

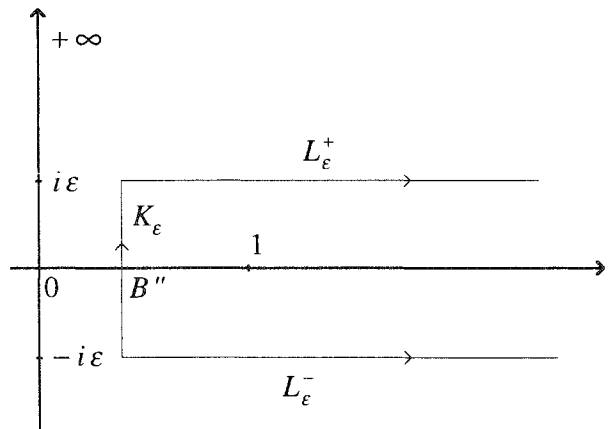
où ∂L_ε est la frontière de L_ε orientée dans le sens direct. On peut écrire : $\partial L_\varepsilon = -L_\varepsilon^+ - K_\varepsilon + L_\varepsilon^-$
où :

$$L_\varepsilon^+ = \{x+i\varepsilon \mid x \in [B'', +\infty[\}$$

$$L_\varepsilon^- = \{x-i\varepsilon \mid x \in [B'', +\infty[\}$$

$$K_\varepsilon = \{B'' + iy\varepsilon \mid y \in [-1, 1] \}$$

ces trois chemins étant orientés comme dans la figure ci-contre.



Soit \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose

$$\sigma \mathbf{x} := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Un domaine D de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{C}^n sera dit *symétrique* si, pour tout $\mathbf{x} \in D$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma \mathbf{x} \in D$. Si f est une fonction de n variables définie sur un domaine symétrique, notons, pour $\mathbf{x} \in D$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$f_\sigma(\mathbf{x}) := f(\sigma \mathbf{x}).$$

Maintenant, soient $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + n_3 = n$. On pose :

$$Q^{n_1, n_2, n_3, \varepsilon, B''}(x_1, \dots, x_n) :=$$

$$P(B'' + i\varepsilon x_1, \dots, B'' + i\varepsilon x_{n_1}, x_{n_1+1} + i\varepsilon, \dots, x_{n_1+n_2} + i\varepsilon, x_{n_1+n_2+1} - i\varepsilon, \dots, x_n - i\varepsilon)$$

$$\Phi^{n_1, n_2, n_3, \varepsilon, B''}(x_1, \dots, x_n) :=$$

$$(-i\varepsilon)^{n_1} (-1)^{n_2} \prod_{j=1}^{n_1} \frac{1}{e^{(B'' + i\varepsilon x_j)} - 1} \times \prod_{j=1}^{n_2} \frac{1}{e^{(x_{n_1+j} + i\varepsilon)} - 1} \times \prod_{j=1}^{n_3} \frac{1}{e^{(x_{n_1+n_2+j} - i\varepsilon)} - 1}$$

Alors, avec ces notations, on a : pour $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$,

$$Z(P; s) = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [B'', +\infty[^{n-n_1}} [Q_\tau^{n_1, n_2, n_3, \varepsilon, B''}(\mathbf{x})]^{-s} \Phi^{n_1, n_2, n_3, \varepsilon, B''}(\mathbf{x}) dx$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Il est évident qu'il suffit d'expliciter le terme correspondant à $\tau = \operatorname{Id}$. Ce terme est

$$\begin{aligned} \Phi_{\operatorname{Id}}^{n_1, n_2, n_3, \varepsilon, B''}(x_1, \dots, x_n) &= \Phi^{n_1, n_2, n_3, \varepsilon, B''}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{(-i\varepsilon)^{n_1} (-1)^{n_2}}{\prod_{j=1}^{n_1} (e^{2i\pi B''} e^{-2\pi \varepsilon x_j} - 1)} \times \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_2} (e^{-2\pi \varepsilon} e^{2i\pi x_{n_1+j}} - 1)} \times \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_3} (e^{2\pi \varepsilon} e^{2i\pi x_{n_1+n_2+j}} - 1)} \\ &= \frac{(-i\varepsilon)^{n_1}}{\prod_{j=1}^{n_1} (e^{2i\pi B''} e^{-2\pi \varepsilon x_j} - 1)} \times \left(\sum_{m \in \mathbb{N}^{n_2}} e^{-2\pi |m| \varepsilon} e^{2i\pi \sum_{j=1}^{n_2} m_j x_{n_1+j}} \right) \\ &\times \left(\sum_{h \in \mathbb{N}^{n_3}} e^{-2\pi \varepsilon |h|} e^{-2i\pi \sum_{j=1}^{n_3} h_j x_{n_1+n_2+j}} \right) \\ &= \frac{(-i\varepsilon)^{n_1}}{\prod_{j=1}^{n_1} (e^{2i\pi B''} e^{-2\pi \varepsilon x_j} - 1)} \times \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{n_2} \\ h \in \mathbb{N}^{n_3}}} e^{-2\pi \varepsilon (|h| + |m|)} e^{2i\pi \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} m_j x_{n_1+j} - \sum_{j=1}^{n_3} h_j x_{n_1+n_2+j} \right\}} \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient la proposition suivante :

Proposition II.1 – “Formule sommatoire” :

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme vérifiant qu'il existe $B_0 \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

- (i) $P(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in [B_0, +\infty[^n$,
- (ii) $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in [B_0, +\infty[^n$ et tout \mathbf{y} tel que $\|\mathbf{y}\| < \varepsilon_0$.

Alors, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que la fonction $s \mapsto Z(P; s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $E_0 = \{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$. En outre, il existe des constantes $B_1 \in]B_0, 1[$ et $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ telles que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, pour tout $B \in]B_0, 1[$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, on a :

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m) \\ = \sum_{\tau \in \mathcal{G}_n} \sum_{n_1 + n_2 = n} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} e^{-2\pi\varepsilon|h|} \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s}(B + i\varepsilon x_{\tau(1)}, \dots, B + i\varepsilon x_{\tau(n_1)}, \\ x_{\tau(n_1+1)} - i\varepsilon_1(h_1), \dots, x_{\tau(n)} - i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2})) \times \frac{(i\varepsilon)^{n_1} e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{\tau(n+j)} \right\}}}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - e^{2\pi i B} e^{-2\pi\varepsilon x_j})} dx_1 \dots dx_n$$

où, pour $j \in \{1, \dots, n_2\}$ et $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$, $\varepsilon_j(h_j) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } h_j \geq 0 \\ -\varepsilon & \text{si } h_j < 0 \end{cases}$ et $|h| = \sum_{j=1}^{n_2} |h_j|$.

IV) Un lemme supplémentaire

Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on note $Z(P)$ l'ensemble de ses zéros complexes

$$Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\}$$

Lemme II. 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme qui vérifie qu'il existe $B_0 \in]0, 1[$ tel que :

$P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B_0, +\infty[^n$ et $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in [B_0, +\infty[^n$.

Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $d(Z(P), [B, +\infty[^n) > 0$ pour au moins un réel $B \in]0, 1[$.
- (2) Il existe $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $P(x + iy) \neq 0$ pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $x \in [B, +\infty[^n$ et $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$.
- (3) Il existe $B \in]0, 1[$, tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)}$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$ (En fait, il n'y a qu'un nombre fini de conditions, car $\partial^\alpha P \equiv 0$ si $|\alpha| > \text{degré total de } P$).

Démonstration du lemme II.3 :

Il est facile de voir que $P(x) > 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$.

Il est immédiat que les conditions (1) et (2) sont équivalentes. Reste à montrer que (2) et (3) le sont.

Preuve que (3) \Rightarrow (2).

On suppose (3) vraie, donc $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifie qu'il existe $B \in]0, 1[$ et $c > 0$ tels que, si l'on note μ le degré total de P , alors :

- (i) $P(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$, et
- (ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq \mu$ et tout $x \in [B, +\infty[^n$, $|\partial^\alpha P(x)| \leq C P(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé ($\varepsilon < 1$). On a alors, d'après la formule de Taylor, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ et tout $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$,

$$P(x + iy) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} \frac{\partial^\alpha P(x)}{\alpha!} (iy)^\alpha$$

et par suite

$$|P(x + iy) - P(x)| \leq \sum_{\substack{|\alpha| \leq \mu \\ \alpha \neq 0}} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha P(x)| |y^\alpha|$$

Mais $\alpha \neq 0$ implique $|y^\alpha| \leq \varepsilon$, car $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon)$, et $|\partial^\alpha P(x)| \ll P(x)$ sur $[B, +\infty[^n$.

Donc, il existe une constante $A = A(P) > 0$, ne dépendant que du polynôme P , telle que, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ et tout $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon)$, $|P(x + iy) - P(x)| \leq A \varepsilon P(x)$, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P(x + iy) &= -\operatorname{Re}(-P(x + iy) + P(x)) + P(x) \\ &\geq P(x) - |P(x + iy) - P(x)| \\ &\geq P(x)(1 - A\varepsilon) \end{aligned}$$

si $\varepsilon < \frac{1}{A+1}$. Donc, pour $\varepsilon_0 := \frac{1}{A+1} > 0$, on a :

$$P(x + iy) \neq 0 \text{ pour tout } x \in [B, +\infty[^n \text{ et tout } y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_0)$$

donc (2) est démontrée.

Preuve que (2) \Rightarrow (3).

Maintenant on va supposer que (2) est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

- (i) $P(x + iy) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ et tout $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_0)$,
- (ii) $P(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$,

d'où il découle, de façon évidente, que

- (iii) $P(x) > 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$.

Alors, d'après le lemme II.2, ceci est équivalent au fait qu'il existe $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_1 \in]0, 1[$ tels que les conditions (ii) et (iii) ci dessus sont vérifiées, et en plus

$$(iv) \quad \frac{P(x + iy)}{P(x)} = 1 + O(\|y\|)$$

uniformément en $x \in [B, +\infty[^n$ et $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_1)$.

En particulier, il est facile de voir que

(**) pour tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_1)$, la fonction $\mathbf{x} \mapsto \frac{P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})}{P(\mathbf{x})}$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$.

Maintenant, si nous utilisons la formule de Taylor, nous obtenons

$$P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} \partial^\alpha P(\mathbf{x}) \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha$$

où μ est le degré total de P .

Si l'on ordonne l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq \mu\}$ par ordre lexicographique en une suite croissante $(\alpha_j)_{j=1, \dots, N}$, on a alors

$$P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x}) \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \mathbf{y}^{\alpha_j}$$

donc

$$\frac{P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})}{P(\mathbf{x})} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \mathbf{y}^{\alpha_j}.$$

En choisissant $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_1)$ sans condition pour le moment, on a le système suivant :

$$\text{pour tout } l \in \{1, \dots, N\}, \quad \frac{P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}_l)}{P(\mathbf{x})} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \mathbf{y}_l^{\alpha_j}$$

Maintenant, si, pour $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$ nous considérons les vecteurs colonnes suivants de \mathbb{C}^N

$$X(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^{\alpha_1} P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})} \frac{i^{|\alpha_1|}}{\alpha_1!} \\ \vdots \\ \frac{\partial^{\alpha_N} P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})} \frac{i^{|\alpha_N|}}{\alpha_N!} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}_1)}{P(\mathbf{x})} \\ \vdots \\ \frac{P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}_N)}{P(\mathbf{x})} \end{pmatrix}$$

et si l'on considère la matrice

$$M := \left(\mathbf{y}_l^{\alpha_j} \right)_{1 \leq j, l \leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

le système précédent s'écrit :

$$\text{pour tout } \mathbf{x} \in [B, +\infty[^n, \quad Y(\mathbf{x}) = M \cdot X(\mathbf{x})$$

Mais il est facile de voir que l'on peut choisir $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_1)$ de façon à ce que M soit inversible. On peut donc supposer les \mathbf{y}_l fixés avec M inversible. On a alors, pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$,

$$X(\mathbf{x}) = M^{-1} Y(\mathbf{x})$$

donc

$$\|X(\mathbf{x})\| \leq \|M^{-1}\| \|Y(\mathbf{x})\|.$$

Mais (**) implique que $\mathbf{x} \mapsto Y(\mathbf{x})$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$ et donc la fonction $\mathbf{x} \mapsto X(\mathbf{x})$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$. Par conséquent, en vertu de la définition de $X(\mathbf{x})$, on obtient :

$$\text{pour tout } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ la fonction } \mathbf{x} \mapsto \frac{\partial^{\alpha_j} P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})} \text{ est bornée sur } [B, +\infty[^n$$

et comme $\{\alpha_j \mid 1 \leq j \leq N\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq \mu\}$, où $\mu = \text{degré total de } P$, on obtient que (3) est vraie.

On a alors $(2) \Leftrightarrow (3)$. Comme nous savons que $(1) \Leftrightarrow (2)$, ceci termine la démonstration du lemme II.3.

CHAPITRE III

Étude du prolongement méromorphe de

$$s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$$

I) Introduction, notations et énoncé du théorème 5

Dans toute la suite, n_1 et n_2 seront deux entiers naturels avec $n_1 + n_2 = n$ et ε_0 sera un réel strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. On note (y, x) le point courant de $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. On se donne une famille de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ avec, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $Q_\varepsilon(y, x) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et tels que les coefficients de Q_ε sont \mathcal{C}^∞ en ε . On se donne une fonction $\phi : (y, \varepsilon) \mapsto \phi_\varepsilon(y) := \phi(y, \varepsilon)$ de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-2, 2[^{n_1} \times]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[$. On suppose que :

- (i) $Q_0(y, x) = R(x)$ ne dépend pas de $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ (i.e. $R \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n_2}]$) et vérifie qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_{n_2}) \in [1, +\infty[^{n_2}$, $R(x) \geq c(x_1 \cdots x_{n_2})^\alpha$,
- (ii) $\frac{Q_\varepsilon(y, x)}{Q_0(y, x)} = \frac{Q_\varepsilon(y, x)}{R(x)} = 1 + O(\varepsilon)$

uniformément en $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et $(y, x) \in [-1, 1]^{n_1} \times [1, +\infty[^{n_2}$.

On posera alors, sous ces conditions, pour tout $m \in \mathbb{Z}^{n_2}$,

$$Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) = \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [1, +\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(y, x) \phi_\varepsilon(y) e(\langle m, x \rangle) dy dx \quad (s \in \mathbb{C})$$

Le but de ce chapitre est d'étudier le prolongement méromorphe de $s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$, ce qui nous permettra *via* la formule sommatoire démontrée dans le chapitre II d'étudier le prolongement méromorphe de la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$.

Plus précisément, on établira le résultat suivant :

Théorème 5 :

Sous les hypothèses ci-dessus, on a que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, la fonction $s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \text{Re } s > \frac{1}{\alpha}\}$.

De plus, cette fonction possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $\sigma_0 = \sigma_0(R) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $M = M(R) \in \mathbb{N}^*$ ne dépendent que du polynôme R .

En outre, il existe $A = A(R) > 0$ tel que le prolongement méromorphe de $Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ vérifie : pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout entier $N > 0$, il existe une constante $D(N, \varepsilon', \delta) > 0$, ne dépendant que de $N, \varepsilon', \varepsilon_0, \delta$ et R (donc indépendante de $m \in \mathbb{Z}^{n_2}$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$), telle que, pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \geq \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on ait :

$$Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) \leq D(N, \varepsilon', \delta) \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{|\tau|\varepsilon} \left(1 + |m|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right)$$

II) Le cas où le diviseur est à croisements normaux.

Dans la démonstration du théorème 5, nous allons réduire le cas général à un cadre plus simple via le théorème de désingularisation de Hironaka, qui nous permettra de nous ramener au cas d'un diviseur à croisements normaux, lequel est traité dans la proposition suivante :

Proposition III.1 :

Soient $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{*n}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{N}^{*p} \cup (-\mathbb{N}^*)^p$ ($p \leq n$), $B \in \{0\} \cup [1, +\infty[$ et $\varepsilon > 0$.

Soit $\psi: (y, u) \mapsto \psi(y; u)$ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact sur $] -1, 1 [^n \times S^{n-1}$, où S^{n-1} est la sphère unité de \mathbb{R}^n .

Soit $g: y \mapsto g(y)$ une fonction analytique inversible dans $] -1, 1 [^n$ avec $|\text{Arg}(g(y))| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in] -1, 1 [^n$.

On pose, pour $s \in \mathbb{C}$ et $u \in S^{n-1}$,

$$F(s; u) = \int_{]1, +\infty[^n} x_1^{-a_1 s + b_1} \dots x_n^{-a_n s + b_n} e^{(B(x_1^{\beta_1} \dots x_p^{\beta_p}))} \left(g\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}, u\right) dx_1 \dots dx_n$$

avec $e(t) = e^{2i\pi t}$. Alors, $s \mapsto F(s; u)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \text{Re } s \geq \sigma_0\}$, où

$$\sigma_0 := \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j + 1}{a_j}$$

Elle possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordres au plus n , contenus dans une suite de la forme $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$, où $M = M(\mathbf{a}) := \prod_{j=1}^n a_j \in \mathbb{N}^*$. En outre, ce prolongement méromorphe vérifie que, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$, il existe $C = C(N, \varepsilon', \delta, \mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$ telle que, pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma \geq \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on a :

$$|F(s; u)| \leq C \left(1 + B^{|a|(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \left(1 + |\tau|^{|a|(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon' |\tau|}.$$

Démonstration de la proposition III.1 :

Le cas où $B = 0$ est facile. En effet, c'est le cas d'un diviseur à croisements normaux du théorème d'Atiyah [1] concernant le prolongement méromorphe de $s \mapsto F^s$. On suppose donc désormais $B \geq 1$.

Pour simplifier les notations, nous adoptons les notations suivantes :

$$\mathbf{x}^{-\mathbf{a}s + \mathbf{b}} := \prod_{j=1}^n x_j^{-a_j s + b_j}$$

e_j sera le j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^n , de sorte que $(l_1, \dots, l_n) = \sum_{j=1}^n l_j e_j$.

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{*n}$, on pose $\frac{1}{\mathbf{x}} := \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$.

On pose également, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, et

$$dx = dx_1 \cdots dx_n.$$

Avec ces notations, on aura

$$F(s; u) = \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b} \mathbf{e}(Bx^\beta) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx$$

On a alors deux cas à distinguer.

Premier cas: $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in (-\mathbb{N}^*)^p$, c'est-à-dire $\beta_j < 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$.

On pose $\gamma = -\beta$ de sorte que

$$F(s; u) = \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx$$

Comme, pour tout $\mathbf{x} \in]1, +\infty[^n$

$$\left| \mathbf{x}^{-as+b} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \right| \ll_{s,u} \mathbf{x}^{-a\sigma+b} \quad (\sigma = \operatorname{Re} s)$$

on a que $s \mapsto F(s; u)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ où

$$\sigma_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j+1}{a_j}.$$

Soit maintenant $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > \sigma_0$. Adoptons la notation $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. On a alors, par

intégration par parties :

$$\begin{aligned} F(s; u) &= \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx \\ &= \int_{]1, +\infty[^n} \partial_1 \left(\frac{\mathbf{x}^{-as+b+e_1}}{-a_1 s + b_1 + 1} \right) \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx \\ &= \frac{2i\pi\gamma_1 B}{a_1 s - b_1 - 1} \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b-\gamma} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx \\ &\quad + \frac{s}{a_1 s - b_1 - 1} \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b-e_1} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-1} \partial_1 g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{a_1 s - b_1 - 1} \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b-e_1} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^s \partial_1 \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx. \end{aligned}$$

Et si l'on répète cette opération $a_1 N$ fois pour la variable x_1 , puis $a_j N$ fois pour chaque variable x_j ($1 \leq j \leq n$), on obtient, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, que $F(s; u)$ est une somme finie de termes du type

$$\frac{B^l H(s)}{\prod_{j=1}^n \prod_{h=0}^{a_j N} (a_j s - b_j - 1 + h)} \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b-Na-\alpha} \mathbf{e}(Bx^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r} \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{\mathcal{J}^l} \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) dx.$$

où $\tilde{g}\left(\frac{1}{x}\right)$ est de la forme

$$\prod_j \left(\partial^{\mu_j} g\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{l_j}$$

avec $r, l \in \mathbb{N} \cap [0, |\mathbf{a}|N]$, $H \in \mathbb{R}[s]$ est de degré $\leq |\mathbf{a}|N$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mu \in \mathbb{N}^n$ vérifie $|\mu| \leq |\mathbf{a}|N$, et, pour tout $j, \mu_j \in \mathbb{N}^n$ et $l_j \in \mathbb{N}$ vérifient $|\mu_j|$ et $l_j \leq |\mathbf{a}|N$.

Maintenant, il suffit de remarquer que, pour tout $\mathbf{x} \in]1, +\infty[^n$,

$$\left| \mathbf{x}^{-as+b-Na-\alpha} \mathbf{e}(B\mathbf{x}^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \right)^{s-r} \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \right) \partial^{\mu} \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \right| \ll_{N,g,\psi} \mathbf{x}^{-a\sigma+b-Na} \left| \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \right)^s \right| \\ \ll_{N,g,\psi} \mathbf{x}^{-a\sigma+b-Na} e^{|\tau|\varepsilon}$$

car, par hypothèse, $|\text{Arg } g(\mathbf{y})| \leq \varepsilon$ pour tout $\mathbf{y} \in]0, 1[^n$. D'où la fonction

$$s \mapsto \int_{]1, +\infty[^n} \mathbf{x}^{-as+b-Na-\alpha} \mathbf{e}(B\mathbf{x}^{-\gamma}) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \right)^{s-r} \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \right) \partial^{\mu} \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) d\mathbf{x}.$$

existe et est holomorphe sur $\{s \mid \text{Re } s > \sigma_0 - N\}$, et vérifie dans ce demi-plan la majoration $\ll_{N,a} e^{|\tau|\varepsilon}$.

On rappelle que $M = M(\mathbf{a}) = \prod_{j=1}^n a_j \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $\sigma_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j+1}{a_j}$

Soit $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$.

On a alors, pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ et tout $h \in \mathbb{N}$,

$$|a_j s - b_j - 1 + h| = |a_j| \left| s - \frac{b_{j+1}}{a_j} + \frac{h}{a_j} \right| = |a_j| \left| s - \sigma_0 + \left(\sigma_0 - \frac{b_{j+1}}{a_j} + \frac{h}{a_j} \right) \right|$$

Or, $\sigma_0 - \frac{b_{j+1}}{a_j} + \frac{h}{a_j} = \frac{l}{M}$ pour un entier $l \in \mathbb{N}$, donc

$$|a_j s - b_j - 1 + h| = |a_j| \left| s - \left(\sigma_0 - \frac{l}{M} \right) \right| \geq |a_j| d(s, \mathcal{S}) \geq |a_j| \delta \geq \delta.$$

D'où : pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on a

$$\frac{B^p H(s)}{\prod_{j=1}^n \prod_{h=0}^{a_j N} (a_j s - b_j - 1 + h)} \ll_{N,a,\gamma,\delta} B^{|\mathbf{a}|N} (1 + |\tau|^{\deg H}) \\ \ll_{N,a,\gamma,\delta} \left(1 + B^{|\mathbf{a}|N} \right) \left(1 + |\tau|^{|\mathbf{a}|N} \right)$$

Donc, en conclusion, pour tout $N > 0$, la fonction $s \mapsto F(s; u)$ possède un prolongement méromorphe au demi-plan $\{s \mid \text{Re } s > \sigma_0 - N\}$ avec des pôles contenus dans $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $M = a_1 \cdots a_n$ et d'ordres au plus n . En outre, si s appartient à ce demi-plan et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on a

$$F(s; u) \ll_{N,a,\gamma,\delta} \left(1 + B^{|\mathbf{a}|N} \right) \left(1 + |\tau|^{|\mathbf{a}|N} \right) \quad (*)$$

d'où $s \mapsto F(s; u)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordre au plus n contenus dans \mathcal{S} . Ceci démontre la première partie du lemme.

La deuxième partie découle de (*) en prenant $N = \sigma_0 - \sigma + \varepsilon'$. Ceci termine la démonstration du lemme dans le cas où $\beta_j < 0$ pour tout j .

Deuxième cas : $\beta_1, \dots, \beta_p > 0$. On note toujours $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p, 0, \dots, 0)$. On a alors

$$F(s; u) = \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b} e(Bx^\beta) \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) dx$$

Comme dans le premier cas, il est facile de voir que, si l'on pose $\sigma_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j+1}{a_j}$, alors $s \mapsto F(s; u)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$.

Soit maintenant $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > \sigma_0$. En intégrant par parties par rapport à x_1 on obtient

$$\begin{aligned} F(s; u) &= \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b} e(Bx^\beta) \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) dx \\ &= \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b-\beta e_1} \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) \partial_1 \frac{e(Bx^\beta)}{2i\pi\beta_1 B} dx \\ &= \frac{a_1 s - b_1 + \beta_1 - 1}{2i\pi B \beta_1} \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b-\beta} \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) e(Bx^\beta) dx \\ &\quad + \frac{s}{2i\pi B \beta_1} \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b-\beta-e_1} \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{s-1} \partial_1 g\left(\frac{1}{x}\right) \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) e(Bx^\beta) dx \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi B \beta_1} \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b-\beta-e_1} \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s \partial_1 \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) e(Bx^\beta) dx \end{aligned}$$

En répétant cette opération $N(a_1 + \dots + a_p)$ fois on obtient que, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, $F(s; u)$ est une somme finie de termes du type

$$\frac{Q(s)}{(2i\pi B \beta_1)^l} \int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b-N(a_1+\dots+a_p)\beta-\alpha} \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{s-r} \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) e(Bx^\beta) dx$$

où r et l sont des entiers compris entre 0 et $N(a_1 + \dots + a_p)$, $\mu \in \mathbb{N}^n$ avec $|\mu| \leq N(a_1 + \dots + a_p)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\tilde{g}\left(\frac{1}{x}\right)$ est de la forme $\prod_i \left(\partial^{\mu_j} g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{l_j}$ où, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_j \in \mathbb{N}^n$ et $l_j \in \mathbb{N}$ avec $|\mu_j|, |l_j| \leq (a_1 + \dots + a_p) N$, $Q \in \mathbb{R}[s]$ étant un polynôme de degré au plus $N(a_1 + \dots + a_p)$ dont les coefficients ne dépendent que de a et b .

Maintenant, pour chaque intégrale, on a, par intégration par parties par rapport à x_{p+j} , et si l'on pose $\tilde{b} := b - N(a_1 + \dots + a_p)\beta - \alpha$:

$$\int_{]1, +\infty[^n} x^{-as+b-N(a_1+\dots+a_p)\beta-\alpha} \left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{s-r} \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{x}; u\right) e(Bx^\beta) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{]1, +\infty[{}^n} \mathbf{x}^{-as+\tilde{b}} \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r} \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right) \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \mathbf{e}(B\mathbf{x}^\beta) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{]1, +\infty[{}^n} \partial_{p+j} \left(\frac{\mathbf{x}^{-as+\tilde{b}+e_{p+j}}}{-a_{p+j}s+\tilde{b}_{p+j}+1} \right) \left(\tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right) \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r} \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \mathbf{e}(B\mathbf{x}^\beta) d\mathbf{x} \\
 &= \frac{r-s}{a_{p+j}s-\tilde{b}_{p+j}-1} \int_{]1, +\infty[{}^n} \mathbf{x}^{-as+\tilde{b}-e_{p+j}} \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r-1} \partial_{p+j} g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \mathbf{e}(B\mathbf{x}^\beta) d\mathbf{x} \\
 &\quad - \frac{1}{a_{p+j}s-\tilde{b}_{p+j}-1} \int_{]1, +\infty[{}^n} \mathbf{x}^{-as+\tilde{b}-e_{p+j}} \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r} \partial_{p+j} \tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \mathbf{e}(B\mathbf{x}^\beta) d\mathbf{x} \\
 &\quad - \frac{1}{a_{p+j}s-\tilde{b}_{p+j}-1} \int_{]1, +\infty[{}^n} \mathbf{x}^{-as+\tilde{b}-e_{p+j}} \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r} \tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \partial^{\mu+e_{p+j}} \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \mathbf{e}(B\mathbf{x}^\beta) d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Et si l'on répète cette opération Na_{p+j} fois pour chaque variable x_{p+j} , on obtient alors que, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, $F(s; u)$ est somme finie de termes de la forme

$$\frac{H(s)}{(2i\pi B)^l \prod_{j=1}^{n-p} \prod_{h=0}^{a_{p+j}N} (a_{p+j}s - b_{p+j} - 1 + h)} \int_{]1, +\infty[{}^n} \mathbf{x}^{-as+b-Na-\alpha} \left(g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{s-r} \tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \partial^\mu \psi\left(\frac{1}{\mathbf{x}}; u\right) \mathbf{e}(B\mathbf{x}^\beta) d\mathbf{x}$$

où l, r sont des entiers compris entre 0 et $|a|N$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mu \in \mathbb{N}^n$ avec $|\mu| \leq |a|N$,

$\tilde{g}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)$ est de la forme $\prod_j \left(\partial^{\mu_j} g\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\right)^{l_j}$ avec $\mu_j \in \mathbb{N}^n$, $|\mu_j| \leq |a|N$ et $l_j \in \mathbb{N}$ avec $|l_j| \leq |a|N$,

$H(s) \in \mathbb{R}[s]$ un polynôme de degré $\leq |a|N$,

et on a les mêmes expressions que celles obtenues dans le premier cas, avec $(2i\pi B)^{-l}$ à la place de B^l . Il est clair que, si l'on majore le facteur $|2i\pi B|^{-l}$ par 1 (on rappelle que dans le premier cas on a majoré B^l par $B^{|a|N}$) la conclusion est la même et ceci termine ce cas, et par conséquent la proposition III.1 est démontré. C.Q.F.D.

III) Démonstration du théorème 5

La démonstration du théorème 5 se fait en deux étapes. La première est l'utilisation du théorème de désingularisation de Hironaka, ce qui permet de supposer l'hypersurface $\{Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0\}$ à croisements normaux dans un ouvert de \mathbb{R}^n , donc essentiellement de se ramener au cas où Q est un monôme. C'est la deuxième étape dont le paragraphe II fait l'objet. Mais auparavant, nous allons énoncer la version du théorème de désingularisation que nous utiliserons ainsi que le lemme dans lequel nous préciserons cette version.

Théorème de désingularisation de Hironaka :

Soient f_1, \dots, f_p p fonctions analytiques dans un voisinage V de l'origine dans \mathbb{R}^n . Alors, il existe un ouvert X de \mathbb{R}^n contenant l'origine, une variété analytique réelle \tilde{X} de dimension n et une application analytique propre $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ telles que :

- (i) π induit un isomorphisme entre $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}\left(\bigcup_{1 \leq j \leq p} f_j^{-1}(0)\right)$ et $X \setminus \left(\bigcup_{1 \leq j \leq p} f_j^{-1}(0)\right)$
- (ii) pour tout $\tilde{x} \in \tilde{X}$, il existe un voisinage $B(\tilde{x})$ de \tilde{x} , cartographié par un système de coordonnées locales $w = (w_1, \dots, w_n)$ centré en \tilde{x} et tel que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $w \in B(\tilde{x})$,

$$f_j \circ \pi(w) = u_j(w) w^{\alpha_j}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$ et u_j est analytique inversible (à valeurs non nulles) dans $B(\tilde{x})$.

Pour plus de détails, voir l'article d'Alain Yger «Formules de division et prolongement méromorphe» [25] où toutes les références concernant ce théorème sont données.

Ceci étant, on va énoncer un résultat qui nous permettra de préciser ce théorème en vue de notre application.

Proposition III.2 (lemme de classification des monômes) :

Soient h_1, \dots, h_p p fonctions analytiques inversibles dans $] -1, 1[^n$ à valeurs complexes et soient μ_1, \dots, μ_p p constantes > 0 vérifiant que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, et tout $x \in] -1, 1[^n$, $|\text{Arg}h_i(x)| \leq \mu_i$.

Soient $\alpha^1, \dots, \alpha^p \in \mathbb{Z}^n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $x \in]1, +\infty[^n$, on pose

$$g_i(x) := h_i\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) x^{\alpha_i}$$

Alors, il existe des ouverts V_1, \dots, V_q de $]1, +\infty[^n$ deux à deux disjoints et un sous-ensemble analytique fermé $N \subsetneq]1, +\infty[^n$ (en particulier de mesure de Lebesgue nulle) tel que :

- (i) $]1, +\infty[^n = N \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} V_i$,
- (ii) pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, il existe un isomorphisme analytique $\pi_j :]1, +\infty[^n \xrightarrow{\sim} V_j$ dont le jacobien est un monôme (i.e. de la forme $\mathcal{J}_y(\pi_j) = c_j y_1^{n_1} \dots y_n^{n_n}$ pour une constante $c_j \neq 0$),
- (iii) pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $j \in \{1, \dots, q\}$, il existe une fonction analytique inversible l_{ij} sur $] -1, 1[^n$, un multi-indice $\beta^{ij} \in \mathbb{N}^n$ et un signe $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$ tels que :
- pour tout $y \in]1, +\infty[^n$, $g_i(\pi_j(y)) = l_{ij}\left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_n}\right) y^{\varepsilon_{ij} \beta^{ij}}$
 - pour tout $u \in] -1, 1[^n$, $|\text{Arg}l_{ij}(u)| \leq \mu_i$.

Démonstration de la proposition III.2 :

Dans un premier temps, on suppose $p = 1$. Notons $h = h_1$, $g = g_1$, $\alpha = \alpha^1$ et $\mu = \mu_1$ pour simplifier.

Alors, h est une fonction analytique sur $] -1, 1[^n$ à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |\text{Arg}z| \leq \mu\}$ et, pour tout $x \in]1, +\infty[^n$, $g(x) = h\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) x^\alpha$ où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que :

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_r > 0, \alpha_{r+1} < 0, \dots, \alpha_{r+s} < 0, \alpha_{r+s+1} = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

On pose $t = r + s$, le nombre de α_j non nuls, et on procède par récurrence sur t . Pour $t = 0$ ou 1 , le résultat est évident. Supposons le résultat vrai pour $t = n - k \geq 1$ et démontrons-le pour $t = n - k + 1$.

Si $r = 0$ ou $s = 0$, le résultat est vrai. Supposons donc $r, s \geq 1$. On pose

$$V_1 = \{x \in]1, +\infty[^n \mid x_r^{\alpha_r} < x_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|}\}$$

$$V_2 = \{x \in]1, +\infty[^n \mid x_r^{\alpha_r} > x_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|}\}$$

$$N = \{x \in]1, +\infty[^n \mid x_r^{\alpha_r} = x_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|}\}$$

On a $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap N = V_2 \cap N = \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 \cup N =]1, +\infty[^n$. En outre, N est un ensemble analytique fermé strictement inclus dans $]1, +\infty[^n$, donc de mesure de Lebesgue nulle.

On définit $\pi_1 :]1, +\infty[^n \rightarrow V_1$ par $\pi_1(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$, où

$$\begin{cases} x_j = y_j & \text{si } j \neq r, r+1 \\ x_r = y_r^{|\alpha_{r+1}|} \\ x_{r+1} = y_r^{\alpha_r} y_{r+1} \end{cases}$$

Il est évident que π_1 est un isomorphisme analytique de $]1, +\infty[^n$ sur V_1 et, pour tout $y \in]1, +\infty[^n$,

$$\mathcal{J}_y(\pi_1) = |\alpha_{r+1}| y_r^{\alpha_r + |\alpha_{r+1}| - 1}$$

avec $\alpha_r + |\alpha_{r+1}| - 1 \in \mathbb{N}$, évidemment.

De même, si l'on définit $\pi_2 :]1, +\infty[^n \rightarrow V_2$ par $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, où

$$\begin{cases} x_j = y_j & \text{si } j \neq r, r+1 \\ x_{r+1} = y_{r+1}^{\alpha_r} \\ x_r = y_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|} y_r \end{cases}$$

alors π_2 est un isomorphisme analytique de $]1, +\infty[^n$ sur V_2 et, pour $y \in]1, +\infty[^n$,

$$\mathcal{J}_y(\pi_2) = |\alpha_r| y_{r+1}^{\alpha_r + |\alpha_{r+1}| - 1}.$$

En outre, pour tout $y \in]1, +\infty[^n$, on a :

$$g(\pi_1(y)) = h \left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_r^{|\alpha_{r+1}|}}, \frac{1}{y_r^{\alpha_r} y_{r+1}}, \dots, \frac{1}{y_n} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n y_j^{\alpha_j}$$

$$g(\pi_2(y)) = h \left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|} y_r}, \frac{1}{y_{r+1}^{\alpha_r}}, \dots, \frac{1}{y_n} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r+1}}^n y_j^{\alpha_j}$$

donc, pour $j = 1, 2, \dots, p$, $g(\pi_j(\mathbf{y})) = h_{1j} \left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_n} \right) \mathbf{y}^{\beta_j}$ avec h_{1j} analytique sur $] -1, 1 [^n$ à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |\operatorname{Arg} z| \leq \mu_1\}$ et le nombre d'indices i pour lesquels $\beta_i^j = 0$ est k . L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Ceci démontre le lemme pour $p = 1$.

Pour $p > 1$, il suffit de remarquer que les π_j que l'on introduit pour réduire un des g_i ne changent pas la nature des autres g_i déjà réduits et, par conséquent, il suffit de refaire la même chose pour g_2 , et ainsi de suite jusqu'à g_p .

Ceci termine la démonstration de la proposition III.2. C.Q.F.D.

Remarques concernant la proposition III.2 :

(1) Dans la démonstration du lemme de classification des monômes (proposition III.2), nous nous sommes limités au strict minimum nécessaire à notre démonstration. Mais il est évident que ce résultat permet de supposer dans l'énoncé du théorème de Hironaka que l'ensemble $\{\alpha_j \mid 1 \leq j \leq p\}$ est totalement ordonné par l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^n , à condition de changer le point (i) en

(i') il existe un sous-ensemble analytique fermé $N \subset X$ de mesure de Lebesgue nulle tel que π induit un isomorphisme analytique de $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(N)$ sur $X \setminus N$.

(2) La proposition III.2 est d'une importance capitale dans la compréhension de la singularité d'une fonction méromorphe $h = \frac{f}{g}$ au voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n ; en effet, par l'intermédiaire du théorème de désingularisation de Hironaka, on se ramène localement et en-dehors de $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$ à

$$\begin{cases} f \circ \pi(\mathbf{w}) = a(\mathbf{w}) \mathbf{w}^\alpha \\ g \circ \pi(\mathbf{w}) = b(\mathbf{w}) \mathbf{w}^\beta \end{cases}$$

où π est la composée d'un nombre fini d'éclatements locaux par rapport à des sous-ensembles analytiques lisses, a et b sont deux fonctions analytiques inversibles et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. D'où localement on a :

$$h \circ \pi(\mathbf{w}) = c(\mathbf{w}) \mathbf{w}^\gamma$$

où π est une modification propre et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$.

Les γ_i ne sont pas forcément de même signe et c'est là qu'intervient la proposition III.2 qui nous dit qu'on peut les supposer tous de même signe au sens large, c'est-à-dire $\gamma \in \mathbb{N}^n$ ou $\gamma \in (-\mathbb{N})^n$, ce qui ramène localement l'étude d'une fonction méromorphe $h = \frac{f}{g}$ à deux situations : $h = f$ ou $h = \frac{1}{f}$, où f est analytique.

Cette remarque permet, par exemple, de définir sans ambiguïté la fonction

$$s \mapsto \int_V h^s \psi \quad (s \in \mathbb{C})$$

quels que soient V ouvert de \mathbb{R}^n , h fonction méromorphe sur V et $\psi \in \mathcal{E}_c^\infty(V)$, en tant que fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles contenus dans une suite discrète $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels. Cette construction ne suppose même pas que l'intégrale existe (au sens de Lebesgue) pour un seul $s \in \mathbb{C}$. Cependant, quand cette intégrale existe pour $s \in D$ où D est un domaine de \mathbb{C} , alors elle coïncide forcément avec la fonction méromorphe que nous avons construit.

Fin de la démonstration du théorème 5.

On se donne n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$, $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{2}[$, une famille $(Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}))_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $R \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n_2}]$, c et $\alpha > 0$ et $\phi : (\mathbf{y}, \varepsilon) \mapsto \phi(\mathbf{y}, \varepsilon)$ qui vérifie les hypothèses du théorème 5.

Soit $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Le but de ce qui va suivre est d'étudier le prolongement méromorphe de

$$s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) = \int_{]-1, 1[^{n_1} \times]1, +\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \phi_\varepsilon(\mathbf{y}) \mathbf{e}(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle) dy dx$$

D'après le point (ii) des hypothèses, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in]-1, 1[^{n_1} \times]1, +\infty[^{n_2}$,

$$\left| \frac{Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{R(\mathbf{x})} - 1 \right| \leq K\varepsilon$$

et ceci implique que, si l'on pose $H_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - R(\mathbf{x})$, on a $H_\varepsilon \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et

$$\left| \frac{H_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{R(\mathbf{x})} \right| \leq K\varepsilon$$

et ceci permet de voir que $\operatorname{Re} Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq (1 - K\varepsilon) R(\mathbf{x})$ et $|\operatorname{Im} Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq K\varepsilon R(\mathbf{x})$, d'où :

$$|\operatorname{Arg} Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq \operatorname{Arctg} \left(\frac{K\varepsilon}{1 - K\varepsilon} \right) \ll \varepsilon$$

et, quitte à diminuer ε_0 , on peut supposer que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et tout $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in]-1, 1[^{n_1} \times]1, +\infty[^{n_2}$,

$$|Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})| \geq \operatorname{Re} Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq (1 - \varepsilon) R(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad |\operatorname{Arg} Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq 2\varepsilon$$

d'où : pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in]-1, 1[^{n_1} \times]1, +\infty[^{n_2}$ et tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 0$,

$$|Q_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})^{-s} \phi_\varepsilon(\mathbf{y}) \mathbf{e}(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle)| \ll_\varepsilon (1 - \varepsilon)^{-\sigma} R(\mathbf{x})^{-\sigma} e^{2\varepsilon|\tau|} \ll (1 - \varepsilon)^{-\sigma} c^{-\sigma} (x_1 \dots x_{n_2})^{-\sigma\alpha} e^{2\varepsilon|\tau|}$$

(d'après le point (i) des hypothèses) et ceci permet de voir que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, la fonction $s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \frac{1}{\alpha}\}$.

On fixe maintenant $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ en vue d'étudier le prolongement méromorphe de cette fonction.

Mais quitte à écrire

$$]-1, 1[^{n_1} = \bigcup_{k,l}]-1, 0[^k \times]0, 1[^l$$

et de procéder à des changements de variables évidents, on voit qu'il suffit d'étudier

$$s \mapsto \tilde{Y}_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) = \int_{]0, 1[^{n_1} \times]1, +\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \phi_\varepsilon(\mathbf{y}) \mathbf{e}(\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle) dy dx$$

qui est définie et holomorphe dans le demi-plan $\Pi = \{s \mid \operatorname{Re} s > \frac{1}{\alpha}\}$. On fixe $s = \sigma + i\tau \in \Pi$. Par un changement de variable évident, on a

$$\tilde{Y}_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) = \int_{]0, 1[^n} Q_\varepsilon^{-s}\left(\mathbf{y}, \frac{1}{\mathbf{x}}\right) \phi_\varepsilon(\mathbf{y}) \mathbf{e}\left(\left\langle \mathbf{m}, \frac{1}{\mathbf{x}} \right\rangle\right) (-1)^{n_2} (x_1 \cdots x_{n_2})^{-2} dy dx$$

avec la notation $\frac{1}{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_{n_2}}\right)$ si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

$$\text{On pose } B = \|\mathbf{m}\| \text{ et } \mathbf{u} = \begin{cases} \frac{\mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|} \in S^{n-1} & \text{si } \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1) & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Pour chaque $\mathbf{v} \in S^{n_2-1}$, on note L_v le polynôme $L_v(X_1, \dots, X_{n_2}) = \sum_{j=1}^{n_2} v_j X_j$.

Il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(1) \quad R\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{\hat{R}(\mathbf{x})}{(x_1 \cdots x_{n_2})^{N_0}}$$

pour un $\hat{R} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n_2}]$,

$$(2) \quad L_v\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{\hat{L}_v(\mathbf{x})}{(x_1 \cdots x_{n_2})^{N_0}}$$

où en plus, $\hat{L}_v(\mathbf{x})$ est analytique en \mathbf{v} (en fait, à coefficients polynomiaux) et

$$(3) \quad H_\varepsilon\left(\mathbf{y}, \frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{\hat{H}_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{(x_1 \cdots x_{n_2})^{N_0}}$$

où les coefficients de \hat{H}_ε sont \mathcal{O}^∞ en ε (ceci vient du fait que le degré en \mathbf{x} de H_ε est majoré par une constante indépendante de ε , ce qui permet de choisir N_0 indépendant de ε).

D'où, si l'on utilise la version déjà citée du théorème de désingularisation avec $n+3$ fonctions :

$$f_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = x_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n_2,$$

$$f_{n_2+j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n_1,$$

$$f_{n+1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \hat{R}(\mathbf{x}),$$

$$f_{n+2}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \hat{H}_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

$$f_{n+3}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \hat{L}_u(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

et à l'aide d'une partition de l'unité, on obtient que, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \frac{1}{\alpha}$, $\tilde{Y}_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ est somme finie d'intégrales du type :

$$\int_{E_{n_1 n_2}} g_\varepsilon^{-s}(\mathbf{w}) \mathbf{w}^{a.s+b} \mathbf{e}(\|\mathbf{m}\| h(\mathbf{w}; \mathbf{u}) \mathbf{w}^{-\beta}) \psi_\varepsilon(\mathbf{w}; \mathbf{u}) d\mathbf{w}$$

où :

- $E_{n_1 n_2} = \{\mathbf{w} \in]-1, 1[^n \mid x_1(\mathbf{w}), \dots, x_{n_2}(\mathbf{w}), y_1(\mathbf{w}), \dots, y_{n_1}(\mathbf{w}) > 0\}$,
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \beta \in \mathbb{Z}^n$,
- $\mathbf{w} \mapsto g_\varepsilon(\mathbf{w})$ et $\mathbf{w} \mapsto h(\mathbf{w}; \mathbf{u})$ sont des fonctions analytiques inversibles sur $] -1, 1[^n \times S^{n-1}$,
- $\mathbf{w} \mapsto \psi_\varepsilon(\mathbf{w}; \mathbf{u})$ est une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans $] -1, 1[^n$, dépendant analytiquement de \mathbf{u} et de façon \mathcal{C}^∞ de ε ,
- $Q_\varepsilon\left(\mathbf{y}(\mathbf{w}), \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{w})}\right) = [g_\varepsilon(\mathbf{w})]^{-1} \mathbf{w}^{-\mathbf{a}}$,
- $L_u\left(\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{w})}\right) = \frac{\hat{L}_u(\mathbf{x}(\mathbf{w}))}{(x_1(\mathbf{w}) \cdots x_{n_2}(\mathbf{w}))^{N_0}} = h(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \mathbf{w}^{-\beta}$,
- pour tout $j \in \{1, \dots, n_2\}$, $x_j(\mathbf{w}) = l_j(\mathbf{w}) \mathbf{w}^{\alpha^j}$
où l_j est analytique inversible dans $] -1, 1[^n$ et $\alpha^j \in \mathbb{N}^n$,
- pour tout $j \in \{1, \dots, n_1\}$, $y_j(\mathbf{w}) = k_j(\mathbf{w}) \mathbf{w}^{\beta^j}$
où k_j est analytique inversible dans $] -1, 1[^n$ et $\beta^j \in \mathbb{N}^n$.

En outre, d'après le point (ii) des hypothèses, nous savons que :

$$Q_\varepsilon\left(\mathbf{y}(\mathbf{w}), \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{w})}\right) = R\left(\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{w})}\right)(1 + O(\varepsilon)) = [g_\varepsilon(\mathbf{w})]^{-1} \mathbf{w}^{-\mathbf{a}}$$

et

$$R\left(\frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{w})}\right) \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|\mathbf{w}\| \longrightarrow 0.$$

D'où : $\mathbf{a} = \mathbf{a}(R)$ ne dépend que de R et vérifie $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{*n}$.

De plus :

$$|\text{Arg } g_\varepsilon(\mathbf{w})| = |\text{Arg } Q_\varepsilon\left(\mathbf{y}(\mathbf{w}), \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{w})}\right)| \leq 2\varepsilon.$$

De plus, comme pour tout j , $x_j(\mathbf{w})$ et $y_j(\mathbf{w})$ sont des monômes à des facteurs inversibles près, alors l'ensemble $E_{n_1 n_2}$ est réunion finie d'ensembles de la forme (à une permutation des coordonnées près)

$$]-1, 0[^k \times]0, 1[^l \quad (k+l=n)$$

D'où, par un changement de variable évident, on se ramène au cas où, pour $\text{Re } s > \frac{1}{\alpha}$, $Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ est une somme finie d'intégrales du type

$$\int_{]0, 1[^n} g_\varepsilon^{-s}(\mathbf{w}) \mathbf{w}^{a.s+b} \mathbf{e}(\|\mathbf{m}\| h(\mathbf{w}; \mathbf{u}) \mathbf{w}^{-\beta}) \psi_\varepsilon(\mathbf{w}; \mathbf{u}) d\mathbf{w}$$

avec $B = \|m\|$ et, quitte à rentrer $h(w; u)$ dans l'une des coordonnées et à effectuer le changement de variable $w \mapsto \frac{1}{w}$, on se ramène à une somme finie d'intégrales du type

$$\int_{[1, +\infty[^n} g_\varepsilon^{-s} \left(\frac{1}{x}\right) x^{-as-b} e(\|m\| x^\beta) \psi_\varepsilon\left(\frac{1}{x}; u\right) dx$$

où $a \in \mathbb{N}^{*n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ et $\beta \in \mathbb{Z}^n$. Donc, pour être dans la situation étudiée dans la proposition III.1, il ne manque plus que l'hypothèse $\beta \in \mathbb{N}^n \cup (-\mathbb{N})^n$. Mais la proposition III.2 nous permet de supposer que c'est effectivement le cas. On se ramène donc exactement à la situation étudiée dans la proposition III.1, ce qui permet de conclure que $s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordres au plus n , contenu dans une suite de la forme $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $\sigma_0 = \sigma_0(R) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $M = M(R) \in \mathbb{N}^*$, et qu'il existe $A = A(R) > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$,

$$|Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)| \leq D'(N, \varepsilon', \delta, u, \varepsilon) (1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}) (1 + \|m\|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}) e^{\varepsilon|\tau|}$$

En effet, on a vu que $a \in \mathbb{N}^{*n}$ ne dépend que de R et que les différents paramètres σ_0 , M et A dans la proposition III.1 ne dépendent que de a .

De plus, comme $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et $u \in S^{n_2-1}$, alors un argument de continuité et de compacité permet de supposer que $D'(N, \varepsilon', \delta, u, \varepsilon) = D(N, \varepsilon', \delta)$ est indépendante de u et ε .

Ceci termine la démonstration du théorème 5. C.Q.F.D.

•

CHAPITRE IV

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3

I) Introduction

Dans toute la suite, $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ désignera un polynôme qui vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, c'est-à-dire :

- (i) Il existe $B \in]0, 1[$ tel que $P(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$, $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$
- (ii) Il existe $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in [B, +\infty[^n$ et tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$.

Nous avons démontré que, sous ces conditions, la série de Dirichlet

$$Z(P; s) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(\mathbf{m})^s}$$

existe et est holomorphe dans un demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ où $\sigma_0 > 0$ (voir ch. I théorème 1).

Dans les théorèmes II et III, nous allons montrer, sous les conditions ci-dessus, l'existence du prolongement méromorphe de $s \mapsto Z(P; s)$, étudier la répartition des pôles ainsi que leurs ordres et établir des majorations du prolongement méromorphe dans les bandes verticales.

L'idée de base est de remplacer la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$ par des objets plus souples qui se traitent en Analyse, d'où l'intérêt de la formule sommatoire que nous avons établie dans le Chapitre II (proposition II.1). En effet cette formule permet de ramener l'étude de $Z(P; s)$ à celle d'une somme infinie d'intégrales.

Dans le Chapitre III, nous avons établi un théorème (théorème 5) dont l'objet était précisément l'étude du prolongement méromorphe d'un certain type d'intégrales oscillantes. L'objet de ce chapitre est donc de justifier que les intégrales données par la formule sommatoire (proposition II.1) rentrent dans le cadre du théorème 5. Ensuite, on montrera que la somme (infinie) des prolongements de ces intégrales existe et vérifie les propriétés requises pour être un prolongement méromorphe de $Z(P; s)$.

II) Démonstration des théorèmes 2 et 3

On suppose que $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifie $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, avec $B_0 \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{2}[$.

On sait (théorème 1, proposition II.1) que

- (i) il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ et
- (ii) il existe $B_1 \in]B_0, 1[$ et $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$ pour tout $B \in]B_1, 1[$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, on a :

$$Z(P; s) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(\mathbf{m})$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} e^{-2\pi\varepsilon|h|} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s} \left(B+i\varepsilon x_{\tau(1)}, \dots, B+i\varepsilon x_{\tau(n_1)}, \right. \\ \left. x_{\tau(n_1+1)} - i\varepsilon_1(h_1), \dots, x_{\tau(n)} - i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2}) \right) \times \frac{(i\varepsilon)^{n_1} e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{\tau(n+j)} \right\}}}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - e^{2\pi i B} e^{-2\pi\varepsilon x_j})} dx_1 \cdots dx_n$$

où, pour tout $j \in \{1, \dots, n_2\}$ et tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$,

$$\varepsilon_j(h_j) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } h_j \geq 0 \\ -\varepsilon & \text{si } h_j < 0 \end{cases}$$

et
$$|h| = \sum_{j=1}^{n_2} |h_j|$$

Maintenant, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$, $B \in]B, 1[$, $\text{Re } s > \sigma_0$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 + n_2 = n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on pose :

$$Z_\tau(P, \varepsilon, B, n_1, n_2; s) := \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} e^{-2\pi\varepsilon|h|} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s} \left(B+i\varepsilon x_{\tau(1)}, \dots, B+i\varepsilon x_{\tau(n_1)}, x_{\tau(n_1+1)} - i\varepsilon_1(h_1), \dots, x_{\tau(n)} - i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2}) \right) \\ \times \frac{(i\varepsilon)^{n_1} e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{\tau(n+j)} \right\}}}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - e^{2\pi i B} e^{-2\pi\varepsilon x_j})} dx_1 \cdots dx_n$$

On a alors, sous ces conditions,

$$Z(P; s) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \sum_{n_1+n_2=n} Z_\tau(P, \varepsilon, B, n_1, n_2; s)$$

et, comme l'action de $\tau \in \mathfrak{S}_n$ induit juste une permutation des coordonnées dans les intégrales, il suffit de vérifier les théorèmes 2 et 3 pour $\tau = \text{Id}$.

On fixe dans toute la suite n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 + n_2 = n$ et $B \in]B_1, 1[$ et on pose, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$, et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0$,

$$Z(P, \varepsilon; s) := Z_{\text{Id}}(P, \varepsilon, n_1, n_2, s) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} e^{-2\pi\varepsilon|h|} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s} \left(B+i\varepsilon x_1, \dots, B+i\varepsilon x_{n_1}, x_{n_1+1} - i\varepsilon_1(h_1), \dots, x_n - i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2}) \right) \\ \times \frac{(i\varepsilon)^{n_1} e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{n+j} \right\}}}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - e^{2\pi i B} e^{-2\pi\varepsilon x_j})} dx_1 \cdots dx_n$$

Maintenant, pour tout $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n_2\}$, on pose

$$\varepsilon_j^I = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } j \in I \\ -\varepsilon & \text{si } j \notin I \end{cases}$$

et $M(I) = \{h \in \mathbb{Z}^{n_2} \mid h_j \geq 0 \text{ si } j \in I \text{ et } h_j < 0 \text{ si } j \notin I\}$

On pose enfin

$$Z_I(P, \varepsilon; s) := (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} e^{-2\pi\varepsilon|h|} Y_I(P, \varepsilon, h; s)$$

où, pour tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$,

$Y_I(P, \varepsilon, h; s) :=$

$$\int_{[-1, 1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s}(B+i\varepsilon x_1, \dots, B+i\varepsilon x_{n_1}, x_{n_1+1}-i\varepsilon_1^I, \dots, x_n-i\varepsilon_{n_2}^I) \times \frac{e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{n+j} \right\}}}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - e^{2\pi i B} e^{-2\pi\varepsilon x_j})} dx_1 \cdots dx_n$$

et on voit bien que, pour démontrer les théorèmes 2 et 3, il suffit de les vérifier pour les fonctions

$$s \mapsto Z_I(P, \varepsilon; s) = (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} e^{-2\pi\varepsilon|h|} Y_I(P, \varepsilon, h; s)$$

Pour étudier les $Y_I(P, \varepsilon, h; s)$, on va utiliser le théorème 5. Vérifions que nous sommes dans les conditions d'application de ce théorème. On fixe $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ et on pose

$$R(X_1, \dots, X_{n_2}) := P(B, \dots, B, BX_1, \dots, BX_{n_2})$$

où la variable B est répétée n_1 fois. On a $R \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n_2}]$.

Soit $\varepsilon'_0 \in]0, \frac{\varepsilon_1}{2}[$. On définit la fonction $\varphi :]-2, 2[^{n_1} \times]-2\varepsilon'_0, 2\varepsilon'_0[\rightarrow \mathbb{C}$

par
$$\varphi(y, \varepsilon) := \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - e^{2\pi B} e^{-2\pi\varepsilon y_j})}$$

Il est clair que, pour $B \in]B_1, 1[$ et quitte à prendre $\varepsilon \in]0, \frac{\varepsilon_1}{2}[$ assez petit, on peut supposer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-2, 2[^{n_1} \times]-2\varepsilon'_0, 2\varepsilon'_0[$.

