



HAL
open science

Sur la densité de certains ensembles de multiples : résolution d'une conjecture d'Erdős

Abdelaziz Raouj

► **To cite this version:**

Abdelaziz Raouj. Sur la densité de certains ensembles de multiples: résolution d'une conjecture d'Erdős. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1992. Français. NNT : 1992NAN10120 . tel-01748052

HAL Id: tel-01748052

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748052>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE
présentée à
l'UNIVERSITE DE NANCY I



pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de Nancy I
Option Mathématiques

par

Abdelaziz RAOUJ

SUR LA DENSITE
DE CERTAINS ENSEMBLES DE MULTIPLES
(Résolution d'une conjecture d'ERDŐS)

Soutenue publiquement le 19 juin 1992 devant le jury composé de MM.

Bernard ROYNETTE	Président	Professeur à l'Université de Nancy I
Michel BALAZARD	Rapporteur	Chargé de Recherche au C.N.R.S. Bordeaux I
Michel MENDES FRANCE	Rapporteur	Professeur à l'Université de Bordeaux I
Paul ERDŐS	Examineur	Professeur à l'Académie des Sciences de Hongrie
Gérald TENENBAUM	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Nancy I

G. Tenenbaum a dirigé ce travail avec beaucoup d'attention. Nous avons pu bénéficier de sa connaissance, sa rigueur et sa disponibilité. Qu'il veuille bien trouver ici, l'expression de notre profonde reconnaissance.

Nous remercions vivement B. Roynette d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

Nous sommes reconnaissants à M. Mendès France et à M. Balazard pour la considération accordée à ce travail en acceptant d'en être les rapporteurs.

Monsieur le Professeur P. Erdős a bien voulu nous faire l'honneur de faire partie du jury. Qu'il veuille bien trouver ici, l'expression de notre gratitude pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail.

Nous adressons nos remerciements à A. Chaunac et C. Defosse qui ont assuré avec soin et rapidité la frappe de ce document.

Nous remercions enfin, le Département de Mathématiques de Nancy I pour son hospitalité.

*A mes parents
A ma famille*

*A ceux qui, à travers des ouvrages
harmonisant le coeur et l'esprit,
cherchent cette sagesse
non relative, sainte et paisible.*

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
Notations	21
Chapitre 1 : Estimation de $d\mathcal{B}_\lambda(n), 0 \leq \lambda < \lambda^*$	24
§ 0. Énoncé des résultats	24
§ 1. Lemmes généraux concernant la répartition des nombres premiers et les fonctions arithmétiques	25
§ 2. Lemmes concernant la répartition des facteurs premiers ou des diviseurs	29
§ 3. Lemmes concernant les transformées de Fourier des fonctions de répartition liées aux diviseurs	43
§ 4. Lemmes sur les mesures d'ensembles d'accroissement	48
§ 5. Démonstration de la proposition 1	57
§ 6. Démonstration de la proposition 2	64
Chapitre 2 : Evaluation de $d\mathcal{B}_\lambda(n), \lambda > \lambda^*$	66
§ 0. Énoncé des résultats	66
§ 1. Lemmes	66
§ 2. Notations	75
§ 3. Minoration de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$	76
§ 4. Majoration de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$	84
Chapitre 3 : Estimation de la taille de l'ensemble exceptionnel	87
§ 0. Énoncé des résultats	87
§ 1. Lemmes	87
§ 2. Démonstration du théorème 3	91
Bibliographie	96

Introduction

L'étude des ensembles de multiples constitue une branche de la théorie probabiliste des nombres. Cette étude s'est développée dans les années trente avec les travaux de Erdős, Besicovitch, Davenport, et d'autres.

Nous disposons de deux ouvrages de référence. Le premier est **Sequences** de Halberstam et Roth où sont exposés les résultats obtenus dans la période 1930–1960. Le second est **Divisors** de Hall et Tenenbaum, où l'on trouve les résultats récents, assortis d'une bibliographie complète.

Avant d'énoncer les résultats du présent travail, nous commençons par présenter le contexte dans lequel cette recherche s'insère.

Soit \mathcal{A} une suite d'entiers positifs.

On définit la *densité supérieure* (resp. *densité inférieure*) de \mathcal{A} , notée $\overline{d}\mathcal{A}$ (resp. $\underline{d}\mathcal{A}$) par

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{A} \cap [0, x]|}{x} \quad (\text{resp.} \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{A} \cap [0, x]|}{x}).$$

Dans le cas où $\overline{d}\mathcal{A} = \underline{d}\mathcal{A}$ on appelle densité naturelle de \mathcal{A} , et l'on note $d\mathcal{A}$, la valeur commune des deux quantités précédentes.

L'ensemble des multiples noté $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, d'une suite d'entiers \mathcal{A} est la collection de tous les multiples positifs des éléments de \mathcal{A} . On a :

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{an : a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Il s'agit donc d'une suite définie par une contrainte multiplicative simple.

Nous donnons maintenant quelques propriétés élémentaires relatives à la notion d'ensemble de multiples.

(a) *Pour chaque suite d'entiers \mathcal{A} , il existe une unique partie \mathcal{A}' de \mathcal{A} satisfaisant les deux conditions suivantes*

(i) $\mathcal{B}(\mathcal{A}') = \mathcal{B}(\mathcal{A})$

(ii) \mathcal{A}' est primitive, c'est-à-dire $a \in \mathcal{A}', b \in \mathcal{A}', a \neq b \implies a \nmid b$.

La démonstration de (a) est simple. Commençons par établir l'unicité de \mathcal{A}' . Si \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' vérifient (i) et (ii) on a pour $a \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}') = \mathcal{B}(\mathcal{A}'')$,

$$\begin{aligned} a &= ka'' & (a'' \in \mathcal{A}'' \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}')) \\ &= kk'a' & (a' \in \mathcal{A}') \end{aligned}$$

et d'après (ii) on doit avoir $k = k' = 1$. D'où $a \in \mathcal{A}''$, soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$. De même on vérifie $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$. L'unicité de \mathcal{A}' est donc acquise.

Construction de \mathcal{A}' . Il suffit de considérer

$$\mathcal{A}' = \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B}(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathcal{A})}} \mathcal{S}.$$

(b) Si \mathcal{A} est fini, alors $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ admet une densité naturelle, $d\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

En effet, si $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$ avec $k = |\mathcal{A}|$, le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire

$$(1) \quad \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) \\ b \leq x}} 1 = \sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k} \left[\frac{x}{[a_{i_1}, \dots, a_{i_s}]} \right]$$

où $[n_1, \dots, n_s]$ désigne le plus petit multiple commun des entiers n_i , ($1 \leq i \leq s$). Il en découle

$$(2) \quad d\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k} \frac{1}{[a_{i_1}, \dots, a_{i_s}]}.$$

Cette dernière expression est en pratique très difficile à évaluer à cause de la structure compliquée du crochet. Cependant, si les éléments de \mathcal{A} sont deux à deux premiers entre eux, on a

$$(3) \quad d\mathcal{B}(\mathcal{A}) = 1 - \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{a_i}\right).$$

(c) En fait, si \mathcal{A} est fini alors, $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ est une union finie de classes de congruence modulo un certain entier m .

Voyons par exemple le cas où \mathcal{A} est réduit à deux éléments, a et b , aucun d'entre eux n'étant multiple de l'autre. Posons

$$\begin{aligned} m &:= [a, b] \\ r_k &:= k a \quad (k = 0, \dots, (m/a) - 1) \\ s_j &:= j b \quad (j = 0, \dots, (m/b) - 1) \end{aligned}$$

et notons t_i ($i = 1, \dots, I$) les valeurs distinctes de la suite $\{r_k\}_k \cup \{s_j\}_j$. Il est clair que

$$(4) \quad \mathcal{B}(\mathcal{A}) = \bigcup_{0 < i \leq I} (m\mathbb{N} + t_i).$$

Nous retrouvons ainsi l'existence de la densité naturelle de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ lorsque \mathcal{A} est fini. Avec les notations précédentes nous avons

$$(5) \quad d\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \frac{I}{m}.$$

Indiquons enfin la propriété suivante.

(d) Si $\sum_{a \in \mathcal{A}} 1/a$ converge alors $d\mathcal{B}(\mathcal{A})$ existe.

En effet, soit \mathcal{A}_k la suite finie constituée des k premiers éléments de \mathcal{A} . On a

$$\sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_k} 1/a \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)$$

donc

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow +\infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) \\ b \leq x}} 1 - \frac{1}{x} \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_k) \\ b \leq x}} 1 \right| \\ \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_k} \left[\frac{x}{a} \right] = 0. \end{aligned}$$

Cela implique l'existence de $d\mathcal{B}(\mathcal{A})$ sous la forme

$$(6) \quad d\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d\mathcal{B}(\mathcal{A}_k).$$

Rappels historiques.

La propriété (d) ci-dessus donne une condition suffisante pour que $\mathbf{dB}(\mathcal{A})$ existe. L'étude des critères pour l'existence de cette densité fait l'objet des premiers travaux dans la théorie des ensembles de multiples. Besicovitch a réfuté en 1934 une conjecture de l'époque selon laquelle tout ensemble de multiples admettrait une densité naturelle. Son contre-exemple [B34] est basé sur le fait que

$$(7) \quad \liminf_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{dB}([T, 2T] \cap \mathbb{N}) = 0.$$

Erdős [E35] a montré l'année suivante que la limite inférieure précédente est en fait une véritable limite. Il a donné en 1936 la généralisation suivante.

Théorème A (Erdős [E36]). *On a*

$$(8) \quad \mathbf{dB}([T^{1-\varepsilon}, T] \cap \mathbb{N}) \leq \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(T)$$

avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_1(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \Delta_2(T) = 0$.

Définissant la **densité logarithmique** d'une suite \mathcal{D} par

$$\delta\mathcal{D} := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ d \leq x}} 1/d$$

lorsque la limite existe, Davenport et Erdős ont montré en 1937 le théorème fondamental suivant.

Théorème B (Davenport - Erdős [DE37]). *On a pour toute suite \mathcal{A}*

$$(9) \quad \delta\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \underline{\mathbf{dB}}(\mathcal{A}).$$

Behrend [B48] a montré en 1948 l'inégalité importante suivante. On a pour toute paire $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ de parties finies de \mathbb{N}

$$(10) \quad 1 - \mathbf{dB}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \geq (1 - \mathbf{dB}(\mathcal{A}_1))(1 - \mathbf{dB}(\mathcal{A}_2)).$$

La même année, Erdős a caractérisé les suites dont l'ensemble des multiples admet une densité naturelle. Soit $\mathcal{A} := \{a_1 < \dots < a_i < a_{i+1} < \dots\}$ une suite d'entiers. On pose

$$B^{(i)}(T) := \left| \left\{ m \leq T : a_i | m \text{ et si } a_j | m \text{ alors } j \geq i \right\} \right|.$$

Le résultat d'Erdős est le suivant.

Théorème C (Erdős [E48]).

$$(11) \quad \mathbf{dB}(\mathcal{A}) \text{ existe si et seulement si } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{T^{1-\varepsilon} < a_i \leq T} B^{(i)}(T) = 0.$$

Dans toute la théorie, les ensembles des multiples des intervalles entiers du type $]T^{1-\varepsilon}, T]$ jouent un rôle important. Tenenbaum [T84] donne l'évaluation suivante de la densité \mathbf{d}_T de $\mathcal{B}(]T, 2T] \cap \mathbb{N})$. Nous avons, pour une constante absolue positive convenable c ,

$$(12) \quad \exp\left(-c\sqrt{\log_2 T \log_3 T}\right) < (\log T)^\delta \mathbf{d}_T \ll (\log_2 T)^{-1/2}$$

avec $\delta = 1 - (1 + \log_2 2)/\log 2 = 0,086\dots$.

En fait, ses travaux fournissent le résultat plus général suivant, pour l'énoncé duquel nous introduisons quelques notations.

Etant donnés y, z tels que $2 \leq y < z$, nous posons $z = y^{1+u} = y + y(\log y)^{-\lambda}$, et $\lambda = \log 4 - 1 + \xi/\sqrt{\log_2 y}$. Nous définissons de plus les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} Q(v) &:= v \log v - v + 1 \quad (v > 0), \\ G(v) &:= \begin{cases} Q\left(\frac{1+v^+}{\log 2}\right) & \text{si } v \leq \log 4 - 1, \\ v & \text{si } v > \log 4 - 1, \end{cases} \\ L(v) &:= \exp\sqrt{\log v \log_2 3v}. \end{aligned}$$

Notant $H(x, y, z)$ le nombre des entiers $n \leq x$ ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $]y, z]$, soit $H(x, y, z) = \left| \left\{ n \leq x : n \in \mathcal{B}(]y, z] \cap \mathbb{N}) \right\} \right|$ nous avons le théorème suivant.

Théorème D (Tenenbaum [T84] ; Hall - Tenenbaum [HT88]).

(i) Si x, y et z sont tels que $y, z - y, \xi$ tendent vers l'infini et $y \leq z \leq \sqrt{x}$ alors

$$(13) \quad H(x, y, z) = (1 + o(1))x(\log y)^{-\lambda}$$

(ii) Sous l'hypothèse $2 \leq y < z \leq \min(2y, \sqrt{x})$ et ξ borné supérieurement on a

$$(14) \quad x(\log y)^{-G(\lambda)} L(\log y)^{-c_1} \ll H(x, y, z) \ll x(\log y)^{-G(\lambda)} / (1 + (-\xi)^+)$$

où c_1 est une constante positive.

(iii) Sous l'hypothèse $1 < 2y \leq z \leq \min(y^{3/2}, \sqrt{x})$ on a,

$$(15) \quad xu^\delta L(1/u)^{-c_2} \ll H(x, y, z) \ll xu^\delta \frac{\log_2(3/u)}{\sqrt{\log(2/u)}}$$

où $\delta = Q(1/\log 2)$, c_2 désignant une constante positive. De plus, lorsque $z = O(y)$, on peut omettre le facteur $\log_2(3/u)$.

(iv) On a uniformément pour $2 \leq y \leq z \leq x$,

$$(16) \quad H(x, y, z) = x \left(1 + O\left(\frac{\log y}{\log z}\right) \right).$$

Hall et Tenenbaum conjecturent dans [HT88] (p. 31) que, si x, y, z tendent vers $+\infty$ de façon que ξ soit fixe et $z \leq \sqrt{x}$, alors la limite

$$(17) \quad F(\xi) = \lim x^{-1} H(x, y, z) (\log y)^\lambda$$

existe et est une fonction de répartition sur \mathbb{R} . Ils fournissent dans [HT90] une évaluation de $H(x, y, z)$ à une constante multiplicative près dans le domaine $\xi \geq -c(\log_2 y)^{1/6}$. Cela implique, sous réserve d'existence de la limite $F(\xi)$, que l'on a

$$(18) \quad F(\xi) \asymp \frac{1}{1 + \max(-\xi, 0)}.$$

Il existe un lien étroit entre l'étude des ensembles de multiples et la répartition des diviseurs. Dans cette perspective, nous nous proposons de discuter brièvement certains résultats connus concernant la structure de la suite des diviseurs d'un entier normal. Tous sont liés directement au sujet du présent travail, soit parce que les énoncés sont précisément utilisés, soit parce que les techniques de démonstration peuvent être adaptées à notre contexte.

Répartition des facteurs premiers.

Soit $n = \prod_{\substack{p_i^{v_i} \parallel n \\ 1 \leq i \leq \omega}} p_i^{v_i}$, $p_1 \leq \dots \leq p_\omega$, la décomposition d'un entier générique n en facteurs premiers. On sait [E46] que, pour un entier que n normal,

le j -ème facteur premier est “de l’ordre” de $\exp \exp j$. Les détails de ce principe célèbre sont fournis dans [HT88]. On a pour $\varepsilon > 0$ et $\xi(n) \rightarrow +\infty$

$$(19) \quad \sup_{\xi(n) \leq j \leq \omega(n)} \left| \frac{\log_2 p_j(n) - j}{\sqrt{2j \log_2 j}} \right| \leq 1 + \varepsilon \quad \text{p.p.}$$

Ici et dans la suite la notation p.p. signifie que la relation ainsi désignée a lieu pour un ensemble d’entiers de densité unité.

Dans ce cadre, les résultats obtenus montrent une assez bonne répartition des facteurs premiers dans des intervalles qui ne sont pas “trop courts”. Plus précisément, on a le résultat optimal suivant dû à Erdős en 1969.

Théorème E (Erdős [E69]). Soient $y = y(n)$ et $z = z(n)$ deux suites de nombres réels telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log((\log z)/\log y)}{\log_3 n} = +\infty.$$

Alors, il existe une suite d’entiers \mathcal{A} de densité naturelle 1 telle que

$$(20) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathcal{A}}} \frac{|\{p : p|n, y < p \leq z\}|}{\log((\log z)/\log y)} = 1.$$

Répartition des diviseurs.

Désignons par $1 \leq d_1 < \dots < d_\tau = n$ la suite ordonnée des diviseurs de n . Une évaluation de la croissance normale des d_i découle de l’estimation (19) des facteurs premiers (voir [HT88], exercice 12, p. 25). On a pour toute fonction $\xi(n) \rightarrow +\infty$

$$(21) \quad \log_2 d_j = \frac{\log j}{\log 2} + O\left(\sqrt{\log j \log_3 j}\right) \quad (\xi(n) \leq j \leq \tau(n)) \quad \text{p.p.}$$

En principe, toute l’information concernant les diviseurs d’un entier réside dans ses facteurs premiers. Cependant, l’effet des irrégularités (relativement modérées) de la distribution des facteurs premiers se traduit au niveau de celle des diviseurs par des fluctuations locales très importantes autour de la tendance générale reflétée par (21). Nous illustrons ce phénomène par quelques énoncés significatifs.

On désigne par D_n la variable aléatoire qui prend les valeurs $(\log d)/\log n$, d divisant n , avec probabilité uniforme $1/\tau(n)$.

Le théorème suivant montre que la répartition des logarithmes des diviseurs d’un entier n est en moyenne la loi de l’arc sinus.

Théorème F (Deshouillers – Dress – Tenenbaum [DDT79]). *Pour $\alpha \in [0, 1]$, on a*

$$(22) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \text{Prob}(D_n \leq \alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \sqrt{\alpha}.$$

Cependant, le résultat suivant montre qu’une telle loi de répartition n’est sûrement pas valable pour l’ordre normal.

Théorème G (“Principe d’incertitude”, Tenenbaum [T80]). *Soit μ une mesure de probabilité sur $[0, 1]$ et soit \mathcal{A} une suite d’entiers positifs telle que la suite $(D_n)_{n \in \mathcal{A}}$ ait μ pour loi limite. Alors la densité naturelle de \mathcal{A} est nulle.*

Ainsi, le comportement normal des diviseurs présente *nécessairement* des irrégularités. Les trois assertions suivantes mettent ce principe en perspective.

– Soit

$$g(n) := |\{i : 1 \leq i < \tau(n), d_i | d_{i+1}\}|$$

la fonction d’Erdős–Montgomery. On a [ET81] pour $\xi(n) \rightarrow +\infty$

$$(23) \quad g(n) > \frac{\tau(n)}{\xi(n)} \quad \text{p.p.}$$

– On a [T79] pour $\xi(n) \rightarrow +\infty$

$$(24) \quad \max_{1 \leq i < \tau(n)} \log \left(\frac{d_{i+1}}{d_i} \right) \geq \xi(n)^{-1} \log n \quad \text{p.p.}$$

– Notant

$$\Delta(n) := \max_u |\{d : d|n, e^u < d \leq e^{u+1}\}|$$

la fonction de concentration associée aux diviseurs, on a [MT84, MT85, HT88] pour $\xi(n) \rightarrow +\infty$

$$(25) \quad (\log_2 n)^\gamma < \Delta(n) < \xi(n) \log_2 n \quad \text{p.p.}$$

pour toute constante $\gamma < \log 2 / \log \{\log 3 / (\log 3 - 1)\} = 0,287\dots$

La minoration (23) permet d’exhiber un grand nombre de diviseurs consécutifs qui ne sont pas proches. Par ailleurs, l’assertion (24) met en

évidence l'aspect occasionnellement très lacunaire de la suite des diviseurs d'un entier normal, alors que l'encadrement (25) dégage un phénomène de forte condensation locale.

Signalons enfin, qu'on peut trouver une description complémentaire de cette complexité du comportement des diviseurs dans un travail très récent de Mendès France et Tenenbaum [MFT91]. Les deux auteurs montrent que la répartition des diviseurs présente une similitude interne, et mettent ainsi en évidence l'aspect fractal de cet ensemble. Introduisant une notion naturelle de *Dimension Fractale*, ils montrent que l'on peut assigner à l'ensemble des diviseurs d'un entier normal la dimension $\log 2$. Précisons cela.

Etant donnée une suite \mathcal{A} d'entiers positifs, considérons la suite $D(\mathcal{A})$ des sous-ensembles finis de $[0, 1]$

$$D_n = \left\{ \frac{\log d}{\log n} : d|n \right\} \quad (n \in \mathcal{A}).$$

On pose alors

$$\rho(\alpha, D(\mathcal{A})) = \frac{1}{\alpha} \limsup_{n \in \mathcal{A}} \frac{\log(\tau(n)^\alpha \mu_n)}{\log \tau(n)}$$

où

$$\mu_n = \text{mes} \left\{ \bigcup_{d|n} \left[\frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2} \tau(n)^{-\alpha}, \frac{\log d}{\log n} + \frac{1}{2} \tau(n)^{-\alpha} \right] \cap [0, 1] \right\}.$$

On a le théorème suivant.

Théorème H (Mendès France – Tenenbaum [MFT91]). *Il existe une suite d'entiers \mathcal{A} de densité unité telle que l'on ait pour tout $\alpha > 0$*

$$(26) \quad \rho(\alpha, D(\mathcal{A})) = \min(\log 2, 1/\alpha).$$

Ainsi, au voisinage de 0 la fonction $\rho(\alpha, D(\mathcal{A}))$ vaut $\log 2$: c'est la *dimension fractale* de $D(\mathcal{A})$.

Deux conjectures d'Erdős.

On appelle *suite de Behrend* toute suite \mathcal{A} dont l'ensemble des multiples $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ est de densité 1.

Nous rappelons dans ce qui suit deux problèmes d'Erdős récemment résolus. Ils sont étroitement liés à la distribution des diviseurs et au sujet de la présente thèse.

Considérons, pour chaque réel α positif la suite

$$\mathcal{A}_\alpha := \left\{ dd' : d < d' < (1 + (\log d)^{-\alpha})d \right\}.$$

Vers la fin des années trente, Erdős a conjecturé que \mathcal{A}_0 est de Behrend. Tenenbaum et Maier ont établi cette conjecture en 1983. Leur démonstration fournit le résultat suivant.

Théorème I (Maier – Tenenbaum [MT84, HT88]). *On a*

$$(27) \quad \begin{aligned} &\mathcal{A}_\alpha \text{ est de Behrend si } \alpha < \log 3 - 1, \\ &\mathcal{A}_\alpha \text{ n'est pas de Behrend si } \alpha > \log 3 - 1. \end{aligned}$$

En outre, on sait que l'ensemble – différence $\{\log d - \log t : d|n, t|n\}$ possède une structure beaucoup plus régulière, malgré les turbulences locales de la suite $(\log d)_{d|n}$ que reflètent les résultats précédents (voir [ET83] et [HT88], *Theorem 53*). Dans la même optique, Tenenbaum a montré que l'ensemble – somme $\{\log d + \log t : d|n, t|n\}$ est moins bien réparti que cet ensemble-différence. Plus précisément, on a le théorème suivant, qui est un cas très particulier du résultat principal de [T90a].

Théorème J (Tenenbaum [T90a]). *On a uniformément pour $y > 3$*

$$(28) \quad c_2 \leq \mathbf{d} \left\{ n : \min_{d|n, t|n} |\log(dt/y)| < 1 \right\} \leq 1 - c_2,$$

où c_2 est une constante absolue positive.

Un second problème d'Erdős consiste à chercher des suites de Behrend les plus lacunaires possible. A cet égard, la famille des suites

$$\mathcal{G}_\lambda := \bigcup_{j \geq 1} \left] \exp j^\lambda, 2 \exp j^\lambda \right] \cap \mathbb{N} \quad (\lambda > 1),$$

composées de blocs disjoints dont les distances mutuelles tendent très vite vers l'infini, fournit un intéressant modèle expérimental.

Datant des années 70, la conjecture $\mathcal{B}(\lambda)$ d'Erdős affirme l'existence d'une valeur critique $\lambda_0 > 1$ telle que \mathcal{G}_λ soit de Behrend pour $\lambda < \lambda_0$ et ne soit pas de Behrend pour $\lambda > \lambda_0$. Ce problème a été résolu l'année dernière dans un travail commun de Hall et Tenenbaum, qui fournit également une réponse pour la valeur critique $\lambda = \lambda_0$.

Théorème L (Hall – Tenenbaum [HT91]).

(29) \mathcal{G}_λ est de Behrend si et seulement si $\lambda \leq 1/(1 - \log 2) = 3,25\dots$.

Enoncé du Problème.

La motivation du présent travail est la résolution d'une conjecture d'Erdős sur les ensembles de multiples.

On considère, pour n entier positif, l'ensemble des multiples $\mathcal{B}(n)$ de la suite

$$\mathcal{D}(n) := \bigcup_{d|n}]d, 2d] \cap \mathbb{N}.$$

Erdős a conjecturé que

$$(30) \quad \mathbf{d}\mathcal{B}(n) = 1 + o(1) \quad \text{p.p.}$$

L'argument heuristique suivant constitue la motivation initiale d'Erdős concernant (30).

Lorsque n et m sont premiers entre eux (hypothèse faite seulement pour simplifier cette argumentation) on sait que le nombre des paires $\{d, t\}$ telles que $d|n, t|m$ et $t \leq 2n$ peut être minoré par

$$U_{n,m} = 2^{\omega(n)} 2^{\omega(m,n)},$$

où

$$\omega(m, n) := \sum_{\substack{p|m \\ p \leq n}} 1.$$

Le théorème de Hardy et Ramanujan (1917) énonce que pour presque tout entier n on a

$$\omega(n) \sim \log_2 n,$$

et l'on peut montrer similairement que, pour n fixé,

$$|\omega(m, n) - \log_2 n| < (\log_2 n)^{2/3}$$

pour tous les entiers m sauf ceux d'une suite de densité tendant vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, pour tout entier n d'une suite convenable de densité unité, on a

$$U_{n,m} = (\log n)^{\log 4 + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

En supposant une *répartition uniforme* des quantités $|\log(t/d)|$ où $t|m, t \leq 2n$ et $d|n$, on s'attend donc à ce que l'intervalle $[0, (\log n)^{-\lambda}]$ contienne une quote-part de

$$(\log n)^{\log 4 + o(1)} (\log n)^{-\lambda} (\log 2n)^{-1}$$

valeurs distinctes $|\log(t/d)|$. La relation (30) signifie simplement que cette quote-part est supérieure ou égale à 2 lorsque $\lambda = 0$.

En fait, cet argument conduit à une version quantitative de la conjecture initiale, que l'on peut énoncer sur l'une des formes suivantes.

(i) on a pour $\lambda < \log 4 - 1$

$$(31) \quad \mathbf{dB} \left(\bigcup_{d|n} \left[d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d \right] \cap \mathbb{N} \right) = 1 + o(1) \quad \text{p.p.}$$

(ii) il existe pour chaque $0 \leq \lambda < \log 4 - 1$ une suite \mathcal{A} de densité 1 telle que l'on ait pour tout n de \mathcal{A} et presque tout m

$$(32) \quad \left| \left\{ (d, t) : d|n, t|m, \mu(dt)^2 = 1, |\log(d/t)| < (\log n)^{-\lambda} \right\} \right| = (\log n)^{\log 4 - 1 - \lambda + \varepsilon(n)}$$

où $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Nous établissons (i) dans ce travail et, en fait, on pourrait montrer (ii) par la même méthode.

Résultats obtenus.

Dans le chapitre 1 de ce travail, nous confirmons cette conjecture par un résultat plus précis. Considérons pour n entier strictement positif et λ réel positif ou nul, l'ensemble des multiples $B_\lambda(n)$ de la suite

$$\mathcal{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d|n} \left] d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d \right] \cap \mathbb{N},$$

et notons $Q(\alpha) := \alpha \log \alpha - \alpha + 1$ ($\alpha > 0$). On a le résultat suivant.

Théorème 1. On a pour $0 \leq \lambda < \lambda^* := \log 4 - 1$

$$(33) \quad 1 - e^{-c_\lambda \sqrt{\log_2 n}} \leq \mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n) \leq 1 - (\log n)^{-Q(\beta)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

avec $\beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$ et où c_λ est une constante positive, dépendant uniquement de λ .

Le chapitre 2 est consacré à l'évaluation de la densité $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)$ lorsque $\lambda > \lambda^* := \log 4 - 1$. Dans ce domaine, nous montrons que la densité en question tend vers 0 presque partout (ce changement brutal de la probabilité rappelle la loi du 0-1 de Kolmogorov) et qu'il existe un seuil critique $\lambda^{**} := \log 8 - 1$ pour le paramètre λ marquant un nouveau changement de comportement asymptotique pour $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 2. On a

$$(34) \quad \mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n) = (\log n)^{-F(\lambda)+o(1)}$$

où l'on a posé

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \lambda^* = \log 4 - 1, \\ Q(\beta) & \text{si } \lambda^* < \lambda \leq \lambda^{**} = \log 8 - 1 \text{ avec } \beta = \frac{1+\lambda}{\log 2} - 1, \\ \lambda - \log 2 & \text{si } \lambda^{**} < \lambda. \end{cases}$$

Remarque. La fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à la question des termes d'erreurs. Il s'agit d'estimer le nombre des entiers n *exceptionnels*, au sens où la densité $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)$ n'est pas proche de 1.

Théorème 3. Soient $0 \leq \lambda < \lambda^* = \log 4 - 1$, $0 < \varepsilon < 1/2$ et $x \geq x_0(\lambda, \varepsilon)$.

Posant

$$N(x, \lambda, \varepsilon) := \left| \left\{ n \leq x : \mathbf{dB}_\lambda(n) < 1 - \varepsilon \right\} \right|,$$

on a

$$(35) \quad x(\log x)^{-Q(\beta)+o(1)} \leq N(x, \lambda, \varepsilon) \leq x e^{-c_\lambda \sqrt{\log_2 x}}$$

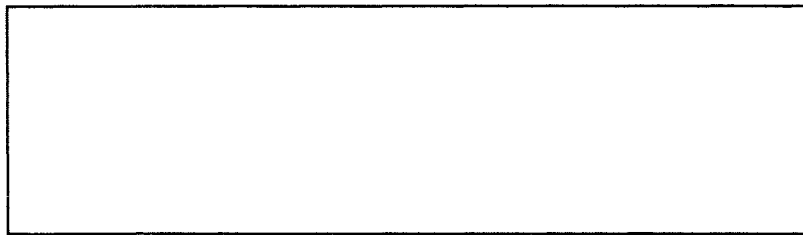
avec $\beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$ et où c_λ désigne une constante positive dépendant de λ .

Voici quelques interprétations de ces résultats.

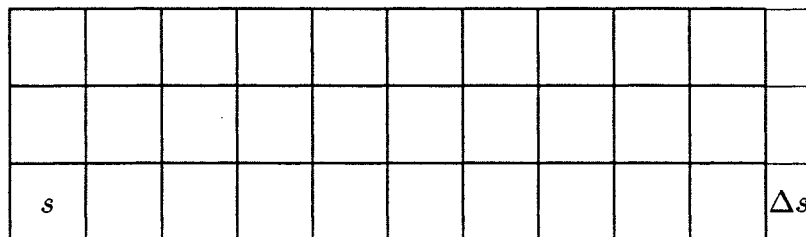
1 -Interprétation géométrique.

Une conséquence géométrique simple du théorème est la proposition suivante.

Donnons nous au hasard un rectangle de longueur m et de largeur n



Alors, quitte à retrancher une bande, “relativement petite”, de l’une des ses extrémités, la figure admet avec probabilité 1 un quadrillage régulier en carrés d’arête entière ≥ 2 .



avec

$$(36) \quad 0 < \frac{\Delta s}{s} \leq (\log n)^{1-\log 4+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{p.p.}$$

En outre, l'affirmation tombe en défaut si on impose une réduction de l'erreur relative $\frac{\Delta s}{s}$ en remplaçant ε par $-\varepsilon$.

2 - Interprétation probabiliste des valeurs critiques λ^* et λ^{} .**

Considérons, pour x entier, l'espace probabilisé $\Omega_x = \{1, 2, \dots, x\}$ muni de la loi uniforme ν_x et la suite $(\xi_d)_{d \geq 1}$ de variables aléatoires définies par

$$\xi_d(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } d|n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notant $H(x, y, z)$ le nombre des entiers $n \leq x$ ayant au moins un diviseur d dans le sous-intervalle $]y, z]$ de $]0, x]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} H(x, y, z) &= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \max_{y < d \leq z} \xi_d(n) \\ &= \text{Prob} \left(\max_{y < d \leq z} \xi_d = 1 \right). \end{aligned}$$

Intuitivement, plus l'intervalle $]y, z]$ est petit plus les ξ_d se rapprochent de l'indépendance. Cette dernière hypothèse implique

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left(\max_{y < d \leq z} \xi_d = 1 \right) &= 1 - \text{Prob} \left(\max_{y < d \leq z} \xi_d = 0 \right) \\ &\approx 1 - \prod_{y < d \leq z} \left(1 - \frac{1}{x} \left[\frac{x}{d} \right] \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$(37) \quad \frac{1}{x} H(x, y, z) \approx \frac{z - y}{y}.$$

Remarquons en outre que l'inégalité de Behrend montre qu'on a toujours la majoration

$$(38) \quad \frac{1}{x} H(x, y, z) \leq (1 + \varepsilon(y)) \frac{z - y}{y} \quad \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \varepsilon(y) = 0 \right).$$

Posons $z = y(1 + (\log y)^{-\lambda})$. Le théorème *D* montre que l'approximation (37) est effectivement valable si, et seulement si, $\lambda > \log 4 - 1$, ce qui représente donc le *seuil d'indépendance* pour ce problème.

Considérons maintenant

$$\mathcal{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d|n}]d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d] \cap \mathbb{N},$$

et, pour $x \geq x_0(\lambda, n)$ désignons par $H(x, \mathcal{D}_\lambda(n))$ le nombre des entiers $m \leq x$ ayant au moins un diviseur dans $\mathcal{D}_\lambda(n)$. L'hypothèse d'indépendance des $\xi_t, (t \in \mathcal{D}_\lambda(n))$ implique

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} H(x, \mathcal{D}_\lambda(n)) &= \text{Prob} \left(\max_{t \in \mathcal{D}_\lambda(n)} \xi_t = 1 \right) \\ (39) \qquad \qquad \qquad &= (\log n)^{\log 2 - \lambda + o(1)} \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

car en utilisant la majoration

$$\Delta(n) \leq (\log_2 n)^{1+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

déduite de (25), on montre facilement que

$$(40) \qquad \sum_{m \in \mathcal{D}_\lambda(n)} 1/m = (\log n)^{\log 2 - \lambda + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Ainsi, la valeur $\lambda^{**} = \log 8 - 1$ de λ du théorème 2 peut être interprétée comme le seuil d'indépendance des $\xi_t, (t \in \mathcal{D}_\lambda(n))$.

De plus, en écrivant

$$\begin{aligned} \max_{t \in \mathcal{D}_\lambda(n)} \xi_t &= \max_{d|n} \max_{d < t \leq (1 + (\log n)^{-\lambda})d} \xi_t \\ (41) \qquad \qquad \qquad &= \max_{d|n} \xi_d^* \quad \text{disons,} \end{aligned}$$

on voit que, pour $\lambda < \lambda^{**}$, les ξ_d^* ne sont plus indépendants, alors que, pour chaque $d|n$, λ^* représente, au vu du théorème D , le *seuil d'indépendance* des ξ_t , pour $d < t \leq (1 + (\log d)^{-\lambda})d$.

Nous proposons d'exposer dans cette dernière partie les méthodes et les techniques essentielles utilisées pour les démonstrations de nos résultats. La minoration de $1 - \mathbf{dB}_\lambda(n)$ donnée par le théorème 1 est la plus difficile à montrer. Elle est en fait obtenue par une série d'améliorations succesives, relatives à un énoncé de base confirmant de manière non effective la conjecture (30), et que nous énonçons maintenant.

Proposition 0. *Pour tout réel $T > 0$, il existe une suite $\mathcal{A} = \mathcal{A}(T) \subset \mathbb{N}$ et il existe deux fonctions η_0 et η_1 tendant vers 0 lorsque $T \rightarrow +\infty$ telles que*

$$(i) \quad \underline{d}\mathcal{A}(T) \geq 1 - \eta_0(T)$$

$$(ii) \quad n \in \mathcal{A}(T) \implies \underline{d}\mathcal{B}(n) \geq 1 - \eta_1(T).$$

On peut établir ce résultat par la technique de Maier et Tenenbaum [MT84] et [HT88]. Explicitons les étapes essentielles.

Notons

$$\mathcal{B}(n) := \mathcal{B}\left(\bigcup_{d|n}]d, ed] \cap \mathbb{N}\right), \quad n_k := \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \exp e^k}} p.$$

L'idée de base est de majorer la probabilité conditionnelle

$$\text{Prob}\left(m_{k+l} \in \mathcal{B}(n_{k+l}) \mid m_k \notin \mathcal{B}(n_k)\right)$$

où $l = l(T)$ est un paramètre entier.

Cela nous mène à établir une relation de récurrence pour les fonctions de compte

$$M(n, k) := \left| \{m \leq X : V(n_k, m_k(n), 0) = 0\} \right|$$

où

$$X \geq X_0(n) \text{ et } V(u, v, z) := \sum_{\substack{d|u, t|v \\ 0 < z - \log(d/t) \leq 1}} \mu(dt)^2,$$

$$m_k(n) := \prod_{\substack{p|m, p \nmid n \\ p \leq \exp e^k}} p.$$

Introduisons alors l'ensemble $\mathcal{L}(n, m)$ des z tels que $V(n, m, z) > 0$, et désignons par $\lambda(n, m)$ sa mesure de Lebesgue. Posons

$$\tau^*(u, \theta) := \sum_{d|u} \mu(d)^2 d^{i\theta}.$$

L'inégalité suivante, obtenue par une technique d'analyse de Fourier et valable pour tous u, v tels que $(u, v) = 1$, permet de minorer $\lambda(n_k, m_k(n))$

$$4^{\omega(uv)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} V(u, v, z) dz \right)^2 \ll \lambda(u, v) \int_0^1 |\tau^*(uv, \theta)|^2 d\theta.$$

Des techniques reposant sur l'évaluation de moyennes pondérées de fonctions multiplicatives positives ou nulles permettent pour chaque k d'obtenir l'estimation quasi optimale

$$\int_0^1 |\tau^*(n_k m_k(n), \theta)|^2 d\theta \leq 4^{\omega(n_k m_k(n))} e^{T-k}$$

si n est fixé dans une suite convenable d'entiers de densité proche de 1 et pour tout $m \leq X$ sauf au plus $\varepsilon(T, n)X$ avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} \varepsilon(T, n) = 0$. Cela fournit la minoration

$$(42) \quad \lambda(n_k m_k(n)) \gg e^{k-T}.$$

Cependant, on ne peut obtenir de relation de récurrence sur les cardinaux $M(n, k)$ que si (42) est réalisé simultanément à n et m fixés pour un grand nombre de valeurs de k . Pour établir cette propriété, il faut étudier de façon assez approfondie la distribution locale des facteurs premiers des entiers "normaux", et en particulier montrer que l'on a assez souvent

$$\min_{T \leq s \leq k} \omega(n_k / n_{k-s}) / s > \alpha$$

pour tout α fixé dans $]0, 1[$. Il faut également montrer que des intervalles "très courts" contiennent au moins un facteur premier – cf. Lemme 1.2.5 – et vérifier un certain nombre d'autres conditions que nous ne détaillons pas dans cette introduction.

Ces difficultés techniques étant surmontées, on peut construire une sous suite $M(n, k_j)$ satisfaisant à

$$(43) \quad M(n, k_{j+1}) \leq (1 - \varepsilon(T))M(n, k_j) + \eta(T)X.$$

avec $\eta(T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$.

On parvient donc au résultat souhaité

$$\frac{1}{X} M(n, k_{J(n)}) = o(1) \quad \text{p.p.}$$

si le nombre $J(n)$ de valeurs admissible de j tend vers $+\infty$ avec $n \in \mathcal{A}(T)$.

La relation (43) est obtenue en construisant explicitement, grâce à la minoration (42) une suite d'entiers m comptés dans $M(n, k_j)$ mais pas dans $M(n, k_{j+1})$.

Le résultat quantitatif

$$d\mathcal{B}(n) \geq 1 - e^{-c\sqrt{\log_2 n}} \quad \text{p.p.}$$

découle d'une étude statistique de l'ensemble des k_j satisfaisant (43) - cf. Lemme 1.4.3 par exemple -.

Remarque. Soit \mathcal{A} une suite finie d'entiers. Posons

$$\tau(m, \mathcal{A}) := \sum_{\substack{t|m \\ t \in \mathcal{A}}} 1, \quad l(\mathcal{A}) := \sum_{a \in \mathcal{A}} 1/a.$$

On a

$$(44) \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \sum_{m \leq X} \tau(m, \mathcal{A}) = l(\mathcal{A}).$$

Au vu de cette relation, on pourrait être tenté de croire que la densité $d\mathcal{B}(\mathcal{A})$ est fortement liée à la valeur $l(\mathcal{A})$. Il n'en est rien, en réalité, et la considération des ensembles $\mathcal{D}_\lambda(n)$ fournit à cet égard une intéressante classe de contre-exemples.

On a

$$l(\mathcal{D}_\lambda(n)) = (\log n)^{-\lambda + \log 2 + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

et

$$(45) \quad d\mathcal{B}_\lambda(n) = 1 + o(1) \quad \text{p.p.} \quad (0 \leq \lambda < \log 4 - 1).$$

Cependant, si nous posons pour $0 \leq \lambda < \log 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda^{(1)}(n) &:= \left] 2, \exp \{ (\log n)^{-\lambda + \log 2} \} \right] \cap \mathbb{N}, \\ \mathcal{A}_\lambda^{(2)}(n) &:= \left] n \exp \{ -(\log n)^{-\lambda + \log 2} \}, n \right] \cap \mathbb{N} \end{aligned}$$

on a

$$l(\mathcal{A}_\lambda^{(j)}(n)) = (\log n)^{-\lambda + \log 2 + o(1)} \quad (j = 1, 2, n \rightarrow +\infty)$$

alors que le théorème D implique

$$(46) \quad \mathbf{dB}(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(n)) = 1 + O((\log n)^{\lambda - \log 2})$$

$$(47) \quad \mathbf{dB}(\mathcal{A}_\lambda^{(2)}(n)) = (\log n)^{-\delta(1+\lambda - \log 2) + o(1)}.$$

Il faut encore souligner que la similarité de comportement de $\mathbf{dB}_\lambda(n)$ et $\mathbf{dB}(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(n))$ pour $0 \leq \lambda < \log 4 - 1$ ne provient pas de la présence de “petits” entiers dans $\mathcal{D}_\lambda(n)$. En fait, la méthode conduisant à (45) montrerait également que l’on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(48) \quad \mathbf{dB}\left(\bigcup_{\substack{d|n \\ d > \exp(\log n)^{1-\varepsilon}}}]d, 2d] \cap \mathbb{N}\right) = 1 + o(1) \quad \text{p.p.}$$

La comparaison de (47) et (48) fournit donc un exemple de deux suites finies, de mesures logarithmiques voisines, et dont les éléments ont des logarithmes “proches” (c’est-à-dire de la forme $(\log n)^{1+o(1)}$) mais dont les ensembles de multiples ont des densités aussi éloignées que possible asymptotiquement.

Notations, Définitions et Conventions

Les lettres $n, m, u, v, i, j, k, l, s$ et ν désignent des entiers positifs.

$x, X, y, z, \alpha, \beta, \delta, \lambda, \theta, \eta$ et ε désignent des réels positifs, c, c_0, c_1, \dots sont des constantes absolues positives.

p, q désignent exclusivement des nombres premiers.

On note “|” la relative divise.

$p^j || n$ signifie j est la valuation p -adique de n et $j \neq 0$.

Une somme (resp. produit) portant sur l'ensemble vide est nulle (resp. vaut 1).

Le plus grand diviseur commun de m et n est désigné : (m, n) .

Le plus petit multiple commun de m et n est désigné : $[m, n]$.

$\omega(n)$ est le nombre des facteurs premiers de n .

$\Omega(n)$ est le nombre des facteurs premiers de n comptés avec leurs ordres de multiplicité.

$\varphi(n)$ est le nombre des entiers $m \leq n$, qui sont premiers avec n .

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{si } n \text{ est sans facteur carré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier de n est noté $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) ; par convention : $P^+(1) = 1, P^-(1) = +\infty$.

$\Psi(x, y)$ désigne le nombre des entiers $n \leq x$ tels que $P^+(n) \leq y$.

$\Phi(x, z)$ désigne le nombre des entiers $n \leq x$ tels que $P^-(n) > z$.

$\Theta(x, y, z)$ désigne le nombre des entiers $n \leq x$ tels que $\prod_{\substack{p^j || n \\ p \leq y}} p^j > z$.

Si f et g sont deux fonctions arithmétiques réels (c'est-à-dire définies de \mathbb{N} dans \mathbb{R}) alors,

$$f * g(n) := \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

Nous introduisons les notations et les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 n_k &:= \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \exp e^k}} p, \\
 m(n) &:= \prod_{p|m, p \nmid n} p, \\
 \omega(n; y, z) &:= \sum_{\substack{p^j || n \\ y < p \leq z}} 1, & \omega(n, x) &:= \omega(n; 1, x), \\
 \Omega(n; y, z) &:= \sum_{\substack{p^j || n \\ y < p \leq z}} j, & \Omega(n, x) &:= \Omega(n; 1, x),
 \end{aligned}$$

$$\tau^*(n, \theta) := \sum_{d|n} \mu(d)^2 d^{i\theta}$$

$$\mathcal{R}(n, \theta) := \frac{|\tau^*(n, \theta)|^2}{2\omega(n) + \omega_\theta(n)} \quad \text{avec } \omega_\theta(n) := \omega(n, \exp 1/\theta),$$

$$p(n, k, y) := \min \{ p : p|n \text{ et } p > \exp(ye^k) \} \text{ avec la convention } \min \emptyset = +\infty,$$

$$V(u, v, z, \eta) := |\{(d, t) : d|u, t|v, \mu(dt)^2 = 1, 0 < z - \log(d/t) \leq \eta\}|,$$

$$\nabla(u, v, \eta) := V(u, v, 0, \eta) = \sum_{\substack{d|u, t|v \\ 0 < \log(t/d) \leq \eta}} \mu(dt)^2,$$

$$\mathcal{L}(u, v, \eta) := \bigcup_{\substack{d|u, t|v \\ \mu(dt)^2 = 1}} \log(d/t) +]0, \eta].$$

Pour toute partie \mathcal{A} de \mathbb{N} , on note : $\overline{\mathcal{A}}$ le complémentaire de \mathcal{A} dans \mathbb{N} et $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ la fonction indicatrice de \mathcal{A} .

Toute dépendance en fonction d'un paramètre A de \mathbb{R}^n des constantes impliquées par les symboles \ll de Vinogradov et O de Landau sera mentionnée par \ll_A ou O_A .

$[x]$ désigne la partie entière de x .

\log_k est la k -ième itérée de la fonction logarithme, définie par :
 $\log_1 x := \log x$ et $\log_{k+1} x := \log \log_k x$ ($k \geq 1$).

Nous avons utilisé le signe \square pour visualiser la fin d'une démonstration ou d'une remarque.

Chapitre 1

Estimation de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$, $0 \leq \lambda < \lambda^*$

§ 0. Énoncé des résultats.

Considérons pour n entier ≥ 1 et λ réel ≥ 0 , l'ensemble des multiples $\mathcal{B}_\lambda(n)$ de la suite

$$\mathcal{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d|n}]d, d \exp(\log n)^{-\lambda}] \cap \mathbf{N}.$$

Désignons par Q la fonction définie par

$$Q(\alpha) := \alpha \log \alpha - \alpha + 1 \quad (\alpha > 0).$$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. On a pour $0 \leq \lambda < \lambda^* := \log 4 - 1$

$$1 - e^{-c_\lambda \sqrt{\log_2 n}} \leq d\mathcal{B}_\lambda(n) \leq 1 - (\log n)^{-Q(\beta)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

où $\beta := ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$, c_λ est une constante positive dépendant uniquement de λ .

L'encadrement ci-dessus de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$ sera en fait obtenu en établissant les deux propositions suivantes, qui donnent respectivement la minoration et la majoration.

Proposition 1. Pour tout $0 \leq \lambda < \log 4 - 1$, il existe $c_\lambda > 0$ tel que l'on ait pour $X \geq x \geq x_0(\lambda)$

$$\left| \{(n, m) \in [1, x] \times [1, X] : \nabla(n, m, (\log n)^{-\lambda}) = 0\} \right| \leq x X e^{-c_\lambda \sqrt{\log_2 x}}.$$

Notons pour $\lambda \geq 0$

$$\delta_\lambda(d) := 1 + (\log d)^{-\lambda},$$

$\mathcal{B}'_\lambda(n)$ l'ensemble des multiples de $\bigcup_{d|n}]d, d\delta_\lambda(d)] \cap \mathbb{N}$.

Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2. On a pour $0 \leq \lambda \leq \log 4 - 1$

$$d\mathcal{B}'_\lambda(n) \leq 1 - (\log n)^{-Q(\beta)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

avec $\beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$.

Nous commençons par présenter les lemmes nécessaires.

§ 1. Lemmes généraux concernant la répartition des nombres premiers et les fonctions arithmétiques.

Lemme 1.1.1 (voir[T90]). On a pour $x \geq 2$

le théorème des nombres premiers :

$$(1.1) \quad \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x e^{-\sqrt{\log x}})$$

la formule de Mertens :

$$(1.2) \quad \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x} (1 + O(e^{-\sqrt{\log x}})).$$

Le résultat suivant est une conséquence du théorème des nombres premiers.

Lemme 1.1.2. On a pour $0 < \varepsilon < 1$ et $2 < y < z$,

$$(1.3) \quad \sum_{y < p \leq z} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} \leq \log \left(\frac{\log z}{\log y}\right) + \int_0^{\varepsilon \log z} \frac{e^x - 1}{x} dx + O(z^\varepsilon \log z e^{-\sqrt{\log y}})$$

Démonstration. D'après le théorème des nombres premiers, nous avons

$$(1.4) \quad \sum_{y < p \leq z} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} = \int_y^z \frac{dx}{x^{1-\varepsilon} \log x} + \int_y^z \frac{1}{x^{1-\varepsilon}} dO(xe^{-\sqrt{\log x}}).$$

L'inégalité (1.3) découle immédiatement de l'égalité (1.4), en utilisant le changement de variable : $x' = \varepsilon \log x$ dans la première intégrale et en intégrant par parties la deuxième. \square

On applique aussi le théorème des nombres premiers pour obtenir l'évaluation donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.1.3 (voir[T90], p. 381). *Soit f une fonction 2π -périodique, à variation bornée sur $[0, 2\pi]$ et de valeur moyenne*

$$\bar{f} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Alors, pour tout triplet (θ, w, z) de réels tels que $\theta \neq 0$, $1 < w < z$ on a

$$(1.5) \quad \sum_{w < p \leq z} f(\theta \log p)/p = \bar{f} \log \left(\frac{\log z}{\log w} \right) + O \left\{ \left(\frac{V(f)}{|\theta| \log w} \right) + (M(f) + (1 + |\theta|)V(f))e^{-\sqrt{\log w}} \right\}$$

où l'on a posé

$$M(f) := \sup_x |f(x)| \text{ et } V(f) := \int_0^{2\pi} |df(x)|.$$

Le lemme suivant dû à Halberstam et Richert [HR79] et généralisant un résultat de Hall, nous sera très utile.

Lemme 1.1.4 (voir[T90]). *Si f est une fonction multiplicative, positive et à laquelle on peut associer un couple (λ_1, λ_2) de $\mathbb{R}^+ \times [0, 2[$ tel que pour tout nombre premier p et pour tout entier $j > 0$ on ait*

$$f(p^j) \leq \lambda_1 \lambda_2^{j-1}$$

alors, pour tout réel $x \geq 2$

$$(1.6) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \leq 67 \left(1 + 9\lambda_1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(2 - \lambda_2)^2} \right) x \prod_{p \leq x} (1 - p^{-1}) \sum_{j \geq 0} f(p^j) p^{-j}.$$

Les deux lemmes qui suivent sont posés comme exercices dans [T90], p. 61.

Lemme 1.1.5. Soit f une fonction arithmétique, multiplicative, telle que $f * \mu \geq 0$. On a pour $x \geq 1$

$$(1.7) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \leq x \prod_{p \leq x} (1 - p^{-1}) \sum_{0 \leq \nu \leq \log x / \log p} f(p^\nu) p^{-\nu}.$$

Démonstration. Posons

$$\mathbf{1}(n) := 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

L'équivalence

$$g = f * \mu \iff f = g * \mathbf{1}$$

entraîne

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} g(d) \\ &= \sum_{d \leq x} g(d) \sum_{m: d \leq x} 1 \\ &= \sum_{d \leq x} g(d) [x/d]. \end{aligned}$$

La positivité de g implique que la dernière somme en d est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} x \sum_{d \leq x} \frac{g(d)}{d} &\leq x \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{1 \leq \nu \leq \log x / \log p} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} \right) \\ &\leq x \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{1 \leq \nu \leq \log x / \log p} \frac{f(p^\nu) - f(p^{\nu-1})}{p^\nu} \right) \\ &\leq x \prod_{p \leq x} (1 + p^{-1}) \sum_{0 \leq \nu \leq \log x / \log p} f(p^\nu) p^{-\nu}. \quad \square \end{aligned}$$

Nous faisons appel au lemme précédent pour montrer le résultat suivant.

Lemme 1.1.6. Soient $y > 1$, $x > 1$. On a

$$(1.8) \quad n\varphi(n)^{-1} \leq y$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x \exp(-e^{c_1 y})$.

Démonstration. Posons pour chaque $a \geq 1$

$$f_a(n) := (n\varphi(n)^{-1})^a,$$
$$g_a := f_a * \mu.$$

On a

$$g_a(p^\nu) = f_a(p^\nu) - f_a(p^{\nu-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \geq 2, \\ (p/(p-1))^a - 1 & \text{si } \nu = 1. \end{cases}$$

Par application du lemme 1.1.5, il suit

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) &\leq x \prod_{p \leq x} (1 - p^{-1}) \left(1 + \sum_{\nu \geq 1} p^{-\nu} (1 - p^{-1})^{-a}\right) \\ &\leq x \prod_{p \leq x} (1 - p^{-1}) \left(1 + \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^a\right). \end{aligned}$$

Posons

$$U_a(p) := \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^a\right)$$
$$V_a(p) := \frac{1}{p} \left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^a - 1\right)$$

de sorte que

$$U_a(p) = 1 + V_a(p).$$

Puisque

$$V_a(p) \ll \frac{a}{p^2} \quad \text{si } p > a$$

alors

$$\exp \sum_{p > a} V_a(p) \ll 1$$

et, puisque

$$U_a(p) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^a \left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^{-a-1} + \frac{1}{p}\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^a,$$

$$\prod_{p \leq a} (1 + V_a(p)) \leq \prod_{p \leq a} \left(\frac{p}{p-1}\right)^a.$$

Nous avons par conséquent uniformément en a ,

$$\sum_{n \leq x} f_a(n) \ll x(c_2 \log(a+1))^a.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \left| \{n : n \leq x, n\varphi(n)^{-1} > y\} \right| &\leq y^{-a} \sum_{n \leq x} f_a(n) \\ &\ll x \left(\frac{y}{c_2 \log(a+1)} \right)^{-a}. \end{aligned}$$

Nous achevons cette démonstration en choisissant

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 3c_2, \\ e^{c_1 y} - 1 \text{ avec } c_1 = 1/(ec_2) & \text{si } y > 3c_2. \end{cases}$$

D'où le lemme 1.1.6 □

Les estimations données par les deux lemmes suivants, sont des résultats classiques de la théorie du crible.

Lemme 1.1.7 (voir [HT88], p. 11). On a pour $x \geq 2z \geq 4$,

$$(1.9) \quad \Phi(x, z) \asymp \frac{x}{\log z}.$$

Lemme 1.1.8 (voir [T90], p. 437). On a pour $x \geq z \geq y \geq 2$,

$$(1.10) \quad \Theta(x, y, z) \ll x \exp\left(-\frac{\log z}{2 \log y}\right).$$

§ 2. Lemmes concernant la répartition des facteurs premiers ou des diviseurs.

On pose

$$\begin{aligned} \omega(n_k(u)) &:= \sum_{\substack{p|n, p \nmid u \\ p \leq \exp e^k}} 1, \\ Q(\alpha) &:= \alpha \log \alpha - \alpha + 1 \quad (\alpha > 0). \end{aligned}$$

Lemme 1.2.1. Soient α, δ, u, k et x tels que $u \geq 1, 0 < \alpha < 1 < \delta \leq 2$ et $1 \leq k \leq \log_2 x$. On a

$$(2.1) \quad \alpha k < \omega(n_k(u)) < \delta k$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus

$$\ll x(u\varphi(u))^{-1} e^{-Q(\alpha)k} + e^{-Q(\delta)k}.$$

Démonstration. Le nombre des entiers $n \leq x$ ne vérifiant pas (2.1) ne dépasse pas la quantité

$$\sum_{n \leq x} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \alpha k} + \delta^{\omega(n_k) - \delta k}.$$

Or, d'après le lemme 1.1.4 on a

$$\sum_{n \leq x} \alpha^{\omega(n_k(u))} \ll x \exp \left\{ \sum_{p \leq \exp e^k} (\alpha - 1)/p + \sum_{p|u} 1/p \right\}.$$

D'une part, on a

$$\sum_{p|u} 1/p \leq \sum_{p|u} \log 1/(1 - p^{-1}) = \log(u/\varphi(u)).$$

D'autre part, la formule de Mertens entraîne

$$\exp \left\{ \sum_{p \leq \exp e^k} (\alpha - 1)/p \right\} \ll e^{(\alpha-1)k}.$$

Il vient

$$\sum_{n \leq x} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \alpha k} \ll x u \varphi(u)^{-1} e^{-Q(\alpha)k}.$$

De même on vérifie

$$\sum_{n \leq x} \delta^{\omega(n_k) - \delta k} \ll x e^{-Q(\delta)k}. \quad \square$$

Le lemme suivant s'inspire du Lemma 51.2 de [HT88].

Lemme 1.2.2. Soient $1 \leq T < k \leq \log_2 x$, $u \geq 1$ et $0 < \alpha < 1$. La minoration

$$(2.2) \quad \min_{T \leq s \leq k} \frac{\omega(n_k(u)) - \omega(n_{k-s}(u))}{s} > \alpha$$

est satisfaite pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x u \varphi(u)^{-1} Q(\alpha)^{-1} e^{-TQ(\alpha)}$.

Démonstration. Notons $\bar{\mathcal{C}}(x)$ le nombre des entiers $n \leq x$ ne vérifiant pas (2.2). il est clair que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}(x) &\leq \sum_{n \leq x} \sum_{T \leq s \leq k} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \omega(n_{k-s}(u)) - \alpha s} \\ &\leq \sum_{T \leq s \leq k} e^{-\alpha s \log \alpha} \sum_{n \leq x} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \omega(n_{k-s}(u))}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.1.4, la somme intérieure est, à une constante multiplicative près, majorée par

$$\begin{aligned} x \exp \left\{ \sum_{\substack{p \nmid u \\ k-s < \log_2 p \leq k}} (\alpha - 1)/p \right\} &\leq x \exp \left\{ \sum_{\substack{p \\ k-s < \log_2 p \leq k}} (\alpha - 1)/p + \sum_{p|u} 1/p \right\} \\ &\ll xu\varphi(u)^{-1} e^{(\alpha-1)s}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}(x) &\ll xu\varphi(u)^{-1} \sum_{T \leq s \leq k} e^{-Q(\alpha)s} \\ &\ll xu\varphi(u)^{-1} Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)T}. \end{aligned}$$

D'où le lemme 1.2.2. □

Lemme 1.2.3. Soient c une constante suffisamment grande, $0 < \alpha < 1$, $x \geq x_0(\alpha)$, $T_\alpha = c(1 - \alpha)^{-2} \log(2/(1 - \alpha))$. Pour tout entiers h , $T_\alpha \leq h \leq \log_2 x$, et tout ensemble d'entier $\mathcal{K} \subset [h, \log_2 x]$ satisfaisant à

(i) $|\mathcal{K}| > c$

(ii) $\min_{\substack{k, k' \in \mathcal{K} \\ k \neq k'}} |k' - k| \geq h$

on a

$$(2.3) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \min_{T_\alpha \leq s \leq h} \omega(n_k(u)/n_{k-s}(u)) / s > \alpha \right\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}|$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $xu\varphi(u)^{-1} e^{-|\mathcal{K}|}$.

Démonstration. Posons $T := T_\alpha$. Notons $\sigma_1(n)$ le membre de gauche de l'inégalité (2.3) et,

$$\bar{\sigma}_1(n) := |\mathcal{K}| - \sigma_1(n).$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $l \geq 1$

$$|\{n : n \leq x, \bar{\sigma}_1(n) \geq l\}| \leq \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}|=l}} \prod_{k \in \mathcal{H}} \sum_{T \leq s \leq h} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \omega(n_{k-s}(u)) - \alpha s}.$$

Intervertissant les signes sommes et produit on a

$$(2.4) \quad |\{n : n \leq x, \bar{\sigma}_1(n) \geq l\}| \leq \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}|=l}} \sum_{(s_k)_{k \in \mathcal{H}} \subset \{T, \dots, h\}^l} \sum_{n \leq x} \prod_{k \in \mathcal{H}} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \omega(n_{k-s_k}(u)) - \alpha s_k}$$

avec $(s_k)_{k \in \mathcal{H}} := (s_{k_1}, \dots, s_{k_l})$ si $\mathcal{H} := \{k_1 < \dots < k_l\}$.

Fixons momentanément $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, $|\mathcal{H}| = l$ et $(s_k)_{k \in \mathcal{H}} \subset \{T, \dots, h\}^l$. Puisque les intervalles $]k - h, k]$, ($k \in \mathcal{H}$), sont deux à deux disjoints on obtient, en appliquant le lemme 1.1.4

$$\sum_{n \leq x} \prod_{k \in \mathcal{H}} \alpha^{\omega(n_k(u)) - \omega(n_{k-s_k}(u))} \ll x \exp\left(\sum_{k \in \mathcal{H}} S_k + S'_k\right)$$

où l'on a posé

$$S_k := \sum_{\substack{p \\ k-s_k < \log_2 p \leq k}} (\alpha - 1)/p,$$

$$S'_k := \sum_{\substack{p|u \\ k-s_k < \log_2 p \leq k}} (1 - \alpha)/p, \quad (k \in \mathcal{H}).$$

Il est clair que

$$\sum_{k \in \mathcal{H}} S'_k \leq \log(u\varphi(u)^{-1})$$

et que pour tout $k \in \mathcal{H}$

$$\exp S_k \ll \exp((\alpha - 1)s_k).$$

L'inégalité (2.4) entraîne par conséquent

$$(2.5) \quad \left| \{n : n \leq x, \bar{\sigma}_1(n) \geq l\} \right| \leq c_3^l x u \varphi(u)^{-1} \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}|=l}} \sum_{(s_k)_{k \in \mathcal{H}} \subset \{T, \dots, h\}^l} \prod_{k \in \mathcal{H}} e^{-Q(\alpha) s_k} \\ \leq c_4^l x u \varphi(u)^{-1} 2^{|\mathcal{K}|} \{e^{TQ(\alpha)} (1 - e^{-Q(\alpha)})\}^{-l},$$

cela achève la démonstration puisque l'on a en particulier pour $T = c(1 - \alpha)^{-2} \log(2/(1 - \alpha))$ avec c convenable

$$e^{TQ(\alpha)} (1 - e^{-Q(\alpha)}) > c_4 e^{20}$$

de sorte que le dernier membre de (2.5) est majoré par la quantité $x u \varphi(u)^{-1} e^{-|\mathcal{K}|}$ pour $l \geq \lceil |\mathcal{K}|/10 \rceil$. □

Lemme 1.2.4. *Il existe une constante absolue x_0 telle que l'on ait pour $x \geq x_0$ et tout ensemble d'entiers $\mathcal{K} \subset [3 \log_3 x, \log_2 x]$ satisfaisant à $|\mathcal{K}| \geq x_0$ et $\min_{\substack{k, k' \in \mathcal{K} \\ k \neq k'}} |k - k'| > \log |\mathcal{K}|$*

$$(2.6) \quad |\{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 50e^k\}| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}|$$

pour tout les entiers $n \leq x$ sauf au plus $x e^{-|\mathcal{K}|}$.

Démonstration. Soit $l = |\mathcal{K}|$. Notons $k_1 < \dots < k_l$ les éléments de \mathcal{K} . Posons pour $i \in \{1, \dots, l\}$

$$\begin{aligned} y_i &:= e^{k_i}, \\ l' &:= \lceil l/20 \rceil, \\ \sigma_2(n) &:= |\{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 50e^k\}|, \\ \bar{\sigma}_2(n) &:= l - \sigma_2(n) = |\{k \in \mathcal{K} : \log n_k > 50e^k\}|. \end{aligned}$$

Si l'entier $k = k_i$ avec $i \geq 2$ de \mathcal{K} est compté dans $\bar{\sigma}_2(n)$, on a soit

$$(a) \quad \log n_{k_{i-1}} > 4l e^{k_{i-1}}$$

soit

$$(b) \quad \log n_{k_{i-1}} \leq 4l e^{k_{i-1}} \text{ et } \log n_{k_i} > 50e^{k_i}$$

de sorte que l'on peut écrire

$$(2.7) \quad \bar{\sigma}_2(n) \leq \bar{\sigma}_2^{(a)}(n) + \bar{\sigma}_2^{(b)}(n) + 1$$

où $\bar{\sigma}_2^{(a)}(n)$ (resp. $\bar{\sigma}_2^{(b)}(n)$) désigne le nombre des indices i de $\{2, \dots, l\}$ tels que (a) (resp. (b)) soit réalisé.

Par le lemme 1.1.8, on a

$$(2.8) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ \bar{\sigma}_2^{(a)}(n) \geq l'}} 1 \leq \frac{1}{l'} \sum_{n \leq x} \bar{\sigma}_2^{(a)}(n) \\ \leq \frac{1}{l'} \sum_{k \in \mathcal{K}} \Theta(x, \exp e^k, \exp(4le^k)) \leq x e^{-l-1}.$$

Par ailleurs, si l'indice i est compté dans $\bar{\sigma}_2^{(b)}(n)$, alors

$$\begin{aligned} \log(n_{k_i}/n_{k_{i-1}}) &> 50e^{k_i} - 4le^{k_{i-1}} \\ &> \{50 - 4le^{-(k_i - k_{i-1})}\}e^{k_i} > 46e^{k_i} \end{aligned}$$

car $k_i - k_{i-1} > \log l$.

Il suit

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \bar{\sigma}_2^{(b)}(n) \geq l'}} 1 \leq \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{I \subset \{2, \dots, l\} \\ |I| = l'}} e^{-46l'} \prod_{i \in I} (n_{k_i}/n_{k_{i-1}})^{1/y_i}.$$

Fixons $I \subset \{2, \dots, l\}$ avec $|I| = l'$, et notons

$$f(n) := \prod_{i \in I} (n_{k_i}/n_{k_{i-1}})^{1/y_i}.$$

Soit p un nombre premier. S'il existe $i \in I$ tel que

$$\exp e^{k_{i-1}} < p \leq \exp e^{k_i}, \text{ alors } f(p^\nu) = f(p) = p^{1/y_i} \leq 3;$$

sinon $f(p^\nu) = f(p) = 1$. Comme en plus la fonction f est multiplicative alors, par le lemme 1.1.4, on a

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll x \prod_{i \in I} \exp \left\{ \sum_{k_{i-1} < \log_2 p \leq k_i} \left(\frac{1}{p^{1-\frac{1}{y_i}}} - \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

Or, d'après le lemme 1.1.2, on a pour tout $i \in \{2, \dots, l\}$

$$\begin{aligned} \sum_{k_{i-1} < \log_2 p \leq k_i} \frac{1}{p^{1-\frac{1}{y_i}}} &\leq k_i - k_{i-1} + \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx + 1 \\ &\leq k_i - k_{i-1} + 3. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll x e^{4l'}.$$

Il suit par conséquent

$$(2.9) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ \bar{\sigma}_2^{(b)}(n) \geq l'}} 1 \leq x 2^l e^{-40l'} \leq x e^{-l-1}.$$

En réunissant (2.7), (2.8) et (2.9) on obtient le lemme 1.2.4. \square

Avant d'énoncer le lemme qui suit, rappelons la définition suivante :

$$p(n, k, y) := \min \{p : p|n \text{ et } p > \exp(y e^k)\}.$$

Lemme 1.2.5. Soient x, y, h et \mathcal{K} tels que $h \geq x_0$ (x_0 étant une constante absolue, suffisamment grande), $1 < y < e^{-20-h} \log x$, \mathcal{K} une suite d'entiers de $[h, \log_2 x - \log(e^{20}y)]$, $|\mathcal{K}| \geq x_0$ et $\min_{\substack{k, k' \in \mathcal{K} \\ k \neq k'}} |k - k'| \geq 20$. On a

$$(2.10) \quad \left| \{k \in \mathcal{K} : p(n, k, y) \leq \exp(y e^{k+20})\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}|$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $x e^{-|\mathcal{K}|}$.

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} l &:= \lceil |\mathcal{K}|/10 \rceil, \\ \sigma_3(n) &:= \left| \{k \in \mathcal{K} : p(n, k, y) \leq \exp(y e^{k+20})\} \right|, \\ \bar{\sigma}_3(n) &:= |\mathcal{K}| - \sigma_3(n) \end{aligned}$$

et pour chaque $k \in \mathcal{K}$

$$\mathcal{C}_k :=] \exp(y e^k), \exp(y e^{k+20})].$$

Soit χ_k la fonction multiplicative définie par

$$\chi_k(p^\nu) := \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin \mathcal{C}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que

$$|\{n \leq x : \bar{\sigma}_3(n) \geq l\}| \leq \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}|=l}} \prod_{k \in \mathcal{H}} \chi_k(n).$$

D'après le lemme 1.1.4, on a pour chaque $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$

$$\sum_{n \leq x} \prod_{k \in \mathcal{H}} \chi_k(n) \ll x \exp \sum_{k \in \mathcal{H}} \sum_{p \in \mathcal{C}_k} -1/p$$

car $\mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k'} = \emptyset$ si $(k, k') \in \mathcal{K}^2$ et $k \neq k'$. On obtient donc pour h assez grand

$$\begin{aligned} |\{n \leq x : \bar{\sigma}_3(n) \geq l\}| &\ll x 2^{|\mathcal{K}|} e^{-19l} \\ &\ll x e^{-|\mathcal{K}|}. \end{aligned} \quad \square$$

Dans cette dernière partie du présent paragraphe, nous allons établir des lemmes essentiellement utiles dans la preuve de la proposition 2.

Le résultat combinatoire suivant est un outil important dans l'étude des suites d'entiers m ayant une quantité fixe de facteurs premiers.

