

# Estimation des paramètres de sinusoïdes amorties par décomposition en sous-bandes adaptative : application à la spectroscopie RMN

El-Hadi Djermoune

▶ **To cite this version:**

El-Hadi Djermoune. Estimation des paramètres de sinusoïdes amorties par décomposition en sous-bandes adaptative : application à la spectroscopie RMN. Autre [cs.OH]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2003. Français. NNT : 2003NAN10061 . tel-01748100

**HAL Id: tel-01748100**
**https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748100**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

**UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique**
**Ecole Doctorale IAEM Lorraine**
**DFD Automatique et Production Automatisée**

# THÈSE

présentée pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1**

**(Spécialité Automatique, Traitement du Signal et Génie Informatique)**

par

El-Hadi Djermoune

# Estimation des paramètres de sinusoïdes amorties par décomposition en sous-bandes adaptative. Application à la spectroscopie RMN.

Soutenue publiquement le 09 juillet 2003 devant la commission d'examen :

| | | |
|---|---|---|
| *Président :* | R. Lengellé | Professeur à l'Université de Technologie de Troyes |
| *Rapporteurs :* | P. Larzabal | Professeur à l'Université Paris Sud |
| | E. Moreau | Professeur à l'Université de Toulon et du Var |
| *Examinateurs :* | P. Mutzenhardt | Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1 |
| | A. Richard | Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1 |
| | M. Tomczak | Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1 |

**Centre de Recherche en Automatique de Nancy**
**CRAN – CNRS UMR 7039**

A la mémoire de ma mère, Mira ;
A mon père, Mohand Amokrane ;
A tous mes frères et soeurs.

*Ur teṭṭuγ ara ayen akw itseblem felli.*
(Merci pour tous vos sacrifices)

A Magalie.

# Remerciements

Je tiens à remercier avant tout, les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. **Eric Moreau**, Professeur à l'Université de Toulon et du Var, pour avoir accepté de rapporter sur ce manuscrit et d'avoir examiné minutieusement ce travail. Je le remercie aussi pour ses critiques "post-rapport" sur les techniques de synthèse de filtres numériques.

Je remercie M. **Pascal Larzabal**, Professeur à l'IUT de Cachan, Université Paris Sud, pour avoir bien voulu être rapporteur et pour ses remarques constructives.

J'adresse mes remerciements à M. **Régis Lengellé**, Professeur à l'Université de Technologie de Troyes, pour avoir accepté d'apporter son regard critique à ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. **Pierre Mutzenhardt**, Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy 1, pour sa participation au jury. J'ai particulièrement apprécié ses remarques et nos discussions concernant la spectroscopie RMN à 1D et 2D. Merci pour le temps consacré à l'acquisition d'une bibliothèque de signaux test.

Je remercie particulièrement M. **Alain Richard**, Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy 1, pour m'avoir accueilli dès mon DEA dans son équipe de recherche au sein du CRAN et pour m'avoir toujours poussé à aller plus loin dans mes recherches.

Mes sincères remerciements vont également à M. **Marc Tomczak**, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré Nancy 1. Je retiendrai entre autres sa rigueur et son regard scientifique. Je le remercie pour son soutien *indéfectible* dans les moments difficiles, et enfin, mais surtout, pour son amitié.

Merci à **Manuel Adam Medina** (dit Manuelito) pour toute sa bonne humeur quotidienne et sa *pugnalité* mexicaine. Merci pour l'enthousiasme que tu sais si bien communiquer.

Merci à **Philippe Jacques** *Le Palefrenier* (dit Philou) pour ses conseils gastronomiques et financiers, sans oublier ses délires toujours fins. Merci à **Fabienne** pour m'avoir laisser gagner à la belote.

Merci à **Hicham Jamouli** (dit le marteau) pour son amitié, son enthousiasme, ses blagues du terroir et sa poésie *tout-en-finesse*.

Merci à **Eric Huselstein** (dit Ericus) pour sa sympathie de tous les moments et pour ses nombreux coups de main.

Merci à **Saïd Moussaoui** (dit Saïdounet) pour toutes nos discussions passées et futures

sur le bayésien, les MCMC et la séparation de sources. Merci de partager avec moi toutes mes cigarettes à l'insu de ton plein gré. Merci à **Vincent Mazet** (dit Dabeulle ou W) pour ses blagues à la *Dabeulle*, mais qui font toujours rire.

Un grand merci à **David Brie** (dit le Brie.D., heureux Papa à la puissance IV) pour sa disponibilité, ses conseils et sa rigueur scientifique, sans oublier ses franches parties de rigolades et ses blagues qui animent toujours la pause café.

Merci à **Cédricus**, collègue depuis cinq ans (déjà), pour mon premier verre de Mirabelle qui fût mémorable, et les soirée PS2. Merci aussi à **Flo**.

Merci à **Fredus** qui n'a pas loupé beaucoup d'occasions de transformer le couloir en champ de bataille bien que ce soit plus calme ces derniers temps ;-)

Merci à **Hassan** pour sa bonne humeur et sa légendaire histoire de Woodick.

Merci à **Olivier** pour sa disponibilité sans faille à résoudre tous les problèmes informatiques. J'attend toujours le mot de passe administrateur.

Merci à **Christian** pour sa *Luxembourg Connexion*. Une pensée amicale aux anciens CNAM, **Christophe** et **Eric** qui ont quitté le labo mais que je n'oublie pas.

Merci encore à **Anthony Germon** (dit Marcus) pour ses délir'thons et ses discussions philosophiques sur l'existence d'une douzième dimension. J'espère que ta vision de l'univers finira par être une évidence.

Merci aux autres membres du laboratoire, et notamment aux thésards, **Steph** pour sa rigueur, **Ludo** pour ses anecdotes et **Mike** pour les parties de baby que je gagne toujours ;-). Je pense bien sûr aux DEA : **Samir**, **Ben**, **Hocine**, **Yann** et **David**. Courage ! Ce n'est que le début d'une longue quête. Spécial merci à tous les permanents : **Marion**, **Thierry**, **Hugues**, **Dominique**, **Patrick**, **Jean-Christophe**, **Didier**, **Christophe**, **Olivier** et **Jean-Marie**. *And last but not least*, un grand merci à **Sabine Huraux** pour sa disponibilité à résoudre tous nos soucis administratifs.

Enfin, merci à **Magalie** pour son amour et ses encouragements tout au long de ces deux dernières années.

# Table des matières

**Table des figures** **ix**

**Liste des tableaux** **xiii**

**Abréviations et notations** **xv**

**Introduction générale** **1**

**1 Estimation des paramètres de sinusoïdes amorties** **5**
1.1 Introduction . . . 5
1.2 Modèle du signal . . . 6
1.3 Approches fondées sur le modèle exponentiel . . . 7
1.3.1 Méthode de Prony . . . 8
1.3.2 Méthode de Kumaresan et Tufts . . . 9
1.3.3 Méthode Matrix Pencil . . . 13
1.3.4 Approximation directe des données . . . 15
1.4 Méthode du maximum de vraisemblance . . . 17
1.5 Quelques exemples de simulation . . . 18
1.6 Approches fondées sur les équations de Yule-Walker modifiées . . . 20
1.6.1 Modélisation pseudo-ARMA . . . 20
1.6.2 Méthode de Yule-Walker d'ordre élevé (HOYW) . . . 21
1.6.3 Méthode de Händel . . . 24
1.6.4 Etude d'un estimateur de l'autocorrélation . . . 25
1.6.5 Exemples . . . 31
1.7 Estimation des amplitudes . . . 33
1.8 Sélection de l'ordre du modèle exponentiel . . . 36
1.9 Conclusion . . . 38

**2 Estimation paramétrique en sous-bandes** **41**
2.1 Introduction . . . 41
2.2 Décomposition en sous-bandes . . . 42
2.2.1 Opérations de filtrage et de décimation . . . 42

2.2.2 Banc de filtres de décimation . . . 43
2.3 Influence de la décomposition sur le modèle exponentiel . . . 45
2.3.1 Le filtrage . . . 45
2.3.2 La décimation . . . 46
2.4 Quelques avantages de l'estimation en sous-bandes . . . 47
2.4.1 Amélioration du rapport signal-sur-bruit . . . 47
2.4.2 Augmentation de la séparation fréquentielle . . . 48
2.4.3 Réduction de la complexité numérique . . . 48
2.5 Filtres de décimation et approche IFIR . . . 48
2.5.1 Quel banc de filtres utiliser ? . . . 49
2.5.2 Synthèse d'un filtre de décimation . . . 50
2.5.3 Approche IFIR . . . 53
2.6 Méthodes d'estimation en sous-bandes . . . 55
2.6.1 Transformation vers la bande globale . . . 56
2.6.2 Estimation du nombre de composantes . . . 57
2.6.3 Sur les composantes polyphasées . . . 60
2.6.4 Mise en oeuvre d'un algorithme d'estimation en sous-bandes . . . 62
2.7 Analyse des performances . . . 63
2.7.1 Variance et erreur quadratique moyenne . . . 63
2.7.2 Détection en sous-bandes . . . 64
2.7.3 Résolution . . . 65
2.7.4 Complexité numérique . . . 67
2.7.5 Limitations . . . 68
2.8 Conclusion . . . 70

**3 Décomposition adaptative et estimation en sous-bandes 71**
3.1 Introduction et motivations . . . 71
3.2 Décomposition adaptative en sous-bandes . . . 72
3.2.1 Rappels sur la transformée en paquets d'ondelettes . . . 72
3.2.2 Objectifs de la décomposition adaptative . . . 74
3.3 Critères d'arrêt de la décomposition . . . 75
3.3.1 Critère d'énergie . . . 75
3.3.2 Blancheur des signaux en sous-bandes . . . 76
3.3.3 Nombre de composantes . . . 76
3.3.4 Analyse des résidus . . . 77
3.3.5 Règles d'arrêt . . . 78
3.4 Choix d'un critère d'arrêt basé sur la blancheur des résidus . . . 78
3.4.1 Rappels sur les propriétés spectrales d'un bruit blanc . . . 78
3.4.2 Test de Drouiche . . . 79

3.4.3 Statistique de Fisher . . . 81
3.4.4 Comparaison des performances . . . 82
3.4.5 Arrêt de la décomposition adaptative . . . 84
3.5 Mise en oeuvre algorithmique . . . 86
3.6 Etude comparative . . . 90
3.6.1 Ordre de prédiction variable . . . 91
3.6.2 Ordre de prédiction fixe . . . 93
3.7 Conclusion . . . 95

**4 Application à la spectroscopie de résonance magnétique nucléaire 97**
4.1 Introduction . . . 97
4.2 Principes de base de la spectroscopie RMN . . . 98
4.2.1 Moment nucléaire et moment magnétique . . . 98
4.2.2 Condition de résonance . . . 100
4.2.3 Effets de relaxation . . . 101
4.2.4 Déplacement chimique . . . 102
4.2.5 Présentation d'une expérience RMN . . . 103
4.3 Analyse des signaux de précession libre . . . 105
4.4 Signaux analysés . . . 106
4.5 Décomposition uniforme . . . 107
4.5.1 Le signal CNMR1 . . . 108
4.5.2 Le signal CNMR2 . . . 109
4.5.3 Vers une décomposition adaptative . . . 110
4.6 Décomposition adaptative . . . 111
4.6.1 Le signal CNMR1 . . . 112
4.6.2 Le signal CNMR2 . . . 115
4.7 Réduction du nombre d'accumulations . . . 122
4.8 Commentaires et conclusion . . . 126

**Conclusion et perspectives 129**

**Annexes 133**

**A Bornes de Cramér-Rao pour un processus exponentiel amorti 133**
A.1 Plusieurs composantes amorties . . . 133
A.2 Une composante amortie . . . 134
A.3 Une sinusoïde pure . . . 135

**B Approche IQML : Iterative Quadratic Maximum Likelihood 137**

**C Propriété de récurrence des termes d'autocorrélation estimés** **139**
C.1 Méthode HOYW : estimateur pré-fenêtré . . . . . 139
C.2 Méthode de Händel . . . . . 140

**D Description des signaux analysés** **141**
D.1 Signaux CNMR1 et CNMR2 . . . . . 141
D.2 Signal obtenu avec différents nombres d'accumulations : CNMR3 . . . . . 142

**Bibliographie** **146**

# Table des figures


1.1 Phénomène *threshold effect*. Méthode KT avec 200 réalisations du bruit. (—) $p = 20$ ; (−−) $p = 30$ ; (− · −) borne de Cramér-Rao. . . . . 11
1.2 Ordre de prédiction optimal pour les méthodes KT (prédiction arrière) et TK (prédiction avant-arrière). . . . . 12
1.3 Premier cas – variance d'estimation de la fréquence $\omega_1$. . . . . 19
1.4 Deuxième cas – écart-type de $\omega_1$ et $\alpha_1$. . . . . 20
1.5 Gain en RSB en fonction de la longueur $L$. . . . . 28
1.6 Gains en RSB pour deux sinusoïdes complexes amorties à 0 dB. . . . . 30
1.7 Variance et erreur quadratique moyenne en fonction du RSB pour une sinusoïde amortie. . . . . 32
1.8 Erreur quadratique moyenne de l'estimation de deux sinusoïdes amorties. . . 33
1.9 Pôles du signal (+) et des estimés (nuage de points), en prédiction arrière. . 34
1.10 Influence du nombre d'échantillons sur la détection d'une sinusoïde amortie. 39

2.1 Opérations de filtrage et de décimation. . . . . 42
2.2 Bancs de filtres d'analyse. . . . . 44
2.3 Structures des filtres en ondelettes discrètes et en paquets d'ondelettes pour une décomposition dyadique et un facteur de décimation maximal égal à 8. . 45
2.4 Position des filtres de décimation. . . . . 51
2.5 Problèmes liés au repliement spectral avec un filtre de Daubechies $D_{10}$. Le signal d'origine est modulé successivement aux fréquences -0.25 puis -0.75. Densité spectrale de puissance pour une et deux sinusoïdes pures, estimée avec le périodogramme simple, moyenné sur 100 essais. *(a)* La fréquence $f_1 = 0.48$ dans la bande globale apparaît dans les deux sous-bandes à 0.48 et 0.98. *(b)* Les deux fréquences $f_1 = 0.48$ et $f_2 = 0.97$, initialement bien espacées, se retrouvent très proches dans les deux sous-bandes. . . . . 52
2.6 Exemple de synthèse d'un banc de filtres avec recouvrement pour un facteur de décimation $d = 4$. Réponse d'amplitude des filtres d'analyse de type Kaiser avec un ordre $N_f = 38$. . . . . 54
2.7 Principe de l'approche IFIR. . . . . 55
2.8 Génération des signaux en sous-bandes à l'aide d'un seul filtre passe-bas $G(z)$. 55

2.9 Valeurs propres en sous-bandes de la matrice d'autocorrélation d'ordre $p = 40$ dans le cas d'un bruit blanc. . . . . 59
2.10 Allure typique des valeurs singulières de la matrice de données en sous-bandes (décomposition redondante). Cas de deux exponentielles amorties. . . . . 59
2.11 Exemple d'estimation d'une sinusoïde pure en utilisant les composantes polyphasées. . . . . 62
2.12 Exemple d'estimation d'une sinusoïde amortie en utilisant les composantes polyphasées. . . . . 62
2.13 Estimation d'une sinusoïde amortie ($p = 4$). Les courbes marquées $(- \circ -)$ indiquent une estimation en sous-bandes. . . . . 64
2.14 Estimation d'une sinusoïde amortie ($p = 8$). . . . . 65
2.15 Détection d'une sinusoïde amortie ($p = 4$). . . . . 66
2.16 Résolution de deux sinusoïdes amorties ($p = 4$). . . . . 66
2.17 Ordre de prédiction en sous-bandes avec la méthode KT. . . . . 67
2.18 Gain en nombre d'opérations (flops) en sous-bandes. . . . . 68
2.19 Evolution des performances en sous-bandes. Méthode KT avec $p = 4$. . . . . 69

3.1 Illustration de la méthode de la meilleure base. . . . . 73
3.2 Illustration du critère d'arrêt de la décomposition adaptive basé sur le comptage du nombre de composantes sur l'arbre. . . . . 77
3.3 Mesures de blancheur estimée et théorique pour une sinusoïde pure dans un bruit blanc à différentes valeurs du RSB. . . . . 83
3.4 Comparaison de la puissance des tests de Drouiche et Fisher pour une sinusoïde pure dans un bruit blanc en fonction du RSB, pour $N = 16,\ 64,\ 256$. . 84
3.5 Comparaison de la puissance des tests de Drouiche et Fisher pour une sinusoïde amortie dans un bruit blanc en fonction du RSB, pour $N = 256$ et $\alpha_1 = 0,\ 0.01,\ 0.02,\ 0.04,\ 0.05$. . . . . 85
3.6 Illustration de l'approche adaptative basée sur la platitude spectrale des résidus de l'estimation en sous-bandes. . . . . 86
3.7 Décomposition de la bande fréquentielle $[0, \pi]$ $(i = 0)$ en deux sous-bandes. Le filtre de décimation est indiqué par des pointillés. . . . . 88
3.8 Décomposition des sous-bandes centrées entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ $(i \geq 1)$. Le filtre de décimation est indiqué par des pointillés. . . . . 89
3.9 Résultats de l'estimation – ordre de prédiction variable ($p_0 = 64$). . . . . 92
3.10 Noeuds visités par les approches adaptatives – ordre de prédiction variable ($p_0 = 64$). . . . . 93
3.11 Résultats de l'estimation – ordre de prédiction fixe ($p_i = 8$). . . . . 94
3.12 Noeuds visités par les approches adaptatives – ordre de prédiction fixe ($p_i = 8$). 95

4.1 Précession et énergie des dipôles nucléaires ayant un spin $I = 1/2$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}_0$. (a) direction du moment magnétique $\mathbf{P}$ ; (b) mouvement de précession du dipôle ; (c) niveaux d'énergie permis. . . . . 99
4.2 Précession de l'aimantation $\mathbf{M}_0$ en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}_1$. . . 101
4.3 Spectre d'un signal de RMN. . . . . 102
4.4 Exemple d'un spectre de RMN $^1$H à 90MHz (tiré de [Fri91]). . . . . 103
4.5 (a) Impulsion radio-fréquence ; (b) Module de la transformée de Fourier ; (c) Largeur utile. . . . . 104
4.6 Nombre de raies détectées, relativement au nombre théorique, obtenu en utilisant un ordre de prédiction variable. . . . . 111
4.7 Décomposition adaptative réalisée sur le signal CNMR1 en utilisant la *règle 1* : (a) signal, (b) arbre de décomposition et (c) résidus en sous-bandes. . . . . 113
4.8 Décomposition adaptative réalisée sur le signal CNMR1 en utilisant la *règle 2* : (a) signal, (b) arbre de décomposition et (c) résidus en sous-bande. . . . . 114
4.9 Comparaison des résidus obtenus par une décomposition en sous-bandes adaptative du signal CNMR1. Méthode (a) SVD-HOYW et *règle 1* ; (b) KT et *règle 1* ; (c) SVD-HOYW et *règle 2* ; (d) KT et *règle 2*. . . . . 114
4.10 Résultats obtenus sur certaines sous-bandes du signal CNMR1 par l'approche SVD-HOYW et le test de blancheur. . . . . 116
4.11 Décomposition adaptative réalisée sur le signal CNMR2 en utilisant la *règle 1* : (a) signal, (b) arbre de décomposition et (c) résidus en sous-bande. . . . . 118
4.12 Résidus de la décomposition en sous-bande adaptative du signal CNMR2 suivie d'une estimation par les méthodes (a) SVD-HOYW et *règle 1* et (b) SVD-HOYW et *règle 2*. . . . . 118
4.13 Résultats obtenus sur certaines sous-bandes du signal CNMR2 par l'approche SVD-HOYW et le test de blancheur. Les astérisques (*) indiquent des composantes parasites et les flèches les raies théoriques non-détectées. . . . . 119
4.14 Spectre des signaux CNMR3($N_a$), obtenus avec différents nombres d'accumulations. Du haut vers le bas, le nombre d'accumulations est respectivement de 1, 4, 16, 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048. . . . . 124

D.1 (a) Le signal temporel CNMR1 ; (b) Le spectre d'absorption. . . . . 141
D.2 (a) Le signal temporel CNMR2 ; (b) Le spectre d'absorption. . . . . 144
D.3 Molécule analysée. . . . . 144
D.4 Spectre d'absorption du signal CNMR3(2048). Ce spectre se lit de droite à gauche. . . . . 145

# Liste des tableaux


1.1 Longueur optimale $L_{opt}$ obtenue avec une approximation polynômiale. . . . . 29

2.1 Nombre d'opérations en sous-bandes et dans la bande globale. . . . . 68

4.1 Fréquences de résonance du proton et du carbone-13 à différentes densités du flux magnétique $\mathbf{B}_0$. . . . . 104
4.2 Nombre de composantes bien estimées et parasites en fonction du facteur de décimation pour le signal CNMR1 ($f_a = 0.20$). . . . . 108
4.3 Nombre de composantes bien estimées et parasites en fonction du facteur de décimation pour le signal CNMR1 ($f_a = 0.15$). . . . . 109
4.4 Paramètres estimés du signal CNMR1 par une décomposition uniforme en sous-bandes ($d = 256$, $f_a = 0.15$). . . . . 110
4.5 Nombre de composantes bien estimées et parasites en fonction du facteur de décimation. Signal CNMR2. . . . . 111
4.6 Résultats de la décomposition adaptative du signal CNMR1. . . . . 112
4.7 Résultats de la décomposition adaptative du signal CNMR2. . . . . 117
4.8 Comparaison entre la composition théorique et le résultat de l'estimation en sous-bande du signal CNMR2. Méthode SVD-HOYW et test de blancheur. . 122
4.9 Nombre de détections et de manques à la détection en fonction du nombre d'accumulations. . . . . 123
4.10 Liste des paramètres estimés par la méthode adaptative en fonction du nombre d'accumulations. Méthode SVD-HOYW et test de blancheur. . . . . 126

D.1 Composition chimique du signal CNMR1. . . . . 141
D.2 Composition chimique du signal CNMR2. . . . . 142
D.3 Correspondance avec les signaux de RMN. . . . . 143

# Abréviations et notations

## Abréviations

| | | |
|---|---|---|
| AIC | : | Critère d'information d'Akaike |
| AR | : | Modèle ou processus autorégressif |
| ARMA | : | Modèle ou processus autorégressif à moyenne ajustée |
| CP | : | Composante polyphasée |
| CRB | : | Borne de Cramér-Rao |
| DSP | : | Densité spectrale de puissance |
| FID | : | Signal de précession libre |
| HOYW | : | Yule-Walker d'ordre élevé |
| IQML | : | Algorithme itératif du maximum de vraisemblance quadratique |
| KT | : | Méthode de Kumaresan et Tufts |
| LS | : | Moindres carrés |
| MA | : | Modèle ou processus à moyenne ajustée |
| MDL | : | Critère de description minimale |
| MLE | : | Estimateur du maximum de vraisemblance |
| RIF | : | Réponse impulsionnelle finie |
| RII | : | Réponse impulsionnelle infinie |
| RMN | : | Résonance magnétique nucléaire |
| RSB | : | Rapport signal-sur-bruit |
| SVD | : | Décomposition en valeurs singulières |
| TK | : | Méthode de Tufts et Kumaresan |
| TLS | : | Moindres carrés totaux |
| WLS | : | Moindres carrés pondérés |
| YW | : | Yule-Walker |

# Notations principales

| | | |
|---|---|---|
| $x,\ X$ | : | scalaire |
| $\mathbf{x}$ | : | vecteur |
| $\|\mathbf{x}\|$ | : | norme 2 d'un vecteur |
| $\mathbf{X}$ | : | matrice |
| $\tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{X}}$ | : | version blanchie du vecteur ou d'une matrice |
| $\mathbf{X}^+$ | : | pseudo-inverse de $\mathbf{X}$ |
| $\mathrm{diag}(\mathbf{x})$ | : | matrice diagonale dont la diagonale est le vecteur $\mathbf{x}$ |
| $\mathbf{I}$ | : | matrice identité |
| $x^*$ | : | conjugué |
| $\mathbf{x}^T,\ \mathbf{X}^T$ | : | transposé d'un vecteur ou d'une matrice |
| $\mathbf{x}^H,\ \mathbf{X}^H$ | : | transposé et conjugué d'un vecteur ou d'une matrice |
| $\hat{x},\ \hat{\mathbf{x}},\ \hat{\mathbf{X}}$ | : | scalaire, vecteur et matrices estimés |
| | | |
| $\mathbb{E}\{\cdot\}$ | : | espérance mathématique |
| $\mathrm{var}\{\cdot\}$ | : | variance |
| $[\cdot]$ | : | partie entière |
| $\mathcal{R}e\{\cdot\}$ | : | partie réelle |
| $\mathrm{Card}\{\cdot\}$ | : | cardinal |

# Introduction générale

Ce travail a été mené au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CNRS UMR 7039), au sein du thème IRIS (Instrumentation, Robotique, Images, Signaux), dans le cadre du projet Modélisation et Traitement de Données Expérimentales. Il porte sur l'estimation des paramètres de signaux constitués de sinusoïdes complexes amorties ou non, noyées dans du bruit. Ce problème est tout à fait général et concerne un grand nombre de secteurs d'application : analyse de vibrations, électrotechnique, radar, spectroscopie, etc. En l'occurrence, ce travail a été motivé plus particulièrement par certaines difficultés rencontrées en spectroscopie de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN), liées à la complexité des signaux. En effet, ces signaux sont souvent très longs (plusieurs milliers d'échantillons) et comportent un grand nombre de sinusoïdes amorties, parfois très proches et d'amplitudes très différentes. Ce domaine constitue donc notre support applicatif privilégié.

Dans ce contexte, les méthodes d'estimation à haute résolution (HR) sont souvent mises en difficulté à cause des ordres très élevés qu'elles requièrent. C'est pourquoi les spécialistes de la RMN se contentent, dans ce genre de situations, d'une analyse par transformée de Fourier, en dépit de ses limitations. Pour pouvoir bénéficier des avantages des méthodes paramétriques sur des signaux RMN de grande complexité, N. Henzel [Hen97] a proposé une méthodologie de traitement dans un contexte de banc de filtres. Cette technique, appelée décomposition en sous-bandes, permet d'engendrer des signaux dont la complexité peut être appréhendée de manière conventionnelle.

L'idée d'une décomposition en sous-bandes n'est pas nouvelle. Dans le domaine de l'analyse spectrale, elle a été préconisée dès 1983 dans un travail original de Quirk et Liu [QL83] pour améliorer la résolution d'une estimation autorégressive (AR) en réduisant les effets d'interférence entre modes. A partir de ce travail initial, peu de contributions ont été apportées autour de cette approche jusqu'aux travaux de Rao et Pearlman [RP92a, RP92b, RP96] qui ont développé la théorie de l'analyse spectrale en sous-bandes. Depuis, cette technique d'analyse a connu un regain d'intérêt avec les apports de Steedly *et al.* [SYM94a] et ceux de Karrakchou et van den Branden Lambrecht [KvdBL93, vdBLK95]. Plus récemment, dans le contexte de l'estimation fréquentielle, les avantages de l'analyse en sous-bandes ont été également étudiés [TV01a, TV01b, NKK02].

De façon générale, l'estimation en sous-bandes présente trois avantages. Le premier est d'augmenter la résolution fréquentielle et la précision de l'estimation en réduisant l'interférence

entre modes [QL83] ou en isolant l'information spectrale dans des bandes fréquentielles séparées. Le deuxième est de permettre une réduction des ordres des modèles en sous-bandes [RP96] par l'utilisation de facteurs de décimation élevés, en espérant que le nombre de modes par bande soit diminué. Enfin, le dernier avantage est la réduction de la charge de calcul dans le cas de signaux relativement longs, permettant ainsi une utilisation plus efficace des données avec les méthodes HR. Toutes ces performances dépendent, bien sûr, étroitement de la complexité du signal considéré et des différents paramètres intervenant dans le découpage en sous-bandes (filtre et facteur de décimation). De ce fait, l'estimation peut se détériorer lorsque le facteur de décimation est trop élevé ou lorsque les filtres présentent un grand transitoire. Ainsi, une décomposition qui s'adapte au contenu fréquentiel du signal est généralement souhaitable [KvdBL93]. En effet, une telle décomposition évite le choix du facteur de décimation en ajustant ce dernier à la complexité rencontrée [DT03]. Bien que l'idée d'une décomposition adaptative ne soit pas inédite, à notre connaissance, peu de travaux ont été consacrés à cette technique dans le cadre de l'estimation fréquentielle.

Notre étude comporte donc deux volets. D'une part, nous allons étudier le problème spécifique de l'estimation des paramètres de sinusoïdes amorties, indépendamment de la complexité intrinsèque de ces signaux. Le caractère amorti des signaux nous est dicté par le contexte physique dans lequel nous travaillons (spectroscopie de RMN). Dans un deuxième temps, nous aborderons le problème du découpage en sous-bandes qui s'impose lorsque ces signaux atteignent un certain degré de complexité.
En ce qui concerne le premier point, nous avons constaté, qu'hormis les approches dédiées exclusivement à ces signaux telles que la méthode de Kumaresan-Tufts [KT82], l'approche Matrix Pencil [HS90] et la méthode de Händel [Hän93], ce problème est moins souvent abordé dans la littérature ou bien considéré comme un simple cas particulier des signaux sinusoïdaux purs. Or, un problème se pose notamment lorsque l'on veut faire intervenir une estimation de la fonction d'autocorrélation, à cause de la non-stationnarité des signaux amortis. Dans le cas de sinusoïdes pures, Stoica et Söderström [SST89, SS90] ont proposé une méthode d'estimation fondée sur les équations de Yule-Walker modifiées (modélisation ARMA). Dans le contexte de signaux amortis, notre objectif est d'analyser la pertinence d'une modélisation ARMA par rapport aux approches dédiées à ces signaux. Nous verrons que la fonction d'autocorrélation doit être estimée convenablement pour s'affranchir du problème de non-stationnarité. L'étude d'un estimateur particulier de l'autocorrélation nous permettra alors de mettre en évidence les avantages de la représentation ARMA.
Face à des signaux de grande complexité, les spécialistes en traitement du signal pensent naturellement à une décomposition en sous-bandes. Toutefois, il semble qu'aucune technique d'estimation par décomposition n'ait réussi à s'imposer comme une méthode standard, du moins pour ce qui est de l'estimation fréquentielle. De plus, la rareté des travaux portant sur ce sujet fait que les conditions d'utilisation optimales d'une telle approche en particulier celles d'une bonne coopération entre l'algorithme d'estimation et le découpage, sont mal

connues. Un autre objectif de ce manuscrit consiste justement à aborder un certain nombre de questions relatives aux performances attendues de cette technique. Il s'agit notamment de discuter sur la façon dont il faudrait procéder au découpage, du point de vue des filtres de décimation, de mettre en évidence ses avantages et enfin d'identifier les sources de ses limitations.
Les problèmes de la décomposition uniforme évoqués auparavant peuvent être atténués en considérant des formes adaptatives. Celles proposées dans la littérature présentent néanmoins des limitations, en particulier, quand il devient nécessaire d'arrêter la décomposition des bandes où les paramètres du signal sont correctement estimés. Le troisième objectif du présent manuscrit est donc de proposer une technique de découpage adaptatif qui soit, bien sûr, plus performante que l'approche uniforme, mais aussi plus avantageuse que d'autres méthodes adaptatives. Ceci nous conduira à aborder plusieurs autres thèmes tels que l'optimalité du découpage, les critères possibles d'arrêt de la décomposition et la platitude spectrale. La réduction du temps de calcul est également un thème central, étant donné que notre démarche s'oriente vers une application pratique. Des exemples de simulation nous permettront d'illustrer les avantages de l'approche proposée.
Enfin, dans le cadre de l'application aux signaux expérimentaux issus de la spectroscopie RMN, notre but consiste, d'une part, à analyser la pertinence de la décomposition adaptative dans l'estimation des paramètres des signaux (fréquences et amplitudes) et la réduction des fausses détections. D'autre part, il s'agit de quantifier l'apport d'une décomposition en sous-bandes du point de vue de la réduction des temps d'acquisition des signaux RMN.

Ce mémoire s'articule autour des quatre chapitres résumés ci-dessous.

– Le premier chapitre est destiné à faire une présentation synthétique de quelques méthodes paramétriques permettant d'estimer les paramètres d'exponentielles amorties. Ces méthodes sont scindées en deux groupes : le premier englobe les approches utilisant directement les données et le second contient les méthodes reposant sur une modélisation ARMA d'un signal exponentiel. Nous montrons qu'un signal exponentiel amorti peut être modélisé par un processus ARMA particulier dont la fonction d'autocorrélation doit être estimée convenablement. Nous analysons par la suite un estimateur particulier de l'autocorrélation et nous montrons qu'avec un réglage approprié de cet estimateur, on peut augmenter le rapport signal-sur-bruit comparativement aux données initiales. Des simulations multiples sont présentées pour mettre en évidence les performances d'une modélisation ARMA par rapport à la méthode de Kumaresan-Tufts. Enfin, nous présentons brièvement le problème de l'estimation des amplitudes ainsi que quelques critères de sélection de l'ordre du modèle.

– Dans le second chapitre, nous abordons le problème de la décomposition en sous-bandes et de son apport en matière d'extraction des paramètres de sinusoïdes amorties. Après une description des principes de bases de la décomposition en sous-bandes, nous étudions les diverses possibilités de procéder au découpage du point de vue des filtres utilisés et de

leur agencement (taux de recouvrement, fréquences de coupures, etc.). Par la suite, nous établissons le modèle du signal en sous-bande qui s'avère être également un processus de type ARMA dont les ordres maximaux sont donnés. L'influence du processus de filtrage et de décimation sur le profil des valeurs singulières obtenues en sous-bandes est également étudiée. Il sera montré que celle-ci n'est pas sans conséquence sur la détermination du nombre de composantes effectuée à l'aide de critères de type MDL. Nous proposons alors une démarche permettant de s'affranchir de ce problème. Nous étudions ensuite la possibilité d'utiliser les composantes polyphasées issues de la décimation et nous montrons, en simulation, l'inefficacité de cette approche, entraînée par la dépendance trop forte entre composantes polyphasées successives. Enfin, les performances de l'approche décomposition/estimation en sous-bandes sont analysées à l'aide de simulations multiples.

– La décomposition en sous-bandes uniforme nécessite le choix *a priori* de la profondeur de la décomposition, choix qui conditionne entièrement les performances de l'estimation. Ce problème nous a conduit, dans le chapitre 3, à l'étude d'une nouvelle approche de découpage adaptatif. Par rapport aux approches adaptatives proposées dans la littérature, celle que nous proposons diffère par le choix du critère d'arrêt de la décomposition. Ce dernier est dicté par les objectifs poursuivis, à savoir la maximisation du taux de détection, la minimisation du taux de fausses alarmes et la réduction de la charge de calcul, comparativement à l'approche uniforme. Ceci nous a amené à considérer un critère qui repose sur une mesure de blancheur des résidus d'estimation, basée sur le périodogramme et le logarithme de la platitude spectrale. Ce critère est d'abord testé et ses performances sont analysées et comparées à la statistique de Fisher sur des signaux de simulation. Il en ressort que cette mesure est mieux adaptée au cas de sinusoïdes amorties. Ensuite, la décomposition utilisant ce critère est comparée d'une part avec des décompositions adaptatives à base d'autres critères d'arrêt et d'autre part avec une décomposition uniforme. Enfin, les avantages de l'approche sont présentés et discutés.

– Le dernier chapitre est dédié à l'application de la méthode proposée sur des signaux de spectroscopie du carbone-13 ($^{13}$C). Après une présentation des principes de base de la spectroscopie RMN, une comparaison de plusieurs méthodes d'estimation appliquées à des signaux RMN réels, de complexités diverses, est effectuée. Il est montré d'une part que le découpage en sous-bandes uniforme augmente le taux de détection à ordre de prédiction équivalent. D'autre part, l'approche adaptative permet d'optimiser la décomposition, réduisant ainsi le coût de calcul, de réduire le nombre de raies parasites et de simplifier le choix de l'ordre des modèles utilisés et du facteur de décimation. Les apports de l'approche proposée au problème de la spectroscopie RMN, du point de vue de la durée d'acquisition des signaux, du temps d'exécution de l'algorithme et de son caractère automatique, sont ensuite mis en évidence.

# Chapitre 1

# Estimation des paramètres de sinusoïdes amorties

## 1.1 Introduction

L'estimation des paramètres de sinusoïdes à partir de mesures bruitées est un problème fondamental en traitement du signal. Ce problème se rencontre dès lors que l'on a affaire à des signaux qui peuvent être modélisés par une somme de sinusoïdes amorties ou non. C'est le cas notamment des signaux radar et sonar, des signaux de vibrations mécaniques, ou encore dans le domaine de la spectroscopie. Depuis les travaux précurseurs de Prony [dP95], de nombreuses méthodes de résolution de ce problème ont été proposées. Parmi les approches les plus récentes on peut citer les méthodes dites à haute résolution telles que les méthodes itératives du maximum de vraisemblance [BM86, SN89, YB93] et celles fondées sur la notion de sous-espaces. Ces dernières incluent l'algorithme MUSIC (*MUltiple SIgnal Classification*) [Sch79, SN89], la méthode ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) [RPK86], la méthode de l'espace d'état (Kung) [KAR83], la méthode de Kumaresan-Tufts [TK82, KT82], l'approche Matrix Pencil [HS90], etc. Ces méthodes sont issues soit du principe du maximum de vraisemblance soit de la propriété de prédiction linéaire des signaux sinusoïdaux, principes qui seront décrits par la suite.

Les performances de ces méthodes ont été largement étudiées et comparées [KB86, KPTV87, RPK87, Rao88, HS88, CTO89, SST89, RH89, HS90, SN91, RA92]. Une présentation synthétique de ces performances peut être trouvée dans [Mar98]. Néanmoins, concernant certaines de ces méthodes, le cas particulier des sinusoïdes amorties est moins souvent abordé. L'objectif de ce chapitre est donc d'effectuer une étude comparative des techniques les plus courantes dans le cadre spécifique des signaux amortis.

Après une description du modèle utilisé, nous commençons par présenter quatre méthodes (Prony, Kumaresan-Tufts, Kung -approximation directe des données- et Matrix Pencil) qui reposent sur le modèle exponentiel non-bruité. Puis, le principe des méthodes du maximum

de vraisemblance est présenté ainsi qu'un algorithme itératif correspondant (IQML). Ce dernier est introduit à titre de méthode de référence. A l'issue de simulations Monte Carlo, la méthode de Kumaresan-Tufts (KT) est sélectionnée pour ses résultats légèrement supérieurs concernant l'estimation des amortissements.

Dans un deuxième temps, la classe des approches fondées sur une modélisation ARMA et utilisant les équations de Yule-Walker est introduite. On discute alors de l'opportunité d'une telle approche dans le cas de sinusoïdes amorties. Il en ressort que, bien qu'inappropriée sur le plan théorique, cette approche peut être utilisée avantageusement sous réserve de prendre certaines précautions lors de l'estimation de la focntion d'autocorrélation. Dans ce cadre, un estimateur particulier de l'autocorrélation est étudié. Il est montré que son utilisation permet d'obtenir un gain en terme de rapport signal-sur-bruit comparativement à celui des données initiales. De nouvelles simulations sont alors menées. Elles mettent en évidence la supériorité de l'approche Yule-Walker par rapport à KT.

Etant donné que l'ensemble de ces méthodes donne uniquement accès à l'estimation des fréquences et des facteurs d'amortissement, le problème de l'estimation des amplitudes est également présenté par la suite.

Enfin, le problème commun à toutes ces méthodes qui est celui de la sélection du nombre de composantes du modèle exponentiel est abordé. Les critères AIC et MDL sont notamment présentés et discutés.

## 1.2 Modèle du signal

Les signaux considérés dans ce travail sont des combinaisons d'exponentielles complexes amorties, noyées dans un bruit, dont le modèle s'écrit :

$$y(n) = x(n) + e(n) = \sum_{i=1}^{M} h_i z_i^n + e(n),\ n = 0, 1, ..., N-1 \tag{1.1}$$

où $M$ est le nombre d'exponentielles complexes amorties et $N$ le nombre d'échantillons. Les paramètres $h_i = A_i e^{\jmath\phi_i}$ et $z_i = e^{(-\alpha_i + \jmath\omega_i)}$ $(\alpha_i \geq 0)$ représentent respectivement l'amplitude complexe et la position des pôles correspondants dans le plan complexe. On suppose que les $M$ pôles sont distincts $(z_i \neq z_j,\ i \neq j)$. Le bruit $e(n)$ est un bruit blanc complexe, gaussien, de moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2$.

Le problème étudié consiste à déterminer les paramètres $M$, $h_i$ et $z_i$ à partir des mesures bruitées $y(n)$. Sa résolution directe conduit à un problème d'optimisation non-linéaire, mal adapté à une utilisation pratique. Cependant, Prony [dP95] a proposé une linéarisation de ce problème. Celle-ci repose sur une propriété des signaux sinusoïdaux : on peut montrer [Mar87] que la partie non-bruitée du signal $y(n)$, c'est-à-dire $x(n)$, est la solution homogène

de l'équation de récurrence suivante (prédiction avant ou progressive) :

$$\sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i) = 0,\ n = M, ..., N-1 \tag{1.2}$$

avec $a_0 = 1$. Les pôles $z_i$ sont alors les racines du polynôme caractéristique :

$$A(z) = \sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i} = \prod_{i=1}^{M} (1 - z_i z^{-1}) \tag{1.3}$$

De la même façon, on peut montrer que $x(n)$ est la combinaison linéaire des $M$ échantillons futurs pondérés par des coefficients de prédiction arrière (ou rétrograde) :

$$x(n) = -\sum_{i=1}^{M} b_i x(n+i),\ n = 0, ..., N-M-1 \tag{1.4}$$

Le polynôme caractéristique de cette équation de récurrence est :

$$B(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^i = \prod_{i=1}^{M} (1 - z_i z),\ b_0 = 1 \tag{1.5}$$

dont les racines sont égales à $1/z_i$, $i = 1, ..., M$. Nous verrons plus tard l'intérêt d'utiliser la prédiction arrière dans le cas de composantes amorties.

Nous allons maintenant présenter deux classes de méthodes permettant de résoudre ce problème. La première regroupe les méthodes basées sur le modèle exponentiel, la seconde considère une modélisation pseudo-ARMA du signal.

## 1.3 Approches fondées sur le modèle exponentiel

Les méthodes que nous allons présenter ici sont celles qui reposent sur la propriété de prédiction d'un signal exponentiel, décrite dans le paragraphe précédent. On ne considère ici que les méthodes qui utilisent *directement* les données, c'est-à-dire qui ne font pas appel explicitement à une estimation de la fonction d'autocorrélation. Ces méthodes incluent l'approche de Prony [dP95], de Kumaresan et Tufts [KT82], l'approche Matrix Pencil [HS90] et celle de Kung ou approximation directe des données (ADD) [KAR83]. Hormis la méthode originale de Prony et son extension par moindres carrés, toutes ces approches utilisent une décomposition en valeurs singulières de la matrice de données suivie d'une approximation de rang réduit. Par ailleurs, plusieurs travaux ont montré les similarités entre ces approches [Oui89, HS90, Chi96].

### 1.3.1 Méthode de Prony

Nous avons vu que le signal $x(n)$ et les coefficients $b_i$ sont liés par l'équation de récurrence (1.4). En réécrivant cette équation pour $n = 0, ..., M-1$, on obtient le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(M) \\ x(2) & x(3) & \cdots & x(M+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(M) & x(M+1) & \cdots & x(2M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

où l'on suppose que $N \geq 2M$. Les pôles étant supposés distincts, la matrice à gauche de l'équation peut être inversée pour obtenir les coefficients $b_i$ :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(M) \\ x(2) & x(3) & \cdots & x(M+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(M) & x(M+1) & \cdots & x(2M-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Les pôles $z_i$ correspondent alors à l'inverse des racines du polynôme $B(z)$. Enfin, les amplitudes $h_i$ sont calculées par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{M-1} & z_2^{M-1} & \cdots & z_M^{M-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(M-1) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Cette méthode est la méthode originale de Prony [dP95]. Elle donne des résultats exacts dans le cas où les données ne sont pas bruitées. Malheureusement, dans la pratique, les mesures sont toujours bruitées et la méthode de Prony donne de mauvais résultats même en présence d'un bruit faible. Ceci est dû à l'extrême sensibilité des racines aux coefficients de $B(z)$.

Une extension de la méthode de Prony proposée par Hildebrand [Hil56] consiste à utiliser plus de données ($N > 2M$). Dans ce cas, le système d'équations (1.6) devient surdéterminé :

$$\begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(M) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(M+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-M) & y(N-M+1) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-M-1) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

ou de manière plus compacte :

$$\mathbf{Yb} = -\mathbf{y} \tag{1.10}$$

La solution au sens des moindres carrés de cette équation est :

$$\mathbf{b} = -(\mathbf{Y}^H\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^H\mathbf{y} \tag{1.11}$$

Cet algorithme qui combine une estimation par moindres carrés à la méthode de Prony est appelé méthode de Prony étendue ou LS-Prony [Mar87] (LS : *least squares*).
Outre l'utilisation d'un système d'équations sur-déterminé, la sur-paramétrisation du problème est souvent conseillée (voir [Kay88]). Cela consiste à chercher un polynôme $B(z)$ d'un ordre $p$ beaucoup plus grand que le nombre réel de pôles ($p > M$), ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(p) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-p) & y(N-p+1) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-p-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{b} = -\mathbf{y} \tag{1.12}$$

dont la solution est donnée par l'équation (1.11).
La méthode de Prony faisant appel à une résolution par moindres carrés est en fait identique à la méthode de la covariance en prédiction linéaire (modélisation autorégressive). On sait que ce type de modélisation ne donne des résultats satisfaisants que lorsque le bruit est faible [Kay88]. A des niveaux de bruit plus élevés, l'estimation des fréquences et des facteurs d'amortissement est en général imprécise et biaisée [Mar87, Mar98]. De plus, le fait que l'ordre de prédiction soit plus grand que le nombre réel de composantes pose un sérieux problème de sélection des pôles associés au signal. Les méthodes développées dans la suite de ce paragraphe tendent à pallier ces problèmes en exploitant la décomposition en valeurs singulières (SVD).

### 1.3.2 Méthode de Kumaresan et Tufts

Dans le cas non-bruité, la matrice $\mathbf{Y}$ dans l'équation (1.12) est de rang $M$. En présence de bruit, Kumaresan et Tufts [KT82] ont eu l'idée de remplacer cette matrice par son approximation de rang réduit égal à $M$. Cette approximation est obtenue en mettant à zéro les $p-M$ plus petites valeurs singulières (dues au bruit) de la matrice $\mathbf{Y}$. Comparée aux méthodes de prédiction linéaire traditionnelles, la méthode KT (appelée aussi SVD-Prony) réduit sensiblement les fluctuations statistiques sur les coefficients de prédiction [CW87, Rao88, Sch91] et aboutit à une meilleure estimation des pôles.
La décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{Y}$ dans l'équation (1.12) s'écrit :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \tag{1.13}$$

où $\mathbf{S}$ est une matrice de dimension $(N-p)\times p$ ayant sur sa diagonale les valeurs singulières $\{\sigma_1, ..., \sigma_M, \sigma_{M+1}, ..., \sigma_p\}$, rangées par ordre décroissant. L'approximation de rang réduit de la matrice $\mathbf{Y}$ s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{V}^H \tag{1.14}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]_{(N-p)\times p} \tag{1.15}$$

et $\mathbf{S}_M = \mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_M)$. Une estimation du vecteur des coefficients de prédiction arrière est alors donnée par la relation :

$$\hat{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{Y}}^+\mathbf{y} \tag{1.16}$$

où $^+$ dénote la pseudo-inverse de Moore-Penrose. L'utilisation de la SVD tronquée permet d'améliorer le rapport signal-sur-bruit (RSB) des données entraînant ainsi une meilleure estimation du vecteur $\hat{\mathbf{b}}$. Finalement, une estimation des pôles $z_i$ est obtenue à partir des racines de $\hat{B}(z)$. En effet, $M$ racines du polynôme $\hat{B}(z)$ tendent à apparaître, dans le plan complexe, à l'extérieur du cercle unité aux positions $1/z_i$. Les $p-M$ autres racines, appelées pôles du bruit, tendent à rester à l'intérieur du cercle unité. La distinction entre les pôles du signal et ceux du bruit se fait sur cette base. Dorénavant, quelle que soit la méthode d'estimation, on utilisera donc systématiquement les équations de prédiction arrière afin de pouvoir utiliser ce critère (appelé critère du cercle unitaire).

La méthode KT considère uniquement le bruit intervenant dans la matrice $\mathbf{Y}$ et non dans le vecteur $\mathbf{y}$. L'approche TLS (*total least squares*) [RY87, SYM94b] permet de prendre en compte la présence de bruit dans le vecteur $\mathbf{y}$. Elle consiste à calculer la SVD de la matrice $[\mathbf{y}|\mathbf{Y}]$ et de tronquer toutes les valeurs singulières sauf les $M$ premières. Ceci conduit à l'équation de prédiction modifiée suivante :

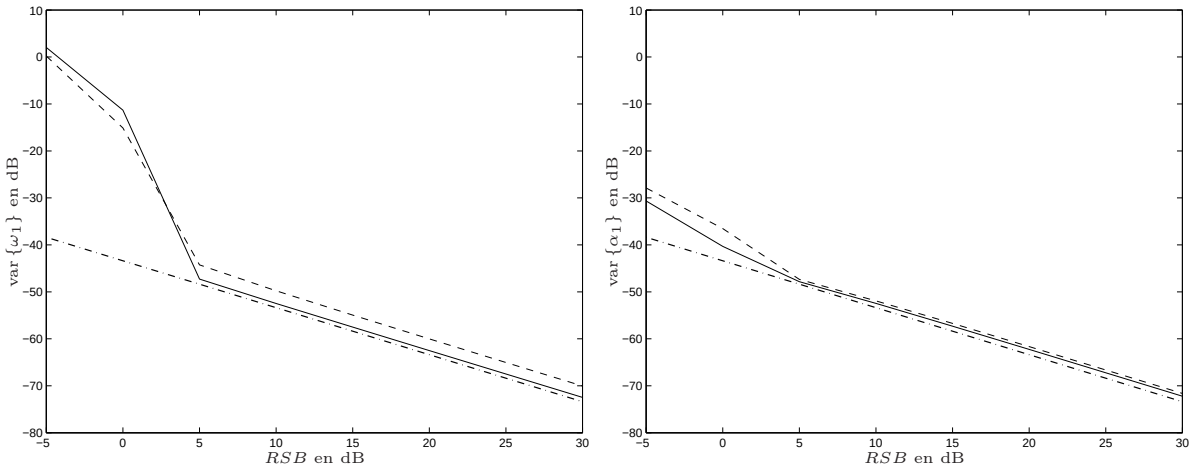
$$\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{y}} \tag{1.17}$$

dont la solution est :

$$\mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{Y}}^+\tilde{\mathbf{y}} \tag{1.18}$$

Rahman et Yu [RY87] ont proposé une méthode pour calculer $\tilde{\mathbf{Y}}^+$ directement à partir de la SVD de $[\mathbf{y}|\mathbf{Y}]$.

La méthode KT, comme toute autre méthode utilisant la SVD tronquée, ne possède de bonnes performances que lorsque le rapport signal-sur-bruit est supérieur à un certain seuil. Au dessous de ce seuil, la variance d'estimation se dégrade rapidement [TKV91]. Ce phénomène est appelé effet de seuil (*threshold effect*). Quand le niveau de bruit est supérieur à un seuil, certaines valeurs singulières du bruit deviennent plus grandes que celles du signal. Ainsi, des valeurs singulières du bruit interviennent dans le calcul du vecteur $\mathbf{b}$, ce




*(a)* var $\{\omega_1\}$ *(b)* var $\{\alpha_1\}$

FIGURE 1.1 – Phénomène *threshold effect*. Méthode KT avec 200 réalisations du bruit. (—) $p = 20$ ; (−−) $p = 30$ ; (− · −) borne de Cramér-Rao.

qui conduit à une dégradation importante des performances. La figure 1.1 représente la variance d'estimation et la borne de Cramér-Rao (Annexe A) d'une sinusoïde amortie avec $\omega_1 = 2\pi 0.1$, $\alpha_1 = 0.02$ et $N = 100$.

On remarque, comme attendu, qu'au dessous d'un seuil de RSB (ici $\sim 5$ dB), la variance s'éloigne rapidement de la borne de Cramér-Rao. Cet effet se produit quel que soit l'ordre utilisé et est visible, à la fois, sur les estimations de la fréquence et de l'amortissement.

Le choix optimal de l'ordre de prédiction $p$ n'est, en général, traité dans la littérature que dans le cas d'une seule sinusoïde pure [KPTV87, HS90]. L'approche utilisée est fondée sur une analyse de perturbation à l'ordre 1 (valable à RSB élevé). Pour un signal $x(n) = h_1 e^{\jmath\omega_1 n}$, la variance d'estimation de la fréquence $\omega_1$ par la méthode KT est [HS90] :

$$\text{var}\,\{\omega_1\} = \frac{\sigma_e^2}{|h_1|^2}\frac{2(2p+1)}{3(N-p)^2 p(p+1)},\ \text{pour } p \leq N/2$$

Elle est minimisée pour $p = N/3$ et elle est égale à :

$$\min\ \text{var}\,\{\omega_1\} = \frac{\sigma_e^2}{|h_1|^2}\frac{9(2N+3)}{2N^3(N+3)} \tag{1.19}$$

Pour la version de la méthode Tufts et Kumaresan qui utilise la prédiction avant *et* arrière (pour les sinusoïdes pures) et appelée ici TK [TK82], la variance d'estimation est [HS90] :

$$\text{var}\,\{\omega_1\} = \frac{\sigma_e^2}{|h_1|^2}\frac{1}{p(N-p)^2},\ \text{pour } p \leq N/2$$

Cette dernière est minimisée pour $p = N/3$. On montre que l'expression équivalente, dans le

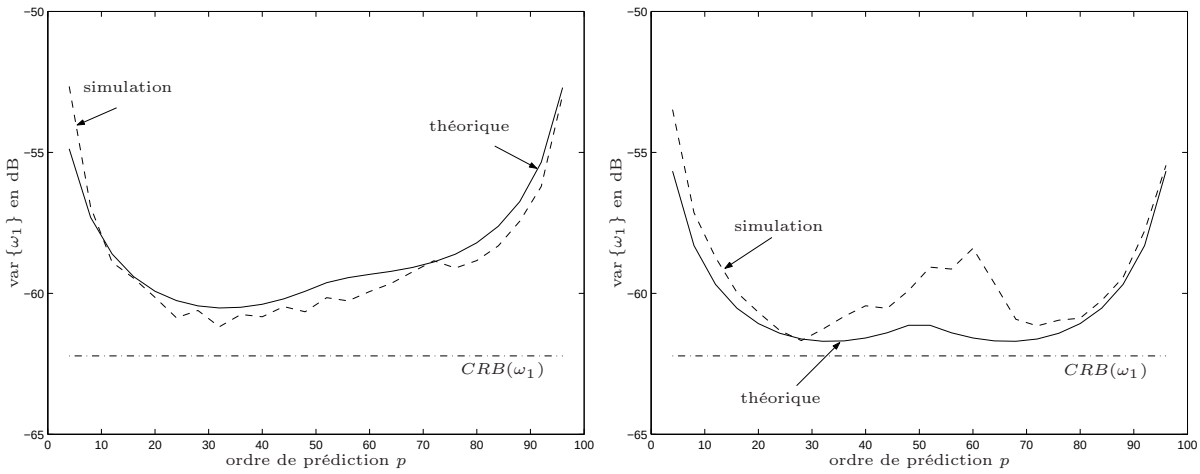
cas $p > N/2$, est minimisée pour $p = 2N/3$. La variance correspondante est :

$$\min \ \text{var}\{\omega_1\} = \frac{\sigma_e^2}{|h_1|^2}\frac{27}{4N^3} \tag{1.20}$$

ce qui est très proche de la borne de Cramér-Rao (cf. Annexe A) :

$$CRB(\omega_1) = \frac{\sigma_e^2}{|h_1|^2}\frac{6}{N(N^2-1)} \tag{1.21}$$

La figure 1.2 présente les variances d'estimation théorique et estimée dans le cas d'une sinusoïde pure ($\omega_1 = 2\pi 0.1$, $N = 100$) à 10 dB en utilisant 200 réalisations du bruit. On constate que la variance d'estimation de la fréquence $\omega_1$ possède un minimum assez large autour de $p = N/2$, pour la méthode KT et entre $p = N/3$ et $p = 2N/3$, pour la méthode TK. La variance plus faible dans le deuxième cas s'explique par l'exploitation de la prédiction avant et arrière, mieux adaptée aux sinusoïdes non-amorties.




*(a)* Méthode KT *(b)* Méthode TK

FIGURE 1.2 – Ordre de prédiction optimal pour les méthodes KT (prédiction arrière) et TK (prédiction avant-arrière).

Concernant les sinusoïdes amorties, une étude statistique de la variance d'estimation du facteur d'amortissement est décrite dans [OC89]. Considérant une seule sinusoïde amortie, les auteurs ont montré que la variance d'estimation du facteur d'amortissement est également minimisée dans l'intervalle $N/3 \leq p \leq 2N/3$. Ce résultat peut être généralisé dans le cas de plusieurs exponentielles, à condition que l'espacement entre les fréquences soit suffisamment grand.

La méthode KT nous intéresse plus particulièrement parce que bien adaptée aux sinusoïdes amorties, contrairement à la méthode TK. Dans un cas comme dans l'autre, on constate que l'ordre $p$ permettant d'assurer une variance minimale est au moins de l'ordre de $N/3$, ce qui peut constituer un handicap en présence de signaux longs ($N$ grand).

### 1.3.3 Méthode Matrix Pencil

La méthode Matrix Pencil exploite la structure en « faisceau de matrices » du signal non-bruité $x(n)$. Cette structure repose sur une des propriétés des signaux exponentiels qui est décrite ci-dessous.

On commence par définir les matrices $\mathbf{X}_0$ et $\mathbf{X}_1$ :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(p-1) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-p-1) & x(N-p) & \cdots & x(N-2) \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

et

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(p) \\ x(2) & x(3) & \cdots & x(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-p) & x(N-p+1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

où $p$ est appelé paramètre du faisceau de matrices. Il joue le même rôle que l'ordre de prédiction (ou de sur-paramétrisation) qui apparaît dans la méthode KT.

Les matrices $\mathbf{X}_0$ et $\mathbf{X}_1$ peuvent être décomposées de la façon suivante :

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{Z}_l \mathbf{H} \mathbf{Z}_r \tag{1.24}$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_l \mathbf{H} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_r \tag{1.25}$$

où

$$\mathbf{Z}_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-p-1} & z_2^{N-p-1} & \cdots & z_M^{N-p-1} \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{p-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{p-1} \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

$$\mathbf{H} = \mathrm{diag}(h_1, h_2, ..., h_M) \tag{1.28}$$

$$\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(z_1, z_2, ..., z_M) \tag{1.29}$$

Un faisceau de matrices est simplement une combinaison linéaire de deux matrices. Dans

notre cas, le faisceau de matrices $\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0$, où $z$ est un scalaire, peut s'écrire :

$$\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0 = \mathbf{Z}_l\mathbf{H}(\mathbf{Z} - z\mathbf{I}_M)\mathbf{Z}_r \tag{1.30}$$

Quand $z \neq z_i$, la matrice $\mathbf{Z} - z\mathbf{I}_M$ est de rang $M$. Mais pour $z = z_i$, la matrice $\mathbf{Z} - z\mathbf{I}_M$ est de rang $M-1$. Par conséquent, les pôles du signal réduisent le rang du faisceau de matrices $\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0$ pour $M \leq p \leq N - M$ [HS90]. Autrement dit, les pôles $z_i$ sont les valeurs propres généralisées de la paire $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0)$ :

$$(\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0)\mathbf{v} = 0 \tag{1.31}$$

$$\mathbf{w}^H(\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0) = 0 \tag{1.32}$$

où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont les vecteurs propres généralisés du faisceau $\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0$. Pour déterminer les pôles $z_i$, on utilise les propriétés suivantes :

1. $\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1$ (ou $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_0^+$) a $M$ valeurs propres égales aux pôles $z_i$ et $p - M$ (ou $N - p - M$) valeurs propres nulles.
2. $\mathbf{X}_1^+\mathbf{X}_0$ (ou $\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1^+$) a $M$ valeurs propres égales à $1/z_i$ et $p - M$ (ou $N - p - M$) valeurs propres nulles.

Ces propriétés découlent directement de la définition des valeurs propres généralisées [GL89]. Ainsi, par exemple, en pré-multipliant l'équation (1.31) par $\mathbf{X}_0^+$, il vient :

$$\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1\mathbf{v} = z\mathbf{v} \tag{1.33}$$

ce qui implique bien que $z$ soit une valeur propre de la matrice $\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1$.
Dans la pratique, on n'a évidemment pas accès au signal non-bruité. On opère alors directement sur les données bruitées, mais l'utilisation de la SVD est nécessaire pour effectuer la sélection des valeurs singulières liées au signal. On construit donc les matrices $\mathbf{Y}_0$ et $\mathbf{Y}_1$ de la même façon que pour $\mathbf{X}_0$ et $\mathbf{X}_1$. La méthode Matrix Pencil peut ensuite être décrite par les étapes suivantes :

1. SVD de la matrice $\mathbf{Y}_1$ : $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H$.
2. Estimation du sous-espace signal de la matrice $\mathbf{Y}_1$ en gardant les $M$ plus grandes valeurs singulières dans $\mathbf{S}$ : $\tilde{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{U}_M\mathbf{S}_M\mathbf{V}_M^H$ ; $\mathbf{U}_M$ et $\mathbf{V}_M$ contiennent les $M$ premières colonnes de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$, respectivement ; $\mathbf{S}_M$ est le bloc $M \times M$ supérieur gauche de la matrice $\mathbf{S}$.
3. La matrice :
$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{Y}_1^+\mathbf{Y}_0 = \mathbf{V}_M\mathbf{S}_M^{-1}\mathbf{U}_M^H\mathbf{Y}_0 \tag{1.34}$$
possède $M$ valeurs propres qui sont des estimations des inverses des pôles $(1/z_i)$, les $p - M$ autres valeurs propres étant nulles.

La matrice $\mathbf{Z}_p$ contenant seulement $M$ valeurs propres non nulles, il est souhaitable de calculer plutôt une matrice $\mathbf{Z}_M$ de dimension $M \times M$. On montre alors [HS90] :

$$\mathbf{Z}_M = \mathbf{S}_M^{-1}\mathbf{U}_M^H\mathbf{Y}_0\mathbf{V}_M \tag{1.35}$$

La méthode Matrix Pencil présentée ci-dessus tente d'éliminer le bruit dans une seule des deux matrices $\mathbf{Y}_1$ *ou* $\mathbf{Y}_0$. Il existe une variante de cette méthode, appelé TLS-Matrix Pencil, qui prend en compte la présence du bruit dans les deux matrices simultanément [Chi96]. En terme de variance d'estimation des fréquences, la méthode Matrix Pencil est plus performante que la méthode KT et moins performante que la méthode TK, dans le cas de sinusoïdes pures à RSB élevé [HS90]. Il existe une variante de l'approche Matrix Pencil utilisant, à la fois, une « prédiction » avant et arrière qui a statistiquement les mêmes performances que la méthode TK [HS90].

### 1.3.4 Approximation directe des données

La méthode ADD (ou méthode de Kung) relève du concept de la représentation d'état des systèmes [KAR83]. Pour décrire cette approche, on définit le vecteur d'état suivant :

$$\mathbf{x}_c(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M+1) \end{bmatrix}$$

L'équation de propagation (ou équation d'état) est définie par :

$$\mathbf{x}_c(n+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{M-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_M & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(n)$$

et l'équation d'observation par :

$$y_c(n) = [1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]\mathbf{x}_c(n)$$

Donc, la représentation d'état du système correspondant au modèle exponentiel est :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c(n+1) &= \mathbf{F}_c\mathbf{x}_c(n) \\ y_c(n) &= \mathbf{h}_c\mathbf{x}_c(n) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Les pôles du signal $z_i$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbf{F}_c$. En effet, le polynôme caractéristique de $\mathbf{F}_c$ est $A(z)$ défini par l'équation (1.3). Donc, suivant les valeurs propres de $\mathbf{F}_c$, le signal résultant est amorti ou non. La méthode d'estimation dans l'espace d'état consiste à retrouver la matrice $\mathbf{F}_c$ (d'une certaine réalisation) à partir des données. Puisque le triplet $(\mathbf{F}, \mathbf{x}_c(0), \mathbf{h}_c)$ n'est pas unique, il est possible de choisir la réalisation qui soit la plus robuste au bruit. Dans le cas de sinusoïdes pures, celle-ci est obtenue en choisissant une matrice $\mathbf{F}_c$ unitaire [RA92].

L'estimation des paramètres du modèle (1.36) est basée sur des factorisations matricielles. D'après la représentation d'état (1.36), le signal sinusoïdal amorti est la réponse d'un système linéaire à une entrée nulle avec des conditions initiales non-nulles $\mathbf{x}_c(0)$ :

$$x(n) = y_c(n) = \mathbf{h}_c \mathbf{F}_c^n \mathbf{x}_c(0) \tag{1.37}$$

Cette équation indique que la matrice de Hankel $\mathbf{X}$, formée à partir de la séquence $x(n)$, peut être factorisée :

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(p) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-p-1) & x(N-p) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_c \\ \mathbf{h}_c\mathbf{F}_c \\ \vdots \\ \mathbf{h}_c\mathbf{F}^{N-p-1} \end{bmatrix} [\mathbf{x}_c(0)\ \mathbf{F}_c\mathbf{x}_c(0)\ \cdots\ \mathbf{F}_c^p\mathbf{x}_c(0)] \\
&= \mathcal{O}\mathcal{C}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Les matrices $\mathcal{O}$ et $\mathcal{C}$ sont connues dans la théorie des systèmes linéaires respectivement sous les noms de matrices d'observabilité et de commandabilité étendues. La matrice $\mathbf{F}_c$ peut être calculée à partir de $\mathcal{O}$. En effet, il suffit de décomposer $\mathcal{O}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_c \\ \mathbf{h}_c\mathbf{F}_c \\ \vdots \\ \mathbf{h}_c\mathbf{F}^{N-p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_1 \\ \mathbf{h}_c\mathbf{F}^{N-p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_c \\ \mathcal{O}_2 \end{bmatrix}$$

d'où l'on peut facilement déduire la relation :

$$\mathcal{O}_1\mathbf{F}_c = \mathcal{O}_2$$

La solution s'écrit donc :

$$\mathbf{F}_c = \mathcal{O}_1^+ \mathcal{O}_2 \tag{1.39}$$

où $\mathcal{O}_1^+$ est la pseudo-inverse de $\mathcal{O}_1$. Il suffit donc de trouver une matrice $\mathcal{O}$ pour déterminer $\mathbf{F}_c$. Ceci peut être obtenu en décomposant $\mathbf{X}$ en valeurs singulières :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H$$

et en posant $\mathcal{O} = \mathbf{U}\mathbf{S}^{1/2}$ [KAR83, RA92]. Il est à noter que le nombre de valeurs singulières non-nulles dans $\mathbf{S}$ est égal à $M$.
Bien sûr, en présence de bruit, il est nécessaire de procéder à une troncature des valeurs singulières afin de réduire la sensibilité.

Pour résumer, la méthode de Kung peut donc être décomposée en deux étapes. La première est l'estimation (linéaire) de la matrice $\mathbf{F}_c$ en utilisant l'équation (1.39). La deuxième étape nécessite le calcul des valeurs propres de $\mathbf{F}_c$ pour retrouver les pôles du signal.
Rao et Arun [RA92] montrent que cette méthode atteint la même variance d'estimation que l'approche TK pour une approximation d'ordre 1. La méthode ADD est donc plus performante que l'approche Matrix Pencil présentée précédemment. Ces résultats sont bien sûr établis dans les cas d'une sinusoïde pure. Nous comparons par la suite les performances de ces méthodes dans le cas de l'estimation des paramètres de sinusoïdes amorties.

## 1.4 Méthode du maximum de vraisemblance

Les méthodes décrites précédemment sont fondées uniquement sur les caractéristiques du modèle non-bruité des exponentielles amorties. Elles sont ensuite généralisées pour tenir compte de la présence de bruit, mais elles ne tiennent pas compte directement des propriétés de ce dernier. Il existe, bien sûr, des approches reposant sur des critères statistiques qui, de ce fait, utilisent la densité de probabilité du bruit. Cependant, les estimateurs obtenus sont généralement plus compliqués à mettre en oeuvre. On peut citer, par exemple, l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE : *maximum likelihood estimator*) et l'estimation bayésienne. On se contentera ici de présenter le principe de l'estimateur MLE.
On pose :

$$\theta = [A_1 \ \cdots \ A_M \ \phi_1 \ \cdots \ \phi_M \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_M \ \omega_1 \ \cdots \ \omega_M]^T \tag{1.40}$$

le vecteur de paramètres inconnus du signal (on suppose que $\sigma_e^2$ est connue). D'après le modèle (1.1), le vecteur $\mathbf{e} = [e(0) \ e(1) \ \cdots \ e(N-1)]^T$ est distribué selon une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_e^2\mathbf{I})$. Par conséquent, la fonction de vraisemblance du vecteur $\mathbf{y} = [y(0) \ y(1) \ \cdots \ y(N-1)]^T$ pour un vecteur $\theta$ donné est :

$$L(\mathbf{y}|\theta) = \frac{1}{\pi^N \sigma_e^{2N}} e^{-\frac{1}{\sigma_e^2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^H(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \tag{1.41}$$

où $\mathbf{x} = [x(0)\ x(1)\ \cdots\ x(N-1)]^T$. Le MLE de $\theta$ s'obtient en maximisant $L(\mathbf{y}|\theta)$ ; c'est-à-dire en minimisant la fonction :

$$J(\theta) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^H(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tag{1.42}$$

Or, le vecteur signal $\mathbf{x}$ peut être factorisé de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix} = \mathbf{Zh} \tag{1.43}$$

Donc

$$J(\theta) = J(\mathbf{h}, \mathbf{Z}) = (\mathbf{y} - \mathbf{Zh})^H(\mathbf{y} - \mathbf{Zh}) \tag{1.44}$$

Le problème de minimisation étant linéaire par rapport à $\mathbf{h}$, le MLE de $\mathbf{h}$ pour une matrice de Vandermonde $\mathbf{Z}$ donnée est :

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{Z}^H\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^H\mathbf{y} \tag{1.45}$$

Le MLE de $\mathbf{Z}$ s'obtient en remplaçant $\mathbf{h}$ par $\hat{\mathbf{h}}$ dans l'équation (1.44) :

$$J_1(\mathbf{Z}) = \mathbf{y}^H(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^H\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^H)\mathbf{y} \tag{1.46}$$

Pour obtenir le MLE de $\mathbf{Z}$, on peut considérer une procédure de minimisation qui utilise directement l'équation (1.46). De façon générale, on peut montrer que le MLE est obtenu à partir des $M$ pics les plus grands du périodogramme mais à condition que l'espacement entre les composantes soit suffisamment grand par rapport à $1/N$ dans le cas de sinusoïdes pures [Kay88]. Pour des sinusoïdes très amorties ou des sinusoïdes pures faiblement espacées, on doit minimiser directement l'expression (1.46). Mais, à cause de la structure non convexe de la fonction coût, la procédure d'optimisation est très difficile, sinon impossible. Cependant, puisque le signal $x(n)$ s'exprime par une équation de récurrence, on peut modifier la fonction de coût pour faciliter le problème d'optimisation. C'est le principe de la méthode IQML [BM86] présentée dans l'annexe B. La méthode du maximum de vraisemblance est généralement considérée comme la référence. C'est pourquoi nous avons choisi de la présenter ici, à des fins de comparaisons. Notons toutefois que dans la pratique, elle s'avère difficile à mettre en oeuvre du fait de son caractère itératif et du nécessaire choix des valeurs initiales des paramètres.

## 1.5 Quelques exemples de simulation

On considère un signal contenant deux sinusoïdes complexes d'amplitudes égales, de fréquences $\omega_1 = 2\pi 0.1$ et $\omega_2 = 2\pi 0.2$. Deux cas sont étudiés :

– premier cas : deux sinusoïdes pures ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)
– deuxième cas : deux sinusoïdes amorties ($\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$).

Dans les deux cas, le nombre d'échantillons est $N = 30$. Les paramètres des deux sinusoïdes sont estimés par les méthodes présentées précédemment en utilisant 200 réalisations du bruit. La variance d'estimation de la fréquence $\omega_1$, dans le cas de deux sinusoïdes pures, est représentée sur la figure 1.3. La méthode IQML a été initialisée à l'aide des valeurs fournies par la méthode KT. De ce fait, elle est la plus performante, sa variance d'estimation étant la plus proche de la borne de Cramér-Rao, et son effet de seuil se produit pour la valeur de RSB la plus faible (ici $\sim -2$ dB). Les autres méthodes ont le même seuil de RSB et des performances différentes au delà de ce seuil. Les méthodes TK et Kung ont une variance plus faible que les méthode KT et Matrix Pencil. Les mêmes résultats sont obtenus pour la fréquence $\omega_2$. Cette simulation permet notamment de vérifier le résultat théorique énoncé par Hua et Sarkar [HS90], à savoir que la méthode Matrix Pencil présente une variance d'estimation meilleure que KT, mais moins bonne que TK. Notons toutefois que la méthode Matrix Pencil présentée ici n'utilise que la prédiction avant. De plus, on vérifie également la similarité de comportement entre les approches TK et ADD à RSB élevé.

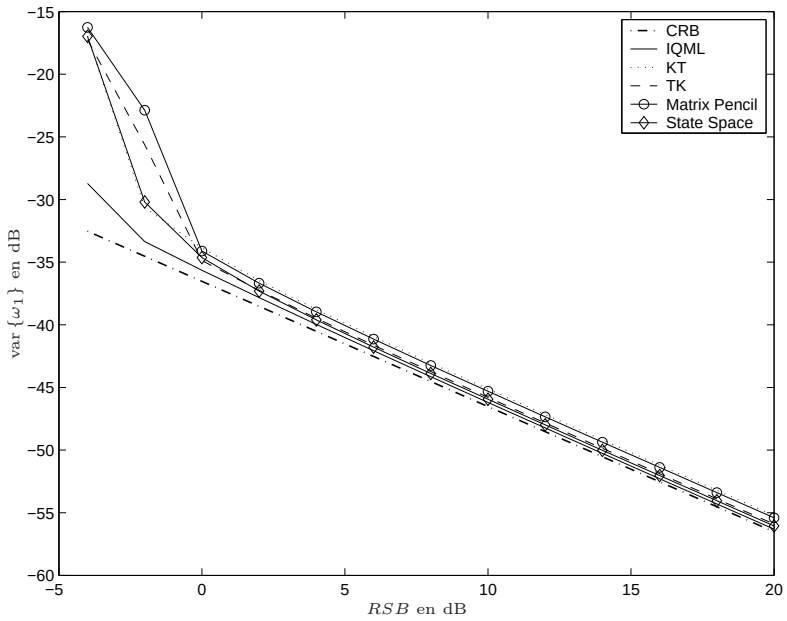
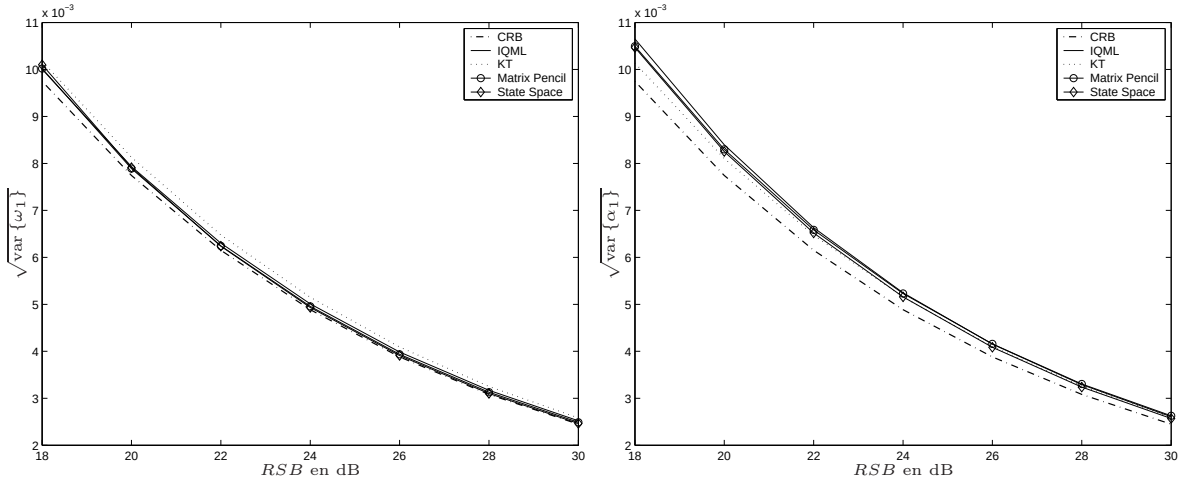



FIGURE 1.3 – Premier cas – variance d'estimation de la fréquence $\omega_1$.

La figure 1.4 montre les variances d'estimation de $\omega_1$ et $\alpha_1$ obtenus dans le deuxième cas. Concernant la fréquence $\omega_1$, les méthodes Kung et Matrix Pencil ont des performances très proches de IQML et meilleures que KT. Cependant, la méthode KT est meilleure que les trois autres concernant l'estimation du facteur d'amortissement $\alpha_1$. Ce résultat a été confirmé sur de nombreux autres exemples pratiques et de simulation. Dans la pratique, le nombre de composantes étant inconnu et compte tenu des limitations intrinsèques des différentes

méthodes d'estimation du nombre de modes, il est souhaitable de pouvoir appliquer le critère du cercle unitaire pour sélectionner les pôles correspondant à des modes amortis. Or, les performances de ce critère dépendent directement de la qualité de l'estimation des facteurs d'amortissement. C'est ce dernier élément qui nous a conduit à sélectionner la méthode KT pour la suite de notre étude qui porte essentiellement sur les signaux amortis.




*(a)* écart-type de $\omega_1$ *(b)* écart-type de $\alpha_1$

FIGURE 1.4 – Deuxième cas – écart-type de $\omega_1$ et $\alpha_1$.

## 1.6 Approches fondées sur les équations de Yule-Walker modifiées

### 1.6.1 Modélisation pseudo-ARMA

Nous avons vu au paragraphe 1.2 que le signal non-bruité $x(n)$ peut être représenté par l'équation de récurrence (1.2). Le signal $y(n)$ peut donc être exprimé par la relation :

$$y(n) - e(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i\big(y(n-i) - e(n-i)\big)$$

d'où :

$$y(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i y(n-i) + e(n) + \sum_{i=1}^{M} a_i e(n-i) \tag{1.47}$$

Dans l'hypothèse d'un bruit blanc $e(n)$, ce processus correspond à un processus ARMA particulier dont les parties AR et MA sont identiques. Dans le cas des sinusoïdes pures, les pôles, et donc les zéros, sont situés sur le cercle unitaire. C'est pour cette raison que le modèle ARMA de l'équation (1.47) est appelé pseudo-ARMA (ou ARMA « dégénéré » [SM97]). En présence de sinusoïdes amorties, les pôles et les zéros du modèle pseudo-ARMA restent

identiques mais sont localisés à l'intérieur du cercle. Il faut de plus noter que le bruit $e(n)$ est un bruit d'observation, et non pas un bruit d'entrée comme dans les processus ARMA classiques. En fait, l'entrée est une impulsion ce qui entraîne un processus non-stationnaire lorsque les pôles ne sont pas sur le cercle. En tout état de cause, l'important est de noter que la fonction de corrélation de ce processus vérifie la même équation de récurrence que celle suivie par la fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA stationnaire, ce qui sera montré par la suite. Ainsi, les techniques d'estimation ARMA restent adaptées au cas qui nous intéresse. Bien sûr, il n'est pas nécessaire d'estimer les coefficients de la partie MA, toute l'information spectrale étant déjà contenue dans la partie AR.
Un grand nombre de méthodes simplifient encore le problème en assimilant le processus ARMA à un processus AR, ce qui revient à négliger le troisième terme à droite de l'équation (1.47) et tirent ainsi profit des méthodes rapides d'estimation de paramètres AR. C'est le cas notamment de la méthode de Prony étendue. Pour que cette approximation soit valable, il faut cependant utiliser des ordres très supérieurs au nombre réel de composantes, mais également très supérieurs aux ordres nécessaires avec une modélisation ARMA. Dans le paragraphe suivant, on présente une approche possible pour l'estimation non-biaisée de la partie AR d'un processus ARMA.

### 1.6.2 Méthode de Yule-Walker d'ordre élevé (HOYW)

Une approche permettant une estimation non-biaisée de la partie AR d'un processus ARMA est la méthode dite Yule-Walker d'ordre élevé (HOYW : *High-Order Yule-Walker*) [Kay80, CL82, FP84, SST89, SMSL91] qui est étroitement liée à un autre estimateur appelé Variable Instrumentale surdéterminée à Observations Retardées [Fri84]. En raison de ses meilleures propriétés numériques, nous avons choisi d'utiliser la version SVD de cet estimateur. L'avantage de cette approche réside dans la possibilité de décaler la matrice d'autocorrélation, de façon à supprimer l'influence du bruit, ce qui conduit à une estimation non-biaisée de la partie AR, et ce même en présence de bruit coloré.

Le principe de cette méthode est à présent brièvement exposé. Examinons tout d'abord le problème d'un processus ARMA$(p, q)$ standard de la forme :

$$u(n) = -\sum_{i=1}^{p} a_i u(n-i) + \sum_{i=0}^{q} b_i e(n-i) \tag{1.48}$$

On sait que la séquence d'autocorrélation de ce processus vérifie la récurrence :

$$r(k) = -\sum_{i=1}^{p} a_i r(k-i), \ k \geq q \tag{1.49}$$

où $r(k) = \mathbb{E}\{u^*(n)u(n+k)\}$. En réécrivant l'équation (1.49) pour $k = q, q+1, ..., q+c$,

on obtient les équations de Yule-Walker modifiées lorsque $c = p$. Dans le cas où $c > p$, on obtient les équations de Yule-Walker sur-déterminées. En outre, si l'ordre $p$ est plus grand que l'ordre réel de la partie AR du processus ARMA (ce qui est généralement le cas pour garantir une résolution suffisante), on aboutit aux équations de Yule-Walker d'ordre élevé (HOYW) qui s'écrivent matriciellement :

$$\bar{\mathbf{R}}\mathbf{a} = -\bar{\mathbf{r}} \tag{1.50}$$

où $\bar{\mathbf{R}}$ est une matrice de dimension $c \times p$, et $\bar{\mathbf{r}}$ désigne le vecteur d'autocorrélations, de longueur $c$.

Le signal $y(n)$, contenant des sinusoïdes amorties, est un processus non-stationnaire, par conséquent, sa fonction de corrélation ne dépend pas seulement de l'écart $k$, mais aussi de l'instant $n$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} r_n(k) &= \mathbb{E}\left\{y^*(n)y(n+k)\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} h_j^* z_j^{*n}.h_i z_i^{n+k} + \sigma_e^2\delta(k) \\ &= \sum_{i=1}^{M} h_i'(n) z_i^k + \sigma_e^2\delta(k) \end{aligned} \tag{1.51}$$

où $h_i'(n) = h_i z_i^n \sum_{j=1}^{M} h_j^* z_j^{*n}$. Notons que, dans ce cas, la fonction d'autocorrélation dépend du temps $n$, mais elle satisfait à la même équation de récurrence (pour une valeur de $n$ donnée) qu'un processus ARMA standard :

$$r_n(k) = -\sum_{i=1}^{M} a_i r_n(k-i),\ k > M \tag{1.52}$$

Il est donc désormais clair qu'un système d'équations similaire au système (1.50) peut être établi dans le cas de sinusoïdes amorties. Toutefois, pour augmenter la résolution, on utilise une représentation d'ordre élevé ARMA$(p,p)$, où $p > M$. Dans ce cas, on obtient finalement les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} r_n(p) & r_n(p-1) & \cdots & r_n(1) \\ r_n(p+1) & r_n(p) & \cdots & r_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_n(p+c-1) & r_n(p+c-2) & \cdots & r_n(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_n(p+1) \\ r_n(p+2) \\ \vdots \\ r_n(p+c) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_n\mathbf{a} = \mathbf{r}_n \tag{1.53}$$

Puisque la fonction de corrélation est inconnue, elle doit être estimée à partir du signal $y(n)$.

Comme on l'a déjà souligné auparavant, il est préférable de travailler en prédiction arrière. Donc, suivant l'estimateur utilisé, l'équation précédente devient :

$$\hat{\mathbf{R}}\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{r}} \tag{1.54}$$

où

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \hat{r}(1,p+1) & \hat{r}(2,p+1) & \cdots & \hat{r}(p,p+1) \\ \hat{r}(1,p+2) & \hat{r}(2,p+2) & \cdots & \hat{r}(p,p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}(1,p+c) & \hat{r}(2,p+c) & \cdots & \hat{r}(p,p+c) \end{bmatrix}, \ \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}(0,p+1) \\ \hat{r}(0,p+2) \\ \vdots \\ \hat{r}(0,p+c) \end{bmatrix}$$

Ici $\hat{r}(i,j)$, dépendant de deux indices, peut être interprété comme une estimation de la fonction de corrélation d'un processus stationnaire ou non. Suivant l'horizon de sommation considéré, on aboutit à différents estimateurs de la fonction d'autocorrélation. Du point de vue de la prédiction linéaire, il existe cinq estimateurs communs appelés *pré-fenêtré*, *post-fenêtré*, *autocorrélation*, *covariance* et *covariance modifiée* [Mar87]. En raison de la nature transitoire des sinusoïdes amorties, seuls les estimateurs covariance et post-fenêtré peuvent être réellement utilisés. En effet, l'estimateur *pré-fenêtré* n'est pas bien adapté parce que les échantillons antérieurs à $n = 0$ sont implicitement supposés nuls. L'estimateur *autocorrélation*, qui correspond au cas classique des équations de Yule-Walker [BJ76] implique à la fois un pré- et un post-fenêtrage des données. Pour cette raison, il offre une résolution inférieure, en particulier pour des signaux courts, mais de plus il garantit la stabilité du modèle même en prédiction arrière, ce qui n'est pas souhaitable (application du critère du cercle unitaire). Parce qu'il utilise à la fois une prédiction avant et arrière, l'estimateur *covariance modifiée* est mieux adapté aux sinusoïdes non-amorties. Enfin, parmi les deux estimateurs restants, on retient l'estimateur *post-fenêtré* parce qu'il prend en compte un plus grand nombre d'observations et parce qu'il est en accord avec la nature amortie des signaux. Dans la mesure où l'on traite le signal $y(n)$ dans le sens chronologique inverse, afin de bénéficier des avantages de la prédiction arrière, c'est bien sûr l'estimateur *pré-fenêtré* qui devra être retenu. Ce dernier est donné par la relation [FP84] :

$$\hat{r}(i,j) = \frac{1}{N} \sum_{k=\max(i,j)}^{N-1} y_b(k-i) y_b^*(k-j) \tag{1.55}$$

où $y_b(n)$ correspond au signal $y(n)$ considéré dans le sens chronologique inverse. On peut montrer qu'en utilisant cet estimateur, la récurrence (1.49) est vérifiée (cf. annexe C).

L'estimation des paramètres AR est obtenue en résolvant l'équation (1.54) par une SVD tronquée (LS ou TLS). Concernant le nombre d'équations $c$ intervenant dans le système (1.54), plusieurs auteurs ont montré l'avantage de prendre $c \gg p$ dans le cas des signaux à bande étroite : la séquence de corrélation diminue lentement et les rangs élevés contiennent

de l'information utile [Cad82, FP84, Hen97]. Dans ce mémoire, quand ce paramètre n'est pas spécifié, nous utilisons toutes les autocorrélations disponibles, c'est-à-dire $c = N-p-1$. A ce stade, il est important de rappeler que les méthodes basées sur les équations de Yule-Walker modifiées permettent de prendre en compte une possible coloration du bruit en augmentant l'ordre de la partie MA. La prise en compte de la coloration du bruit ne peut s'effectuer explicitement avec les méthodes présentées dans le paragraphe 1.3. Bien sûr, il est possible de compenser le biais résultant en augmentant l'ordre de prédiction, mais ceci est parfois matériellement impossible.

### 1.6.3 Méthode de Händel

Nous avons vu que la méthode KT consiste à résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} y(1) & \cdots & y(p) \\ y(2) & \cdots & y(p+1) \\ \vdots & & \vdots \\ y(N-L-p) & \cdots & y(N-L-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-L-p-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{b} = -\mathbf{y} \tag{1.56}$$

où $L = 0$ dans la méthode KT. La méthode de Händel [Hän93] consiste à pré-multiplier les deux côtés de l'équation (1.56) par une matrice de type Hankel $\Psi$ de dimension $L \times (N-L-p)$ et constituée des données $\{y(p+1), ..., y(N-1)\}$ :

$$\Psi = \begin{bmatrix} y^*(p+1) & y^*(p+2) & \cdots & y^*(N-L) \\ y^*(p+2) & y^*(p+3) & \cdots & y^*(N-L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^*(p+L) & y^*(p+L+1) & \cdots & y^*(N-1) \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

où $L$ est un paramètre libre tel que $M \leq L < N-p$. En posant :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N-L-p}\Psi\mathbf{Y}, \ \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{N-L-p}\Psi\mathbf{y} \tag{1.58}$$

on aboutit au système d'équations :

$$\hat{\mathbf{R}}\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{r}} \tag{1.59}$$

On observe que ce système est comparable à celui obtenu dans l'équation (1.54). La différence réside dans l'expression de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation, qui s'écrit ici :

$$\hat{r}(i,j) = \frac{1}{N-L-p} \sum_{k=0}^{N-L-p-1} y(k+i)y^*(k+j) \tag{1.60}$$

L'estimateur de Händel est donc de la même classe que la méthode HOYW présentée dans le paragraphe précédent et il vérifie également la récurrence d'un processus ARMA (cf. annexe C). L'estimation des coefficients $b_i$ est obtenue par une décomposition en valeurs singulières et une approximation de rang $M$ de la matrice $\hat{\mathbf{R}}$. Les pôles du signal sont sélectionnés en utilisant le critère du cercle. Le plus grand avantage de la méthode de Händel par rapport à la méthode KT est sa complexité réduite. En effet, la méthode KT nécessite le calcul de la SVD d'une matrice de dimension $(N-p)\times p$, alors que dans la méthode de Händel, la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ est de dimension $L\times p$ où $L \ll N-p$. Pour une même complexité numérique, la méthode de Händel est supérieure en termes de précision [Hän93].

### 1.6.4 Etude d'un estimateur de l'autocorrélation

Nous avons vu que pour estimer les paramètres de sinusoïdes amorties en utilisant les équations de Yule-Walker, la fonction d'autocorrélation doit être estimée d'une façon convenable. Outre les estimateurs présentés précédemment, Ducasse [Duc97] propose un autre estimateur permettant de s'affranchir de la nature non-stationnaire des signaux amortis. Il est défini par la relation suivante :

$$\hat{r}(k) \triangleq \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} y^*(n)y(n+k),\ \ k=0,1,...,N-L \tag{1.61}$$

En fait, on peut considérer cet estimateur comme une variante de l'estimateur biaisé de la fonction d'autocorrélation, mais qui, contrairement à ce dernier, n'entraîne aucune supposition sur les données en dehors de la fenêtre. En effet, rappelons que l'estimateur biaisé implique un pré- et un post-fenêtrage des données. De ce point de vue, l'estimateur considéré est donc à rapprocher de la forme *covariance*.

Une fois les autocorrélations obtenues, les paramètres du signal sont estimés en utilisant les équations de Yule-Walker d'ordre élevé et une SVD tronquée. Pour différencier cette approche des précédentes, nous l'appellerons par la suite approche SVD-MHOYW.

On se propose ici d'analyser l'estimateur en question. Nous montrerons que, dans certaines conditions, une augmentation du RSB peut être escomptée conduisant à une estimation plus précise des pôles du signal.

Dans le cas du modèle exponentiel (1.1), l'estimateur (1.61) s'écrit :

$$\hat{r}(k) = \sum_{i=1}^{M} h'_i z_i^k + \epsilon(k) \tag{1.62}$$

où

$$h'_i = \frac{h_i}{L} \sum_{l=1}^{M} h_l^* f(z_i z_l^*; L) \tag{1.63}$$

$$\epsilon(k) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{l=1}^{M} \left[ h_l^* z_l^{*n} e(n+k) + h_l z_l^{n+k} e^*(n) + e^*(n) e(n+k) \right] \tag{1.64}$$

et $f(z; L)$ est une somme géométrique de raison $z$ :

$$f(z; L) = \sum_{n=0}^{L-1} z^n = \begin{cases} L, & \text{si } z = 1, \\ \frac{1-z^L}{1-z}, & \text{si } z \neq 1. \end{cases} \tag{1.65}$$

On pose $r(k) = \mathbb{E}\{\hat{r}(k)\}$. On peut facilement établir que :

$$r(k) = \sum_{i=1}^{M} h'_i z_i^k + \sigma_e^2 \delta(k) \tag{1.66}$$

Cette expression vérifie la récurrence :

$$r(k) = -\sum_{i=1}^{M} a_i r(k-i), \ k > M \tag{1.67}$$

où les coefficients $\{a_i\}_{i=1}^{M}$ sont les mêmes que ceux du polynôme $A(z)$ dans l'équation (1.3). Autrement dit, la séquence d'autocorrélations $\hat{r}(k)$ vérifie, en moyenne, la même équation de récurrence que celle du signal non-bruité $x(n)$, ce qui entraîne une estimation non-biaisée.

Nous considérons à présent une étude comparative du rapport signal-sur-bruit (RSB) offert, d'une part, par la séquence d'autocorrélation $\hat{r}(k)$ et, d'autre part, par la séquence $y(n)$, ce qui se justifie par le fait que ces deux séquences présentent les même modes. Les signaux étant amortis, le RSB est défini comme le RSB initial. Pour le signal $y(n)$, le RSB initial est défini pour chaque composante par le rapport :

$$\eta_i \triangleq \frac{|h_i|^2}{\sigma_e^2}, \ i = 1, ..., M \tag{1.68}$$

Pour pouvoir définir le RSB pour les autocorrélations, il est nécessaire de calculer la variance de $\hat{r}(k)$. On a $\mathbb{E}\{\epsilon(k)\} = \sigma_e^2 \delta(k)$, et

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{r}(k)\} = \text{var}\{\epsilon(k)\} &\triangleq \mathbb{E}\left\{ |\epsilon(k) - \sigma_e^2 \delta(k)|^2 \right\} \\ &= \frac{\sigma_e^4}{L} + \frac{\sigma_e^2}{L^2} \sum_{l=1}^{M} \sum_{r=1}^{M} \left[ h_l^* h_r f(z_l^* z_r; L) + h_l h_r^* (z_l z_r^*)^k f(z_l z_r^*; L) \right] \end{aligned} \tag{1.69}$$

Cette équation indique que var $\{\epsilon(k)\}$ dépend de l'écart $k$. Considérons le cas le plus pessimiste ; c'est-à-dire que var $\{\epsilon(k)\}$ est constante et est égale à sa valeur maximale :

$$\sigma_\epsilon^2 \triangleq \max_{k=0,\ldots,N-L} \text{var}\,\{\epsilon(k)\} \tag{1.70}$$

Par souci de simplicité, on considère que ce maximum est obtenu pour $k = 0$. Ceci n'est pas vrai en général, mais c'est le cas par exemple lorsque toutes les amplitudes $h_i$ sont réelles [DT02]. Si le maximum de la variance est obtenu en $k = 0$, l'expression de $\sigma_\epsilon^2$ devient alors :

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{\sigma_e^4}{L} + \frac{2\sigma_e^2}{L^2}\mathcal{R}e\Big\{\sum_{l=1}^{M}\sum_{r=1}^{M} h_l^* h_r f(z_l^* z_r; L)\Big\} \tag{1.71}$$

où $\mathcal{R}e\{\cdot\}$ désigne la partie réelle. Le RSB de chaque composante sinusoïdale dans la séquence d'autocorrélation peut maintenant être défini par le rapport :

$$\eta_i' \triangleq \frac{|h_i'|^2}{\sigma_\epsilon^2},\ i = 1, ..., M \tag{1.72}$$

Pour chaque composante, le gain *minimum* en RSB est défini par la relation :

$$g_i(L) \triangleq \frac{\eta_i'}{\eta_i} \tag{1.73}$$

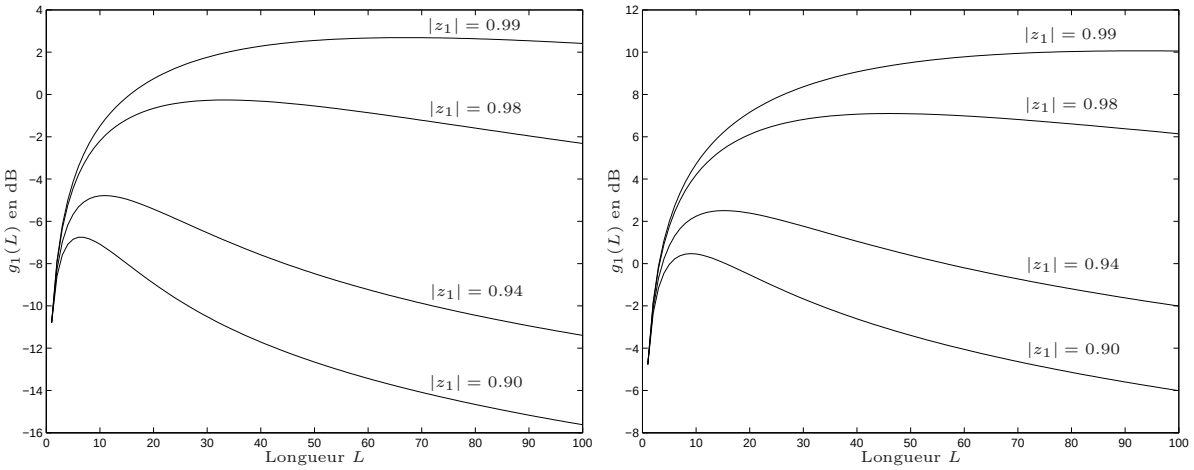
On dira que le RSB est amélioré si $g_i(L) > 1$.

### 1.6.4.1 Cas d'une seule sinusoïde amortie

Dans le cas d'une sinusoïde amortie, le gain en RSB $g_1(L)$ se réduit à l'expression :

$$g_1(L) = \frac{\eta_1 f^2(|z_1|^2; L)}{L + 2\eta_1 f(|z_1|^2; L)} \tag{1.74}$$

La figure 1.5 représente le gain en RSB en fonction de $L$, obtenu pour plusieurs valeurs de $|z_1|$ et du RSB initial $\eta_1$. On remarque que, suivant l'amortissement et le RSB initial, un gain peut être obtenu ou non. Globalement, le RSB est amélioré si les sinusoïdes ne sont pas trop amorties et/ou le RSB du signal original n'est pas trop faible. Dans ce cas, l'utilisation des autocorrélations à la place des données améliore la précision de l'estimation.
D'après la figure 1.5, on remarque également qu'il existe toujours une longueur optimale $L_{opt}$ pour laquelle la fonction $g_1(L)$ est maximisée. Cette longueur optimale dépend à la fois du RSB $\eta_1$ et du facteur d'amortissement, mais ne dépend pas de la fréquence $\omega_1$. Plus $z_1$ est proche du cercle unité ($|z_1| \to 1$ ou $\alpha_1 \to 0$), plus $L_{opt}$ est grand, et inversement. Indépendamment du fait que le RSB soit amélioré ou non, on cherche maintenant à estimer la valeur de $L_{opt}$. A cause du caractère non-linéaire de la fonction $f(z; L)$ dans l'équation (1.74),




*(a)* $\eta_1 = -10$ dB *(b)* $\eta_1 = 0$ dB

FIGURE 1.5 – Gain en RSB en fonction de la longueur $L$.

il n'est pas possible de calculer analytiquement $L_{opt}$. Une possibilité serait de rechercher le maximum en testant plusieurs valeurs de $L$, ou alors d'utiliser une méthode itérative ou encore une approximation polynômiale de la fonction $f(z;L)$. Cette dernière approche aboutit à une approximation de la fonction $g_1(L)$ par une fraction de deux polynômes en $L$ à partir de laquelle il est facile de déduire $L_{opt}$.

Le développement en série de Taylor de la fonction $f(z;L)$, autour de $L=0$, s'écrit :

$$f(z;L) = \frac{-1}{1-z}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\ln z)^j}{j!}L^j \tag{1.75}$$

Une bonne approximation peut être obtenue en retenant seulement $m$ termes de la somme infinie précédente. On obtient ainsi un polynôme d'ordre $m$ :

$$f(z;L) \simeq \sum_{j=0}^{m}\kappa_j(z)L^j \tag{1.76}$$

où $\kappa_0(z) = 0$ et $\kappa_j(z) = \frac{-(\ln z)^j}{(1-z)j!}$, pour $j = 1, ..., m$. Pour que cette approximation reste valable pour $L$ grand par rapport à 0, il faut que $|\ln z| < 1$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que lorsque $|\ln z| > 1$, la fonction $f(z;L)$ peut être approchée par une valeur fixe. Dans le cas d'une seule sinusoïde, l'argument $z$ de la fonction $f(z;L)$ doit être remplacé par $|z_1|^2$ qui vérifie la condition $|\ln|z_1|^2| < 1$ avec l'hypothèse d'un facteur d'amortissement raisonnable $(0 < \alpha_1 < 0.5)$. L'approximation de $g_1(L)$ est :

$$g_1(L) \simeq \frac{\eta_1\Big(\sum_{j=0}^{m}\kappa_j(|z_1|^2)L^j\Big)^2}{L + 2\eta_1\sum_{j=0}^{m}\kappa_j(|z_1|^2)L^j} \tag{1.77}$$

Le problème de maximisation de $g_1(L)$ par rapport à $L$ se réduit donc au calcul d'une racine réelle du polynôme obtenu en mettant la dérivée de $g_1(L)$ à 0. Le tableau 1.1 montre les longueurs optimales obtenues avec une approximation d'ordre $m = 10$. On peut constater que $L_{opt}$ augmente de façon quasi-exponentielle lorsque $|z|$ tend vers 1, ce qui est en conformité avec le fait que, pour une sinusoïde pure, la valeur optimale de $L$ n'existe pas (elle est infinie).

| $\|z\|$ | 0.90 | 0.92 | 0.94 | 0.96 | 0.98 | 0.99 | 0.999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -10 dB | 6 | 8 | 11 | 17 | 33 | 67 | 672 |
| 0 dB | 9 | 11 | 15 | 23 | 46 | 93 | 927 |
| 10 dB | 14 | 18 | 24 | 37 | 74 | 149 | 1494 |

TABLE 1.1 – Longueur optimale $L_{opt}$ obtenue avec une approximation polynômiale.

### 1.6.4.2 Cas de plusieurs sinusoïdes amorties

Dans le cas de plusieurs sinusoïdes, l'approximation polynômiale doit être opérée sur la variance $\sigma_\epsilon^2$ et sur chacune des amplitudes $h'_i$, données par les équations (1.71) et (1.63). Dans ce cas, l'argument $z$ de la fonction $f(z;L)$ doit être remplacé par $z_l^* z_r$, qui n'est pas toujours réel. En effet, le produit $z_l^* z_r$ pour $l \neq r$ est complexe, ce qui rend la somme $f(z_l^* z_r; L)$ oscillante. Il est évident qu'une fonction oscillante ne peut pas être bien approchée par un polynôme, surtout quand $\arg(z_l^* z_r)$ est grand (oscillations hautes fréquences). Ce problème se traduit par le fait que $|\ln z_l^* z_r| \geq 1$. En simulation, nous avons trouvé que, dans ce cas, $f(z_l^* z_r; L)$ ne nécessite pas d'approximation polynômiale et peut être remplacée par sa valeur finale ; c'est-à-dire $1/(1-z_l^* z_r)$ [DT02]. En revanche, lorsque $|\ln z_l^* z_r| < 1$, $f(z_l^* z_r; L)$ est bien approchée par un polynôme.
En utilisant cette remarque, l'approximation d'ordre $m$ de $h'_i$ s'écrit :

$$h'_i \simeq \frac{h_i}{L} \sum_{j=0}^{m} \Big[ \sum_{l=1}^{M} h_l^* \kappa_j(z_i z_l^*) \Big] L^j = \frac{h_i}{L} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j(z_i) L^j \tag{1.78}$$

et celle de $\sigma_\epsilon^2$ est :

$$\sigma_\epsilon^2 \simeq \frac{\sigma_e^4}{L} + \frac{2\sigma_e^2}{L^2} \sum_{j=0}^{m} \mathcal{R}e\Big\{ \sum_{l,r=1}^{M} h_l^* h_r \kappa_j(z_l^* z_r) \Big\} L^j = \frac{\sigma_e^4}{L} + \frac{2\sigma_e^2}{L^2} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j L^j \tag{1.79}$$

Le gain en RSB devient alors une fraction de deux polynômes en $L$ :

$$g_i(L) \simeq \frac{\big| \sum_{j=0}^{m} \lambda_j(z_i) L^j \big|^2}{L + 2\sum_{j=0}^{m} \gamma_j L^j} = \frac{\sum_{j=0}^{2m} \mu_j(z_i) L^j}{\sum_{j=0}^{m} \nu_j L^j} \tag{1.80}$$

La valeur optimale de $L$ qui correspond au maximum de $g_i(L)$ est la racine positive et réelle

du polynôme d'ordre $3m-1$ suivant :

$$P_i(L) = \sum_{j=1}^{2m} j\mu_j(z_i)L^{j-1}.\sum_{j=0}^{m}\nu_j L^j - \sum_{j=0}^{2m}\mu_j(z_i)L^j.\sum_{j=1}^{m} j\nu_j L^{j-1} \tag{1.81}$$

La figure 1.6 représente les gains en RSB obtenus pour deux sinusoïdes complexes : $z_1 = 0.96e^{j2\pi 0.08}$, $z_2 = 0.98e^{-j2\pi 0.08}$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$. En conséquence, on a $|\ln z_1^* z_2| = 1.0072 > 1$. Le gain approché (en pointillés sur la figure) est obtenu en utilisant une approximation polynômiale d'ordre $m = 30$. Les valeurs optimales de $L$ sont respectivement 23 et 54 pour la première et la deuxième sinusoïde. Elles coincident approximativement avec les maxima théoriques de $g_1(L)$ et $g_2(L)$.

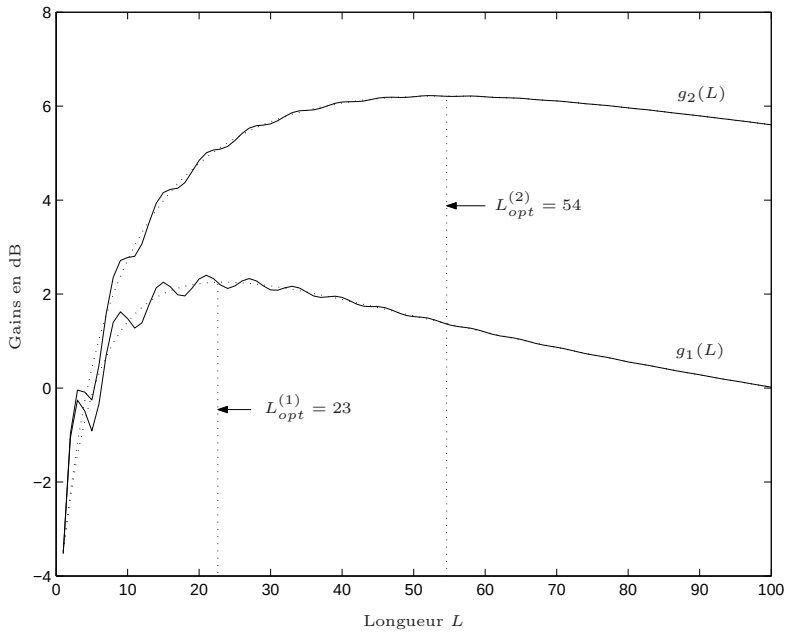



FIGURE 1.6 – Gains en RSB pour deux sinusoïdes complexes amorties à 0 dB.

### 1.6.4.3 Commentaires

La procédure présentée pour déterminer la longueur optimale à utiliser pour estimer les autocorrélations souffre néanmoins de plusieurs limitations :

1. Elle nécessite la connaissance de tous les paramètres du signal. Elle ne peut donc être utile qu'après une première estimation.

2. Pour chaque composante du signal, ou plus précisément, pour chaque paire $(h_i, \alpha_i)$, il existe une longueur optimale qui peut être différente de celle d'une autre paire $(h_j, \alpha_j)$. Dans ce cas de figure, il faut utiliser la plus petite longueur.

Une relation empirique a été déterminée, à partir de l'équation (1.74), pour calculer la longueur optimale pour une seule sinusoïde amortie :

$$L_{opt} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{(6-10e^{-2})\eta_1 + (10-e^2)(1-\alpha_1)}{(4-8e^{-2})\eta_1 + 5(1-\alpha_1)} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{1.5928\eta_1 + 0.8950(1-\alpha_1)}{\eta_1 + 1.7139(1-\alpha_1)} \tag{1.82}$$

Lorsque $\eta_1$ est grand, cette formule se réduit à :

$$L_{opt} = \frac{1.5928}{\alpha_1} \tag{1.83}$$

Dans ce cas, il suffit de connaître le facteur d'amortissement. Ce résultat peut être utilisé dans le cas de plusieurs sinusoïdes amorties, mais à condition que les composantes aient approximativement le même RSB, le même facteur d'amortissement et qu'elles soient suffisamment espacées.

### 1.6.5 Exemples

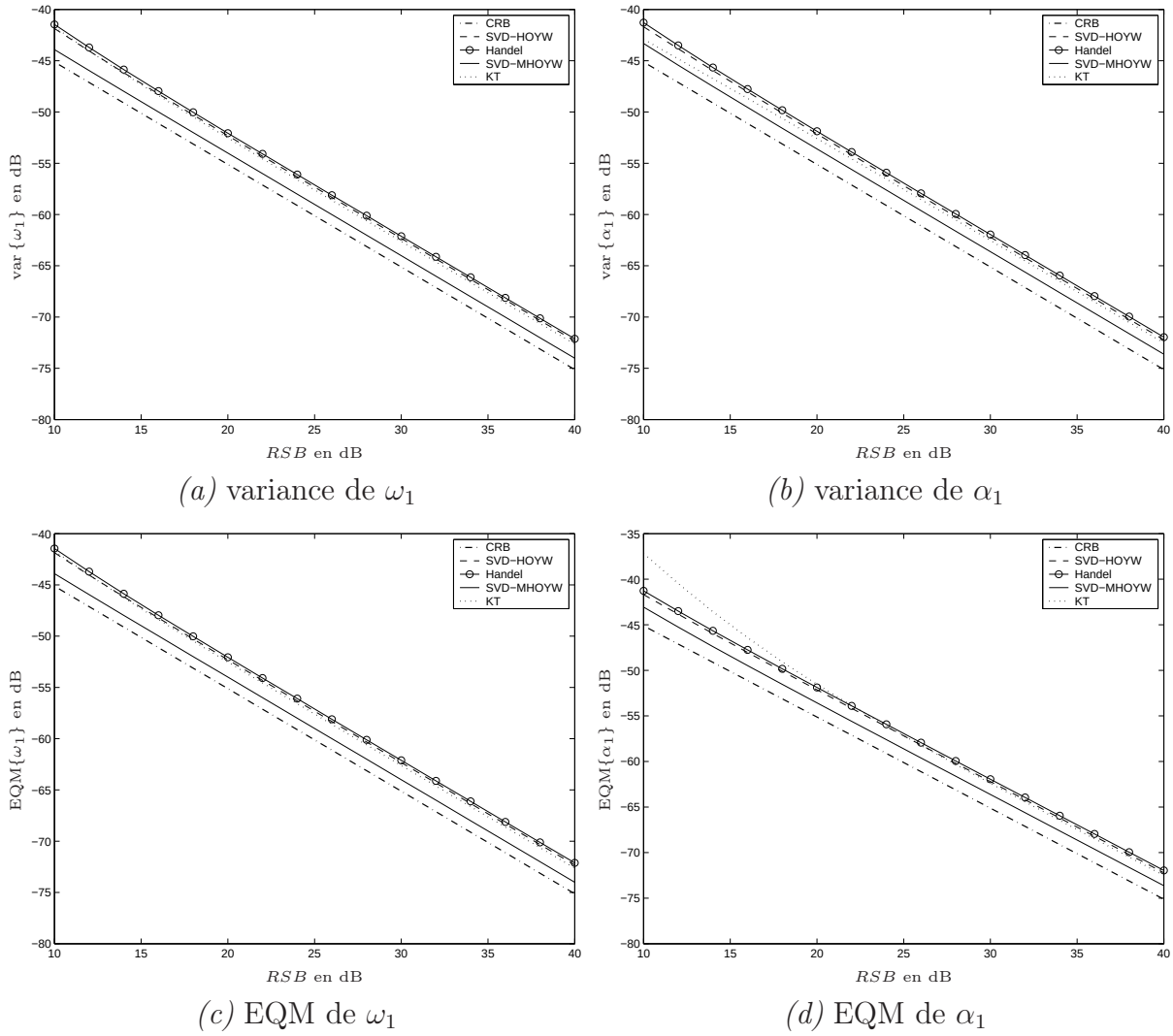
Dans ce paragraphe, on présente une comparaison des méthodes SVD-HOYW, Händel, SVD-MHOYW et KT dans les cas d'une seule puis de deux sinusoïdes amorties. Le nombre d'échantillons est fixé à $N = 60$ et l'ordre de prédiction, pour chaque méthode, est $p = 10$. Les résultats sont obtenus en utilisant 1000 réalisations du bruit. Le RSB minimal considéré est de 10dB, ce qui est peu si l'on considère les amortissements relativement forts qui sont choisis.

#### 1.6.5.1 Une sinusoïde amortie

On considère un signal contenant une seule sinusoïde amortie dont les paramètres sont : $\omega_1 = 2\pi 0.1$ et $\alpha_1 = 0.04$. La variance et l'erreur quadratique moyenne (EQM) des paramètres $\omega_1$ et $\alpha_1$ sont représentées sur la figure 1.7. En premier lieu, on peut constater que les méthodes de type Yule-Walker sont non-biaisées, alors que la méthode KT est biaisée, surtout pour l'estimation du facteur d'amortissement à faible RSB. Deuxièmement, il apparaît que la méthode SVD-MHOYW ($L = 20$) est supérieure aux autres approches, du point de vue de la variance et de l'EQM. Les performances des méthodes SVD-HOYW et Händel ($L = 15$) sont pratiquement équivalentes.

#### 1.6.5.2 Deux sinusoïdes amorties

Les résultats obtenus avec deux sinusoïdes amorties ($\omega_1 = 2\pi 0.1$, $\alpha_1 = 0.04$, $\omega_2 = 2\pi 0.2$ et $\alpha_2 = 0.05$) sont représentés sur la figure 1.8. On constate que le biais de la méthode KT est plus apparent sur les facteurs d'amortissement. Ce biais est très important à faible RSB et il tend vers zéro lorsque le RSB augmente. Encore une fois, la méthode SVD-MHOYW



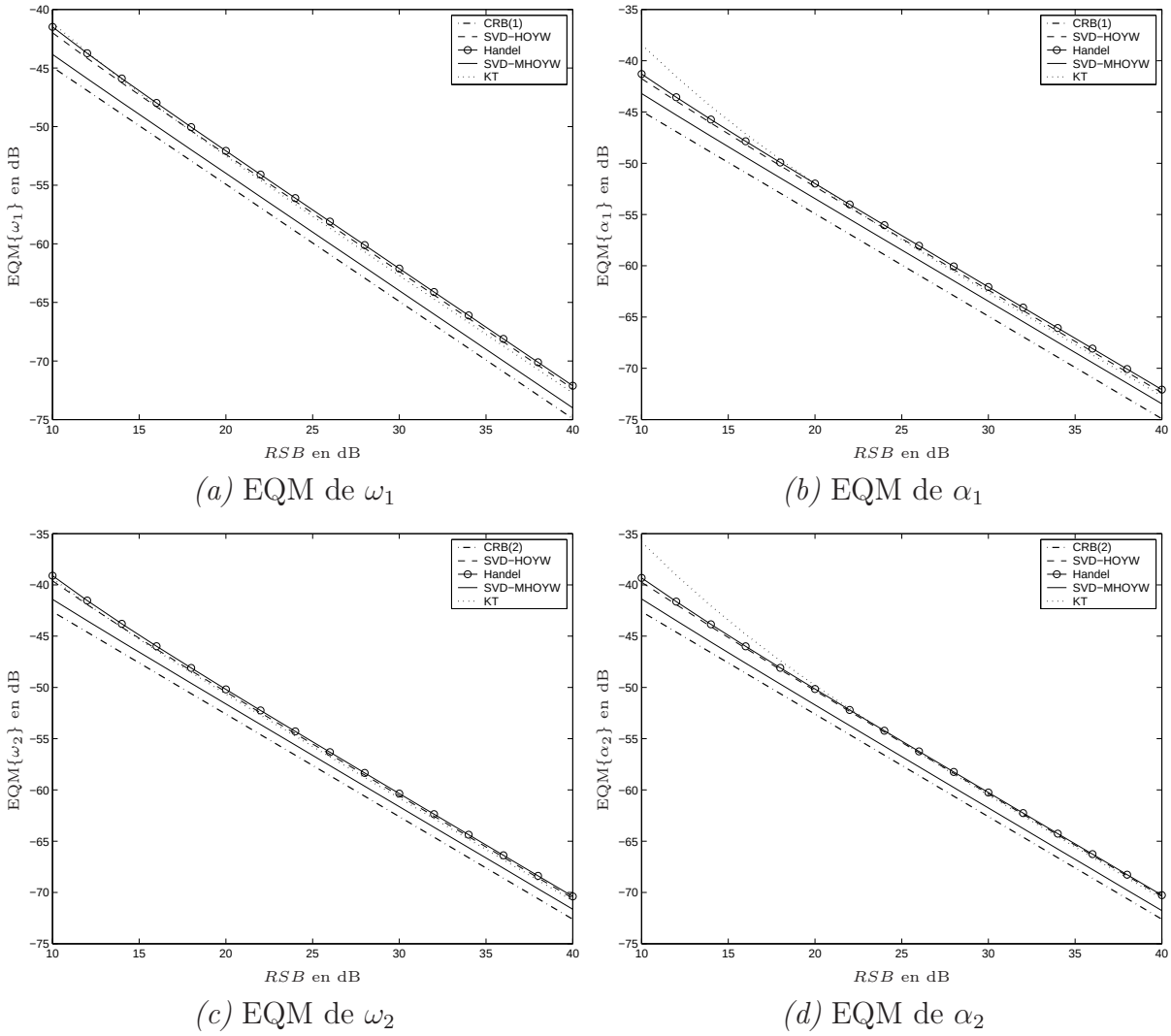

*(a)* variance de $\omega_1$ *(b)* variance de $\alpha_1$

*(c)* EQM de $\omega_1$ *(d)* EQM de $\alpha_1$

FIGURE 1.7 – Variance et erreur quadratique moyenne en fonction du RSB pour une sinusoïde amortie.

aboutit à l'EQM la plus proche de la borne de Cramér-Rao et, donc, possède la plus grande précision.

Sur le plan de la détection, la supériorité de cette approche est également mise en évidence [DT02]. Par exemple, la figure 1.9 représente, dans le plan complexe, les pôles estimés (en prédiction arrière) par les quatre approches pour un RSB de 0 dB. Dans cette figure, les cercles sont centrés sur la moyenne estimée des pôles et leur rayon est égal à l'écart-type estimé. Il est clair que la méthode KT présente le biais d'estimation le plus important. De plus, dans ce cas, il est pratiquement impossible de distinguer les pôles associés au bruit de ceux correspondant au signal en utilisant le critère du cercle unité. En effet, ces derniers sont essentiellement à l'intérieur du cercle. La méthode de Händel (figure 1.9b) présente un biais moins important que celui observé avec la méthode KT. Cependant, ceci est obtenu au détriment de la variance d'estimation. D'après la figure 1.9c, on constate que l'approche SVD-HOYW permet de diminuer la variance sans pour autant pénaliser le biais. Enfin, la




*(a)* EQM de $\omega_1$ *(b)* EQM de $\alpha_1$

*(c)* EQM de $\omega_2$ *(d)* EQM de $\alpha_2$

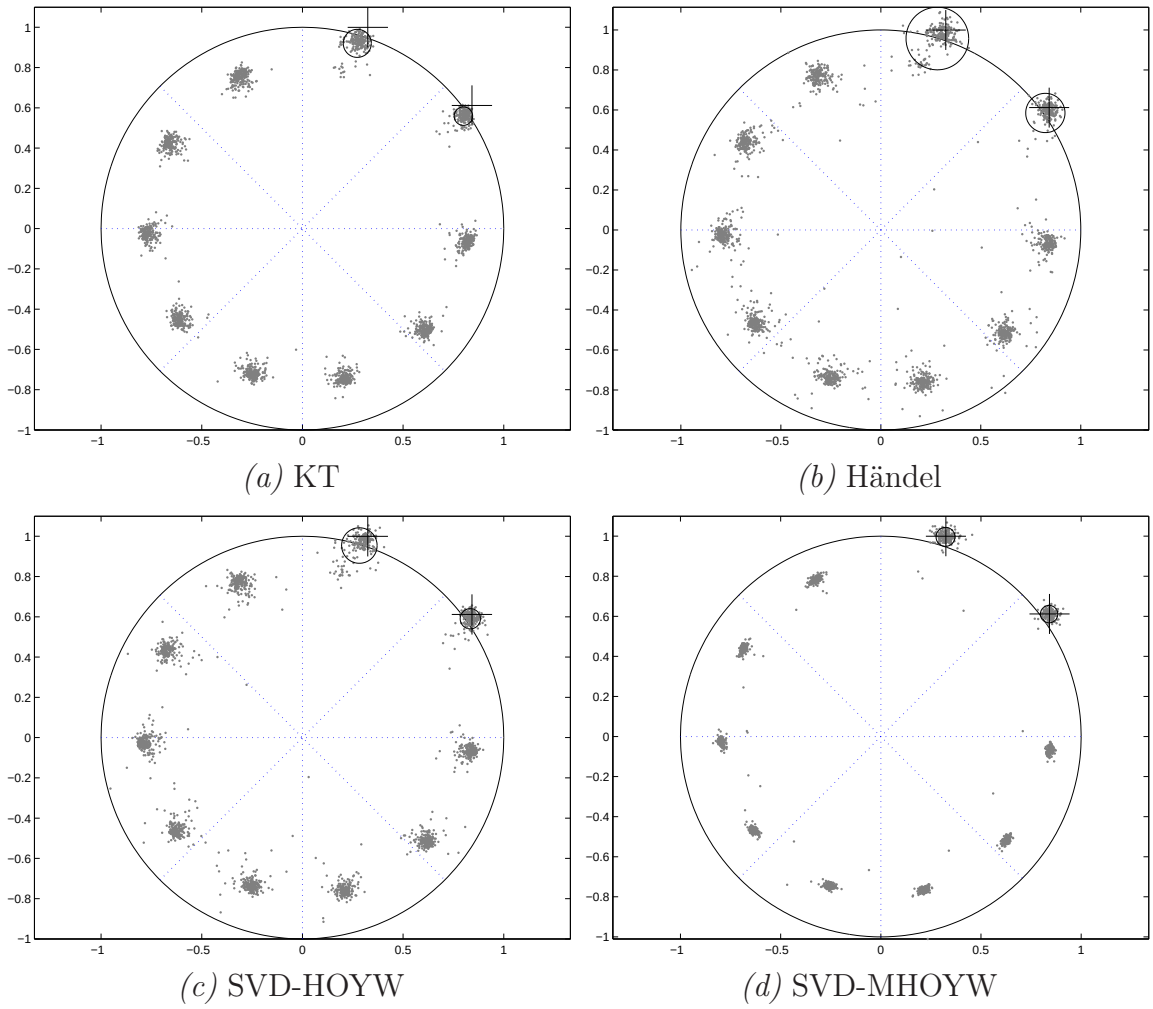
FIGURE 1.8 – Erreur quadratique moyenne de l'estimation de deux sinusoïdes amorties.

figure 1.9d met nettement en évidence les avantages de la méthode SVD-MHOYW. Outre la variance d'estimation plus faible sur un plan général, les pôles du signal sont estimés quasiment sans biais, et qui plus est, ils sont estimés à l'extérieur du cercle avec une très grande probabilité. Cette supériorité découle bien entendu du réglage optimal du paramètres $L$, ce qui peut être considéré comme une information *a priori*. En terme de performance, cette méthode est donc suivie, dans l'ordre, par les approches SVD-HOYW, Händel et KT.

## 1.7 Estimation des amplitudes

L'estimation des amplitudes n'est pas au coeur de nos préoccupations. Toutefois, dans le chapitre 4, on aura besoin de procéder à cette estimation, c'est pourquoi nous abordons ici ce sujet.

Le problème de l'estimation des paramètres de sinusoïdes dans un bruit blanc est non-linéaire



*(a)* KT *(b)* Händel

*(c)* SVD-HOYW *(d)* SVD-MHOYW

FIGURE 1.9 – Pôles du signal (+) et des estimés (nuage de points), en prédiction arrière.

par rapport aux pôles, mais linéaire par rapport aux amplitudes. Par conséquent, l'approche consiste à estimer d'abord les pôles en utilisant, par exemple, l'une des méthodes présentées précédemment. Les amplitudes sont alors estimées par une approche moindres carrés (LS). A partir de l'équation (1.1) et disposant d'une estimation des pôles $\hat{z}_i$, on peut écrire le système de Vandermonde suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \cdots & \hat{z}_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{z}_1^{K-1} & \hat{z}_2^{K-1} & \cdots & \hat{z}_M^{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(K-1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{y} \tag{1.84}$$

où $K$ est égal à $N$, la longueur de la séquence $y(n)$. La solution LS de cette équation s'écrit :

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{Z}_K^H \mathbf{Z}_K)^{-1} \mathbf{Z}_K^H \mathbf{y} = \mathbf{Z}_K^+ \mathbf{y} \tag{1.85}$$

A première vue, on pourrait penser que la variance d'estimation des amplitudes diminue lorsque le nombre d'échantillons pris en compte croît. En fait, Ducasse *et al.* [DMC95] ont montré qu'en raison des erreurs d'estimation sur les pôles, il existe un nombre optimal d'échantillons $K < N$ permettant d'avoir une variance minimale.
Dans le cas d'une seule sinusoïde ($M = 1$), on montre que pour toute estimation non-biaisée $\hat{z}_1$, l'estimation de l'amplitude $\hat{h}_1$ est non-biaisée avec une variance [DMC95, YP99] :

$$\mathrm{var}\left\{\hat{h}_1\right\} \simeq \frac{(K-1)^2}{4}|h_1|^2\mathrm{var}\left\{\Delta z_1\right\} + \frac{1}{K}\sigma_e^2 + \text{termes d'intercorrélation} \tag{1.86}$$

où $\Delta z_1 = \hat{z}_1 - z_1$. En négligeant les termes d'intercorrélation, la variance est convexe en $K$ et sa dérivée s'annule pour :

$$K^2(K-1) = \frac{2\sigma_e^2}{|h_1|^2\mathrm{var}\left\{\Delta z_1\right\}} \tag{1.87}$$

En supposant que $K^2(K-1) \simeq K^3$, on obtient alors :

$$K_{opt} = \sqrt[3]{\frac{2}{\eta_1 \mathrm{var}\left\{\Delta z_1\right\}}} \tag{1.88}$$

où $\eta_1 = \frac{|h_1|^2}{\sigma_e^2}$ est le rapport signal-sur-bruit. Ainsi, la relation (1.88) donne le nombre optimal d'équations à utiliser dans le système de Vandermonde (1.84).
Il apparaît que si la variance d'estimation du pôle $z_1$ est nulle, alors le nombre optimal $K_{opt}$ d'échantillons est infini. L'existence d'un nombre optimal d'équations de Vandermonde est donc uniquement lié aux erreurs d'estimation sur les pôles. Par exemple, dans le cas d'une sinusoïde pure ($\mathrm{var}\left\{\Delta z_1\right\} = \mathrm{var}\left\{\Delta\omega_1\right\}$), si la méthode KT est utilisée pour estimer les pôles, il vient alors, d'après l'équation (1.19) :

$$K_{opt} \simeq \sqrt[3]{\frac{2}{9}}N = 0.61N \tag{1.89}$$

De façon similaire, pour la méthode TK (prédiction avant-arrière), d'après l'équation (1.20), on obtient :

$$K_{opt} \simeq \frac{2}{3}N = 0.67N \tag{1.90}$$

Une majoration du nombre optimal d'échantillons est obtenue en remplaçant $\mathrm{var}\left\{\Delta\omega_1\right\}$ par la borne de Cramér-Rao donnée par l'équation (1.21) :

$$K_{opt} \simeq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}N = 0.69N \tag{1.91}$$

De façon générale, l'utilisation d'un nombre $K < N$ d'échantillons du signal revient à considérer un estimateur de type moindres carrés pondérés (WLS : *weighted least squares*) au

lieu d'un estimateur moindres carrés standard [Yin96, YP99]. La matrice de pondération est simplement une matrice diagonale de dimension $N \times N$ de la forme :

$$\mathbf{W}_K = \text{diag}(\underbrace{1, ..., 1}_{K}, 0, ..., 0) \tag{1.92}$$

L'utilisation de l'approche WLS permet aussi de tenir compte d'une éventuelle coloration du bruit entachant le signal $y(n)$. Un panorama des méthodes d'estimation des amplitudes est présenté dans la référence [SLL00].

## 1.8 Sélection de l'ordre du modèle exponentiel

L'un des problèmes cruciaux lié à l'estimation des paramètres d'exponentielles est celui de la sélection de l'ordre du modèle. En effet, celle-ci affecte considérablement la qualité de l'estimation. Ainsi, avec un ordre inférieur au nombre réel de composantes, les paramètres estimés sont biaisés et avec un ordre supérieur, la variance des paramètres estimés augmente. Traditionnellement, l'étape de l'estimation de l'ordre (ou du nombre de composantes) du modèle exponentiel est considérée séparément de celle de l'estimation des paramètres. Bien sûr, il existe des algorithmes qui, simultanément, estiment l'ordre et les paramètres du modèle (voir, par exemple, les références [WZ89, HC93, YM95, GLC96]). On se contente ici de présenter les principaux critères opérant sur les valeurs singulières de la matrice de données ou d'autocorrélation.

Wax et Kailath [WK85] ont obtenu une expression des critères AIC (*Akaike's information criterion*) et MDL (*minimum description length*), en fonction des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation :

$$AIC(k) = -2N(p-k) \ln \left( \frac{\left( \prod_{i=k+1}^{p} \lambda_i \right)^{\frac{1}{p-k}}}{\frac{1}{p-k} \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i} \right) + 2k(2p-k) \tag{1.93}$$

$$MDL(k) = -N(p-k) \ln \left( \frac{\left( \prod_{i=k+1}^{p} \lambda_i \right)^{\frac{1}{p-k}}}{\frac{1}{p-k} \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i} \right) + \frac{1}{2} k(2p-k) \ln N \tag{1.94}$$

pour $k = 0, ..., p-1$. Les valeurs propres $\lambda_i$ de la matrice d'autocorrélation $(p \times p)$ sont rangées dans l'ordre décroissant ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$). L'estimation du nombre de composantes $\hat{M}$ correspond à la valeur de $k$ qui minimise l'un ou l'autre des deux critères. Une étude statistique présentée dans [ZWYR89] indique que le critère AIC tend à minimiser la probabilité de manque à la détection ($\hat{M} < M$) alors que le critère MDL tend à minimiser les fausses alarmes ($\hat{M} > M$). Il est également possible de définir ces deux critères lorsque la matrice d'autocorrélation est sur-déterminée (de dimension $c \times p$, $c > p$) en remplaçant $\lambda_i$ par les valeurs singulières $\sigma_i^2$.

Enfin, des critères AIC et MDL développés spécialement dans le cas du filtrage avant/arrière (méthode TK) peuvent être trouvés dans [XRK94].

Reddy et Biradar [RB93] ont développé deux critères d'information en partant des équations de prédiction linéaire (1.12) utilisées par la méthode KT. Après décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{Y}$ : $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H$, on pose $\mathbf{q} = \mathbf{U}^H\mathbf{y}$. L'expression des critères AIC et MDL est alors donnée par :

$$AIC(k) = (N-p)\Big(1 + \ln 2\pi + \ln \frac{\|\mathbf{q}^{(k)}\|^2}{N-p}\Big) + 2(2k+1) \tag{1.95}$$

$$MDL(k) = (N-p)\Big(1 + \ln 2\pi + \ln \frac{\|\mathbf{q}^{(k)}\|^2}{N-p}\Big) + (2k+1)\ln(N-p) \tag{1.96}$$

pour $k = 0, ..., \min\{p, (N-p)/2\}$. Le vecteur $\mathbf{q}^{(k)}$ contient les $(N-p-k)$ derniers éléments du vecteur $\mathbf{q}$.

Des critères nécessitant le réglage d'un seuil subjectif sur les valeurs singulières ont également été proposés dans la littérature [Fuc88, KY88]. Un autre critère, particulièrement bien adapté aux sinusoïdes amorties, a été développé par Kundu [KM01]. Ce dernier nécessite cependant le réglage d'une fonction de pénalité.

Les critères de sélection de l'ordre sont très performants pour les sinusoïdes pures, ou faiblement amorties, ayant un RSB important. Il est évident que dans le cas de sinusoïdes pures, l'augmentation du nombre d'échantillons (ou nombre de lignes de la matrice d'autocorrélation) ne fait qu'améliorer les performances de l'estimation de l'ordre. En revanche, ceci n'est pas le cas pour les sinusoïdes amorties. Pour mettre en évidence ce phénomène, on considère le signal $x(n) = h_1 z_1^n$. Si l'on considère, par exemple, la méthode KT, la matrice de données s'écrit :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(p) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-p) & y(N-p+1) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières de $\mathbf{Y}$ sont les racines carrées des valeurs propres des matrices $\mathbf{Y}^H\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H$. On peut montrer que $\mathbb{E}\left\{\mathbf{Y}^H\mathbf{Y}\right\}$ s'écrit :

$$\frac{1}{N-p}\mathbb{E}\left\{\mathbf{Y}^H\mathbf{Y}\right\} = \frac{|h_1|^2|z_1|^2}{N-p}\frac{1-|z_1|^{2(N-p)}}{1-|z_1|^2}\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{p-1} \\ z_1^* & |z_1|^2 & \cdots & z_1^* z_1^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{*p-1} & z_1^{*p-1} z_1 & \cdots & |z_1|^{2(p-1)} \end{bmatrix} + \sigma_e^2 \mathbf{I}_p \tag{1.97}$$

Les valeurs propres peuvent être obtenues à partir de la trace de cette matrice :

$$\text{trace}\left\{\frac{1}{N-p}\mathbb{E}\left\{\mathbf{Y}^H\mathbf{Y}\right\}\right\} = \frac{|h_1|^2|z_1|^2}{N-p}\frac{1-|z_1|^{2(N-p)}}{1-|z_1|^2}\frac{1-|z_1|^{2p}}{1-|z_1|^2} + p\sigma_e^2 = \sigma_0^2 + p\sigma_e^2 \qquad (1.98)$$

où $\sqrt{N-p}\sigma_0$ est la valeur singulière de $\mathbf{Y}$ due au signal (sans bruit). Donc, les $p$ valeurs propres de la matrice $\frac{1}{N-p}\mathbb{E}\left\{\mathbf{Y}^H\mathbf{Y}\right\}$ sont $\{\sigma_0^2+\sigma_e^2, \sigma_e^2, ..., \sigma_e^2\}$. Par conséquent, l'espérance mathématique des valeurs singulières de $\mathbf{Y}$ est :

$$\sqrt{N-p}\{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma_e^2}, \sigma_e, ..., \sigma_e\} \qquad (1.99)$$

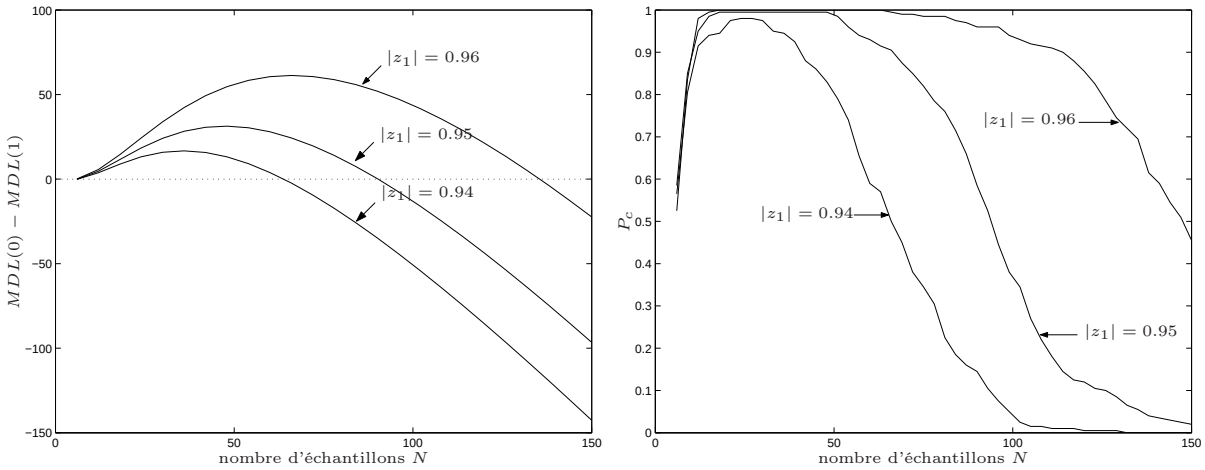
On remarque que pour une sinusoïde amortie ($|z_1| < 1$) et pour $p$ fixé, $\sigma_0 \to 0$ lorsque $N \to \infty$. En notant $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_0^2+\sigma_e^2}$ la plus grande valeur singulière de la matrice $\mathbf{Y}$, on a alors :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sigma_1}{\sigma_e} = 1 \qquad (1.100)$$

ce qui veut dire que lorsque $N \to \infty$, le sous-espace bruit devient prépondérant, et cela quels que soient la valeur du RSB et du facteur d'amortissement. Nous avons vérifié ce phénomène sur l'exemple suivant. On considère une sinusoïde amortie avec les paramètres $\omega_1 = 2\pi 0.1$, $\alpha_1$ variable et le rapport signal-sur-bruit $\eta_1 = 10$. Le nombre d'échantillons $N$ varie entre 6 et 150 et $p = N/3$. La figure 1.10(a) représente la différence $MDL(0) - MDL(1)$ obtenue avec le critère MDL de Wax et Kailath appliqué aux valeurs singulières « théoriques » de $\mathbf{Y}$ dans l'équation (1.99). On remarque que, quel que soit le facteur d'amortissement (différent de zéro), à partir d'un certain nombre d'échantillons, la quantité $MDL(0) - MDL(1)$ devient négative, ce qui signifie qu'il n'y a plus de détection. Pour déterminer la probabilité d'une détection correcte, nous avons effectué une simulation Monte Carlo en utilisant 200 réalisations du bruit. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 1.10(b). On constate que, contrairement au cas d'une sinusoïde pure, la probabilité de détection d'une sinusoïde amortie n'augmente pas de façon monotone avec le nombre d'échantillons utilisés. Ces résultats restent donc valables quels que soient le RSB et le facteur d'amortissement (différent de zéro). Néanmoins, la dégradation des performances n'est pas aussi rapide dans le cas où le RSB est grand et/ou le facteur d'amortissement est faible.

## 1.9 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre qu'un signal consistant en une somme d'exponentielles amorties constitue une forme limite d'un processus ARMA. Pourtant, force est de constater que cette modélisation est moins utilisée et moins étudiée que les méthodes fondées sur un modèle sinusoïdal, au moins dans le cas amorti. Or, nous avons vu qu'en choisissant




*(a)* $MDL(0) - MDL(1)$ *(b)* Probabilité de détection correcte

FIGURE 1.10 – Influence du nombre d'échantillons sur la détection d'une sinusoïde amortie.

convenablement un estimateur de l'autocorrélation, la modélisation ARMA était un outil plus performant du point de vue de l'estimation des paramètres (biais et détection avec le critère du cercle).

En outre, ce chapitre a permis de mettre en évidence les résultats suivants :

- les méthodes faisant appel directement aux données (KT, Matrix Pencil et Kung) ont pratiquement les même performances dans le cas de sinusoïdes amorties. La méthode KT est choisie pour sa meilleure estimation du facteur d'amortissement ce qui permet, en général, de détecter plus de modes du signal avec le critère du cercle unité ;
- la modélisation ARMA permet d'estimer plus précisément les pôles du signal du point de vue de l'erreur quadratique moyenne. L'étude que nous avons menée sur un estimateur de l'autocorrélation nous a permis de montrer que l'on peut, dans certains cas, améliorer le RSB avant d'effectuer l'estimation des paramètres. La méthode résultante, appelée SVD-MHOYW, est la plus performante lorsque le paramètre $L_{opt} \simeq 1.59/\alpha$, où $\alpha$ est le plus grand facteur d'amortissement. Le problème de cette approche est qu'en général, on n'a pas accès à ce paramètre et qu'il faut donc une estimation initiale. Nous avons donc retenu pour la suite les méthodes SVD-HOYW et SVD-MHOYW ;
- le nombre d'équations de Vandermonde permettant d'estimer les amplitudes complexes doit être inférieur au nombre total d'échantillons : $K_{opt} \leq 0.69N$ ;
- concernant l'estimation du nombre de composantes, le nombre d'échantillons du signal exponentiel amorti ne doit pas être trop important au risque de diminuer la probabilité de détection. En fait, le nombre d'échantillons optimal est lié au RSB et au facteur d'amortissement. Ce point reste donc à étudier de manière plus approfondie. Enfin, à partir du chapitre 3, nous utiliseront le critère MDL parce qu'il a tendance à surestimer l'ordre. Les modes erronés (parasites) sont alors éliminés par le critère du cercle qui réalise une deuxième sélection et permet donc de déterminer l'ordre réel.

Les trois méthodes sélectionnées vont à présent être étudiées dans un contexte particulier qui est celui des signaux à grand nombre d'échantillons et de grande complexité, ce qui peut être le cas dans le cadre de la spectroscopie RMN. L'approche considérée est celle qui consiste à effectuer une décomposition en sous-bandes avant l'estimation.

# Chapitre 2

# Estimation paramétrique en sous-bandes

## 2.1 Introduction

L'approche qui consiste à diviser le spectre d'un signal en un certain nombre de bandes fréquentielles est appelée décomposition en sous-bandes. Par rapport à un traitement global effectuée sur le signal d'origine, les avantages d'une telle décomposition, dans le contexte de l'estimation spectrale paramétrique, ont été établis par plusieurs auteurs ces dernières années. Cette idée consiste à transformer un problème d'estimation en un ensemble de sous-problèmes, chacun étant plus simple que l'original puisque chaque sous-bande contient moins de modes. De plus, depuis le travail de Quirk et Liu [QL83], on sait que la décomposition en sous-bandes améliore la résolution des estimateurs paramétriques. Plus récemment, considérant la méthode TLS-Prony, Steedly *et al.* [SYM94a, SYM94b] ont montré qu'une estimation effectuée sur les données décimées permet d'avoir une variance sur les pôles plus faible que celle obtenue avec les données non-décimées, d'un facteur égal au taux de décimation. De même, Rao et Pearlman [RP96], travaillant dans le contexte du codage en sous-bandes, ont étudié l'analyse spectrale en sous-bandes par prédiction linéaire. En considérant des filtres d'analyse idéaux, ils ont établi que l'estimation en sous-bandes offre plusieurs avantages, en particulier : (1) la variance minimale de l'erreur de prédiction obtenue dans la bande globale est plus grande que la somme des variances minimales sur les sous-bandes et (2) le spectre de l'erreur de prédiction en sous-bandes est plus plat que celui de la bande globale. Récemment, Tkacenko et Vaidyanathan [TV01b, TV01a] sont parvenus au même résultat mais en considérant des conditions moins restrictives sur le filtre de décimation. Plus précisément, ils supposent un banc de filtres à décimation maximale et des filtres dont la réponse en amplitude est de type Nyquist($d$), où $d$ est le facteur de décimation [Vai93]. Plusieurs autres auteurs ont montré, théoriquement ou en pratique, les avantages de l'estimation spectrale en sous-bandes [TF94, vdBLK95, BA95, TSPA95, RBN96, NKK02, TD02].

De manière générale, la décomposition en sous-bandes semble à première vue réservée à des signaux dont la longueur initiale est suffisante pour garantir des signaux en sous-bandes eux-

même de longueur raisonnable. Le gain en résolution observé par les auteurs précités peut de plus être appréciable lorsque ces signaux sont constitués d'un grand nombre de composantes, éventuellement proches. Une part importante des signaux rencontrés en spectroscopie RMN présente ces deux caractéristiques. N. Henzel [Hen97] a étudié l'utilisation de la décomposition pour le traitement des signaux RMN, et a mis en évidence les avantages d'une telle approche des signaux de grande complexité. Par rapport à ce travail initial, l'objectif de ce chapitre est d'éclaircir un certain nombre de problèmes soulevés dans [Hen97] notamment : le choix d'une structure de bancs de filtres, l'estimation de l'ordre dans les sous-bandes et la possible utilisation des composantes polyphasées.

La décomposition en sous-bandes est classiquement obtenue par des opérations de filtrage et de décimation. Le signal d'origine subit donc des modifications de son contenu spectral et, à l'issue de la décomposition, le signal résultant occupe une bande fréquentielle particulière. Dans ce chapitre, on rappelle le principe de la décomposition en sous-bandes. Ensuite, nous discutons des diverses possibilités de procéder au découpage, tant du point de vue des filtres que de leur agencement. On présente également l'effet d'une succession d'opérations de filtrage et de décimation sur le processus de départ. En particulier, nous montrerons que le filtrage n'est pas sans conséquence sur le signal issu de la décomposition. En fait, il peut être modélisé par un processus ARMA dont les ordres maximaux sont donnés. Par la suite, nous analysons le problème de l'estimation du nombre de composantes en sous-bandes et celui des composantes polyphasées. Enfin, des simulations multiples sont présentées pour montrer les performances de l'estimation en sous-bandes.

## 2.2 Décomposition en sous-bandes

### 2.2.1 Opérations de filtrage et de décimation

La décomposition en sous-bandes est généralement obtenue par la succession de deux opérations : une *opération de filtrage* de type passe-bande suivie d'une *opération de décimation* ou de *sous-échantillonnage*. Ce processus est représenté sur la figure 2.1.

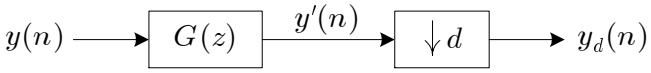



FIGURE 2.1 – Opérations de filtrage et de décimation.

Le rôle du filtre consiste à extraire une bande fréquentielle du signal original en évitant le problème de repliement spectral. Pour des raisons exposées au paragraphe 2.5, on considère ici le cas d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF). La sortie du filtre $G(z)$ d'ordre $N_f$

pour une excitation $y(n)$ s'exprime par la relation :

$$y'(n) = \sum_{k=0}^{N_f} g(k)y(n-k),\ n = 0, 1, ..., N + N_f - 1 \tag{2.1}$$

Si le filtre $G(z)$ a une largeur de bande inférieure à $2\pi/d$, le signal $y'(n)$ peut alors être sous-échantillonné sans repliement à la fréquence $2\pi/d$ [Vai93]. Cette opération s'écrit :

$$y_d^{(\tau)}(n) \triangleq y'(dn + \tau),\ \begin{cases} n = 0, 1, ..., N' - 1 \\ \tau = 0, 1, ..., d - 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

où $N'$ est la partie entière du rapport $\frac{N+N_f}{d}$, notée $[\frac{N+Nf}{d}]$. Les différentes séquences $\{y_d^{(\tau)}(n)\}$ (pour $\tau$ fixé) représentant des séquences intercalées obtenues à partir de $y'(n)$ sont appelées *composantes polyphasées* (voir, par exemple, [Vai93]). Chaque série $\{y_d^{(\tau)}(n)\}_{n=0}^{N'-1}$, pour $\tau$ fixé, représente uniquement le contenu fréquentiel de la bande choisie.
En pratique, les problèmes de bord (transitoires) introduits par le filtre $G(z)$ sont supprimés pour ne pas altérer le modèle du signal d'entrée $y(n)$. Dans ce cas, le signal $y'(n)$ est de longueur $N - N_f$ :

$$y'(n) = \sum_{k=0}^{N_f} g(k)y(n + N_f - k),\ n = 0, 1, ..., N - N_f - 1 \tag{2.3}$$

Le retard introduit par la troncature du transitoire est bien sûr pris en compte dans la modélisation en sous-bandes qui sera décrite par la suite. La longueur du signal en sous-bandes devient alors :

$$N' = \left[\frac{N - N_f}{d}\right] \tag{2.4}$$

En général, l'analyse en sous-bandes est effectuée en utilisant un filtre $G(z)$ de type passe-bande. Afin d'analyser tout le contenu spectral d'un signal, il suffit de répéter les deux opérations (filtrage et décimation) en choisissant un ensemble approprié de filtres de décimation. Ceci est décrit dans le paragraphe suivant.

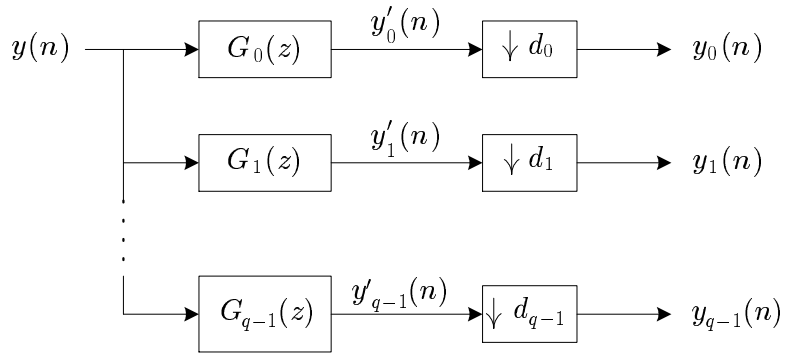
### 2.2.2 Banc de filtres de décimation

Dans le cas général, le spectre du signal $y(n)$ peut être décomposé en plusieurs sous-bandes, disjointes dans le cas idéal, dont la somme est le spectre du signal original. Les sous-bandes peuvent avoir des largeurs identiques (c'est le cas de la décomposition uniforme) ou différentes (décomposition non-uniforme). La figure 2.2 représente ces deux types de décomposition. Un exemple typique d'un banc de filtres non-uniforme est la transformée en ondelettes discrètes. Dans ce cas, le rapport entre la largeur de bande et la fréquence centrale des filtres $G_m(z)$ (réels) est indépendant de $m$ ($m = 1, 2, ..., d-1$) comme le montre la figure 2.3a. Les facteurs

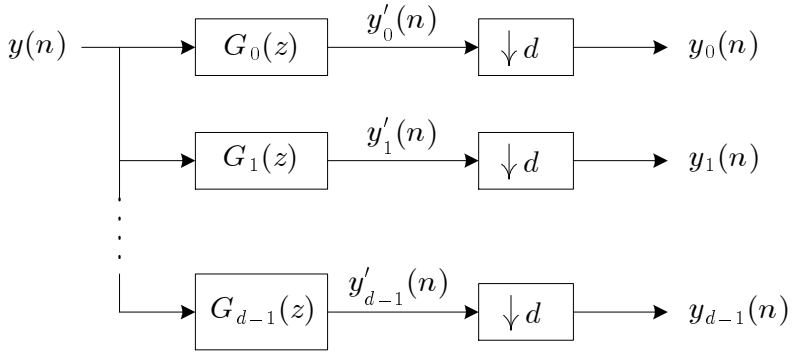
de décimation $d_m$ sont liés par la relation :

$$d_m = c^{d-m},\ m = 1, 2, ..., q-1 \tag{2.5}$$

où $c$ est une constante et $d_0 = d_1$. Cette structure est très utile dans le cas où la résolution fréquentielle souhaitée est décroissante en fonction de la fréquence. C'est le cas, par exemple, dans l'analyse des signaux sonores. De manière générale, la façon dont doit être conduite une décomposition non-uniforme est déterminé soit à l'aide d'une connaissance *a priori* du contenu spectral du signal, soit à l'aide d'un critère judicieusement choisi. Quant à la décomposition uniforme, elle permet d'avoir la même résolution fréquentielle dans toutes les sous-bandes. Dans ce cas, c'est la largeur de bande des filtres qui est constante. Les filtres $G_m(z)$ peuvent être obtenus à partir d'un filtre unique (par exemple, $G_0(z)$) par simple modulation. La décomposition en paquets d'ondelettes en est un exemple (figure 2.3b).

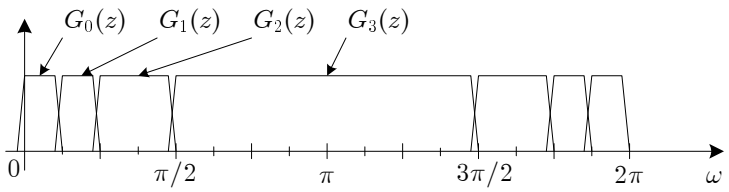



*(a)* Décomposition non-uniforme

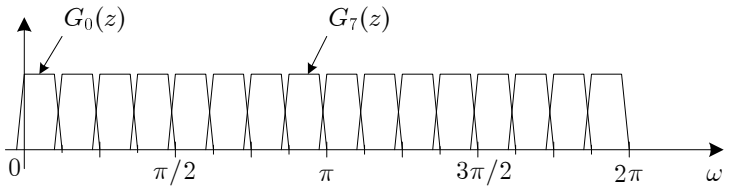



*(b)* Décomposition uniforme à $d$ canaux

FIGURE 2.2 – Bancs de filtres d'analyse.




*(a)* Ondelettes discrètes




*(b)* Paquets d'ondelettes

FIGURE 2.3 – Structures des filtres en ondelettes discrètes et en paquets d'ondelettes pour une décomposition dyadique et un facteur de décimation maximal égal à 8.

## 2.3 Influence de la décomposition sur le modèle exponentiel

Dans ce paragraphe, on analyse l'influence du découpage en sous-bandes sur, à la fois, la partie déterministe du signal $y(n)$ et le bruit $e(n)$. On considère uniquement le cas de la décomposition uniforme, mais la démarche peut être généralisée. Pour des raisons de simplicité, on suppose que les filtres $\{G_m(z)\}_{m=0}^{d-1}$ ont le même ordre $N_f$ (ceci peut être obtenu par simple modulation d'un filtre de base unique).

### 2.3.1 Le filtrage

Le signal $y'_m(n)$ à la sortie du filtre de décimation $G_m(z)$, après troncature du transitoire, s'exprime par la relation :

$$y'_m(n) = \sum_{k=0}^{N_f} g_m(k) y(n + N_f - k), \;\; n = 0, 1, ..., N - N_f - 1 \tag{2.6}$$

Dans le cas du signal exponentiel défini dans l'équation (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} y'_m(n) &= \sum_{k=0}^{N_f} \sum_{i}^{M} g_m(k) h_i z_i^{n+N_f-k} + \sum_{k=0}^{N_f} g_m(k) e(n + N_f - k) \\ &= \sum_{i=1}^{M} h_i z_i^{N_f} z_i^n \sum_{k=0}^{N_f} g_m(k) z_i^{-k} + e'_m(n) \\ &= \sum_{i=1}^{M} h'_i z_i^n + e'_m(n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$h'_i = h_i z_i^{N_f} \sum_{k=0}^{N_f} g_m(k) z_i^{-k} = h_i z_i^{N_f} G_m(z_i) \tag{2.8}$$

$$e'_m(n) = \sum_{k=0}^{N_f} g_m(k) e(n + N_f - k) \tag{2.9}$$

Les effets du filtrage sur le signal exponentiel sont donc d'une part, de pondérer les amplitudes complexes et, d'autre part, de colorer le bruit. En pratique, le filtre est bien sûr non-idéal, mais il est raisonnable d'admettre qu'une partie des composantes sinusoïdales, situées dans la bande atténuée du filtre, est suffisamment réduite pour qu'elle soit assimilée à un bruit supplémentaire noté $\epsilon(n)$ :

$$y'_m(n) = \sum_{i=1}^{M'} h'_i z_i^n + \epsilon(n) + e'_m(n) \tag{2.10}$$

Le signal $y'_m(n)$ contient donc essentiellement $M' \leq M$ composantes situées dans les bandes passante et de transition du filtre.

### 2.3.2 La décimation

On considère maintenant l'étape de décimation effectuée sur le signal $y'_m(n)$. Le signal $y_m^{(\tau)}(n)$ obtenu par la décimation de $y'_m(n)$ par un facteur $d$ s'écrit :

$$y_m^{(\tau)}(n) = \sum_{i=1}^{M'} (h'_i z_i^\tau) z_i^{dn} + \epsilon(dn + \tau) + e'_m(dn + \tau) \tag{2.11}$$

$$= \sum_{i=1}^{M'} (h'_i z_i^\tau) z_i'^n + \epsilon'^{(\tau)}(n) + e_m^{(\tau)}(n) \tag{2.12}$$

où :

$$z'_i = z_i^d \tag{2.13}$$

Le bruit $e'_m(n)$ étant de type MA($N_f$), on peut facilement montrer que la densité spectrale de puissance (DSP) du signal décimé $e_m^{(\tau)}(n)$ correspond à celle d'un processus MA d'ordre $[\frac{N_f}{d}]$, quelle que soit la composante polyphasée $\tau$ considérée [AH92, BA95, Hen97]. Si le filtre de décimation possède un taux d'atténuation suffisant, le terme $\epsilon'^{(\tau)}(n)$, ainsi que le biais qu'il risque introduire, peuvent être négligés [SYM94a]. Dans ce cas, on obtient le modèle suivant :

$$y_m^{(\tau)}(n) = \sum_{i=1}^{M'} (h'_i z_i^\tau) z_i'^n + e_m^{(\tau)}(n) \tag{2.14}$$

Le signal en sous-bande est donc la superposition de $M'$ sinusoïdes complexes pondérées par les coefficients du filtre et d'un bruit de type MA $e_m^{(\tau)}(n)$. Ce processus peut être vu comme la réalisation d'un processus ARMA dont l'ordre de la partie AR est $M'$ et celui de la partie MA est $M' + [\frac{N_f}{d}]$. Si le filtre de décimation $G_m(z)$ est un filtre à $\pi/d$ performant (gain unitaire dans la bande passante et sélectivité proche de 1), alors le bruit $e_m^{(\tau)}(n)$ est approximativement un bruit blanc et $y_m^{(\tau)}(n)$ est proche d'un processus ARMA$(M', M')$ [BA95].

Souvent, on utilise uniquement la première composante polyphasée (correspondant à $\tau = 0$). Cela se justifie pour les sinusoïdes amorties par le fait que le RSB diminue lorsque $\tau$ augmente (équation (2.14)). Par souci de simplicité, on notera par la suite la série $y_m^{(0)}(n)$ par $y_m(n)$ pour exprimer l'utilisation d'une seule composante polyphasée. Une étude sur l'apport possible des autres composantes sera présentée dans le paragraphe 2.6.3.

## 2.4 Quelques avantages de l'estimation en sous-bandes

Afin de démontrer certains avantages de l'estimation en sous-bandes, on considère le cas d'un signal $y(n)$ *stationnaire* constitué de sinusoïdes complexes pures ($z_i = e^{\jmath\omega_i}$) dont les phases sont aléatoires et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. La fonction d'autocorrélation de ce processus s'écrit :

$$r_y(k) = \sum_{i=1}^{M} |h_i|^2 e^{\jmath\omega_i k} + r_e(k) \tag{2.15}$$

où $r_e(k) = \sigma_e^2 \delta(k)$. On considère, dans ce paragraphe, que le filtre de décimation est idéal ; c'est-à-dire qu'il a une réponse unitaire en amplitude dans la bande passante de largeur $2\pi/d$.

### 2.4.1 Amélioration du rapport signal-sur-bruit

Si le filtre de décimation est idéal, alors la fonction d'autocorrélation du signal décimé est [TV01b] :

$$r_{y_m}(k) = \sum_{i=1}^{M'} |h_i|^2 e^{\jmath d\omega_i k} + r_{e_m}(k) \tag{2.16}$$

où $r_{e_m}(k) = \sigma_{e_m}^2 \delta(k)$ et $\sigma_{e_m}^2 = \frac{1}{d}\sigma_e^2$. On en déduit qu'en sous-bandes, le RSB des composantes dans la bande passante du filtre est supérieur d'un facteur $d$ à celui qu'elles ont dans la bande globale. Quantitativement, nous avons :

$$\eta_{i,\mathrm{sb}} = d\eta_{i,\mathrm{fb}} \tag{2.17}$$

où $\eta_{i,\mathrm{sb}}$ et $\eta_{i,\mathrm{fb}}$ sont les RSB de la $i^{\text{ème}}$ composante, en sous-bandes et dans la bande globale, respectivement. Comme le RSB augmente, on s'attend à estimer les fréquences plus

précisément dans les sous-bandes.

### 2.4.2 Augmentation de la séparation fréquentielle

La séparation fréquentielle de deux composantes sinusoïdales $s$ et $t$ dans la bande globale est définie par $\Delta\omega_{\text{fb}} = |\omega_s - \omega_t|$. D'après la relation (2.16), la séparation fréquentielle en sous-bandes est $\Delta\omega_{\text{sb}} = d|\omega_s - \omega_t|$. On a donc :

$$\Delta\omega_{\text{sb}} = d\Delta\omega_{\text{fb}} \tag{2.18}$$

Clairement, la séparation fréquentielle augmente d'un facteur $d$. Ce résultat est important puisqu'il suggère que la résolution des estimateurs présentés dans le premier chapitre peut être améliorée. Cependant, puisqu'en pratique le nombre d'échantillons est limité, ce résultat doit être tempéré par le fait que le nombre d'échantillons diminue à cause de la décimation mais aussi en raison de l'utilisation de filtres non-idéaux. De ce fait, la résolution fréquentielle n'augmente pas indéfiniment avec la décimation, et ce d'autant plus en présence de composantes amorties.

### 2.4.3 Réduction de la complexité numérique

La décomposition en sous-bandes présente un autre intérêt pratique qui est celui de la réduction de la complexité numérique. En effet, grâce à l'opération de filtrage, le nombre de composantes à estimer en une étape se réduit de $M$ à $M'$, où $M' \leq M$. Bien entendu, en pratique, $M'$ est susceptible d'être très faible par rapport à $M$, ce qui peut entraîner une baisse sensible de l'ordre de prédiction nécessaire pour estimer les paramètres du modèle. De plus, dans le cas des signaux longs (signaux de spectroscopie RMN $^{13}$C, par exemple) et pour des raisons matérielles, il n'est pas possible d'utiliser tous les échantillons. Dans le cas d'une décomposition, la réduction du nombre d'échantillons de $N$ à $N' \leq \frac{N}{d}$ permet d'exploiter toute l'information contenue dans un signal par l'utilisation de tous les échantillons.

## 2.5 Filtres de décimation et approche IFIR

La décomposition en sous-bandes avec un facteur de décimation $d$ peut être réalisée de deux façons dont le résultat est similaire.

– Si $d$ est une puissance d'un nombre entier quelconque $q$, alors le découpage peut être obtenu par une succession d'opérations de filtrage et de décimation par le facteur $q$, semblable à une décomposition en paquets d'ondelettes. Le résultat se présente alors sous forme d'un arbre de décomposition. Lorsque $q = 2$, la décomposition est dite dyadique et, dans le cas de l'approche uniforme, on s'intéresse uniquement aux bandes finales.

– Si $d$ est un entier quelconque alors la décomposition est obtenue, au moyen d'un filtre adéquat, par une décimation directe par $d$. Chacune des sous-bandes finales est donc atteinte en une seule opération.

Dans ce chapitre, dédié à la décomposition uniforme, on considère la deuxième technique car l'on s'intéresse uniquement aux bandes finales. Dans le chapitre 3, consacré au découpage adaptatif, c'est la première technique qui sera considérée.

### 2.5.1 Quel banc de filtres utiliser ?

Idéalement, le filtre de décimation doit avoir un gain constant dans la bande passante et une sélectivité unitaire. Le découpage résultant consiste en $d$ bandes, sans distorsion d'amplitude et sans redondance de l'information spectrale (les bandes sont disjointes). La figure 2.4a illustre ce type de banc de filtres. Malheureusement, cette exigence ne peut pas être réalisée en pratique en utilisant des filtres d'ordre fini. En particulier, la longueur de la bande de transition n'est jamais nulle.
Maintenant, considérons le banc de filtres, plus réaliste, représenté sur la figure 2.4b dans laquelle on peut constater un recouvrement entre deux filtres voisins. Le gain dans la bande de transition étant inférieur à l'unité, les composantes appartenant à cette bande sont très atténuées par rapport à celles apparaissant à l'intérieur de la bande passante et ont par conséquent une variance d'estimation plus grande [SYM94a]. De plus, ce banc ne vérifie pas la condition de non-repliement spectral puisque le produit de la largeur de bande et du taux de décimation est supérieur à $2\pi$. Dans ce cas, le repliement est inévitable ce qui peut conduire aux problèmes suivants :
– les composantes qui sont situées dans la bande de transition se retrouvent sur deux sous-bandes voisines (figure 2.5a) ;
– des fréquences initialement bien séparées peuvent se retrouver très proches ou, au pire, à la même position en sous-bande (figure 2.5b).
L'utilisation de ce type de banc conduit donc à une ambiguïté sur la relation liant les fréquences estimées en sous-bande à celles de la bande globale, autrement dit l'application $z_i \rightarrow z_i^d$ (équation (2.13)) n'est pas bijective. Ce problème est discuté dans le paragraphe 2.6. Dans [TV01a], les auteurs proposent une méthode pour lever cette ambiguïté. Elle consiste à comparer les amplitudes des pics suspectés d'apparaître dans deux bandes consécutives. Les composantes qui ont l'amplitude la plus grande sont sélectionnées et les autres sont rejetées. Il est évident qu'une telle approche n'est pas exempte d'erreurs (position des fréquences et estimation des amplitudes) et, de toute façon, le repliement spectral peut engendrer un autre problème qui est celui de la résolution, même si, au départ, ce dernier ne se posait pas. Ainsi, dans notre contexte, le repliement est indésirable et l'on cherchera dorénavant à l'éviter. Pour cela, on pourrait par exemple utiliser un banc de filtres d'analyse à transition très rapide, mais ceci nécessite des ordres très élevés pour les filtres. Une autre solution consiste à utiliser

une technique de transformation de l'échelle de fréquence (*frequency warping*) pour déplacer les composantes situées dans la bande de transition vers la bande passante avant de procéder au découpage, mais elle nécessite le réglage d'autres paramètres [BMM02].

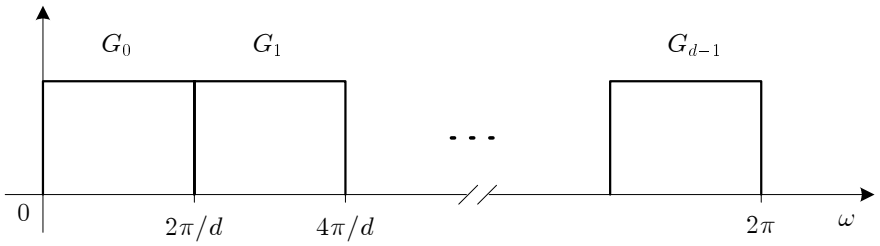
Pour éviter les problèmes évoqués ci-dessus, la solution retenue dans ce mémoire consiste à prendre un facteur de décimation plus petit que le nombre de sous-bandes. Ceci se traduit par l'utilisation d'un banc de filtres avec recouvrement (figure 2.4c). Mais, dans ce cas, on s'intéresse uniquement aux composantes estimées dans la bande passante puisque celles qui sont situées dans la bande de transition apparaissent dans la bande passante d'un filtre voisin. Ce banc est bien sûr redondant ($2d$ filtres sont utilisés pour un facteur de décimation égal à $d$), mais il présente deux avantages :

– les filtres n'introduisent pas une grande distorsion d'amplitude puisque, sur l'ensemble de la bande $[0, 2\pi[$, le gain est presque constant ;
– le produit de la largeur de bande de chaque filtre et du facteur de décimation étant inférieur à $2\pi$, on évite ainsi le repliement spectral et les problèmes qui lui sont associés. En particulier, l'application $z_i \rightarrow z_i^d$ est, dans ce cas, bijective.

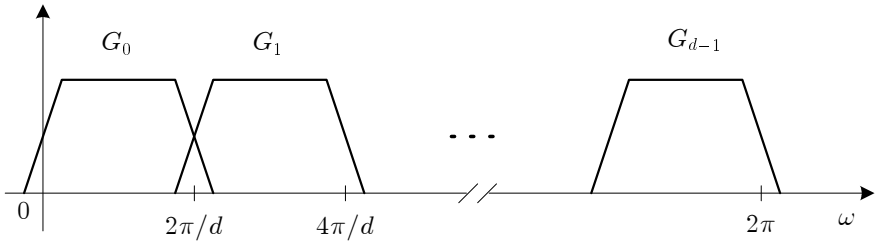
**Remarque 1** *Certaines applications ne nécessitent pas la détermination du nombre exact de modes en sous-bandes ou une relation directe entre les fréquences estimées en sous-bandes et leur image dans la bande globale. C'est le cas par exemple en analyse spectrale lorsque l'on s'intéresse à la forme du spectre plutôt qu'à la position exacte des composantes. Dans ce cas, le repliement spectral est toléré puisqu'il peut être corrigé lors de la reconstruction en choisissant des filtres à reconstruction parfaite pour l'analyse et la synthèse [RP96]. Cette approche n'a pas un grand intérêt dans notre cas.*

### 2.5.2 Synthèse d'un filtre de décimation

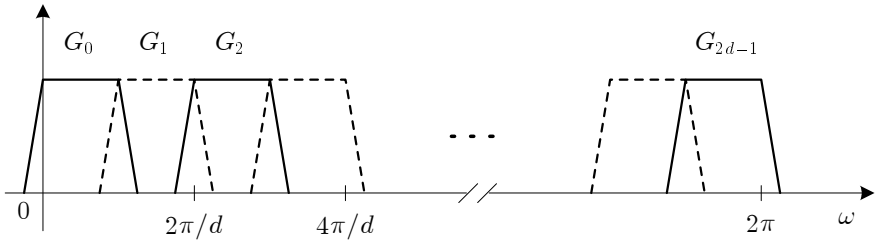
Etant donné que la décomposition uniforme peut être réalisée en utilisant un seul filtre proprement centré sur une bande fréquentielle, nous considérons, pour simplifier, le cas d'un filtre passe-bas $G(z)$. Ce filtre est ensuite modulé pour réaliser une partition uniforme de l'intervalle $[0, 2\pi[$. Le gabarit standard d'un tel filtre est défini par quatre paramètres : la fréquence limite dans la bande passante $\omega_p$, la fréquence limite dans la bande de transition $\omega_a$ et les ondulations maximales (*ripples*) $\delta_1$ et $\delta_2$ permises dans les deux bandes. La sélectivité est définie par le rapport $\omega_p/\omega_a$ (unitaire pour un filtre idéal). Pour construire ce filtre, on peut choisir entre un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou à réponse impulsionnelle infinie (RII). L'avantage d'un filtre RII est qu'en général, il nécessite un ordre beaucoup plus faible qu'un filtre RIF pour répondre aux mêmes spécifications. Néanmoins, les filtres RIF sont toujours stables, ce qui n'est pas le cas des filtres RII. Aussi, on se contentera ici d'utiliser uniquement des filtres RIF. Dans le cas du banc que nous avons choisi (figure 2.4c),




*(a)* Filtres idéaux




*(b)* Filtres de type paquets d'ondelettes




*(c)* Filtres avec recouvrement

FIGURE 2.4 – Position des filtres de décimation.

le filtre passe-bas à synthétiser doit vérifier les contraintes suivantes :

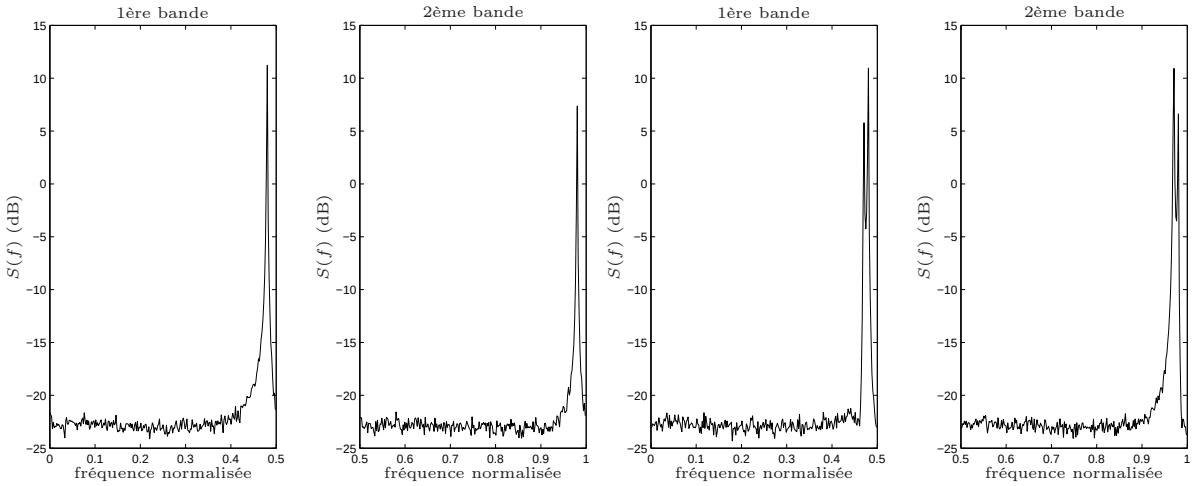
$$\omega_p = 2\pi/4d \tag{2.19}$$

$$\omega_p < \omega_a \leq 2\pi/2d \tag{2.19a}$$

$$\delta_1 \ll 1,\ \delta_2 \ll 1 \tag{2.19b}$$

Nous nous imposons la première contrainte pour pouvoir décomposer l'intervalle $[0, 2\pi[$ en un nombre entier de partitions (qui, par ailleurs, est égal à $2d$). Cette condition n'est pas indispensable, mais elle s'avère nécessaire dans le cadre de la décomposition adaptative présentée dans le chapitre 3 (voir remarque 2). La deuxième et la troisième assurent un repliement négligeable et une distorsion minimale dans la bande passante. A titre d'exemple, la figure 2.6a montre un filtre de Kaiser obtenu avec les paramètres $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$, $\omega_p = \pi/8$ et $\omega_s = 3\pi/16$. Ce filtre est conçu pour un facteur de décimation $d = 4$ et une décomposition en $2d = 8$ bandes fréquentielles. Le banc de filtres à recouvrement est représenté sur la figure 2.6b.

Nous avons vu précédemment que le bruit en sous-bandes $e_m(n)$ est théoriquement un processus MA($[\frac{N_f}{d}]$). En fait, si $\delta_1 \ll 1$, les ondulations du filtre dans la bande passante sont




*(a)* une sinusoïde *(b)* deux sinusoïdes

FIGURE 2.5 – Problèmes liés au repliement spectral avec un filtre de Daubechies $D_{10}$. Le signal d'origine est modulé successivement aux fréquences -0.25 puis -0.75. Densité spectrale de puissance pour une et deux sinusoïdes pures, estimée avec le périodogramme simple, moyenné sur 100 essais. *(a)* La fréquence $f_1 = 0.48$ dans la bande globale apparaît dans les deux sous-bandes à 0.48 et 0.98. *(b)* Les deux fréquences $f_1 = 0.48$ et $f_2 = 0.97$, initialement bien espacées, se retrouvent très proches dans les deux sous-bandes.

négligeables et la DSP du bruit dans cette zone est pratiquement plate. Cette propriété nous servira dans le chapitre 3 pour développer un critère d'arrêt basé sur la blancheur (mesurée par la platitude du spectre dans la bande passante).

D'après l'équation (2.19a), la fréquence $\omega_a \in ]\omega_p, 2\pi/2d]$ est un paramètre qui peut être choisi convenablement, suivant le signal à traiter. En effet, si $\omega_a$ est proche de $2\pi/2d$, les modes qui se retrouvent dans la (large) bande de transition du filtre ne sont pas négligeables et perturbent l'estimation de ceux situés à l'intérieur de la bande passante. Ceci peut engendrer des problèmes de résolution dynamique ainsi que des raies parasites. A l'opposé, si $\omega_a$ est proche de $\omega_p$, l'influence des modes hors de la bande passante devient négligeable. Cependant, la longueur du filtre résultant devient alors très importante, ce qui implique un transitoire d'autant plus long. Dans ce cas, la troncature de ce transitoire entraîne une disparition progressive des modes à fort amortissement au fur et à mesure du découpage. Ainsi, pour des signaux longs, présentant des problèmes de résolution dynamique et fréquentielle et dont les facteurs d'amortissement sont proches, $\omega_a$ devrait être choisie proche de $\omega_p$. C'est le cas des signaux traités dans le chapitre 4. En revanche, pour les signaux courts ou contenant des composantes dont les facteurs d'amortissement sont très différents, il est préférable de fixer une fréquence $\omega_a$ proche de $2\pi/2d$. Ce dernier réglage est celui retenu pour traiter les signaux de simulation du présent chapitre et du suivant.

**Remarque 2** *La décomposition proposée ici augmente d'un facteur 2 le nombre de partitions (de $d$ à $2d$). Il est bien sûr possible de réduire ce nombre en permutant les contraintes*

*imposées sur $\omega_p$ et $\omega_a$ dans les équations (2.19) et (2.19a). En effet, en fixant $\omega_a = 2\pi/2d$ et en choisissant $\omega_p$ dans l'intervalle $[2\pi/4d, 2\pi/2d[$, le nombre de partitions nécessaires est $2\pi/2\omega_p \in ]d, 2d]$. Ce choix est donc très intéressant sur le plan de la complexité numérique dans le cas de la décomposition uniforme. Cependant, puisque le nombre de partitions est généralement non-entier, cette technique s'avère difficile à mettre en oeuvre dans le cadre de la décomposition adaptative envisagée dans le chapitre suivant. Ainsi, pour rester cohérent, on considère uniquement le partitionnement défini par les équations (2.19), (2.19a) et (2.19b).*

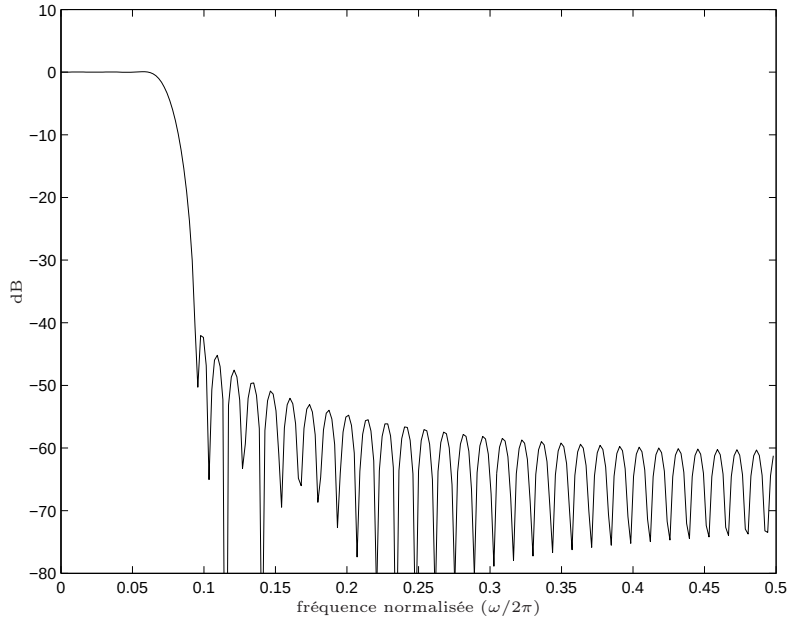
### 2.5.3 Approche IFIR

Certains signaux de complexité importante (contenant plusieurs composantes très proches) nécessitent de grands facteurs de décimation. Dans ce cas particulier, les filtres résultants ont une longueur trop importante (rappelons que le transitoire de longueur $N_f$ introduit par un filtre de décimation doit être éliminé). Comme nous l'avons signalé précédemment, si $d$ est une puissance d'un nombre entier, la décomposition directe par $d$ peut être remplacée par une décomposition en cascade. En revanche, si $d$ est un nombre non-premier quelconque, l'approche IFIR (*interpolated finite impulse response*) (voir [Vai93]) est plus adaptée. Elle permet également de remplacer une opération de filtrage/décimation par plusieurs opérations en cascade, en utilisant des filtres ayant des longueurs beaucoup plus faibles. On rappelle ici brièvement le principe de cette technique.

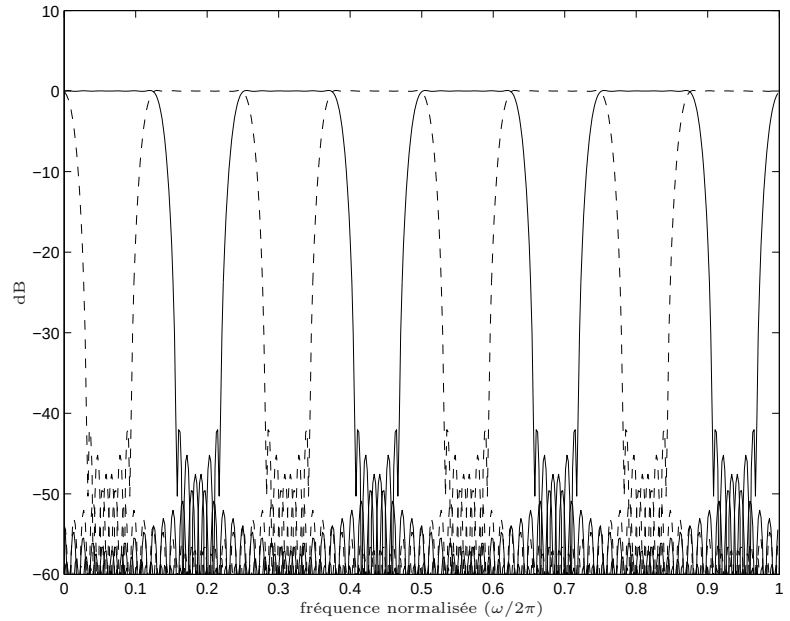
Considérons un bloc de filtrage passe-bas et de décimation représenté sur la figure 2.7a. On note $\omega_p$ et $\omega_a$ les fréquences caractéristiques du filtre $G(z)$. On suppose que le facteur de décimation $d$ peut être factorisé en un produit de termes entiers $d_1$ et $d_2$. On montre alors que le filtre $G(z)$ peut être construit en utilisant une factorisation de la forme [Vai93] :

$$G(z) = I(z)H(z^{d_1}) \tag{2.20}$$

où $I(z)$ est un filtre passe-bas dont les fréquences caractéristiques sont $\omega_p$ et $\frac{2\pi}{d_1} - \omega_a$. $H(z)$ est également un filtre passe-bas, version élargie $d_1$ fois de $G(z)$, c'est-à-dire avec les fréquences limites $d_1\omega_p$ et $d_1\omega_a$. Le rôle du filtre $I(z)$ est de supprimer les $(d_1 - 1)$ images introduites par $H(z^{d_1})$. Finalement, en utilisant une des propriétés des systèmes multi-échantillonés (figure 2.7c), on obtient la décomposition en deux étapes représentée sur la figure 2.7d. Maintenant, les bandes de transition des filtres $I(z)$ et $H(z)$ étant plus larges, ces derniers peuvent être synthétisés avec un ordre plus faible que celui nécessaire pour $G(z)$. Cette approche peut bien sûr être itérée sur le filtre $H(z)$ si le facteur de décimation $d_2$ est trop important.




*(a)* Filtre de base $G(z)$




*(b)* Banc de filtres $G_i(z)$

FIGURE 2.6 – Exemple de synthèse d'un banc de filtres avec recouvrement pour un facteur de décimation $d = 4$. Réponse d'amplitude des filtres d'analyse de type Kaiser avec un ordre $N_f = 38$.

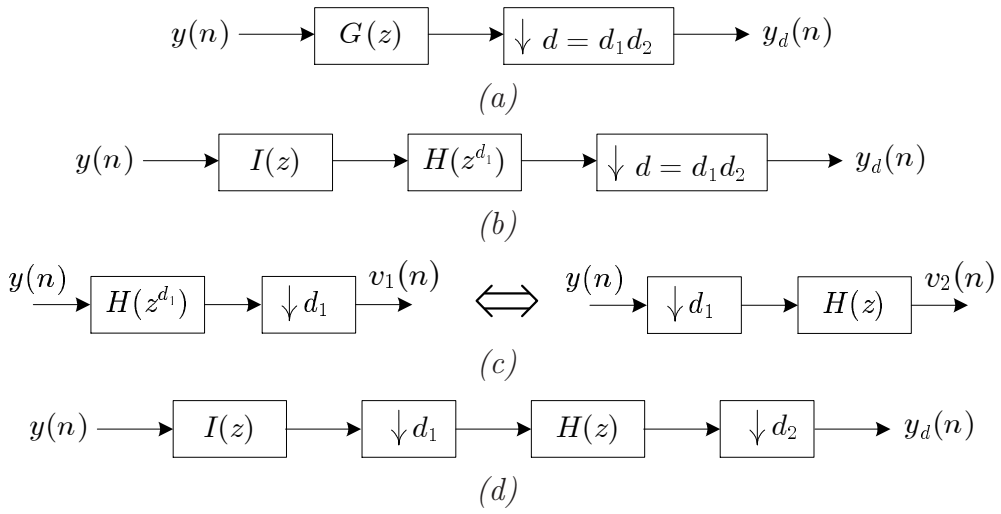



FIGURE 2.7 – Principe de l'approche IFIR.

## 2.6 Méthodes d'estimation en sous-bandes

La décomposition en sous-bandes peut être réalisée soit en utilisant un seul filtre que l'on décale dans la bande fréquentielle $[0, 2\pi[$, soit en utilisant un filtre passe-bas et en modulant convenablement le signal d'origine. C'est cette dernière approche que l'on utilisera dorénavant. La procédure de décomposition (répétée pour chaque sous-bande $m = 0, 1, ..., 2d-1$ ; $d$ étant le facteur de décimation) peut être résumée par le diagramme de la figure 2.8.

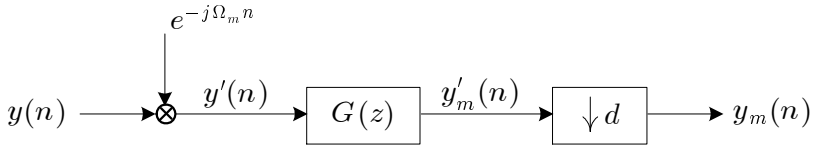



FIGURE 2.8 – Génération des signaux en sous-bandes à l'aide d'un seul filtre passe-bas $G(z)$.

Le signal $y(n)$ est d'abord modulé à la fréquence $\Omega_m$ :

$$y'(n) = y(n)e^{-j\Omega_m n},\ n = 0, 1, ..., N-1 \tag{2.21}$$

où :

$$\Omega_m = 2\pi F_m = \frac{2\pi}{4d}(2m+1),\ m = 0, 1, ..., 2d-1 \tag{2.22}$$

Ainsi, la bande $[\frac{2\pi}{4d}(2m-1), \frac{2\pi}{4d}(2m+3)]$ du signal $y(n)$ devient centrée autour de 0 pour le signal modulé. Ensuite, ce signal est filtré au moyen d'un filtre passe-bas $G(z)$ dont les fréquences caractéristiques sont $\omega_p = 2\pi/4d$ et $\omega_p < \omega_a \leq 2\pi/2d$. Le signal $y'_m(n)$ obtenu permet d'estimer les pôles contenus dans la sous-bande correspondante.
Nous avons vu que le signal $y'_m(n)$ peut être représenté par un modèle exponentiel d'ordre réduit dont les paramètres sont $\{z'_i\}_{i=1}^{M'}$ et $\{h'_i\}_{i=1}^{M'}$. Le bruit correspondant dépend du type de filtre utilisé. Pour un filtre idéal (d'ordre infini), le bruit est blanc si le bruit initial l'est

également. En revanche, pour un filtre (réalisable) d'ordre $N_f$, le bruit est un processus MA d'ordre $[\frac{N_f}{d}]$, où $N_f$ est l'ordre du filtre de décimation. Le signal en sous-bandes étant de type exponentiel, les méthodes décrites dans le chapitre 1 peuvent être employées pour estimer ses paramètres. Les méthodes basées sur les autocorrélations du signal doivent considérer un modèle ARMA$(M', M' + [\frac{N_f}{d}])$. Pour cela, il suffit d'utiliser une représentation d'ordre élevé ARMA$(p, p)$, où $p > M' + \frac{N_f}{d}$. Soulignons le fait que les pôles estimés dans la bande de transition du filtre doivent être éliminés *après* avoir estimé les amplitudes. En effet, bien que ces modes soient atténués, leur non prise en compte dans l'estimation des amplitudes suffit à entraîner des erreurs non négligeables. Leur élimination ne pose pas de problème puisqu'ils seront détectés dans les bandes voisines. Le paragraphe suivant a pour objectif de déterminer les images $\hat{z}_i$ et $\hat{h}_i$ dans la bande globale des paramètres estimés en sous-bandes.

### 2.6.1 Transformation vers la bande globale

Une fois les paramètres en sous-bandes estimés, leur transformation vers la bande globale est obtenue en utilisant les relations suivantes :

$$\hat{z}'_i = (\hat{z}_i e^{-\jmath\Omega_m})^d \tag{2.23}$$

$$\hat{h}'_i = \hat{h}_i (\hat{z}_i e^{-\jmath\Omega_m})^{N_f} G(\hat{z}_i e^{-\jmath\Omega_m}) \tag{2.24}$$

Ces deux équations correspondent aux équations (2.8) et (2.13) mais diffèrent, du fait de la modulation. En général, il n'est pas possible de retrouver $\hat{z}_i$ à partir de $\hat{z}'_i$. En effet, on a $\hat{z}_i = \exp(-\alpha_i + \jmath\omega_i)$ et $\hat{z}'_i = \exp(-\alpha'_i + \jmath\omega'_i)$ et, d'après l'équation (2.23), il vient :

$$\omega'_i = (\omega_i - \Omega_m)d \bmod 2\pi \tag{2.25}$$

Cette application est bijective si et seulement si l'ensemble $\{\omega_i - \Omega_m\}_{i=1}^M$ est inclus dans un intervalle dont la largeur n'excède pas $2\pi/d$. Le rôle du filtre $G(z)$ est justement de restreindre le domaine de $(\omega_i - \Omega_m)$. En supposant que le gain du filtre est nul pour $|\omega| > \omega_a$, alors on peut dire que $|\omega_i - \Omega_m| \leq \omega_a$. D'où la condition $2\omega_a < 2\pi/d$ ou encore $\omega_a < 2\pi/2d$ (équation (2.19a)). Cette contrainte permet d'éviter le repliement et implique une relation unique entre $\omega'_i$ et $\omega_i$. Dans ce cas, d'après l'équation (2.23), l'image dans la bande globale des pôles estimés en sous-bandes est donnée par la relation :

$$\hat{z}_i = (\hat{z}'_i)^{1/d} e^{\jmath\Omega_m} \tag{2.26}$$

et celle des amplitudes est :

$$\hat{h}_i = \frac{\hat{h}'_i}{(\hat{z}_i e^{-\jmath\Omega_m})^{N_f} G(\hat{z}_i e^{-\jmath\Omega_m})} \tag{2.27}$$

Les amplitudes $\hat{h}_i$ peuvent être estimées directement à partir des signaux en sous-bandes, en modifiant les équations de Vandermonde (1.84) selon :

$$\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{G}_m\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{y}_m \tag{2.28}$$

où :

$$\hat{\mathbf{Z}}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{z}'_1 & \hat{z}'_2 & \cdots & \hat{z}'_{M'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\hat{z}'_1}^{K-1} & {\hat{z}'_2}^{K-1} & \cdots & {\hat{z}'_{M'}}^{K-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} (\hat{z}_1 e^{-\jmath\Omega_m})^{N_f} G(\hat{z}_1 e^{-\jmath\Omega_m}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\hat{z}_2 e^{-\jmath\Omega_m})^{N_f} G(\hat{z}_2 e^{-\jmath\Omega_m}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\hat{z}_{M'} e^{-\jmath\Omega_m})^{N_f} G(\hat{z}_{M'} e^{-\jmath\Omega_m}) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{h}_1,\ \hat{h}_2,\ ...,\ \hat{h}_{M'}]^T,$$

$$\mathbf{y}_m = [y_m(0),\ y_m(1),\ ...,\ y_m(K-1)]^T.$$

La matrice $\mathbf{G}_m$ prend en compte l'effet de la modulation, du filtrage ainsi que la troncature des $N_f$ échantillons transitoires. Cette équation peut être résolue par une des méthodes LS, WLS ou TLS. Le paramètre $K \leq N'$ est défini dans le paragraphe 1.7. Dans le cas de l'approche IFIR, la matrice $G_m$ se décompose en un produit de plusieurs matrices (voir [Hen97]).

### 2.6.2 Estimation du nombre de composantes

Du fait du choix d'une décomposition redondante, il apparaît un problème lié à l'estimation du nombre de composantes en sous-bandes. En effet, le facteur de décimation étant sous-déterminé par rapport à la fréquence de coupure du filtre, il subsiste, après décimation, une partie du spectre où le filtre a un gain qui tend vers zéro. Ceci a pour effet d'introduire une rupture des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation qui peut tromper les critères de sélection de l'ordre.

A titre d'illustration, on considère un bruit blanc $e(n)$ de moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2$. Sa densité spectrale de puissance est constante : $\varphi_e(f) = \sigma_e^2$. Supposons que l'on veuille décomposer le signal $e(n)$ par un facteur 2 en utilisant un filtre de décimation $G(z)$ dont les pulsations de coupure sont $\omega_p = \pi/4$ et $\omega_p \leq \omega_s \leq \pi/2$ (décomposition redondante). Pour simplifier l'analyse, on considère un filtre idéal : $\omega_s = \omega_p = \pi/4$. Soit $\epsilon(n)$ le signal résultant du processus de filtrage et de décimation par 2. Sa densité spectrale de puissance est donnée par la relation :

$$\varphi_\epsilon(f) = \frac{1}{2}|G(f/2)|^2\varphi_e(f/2),\ f \in [-0.5, 0.5] \tag{2.29}$$

Le filtre étant idéal, $\varphi_\epsilon(f)$ peut s'écrire :

$$\varphi_\epsilon(f) = \frac{\sigma_e^2}{2}\text{rect}(2f) \tag{2.30}$$

où rect$(x)$ est une fonction rectangulaire centrée d'amplitude et de largeur unitaires. La fonction d'autocorrélation est donc un sinus cardinal de la forme :

$$r_\epsilon(k) = \frac{\sigma_e^2}{4}\text{sinc}(k/2) \tag{2.31}$$

Supposons que $r_\epsilon(k) \simeq 0$ pour $|k| > L$, où $L$ est suffisamment grand. La matrice d'autocorrélation :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_\epsilon(0) & r_\epsilon(-1) & \cdots & r_\epsilon(-L) & 0 & \cdots & 0 \\ r_\epsilon(1) & r_\epsilon(0) & \cdots & r_\epsilon(-L+1) & r_\epsilon(-L) & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ r_\epsilon(L) & r_\epsilon(L-1) & \cdots & r_\epsilon(0) & r_\epsilon(-1) & \cdots & 0 \\ 0 & r_\epsilon(L) & \cdots & r_\epsilon(1) & r_\epsilon(0) & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_\epsilon(0) \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

de type Toeplitz et de dimension $p \times p$ est asymptotiquement $(p \to \infty)$ équivalente à la matrice circulaire obtenue à partir de la séquence [GS58] :

$$\{r(k)\}_{k=0}^{p-1} \in \{r_\epsilon(0),\ \cdots,\ r_\epsilon(-L),\ 0,\ \cdots,\ 0,\ r_\epsilon(L),\ \cdots,\ r_\epsilon(1)\} \tag{2.33}$$

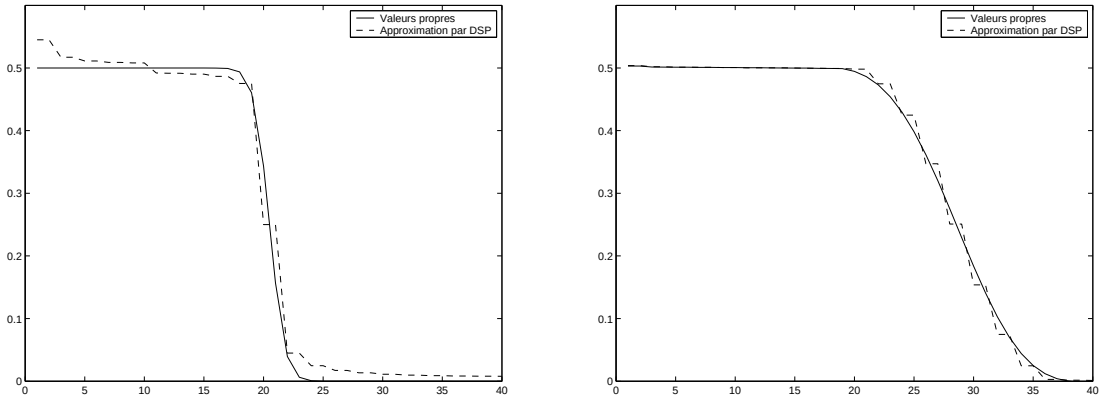
Les valeurs propres de $\mathbf{R}$ sont donc asymptotiquement égales à celles de la matrice circulaire qui sont simplement les coefficients de la transformée de Fourier discrète de la séquence $r(k)$ :

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^{p-1} r(k) e^{-j\frac{2\pi}{p}k(i-1)},\ i = 1, ..., p \tag{2.34}$$

On en déduit que :

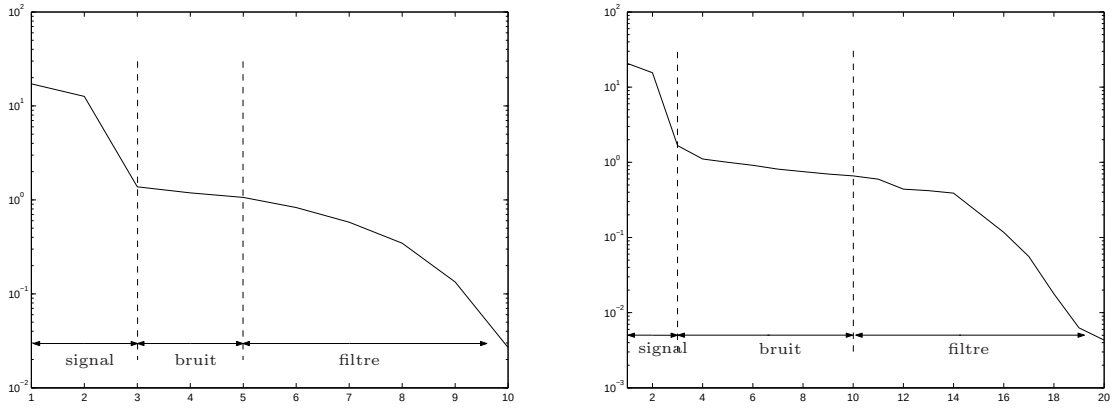
$$\lambda_i \simeq \varphi_\epsilon(f_i) \tag{2.35}$$

où $f_i$ sont les fréquences discrètes, uniformément réparties sur la bande $[-0.5, 0.5]$. Etant donné que le filtre présente une bande passante égale à la moitié de la bande totale, le nombre de valeurs propres non-nulles est égal à $p/2$. On peut donc dire que sur l'ensemble des $p$ valeurs propres, les $p/2$ plus petites sont altérées par le filtre (elles sont nulles avec un filtrage idéal). Par exemple, la figure 2.9 montre l'allure des valeurs propres, triées dans l'ordre décroissant, obtenues avec (a) un filtre idéal et (b) un filtre RIF d'ordre $N_f = 6$ $(\omega_p = \pi/4,\ \omega_s = \pi/2)$. Dans le premier cas, les valeurs propres théoriques sont celles de la




*(a)* filtre idéal *(b)* filtre RIF

FIGURE 2.9 – Valeurs propres en sous-bandes de la matrice d'autocorrélation d'ordre $p = 40$ dans le cas d'un bruit blanc.




*(a)* $p = 10$ *(b)* $p = 20$

FIGURE 2.10 – Allure typique des valeurs singulières de la matrice de données en sous-bandes (décomposition redondante). Cas de deux exponentielles amorties.

matrice $\mathbf{R}$ de dimension $p = 40$. Les valeurs propres approchées par la densité spectrale de puissance (DSP) sont calculées en utilisant la séquence $r(k)$ (équation (2.33)) avec $L = 19$. On constate que les $p/2 = 20$ dernières valeurs propres sont nulles pour un filtre idéal et décroissantes pour le filtre RIF. Par conséquent, ces valeurs ne doivent pas être prises en compte dans l'estimation du nombre de composantes. En revanche, les $p/2$ plus grandes valeurs propres restent quasiment égales, ce qui indique que la DSP est plate à l'intérieur de la bande passante et, par conséquent, on peut mesurer la « blancheur locale » dans cette partie du spectre (cf. chapitre 3).

Lorsque le signal en sous-bande contient $M'$ composantes, le résultat précédent reste approximativement vrai, à condition que $p \gg M'$ ($p$ est au moins égal à $2M$). La figure 2.10 montre les valeurs singulières de la matrice de données (méthode KT) obtenues pour un signal en sous-bande contenant deux sinusoïdes amorties avec deux ordres de prédiction $p = 10$ et $p = 20$. Dans les deux cas, on constate la décroissance des valeurs singulières à partir de

$p/2$. Pour cet exemple, quand toutes les valeurs singulières sont utilisées, le critère MDL de Wax et Kailath [WK85] donne $\hat{M}' = 9$ pour $p = 10$ et $\hat{M}' = 18$ pour $p = 20$. En revanche, le même critère appliqué aux $p/2$ premières valeurs singulières donne le nombre correct de composantes ($\hat{M}' = 2$).

En général, lorsque la fréquence caractéristique du filtre $\omega_p = 2\pi/4d$, il faut utiliser uniquement les $p/2$ premières valeurs propres (ou singulières) lors de l'estimation du nombre de composantes. Dans ce cas, il ne suffit pas de choisir $p > M'$, mais il est nécessaire que l'ordre de modélisation $p$ vérifie $p > 2M'$. Cela ne constitue pas une limitation de l'approche en sous-bandes puisque généralement $p$ est choisi beaucoup plus grand que le nombre de modes, même dans une estimation globale.

### 2.6.3 Sur les composantes polyphasées

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'analyser l'apport des composantes polyphasées dans l'estimation des paramètres en sous-bandes. On considère ici la méthode KT, mais la démarche peut être généralisée à toutes les méthodes présentées dans le chapitre 1. Cette méthode consiste à résoudre le système d'équations (1.12) en utilisant une SVD tronquée. L'intégration des composantes polyphasées dans ce système est possible au vu de la structure du modèle en sous-bandes (équation (2.14)). Si l'on veut exploiter toutes les composantes polyphasées, l'équation à résoudre est :

$$\bar{\mathbf{Y}}_m \mathbf{b} = -\bar{\mathbf{y}}_m \tag{2.36}$$

avec :

$$\bar{\mathbf{Y}}_m = \left[\begin{array}{cccc} y_m^{(0)}(1) & y_m^{(0)}(2) & \cdots & y_m^{(0)}(p) \\ y_m^{(0)}(2) & y_m^{(0)}(3) & \cdots & y_m^{(0)}(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m^{(0)}(N'-p) & y_m^{(0)}(N'-p+1) & \cdots & y_m^{(0)}(N'-1) \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline y_m^{(d-1)}(1) & y_m^{(d-1)}(2) & \cdots & y_m^{(d-1)}(p) \\ y_m^{(d-1)}(2) & y_m^{(d-1)}(3) & \cdots & y_m^{(d-1)}(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m^{(d-1)}(N'-p) & y_m^{(d-1)}(N'-p+1) & \cdots & y_m^{(d-1)}(N'-1) \end{array}\right]_{d(N'-1)\times p},$$

$$\mathbf{b} = [b_1,\ b_2,\ ...,\ b_p]^T,$$

$$\bar{\mathbf{y}}_m = [y_m^{(0)}(0),\ ...,\ y_m^{(0)}(N'-p-1) \mid ... \mid y_m^{(d-1)}(0), ...y_m^{(d-1)}(N'-p-1)]^T.$$

On peut montrer que la fonction d'intercorrélation entre deux composantes polyphasées d'indices $\tau$ et $\tau' = \tau + t$ s'écrit :

$$\gamma_m(t) \triangleq \mathbb{E}\left\{y_m^{*(\tau)}(n) y_m^{(\tau+t)}(n)\right\} = \begin{cases} \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{N_f} g_m^*(k) g_m(k+t), & \text{si } -N_f \leq t \leq N_f, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.37}$$

Etant donné que $|t| < d$ et que, en général, $d \ll N_f$, on a alors $\gamma_m(t) \neq 0, \forall |t| = 0, 1, ..., d-1$. Ce qui veut dire que les composantes polyphasées sont corrélées et, par conséquent, deux lignes de la matrice $\bar{\mathbf{Y}}_m$ distantes de $(N' - 1)$ ne sont pas complètement décorrélées. Il en résulte que l'utilisation de toutes les composantes polyphasées n'entraîne pas forcément une amélioration sensible de l'estimation des paramètres [SYM94a]. Par exemple, avec un facteur de décimation $d = 4$ associé à un filtre de Kaiser ($\omega_p = \pi/8$, $\omega_a = \pi/4$ et $N_f = 14$), on obtient la séquence d'intercorrélation normalisée $\{0.61, 0.80, 0.94, 1, 0.94, 0.80, 0.61\}$ pour $t = -3, ..., 3$. Les composantes polyphasées sont donc fortement corrélées.

Pour mettre en évidence l'influence des composantes polyphasées (CP) sur l'estimation des paramètres, nous avons effectué une simulation de type Monte Carlo avec 300 réalisations du bruit. Le premier signal considéré est constitué de 100 échantillons et comporte une exponentielle pure dont la fréquence est fixée à $\omega_1 = 2\pi 0.05$, celle-ci apparaît à l'intérieur de la bande passante du filtre mentionné précédemment. L'erreur quadratique moyenne d'estimation de cette composante par la méthode KT est représentée sur la figure 2.11. A faible RSB, les différentes combinaisons des séries polyphasées donnent quasiment la même EQM. Quand le RSB est élevé, la combinaison des séries 1 et 4 conduit à la plus faible EQM (ces séries sont les moins corrélées). Le gain obtenu est néanmoins très faible (quelques fractions de dB sur une EQM proche de -70 dB). Cet exemple montre que la précision de l'estimation est liée à la corrélation entre les composantes polyphasées considérées.

Dans le cas d'un signal amorti, la précision n'est pas uniquement liée à la corrélation mais aussi à l'amortissement. En effet, dans cette situation, le RSB initial des séries polyphasées est décroissant. Par exemple, la figure 2.12 montre les résultats obtenus avec un signal sinusoïdal amorti ($\alpha_1 = 0.06$, les autres paramètres sont les mêmes que pour le signal précédent). Dans ce cas, la combinaisons des séries 1 et 4 ne conduit pas à la meilleure EQM à cause du faible RSB qui caractérise la série 4. Ici, l'utilisation de la première série aboutit à une faible EQM et les autres combinaisons détériorent légèrement les performances de la méthode KT. De façon générale, les performances de la méthode restent pratiquement inchangées avec une ou plusieurs composantes polyphasées. De ce fait, afin de réduire le coût de calcul (nombre de lignes de la matrice $\bar{\mathbf{Y}}_m$), nous considérons dans la suite uniquement la première composante.

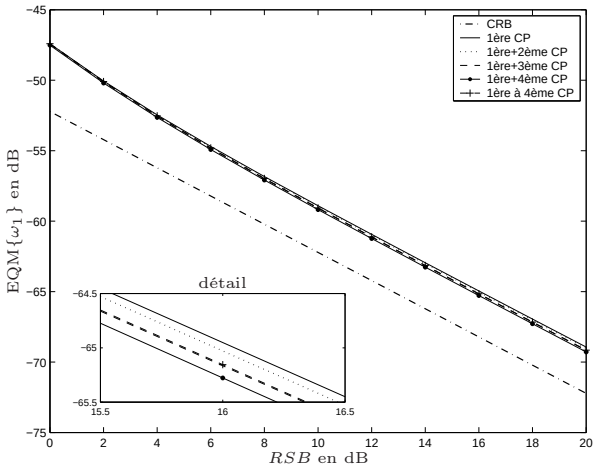
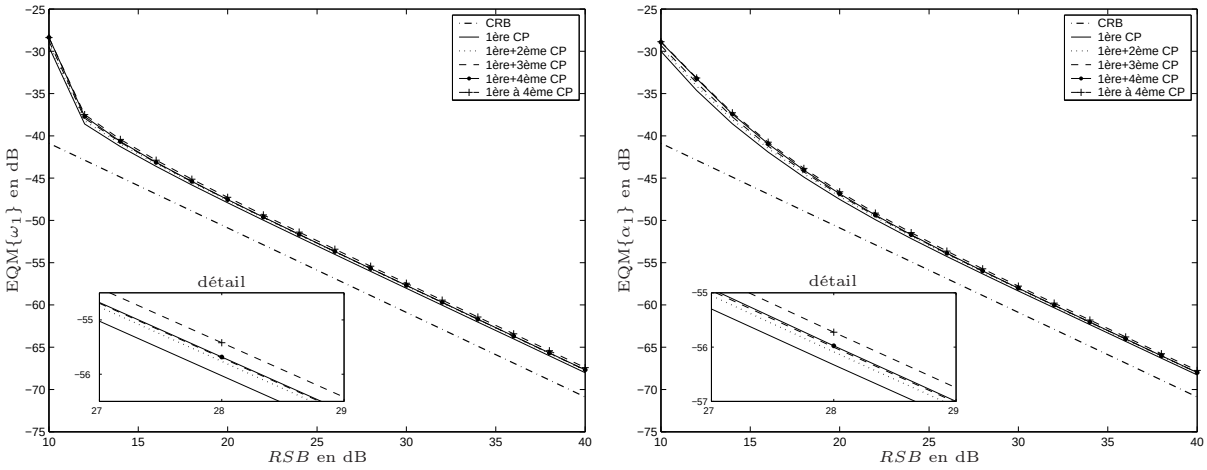



FIGURE 2.11 – Exemple d'estimation d'une sinusoïde pure en utilisant les composantes polyphasées.




*(a)* fréquence *(b)* amortissement

FIGURE 2.12 – Exemple d'estimation d'une sinusoïde amortie en utilisant les composantes polyphasées.

### 2.6.4 Mise en oeuvre d'un algorithme d'estimation en sous-bandes

La mise en oeuvre d'un algorithme d'estimation en sous-bandes nécessite, outre la méthode d'estimation elle-même, le choix du filtre et du facteur de décimation. Le choix du facteur de décimation est déterminé par la complexité du problème qui est liée au nombre de composantes, à la séparation fréquentielle entre ces composantes, ainsi qu'au nombre d'échantillons disponibles. Une fois le facteur $d$ choisi, le filtre de décimation (passe-bas) doit répondre aux trois contraintes dans l'équation (2.19).

A partir de là, l'estimation en sous-bandes peut être résumée par les trois étapes suivantes :

1. Obtenir tous les signaux en sous-bande $y_m(n),\ m = 0, 1, ..., 2d-1$, après modulation (équation (2.21)), filtrage passe-bas (équation (2.6)) et décimation (équation (2.11)).

2. Dans chaque sous-bande $m$, estimer les paramètres $z'_i$ et $h'_i$. Rejeter les pôles apparaissant dans la bande de transition du filtre.
3. Transformer les paramètres en sous-bande vers la bande globale (équations (2.26) et (2.27)).

## 2.7 Analyse des performances

Dans cette partie, nous nous proposons de comparer les performances de l'estimation en sous-bandes par rapport à une estimation directe effectuée dans la bande globale. Deux méthodes d'estimation sont utilisées : la méthode de Kumaresan-Tufts (KT) et une méthode de type ARMA (SVD-MHOYW). Pour quantifier les performances de l'estimation en sous-bandes, nous utilisons les critères suivants :

– la variance et l'erreur quadratique moyenne ;
– la détection ou la capacité à distinguer les pôles du signal de ceux du bruit ;
– la résolution fréquentielle ;
– la complexité numérique.

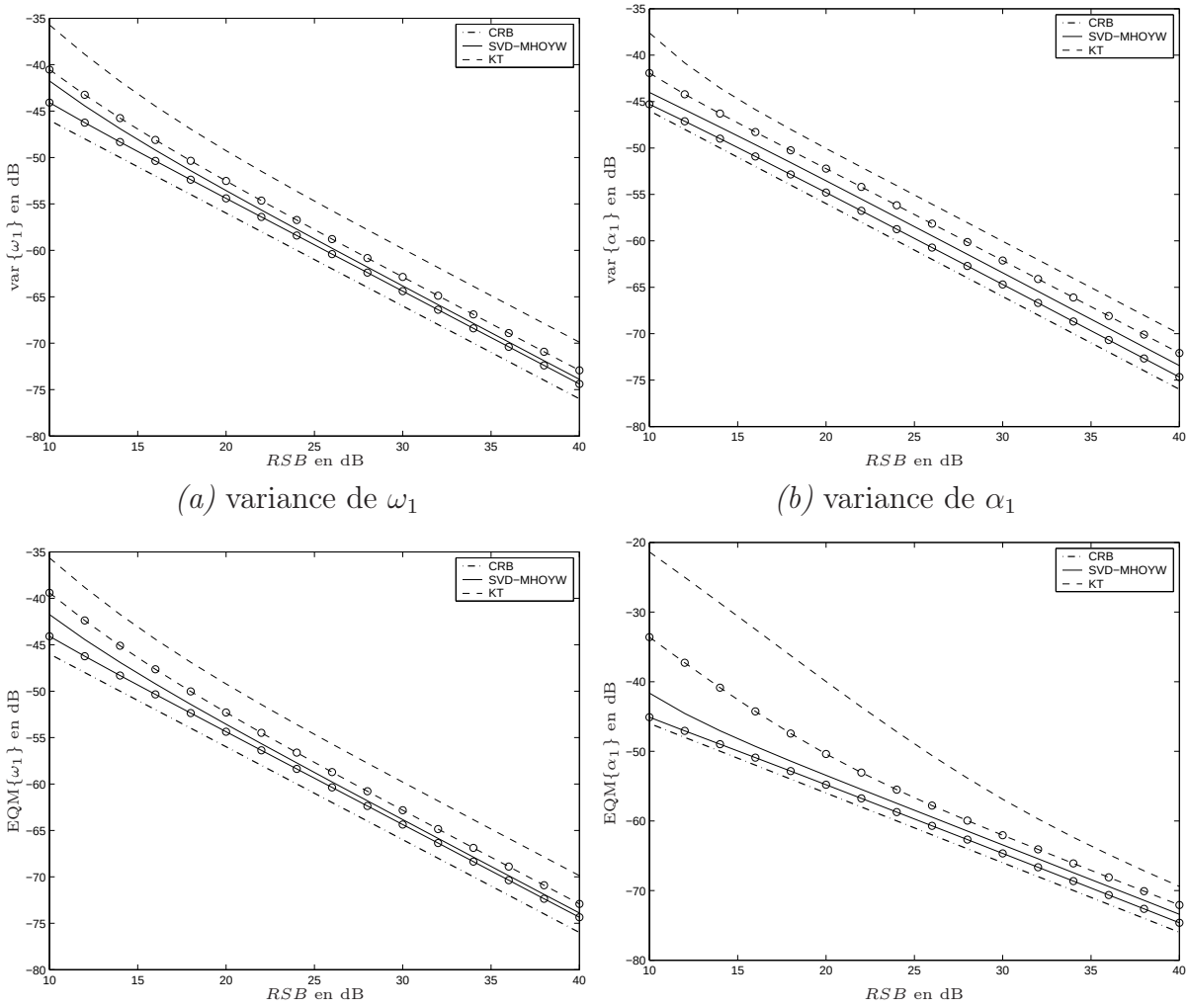
La comparaison entre l'estimation en sous-bandes et dans la bande globale est effectuée en se plaçant dans une situation de « complexité égale » ; c'est-à-dire en utilisant le même ordre de prédiction. Le cas où l'ordre de prédiction est différent est traité dans le paragraphe 2.7.4.

Chaque simulation est effectuée en utilisant 200 réalisations du bruit. La décomposition en sous-bandes est réalisée avec un facteur de décimation $d = 2$ et un filtre passe-bas à taux d'ondulation constant (*equiripple*) de Parks-McClellan [PB87] dont les paramètres sont $\omega_p = \pi/4$, $\omega_a = \pi/2$ et $N_f = 5$. Toutes les courbes marquées par un cercle ($\circ$) indiquent une estimation faite en sous-bandes.

### 2.7.1 Variance et erreur quadratique moyenne

On considère une exponentielle complexe ayant les paramètres $\omega_1 = 2\pi 0.05$ et $\alpha_1 = 0.04$. La variance et l'erreur quadratique moyenne obtenues dans la bande globale et en sous-bandes, en utilisant un ordre de prédiction $p = 4$, sont représentées sur la figure 2.13. Il apparaît que les méthodes d'estimation en sous-bandes aboutissent à un meilleur résultat que celles utilisant le signal d'origine, que ce soit en termes de variance ou d'erreur quadratique moyenne. On constate également un large biais dans l'estimation du facteur d'amortissement par la méthode KT à faible RSB. Ce biais est toutefois moins prononcé en sous-bandes. La différence de performance entre une estimation en sous-bandes et dans la bande globale est, bien sûr, décroissante lorsque l'ordre de prédiction augmente. C'est ce que l'on peut observer sur la figure 2.14 qui montre les EQM obtenues avec un ordre $p = 8$. La méthode

KT appliquée sur le signal original exhibe toujours un biais sur le facteur d'amortissement. Il est cependant moins prononcé qu'avec $p = 4$.



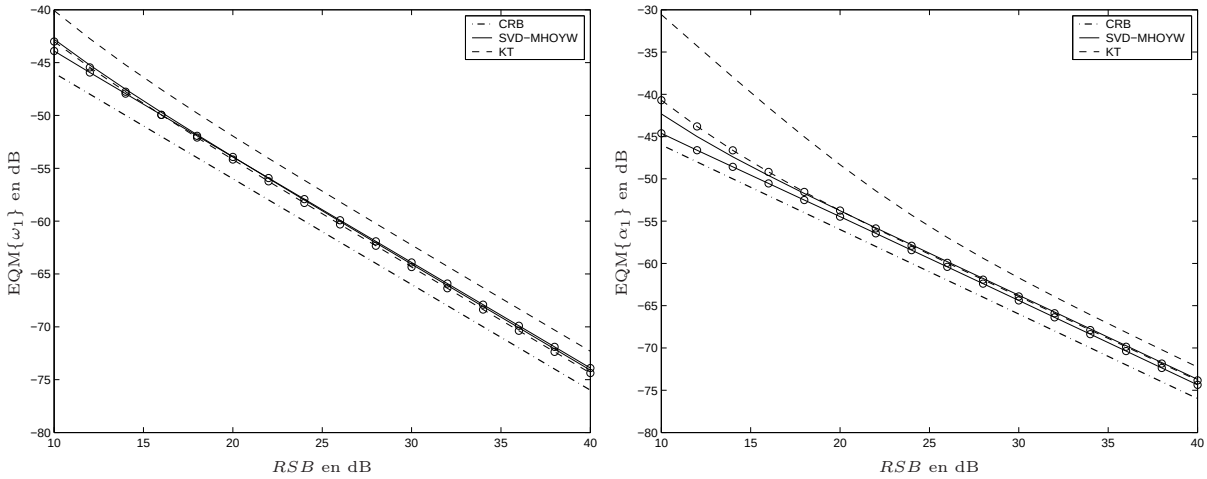

*(a)* variance de $\omega_1$ *(b)* variance de $\alpha_1$

*(c)* EQM de $\omega_1$ *(d)* EQM de $\alpha_1$

FIGURE 2.13 – Estimation d'une sinusoïde amortie ($p = 4$). Les courbes marquées ($- \circ -$) indiquent une estimation en sous-bandes.

### 2.7.2 Détection en sous-bandes

Certaines méthodes d'estimation de paramètres de sinusoïdes amorties telles que KT, SVD-HOYW, SVD-MHOYW, etc. nécessitent la séparation des pôles du signal de ceux liés au bruit lorsque $p > M$. Cette opération est effectuée sur les racines du polynôme de prédiction arrière (voir chapitre 1). Les racines dont le module est supérieur à 1 sont associées au signal et les autres au bruit. La capacité d'un estimateur à séparer les pôles du signal de ceux du bruit dépend, à la fois, du RSB, de l'ordre de prédiction et de l'estimateur considéré. Pour quantifier cette performance, on définit le taux de détection $\tau_1$ par le pourcentage (dans une simulation Monte Carlo) des pôles situés à l'extérieur du cercle unité.




*(a)* EQM de $\omega_1$ *(b)* EQM de $\alpha_1$

FIGURE 2.14 – Estimation d'une sinusoïde amortie ($p = 8$).

Une autre mesure de performance consiste à déterminer la proximité des pôles estimés des pôles réels. Ce critère peut être utilisé aussi bien pour les sinusoïdes pures qu'amorties. Pour cela, on définit le taux de détections correctes $\tau_2(i)$ d'une composante $z_i$ par le pourcentage des modes estimés au voisinage de $z_i$, avec une erreur fréquentielle maximale $\Delta\omega$ fixée *a priori*. Cette mesure reflète donc la précision de l'estimation.

En considérant $N_s$ simulations et en posant $\hat{Z}(k) = \{\hat{z}_i(k)\}_{i=1}^{M}$, l'ensemble des pôles estimés au cours de la simulation $k$ ($k = 1, ..., N_s$), on obtient les définitions suivantes :

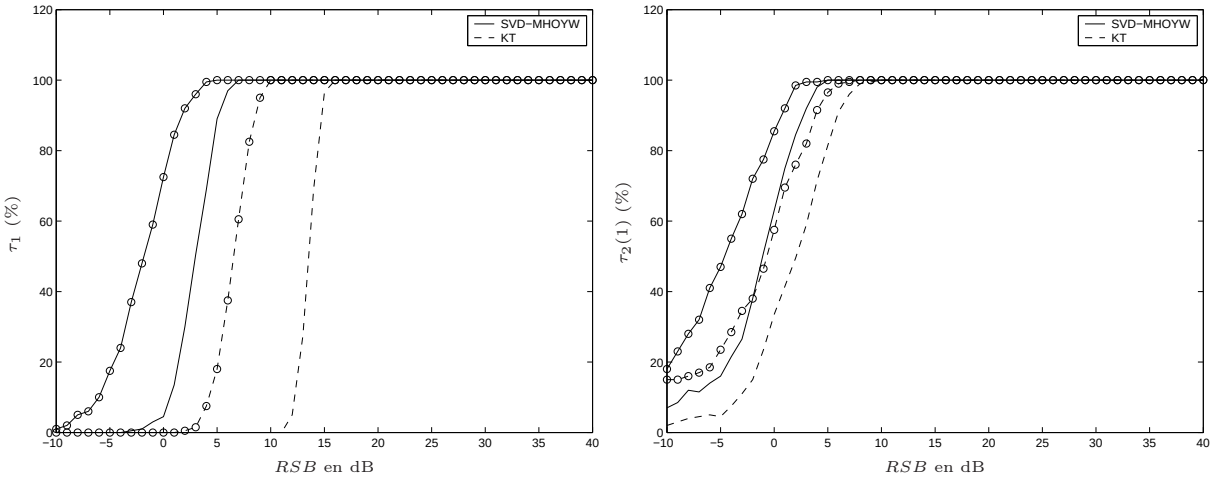
$$\tau_1\% \triangleq \frac{100}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \frac{\text{Card}\{\hat{Z}(k) \ / \ |\hat{z}_i(k)| \leq 1\}}{M} \tag{2.38}$$

$$\tau_2(i)\% \triangleq \frac{100}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \text{Card}\{\hat{Z}(k) \ / \ |\angle\hat{z}_i(k) - \angle z_i| \leq \Delta\omega\} \tag{2.39}$$

La figure 2.15 montre les taux de détection $\tau_1$ et $\tau_2(1)$ pour la sinusoïde amortie définie dans le paragraphe précédent ($\Delta\omega = 2\pi 0.01$). On constate que, d'une part, le taux de détection de la méthode SVD-MHOYW est meilleur que celui de la méthode KT à bas RSB et que, d'autre part, ce taux est encore meilleur en sous-bandes. A fort RSB, ces méthodes sont équivalentes.

### 2.7.3 Résolution

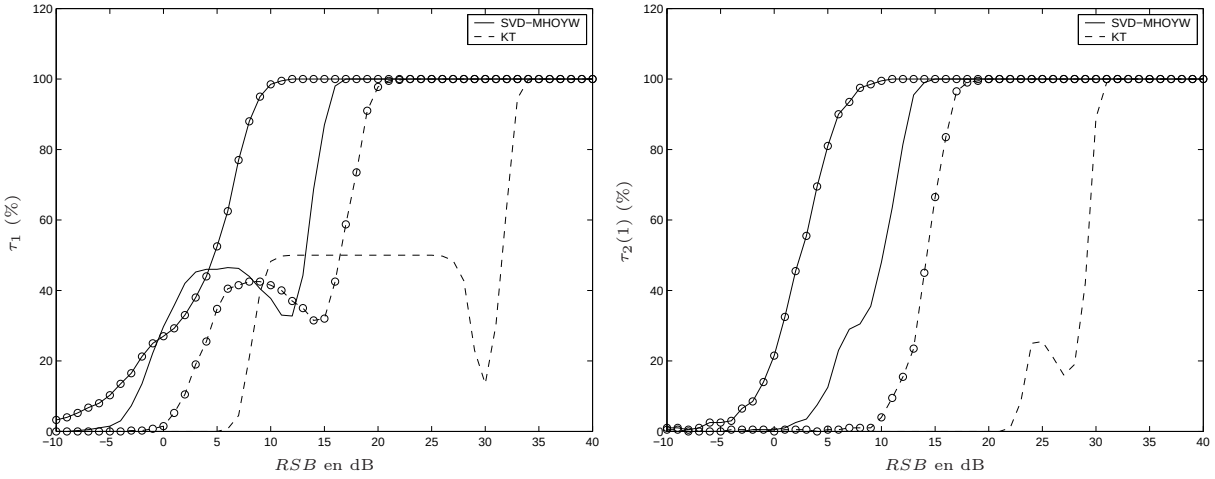
L'objectif de ce paragraphe est de présenter les performances de l'estimation en sous-bandes, sur le plan de la résolution fréquentielle. Celle-ci est mesurée en utilisant les deux critères $\tau_1$ et $\tau_2(i)$, en considérant deux sinusoïdes amorties dont les paramètres sont : $\omega_1 = 2\pi 0.05$,




*(a)* taux de détections *(b)* détections correctes

FIGURE 2.15 – Détection d'une sinusoïde amortie ($p = 4$).

$\omega_2 = 2\pi 0.08$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.04$. Les deux composantes ont le même RSB initial. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 2.16. Dans la bande globale, la méthode KT détecte 1 mode à l'extérieur du cercle unité lorsque le RSB est entre 10 et 25dB. Cette composante est située entre $z_1$ et $z_2$ puisque ni l'un ni l'autre des ces deux modes n'est détecté avec une précision suffisante comme l'indique $\tau_2(1)$ ($\tau_2(2)$ présente la même allure). Nous sommes donc dans une situation où les deux modes ne sont pas résolus. Les deux modes ne sont distingués qu'à partir de 30 dB. En revanche, l'estimation en sous-bandes permet de détecter les deux sinusoïdes à partir de 15 dB. Avec la méthode SVD-MHOYW le seuil de RSB à partir duquel les deux modes sont résolus est encore plus faible : approximativement 12 dB pour une estimation globale et 8 dB en sous-bandes.

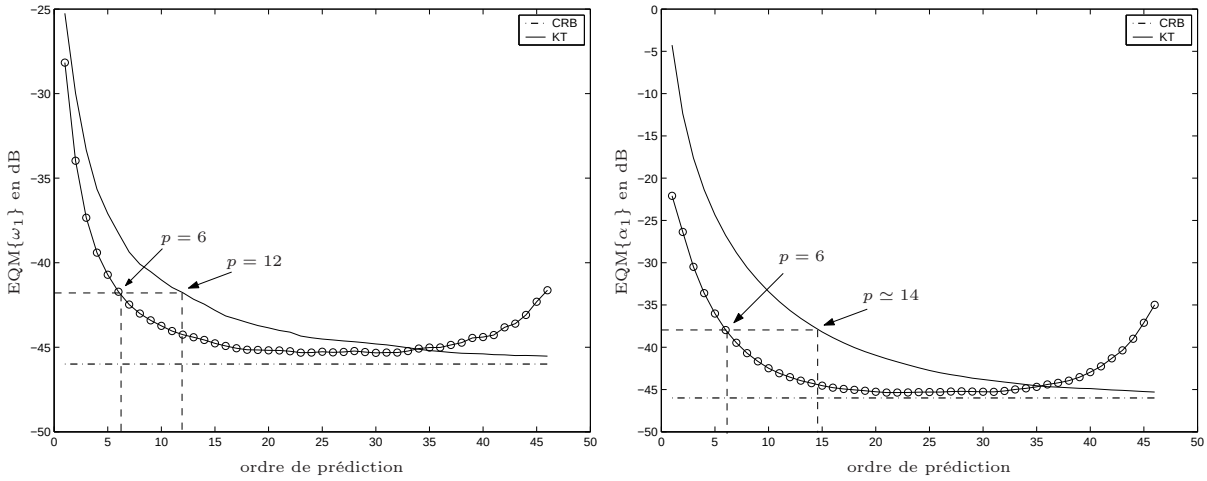



*(a)* taux de détections *(b)* détections correctes

FIGURE 2.16 – Résolution de deux sinusoïdes amorties ($p = 4$).

### 2.7.4 Complexité numérique

Les simulations présentées précédemment ont été obtenues en employant le même ordre de prédiction en sous-bandes et dans la bande globale. Les résultats indiquent qu'à ordre de prédiction égal, une estimation effectuée en sous-bandes surpasse une estimation dans la bande globale, selon plusieurs critères. D'après différents auteurs (par exemple [RP96, vdBLK95]), il est théoriquement possible de réduire l'ordre de prédiction en sous-bandes d'un facteur $d$ tout en maintenant le niveau de performances. La figure 2.17 montre l'erreur quadratique moyenne pour une sinusoïde amortie ($\omega_1 = 2\pi 0.05$, $\alpha_1 = 0.04$), avec un RSB de 10 dB et un ordre de prédiction variant entre 1 et 46 (limité par le nombre d'échantillons disponibles). D'après la figure, pour un ordre de prédiction $p$ entre 1 et 30 en sous-bandes, il faut un ordre deux fois plus grand pour avoir la même EQM sur $\omega_1$ en bande globale. Concernant le facteur d'amortissement, il faut un ordre *au moins* deux fois plus grand. La dégradation de l'EQM en sous-bandes à partir de $p = 30$ est due à la limitation du nombre d'échantillons ($N = 100$ et $N' = 47$).




*(a)* EQM de $\omega_1$ *(b)* EQM de $\alpha_1$

FIGURE 2.17 – Ordre de prédiction en sous-bandes avec la méthode KT.

L'ordre de prédiction en sous-bandes étant plus faible, le complexité numérique l'est également. Plus précisément, si l'on considère un filtre de décimation de type equiripple à phase linéaire, sa longueur est donnée par la formule de Bellanger [Bel96] :

$$N_f \simeq \frac{D(\delta_1, \delta_2)}{\Delta f} \tag{2.40}$$

où $D(\delta_1, \delta_2) = -\frac{2}{3}\log(10\delta_1\delta_2)$ et où $\Delta f = 1/4d$ est la longueur de la bande de transition. Le tableau 2.1 donne le nombre de flops (définis d'après Golub [GL89]) nécessaires en sous-bandes et dans la bande globale.

En supposant que $N \gg p > d$ et $N \gg N_f$, on obtient approximativement $6Np^2$ flops dans la

| | bande globale | sous-bandes |
|---|---|---|
| SVD | $6(N-p)p^2+2p^3$ | $\frac{6}{d^2}N(N-N_f-p)p^2+\frac{2}{d^2}p^3$ |
| Pôles | $10p^3$ | $\frac{10}{d^2}p^3$ |
| Filtrage | – | $2N_f(N-N_f)$ |
| Total | $6(N-p)p^2+12p^3$ | $\frac{1}{d^2}[6N(N-N_f-p)p^2+12p^3]+2N_f(N-N_f)$ |

TABLE 2.1 – Nombre d'opérations en sous-bandes et dans la bande globale.

bande globale et $6Np^2(\frac{1}{d^2}+\frac{4dD(\delta_1,\delta_2)}{3p^2})$ flops en sous-bandes. La gain en nombre d'opérations en sous-bandes peut être exprimé par le rapport suivant :

$$\rho_{\mathrm{fb/sb}}(d,p) \triangleq \frac{\mathrm{flops(fb)}}{\mathrm{flops(sb)}} = \frac{1}{\frac{1}{d^2}+\frac{4dD(\delta_1,\delta_2)}{3p^2}} \tag{2.41}$$

Dans le cas considéré ici ($d=2$ et $D(\delta_1,\delta_2)=1/3$), $\rho_{\mathrm{fb/sb}}(d,p)>1$ dès que $p\geq 2$. La figure 2.18 représente le gain en nombre d'opérations pour différentes valeurs de $d$ et $p$ (avec la condition $p>d$). Il apparaît clairement que le gain est d'autant plus grand que l'ordre de prédiction dans la bande globale est élevé.

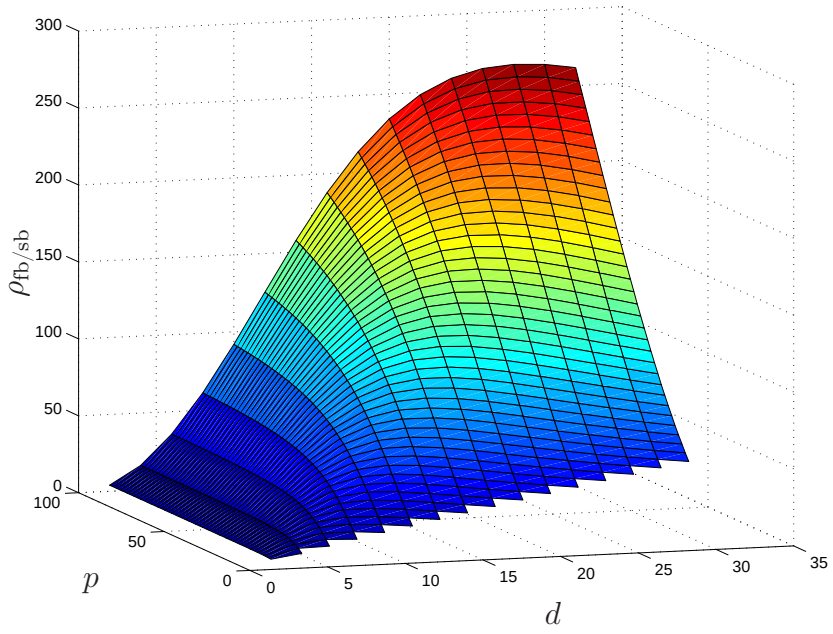



FIGURE 2.18 – Gain en nombre d'opérations (flops) en sous-bandes.

### 2.7.5 Limitations

D'après les résultats exposés précédemment, on pourrait penser que l'estimation en sous-bandes s'améliore en choisissant un facteur de décimation de plus en plus grand. Malheureusement, ceci n'est pas le cas en pratique. La raison en est que la qualité de l'estimation

dépend fortement du nombre (fini) d'échantillons $N$ et de l'ordre du filtre $N_f$. Or, nous avons vu que la longueur des signaux en sous-bande est $N' = [(N - N_f)/d]$. Donc, en augmentant $d$, l'ordre du filtre augmente et $N'$ diminue. Le fait que $N_f$ augmente avec $d$ a une conséquence importante sur l'estimation. En effet, dans le cas de sinusoïdes amorties et à cause de la troncature des échantillons transitoires introduits par le filtre pour prévenir tout biais, une information importante (concentrée au début du signal) est supprimée. Ceci résulte, entre autres, en la disparition des modes fortement amortis et en une augmentation de la variance des modes moins amortis. La figure 2.19 présente la variance, l'EQM, et les taux de détection $\tau_1$ et $\tau_2(1)$, pour une exponentielle amortie ($\omega_1 = 2\pi 0.05$, $\alpha_1 = 0.04$, $N = 90$ et $\eta_1 = 6$ dB) en fonction du facteur de décimation. Le filtre de décimation $G(z)$ vérifie les équations (2.19), avec $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$. Sa longueur varie de 0 ($d = 1$) à 25 ($d = 8$). On constate que la variance et l'EQM diminuent lorsque le facteur de décimation augmente jusqu'à $d \simeq 4$, puis elles commencent à croître. Le même comportement peut être observé sur les taux de détection. La détérioration des performances s'explique par la longueur trop importante (vis-à-vis de $N$) du filtre utilisé et par l'augmentation du facteur d'amortissement. Il existe donc un facteur de décimation optimal, qui est dans ce cas situé autour de $d = 4$ ; le taux de détections est maximal et la variance d'estimation est minimale.

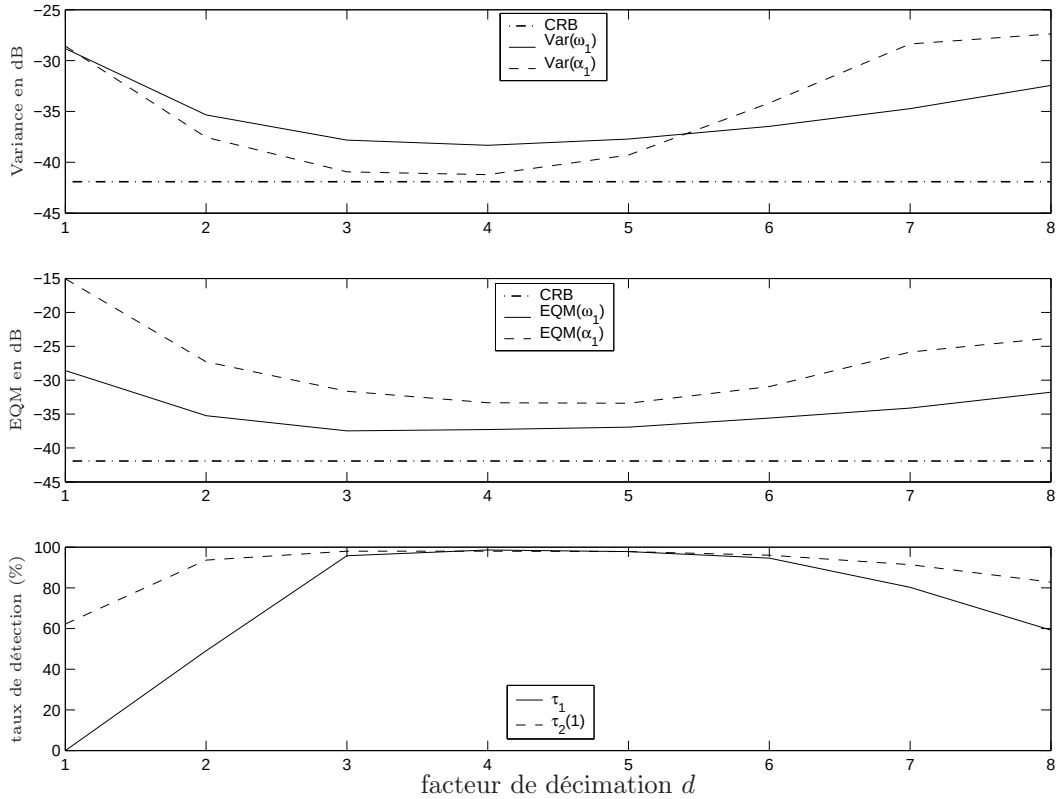



FIGURE 2.19 – Evolution des performances en sous-bandes. Méthode KT avec $p = 4$.

La réduction de la longueur des signaux en sous-bandes peut être positive dans le cas de signaux longs, car elle permet alors d'exploiter l'ensemble des échantillons. Néanmoins, cette

réduction peut aussi avoir des conséquences négatives lorsqu'elle aboutit à des valeurs de $N'$ par trop faibles. C'est pourquoi, le facteur de décimation doit être choisi prudemment, en fonction de la longueur $N$ du signal. Le but du le chapitre suivant est de proposer une méthode de décomposition qui permet justement, entre autres objectifs, de s'affranchir du choix *a priori* de ce paramètre.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence un certain nombre de résultats.
En premier lieu, nous avons montré que les signaux en sous-bandes peuvent être représentés par un modèle exponentiel. Le bruit étant coloré, une modélisation ARMA$(M', M' + [N_f/d])$ est donc la plus appropriée. En outre, si les ondulations du filtre dans la bande passante sont négligeables, la DSP du bruit dans cette bande est presque constante. Cette remarque sera exploitée dans le chapitre suivant.
Pour éviter tout problème de repliement fréquentiel, nous avons proposé un découpage avec un banc de filtres à recouvrement. Mais, le choix d'un tel banc de filtres augmente le nombre de bandes fréquentielles à analyser de $d$ à $2d$.
Par ailleurs, nous avons vu que le banc de filtres choisi influe sur les valeurs singulières de la matrice de données (ou d'autocorrélation), ce qui conduit à une mauvaise estimation du nombre de composantes. Nous avons alors proposé de n'utiliser que les $p/2$ plus grandes valeurs singulières, les autres étant très influencées par le filtre de décimation.
L'utilisation des différentes composantes polyphasées lors du processus d'estimation permettait d'escompter une amélioration de la variance d'estimation. Nous avons que, du fait de la forte corrélation entre ces composantes, cette amélioration est négligeable, voire inexistante.
Enfin, les simulations présentées montrent divers avantages de l'estimation en sous-bandes en termes de variance, d'EQM, de résolution et de détection. De plus, elles confirment l'efficacité d'une représentation ARMA par rapport à la méthode KT.
Les performances observées restent néanmoins très dépendantes des paramètres de la décomposition et en particulier du facteur de décimation qui est fixé *a priori*. L'objectif du chapitre suivant est de proposer une technique adaptative qui évite le choix de ce paramètre et qui permet de réaliser la décomposition en fonction du contenu fréquentiel du signal.

# Chapitre 3

# Décomposition adaptative et estimation en sous-bandes

## 3.1 Introduction et motivations

Dans le chapitre précédent, nous avons établi par des simulations que la décomposition en sous-bandes permet d'augmenter les performances de l'estimation en termes de détection, de résolution et de complexité numérique. Néanmoins, ces performances dépendent étroitement du nombre d'échantillons disponibles et du facteur de décimation. Ainsi, pour bénéficier pleinement des avantages de l'estimation en sous-bandes, le facteur de décimation devrait être choisi en fonction du signal à traiter. En particulier, il devrait être relativement faible en présence de signaux courts et de complexité réduite, et au contraire, élevé lorsque le signal est long et présente des problèmes de résolution. Par ailleurs, dans le cas d'un arbre de décomposition, le même raisonnement peut être appliqué à chaque noeud. Ainsi, en particulier, il n'est pas nécessaire de décomposer les bandes ne comptant aucune composante (appelées ici bandes vides). Ces remarques suggèrent donc l'utilisation de formes adaptatives de la décomposition au lieu d'un découpage uniforme. De telles formes adaptatives autorisent des structures à bancs de filtres non-uniformes. Idéalement, elles permettent de plus d'isoler chaque mode dans une bande fréquentielle propre réduisant ainsi les interférences. Cependant, une telle optimisation de la décomposition suppose l'utilisation d'un critère adéquat afin de décider si un noeud doit être décomposé ou non.

Les techniques de décomposition adaptative sur la base de paquets d'ondelettes [CMW92] ont fait l'objet de nombreux travaux en traitement du signal et de l'image. Cependant, nous avons vu que cette approche n'était pas bien adaptée dans le contexte de l'estimation fréquentielle, en raison des problèmes de repliement. L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de décomposition en sous-bandes adaptée au signal à analyser, dans le cadre de l'estimation fréquentielle. Après avoir brièvement rappelé le principe de la décomposition sur la base de paquets d'ondelettes adaptative, nous présentons les performances souhaitables d'une

décomposition adaptative, puis nous passons en revue les différents critères d'arrêt possibles ainsi que leurs avantages et inconvénients. Notre choix se portant sur un critère d'arrêt basé sur la blancheur des résidus, nous étudions les performances du test de Fisher ainsi que celles d'un nouveau test introduit par Drouiche [Dro00]. Ce dernier s'avère mieux adapté dans le cas de modes amortis, il est donc sélectionné pour l'approche que nous proposons. Enfin, les problèmes de mise en oeuvre algorithmique sont abordés et une étude comparative est menée, qui met en évidence l'apport de l'adaptativité et conclut à la supériorité de cette approche à la fois sur l'approche classique et sur les approches adaptatives utilisant d'autres critères d'arrêt.

## 3.2 Décomposition adaptative en sous-bandes

L'un des outils les plus connus permettant d'obtenir une décomposition en sous-bandes adaptative est la transformée en paquets d'ondelettes. Même si cette décomposition n'est pas bien adaptée à notre problème d'estimation de fréquences, ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent, nous présentons néanmoins son principe pour ensuite définir une stratégie appropriée à notre contexte.

### 3.2.1 Rappels sur la transformée en paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes [CMW92] sont une généralisation directe du concept de la décomposition en octaves selon une base d'ondelettes orthonormale. Cette dernière engendre un arbre de décomposition dans laquelle seuls les signaux d'approximation (résultat d'un filtrage passe-bas) sont décomposés pour donner un nouveau signal d'approximation et un signal de détails [Mal00]. Les paquets d'ondelettes généralisent cette décomposition en divisant également les signaux de détails qui sont le résultat d'un filtrage passe-haut.

Vu sous l'angle des bancs de filtres et non sous celui de l'analyse temps-fréquence, l'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes peut être résumé comme suit. Soit $h(n)$ et $g(n)$ les deux filtres d'analyse (passe-bas et passe-haut) associés respectivement à une fonction d'échelle et à l'ondelette mère (voir [Mal00] pour plus de détails). Un arbre binaire de profondeur maximale égale à $\log_2(N)$ est produit par filtrage et sous-échantillonnage en cascade d'un signal $x(n)$ de longueur $N$. Chaque noeud de l'arbre est repéré par les indices $(i, j)$, où $i = 0, 1, ..., \log_2(N)-1$ est la profondeur du noeud (résolution) et $j = 0, 1, ..., 2^i-1$ détermine la position fréquentielle du noeud à la résolution $i$. Le signal $x^{i,j}(n)$, $n = 0, 1, ..., N/2^j - 1$ du noeud $(i, j)$ est lié aux signaux $x^{i+1,2j}(n)$ et $x^{i+1,2j+1}(n)$ par la relation de récurrence

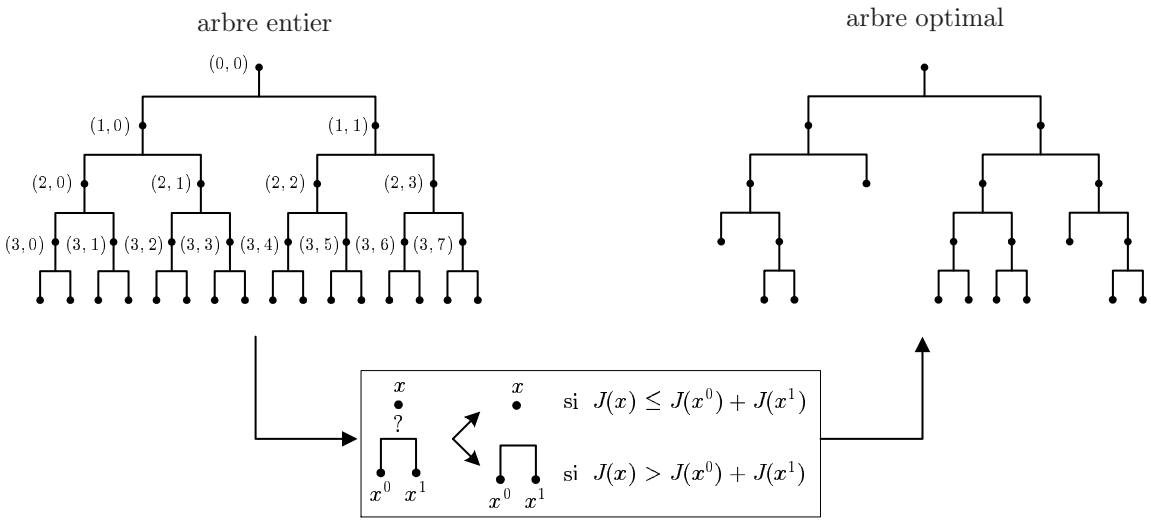



FIGURE 3.1 – Illustration de la méthode de la meilleure base.

suivante :

$$x^{i+1,2j}(n) = \sum_k h(k) x^{i,j}(2n-k) \tag{3.1}$$

$$x^{i+1,2j+1}(n) = \sum_k g(k) x^{i,j}(2n-k) \tag{3.2}$$

avec, par définition, $x^{0,0}(n) = x(n)$. La fusion de certaines sous-bandes de cet arbre conserve l'orthogonalité de l'expansion offrant ainsi la possibilité d'obtenir différentes partitions de l'axe fréquentiel (figure 3.1). La décomposition en paquets d'ondelettes offre donc la possibilité de choisir, parmi la collection d'expansions obtenues, celle optimisant un critère donné. Cette décomposition est appelée *analyse adaptative en paquets d'ondelettes*. L'ensemble des sous-bandes obtenues est appelé meilleure base (*best basis*), au sens du critère choisi. La figure 3.1 illustre la différence entre une décomposition en paquets d'ondelettes rigide et adaptative.

La décomposition adaptative en paquets d'ondelettes repose donc sur le choix de l'ensemble des sous-bandes (dont l'union couvre tout l'axe fréquentiel) qui représente au mieux le signal $x(n)$. Le problème peut être posé comme suit : le noeud $(i, j)$ est-il mieux représenté par $x^{i,j}(n)$ ou par les descendants $x^{i+1,2j}(n)$ et $x^{i+1,2j+1}(n)$ ? Etant donné une mesure additive $J$, la représentation $x^{i,j}(n)$ est choisie si :

$$J(x^{i,j}) \leq J(x^{i+1,2j}) + J(x^{i+1,2j+1}) \tag{3.3}$$

sinon, la représentation fille est choisie. Les mesures qui permettent de prendre cette décision dépendent bien sûr de l'application. Certaines mesures d'information peuvent être trouvées dans les références [CMQW90, CW92].

Cette technique trouve des applications dans plusieurs domaines parmi lesquels on peut ci-

ter la compression [CMQW90, MAS00] et le débruitage [DJ94, Ris00]. Par exemple, dans le contexte de la compression, on cherche une représentation du signal qui minimise le nombre de coefficients de cette représentation. Dans ce cas, la mesure d'information peut être l'entropie, le nombre de coefficients supérieurs à un seuil, etc. Comme nous l'avons déjà signalé, les tentatives d'application de cette technique en analyse fréquentielle se heurtent aux problèmes induits par le repliement spectral [TV01a]. Tout en conservant le formalisme de la décomposition en paquets d'ondelettes adaptative, c'est-à-dire l'idée d'un arbre de décomposition binaire et les critères d'arrêt généralement utilisés, nous contournons ces problèmes de la manière évoquée dans le chapitre précédent, soit en considérant un banc de filtre redondant.

### 3.2.2 Objectifs de la décomposition adaptative

L'un des attraits de la décomposition adaptative est la possibilité d'arrêter la décomposition des bandes dans lesquelles la décimation n'apporte pas de gain en terme de détection et/ou d'estimation. On peut ainsi se focaliser sur les bandes de complexité élevée, dans lesquelles la décimation apporte un réel gain.

Dans une décomposition redondante, deux bandes voisines partagent (dans les bandes de transition) une certaine information. Un découpage adaptatif peut être obtenu en adjoignant un critère d'arrêt à la décomposition uniforme présentée dans le chapitre 2. Les performances de la décomposition obtenue dépendent étroitement du critère utilisé. Il est donc important d'identifier les objectifs d'une « bonne » décomposition afin de choisir le critère en adéquation avec ces derniers. Les avantages escomptés d'une telle décomposition sont doubles et sont discutés ci-après.

En premier lieu, le taux de détections correctes doit pouvoir être optimisé, en effet, d'après les résultats du chapitre 2, le taux de détection est meilleur en sous-bandes car il augmente avec le facteur de décimation. Cependant, tout comme c'est le cas de la variance, le taux de détection est très sensible au nombre d'échantillons et risque donc de diminuer quand ce dernier est trop faible. De plus, pour les sinusoïdes amorties, le facteur d'amortissement en sous-bandes augmente proportionnellement au facteur de décimation. Or, on sait que la détection d'une sinusoïde amortie dépend étroitement du facteur d'amortissement ; plus ce dernier est grand, moindre est la probabilité de détection. De plus, la troncature du transitoire dû au filtrage ne fait qu'accentuer le risque de non-détection. De ce fait, il est souhaitable d'arrêter la décomposition d'une bande dès que toutes les composantes appartenant à cette dernière sont détectées et « bien estimées ».

Par ailleurs, les bandes fréquentielles qui ne contiennent pas d'information ne doivent pas être décomposées. Ceci permet, d'une part, de diminuer la probabilité d'avoir des fausses détections. En effet, il est clair que chaque fois qu'une bande vide est décomposée, on augmente le risque de voir apparaître des fausses détections. D'autre part, cela entraîne une réduction de la charge de calcul, comparativement à une décomposition uniforme.

Concernant la variance d'estimation, nous avons vu que celle-ci est une fonction décroissante du facteur de décimation. Mais, comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, à cause de la réduction du nombre d'échantillons en sous-bandes (troncature du transitoire et sous-échantillonnage), la variance ne décroît pas de façon monotone mais recommence à croître dès que le nombre d'échantillons devient trop faible. Cette augmentation de la variance coïncide avec la baisse du taux de détections. En garantissant un taux de détections maximal, on assure parallèlement une variance d'estimation raisonnable.
Le paragraphe suivant traite des critères possibles d'arrêt de la décomposition et de leur adéquation avec les objectifs poursuivis.

## 3.3 Critères d'arrêt de la décomposition

Plusieurs stratégies sont envisageables pour arrêter la décomposition. Généralement, le découpage est réalisé séparément de la phase d'estimation. On commence par représenter le signal par un ensemble de sous-bandes obtenues grâce à un critère donné, puis on estime les paramètres des signaux correspondants. Dans ce cas, les critères permettant la sélection des bandes d'intérêt sont l'entropie, l'énergie, la blancheur, le nombre de modes, etc.
Une autre technique permettant d'obtenir un découpage adaptatif consiste à réaliser un couplage entre la décomposition et l'estimation. La poursuite ou non de la décomposition dépend alors du résultat de l'estimation. Autrement dit, au lieu d'appliquer les critères d'arrêt précédents directement sur les signaux en sous-bandes, ils sont utilisés sur les résidus de l'estimation issus des bandes rencontrées. Avant de présenter le principe de cette approche et ses éventuels avantages, commençons d'abord par une discussion sur les performances et les limitations de trois critères (énergie, blancheur et nombre de modes) appliqués aux signaux en sous-bandes.

### 3.3.1 Critère d'énergie

Un des critères qui s'impose naturellement pour arrêter une décomposition adaptative, repose sur l'énergie des signaux en sous-bandes. En effet, le premier but d'un découpage adaptatif étant d'obtenir un arbre de décomposition dans lequel les bandes vides ne donnent lieu à aucune décomposition, on peut par exemple décider de comparer l'énergie du signal $x^{i,j}(n)$ correspondant au noeud $(i,j)$ à un seuil arbitraire $\lambda$. Dans ce cas, la règle de décision s'écrit :

$$\begin{cases} \|x^{i,j}\|^2 < \lambda & \rightarrow \quad \text{arrêter la décomposition,} \\ \|x^{i,j}\|^2 \geq \lambda & \rightarrow \quad \text{poursuivre la décomposition.} \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\|x^{i,j}\|^2 = \sum_n |x^{i,j}(n)|^2$ est l'énergie de $x^{i,j}(n)$. On peut également utiliser des mesures locales ou fenêtrées de l'énergie dans le domaine fréquentiel [CMQW90]. Celles-ci se révèlent

utiles dans notre cas puisque le découpage que nous avons choisi engendre des bandes où seule la partie correspondant à la bande passante du filtre de décimation doit être considérée. Ce critère, quoique simple d'utilisation, présente néanmoins plusieurs limitations, parmi lesquelles, le problème du calcul du seuil $\lambda$, qui dépend de la variance (inconnue) du bruit. Un autre problème est que la décomposition ne s'arrête pas tant qu'il y a des noeuds où l'énergie est supérieure au seuil et ce même si des modes, détectables à un certain niveau de décimation, disparaissent par la suite. C'est-à-dire que ce critère est insensible à une diminution du taux de détections.

### 3.3.2 Blancheur des signaux en sous-bandes

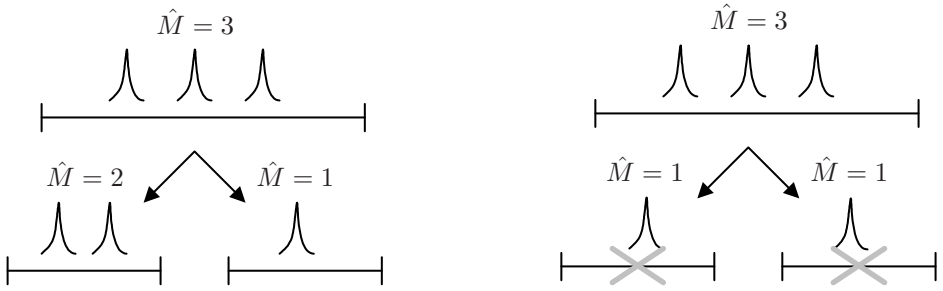
Afin d'arrêter la décomposition des bandes vides, et dans l'hypothèse d'un bruit blanc en sous-bandes, on pourrait utiliser une mesure de blancheur au lieu de la mesure d'énergie précédente. Celle-ci présente l'avantage d'être plus facile à mettre en oeuvre puisqu'elle ne nécessite pas le calcul de la variance du bruit. Cette technique nécessite donc une mesure $\mathcal{M}$ de blancheur et un seuil $\lambda$. La règle de décision s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \mathcal{M}(x^{i,j}) < \lambda & \rightarrow \quad \text{arrêter la décomposition,} \\ \mathcal{M}(x^{i,j}) \geq \lambda & \rightarrow \quad \text{poursuivre la décomposition.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Nous verrons dans la section 3.4 deux exemples de mesures de blancheur et la manière de calculer les seuils d'arrêt correspondants. Ce critère, appliqué directement aux signaux en sous-bandes, présente la même limitation que le critère précédent concernant le taux de détections.

### 3.3.3 Nombre de composantes

L'un des problèmes de la décomposition en sous-bandes non-redondante (sans recouvrement) est celui lié à la synthèse d'un banc de filtres idéal qui n'altère pas les modes du signal. Un tel banc n'existant pas, il faut accepter la présence d'une bande de transition non-nulle. Ceci peut conduire à l'atténuation de certains modes apparaissant entre deux bandes voisines, voire parfois à leur disparition. Pour éviter ce problème, Karrakchou *et al.* [KvdBL93] ont développé une approche de découpage adaptatif utilisant une estimation du nombre de modes dans chaque bande fréquentielle. Le même critère est utilisé dans [Mou96, Ris00] pour le débruitage. Cette méthode est résumée par la figure 3.2. On se place dans un noeud donné de l'arbre de la décomposition. Si le nombre de composantes estimées dans les noeuds descendants est au moins égal à celui évalué dans la bande mère, alors le découpage est accepté (figure 3.2a). Si cela n'est pas le cas, alors au moins une composante a disparu et la décomposition est refusée (figure 3.2a). Analytiquement, ce critère est décrit par la règle




*(a)* décomposition acceptée *(b)* décomposition refusée

FIGURE 3.2 – Illustration du critère d'arrêt de la décomposition adaptive basé sur le comptage du nombre de composantes sur l'arbre.

suivante :

$$\begin{cases} \hat{M}(x^{i,j}) \geq \hat{M}(x^{i+1,2j}) + \hat{M}(x^{i+1,2j+1}) & \rightarrow \quad \text{arrêter la décomposition,} \\ \hat{M}(x^{i,j}) < \hat{M}(x^{i+1,2j}) + \hat{M}(x^{i+1,2j+1}) & \rightarrow \quad \text{poursuivre la décomposition.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Cette approche conduit donc à poursuivre la décomposition tant qu'il n'y a pas de disparition de composantes. Par conséquent, théoriquement, elle permet de maximiser le taux de détections. Cependant, dans la pratique, en présence de bruit, les critères d'ordre ne sont pas exempts d'erreurs d'estimation. Or intuitivement, on conçoit bien que la qualité de la décomposition est étroitement liée à la cohérence entre les estimations effectuées à différents niveaux, en raison de la comparaison faite entre deux étages. Ainsi, le fait que les critères d'ordre soient sujets à des sur- ou sous-estimations locales ne permet pas de garantir cette cohérence. Nous verrons dans le chapitre 4 qu'en présence de signaux relativement complexes, cette approche présente effectivement des limitations.

### 3.3.4 Analyse des résidus

Dans leur principe, les critères précédents permettent d'arrêter la décomposition des bandes vides mais pas celles qui contiennent au moins une composante. Pour décider de l'arrêt de la décomposition d'une bande qui contient une composante, il faut vérifier la qualité de son estimation. Autrement dit, si cette composante est correctement estimée, alors il n'est pas nécessaire de poursuivre la décomposition de la bande correspondante. Il est clair que cette démarche va conduire à des décompositions plus économes mais ceci au prix d'une légère dégradation de la variance d'estimation.

De manière générale, toutes les techniques de validation de modèle peuvent être ici envisagées. En particulier, tous les critères précédents peuvent être utilisés sur les résidus de l'estimation en lieu et place des signaux en sous-bandes. Le critère qui paraît le plus adéquat est le test de blancheur. En effet, les critères d'énergie présentent une difficulté pour fixer le seuil d'arrêt. Par ailleurs, les critères fondés sur l'estimation du nombre de composantes sont écartés en

raison, d'une part, de leur charge de calcul, et d'autre part, du fait que l'information qu'ils fournissent dépasse nos besoins (le nombre de modes présents ne nous intéresse pas).

### 3.3.5 Règles d'arrêt

Suivant le critère d'arrêt considéré, plusieurs stratégies sont envisageables pour procéder au découpage adaptatif. En effet, celui-ci peut être appliqué sur les signaux en sous-bandes ou sur les résidus d'estimation. De plus, dans le cas d'un comptage du nombre de modes, on peut soit comparer ce nombre à un seuil soit utiliser la règle de Karrakchou (équation (3.6)). Par la suite, on distingue les quatre règles d'arrêt suivantes :

- **Règle 1 :** critère de blancheur sur les résidus d'estimation ;
- **Règle 2 :** règle de Karrakchou [KvdBL93] ;
- **Règle 3 :** critère de blancheur sur les signaux ;
- **Règle 4 :** critère d'énergie sur les signaux.

Les décompositions adaptatives résultantes seront comparées dans le paragraphe 3.6. L'objectif de la section suivante est de choisir une mesure de blancheur $\mathcal{M}$ et de déterminer une méthode statistique permettant de fixer le seuil $\lambda$ correspondant.

## 3.4 Choix d'un critère d'arrêt basé sur la blancheur des résidus

La mesure de blancheur est un critère qui est classiquement utilisé, en particulier, dans le cadre de la validation de modèle. Plusieurs tests de blancheur ou d'adéquation de modèle ont donc été proposés dans la littérature [Ste74, BJ76, Pri89]. Plus récemment, Drouiche [Dro00] a proposé un nouveau test, très simple et rapide puisqu'il repose sur le périodogramme (ou estimateur spectral simple). Ce critère est utilisé ici pour vérifier l'adéquation d'un modèle estimé. C'est-à-dire, décider si la densité spectrale de puissance des résidus d'estimation dans une bande fréquentielle est plate ou non.

### 3.4.1 Rappels sur les propriétés spectrales d'un bruit blanc

On considère une séquence aléatoire stationnaire $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance positive $\varphi(\omega)$. On peut montrer que $\{x(n)\}$ est une séquence décorrélée si et seulement si :

$$\varphi(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \tag{3.7}$$

pour tout $\omega \in [0, 2\pi]$, où $\sigma^2$ est une constante positive. Rappelons qu'une séquence gausienne et décorrélée est forcément indépendante (séquence i.i.d.). Les tests de blancheur peuvent être classés en deux catégories. Les méthodes de la première famille tendent à vérifier la nullité

de la fonction d'autocorrélation aux rangs différents de zéro (test portmanteau [BJ76], par exemple). Les méthodes de la deuxième famille cherchent à vérifier l'équation (3.7), ce qui est le cas notamment du test de Fisher. Pour des raisons exposées dans le paragraphe 3.4.5, on considère les critères de la deuxième famille.
En pratique, la densité spectrale de puissance est bien sûr inconnue et il faut l'estimer à partir d'un nombre fini d'échantillons $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$. Une façon simple et rapide de l'estimer consiste à utiliser le périodogramme défini par la relation :

$$P_N(\omega) \triangleq \frac{1}{2\pi N}\Big|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\jmath n\omega}\Big|^2 \tag{3.8}$$

Le périodogramme calculé aux fréquences de Fourier ($\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, ..., N-1$) a été largement étudié dans la littérature (voir, par exemple, [JW68, Pri89]). En particulier, il a été établi que le périodogramme d'un bruit blanc gaussien à moyenne nulle suit une loi exponentielle de moyenne $\mathbb{E}\{P_N(\omega)\} = \varphi(\omega)$ et de variance $\mathrm{var}\{P_N(\omega)\} = \varphi(\omega)^2$ [Pri89, théorème 6.1.1]. A certaines conditions, les résultats établis pour un bruit blanc sont généralisables à d'autres type de processus [JW68]. La moyenne et la variance de $P_N(\omega)$ étant dépendantes de la fréquence, une transformation logarithmique est communément utilisée comme *technique de stabilisation de la variance* [Pri89, p. 470]. En effet, le log-périodogramme a une variance indépendante de la fréquence et se prête plus facilement à l'analyse statistique. Le test de blancheur développé dans [Dro00] et exposé dans le paragraphe suivant utilise cette transformation.
Plusieurs tests de blancheur, ou plus généralement de validité de modèle, tels que les tests de Fisher, de Bartlett ou de Grenander-Rosenblatt peuvent être exprimés dans le domaine fréquentiel (par exemple, voir [Pri89, pp. 407-487]). Dans la suite, nous présentons une analyse comparative entre le classique test de Fisher et un nouveau test proposé par Drouiche [Dro00].

### 3.4.2 Test de Drouiche

Le test de blancheur proposé par Drouiche [Dro00] utilise la statistique $W(\varphi)$ définie par la relation :

$$W(\varphi) \triangleq \ln \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\varphi(\omega)d\omega \tag{3.9}$$

Elle est étroitement liée à la mesure de « platitude » ou « douceur spectrale » (en anglais : *spectral flatness measure*) [GM74]. En effet, on peut écrire :

$$\xi(\varphi) \triangleq \frac{\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\varphi(\omega)d\omega\right)}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)d\omega} = \exp(-W(\varphi)) \tag{3.10}$$

où $\xi(\varphi)$ est la douceur spectrale. Ses propriétés sont bien connues et en particulier :

i) $0 \leq \xi(\varphi) \leq 1$.
ii) $\xi(\varphi) = 1$ si et seulement si le signal $\{x(n)\}$ est blanc ($\varphi(\omega) = c$, où $c$ est une constante positive).

La première propriété découle directement de l'inégalité moyenne arithmétique-moyenne géométrique. Pour que $\xi(\varphi)$ soit égale à 0, il faudrait que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \varphi(\omega) d\omega \to -\infty$. Cela veut dire, d'après le critère de Paley-Wiener, que $x(n)$ est parfaitement prédictible. A l'inverse, quand $\xi(\varphi) = 1$, alors $x(n)$ est un processus blanc (non prédictible), d'où la deuxième propriété. De ces deux propriétés, on peut déduire que :

i) $W(\varphi) \geq 0$.
ii) $W(\varphi) = 0$ si et seulement si $\varphi(\omega) = c$.

Par conséquent, pour décider de la blancheur de la séquence $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, il suffit de tester les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : & \varphi(\omega) = c, \\ H_1 : & \varphi(\omega) \neq c. \end{cases} \tag{3.11}$$

La densité spectrale de puissance étant estimée par le périodogramme (équation (3.8)), une estimation de la mesure $W(\varphi)$ est donnée par :

$$\hat{W}_N = \ln \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_N(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln P_N(\omega) d\omega - \gamma \tag{3.12}$$

La quantité $\gamma$ (constante d'Euler : $\gamma = 0.57721$) est un paramètre de compensation de biais dont la présence est nécessaire car $(\hat{W}_N + \gamma)$ est une estimation biaisée de $W$. La décision sur la blancheur est prise en comparant la quantité $\hat{W}_N$ à un seuil $t_\alpha$ :

$$\hat{W}_N \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} t_\alpha \tag{3.13}$$

Pour fixer le seuil $t_\alpha$, il est impératif de déterminer la distribution de probabilité de $\hat{W}_N$, au moins sous l'hypothèse $H_0$. Ceci est donné par le théorème ci-dessous. On définit d'abord la puissance totale de la séquence $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) d\omega \tag{3.14}$$

**Théorème 1 ([Dro00])** *Soit $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus aléatoire, stationnaire au sens strict, de densité spectrale de puissance $\varphi$. La statistique $\hat{W}_N$ définie par (3.12) vérifie les propriétés suivantes :*

- *sous l'hypothèse $H_0$,*

$$\sqrt{N}\hat{W}_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{6} - 1\right) \tag{3.15}$$

- *sous l'hypothèse* $H_1$,

$$\sqrt{N}(\hat{W}_N - W) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{\varphi(\omega)}{\kappa}\right)^2 d\omega\right) \tag{3.16}$$

■

Les distributions limites données par les équations (3.15) et (3.16) peuvent maintenant être utilisées pour fixer le seuil $t_\alpha$ suivant le taux de fausses alarmes $\alpha$ souhaité (en général entre 0.1% et 10%). On appelle *puissance d'un test*, la probabilité de détection. Elle est donnée par la relation :

$$P_\alpha = \Pr\{\sqrt{N}\hat{W}_N \geq t_\alpha | H_1\} \tag{3.17}$$

où

$$\Pr\{\sqrt{N}\hat{W}_N \geq t_\alpha | H_0\} = \alpha \tag{3.18}$$

est le seuil de signification statistique (probabilité de fausses alarmes). On peut facilement montrer que $t_\alpha$ s'exprime par la relation :

$$t_\alpha = \sqrt{2}\nu_0 \mathrm{erf}^{-1}(1 - 2\alpha) \tag{3.19}$$

où $\nu_0 = \sqrt{\pi^2/6 - 1}$ et $\mathrm{erf}^{-1}(x)$ est l'inverse de la fonction d'erreur normalisée :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt \tag{3.20}$$

Par ailleurs, la puissance du test s'exprime par la relation :

$$P_\alpha = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{N}\frac{-W}{\sqrt{2}\nu_1} + \frac{t_\alpha}{\sqrt{2}\nu_1}\right)\right] \tag{3.21}$$

où, par commodité, nous avons posé :

$$\nu_1^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{\varphi(\omega)}{\kappa}\right)^2 d\omega \tag{3.22}$$

### 3.4.3 Statistique de Fisher

A l'origine, le test de Fisher [Pri89, p. 407] a été développé pour observer des périodicités dans une séquence donnée. Il consiste à rechercher le pic maximum dans le périodogramme et décider si sa valeur est significative. La statistique de Fisher s'exprime (dans le cas complexe) par la relation suivante :

$$\hat{F}_N = \frac{\max_k P_N(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{N-1} P_N(\omega_k)} \tag{3.23}$$

avec $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, ..., N-1$. On sait que, sous l'hypothèse d'un bruit blanc $(H_0)$, $\hat{F}_N$ a une distribution asymptotique telle que :

$$\Pr(\hat{F}_N \geq t_\alpha) \simeq N e^{-N t_\alpha/2} = \alpha \tag{3.24}$$

Le seuil de détection est alors donné par la relation :

$$t_\alpha = \frac{2}{N} \ln\left(\frac{N}{\alpha}\right) \tag{3.25}$$

On détecte une périodicité quand $\hat{F}_N \geq t_\alpha$.

### 3.4.4 Comparaison des performances

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'analyser les performances des deux tests précédents pour la détection d'une sinusoïde *pure* noyée dans un bruit blanc gaussien. Les résultats obtenus sont ensuite étendus au cas d'une sinusoïde amortie.

Considérons une sinusoïde pure dans un bruit blanc gaussien à moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2$ :

$$x(n) = A_1 e^{\jmath\phi_1} e^{\jmath\omega_1 n} + e(n) \tag{3.26}$$

où $A_1$ est l'amplitude (réelle) de la sinusoïde complexe et $\omega_1 \in [-\pi, \pi]$ sa fréquence. Pour modéliser le processus $x(n)$ par un processus aléatoire stationnaire, on suppose que la phase $\phi_1$ suit une loi uniforme dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. La densité spectrale de puissance de ce processus s'écrit alors :

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi}(A_1^2 \delta(\omega - \omega_1) + \sigma_e^2) \tag{3.27}$$

où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac. La mesure théorique de blancheur peut donc être calculée en utilisant l'équation (3.9) qui donne :

$$W = \ln(1 + A_1^2/\sigma_e^2) = \ln(1 + \eta_1) \tag{3.28}$$

où $\eta_1$ est le rapport signal-sur-bruit ($\eta_1 = A_1^2/\sigma_e^2$). Enfin, pour $N$ grand, la variance $\nu_1^2$ de $\sqrt{N}\hat{W}_N$ s'exprime par la relation :

$$\nu_1^2 = \frac{2A_1^4}{(A_1^2 + \sigma_e^2)^2} = \frac{2\eta_1^2}{(1+\eta_1)^2} \tag{3.29}$$

Nous avons donc le résultat suivant pour $N$ grand :

$$\sqrt{N}(\hat{W}_N - W) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2\eta_1^2}{(1+\eta_1)^2}\right) \tag{3.30}$$

La mesure de blancheur $\hat{W}_N$ estimée directement à partir de l'équation (3.12), en utilisant 1000 réalisations du bruit, est comparée à la mesure théorique $W$. Le résultat est représenté sur la figure 3.3. D'une part, on constate que, indépendamment du RSB, $\hat{W}_N$ converge vers $W$ quand le nombre d'échantillons augmente (figure 3.3a). D'autre part, l'écart entre les mesures théorique et estimée dépend du RSB. Ainsi, à $N$ fixé, $\hat{W}_N$ est plus proche de $W$ quand le RSB est faible (figure 3.3b). A fort RSB et $N$ insuffisant, la mesure estimée est certes éloignée de $W$, mais elle est suffisamment grande pour permettre une décision correcte de la blancheur.

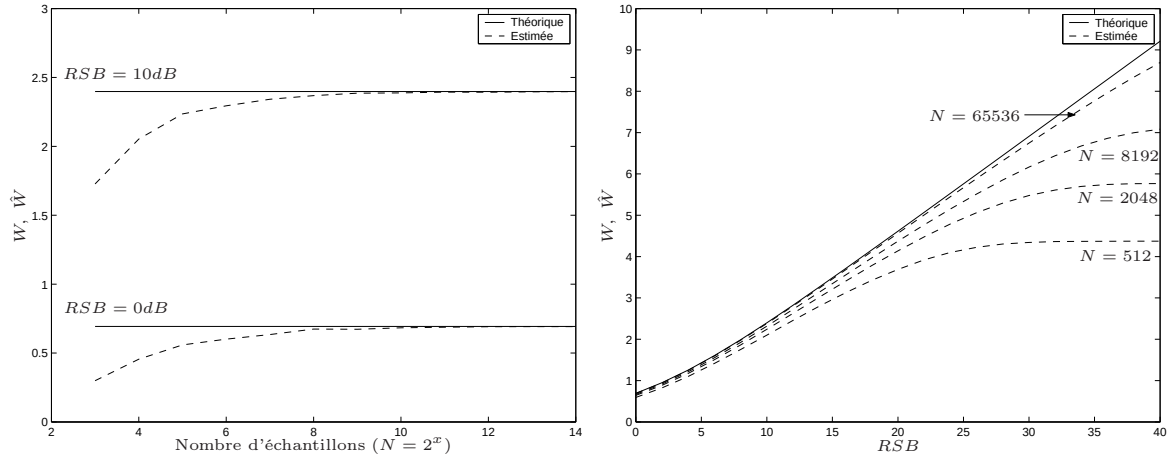
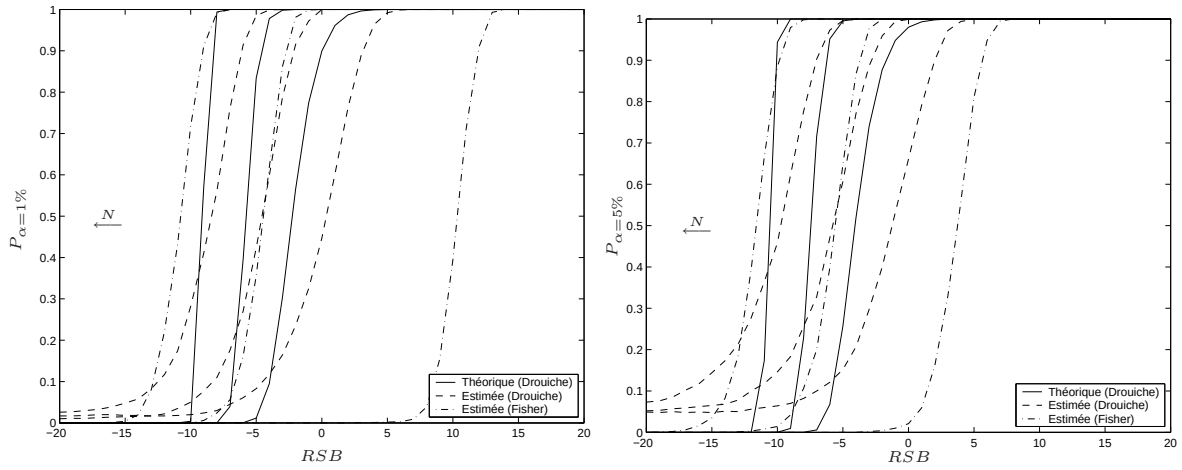



FIGURE 3.3 – Mesures de blancheur estimée et théorique pour une sinusoïde pure dans un bruit blanc à différentes valeurs du RSB.

La figure 3.4 représente la puissance des tests de Drouiche et de Fisher. Nous avons testé l'hypothèse nulle vis-à-vis de l'hypothèse alternative (présence d'une sinusoïde), en utilisant 1000 simulations numériques. Plusieurs longueurs de la séquence $\{x(n)\}$ ont été considérées ($N = 16, 64, 256$) pour deux taux de fausses alarmes $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$. Concernant le premier test, on peut observer que les puissances estimées sont toujours inférieures aux puissances théoriques. Ceci est dû au calcul numérique de l'intégrale, qui n'est pas très précis. On peut également vérifier que, pour un RSB donné et à $N$ fixé, la puissance augmente lorsque $\alpha$ augmente. Evidemment, la puissance augmente aussi avec le nombre d'échantillons $N$. De manière générale, on peut dire qu'il existe un seuil de RSB à partir duquel la probabilité de détection augmente rapidement vers 1. Ce seuil peut être diminué en augmentant soit le taux de fausses alarmes soit le nombre d'échantillons.
Par ailleurs, il apparaît clairement que le test de Fisher est plus performant lorsque le nombre d'échantillons est élevé. Cependant, lorsque celui-ci diminue, ses performances se dégradent rapidement et le test de Drouiche devient plus avantageux.

Les sinusoïdes amorties étant de nature non-stationnaire, il est difficile d'établir théoriquement un test adapté à ce type de signaux. Pour cette raison, nous nous contenterons d'une




*(a)* $\alpha = 1\%$ *(b)* $\alpha = 5\%$

FIGURE 3.4 – Comparaison de la puissance des tests de Drouiche et Fisher pour une sinusoïde pure dans un bruit blanc en fonction du RSB, pour $N = 16,\ 64,\ 256$.

analyse empirique approximative obtenue en introduisant un facteur d'amortissement dans le signal (3.26). La figure 3.5 montre la puissance des deux tests pour plusieurs valeurs du facteur d'amortissement et un nombre d'échantillons $N = 256$. On remarque que le seuil (empirique) de RSB augmente progressivement avec le facteur d'amortissement. Les conséquences sont importantes dans le contexte de l'estimation en sous-bandes. En effet, à cause de l'augmentation du facteur d'amortissement au fur et à mesure de la décomposition, il devient d'autant plus souhaitable d'arrêter le découpage dès que les pôles sont bien estimés, ce qui est réalisé par une décomposition adaptative. Ici, on constate que pour un facteur d'amortissement supérieur à 0.02 (pour $N = 256$), le test de Drouiche est plus performant. Etant donné que pour notre application, les facteurs d'amortissement rencontrés sont de l'ordre de 0.05 pour $N = 256$, nous utiliserons donc le test de Drouiche. Dans un cadre plus général, au vu des résultats précédents, nous proposons l'utilisation du test de Fisher dans le cas de sinusoïdes pures et du test de Drouiche pour les sinusoïdes amorties.

### 3.4.5 Arrêt de la décomposition adaptative

Soit $y^{i,j}(n)$ le signal de longueur $N'$ correspondant à une sous-bande donnée de l'arbre de la décomposition. On a déjà montré que $y^{i,j}(n)$ s'écrit :

$$y^{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{M'} h'_k {z'_k}^n + e^{i,j}(n),\ n = 0, 1, ..., N' - 1 \tag{3.31}$$

On suppose que $\hat{M}' \leq M'$ paramètres de ce signal, notés $\hat{h}'_k$ et $\hat{z}'_k$, ont été estimés par l'une des méthodes décrites dans le chapitre 1. Le signal reconstruit à partir de ces paramètres

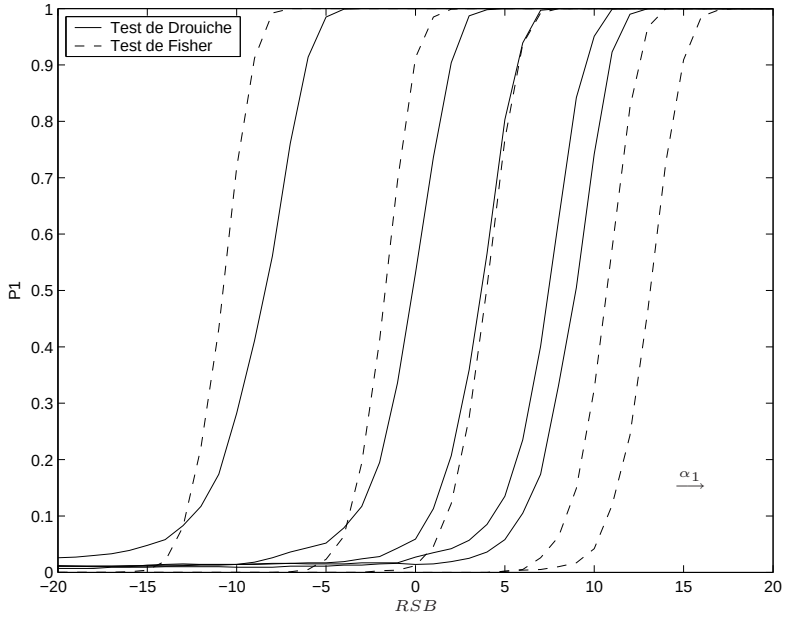



FIGURE 3.5 – Comparaison de la puissance des tests de Drouiche et Fisher pour une sinusoïde amortie dans un bruit blanc en fonction du RSB, pour $N = 256$ et $\alpha_1 = 0,\ 0.01,\ 0.02,\ 0.04,\ 0.05$.

s'écrit alors :

$$\hat{y}^{i,j}(n) \triangleq \sum_{k=1}^{\hat{M}'} \hat{h}'_k \hat{z}'^{n}_k \tag{3.32}$$

Les résidus de l'estimation sont définis par la relation :

$$\epsilon^{i,j}(n) \triangleq y'(n) - \hat{y}'(n) \tag{3.33}$$

Idéalement, si tous les modes en sous-bandes sont détectés ($\hat{M}' = M'$) et bien estimés, alors les résidus sont proches d'un bruit blanc. En revanche, si un ou plusieurs modes ne sont pas détectés, ils seront présents dans les résidus et, par conséquent, le test de blancheur échoue (hypothèse $H_1$). L'arrêt ou la poursuite de la décomposition est donc obtenu en utilisant la règle de décision suivante :

$$\begin{cases} \hat{W}_{N'} < t_\alpha & \rightarrow \quad \text{arrêter le découpage,} \\ \hat{W}_{N'} \geq t_\alpha & \rightarrow \quad \text{poursuivre le découpage.} \end{cases} \tag{3.34}$$

où $\hat{W}_{N'}$ est la distance estimée des résidus $\epsilon^{i,j}(n)$ à un bruit blanc. En pratique, il est important de tenir compte de l'effet du filtre de décimation. En effet, le filtre étant non-idéal, la partie du spectre du signal en sous-bande où le test doit être effectué se limite à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et ceci pour ne pas tenir compte de la zone de transition dans laquelle la densité spectrale de puissance s'éloigne de celle d'un bruit blanc. Le test de blancheur considéré

ici offre justement cette flexibilité puisqu'il peut être utilisé localement sur une partie du spectre. Dans ce cas, la mesure reflète la platitude spectrale des résidus dans l'intervalle fréquentiel associé à la bande passante du filtre. La nouvelle expression de la mesure de platitude spectrale est donc :

$$\hat{W}_{N'} = \ln \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_{N'}(\omega) d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln P_{N'}(\omega) d\omega - \gamma \tag{3.35}$$

où $P_{N'}(\omega)$ est le périodogramme de $\epsilon^{i,j}(n)$. Bien sûr, les critères de blancheur fondés sur un test de nullité de la fonction d'autocorrélation ne permettent pas une mesure locale de la platitude.

Si le bruit additif intervenant dans le signal d'origine n'est pas blanc, le fait de travailler en sous-bandes permet de garantir un bruit dont la DSP s'aplatit au fur et à mesure de la décomposition [RP96, TV01a], du moins dans la bande passante. Dans ces conditions, le critère de platitude spectrale conserve donc sa pertinence.

## 3.5 Mise en oeuvre algorithmique

L'approche de décomposition adaptative basée sur une mesure de platitude spectrale des résidus est illustrée par la figure 3.6. Contrairement à l'approche uniforme, le découpage adaptatif doit être réalisé de façon progressive par une succession de décimations en partant du sommet de l'arbre. La figure 3.6 montre le cas d'une opération de décimation par un facteur 2, mais il est clair que l'approche peut être généralisée pour un facteur quelconque.

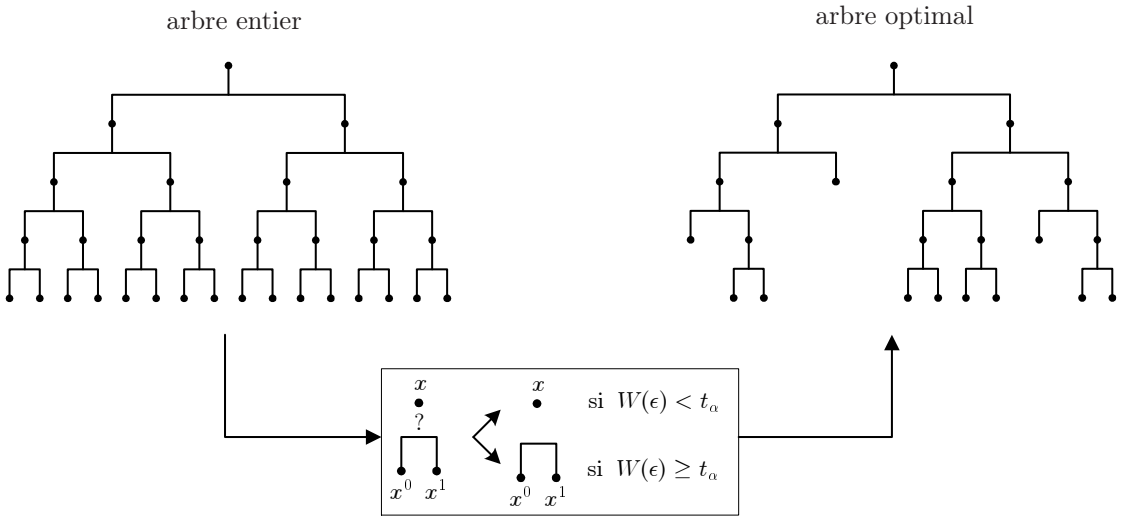



FIGURE 3.6 – Illustration de l'approche adaptative basée sur la platitude spectrale des résidus de l'estimation en sous-bandes.

Nous avons vu au chapitre précédent que, la décomposition redondante utilisant un facteur de décimation total $d$ résulte en $2d$ bandes fréquentielles. L'arbre représenté sur la figure 3.6

montre uniquement le découpage de la demi-bande $[0, \pi]$, ce qui conduit à 16 bandes pour un facteur de décimation total de 16. Ce découpage est suffisant pour les signaux réels, mais dans le cas des signaux complexes, il faut aussi effectuer un découpage de la bande $[-\pi, 0]$. Nous nous contenterons ici de décrire la démarche suivie pour obtenir une décomposition de la bande $[0, \pi]$ en utilisant un seul filtre passe-bas. Le découpage de la bande complémentaire s'effectue de façon symétrique.

Soit $y^{0,0}(n) \triangleq y(n)$, $n = 0, 1, ..., N-1$, le signal dans la bande globale et $g(n)$, $n = 0, 1, ..., N_f$ la réponse impulsionnelle du filtre de décimation. Le signal $y^{0,0}(n)$ est d'abord (dé-)modulé à la fréquence $-\pi/4$ de façon à centrer la bande $[0, \pi/2]$ en 0 (figure 3.7b). Le signal résultant est ensuite filtré par $g(n)$ puis décimé (figure 3.7d). Ces opérations aboutissent au signal $y^{1,0}(n)$ correspondant à la bande $[0, \pi/2]$ du signal original qui s'exprime analytiquement par la relation :

$$y^{1,0}(n) = \sum_k g(k) y^{0,0}(2n-k) e^{-\jmath \frac{\pi}{4}(2n-k)} \tag{3.36}$$

Le signal $y^{1,0}(n)$ est centré autour de la fréquence 0 et son spectre utile s'étale entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (figure 3.7d). De la même façon, le signal $y^{1,1}(n)$, correspondant à la bande $[\pi/2, \pi]$, est obtenu par modulation du signal $y^{0,0}(n)$ par un exponentielle de fréquence $-3\pi/4$ suivie d'un processus de filtrage et de décimation (figures 3.7c et 3.7e). Le signal $y^{1,1}(n)$ est donc obtenu par la relation :

$$y^{1,1}(n) = \sum_k g(k) y^{0,0}(2n-k) e^{-\jmath \frac{3\pi}{4}(2n-k)} \tag{3.37}$$

La bande correspondant à ce signal est également centrée autour de la fréquence 0 et possède la même largeur de bande que le signal $y^{1,0}(n)$.

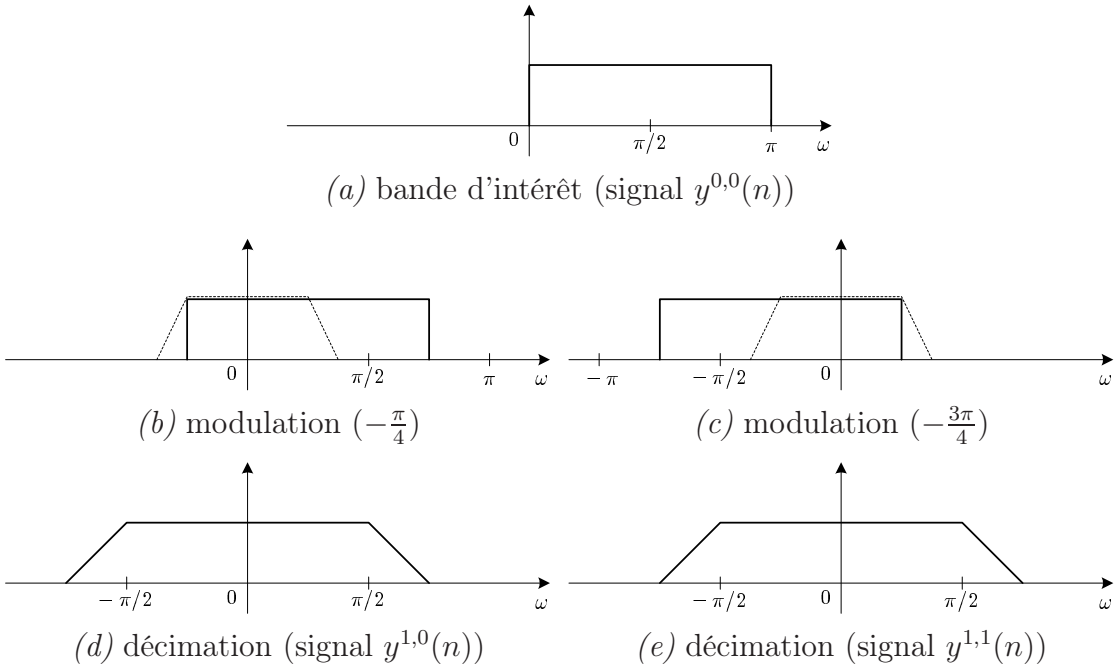
La suite de la décomposition est obtenue de la même façon à l'exception des fréquences de modulation qui sont, à partir du niveau $i = 1$, égales à $-\pi/4$ et $\pi/4$ (figure 3.8). De façon générale, pour $i > 1$, les signaux $y^{i+1,2j}(n)$ et $y^{i+1,2j+1}$ sont obtenus à partir de $y^{i,j}(n)$ par les relations :

$$y^{i+1,2j}(n) = \sum_k g(k) y^{i,j}(2n-k) e^{\jmath \frac{\pi}{4}(2n-k)} \tag{3.38}$$

$$y^{i+1,2j+1}(n) = \sum_k g(k) y^{i,j}(2n-k) e^{-\jmath \frac{\pi}{4}(2n-k)} \tag{3.39}$$

En procédant par récurrence, toutes les branches de l'arbre de décomposition au niveau $i$ s'obtiennent à partir des branches au niveau $i-1$ par les relations (3.38) et (3.39). Chaque signal $y^{i,j}(n)$ est associé à l'intervalle fréquentiel $[\frac{j\pi}{2^i}, \frac{(j+1)\pi}{2^i}]$ du signal original. Les séquences $y^{i,j}(n)$, $j = 0, 1, ..., 2^i - 1$, sont dites ordonnées.

Les équations (3.36)–(3.39) ne tiennent pas compte des effets de bords introduits par le filtrage. Dans le cas où $y(n)$ est représenté par un modèle exponentiel et pour pouvoir




*(a)* bande d'intérêt (signal $y^{0,0}(n)$)

*(b)* modulation $(-\frac{\pi}{4})$ *(c)* modulation $(-\frac{3\pi}{4})$

*(d)* décimation (signal $y^{1,0}(n)$) *(e)* décimation (signal $y^{1,1}(n)$)

FIGURE 3.7 – Décomposition de la bande fréquentielle $[0, \pi]$ $(i = 0)$ en deux sous-bandes. Le filtre de décimation est indiqué par des pointillés.

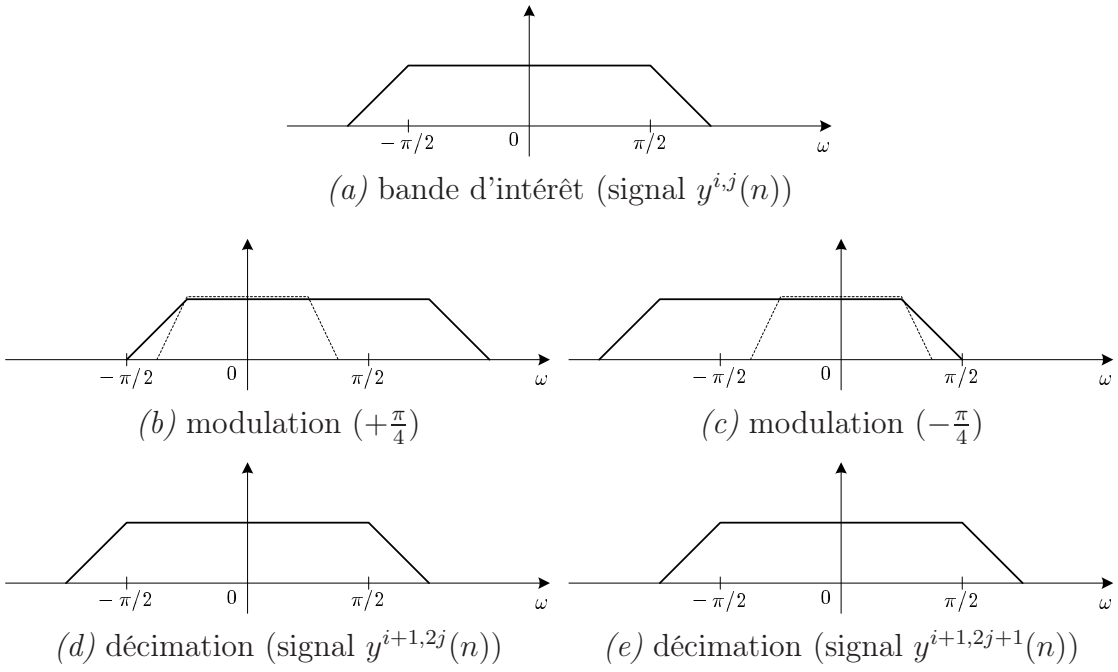
approcher le signal en sous-bande par le même modèle, il faut éliminer les termes transitoires dans chaque signal $y^{i,j}(n)$. Ceci est réalisé une procédure identique à celle décrite dans le paragraphe 2.3.1. En supposant cette opération effectuée, le modèle des signaux en sous-bandes est donné par l'équation (2.14). Avec les nouvelles notations, nous avons donc :

$$y^{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{M'} h'_k {z'_k}^n + e^{i,j}(n) \tag{3.40}$$

où les $z'_k$ sont les modes en sous-bandes et les $h'_k$ sont les amplitudes correspondantes. L'estimation des paramètres en sous-bandes se fait de la même façon que lors d'une décomposition uniforme. Au niveau d'un noeud $(i, j)$, tous les modes estimés à l'extérieur de la bande utile $[\frac{j\pi}{2^i}, \frac{(j+1)\pi}{2^i}]$ doivent être éliminés, puisqu'ils sont situés soit dans la bande de transition, soit dans la bande coupée du filtre de décimation. Le banc de filtres vérifiant les contraintes données par les équations (2.19), la relation entre les modes en sous-bandes (notés $\hat{z}'_k$) et ceux de la bande globale est unique. En effet, on peut montrer que la transformation des modes estimés au niveau du noeud $(i, j)$ vers la bande globale est obtenue par la relation :

$$\hat{z}_k = (\hat{z}'_k)^{1/2^i} e^{\jmath\pi\frac{2j+1}{2^{i+1}}}, \ i \geq 1 \tag{3.41}$$

et $\hat{z}_k = \hat{z}'_k$ pour $i = 0$. En revanche, en raison des transformations successives subies par le signal original, la relation entre les amplitudes estimées en sous-bandes et celles de la bande globale n'est pas triviale. Elle peut toutefois être décrite par une récurrence. Au niveau du




*(a)* bande d'intérêt (signal $y^{i,j}(n)$)

*(b)* modulation $(+\frac{\pi}{4})$ *(c)* modulation $(-\frac{\pi}{4})$

*(d)* décimation (signal $y^{i+1,2j}(n)$) *(e)* décimation (signal $y^{i+1,2j+1}(n)$)

FIGURE 3.8 – Décomposition des sous-bandes centrées entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ ($i \geq 1$). Le filtre de décimation est indiqué par des pointillés.

noeud $(i, j)$, on note $\hat{h}'^{\,i,j}_k$ l'amplitude estimée du mode $\hat{z}'_k$ dont l'image dans la bande globale est $\hat{z}_k$. Nous avons alors la relation suivante pour $i > 1$ :

$$\hat{h}'^{\,i-1,[j/2]}_k = \begin{cases} \hat{h}'^{\,i,j}_k \Big/ \left(\hat{z}_k^{2^{i-1}} e^{-\jmath\pi\frac{2[j/2]+1}{2}} e^{\jmath\frac{\pi}{4}}\right)^{N_f} G\left(\hat{z}_k^{2^{i-1}} e^{-\jmath\pi\frac{2[j/2]+1}{2}} e^{\jmath\frac{\pi}{4}}\right), & \text{pour } j \text{ pair} \\ \hat{h}'^{\,i,j}_k \Big/ \left(\hat{z}_k^{2^{i-1}} e^{-\jmath\pi\frac{2[j/2]+1}{2}} e^{-\jmath\frac{\pi}{4}}\right)^{N_f} G\left(\hat{z}_k^{2^{i-1}} e^{-\jmath\pi\frac{2[j/2]+1}{2}} e^{-\jmath\frac{\pi}{4}}\right), & \text{pour } j \text{ impair} \end{cases} \tag{3.42}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x$ et les termes $(x)^{N_f}$ sont introduits par la troncature du transitoire. Enfin, pour $i = 1$, nous avons :

$$\hat{h}_k = \begin{cases} \hat{h}'^{\,1,j}_k \Big/ \left(\hat{z}_k e^{-\jmath\frac{\pi}{4}}\right)^{N_f} G\left(\hat{z}_k e^{-\jmath\frac{\pi}{4}}\right), & \text{pour } j = 0 \\ \hat{h}'^{\,1,j}_k \Big/ \left(\hat{z}_k e^{-\jmath\frac{3\pi}{4}}\right)^{N_f} G\left(\hat{z}_k e^{-\jmath\frac{3\pi}{4}}\right), & \text{pour } j = 1 \end{cases} \tag{3.43}$$

Cette récurrence est effectuée en partant des branches de l'arbre en direction de la racine en prenant en compte la position $j$ de la bande rencontrée. Une autre méthode pour obtenir les amplitudes consiste à transformer d'abord *tous* les modes vers la bande globale puis à effectuer une estimation des amplitudes directement dans la bande globale. Cette technique a l'avantage d'éviter l'accumulation des erreurs numériques que les récurrences précédentes peuvent introduire. Toutefois, nous verrons au chapitre 4 qu'il est parfois préférable d'estimer les amplitudes en sous-bandes.

Avant d'enchaîner sur les simulations, nous présentons ici un résumé des différentes étapes

de la méthode proposée.

1. Choisir un facteur élémentaire (e.g. 2) et un filtre de décimation.
2. Décomposer le signal en sous-bandes.
3. Dans chaque noeud résultant, faire les opérations suivantes :
   (a) calculer les paramètres en sous-bandes $h'_i$ et $z'_i$ ;
   (b) obtenir les résidus ;
   (c) calculer $t_\alpha$ et tester la platitude spectrale ;
   (d) si les résidus sont blancs, alors ce noeud est arrêté, sinon la décomposition doit être poursuivie.
4. Rechercher un noeud décomposable dans toutes les branches de l'arbre et obtenir ses descendants par décimation.
5. Répéter l'étape 3 tant qu'il y a un noeud décomposable.
6. Convertir tous les paramètres en sous-bandes vers leur valeur dans la bande globale.

## 3.6 Etude comparative

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les performances des différentes techniques de décomposition adaptative présentées dans ce chapitre (les règles d'arrêt sont présentées dans le paragraphe 3.3.5). Une comparaison avec les approches uniforme et globale sera également présentée. Les deux filtres de décimation sont des versions décalées en fréquence d'un seul filtre RIF passe-bas equiripple dont les fréquences caractéristiques sont $\omega_p = \pi/4$ et $\omega_a = \pi/2$. Les ondulations maximales dans les bandes passante et atténuée sont respectivement de 0.01 et 0.001. Ces contraintes aboutissent à un filtre de décimation d'ordre $N_f = 20$. L'approche considérée ici est la méthode Yule-Walker d'ordre élevé (SVD-HOYW), bien que les autres approches du premier chapitre auraient sans doute permis d'aboutir aux mêmes conclusions.

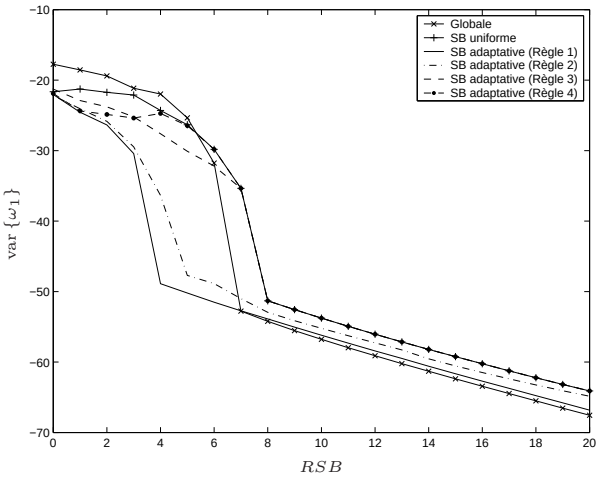
Le signal de simulation utilisé consiste en deux exponentielles amorties noyées dans un bruit blanc de moyenne nulle. L'exemple considéré est tiré de la référence [vdBLK95]. Les deux composantes sont $\omega_1 = 2\pi 0.11$ et $\omega_2 = 2\pi 0.15$. Elles ont la même amplitude et le même facteur d'amortissement ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.015$). Le rapport signal-à-bruit initial varie entre 0 et 20 dB. A chaque valeur du RSB, une simulation Monte Carlo est effectuée en utilisant 100 réalisations du bruit additif. Contrairement aux simulations présentées dans les chapitres précédents, le nombre de composantes en sous-bandes est supposé inconnu ; il est estimé par le critère MDL.
L'objectif principal étant de comparer les approches adaptatives à la méthode de décomposition uniforme, nous avons fixé le facteur de décimation maximal à 8, ce qui correspond à une profondeur maximale $i = 3$ (le découpage uniforme produit alors 8 bandes). Toutes les

méthodes sont comparées sur la base de trois critères : la variance d'estimation, le taux de détection et la complexité. Cette dernière est mesurée par le pourcentage de bandes finales relativement au découpage uniforme. L'approche de décomposition adaptative fondée sur le MDL (*règle 2*) [vdBLK95] est modifiée comme suit : les bandes où le nombre de composantes est nul sont arrêtées. Ceci permet de réduire le nombre de bandes terminales de l'approche lorsque l'ordre utilisé est grand. Le taux de fausses alarmes des approches utilisant le test de Drouiche est fixé à $\alpha = 1\%$. La décomposition fondée sur le critère énergétique utilise un seuil de $\lambda = 2\sigma_e^2$, où $\sigma_e^2$ est la variance du bruit simulé. Elle bénéficie de ce fait d'une information *a priori*. Toutes ces mesures sont effectuées dans la bande passante du filtre, c'est-à-dire dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, ceci pour éviter l'influence des composantes situées hors de cette bande.

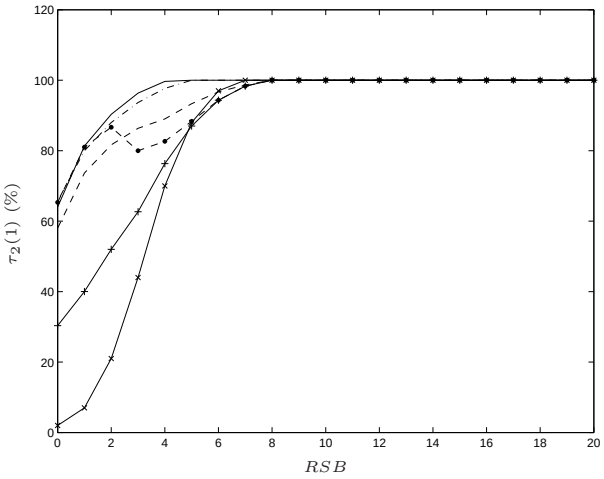
### 3.6.1 Ordre de prédiction variable

Dans cette partie, on se propose d'analyser le comportement des méthodes de décomposition/estimation lorsque l'ordre de modélisation $p_i$ est divisé par 2 entre deux niveaux de décomposition successifs ($p_i = p_{i-1}/2$). Pour cela, on considère un ordre $p_0 = 64$ dans la bande globale, ce qui correspond à un ordre $p_3 = 8$ dans chacune des bandes résultant de la décomposition uniforme. Dans ce cas, on privilégie une estimation globale à fort RSB puisque la longueur importante du filtre détériore la qualité de l'estimation en sous-bandes. La figure 3.9a présente la variance d'estimation de la première composante en fonction du RSB. A RSB élevé, il apparaît nettement que l'estimation en sous-bandes uniforme est moins performante que l'estimation réalisée dans la bande globale. De plus, la variance obtenue avec toutes les méthodes adaptatives qui ne considèrent pas les résidus finit par converger vers celle de l'approche uniforme. Ce résultat est bien sûr attendu d'après la discussion du paragraphe 3.3. La méthode adaptative fondée sur la *règle 1* (platitude spectrale des résidus) se comporte mieux qu'une estimation globale à faible RSB et tend vers cette dernière lorsque le RSB est important. Ce comportement peut également être observé sur le taux de détections correctes (figure 3.9b), puisqu'elle présente le taux le plus élevé. