

Stabilisation de quelques systèmes élastiques : analyse spectrale et comportement asymptotique

Fatima-Zahra Saouri

▶ **To cite this version:**

Fatima-Zahra Saouri. Stabilisation de quelques systèmes élastiques : analyse spectrale et comportement asymptotique. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2000. Français. NNT : 2000NAN10279 . tel-01748030

HAL Id: tel-01748030
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748030

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

56150

SC N2000 873B

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Stabilisation de quelques systèmes élastiques. Analyse spectrale et comportement asymptotique

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1 SCIENCES BIBLIOTHÈQUE

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 décembre 2000

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy I

(Spécialité Mathématiques appliquées)

par

Fatima-Zahra SAOURI

Composition du jury

Rapporteurs :	Mohand MOUSSAOUI	Professeur, École Centrale de Lyon
	Bopeng RAO	Professeur, Université Louis Pasteur de Strasbourg
Examinateurs :	Fatiha ALABAU	Professeur, Université de Metz
	Assia BENABDALLAH	Maître de conférences, Université de Franche-Comté
	Marius TUCSNAK	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I
Directeur de thèse :	Francis CONRAD	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I

Institut Élie Cartan Nancy

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu, Monsieur le professeur Francis CONRAD, au contact duquel j'ai beaucoup appris et avec qui c'est toujours un plaisir de travailler.

Je remercie aussi le professeur Bopeng Rao pour m'avoir mise en contact avec Francis CONRAD, et pour avoir fait l'honneur de rapporter sur ma thèse.

Mes remerciements vont aussi au professeur Mohand MOUSSAOUI, pour ses remarques et ses conseils et au professeur Philipe Laurençot pour son idée d'utiliser deux fonctions de Lyapunov, dans le dernier chapitre.

Je suis reconnaissante aux trois rapporteurs, Fatiha ALABAU, Assia BENABDALLAH, et Marius TUCSNAK qui ont bien voulu examiner mon travail.

Je ne voudrais pas oublier de remercier les membres des laboratoires des Universités de Nancy et Strasbourg, et ceux de l'IUT Charlemagne, pour leur amabilité et leur encouragement à mener ce travail à bonne fin.

Je me montrerais bien ingrate si je ne remerciais pas mes voisins de bureau (ceux de Nancy et de Strasbourg).

Une pensé spéciale est déstinée à Ahmed, qui m'a tant encouragée.

En fin je dédie cette thèse à ma Maman, dont l'énergie et le courage imprègnent chaque mot de cette thèse. A toi Mama ... et à Papa aussi.

Table des matières

1 Rappels sur la théorie de Shkalikov **3**
1.1 Rappels et définitions. 3
1.2 Théorème de Shkalikov. 5

2 Poutre avec contrôle force. Étude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique. **9**
2.1 Introduction. 9
2.2 Analyse spectrale. 13
2.3 Appendice. 19

3 Poutre avec contrôle moment. Étude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique **23**
3.1 Introduction. 23
3.2 Formulation du problème. 25
3.3 Résultat principal. 26
3.3.1 Comportement asymptotique des valeurs propres. . . . 28
3.3.2 Calcul de $\Re e\, \tau_n$. 32
3.4 Appendice. 37
3.4.1 Étude du problème dans le cas de masse nulle. 37
3.4.2 Régularité forte : cas où la masse est non nulle. 45
3.4.3 Résultats de stabilité uniforme et non uniforme. 49

4 Pont roulant avec feedback sans terme de position. Comportement asymptotique. **53**
4.1 Introduction. 53
4.2 Rappels. 55
4.2.1 Feedback en position et vitesse. 55
4.2.2 Feedback en position, vitesse et vitesse de rotation. . . 55
4.2.3 Feedback linéaire en position, vitesse et vitesse de rotation. 56
4.3 Étude détaillée du cas $\alpha = 0$, feedback linéaire en vitesse. . . . 56

4.3.1 Caractère bien posé du problème d'évolution. 56
4.3.2 Analyse spectrale du problème. 61
4.3.3 Comportement asymptotique en temps 63
4.4 Cas de feedback non linéaire avec $\alpha = 0$ 70
4.5 Appendice. 77
4.5.1 Précompacité des trajectoires. 77
4.5.2 Analyse spectrale, cas où $a \equiv 1$. 80
4.5.3 Application de la théorie de Shkalikov, $a \equiv 1$ 82

Introduction

On se propose, dans ce travail, d'étudier quelques questions de stabilisation de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type ondes ou poutres, avec un contrôle frontière qui est un bouclage sur l'état.
La question qu'on s'est posé en premier était la suivante : étant donné un système uniformément stable, peut-on déterminer le taux optimal de décroissance de l'énergie par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au problème ?
La réponse est oui si on peut montrer que cet opérateur admet un système de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de l'espace d'énergie.
Parmi les méthodes classiques pour montrer ce genre de résultat, il y a la méthode de perturbation de Bari, qui s'avère plutôt difficile à appliquer lorsque les valeurs propres apparaissent également dans les conditions au bord, ce qui est le cas pour les problèmes qu'on étudie.
La théorie de Shkalikov [24] paraît mieux adaptée pour ce type de problèmes, mais demande une adaptation à chacun d'entre eux, notamment pour montrer que l'opérateur linéarisé au sens de Shkalikov (pour lequel on obtient la propriété de base de Riesz) permet de reconstituer l'opérateur naturel du problème avec sa base de Riesz formée de vecteurs propres.

Dans le premier chapitre on fait un bref rappel de la théorie de Shkalikov appliquée dans les deux chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, on considère une équation des poutres d'Euler-Bernoulli encastrée à une extrémité, avec un contrôle force en vitesse à l'extrémité libre (sans masse).
On obtient un résultat de base de Riesz et par suite que le taux optimal de décroissance de l'énergie est égal à l'abscisse spectrale de l'opérateur qui engendre le système.
Signalons que ce résultat généralise celui donné par F. Conrad et O. Morgül [9], obtenu par une méthode de perturbation, valable dans le cas de valeurs propres simples, ce qui était vrai "génériquement".

Dans le troisième chapitre, on considère une équation des poutres d'Euler-Bernoulli encastrée à une extrémité, avec un contrôle moment en vitesse de rotation à l'autre extrémité (avec ou sans masse). On obtient, en gros, le même résultat que celui du chapitre précédent, sauf que la reconstitution de l'opérateur du problème est plus délicate. On établit aussi un résultat de stabilité uniforme dans le cas où on a un contrôle moment et un contrôle force, qu'on démontre par un théorème de perturbation de Gibson [10], ainsi qu'un résultat de non stabilité uniforme dans le cas particulier où on n'a qu'un contrôle force, qu'on démontre par un théorème classique de perturbation compacte de Russell [21].

Dans la deuxième partie de ce travail, qui constitue le quatrième chapitre, on étudie un modèle de pont roulant formé d'un câble flexible pesant attaché à un chariot se déplaçant sur un rail. À l'autre extrémité est attachée une masse à transporter. La commande est la force pilotant le chariot. Il s'agit de transporter la charge d'une position à une autre, en contrôlant les oscillations du système.
Le contrôle choisi ici ne dépend que de la vitesse et non pas de la vitesse et de la position, problème qui avait été traité auparavant [7]. On est alors dans le cadre d'un opérateur non coercif, 0 est une valeur propre du système. L'ensemble ω-limite d'une trajectoire contient *a priori* les constantes.
Tout d'abord, on suppose que le contrôle est linéaire et on montre que le problème est bien posé au sens des semi-groupes de contractions.
On se sert du fait que dans ce problème il y a deux fonctions de Lyapunov, l'énergie naturelle et une fonction qui reste constante sur les trajectoires.
On montre ensuite, grâce au principe d'invariance de LaSalle et à un résultat "d'unicité" adapté à ce cas non coercif, que la solution tend vers une constante que l'on explicite en fonction de la condition initiale uniquement.
Dans un cas particulier on peut retrouver ce résultat en utilisant une base de Riesz de vecteurs propres (obtenue en appliquant Shkalikov).
En second lieu, on considère que le contrôle est non linéaire. Avec une hypothèse raisonnable sur la non-linéarité, on montre que le problème est bien posé par perturbation de semi-groupes. On établit aussi que asymptotiquement toute solution forte tend vers une constante qui dépend de toute la trajectoire.

Chapitre 1

Rappels sur la théorie de Shkalikov

1.1 Rappels et définitions.

Cette théorie concerne les problèmes de type Sturm-Liouville qui contiennent un paramètre spectral dans les conditions aux bords, de la forme suivante

$$\begin{aligned} l(u,\tau) &= u^{(n)} + p_1(x,\tau)u^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\tau)u = 0 \qquad (1.1.1) \\ U_i(u,\tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik}(\tau)u^{(k)}(0) + b_{ik}(\tau)u^{(k)}(1) = 0 \qquad (1.1.2) \\ \text{pour} \quad i &= 1,2,\ldots,n, \end{aligned}$$

où $p_i(x,\tau) = \sum_{j=0}^{i} p_{ij}(x)\tau^j$; $p_{ii}(x) = c^{te}$, $i = 1,2,\ldots,n$; $p_{nn} \neq 0$, et a_{ik}, b_{ik} sont des polynômes en τ pour tout $i,k \in 1,2,\ldots,n$.
La méthode donne des conditions pour qu'un système de vecteurs propres généralisés forme une base de Riesz dans des espaces convenables.
Pour des problèmes avec paramètre spectral dans les conditions aux limites, elle est souvent plus applicable que les techniques de perturbation (par des résultats de type Bari) qui consistent par exemple à montrer qu'un système de vecteurs propres est ω-linéairement indépendant et quadratiquement proche d'une base de Riesz connue (en général un système de vecteurs propres associés à un problème plus simple que le problème donné).
Elle a été utilisée en particulier dans [11] sur plusieurs exemples (cordes et poutres).
On présente sommairement ci-dessous la démarche utilisée (espaces, opérateurs).

Définition 1.1.1 *On appelle ordre de la condition au bord $U_i(u,\tau)$ de la forme (1.1.2), l'entier k_i tel que $U_i(u,\tau)$ contient des termes $\tau^h u^{(k)}(0)$ ou $\tau^h u^{(k)}(1)$ avec $h+k=k_i$ et ne contient aucun terme de cette forme avec $h+k>k_i$.*
La somme N de tous les $k_i, i=1,2,\cdots,n$ est appelée ordre total des conditions au bord (1.1.2).

Définition 1.1.2 *Les conditions au bord (1.1.2) sont dites normalisées, si tout système de n conditions au bord équivalentes obtenues de (1.1.2) par combinaisons linéaires a un ordre total non inférieur à k.*

Dans la suite, on supposera que les conditions au bord sont normalisées et classées par ordre décroissant : $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$.
On considère l'équation caractéristique de (1.1.1),

$$w^n + p_{11}w^{n-1} + \cdots + p_{nn} = 0,$$

et on désigne par $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ses racines.
On suppose que les racines de l'équation caractéristique sont simples, et que les $p_{ij} \in W_1^{r+j-i+1}(0,1) \cap L^1(0,1)$. Alors, d'après [25] le plan complexe $\mathbb{C}$ peut être divisé en $2h$ secteurs $S_1, S_2, \ldots, S_{2h}, h \leq n$. Dans chaque secteur, (1.1.1) a un système fondamental de solutions $u_k(x,\tau)$, dont les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ sont données par :

$$u_k^{(i-1)}(x,\tau) = w_k^{i-1}\tau^{i-1}e^{w_k\tau x}[\sum_{j=0}^{r}\tau^{-j}\eta_{kij} + O(\tau^{-r-1})]$$

$k, i = 1, \ldots, n$; $r \geq 0$, arbitraire et fixé, $\eta_{kij} \in W_1^{r-i+1}(0,1), i = 0, 1, \cdots, r$.
De plus η_{ki0} ne dépend pas de i, et η_{kij} ne dépend pas du choix du secteur.
On pose :

$$\mu_{J_k} = \sum_{i \in J_k} w_i$$

où $J_k, k = 1, \ldots, n$ est un sous-ensemble quelconque de k éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $k = 0$ on pose $\mu_{J_0} = 0$.
Soit $\mathcal{M}$ le plus petit polygone convexe contenant tous les points μ_{J_k}. Cet ensemble peut être un intervalle.
Les valeurs caractéristiques du problème (1.1.1), (1.1.2) sont déterminées par les zéros du déterminant caractéristique

$$\Delta(\tau) = \det[U_i(u_k,\tau)]_{i,k=1,2,\ldots,n}$$

avec u_k^{i-1} défini précédemment dans les secteurs $S_1, S_2, \ldots, S_{2h}$. Le déterminant peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta(\tau) = \tau^N \sum_{J_k} [F^{J_k}]_r e^{\tau \mu_{J_k}},$$

$$[F^{J_k}]_r = F_0^{J_k} + \tau^{-1} F_1^{J_k} + \ldots + \tau^{-r} F_r^{J_k} + O(\tau^{-r-1}).$$

avec N l'ordre total des conditions au bord (que l'on a supposées normalisées).

Définition 1.1.3 *Le problème (1.1.1), (1.1.2) est dit régulier si les nombres $F_0^{J_k}$, correspondant aux sommets de $\mathcal{M}$ sont non nuls. Il est dit fortement régulier si en plus, tous les zéros de $\Delta(\tau)$ sont asymptotiquement simples et séparés.*

1.2 Théorème de Shkalikov.

Dans ce qui suit, pour le problème aux limites (1.1.1), (1.1.2), on construit un opérateur linéaire H_r, tel que le problème considéré soit équivalent au problème linéaire $H_r U = \tau U$, où U est un élément de l'espace où H_r agit. Cette linéarisation peut être faite de plusieurs manières. En effet, on peut toujours choisir d'autres espaces, plus grands, dans lesquels H_r agit. Ici, on construit l'espace $W^r_{2,U} \oplus \mathbb{C}^N$ qui est le plus naturel de ces espaces et bien adapté aux applications que l'on traitera.
On suppose, sans perte de généralités, que $p_{nn} = 1$ et on écrit (1.1.1) sous la forme suivante

$$l(u,\tau) = l_0(u) + \cdots + \tau^{n-1} l_{n-1}(u) + \tau^n u = 0$$

Pour r fixé, on note $W_2^r = \oplus_{j=1}^n W_2^{n-j+r}(0,1)$, et on définit l'opérateur H dans W_2^r par

$$W_2^r \ni \tilde{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \longmapsto H\tilde{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} l_i(v_i) \end{pmatrix} \in W_2^r$$

où $v_0 = u, v_1 = \tau v_0, \cdots, v_{n-1} = \tau v_{n-2}$. On défini aussi $H^i \tilde{v} \in W_2^{r-i}$ (H^i est la puissance d'ordre i de H).

Dans les conditions au bord (1.1.2) on fait les transformations suivantes

$$\tau^i u^{(k)}(0 \text{ ou } 1) = \begin{cases} (H^i \tilde{v})_0^{(k)} (0 \text{ ou } 1), & i+k < n+r \\ \tau^{i+k-n-r+1} (H^{n+r-k-1} \tilde{v})_0^{(k)} (0 \text{ ou } 1), & i+k \geq n+r \end{cases} \tag{1.2.1}$$

où l'indice inférieur 0 signifie qu'on prend la première composante du vecteur associé. On écrit les conditions au bord (1.1.2) sous la forme

$$\tilde{U}_i(\tilde{v}, \tau) = \sum_{k=0}^{\nu_i(r)} \tau^k U_i^k(\tilde{v}), \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.2.2}$$

où les U_i^k ne dépendent plus de τ.

Soit $N_r = \nu_1(r) + \nu_2(r) + \cdots + \nu_q(r)$, où les $\nu_i(r)$ sont les nombres qui figurent dans (1.2.2) (si tous les $\nu_i(r)$ sont nuls, alors $N_r = 0$). On considère l'espace $W_{2,U}^r \oplus \mathbb{C}^{N_r}$ où

$$\begin{aligned} W_{2,U}^r \quad = \quad & \{\tilde{v} \in W_2^r : \tilde{U}_i(H^k \tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_i(H^k \tilde{v}) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n+r-2 \\ & \text{et toutes les conditions au bord d'ordre} \leq n+r-k-2\}. \end{aligned}$$

Soit l'opérateur H_r défini par

$$H_r : \mathcal{D}(\mathcal{H})_r \subset W_{2,U}^r \oplus \mathbb{C}^{N_r} \longmapsto W_{2,U}^r \oplus \mathbb{C}^{N_r}, \tag{1.2.3}$$

$$\begin{aligned} & H_r \left(\tilde{v}; U_1^{\nu_1(r)}(\tilde{v}), z_{12}, \ldots, z_{1\nu_1(r)}; \ldots; U_q^{\nu_q(r)}(\tilde{v}), z_{q2}, \ldots, z_{q\nu_q(r)} \right) = \Big(H\tilde{v}; z_{12} \\ & - U_1^{\nu_1(r)-1}(\tilde{v}), z_{13} - U_1^{\nu_1(r)-2}(\tilde{v}), \ldots, -U_1^0(\tilde{v}); \ldots; z_{q2} - U_q^{\nu_q(r)-1}(\tilde{v}), z_{q3} \\ & - U_q^{\nu_q(r)-2}(\tilde{v}), \ldots, -U_q^0(\tilde{v}) \Big). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

L'opérateur H_r (1.2.4) est appellé linéarisation de Shkalikov du problème (1.1.1), (1.1.2).

Le résultat principal que l'on utilisera dans les chapitres 2 et 3 est le suivant :

Théorème 1.2.1 *[24] On suppose que les conditions au bord sont fortement régulières. Alors :*
(i) Il existe un système de vecteurs propres généralisés (seul un nombre fini d'entre eux ne sont pas vecteurs propres) de l'opérateur H_r (1.2.4) qui forme une base de Riesz dans l'espace $W_{2,U}^r \oplus \mathbb{C}^{N_r}$.
(ii) Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une base de Riesz formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur H_r, dans l'espace $W_{2,U}^r$, est que toutes les conditions au bord soient d'ordre inférieur ou égal à $n+r-1$ (c'est le cas où $N_r = 0$).

Dans le chapitre 2, vu que toutes les conditions au bord, après normalisation sont indépendantes des valeurs propres, on utilise (ii). Alors que dans le chapitre 3, c'est (i) que l'on devra utiliser, puisque l'on a un système hybride avec masse au bord.

Chapitre 2

Poutre avec contrôle force. Étude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique.

2.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilité d'une poutre flexible homogène encastrée à une extrémité, à l'autre extrémité on applique un contrôle force ponctuel proportionnel à la vitesse du déplacement. Le système est uniformément stable. Par la méthode de Shkalikov on estime le taux optimal de décroissance de l'énergie du système régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0 & t \geq 0, \\ u_{xxx}(1,t) = k u_t(1,t) & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où k est une constante positive.
On associe au système (2.1.1) l'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 u_t^2\, dx + \int_0^1 u_{xx}^2\, dx\right].$$

Soit maintenant u une solution régulière du système (2.1.1).
En multipliant la première équation de (2.1.1) par u_t et en intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 (u_t^2)_t\, dx + 2k u_t^2(1) + \int_0^1 (u_{xx}^2)_t\, dx\right] = 0$$

ou encore :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2ku_t^2(1) \leq 0.$$

Le système (2.1.1) est dissipatif dans le sens où son énergie $E(t)$ est décroissante. On sait que le problème (2.1.1) est bien posé et est uniformément exponentiellement stable [4]. On rappelle brièvement ces résultats classiques ci-après. Ensuite, on montrera que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par le spectre du système en utilisant la théorie de Shkalikov. Dans ce problème sans masse et moment d'inertie au bord, la partie (ii) du théorème (1.2.1) du chapitre 1 suffit.

Remarque : Dans [9], il est démontré que l'on a une base de Riesz pour presque tout $k > 0$ grâce à un argument de perturbation de type Bari. On obtient ici le résultat pour tout $k > 0$.
Introduisons les espaces suivants :

$$\mathcal{V} = \{u \in H^2(0,1) \; ; \; u(0) = u_x(0) = 0\}$$

et

$$\mathcal{H} = \{(u,v)^\top / u \in \mathcal{V};\, v \in L^2(0,1)\}.$$

On munit l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ du produit scalaire :

$$\langle y, \tilde{y} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})\, dx$$

où $y = (u,v)^\top$ et $\tilde{y} = (\tilde{u},\tilde{v})^\top \in \mathcal{H}$.
On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(u,v)^\top / u \in H^4(0,1) \cap \mathcal{V}, v \in \mathcal{V} \; ; \; u_{xx}(1) = 0, u_{xxx}(1) = kv(1)\},$$

$$\mathcal{A}y = (v, -u_{xxxx})^\top, \text{si} \quad y = (u,v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.1.2}$$

Le système (2.1.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{y} = \mathcal{A}y \quad \text{et} \quad y(0) = y_0 \in \mathcal{H},$$

avec $y = (u, u_t)^\top$.

Théorème 2.1.1 *L'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un semi-groupe de contractions $S(t)$ dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. On utilise le théorème de Lumer-Phillips [19].
On montre d'abord que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.
Soit $y = (u, v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}y, y\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 (u_{xx}v_{xx} - vu_{xxxx})dx \\ &= -kv^2(1). \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.
Montrons maintenant que pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif. Soit $(f, g)^\top \in \mathcal{H}$, existe-t-il $(u, v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que : $(\lambda I - \mathcal{A})\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ pour $\lambda > 0$?
Soit donc à résoudre :

$$\begin{cases} \lambda^2 u + u_{xxxx} = \ell \\ u(0) = u_x(0) = u_{xx}(1) = 0 \\ u_{xxx}(1) - k\lambda\, u(1) = kf(1) \end{cases} \tag{2.1.3}$$

avec $\ell = \lambda f + g \in L^2(0, 1)$.
On multiplie la première équation de (2.1.3) par $\varphi \in \mathcal{V}$ et on intègre :

$$\lambda^2 \int_0^1 u\varphi\, dx + \int_0^1 u_{xxxx}\varphi\, dx = \int_0^1 \ell\varphi\, dx.$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions au bord de (2.1.3), on obtient :

$$\lambda^2 \int_0^1 u\varphi\, dx + \int_0^1 u_{xx}\varphi_{xx}\, dx + k\lambda u(1)\varphi(1) = \int_0^1 \ell\varphi\, dx + kf(1)\varphi(1). \tag{2.1.4}$$

Le terme de gauche de cette égalité définit une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et coercive pour tout $\lambda > 0$. Le terme de droite de l'égalité (2.1.4) définit une forme linéaire $L(\cdot)$ continue sur $\mathcal{V}$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in \mathcal{V}$ tel que : $a(u, \varphi) = L(\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}$.

Régularité de la solution. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$; l'égalité (2.1.4) devient donc :

$$\lambda^2 \int_0^1 u\varphi dx + \int_0^1 u_{xx}\varphi_{xx} dx = \int_0^1 \ell\varphi dx$$

ou encore

$$\int_0^1 (\lambda^2 u + u_{xxxx} - \ell)\varphi dx = 0.$$

D'où

$$\lambda^2 u + u_{xxxx} = \ell \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,1) \tag{2.1.5}$$

et donc aussi dans $L^2(0,1)$, car :

$$u_{xxxx} = \ell - \lambda^2 u \in L^2(0,1)$$

et par conséquent, l'équation (2.1.5) est au sens de $L^2(0,1)$.
En prenant φ quelconque dans $\mathcal{V}$, on retrouve les conditions au bord en u (2.1.3). On a ainsi trouvé une solution unique $u \in H^4(0,1) \cap \mathcal{V}$ de (2.1.3).
Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lumer-Phillips pour achever la démonstration du théorème 2.1.1.

Pour toute condition initiale $(u_0, v_0)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, le problème (2.1.2) admet une solution unique

$$(u,v)^\top \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(\mathcal{A})), \text{ avec } v = u_t.$$

D'où

$$u \in C^2(\mathbb{R}_+, L^2(0,1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}) \cap C^0(\mathbb{R}_+, H^4(0,1) \cap \mathcal{V}).$$

De plus, on a : $\|(u,v)^\top\|_{\mathcal{H}} \leq \|(u_0,v_0)^\top\|_{\mathcal{H}}$.
L'application $S(t)$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(A) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (u_0,v_0)^\top & \longmapsto & (u,v)^\top \end{array}$$

s'étend en une contraction $S(t)$ sur $\mathcal{H}$ telle que : $(S(t))_{t\geq 0}$ soit fortement continu et pour toute condition initiale $(u_0,v_0) \in \mathcal{H}$, la solution faible de (2.1.2) est définie par :

$$(u,v)^\top = S(t)(u_0,v_0)^\top \quad t \geq 0$$

avec $(u,v)^\top \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$.
D'où

$$u \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(0,1)) \cap C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}).$$

Théorème 2.1.2 *Le semi-groupe de contractions $S(t)$ est uniformément stable : $\exists M \geq 1$ et $\omega > 0$ tels que :*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}E(0) \quad \forall t \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y_0 \in \mathcal{H}.$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir par exemple [4]. Elle est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov et l'utilisation de multiplicateurs.
On cherche maintenant à estimer le taux de décroissance ω optimal.

2.2 Analyse spectrale.

Pour obtenir le taux optimal ω dans le théorème 2.1.2, on va montrer qu'un système de vecteurs propres généralisés de $\mathcal{A}$ forme une base de Riesz de l'espace $\mathcal{H}$.
Le problème aux valeurs propres associées au système fait intervenir les valeurs propres dans les conditions au bords.
Pour ce type de problème, on va appliquer les résultats de Shkalikov [24].
Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{U} = (u, v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ un vecteur propre qui lui est associé. On a donc :

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \lambda u - v = 0 \\ \lambda v + u_{xxxx} = 0 \\ u_{xx}(1) = u_x(0) = u(0) = 0 \\ u_{xxx}(1) = kv(1). \end{cases}$$

En éliminant v, on obtient

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \lambda^2 u = 0 \\ u_{xxx}(1) = k\lambda u(1) \\ u_{xx}(1) = 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On pose $\lambda = \tau^2$, le système devient :

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \tau^4 u = 0 \\ u_{xxx}(1) = k\tau^2 u(1) \\ u_{xx}(1) = 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Les ordres respectifs des conditions aux bords dans (2.2.1) sont :

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 1 \quad \text{et} \quad k_4 = 0.$$

Le polynôme caractéristique (au sens de [24, p. 1314]) de la première équation de (2.2.1) est :

$$\omega^4 + 1 = (\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1)(\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1) = 0.$$

Les racines sont donc :

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Les solutions de (2.2.1) seront de la forme :

$$u(x) = c_1 e^{\tau\omega_1 x} + c_2 e^{\tau\omega_2 x} + c_3 e^{\tau\omega_3 x} + c_4 e^{\tau\omega_4 x}.$$

On pose :

$$f(\tau, \omega) = \tau^2 e^{\tau\omega}(\tau\omega^3 - k).$$

En substituant u dans les conditions au bord du système (2.2.1), on obtient :

$$\begin{bmatrix} f(\tau,\omega_1) & f(\tau,\omega_2) & f(\tau,\omega_3) & f(\tau,\omega_4) \\ \tau^2\omega_1^2 e^{\tau\omega_1} & \tau^2\omega_3^2 e^{\tau\omega_2} & \tau^2\omega_3^2 e^{\tau\omega_3} & \tau^2\omega_4^2 e^{\tau\omega_4} \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.2.2)$$

On notera par $\Delta(\tau)$ le déterminant caractéristique du système linéaire et homogène (2.2.2). Ce dernier a une solution non nulle si et seulement si τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$.

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} \tau^2 e^{\tau\omega_1}(\tau\omega_1^3 - k) & \tau^2 e^{\tau\omega_2}(\tau\omega_2^3 - k) & \tau^2 e^{\tau\omega_3}(\tau\omega_3^3 - k) & \tau^2 e^{\tau\omega_4}(\tau\omega_4^3 - k) \\ \tau^2\omega_1^2 e^{\tau\omega_1} & \tau^2\omega_2^2 e^{\tau\omega_2} & \tau^2\omega_3^2 e^{\tau\omega_3} & \tau^2\omega^2\omega_4^2 e^{\tau\omega_4} \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = \quad & \tau^6 \Big\{ e^{i\tau\sqrt{2}}[-2 - 2i\sqrt{2}k\tau^{-1}] + e^{-i\tau\sqrt{2}}[-2 + 2i\sqrt{2}k\tau^{-1}] \\ & + e^{\tau\sqrt{2}}[-2 - 2\sqrt{2}k\tau^{-1}] + e^{-\tau\sqrt{2}}[-2 + 2\sqrt{2}k\tau^{-1}] - 8 \Big\}. \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

Donc pour $|\tau|$ assez grand, le terme dominant des expressions entre crochets de (2.2.3) est -2, donc les conditions aux bords de (2.2.1) sont fortement régulières au sens de Shkalikov.

Remarque : Le déterminant caractéristique est le même que dans [9] , où il est prouvé que les valeurs propres sont asymptotiquement simples.
Dans l'appendice, on redémontre que les valeurs propres sont asymptotiquement simples et en plus séparées.
Ces propriétés sont essentielles dans le théorème 1.2.1 qu'on utilise pour montrer l'existence de base de Riesz formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur $\mathcal{A}$ dans l'espace d'énergie $\mathcal{H}$.

Pour tout entier r, on note :

$$W_2^r = W_2^{n-1+r}(0,1) \oplus W_2^{n-2+r}(0,1) \oplus \cdots \oplus W_2^r(0,1).$$

On écrit (2.2.1) sous la forme :

$$\ell(u,\tau) = \ell_0(u) + \tau\ell_1(u) + \tau^2\ell_2(u) + \tau^3\ell_3(u) + \tau^4\ell_4(u).$$

Soit l'opérateur H défini par :

$$W_2^r \ni \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \longmapsto H\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \sum_{i=0}^{3} -\ell_i(v_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \end{bmatrix}$$

où $v_0 = u, v_1 = \tau u\,; \ldots ; v_{n-1} = \tau v_{n-2} = \tau^{n-1}u$ avec $n = 4$.
Dans ce qui suit, on utilisera la partie (ii) du théorème 1.2.1 pour montrer l'existence d'une base de Riesz dans l'espace de Shkalikov $W_{2,U}$ (qu'on définit ultérieurement) formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur de Shkalikov H_r, appelé *l*inéarisé de Shkalikov. Ici H_r ne sera autre que H car $N_r = 0$. La condition nécessaire et suffisante dans ce cas est que les ordres de toutes les conditions aux bords doivent être inférieurs ou égaux à $n + r - 1$, ce qui est bien le cas ici pour tout r.
Commençons par normaliser les conditions aux bords au sens de Shkalikov. On a :

$$\begin{cases} U_1(u,\tau) = u'''(1) - k\tau^2 u(1) = 0, \\ U_2(u,\tau) = u''(1) = 0, \\ U_3(u,\tau) = u'(0) = 0, \\ U_4(u,\tau) = u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Le terme $\tau^2 u(1)$ où $\nu = 2$ et $k = 0$ sera remplacé par :
$(H^2\tilde{v})_0^{(0)}(1) = v_2(1)$ $(\nu + k = 2 < n + r = 4 + r)$, où H^n est la puissance d'ordre n de H. Les autres conditions aux bords ne changent pas.
On représente maintenant (2.2.4) sous la forme :

$$\begin{cases} U_1(\tilde{v},\tau) = U_1(\tilde{v}) = v_0'''(1) - kv_2(1) = 0, \\ U_2(\tilde{v},\tau) = U_2(\tilde{v}) = v_0''(1) = 0, \\ U_3(\tilde{v},\tau) = U_3(\tilde{v}) = v_0'(0) = 0, \\ U_4(\tilde{v},\tau) = U_4(\tilde{v}) = v_0(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Dans le cas où $r = 0$, l'espace de Shkalikov $W_{2,U}^0$ (voir [24, p. 1321]) sera

défini par :

$$\begin{aligned} W^0_{2,U} &= \Bigg\{\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1) \oplus L^2(0,1), \\ &\quad U_j(H^k\tilde{v}) = 0,\ 1 \le j \le 4, \text{ pour } 0 \le k \le n+r-2 = 2 \\ &\quad \text{et l'ordre de toutes les conditions aux bords} \le 2-k \Bigg\} \\ &= \Big\{\tilde{v} \in W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1) \oplus L^2(0,1), \\ &\quad v_0''(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0 \Big\}. \end{aligned}$$

L'opérateur de Shkalikov dans ce cas, sera défini par :

$$H_0 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \end{bmatrix}, \text{ et } D(H_0) = W^1_{2,U}.$$

Donc, d'après la partie (ii) du théorème 1.2.1, l'opérateur H_0 a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W^0_{2,U}$.
Dans le cas où $r = 1$, l'espace de Shkalikov $W^1_{2,U}$ sera défini par :

$$\begin{aligned} W^1_{2,U} &= \{\tilde{v} \in W^4_2(0,1) \oplus W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1), \\ &\quad v_0'''(1) - kv_2(1) = 0, v_0''(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, \\ &\quad v_1''(1) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Comme on a fait le changement de variable $\lambda = \tau^2$, on définit l'opérateur de Shkalikov H^2_0, dans ce cas, par :

$$H^2_0 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \\ -v_1'''' \end{bmatrix}$$

et $D(H^2_0) = W^2_{2,U} \subset W^0_{2,U}$.

$$\begin{aligned} D(H^2_0) &= \{\tilde{v} \in D(H_0)/H_0\tilde{v} \in D(H_0)\} \\ &= \{\tilde{v} \in W^5_2(0,1) \oplus W^4_2(0,1) \oplus W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1), \\ &\quad v_0'''(1) - kv_2(1) = 0, v_1'''(1) - kv_3(1) = 0, \\ &\quad v_0''(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, v_1''(1) = 0, \\ &\quad v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2''(1) = 0, v_2'(0) = 0, \\ &\quad v_2(0) = 0, v_3'(0) = 0, v_3(0) = 0, v_0''''(0) = 0\}. \end{aligned}$$

La partie (ii) du théorème 1.2.1 implique que l'opérateur H_0^2 a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W_{2,U}^1$.
On va obtenir maintenant l'expression d'une base de Riesz pour notre opérateur $\mathcal{A}$.
Remarquons que l'opérateur H_0^2 se décompose en une somme directe de deux opérateurs, dont l'un H^2 opère sur v_1 et v_3 et l'autre H^1 opère sur v_0 et v_2.
On pose :

$$H_0^2 = H^1 \oplus H^2.$$

H^2 sera défini par :

$$H^2 \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -w'''' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(H^2) &= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \in W_2^4(0,1) \oplus W_2^2(0,1) / w'''(1) - kv(1) = 0, w''(1) = 0, \right. \\ &\quad \left. w'(0) = 0, w(0) = 0, v'(0) = 0, v(0) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, w \in H^4(0,1) \cap V,\ v \in V,\ w_{xx}(1) = 0, w_{xxx}(1) = kv(1) \right\}. \end{aligned}$$

On voit bien que H^2 n'est autre que l'opérateur $\mathcal{A}$.

Montrons maintenant que le problème de valeurs propres de H_0^2 est équivalent au problème de valeurs propres (2.2.1). Soit λ une valeur propre de H_0^2. On a : $H_0^2 U = \lambda U$,
où $U = (v_0, v_1, v_2, v_3)^\top \in D(H_0^2)$ est un vecteur propre associé à λ.
On obtient alors :

$$\begin{cases} v_2 = \lambda v_0, \\ v_3 = \lambda v_1, \\ -v_0'''' = \lambda v_2, \\ -v_1'''' = \lambda v_3, \\ U \in D(H_0^2). \end{cases}$$

Par substitution, on obtient les deux systèmes découplés suivants :

$$\begin{cases} v_1'''' + \lambda^2 v_1 = 0, \\ v_1'''(1) - k\lambda v_1(1) = 0, \\ v_1''(1) = v_1'(0) = v_1(0) = 0, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{cases} v_0'''' + \lambda^2 v_0 = 0, \\ v_0'''(1) - k\lambda v_0(1) = 0, \\ v_0''(1) = v_0'(0) = v_0(0) = 0, \\ v_0''''(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Notons que l'équation $v_0''''(0) = 0$ est impliquée par l'équation : $v_0'''' + \lambda^2 v_0 = 0$ et par le fait que $v_0 \in W_2^5(0,1)$.
D'après (2.2.6) λ est une valeur propre de H^1 associée au vecteur propre $(v_1, v_3)^\top$ et (2.2.7) nous donne que λ est valeur propre de H^2 associée au vecteur propre $(v_0, v_2)^\top$. De même, si on prend λ valeur propre associée au problème (2.2.1), on en déduit qu'elle est valeur propre de H_0^2.
D'après ce qui précède et du fait que H_0^2 admet un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W_{2,U}^1$, on obtient que l'opérateur $\mathcal{A}$ ou H^2 a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $\mathcal{H} = \mathcal{V} \oplus L^2(0,1)$.
On en déduit que le taux optimal de décroissance de l'énergie du système (2.1.1) est donné par l'abscisse spectrale de $\mathcal{A}$. On redémontre ici ce résultat pour être complet.
Notons par ω le taux optimal de décroissance de l'énergie et par μ l'abscisse spectrale de $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \omega &= \inf\left\{\omega : \exists C(\omega) > 0, E(t) \leq C(\omega)E(0)e^{2\omega t}\right\}, \\ \mu &= \sup\left\{\Re e\,\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right\}, \text{ où } \sigma(\mathcal{A}) \text{ est le spectre de } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1 $\mu = \omega$.

Preuve. Dans la démonstration, on supposera que les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont toutes simples. Cette démonstration s'adapte à notre cas, car il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres non simples.
Il est connu que $\mu \leq \omega$.
Montrons maintenant que $\omega \leq \mu$.
Soit $(u_0, v_0)^\top \in \mathcal{H}$ et soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Riesz de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres
de $\mathcal{A}$.
On a :

$$(u_0, v_0)^\top = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} S(t)(u_0, v_0)^\top &= S(t)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n S(t)\varphi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{\lambda_n t}\varphi_n \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}\|S(t)(u_0,v_0)^\top\|^2 &= \Big\|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e^{\lambda_n t}\varphi_n\Big\|^2\\ &\leq C_1\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n e^{\lambda_n t}|^2\\ &\leq C_1 e^{2\mu t}\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2\\ &\leq Ce^{2\mu t}\|(u_0,v_0)^\top\|^2.\end{aligned}$$

D'où :

$$E(t)\leq CE(0)e^{2\mu t}.$$

On en conclut que :

$$\omega\leq\mu.$$

Donc :

$$\omega=\mu.$$

2.3 Appendice.

Régularité stricte . Le déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ est défini par :

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= \tau^6\Big\{e^{i\tau\sqrt{2}}(-2-2i\sqrt{2}k\tau^{-1})+e^{-i\tau\sqrt{2}}(-2+2i\sqrt{2}k\tau^{-1})\\ &\quad +e^{\tau\sqrt{2}}(-2-2\sqrt{2}k\tau^{-1})+e^{-\tau\sqrt{2}}(-2+2\sqrt{2}k\tau^{-1})-8\Big\}.\end{aligned}$$

Alors τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ si et seulement si $\tilde{\tau}=\omega\tau$ satisfait l'équation :

$$f(\tilde{\tau})=-\tilde{\tau}^3(1+\cosh\ \tilde{\tau}\cos\tilde{\tau})+ik\tilde{\tau}^2(\sinh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}-\cosh\tilde{\tau}\sin\tilde{\tau})=0\quad(2.3.1)$$

avec $\omega=\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. Remarquons que (2.3.1) est l'équation caractéristique dans [9].

Démonstration. Dans ce qui suit, on prend $\omega=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. La démonstration est la même pour $\omega=-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Supposons que $\tilde{\tau}$ satisfait l'équation (2.3.1). Donc : $f(\tilde{\tau})=0$, ou encore :

$$-\omega^3\tau^3(1+\cosh\omega\tau\cos\omega\tau)+k\tau^2(\sinh\omega\tau\cos\omega\tau-\cosh\omega\tau\sin\omega\tau)=0.\quad(2.3.2)$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos\omega\tau\cosh\omega\tau &= \tfrac{1}{4}[e^{\sqrt{2}\tau}+e^{i\sqrt{2}\tau}+e^{-i\sqrt{2}\tau}+e^{-\sqrt{2}\tau}]\\ \sinh\omega\tau\cos\omega\tau &= \tfrac{1}{4}[e^{\sqrt{2}\tau}+e^{-i\sqrt{2}\tau}-e^{i\sqrt{2}\tau}-e^{-\sqrt{2}\tau}]\\ \cosh\omega\tau\sin\omega\tau &= -\tfrac{i}{4}[e^{\sqrt{2}\tau}-e^{-i\sqrt{2}\tau}+e^{i\sqrt{2}\tau}-e^{-\sqrt{2}\tau}].\end{aligned}$$

(2.3.2) devient :

$$\begin{aligned}- &\ \tfrac{\omega^3\tau^3}{4}[e^{i\sqrt{2}\tau}(1-k\tau^{-1}\omega^{-3}(-1+i))+e^{-i\tau\sqrt{2}}(1-k\tau^{-1}\omega^{-3}(1-i))\\ + &\ e^{\sqrt{2}\tau}(1-k\tau^{-1}\omega--3(1+i))+e^{-\sqrt{2}\tau}(1+k\tau^{-1}\omega^{-3}(1+i))+4]=0,\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}- &\ \tfrac{\omega^3\tau^3}{4}[e^{i\tau\sqrt{2}}(1+ik\tau^{-1}\sqrt{2})+e^{-i\tau\sqrt{2}}(1-i\tau^{-1}\sqrt{2})\\ + &\ e^{\sqrt{2}\tau}(1+k\tau^{-1}\sqrt{2})+e^{-\sqrt{2}\tau}(1-k\tau^{-1}\sqrt{2})+4]=0.\end{aligned}$$

Donc τ est racine de l'équation :

$$\begin{aligned}&\{e^{i\tau\sqrt{2}}(1+ik\tau^{-1}\sqrt{2})+e^{-i\tau\sqrt{2}}(1-i\tau^{-1}\sqrt{2})\\ &+e^{\sqrt{2}\tau}(1+k\tau^{-1}\sqrt{2})+e^{-\sqrt{2}\tau}(1-k\tau^{-1}\sqrt{2})+4\}=0.\end{aligned}$$

D'où τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$.
De la même façon, si τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$, alors $\tilde{\tau}$ satisfait l'équation (2.3.1).
Maintenant, on montre que les valeurs propres sont asymptotiquement simples et séparées, ce qui établit la stricte régularité des conditions au bord de (2.2.1) qui est nécessaire pour appliquer la partie (ii) du théorème 1.2.1.
Le développement asymptotique des solutions de l'équation (2.3.1) est donné par :

$$\tau_n = \pm\left[\left(m\pi+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)+i\left(\frac{k}{m\pi}+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)\right] \qquad (2.3.3)$$

où $m=n+\dfrac{1}{2}$, et $n\in\mathbb{N}$ [21].
Supposons qu'à partir d'un certain rang n_0, f' s'annule aussi.
On obtient, en dérivant f et en combinant les équations :

$$1+\cosh\tau_n\cos\tau_n+\tau_n(\sinh\tau_n\cos\tau_n-\cosh\tau_n\sin\tau_n)+2ik\sinh\tau_n\sin\tau_n=0. \qquad (2.3.4)$$

On note :

$$\begin{cases} A &= \Re e\,\tau_n = m\pi+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big),\\ B &= \Im m\,\tau_n = \dfrac{k}{m\pi}+O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big),\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\cosh \tau_n &\simeq \cosh A + iO\Big(\frac{1}{n}\Big) \sinh A, \\
\sinh \tau_n &\simeq \sinh A + iO\Big(\frac{1}{n}\Big) \cosh A, \\
\cos \tau_n &\simeq O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + iO\Big(\frac{1}{n}\Big), \\
\sin \tau_n &\simeq 1.
\end{aligned}$$

L'équation (2.3.4) devient :

$$\begin{aligned}
&1 + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \cosh A + iO\Big(\frac{1}{n}\Big) \cosh A + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh A + \Big(m\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&+iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \times \Big(O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh A + iO\Big(\frac{1}{n}\Big) \sinh A + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \cosh A - \cosh A\Big) \\
&+2ik\Big(\sinh A + iO\Big(\frac{1}{n}\Big) \cosh A\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases}
1 + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \cosh A + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh A + O\Big(\frac{1}{n}\Big) \sinh A + O\Big(\frac{1}{n}\Big) \cosh A \\
-m\pi \cosh A = 0 \\
O\Big(\frac{1}{n}\Big) \cosh A + K \sinh A + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh A + 2k \sinh A = 0
\end{cases}$$

où K est une constante positive.
Ou encore :

$$\begin{cases}
1 + (\cosh A + \sinh A)\Big(O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) - m\pi \cosh A = 0, \\
(K + 2k) \sinh A + O\Big(\frac{1}{n}\Big) \cosh A + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh A = 0.
\end{cases}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}
\cosh A &= \cosh m\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh m\pi \\
\sinh A &= \sinh m\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \cosh m\pi.
\end{aligned}$$

Enfin on obtient :

$$\begin{cases}
1 - m\pi \cosh m\pi + \Big(O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(\cosh m\pi + \sinh m\pi\Big) = 0, \\
(K + 2k) \sinh m\pi + \Big(O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \cosh m\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sinh m\pi = 0,
\end{cases}$$

ce qui est impossible.
Donc les valeurs propres sont asymptotiquement simples.

Par ailleurs il est clair qu'elles sont séparées. En effet, d'après (2.3.3) on a :

$$\Re e\,\tau_n = m\pi + O\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big),$$
$$\Im m\,\tau_n = m\pi + O\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big),$$
$$|\Re e\,\tau_{n+1} - \Re e\,\tau_n| = \Big|(m+1)\pi + O\Big(\tfrac{1}{(n+1)^2}\Big) - \Big(m\pi + O\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big| = \Big|\pi + O\Big(\tfrac{1}{n^2}\Big)\Big|.$$

Donc quand n tend vers l'infini, $|\Re e\,\tau_{n+1} - \Re e\,\tau_n| > \varepsilon$, avec ε un réel strictement positif.

Chapitre 3

Poutre avec contrôle moment. Étude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique

3.1 Introduction.

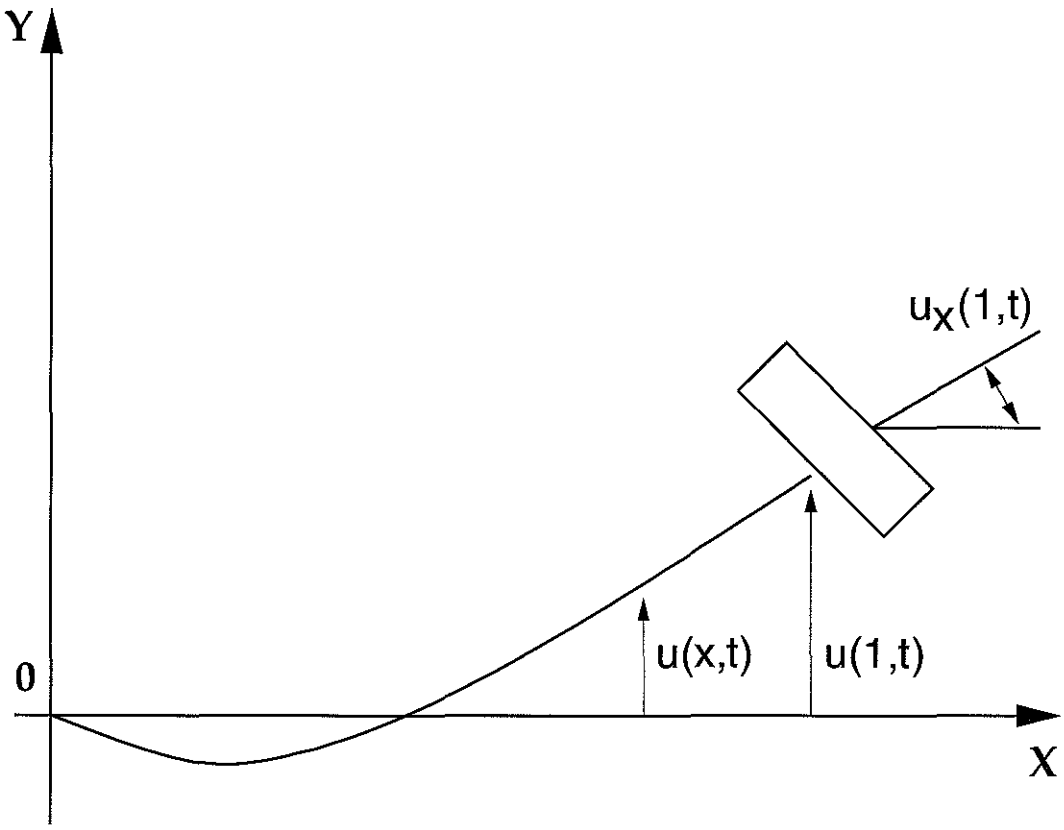
On considère une poutre encastrée à une extrémité. À l'autre extrémité est attachée une antenne de masse m et de moment d'inertie J. On obtient ce que l'on appelle un modèle SCOLE, qui a déjà été fait l'objet de nombreuses études, en particulier dans [17].

Le système dynamique est gouverné par un système hybride composé d'une équation aux dérivées partielles et de deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ mu_{tt}(1,t) - u_{xxx}(1,t) = L_1(u, u_t) & & t \geq 0, \\ Ju_{xtt}(1,t) + u_{xx}(1,t) = L_2(u, u_t) & & t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 & & t \geq 0, \end{cases}$$

où L_1 est le contrôle force , et L_2 est le contrôle moment.

Dans la figure ci-dessous, on donne une représentation graphique du modèle étudié.



On choisit des contrôles en boucle fermée et les plus naturels consistent à prendre des combinaisons linéaires de la vitesse et de la vitesse de rotation, de telle sorte que le système soit dissipatif [17] et [20].
Dans la suite on se place dans le cas où $L_1(u, u_t) = -k_1 u_t(1,t)$ et $L_2(u, u_t) = -k_2 u_{xt}(1,t)$.
Si m et J sont nuls on a stabilité uniforme. Pour $k_1 > 0$ et $k_2 \geq 0$ ce résultat a été prouvé par une méthode de multiplicateurs [4]. Pour $k_1 = 0$ et $k_2 > 0$ la stabilité uniforme a été prouvée dans [5], en utilisant un résultat de Huang [13], qui nécessite des estimations de la résolvante sur l'axe imaginaire.
Lorsque m et J sont positifs, on n'a pas de stabilité uniforme, car les contrôles sont des perturbations compactes du cas non controlé [20]. Donc si on veut une stabilité uniforme, une stratégie consiste à prendre des contrôles plus irréguliers [20]. Un cas particulier où l'on a un contrôle force assez irrégulier ($m > 0, J = 0$) a été étudié dans [9].
Une autre stratégie, lorsqu'on a seulement une masse (respectivement un moment d'inertie), consiste à appliquer un contrôle moment (respectivement un contrôle force) naturel.
Dans le cas où la masse attachée à l'antenne est nulle, il faut un contrôle

force pour stabiliser uniformément le système [6].
Dans le cas où le moment d'inertie est nul, il faut appliquer un contrôle moment pour avoir une stabilité uniforme [15]. Un contrôle force seulement ne suffit pas pour stabiliser uniformément le système (voir appendice 3.4.3). Quand on applique à la fois un contrôle moment et un contrôle force, le système reste uniformément stable (voir appendice 3.4.2).
La conclusion est que pour $J = 0$ un contrôle moment suffit pour stabiliser uniformément le système. De même pour $m = 0$, un contrôle force suffit.
Dans la suite on choisit de prendre le système avec J nul et avec un contrôle moment seulement.
Le but de ce chapitre est d'estimer le taux optimal de décroissance exponentielle de l'énergie du système par l'obtention d'un résultat de base de Riesz, via des résultats de Shkalikov [24]. Contrairement au chapitre 2, la présence d'une masse au bord implique qu'on doit utiliser la partie (i) du théorème 1.2.1 du chapitre 1. La technique est donc un peu plus compliquée que dans le chapitre 2.
Dans [11] cette méthode a également été appliquée à plusieurs problèmes comme les équations des ondes et les équations de poutres avec masse et contrôle force, mais pas de contrôle moment.

3.2 Formulation du problème.

On suppose que $m = 1$. Le système devient :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1,t) - u_{xxx}(1,t) = 0 & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1,t) + k u_{tx}(1,t) = 0 & & t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 & & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

L'énergie du système est :

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 u_t^2\,dx + \int_0^1 u_{xx}^2\,dx + u_t^2(1,t)\Big].$$

L'espace d'énergie $\mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{H} = \{(u,v,\eta)^\top \in H^2(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}, u(0) = u_x(0) = 0\}$$

On munit l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ du produit scalaire :

$$\langle (u,v,\eta),(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\eta})\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})\,dx + \eta\tilde{\eta}$$

où $U = (u, v, \eta)^\top$ et $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})^\top \in \mathcal{H}$.
On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{(u, v, \eta)^\top \in H^4(0,1) \times H^2(0,1) \times \mathbb{R},\ u_{xx}(1) + k v_x(1) = 0, \eta = v(1),\\ &\quad u(0) = u_x(0) = 0, v(0) = v_x(0) = 0\}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}U = (v, -u_{xxxx}, u_{xxx}(1))^\top, \text{ avec } U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \qquad (3.2.2)$$

Le système (3.2.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{U} = \mathcal{A}U \quad \text{et} \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H},$$

avec $U = (u, u_t, \eta)^\top$.
L'opérateur A engendre un semi-groupe de contractions $S(t)$ (voir [15] et [16]) .
Il est prouvé que si la masse $m > \frac{1}{3}$ (ici $m = 1$), le système (3.2.1) est uniformément stable : $\exists M \geq 1$ et $\omega > 0$ tels que

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall U_0 \in \mathcal{H}.$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [15].

3.3 Résultat principal.

Dans la suite on va appliquer les résultats de Shkalikov [24] pour montrer que le taux optimal de décroissance de l'énergie est égal à l'abscisse spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$. On prend toujours $m = 1$, mais les résultats sont valables pour $m > 0$ quelconque.

Théorème 3.3.1 *Le taux optimal de décroissance de l'énergie est égal à l'abscisse spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$.*

Le reste du chapitre sera consacré à la démonstration du théorème.
On commence par donner l'équation caractéristique du système. Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}$ et soit $U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ un vecteur propre qui lui est associé. On a donc $\mathcal{A}U = \lambda U$, ou encore

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \lambda^2 u = 0 \\ u_{xxx}(1) - \lambda^2 u(1) = 0 \\ u_{xx}(1) + k\lambda u_x(1) = 0 \\ u(0) = u_x(0) = 0. \end{cases}$$

On pose $\lambda = \tau^2$, le système s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \tau^4 u = 0 \\ u_{xxx}(1) - \tau^4 u(1) = 0 \\ u_{xx}(1) + k\tau^2 u_x(1) = 0 \\ u_x(0) = 0 \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Les ordres respectifs des conditions au bord dans (3.3.1) sont :

$$k_1 = 4, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 1 \quad \text{et} \quad k_4 = 0.$$

L'ordre total est donc $k = 8$.
L'équation caractéristique de la première équation de (3.3.1) est

$$\omega^4 + 1 = (\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1)(\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1) = 0,$$

dont les racines sont

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Le plus petit polygone convexe (défini au chapitre 1) contenant toutes les sommes possibles des ω_i est donc le polygone $\mathcal{M}$ de sommets $(\pm\sqrt{2}; 0)$ et $(0; \pm\sqrt{2})$.
Les solutions de (3.3.1) seront de la forme

$$u(x) = c_1 e^{\tau\omega_1 x} + c_2 e^{\tau\omega_2 x} + c_3 e^{\tau\omega_3 x} + c_4 e^{\tau\omega_4 x}.$$

On pose

$$\begin{aligned} f(\tau, \omega) &= \tau^3 e^{\tau\omega}(\omega^3 - \tau), \\ g(\tau, \omega) &= \tau^2 \omega e^{\tau\omega}(\omega + k\tau). \end{aligned}$$

En substituant u dans les conditions aux bords du système (3.3.1), on obtient

$$\begin{bmatrix} f(\tau,\omega_1) & f(\tau,\omega_2) & f(\tau,\omega_3) & f(\tau,\omega_4) \\ g(\tau,\omega_1) & g(\tau,\omega_2) & g(\tau,\omega_3) & g(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3.2}$$

On notera par $\Delta(\tau)$ le déterminant caractéristique du système linéaire et homogène (3.3.2). Ce dernier a une solution non nulle si et seulement si τ est

racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ qui est égal à

$$f(\tau,\omega_1)\begin{vmatrix} g(\tau,\omega_2) & g(\tau,\omega_3) & g(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - f(\tau,\omega_2)\begin{vmatrix} g(\tau,\omega_1) & g(\tau,\omega_3) & g(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+f(\tau,\omega_3)\begin{vmatrix} g(\tau,\omega_1) & g(\tau,\omega_2) & g(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - f(\tau,\omega_4)\begin{vmatrix} g(\tau,\omega_1) & g(\tau,\omega_2) & g(\tau,\omega_3) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \tau^8\Big\{ e^{i\tau\sqrt{2}}\left[-2k + i2\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\right] \\ &+ e^{\tau\sqrt{2}}\left[-2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\right] \\ &+ e^{-\tau\sqrt{2}}\left[-2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\right] \\ &+ e^{-i\tau\sqrt{2}}\left[-2k + i2\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\right] + 8k - 8k\tau^{-2}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Remarque : Pour $|\tau|$ assez grand, le terme dominant des expressions entre crochets de (3.3.3) est $-2k$ qui est différent de 0 (k non nul), donc les conditions aux bords de (3.3.1) sont régulières au sens de Shkalikov. On montre en appendice qu'elles sont fortement régulières.
Cette propriété est essentielle dans la partie (i) du théorème 1.2.1 qu'on utilise pour montrer l'existence d'une base de Riesz formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur de Shkalikov.

3.3.1 Comportement asymptotique des valeurs propres.

Rappelons que :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \tau^8\{e^{i\tau\sqrt{2}}[-2k + i2\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}] + e^{\tau\sqrt{2}}[-2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}] \\ &+ e^{-\tau\sqrt{2}}[-2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}] + e^{-i\tau\sqrt{2}}[-2k + i2\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}] \\ &+ 8k - 8k\tau^{-2}\}. \end{aligned}$$

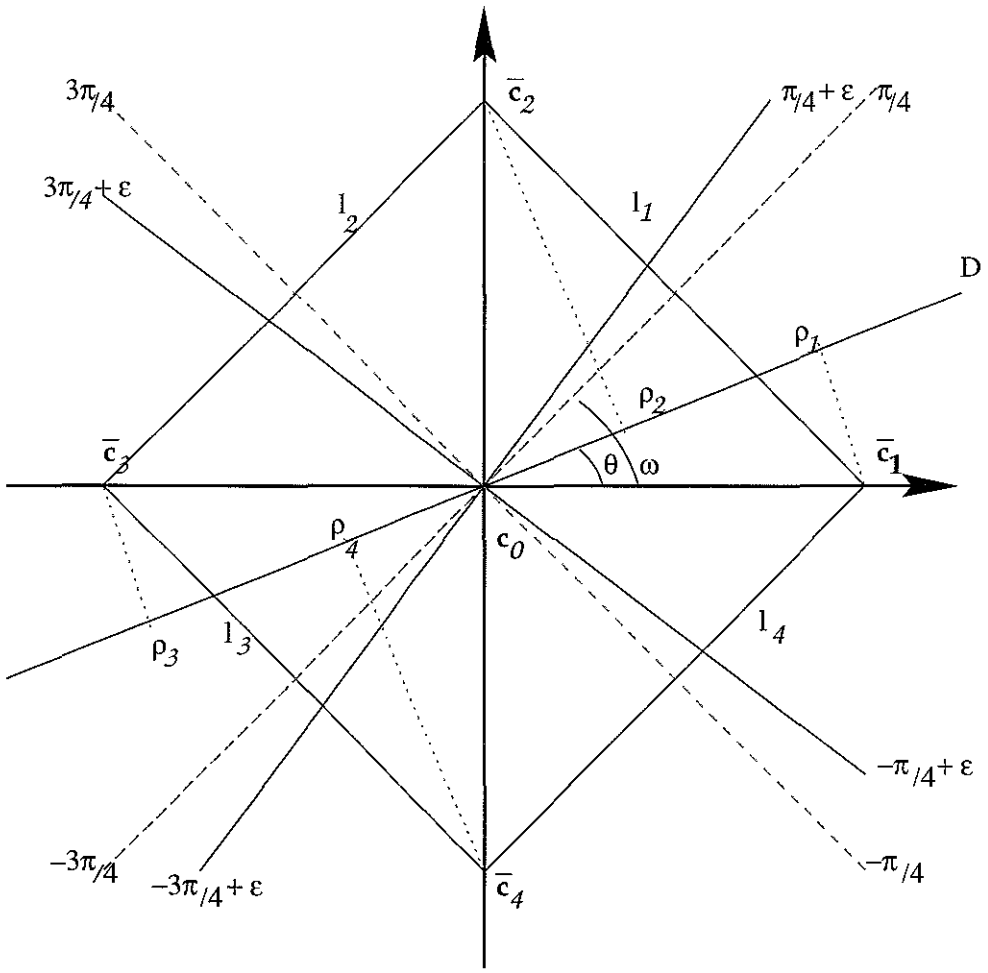
On pose

$$\begin{aligned} P(\tau) &= e^{i\tau\sqrt{2}}[-k\tau^2 + i\sqrt{2}(k-1)\tau - 1] + e^{\tau\sqrt{2}}[-k\tau^2 - \sqrt{2}(k+1)\tau - 1] \\ &+ e^{-\tau\sqrt{2}}[-k\tau^2 + \sqrt{2}(k+1)\tau - 1] + e^{-i\tau\sqrt{2}}[-k\tau^2 + i\sqrt{2}(1-k)\tau - 1] \\ &+ 4k\tau^2 - 4k, \\ \widetilde{P}(\tau) &= e^{\tau\sqrt{2}}[-k\tau^2 - \sqrt{2}(k+1)\tau - 1] + e^{-i\tau\sqrt{2}}[-k\tau^2 + i\sqrt{2}(1-k)\tau - 1]. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on montre que les racines de $\widetilde{P}$ sont asymptotiquement celles de P, dans un secteur à déterminer. On se réfère aux travaux de Langer [14], qui ont déja été utilisés dans la thèse de Chentouf [6].
On considère le polygone C de centre O et qui a pour sommets : $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, et $-i\sqrt{2}$ notés $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, et $\bar{c}_4$ (voir figure ci-après).
On note par l_i le côté $[\bar{c}_i\ \ \bar{c}_{i+1}]$, et par w_i l'angle d'inclinaison entre la normale au côté l_i et l'axe horizontal, et par D_i la droite

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}/Argz = \theta;\quad w_{i-1} + \epsilon \leq \theta < w_i + \epsilon,\ \text{pour } i = 1, ..., 4\}.$$

Soit S_i le secteur : $\{z \in \mathbb{C}/\ w_{i-1} + \epsilon \leq argz < w_i + \epsilon\}$.
On a : $\bigcup_{i=1}^{4} S_i = \mathbb{C}$.



Remarquons que :

$$\begin{cases} P(\tau) = P(-\tau) \\ P(\overline{\tau}) = \overline{P(\tau)} \end{cases}$$

Donc si τ est racine de P, $\overline{\tau}$ l'est aussi.
L'ensemble des racines de P a une symétrie par rapport à l'origine, et une symétrie par rapport à l'axe des réels.
Par conséquent, il suffit de considérer P, par exemple, dans le secteur

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \frac{-\pi}{4} + \epsilon \leq Argz < \frac{\pi}{4} + \epsilon\}.$$

Pour z appartenant à D_i, on a

$$\mid z^{\alpha_j} e^{c_j z} \mid = e^{\mid z \mid \{x_j \cos\theta + y_j \sin\theta + \alpha_j \frac{\log \mid z \mid}{\mid z \mid}\}}, \text{ où } c_j = x_j - iy_j.$$

Remarquons que l'amplitude du terme $\mid z^{\alpha_j} e^{c_j z} \mid$ est déterminée par celle de $\{x_j \cos\tau + y_j \sin\theta\}$, qui n'est autre que la projection orthogonale du vecteur $\bar{c}_j$ sur la droite D_1.
Ces projections sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{2}\cos\theta, \quad \rho_2 = \sqrt{2}\sin\theta, \\ \rho_3 &= -\sqrt{2}\cos\theta, \quad \rho_4 = -\sqrt{2}\sin\theta. \end{aligned}$$

Notons que pour tout $\bar{c}_j \notin l_1$ (dans ce cas $j \neq 1, 2$),

$$x_j \cos\theta + y_j \sin\theta < x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta.$$

Donc pour tout $z \in S_1$ et $j \neq 1, 2$: $z^{\alpha_j} e^{c_j z} = z^{\alpha_1} e^{c_1 z} \epsilon(z)$.

Théorème 3.3.2 *[14]*

Soit Q une fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q(z) = \sum_{j=0}^{n} z^{\nu_j}\{a_j + \epsilon_j(z)\}e^{c_j z}$; où $a_j \in \mathbb{C}$, avec $a_0 a_n \neq 0$, $\nu_j \in \mathbb{R}$, et les ϵ_j sont des fonctions analytiques dans tout le secteur S_i (i fixé) et qui tendent uniformément vers zéro quand $|z|$ tend vers $+\infty$.
Alors dans ce secteur S_i, les zéros de Q sont asymptotiques à ceux de : $\sum_{j \in K_i} a_j z^{\nu_j} e^{c_j z}$, où K_i est la partie de $\{1, ..., j\}$ qui contient les j tels que $\overline{c_j} \in l_i$.

D'après ce théorème les racines de P sont asymptotiques à celles de $\widetilde{P}$ qui sont asymptotiquement celles de :

$$e^{\tau\sqrt{2}} + e^{-i\tau\sqrt{2}} = 0.$$

Les racines de P sont donc de la forme :

$$\tau_n = \omega\pi(n+\frac{1}{2}) + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \quad \text{où } \omega = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$$

On calcule maintenant x et y.

$$\begin{aligned} e^{\tau_n\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\omega\pi(n+\frac{1}{2})} e^{\sqrt{2}\frac{x}{n} + \sqrt{2}\frac{y}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)} \\ &= e^{(\pi+i\pi)(n+\frac{1}{2})}\Big[1 + \sqrt{2}\frac{x}{n} + \sqrt{2}\frac{y}{n^2} + \frac{x^2}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} X = \sqrt{2}x \\ Y = \sqrt{2}y \\ e^{\pi(n+\frac{1}{2})} = K. \end{cases}$$

Donc

$$e^{\tau_n\sqrt{2}} = iK(-1)^n\left[1 + \frac{X}{n} + \frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$

De même

$$e^{-i\tau_n\sqrt{2}} = iK(-1)^n\left[-1 + i\frac{X}{n} + i\frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right].$$

En remplacant $e^{\tau_n\sqrt{2}}$ et $e^{-i\tau_n\sqrt{2}}$ par leur valeur dans $\widetilde{P}$, $\widetilde{P}(\tau_n)$ devient :

$$\begin{aligned} & iK(-1)^n\Bigg\{\left[1 + \frac{X}{n} + \frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right]\left[-ik\pi^2n^2 + \Big(-ik\pi^2 - (i+1)(k+1)\pi\Big)n\right. \\ & + \Big(-ik\frac{\pi^2}{4} - 2k\omega\pi\frac{X}{\sqrt{2}} - (i+1)(k+1)\frac{\pi}{2} - 1\Big) + \Big(-k\omega\pi(\frac{X}{\sqrt{2}} + 2\frac{Y}{\sqrt{2}}) - (k+1)X\Big)\frac{1}{n}\Big] \\ & + \left[-1 + i\frac{X}{n} + i\frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right]\left[-ik\pi^2n^2 + \Big(-ik\pi^2 + (i-1)(1-k)\pi\Big)n\right. \\ & + \Big(-ik\frac{\pi^2}{4} - 2k\omega\pi\frac{X}{\sqrt{2}} + (i-1)(1-k)\frac{\pi}{2} - 1\Big) + \Big(-k\omega\pi(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{2}}) + i(1-k)X\Big)\frac{1}{n}\Big] \\ & + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\tau_n) &= iK(-1)^n\Big\{-2(i+1)\pi X - ik\pi^2X^2 + k\pi^2(1-i)Y - (k+i)\pi \\ &+ k\pi^2(1-i)X + \pi n\Big[-2(i+k) + k\pi X(1-i)\Big] + \frac{A}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

où A est une constante.
On choisit X tel que le coefficient en n soit nul, et on choisit Y tel que le terme constant soit nul. Ce qui nous donne

$$\begin{cases} -2(i+k)+k\pi X(i+1)=0 \\ -2(i+1)\pi X - ik\pi^2X^2 + k\pi^2(1-i)Y - (k+i)\pi + k\pi^2(1-i)X = 0. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} X = \dfrac{(i+k)(1+i)}{k\pi} \\ Y = -\dfrac{(1+k^2)(1+i)}{k^2\pi^2} - \dfrac{(i+k)(1+i)}{2k\pi} \end{cases}$$

Or on a fait le changement de variable : $X = x\sqrt{2}$, et $Y = y\sqrt{2}$.
Finalement

$$\begin{cases} x = \omega\dfrac{(i+k)}{k\pi} \\ y = -\omega\left\{\dfrac{(1+k^2)}{k^2\pi^2} + \dfrac{(i+k)}{2k\pi}\right\} \end{cases}$$

D'où $\tau_n = \omega\pi(n+\frac{1}{2}) + \omega\dfrac{(i+k)}{k\pi n} - \omega\left\{\dfrac{(1+k)^2}{k^2\pi^2n^2} + \dfrac{(i+k)^2}{2k\pi n^2}\right\}$.
Sachant que $\lambda_n = \tau_n^2$, on a donc

$$\lambda_n = -\frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{n}\right) + i\left(2 + \pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

3.3.2 Calcul de $\Re e\,\tau_n$.

$$\begin{aligned} \tau_n &= \omega\pi\left(n+\frac{1}{2}\right) + \omega\frac{(i+k)}{k\pi n} - \omega\left\{\frac{(1+k)^2}{k^2\pi^2n^2} + \frac{(i+k)^2}{2k\pi n^2}\right\} \\ &= \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\frac{(k+i)}{k\pi n} - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\frac{(k+1)^2}{k^2\pi^2n^2} - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\frac{(k+i)^2}{2k\pi n^2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right) + i\frac{\pi}{\sqrt{2}}(n+\frac{1}{2}) + i\frac{(k+1)}{\sqrt{2}k\pi n} + \frac{(k-1)}{\sqrt{2}k\pi n} - \frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2n^2} \\ &- i\frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2n^2} + \frac{(1-k^2+2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2} + i\frac{(1-k^2-2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\Re e\,\tau_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{(k-1)}{\sqrt{2}k\pi n} - \frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2n^2} + \frac{(1-k^2+2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2}.$$

Il est clair que lorsque n tend vers l'infini, $|\Re e\,\tau_{n+1} - \Re e\,\tau_n| > \varepsilon$, avec ε un réel strictement positif.
Donc les zéros du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ sont asymptotiquement séparés. On montre dans l'appendice (3.4.2) qu'ils sont aussi asymptotiquement simples. D'où la régularité forte du problème (3.3.1).
Sachant que $\lambda_n = \tau_n^2$, on a donc

$$\lambda_n = -\frac{2}{k} + O\Big(\frac{1}{n}\Big) + i\Big(2 + \pi^2(n+\frac{1}{2})^2 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Dans cette partie, on suit la méthode de Shkalikov [24] pour construire un opérateur, noté H_r et appelé linéarisé de Shkalikov, de telle manière que le problème au bord (3.3.1) se ramène au problème linéaire $H_r(\tilde{v}) = \tau\tilde{v}$ (comme expliqué dans le chapitre 1 et détaillé ci-après), où $\tilde{v}$ appartient à l'espace $D(H_r)$, qu'on définira ultérieurement.
Pour tout entier r, on note :
$W_2^r = W_2^{n-1+r}(0,1) \oplus W_2^{n-2+r}(0,1) \oplus \cdots \oplus W_2^r(0,1)$, avec ici n=4.
On écrit (3.3.1) sous la forme

$$\begin{cases} \ell(u,\tau) = \ell_0(u) + \tau\ell_1(u) + \tau^2\ell_2(u) + \tau^3\ell_3(u) + \tau^4\ell_4(u) = 0 \\ U_1(u,\tau) = u'''(1) - \tau^4 u(1) = 0 \\ U_2(u,\tau) = u''(1) + k\tau^2 u'(1) = 0 \\ U_3(u,\tau) = u'(0) = 0 \\ U_4(u,\tau) = u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3.4}$$

où $\ell_0(u) = u_{xxxx}$, $\ell_1(u) = \ell_2(u) = \ell_3(u) = 0$, *et* $\ell_4(u) = u$.
Dans $W_{2,U}^0$, on définit l'opérateur H par

$$H\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \end{bmatrix} \text{ et } D(H) = W_{2,U}^1,$$

avec

$$\begin{aligned} W_{2,U}^0 \;=\; \Bigg\{ \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &\in W_2^3(0,1) \oplus W_2^2(0,1) \oplus W_2^1(0,1) \oplus L^2(0,1), \\ &\widetilde{U}_j(H^k\tilde{v}) = 0,\ 1 \le j \le 4, \text{pour } 0 \le k \le n+r-2 = 2 \\ &\text{et l'ordre de toutes les conditions aux bords} \le 2-k \Bigg\} \end{aligned}$$

$$W^0_{2,U} = \Big\{\tilde{v} \in W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1) \oplus L^2(0,1),$$
$$v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0\Big\}.$$

et

$$\begin{aligned} W^1_{2,U} = \{&\tilde{v} \in W^4_2(0,1) \oplus W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1),\\ &v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0,\\ &v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Pour normaliser les conditions au bord de (3.3.4) le terme $\tau^4 u(1)$ sera remplacé par $\tau v_3(1)$, et le terme $\tau^2 u'(1)$ sera remplacé par $v_2'(1)$, les autres conditions aux bords ne changent pas. On les représente sous la forme $\widetilde{U}_j(\tilde{v},\tau) = \sum_{i=0}^{\nu_j(r)} \tau^i \widetilde{U}^i_j(\tilde{v})$, où les $\widetilde{U}^i_j$ ne dépendent pas de τ

$$\begin{cases} \widetilde{U}_1(\tilde{v},\tau) = -v_0'''(1) + \tau v_3(1) = 0,\\ \widetilde{U}_2(\tilde{v},\tau) = v_0''(1) + kv_2'(1) = 0,\\ \widetilde{U}_3(\tilde{v},\tau) = v_0'(0) = 0,\\ \widetilde{U}_4(\tilde{v},\tau) = v_0(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

D'après le système (3.3.5) et les notations de [24], on a $\nu_1(0) = 1$ et $\nu_2(0) = \nu_3(0) = \nu_4(0) = 0$, donc $N_0 = \sum_{j=1}^{4} \nu_j(0) = 1$.

L'espace qui convient sera alors $W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}^{N_0} = W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}$, où on définit l'opérateur H_0 (ici $r = 0$) par

$$H_0 \begin{bmatrix} v_0\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ -v_0''''\\ v_0'''(1) \end{bmatrix}, \quad \text{et}$$

$$D(H_0) = \{(v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in W^1_{2,U} \oplus \mathbb{C}, w = v_3(1)\}.$$

D'après la partie (i) du théorème 1.2.1, et vu la régularité forte du système (3.3.1), l'opérateur H_0, a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de l'espace $W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}$.

Rapelons qu'on avait fait le changement de variable : $\lambda = \tau^2$. Et sachant que τ est une valeur propre de H_0, alors $\lambda = \tau^2$ est une valeur propre de H_0^2,

qui sera défini par :

$$H_0^2 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \\ -v_1'''' \\ v_1'''(1) \end{bmatrix}, \quad D(H_0^2) = W_{2,U}^2 \oplus \mathbb{C} \subset W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} D(H_0^2) &= \{(v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in D(H_0)/H_0(v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in D(H_0)\} \\ &= \{(v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in W_2^5(0,1) \oplus W_2^4(0,1) \oplus W_2^3(0,1) \oplus W_2^2(0,1) \oplus \mathbb{C}, \\ &\quad v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, \\ &\quad v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_0''''(0) = 0, v_0'''(1) = -v_0''''(1), \\ &\quad v_1''(1) + kv_3'(1) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, \\ &\quad v_3'(0) = 0, v_3(0) = 0, w = v_3(1)\}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres généralisés de H_0 sont aussi vecteurs propres généralisés de H_0^2.
En effet, soit ϕ_n un vecteur propre généralisé de H_0, associé à la valeur propre τ_n.
On a $(H_0 - \tau_n)^\alpha \phi_n = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$; alors

$$(H_0^2 - \tau_n^2 I)^\alpha \phi_n = (H_0 + \tau_n I)^\alpha (H_0 - \tau_n I)^\alpha \phi_n = 0.$$

Donc ϕ_n est aussi un vecteur propre généralisé de H_0^2 associé à la valeur propre τ_n^2.
Il est donc clair que l'opérateur H_0^2 a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}$.

Remarquons que l'opérateur H_0^2 se décompose en une somme directe de deux opérateurs :

$$H_0^2 = H_1 \oplus H_2,$$

avec H_1 opérant sur v_1, v_3 et w, et H_2 opérant sur v_0, v_2. H_1 sera défini par :

$$H_1 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -u_{xxxx} \\ u_{xxx}(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(H_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in W_2^4(0,1) \oplus W_2^2(0,1) \oplus \mathbb{C}/u''(1) + kv'(1) = 0, w = v(1), \right. \\ &\quad \left. u'(0) = 0, u(0) = 0, v'(0) = 0, v(0) = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$D(H_1) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, w \in H^4(0,1) \oplus H^2(0,1) \oplus \mathbb{C} / u''(1) + kv'(1) = 0, u'(0) = u(0) = 0, \right.$$
$$\left. v'(0) = v(0) = 0, w = v(1) \right\}.$$

On voit bien que H_1 est exactement l'opérateur $\mathcal{A}$.
On a montré, jusqu'à présent, qu'on a une base de Riesz pour l'opérateur

$$H_0^2 = H_1 \oplus H_2.$$

Les opérateurs H_1 et H_2 ont la même équation caractéristique. En effet dans les domaines respectifs de H_1 et H_2, on a les mêmes conditions au bord excepté ($v_0'''(1) = -v_0''''(1)$, $v_0''''(0) = 0$) pour H_1 et ($w = v_3(1)$, $v_1'''(1) = \tau w$) pour H_2. Ces relations sont équivalentes (vérification facile). Les opérateurs H_1 et H_2 ont les mêmes valeurs propres.
On sait que H_0^2 engendre un semi-groupe $S_{H_0^2}(t)$ dans $W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C} = \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ (où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ opèrent sur les espaces relatifs à H_1 et H_2), et admet un système de vecteurs propres généralisés $\begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$ qui forme une base de Riesz de $\mathcal{L}$.
Donc :

$$\forall z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L} : z = \sum_N z_n \begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

avec

$$C_1 \sum_N |z_n|^2 \leq |z|_{\mathcal{L}}^2 \leq C_2 \sum_N |z_n|^2$$

et

$$|S_{H_0^2}(t) z|_{\mathcal{L}} \leq M_\varepsilon |z|_{\mathcal{L}} \exp(\omega + \varepsilon) t \qquad \forall \varepsilon > 0$$

où $\omega = \sup_{\lambda_i \in sp(H_0^2)} \Re e \lambda_i$.
Comme H_1 et H_2 ont le même spectre, alors :

$$S_{H_0^2}(t) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{H_1}(t) x \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \left| S_{H_0^2}(t) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{L}} &= |S_{H_1}(t) x|_{\mathcal{L}_1} \\ &\leq M_\varepsilon \left| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{L}} \exp(\omega + \varepsilon) t \\ &= M_\varepsilon |x|_{\mathcal{L}_1} \exp(\omega + \varepsilon) t \end{aligned}$$

où $\omega = \sup_{\lambda \in sp(H_0^2)} \Re e\lambda = \sup_{\lambda \in sp(H_1)} \Re e\lambda$.
Par ailleurs, on sait toujours que le rayon spectral du semi-groupe $S_{H_1}(t)$ engendré par H_1 est supérieur à $\sup_{\lambda \in sp(H_1)} \Re e\lambda = \sup_{\lambda \in sp(H_0^2)} \Re e\lambda$.
On en déduit donc que le meilleur taux de décroissance pour l'opérateur H_1 est bien égal à $\sup_{\lambda \in sp(H_1)} \Re e\lambda$.
Le même résultat s'applique au cas du système de masse nulle.

3.4 Appendice.

3.4.1 Étude du problème dans le cas de masse nulle.

• Problème bien posé

Ce cas est un peu plus simple, dans la mesure où en l'absence de la masse, la variable $u_t(1)$ n'apparaît pas dans le problème abstrait. De même, il n'y a pas de composante dans $\mathbb{C}$ losque l'on construit l'espace de Shkalikov.
Le système (3.2.1) devient :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1,t) = -k u_{xt}(1,t) & & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

On associe au système (3.4.1) l'énergie :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 u_t^2\, dx + \int_0^1 u_{xx}^2\, dx\right].$$

Comme

$$\frac{dE(t)}{dt} = -k u_{xt}^2(1,t) \leq 0,$$

le système (3.4.1) est dissipatif .
Introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in H^2(0,1)\, ; u(0) = u_x(0) = 0\}, \\ \mathcal{H} &= \{(u,v)^\top\, ; u \in \mathcal{V}\, , v \in L^2(0,1)\}. \end{aligned}$$

On munit l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ du produit scalaire :

$$\langle U, \tilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})\, dx$$

où $U = (u,v)^\top$ et $\tilde{U} = (\tilde{u},\tilde{v})^\top \in \mathcal{H}$.

On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(u,v)^\top / u \in H^4(0,1) \cap \mathcal{V}, v \in \mathcal{V} \ ; \ u_{xxx}(1) = 0, u_{xx}(1) = -kv_x(1)\}.$$

$$\mathcal{A}U = (v, -u_{xxxx})^\top, \text{si } U = (u,v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{3.4.2}$$

Le système (3.4.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{U} = \mathcal{A}U \quad \text{et} \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H},$$

avec $U = (u, u_t)^\top$.

G. Chen et al. [5] ont montré que l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un semi-groupe de contractions uniformément stable sur $\mathcal{H}$, que $\mathcal{A}$ est inversible et $\mathcal{A}^{-1}$ est compact dans $\mathcal{H}$. Ils ont utilisé un théorème de F. L. Huang [13] pour montrer la stabilité uniforme.
On cherche maintenant à obtenir le taux optimal de décroissance de l'énergie $E(t)$.

• Analyse spectrale

Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{U} = (u,v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ un vecteur propre qui lui est associé.
On a :

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \lambda \mathcal{U}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \lambda u - v = 0, \\ \lambda v + u_{xxxx} = 0, \\ u_{xxx}(1) = u_x(0) = u(0) = 0, \\ u_{xx}(1) = -kv_x(1). \end{cases}$$

En remplaçant v en fonction de u, on obtient

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \lambda^2 u = 0, \\ u_{xx}(1) = -k\lambda u_x(1), \\ u_{xxx}(1) = 0, \\ u_x(0) = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On pose $\lambda = \tau^2$, le système devient :

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \tau^4 u = 0, \\ u_{xxx}(1) = 0, \\ u_{xx}(1) = -k\tau^2 u_x(1), \\ u_x(0) = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Dans la suite, on utilisera les définitions et les notations de [24]. Les ordres respectifs des conditions au bord dans (3.4.3) sont :

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 1 \quad \text{et} \quad k_4 = 0.$$

L'ordre total est donc : $k = 7$.
L'équation caractéristique de la première équation de (3.4.3) est :

$$\omega^4 + 1 = (\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1)(\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1) = 0,$$

dont les racines sont :

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Les solutions de (3.4.3) sont de la forme :

$$u(x) = c_1 e^{\tau\omega_1 x} + c_2 e^{\tau\omega_2 x} + c_3 e^{\tau\omega_3 x} + c_4 e^{\tau\omega_4 x}.$$

On pose :

$$f(\tau, \omega) = \tau^2 \omega e^{\tau\omega}(\omega + k\tau).$$

En substituant u dans les conditions au bord du système (3.4.3), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tau^3\omega_1^3 e^{\tau\omega_1} & \tau^3\omega_2^3 e^{\tau\omega_2} & \tau^3\omega_3^3 e^{\tau\omega_3} & \tau^3\omega_4^3 e^{\tau\omega_4} \\ f(\tau,\omega_1) & f(\tau,\omega_2) & f(\tau,\omega_3) & f(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.4.4)$$

On notera par $\Delta(\tau)$ le déterminant caractéristique du système linéaire homogène (3.4.4). Ce dernier a donc une solution non nulle si et seulement si τ est racine de :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = \; & \tau^3\omega_1^3 e^{\tau\omega_1} \begin{vmatrix} f(\tau,\omega_2) & f(\tau,\omega_3) & f(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \tau^3\omega_2^3 e^{\tau\omega_2} \begin{vmatrix} f(\tau,\omega_1) & f(\tau,\omega_3) & f(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \; & \tau^3\omega_3^3 e^{\tau\omega_3} \begin{vmatrix} f(\tau,\omega_1) & f(\tau,\omega_2) & f(\tau,\omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \tau^3\omega_4^3 e^{\tau\omega_4} \begin{vmatrix} f(\tau,\omega_1) & f(\tau,\omega_2) & f(\tau,\omega_3) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = \; & \tau^6 \Big\{ i\sqrt{2}e^{i\tau\sqrt{2}}[(\omega_1+\omega_2) + 2k\tau] - \sqrt{2}e^{\tau\sqrt{2}}[(\omega_4+\omega_1) + 2k\tau] \\ & + \sqrt{2}e^{-\tau\sqrt{2}}[(\omega_2+\omega_3) + 2k\tau] - i\sqrt{2}e^{-i\tau\sqrt{2}}[(\omega_3+\omega_4) + 2k\tau] \\ & + (1-i)\sqrt{2}(\omega_3-\omega_1) + (1+i)\sqrt{2}(\omega_2-\omega_4) \Big\}. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= \tau^7\Big\{e^{i\tau\sqrt{2}}[2i\sqrt{2}k-2\tau^{-1}]-e^{-i\tau\sqrt{2}}[2i\sqrt{2}k+2\tau^{-1}]\\ &- e^{\tau\sqrt{2}}[2\sqrt{2}k+2\tau^{-1}]+e^{-\tau\sqrt{2}}[2\sqrt{2}k-2\tau^{-1}]-8\tau^{-1}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Pour $|\tau|$ assez grand, le terme dominant des expressions entre crochets de (3.4.5) est différent de 0 (k est non nul), donc les conditions au bord de (3.4.3) sont régulières au sens de Shkalikov. On montrera dans la suite que les racines du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ sont asymptotiquement simples et séparées et par suite que les conditions au bord sont fortement régulières. Cette propriété est essentielle dans la partie (ii) du théorème 1.2.1 qu'on utilise pour montrer l'existence d'une base de Riesz formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur de Shkalikov.
La méthode est identique au cas où la masse est non nulle. On écrit (3.4.3) sous la forme suivante :

$$\begin{cases}\ell(u,\tau)=\ell_0(u)+\tau\ell_1(u)+\tau^2\ell_2(u)+\tau^3\ell_3(u)+\tau^4\ell_4(u)=0,\\ U_1(u,\tau)=u'''(1)=0,\\ U_2(u,\tau)=u''(1)+k\tau^2u'(1)=0,\\ U_3(u,\tau)=u'(0)=0,\\ U_4(u,\tau)=u(0)=0.\end{cases} \tag{3.4.6}$$

L'opérateur H est le même que dans le cas où la masse est non nulle.
On va voir qu' ici l'opérateur H_r n'est autre que H, car aucune condition au bord (après normalisation) ne dépend de τ. On utilise alors la partie (ii) du théorème 1.2.1 pour montrer l'existence d'une base de Riesz, dans l'espace $W^r_{2,U}$ (qu'on définira ultérieurement), formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur H_r.
Le terme $\tau^2u'(1)$ dans (3.4.6) sera remplacé par : $H^2(\tilde{v})^{(1)}_0(1)=v'_2(1)$, où H^k est la puissance d'ordre k de H, les autres conditions au bord ne changent pas. On les représente sous la forme :

$$\begin{cases}\widetilde{U}_1(\tilde{v},\tau) = \widetilde{U}_1(\tilde{v}) = v'''_0(1)=0,\\ \widetilde{U}_2(\tilde{v},\tau) = \widetilde{U}_2(\tilde{v}) = v''_0(1)+kv'_2(1)=0,\\ \widetilde{U}_3(\tilde{v},\tau) = \widetilde{U}_3(\tilde{v}) = v'_0(0)=0,\\ \widetilde{U}_4(\tilde{v},\tau) = \widetilde{U}_4(\tilde{v}) = v_0(0)=0.\end{cases} \tag{3.4.7}$$

Pour $r=0$, l'espace $W^0_{2,U}$ sera défini par :

$$
\begin{aligned}
W^0_{2,U} &= \Big\{ \tilde{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)^\top \in W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1) \oplus L^2(0,1), \\
&\quad \widetilde{U}_j(H^k \tilde{v}) = 0 \quad 1 \le j \le 4, \text{ pour } 0 \le k \le n+r-2 = 2 \\
&\quad \text{et l'ordre de toutes les conditions au bord} \le 2-k \Big\} \\
&= \Big\{ \tilde{v} \in W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1) \oplus L^2(0,1), \\
&\quad v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0 \Big\}.
\end{aligned}
$$

L'opérateur H_0 dans ce cas, est défini dans $W^0_{2,U}$ par :

$$
H_0 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \end{bmatrix} \text{ et } D(H_0) = W^1_{2,U}.
$$

L'espace $W^1_{2,U}$ ($r = 1$) sera défini par :

$$
\begin{aligned}
W^1_{2,U} &= \{ \tilde{v} \in W^4_2(0,1) \oplus W^3_2(0,1) \oplus W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1), \\
&\quad v_0'''(1) = 0, v_0''(1) + k v_2'(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, \\
&\quad v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0 \}.
\end{aligned}
$$

Le problème (3.4.3) est fortement régulier (voir la régularité forte ci-après). De plus toutes les conditions au bord sont d'ordre $\le n+r-1 = 3$. D'après la partie (ii) du théorème 1.2.1, l'opérateur H_0 a donc un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W^0_{2,U}$.
Par le même argument que dans le cas où la masse est non nulle, l'opérateur H_0^2 a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W^0_{2,U}$.

On veut obtenir maintenant le taux optimal de décroissance de l'énérgie en fonction de l'abscisse spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$.
L'opérateur H_0^2 se décompose en une somme directe de deux opérateurs, H_1 et H_2 tels que H_1 opère sur v_1 et v_3 et H_2 opère sur v_0 et v_2.
On pose $H_0^2 = H_1 \oplus H_2$, où H_1 est l'opérateur défini par

$$
H_1 \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -w'''' \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
D(H_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \in W_2^4(0,1) \oplus W_2^2(0,1) / w''(1) + kv'(1) = 0, w'''(1) = 0, \right. \\
&\quad \left. w'(0) = 0, w(0) = 0, v'(0) = 0, v(0) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, w \in H^4(0,1) \cap \mathcal{V}, v \in \mathcal{V}, w_{xxx}(1) = 0, w_{xx}(1) = -kv'(1) \right\}.
\end{aligned}
$$

Remarquons que H_1 n'est autre que l'opérateur $\mathcal{A}$.
On a montré que l'opérateur H_0^2 a un système de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W_{2,U}^0$.
On en déduit que le taux optimal de décroissance de l'énergie pour le système (3.4.1) associé à l'opérateur $\mathcal{A} = H_1$ est donné par le spectre de H_0^2. La preuve de ce résultat est donnée à la fin du paragraphe 3.3 dans le cas où la masse est non nulle, ce qui est un peu plus compliqué.

• **Régularité forte**

Le déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ est défini par :

$$
\begin{aligned}
\Delta(\tau) &= \tau^7 \{ e^{i\tau\sqrt{2}}(2i\sqrt{2}k - 2\tau^{-1}) - e^{-i\tau\sqrt{2}}(2i\sqrt{2}k + 2\tau^{-1}) \\
&- e^{\tau\sqrt{2}}(2\sqrt{2}k + 2\tau^{-1}) + e^{-\tau\sqrt{2}}(2\sqrt{2}k - 2\tau^{-1}) - 8\tau^{-1} \}.
\end{aligned}
$$

Montrons que τ est racine du déterminant caractéristique Δ si et seulement si $\tilde{\tau} = \omega\tau$ satisfait l'équation :

$$
f(\tilde{\tau}) = (1 + \cosh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}) + ik\tilde{\tau}(\sinh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau} + \cosh\tilde{\tau}\sin\tilde{\tau}) = 0 \qquad (3.4.8)
$$

avec $\omega = \pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Démonstration : Dans ce qui suit, on prend $\omega = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. La démonstration est la même pour $\omega = -\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.
Supposons que $\tilde{\tau}$ satisfait l'équation (3.4.8). Donc : $f(\tilde{\tau}) = 0$, ou encore :

$$
(1 + \cosh\omega\tau\cos\omega\tau) + ik\omega\tau(\sinh\omega\tau\cos\omega\tau + \cosh\omega\tau\sin\omega\tau) = 0, \quad (3.4.9)
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\cos\omega\tau\cosh\omega\tau &= \frac{1}{4}[e^{\sqrt{2}\tau} + e^{i\sqrt{2}\tau} + e^{-i\sqrt{2}\tau} + e^{-\sqrt{2}\tau}] \\
\sinh\omega\tau\cos\omega\tau &= \frac{1}{4}[e^{\sqrt{2}\tau} + e^{-i\sqrt{2}\tau} - e^{i\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau}] \\
\cosh\omega\tau\sin\omega\tau &= -\frac{i}{4}[e^{\sqrt{2}\tau} - e^{-i\sqrt{2}\tau} + e^{i\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau}].
\end{aligned}
$$

(3.4.9) devient

$$e^{i\tau\sqrt{2}}[-1+k\omega\tau(i-1)]+e^{-i\tau\sqrt{2}}[-1+k\omega\tau(1-i)]$$
$$+e^{\sqrt{2}\tau}[-1+k\omega\tau(-i-1)]+e^{-\sqrt{2}\tau}[-1+k\omega\tau(1+i)]-4=0.$$

Donc τ est racine de l'équation

$$e^{i\tau\sqrt{2}}[-2\tau^{-1}+2i\sqrt{2}k]+e^{-i\tau\sqrt{2}}[-2\tau^{-1}-2i\sqrt{2}k]$$
$$+e^{\sqrt{2}\tau}[-2\tau^{-1}-2\sqrt{2}k]+e^{-\sqrt{2}\tau}[-2\tau^{-1}+2\sqrt{2}k]-8\tau^{-1}=0.$$

D'où τ est racine du déterminant caractéristique Δ.
De la même façon, si τ est racine du déterminant caractéristique Δ, alors $\tilde{\tau}$ satisfait l'équation (3.4.8).
Maintenant, on montre que les racines du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ sont asymptotiquement simples et séparées, ce qui établit la régularité forte des conditions aux bords de (3.4.3) qui est nécessaire pour appliquer le théorème 1.2.1.
Le développement asymptotique des racines du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ donné dans [21] est le suivant :

$$\tilde{\tau}_n = m\pi + \frac{i}{2\pi kn} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{3.4.10}$$

où $m = n - \dfrac{1}{4}$, et $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que ces racines sont asymptotiquement simples et séparées.
Supposons qu'à partir d'un certain rang n_0, f' s'annule en même temps que f.
On obtient

$$-(1+ik)\sinh\tilde{\tau}_n\cos\tilde{\tau}_n+(1-ik)\cosh\tilde{\tau}_n\sin\tilde{\tau}_n-2ik\tilde{\tau}_n\cosh\tilde{\tau}_n\cos\tilde{\tau}_n=0. \tag{3.4.11}$$

On suppose que n est pair. Le cas n impair se fait de la même manière.
On note

$$\begin{cases} A=\Re e\tilde{\tau}_n = m\pi+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\simeq m\pi, \\ B=\mathrm{Im}\tilde{\tau}_n \simeq \dfrac{C_k}{n}\simeq O\Big(\dfrac{1}{n}\Big), \quad \text{avec } C_k=\dfrac{1}{2\pi k}. \\ \cosh\tilde{\tau}_n\simeq\cosh m\pi+iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi,\ \sinh\tilde{\tau}_n\simeq\sinh m\pi+iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi, \\ \cos\tilde{\tau}_n\simeq\frac{\sqrt{2}}{2}-iO\Big(\frac{1}{n}\Big),\ \sin\tilde{\tau}_n\simeq-\frac{\sqrt{2}}{2}+iO\Big(\frac{1}{n}\Big). \end{cases}$$

L'équation (3.4.11) devient

$$
\begin{aligned}
&-(1+ik)\left(\sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&+(1-ik)\left(\cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + iO\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&-2ik\left(m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&-(1+ik)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi\right)\\
&+(1-ik)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi\right)\\
&-2ik\left(m\pi\cosh m\pi + im\pi O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Ou encore

$$
\begin{aligned}
&-(1+ik)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi\right)\\
&+(1-ik)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi\right)\\
&-2ikm\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh m\pi - i(c\pi + O\Big(\frac{1}{n}\Big))\cosh m\pi + ic\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh m\pi\\
&+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi + iO\Big(\frac{1}{n}\Big)(\sinh m\pi + \cosh m\pi) = 0,
\end{aligned}
$$

où c est une constante.
D'où

$$
\begin{cases}
-\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh m\pi\\
-2kc\pi\cosh m\pi + kc\pi\sqrt{2}\sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi = 0\\
O\left(\frac{1}{n}\right)(\sinh m\pi + \cosh m\pi) - k\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh m\pi\\
+k\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh m\pi - km\pi\sqrt{2}\cosh m\pi = 0.
\end{cases}
$$

On obtient

$$\begin{cases} \Big[-\frac{\sqrt{2}}{2} + ck\pi\sqrt{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \sinh m\pi + \Big[-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2ck\pi + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \cosh m\pi = 0, \\ \Big[-k\frac{\sqrt{2}}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \sinh m\pi + \Big[k\frac{\sqrt{2}}{2} - km\pi\sqrt{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \cosh m\pi = 0. \end{cases}$$

Ce qui est impossible, puisque $[k\frac{\sqrt{2}}{2} - km\pi\sqrt{2}]$ est non nul.
Donc les racines de $\Delta(\tau)$ sont asymptotiquement simples.
Par ailleurs, il est clair qu'elles sont asymptotiquement séparées. En effet, d'après (3.4.10) on a :

$$\begin{aligned} \Re e\, \tau_n &= m\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \\ |\Re e\, \tau_{n+1} - \Re e\, \tau_n| &= \Big|(m+1)\pi + O\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big) - \Big(m\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big| \\ &= \Big|\pi + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big|. \end{aligned}$$

Donc quand n tend vers l'infini, $|\Re e\, \tau_{n+1} - \Re e\, \tau_n| > \varepsilon$, avec ε un réel strictement positif.

3.4.2 Régularité forte : cas où la masse est non nulle.

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \tau^8\{e^{i\tau\sqrt{2}}\Big[-2k + 2i\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\Big] \\ &+ e^{-i\tau\sqrt{2}}\Big[-2k + 2i\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\Big] \\ &+ e^{\tau\sqrt{2}}\Big[-2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\Big] \\ &+ e^{-\tau\sqrt{2}}\Big[-2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2}\Big] + 8(k - k\tau^{-2})\}. \end{aligned}$$

Montrons que τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ si et seulement si $\tilde{\tau} = \omega\tau$ satisfait l'équation :

$$\begin{aligned} f(\tilde{\tau}) &= \cosh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}(1 + ik\tilde{\tau}^2) - (ik\tilde{\tau}^2 - k) \\ &+ \sinh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}(ik\tilde{\tau} - \tilde{\tau}) + \cosh\tilde{\tau}\sin\tilde{\tau}(ik\tilde{\tau} + \tilde{\tau}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

avec $\omega = \pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Démonstration : Dans ce qui suit, on prend $\omega = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. La démonstration est la même pour $\omega = -\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Supposons que τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$. Donc :

$$\Big\{e^{i\tau\sqrt{2}}\left[-2k+2i\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1}-2\tau^{-2}\right]+e^{-i\tau\sqrt{2}}\left[-2k+2i\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1}-2\tau^{-2}\right]$$
$$+e^{\tau\sqrt{2}}\left[-2k-2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1}-2\tau^{-2}\right]+e^{-\tau\sqrt{2}}\left[-2k+2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1}-2\tau^{-2}\right]$$
$$+8(k-k\tau^{-2})\Big\}=0,$$

ou encore :

$$\begin{aligned}&2i\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1}(e^{i\tau\sqrt{2}}-e^{-i\tau\sqrt{2}})-2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1}(e^{\tau\sqrt{2}}-e^{-\tau\sqrt{2}})\\&+(-2k-2\tau^{-2})(e^{i\tau\sqrt{2}}+e^{-i\tau\sqrt{2}}+e^{\tau\sqrt{2}}+e^{-\tau\sqrt{2}})+8(k-k\tau^{-2})\\&=0.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}&-2k(4\cos\omega\tau\cosh\omega\tau-4)-2\tau^{-2}(4\cos\omega\tau\cosh\omega\tau+4k)\\&-4\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1}\sin\tau\sqrt{2}-4\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1}\sinh\tau\sqrt{2}\\&=0.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}&-2k(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau-1)-2\tau^{-2}(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau+k)\\&-\sqrt{2}k\tau^{-1}(\sin\tau\sqrt{2}+\sinh\tau\sqrt{2})+\sqrt{2}\tau^{-1}(\sin\tau\sqrt{2}-\sinh\tau\sqrt{2})\\&=0.\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}&k\tau^2(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau-1)+(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau+k)+ik\omega\tau(\sinh\omega\tau\cos\omega\tau\\&+\cosh\omega\tau\sin\omega\tau)-\omega\tau(\sinh\omega\tau\cos\omega\tau-\cosh\omega\tau\sin\omega\tau)=0.\end{aligned}$$

D'où $\tilde{\tau}=\omega\tau$ satisfait l'equation :

$$\begin{aligned}f(\tilde{\tau}) &= \cosh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}(1+ik\tilde{\tau}^2)-(ik\tilde{\tau}^2-k)+\sinh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}(ik\tilde{\tau}-\tilde{\tau})\\&+ \cosh\tilde{\tau}\sin\tilde{\tau}(ik\tilde{\tau}+\tilde{\tau})\\&= 0.\end{aligned}$$

De la même façon, si $\tilde{\tau}$ satisfait cette équation, alors τ est racine du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$.
Maintenant, on montre que les racines du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ sont asymptotiquement simples et séparées, ce qui établit la régularité forte

des conditions aux bords de (3.3.4) qui est une condition nécessaire pour appliquer le théorème 1.2.1.
Le développement asymptotique des racines du déterminant caractéristique $\Delta(\tau)$ est le suivant :

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\frac{(k+1)}{\sqrt{2}k\pi n}+\frac{(k-1)}{\sqrt{2}k\pi n}-\frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2n^2}\\ &- i\frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2n^2}+\frac{(1-k^2+2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2}+i\frac{(1-k^2-2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{\tau}_n=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\pi n}-\frac{(1+k^2)}{k^2\pi^2n^2}+\frac{(1-k^2)}{2k\pi n^2}+i\left(\frac{1}{k\pi n}-\frac{1}{\pi n^2}\right),\ \text{avec}\ n\in\mathbb{N}.$$

On pose $m=n+\dfrac{1}{2}$, et on arrête le développement asymptotique à l'ordre 1.
Donc $\tilde{\tau}_n$ s'écrit :

$$\tilde{\tau}_n=m\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big)+iO\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Montrons que ces racines sont asymptotiquement simples et séparées.
Supposons qu'à partir d'un certain rang n_0, $f'(\tilde{\tau}_n)$ s'annule en même temps que $f(\tilde{\tau}_n)$, pour tout $n\geq n_0$.
On obtient :

$$\begin{aligned}f'(\tilde{\tau}_n) &= ik\tilde{\tau}_n^2(\cos\tilde{\tau}_n\sinh\tilde{\tau}_n-\cosh\tilde{\tau}_n\sin\tilde{\tau}_n)+ik(\cos\tilde{\tau}_n\sinh\tilde{\tau}_n+cosh\tilde{\tau}_n\sin\tilde{\tau}_n)\\ &+ ik\tilde{\tau}_n(4\cosh\tilde{\tau}_n\cos\tilde{\tau}_n-2)+2\tilde{\tau}_n\sinh\tilde{\tau}_n\sin\tilde{\tau}_n=0.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases}\cos\tau_n\simeq -O\Big(\frac{1}{n}\Big)-iO\Big(\frac{1}{n}\Big),\ \sin\tau_n\simeq\pm1,\\ \cosh\tau_n\simeq\cosh m\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi+iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi,\\ \sinh\tau_n\simeq\sinh m\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi+iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\cosh m\pi.\end{cases}$$

On suppose que n est pair. Le cas n impair se fait de la même manière. En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation $f'(\tilde{\tau}_n)=0$, elle devient :

$$\begin{aligned}&ik[m^2\pi^2+2m\pi O\Big(\frac{1}{n}\Big)+2im\pi O\Big(\frac{1}{n}\Big)][-O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi-iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi\\ &-\cosh m\pi-O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi-iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi]+ik[-O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi\\ &-iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi+\cosh m\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi+iO\Big(\frac{1}{n}\Big)\sinh m\pi]+ik[m\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\end{aligned}$$

$$+iO\left(\frac{1}{n}\right)][-4O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi - 4iO\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi - 2] + 2[m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) + iO\left(\frac{1}{n}\right)]$$
$$[\sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi] = 0.$$

Ce qui implique

$$-ikm^2\pi^2 O\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi + km^2\pi^2 O\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi - ikm^2\pi^2\cosh m\pi$$
$$-ikm^2\pi^2 O\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi + km^2\pi^2\sinh m\pi - 2ikm\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi$$
$$+2km\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi + ik\cosh m\pi - 4ikm\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi$$
$$+4km\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi - 2ikm\pi - 2ikO\left(\frac{1}{n}\right) + 2kO\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$+2m\pi\sinh m\pi + 2m\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi + 2im\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\cosh m\pi$$
$$+2O\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi + 2iO\left(\frac{1}{n}\right)\sinh m\pi = 0.$$

D'où :

$$\begin{cases} \sinh m\pi\left[km^2\pi^2 O\left(\frac{1}{n}\right) + km^2\pi^2 + 2m\pi + 2O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ +\cosh m\pi\left[2km\pi O\left(\frac{1}{n}\right) + 4km\pi O\left(\frac{1}{n}\right) + 2m\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ +2kO\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \\ \\ \sinh m\pi\left[-km^2\pi^2 O\left(\frac{1}{n}\right) - km^2\pi^2 O\left(\frac{1}{n}\right) + 2O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ +\cosh m\pi\left[-km^2\pi^2 - 2km\pi O\left(\frac{1}{n}\right) + k - 4km\pi O\left(\frac{1}{n}\right) + 2m\pi O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ -2km\pi - 2kO\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \sinh m\pi\left[km^2\pi^2 + 2m\pi + (km^2\pi^2 + 2)O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ +\cosh m\pi\left[6km\pi + 2m\pi\right]O\left(\frac{1}{n}\right) + 2kO\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \\ \sinh m\pi\left[-2km^2\pi^2 + 2\right]O\left(\frac{1}{n}\right) \\ +\cosh m\pi\left[-km^2\pi^2 + k + (2m\pi - 6km\pi)O\left(\frac{1}{n}\right)\right] - 2km\pi - 2kO\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \end{cases}$$

Ce qui est impossible, car dans les deux équations les termes dominants tendent vers l'infini.
Les racines de Δ sont asymptotiquement simples. Elles sont aussi asymptotiquement séparées (celà résulte directement du développement de τ_n).

3.4.3 Résultats de stabilité uniforme et non uniforme.

•Cas d'un contrôle moment et d'un contrôle force.

Soit le système donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1,t) - u_{xxx}(1,t) = -k_1 u_t(1,t) & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1,t) = -k_2 u_{xt}(1,t) & & t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 & & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.4.12}$$

L'énergie du système est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (u_t)^2\,dx + \int_0^1 (u_{xx})^2\,dx + u_t^2(1,t)\right].$$

Un calcul direct donne

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k_1 u_t^2(1,t) - k_2 u_{xt}^2(1,t).$$

L'espace d'énergie $\mathcal{H}$ est

$$\mathcal{H} = \{(u,v,\eta)^\top \in H^2(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}, u(0) = u_x(0) = 0\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle (u,v,\eta), (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\eta})\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})dx + \eta\tilde{\eta}$$

où $U = (u,v,\eta)^\top$ et $\tilde{U} = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\eta})^\top \in \mathcal{H}$.
On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) \;=\; & \{(u,v,\eta)^\top \in H^4(0,1) \times H^2(0,1) \times \mathbb{R},\ u_{xx}(1) + kv_x(1) = 0, \\ & \eta = v(1), u(0) = u_x(0) = 0, v(0) = v_x(0) = 0\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}U = (v, -u_{xxxx}, u_{xxx}(1) - k_1 u_t(1))^\top, \text{avec } U = (u,v,\eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Le système (3.4.12) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{U} = \mathcal{A}U \quad \text{et} \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H},$$

avec $U = (u, u_t, \eta)^\top$.
L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, donc $\mathcal{A}$ est à domaine dense dans $\mathcal{H}$ et engendre un semi-groupe de contractions $S_{\mathcal{A}}(t)$.

Théorème 3.4.1 *Le semi-groupe $S_{\mathcal{A}}(t)$ est fortement stable.*

Preuve :
On montre la stabilité forte des solutions en appliquant le principe d'invariance de LaSalle. Et vue de la densité de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$, il suffit de montrer le résultat pour des données initiales dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.
Soit $U_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, il est évident que $(I + \mathcal{A})^{-1}$ est compact, donc $\cup_{t\geq 0} S(t)U_0$ est relativement compact. Il reste à montrer que l'ensemble ω-limite $\omega(U_0)$ se réduit à zéro..
Soit $\tilde{U}_0 \in \omega(U_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$. On veut résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{U}}{dt} + \mathcal{A}\tilde{U} = 0, \\ \tilde{U}(0) = \tilde{U}_0. \end{cases} \tag{3.4.13}$$

L'energie étant constante sur l'ensemble ω-limite, le système (3.4.13) devient

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} + \tilde{u}_{xxxx} = 0, \\ \tilde{u}_{tt}(1,t) - \tilde{u}_{xxx}(1,t) = 0, \\ \tilde{u}_{xx}(1,t) = 0, \\ \tilde{u}_t(1,t) = 0, \\ \tilde{u}_{xt}(1,t) = 0, \\ \tilde{u}(0,t) = \tilde{u}_x(0,t) = 0, \end{cases} \tag{3.4.14}$$

avec $\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0$,et $\tilde{u}_t(x,0) = \tilde{v}_0$, et $\tilde{u}_t(1,0) = \tilde{\eta}_0$.
En particulier on a $\tilde{u}_{xxx}(1,t) = 0$ et le fait que $\tilde{u}$ est identiquement nul découle du résultat d'unicité pour la poutre sans masse avec contrôle force $(u_{xxx}(1,t) = -ku_t(1,t))$.

Théorème 3.4.2 *Le semi-groupe $S_{\mathcal{A}}(t)$ est uniformément stable.*

Preuve : Le système

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1,t) - u_{xxx}(1,t) = 0 & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1,t) = -k_2 u_{xt}(1,t) & & t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 & & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.4.15}$$

a été étudié par Laousy [15] qui a montré que ce dernier, qui est une perturbation compacte de (3.4.12) est uniformément stable. D'après Gibson [10, théorème 2] le système (3.4.12) est alors aussi uniformément stable.

•Cas d'un contrôle force.

Soit le système donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1,t) - u_{xxx}(1,t) = -k_1 u_t(1,t) & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1,t) = 0 & & t \geq 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 & & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.4.16}$$

L'énergie du système est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 u_{xx}^2 dx + u_t^2(1,t)\Big].$$

Un calcul direct donne

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k_1 u_t^2(1,t)$$

Soit l'espace $\mathcal{H}$ donné par

$$\mathcal{H} = \{(u,v,\eta)^\top \in H^2(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}, u(0) = u_x(0) = u_{xx}(0) = 0\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle (u,v,\eta),(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\eta})\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})dx + \eta\tilde{\eta}$$

où $U = (u,v,\eta)^\top$ et $\tilde{U} = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\eta})^\top \in \mathcal{H}$.
On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad = \quad & \{(u,v,\eta)^\top \in H^4(0,1) \times H^2(0,1) \times \mathbb{R},\ \eta = v(1), u(0) = u_x(0) = u_{xx}(1) = 0, \\ & v(0) = v_x(0) = 0\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}U = (v, -u_{xxxx}, u_{xxx}(1))^\top, \quad \text{avec } U = (u,v,\eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

$$\mathcal{B}U = (0,0,-k_1\eta)^\top, \quad \textit{avec } U = (u,v,\eta)^\top \in \mathcal{H}.$$

Le système (3.4.16) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_t(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})U(t), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.4.17}$$

Théorème 3.4.3 *Le système dynamique (3.4.16) est fortement stable.*

Preuve : En effet, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle, on se ramène à résoudre un problème d'unicité pour un système de la forme

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \\ u_{tt}(1,t) - u_{xxx}(1,t) = 0, \\ u_{xx}(1,t) = 0, \\ u_t(1,t) = 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \end{cases}$$

qui est le problème d'unicité à résoudre pour une poutre sans masse avec contrôle force. On sait que le résultat est vrai dans ce cas.
Le système dynamique (3.4.16) est fortement stable.

Théorème 3.4.4 *Le système dynamique (3.4.16) n'est pas uniformément stable.*

Preuve : Pour démontrer ce résultat on va utiliser un résultat classique de perturbation compacte [22] qui a déjà été utilisé par Rao [20]. Il est facile de voir que $\mathcal{A}$ est maximal monotone.
Un calcul simple nous donne

$$\langle \mathcal{A}U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -\langle U, \mathcal{A}\tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}}$$

pour U et $\tilde{U} \in \mathcal{H}$.
L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc antisymétrique.
L'opérateur $\mathcal{B}$ est compact car la seule composante non nulle est une fonction de η qui appartient à $\mathbb{R}$.
Le semi-groupe engendré par $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ n'est donc pas uniformément stable. On omet les détails de la preuve (elle est la même que dans [20]).

Chapitre 4

Pont roulant avec feedback sans terme de position. Comportement asymptotique.

4.1 Introduction.

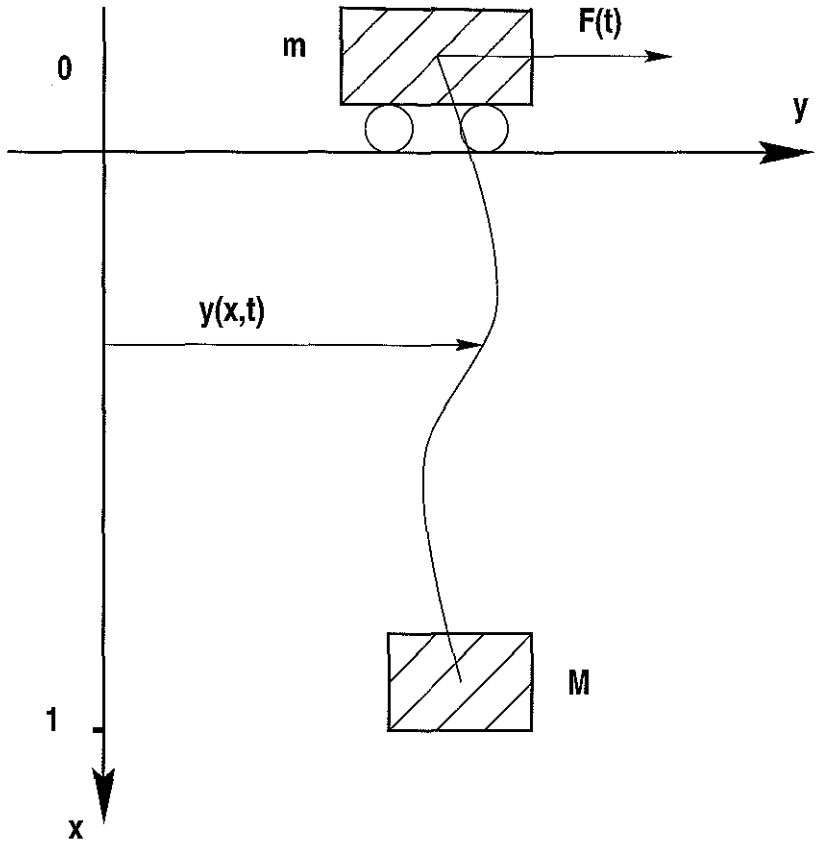
On étudie une variante du problème de pont roulant, avec contrôle force agissant sur le chariot.

Le système général est régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\ -ay_x(0,t) + my_{tt}(0,t) = F(t) & t \geq 0, \\ ay_x(1,t) + My_{tt}(1,t) = 0 & t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x) & t \geq 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où m est la masse du chariot, M la masse transportée, $a \in H^1(0,1), a(x) \geq a_0 > 0$ la tension du câble (a est affine pour un câble homogène), $y(x,t)$ est le déplacement du câble au point d'abscisse curviligne x, par rapport à une position fixe, et $F(t)$ est la force pilotant le chariot sur les rails (voir schéma du pont roulant).

Le but est de déterminer une loi de feedback sur l'état en $x = 0$ pour stabiliser fortement, voire uniformément, le système câble et masses.



On prend assez naturellement des feedbacks en position vitesse voire vitesse angulaire, en $x = 0$.

Le cas où le feedback dépend de la position et de la vitesse a déjà été étudié [7]. On obtient la stabilité forte, mais non uniforme pour $F(t) = -\alpha y(0,t) - f(y_t(0,t))$ avec $\alpha > 0$, f monotone, continue, non plate en 0.

On suppose ici que $\alpha = 0$, et on étudie dans un premier temps le cas où le feedback est linéaire : $F(t) = -\beta y_t(0,t)$, $\beta > 0$.

Après quelques rappels sur la stabilisation forte ou uniforme, avec un feedback où intervient la position, on étudie le problème avec $\alpha = 0$.

Le problème est bien posé. L'ensemble ω-limite de toute trajectoire est *a priori* formé de constantes. On montre qu'on a convergence de la solution vers une constante qui dépend de la condition initiale, qu'on peut calculer. Enfin on aborde également le cas d'un feedback non linéaire, $F(t) = -f(y_t(0,t))$ avec des hypothèses convenables sur f.

4.2 Rappels.

4.2.1 Feedback en position et vitesse.

Le feedback dans ce cas est donné par

$$F(t) = -\alpha y(0,t) - f(y_t(0,t)) \tag{4.2.1}$$

avec $\alpha > 0$, f monotone continue, $f(0) = 0$ et $a \in H^1(0,1)$.
Le problème est bien posé dans les variables $(y, y_t, y_t(0,t), y_t(1,t))$ dans $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$ au sens des semi-groupes de contractions [7].
L'énergie est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (y_t^2 + a y_x^2)dx + \alpha y^2(0,t) + m y_t^2(0,t) + M y_t^2(1,t)\right] \tag{4.2.2}$$

Elle induit une norme sur l'espace $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$, équivalente à la norme usuelle.
• Si $\xi f(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0$, le résultat de stabilité forte a été montré par le principe d'invariance de LaSalle.
• Si le feedback est linéaire : $f(\xi) = \beta\xi$, avec $\beta > 0$, il est prouvé que la stabilité n'est pas uniforme, par un argument de perturbation compacte de Russell. Dans le cas où $\beta = 0$, le système est conservatif.

4.2.2 Feedback en position, vitesse et vitesse de rotation.

Le feedback dans ce cas est donné par

$$F(t) = -\alpha y(0,t) + f(a y_{xt}(0,t) - \alpha y_t(0,t)) \tag{4.2.3}$$

avec $\alpha > 0$, f monotone continue, $f(0) = 0$ et $a \in H^2(0,1)$.
Le problème est bien posé dans les variables $(y, y_t) \in H^2(0,1) \times H^1(0,1)$ au sens des semi-groupes de contractions [18] et [8].
L'énergie est alors

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\Bigg[\int_0^1 \left((a y_x)_x^2 + a y_{xt}^2\right) dx + \alpha y_t^2(0,t) \\ &+ \frac{1}{m}\left[a y_x(0,t) - \alpha y(0,t)\right]^2 + \frac{1}{M}\left[a y_x(1,t)\right]^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

qui induit une norme sur l'espace $H^2(0,1) \times H^1(0,1)$ équivalente à la norme usuelle.

On obtient alors les estimations d'énergie suivantes :

- $E(t) \leq CE(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0$
  avec $C \geq 1, \omega = \omega(C)$, si $C_1 \mid \xi \mid \leq \mid f(\xi) \mid \leq C_2 \mid \xi \mid \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$
- $E(t) \leq CE(0)(1+\omega t)^{-\frac{2}{p-1}}, \quad \forall t \geq 0$
  avec $C \geq 1, \omega = \omega(C, E(0))$, si $C_1 \min\{\mid \xi \mid, \mid \xi \mid^p\} \leq \mid f(\xi) \mid \leq C_2 \mid \xi \mid$
  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ et $p > 1$.