Enfin, on définit, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, $Q_\varepsilon(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ par

$$Q_\varepsilon(X_1, \dots, X_n) = P(B+i\varepsilon X_1, \dots, B+i\varepsilon X_{n_1}, BX_{n_1+1}-i\varepsilon_1^I, \dots, BX_n-i\varepsilon_{n_2}^I)$$

On obtient ainsi une famille de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[}$.

Comme $B \in]B_1, 1[\subset]B_0, 1[$, on a que $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$, d'où, d'après le lemme II.1, il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ ne dépendant que de P tels que, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$, $P(x) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$. D'où, quel que soit $x \in [1, +\infty[^{n_2}$,

$$R(x_1, \dots, x_{n_2}) = P(B, \dots, B, Bx_1, \dots, Bx_{n_2}) \geq cB^{n\alpha}(x_1 \cdots x_{n_2})^\alpha$$

On pose alors $Q_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = R(\mathbf{x})$. On obtient ainsi une famille de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0']}$ à coefficients \mathcal{C}^∞ en ε et ce qui précède montre que le point (i) des hypothèses du théorème 5 est vérifié. Quant au point (ii), il découle immédiatement du lemme II.2.

Maintenant, nous sommes en mesure de conclure. Nous remarquerons d'abord que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0']$, pour tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$Y_I(P, \varepsilon, h; s)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s}(B+i\varepsilon x_1, \dots, B+i\varepsilon x_{n_1}, x_{n_1+1} - i\varepsilon_1^I, \dots, x_n - i\varepsilon_{n_2}^I) \times \frac{e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{n+j} \right\}}}{\prod_{j=1}^{n_1} 1 - e^{2\pi i B} e^{-2\pi \varepsilon x_j}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= B^{n_2} \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [1, +\infty[^{n_2}} P^{-s}(B+i\varepsilon y_1, \dots, B+i\varepsilon y_{n_1}, Bx_1 - i\varepsilon_1^I, \dots, Bx_{n_2} - i\varepsilon_{n_2}^I) \varphi(\mathbf{y}; \varepsilon) e^{2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} h_j x_j \right\}} dy dx \\ &= B^{n_2} \int_{[-1, 1]^{n_1} \times [1, +\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}; \varepsilon) e^{2\pi i \langle h, \mathbf{x} \rangle} dy dx = B^{n_2} Y_h^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, s) \end{aligned}$$

avec les notations du Chapitre III. D'où, d'après le théorème 5, il existe $\sigma_0^I = \sigma_0(R) > 0$ tel que la fonction $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0^I\}$. En outre, il existe $M^I = M(R) \in \mathbb{N}^*$ tel que, si l'on pose $\mathcal{S} := \{\sigma_0^I - \frac{k}{M^I} \mid k \in \mathbb{N}\}$, alors $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordre au plus n et contenus dans \mathcal{S} .

En outre, il existe $A^I = A^I(R) > 0$ tel que le prolongement méromorphe \tilde{Y}_I de Y_I vérifie, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout réel $N > 0$,

$$\tilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s) \ll_{N, \varepsilon', \delta, \varepsilon_0', R} \left(1 + |\tau|^{A^I(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \left(1 + |h|^{A^I(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon |\tau|}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0^I - N$ et $d(s, \mathcal{S}^I) \geq \delta$ et où $\tau = \operatorname{Im} s$.

Maintenant, comme les parties $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ sont en nombre fini et R ne dépend que du polynôme P , de I et de n_1 et n_2 , si l'on pose

$$A := \sup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n_2\} \\ n_1 + n_2 = n}} A^I(R) > 0$$

$$\sigma_0 := \sup_{\substack{I \subset \{1, \dots, n_2\} \\ n_1 + n_2 = n}} \sigma_0^I \in \mathbb{Q}_+^*$$

$M :=$ le plus petit multiple commun des M^I et des dénominateurs des σ_0^I quand $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_1 + n_2 = n$ et I décrit l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n_2\}$

et
$$\mathcal{S} := \left\{ \sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

alors A, σ_0, M et \mathcal{S} ne dépendent plus que du polynôme P .

On a alors, pour tout $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_1 + n_2 = n$, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0' [$ et tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$:

- (1) $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s > \sigma_0\}$
- (2) $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordre au plus n et contenus dans \mathcal{S}
- (3) le prolongement méromorphe \tilde{Y}_I vérifie que, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$

$$\tilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s) \ll_{N, \varepsilon', \delta, \varepsilon'_0, P} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \left(1 + |h|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon |\tau|}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$ et où $\tau = \text{Im } s$.

Maintenant pour $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, nous définissons la série

$$\tilde{Z}_I(P, \varepsilon; s) := (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} e^{-2\pi\varepsilon|h|} \tilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s)$$

Alors il est clair, d'après les conditions (1), (2) et (3) que $s \mapsto \tilde{Z}_I(P, \varepsilon; s)$ est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles d'ordre au plus n et contenus dans \mathcal{S} et qu'elle vérifie, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$,

$$\tilde{Z}_I(P, \varepsilon; s) \ll_{P, \varepsilon', \delta, \varepsilon'_0} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon |\tau|} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \left(1 + |h|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{-2\pi\varepsilon|h|}$$

et ceci uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$ et où $\tau = \text{Im } s$.

Mais comme nous savons que, pour $\text{Re } s > \sigma_0$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon'_0$,

$$\begin{aligned} Z_I(P, \varepsilon; s) &= (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} e^{-2\pi\varepsilon|h|} Y_I(P, \varepsilon, h; s) \\ &= (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} e^{-2\pi\varepsilon|h|} \tilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s) \\ &= \tilde{Z}_I(P, \varepsilon; s) \end{aligned}$$

on voit que $s \mapsto \tilde{Z}_I(P, \varepsilon; s)$ constitue le prolongement méromorphe cherché.

On conclut donc que :

- (i) $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s > \sigma_0\}$,
- (ii) $s \mapsto Z(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles contenus dans \mathcal{S} et dont les ordres sont au plus n ,
- (iii) le prolongement méromorphe $\tilde{Z}(P; s)$ de $Z(P; s)$ vérifie pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$,

$$(\diamond) \quad \tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \varepsilon', \delta, \varepsilon'_0, N} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon |\tau|} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \left(1 + |h|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{-2\pi\varepsilon|h|}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$ et où $\tau = \text{Im } s$.

Ici $\sigma_0 = \sigma_0(P)$ est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P; s)$, $\sigma_0 > 0$, $M = M(P) \in \mathbb{N}^*$, $A = A(P) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ne dépendent que du polynôme P .

Pour terminer la démonstration du théorème 2, il suffit de démontrer que l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$ est effectivement un pôle. En dimension un (P à une indéterminée), ceci découle du théorème suivant :

Théorème (Phragmén-Landau) :

Soit A une fonction croissante définie sur \mathbb{R} et soit

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dA(t)$$

sa transformée de Laplace-Stieltjes. Alors l'abscisse de convergence σ_c de F (c'est-à-dire le plus petit σ_0 tel que $F(s)$ converge pour $\text{Re } s > \sigma_0$) vérifie que σ_c est une singularité de F , autrement dit F ne peut être prolongée holomorphiquement sur aucun voisinage de σ_c dans \mathbb{C} .

Pour plus de détails sur ce théorème et ses applications on pourra consulter par exemple le livre de Gérald Tenenbaum "Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres" p. 125, théorème 6. En ce qui nous concerne, nous adapterons la démonstration de ce théorème au cas de plusieurs variables.

Démonstration du fait que $\sigma_0(P)$ est un pôle de $Z(P; s)$.

Nous notons $\tilde{Z}(P; s)$ le prolongement méromorphe de $Z(P; s)$ à \mathbb{C} . Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que l'abscisse de convergence σ_0 n'est pas un point singulier de $\tilde{Z}(P; s)$. Alors il existe $r > 0$ tel que $s \mapsto \tilde{Z}(P; s)$ est holomorphe dans le disque ouvert $D(\sigma_0, 2r)$. Soit $\sigma_1 \in]\sigma_0, \sigma_0 + r[$. On a alors

$$D(\sigma_1, r) \subset D(\sigma_0, 2r)$$

d'où $s \mapsto \tilde{Z}(P; s)$ est analytique dans le disque ouvert $D(\sigma_1, r)$ et par suite développable en série entière autour de σ_1 dans ce disque, c'est-à-dire

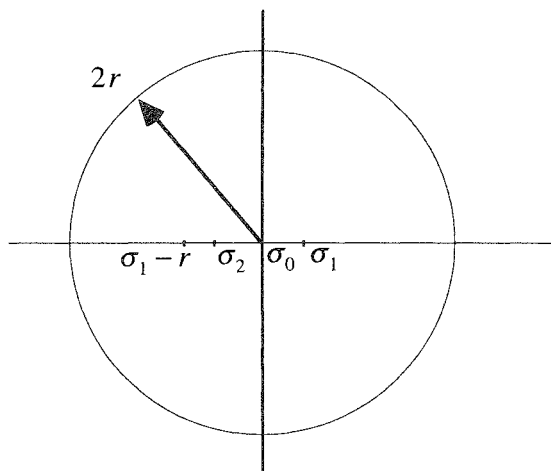
pour tout $s \in D(\sigma_1, r)$, on a

$$\tilde{Z}(P; s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{ds^k} \tilde{Z}(P; s) \right|_{s=\sigma_1} (s - \sigma_1)^k$$

Or, dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s > \sigma_0\}$, on a

$$\tilde{Z}(P; s) = Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s}$$

avec convergence uniforme sur tout compact de ce demi-plan. D'où, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a, pour $\sigma = \text{Re } s > \sigma_0$,



$$\frac{d^k}{ds^k} Z(P; s) = \frac{d^k}{ds^k} Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{(-\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^s}$$

avec convergence uniforme sur tout compact. En particulier on a, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\left. \frac{d^k}{ds^k} Z(P; s) \right|_{s=\sigma_1} = \left. \frac{d^k}{ds^k} Z(P; s) \right|_{s=\sigma_1} = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{(-\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}}$$

On en déduit donc que, pour $|s - \sigma_1| < r$, la série

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(P; s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s - \sigma_1)^k \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{(-\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{k!} (\sigma_1 - s)^k \frac{(-\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} \end{aligned}$$

converge.

Mais $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_0 + r$, ce qui implique $\sigma_1 - r < \sigma_0$, et, par suite, il existe $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma_1 - r < \sigma_2 < \sigma_0 < \sigma_1.$$

En particulier, $\sigma_2 \in D(\sigma_1, r)$. D'où, d'après ce qui précède, la série

$$\tilde{Z}(P; \sigma_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{k!} (\sigma_1 - \sigma_2)^k \frac{(\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}}$$

converge.

Mais quels que soient $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^{*n}$,

$$\frac{1}{k!} (\sigma_1 - \sigma_2)^k \frac{(\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} \geq 0$$

donc cette série multiple est à termes positifs et, par conséquent, l'interversion des sommations ne change en rien la convergence. Donc la série

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_1 - \sigma_2)^k \frac{(\text{Log } P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} &= \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{(P(m))^{\sigma_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((\sigma_1 - \sigma_2) \text{Log } P(m))^k \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{(P(m))^{\sigma_1}} e^{(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Log } P(m)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{(P(m))^{\sigma_2}} \\ &= Z(P; \sigma_2) \end{aligned}$$

converge, d'où $\sigma_2 \geq \sigma_0$ qui est l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$, ce qui est absurde. Ceci termine la démonstration du théorème 2, C.Q.F.D.

Fin de la démonstration du théorème 3

Pour terminer la démonstration du théorème 3, nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme IV.1

On définit, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $x > 0$ et $l \in \mathbb{N}$,

$$g_l(\varepsilon, x) := \sum_{h \in \mathbb{Z}^l} (1 + |h|^x) e^{-2\pi\varepsilon|h|}$$

Alors la somme précédente existe et on a la majoration

$$g_l(\varepsilon, x) \ll_{x,l} \varepsilon^{-(x+1)l}$$

Pour le moment, admettons le lemme IV.1 et voyons comment s'en déduit le théorème 3.

On a établi dans ce qui précède que, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$,

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \varepsilon', \delta, \varepsilon'_0, N} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon|\tau|} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \left(1 + |h|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{-2\pi\varepsilon|h|}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$.

D'où, sous ces conditions-là, on a

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \delta, \varepsilon', \varepsilon'_0, N} g_{n_2}(\varepsilon, A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon') \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon|\tau|}$$

Maintenant, pour $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \frac{\varepsilon'}{2A}]$, on a $x = A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon' \geq \frac{\varepsilon'}{2} > 0$. Donc on est dans les conditions d'application du lemme IV.1 et par conséquent on a, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$ et uniformément en $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \frac{\varepsilon'}{2A}]$

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \delta, \varepsilon', \varepsilon'_0, N} \varepsilon^{-\{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon' + 1\}n_2} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) e^{\varepsilon|\tau|}$$

Maintenant, comme l'inégalité précédente est valable quel que soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, nous allons l'optimiser en prenant $\varepsilon = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon'_0} + |\tau|} \in]0, \varepsilon'_0[$. On obtient alors, quels que soient $\varepsilon' > 0$, $\delta > 0$ et $N > 0$, et

uniformément pour $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \frac{\varepsilon'}{2A}]$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$,

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \delta, \varepsilon', \varepsilon'_0, N} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon' + n}$$

Maintenant, si $\sigma \geq \sigma_0 + \frac{\varepsilon'}{2A}$, alors

$$\tilde{Z}(P; s) = Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(P; s) &\ll \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^\sigma} \\ &\ll \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^{\sigma_0 + \varepsilon'/2A}} \end{aligned}$$

$$\ll_{P, \delta, \varepsilon', \varepsilon'_0, N} 1$$

$$\ll_{P, \delta, \varepsilon', \varepsilon'_0, N} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon' + n}$$

En conclusion, on a, pour $\varepsilon' > 0$, $\delta > 0$ et $N > 0$, et uniformément en $\sigma \geq \sigma_0 - N$, et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$,

(★)
$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \delta, \varepsilon', N} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon' + n}$$

On pose $B = A\sigma_0 + 1 + n$. On a alors que $B > 0$ et B ne dépend que du polynôme P . Le résultat précédent peut se reformuler comme suit : quels que soient $\delta > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ avec $\sigma_1 < \sigma_2$ et uniformément en $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$,

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \delta, \sigma_1, \sigma_2} 1 + |\tau|^{-A\sigma + B}$$

Maintenant, pour conclure, on va utiliser une conséquence immédiate du théorème classique de Phragmén-Lindelöf (voir "Theory of Functions" de E. C. Titchmarsh, 5.6.5 ou "Théorie des fonctions" de G. Valiron, § 242)

Si F est holomorphe au voisinage de $E = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2 \text{ et } |\operatorname{Im} s| \geq 1\}$ et vérifie

- (i) pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $s \in E$, $F(s) \ll_\varepsilon e^{\varepsilon |\operatorname{Im} s|}$
- (ii) $F(\sigma_1 + i\tau) \ll |\tau|^{k_1}$ et $F(\sigma_2 + i\tau) \ll |\tau|^{k_2}$ pour $|\tau| \geq 1$

alors, pour $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ et $|\tau| \geq 1$, on a

$$F(\sigma + i\tau) \ll |\tau|^{k(\sigma)}$$

où k est la fonction affine sur \mathbb{R} prenant respectivement les valeurs k_1 et k_2 en σ_1 et σ_2 .

La conséquence immédiate de ce théorème est le lemme suivant, donné par Patrick Sargos [18].

Lemme (P. Sargos)

Soit F une fonction holomorphe au voisinage de $H = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \mid \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \text{ et } \tau \geq 1\}$.

Soit $\sigma_a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes A et $B > 0$ telles que :

- (i) pour chaque σ_1 et $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, on a

$$F(s) \ll 1 + \tau^{-A\sigma + B}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in [\sigma_1, \sigma_2] + i[1, +\infty[$.

- (ii) pour chaque $\sigma > \sigma_a$, on a $F(s) \ll 1$ uniformément en $\tau \geq 1$.

Alors, quels que soient $\varepsilon > 0$, σ_1 et $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, on a

$$F(s) \ll 1 + \tau^{A(\sigma_a - \sigma) + \varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in [\sigma_1, \sigma_2] + i[1, +\infty[$.

Nous allons maintenant appliquer ce lemme à $\tilde{Z}(P; s)$. Le point (i) du lemme est vérifié d'après ce qui précède. Reste à vérifier le point (ii). Mais ceci découle du fait que $\tilde{Z}(P; s)$ est le prolongement

méromorphe de $s \mapsto Z(P; s)$. Plus précisément, on a : pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geq \sigma_0 + \alpha$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{Z}(P; s)| &= |Z(P; s)| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{|P(m)^s|} = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^\sigma} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^{\sigma_0 + \alpha}} \ll_{\alpha} 1 \end{aligned}$$

donc $s \mapsto \tilde{Z}(P; s)$ vérifie le point (ii) du lemme pour $\sigma_a = \sigma_0 + \alpha$. Par conséquent, d'après ce lemme, quels que soient $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ avec $\sigma_1 < \sigma_2$ et uniformément en $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, et $\tau \geq 1$

$$\tilde{Z}(P; s) \ll 1 + \tau^{A(\sigma_0 + \alpha - \sigma) + \varepsilon}$$

Maintenant, en prenant $\alpha < \frac{\varepsilon}{A}$ (ce qui est possible), on obtient

$$\tilde{Z}(P; s) \ll 1 + \tau^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

Par symétrie, on a la même majoration pour $\tau \leq -1$. Donc

$$\tilde{Z}(P; s) \ll 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

quels que soient $\varepsilon > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ avec $\sigma_1 < \sigma_2$ et uniformément en $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, et $|\tau| \geq 1$.

De plus, il est immédiat par continuité et compacité que, uniformément en $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, $|\tau| \leq 1$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(P; s) &\ll_{P, \delta, \sigma_1, \sigma_2} 1 \\ &\ll_{P, \delta, \sigma_1, \sigma_2} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon} \end{aligned}$$

En conclusion, on a donc, quels que soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{P, \delta, \sigma_1, \sigma_2} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$. Ceci termine la démonstration du théorème 3, sous réserve du lemme IV.1.

Démonstration du lemme IV.1.

Commençons par le cas $l = 1$.

On a, pour $\varepsilon > 0$ et $x > 0$,

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon, x) &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} (1 + |h|^x) e^{-2\pi\varepsilon|h|} \\ &= 1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} (1 + h^x) e^{-2\pi\varepsilon h} \\ &\leq 1 + 4 \sum_{h=1}^{\infty} h^x e^{-2\pi\varepsilon h} \end{aligned}$$

L'étude de la fonction $t \mapsto t^x e^{-2\pi\epsilon t}$ montre qu'elle est croissante sur $\left[1, \frac{x}{2\pi\epsilon}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{x}{2\pi\epsilon}, +\infty\right[$ et atteint son maximum en $t = \frac{x}{2\pi\epsilon}$. Ceci permet de voir que :

$$(1) \quad \sum_{1 \leq h \leq \frac{x}{2\pi\epsilon} - 1} h^x e^{-2\pi\epsilon h} \leq \int_1^{\frac{x}{2\pi\epsilon}} t^x e^{-2\pi\epsilon t} dt$$

$$(2) \quad \sum_{h \geq \frac{x}{2\pi\epsilon} + 1} h^x e^{-2\pi\epsilon h} \leq \int_{\frac{x}{2\pi\epsilon}}^{+\infty} t^x e^{-2\pi\epsilon t} dt$$

$$(3) \quad \sum_{\frac{x}{2\pi\epsilon} - 1 \leq h \leq \frac{x}{2\pi\epsilon} + 1} h^x e^{-2\pi\epsilon h} \leq 3 \left(\frac{x}{2\pi\epsilon}\right)^x e^{-2\pi\epsilon \frac{x}{2\pi\epsilon}} \ll_x \epsilon^{-x}$$

D'où, pour $\epsilon > 0$ et $x > 0$,

$$g_1(\epsilon, x) \ll_x \epsilon^{-x} + \int_1^{+\infty} t^x e^{-2\pi\epsilon t} dt$$

$$\ll_x \epsilon^{-x} + \epsilon^{-x-1} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du$$

$$\ll_x \epsilon^{-x-1}$$

ce qui termine le cas $l = 1$.

Maintenant, on suppose $l \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

On remarque facilement que, pour tout $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^l$, comme $|\mathbf{h}| = \sum |h_j|$, alors

$$1 + |\mathbf{h}|^x \ll_x \prod_{j=1}^l (1 + |h_j|^x)$$

d'où, pour $\epsilon > 0$ et $x > 0$,

$$g_l(\epsilon, x) = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^l} (1 + |\mathbf{h}|^x) e^{-2\pi\epsilon |\mathbf{h}|}$$

$$\ll_x \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^l} \prod_{j=1}^l (1 + |h_j|^x) e^{-2\pi\epsilon \sum_{j=1}^l |h_j|}$$

$$\ll_x \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^l} \prod_{j=1}^l (1 + |h_j|^x) e^{-2\pi\epsilon |h_j|} = g_1(\epsilon, x)^l$$

et donc, comme on sait d'après le cas $l = 1$ que $g_1(\epsilon, x) \ll_x \epsilon^{-x-1}$, on a que, pour $\epsilon > 0$ et $x > 0$,

$$g_l(\epsilon, x) \ll_x \epsilon^{-(x+1)l}$$

et ceci termine la démonstration du lemme IV.1 et du théorème 3. C.Q.F.D.

CHAPITRE V

**Application arithmétique :
“Problème des diviseurs généralisé”
Démonstration du théorème 4 et extension partielle
d’une conjecture de L. Ehrenpreis**

I) Introduction

Dans toute la suite, $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme à n variables qui vérifie l'hypothèse

H₀S : $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$ et $P(x + iy) \neq 0$ pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ et tout $y \in \mathbf{B}(0, \varepsilon_0)$ où $B \in]0, 1[$ et $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ sont fixés.

Nous noterons, quel que soit $t > 0$,

$$N_p(t) := \text{card} \{m \in \mathbb{Z}^n \mid P(m) \leq t\} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{*n} \\ P(m) \leq t}} 1$$

et

$$\begin{aligned} V_p(t) &:= \text{Vol} \{x \in [1, +\infty[^n \mid P(x) \leq t\} \\ &= \int_{\{P(x) \leq t\} \cap [1, +\infty[^n} dx \end{aligned}$$

Nous poserons aussi, pour $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle assez grande,

$$Y(P; s) := \int_{[1, +\infty[^n} [P(x)]^{-s} dx$$

et

$$Z(P; s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} [P(m)]^{-s}$$

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique, quand t tend vers $+\infty$, de $N_p(t)$. C'est l'objet du théorème 4. Ensuite, nous comparerons le comportement asymptotique à l'infini de $N_p(t)$ et $V_p(t)$. C'est l'objet des corollaires 1 et 2, qui montrent que la conjecture de Leon Ehrenpreis, démontrée par Ben Lichtin dans le cadre des polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ hypoelliptiques, ne s'étend que partiellement à notre cadre qui contient comme cas particulier les polynômes hypoelliptiques, ainsi que les polynômes non dégénérés par rapport à leurs polyèdres de Newton à l'infini.

L'idée de base de la conjecture de L. Ehrenpreis est que, comme en quelque sorte $V_p(t)$ n'est rien d'autre qu'une régularisation de $N_p(t)$, alors il est naturel de souhaiter que $V_p(t)$ soit une bonne approximation de $N_p(t)$ quand t tend vers $+\infty$. En termes plus exacts, on s'attend à ce qu'il existe $\theta > 0$ tel que

$$N_p(t) - V_p(t) = O\left(\frac{V_p(t)}{t^\theta}\right)$$

quand t tend vers $+\infty$.

Ceci a été démontré par B. Lichtin [13] dans le cas où le polynôme P est hypoelliptique. Dans notre cadre, l'énoncé analogue est faux. La raison heuristique est que, à défaut de conditions draco-niennes sur P , qui font que la croissance est uniforme sur le quadrant $[1, +\infty[^n$, rien n'empêche le polynôme P d'avoir une croissance anormale au voisinage des $m \in \mathbb{N}^{*n}$.

Quant à l'intérêt de l'étude du comportement à l'infini de $N_p(t)$ et les applications que nous pouvons en tirer en théorie analytique des nombres et au-delà, ceci a été discuté en détail dans le chapitre 0 (introduction générale).

II) Rappel des résultats essentiels et lemmes intermédiaires.

Il est facile de voir que les théorèmes 1, 2, 3 que nous avons établis dans les chapitres précédents entraînent les résultats suivants :

R1 : $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans un demi plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \operatorname{Re} s > \alpha\}$.

On note $\sigma_0 = \sigma_0(P)$ le meilleur α possible. C'est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P; s)$. Il vérifie $\sigma_0 \in \mathbb{Q}_+^*$.

R2 : $s \mapsto Z(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans une suite de la forme $\left\{ \sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ où $M = M(P) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend que de P .

R3 : L'abscisse de convergence $\sigma_0 = \sigma_0(P)$ est un vrai pôle de $s \mapsto Z(P; s)$, d'où il résulte que c'est son plus grand pôle.

R4 : Il existe $A = A(P) \in \mathbb{Q}_+^*$, ne dépendant que de P , tel que, si l'on note $\tilde{Z}(P; s)$ le prolongement méromorphe de $s \mapsto Z(P; s)$, on a, pour $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $N > 0$,

$$\tilde{Z}(P; s) \ll_{N, \delta, \varepsilon} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \sigma_0 - N$ et $|\tau| \geq \delta$.

De même, le théorème 5 que nous avons déjà établi entraîne comme cas particulier les résultats suivants :

$\tilde{\text{R}}1$: $s \mapsto Y(P; s) = \int_{[1, +\infty[} P^{-s}(x) dx$ existe et est holomorphe dans un demi plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \operatorname{Re} s > \alpha\}$.

On note $\sigma'_0 = \sigma'_0(P)$ le meilleur α possible. C'est l'abscisse de convergence de $Y(P; s)$. Il vérifie $\sigma'_0 \in \mathbb{Q}_+^*$.

$\tilde{\text{R}}2$: $s \mapsto Y(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans une suite de la forme $\left\{ \sigma'_0 - \frac{k}{M'} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ où $M' = M'(P) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend que de P .

$\tilde{\text{R}}4$: Il existe $B = B(P) \in \mathbb{Q}_+^*$, ne dépendant que de P , tel que, si l'on note $\tilde{Y}(P; s)$ le prolongement méromorphe de $s \mapsto Y(P; s)$, on a, pour $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $N > 0$,

$$\tilde{Y}(P; s) \ll_{N, \delta, \varepsilon} 1 + |\tau|^{B(\sigma'_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \sigma'_0 - N$ et $|\tau| \geq \delta$.

Pour être complète, il ne manque à cette liste qu'un résultat $\tilde{\text{R}}3$ analogue à R3. Ceci est l'objet du lemme suivant :

Lemme V.1 (Condition $\tilde{\text{R}}3$)

L'abscisse de convergence $\sigma'_0 = \sigma'_0(P)$ de $s \mapsto Y(P; s)$ est un vrai pôle, et donc le plus grand pôle, de $\tilde{Y}(P; s)$.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme V.2

On a $\sigma_0(P) = \sigma_0'(P)$, c'est-à-dire que, si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifie H_0S , alors l'abscisse de convergence de $Z(P; s) = \sum P^s(m)$ est la même que celle de $Y(P; s) = \int P^{-s}(x) dx$.

Maintenant on va s'attaquer aux démonstrations des lemmes V.1 et V.2.

III) Démonstration du lemme V.1

La démonstration de ce lemme est pratiquement la même que celle du fait que σ_0 est un vrai pôle de $Z(P; s)$.

Nous notons $\tilde{Y}(P; s)$ le prolongement méromorphe de $Y(P; s)$ à \mathbb{C} . Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que l'abscisse de convergence σ_0' n'est pas un point singulier de $\tilde{Y}(P; s)$. Alors il existe $r > 0$ tel que $s \mapsto \tilde{Y}(P; s)$ est holomorphe dans le disque ouvert $D(\sigma_0', 2r)$. Soit $\sigma_1 \in]\sigma_0', \sigma_0' + r[$. On a alors

$$D(\sigma_1, r) \subset D(\sigma_0', 2r)$$

d'où $s \mapsto \tilde{Y}(P; s)$ est analytique dans le disque ouvert $D(\sigma_1, r)$ et par suite développable en série entière autour de σ_1 dans ce disque, c'est-à-dire

pour tout $s \in D(\sigma_1, r)$, on a

$$\tilde{Y}(P; s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{ds^k} \tilde{Y}(P; s) \right|_{s=\sigma_1} (s - \sigma_1)^k$$

Or, dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0'\}$, on a

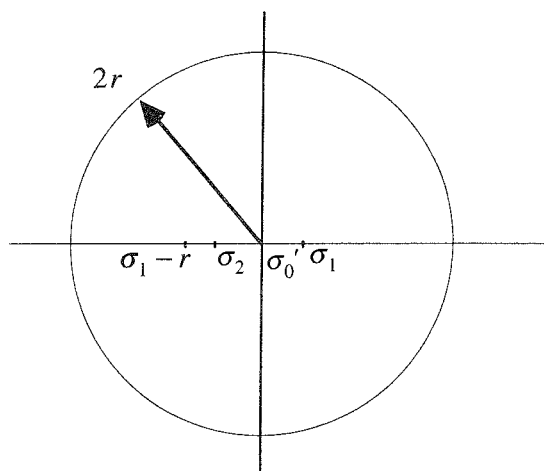
$$\tilde{Y}(P; s) = Y(P; s) = \int_{[1, +\infty[^n} \frac{1}{P(x)^s} dx$$

avec convergence uniforme sur tout compact de ce demi-plan. D'où, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$\frac{d^k}{ds^k} \tilde{Y}(P; s) = \frac{d^k}{ds^k} Y(P; s) = \int_{[1, +\infty[^n} \frac{(-\operatorname{Log} P(x))^k}{(P(x))^s} dx$$

avec convergence uniforme sur tout compact. En particulier on a, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\left. \frac{d^k}{ds^k} \tilde{Y}(P; s) \right|_{s=\sigma_1} = \left. \frac{d^k}{ds^k} Y(P; s) \right|_{s=\sigma_1} = \int_{[1, +\infty[^n} \frac{(-\operatorname{Log} P(x))^k}{(P(x))^{\sigma_1}} dx$$



On en déduit donc que, pour $|s - \sigma_1| < r$, la série

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(P; s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s - \sigma_1)^k \int_{[1, +\infty[^n} \frac{(-\text{Log } P(\mathbf{x}))^k}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[1, +\infty[^n} \frac{1}{k!} (\sigma_1 - s)^k \frac{(\text{Log } P(\mathbf{x}))^k}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

converge.

Mais $\sigma_0' < \sigma_1 < \sigma_0' + r$, ce qui implique $\sigma_1 - r < \sigma_0'$, et, par suite, il existe $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma_1 - r < \sigma_2 < \sigma_0' < \sigma_1.$$

En particulier, $\sigma_2 \in D(\sigma_1, r)$. D'où, d'après ce qui précède, la série

$$\tilde{Y}(P; \sigma_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[1, +\infty[^n} \frac{1}{k!} (\sigma_1 - \sigma_2)^k \frac{(\text{Log } P(\mathbf{x}))^k}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} d\mathbf{x}$$

converge.

Mais quels que soient $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^{*n}$,

$$\frac{1}{k!} (\sigma_1 - \sigma_2)^k \frac{(\text{Log } P(\mathbf{x}))^k}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} \geq 0$$

donc cette série multiple est à termes positifs et, par conséquent, l'interversion des sommations ne change en rien la convergence. Donc la série

$$\begin{aligned} \int_{[1, +\infty[^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^k}{k!} \frac{(\text{Log } P(\mathbf{x}))^k}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} d\mathbf{x} &= \int_{[1, +\infty[^n} \frac{1}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((\sigma_1 - \sigma_2) \text{Log } P(\mathbf{x}))^k d\mathbf{x} \\ &= \int_{[1, +\infty[^n} \frac{1}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_1}} e^{(\sigma_1 - \sigma_2) \text{Log } P(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \int_{[1, +\infty[^n} \frac{1}{(P(\mathbf{x}))^{\sigma_2}} d\mathbf{x} \\ &= Y(P; \sigma_2) \end{aligned}$$

converge, d'où $\sigma_2 \geq \sigma_0$ qui est l'abscisse de convergence de $Y(P; s)$, ce qui est absurde. Ceci termine la démonstration du lemme V.1, C.Q.F.D.

IV) Démonstration du lemme V.2

On veut montrer que $\sigma_0 = \sigma_0'$. Pour cela, nous procéderons par double inégalité.

Preuve que $\sigma_0' \geq \sigma_0$:

Pour démontrer cette inégalité, nous établirons une nouvelle formule sommatoire. Cette formule est basée sur la formule d'Euler élémentaire suivante : si f est une fonction \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$ telle que f et $f' \in L^1([1, +\infty[)$, alors

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \frac{1}{2}f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)dt + \int_1^{+\infty} f'(t)B(t)dt$$

où $B(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$ est la première fonction de Bernoulli.

Par itération, on obtient que, si f est de classe \mathcal{C}^n sur $]1, +\infty[$ et vérifie, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq n$, $\partial^\alpha f \in L^1(]1, +\infty[^n)$, alors

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} f(m_1, \dots, m_n) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} f(m)$$

est une somme finie d'intégrales qui, à une permutation des coordonnées près, sont toutes de la forme

$$\int_{]1, +\infty[^{n_1}} \partial^\alpha f(t_1, \dots, t_{n_1}, 1, \dots, 1) B^\alpha(t_1, \dots, t_{n_1}) dt_1 \cdots dt_{n_1}$$

où $n_1 \in \{0, \dots, n\}$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}) \in \mathbb{N}^{n_1}$ vérifie $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1} \leq n_1$ et

$$B^\alpha(t_1, \dots, t_{n_1}) = (B(t_1))^{\alpha_1} \cdots (B(t_{n_1}))^{\alpha_{n_1}}.$$

Soit maintenant $\sigma > \sigma'_0$ fixé. Alors $f = P^{-\sigma}$ vérifie les hypothèses requises pour pouvoir appliquer la formule sommatoire précédente. En effet, il est clair que f est de classe \mathcal{C}^∞ et, comme $\sigma > \sigma'_0$ qui est l'abscisse de convergence, on a que $f \in L^1(]1, +\infty[^n)$. Comme P vérifie $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, la proposition III.2 implique qu'il existe $B \in]0, 1[$ tel que $\frac{\partial^\alpha P}{P}$ est bornée sur $[B, +\infty[$ et une récurrence facile montre alors que, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha f = \partial^\alpha(P^{-\sigma}) = O_{\alpha, \sigma}(P^{-\sigma})$. Il en découle que, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha f \in L^1(]1, +\infty[^n)$. On obtient donc, d'après la formule d'Euler à plusieurs variables, que, pour $\sigma > \sigma'_0$, on a

$$Z(P; \sigma) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-\sigma}(m)$$

est une somme finie d'intégrales qui, à une permutation des coordonnées près, sont toutes de la forme

$$I(\alpha, n) = \int_{]1, +\infty[^{n_1}} \partial^\alpha(P^{-\sigma})(t_1, \dots, t_{n_1}, 1, \dots, 1) B^\alpha(t_1, \dots, t_{n_1}) dt_1 \cdots dt_{n_1}$$

où $0 \leq n_1 \leq n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}) \in \mathbb{N}^{n_1}$ et $|\alpha| \leq n_1$.

Mais, sous ces conditions, on a $\partial^\alpha(P^{-\sigma}) = O_{\alpha, \sigma}(P^{-\sigma})$ et $|B^\alpha(t_1, \dots, t_{n_1})| \leq 1$ quel que soit $(t_1, \dots, t_{n_1}) \in]1, +\infty[^{n_1}$. Il en découle que l'intégrale $I(\alpha, n_1)$ est convergente pour $\sigma > \sigma'_0$. Et par suite, comme $Z(P; \sigma)$ est une somme finie de telles intégrales, alors elle converge aussi pour $\sigma > \sigma'_0$. On en déduit que $\sigma'_0 \geq \sigma_0$ qui est égale à l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$. C.Q.F.D.

Preuve de l'inégalité $\sigma'_0 \leq \sigma_0$.

La démonstration de cette inégalité est basée sur les accroissements finis. On fixe $\sigma > \sigma_0$. Alors, si l'on pose $\mu :=$ le degré total de P , on a, quels que soient $m \in \mathbb{N}^{*n}$ et $\theta \in [0, 1[^n$:

$$P(m) = P(m + \theta - \theta) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha P(m + \theta) (-\theta)^\alpha$$

D'où :

$$0 < P(\mathbf{m}) \leq \sum_{|\alpha| \leq \mu} \left| \partial^\alpha P(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) \right| |(-\boldsymbol{\theta})^\alpha|$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 < \frac{P(\mathbf{m})}{P(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta})} &\leq \frac{\sum_{|\alpha| \leq \mu} \left| \partial^\alpha P(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) \right| |(-\boldsymbol{\theta})^\alpha|}{P(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta})} \\ &\leq \sup_{\substack{|\alpha| \leq \mu \\ \mathbf{x} \in [1, +\infty[^n}} \left| \frac{\partial^\alpha P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{x})} \right| \sum_{|\alpha| \leq \mu} 1 \\ &\ll_p 1 \end{aligned}$$

cette dernière inégalité découlant du lemme II.3.

D'où, il existe $C > 0$ ne dépendant que de P tel que, quels que soient $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}$ et $\boldsymbol{\theta} \in [0, 1]^n$, on a

$$0 < CP(\mathbf{m}) \leq P(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta})$$

ce qui implique

$$0 < P^{-\sigma}(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) \leq C^{-\sigma} P^{-\sigma}(\mathbf{m})$$

car $\sigma > \sigma_0 > 0$. D'où, par intégration, on obtient, quel que soit $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}$,

$$0 < \int_{[0, 1]^n} P^{-\sigma}(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \leq C^{-\sigma} P^{-\sigma}(\mathbf{m})$$

c'est-à-dire

$$0 < \int_{\prod_{i=1}^n [m_i, m_i + 1[} P^{-\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C^{-\sigma} P^{-\sigma}(\mathbf{m})$$

et par sommation sur tous les $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}$, on obtient dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} \int_{\prod_{i=1}^n [m_i, m_i + 1[} P^{-\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C^{-\sigma} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-\sigma}(\mathbf{m}) = C^{-\sigma} Z(P; \sigma) < +\infty$$

car $\sigma > \sigma_0 =$ l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$. D'où par conséquent l'intégrale

$$\int_{[1, +\infty[^n} P^{-\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} \int_{\prod_{i=1}^n [m_i, m_i + 1[} P^{-\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

est convergente, ce qui implique que $\sigma \geq \sigma_0'$ qui est l'abscisse de convergence de $Y(P; s)$.

On a donc démontré que $\sigma > \sigma_0$ implique $\sigma \geq \sigma_0'$, et par conséquent $\sigma_0 \geq \sigma_0'$. Donc σ_0 et σ_0' sont égaux, et ceci termine la démonstration du lemme V.2. C.Q.F.D.

III) Démonstration du théorème 4 et des corollaires 1 et 2

Avant de se lancer dans la démonstration du théorème 4 et des corollaires 1 et 2, on va rappeler quelques propriétés de la transformée de Mellin et son inverse. Les propriétés que nous allons utiliser sont contenues dans le résultat standard suivant et de son complément.

Théorème (Théorème taubérien)

Soit ϕ une fonction définie sur \mathbb{R}_+ , croissante, nulle au voisinage de 0. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que :

(1) $\text{pour tout } \varepsilon > 0, \phi(t) = O(t^{a+\varepsilon}) \text{ quand } t \rightarrow +\infty$

On pose, pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$,

(2)
$$F(s) := s \int_0^{+\infty} \phi(t) t^{-s-1} dt$$

Alors la fonction F est définie et holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \text{Re } s > a\}$. De plus, quel que soit $c > a$, on a la formule d'inversion

(3)
$$\frac{1}{2} [\phi(t+0) + \phi(t-0)] = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) t^s \frac{ds}{s} \quad (t > 0)$$

l'intégrale ci-dessus étant convergente en valeur principale.

On suppose que F possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , que ses pôles sont d'ordres $\leq n$ et contenus dans un ensemble de la forme $\{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\}$, où $\sigma_0 > 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par $(\sigma_k)_{k \geq 0}$ la suite des pôles de $s \mapsto \frac{F(s)}{s}$ rangés par ordre décroissant.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ par la relation

(4)
$$Q_k(x) = e^{-\sigma_k x} \text{Res}_{s=\sigma_k} \left(\frac{1}{s} F(s) e^{sx} \right)$$

On a alors

$$\text{degré de } Q_k = (\text{ordre de } \sigma_k \text{ en tant que pôle de } \frac{1}{s} F(s)) - 1 \leq \begin{cases} n-1 & \text{si } \sigma_k \neq 0 \\ n & \text{si } \sigma_k = 0 \end{cases}$$

On suppose en outre qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$,

(5)
$$F(s) \ll 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $a \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$ et $|\tau| \geq 1$.

On a alors, sous ces conditions, le résultat standard suivant :

Lemme (complément du théorème taubérien)

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$(6) \quad \phi(t) = \sum_{k=0}^m t^{\sigma_k} Q_k(\ln t) + O_\varepsilon\left(t^{\sigma_0 - \frac{1}{A} + \varepsilon}\right)$$

où m est le plus grand entier k tel que $\sigma_k > \sigma_0 - \frac{1}{A}$.

Le théorème taubérien et son complément sont standard. On les trouvera par exemple dans la thèse [19] de Patrick Sargos (chapitre 4, "Sur le problème des diviseurs généralisé"). On pourra aussi consulter l'article de P. Jeanquartier [12] "Transformation de Mellin et développement asymptotique", L'Enseignement Mathématique 25 (1979) p. 285-308 ou le livre de J.-I. Igusa [10] "Lectures on forms of higher degree", Tata Institute of Fundamental Research Lectures, Bombay, 1978.

Ceci étant, maintenant nous sommes en mesure de terminer la démonstration du théorème 4 et des corollaires 1 et 2.

Démonstration du théorème 4 (fin)

On suppose que $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifie H_0S . D'après le lemme II.1, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que $P(x) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$.

D'où, pour tout $t > 0$ et $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n}$, on a

$$\begin{aligned} P(\mathbf{m}) \leq t &\Rightarrow c(m_1 \cdots m_n)^\alpha \leq t \\ &\Rightarrow 1 \leq m_1 \cdots m_n \leq c^{-1/\alpha} t^{1/\alpha} \\ &\Rightarrow t \geq c > 0 \text{ et } \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in [1, c^{-1/\alpha} t^{1/\alpha}]^n \end{aligned}$$

d'où la fonction $t \mapsto N_p(t) = \#\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(\mathbf{m}) \leq t\}$ vérifie :

(i) $N_p(t) \equiv 0$ sur $]0, c[$

et

(ii) $N_p(t) = O(t^{n/\alpha})$ quand t tend vers $+\infty$.

De plus, il est évident que $t \mapsto N_p(t)$ est croissante au sens large.

On en déduit que $\phi(t) = N_p(t)$ vérifie les hypothèses du théorème taubérien.

De plus, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} F(s) &= s \int_0^{+\infty} \phi(t) t^{-s-1} dt = s \int_0^{+\infty} N_p(t) t^{-s-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-s} dN_p(t) \quad (\text{intégration par parties au sens de Stieltjes}) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(\mathbf{m}) \\ &= Z(P; s) \end{aligned}$$

et les points (R1), (R2), (R3) et (R4) du paragraphe II de ce chapitre permettent de voir que $F(s) = Z(P; s)$ vérifie les hypothèses du lemme intitulé "complément du théorème taubérien" ci-dessus.

Ceci permet de conclure que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$N_p(t) = \sum_{k=0}^m t^{\sigma_k} Q_k(\ln t) + O_\varepsilon(t^{\sigma_0 - \frac{1}{A} + \varepsilon})$$

où $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des pôles de $s \mapsto \frac{Z(P; s)}{s}$ classés par ordre décroissant, et où, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$Q_k(X) = e^{-\sigma_k X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_k} \frac{Z(P; s) e^{sX}}{s} \in \mathbb{R}[X]$$

d'où le théorème 4 est démontré, C.Q.F.D.

Démonstration du corollaire 1 (fin).

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$. Alors, d'après le théorème 4, et pour $\theta_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{2}$,

$$N_p(t) = t^{\sigma_0} Q_0(\ln t) (1 + O(t^{-\theta_1}))$$

où σ_0 est le premier pôle de $\frac{Z(P; s)}{s}$. C'est aussi l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$ d'après le point (R3) et où $Q_0(X) = e^{-\sigma_0 X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_0} \frac{Z(P; s) e^{sX}}{s}$ est un polynôme à une indéterminée de degré égal à l'ordre du pôle de $Z(P; s)$ en $s = \sigma_0$ diminué de 1.

En particulier, Q_0 est non identiquement nulle.

De la même façon, il est facile de voir que, si l'on pose

$$\begin{aligned} \phi(t) &= V_p(t) = \int_{[1, +\infty[^n \cap \{x \mid P(x) \leq t\}} dx \\ &= \text{Volume } \{x \in [1, +\infty[^n \mid P(x) \leq t\} \end{aligned}$$

alors ϕ vérifie les hypothèses du théorème taubérien.

De plus, on a de façon immédiate

$$\begin{aligned} F(s) &= s \int_0^{+\infty} \phi(t) t^{s-1} dt \\ &= s \int_0^{+\infty} V_p(t) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-s} dV_p(t) \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-s} \left(\int_{[1, +\infty[^n \cap \{x \mid P(x)=t\}} dx \right) dt \\ &= \int_{[1, +\infty[^n} P^{-s}(x) dx \\ &= Y(P; s) \end{aligned}$$

et les points $\tilde{R}1$, $\tilde{R}2$, $\tilde{R}3$ et $\tilde{R}4$ du paragraphe II de ce chapitre montrent que $F(s) = Y(P; s)$ vérifie les hypothèses du lemme “complément du théorème taubérien”.

Nous en déduisons donc que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$V_p(t) = \sum_{k=0}^{m'} t^{\sigma_k'} Q_k'(\ln t) + O_\varepsilon(t^{\sigma_0' - \frac{1}{B} + \varepsilon})$$

où $(\sigma_k')_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des pôles de $s \mapsto \frac{Y(P; s)}{s}$ classés par ordre décroissant et où, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$Q_k'(X) = e^{-\sigma_k' X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_k'} \frac{Y(P; s) e^{sX}}{s} \in \mathbb{R}[X]$$

En particulier, on a pour $\theta_2 = \frac{\sigma_0' - \sigma_1'}{2}$

$$V_p(t) = t^{\sigma_0'} Q_0'(\ln t) (1 + O(t^{-\theta_2}))$$

où σ_0' est le premier pôle de $s \mapsto \frac{Y(P; s)}{s}$ et est aussi l'abscisse de convergence de $s \mapsto Y(P; s)$ d'après le point $\tilde{R}3$, et où

$$Q_0'(X) = e^{-\sigma_0' X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_0'} \frac{Y(P; s) e^{sX}}{s}$$

est un polynôme à une indéterminée de degré égal à l'ordre du pôle de $Y(P; s)$ en $s = \sigma_0'$ diminué de 1.

En particulier, Q_0' est non identiquement nul.

Donc, si l'on pose :

- (1) $\rho_1 = \sigma_0 =$ l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$,
- (2) $\lambda_1 = \sigma_0' =$ l'abscisse de convergence de $Y(P; s)$,
- (3) $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$
- (4) $A_1(X) = Q_0(X)$ et
- (5) $B_1(X) = Q_0'(X)$

on a évidemment : $\lambda_1 > 0, \rho_1 > 0, \theta > 0, A_1$ et $B_1 \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$,

$$N_p(t) = t^{\rho_1} A_1(\ln t) (1 + O(t^{-\theta}))$$

et
$$V_p(t) = t^{\lambda_1} B_1(\ln t) (1 + O(t^{-\theta}))$$

et ceci termine la démonstration du corollaire 1. C.Q.F.D.

Démonstration du corollaire 2 (fin).

Pour démontrer le corollaire 2, il suffit de montrer que $\rho_1 = \lambda_1$ dans les expressions ci-dessus.

Nous savons que :

$\rho_1 = \sigma_0 =$ l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$

$\lambda_1 = \sigma_0' =$ l'abscisse de convergence de $Y(P; s)$

De plus, d'après le lemme V.2, on a $\sigma_0 = \sigma_0'$, c'est-à-dire $Z(P; s)$ et $Y(P; s)$ ont même abscisse de convergence, d'où $\rho_1 = \lambda_1$, et ceci termine la démonstration du corollaire 2. C.Q.F.D.

IV) Quelques remarques.

Remarque 1

Comme nous l'avons déjà signalé, la conjecture de L. Ehrenpreis ne s'étend que partiellement au cas des polynômes qui vérifient H_0S . Pour s'en convaincre, il suffit de se placer en dimension deux, c'est-à-dire $n = 2$, et de prendre $P(X_1, X_2) := X_1^a X_2^b \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$, où a et b sont deux entiers strictement positifs vérifiant $a < b$.

En effet, un calcul facile montre que l'abscisse de convergence de

$$s \mapsto Y(P; s) = \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} P^{-s}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} x_1^{-as} x_2^{-bs} dx_1 dx_2$$

est $\sigma_0' = \frac{1}{a}$. On a même explicitement, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0'$,

$$Y(P; s) = \frac{1}{(as-1)(bs-1)}$$

De même, l'abscisse de convergence de

$$s \mapsto Z(P; s) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} P^{-s}(m_1, m_2) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-as} m_2^{-bs}$$

est $\sigma_0 = \frac{1}{a}$. On a même explicitement, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$Z(P; s) = \zeta(as) \zeta(bs)$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann.

On retrouve bien le fait que $\sigma_0 = \sigma_0'$ dans ce cas particulier. Mais ce résultat découle bien sûr du lemme général V.2.

Le corollaire 1 montre qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que :

$$N_p(t) = t^{\sigma_0} Q_0(\ln t) (1 + O(t^{-\theta}))$$

et
$$V_p(t) = t^{\sigma_0'} Q_0'(\ln t) (1 + O(t^{-\theta}))$$

où
$$Q_0(X) = e^{-\sigma_0 X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_0} \frac{Z(P; s) e^{sX}}{s}$$

et
$$Q_0'(X) = e^{-\sigma_0' X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_0'} \frac{Y(P; s) e^{sX}}{s}$$

Maintenant, si l'on utilise les expressions explicites déjà calculées : $\sigma_0 = \sigma_0' = \frac{1}{a}$,

pour $\sigma = \text{Re } s > \frac{1}{a}$, $Y(P; s) = \frac{1}{(as-1)(bs-1)}$ et $Z(P; s) = \zeta(as) \zeta(bs)$

on obtient sans difficulté que :

$$Q_0(X) \equiv \zeta\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad Q_0'(X) \equiv \frac{a}{b-a} = \frac{1}{\frac{b}{a}-1}$$

Mais comme $z \mapsto (z-1)\zeta(z)$ est une fonction entière non constante, il existe deux entiers a et b avec $0 < a < b$ tels que $\left(\frac{b}{a}-1\right)\zeta\left(\frac{b}{a}\right) \neq 1$, c'est-à-dire que, pour ce choix de a et b , $Q_0(X) \neq Q_0'(X)$, et par conséquent le polynôme $P(X_1, X_2) = X_1^a X_2^b$ ne vérifie pas la seconde partie de la conjecture de L. Ehrenpreis, bien qu'il soit à coefficients positifs, donc vérifiant $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$.

Remarque 2 :

Comme l'avait indiqué Ben Lichtin dans [14], le but final de cette application arithmétique est d'arriver à étudier le comportement quand t tend vers $+\infty$ de

$$N_p(t, \varphi, S) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \cap S \\ |P(m)| \leq t}} \varphi(m)$$

et
$$V_p(t, \varphi, S) = \int_{\{x \mid |P(x)| \leq t\} \cap S} \varphi(x) dx$$

et de voir dans quelle mesure il existe $\theta > 0$ tel que

$$N_p(t, \varphi, S) - V_p(t, \varphi, S) = O\left(\frac{V_p(t, \varphi, S)}{t^\theta}\right) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } +\infty.$$

où $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme qui vérifie les hypothèses minimales, φ une fonction qui vérifie aussi les hypothèses minimales et S un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

Ce problème général paraît très difficile et rien n'a été fait jusqu'à maintenant dans le cas où S est un ensemble semi-algébrique quelconque. Cependant, dans le cas où S est de la forme $[B, +\infty[$, quelques succès ont été emportés et notre travail se situe dans cette lignée.

Bien que tous les résultats que nous avons énoncé dans ce travail supposent que $\varphi \equiv 1$, il est facile de se convaincre, en examinant de plus près les démonstrations, que ces résultats restent valables dans le cas où φ est, par exemple, le quotient de deux polynômes vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$; en effet, si l'on pose

$$N_p(\varphi, t) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{*n} \\ P(m) \leq t}} \varphi(m)$$

alors il est facile de voir de la même façon que

$$N_p(\varphi; t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z_p(\varphi; s) t^{-s} \frac{ds}{s} + O(1)$$

pour $c \gg 0$, où

$$Z_p(\varphi; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{\varphi(m)}{P(m)^s}$$

et, si φ est le rapport de deux polynômes qui vérifient $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$, alors il est facile de voir que cette série vérifie aussi les conclusions des théorèmes 1, 2 et 3, ce qui permettra de voir que $N_p(\varphi; t)$ vérifie, de la même façon que $N_p(t)$, la conclusion du théorème 4.

En ce qui concerne le cas plus général de plusieurs polynômes, on considère

$$N_{P_1, \dots, P_k}(\varphi; \mathbf{t}) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{*n} \\ P_1(m) \leq t_1, \dots, P_k(m) \leq t_k}} \varphi(m) \quad (\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^k)$$

où $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifient $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$ et φ est le quotient de deux polynômes qui vérifient $\mathbf{H}_0\mathbf{S}$.

Il n'est pas difficile de voir que, pour $c \gg 0$,

$$N_{P_1, \dots, P_k}(\varphi; \mathbf{t}) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \dots \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t_1^{s_1} \dots t_k^{s_k} Z_{P_1, \dots, P_k}(\varphi; \mathbf{s}) \frac{ds_1 \dots ds_k}{s_1 \dots s_k} + O(1)$$

où, quel que soit $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k$ et vérifiant, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\text{Re } s_i \gg 0$, on a

$$Z_{P_1, \dots, P_k}(\varphi; \mathbf{s}) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{\varphi(m)}{(P_1(m))^{s_1} \dots (P_k(m))^{s_k}}$$

et une généralisation facile du théorème 2 permet de voir que la fonction $\mathbf{s} \mapsto Z_{P_1, \dots, P_k}(\varphi; \mathbf{s})$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C}^k avec des pôles situés dans des hyperplans affines de la forme

$$\left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^k \mid \sum_{i=1}^n b_i s_i = d \right\} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^k \mid \langle \mathbf{b}, \mathbf{s} \rangle = d \right\}$$

où $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^k$ et $d \in \mathbb{Z}$.

Ceci permet, par inversion de Mellin, de montrer l'existence de régions \mathcal{R}_i ($i \in I$) en nombre fini et recouvrant $]0, +\infty[^k$ telles que, pour chaque $i \in I$,

$$N_{P_1, \dots, P_k}(\varphi; \mathbf{t}) = t_1^{\mu_{i,1}} \dots t_k^{\mu_{i,k}} A_i(\ln t_1, \dots, \ln t_k) + O\left(t_1^{\mu_{i,1}-\theta} \dots t_k^{\mu_{i,k}-\theta}\right)$$

si $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \longrightarrow (+\infty, \dots, +\infty)$ et $\mathbf{t} \in \mathcal{R}_i$,

où $\mu_i = (\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,k}) \in \mathbb{N}^k$ et $A_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k] \setminus \{0\}$.

Cette dernière remarque, qui demande encore quelques éclaircissements techniques, fera l'objet d'un travail indépendant qui suivra.

CHAPITRE VI

Sur la répartition des zéros des polynômes de plusieurs variables et applications.

I) Introduction

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. On pose $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\}$, l'hypersurface des zéros complexes de P . Soit S un sous-ensemble semi-algébrique non borné de \mathbb{R}^n vérifiant que $\overline{S} \cap Z(P)$ est borné.

Le but de ce chapitre est d'établir un théorème qui permet, *via* ses corollaires, de comprendre comment l'hypersurface $Z(P)$ s'approche de S . Comme application, nous retrouverons un résultat classique en théorie des opérateurs différentiels hyperboliques dû à Lars Hörmander [9] et nous établirons un résultat dual à celui-ci.

Ce théorème et ses corollaires nous permettront de justifier la nouvelle classification par l'exposant rationnel $\beta(P)$ que nous avons introduit dans l'introduction générale.

Les idées de base derrière le théorème essentiel de ce chapitre se trouvent dans le livre de Hörmander [9, Appendix]. Nous avons procédé ici à l'adaptation de ces idées dans un cadre plus général en tenant compte des développements récents de la Géométrie algébrique réelle.

II) Énoncés du théorème 6 et de ses corollaires.

Le résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 6

Soient S un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+1} et $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et semi-algébrique.

On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r > r_0$ l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^n \mid (r, y) \in S\}$ est non vide.

On pose alors, pour $r > r_0$, $\alpha(r) = \sup_{(r, y) \in S} \varphi(r, y) \in]-\infty, +\infty]$.

Alors on a deux cas, et deux seulement, à savoir :

- soit il existe $r_1 > r_0$ tel que, quel que soit $r \geq r_1$, $\alpha(r) = +\infty$,
- soit il existe $r_1 > r_0$ tel que, quel que soit $r \geq r_1$, $\alpha(r) \in \mathbb{R}$, l'application $r \mapsto \alpha(r)$ est continue et semi-algébrique sur $]r_1, +\infty[$ et possède un développement en série de Puiseux en $+\infty$. En particulier, il existe $A \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha(r) = Ar^a(1 + o(1))$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Voici maintenant le résultat qui a motivé ce chapitre.

Corollaire VI.1

Soient $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et A un sous-ensemble semi-algébrique non borné de \mathbb{R}^n . On suppose que $\overline{A} \cap Z(P)$ est borné dans \mathbb{R}^n . Alors, il existe $r_0 > 0$ tel que $]r_0, +\infty[\subset \|\mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in A$. Et si l'on définit les applications d et $D:]r_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$d(r) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in A \\ \|\mathbf{x}\|=r}} d(\mathbf{x}, Z(P)) \quad \text{et} \quad D(r) = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in A \\ \|\mathbf{x}\|=r}} d(\mathbf{x}, Z(P)) \quad (r > r_0)$$

alors il existe $K_1 = K_1(P, A) > 0$, $K_2 = K_2(P, A) > 0$, $\beta = \beta(P, A) \in \mathbb{Q}$ et $\gamma = \gamma(P, A) \in \mathbb{Q}$ tels que

$$d(r) = K_1 r^\beta (1 + o(1)) \quad \text{et} \quad D(r) = K_2 r^\gamma (1 + o(1)) \quad \text{quand } r \longrightarrow +\infty.$$

On en déduit qu'il existe $r_2 > r_1$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x\| > r_2$, on a

$$\frac{K_1}{2} \|x\|^\beta \leq d(x, Z(P)) \leq 2K_2 \|x\|^\gamma$$

et qu'il existe deux courbes continues semi-algébriques tracées dans A , $r \mapsto x(r)$ et $r \mapsto y(r)$, paramétrées par $r \in]r_2, +\infty[$, telles que :

(i) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|x(r)\| = \lim_{r \rightarrow +\infty} \|y(r)\| = +\infty$, et

(ii) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d(x(r), Z(P))}{\|x(r)\|^\beta}$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d(y(r), Z(P))}{\|y(r)\|^\gamma}$ existent et appartiennent à \mathbb{R}_+^* .

Maintenant, nous allons donner deux corollaires. Le premier est un résultat dû à Hörmander, l'autre est un résultat nouveau dual au premier.

Corollaire VI.2. (Hörmander, [9])

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. On suppose qu'il existe $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ et telle que $Z(P) \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid \|y\| \geq \varphi(\|x\|)\}$. Alors, il existe $h > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$Z(P) \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid \|y\| \geq \|x\|^h - b\}.$$

Corollaire VI.3

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. On suppose qu'il existe $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ bornée, vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ et telle que $Z(P) \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid \|y\| \leq \varphi(\|x\|)\}$. Alors, il existe $h > 0$ et $c > 0$ tels que

$$Z(P) \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid \|y\| \leq c(1 + \|x\|)^{-h}\}.$$

Remarque : Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Le corollaire VI.2 (respectivement VI.3) montre que, si $\|\text{Im } z\|$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers 0) quand $\|\text{Re } z\|$ tend vers $+\infty$, z restant dans $Z(P)$, alors on peut contrôler la façon dont la limite est atteinte.

Les cas extrêmes étudiés dans les corollaires VI.2-3 constituent deux exemples d'application du théorème 6, et il est évident que d'autres situations intermédiaires peuvent être élucidées à l'aide de ce théorème.

Quant au corollaire VI.1, il explique, à l'aide de l'étude des deux fonctions d et D , que l'hyper-surface des zéros complexes $Z(P)$ de P ne s'approche pas de manière arbitraire des ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n à l'infini, et qu'il existe un minimum de régularité liée au caractère algébrique de cette hypersurface.

III) Démonstration du théorème 6 et de ses corollaires

1) Démonstration du théorème 6.

On se donne un sous-ensemble semi-algébrique S de $\mathbb{R}^{n+1} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et semi-algébrique. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \geq r_0$ la fibre

$$S(r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (r, y) \in S\}$$

est non vide. On définit alors l'application $\alpha: [r_0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty]$ par

$$\alpha(r) = \sup_{y \in S(r)} \varphi(r, y)$$

On pose

$$\begin{aligned} A &= \{(y, r, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (r, y) \in S \text{ et } \alpha = \varphi(r, y)\} \\ &= \{(y, r, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (r, y) \in S \text{ et } (r, y, \alpha) \in G\} \end{aligned}$$

où G est le graphe de φ , qui est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, puisque φ est semi-algébrique. Comme en plus S est semi-algébrique, alors A est évidemment semi-algébrique dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On considère

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{n+2} \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (y, r, \alpha) &\longmapsto (r, \alpha) \end{aligned}$$

la projection canonique qui oublie les n premières coordonnées. Alors, d'après le principe de Tarski-Seidenberg (voir th. P1 du chapitre II), on a que $B = \pi(A)$ est semi-algébrique dans \mathbb{R}^2 . On peut alors écrire

$$B = \bigcup_{1 \leq i \leq p} B_i$$

où, quel que soit $i = 1, \dots, p$, il existe p_i et $q_i \in \mathbb{N}$ avec $q_i \leq p_i$ et il existe $f_{i,1}, \dots, f_{i,p_i} \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ tels que

$$B_i = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{i,1}(r, \alpha) > 0, \dots, f_{i,q_i}(r, \alpha) > 0 \text{ et } f_{i,q_i+1}(r, \alpha) = \dots = f_{i,p_i}(r, \alpha) = 0\}$$

Maintenant on utilisera un outil de base en géométrie algébrique réelle, dit le "saucissonnage de Cohen". C'est le résultat suivant :

Théorème (lemme de saucissonnage, [7], [3])

Soit $(P_1(x, y), \dots, P_t(x, y))$ une famille finie de polynômes de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n+1}] \approx \mathbb{R}[x, y]$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$). Alors, il existe une partition finie de \mathbb{R}^n en sous-ensembles semi-algébriques A_1, \dots, A_m telle que, pour chaque i , les zéros de P_1, \dots, P_t au-dessus de A_i sont donnés par des fonctions continues semi-algébriques $\xi_1 < \dots < \xi_{l_i}$, et que le signe de $P_j(x, y)$ ($j = 1, \dots, t$) au-dessus de A_i ne dépend que des signes de $y - \xi_k(x)$ ($k = 1, \dots, l_i$).

Revenons à la démonstration du théorème 6.

En appliquant le lemme de saucissonnage de Cohen à la famille $(f_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p_i}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X_1, X_2]$, on obtient qu'il existe une partition (S_1, \dots, S_l) de \mathbb{R} en l sous-ensembles semi-algébriques telle que, pour tout $k = 1, \dots, l$, les zéros de f_{ij} au-dessus de S_k sont donnés par des fonctions continues semi-algébriques $\alpha_{k,1} < \dots < \alpha_{k,l_k}$ et que les signes des $f_{ij}(r, \alpha)$ au-dessus de S_k ne dépendent que des signes de $\alpha - \alpha_{k,h}(r)$ ($h = 1, \dots, l_k$).

Nous considérons maintenant les "tranches de saucisson" suivantes :

On pose, quels que soient $i = 1, \dots, l$ et $k = 0, \dots, l_i$,

$$H_{i,k} = \begin{cases} \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in S_i \text{ et } \alpha_{i,k}(r) < \alpha < \alpha_{i,k+1}(r)\} & \text{si } 1 \leq k \leq l_i - 1 \\ \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in S_i \text{ et } \alpha < \alpha_{i,1}(r)\} & \text{si } k = 0 \\ \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in S_i \text{ et } \alpha > \alpha_{i,l_i}(r)\} & \text{si } k = l_i \end{cases}$$

On pose aussi, quels que soient $i = 1, \dots, l$ et $k = 1, \dots, l_i$,

$$L_{i,k} = \{(r, \alpha_{i,k}(r)) \mid r \in S_i\}$$

Ce qui précède montre que, quel que soit $i = 1, \dots, p$,

$$B_i = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{i,1}(r, \alpha) > 0, \dots, f_{i,q_i}(r, \alpha) > 0 \text{ et } f_{i,q_i+1}(r, \alpha) = \dots = f_{i,p_i}(r, \alpha) = 0\}$$

est une réunion finie d'un certain nombre de $H_{j,k}$ et de $L_{j,k}$. En particulier,

(* 1)

si $H_{j,k} \cap B_i \neq \emptyset$ (respectivement $L_{j,k} \cap B_i \neq \emptyset$),
alors $H_{j,k} \subset B_i$ (respectivement $L_{j,k} \subset B_i$).

Alors, il existe $I_1 \subset \{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq l \text{ et } 0 \leq k \leq l_i\}$ et $I_2 \subset \{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq l \text{ et } 1 \leq k \leq l_i\}$

tels que

(* 2)

$$B = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathring{B}_i = \left(\bigcup_{(i,k) \in I_1} H_{ik} \right) \cup \left(\bigcup_{(i,k) \in I_2} L_{ik} \right)$$

Or, on sait que, quel que soit $r \geq r_0$, la fibre $\{y \in \mathbb{R}^n \mid (r, y) \in S\}$ est non vide. D'où, pour tout $r \geq r_0$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que, si l'on pose $\alpha = \varphi(r, y)$, on a $(y, r, \alpha) \in A$.

D'où, quel que soit $r \geq r_0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(r, \alpha) \in \pi(A) = B$.

On considère la projection canonique

$$\pi^*: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \alpha) \longmapsto r$$

On a alors $[r_0, +\infty[\subset \pi^*(B)$.

Et comme, d'après (* 2), on a $\pi^*(B) = \bigcup_{i \in J} S_i$, où $J = \pi^*(I_1) \cup \pi^*(I_2)$, on en déduit que

$$[r_0, +\infty[\subset \bigcup_{i \in J} S_i$$

Or, les S_i ($1 \leq i \leq l$) sont des sous-ensembles semi-algébriques de \mathbb{R} deux à deux disjoints. Et comme les sous-ensembles semi-algébriques de \mathbb{R} sont exactement les réunions finies d'intervalles (quelconques, éventuellement ponctuels), nous en déduisons que :

$$(* 3) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{il existe } r_1 > r_0 \text{ et } i_0 \in J \text{ tels que }]r_1, +\infty[\subset S_{i_0} \text{ et,} \\ \text{quel que soit } i \in \{1, \dots, l\} \setminus \{i_0\}, S_i \subset]-\infty, r_1] \end{array}}$$

De plus, si l'on pose

$$I_1^* = \{k \in \mathbb{N} \mid (i_0, k) \in I_1\} \subset \{0, \dots, l_{i_0}\}$$

$$I_2^* = \{k \in \mathbb{N} \mid (i_0, k) \in I_2\} \subset \{1, \dots, l_{i_0}\}$$

et

$$\tilde{B} = \left(\bigcup_{k \in I_1^*} H_{i_0 k} \right) \cup \left(\bigcup_{k \in I_2^*} L_{i_0 k} \right)$$

on a, d'après (* 3), pour tout $r > r_1$,

$$\begin{aligned} \alpha(r) &:= \sup \{ \varphi(r, y) \mid (r, y) \in S \} = \sup \{ \alpha \mid \text{il existe } y \in \mathbb{R}^n \text{ vérifiant } (r, y) \in S \text{ et } \alpha = \varphi(r, y) \} \\ &= \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in B = \pi(A) \} = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \} \end{aligned}$$

On a donc

$$(* 4) \quad \boxed{\text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \}}$$

On distingue alors deux cas : soit $l_{i_0} \in I_1^*$, soit $l_{i_0} \notin I_1^*$.

Premier cas : on suppose que $l_{i_0} \in I_1^*$.

On a alors, $H_{i_0, l_{i_0}} \subset \tilde{B}$.

D'où, d'après (* 4), on a, pour tout $r > r_1$,

$$\begin{aligned} \alpha(r) &\geq \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in H_{i_0, l_{i_0}} \} = \sup \{ \alpha \mid r \in S_{i_0} \text{ et } \alpha > \alpha_{i_0, l_{i_0}}(r) \} \\ &\geq \sup \{ \alpha \mid \alpha > \alpha_{i_0, l_{i_0}}(r) \} \quad (\text{car }]r_1, +\infty[\subset S_{i_0}) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Donc, on a démontré que, quel que soit $r > r_1$, $\alpha(r) = +\infty$.

Second cas : on suppose que $l_{i_0} \notin I_1^*$.

On pose alors :

$$k_1 = \begin{cases} \sup I_1^* & \text{si } I_1^* \neq \emptyset \\ -\infty & \text{si } I_1^* = \emptyset \end{cases}$$

Comme $I_1^* \cup I_2^* \neq \emptyset$ (sinon, on aurait $\tilde{B} = \emptyset$, ce qui impliquerait que $]r_1, +\infty[\subset \pi^*(\tilde{B}) = \emptyset$, chose absurde). Alors on distingue deux sous-cas, selon qu'il existe ou non $k > k_1$ tel que $k \in I_2^*$.

Premier sous-cas : on suppose que, quel que soit $k > k_1$, $k \notin I_2^*$.

Ceci implique en particulier que $I_1^* \neq \emptyset$, et, par suite, $k_1 = \sup I_1^* \in \{0, \dots, l_{i_0} - 1\}$. On a alors, quels que soient $r > r_1$ et $\alpha \in]\alpha_{i_0, k_1}(r), \alpha_{i_0, k_1+1}(r)[$, $(r, \alpha) \in \tilde{B}$. D'où :

$$(* 5) \quad \text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \} \geq \alpha_{i_0, k_1+1}(r)$$

De plus, comme $k_1 = \sup I_1^*$ et que, pour tout $k > k_1$, $k \notin I_2^*$, on a :

$$\text{Quel que soit } r > r_1, (\{r\} \times]\alpha_{i_0, k_1+1}(r), +\infty[) \cap \tilde{B} = \emptyset.$$

Nous en déduisons alors :

$$(* 6) \quad \text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \} \leq \alpha_{i_0, k_1+1}(r)$$

D'où, d'après (* 5) et (* 6), on a :

$$(* 7) \quad \text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \} = \alpha_{i_0, k_1+1}(r)$$

Second sous-cas : on suppose qu'il existe $k > k_1$ tel que $k \in I_2^*$. On pose alors

$$k_2 := \sup I_2^*$$

On a évidemment $k_2 \in I_2^*$ et $k_2 > k_1$. D'où, pour tout $r > r_1$, $(r, \alpha_{i_0, k_2}(r)) \in \tilde{B}$. On en déduit que :

$$\text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \} \geq \alpha_{i_0, k_2}(r).$$

Or, par construction de k_2 , et comme $k_2 > k_1$, on a, quel que soit $r > r_1$,

$$(\{r\} \times]\alpha_{i_0, k_2}(r), +\infty[) \cap \tilde{B} = \emptyset$$

On en déduit donc que :

$$(* 8) \quad \text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \sup \{ \alpha \mid (r, \alpha) \in \tilde{B} \} = \alpha_{i_0, k_2}(r)$$

Conclusion du second cas : nous avons établi dans les deux sous-cas qu'il existe i_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $i_0 \leq l$ et $k_0 \leq l_{i_0}$ et il existe $r_1 > r_0$ tels que :

$$(* 9) \quad \text{Quel que soit } r > r_1, \alpha(r) = \alpha_{i_0, k_0}(r)$$

Donc, comme α_{i_0, k_0} est une fonction continue semi-algébrique sur $]r_1, +\infty[$, alors :

$$(* 10) \quad \alpha \text{ est une fonction continue semi-algébrique sur }]r_1, +\infty[$$

Mais par définition de α_{i_0, k_0} , il existe $f_{ij} \neq 0$ telle que, quel que soit $r \in S_{i_0}$, $f_{ij}(r, \alpha_{i_0, k_0}(r)) = 0$.

D'où, il existe $G \in \mathbb{R}[X_1, X_2] \setminus \{0\}$ tel que

$$(* 11) \quad \text{Quel que soit } r > r_1, G(r, \alpha(r)) = 0$$

Soit $F \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ le polynôme qui a les mêmes facteurs irréductibles que G , mais sans répétition. On a $F \neq 0$ et, quel que soit $r > r_1$, $F(r, \alpha(r)) = 0$. Mais $F \neq 0$ implique que $m := \deg_{X_2}(F)$

vérifie $m \geq 1$. En effet, si m était nul, alors il existerait un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $F(X_1, X_2) = R(X_1)$. Et on aura en particulier, quel que soit $r > r_1$, $R(r) = F(r, \alpha(r)) = 0$, ce qui impliquerait $R \equiv 0$, et par suite $F \equiv 0$, absurde. Ceci étant, en appliquant le théorème P2 du chapitre II, on obtient qu'il existe $r_2 > r_1$, une fonction $C_m:]r_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que $C_m(r) \neq 0$ si $r > r_2$ et m fonctions continues semi-algébriques sur $]r_2, +\infty[$ T_1, \dots, T_m deux à deux distinctes (car F est sans facteur carré) possédant des développements en séries de Puiseux à l'infini, tels que, quels que soient $r > r_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F(r, \alpha) = C_m(r) \prod_{j=1}^m (\alpha - T_j(r))$$

Et comme on sait que, quel que soit $r > r_2$, $F(r, \alpha(r)) = 0$, alors, toujours pour $r > r_2$, il existe $j = j(r) \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\alpha(r) = T_j(r)$.

Mais d'après (* 10), $r \mapsto \alpha(r)$ est continue sur $]r_2, +\infty[$ et les T_j sont continues et deux à deux distinctes sur $]r_2, +\infty[$. On a alors qu'il existe $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que :

$$\text{quel que soit } r > r_2, \alpha(r) = T_{j_0}(r).$$

D'où $r \mapsto \alpha(r)$ est continue semi-algébrique sur $]r_2, +\infty[$ et possède un développement en série de Puiseux en $+\infty$.

Ceci termine ce second cas et ainsi le théorème 6 est démontré. C.Q.F.D.

2) **Démonstration du corollaire 6.1.**

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\}$ et A un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n non borné tel que $\bar{A} \cap Z(P)$ est borné.

D'après un résultat classique de Géométrie algébrique réelle (voir par exemple Michel Coste [3], théorème 2.4.5) A a un nombre fini de composantes connexes, qui sont semi-algébriques. On écrit alors

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i$$

où la réunion est disjointe et, quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$, A_i est connexe et semi-algébrique. Comme A est non borné, il existe $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que A_{i_0} est non borné. Et comme l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue, l'image de A_{i_0} par cette application est un sous-ensemble connexe non borné de \mathbb{R}_+ . Il s'ensuit qu'il existe $r_0 > 0$ tel que :

$$[r_0, +\infty[\subset \{\|x\| \mid x \in A_{i_0}\} \subset \{\|x\| \mid x \in A\}$$

On définit alors les applications $d, D: [r_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$d(r) = \inf_{\substack{x \in A \\ \|x\|=r}} d(x, Z(P)) \quad \text{et} \quad D(r) = \sup_{\substack{x \in A \\ \|x\|=r}} d(x, Z(P))$$

Ces applications sont bien définies.

Soit maintenant $S = \{(r, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid r \geq r_0, y \in A \text{ et } \|y\|^2 = r^2\}$.

Il est évident que S est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+1} , puisque A est un semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

$$\text{Soit } \varphi_1 : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \mathbf{y}) \longmapsto d(\mathbf{y}, Z(P)) \end{array}.$$

Cette application est continue et semi-algébrique.

$$\text{En effet, soit } \pi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (r, \mathbf{y}) \longmapsto \mathbf{y} \end{array} \text{ la projection canonique.}$$

L'application π est évidemment continue et semi-algébrique.

$$\text{Soit } \psi : \begin{array}{l} \pi(S) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{y} \longmapsto d(\mathbf{y}, Z(P)) \end{array}.$$

Comme S est semi-algébrique dans \mathbb{R}^{n+1} et π est la projection canonique, alors, d'après le principe de Tarski-Seidenberg, $\pi(S)$ est semi-algébrique dans \mathbb{R}^n . De plus, comme $Z(P)$ peut être vu comme un sous-ensemble algébrique, donc semi-algébrique, dans \mathbb{R}^{2n} , alors un résultat facile de Géométrie algébrique réelle (Michel Coste [3], prop. 2.2.8) montre que ψ est continue semi-algébrique.

On en déduit que $\varphi_1 = \psi \circ (\pi|_S) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et semi-algébrique, ainsi que $\varphi_2 = -\varphi_1 : S \longrightarrow \mathbb{R}$.

Maintenant, remarquons que, quel que soit $r \geq r_0$, on a :

$$D(r) = \sup_{(r, \mathbf{y}) \in S} \varphi_1(r, \mathbf{y}) \text{ et } -d(r) = - \inf_{(r, \mathbf{y}) \in S} \varphi_1(r, \mathbf{y}) = \sup_{(r, \mathbf{y}) \in S} \varphi_2(r, \mathbf{y})$$

Le théorème 6 permet de conclure. C.Q.F.D.

3) Démonstration du corollaire 6.2.

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

et telle que $Z(P) \subset \{ \mathbf{x} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathbf{y}\| \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|) \}$.

En appliquant le corollaire 6.1 avec $A = \mathbb{R}^n$, on a qu'il existe $K = K(P) > 0, \beta = \beta(P) \in \mathbb{Q}$ et $r_1 = r_1(P) > 0$ tels que :

$$(**) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ vérifiant } \|\mathbf{x}\| \geq r_1, d(\mathbf{x}, Z(P)) \geq K\|\mathbf{x}\|^\beta$$

et il existe une courbe $r \longmapsto \mathbf{x}(r) \in \mathbb{R}^n (r > r_1)$ telle que :

$$\|\mathbf{x}(r)\| \longrightarrow +\infty \text{ et } \frac{d(\mathbf{x}(r), Z(P))}{\|\mathbf{x}(r)\|^\beta} \longrightarrow \alpha$$

quand $r \longrightarrow +\infty$, où $\alpha > 0$.

On sait que $P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = 0$ implique $\|\mathbf{y}\| \geq \varphi(\|\mathbf{x}\|)$ et que $\varphi(t) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Il s'ensuit que $d(\mathbf{x}, Z(P)) \longrightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow +\infty$. En effet, sinon il existerait une suite $(\mathbf{x}_m)_{m \geq 0}$ d'

éléments de \mathbb{R}^n et $M > 0$ tel que, quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $d(\mathbf{x}_m, Z(P)) \leq M$ et $\|\mathbf{x}_m\| \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$. Or, quel que soit $m \geq 0$, il existe $z_m = \sigma_m + i \tau_m \in \mathbb{C}^n$ ($\sigma_m, \tau_m \in \mathbb{R}^n$) tels que :

$$P(z_m) = 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}_m - z_m\| \leq d(\mathbf{x}_m, Z(P)) + M \leq 2M.$$

Mais comme $\|\mathbf{x}_m - z_m\| = \|\mathbf{x}_m - \sigma_m - i \tau_m\| \geq \max(\|\mathbf{x}_m - \sigma_m\|, \|\tau_m\|)$.

On a alors, quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x}_m - \sigma_m\| \leq 2M$ et $\|\tau_m\| \leq 2M$.

En particulier, pour tout m , $\|\sigma_m\| \geq \|\mathbf{x}_m\| - \|\mathbf{x}_m - \sigma_m\| \geq \|\mathbf{x}_m\| - 2M \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$.

D'où : $\|\sigma_m\| \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$.

Et comme $\|\tau_m\| \geq \varphi(\|\sigma_m\|)$ et $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, alors $\|\tau_m\| \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$, ce qui contredit le fait que, quel que soit l'entier naturel m , $\|\tau_m\| \leq 2M$: absurde.

En conclusion on a : $d(\mathbf{x}, Z(P)) \rightarrow +\infty$ quand $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$, et, par suite, comme $\|\mathbf{x}(r)\| \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$, alors $d(\mathbf{x}(r), Z(P)) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$. D'où, en vertu du fait que

$$\frac{d(\mathbf{x}(r), Z(P))}{\|\mathbf{x}(r)\|^\beta} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

on en déduit que $\beta = \beta(P) > 0$.

Soit $h = \frac{1}{2} \beta$. On a $h > 0$ et, d'après (**), il existe $K > 0$ et $r_1 > 0$ tels que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|\mathbf{x}\| \geq r_1$, on a $d(\mathbf{x}, Z(P)) \geq K \|\mathbf{x}\|^{2h}$. Ici, K, r_1 et $h = \frac{1}{2} \beta$ ne dépendent que de P .

Or, il existe un $r_2 = r_2(P) > r_1$ tel que $\|\mathbf{x}\| > r_2$ implique $K \|\mathbf{x}\|^h \geq K r_2^{-h} \geq 1$.

D'où : quel que soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|\mathbf{x}\| \geq r_2$, on a $d(\mathbf{x}, Z(P)) \geq \|\mathbf{x}\|^h$.

Et comme l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r_2\}$ est un compact de \mathbb{R}^n , on a alors qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|\mathbf{x}\| \leq r_2$ implique que $d(\mathbf{x}, Z(P)) - \|\mathbf{x}\|^h \geq -b$. On en déduit alors que, quel que soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$d(\mathbf{x}, Z(P)) \geq \|\mathbf{x}\|^h - b.$$

Soit maintenant $z = \mathbf{x} + i \mathbf{y} \in Z(P)$. On a alors :

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - z\| \geq d(\mathbf{x}, Z(P)) \geq \|\mathbf{x}\|^h - b.$$

D'où :

$$Z(P) \subset \{z = \mathbf{x} + i \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|^h - b\}$$

où $h = h(P) > 0$ et $b = b(P) \geq 0$. Ceci termine la démonstration du corollaire 6.2. C.Q.F.D.

3) Démonstration du corollaire 6.3.

Sous les conditions de l'énoncé, soit $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } P(\mathbf{x} + i \mathbf{y}) = 0\}$.

On a que B est la projection de l'ensemble semi-algébrique $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |P(\mathbf{x} + i \mathbf{y})|^2 = 0\}$.

D'après le principe de Tarski-Seidenberg, B est semi-algébrique. On distingue alors deux cas : soit B est borné, soit il ne l'est pas.

Premier cas : on suppose que B est borné.

Soit $a = \sup_{x \in B} \|x\|$. On a évidemment $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$C := \left(1 + \sup_{0 \leq t \leq a} \varphi(t)\right) (1+a)^2 > 0$$

Soit $z = x + iy \in Z(P)$. On a évidemment $x \in B$, d'où $\|x\| \leq a$, et

$$\|y\| \leq \varphi(\|x\|) \leq \sup_{0 \leq t \leq a} \varphi(t)$$

Donc, $\|y\| \leq C(1+a)^{-2} \leq C(1+\|x\|)^{-2}$, car $\|x\| \leq a$.

Donc, $Z(P) \subset \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \mid \|y\| \leq C(1+\|x\|)^{-2}\}$, et le corollaire est démontré dans ce cas.

Second cas : on suppose que B est non borné. Alors, comme B est semi-algébrique, il possède un nombre fini de composantes connexes, toutes semi-algébriques, dont au moins une est non bornée. On l'appelle B_0 . On a alors que l'image par l'application continue $x \mapsto \|x\|$ du connexe non borné B_0 est un connexe non borné de \mathbb{R}_+ , donc il existe $r_0 > 0$ tel que

$$(***) \quad [r_0, +\infty[\subset \{\|x\| \mid x \in B_0\} \subset \{\|x\| \mid x \in B\}$$

Maintenant, soit $\tilde{S} = \{(r, y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in B, \|x\|^2 = r^2 \text{ et } |P(x + iy)|^2 = 0\}$

et soit $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ la projection canonique.
 $(r, y, x) \longmapsto (r, y)$

Alors, comme \tilde{S} est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors, d'après le principe de Tarski-Seidenberg,

$$S = \pi(\tilde{S}) = \{(r, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } x \in B \text{ tel que } \|x\| = r \text{ et } P(x + iy) = 0\}$$

est semi-algébrique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

De plus, d'après (***) , et par définition de B , on a :

$$\text{Quel que soit } r \geq r_0, \{y \in \mathbb{R}^n \mid (r, y) \in S\} \neq \emptyset$$

et ceci montre que l'application $\alpha: [r_0, +\infty[\longrightarrow]-\infty, +\infty[$
 $r \longmapsto \sup_{(r, y) \in S} \|y\|$ est bien définie.

De plus, il est facile de voir que l'application $\varphi: S \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(r, y) \longmapsto \|y\|$ est continue semi-algébrique, et que, quel que soit $r \geq r_0$, $\alpha(r) = \sup_{(r, y) \in S} \varphi(r, y)$.

Donc on est dans les conditions d'application du théorème 6.

Mais comme en plus on sait que, pour tout $r \geq r_0$:

$$\alpha(r) = \sup \{\|y\| \mid (r, y) \in S\} = \sup \{\|y\| \mid \text{il existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = r \text{ et } P(x + iy) = 0\}$$

$$\leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=r} \varphi(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{d'après l'hypothèse sur } \varphi)$$

$$\leq \sup_{t \geq r_0} \varphi(t)$$

et, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$, alors, quitte à remplacer r_0 par un nombre plus grand, on peut supposer que

$$\sup_{t \geq r_0} \varphi(t) \leq 1$$

et par suite on a, pour tout $r \geq r_0$, $\alpha(r) \leq 1$. Alors le théorème 6 implique qu'il existe deux constantes $K = K(P) > 0$ et $\gamma = \gamma(P) \in \mathbb{Q}$ tels que :

$$(***) \quad \alpha(r) = Kr^\gamma (1 + o(1)) \text{ quand } r \longrightarrow +\infty.$$

Donc, il existe $r_1 \geq r_0$ tel que :

$$(***) \quad \text{Quel que soit } r \geq r_1, \quad \frac{K}{2} r^\gamma \leq \alpha(r) \leq 2Kr^\gamma.$$

Soit $z = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in Z(P)$ vérifiant $\|\mathbf{x}\| \geq r_1$. On a :

$$\|\mathbf{y}\| \leq \sup \{ \|\tau\| \mid \text{il existe } \sigma \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\sigma\| = \|\mathbf{x}\| \text{ et } P(\sigma + i\tau) = 0 \}$$

ce qui implique que $\|\mathbf{y}\| \leq \alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq 2K\|\mathbf{x}\|^\gamma$, donc :

$$(***) \quad \text{Pour tout } z = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in Z(P) \text{ vérifiant } \|\mathbf{x}\| \geq r_1, \text{ on a : } \|\mathbf{y}\| \leq 2K\|\mathbf{x}\|^\gamma$$

Maintenant, comme pour tout $r \geq r_1$, on a

$$\alpha(r) = \sup \{ \|\mathbf{y}\| \mid \text{il existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\mathbf{x}\| = r \text{ et } P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = 0 \}$$

alors, pour tout $r \geq r_1$ il existe $\mathbf{x}(r)$ et $\mathbf{y}(r) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|\mathbf{x}(r)\| = r$, $P(\mathbf{x}(r) + i\mathbf{y}(r)) = 0$ et

$$\alpha(r) - \frac{1}{r} \leq \|\mathbf{y}(r)\| \leq \alpha(r).$$

Donc, pour tout $r \geq r_1$, on a :

$$\frac{K}{2} r^\gamma \leq \alpha(r) \leq \frac{1}{r} + \|\mathbf{y}(r)\| \leq \frac{1}{r} + \varphi(\|\mathbf{x}(r)\|) \leq \frac{1}{r} + \varphi(r)$$

ce qui tend vers 0 quand $r \longrightarrow +\infty$, donc γ est nécessairement < 0 . On pose $h = -\gamma > 0$ On a alors, d'après (***) :

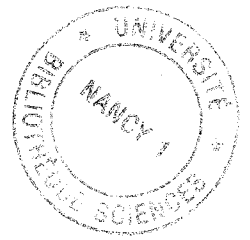
$$(***) \quad z = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in Z(P) \text{ et } \|\mathbf{x}\| \geq r_1 \Rightarrow \|\mathbf{y}\| \leq 2K\|\mathbf{x}\|^{-h} \leq 2K \left(1 + \frac{1}{r_1}\right)^h (1 + \|\mathbf{x}\|)^{-h}$$

Soit $M = 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \varphi(t)$. On a par hypothèse : $M \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit maintenant $z = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in Z(P)$ vérifiant $\|\mathbf{x}\| \leq r_1$. Alors :

$$\|\mathbf{y}\| \leq \varphi(\|\mathbf{x}\|) \leq M \leq M(1 + r_1)^h (1 + \|\mathbf{x}\|)^{-h}$$

et ceci, en plus de (***) , montre que, si l'on pose $C = C(P) = \max \left(2K \left(1 + \frac{1}{r_1}\right)^h, M(1 + r_1)^h \right) > 0$, on a alors, quel que soit $z = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in Z(P)$, $\|\mathbf{y}\| \leq C(1 + \|\mathbf{x}\|)^{-h}$. C.Q.F.D.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] **M. F. Atiyah** : *Resolutions of Singularities and Division of Distributions*. – Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXIII, p. 145-150 (1970).
- [2] **D. Barlet - H. M. Maire** : *Asymptotic Expansions of Complex Integrals via Mellin Transforms*. – Journal of Functional Analysis, vol. 83, n°2 (1989).
- [3] **J. Bochnak – M. Coste – M.-F. Roy** : *Géométrie algébrique réelle*. – Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge vol. 12, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1987).
- [4] **P. Cassou-Noguès** : *Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme*. – Annales de l'Institut Fourier, 31, 4, p. 1-36 (1981).
- [5] **P. Cassou-Noguès** : *Séries de Dirichlet*. – Journées arithmétiques de Metz, Asterisque, 94, p. 1-15 (1982).
- [6] **P. Cassou-Noguès** : *Prolongement des séries de Dirichlet associées à un polynôme à deux indéterminées*. – Journal of Number Theory, 23, p. 1-54 (1986).
- [7] **M. Coste** : *Ensembles semi-algébriques, géométrie algébrique réelle et formes quadratiques*. – Dans "Proceedings, Rennes, 1981", p. 109-138) – Lecture Notes in Mathematics n°959, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982).
- [8] **H. Hironaka** : *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero*. – Annals of Mathematics, vol. 79, p. 109-326 (1964).
- [9] **L. Hörmander** : *Linear Partial Differential Operators*. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [10] **J. I. Igusa** : *Lectures on Forms of Higher Degree*. – Tata Institute of Fundamental Research Lectures, Bombay (1978).
- [11] **A. Ivic** : *The Riemann Zeta-Function*. – Wiley Interscience, New York (1985).
- [12] **P. Jeanquartier** : *Transformations de Mellin et développements asymptotiques*. – L'Enseignement Mathématique, 25, p. 285-308 (1979).
- [13] **B. Lichtin** : *Generalized Dirichlet Series and B-functions*. – Compositio Mathematica, 65, p. 81-120 (1988).
- [14] **B. Lichtin** : *Volumes and Lattice Points – Proof of a Conjecture of L. Ehrenpreis*. – Dans "Singularities" – London Mathematical Society Lecture Notes n°201, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [15] **B. Lichtin** : *Asymptotics of a Lattice Point Problem Determined by Finitely Many Polynomials II*. (à paraître).
- [16] **K. Mahler** : *Über einer Satz von Mellin*. – Mathematische Annalen 100, p. 384-395 (1928).
- [17] **R. H. Mellin** : *Eine Formel für den Logarithmus transzcendenter Funktionen von endlichen Geschlecht*. – Acta Soc. Scient. Fennicæ, 29, n°4 (1900).

- [18] **P. Sargos** : *Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables*. – Annales de l'Institut Fourier, tome 34, fascicule 3, p. 83-123 (1984).
- [19] **P. Sargos** : *Séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables*. – Thèse d'État présentée à l'Université de Bordeaux I (1987).
- [20] **P. Sargos** : *Croissance de certaines séries de Dirichlet et applications*. – Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 367, p. 139-154 (1986).
- [21] **A. Seidenberg** : *A Decision Method for Elementary Algebra*. – Annals of Mathematics, 60, p. 365-374 (1954).
- [22] **A. Tarski** : *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. – University of California Press (1951).
- [23] **G. Tenenbaum** : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. – Revue de l'Institut Élie Cartan, 13, Université de Nancy I (1990) (2e édition : Cours Spécialisés N°1, Société Mathématique de France, Paris 1995).
- [24] **E. C. Titchmarsh** : *The Theory of the Riemann Zeta Function*. – Oxford University Press, Oxford (1951).
- [25] **A. Yger** : *Formules de division et prolongements méromorphes*. – Séminaire d'Analyse (P. Lelong - P. Dolbeault - H. Skoda) Lecture Notes in Mathematics n°1295, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1988).
- [26] **B. L. Van der Wærden** : *Einführung in die Algebraische Geometrie*. – Berlin Verlag von Julius Springer (1939).
- [27] **R. J. Walker** : *Algebraic Curves*. – Princeton University Press (1950).

Nom : ESSOUABRI

Prénom : Driss

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I

en MATHÉMATIQUES PURES



VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 29 DEC. 1995 n° 554

Le Président de l'Université



Résumé :

Les résultats principaux de ce travail sont : l'existence des prolongements méromorphes au plan complexe des séries de Dirichlet, la caractérisation d'un ensemble de candidats pôles, la majoration de leurs ordres par la dimension et l'obtention de majorations des prolongements méromorphes sur les bandes verticales.

Ceci est établi sous une hypothèse sur le polynôme étudié qui, dans un sens, est probablement optimale, et qui, en tout cas, contient strictement les autres classes déjà traitées antérieurement.

Sous cette hypothèse apparaissent des problèmes de prolongement analytique d'intégrales du type transformée de Mellin d'intégrales fibres avec des fonctions-test irrégulières à l'infini. Le traitement de ce type d'intégrales ne rentre pas dans le cadre classique où les fonctions test sont indéfiniment dérivables à l'infini. Nous avons prouvé que de telles intégrales possèdent des prolongements méromorphes au plan complexe avec les mêmes propriétés habituelles.

Ce travail a de nombreuses applications ; nous en avons donné une de nature arithmétique. Elle concerne le problème des diviseurs généralisé.

En complément, quelques résultats qui caractérisent la façon dont une hypersurface algébrique s'approche des sous-ensembles semi-algébriques à l'infini ont été donnés.

Abstract :

The main results of this work are :

The existence of meromorphic continuations of Dirichlet series, the characterization of their set of poles and the fact that the order of their poles does not exceed the dimension of the underlying space. Moreover, we give bounds for these meromorphic continuations on vertical bands.

The assumption under which we prove these results is probably the optimal hypothesis, and in any way strictly includes all classes of polynomials previously treated.

Under this assumption, Mellin transforms of the fiber integral with test functions which are not smooth at infinity appear. The analytic continuation of this type of integrals is not studied in the literature. In our work, we prove that the analytic continuation of this new integral exists and has the expected properties.

The solution to this problem has several applications. We give an arithmetical one : the lattice point problem also known as the generalized divisors' problem.

In the appendix, we describe the way in which an algebraic hypersurface approaches a semi-algebraic set at infinity.

Mots-clefs :

Série de Dirichlet, Prolongement méromorphe, Singularité, Diviseur à croisements normaux, Développement asymptotique, Ensembles semi-algébriques, Transformée de Mellin, Représentation intégrale.

Classification AMS : 30B40, 30B50, 30C15, 30E20, 14P10, 11D85.