Lemme 1.2.6 (voir [HR66], p. 147). Soient $n \geq 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Posant pour chaque entier k de $\{1, \dots, n\}$

$$S_k := \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} x_i,$$

on a

$$S_k \geq \left\{ 1 - \binom{k}{2} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{S_1^2} \right\} \frac{S_1^k}{k!}.$$

Nous désirons maintenant réserver certaines notations. Soient $n \geq 4$, $\beta \in]0, 1]$ et U une fonction croissant vers l'infini avec

$$U(n) = \exp(\log n)^{\varepsilon(n)} \quad \text{où } \varepsilon(n) \rightarrow 0.$$

Désignons par $\mathcal{M}(n, \beta, U)$ la suite formée par les entiers m tels que

- (i) $P^-(m) > U(n)$
- (ii) $\Omega(m, n) \leq \beta \log_2 n.$

Rappelons : $Q(\beta) := \beta \log \beta - \beta + 1.$

Lemme 1.2.7. *Il existe un entier $N(\beta)$ tel que pour tout $n \geq N(\beta)$*

$$(2.12) \quad \underline{d}\mathcal{M}(n, \beta, U) \gg \beta^{-1/2} (\log n)^{-Q(\beta)} (\log n)^{\beta \log(1-\varepsilon)} (\log_2 n)^{-1/2}.$$

Démonstration. On voit que tout élément m de $\mathcal{M}(n, \beta, U) \setminus \{1\}$ peut s'écrire sous la forme

$$m = st$$

tels que

- tous les facteurs premiers de s sont dans l'intervalle $]U(n), n]$ et en comptant leur ordre de multiplicité, leur nombre ne dépasse pas $\beta \log_2 n.$
- t n'a pas de facteur premier inférieur à $n.$

D'où, il ressort que pour $X \geq 1$

$$|\mathcal{M}(n, \beta, U) \cap [0, X]| \geq \sum_{1 \leq k \leq \beta \log_2 n} \sum_s \mu(s)^2 \sum_{\substack{t \leq X/s \\ P^-(t) > n}} 1.$$

Choisissons l'entier $N(\beta)$ aussi grand qu'on veut et considérons $n \geq N(\beta)$ et $X \geq n^n.$

La dernière somme portant sur t est d'après le lemme 1.1.7, minorée à une constante multiplicative près, par $X/(s \log n).$ Par suite, le lemme 1.2.6 entraîne

$$\underline{d}\mathcal{M}(n, \beta, U) \gg \frac{1}{\log n} \sum_{1 \leq k \leq \beta \log_2 n} \frac{1}{k!} \left\{ \log \left(\frac{\log n}{\log U(n)} \right) + O\left(\frac{1}{\log U(n)} \right) \right\}^k.$$

Ce qui fournit en particulier

$$\underline{d}\mathcal{M}(n, \beta, U) \gg \frac{1}{\log n} \frac{1}{[\beta \log_2 n]!} \left\{ \log \left(\frac{\log n}{\log U(n)} \right) + O\left(\frac{1}{\log U(n)} \right) \right\}^{[\beta \log_2 n]}.$$

Or, la formule de Stirling montre que pour $n \geq N(\beta)$

$$[\beta \log_2 n]! \leq 10 \beta^{1/2} (\log n)^{\beta \log \beta - \beta} (\log_2 n)^{[\beta \log_2 n] + 1/2}.$$

Par suite, on a

$$\underline{d}\mathcal{M}(n, \beta, U) \gg \beta^{-1/2} (\log n)^{-Q(\beta)} (\log_2 n)^{-1/2} \left\{ 1 - \varepsilon + O\left(\frac{1}{\log_2 n \cdot \log U(n)} \right) \right\}^{\beta \log_2 n}$$

et le lemme en découle d'une façon claire. \square

Lemme 1.2.8. Uniformément pour $s > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 1/2$, $0 < \beta \leq 1$ et $X \geq n \geq 4$,

$$(2.13) \quad \max_{U(n) \leq t \leq n} \left\{ \Omega(m, t) - \beta \log \frac{\log t}{\log U(n)} \right\} \leq s$$

pour tous les entiers m de $\mathcal{M}(n, \beta, U) \cap [0, X]$ sauf au plus

$$\ll X \beta^{-1} \varepsilon_1^{-2} (\log n)^{-Q(\beta)} (\log U(n))^{-\beta} (1 + \varepsilon_1)^{-s} \left\{ \frac{\log n}{\log U(n)} \right\}^{\beta(\varepsilon_1 - \log(1 + \varepsilon_1))}.$$

Démonstration. Soient $1 \leq z \leq 3/2$, $0 < \alpha \leq 1$. Posons

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}(n, \beta, U),$$

$$K := \left\lceil \log \left(\frac{\log n}{\log U(n)} \right) \right\rceil + 1$$

$$t_k := \exp(e^k \log U(n)), \quad (0 \leq k \leq K)$$

et

$$E := \sum_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ m \leq X}} \left\{ 1 : \max_{0 \leq k \leq K} (\Omega(m, t_k) - \beta(k-1)) > s \right\}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} E &\leq z^{-s} \sum_{0 \leq k \leq K} z^{-\beta(k-1)} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ m \leq X}} z^{\Omega(m, t_k)} \\ &\leq z^{-s} \alpha^{-\beta \log_2 n} \sum_{0 \leq k \leq K} z^{-\beta(k-1)} \sum_{\substack{m \leq X \\ P^-(m) > U(n)}} z^{\Omega(m, t_k)} \alpha^{\Omega(m, n)}. \end{aligned}$$

Cette dernière somme intérieure est d'après le lemme 1.1.4

$$\begin{aligned} &\ll \frac{X}{\log U(n)} \exp \left\{ \sum_{U(n) < p \leq t_k} \alpha z/p + \sum_{t_k < p \leq n} (\alpha - 1)/p \right\} \\ &\ll \frac{X}{\log U(n)} \left(\frac{\log t_k}{\log U(n)} \right)^{\alpha z - 1} \left(\frac{\log n}{\log t_k} \right)^{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$E \ll X (\log n)^{\alpha - 1 - \beta \log \alpha} (\log U(n))^{-\alpha} z^{-s} \sum_{0 \leq k \leq K} e^{kL(\alpha, \beta, z)}$$

où l'on a posé

$$L(\alpha, \beta, z) := \alpha z - \alpha - \beta \log z.$$

Le choix

$$\alpha = \beta \text{ et } z = 1 + \varepsilon_1$$

implique alors

$$L(\alpha, \beta, z) = (\varepsilon_1 - \log(1 + \varepsilon_1))\beta$$

et

$$\sum_{0 \leq k \leq K} e^{kL(\alpha, \beta, z)} \ll \beta^{-1} \varepsilon_1^{-2} \left(\frac{\log n}{\log U(n)} \right)^{(\varepsilon_1 - \log(1 + \varepsilon_1))\beta}.$$

Soit maintenant $t \in]U(n), n]$. Il existe k , ($0 \leq k < K$), tel que $t_k < t \leq t_{k+1}$. Donc, si m n'est pas compté dans E alors

$$\begin{aligned} \Omega(m, t) &\leq \Omega(m, t_{k+1}) \\ &\leq \beta k + s \\ &\leq \beta \log \left(\frac{\log t}{\log U(n)} \right) + s. \end{aligned} \quad \square$$

Notons $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*(n, \beta, U)$ la suite formée par les entiers m satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} (M_1^*) \quad &P^-(m) > U(n) \\ (M_2^*) \quad &\max_{U(n) < t \leq 3n} \frac{\Omega(m, t)}{\log_2 t} \leq \beta. \end{aligned}$$

Par le lemme 1.2.8, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1. *On a*

$$(2.14) \quad \underline{d}\mathcal{M}^* \geq \underline{d}\mathcal{M}(3n, \beta, U(n)) - c_5 \beta^{-1} \varepsilon_1^{-2} (\log n)^{-Q(\beta)} (\log U(n))^{-\beta} (\log n)^{-\beta Q(1+\varepsilon_1)}.$$

Posons

$$\nabla_\lambda(n, m) := |\{(d, t) : d|n, t|m, \mu(dt)^2 = 1, 0 < (\log d)^\lambda \log(t/d) \leq 1\}|$$

Lemme 1.2.9. *Uniformément pour $\lambda \geq 0, 0 < \varepsilon_1 < 1/2, 0 < \beta \leq 1, n \geq N(\beta)$ et $X \geq n$*

$$(2.15) \quad \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}^* \\ m \leq X}} \nabla_\lambda(n, m) \ll X (\log n)^{-Q(\beta)} (\log U(n))^{-\beta} (\log n)^{\beta \varepsilon_1 \log 2} (\log U(n))^{-\beta \log 2} \sum_{\substack{d|n \\ d > U(n)}} (\log d)^{\beta \log 2 - 1 - \lambda}.$$

Démonstration. Posons $\theta(d) = \exp(\log d)^{-\lambda}$, $s = \beta \varepsilon_1 \log_2 n$. Soient $y = y(\beta)$ et $z = z(\beta)$ deux paramètres dans $]0, 1]$. On suppose en outre que $\beta \log(1/z) \leq 1$. Il est clair que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}^* \\ m \leq X}} \nabla_\lambda(n, m) &\ll \sum_{\substack{m \leq X \\ P^-(m) > U(n)}} z^{\Omega(m, en) - \beta \log_2 n} \sum_{d|n} \mu(d)^2 \\ &\sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq \theta(d)d}} \exp \left\{ \left(\Omega(m, t) - \beta \log \left(\frac{\log t}{\log U(n)} \right) - s \right) \log y \right\} \mu(t)^2 \\ &\ll (\log n)^{-\beta \log z} y^{-s} \sum_{\substack{d|n \\ d > U(n)}} \mu(d)^2 \\ &\sum_{\substack{d < t \leq \theta(d)d \\ P^-(t) > U(n)}} \exp \left\{ \left(\omega(t) - \beta \log \frac{\log t}{\log U(n)} \right) \log y \right\} z^{\omega(t)} \\ &\sum_{\substack{m \leq X/t \\ P^-(m) > U(n)}} y^{\Omega(m, t)} z^{\Omega(m, en)} \end{aligned}$$

grâce à une interversion de sommations.

Appliquant le lemme 1.1.4 à la dernière somme portant sur m , on obtient

$$\sum_{\substack{m \in \mathcal{M}^* \\ m \leq X}} \nabla_{\lambda}(n, m) \ll X(\log n)^{-\beta \log z - 1 + z} y^{-s} (\log U(n))^{-z}$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ d > U(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{d < t \leq \theta(d)d \\ P^-(t) > U(n)}} \frac{1}{t} \left(\frac{\log t}{\log U(n)} \right)^a (yz)^{\omega(t)}$$

où l'on a posé

$$a := yz - z + \beta \log y.$$

Par le biais d'une intégration par parties où le lemme 1.1.4 est intervenu, la dernière somme en t est

$$\ll \int_{\rho}^{\rho+\eta} v^{-b} dv$$

où l'on a posé

$$\rho := \frac{\log d}{\log U(n)}, \eta := \frac{1}{(\log d)^{\lambda} \log U(n)} \text{ et } b := 1 + z - 2yz + \beta \log y.$$

Si $b > 0$ alors, la dernière intégrale ne dépasse pas

$$\eta \rho^{-b} = (\log d)^{-\lambda-b} (\log U(n))^{b-1}.$$

Le choix $y = \frac{1}{2}$ et $z = \beta$ complète la preuve du lemme 1.2.9. \square

Le résultat suivant se démontre de la même manière que Lemma 50.1 de [HT88].

Lemme 1.2.10. *Uniformément pour $x \geq T \geq 2$ et $0 < \varepsilon < 1/2$ on a*

$$(2.16) \quad \max_{T < z \leq x} \frac{\Omega(n, z)}{\log_2 z} \leq 1 + \varepsilon$$

pour tous les entiers n moindres que x sauf au plus $O(x \varepsilon^{-2} (\log T)^{-Q(1+\varepsilon)})$.

Démonstration. Posons $K := \lceil \log(\log x / \log T) \rceil + 1$ et introduisons des points tests

$$z_k := \exp(e^k \log T) \quad (0 \leq k \leq K).$$

En majorant la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers n tels que

$$g(n) := \max_{0 < k \leq K} \frac{\Omega(n, z_k)}{\log_2 z_{k-1}} > 1 + \varepsilon$$

par

$$(1 + \varepsilon)^{\Omega(n, z_k) - (1 + \varepsilon) \log_2 z_{k-1}}$$

on a donc en vertu du lemme 1.1.4

$$\sum_{n \leq x} \{1 : g(n) > 1 + \varepsilon\} \ll x Q(1 + \varepsilon)^{-1} (\log T)^{-Q(1 + \varepsilon)}.$$

Si maintenant z est quelconque dans $]T, x]$, alors il existe un indice k , ($0 \leq k < K$), tel que $z_k < z \leq z_{k+1}$. Donc, si $g(n) \leq 1 + \varepsilon$ alors

$$\begin{aligned} \Omega(n, z) &\leq \Omega(n, z_{k+1}) \\ &\leq (1 + \varepsilon) \log_2 z_k \\ &\leq (1 + \varepsilon) \log_2 z. \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 1.2.11. Soient $\alpha \in]\log 2, 1]$, $x \geq x_0(\alpha)$, $\varepsilon = \varepsilon(x) \rightarrow 0$ et $T = T(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$). On a

$$(2.17) \quad \sum_{\substack{d|n \\ d \geq T}} (\log d)^{-\alpha} \mu(d)^2 \leq (\log T)^{\log 2 - \alpha + \varepsilon}$$

pour tous les entiers n moindres que x sauf au plus

$$\ll x \varepsilon^{-2} (\log T)^{-\varepsilon^2/2}.$$

Démonstration. D'une part, d'après le lemme 1.2.1 on a

$$\omega(n) \leq (1 + \varepsilon) \log_2 x$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $x(\log x)^{-\varepsilon^2/2}$.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d|n \\ d > \sqrt{x}}} (\log d)^{-\alpha} \mu(d)^2 &\leq (\log \sqrt{x})^{-\alpha} \sum_{\substack{d|n \\ d > \sqrt{x}}} \mu(d)^2 \\ &\leq (\log \sqrt{x})^{-\alpha} 2^{\omega(n)} \leq (\log x)^{-\alpha + \log 2 + \varepsilon}. \end{aligned}$$

D'autre part, désignant par $S(x)$ la quantité

$$\sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ T \leq d \leq \sqrt{x}}} \mu(d)^2 (\log d)^{-\alpha} y^{\Omega(n,d) - (1+\varepsilon) \log_2 d}$$

en intervertissant les sommations, on a

$$S(x) \ll x \sum_{T \leq d \leq \sqrt{x}} \mu(d)^2 (\log d)^{-\alpha - (1+\varepsilon) \log y} y^{\Omega(d)} d^{-1} (\log d)^{y-1}.$$

Une simple intégration par parties entraîne ainsi

$$S(x) \ll x v^{-1} (\log T)^{-v}$$

où l'on a posé $v := 1 + \alpha + (1 + \varepsilon) \log y - 2y$ qu'on suppose > 0 .

Le choix $y = 1/2$ implique $v = \alpha - (1 + \varepsilon) \log 2 > 0$. Par ailleurs, le lemme 1.2.10 montre que

$$\max_{T < d \leq n} \{ \Omega(n, d) - (1 + \varepsilon) \log_2 d \} \leq 0$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x \varepsilon^{-2} (\log T)^{-Q(1+\varepsilon)}$.

Donc la quantité

$$\left| \left\{ n \leq x : \sum_{\substack{d|n \\ d \geq T}} \mu(d)^2 (\log d)^{-\alpha} > (\log T)^{\log 2 - \alpha + \varepsilon} \right\} \right|$$

est majorée par

$$O\{x \varepsilon^{-2} (\log T)^{-Q(1+\varepsilon)}\} + (\log T)^{\alpha - \varepsilon - \log 2} S(x),$$

qui est $O(x \varepsilon^{-2} (\log T)^{-Q(1+\varepsilon)})$ lorsque $y = 1/2$. □

§ 3. Lemmes concernant les transformées de Fourier des fonctions de répartition liées aux diviseurs.

Rappelons tout d'abord les définitions suivantes .

Soient

$$\tau^*(n, \theta) := \sum_{d|n} \mu(d)^2 d^{i\theta},$$

$$\omega_\theta(n) := \sum_{\substack{p|n \\ p \leq \exp(1/\theta)}} 1,$$

$$\mathcal{R}(n, \theta) := \frac{|\tau^*(n, \theta)|^2}{2^{\omega(n) + \omega_\theta(n)}}.$$

On voit que

$$\tau^*(n, \theta) := 2^{\omega(n)} \left(\prod_{p|n} p \right)^{i\theta/2} \prod_{p|n} \cos((\theta \log p)/2),$$

$$\mathcal{R}(n, \theta) := 2^{\omega(n) - \omega_\theta(n)} \prod_{p|n} \cos^2((\theta \log p)/2).$$

Lemme 1.3.1. On a pour $u \geq 1$, $k \geq 0$ et θ réel > 0 ,

$$(3.1) \quad \sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k(u), \theta) \ll xu \varphi(u)^{-1} \{\log(2 + \theta)\}^2.$$

Démonstration. Si $0 < \theta e^k < 1$, alors pour tout entier $n \geq 1$, on a $\omega_\theta(n_k(u)) = \omega(n_k(u))$, d'où $0 \leq \mathcal{R}(n_k(u), \theta) \leq 1$, ce qui entraîne (3.1).

Supposons $k > \log(1/\theta)$. Comme conséquence du lemme 1.1.4, nous avons

$$\sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k(u), \theta) \ll x \exp(S_1 + S_2 + S_3)$$

avec

$$S_1 := \sum_{\substack{p \leq \exp(1/\theta) \\ p \nmid u}} \frac{-1 + \cos^2((\theta \log p)/2)}{p},$$

$$S_2 := \sum_{\exp(1/\theta) < p \leq z} \frac{\cos(\theta \log p)}{p} \quad \text{où } z := \min(x, \exp e^k),$$

$$S_3 := \sum_{p|u} 1/p.$$

On voit clairement que $S_1 \leq 0$, que $S_3 \leq \log(u/\varphi(u))$ et que, si $0 < \theta < 1$ alors, en vertu du lemme 1.1.3, la somme S_2 est $O(1)$.

Dans le cas où $\theta \geq 1$, soit $y = y(\theta)$ un paramètre dépendant de θ tel que $3 \leq y \leq z$. Scindons la somme S_2 en $S_{21} + S_{22}$ portant respectivement sur les $p \leq y$ et $y < p \leq z$. Il est clair que $S_{21} = \log_2 y + O(1)$ et que d'après le lemme 1.1.3

$$S_{22} = O\left(\frac{1}{\theta \log y} + (3 + \theta)e^{-\sqrt{\log y}}\right).$$

Posons

$$y_0 := \exp(\log(2 + \theta))^2.$$

Si $z > y_0$, alors il découle du choix $y = y_0$ l'inégalité

$$S_2 = 2 \log_2(2 + \theta) + O(1).$$

Par ailleurs, si $z \leq y_0$, alors en utilisant la formule de Mertens, on a

$$S_2 \leq \sum_{p \leq y_0} 1/p = 2 \log_2(2 + \theta) + O(1).$$

En conséquence, nous obtenons

$$\sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k(u), \theta) \ll xu\varphi(u)^{-1} \{\log(2 + \theta)\}^2. \quad \square$$

Lemme 1.3.2. Soient $x, h, \delta, L, \mathcal{K}$ tels que $0 < h < \log_2 x - 10$, $\delta > 1$, $L > 0$ et \mathcal{K} une suite d'entiers de $[h, \log_2 x]$ avec $|\mathcal{K}| \geq 10$.

Alors

$$(3.2) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{h-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta} \leq L(\delta - 1)^{-1} e^{(\delta-1)(k-h)} \right\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}|$$

pour tous les entiers $n \leq x$, sauf au plus $O(xL^{-1})$.

Démonstration. Posons $\ell := \lceil |\mathcal{K}|/10 \rceil$, $\sigma_5(n)$ le membre de gauche de l'inégalité (3.2) et $\bar{\sigma}_5(n) := |\mathcal{K}| - \sigma_5(n)$.

Il est clair que

$$\begin{aligned} |\{n \leq x : \bar{\sigma}_5(n) \geq \ell\}| &\leq \ell^{-1} \sum_{n \leq x} \bar{\sigma}_5(n) \\ &\leq (\delta - 1)\ell^{-1}L^{-1} \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{(1-\delta)(k-h)} \int_{e^{h-k}}^1 \sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta}. \end{aligned}$$

Le lemme 1.3.2 découle donc du lemme 1.3.1. En effet, lorsque $\theta \in]0, 1]$ on a

$$\sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k, \theta) \ll x$$

d'où

$$\int_{e^{h-k}}^1 \sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta} \ll x(\delta - 1)^{-1} e^{-(1-\delta)(k-h)}. \quad \square$$

Lemme 1.3.3. Soient $L > 0$, $H > 1$, $k \geq 0$. On a

$$(3.3) \quad \int_1^H \mathcal{R}(n_k, \theta) (\log(2 + \theta))^2 d\theta \leq LH(\log(2 + H))^4$$

pour tous les entiers $n \leq x$, sauf au plus $O(xL^{-1})$.

Démonstration. Le nombre des entiers $n \leq x$ ne vérifiant pas (3.3) est inférieur ou égal à

$$L^{-1}H^{-1}(\log(2 + H))^{-4} \int_1^H (\log(2 + \theta))^2 \sum_{n \leq x} \mathcal{R}(n_k, \theta) d\theta.$$

Grâce au lemme 1.3.1, on voit que cette quantité est

$$\ll xL^{-1}H^{-1}(\log(2 + H))^{-4} \int_1^H (\log(2 + \theta))^4 d\theta \ll xL^{-1}. \quad \square$$

Lemme 1.3.4. Soient $u \geq 1$, $N \geq 1$ et $x \geq e^3$.

Soient $k_1 < \dots < k_N$ N -entiers positifs, $(\theta_1, \dots, \theta_N) \in \prod_{i=1}^N]e^{-k_i}, e^{-k_{i-1}}]$ avec la convention $k_0 := 0$.

On a

$$(3.4) \quad \sum_{n \leq x} \prod_{i=1}^N \mathcal{R}(n_{k_i}(u), \theta_i) \leq xc_6^N u \varphi(u)^{-1}.$$

Démonstration . Pour chaque entier k et chaque nombre réel $\theta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(n_k(u), \theta) &= \prod_{\substack{p|n(u) \\ \log p \leq 1/\theta}} \frac{|1 + p^{i\theta}|^2}{4} \prod_{\substack{p|n(u) \\ 1/\theta < \log p \leq e^k}} \frac{|1 + p^{i\theta}|^2}{2} \\ &\leq \prod_{\substack{p|n, p \nmid u \\ 1/\theta < \log p \leq e^k}} (1 + \cos(\theta \log p)). \end{aligned}$$

Comme les intervalles $]1/\theta_i, e^{k_i}]$, ($1 \leq i \leq N$), sont deux à deux disjoints dans les conditions de l'énoncé, on peut écrire

$$\prod_{i=1}^N \mathcal{R}(n_{k_i}(u), \theta_i) \leq f(n)$$

où f est la fonction fortement multiplicative définie par

$$f(p) := \begin{cases} 1 + \cos(\theta_i \log p) & (p \nmid u, 1/\theta_i < \log p \leq e^{k_i}) \\ 1 & (\text{dans tous les autres cas}). \end{cases}$$

D'après le lemme 1.1.4, on obtient

$$\sum_{n \leq x} f(x) \ll x \exp \left\{ \sum_{p|u} \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\exp(1/\theta_i) < p \leq \exp e^{k_i} \\ p \leq x}} \frac{\cos(\theta_i \log p)}{p} \right\}.$$

Par le lemme 1.1.3, on voit que chaque somme intérieure est $O(1)$. Il suit

$$\sum_{n \leq x} f(n) \leq c_6^N u \varphi(u)^{-1} x,$$

d'où (3.4). □

Lemme 1.3.5. Soient x , δ et \mathcal{K} tels que $x \geq x_0$, $|\mathcal{K}| \geq x_0$ (x_0 étant une constante absolue, suffisamment grande), $\mathcal{K} = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subset [1, \log_2 x]$, $\delta > 1$.

Notons $c_7 = c_6 e^{20}$ avec c_6 la constante apparaissant dans (3.4).

Alors

$$(3.5) \quad \left| \left\{ i : 1 < i \leq |\mathcal{K}|, \int_{e^{-k_i}}^{e^{-k_{i-1}}} \mathcal{R}(n_{k_i}, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta} \leq c_7 (\delta - 1)^{-1} e^{(\delta-1)k_i} \right\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}|$$

pour tous les entiers $n \leq x$, sauf au plus $x e^{-|\mathcal{K}|}$.

Démonstration. Posons $\ell := |\mathcal{K}|$, $m := \lfloor \ell/10 \rfloor - 1$, $\sigma_6(n)$ le membre de gauche de l'inégalité (3.5), $\bar{\sigma}_6(n) := \ell - 1 - \sigma_6(n)$.

Il est clair que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ \bar{\sigma}_6(n) \geq m}} 1 &\leq \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{I \subset \{2, \dots, \ell\} \\ |I|=m}} \prod_{i \in I} c_7^{-1} (\delta - 1) e^{(1-\delta)k_i} \int_{e^{-k_i}}^{e^{-k_i-1}} \mathcal{R}(n_{k_i}, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta} \\ &\leq c_7^{-m} (\delta - 1)^m \sum_{\substack{I \subset \{2, \dots, \ell\} \\ |I|=m}} \prod_{i \in I} e^{(1-\delta)k_i} A(I) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A(I) := \int_{\prod_{i \in I}]e^{-k_i}, e^{-k_i-1}]} \left\{ \sum_{n \leq x} \prod_{i \in I} \mathcal{R}(n_{k_i}, \theta_i) \right\} \prod_{i \in I} \frac{d\theta_i}{\theta_i^\delta}.$$

Utilisant le lemme 1.3.4, on a

$$\begin{aligned} A(I) &\leq x c_6^m \prod_{i \in I} \int_{e^{-k_i}}^{e^{-k_i-1}} \frac{d\theta}{\theta^\delta} \\ &\leq x c_6^m (\delta - 1)^{-m} \prod_{i \in I} e^{(\delta-1)k_i}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \bar{\sigma}_6(n) \geq m}} 1 \leq x e^{-20m} 2^\ell \leq x e^{-\ell}. \quad \square$$

§ 4. Lemmes sur les mesures d'ensembles d'accroissement.

Pour chaque couple d'entiers (u, v) et pour chaque réel positif η , nous entendons par ensemble d'accroissement l'ensemble

$$\mathcal{L}(u, v, \eta) := \bigcup_{\substack{d|u, t|v \\ \mu(dt)^2=1}} \log(d/t) +]0, \eta]$$

de mesure de Lebesgue $\lambda(u, v, \eta)$.

Le résultat suivant constitue un passage crucial dans la démonstration de la proposition 1. Nous faisons appel à une technique d'analyse de Fourier pour l'établir.

Lemme 1.4.1. *On a pour $(u, v) = 1$ et $\eta > 0$,*

$$(4.1) \quad \lambda(u, v, \eta) \geq 4^{\omega(uv)} \left(20 \int_0^{1/\eta} |\tau^*(uv, \theta)|^2 d\theta \right)^{-1}.$$

Démonstration. Nous commençons par majorer la norme- L^2 de la fonction

$$z \rightarrow V(u, v, z, \eta) := |\{(d, t) : d|u, t|v, \mu(dt)^2 = 1, 0 < z - \log(d/t) \leq \eta\}|,$$

lorsque $(u, v) = 1$.

Désignons par W la fonction définie par

$$W(y) := \left(\frac{\sin(y/2)}{y/2} \right)^2,$$

nous avons

$$W(y) := \int_{-1}^{+1} (1 - |\theta|) e^{i\theta y} d\theta$$

et

$$\inf_{]0,1]} W = W(1) > 0,9.$$

Nous avons par conséquent pour tout réel z

$$\begin{aligned} V(u, v, z, \eta) &\leq (10/9) \sum_{d|u, t|v} W((z + \log t - \log d)\eta^{-1}) \mu(d)^2 \mu(t)^2 \\ &\leq (10/9) \int_{-1}^{+1} (1 - |\theta|) e^{i\theta z \eta^{-1}} \tau^*(u, -\theta \eta^{-1}) \tau^*(v, \theta \eta^{-1}) d\theta \\ &\leq (10/9) \eta \int_{-1/\eta}^{1/\eta} (1 - |\theta| \eta) e^{i\theta z} \tau^*(u, -\theta) \tau^*(v, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

La formule de Parseval entraîne donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} V(u, v, z, \eta)^2 dz &\leq (200/81) \eta^2 \pi \int_{-1/\eta}^{1/\eta} (1 - |\theta| \eta)^2 |\tau^*(u, -\theta) \tau^*(v, \theta)|^2 d\theta \\ &\leq 20 \eta^2 \int_0^{1/\eta} |\tau^*(uv, \theta)|^2 d\theta. \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} V(u, v, z, \eta) dz &= \eta \sum_{d|u} \mu(d)^2 \sum_{t|v} \mu(t)^2 \\ &= \eta 2^{\omega(uv)} \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(u, v, z, \eta) dz \leq \sqrt{\lambda(u, v, \eta)} \|V(u, v, \cdot, \eta)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On tire donc l'inégalité

$$4^{\omega(uv)} \leq 20\lambda(u, v, \eta) \int_0^{1/\eta} |\tau^*(uv, \theta)|^2 d\theta. \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer le membre de droite de l'inégalité (4.1) lorsque $u = n_k$, $v = m_k(n)$ et $\eta = (\log n)^{-\lambda}$. Pour cela, nous commençons par fixer l'entier n dans une suite \mathcal{A} de densité inférieure aussi grande que possible. Nous établissons ensuite une majoration de l'intégrale

$$\int_0^{1/\eta} |\tau^*(n_k m_k(n), \theta)|^2 d\theta$$

en écartant un ensemble d'entiers m négligeable.

Nous gardons jusqu'à la fin de ce paragraphe § 4 les notations suivantes .

$$0 \leq \lambda < \log 4 - 1, \varepsilon = \varepsilon_\lambda := \frac{\log 4 - 1 - \lambda}{100} > 0, x \geq x_0(\lambda),$$

$$k_1 := [(1 - 3\varepsilon) \log_2 x], h := [\sqrt{\log_2 x}], \ell_0 := [\varepsilon \sqrt{\log_2 x}]$$

et

$$\mathcal{K} := \{k_1 + jh : j = 1, \dots, \ell_0\}.$$

Désignons par $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})$ la suite des entiers $n \leq x$ vérifiant les neuf propriétés suivantes :

$$(A_1) \quad n/\varphi(n) \leq \sqrt{\log_2 x}$$

$$(A_2) \quad \omega(n) \leq 2 \log_2 x$$

$$(A_3) \quad \min_{k \in \mathcal{K}} \min_{h \leq s \leq k} \omega(n_k/n_{k-s})/s > 1 - 2\varepsilon$$

$$(A_4) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \min_{T \leq s \leq h} \omega(n_k/n_{k-s})/s > 1 - 2\varepsilon \right\} \right| \geq 9\ell_0/10$$

où $T = T(\varepsilon) = c\varepsilon^{-3}$, c étant une constante absolue suffisamment grande.

$$(A_5) \quad \left| \{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 50e^k\} \right| \geq 9\ell_0/10$$

$$(A_6) \quad \left| \{k \in \mathcal{K} : p(n, k, 100) \leq \exp(e^{k+30})\} \right| \geq 9\ell_0/10$$

$$(A_7) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta} \leq (\delta - 1)^{-1} e^{(\delta-1)(k-h/2)} \right\} \right| \geq 9\ell_0/10$$

avec $\delta = (1 - 2\varepsilon) \log 4$.

$$(A_8) \quad \max_{1 \leq k \leq \log_2 x} \int_1^{(\log x)^\lambda} \mathcal{R}(n_k, \theta) (\log(2 + \theta))^2 d\theta \leq (\log x)^{\lambda+2\varepsilon}$$

$$(A_9) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{-k}}^{e^{-k+h}} \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^\delta} \leq c_7 (\delta - 1)^{-1} e^{(\delta-1)k} \right\} \right| \geq 9\ell_0/10$$

où $\delta := (1 - 2\varepsilon) \log 4$, c_7 étant la constante figurant dans (3.5).

D'après les lemmes 1.1.6, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.3.2, 1.3.3 et 1.3.5 où les propriétés (A_i) , $(1 \leq i \leq 9)$ ont été respectivement mises en évidence, nous obtenons le résultat suivant .

Lemme 1.4.2. *On a*

$$(4.2) \quad |\mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})| \geq x(1 - e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}).$$

Posons pour $n \in \mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})$, \mathcal{K}_n^* la suite formée par les $\lfloor \ell_0/2 \rfloor$ premiers entiers k qui sont comptés dans (A_i) , ($i = 4, \dots, 7$) et (A_9) simultanément.

Lemme 1.4.3. Soient $n \in \mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})$, $X \geq x$. On a

$$(4.3) \quad \max_{k \in \mathcal{K}_n^*} 4^{-\omega(n_k m_k(n))} e^k \int_1^{(\log x)^\lambda} |\tau^*(n_k m_k(n), \theta)|^2 d\theta \leq 1$$

pour tous les entiers $m \leq X$, sauf au plus $X(\log x)^{-\varepsilon^2}$.

Démonstration. Posons $\alpha := 1 - 2\varepsilon$, $H := (\log x)^\lambda$. Nous savons que

$$\mathcal{R}(u, \theta) = \frac{|\tau^*(u, \theta)|^2}{2^{\omega(u) + \omega_\theta(u)}} \geq 2 \frac{|\tau^*(u, \theta)|^2}{2^{\omega(u)}} \quad \text{pour } \theta \geq 1$$

car

$$\omega_\theta(u) := \sum_{\substack{p|u \\ p \leq \exp(1/\theta)}} 1 \leq 1.$$

Notant $\bar{\mathcal{C}}_1(X)$ le nombre des entiers $m \leq X$ ne vérifiant pas (4.3), on a donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}_1(X) &\leq 4 \sum_{k \in \mathcal{K}_n^*} e^k \int_1^H \frac{\mathcal{R}(n_k, \theta)}{2^{\omega(n_k)}} \sum_{m \in X} \frac{\mathcal{R}(m_k(n), \theta)}{2^{\omega(m_k(n))}} d\theta \\ &\quad + \sum_{k_1 < k \leq \log_2 x} |\{m \leq X : \omega(m_k(n)) \leq \alpha k\}| \end{aligned}$$

où l'apostrophe signifie que la somme est portée sur les entiers $m \leq X$ tels que

$$\min_{k_1 < k \leq \log_2 x} \frac{\omega(m_k(n))}{k} > \alpha.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{m \in X} \frac{\mathcal{R}(m_k(n), \theta)}{2^{\omega(m_k(n))}} &\leq 2^{-\alpha k} \sum_{m \leq X} \mathcal{R}(m_k(n), \theta) \\ &\ll X n \varphi(n)^{-1} 2^{-\alpha k} (\log(2 + \theta))^2 \end{aligned}$$

grâce au lemme 1.3.1.

D'autre part, en vertu du lemme 1.2.1, on a

$$\sum_{k_1 < k \leq \log_2 x} |\{m \leq X : \omega(m_k(n)) \leq \alpha k\}| \ll X n \varphi(n)^{-1} Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)k_1}.$$

Par conséquent, on a l'inégalité

$$\bar{\mathcal{C}}_1(X) \ll X n \varphi(n)^{-1} \left\{ Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)k_1} + \sum_{k \in \mathcal{K}_n^*} e^k 4^{-\alpha k} \int_1^H \mathcal{R}(n_k, \theta) (\log(2+\theta))^2 d\theta \right\}$$

où nous avons appliqué la minoration

$$\min_{k \in \mathcal{K}_n^*} \frac{\omega(n_k)}{k} > \alpha.$$

donnée par la propriété (A₃).

La propriété (A₈) implique donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}_1(X) &\ll X n \varphi(n)^{-1} \left\{ Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)k_1} + (\log x)^{\lambda+2\varepsilon} \sum_{k \in \mathcal{K}_n^*} e^{(1-\alpha \log 4)k} \right\} \\ &\ll X n \varphi(n)^{-1} \left\{ Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)k_1} + (\alpha \log 4 - 1)^{-1} (\log x)^{\lambda+2\varepsilon} e^{(1-\alpha \log 4)k_1} \right\} \\ &\ll X n \varphi(n)^{-1} Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)k_1}, \quad (k_1 = [(1-3\varepsilon) \log_2 x]). \end{aligned}$$

On obtient donc le lemme 1.4.3 en utilisant les inégalités $n/\varphi(n) \leq \log_2 x$ et $Q(1-2\varepsilon) \geq 2\varepsilon^2$. \square

Lemme 1.4.4. Soient $n \in \mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})$, $X \geq x$, $a_\varepsilon = \exp(c_0 \varepsilon^{-3})$ où c_0 désigne une constante absolue, suffisamment grande.

Posant

$$\sigma(m) := \left| \left\{ k \in \mathcal{K}_n^* : \int_0^1 |\tau^*(n_k m_k(n), \theta)|^2 d\theta \leq 4^{\omega(n_k m_k(n))} a_\varepsilon e^{-k} \right\} \right|$$

on a

$$(4.4) \quad \sigma(m) \geq (\varepsilon/4) \sqrt{\log_2 x}$$

pour tous les entiers m moindres que X , sauf au plus $X e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}$.

Démonstration . Notons $\bar{\sigma}(m) = [\ell_0/2] - \sigma(m)$.

Posons pour chaque $k \in \mathcal{K}_n^*$

$$\begin{aligned} I_{1,k} &:= [0, a_\varepsilon/(3e^k)], \\ I_{2,k} &:= [a_\varepsilon/(3e^k), e^{h-k}], \\ I_{3,k} &:= [e^{h-k}, 1] \end{aligned}$$

et pour chaque $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{I}_{j,k}(u, v) := a_\varepsilon^{-1} e^k 4^{-\omega(uv)} \int_{I_{j,k}} |\tau^*(uv, \theta)|^2 d\theta.$$

On a donc

$$\bar{\sigma}(m) = \left| \left\{ k \in \mathcal{K}_n^* : \sum_{j=1}^3 \mathcal{I}_{j,k}(n_k, m_k(n)) > 1 \right\} \right|.$$

Puisque pour tout $k \in \mathcal{K}_n^*$

$$\mathcal{I}_{1,k}(n_k, m_k(n)) \leq 1/3$$

alors, en introduisant

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'(m) &:= \left| \left\{ k \in \mathcal{K}_n^* : \mathcal{I}_{2,k}(n_k, m_k(n)) > 1/3 \right\} \right|, \\ \bar{\sigma}''(m) &:= 3 \sum_{k \in \mathcal{K}_n^*} \mathcal{I}_{3,k}(n_k, m_k(n)), \end{aligned}$$

on a

$$(4.5) \quad \bar{\sigma}(m) \leq \bar{\sigma}'(m) + \bar{\sigma}''(m).$$

Commençons par majorer $\bar{\sigma}''(m)$.

L'écriture

$$\mathcal{I}_{3,k}(n_k, m_k(n)) = a_\varepsilon^{-1} e^k \int_{I_{3,k}} \frac{\mathcal{R}(m_k(n), \theta)}{2^{\omega(m_k(n)) - \omega_\theta(m_k(n))}} \frac{\mathcal{R}(n_k, \theta)}{2^{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}} d\theta$$

montre que la qualité de la majoration de $\mathcal{I}_{3,k}(n_k, m_k(n))$ sera d'autant meilleure que l'on pourra estimer le dénominateur de l'intégrande. Pour cela, faisons appel à la propriété suivante

$$(i) \quad \min_{k \in \mathcal{K}_n^*} \cdot \min_{h \leq s \leq k_1} \frac{\omega(m_k(n)/m_{k-s}(n))}{s} > \alpha$$

ici et dans toute cette démonstration $\alpha := 1 - 2\varepsilon$.

Nous constatons que si m vérifie (i), alors pour tout $k \in \mathcal{K}_n^*$ et pour tout réel $\theta \in I_{3,k}$, on a en posant $s_k(\theta) := [\log(\theta e^k)]$

$$\begin{aligned} \omega(m_k(n)) - \omega_\theta(m_k(n)) &\geq \omega(m_k(n)) - \omega(m_{k-s_k(\theta)}(n)) \\ &> \alpha s_k(\theta) \\ &\geq \alpha \log(\theta e^k) - 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, en notant

$$\mathcal{I}'_{3,k}(n_k, m_k(n)) := a_\varepsilon^{-1} e^k 4^{1-\alpha k} \int_{I_{3,k}} \mathcal{R}(m_k(n), \theta) \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^{\alpha \log 4}},$$

on a

$$(4.6) \quad \mathcal{I}_{3,k}(n_k, m_k(n)) \leq \mathcal{I}'_{3,k}(n_k, m_k(n))$$

puisque en plus, d'après (A₃), n vérifie (i).

Or, d'après le lemme 1.2.2, le nombre des entiers $m \leq X$ ne vérifiant pas (i) est inférieur à

$$(4.7) \quad X \ell_0^{-1} n \varphi(n)^{-1} Q(\alpha)^{-1} e^{-hQ(\alpha)} \leq X (\log_2 x)^{-1} e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}.$$

Par conséquent, (4.6) et (4.7) impliquent

$$|\{m \leq X : \bar{\sigma}''(m) > \ell_0/20\}| \leq X (\log_2 x)^{-1} e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}} + 60 \ell_0^{-1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n^*} \sum_{m \leq X} \mathcal{I}'_{3,k}(n_k, m_k(n)).$$

Appliquant le lemme 1.3.1, on a pour $k \in \mathcal{K}_n^*$

$$\sum_{m \leq X} \mathcal{I}'_{3,k}(n_k, m_k(n)) \ll X n \varphi(n)^{-1} a_\varepsilon^{-1} e^{(1-\alpha)k} \int_{e^{h-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^{\alpha \log 4}}.$$

Nous obtenons donc en vertu des propriétés (A₁) et (A₇)

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq X} \mathcal{I}'_{3,k}(n_k, m_k(n)) &\ll X \sqrt{\log_2 x} a_\varepsilon^{-1} \exp\left(\frac{1-\alpha \log 4}{2} h\right) \\ &\leq X \log_2 x \exp\left(\frac{1-\alpha \log 4}{2} \sqrt{\log_2 x}\right) \\ &\leq X (\log_2 x)^{-2} e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$(4.8) \quad |\{m \leq X : \bar{\sigma}''(m) > \ell_0/20\}| \leq X(\log_2 x)^{-1} e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}.$$

Il nous reste à majorer $\bar{\sigma}'(m) = \left| \{k \in \mathcal{K}_n^* : \mathcal{I}_{2,k}(n_k, m_k(n)) > 1/3\} \right|$. Pour cela, considérons

$$\bar{\sigma}'_1 := \left| \left\{ k \in \mathcal{K}_n^* : \mathcal{I}_{2,k}(n_k, m_k(n)) > 1/3 \text{ et } \min_{T \leq s \leq h} \frac{\omega(m_k(n)/m_{k-s}(n))}{s} > \alpha \right\} \right|$$

avec $T = \lceil \log(a_\varepsilon/3) \rceil$.

D'après le lemme 1.2.3, on a pour tous les entiers $m \leq X$, sauf au plus $Xn\varphi(n)^{-1} \exp -|\mathcal{K}_n^*|$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}'(m) &\leq \bar{\sigma}'_1(m) + |\mathcal{K}_n^*|/10 \\ &\leq \bar{\sigma}'_1(m) + \ell_0/20. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui donnant (4.6) implique l'inégalité suivante

$$\bar{\sigma}'_1(m) \leq |\{k \in \mathcal{K}_n^* : \mathcal{I}'_{2,k}(n_k, m_k(n)) > 1/3\}|$$

où l'on a posé

$$\mathcal{I}'_{2,k}(n_k, m_k(n)) := a_\varepsilon^{-1} e^k 4^{1-\alpha k} \int_{I_{2,k}} \mathcal{R}(m_k(n), \theta) \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^{\alpha \log 4}}.$$

Par conséquent, notant $\ell = \lfloor \ell_0/20 \rfloor$ on a

$$(4.10) \quad \begin{aligned} |\{m \leq X : \bar{\sigma}'_1(m) > \ell\}| &\leq \sum_{m \leq X} \sum_{\substack{\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n^* \\ |\mathcal{K}| = \ell}} \prod_{k \in \mathcal{K}} 3\mathcal{I}'_{2,k}(n_k, m_k(n)) \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n^* \\ |\mathcal{K}| = \ell}} \sum_{m \leq X} \prod_{k \in \mathcal{K}} 3\mathcal{I}'_{2,k}(n_k, m_k(n)). \end{aligned}$$

Ecrivant $\prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{I}'_{2,k}(n_k, m_k(n))$ comme intégrale multiple, on a donc

$$|\{m \leq X : \bar{\sigma}'_1(m) > \ell\}| \leq 12^\ell a_\varepsilon^{-\ell} \sum_{\substack{\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n^* \\ |\mathcal{K}| = \ell}} \prod_{k \in \mathcal{K}} e^{(1-\alpha \log 4)k} H(X; \mathcal{K})$$

où l'on a posé

$$H(X; \mathcal{K}) := \int \prod_{k \in \mathcal{K}} I_{2,k} \sum_{m \leq X} \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{R}(m_k(n), \theta_k) \prod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{R}(n_k, \theta_k) \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{d\theta_k}{\theta_k^{\alpha \log 4}}.$$

Par le lemme 1.3.4, on a pour $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n^*$ et $|\mathcal{K}| = \ell$

$$\begin{aligned} H(X; \mathcal{K}) &\leq X c_8^\ell n \varphi(n)^{-1} \prod_{k \in \mathcal{K}} \int_{e^{-k}}^{e^{h-k}} \mathcal{R}(n_k, \theta) \frac{d\theta}{\theta^{\alpha \log 4}} \\ &\leq X c_8^\ell (\alpha \log 4 - 1)^{-\ell} \prod_{k \in \mathcal{K}} e^{(\alpha \log 4 - 1)k} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés (A₁) et (A₉) de n .

En reportant la dernière majoration dans (4.10), on obtient

$$(4.11) \quad \begin{aligned} |\{m \leq X : \bar{\sigma}'_1(m) > \ell\}| &\leq X (c_9/a_\varepsilon)^\ell \\ &\leq X e^{-\sqrt{\log_2 x}}. \end{aligned}$$

En conséquence, en regroupant (4.5), (4.8), (4.9) et (4.11) on a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(m) &\leq \bar{\sigma}'(m) + \bar{\sigma}''(m) \\ &\leq 3[\varepsilon \sqrt{\log_2 x}]/20 \end{aligned}$$

pour tous les entiers m moindres que X , sauf au plus $X e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}$. □

§ 5. Démonstration de la proposition 1.

Commençons par rappeler et par introduire des notations et des définitions utiles.

Soient $0 \leq \lambda < \log 4 - 1$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = (\log 4 - 1 - \lambda)/100 > 0$, $X \geq x \geq x_0(\lambda)$, $k_1 := [(1 - 3\varepsilon) \log_2 x]$, $\ell_0 := [\varepsilon \log_2 x]$, $h := [\sqrt{\log_2 x}]$ et $\mathcal{K} := \{k_1 + jh : j = 1, \dots, \ell_0\}$.

On fixe n dans la suite $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})$ du lemme 1.4.2 et on désigne par $k_1 < \dots < k_{\ell_1}$, ($\ell_1 := [\ell_0/2]$), les éléments de \mathcal{K}_n^* .

Soit $i \in \{1, \dots, \ell_1\}$. Posons

$$p_i := \min\{p|n : p > \exp(100e^{k_i})\}$$

$$\mathcal{M}_i := \{m \leq X : \nabla(n_{k_i}, m_{k_i}, \eta) = 0\} \quad \text{avec} \quad \eta := (\log x)^{-\lambda}$$

$$\nabla(u, v, \eta) := \sum_{\substack{d|u, t|v \\ 0 < \log(t/d) \leq \eta}} \mu(dt)^2.$$

Désignons par (a_i) , $(b)_i$, (c_i) et (d_i) les propriétés suivantes pour un entier m .

$$(a_i) \quad \log m_{k_i} \leq 50e^{k_i}$$

$$(b)_i) \quad \omega(m_{k_i}) \leq 2k_i$$

$$(c_i) \quad \lambda(n_{k_i}, m_{k_i}(n), \eta) \geq \varepsilon_1 e^{k_i}$$

avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\lambda) = \exp\{-c\varepsilon^{-3}\}$, c étant une constante absolue suffisamment grande.

(d_i) Il existe au moins un facteur premier q de m tel que

$$\log q - \log p_i \in \mathcal{L}(n_{k_i}, m_{k_i}, \eta).$$

Posons

$$\mathcal{P}_i := \{m \leq X : m \text{ vérifie } (a_i), (b)_i \text{ et } (c_i)\}.$$

Notons pour chaque $I \subset \{1, \dots, \ell_1\}$

$$\mathcal{P}(I) := \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i \setminus \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq \max I \\ j \notin I}} \mathcal{P}_j,$$

$$\mathcal{M}'(I) := \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{M}_{\max I},$$

$$M'(I) := |\mathcal{M}'(I)|,$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}(I) := \{\tilde{m} : \text{il existe } m \in \mathcal{M}'(I) \text{ tel que } \tilde{m} = m_{k_{\max I}}\},$$

$$\mathcal{I}(\ell) := \{I : I \subset \{1, \dots, \ell_1\}, |I| = \ell\}.$$

Fixons momentanément $\ell \in \{1, \dots, \lfloor \ell_0/5 \rfloor\}$.

Soit $I \in \mathcal{I}(\ell)$; notons $j := \max I$.

Considérons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I) &:= \{m : m \in \mathcal{M}'(I) \text{ et } m \text{ satisfait } (d_j)\}, \\ F(I) &:= |\mathcal{F}(I)|. \end{aligned}$$

Remarquons que si m satisfait (d_j) , alors par définition de $\mathcal{L}(u, v)$, il existe un diviseur d de n_{k_j} et un diviseur t de m_{k_j} tels que $0 < \log (qt/(p_j d)) \leq \eta$; d'où

$$\frac{p_j}{m_{k_j}} < q < 3n_{k_j} p_j.$$

Par suite, si m satisfait en outre (a_j) , alors en faisant appel aux propriétés (A_5) et (A_6) de $\mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})$, on a

$$(5.1) \quad \sqrt{p_j} < q < p_j^2$$

et

$$q < \exp(2e^{k_j+30}) < \exp e^{k_j+1}.$$

Il en découle

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(I) &\subset \mathcal{M}'(I) \setminus \mathcal{M}_{j+1} \\ &\subset \mathcal{M}'(I) \setminus \mathcal{M}'(I \cup \{j+1\}). \end{aligned}$$

En fait, nous avons

$$(5.3) \quad \mathcal{F}(I) \subset \mathcal{M}'(I) \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{I}(\ell+1)} \mathcal{M}'_J.$$

En effet, supposons qu'il existe $J \in \mathcal{I}(\ell+1)$ tel que

$$\mathcal{F}(I) \cap \mathcal{M}'(I) \neq \emptyset.$$

Comme $\mathcal{F}(I) \subset \mathcal{M}'(I) \subset \mathcal{P}(I)$ et $\mathcal{M}'(J) \subset \mathcal{P}(J)$, on aurait donc

$$\mathcal{P}(I) \cap \mathcal{P}(J) \neq \emptyset;$$

cela implique que $I \subset J$ et $I \neq J$; donc $\mathcal{M}_{\max J} \subset \mathcal{M}_{j+1}$.

Notre supposition entraîne alors $\mathcal{F}(I) \cap \mathcal{M}_{j+1} \neq \emptyset$, ce qui contredit (5.2).

Par ailleurs, pour avoir une minoration satisfaisante de $F(I)$, on voit que $\mathcal{F}(I)$ contient tous les entiers $m \leq X$, s'écrivant sous la forme

$$m = \tilde{m}tqb$$

avec

$$\tilde{m} \in \widetilde{\mathcal{M}}(I),$$

$$t|\tilde{m},$$

$$\log q - \log p_j \in \mathcal{L}(n_{k_j}, \tilde{m}, \eta)$$

et

$$P^-(b) \geq \exp(e^{k_j+50}) \geq p_j^2.$$

Avec les notations

$$y := X/(\tilde{m}tq) \text{ et } z := \exp(2e^{k_j+30}),$$

nous avons

$$(5.4) \quad F(I) \geq \sum_{\tilde{m}} \sum_t \sum_q \sum_{b \leq y} 1.$$

Utilisant $X \geq x \geq x_0(\lambda)$, les inégalités

$$\begin{aligned} \tilde{m}tq &\leq \tilde{m}^2q \\ &\leq p_j^3 \\ &\leq \exp(e^{k_j+50}), \end{aligned}$$

$$\exp(e^{k_j+100}) \leq \exp\{(\log x)^{1-\varepsilon}\}$$

montrent alors que l'hypothèse

$$y/2 \geq z \geq 2$$

du lemme 1.1.7 est vérifiée. D'après ce lemme, nous avons donc

$$\begin{aligned} (5.6) \quad F(I) &\gg Xe^{-k_j} \sum_{\tilde{m}} 1/\tilde{m} \sum_{t|\tilde{m}} 1/t \sum_q 1/q \\ &\gg Xe^{-k_j} \sum_{\tilde{m}} 1/\varphi(\tilde{m}) \sum_q 1/q. \end{aligned}$$

Nous sommes par conséquent amenés à minorer $\sum_q 1/q$. On sait que si \tilde{m} est fixé, alors q est confiné à

$$\bigcup_{(d,t) \in \mathcal{E}_j}]dp_j/t, e^\eta dp_j/t]$$

où l'on a posé

$$\mathcal{E}_j := \{(d, t) : d|n_{k_j}, t|\tilde{m}, (d, t) = 1\}.$$

Remarquons que cette union peut se récrire comme une réunion $\bigcup_s]y_s, z_s]$ d'au plus $2^{\omega(\tilde{m})+\omega(n_{k_j})}$ intervalles disjoints. Il est clair que

$$\sum_s \int_{y_s}^{z_s} dr/r = \lambda(n_{k_j}, \tilde{m}(n), \eta).$$

Par ailleurs, d'après (5.1)

$$\sum_q 1/q \geq 1/(2 \log p_j) \sum_q \log q/q.$$

Le théorème des nombres premiers permet d'évaluer la dernière somme en q : on a

$$\sum_q \log q/q \geq \lambda(n_{k_j}, \tilde{m}(n), \eta) + R_j$$

avec

$$R_j := \sum_s \left[\log t e^{-\sqrt{\log t}} \right]_{y_s}^{z_s} + \int_{y_s}^{z_s} O\left(t e^{-\sqrt{\log t}}\right) d(-\log t/t).$$

Utilisant

$$(\log y_s, \log z_s) \in \left] \frac{1}{2} \log p_j, 2 \log p_j \right]^2$$

et

$$\begin{aligned} 2^{\omega(\tilde{m})+\omega(n_{k_j})} &\leq 2^{\omega(\tilde{m})+\omega(n)} \\ &\leq 2^{6k_j}, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} R_j &\ll 2^{6k_j} \log p_j \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2} \log p_j\right)^{1/2} \right\} \\ &\ll (\log p_j)^7 \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2} \log p_j\right)^{1/2} \right\} \\ (5.7) \quad &\ll \exp\left(-\frac{1}{4} \sqrt{\log p_j}\right). \end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \sum_q 1/q &\gg (1/\log p_j) \{ \lambda(n_{k_j}, \tilde{m}(n), \eta) + O(\exp(-\frac{1}{4}\sqrt{\log p_j})) \} \\ &\gg (\log p_j)^{-1} \varepsilon_1 e^{k_j} \\ &\gg \varepsilon_1 \end{aligned}$$

où nous avons fait recours à la propriété (c_j) de m et à la propriété (A₆) de n . Nous voyons que (5.6) devient ainsi

$$(5.9) \quad F(I) \gg X \varepsilon_1 e^{-k_j} \sum_{\tilde{m}} 1/\varphi(\tilde{m}).$$

Afin de minorer la dernière somme en \tilde{m} , considérons l'inégalité suivante :

$$M'(I) \leq \sum_{\tilde{m}} \sum_t^* 1$$

où l'étoile signifie que la somme est portée sur les entiers $t \leq X/\tilde{m}$, dont chaque facteur premier q' vérifie $q'|\tilde{m}$ où $q' > \exp e^{k_j}$.

D'après le lemme 1.1.4, nous avons

$$\sum_t^* 1 \ll X \varphi(\tilde{m})^{-1} e^{-k_j}.$$

Il en découle

$$(5.10) \quad \sum_{\tilde{m}} 1/\varphi(\tilde{m}) \gg \frac{1}{X} e^{k_j} M'(I).$$

En conséquence, l'inégalité (5.9) devient

$$(5.11) \quad F(I) \geq c_{10} \varepsilon_1 M'(I).$$

D'après (5.3) et (5.11), nous avons évidemment

$$(5.12) \quad \bigcup_{I \in \mathcal{I}(\ell)} \mathcal{F}(I) \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}(\ell)} \mathcal{M}'(I) \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{I}(\ell+1)} \mathcal{M}'(J),$$

$$(5.13) \quad c_{10}\varepsilon_1 \sum_{I \in \mathcal{I}(\ell)} M'(I) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}(\ell)} F(I).$$

Et puisque

$$\bigcup_{I \in \mathcal{I}(\ell)} M'(I) \subset \bigcup_{J \in \mathcal{I}(\ell+1)} M'(J)$$

et $\mathcal{M}'(I') = \mathcal{M}'(I'')$ pour toute paire I', I'' de parties de $\{1, \dots, \ell_1\}$ telles que $|I'| = |I''|$, alors la relation (5.12) entraîne clairement

$$(5.14) \quad \sum_{I \in \mathcal{I}(\ell)} F(I) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}(\ell)} M'(I) - \sum_{J \in \mathcal{I}(\ell+1)} M'(J).$$

Il s'ensuit

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{I}(\ell+1)} M'(J) &\leq (1 - c_{10}\varepsilon_1)^{\ell_0/10} \sum_{I \in \mathcal{I}(1)} M'(I) \\ &\leq (1 - c_{10}\varepsilon_1)^{\ell_0/10} M'(I). \end{aligned}$$

Remarquons qu'en vertu des lemmes 1.2.1, 1.2.4, 1.4.1, 1.4.3 et 1.4.4, nous avons en posant $\ell = \lfloor \ell_0/10 \rfloor$

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{I}(\ell)} M'(J) &\geq \sum_{J \in \mathcal{I}(\ell)} |\mathcal{M}_{\ell_1} \cap \mathcal{P}(J)| \\ &\geq |\mathcal{M}_{\ell_1} \cap \bigcup_{J \in \mathcal{I}(\ell)} \mathcal{P}(J)| \\ &\geq M_{\ell_1} - 2Xe^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}}. \end{aligned}$$

Il découle donc de (5.15) et (5.16)

$$\begin{aligned} M_{\ell_1} &\leq X(2e^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}} + (1 - c_{10}\varepsilon_1)^{\ell_0/10}) \\ &\leq X \exp(-\varepsilon_2 \sqrt{\log_2 x}) \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\lambda) := \exp(-c_{11}\varepsilon^{-3}).$$

On obtient enfin en appliquant le lemme 1.4.2

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq X} \{1 : \nabla(n, m, \eta) = 0\} &\leq xXe^{-\varepsilon^2 \sqrt{\log_2 x}} + \sum_{n \in \mathcal{A}_\lambda(x; \mathcal{K})} M_{\ell_1} \\ &\leq 2xX \exp(-\varepsilon_2 \sqrt{\log_2 x}). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de la proposition 1. □

§ 6. Démonstration de la proposition 2.

Soit $\lambda \in [0, \log 4 - 1]$ fixé. Notre objectif est de minorer $1 - \mathbf{dB}'_\lambda(n)$ p.p. Pour cela, considérons

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon(n) := (\log_2 n)^{-1/6}, \\ U &= U(n) := \exp(\log n)^{\varepsilon(n)}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1(n) := \varepsilon + 2\varepsilon^2, \\ \beta &:= \left(\frac{1 + \lambda - 2\varepsilon}{\log 2} - 1 \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{N}_\lambda := \left\{ n \geq N(\lambda) : \sum_{\substack{d|n \\ d > U}} (\log d)^{-\alpha} \leq (\log U)^{-\alpha + \log 2 + \varepsilon} \right\}$$

où l'on a posé

$$\alpha := \beta \log 2 - 1 - \lambda.$$

D'après le lemme 1.2.11, on a

$$(6.1) \quad \mathbf{d}\mathcal{N}_\lambda = 1.$$

Soit \mathcal{M}^* la suite formée par les entiers m satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(M_1^*) \quad P^-(m) > U(n)$$

$$(M_2^*) \quad \max_{U(n) < t \leq 3n} \frac{\Omega(m, t)}{\log_2 t} \leq \beta.$$

D'après le lemme 1.2.7 et le corollaire 1.2.1, il est facile de voir que

$$(6.2) \quad \mathbf{d}\mathcal{M}^* \gg \beta^{-1/2} (\log n)^{-Q(\beta)} (\log n)^{\beta \log(1-\varepsilon)} (\log_2 n)^{-1/2}.$$

Par ailleurs, si

$$\nabla_\lambda(n, m) := \left| \{(d, t) : d|n, t|m, \mu(dt)^2 = 1, 0 < (\log d)^\lambda \log(d/t) \leq 1\} \right|,$$

alors par le lemme 1.2.9, on a

$$\limsup_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}^* \\ m \leq X}} \nabla_\lambda(n, m) \ll (\log n)^{-Q(\beta)} (\log U)^{-\beta} (\log n)^{-r}$$

où l'on a posé $r = (\lambda + 1 - \log 2 - \varepsilon)\varepsilon - \beta\varepsilon_1 \log 2$.

Il en résulte en particulier

$$(6.3) \quad \limsup_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}^* \\ m \leq X}} \nabla_\lambda(n, m) = o(\underline{d}\mathcal{M}^*).$$

En conséquence, l'inégalité

$$|\{m \leq X : m \in \mathcal{B}'_\lambda(n)\}| \leq |\{m \leq X : m \notin \mathcal{M}^*\}| + |\{m \leq X : m \in \mathcal{M}^* \cap \mathcal{B}'_\lambda(n)\}|$$

entraîne, grâce à (6.1), (6.2) et (6.3)

$$1 - \underline{d}\mathcal{B}'_\lambda(n) \geq (\log n)^{-Q(\beta)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

avec $\beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$

□

Chapitre 2

Evaluation de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$, $\lambda > \lambda^*$

§ 0. Énoncé des résultats.

Considérons pour n entier ≥ 1 et λ réel ≥ 0 , l'ensemble des multiples $\mathcal{B}_\lambda(n)$ de la suite

$$\mathcal{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d|n}]d, d \exp(\log n)^{-\lambda}] \cap \mathbb{N}.$$

Désignons par Q la fonction définie par

$$Q(\alpha) := \alpha \log \alpha - \alpha + 1 \quad (\alpha > 0).$$

Le but de ce chapitre est de montrer le résultat suivant.

Théorème 2. On a

$$d\mathcal{B}_\lambda(n) = (\log n)^{-F(\lambda)+o(1)}$$

où l'on a posé

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \lambda^* = \log 4 - 1, \\ Q(\beta) & \text{si } \lambda^* < \lambda \leq \lambda^{**} = \log 8 - 1 \\ \lambda - \log 2 & \text{si } \lambda^{**} < \lambda. \end{cases} \quad \text{avec } \beta = \frac{1+\lambda}{\log 2} - 1,$$

Remarque. La fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$. □

Commençons par établir les lemmes utiles.

§ 1. Lemmes.

le résultat suivant dû à Shiu [S80] nous sera utile. On considère la classe \mathcal{F} des fonctions multiplicatives vérifiant les deux propriétés suivantes

(\mathcal{F}_1) il existe une constante $A_1 > 0$ telle que pour tout nombre premier p et pour tout entier $\nu > 0$

$$0 \leq f(p^\nu) \leq A_1^\nu.$$

(\mathcal{F}_2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $A_2 = A_2(\varepsilon)$ telle que pour tout entier n positif

$$f(n) \leq A_2 n^\varepsilon.$$

Lemme 2.1.1.

Soient $f \in \mathcal{F}$, $0 < \alpha < 1/2$, $x^\alpha < y \leq x$. Alors, on a uniformément pour y et x ,

$$(1.1) \quad \sum_{x-y < n \leq x} f(n) \ll_{f,\alpha} y(\log x)^{-1} \exp\left(\sum_{p \leq x} f(p)/p\right).$$

Le lemme suivant est une conséquence du lemme 2.1.1.

Lemme 2.1.2. On a uniformément pour $0 < \alpha \leq 1$, $0 < y < z$ et $0 < m \leq z - y$,

$$(1.2) \quad \sum_{y/m < t \leq z/m} \frac{\alpha^{\Omega(t)}}{t} \ll \frac{z-y}{y} \left(\log \frac{y}{z-y}\right)^{1-\alpha} \left(\log \frac{z}{m}\right)^{\alpha-1}.$$

Démonstration. Distinguons deux cas: selon que $y/m > (y/(z-y))^{3/2}$ ou non. Dans le premier cas nous avons $(z-y)/m > (y/m)^{1/3}$ et donc l'inégalité (1.2) résulte du lemme 2.1.1. Dans le second cas, la majoration triviale

$$\begin{aligned} \sum_{y/m < t \leq z/m} 1/t &\ll \log(z/y) + m/y \\ &\ll (z-y)/y \end{aligned}$$

suffit. □

Le lemme 2.1.2 sera appliqué pour démontrer le résultat suivant.

Lemme 2.1.3. Soient $0 < y \leq 1$, $\lambda > 0$. Pour n assez grand, posons $\varepsilon = \varepsilon(n) = \log_3 n / \sqrt{\log_2 n}$, $T(n) = \exp(\log n)^{1-\varepsilon}$ et $\eta = (\log n)^{-\lambda}$. Alors il existe une fonction $X_0(n)$ telle que l'on ait pour $X \geq X_0(n)$

$$(1.3) \quad \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{m \leq X} y^{\Omega(m, 3n)} \sum_{\substack{t, t' | m \\ 0 < t, t' < (1+\eta)d}} 1 \leq X(\log n)^E \quad \text{p.p.}$$

où l'on a posé $E = 4y - 3 - 2\lambda + \log 2 + 3\varepsilon$.

Démonstration. Notons $S = S(X, n)$ la somme ci-dessus. Si t et t' sont comptés dans la somme intérieure de S alors en posant

$$\begin{cases} t_0 & = & (t, t') \\ t & = & st_0 \\ t' & = & s't_0 \end{cases}$$

on a

$$[t, t'] = t_0 ss',$$

$$d/t_0 < s < s' \leq (1 + \eta)d/t_0$$

et

$$t_0 \leq \eta d$$

puisque $t_0 \leq t_0(s' - s) \leq (1 + \eta)d - d = \eta d$.

Donc

$$S \leq \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{t_0 \leq (1+\eta)d} y^{\Omega(t_0)} \sum_{\substack{d/t_0 < s \leq (1+\eta)d/t_0 \\ d/t_0 < s' \leq (1+\eta)d/t_0}} y^{\Omega(s)} y^{\Omega(s')} \sum_{m \leq X/(t_0 ss')} y^{\Omega(m, 3n)}$$

Utilisant les lemmes 1.1.4 et 2.1.2 on peut écrire pour $X_0(n) \geq n^3$

$$\sum_{m \leq X/(t_0 ss')} y^{\Omega(m, 3n)} \ll (X/(t_0 ss'))(\log n)^{y-1},$$

$$\sum_{d/t_0 < s \leq (1+\eta)d/t_0} y^{\Omega(s)}/s \ll \eta(\log(1/\eta))^{1-y}(\log(d/t_0))^{y-1},$$

d'où

$$S \ll X(\log n)^{y-1-2\lambda}(\lambda \log_2 n)^{2-2y} \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{t_0 \leq \eta d} (\log(d/t_0))^{2y-2} t_0^{-1} y^{\Omega(t_0)}.$$

Désignons par S' la dernière somme en t_0 , par intégration par parties nous avons

$$\begin{aligned} S' &\ll (\log(1/\eta))^{2y-2}(\log d)^{y-1} + \int_1^{\eta d} (\log t)^{y-1} t^{-1} (\log(d/t))^{2y-2} dt \\ &\ll (\log(1/\eta))^{2y-2}(\log d)^{y-1} + (\log d)^{2y-2} \int_1^{\sqrt{d}} (\log t)^{y-1} t^{-1} dt \\ &\quad + (\log d)^{y-1} \int_{\sqrt{d}}^{\eta d} (\log(d/t))^{2y-2} t^{-1} dt \\ &\leq (\log d)^{y-1+(2y-1)^+} (\log_2 n)^2 \quad (n \geq n_0(y, \lambda)). \end{aligned}$$

On a donc

$$S \ll_{y,\lambda} X(\log n)^{y-1-2\lambda} (\log_2 n)^{4-2y} \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 (\log d)^{3y-2}$$

La dernière somme en d est majorée par

$$(\log n)^{3y-2+(2-3y)^+\varepsilon} 2^{\omega(n)} \leq (\log n)^{3y-2+\log 2+\varepsilon+(2-3y)^+\varepsilon} \quad \text{p.p.}$$

On obtient ainsi

$$S \ll_{y,\lambda} X(\log_2 n)^{4-2y} (\log n)^{4y-3-2\lambda+\log 2+\varepsilon+(2-3y)^+\varepsilon} \quad \text{p.p.}$$

et donc

$$S \leq X(\log n)^{4y-3-2\lambda+\log 2+3\varepsilon} \quad \text{p.p.} \quad \square$$

Lemme 2.1.4. On a pour $0.33 \leq \alpha < 1$

$$(1.4) \quad \inf_{x \geq 1} \int_0^x t^{-\alpha} \cos t \, dt \geq 9.10^{-3}.$$

Démonstration. Notons pour $0 < \alpha < 1$ et $k \in \mathbb{N}$

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^{-\alpha} \cos t \, dt,$$

$$m_k := \min_{(\pi/2) + 2k\pi \leq x \leq (\pi/2) + (2k+2)\pi} F_\alpha(x).$$

On a

$$m_k = F_\alpha((\pi/2) + (2k + 1)\pi)$$

et on a la relation de récurrence :

$$m_k = m_{k-1} + \int_{(\pi/2) + 2(k-1)\pi + \pi}^{(\pi/2) + 2(k-1)\pi + 3\pi} t^{-\alpha} \cos t \, dt$$

$$= m_{k-1} + \int_{3\pi/2}^{7\pi/2} (t + 2(k-1)\pi)^{-\alpha} \cos t \, dt.$$

Et puisque

$$\int_{(3\pi/2) + \pi}^{(3\pi/2) + 2\pi} (t + 2(k-1)\pi)^{-\alpha} \cos t \, dt = - \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (t + (2k-1)\pi)^{-\alpha} \cos t \, dt,$$

on a donc

$$m_k = m_{k-1} + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \left((t + 2(k-1)\pi)^{-\alpha} - (t + (2k-1)\pi)^{-\alpha} \right) \cos t \, dt,$$

d'où

$$m_k > m_{k-1} \quad (k \leq 1).$$

Comme F_α est croissante sur $[1, \pi/2]$, on peut écrire

$$\inf_{x \geq 1} F_\alpha(x) = \min(F_\alpha(3\pi/2), F_\alpha(1)).$$

En utilisant l'estimation

$$\cos t \geq 1 - t^2/2 + t^4/4! - t^6/6! + t^8/8! - t^{10}/10! \quad (t \geq 0),$$

on peut écrire

$$F_\alpha(3\pi/2) \geq (3\pi/2)^{1-\alpha} h(\alpha) \quad \text{où l'on a posé}$$

$$h(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2(3-\alpha)}(3\pi/2)^2 + \frac{1}{4!(5-\alpha)}(3\pi/2)^4 - \frac{1}{6!(7-\alpha)}(3\pi/2)^6 \\ + \frac{1}{8!(9-\alpha)}(3\pi/2)^8 - \frac{1}{10!(11-\alpha)}(3\pi/2)^{10}.$$

En effectuant une vérification numérique il vient

$$h(0,33) = 0,0097\dots > 0.$$

Le lemme 2.1.4 sera donc prouvé si on montre que h est croissante sur $[0.33, 1[$.

Posons

$$h_1(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2(3-\alpha)}(3\pi/2)^2 \\ h_2(\alpha) := \frac{1}{5-\alpha} - \frac{1}{30(7-\alpha)}(3\pi/2)^2 \\ h_3(\alpha) := \frac{1}{9-\alpha} - \frac{1}{90(11-\alpha)}(3\pi/2)^2$$

de sorte que

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^3 c_i h_i(\alpha) \quad (c_i \geq 0).$$

On vérifie aisément que pour $1/4 \leq \alpha < 1$,

$$h'_i(\alpha) \geq 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Cela montre que h est croissante sur $[1/4, 1[$. □

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme 2.1.4.

Lemme 2.1.5. *Pour $0 < \rho \leq 0.67$ et $u \in \mathbb{R}$ on a,*

$$(1.5) \quad (1 + |u|)^{-\rho} \leq 100 \int_{-1}^1 |t|^{\rho-1} e^{itu} dt.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |t|^{\rho-1} e^{iut} dt &= 2 \int_0^1 t^{\rho-1} \cos(ut) dt \\ &= 2 |u|^{-\rho} \int_0^{|u|} t^{\rho-1} \cos t dt. \end{aligned}$$

Distiguons le cas où $|u| \leq 1$ et $|u| > 1$. Dans le premier cas nous avons

$$\begin{aligned} 2 |u|^{-\rho} \int_0^{|u|} t^{\rho-1} \cos t dt &\geq 2\rho^{-1} \cos 1 \\ &\geq 1 \\ &\geq (1 + |u|)^{-\rho}. \end{aligned}$$

Dans le second cas, on a d'après le lemme 2.1.4.

$$2 |u|^{-\rho} \int_0^{|u|} t^{\rho-1} \cos t dt \geq 10^{-2} |u|^{-\rho} \geq 10^{-2} (1 + |u|)^{-\rho}. \quad \square$$

Nous avons besoin du lemme 2.1.5 pour établir le résultat suivant.

Lemme 2.1.6. *Soient $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $0 < \rho \leq 0.67$, $\rho/\log 2 < \alpha < 1$, $\delta > 1$ et $\log(1/\varepsilon) < k \leq \log_2 x$. On a*

$$(1.6) \quad \sum_{d, d' | n_k} (1 + |\log(d'/d)|)^{-\rho} \leq \rho^{-1} \varepsilon^{-1} e^{(\delta \log 4 - \rho)k}$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf

$$\ll x \left(Q(\alpha)^{-1} \varepsilon^{Q(\alpha)} + e^{-Q(\delta)k} + (\alpha \log 2 - \rho)^{-1} \varepsilon^{\alpha \log 2 - \rho} \right).$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1.5 on a

$$\begin{aligned} \sum_{d, d' | n_k} (1 + |\log \frac{d'}{d}|)^{-\rho} &\leq 100 \int_{-1}^{+1} \sum_{d, d' | n_k} e^{i\theta \log(d'/d)} \frac{d\theta}{|\theta|^{1-\rho}} \\ &\leq 100 \int_{-1}^1 |\tau^*(n_k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{|\theta|^{1-\rho}} \\ &\leq 200 \int_0^1 |\tau^*(n_k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{\theta^{1-\rho}} \end{aligned}$$

où $\tau^*(n_k, \theta) = \sum_{d | n_k} \mu(d)^2 d^{i\theta}$.

D'une part, l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_0^{1/(ee^k)} |\tau^*(n_k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{\theta^{1-\rho}} &\leq \tau(n_k)^2 \int_0^{1/(ee^k)} \frac{d\theta}{\theta^{1-\rho}} \\ &= 4^{\omega(n_k)} \rho^{-1} \varepsilon^{-\rho} e^{-k\rho} \end{aligned}$$

entraîne en utilisant le lemme 1.2.1

$$\int_0^{1/(ee^k)} |\tau^*(n_k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{\theta^{1-\rho}} \leq \rho^{-1} e^{(\delta \log 4 - \rho)k} \varepsilon^{-\rho}$$

pour tous les entiers n moindres que x sauf

$$\ll x e^{-Q(\delta)k}.$$

D'autre part, par définition de $\mathcal{R}(m, \theta)$ – cf. Lemme 1.3.1 – on peut écrire

$$\int_{1/(ee^k)}^1 |\tau^*(n_k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{\theta^{1-\rho}} = 4^{\omega(n_k)} \int_{1/(ee^k)}^1 \frac{\mathcal{R}(n_k, \theta)}{2^{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}} \frac{d\theta}{\theta^{1-\rho}}.$$

Répartissons alors les entiers $n \leq x$ pour lesquels cette quantité excède $4^{\delta k} e^{-\rho k}$ en trois classes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ définies par les conditions

$$(\mathcal{C}_1) \quad \omega(n_k) > \delta k$$

$$(\mathcal{C}_2) \quad \min_{1/(ee^k) < \theta \leq 1} \frac{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}{\log(\theta e^k)} < \alpha$$

$$(\mathcal{C}_3) \quad \omega(n_k) \leq \delta k \text{ et } \min_{1/(ee^k) < \theta \leq 1} \frac{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)}{\log(\theta e^k)} \geq \alpha.$$

D'après les lemmes 1.2.1 et 1.2.2 , on a

$$|\mathcal{C}_1| \ll x e^{-Q(\delta)k}$$

et

$$|\mathcal{C}_2| \ll x Q(\alpha)^{-1} \varepsilon^{Q(\alpha)}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_3| &\leq 4^{-\delta k} e^{\rho k} \sum_{n \leq x} 4^{\omega(n_k)} \int_{1/(\varepsilon e^k)}^1 \frac{\mathcal{R}(n_k, \theta)}{2^{\omega(n_k) - \omega_\theta(n_k)} \theta^{1-\rho}} d\theta \\ &\leq e^{\rho k} \sum_{n \leq x} \int_{1/(\varepsilon e^k)}^1 \frac{\mathcal{R}(n_k, \theta)}{(\theta e^k)^{\alpha \log 2} \theta^{1-\rho}} d\theta. \end{aligned}$$

Par le lemme 1.3.1, on a donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_3| &\ll 2^{-\alpha k} e^{\rho k} x \int_{1/(\varepsilon e^k)}^1 \theta^{\rho-1-\alpha \log 2} d\theta \\ &\ll x (\alpha \log 2 - \rho)^{-1} \varepsilon^{\alpha \log 2 - \rho}. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du lemme 2.1.6. □

Le lemme suivant nous sera utile

Lemme 2.1.7 (voir [T90], Théorème II. 6.4). *Soit $A > 0$. Il existe des constantes positives $c_1 = c_1(A)$ et $c_2 = c_2(A)$ telles que l'on ait uniformément pour $x \geq 3$, $1 \leq k \leq A \log_2 x$,*

$$(1.7) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} 1 = \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ \lambda\left(\frac{k-1}{\log_2 x}\right) + O\left(\frac{k}{(\log_2 x)^2}\right) \right\}$$

$$\text{avec } \lambda(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z.$$

Le lemme suivant est un résultat classique du crible.