On a bien stabilisation uniforme, mais pour une norme plus fine que celle induite par l'énergie naturelle.

4.2.3 Feedback linéaire en position, vitesse et vitesse de rotation.

Le feedback dans ce cas est donné par

$$F(t) = -\alpha y(0,t) - (\beta + \alpha\gamma) y_t(0,t) + \gamma a y_{xt}(0,t). \tag{4.2.5}$$

avec α, β et $\gamma > 0$; $\beta\gamma < m$ et $a \in H^1(0,1)$.
Le problème est bien posé dans les variables $(y, y_t, \xi, \eta) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$, avec $\xi(t) = y_t(0,1)$ et $\eta(t) = m y_t(0,t) + \alpha\gamma y(0,t) - \gamma a y_x(0,t)$, au sens des semi-groupes de contractions [18] et [8]. L'énergie qui induit une norme équivalente est

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 \left((a y_x)^2 + y_t^2\right) dx + \alpha y^2(0,t) \\ &+ M y_t^2(1,t) + \frac{1}{m - \beta\gamma}\eta^2(t)\Big]. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

On a seulement équivalence entre la formulation abstraite (avec un opérateur A) et (4.1.1) si la donnée initiale est dans $\mathcal{D}(A^2)$, et η est correct si la donnée initiale est dans $\mathcal{D}(A)$. On obtient alors $E(t) \leq Ce^{-\omega t}E(0) \quad \forall t \geq 0$, c'est-à-dire la stabilité uniforme exponentielle pour une norme plus naturelle liée à l'énergie, contrairement au paragraphe 4.2.2.

4.3 Étude détaillée du cas $\alpha = 0$, feedback linéaire en vitesse.

4.3.1 Caractère bien posé du problème d'évolution.

Dans ce qui suit on étudie le cas où le feedback est linéaire :

$$F(t) = -\beta y_t(0,t), \quad \beta > 0.$$

Le système devient :

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\ -ay_x(0,t) + my_{tt}(0,t) = -\beta y_t(0,t) & t \geq 0, \\ ay_x(1,t) + My_{tt}(1,t) = 0 & t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x) & t \geq 0, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Dans ce problème on a en fait deux fonctions de Lyapunov qui sont deux semi-normes qu'on va combiner. Ceci permettra d'étudier le comportement asymptotique des solutions de (4.3.1).
La première est l'énergie du paragraphe 4.2.1, avec $\alpha = 0$:

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (y_t^2 + ay_x^2)\,dx + my_t^2(0,t) + My_t^2(1,t)\right] \tag{4.3.2}$$

La deuxième s'obtient en intégrant la première équation de (4.3.1) :

$$\int_0^1 y_{tt}\,dx - \int_0^1 (ay_x)_x\,dx = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 y_t\,dx + My_t(1,t) + my_t(0,t) + \beta y(0,t)\right] = 0.$$

On pose donc

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 y_t\,dx + my_t(0,t) + My_t(1,t) + \beta y(0,t)\right]^2. \tag{4.3.3}$$

Remarquons que : $\dfrac{dE_1(t)}{dt} = -\beta y_t^2(0,t)$, et que $\dfrac{dE_2(t)}{dt} = 0$.
$E_2(t)$ restera alors constante le long des trajectoires.
En combinant ces deux fonctions, on obtient une norme sur l'espace naturel d'énergie qui est l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (U,\tilde{U})_{\mathcal{H}} &= ((y,z,u,v),(\tilde{y},\tilde{z},\tilde{u},\tilde{v}))_{\mathcal{H}} \\ &= \left[\int_0^1 (ay_x\tilde{y}_x + z\tilde{z})\,dx + mu\tilde{u} + Mv\tilde{v}\right] + \gamma\left[\int_0^1 z\,dx + mu\right. \\ &+ \left. Mv + \beta y(0)\right]\left[\int_0^1 \tilde{z}\,dx + m\tilde{u} + M\tilde{v} + \beta\tilde{y}(0)\right]. \end{aligned}$$

Lemme 4.3.1 *Pour γ assez petit, la norme induite par le produit scalaire $(.,.)_{\mathcal{H}}$ est équivalente à la norme usuelle de $\mathcal{H}$.*

Démonstration :
En effet il existe une constante C telle que :

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\left[\|z\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y\|_{H^1(0,1)}^2 + u^2 + v^2\right].$$

(où C dépend de γ).
Inversement :

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^1 (ay_x^2 + z^2)\,dx + mu^2 + Mv^2 + \gamma\left(\int_0^1 z\,dx + mu + Mv\right)^2 \\
&+ \gamma\beta^2 y(0)^2 + 2\gamma\beta y(0)\left[\int_0^1 z\,dx + mu + Mv\right] \\
&\geq \int_0^1 (ay_x^2 + z^2)\,dx + mu^2 + Mv^2 + \gamma\left(\int_0^1 z dx + mu + Mv\right)^2 \\
&+ \gamma\beta^2 y(0)^2 - \varepsilon\gamma\beta y(0)^2 - \frac{\gamma\beta}{\varepsilon}\left(\int_0^1 z\,dx + mu + Mv\right)^2 \\
&\geq \int_0^1 (ay_x^2 + z^2)\,dx + mu^2 + Mv^2 + \gamma\beta(\beta-\varepsilon)y(0)^2 \\
&+ \gamma(1-\frac{\beta}{\varepsilon})\left(\int_0^1 z\,dx + mu + Mv\right)^2
\end{aligned}$$

On prend $\varepsilon < \beta$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \int_0^1 (ay_x^2 + z^2)\,dx + mu^2 + Mv^2 + \gamma\beta(\beta-\varepsilon)y(0)^2 \\
&+ 3\gamma\left(1-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\left(\int_0^1 z^2 dx + m^2u^2 + M^2v^2\right).
\end{aligned}$$

Ensuite on prend γ positif assez petit pour que : $3\gamma\left(\frac{\beta}{\varepsilon} - 1\right)\max(1, m, M) < \frac{1}{2}$.
Ce qui donne : $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|U\|_{H^1\times L^2\times\mathbb{R}^2}^2$.
Désormais $\mathcal{H}$ sera muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ et du produit scalaire associé, avec γ convenable.
On associe maintenant au système (4.3.1) l'énergie suivante :

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 y_t^2\,dx + \int_0^1 ay_x^2\,dx + my_t^2(0,t) + My_t^2(1,t)\Big].$$

Le système (4.3.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}_0 U(t) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

avec $\mathcal{A}_0$ défini par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{(y,z,u,v)^\top \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times \mathbb{R}^2 \,;\, u = z(0), v = z(1)\}.$$

$$\mathcal{A}_0(y,z,u,v) = (z, (ay_x)_x, \frac{1}{m}(ay_x(0) - \beta u), -\frac{1}{M} a y_x(1)) \,,$$

pour $(y,z,u,v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.
On note que l'opérateur $-\mathcal{A}_0$ n'est pas coercif du fait de l'absence du terme en position dans la commande.

Lemme 4.3.2 *L'opérateur $\mathcal{A}_0$ est maximal dissipatif.*

Démonstration :
Montrons d'abord que $\mathcal{A}_0$ est dissipatif. Soit $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_0 U, U \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} z \\ (ay_x)_x \\ \frac{1}{m}(ay_x(0) - \beta z(0)) \\ -\frac{1}{M} a y_x(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \\ z(0) \\ z(1) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_0^1 (a z_x y_x + (ay_x)_x z)\, dx + (ay_x(0) - \beta z(0))\, z(0) \\
&- a y_x(1) z(1) + \gamma \Big[\int_0^1 (ay_x)_x \, dx + (ay_x(0) - \beta z(0)) \\
&- a y_x(1) + \beta z(0) \Big] \Big[\int_0^1 z \, dx + m z(0) + M z(1) + \beta y(0) \Big] \\
&= \Big[a y_x z \Big]_0^1 - \int_0^1 a y_x z_x \, dx + \int_0^1 a y_x z_x dx + a y_x(0) z(0) \\
&- \beta z(0)^2 - a y_x(1) z(1) + \gamma \Big[a y_x(1) - a y_x(0) + a y_x(0) - \beta z(0) \\
&- a y_x(1) + \beta z(0) \Big] \Big[\int_0^1 z \, dx + m z(0) + M z(1) + \beta y(0) \Big] \\
&= -\beta z(0)^2.
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_0$ est dissipatif.
$\mathcal{A}_0$ est maximal, si pour tout $U_0 = (y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathcal{H}$, il existe $U = (y,z,u,v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ tel que :

$$U - \mathcal{A}_0 U = U_0.$$

Cette équation est équivalente à :

$$\begin{cases} y - z = y_0 \\ z - (ay_x)_x = z_0 \\ u - \frac{1}{m}(ay_x(0) - \beta z(0)) = u_0 \\ v + \frac{1}{M} ay_x(1) = v_0 \\ u = z(0) \\ v = z(1). \end{cases} \tag{4.3.5}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} y - (ay_x)_x = y_0 + z_0 \\ \left(1 + \dfrac{\beta}{m}\right) y(0) - \frac{1}{m} ay_x(0) = u_0 + \left(1 + \frac{\beta}{m}\right) y_0(0) \\ y(1) + \frac{1}{M} ay_x(1) = v_0 + y_0(1) \end{cases} \tag{4.3.6}$$

On multiplie la première équation de (4.3.6) par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(0,1)$, et on intègre entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 y\varphi \, dx - \int_0^1 (ay_x)_x \varphi \, dx = \int_0^1 (y_0 + z_0)\varphi \, dx.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (y\varphi + ay_x\varphi_x) \, dx + My(1)\varphi(1) + (m + \beta)y(0)\varphi(0) \\ = & \int_0^1 (y_0 + z_0)\varphi \, dx + Ma_0\varphi(1) + b_0\varphi(0) \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

où $a_0 = v_0 + y_0(1)$ et $b_0 = mu_0 + (m + \beta)y_0(0)$.
En appliquant le théorème de Lax-Milgram à l'équation (4.3.7), on obtient l'existence de $y \in H^1(0,1)$ solution de (4.3.7), $ay_x \in H^1(0,1)$ et donc $y \in H^2(0,1)$. D'où $U = (y, z, u, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.
$\mathcal{A}_0$ est donc maximal dissipatif, et engendre un semi-groupe de contractions. De plus $\mathcal{A}_0$ est à résolvante compacte. La densité de $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ est un résultat général pour $\mathcal{A}_0$ linéaire maximal dissipatif et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.
Comme conséquence du Lemme 4.3.1, et par le théorème de Hille-Yosida [19], le système (4.3.4) admet une solution forte $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, et une solution faible $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ si $U_0 \in \mathcal{H}$. Donc le problème (4.3.1) est bien posé.

4.3.2 Analyse spectrale du problème.

Soit $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, tel que :

$$\mathcal{A}_0 U = \lambda U.$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} z = \lambda y \\ (ay_x)_x = \lambda z \\ ay_x(0) - \beta z(0) = \lambda m z(0) \\ ay_x(1) = -\lambda M z(1), \end{cases} \tag{4.3.8}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (ay_x)_x = \lambda^2 y \\ ay_x(0) - (\lambda m + \beta)\lambda y(0) = 0 \\ ay_x(1) + \lambda^2 M y(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Sachant que $\mathcal{A}_0$ est dissipatif, on a $\Re e\lambda \leq 0$.
On multiplie la première équation de (4.3.9) par $\overline{y}$ et on intègre par parties entre 0 et 1.

$$\int_0^1 a y_x \overline{y}_x dx + \lambda^2 \int_0^1 y\overline{y} dx + \lambda^2 M y(1)\overline{y}(1) + \lambda(\lambda m + \beta) y(0)\overline{y}(0) = 0. \tag{4.3.10}$$

On pose $\lambda = i\tau, \tau \in \mathbb{C}$

$$\int_0^1 a|y_x|^2 dx - \tau^2 \int_0^1 |y|^2 dx - \tau^2 M|y(1)|^2 + i\tau(i\tau m + \beta)|y(0)|^2 = 0. \tag{4.3.11}$$

• **Cas où** $\beta > 0$: cherchons les valeurs propres sur l'axe imaginaire. Donc $\tau \in \mathbb{R}$ et (4.3.11) implique :

$\tau\beta|y(0)|^2 = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 a|y_x|^2\, dx - \tau^2 \int_0^1 |y|^2\, dx - \tau^2 M|y(1)|^2 - \tau^2 m|y(0)|^2 = 0.$

Si $y(0) \neq 0$ alors $\tau = 0$ et par suite $\lambda = 0$, et (4.3.9) implique alors que $y = c^{te}$.
Si $y(0) = 0$, alors (4.3.9) donne $y_x(0) = 0$ et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a y_{xx} = \lambda^2 y - a_x y_x \\ y(0) = 0 \\ y_x(0) = 0. \end{cases} \tag{4.3.12}$$

n'admet que $y = 0$ comme solution.
Finalement, pour $\beta > 0$, il y a une seule valeur propre sur l'axe imaginaire $\lambda = 0$, et le sous-espace propre qui lui est est associé est $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{H}$ qui est de dimension 1. Toutes les autres valeurs propres vérifient $\Re e\lambda < 0$.

De plus, 0 est une valeur propre algébriquement simple. En effet si $U \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_0^2) \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_0)$ on a $\mathcal{A}_0(\mathcal{A}_0 U) = 0$ avec $\mathcal{A}_0 U \neq 0$.

Après normalisation, on obtient $\mathcal{A}_0 U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui implique :

$$\begin{cases} z = 1 \\ (ay_x)_x = 0 \\ \dfrac{1}{m}[ay_x(0) - \beta z(0)] = 0 \\ -\dfrac{1}{M} a y_x(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

D'où :

$$\begin{cases} z = 1 \\ a y_x = c^{te} = 0 \\ -\dfrac{\beta}{m} z(0) = 0. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Ce qui implique $z(0) = 0$ si $\beta > 0$, ce qui est absurde.

• **Cas où $\beta = 0$:**

D'après (4.3.10), on obtient que $\lambda^2 \in \mathbb{R}^-$. Donc toutes les valeurs propres sont sur l'axe imaginaire. De plus, $\lambda = 0$ est toujours valeur propre, et le sous espace propre $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est toujours de dimension 1. Par contre maintenant (4.3.13) admet $z = 1$ comme solution, et $y = c^{te}$ donc

$$\mathrm{Ker}\mathcal{A}_0^2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus pour $U \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_0^3) \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_0^2)$, on a $\mathcal{A}_0 U \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_0^2)$, avec $\mathcal{A}_0 U \notin Ker(\mathcal{A})$.

Ce qui donne :

$$\begin{cases} z = C_1 \\ (ay_x)_x = C_2 \\ \dfrac{1}{m}[ay_x(0)] = C_2 \\ -\dfrac{1}{M} a y_x(1) = C_2, \end{cases} \tag{4.3.15}$$

avec $C_2 \neq 0$. On en déduit que

$$\begin{cases} z = C_1 \\ ay_x = C_2 x + C_3 \\ \dfrac{1}{m} C_3 = C_2 \\ -\dfrac{1}{M}(C_2 + C_3) = C_2 \end{cases} \tag{4.3.16}$$

ce qui est absurde.
Donc dans le cas $\beta = 0$, $\lambda = 0$ est algébriquement double. Ceci est cohérent avec le fait que, dans le cas $\beta = 0$, les fonctions affines en temps sont solutions du problème (4.3.1), ce qui n'est pas le cas si $\beta \neq 0$.
L'analyse spectrale qui vient d'être faite donne une idée de ce que l'on peut attendre du comportement asymptotique.
Remarque : Pour $a \equiv 1$ les valeurs propres du problème, outre $\lambda = 0$, sont données par l'équation :

$$e^{2\lambda} = \frac{(\lambda M - 1)(\lambda m + \beta - 1)}{(\lambda M + 1)(\lambda m + \beta + 1)}.$$

Notons que pour $\beta = 0$, on retrouve encore $\lambda = 0$ comme racine, ce qui explique que $\lambda = 0$ est algébriquement double dans ce cas. Les valeurs propres sont deux à deux conjuguées, asymptotiquement algébriquement simples, et $\lambda_k \sim ik\pi$ ($\Re e \lambda_k < 0$ pour $k \neq 0$).
On peut montrer par la méthode de Shkalikov, que des vecteurs propres généralisés (pour au plus un nombre fini d'entre eux) forment une base de Riesz de l'espace naturel d'énergie $\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$ (cf appendice 5.3).
Pour $\beta = 0$, les valeurs propres sont toutes algébriquement simples excepté $\lambda = 0$ qui est algébriquement double (cf. Appendice 5.2).

4.3.3 Comportement asymptotique en temps

Pour le problème (4.3.1) on est dans le cadre d'un semi-groupe de contractions avec résolvante compacte, donc les trajectoires sont précompactes. On va utiliser le principe d'invariance de LaSalle. En combinant avec un principe "d'unicité" (adapté du cas $\alpha \neq 0$) on va obtenir la convergence de la solution de (4.3.1) vers une constante. Ensuite, on calculera explicitement la constante en fonction de la donnée initiale.

Lemme 4.3.3 *Soit $y(x,t)$ une solution de :*

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\ ay_x(1,t) + My_{tt}(1,t) = 0 & t \geq 0, \\ ay_x(0,t) = 0 & t \geq 0, \\ y_t(0,t) = 0 & t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x) & t \geq 0, \end{cases} \tag{4.3.17}$$

alors $y(x,t)$ est une constante.

La preuve du lemme 4.3.2 utilise un multiplicateur adapté.

Lemme 4.3.4 *[7]. Soit ϕ solution de :*

$$\begin{cases} \phi_x(x) + \phi(x)|\frac{a_x}{a}|(x) = 1 & 0 < x < 1 \quad , \\ \phi(1) = -M, \end{cases} \tag{4.3.18}$$

Alors ϕ vérifie :

$$\begin{cases} \phi(x) \leq -M \quad et \quad \phi(1) = -M, \\ \phi_x(x) \leq 1 \qquad 0 < x < 1, \\ a(\frac{\phi}{a})_x(x) \geq 1 \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{4.3.19}$$

Il est immédiat que $\phi \leq -M$, $\phi_x \geq 1$, et $a\left(\dfrac{\phi}{a}\right)_x \geq 1$.

On peut d'ailleurs donner une formule explicite de ϕ. Pour $a \equiv 1$, on retrouve le "multiplicateur" $(x - M - 1)y_x = \phi y_x$ qui va être utilisé .

Démonstration du lemme 4.3.2 :

C'est une adaptation du lemme d'unicité 4.3 de [7] . On multiplie la première équation de (4.3.17) par ϕy_x et on intègre en espace et en temps.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 y_{tt}\phi y_x \, dx \, dt &= \int_0^1 [y_t \phi y_x]_0^T dx - \int_0^T \int_0^1 \phi y_t y_{xt} \, dx \, dt \\ &= \int_0^1 [y_t \phi y_x]_0^T dx - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \phi (y_t^2)_x \, dx \, dt \\ &= \int_0^1 [y_t \phi y_x]_0^T \, dx - \frac{1}{2} \int_0^T [\phi y_t^2]_0^1 \, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \phi_x(x) y_t^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 (ay_x)_x \phi y_x \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left[(ay_x)^2\right]_x \frac{\phi}{a} \, dx \, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left[\frac{\phi}{a}(ay_x)^2\right]_0^1 dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 (ay_x)^2 \left(\frac{\phi}{a}\right)_x dx\, dt.
\end{aligned}
$$

En égalant ces deux expressions et en utilisant le fait que $y_t(0,t) = 0$ et $\phi(1) = -M$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left[\phi_x y_t^2 + a\left(\frac{\phi}{a}\right)_x a y_x^2\right] dx\, dt + \frac{M}{2}\int_0^T y_t^2(1,t)\, dt \\
&= -\int_0^1 \left[y_t \phi y_x\right]_0^T dx + \frac{1}{2}\int_0^T \left[\left(\frac{\phi}{a}\right)(ay_x)^2\right]_0^1 dt.
\end{aligned}
$$

En utilisant les propriétés de ϕ, on a :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (y_t^2 + a y_x^2)\, dx\, dt + \frac{M}{2}\int_0^T y_t^2(1,t)\, dt + \frac{m}{2}\int_0^T y_t^2(0,t)\, dt \\
&\leq -\int_0^1 \left[y_t \phi y_x\right]_0^T dx + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\phi}{a}\right)(ay_x)^2(1,t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Or $\phi(x) \leq -M \leq 0$, donc :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T E_1(t)dt &\leq -\int_0^1 [y_t \phi y_x]_0^T \\
&\leq C(E(t) + E(0)) \\
&\leq 2CE(0).
\end{aligned}
$$

D'où $E_1(t) = 0$ (on fait tendre T vers $+\infty$ et on utilise le fait que l'énergie est constante).
On en déduit que : $y_t = ay_x \equiv 0$ et $y_t(1,t) = 0$.
Comme $a \geq a_0 > 0$, on en déduit que $y_t = y_x = 0$, donc $y(x,t)$ est une constante.

Théorème 4.3.1 *La solution $U(t)$ de (4.3.4) tend vers $(C,0,0,0)$ où $C = y_0(0) + \frac{1}{\beta}\int_0^1 y_1(x)dx + \frac{M}{\beta}u_0 + \frac{m}{\beta}v_0$. C'est le cas en particulier des solutions fortes, donc des solutions de (4.3.1) avec $y_0 \in H^2(0,1), y_1 \in H^1(0,1)$, la convergence ayant lieu dans $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$.*

Démonstration :
Par densité et contraction, il suffit d'établir le résultat pour $U_0 = (y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.

Soit $\omega(U_0)$ l'ensemble ω-limite, non vide.
Par le principe d'invariance de LaSalle, l'énergie E_1 est constante sur toute trajectoire issue d'une condition initiale $U_1 \in \omega(U_0)$. D'après la formule de dérivation : $\frac{d}{dt}E_1(t) = -\beta y_t^2(0,t)$, on en déduit par le Lemme 3.2 que $U_1 = (C,0,0,0)$ ($\omega(U_0)$ ne contient que des éléments de cette forme).
Soit $(C,0,0,0) \in \omega(U_0)$ et $(t_k) \longrightarrow \infty$ telle que $U(t_k) \longrightarrow (C,0,0,0)$ dans $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$.
Il reste à montrer que C ne dépend pas de la sous-suite (t_k) qu'on prend.
On utilise maintenant la deuxième "fonction de Lyapunov".
On sait que $\int_0^1 y_t(x,t)dx + mu(t) + Mv(t) + \beta y(0,t)$ est constante en t.
Donc elle est égale à : $\int_0^1 y_1 dx + mu_0 + Mv_0 + \beta y_0(0)$.
On prend ensuite $t = t_k$ et on fait tendre t_k vers l'infini. Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} y(t_k) \longrightarrow C \ \ dans \ \ H^1(0,1), \\ y_t(t_k) \longrightarrow 0 \ \ dans \ \ L^2(0,1), \\ u(t_k) \longrightarrow 0, \\ v(t_k) \longrightarrow 0, \end{cases}$$

D'où :

$$\beta C = \beta y_0(0) + \int_0^1 y_1(x)dx + Mu_0 + mv_0$$

Remarque :
Il y a une autre façon pour trouver le résultat du théorème 3.1.
Soit $\lambda_n, n \in \mathbb{Z}, (\lambda_0 = 0)$ la suite de valeurs propres de $\mathcal{A}_0$ (répétées selon leur multiplicité algébrique, différente de 1 pour au plus un nombre fini d'entre elles), associée à la famille de vecteurs propres $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}_0$, qui forme une base de Riesz de $\mathcal{H}$. On sait que c'est vrai pour $a \equiv 1$, c'est encore une hypothèse pour a quelconque.
Soit $U_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \psi_n$, avec

$$C_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2.$$

Alors la solution $U(t)$ de

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}_0 U \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.3.20}$$

s'écrit $U(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{\lambda_n t}\psi_n$, où pour simplifier l'écriture, on a supposé toutes les valeurs propres algébriquement simples. Ceci ne change en rien pour la

suite, car il n'y en a qu'un nombre fini qui ne sont pas simples, et 0 est simple dans le cas $\beta > 0$, c'est cela qui est essentiel.
Comme $\|\alpha_n e^{\lambda_n t}\psi_n\|_{\mathcal{H}} \leq C|\alpha_n| \in l^2(\mathbb{Z})$, le théorème de Lebesgue appliqué à la série donne :

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \lim(e^{\lambda_n t})\psi_n = \alpha_0\psi_0$$

car $\Re e\lambda_n < 0$ sauf pour $\lambda_0 = 0$. A ce niveau on voit bien que la simplicité algébrique des λ_n, $n \neq 0$ n'est pas une hypothèse réductrice : dans le cas général, on aura $t^k e^{\lambda_n t}$ qui tendra aussi vers 0.

Donc pour toute solution faible de $\dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}_0 U$, on aura $U(t) \to \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dans $\mathcal{H}$ si $t \to \infty$.
Il reste à calculer α_0 en fonction de $U_0 = (y_0, z_0, u_0, v_0)$.
Soit ϕ_0 un vecteur propre de $\mathcal{A}_0^*$ associé à $\overline{\lambda} = 0$.

$$\begin{aligned} \phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) \quad = \quad & \{\phi \in \mathcal{H}/ \quad U \to (\phi, \mathcal{A}_0 U)_{\mathcal{H}} \quad \text{est continue en } U \\ & \text{sur } \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \quad \text{muni de la norme de } \quad \mathcal{H}\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_0^*\phi_0 = 0$ i.e $\quad (\phi_0, \mathcal{A}_0 U)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.
Alors pour $n \neq 0, (\lambda_n \neq 0$ car $\Re e\lambda_n < 0)$, on a :

$$\begin{aligned} (\psi_n, \phi_0)_{\mathcal{H}} \quad &= \quad \frac{1}{\lambda_n}(\mathcal{A}_0\psi_n, \phi_0) \\ &= \quad \frac{1}{\lambda_n}(\psi_n, \mathcal{A}_0^*\phi_0) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (U_0, \phi_0)_{\mathcal{H}} \quad &= \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(\psi_n, \phi_0)_{\mathcal{H}} \\ &= \quad \alpha_0(\psi_0, \phi_0)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Donc : $\alpha_0 = (U_0, \phi_0)_{\mathcal{H}}/(\psi_0, \phi_0)_{\mathcal{H}}$, avec $\psi_0 = {}^{\top}(1,0,0,0)$.
Il reste juste à calculer $\phi_0 = {}^{\top}(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v})$.

$$(\phi_0, \mathcal{A}_0 U)_{\mathcal{H}} \quad = \quad \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ (ay_x)_x \\ \dfrac{[ay_x(0) - \beta u]}{m} \\ \dfrac{-ay_x(1)}{M} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \Big[a\tilde{y}_x z_x + \tilde{z}(ay_x)_x \Big]\, dx + \tilde{u}\Big[ay_x(0) - \beta u \Big] - \tilde{v} a y_x(1) \\
&+ \gamma \Big[\int_0^1 \tilde{z} + m\tilde{u} + M\tilde{v} + \beta\tilde{y}(0) \Big] \Big[\int_0^1 (ay_x)_x + ay_x(0) - \beta u \\
&- ay_x(1) + \beta z(0) \Big] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ceci $\forall\ U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.
Le dernier crochet étant nul, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(\phi_0, \mathcal{A}_0 U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 \Big(a\tilde{y}_x z_x + \tilde{z}(ay_x)_x \Big)\, dx + \tilde{u}\Big(ay_x(0) - \beta u \Big) - \tilde{v} a y_x(1) \\
&= \Big[a\tilde{y}_x z \Big]_0^1 - \int_0^1 z(a\tilde{y}_x)_x\, dx + \Big[\tilde{z} a y_x \Big]_0^1 - \int_0^1 a y_x \tilde{z}_x\, dx \\
&+ \tilde{u}\Big(ay_x(0) - \beta u \Big) - \tilde{v} a y_x(1) \\
&= -\int_0^1 z(a\tilde{y}_x)_x\, dx - \int_0^1 a y_x \tilde{z}_x\, dx + a y_x(0)\Big(\tilde{u} - \tilde{z}(0) \Big) \\
&+ a y_x(1)\Big(\tilde{z}(1) - \tilde{v} \Big) - z(0) a\tilde{y}_x(0) + z(1) a\tilde{y}_x(1) - \beta u\tilde{u}.
\end{aligned}
$$

On veut la continuité en (y, z, u, v) pour la norme de $\mathcal{H}$; ce qui impose déjà que $a\tilde{y}_x \in H^1(0,1)$, *i.e.* $\tilde{y} \in H^2(0,1)$, $\tilde{z} \in H^1(0,1)$, $\tilde{u} = \tilde{z}(0)$ et $\tilde{v} = \tilde{z}(1)$ pour que $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*)$.
Ensuite $(\phi_0, \mathcal{A}_0 U)_{\mathcal{H}} = 0$ implique :

$$
-\int_0^1 z(a\tilde{y}_x)_x\, dx - \int_0^1 a y_x \tilde{z}_x\, dx - u[a\tilde{y}_x(0) + \beta\tilde{u}] + v a\tilde{y}_x(1) = 0
$$

ceci $\forall (y, z, u, v) \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times \mathbb{R}^2$, avec $u = z(0)$, et $v = z(1)$.
Avec $z \equiv 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 a y_x \tilde{z}_x dx = 0, \quad \forall y \in H^2(0,1)$.
Ce qui donne $(a\tilde{z}_x)_x \equiv 0$ et $(a\tilde{z}_x)(0) = (a\tilde{z}_x)(1) = 0$. D'où $\tilde{z} \equiv C^{te}$, notée C.
Puis, avec $y \equiv 0$, on obtient :

$$
-\int_0^1 z(a\tilde{y}_x)_x dx - u[a\tilde{y}_x(0) + \beta\tilde{u}] + v a\tilde{y}_x(1) = 0 \tag{4.3.21}
$$

ceci $\forall z \in H^1(0,1)$, avec $u = z(0)$, et $v = z(1)$, *i.e.* : $\displaystyle\int_0^1 z_x a\tilde{y}_x - \beta C z(0) = 0$,
ceci $\forall z \in H^1(0,1)$.

Avec cela, on peut calculer α_0. On a :

$$\begin{aligned}(\psi_0,\phi_0)_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tilde{y}\\\tilde{z}\\\tilde{u}\\\tilde{v}\end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \gamma\Big[\int_0^1 \tilde{z}dx + m\tilde{u} + M\tilde{v} + \beta\tilde{y}(0)\Big]\beta.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(U_0,\phi_0)_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix}y_0\\z_0\\u_0\\v_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tilde{y}\\\tilde{z}\\\tilde{u}\\\tilde{v}\end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_0^1 ay_{0x}\tilde{y}_x + z_0\tilde{z} + mu_0\tilde{u} + Mv_0\tilde{v} + \gamma\Big[\int_0^1 \tilde{z}\,dx + m\tilde{u} + M\tilde{v} + \beta\tilde{y}(0)\Big] \\ &\quad \Big[\int_0^1 z_0\,dx + mu_0 + Mv_0 + \beta y_0(0)\Big].\end{aligned}$$

Ce qui donne bien le résultat du théorème 4.3.1, à condition de prouver que :

$$\int_0^1 ay_{0x}\tilde{y}_x + z_0\tilde{z} + mu_0\tilde{u} + Mv_0\tilde{v} = 0.$$

Ceci est vrai, car il faut noter que (4.3.21) implique que $C = 0$, donc $(a\tilde{y}_x)_x \equiv 0$, $a\tilde{y}_x(0) = a\tilde{y}_x(1) = 0$, et donc $y \equiv C^{te} = 1$.

Remarque :

Il nous suffit d'une solution ϕ_0 de $\mathcal{A}_0^*\phi_0 = 0$. Or si on reprend la première expression de $(\phi_0, \mathcal{A}_0 U)$ on a : $(\phi_0, \mathcal{A}_0 U) = 0$ avec $\tilde{y} = 1, \tilde{z} = 0, \tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0$.

On peut donc prendre $\phi_0 = \psi_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ce qui donne alors

$$\begin{aligned}(\psi_0,\phi_0)_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \gamma\beta^2.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(U_0, \phi_0)_{\mathcal{H}} &= (U_0, \psi_0)_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \gamma \Big[\int_0^1 z_0 dx + m u_0 + M v_0 + \beta y_0(0) \Big] \beta.
\end{aligned}
$$

Et par conséquent

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{(U_0, \phi_0)_{\mathcal{H}}}{(\psi_0, \phi_0)_{\mathcal{H}}} \\
&= \frac{1}{\beta} \Big[\int_0^1 z_0 dx + m u_0 + M v_0 + \beta y_0(0) \Big],
\end{aligned}
$$

Ce qui est exactement l'expression donnée dans le théorème 4.3.1.

Si on a une base de Riesz de l'espace $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur, on retrouve la constante en cherchant le vecteur propre de $\mathcal{A}_0^*$ correspondant à la valeur propre 0.
Cette constante est la composante de la condition initiale sur le vecteur en question.

4.4 Cas de feedback non linéaire avec $\alpha = 0$

On va obtenir ici un résultat de même type que dans le cas linéaire avec une hypothèse sur la non-linéarité mais pour le moment uniquement pour des solutions fortes.

Soit le système d'équations suivantes

$$
\begin{cases}
y_{tt}(x,t) - (a y_x)_x(x,t) = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\
-a y_x(0,t) + m y_{tt}(0,t) = -f(y_t(0,t)) & t \geq 0, \\
a y_x(1,t) + M y_{tt}(1,t) = 0 & t \geq 0, \\
y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x) & t \geq 0,
\end{cases} \tag{4.4.1}
$$

avec f monotone continue, $f(0) = 0$, $\xi f(\xi) \neq 0$ si $\xi \neq 0$.

Théorème 4.4.1 *On suppose que f est dérivable à l'origine avec $f'(0) > 0$ et qu'elle vérifie l'hypothèse suivante :*

- $(H) \quad | f'(0)\xi - f(\xi) | \leq Cf(\xi)\xi, \quad$ *avec* $C > 0$;

alors la solution $U(t)$ de (4.4.1) tend vers $(C_{U_0}, 0, 0, 0)$ où

$$\begin{aligned} C_{U_0} &= y_0(0) + \frac{1}{f'(0)}\int_0^1 y_1(x)dx + \frac{M}{f'(0)}\eta_0 + \frac{m}{f'(0)}\xi_0 \\ &+ \int_0^\infty \Big[f'(0)y_t(0,t) - f(y_t(0,t))\Big]dt. \end{aligned}$$

La suite de ce chapitre sera consacrée à la démonstration de ce théorème.
Supposons le problème (4.4.1) bien posé. On prend

$$2E(t) = \int_0^1 (y_t^2 + ay_x^2)\,dx + my_t^2(0,t) + My_t^2(1,t)$$

Il est immédiat que $\dfrac{dE(t)}{dt} = -y_t(0,t)f(y_t(0,t)) \leq 0$ (pour des solutions régulières) donc

$$\int_0^T y_t(0,t)f(y_t(0,t))dt = E(0) - E(T) \leq E(0). \tag{4.4.2}$$

Comme dans le cas linéaire, on intègre la première équation de (4.4.1) en x :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 y_t\,dx + \frac{d}{dt}\left[My_t(1,t) + my_t(0,t)\right] + f(y_t(0,t)) = 0. \tag{4.4.3}$$

Mais maintenant le dernier terme n'est plus une dérivée exacte en t.
Pour essayer de nous ramener à la procédure utilisée dans le cas d'un feedback linéaire, on écrit $f(\xi) = f(0) + f'(0)\xi + f(\xi) - f'(0)\xi$ et on suppose que $f'(0) > 0$. Alors

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 y_t\,dx + my_t(0,t) + My_t(1,t) + f'(0)y(0,t)\right] + f(y_t(0,t)) - f'(0)y_t(0,t) = 0. \tag{4.4.4}$$

On suppose maintenant que f vérifie l'hypothèse (H) :
$| f'(0)\xi - f(\xi) | \leq Cf(\xi)\xi, \quad$ avec $C > 0$.
Alors (4.4.4) nous donne

$$\begin{aligned} &\int_0^1 y_t\,dx + my_t(0,t) + My_t(1,t) + f'(0)y(0,t) = \int_0^1 y_1 dx + m\xi_0 + M\eta_0 \\ &+f'(0)y_0(0) + \int_0^t \left[f'(0)y_t(0,s) - f(y_t(0,s))\right]ds, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

où $\xi_0 = y_1(0)$ et $\eta_0 = y_1(1)$.

D'après (H) et (4.4.2), la dernière intégrale de (4.4.5) a un sens si $t \to \infty$. Par ailleurs, comme $\dfrac{dE(t)}{dt} = -y_t(0,t)f(y_t(0,t))$, avec $\xi f(\xi) \neq 0$ si $\xi \neq 0$, si le principe d'invariance de LaSalle s'applique, alors (en appliquant de nouveau le lemme 3.2) on trouvera que l'ensemble ω-limite d'une trajectoire ne contient que des vecteurs du type $\begin{pmatrix} c^{te} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si on prend un tel vecteur et une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \infty$ telle que $(y(t_k), y_t(t_k), \xi(t_k), \eta(t_k)) \to (c^{te}, 0, 0, 0)$ dans $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^2$, alors en passant à la limite dans (4.4.5) avec $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \infty$ on aura

$$\begin{aligned} f'(0)c^{te} &= \int_0^1 y_1(x)\,dx + m\xi_0 + M\eta_0 + f'(0)y_0(0) \\ &+ \int_0^\infty \Big[f'(0)y_t(0,t) - f(y_t(0,t))\Big]\,dt \end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de la constante, pour $f'(0) \neq 0$, et il n'y en a qu'une. Par contre, contrairement au cas linéaire, elle dépend de toute la trajectoire à cause du dernier terme.

Il reste à montrer qu'on a le droit d'utiliser le principe d'invariance de LaSalle. Par exemple qu'on est dans le cadre de semi-groupe de contractions non linéaire à résolvante compacte. Ceci justifierait complètement la méthode ci-dessus pour des données régulières, puis par densité, pour toutes les solutions faibles.
Ceci reste pour le moment une question ouverte. En revanche, on sait montrer que le problème (4.4.1) est bien posé au sens des semi-groupes et que les trajectoires sont relativement compactes pour des données régulières (cf appendice 5.1 pour ce dernier point).

Pour démontrer que (4.4.1) est bien posé on peut procéder par perturbation d'opèrateur m-dissipatif :

dans (4.4.1) on remplace la condition en $x = 0$ par

$$-ay_x(0,t) + my_{tt}(0,t) = -\alpha y(0,t) - f(y_t(0,t))$$

ce qui donne un opérateur non linéaire $\mathcal{A}_\alpha$ sur $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \{(y,z,u,v)^\top \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times \mathbb{R}^2 \,;\, u = z(0), v = z(1)\}.$$

$$\mathcal{A}_\alpha(y,z,u,v) = \left(z, (ay_x)_x, \frac{1}{m}\left(ay_x(0) - f(u) - \alpha y(0)\right), -\frac{1}{M}ay_x(1)\right) ,$$

pour $(y,z,u,v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$.
Ensuite on pose

$$\mathcal{B}_\alpha(U) = \left(0,0,\frac{\alpha}{m}y(0),0\right)$$

qui est lipschitzien sur $\mathcal{H}$. En suite, on muni $H^1(0,1)$ du produit scalaire : $\int_0^1 ay_x^2 dx + \alpha y^2(0)$.

Lemme 4.4.1 *L'opérateur non linéaire $\mathcal{A}_\alpha$ est m-dissipatif et $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration : Remarquons que $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$=$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (où $\mathcal{A}_0$ est l'opérateur du paragraphe précédent). Donc $\mathcal{A}_\alpha$ est à domaine dense dans $\mathcal{H}$.
Montrons d'abord que $\mathcal{A}_\alpha$ est dissipatif. Soient U_1, $U_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$, et
$U = U_1 - U_2$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_\alpha U_1 - \mathcal{A}_\alpha U_2, U\rangle &= \int_0^1 \left(az_x y_x + (ay_x)_x z\right) dx + \alpha y(0)z(0) \\ &+ \left(ay_x(0) - f(u_1) + f(u_2) - \alpha y(0)\right) u - ay_x(1)v \\ &= -(f(u_1) + f(u_2))(u_1 - u_2) \leq 0.\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_\alpha$ est dissipatif.
$\mathcal{A}_\alpha$ est maximal, si pour tout $U_0 = (y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathcal{H}$, il existe $U = (y,z,u,v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ tel que :

$$U - \mathcal{A}_\alpha U = U_0.$$

Cette équation est équivalente à :

$$\begin{cases} y - z = y_0 \\ z - (ay_x)_x = z_0 \\ u - \frac{1}{m}(ay_x(0) - f(u) - \alpha y(0)) = u_0 \\ v + \frac{1}{M}ay_x(1) = v_0 \\ u = z(0) \\ v = z(1). \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} y - (ay_x)_x = y_0 + z_0 \\ (m+\alpha)\, y(0) + f(y(0) - y_0(0)) - ay_x(0) = mu_0 + my_0(0) \\ My(1) + ay_x(1) = Mv_0 + My_0(1) \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Soit $G(s) = \int_0^1 f(\sigma)\, d\sigma$, pour $s \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction J définie dans $H^1(0,1)$ par

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (az_x^2 + z^2)\, dx + \frac{m+\alpha}{2} z^2(0) + \frac{M}{2} z^2(1) \\ &+ G(z(0) - y_0(0)) - \int_0^1 (y_0 + z_0) z\, dx - (mu_0 + my_0(0))\, z(0) \\ &+ (Mv_0 + My_0(1))\, z(1). \end{aligned}$$

Remarquons que G est convexe, d'où J est coercive. J est aussi continue et strictement convexe. Donc J admet un minimum y dans $H^1(0,1)$, tel que $J'(y)\varphi = 0$, $\forall \varphi \in H^1(0,1)$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [(ay_x)_x \varphi_x + y\varphi]\, dx + (m+\alpha) y(0)\varphi(0) + My(1)\varphi(1) \\ &+ f(y(0) - y_0(0))\varphi(0) = \int_0^1 (y_0 + z_0)\varphi dx + (mu_0 + my_0(0))\varphi(0) \\ &+ [Mv_0 + My_0(1)]\varphi(1), \end{aligned}$$

ceci $\forall \varphi \in H^1(0,1)$
Il existe $y \in H^1(0,1)$ solution de (4.4.7), $ay_x \in H^1(0,1)$ et donc $y \in H^2(0,1)$. D'où $U = (y, z, u, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\alpha)$.
$\mathcal{A}_\alpha$ est m-dissipatif, et par conséquent l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha$ engendre un semi-groupe ([Théorème 3.17 et la Proposition 2.10] de [2]) mais qui n'est pas forcément dissipatif, puisque $\mathcal{B}_\alpha$ ne l'est pas.
Le système (4.4.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}_\alpha U(t) + \mathcal{B}_\alpha U(t) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Il est clair qu'on ne peut pas aller plus loin dans ce cadre général, car pour $f \equiv 0$, les fonctions affines en temps sont des solutions de (4.4.1) non bornées. En général on n'aura pas un semi-groupe de contractions non linéaire sur $\mathcal{H}$ engendré par $\mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha$.
Par contre, si $f'(0) > 0$ et si (H) est vérifiée, on montre facilement que les solutions $U(t)$ de (4.4.1), sont bornées par $[|\, U(0)\, | + |\, U(0)\, |^2]$ en norme $\mathcal{H}$ (à une constante près). Ceci se démontre comme dans le cas linéaire en intégrant la première équation de (4.4.1) sur (0,1) :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 y_t + \frac{d}{dt}\Big[My_t(1,t) + my_t(0,t)\Big] + f(y_t(0,t)) = 0.$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_0^1 y_t + my_t(0,t) + My_t(1,t) + f'(0)y(0,t)\Big] + f(y_t(0,t)) - f'(0)y_t(0,t) = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 y_t\,dx + my_t(0,t) + My_t(1,t) + f'(0)y(0,t) \\
= & \int_0^1 y_1\,dx + m\xi_0 + M\eta_0 + f'(0)y_0(0) \\
+ & \int_0^t \Big[f'(0)y_t(0,t) - f(y_t(0,t))\Big]\,dt \\
\leq & \int_0^1 y_1 + m\xi_0 + M\eta_0 + f'(0)y_0(0) + C[E(0) - E(\infty)].
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\, y(0,t)\,| &\leq C^{te}\Big[\sqrt{E(t)} + \sqrt{E(0)} + |\, y_0(0)\,| + E(0)\Big] \\
&\leq C^{te}\Big[\sqrt{E(0)} + |\, y_0(0)\,| + E(0)\Big] \\
&\leq C^{te}\left[|U(0)|_{\mathcal{H}} + |U(0)|^2_{\mathcal{H}}\right].
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit l'estimation cherchée, puisque $|\, U(t)\,|^2_{\mathcal{H}} \leq C^{te}\,[E(t) + |\, y(0,t)\,|^2]$.
Remarque : Si on avait une estimation du type

$$|\, U(t) - \tilde{U}(t)\,|_{\mathcal{H}} \leq C^{te}[\,|\, U(0) - \tilde{U}(0)\,|_{\mathcal{H}} + |\, U(0) - \tilde{U}(0)\,|^2_{\mathcal{H}}\,] \qquad (4.4.9)$$

ceci permettrait par densité de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$ de prouver le résultat de convergence uniquement pour des données initiales dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, pour lesquelles on aura la compacité des trajectoires (voir appendice).
Pour voir si (4.4.9) est vérifié on écrit (4.4.1) avec y et $\tilde{y}$, et on pose $Y = y - \tilde{y}$

$$\begin{cases}
Y_{tt}(x,t) - (aY_x)_x(x,t) = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\
-aY_x(0,t) + mY_{tt}(0,t) = f(\tilde{\xi}) - f(\xi) & t \geq 0, \\
aY_x(1,t) + MY_{tt}(1,t) = 0 & t \geq 0, \\
Y(x,0) = Y_0(x), Y_t(x,0) = Y_1(x) & t \geq 0.
\end{cases} \qquad (4.4.10)$$

L'énergie est donnée par

$$2E(t) = \int_0^1 (Y_t^2 + aY_x^2)dx + mY_t^2(0,t) + MY_t^2(1,t)$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= Y_t(0)\Big[f(\tilde{\xi}) - f(\xi)\Big] \\ &= \Big[y_t(0) - \tilde{y}_t(0)\Big]\Big[f(\tilde{\xi}) - f(\xi)\Big] \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\xi - \tilde{\xi})(f(\xi) - f(\tilde{\xi}))\, dt &= E(0) - E(\infty) \\ &\leq 2E(0).\end{aligned}$$

De la relation ci-dessus, on déduit aussi que

$$\int_0^1 (Y_t^2 + aY_x^2)dx + mY_t^2(0,t) + MY_t^2(1,t) \leq E(0) \leq |U(0) - \tilde{U}(0)|_{\mathcal{H}}.$$

Reste à trouver une majoration pour $|Y(0,t)|$ pour avoir l'estimation de (4.4.9).
On intègre l'équation en x :

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_0^1 (Y_t + mY_t(0,t) + MY_t(1,t)\Big] = f(\tilde{\xi}) - f(\xi).$$

D'où

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big[\int_0^1 (Y_t + mY_t(0,t) + MY_t(1,t) + f'(0)Y(0,t)\Big] \\ &= f(\tilde{\xi}) - f(\xi) + f'(0)\Big[\xi - \tilde{\xi}\Big].\end{aligned}$$

Ce qui implique bien

$$\begin{aligned}|Y(0,t)| &\leq C^{te}\Big[\sqrt{E(t)} + \sqrt{E(0)} + |Y_0(0)|\Big] \\ &+ \int_0^\infty |f(\tilde{\xi}(t)) - f(\xi(t)) + f'(0)(\tilde{\xi} - \xi)|\, dt \\ &\leq C^{te}\Big[|U(0) - \tilde{U}(0)|_{\mathcal{H}} + |U(0) - \tilde{U}(0)|_{\mathcal{H}}^2\Big]\end{aligned}$$

si f vérifie $|\, f(\tilde{\xi}) - f(\xi) - f'(0)(\tilde{\xi} - \xi)\, | \leq C(\xi - \tilde{\xi})(f(\xi) - f(\tilde{\xi}))$.
Mais malheureusement cette condition n'est vérifiée que si f est affine, donc linéaire puisque $f(0) = 0$. En effet, on divise l'inégalité ci-dessus par $\tilde{\xi} - \xi > 0$ et on fait tendre $\tilde{\xi}$ vers ξ_+ ce qui donne $|f'_d(\xi) - f'(0)| \leq C.0 = 0$.

Il faudrait donc démontrer la précompacité des trajectoires pour toute solution faible pour obtenir le résultat de convergence pour toute condition initiale dans $\mathcal{H}$.
Pour le moment, on a le résultat de comportement asymptotique donné au début du chapitre 4 pour des conditions initiales dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ parce qu'on a la précompacité, prouvée dans l'appendice 5.1 ci-après.

4.5 Appendice.

4.5.1 Précompacité des trajectoires.

Le problème (4.4.1) s'écrit sous forme abstraite

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \\ U(0) = U_0 = (y_0, y_1, \xi_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{cases} \tag{4.5.1}$$

avec $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha$, et $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U = (y, z, \xi, \eta)^\top \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times \mathbb{R}^2, \ \xi = z(0), \ \text{et} \ \eta = z(1)\}$.
Rappellons que $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{B}_\alpha$ sont définis par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \{(y, z, \xi, \eta)^\top \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times \mathbb{R}^2 \, ; \, \xi = z(0), \eta = z(1)\}.$$

$$\mathcal{A}_\alpha(y, z, \xi, \eta) = \left(z, (ay_x)_x, \frac{1}{m}\left(ay_x(0) - f(\xi) - \alpha y(0)\right), -\frac{1}{M} a y_x(1) \right) ,$$

pour $(y, z, \xi, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$.

et $\mathcal{B}_\alpha(U) = \left(0, 0, \frac{\alpha}{m} y(0), 0\right)$ qui est linéaire et lipschitzien sur $\mathcal{H}$.

Le système (4.4.1) s'écrit aussi

$$\begin{cases} z_t(x,t) - (ay_x)_x(x,t) = 0 \qquad 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\ -ay_x(0,t) + m\dfrac{d\xi(t)}{dt} = -f(\xi(t)) \qquad\qquad\quad t \geq 0, \\ ay_x(1,t) + M\dfrac{d\eta(t)}{dt} = 0 \qquad\qquad\qquad\quad t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x) \qquad\qquad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.5.2}$$

On veut montrer que $\cup_{t\geq 0}\{U(t)\}$ est relativement compact dans $\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2 \times \mathbb{R}^2$.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Existe-t-il une sous-suite $(t_{n_k})k \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathcal{H}$ tels que : $U(t_{n_k}) \to w$ dans $\mathcal{H}$?
On sait que l'injection de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$ est compacte. Donc, il suffit de montrer que $(U(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.
D'après la bornitude de $U(t)$ dans $\mathcal{H}$ prouvée avant on a

$$\begin{cases} \xi(t) \text{ et } \eta(t) \text{ sont bornées dans } \mathbb{R}, \\ y(t) \text{ est bornée dans } H^1(0,1), \\ y_t(t) \text{ est bornée dans } L^2(0,1). \end{cases} \tag{4.5.3}$$

Il reste à montrer que $y_{xx}(t)$ et $y_{xt}(t)$ sont bornées dans $L^2(0,1)$.
On pose $Y = y_t$, $Z = Y_t$, $\tilde{\xi} = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$, $\tilde{\eta} = \dfrac{d\eta(t)}{dt}$ et $f'(\xi(t)) = g(t)$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$. On sait que $\xi(t)$ est bornée, donc g est bornée. De plus f est croissante, donc $g \geq 0$.
En dérivant (4.5.2) en temps, on obtient

$$\begin{cases} Z_t(x,t) - (aY_x)_x(x,t) = 0 & 0 < x < 1 \quad t \geq 0, \\ -aY_x(0,t) + m\dfrac{d\tilde{\xi}(t)}{dt} = -f'(\xi(t))\tilde{\xi}(t) = -g(t)\tilde{\xi}(t) & t \geq 0, \\ aY_x(1,t) + M\dfrac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} = 0 & t \geq 0, \\ Y(x,0) = Y_0(x), Y_t(x,0) = Y_1(x) & t \geq 0. \end{cases} \tag{4.5.4}$$

On pose :

$$2\tilde{E}(t) = \int_0^1 (Y_t^2 + aY_x^2)\,dx + m\tilde{\xi}^2 + M\tilde{\eta}^2 \tag{4.5.5}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}(t)}{dt} &= -g(t)Y_t^2(0,t) \qquad \text{(pour des données régulières)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{E}$ est décroissante, d'où $\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0)$, ceci $\forall t \geq 0$.
En intégrant (4.5.5) en temps, on obtient

$$\tilde{E}(t) - \tilde{E}(0) + \int_0^t g(s)Y_t^2(0,s)ds = 0. \tag{4.5.6}$$

Ce qui implique

$$\frac{1}{2}\Big[\int_0^1 (Y_t^2 + aY_x^2)\,dx + m\tilde{\xi}^2 + M\tilde{\eta}^2\Big] + \int_0^t g(s)Y_t^2(0,s)\,ds =$$
$$\frac{1}{2}\Big[\int_0^1 (Y_1^2 + aY_{0x}^2)\,dx + m\tilde{\xi}_0^2 + M\tilde{\eta}_0^2\Big].$$

On a $Y_{0x}(x) = Y_x(x,0) = y_{xt}(x,0) = y_{1x}(x)$. Comme $y_1 \in H^1(0,1)$, Y_{0x} est borné $L^2(0,1)$.
Dans ce qui suit, on montre que Y_1 est borné $L^2(0,1)$.
Admettons, pour le moment que l'équation $\dfrac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t)$ est valable pour tout $t \in [0,\infty[$, à condition de prendre pour $\dfrac{dU(t)}{dt}$ la dérivée à droite, (ce que l'on justifiera dans une remarque à la fin de ce paragraphe).
Donc pour $t = 0$, la première équation de (4.5.2) nous donne que : $y_{tt}(x,0) = (ay_x)_x(x,0) = a_x y_{0x}(x) + a y_{0xx}(x)$. Sachant que $a \in H^1(0,1)$ et que $y_0 \in H^2(0,1)$, alors $Y_1(x) = y_{tt}(x,0)$ est borné $L^2(0,1)$.

Montrons maintenant que $\tilde{\xi}_0$ et $\tilde{\eta}_0$ sont bornés par une constante dépendant de la norme de (y_0, y_1) dans $H^2(0,1) \times H^1(0,1)$.
D'après (4.5.2), on a :

$$m\frac{d\xi(t)}{dt} = m\tilde{\xi}(t) = a y_x(0,t) - f(\xi(t)),$$
$$M\frac{d\eta(t)}{dt} = M\tilde{\eta}(t) = -a y_x(1,t).$$

Les deux équations étant valables en $t = 0^+$, on obtient :

$$m\frac{d\xi(0)}{dt} = m\tilde{\xi}_0 = a y_{0x}(0) - f(\xi(0)),$$
$$M\frac{d\eta(0)}{dt} = M\tilde{\eta}(0) = -a y_{0x}(1).$$

Or, à des constantes près, $\xi(0) = y_1(0)$ est borné par $\|y_1\|_{H^1(0,1)}$. De plus $y_0 \in H^2(0,1)$ donc $|y_{0x}(0)|$ est borné par $\|y_{0x}\|_{H^1(0,1)}$. Donc $\tilde{\xi}_0$ est borné par une constante qui dépend de $\|(y_0, y_1)\|_{H^2(0,1)\times H^1(0,1)}$.
De même $\tilde{\eta}_0$ est borné par $\|y_0\|_{H^2(0,1)}$.
Conclusion $\tilde{\xi}_0$ et $\tilde{\eta}_0$ sont bornés par une constante qui dépend de $\|(y_0, y_1)\|_{H^2(0,1)\times H^1(0,1)}$.
Donc :

$$\left| \int_0^1 (Y_t^2 + aY_x^2)\,dx + m\tilde{\xi}^2 + M\tilde{\eta}^2 \right] + \int_0^t g(s) Y_t^2(0,s)\,ds \Bigg|$$
$$\leq C^{te}. \tag{4.5.7}$$

D'après (4.5.7) Y_t, et Y_x sont bornés dans $L^2(0,1)$. Ce qui donne que $y_{tt} = Y_t$ est borné dans $L^2(0,1)$. Comme $(ay_x)_x = y_{tt}$ est borné dans $L^2(0,1)$, et sachant que y et y_x sont bornés $L^2(0,1)$, alors y est borné dans $H^2(0,1)$.

On a aussi $Y_x = y_{xt}$ est borné $L^2(0,1)$, et comme y_t est borné $L^2(0,1)$, on en déduit que y_t est bornée $H^1(0,1)$.
Donc $U(t)$ est bornée dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, et par suite $\cup_{t\geq 0}\{U(t)\}$ est relativement compact dans $\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2 \times \mathbb{R}^2$.

Remarque : On a admis que $U(t)$ a une dérivée à droite pour tout $t \in [0,\infty[$, et que l'équation $\dfrac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t)$ est vérifiée pour tout $t \in [0,\infty[$, en prenant pour $\dfrac{dU(t)}{dt}$ la dérivée à droite, pour $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Ceci est un résultat classique pour un opérateur m-dissipatif (cf. [2] théorème 3.17). Or dans notre cas $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha$, avec $\mathcal{A}_\alpha$ m-dissipatif.
D'après la proposition 3.3 de [2], l'équation non homogène $U_t(t) = \mathcal{A}_\alpha U(t) + \varphi(t)$ a aussi la propriété de dérivabilité à droite en t pour $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et φ à variation bornée sur $[0,T]$. Dans notre cas $\varphi(t) = \mathcal{B}_\alpha U(t) = \left(0,0,\frac{\alpha}{m}y(0,t),0\right)$. Or $\varphi_t(t) = \left(0,0,\frac{\alpha}{m}y_t(0,t),0\right) = \left(0,0,\frac{\alpha}{m}\xi(t),0\right)$. Sachant que ξ est de classe C^1, φ est bien à variation bornée.

4.5.2 Analyse spectrale, cas où $a \equiv 1$.

Soit le système :

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0 \\ -y_x(0,t) + m y_{tt}(0,t) = -\beta y_t(0,t) \\ y_x(1,t) + M y_{tt}(1,t) = 0. \end{cases} \tag{4.5.8}$$

L'opérateur $\mathcal{A}_\beta$ associé au système (4.4.1) est défini par

$$\mathcal{A}_\beta \begin{pmatrix} y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y_{xx} \\ \frac{1}{m}\left(y_x(0) - \beta z(0)\right) \\ -\frac{1}{M}y_x(1) \end{pmatrix} \quad \text{où}$$

$$D\left(\mathcal{A}_\beta\right) = \left\{(y,z,u,v)^\top \in H^2(0,1) \oplus H^1(0,1) \oplus \mathbb{R}^2;\ u = z(0); v = z(1)\right\}$$

Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}_\beta$ et $U = (y,z,u,v) \in D\left(\mathcal{A}_\beta\right)$ un vecteur propre qui lui est associé. On a alors $\mathcal{A}_\beta U = \lambda U$, ce qui donne

$$\begin{cases} \lambda y = z \\ \lambda z = y_{xx} \\ \lambda u = \frac{1}{m}(y_x(0) - \beta z(0)) \\ \lambda v = -\frac{1}{M}y_x(1), \\ u = z(0) \\ v = z(1). \end{cases} \tag{4.5.9}$$

ou encore

$$\begin{cases} y_{xx} - \lambda^2 y = 0 \\ m\lambda^2 y(0) + \beta\lambda y(0) - y_x(0) = 0 \\ M\lambda^2 y(1) + y_x(1) = 0. \end{cases} \tag{4.5.10}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{A}_\beta$ autres que 0 sont les racines de l'équation :

$$e^{2\lambda} = \frac{\lambda M - 1}{\lambda M + 1} \cdot \frac{\lambda m + \beta - 1}{\lambda m + \beta + 1}.$$

Rappelons que zéro est aussi valeur propre de $\mathcal{A}_\beta$. Asymptotiquement les valeurs propres de $\mathcal{A}_\beta$ sont racines de l'équation : $e^{2\lambda} \simeq \frac{mM}{mM} = 1$. Donc $\lambda_n \simeq in\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}$ (ceci implique que les valeurs propres sont asymptotiquement séparées).

Simplicité algébrique asymptotique des valeurs propres.

Supposons que λ est algébriquement au moins double, donc racine de l'équation et de l'équation dérivée :

$$\begin{cases} e^{2\lambda} = \dfrac{\lambda M - 1}{\lambda M + 1} \cdot \dfrac{\lambda m + \beta - 1}{\lambda m + \beta + 1}, \\ e^{2\lambda}[2(\lambda m + \beta + 1)(\lambda M + 1) + M(\lambda m + \beta + 1) + m(\lambda M + 1)] \\ = M(\lambda m + \beta - 1) + m(\lambda M - 1). \end{cases} \tag{4.5.11}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$1 + \frac{M}{1 - \lambda^2 M^2} + \frac{m}{1 - (\lambda m + \beta)^2} = 0. \tag{4.5.12}$$

Si maintenant $\beta = 0$, on sait que $\lambda = 0$ est algébriquement double. Pour les autres valeurs propres, $\lambda = i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Donc l'équation (4.5.12) est équivalente à :

$$1 + \frac{M}{1 + \tau^2 M^2} + \frac{m}{1 + \tau^2 m^2} = 0.$$

Ce qui est impossible. Donc toutes les valeurs propres, sauf 0, sont algébriquement simples (et toutes sur l'axe imaginaire).

Remarque : L'équation (4.5.12) montre qu'il y a au plus quatre valeurs propres algébriquement non simples si $\beta > 0$. On sait que $\lambda = 0$ est algébriquement simple dans ce cas.

Donc toutes les valeurs propres sont asymptotiquement algébriquement simples.

Remarque : Pour toute valeur propre λ non nulle de $\mathcal{A}_\beta$, on a, par un calcul directe, $\Re e\lambda < 0$. En effet : soit λ valeur propre de $\mathcal{A}_\beta$, on a $e^{2\lambda} = \dfrac{\lambda M - 1}{\lambda M + 1} \cdot \dfrac{\lambda m + \beta - 1}{\lambda m + \beta + 1}$.

• Si $\Re e\lambda > 0$, on obtient : $|e^{2\lambda}| = e^{2\Re e\lambda} > 1$. En plus, on a

$$\left|\frac{\lambda M - 1}{\lambda M + 1}\right| = \frac{(M\Re e\lambda - 1)^2 + M^2(\Im m\lambda)^2}{(M\Re e\lambda + 1)^2 + M^2(\Im m\lambda)^2} < 1$$

et

$$\left|\frac{\lambda m + \beta - 1}{\lambda m + \beta + 1}\right| = \frac{(-m\Re e\lambda - \beta + 1)^2 + m^2(\Im m\lambda)^2}{(m\Re e\lambda + \beta + 1)^2 + m^2(\Im m\lambda)^2} < 1,$$

ce qui est absurde. Donc $\Re e\lambda$ ne peut pas être strictement positif.
• Si $\Re e\lambda = 0$, alors $\lambda = i\tau$. D'où : $|e^{2i\tau}| = 1$. Or on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1 - \lambda M}{1 + \lambda M}\right|^2 &= \left|\frac{1 + i\tau M}{1 - i\tau M}\right|^2 \\ &= \frac{1 + \tau^2 M^2}{1 + \tau^2 M^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\frac{1 - \beta - \lambda m}{1 + \beta + \lambda m}\right|^2 &= \left|\frac{1 - \beta - i\tau m}{1 + \beta + i\tau m}\right|^2 \\ &= \frac{(1 - \beta)^2 + \tau^2 m^2}{(1 + \beta)^2 + \tau^2 m^2} < 1,\end{aligned}$$

ce qui est absurde si $\beta \neq 0$.
Donc toute valeur propre λ, non nulle de $\mathcal{A}_\beta$ est telle que $\Re e\lambda < 0$.
Si maintenant $\beta = 0$, on sait que toutes les valeurs propres autres que 0 sont algébriquement simples.

4.5.3 Application de la théorie de Shkalikov, $a \equiv 1$.

Les ordres respectifs des conditions au bord dans (4.5.10) sont : $k_1 = 2$ et $k_2 = 2$. L'ordre total est $k = 4$. L'équation caractéristique de (4.5.10) est : $\omega^2 - 1 = 0$, dont les racines sont $\omega_1 = 1, \omega_2 = -1$. Les solutions de (4.5.10) sont de la forme :

$$y(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Le système (4.5.10) a une solution si et seulement si le déterminant caractéristique $\Delta(\lambda)$ est nul.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \lambda^4 \Big\{ e^{\lambda} \left[-mM + (-m - M - \beta M)\lambda^{-1} - (\beta + 1)\lambda^{-2}\right] \\ &+ e^{-\lambda} \left[mM + (-m - M + \beta M)\lambda^{-1} - (\beta - 1)\lambda^{-2}\right] \Big\}.\end{aligned}$$

Le terme dominant dans les expressions entre crochets est mM ou $-mM$, qui est non nul. Les conditions au bord de (4.5.10) sont régulières. On a montré ci-dessus que les valeurs propres de $\mathcal{A}_\beta$ sont asymptotiquement simples et séparées. Les conditions au bord de (4.5.10) sont fortement régulières.

On pose $H(\tilde{v}) = H\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0'' \end{pmatrix}$.

Normalisons les conditions au bord. Le terme $\lambda^2 y(0)$ sera remplacé par $\lambda(H\tilde{v})_0(0) = \lambda v_1(0)$, $\lambda^2 y(1)$ sera remplacé par $\lambda(H\tilde{v})_0(1) = \lambda v_1(1)$, et $\lambda y(0)$ sera remplacé par $\lambda(H\tilde{v})_0(0) = v_1(0)$. Les conditions aux bords de (4.5.10) deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(\tilde{v},\lambda) &= -\lambda v(0) + \frac{1}{m}u'(0) - \beta v(0) = 0 \\ \tilde{U}_2(\tilde{v},\lambda) &= \lambda v(1) + \frac{1}{m}u'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.5.13}$$

Construction des espaces de Shkalikov :

$$\begin{cases} W^0_{2,U} &= \left\{ \tilde{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in W^1_2(0,1) \oplus L^2(0,1) \right\} \\ W^1_{2,U} &= \left\{ \tilde{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in W^2_2(0,1) \oplus W^1_2(0,1) \right\} \end{cases}$$

D'après (4.5.13), on a : $\nu_1(0) = 1$ et $\nu_2(0) = 1$, donc $N_0 = 2$. On considère l'espace : $W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}^2$. On définit $H_0 : \mathcal{D}(H_0) \in W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}^2 \to W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}^2$ par :

$$H_0 \begin{pmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u'' \\ \frac{1}{m}(u'(0) - \beta v(0)) \\ -\frac{1}{M}u'(1) \end{pmatrix}.$$

avec

$$\mathcal{D}(H_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W^1_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2 \ / \ z_1 = v(0), z_2 = v(1) \right\}$$

Les opérateurs H_0 et $\mathcal{A}_\beta$ sont identiques. Les valeurs propres de $\mathcal{A}_\beta$ sont les racines de l'équation :

$$e^{2\lambda} = \frac{\lambda M - 1}{\lambda M + 1} \cdot \frac{\lambda m + \beta - 1}{\lambda m + \beta + 1}.$$

On a montré que les valeurs propres de $\mathcal{A}_\beta$ (ou les racines de $\Delta(\lambda)$) sont asymptotiquement simples et séparées.

Le système (4.5.10) étant fortement régulier, donc d'après le théorème 1.2.1 du chapitre 1, l'opérateur $H_0 = \mathcal{A}_\beta$ a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de $W^0_{2,U} \oplus \mathbb{C}^2 = H^1(0,1) \oplus L^2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2$.
Dans le cas $a \not\equiv 1$, on ne peut pas appliquer la théorie de Shkalikov, car l'équation caractéristique pour notre problème ne rentre pas dans le cadre d'équation de type Sturn-Liouville, à cause du terme non constant devant λ^2. Explicitement $p_{22}(x) = \dfrac{1}{a} \neq c^{te}$.

Bibliographie

[1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications,* Dunod, 1999.

[2] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland, 1972.

[3] T. Cazenave and A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires,* Ellipses, 1990.

[4] G. Chen, M. C. Delfour, A. M. Krall, G. Payre, *Modeling, stabilization and control of serially connected beams,* Siam Journal on Control and Optimization, 25 (3), p. 526-546, 1987.

[5] G. Chen, S. G. Krantz, D. W. Ma, C. E. Wayne, H. H. WEST, *The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation,* Operator methods for optimal control problems, Ed Sung J. Lee, Lecture in Pure Appl. Math. Series, Marcel Dekker, New York, p. 67-96, 1987.

[6] B. Chentouf, *Contribution à la stabilité et à la stabilisation de systèmes à paramètres répartis,* Thèse de l'Université de Metz, 1998.

[7] F. Conrad and A. Mifdal, *Strong stability of a model of an overhead crane,* Control and Cybernetics, 27, N.3, p.363-394, 1998.

[8] F. Conrad and A. Mifdal, *Uniform stabilization of a hybrid system with a class of nonlinear feedback laws,* à paraître dans Advances in Mathematical Sciences and Applications.

[9] F. Conrad and O. Morgül, *On the stabilization of flexible beam with a tip mass,* SIAM Journal on Control and Optimization, (36),p.1962-1986, 1998.

[10] J. S. Gibson, *A note on stabilization of infinite dimensionl linear oscilliators by compact linear feedback,* SIAM Journal on Control and Optimization, (18), p.311-316, 1980.

[11] P. Grabowski, *Spectral approch to well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems,* Journal of Mathematical Systems Estimation and Control, (6), 1996.

[12] A. H. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications,* Masson, 1991.

[13] F. L. Huang, *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces,* Ann. Diff. Eqs. 1(1), p. 43-53, 1985.

[14] R. E. Langer, *On the zeros of exponential sums and integrals,* Bulletin of Amer. Math. Society, p. 213-239, 1931. York, 1931.

[15] H. Laousy, *Sur quelques problèmes de stabilisation de systèmes à paramètres distribués,* Thèse de l'Université de Metz, 1997.

[16] H. Laousy, B. Chentouf, *On the boundary stabilization of a hybrid system,* 14^{th} IFAC world congress 1999.

[17] W. Littman , L. Markus, *Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping,* Annali di Matematica Pura ed Applicata. 152, p. 281-330, 1988.

[18] A. Mifdal, *Stabilisation uniforme d'un système hybride,* CRAS, 324, série I, p.37-42,1997.

[19] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer Verlag, New-York, 1983.

[20] B. Rao , *Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity,* SIAM Journal on Control and Optimization. 33, p. 440-454, 1995 .

[21] P. Rideau, *Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs-actionneurs ponctuels : étude du spectre du système,* Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia-Antipolis, 1995.

[22] D. L. Russell, *Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control-theoric methods,* J. Diff. Equations, 19, p. 344-370, 1975.

[23] F. Z. Saouri, *Stabilisation d'une poutre avec controle force . Etude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique.* Prépublication de l'Institut Elie Cartan, 1997, $n°$ 47.

[24] A. Shkalikov, *Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions,* Journal of Soviet Mathematics, 33, p. 1311-1342, 1986.

[25] Ya. D. Tamarkin, *General problems of the theory of ordinary differential equations and expansions of arbitrary functions in series,* [in Russian], Petrograd (1917).

Université HENRI POINCARÉ
NANCY 1

Madame **SAOURI Fatima Zahra**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY-I

en MATHEMATIQUES APPLIQUEES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 29 DEC. 2000 n° 483

Le Président de l'Université

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY I
LE PRÉSIDENT

Cl. BURLET

Université Henri Poincaré, Nancy-I
24-30 rue Lionnois - B.P. 3069 - 54013 NANCY CEDEX
Tél. : 03 83 85 48 00 - Fax : 03 83 85 48 48

Résumé.

On étudie quelques problèmes de stabilisation de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type ondes ou poutres, avec un contrôle frontière qui est un bouclage sur l'état.
Ce travail est constitué de deux parties. Dans la première, on détermine le taux optimal de décroissance de l'énergie par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au problème . On utilise pour cela la théorie de Shkalikov qui paraît mieux adaptée pour des problèmes où les valeurs propres apparaissent dans les conditions au bord, ce qui est le cas pour les problèmes qu'on étudie. Elle demande une adaptation à chacun d'entre eux, notamment pour reconstituer l'opérateur du problème avec sa base de Riesz formée de vecteurs propres.
On propose quelques applications de cette méthode (poutre avec contrôle force, contrôle moment ...). On donne aussi quelques résultats de stabilité uniforme et non uniforme.
Dans la seconde partie, on étudie un modèle de pont roulant formé d'un câble flexible pesant attaché à un chariot se déplaçant sur un rail.
On montre, dans le cas d'un contrôle linéaire, que la solution tend vers une constante que l'on explicite en fonction de la condition initiale uniquement. Et que dans le cas d'un contrôle non linéaire, la solution tend vers une constante qui dépend de toute la trajectoire.