Lemme 2.1.8 (voir [T90] p. 396). *On a pour $x \geq y \geq 2$,*

$$(1.8) \quad \Psi(x, y) \ll x \exp\left(-\frac{\log x}{2 \log y}\right).$$

Le résultat suivant fournit une condition suffisante sur λ pour que les intervalles $]d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d]$, $(d|n)$, soient deux à deux disjoints.

Lemme 2.1.9(voir Theorem 54 de [HT88]). *Posant*

$$E(n) := \min \{ \log(d'/d) : d, d'|n, d < d' \},$$

on a

$$(1.9) \quad E(n) = (\log n)^{1-\log 3} \exp \{ O(\sqrt{\log_2 n \cdot \log_3 n}) \} \quad \text{p.p.}$$

Nous regroupons dans le paragraphe suivant les notations et les conventions que nous allons introduire dans la démonstration du théorème 2.

§ 2. Notations et conventions.

Posons

$$\beta = \beta_\lambda := \begin{cases} \frac{1+\lambda}{\log 2} - 1 & \text{si } \log 4 - 1 < \lambda \leq \log 8 - 1 \\ 2 & \text{si } \lambda > \log 8 - 1, \\ Q(\beta) & \text{si } \log 4 - 1 < \lambda \leq \log 8 - 1 \\ \lambda - \log 2 & \text{si } \lambda > \log 8 - 1, \end{cases}$$

$$K = K(n, \beta) := \left[\frac{\beta}{2} \log_2 n \right],$$

$$S = S(X; n, \beta) := \{ m \leq X : \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n \},$$

$$\varepsilon = \varepsilon(n) := \frac{\log_3 n}{\sqrt{\log_2 n}},$$

$$T = T(n) := \exp \{ (\log n)^{1-\varepsilon(n)} \},$$

$$\eta := (\log n)^{-\lambda},$$

$$\mathcal{D}_n^* := \bigcup_{\substack{d|n, \mu(d)^2=1 \\ P^+(d) > T(n)}}]d, (1 + \eta)d]$$

$$\mathcal{D}_n := \bigcup_{d|n}]d, (1 + \eta)d]$$

$$\tau(m, \mathcal{A}) := \sum_{t|m, t \in \mathcal{A}} 1, \quad (\mathcal{A} \subset \mathbb{N}),$$

$$B(X; n, \lambda) := |\{ m \leq X : \tau(m, \mathcal{D}) > 0 \}|.$$

§ 3. La minoration de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$.

Soient $n \geq 1$, $X \geq X_0(n)$ choisi comme dans l'énoncé du lemme 2.1.3, $0 < y_0, y_1 \leq 1$.

Considérons parmi les entiers m comptés dans \mathcal{S} , ceux qui s'écrivent sous la forme

$$m = ab$$

avec

$$a \in \mathcal{D}_n^*, \omega(a) \leq K(n, \beta), \omega(b, 3n) \leq K(n, \beta) \text{ et } b \leq X/a.$$

On a

$$\sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*) \geq \sum_{\substack{a \in \mathcal{D}_n^* \\ \omega(a) \leq K}} \sum_{\substack{b \leq X/a \\ \omega(b, 3n) \leq K}} 1.$$

Faisant appel aux lemmes 1.1.7 et 1.2.6, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{b \leq X/a \\ \omega(b, 3n) \leq K}} 1 &\geq \sum_{\substack{b_1 \\ P^+(b_1) \leq 3n \\ \omega(b_1) = K}} \mu(b_1)^2 \sum_{\substack{b_2 \leq X/(ab_1) \\ P^-(b_2) > 3n}} 1 \\ &\gg X/(a \log n) \sum_{\substack{b_1 \\ P^+(b_1) \leq 3n \\ \omega(b_1) = K}} \mu(b_1)^2 / b_1 \\ &\gg X/(a \log n) (1/K!) (\log_2 n + O(1))^K. \end{aligned}$$

La formule de Stirling entraîne alors

$$\sum_{\substack{b \leq X/a \\ \omega(b, 3n) \leq K}} 1 \geq (X/a) (\log n)^{-Q(\beta/2) + o(1)}.$$

Il en découle

$$\sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*) \geq X (\log n)^{-Q(\beta/2) + o(1)} \sum_{\substack{a \in \mathcal{D}_n^* \\ \omega(a) \leq K}} 1/a.$$

Puisque $\lambda > \log 3 - 1$, le lemme 2.1.9 montre que si n est dans une suite convenable de densité 1 alors les intervalles $]d, (1 + \eta)d]$, $(d|n)$, sont deux à deux disjoints. Par conséquent

$$\sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}^*) \geq X(\log n)^{-Q(\beta/2)+o(1)} \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{d < a \leq (1+\eta)d \\ \omega(a) \leq K}} 1/a.$$

Appliquant le lemme 2.1.7 on a pour chaque d tel que $d > T(n)$

$$\sum_{\substack{d < a \leq (1+\eta)d \\ \omega(a) = K}} 1/a \gg \frac{\eta}{\log d} \frac{(\log_2 d)^{K-1}}{(K-1)!}.$$

Il suit

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}^*) &\geq X(\log n)^{-Q(\beta/2)-\lambda+o(1)} \frac{1}{(K-1)!} \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \frac{(\log_2 d)^{K-1}}{\log d} \mu(d)^2 \\ &\geq X(\log n)^{-Q(\beta/2)-\lambda+o(1)} ((1-\varepsilon) \log_2 n)^{K-1} (1/(K-1)!) \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1.8, on a $P^+(n) > T(n)$ p.p.

Cela implique que la somme en d est supérieure ou égale à $\frac{1}{2} 2^{\omega(n)} > (\log n)^{(1-\varepsilon) \log 2}$ p.p., où cette dernière inégalité provient du lemme 1.2.1. Par ailleurs, la formule de Stirling montre que

$$\frac{(1-\varepsilon)^{K-1} (\log_2 n)^{K-1}}{(K-1)!} \geq e^{-2\varepsilon K} (\log n)^{1-Q(\beta/2)} \quad \text{p.p.}$$

Il vient donc

$$\sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}^*) \geq X(\log n)^{-(2Q(\beta/2)+\lambda-\log 2)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Pour $\lambda > \log 4 - 1$ on a

$$2Q(\beta/2) + \lambda - \log 2 = F(\lambda),$$

d'où

$$(3.1) \quad \inf_{X \geq X_0(n)} (1/X) \sum_{m \in \mathcal{S}(X; n; \beta)} \tau(m, \mathcal{D}_n^*) \geq (\log n)^{-F(\lambda) + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs, pour minorer $d\mathcal{B}_\lambda(n)$ on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(3.2) \quad d\mathcal{B}_\lambda(n) \geq \liminf_{X \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*) \right\}^2 / \left\{ X \sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*)^2 \right\}.$$

On est donc conduit à majorer $\sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*)^2$. On a

$$(3.3) \quad \sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*)^2 \leq 2 \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{d'|n, d' \geq d \\ P^+(d') > T(n)}} \mu(d')^2 \sum_{m \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{t, t' | m \\ d < t \leq (1+\eta)d \\ d' < t' \leq (1+\eta)d'}} 1.$$

Si t et t' sont comptés dans cette dernière somme intérieure, alors en posant

$$\begin{cases} r &= (t, t') \\ s &= t/r \\ s' &= t'/r \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} [t, t'] &= r s s', \\ d/r < s &\leq (1 + \eta)d/r, \\ d'/r < s &\leq (1 + \eta)d'/r, \\ r &\leq 1 + \eta d \quad \text{si } s \neq 1. \end{aligned}$$

Nous allons en fait décomposer la somme en question selon les cas

$$s = s' = 1, s = 1 \text{ et } s' > 1, s > 1 \text{ et } s' > 1$$

en remarquant que le cas $s > 1$ et $s' = 1$ est impossible. Montrons alors

$$\begin{aligned} S_0(X; n, d) &:= \sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} \left(\sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta)d}} 1 \right)^2, \\ S_1(X; n, d, d') &:= (\log n)^{-\beta \log y_1} \sum_{d < r \leq (1+\eta)d} y_1^{\Omega(r)} \sum_{d'/r < s' \leq (1+\eta)d'/r} y_1^{\Omega(s')} \\ &\quad \sum_{m \leq X/(rs')} y_1^{\Omega(m, 3n)}, \end{aligned}$$

$$S_2(X; n, d, d') := (\log n)^{-\beta \log y_2} \sum_{r \leq (1+\eta)d/2} y_2^{\Omega(r)} \sum_{d/r < s \leq (1+\eta)d/r} y_2^{\Omega(s)} \sum_{d'/r < s' \leq (1+\eta)d'/r} y_2^{\Omega(s')} \sum_{m \leq X/(rss')} y_2^{\Omega(m, 3n)}.$$

On a

$$(3.4) \quad \sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}^*)^2 \leq \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 S_0(X; n, d) \\ + 2 \sum_{\substack{d|n, d'|n \\ P^+(d) > T(n), P^+(d') > T(n) \\ d' > d}} \mu(d)^2 \mu(d')^2 \{S_1(X; n, d, d') + S_2(X; n, d, d')\}.$$

D'après les lemmes 1.1.4 et 2.1.2 on a

$$S_2(X; n, d, d') \ll X (\log n)^{y_2-1-\beta \log y_2} \sum_{r \leq (1+\eta)d/2} y_2^{\Omega(r)} / r \\ \sum_{d/r < r < s \leq (1+\eta)d/r} y_2^{\Omega(s)} / s \sum_{d'/r < s' \leq (1+\eta)d'/r} \frac{y_2^{\Omega(s')}}{s'} \\ \ll X (\log n)^{y_2-1-\beta \log y_2-2\lambda} \left(\log \frac{1}{\eta}\right)^{2-2y_2} \\ \sum_{r \leq d} (\log(2d/r))^{y_2-1} (\log(2d'/r))^{y_2-1} y_2^{\Omega(r)} / r.$$

Par sommation d'Abel, la dernière somme en r est

$$\ll \int_1^d (\log(2d/r))^{y_2-1} (\log(2d'/r))^{y_2-1} (\log r)^{y_2-1} \frac{dr}{r}.$$

Décomposons la dernière intégrale en $I_1 + I_2$ ayant respectivement $[1, \sqrt{d}]$ et $[\sqrt{d}, d]$ pour domaines d'intégration. On a

$$I_1 \ll (\log d)^{2y_2-1} (\log d')^{y_2-1}.$$

Par ailleurs, si $d' > d^2$ alors $I_2 \ll (\log d')^{y_2-1} (\log d)^{2y_2-1}$. Dans le cas $d < d' \leq d^2$ on a

$$\begin{aligned} I_2 &\ll (\log d)^{y_2-1} \int_1^d (\log(2z))^{y_2-1} (\log(2zd'/d))^{y_2-1} \frac{dz}{z} \\ &\ll (\log d)^{y_2-1} \left\{ (\log(2d'/d))^{2y_2-1} + \int_{d'/d}^d (\log(2z))^{2y_2-2} dz \right\}. \end{aligned}$$

Donc, si $d < d' \leq d^2$ et si $y_2 \leq 1/2$ alors

$$I_2 \ll (\log d)^{y_2-1} (\log(2d'/d))^{2y_2-1} \log_2 n.$$

Or, cette majoration est $\gg (\log d)^{2y_2-1} (\log d)^{y_2-1} \log_2 n$ lorsque $d' > d^2$. Par conséquent, on a dans tous les cas

$$\sum_{r \leq d} (\log(2d/r))^{y_2-1} (\log(2d'/r))^{y_2-1} \frac{\Omega(r)}{y_2} / r \ll (\log d)^{y_2-1} (\log(2d'/d))^{2y_2-1} \log_2 n.$$

D'où

$$S_2(X; n, d, d') \ll X (\log n)^{\alpha_2} (\log_2 n)^3 (\log d)^{y_2-1} (\log(2d'/d))^{2y_2-1}$$

avec $\alpha_2 = y_2 - 1 - \beta \log y_2 - 2\lambda$

et puisque $\log d \geq \log P^+(d) \geq \log T(n) = (\log n)^{1-\varepsilon}$,

$$S_2(X; n, d, d') \ll X (\log n)^{\gamma_2 + o(1)} (\log(d'/d))^{2y_2-1}$$

avec $\gamma_2 = 2y_2 - 2 - \beta \log y_2 - 2\lambda$.

Par le lemme 2.1.6, si $1 - 2y_2 \leq 0,67$, soit $y_2 \geq 0,165$, on en déduit

$$\sum_{\substack{d, d' | n \\ P^+(d), P^+(d') > T(n)}} \mu(dd')^2 S_2(X; n, d, d') \ll X (\log n)^{A+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \gamma_2 + \log 4 + 2y_2 - 1 \\ &= 4y_2 - 3 - \beta \log y_2 - 2\lambda + \log 4. \end{aligned}$$

On choisit $y_2 = \beta/4 \geq 1/4$, de sorte que la condition $y_2 \geq 0,165$ est bien réalisée. On a alors pour $\log 4 - 1 \leq \lambda \leq \log 8 - 1$

$$\begin{aligned} A &= \beta - 3 - \beta \log \beta + \beta \log 4 - 2(-1 + (\beta + 1) \log 2) + \log 4 \\ &= -Q(\beta) \end{aligned}$$

et pour $\lambda > \log 8 - 1$,

$$\begin{aligned} A &= 2 - 3 - 2 \log(1/2) - 2\lambda + \log 4 \\ &= -2(\lambda - \log 2) + \log 4 - 1 < -(\lambda - \log 2). \end{aligned}$$

On a donc dans tous les cas

$$(3.5) \quad \sum_{\substack{d, d' | n \\ P^+(d), P^+(d') > T(n)}} \mu(dd')^2 S_2(X; n, d, d') \ll X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Nous sommes maintenant en mesure de majorer

$$\sum_{\substack{d, d' | n \\ P^+(d), P^+(d') > T(n) \\ d' > d}} \mu(d)^2 \mu(d')^2 S_1(X; n, d, d').$$

Pour cela, en faisant appel aux lemmes 1.1.4 et 2.1.2 du présent chapitre on a pour $d' > d$

$$\begin{aligned} S_1(X; n, d, d') &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta \log y_1} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_1^{\Omega(t)} / t \\ &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta \log y_1-\lambda} (\log(1/\eta))^{1-y_1} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_1^{\Omega(t)} / t \\ &\quad \sum_{d'/t < s' \leq (1+\eta)d'/t} y_1^{\Omega(s')} / s' \\ &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta \log y_1-\lambda} (\lambda \log_2 n)^{1-y_1} (\log(d'/d))^{y_1-1} \\ &\quad \times \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} \frac{y_1^{\Omega(t)}}{t} \\ (3.6) \quad &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta \log y_1-2\lambda} (\log_2 n)^{2-2y_2} (\log(d'/d))^{y_1-1} (\log d)^{y_1-1}. \end{aligned}$$

Posant

$$\alpha_1 := 2y_1 - 2 - \beta \log y_1 - 2\lambda$$

il suit

$$\sum_{\substack{d, d' | n \\ d' > 3d \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \mu(d')^2 S_1(X; n, d, d') \leq X(\log n)^{\alpha_1 + \varepsilon} \\ \times \sum_{\substack{d, d' | n \\ d' \neq d}} (1 + |\log(d'/d)|)^{y_1 - 1} \mu(d)^2 \mu(d')^2.$$

Suivant la même méthode donnant (3.5) on obtient

$$\sum_{\substack{d, d' | n \\ d' > 3d \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \mu(d')^2 S_1(X; n, dd') \leq X(\log n)^{-F(\lambda) + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs, dans le cas $d < d' \leq 3d$ l'inégalité (3.4) implique

$$S_1(X; n, d, d') \ll X(\log n)^{y_1 - 1 - \beta \log y_1} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_1^{\Omega(t)} / t$$

Par le lemme 2.1.2 on a donc

$$S_1(X; n, d, d') \ll X(\log n)^{2y_1 - 2 - \beta \log y_1 - \lambda}.$$

Il en découle

$$\sum_{\substack{d, d' | n \\ d < d' \leq 3d \\ P^+(d) > T(n)}} S_1(X; n, d, d') \ll X(\log n)^{2y_1 - 2 - \beta \log y_1 - \lambda} 2^{\omega(n)} \\ (3.7) \quad \ll X(\log n)^{-\gamma_1 + \varepsilon} \quad \text{p.p.}$$

où l'on a posé

$$\gamma_1 = -2y_1 + 2 + \beta \log y_1 + \lambda - \log 2.$$

Le choix $y_1 = \beta/2$ implique $\gamma_1 = F(\lambda)$.

Enfin, il reste à majorer $\sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu^2(d) S_0(X; n, d)$. On a

$$(3.8) \quad S_0(X; n, d) = \sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} \sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta)d}} 1 \\ + 2 \sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} \sum_{\substack{t, t'|m \\ d < t < t' \leq (1+\eta)d}} 1.$$

D'une part, on a pour $0 < y_0 \leq 1/2$

$$\sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} \sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta)d}} 1 \leq (\log n)^{-\beta \log y_0} \sum_{m \leq X} y_0^{\Omega(m, 3n)} \sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta)d}} 1$$

La dernière somme en m est majorée par

$$\sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_0^{\Omega(t)} \sum_{m \leq X/t} y_0^{\Omega(m, 3n)} \ll X (\log n)^{y_0 - 1} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_0^{\Omega(t)} / t \\ \ll X (\log n)^{y_0 - 1 - \lambda} (\log d)^{y_0 - 1}$$

en utilisant le lemme 1.2.

Or,

$$\sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} (\log d)^{y_0 - 1} \mu(d)^2 \leq (\log n)^{(y_0 - 1)(1 - \varepsilon)} 2^{\omega(n)} \\ \leq (\log n)^{y_0 - 1 + \log 2 + 2\varepsilon} \quad \text{p.p.}$$

Ainsi, le choix $y_0 = \beta/2 \leq 1$ implique

$$(3.9) \quad \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} \sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta)d}} 1 \leq X (\log n)^{-F(\lambda) + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs, en majorant la fonction indicatrice de $\Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n$ par $y^{\Omega(m, 3n) - \beta \log_2 n}$, $0 < y \leq 1$, on a d'après le lemme 2.1.3.

$$(3.10) \quad \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} \sum_{\substack{t, t'|m \\ d < t < t' \leq (1+\eta)d}} 1 \leq X (\log n)^{-H_\lambda + 3\varepsilon} \quad \text{p.p.}$$

où l'on a posé

$$H_\lambda = -4y + 3 + 2\lambda - \log 2 + \beta \log y.$$

Le choix $y = \beta/4$ implique

$$H_\lambda = \begin{cases} Q(\beta) + \log 2 & \text{si } \log 4 - 1 < \lambda < \log 8 - 1 \\ 2\lambda + 1 - \log 8 & \text{si } \lambda \geq \log 8 - 1. \end{cases}$$

Et puisque $H_\lambda \geq F(\lambda)$ on a alors en vertu de (3.8), (3.9) et (3.10)

$$(3.11) \quad \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > T(n)}} \mu(d)^2 S_0(X; n, d) \leq X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

En conséquence, il découle de (3.3), (3.4), (3.5), (3.7) et (3.11)

$$\sum_{m \in \mathcal{S}} \tau(m, \mathcal{D}_n^*)^2 \leq X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Ainsi, par (3.1), (3.2) et (3.11) on obtient pour $\lambda > \log 4 - 1$

$$d\mathcal{B}_\lambda(n) \geq (\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.} \quad \square$$

§ 4. La majoration de $d\mathcal{B}_\lambda(n)$.

Notre point de départ est la majoration

$$\begin{aligned} B(X; n, \lambda) &:= |\{m \leq X : \tau(m, \mathcal{D}_n) > 0\}| \\ &\leq \sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) > \beta \log_2 n}} 1 + \sum_{m \leq X} y^{\Omega(m, 3n) - \beta \log_2 n} \tau(m, \mathcal{D}_n) \end{aligned}$$

où $X \geq X_0(n)$, $0 < y \leq 1$ et $\lambda \geq \log 4 - 1$. D'une part, d'après le lemme 1.2.1 on a

$$\sum_{\substack{m \leq X \\ \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n}} 1 \ll X(\log n)^{-Q(\beta)};$$

d'autre part, en faisant appel aux lemmes 1.1.4 et 2.1.2 on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \leq X} y^{\Omega(m, 3n) - \beta \log_2 n} \tau(m, \mathcal{D}) &\leq (\log n)^{-\beta \log y} \sum_{d|n} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y^{\Omega(t)} \\
 &\ll X (\log n)^{-\beta \log y + y - 1} \sum_{d|n} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y^{\Omega(t)} / t \\
 &\ll X (\log n)^{-\beta \log y + y - 1 - \lambda} \left(\log \frac{1}{\eta} \right)^{1-y} \\
 &\quad \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} (\log d)^{y-1}.
 \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 1. 2.1 on a

$$\sum_{\substack{d|n, d \neq 1 \\ P^+(d) < \log n}} (\log d)^{y-1} \leq 2^{\Omega(n, \log n)} \leq \log_2 n \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > \log n}} (\log d)^{y-1} &\ll \sum_{\log_3 n < k \leq \log_2 n} e^{(y-1)k} \sum_{\substack{d|n \\ k-1 < \log_2 P^+(n) \leq k}} 1 \\
 &\ll \sum_{\log_3 n < k \leq \log_2 n} e^{(y-1)k} 2^{\Omega(n, \exp e^k)}.
 \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité suivante donnée par le lemme 1.1.2

$$\max_{\log_3 n < k \leq \log_2 n} \frac{\Omega(n, \exp e^k)}{k} \leq 1 + \frac{1}{\log_4 n} \quad \text{p.p.}$$

nous obtenons pour $1 - \log 2 < y \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d) > \log n}} (\log d)^{y-1} &\ll \sum_{k \leq \log_2 n} \exp \{ (y-1 + \log 2 + (\log_4 n)^{-1}) k \} \quad \text{p.p.} \\
 &\ll (\log n)^{y-1 + \log 2 + o(1)} \quad \text{p.p.}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$B(X; n, \lambda) \ll X (\log n)^{-Q(\beta)} + X (\log n)^{2y-2 + \log 2 - \beta \log y - \lambda + o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Dans le cas

$$\log 4 - 1 \leq \lambda \leq 3 \log 2 - 1$$

nous obtenons donc en choisissant $y = B/2 \geq \log 2 > 1 - \log 2$

$$B(X; n, \lambda) \leq X(\log n)^{-Q(\beta)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs, si $\lambda > 3 \log 2 - 1$ on a

$$\begin{aligned} B(X; n, \lambda) &\leq X \sum_{d|n} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} 1/t \\ &\ll X(\log n)^{-\lambda} 2^{\Omega(n)} \\ &\leq X(\log n)^{\log 2 - \lambda + o(1)} \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

En conséquence, on a pour $\lambda > \log 4 - 1$

$$B(X; n, \lambda) \leq X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.} \quad (X \geq X_0(n)). \quad \square$$

Chapitre 3

Estimation de la taille de l'ensemble exceptionnel

§ 0. Enoncé des résultats.

Désignons toujours par $\mathcal{B}_\lambda(n)$ l'ensemble des multiples de la suite

$$\mathcal{D}_\lambda(n) = \bigcup_{d|n}]d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d] \cap \mathbf{N}$$

et par Q la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par

$$Q(\alpha) = \alpha \log \alpha - \alpha + 1.$$

Notre but ici est de montrer le résultat suivant.

Théorème 3. Soient $0 \leq \lambda < \lambda^* = \log 4 - 1$, $0 < \varepsilon_0 < 1/2$ et $x \geq x_0(\lambda, \varepsilon_0)$.

Posant

$$N(x; \lambda, \varepsilon_0) := |\{n \leq x : d\mathcal{B}_\lambda(n) < 1 - \varepsilon_0\}|,$$

on a

$$x(\log x)^{-Q(\beta)+o(1)} \leq N(x; \lambda, \varepsilon_0) \leq x e^{-c_\lambda \sqrt{\log_2 x}}$$

avec $\beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$, c_λ une constante positive dépendant de λ .

Nous commençons par établir les lemmes utiles.

§1. Lemmes.

Soit ε_1 une fonction positive telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\varepsilon_1(x)} = +\infty.$$

Posons

$$U = U(x) := \exp(\log x)^{\varepsilon_1(x)},$$

$$\mathcal{N}_1(x; \alpha, U) := \{n \leq x : \mu(n)^2 = 1, \omega(n) \leq \alpha \log_2 x, P^-(n) > U\}$$

$$N_1(x; \alpha, U) := |\mathcal{N}_1(x; \alpha, U)|.$$

Posons

$$\begin{aligned} U &= U(x) := \exp(\log x)^{\varepsilon_1(x)}, \\ \mathcal{N}_1(x; \alpha, U) &:= \{n \leq x : \mu(n)^2 = 1, \omega(n) \leq \alpha \log_2 x, P^-(n) > U\} \\ N_1(x; \alpha, U) &:= |\mathcal{N}_1(x; \alpha, U)|. \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1. *Pour $\alpha \in]0, 1[$ et $x \geq x_0(\alpha)$, on a*

$$(1.1) \quad N_1(x; \alpha, U) \geq 2x(\log x)^{-Q(\alpha)}(\log U)^{-\alpha - \alpha\varepsilon_1(x)}(\log_2 x)^{Q(\alpha) - 3/2}.$$

Démonstration. Posons

$$W := x^{1/\log_2 x}, K(x) := [\alpha \log_2 W].$$

On remarque que parmi les entiers n comptés dans $N_1(x; \alpha, U)$ figurent tous les entiers n' qui peuvent s'écrire sous la forme $n' = ap$ avec les conditions

- (i) $ap \leq x$
- (ii) $\omega(a) = K, \mu(a)^2 = 1$
- (iii) $U < P^-(a) \leq P^+(a) \leq W$
- (iv) $p \geq W$.

On voit que les relations (ii) et (iii) impliquent en particulier pour $x \geq x_0(\alpha)$

$$x/a \geq x W^{-\omega(a)} \geq x^{1-\alpha} \geq W^2,$$

de sorte que la longueur de l'intervalle $]W, x/a]$ est suffisamment grande pour pouvoir estimer le nombre des nombres premiers p y appartenant. On a donc

$$N_1(x; \alpha, U) \geq \sum_{\substack{a \\ \omega(a) = K(x) \\ q|a \implies U < q \leq W}} \mu(a)^2 \sum_{W < p \leq x/a} 1.$$

Les estimations de Tchébychev montrent alors que pour $x \geq x_0(\alpha)$

$$\sum_{W < p \leq x/a} 1 \gg \frac{x}{a \log(x/a)} \gg \frac{x}{a \log x}.$$

D'où

$$N_1(x; \alpha, U) \gg \frac{x}{\log x} \sum_a \frac{\mu(a)^2}{a}.$$

Appliquant le lemme 1.2.6 on a

$$\sum_a \frac{\mu(a)^2}{a} \geq (1 - c(K)) \frac{1}{K!} \left\{ \sum_{U < p \leq W} 1/p \right\}^K$$

avec

$$c(K) = \frac{K(K-1)}{2} \left(\sum_{U < p \leq W} 1/p^2 \right) \left(\sum_{U < p \leq W} 1/p \right)^{-2}.$$

L'hypothèse $\log_2 U / \log_2 x = o(1)$ implique $c(K) \ll 1/U$. Il découle donc de la formule de Mertens

$$\sum_a \frac{\mu(a)^2}{a} \geq \frac{1}{2 \cdot K!} \left(\log \left(\frac{\log W}{\log U} \right) + O\left(\frac{1}{\log U} \right) \right)^K.$$

Il suit

$$N_1(x; \alpha, U) \gg \frac{x}{\log x} \frac{1}{K!} \left(\log \left(\frac{\log W}{\log U} \right) + O\left(\frac{1}{\log U} \right) \right)^K.$$

D'une part, la formule de Stirling montre en particulier, pour $x \geq x_0(\alpha)$

$$K! \leq 10 [\alpha \log_2 W]^{[\alpha \log_2 W] + \frac{1}{2}} e^{-\alpha \log_2 W}$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left(\log \left(\frac{\log W}{\log U} \right) + O\left(\frac{1}{\log U} \right) \right)^K &\geq (\log_2 W)^{[\alpha \log_2 W]} \exp \left\{ -[\alpha \log_2 W] \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\log_2 U}{\log_2 W} + \frac{2}{3} \left(\frac{\log_2 U}{\log_2 W} \right)^2 \right) \right\} \\ &\geq (\log_2 W)^{[\alpha \log_2 W]} (\log U)^{-\alpha - \frac{3}{4} \alpha \varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$N_1(x; \alpha, U) \gg \frac{x}{\log x} \alpha^{-[\alpha \log_2 W] - 1/2} (\log W)^\alpha (\log_2 W)^{-1/2} (\log U)^{-\alpha - \frac{3}{4} \alpha \varepsilon_1}.$$

Cela achève la démonstration du lemme. \square

Lemme 3.1.2. Soient $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < \alpha \leq 1$. Pour x et U assez grands, on a

$$(1.2) \quad \max_{U < t \leq x} \frac{\omega(n, t)}{\log_2 t} \leq (1 + \varepsilon) \alpha$$

pour tous les entiers n de $\mathcal{N}_1(x; \alpha, U)$ sauf au plus

$$\ll \alpha^{-1} \varepsilon^{-2} x (\log x)^{-Q(\alpha)} (\log U)^{-\alpha(1+\varepsilon) - \alpha Q(1+\varepsilon)}.$$

Démonstration. Posant

$$\begin{aligned}\delta &:= (1 + \varepsilon)\alpha \\ k_0 &:= \lceil \log_2 U \rceil, \\ K &:= \lceil \log_2 x \rceil + 1, \\ t_k &:= \exp e^k, \quad (k_0 < k \leq K), \\ N_1^* &:= \sum_{n \in \mathcal{N}_1(x, \alpha, U)} \left\{ 1 : \max_{k_0 < k \leq K} \frac{\omega(n, t_k)}{k-1} > \delta \right\},\end{aligned}$$

on a pour tout $(y, z) \in]0, 1] \times]1, 3/2]$

$$\begin{aligned}N_1^* &\leq \sum_{k_0 < k \leq K} z^{-\delta(k-1)} \sum_{n \in \mathcal{N}_1(x, \alpha, U)} z^{\omega(n, t_k)} \\ &\leq (\log x)^{-\alpha \log y} \sum_{k_0 < k \leq K} z^{-\delta(k-1)} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > U}} z^{\omega(n, t_k)} y^{\omega(n)}.\end{aligned}$$

Le lemme 1.1.4 permet de majorer la somme intérieure, il suit

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > U}} z^{\omega(n, t_k)} y^{\omega(n)} \ll \frac{x}{\log U} \left(\frac{\log t_k}{\log U} \right)^{yz-1} \left(\frac{\log x}{\log t_k} \right)^{y-1},$$

et donc

$$N_1^* \ll x (\log U)^{-yz} (\log x)^{-\alpha \log y + y - 1} \sum_{k_0 < k \leq K} e^{-kL(\delta, y, z)}$$

où l'on a posé

$$L(\delta, y, z) := -yz + y + \delta \log z.$$

Pour le choix $y = \alpha$, $z = \delta/\alpha = 1 + \varepsilon$, on a

$$L = \alpha Q(1 + \varepsilon) > 0$$

et, puisque $\alpha Q(1 + \varepsilon) \asymp \alpha \varepsilon^2$, on obtient

$$N_1^* \ll \alpha^{-1} \varepsilon^{-2} x (\log x)^{-Q(\alpha)} (\log U)^{-\alpha(1+\varepsilon) - \alpha Q(1+\varepsilon)}.$$

De plus, étant donné $U < t \leq x$ alors il existe un entier $k, k_0 < k \leq K$, tel que $t_k < t \leq t_{k+1}$; donc $\omega(n, t) \leq \omega(n, t_{k+1})$ et $k < \log_2 t$. Si n n'est pas compté dans N_1^* il découle

$$\omega(n, t) \leq \delta k < \delta \log_2 t. \quad \square$$

Soit $\mathcal{N}_2(x; \alpha, U)$ la suite des entiers n n'excédant pas x et satisfaisant aux conditions suivantes

$$(i) \quad \mu(n)^2 = 1, \omega(n) \leq \alpha \log_2 x, P^-(n) > U$$

$$(ii) \quad \max_{U < t \leq x} \frac{\omega(n, t)}{\log_2 t} \leq \alpha(1 + \varepsilon_1), (\varepsilon_1 = \frac{\log_2 U}{\log_2 x}).$$

Notons $N_2(x; \alpha, U) := |\mathcal{N}_2(x; \alpha, U)|$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des lemmes 3.1.1 et 3.1.2 précédents.

Lemme 3.1.3. *Pour $0 < \alpha < 1$, $x \geq x_0(\alpha)$, $\varepsilon_1(x) = (\log_2 x)^{-1/3} \log_3 x$, $U = \exp(\log x)^{\varepsilon_1(x)}$, on a*

$$(1.3) \quad N_2(x; \alpha, U) \geq x(\log x)^{-Q(\alpha)}(\log U)^{-\alpha - \alpha\varepsilon_1(x)}(\log_2 x)^{Q(\alpha) - 3/2}.$$

§ 2. Démonstration du théorème 3.

* **Majoration de $N(x; \lambda, \varepsilon_0)$.**

Soient $0 \leq \lambda < \log 4 - 1$, $0 < \varepsilon_0 < 1/2$ et $x \geq x_0(\lambda, \varepsilon_0)$. La majoration

$$N(x; \lambda, \varepsilon_0) := |\{n \leq x : \mathbf{dB}_\lambda(n) < 1 - \varepsilon_0\}| \leq x e^{-c_\lambda \sqrt{\log_2 x}}$$

est une conséquence immédiate de la proposition 1 car

$$\begin{aligned} N(x; \lambda, \varepsilon_0) &\leq \sum_{n \leq x} (1 - \mathbf{dB}_\lambda(n)) / \varepsilon_0 \\ &= (1/\varepsilon_0) \sum_{n \leq x} \lim_{X \rightarrow +\infty} (1/X) \sum_{m \leq X} \{1 : \nabla(n, m, (\log n)^{-\lambda}) = 0\} \end{aligned}$$

* **Minoration de $N(x; \lambda, \varepsilon_0)$.**

Considérons l'ensemble des multiples $\mathcal{B}'_\lambda(n)$ de la suite

$$\mathcal{D}'_\lambda(n) := \bigcup_{d|n}]d, (1 + (\log d)^{-\lambda})d] \cap \mathbb{N}$$

et

$$N'(x, \lambda, \varepsilon_0) := |\{n \leq x : \mathbf{d}\mathcal{B}'_\lambda(n) < 1 - \varepsilon_0\}| \leq N(x; \lambda, \varepsilon_0).$$

Nous allons montrer que pour $0 \leq \lambda \leq \log 4 - 1$, $0 < \varepsilon_0 < 1/2$, $x \geq x_0(\lambda, \varepsilon_0)$

$$N'(x, \lambda, \varepsilon_0) \geq x(\log x)^{-Q(\beta)+o(1)}$$

avec $\beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1$.

Nous gardons jusqu'à la fin de la démonstration les notations suivantes

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x) = (\log_2 x)^{-1/3} \log_3 x, U = \exp(\log x)^{\varepsilon_1}, \beta = ((1 + \lambda)/\log 2) - 1, \alpha = \beta - 2\varepsilon_1,$$

$$N^*(x, \lambda, \varepsilon_0) := |\{n \in \mathcal{N}_2(x, \alpha, U) : \mathbf{d}\mathcal{B}'_\lambda(n) \geq 1 - \varepsilon_0\}|,$$

$$\mathcal{M}(X; x) = \{m \leq X : \max_{U < z \leq X} \frac{\Omega(m, z)}{\log_2 z} \leq 1 + \varepsilon_1\}.$$

Par le lemme 1.2.10, on a pour $X \geq U$

$$|\mathcal{M}(X; x)| \geq X(1 - \varepsilon_2)$$

où

$$\varepsilon_2 \asymp Q(1 + \varepsilon_1)^{-1} (\log U)^{-Q(1 + \varepsilon_1)}.$$

Cela implique pour $X \geq X(x)$

$$N^*(x; \lambda, \varepsilon_0) \leq |\{n \in \mathcal{N}_2(x; \alpha, U) : \sum_{m \in \mathcal{B}'_\lambda(n) \cap \mathcal{M}(X, x)} 1 \geq (1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2)X\}|.$$

On a donc

$$(2.1) \quad N^*(x; \lambda, \varepsilon_0) \leq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_0 - \varepsilon_1\right)^{-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_2(x; \lambda, U)} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}(X; x) \\ m \text{ impair}}} \sum_{\substack{d|m, t|m \\ d < t \leq \eta(d)d}} 1$$

avec $\eta(d) = (\log d)^{-\lambda}$.

Nous allons majorer le terme de droite de (2.1) par des sommes arithmétiques pondérées. Pour cela, soient $0 < y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 1$, $\alpha_1 := (1 + \varepsilon_1)\alpha$,

$$S'_1 := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > U}} \mu(n)^2 \sum_{m \leq X} \sum_{\substack{d|n \\ 1 < d \leq \sqrt{x}}} \sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta(d))d}} y_1^{\omega(\eta, d) - \alpha_1 \log_2 d} \\ \times y_2^{\Omega(m, 2d) - (1+\varepsilon_1) \log_2 2d} \alpha^{\omega(n) - \alpha \log_2 x},$$

$$S'_2 := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > U}} \mu(n)^2 \sum_{m \leq X} \sum_{\substack{d|n \\ d > \sqrt{x}}} \sum_{\substack{t|m \\ d < t \leq (1+\eta(d))d}} y_3^{\omega(n, d) - \alpha_1 \log_2 d} \\ \times y_4^{\Omega(m, 2d) - (1+\varepsilon_1) \log_2 2d},$$

on a d'après (2.1)

$$(2.2) \quad N^*(x; \lambda, \varepsilon_0) \leq 2(1 - 2\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1)^{-1} (S'_1 + S'_2).$$

D'une part, on a

$$S'_1 \ll (\log x)^{-\alpha \log \alpha} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P^-(d) > U}} \mu(d)^2 (\log d)^{-\alpha_1 \log y_1 - (1+\varepsilon_1) \log y_2} \\ (\alpha y_1)^{\omega(d)} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_2^{\Omega(t)} \sum_{m \leq X/t} y_2^{\Omega(m, 2d)} \sum_{\substack{m \leq X/d \\ P^-(n) > U}} \alpha^{\omega(n)} y_1^{\omega(n, d)} \mu(n)^2.$$

Il découle donc du lemme 1.1.4

$$S'_1 \ll x X (\log U)^{-\alpha y_1} (\log x)^{-Q(\alpha)} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P^-(d) > U}} \mu(d)^2 (\log d)^E (\alpha y_1)^{\omega(d)} / d \\ \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_2^{\Omega(t)} / t$$

où l'on a posé

$$E := -\alpha_1 \log y_1 - (1 + \varepsilon_1) \log y_2 + y_2 - 1 + \alpha y_1 - \alpha.$$

Comme l'inégalité $d(\log d)^{-\lambda} > d^{1/3}$ est vérifiée pour tout $d > U$ alors d'après le lemme 2.1.1, on a

$$\sum_{d < t \leq (1+\eta)d} \frac{y_2^{\Omega(t)}}{t} \ll (\log d)^{y_2-1-\lambda}.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} S'_1 &\ll x X(\log U)^{-\alpha y_1} (\log x)^{-Q(\alpha)} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P^-(d) > U}} \mu(d)^2 (\log d)^{E+y_2-1-\lambda} (\alpha y_1)^{\omega(d)} / d \\ &\ll x X(\log U)^{-2\alpha y_1} (\log x)^{-Q(\alpha)} \int_{\log U}^{+\infty} z^{E+y_2+\alpha y_1-2-\lambda} dz \\ &\ll x X L^{-1} (\log U)^{-2\alpha y_1-L} (\log x)^{-Q(\alpha)} \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$L := \alpha_1 \log y_1 + (1 + \varepsilon_1) \log y_2 - 2y_2 + 2 - 2\alpha y_1 + \alpha + \lambda$$

et supposé $L > 0$.

En choisissant $y_1 = 1/2$, $y_2 = (1 + \varepsilon_1)/2$, on obtient

$$\begin{aligned} L &= -\alpha_1 \log 2 + Q(1 + \varepsilon_1) - (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \alpha) \log 2 + 1 + \lambda \\ &> 4\varepsilon_1 \end{aligned}$$

et

$$(2.3) \quad S'_1 \leq x X(\log U)^{-\alpha-3\varepsilon_1} (\log x)^{-Q(\alpha)}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} S'_2 &\leq (\log x)^{-\alpha_1 \log y_3} \sum_{\sqrt{x} < d \leq x} (\log d)^{-(1+\varepsilon_1) \log y_4} y_3^{\omega(d)} \\ &\quad \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} y_4^{\Omega(t)} \sum_{m \leq X/t} y_4^{\Omega(m,ed)} \sum_{n \leq x/d} y_3^{\omega(n)} \\ &\ll x X(\log x)^{-\alpha_1 \log y_3} \sum_{\sqrt{x} < d \leq x} (\log d)^{-(1+\varepsilon_1) \log y_4 + y_4 - 1} \\ &\quad \times \left(\log \frac{2x}{d} \right)^{y_3-1} \frac{y_3^{\omega(d)}}{d} \sum_{d < t \leq (1+\eta)d} \frac{y_4^{\Omega(t)}}{t}. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.1.1 on a donc

$$S'_2 \ll x X(\log x)^{-\alpha_1 \log y_3} \sum_{\sqrt{x} < d \leq x} (\log d)^{-(1+\varepsilon_1) \log y_4 + 2y_4 - 2 - \lambda} \\ \times \left(\log \frac{2x}{d} \right)^{y_3 - 1} \frac{y_3^{\omega(d)}}{d}.$$

Par intégration par parties, on obtient donc

$$S'_2 \ll x X(\log x)^{-\alpha_1 \log y_3} \int_{\frac{1}{2} \log x}^{\log x} z^A (\log(2x) - z)^{y_3 - 1} dz$$

où l'on a posé

$$A := 2y_4 - 3 - (1 + \varepsilon_1) \log y_4 + y_3 - \lambda.$$

Il vient donc

$$S'_2 \ll_{y_3} x X(\log x)^B$$

avec $B := A - \alpha_1 \log y_3 + y_3$.

Le choix $y_3 = \alpha_1/2$, $y_4 = (1 + \varepsilon_1)/2$ implique

$$B = -Q(\alpha_1) + \alpha_1 \log_2 - 1 + (1 + \varepsilon_1) \log 2 - Q(1 + \varepsilon_1) - \lambda \\ < -Q(\alpha) - 3\varepsilon_1,$$

et on obtient

$$(2.4) \quad S'_2 \leq x X(\log x)^{-Q(\alpha) - 2\varepsilon_1}.$$

Les relations (2.2), (2.3) et (2.4) entraînent en conséquence pour $x \geq x_0(\lambda, \varepsilon_0)$

$$(2.5) \quad N^*(x; \lambda, \varepsilon_0) \leq x(\log x)^{-Q(\alpha)} (\log U)^{-\alpha - 2\varepsilon_1}.$$

Or, l'inégalité

$$N'(x, \lambda, \varepsilon_0) \geq |\mathcal{N}_2(x; \alpha, U)| - N^*(x; \lambda, \varepsilon_0)$$

montre en vertu du lemme 3.1.3 et (2.5)

$$(2.6) \quad N'(x, \lambda, \varepsilon_0) \geq x(\log x)^{-Q(\alpha)} (\log U)^{-\alpha} G(x)$$

avec

$$G(x) = (\log U)^{-\alpha \varepsilon_1(x)} (\log_2 x)^{Q(\alpha) - 3/2} - (\log U)^{-2\varepsilon_1}.$$

Cela achève la démonstration de la minoration de $N'(x, \lambda, \varepsilon_0)$ puisque $G(x) > \frac{1}{2}$ pour $x \geq x_0(\lambda, \varepsilon_0)$. □

Bibliographie

- [B34] A.S. Besicovitch (1934), On the density of certain sequences, *Math. Annalen* **110**, 336-41.
- [B48] F.A. Behrend (1948), Generalization of an inequality of Heilbronn and Rohrbach, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54**, 681-4.
- [DDT79] J.M. Deshouillers, F. Dress & G. Tenenbaum (1979), Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arith.* **34**, 273-85.
- [DE37] H. Davenport & P. Erdős (1937), On sequences of positive integers, *J. Indian Math. Soc.* **15**, 19-24.
- [E35] P. Erdős (1935), Note on the sequences of integers none of which are divisible by any other, *J. London Math. Soc.* **10**, 126-8.
- [E36] P. Erdős (1936), A generalization of a theorem of Besicovitch, *J. London Math. Soc.* **11**, 92-8.
- [E46] P. Erdős (1946), On the distribution function of additive functions, *Ann. of Math.* **47**, 1-20.
- [E48] P. Erdős (1948), On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54**, 685-92.
- [E69] P. Erdős (1969), On the distribution of prime divisors, *Aequationes Math.* **2**, 177-83.
- [ET81] P. Erdős & G. Tenenbaum (1981), Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, *Ann. Inst. Fourier* **31**, 17-37.
- [ET83] P. Erdős & G. Tenenbaum (1983), Sur les diviseurs consécutifs d'un entier, *Bull. Soc. Math. de France* **111**, 125-45.
- [H90] R.R. Hall (1990), Sets of multiples and Behrend sequences, in : A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal (eds.) *A Tribute to Paul Erdős*, Cambridge University Press 249-58.

- [HR66] H. Halberstam & K.F. Roth (1966), *Sequences*, Oxford University Press.
- [HR79] H. Halberstam & H.-E. Richert (1979), On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory* (1) **11**, 76-89.
- [HT88] R.R. Hall & G. Tenenbaum (1988), *Divisors*, Cambridge University Press.
- [HT90] R.R. Hall & G. Tenenbaum (1990), The set of multiples of a short interval, in : D.V. Chudnovsky et al. (eds), *Number Theory* (New York Seminar 1989-90), 119-28 (Springer-Verlag 1991).
- [HT91] R.R. Hall & G. Tenenbaum (1991), On Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.
- [MFT91] M. Mendès France & G. Tenenbaum, Système de points, diviseurs, et structure fractale, *Bull. Soc. Math. de France*, à paraître.
- [MT84] H. Maier & G. Tenenbaum (1984), On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76**, 121-8.
- [MT85] H. Maier & G. Tenenbaum (1985), On the normal concentration of divisors, *J. London Math. Soc.* (2) **31**, 393-400.
- [S80] P. Shiu (1980), A Brun-Titchmarsh Theorem for Multiplicative Functions, *J. reine angew. Math.* **313**, 161-70.
- [T79] G. Tenenbaum (1979), Lois de répartition des diviseurs, 5, *J. London Math. Soc.* (2) **20**, 165-76.
- [T80] G. Tenenbaum (1980), Lois de répartition des diviseurs, 2, *Acta Arith.* **38**, 1-36.
- [T84] G. Tenenbaum (1984), Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, *Composito Math.* **51**, 243-63 .
- [T90] G. Tenenbaum (1990), *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Elie Cartan, Université de Nancy I.
- [T90a] G. Tenenbaum (1990), Sur une question d'Erdős et Schinzel, in : A. Baker, B. Bollobàs, A. Hajnal (eds.), *A tribute to Paul Erdős* , Cambridge University Press, 405-43.

UNIVERSITE DE NANCY I

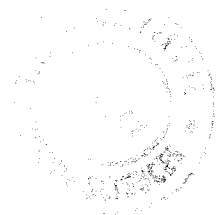
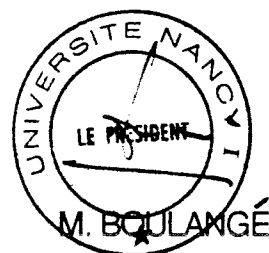
NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur RAOUJ Abdelaziz

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I
en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le - 1 JUIN 1992 - '248

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



Résumé.

Erdős a conjecturé que la densité de l'ensemble des multiples de la suite $\mathcal{D}_0(n) := \bigcup_{d|n}]d, 2d] \cap \mathbb{N}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini en restant dans une suite convenable de densité unité.

Nous résolvons cette conjecture sous une forme quantitative et plus générale en évaluant la densité de l'ensemble des multiples de la suite

$$\mathcal{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d|n}]d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d] \cap \mathbb{N}, \quad \lambda \geq 0.$$

Le résultat met en évidence des seuils critiques $\lambda^* = \log 4 - 1$ et $\lambda^{**} = \log 8 - 1$ pour λ correspondant à des sortes de changements de phase.

Les démonstrations reposent sur la technique de Maier et Tenenbaum, et sur des calculs de moyennes pondérées, étayées par des raisonnements combinatoires. Certaines propriétés de nature probabilistes sont établies par des méthodes d'analyse harmonique.

Mots clés.

Ensemble de multiples, Densité, Seuils d'indépendance, Diviseurs, Ordre moyen, Ordre normal, Pondération.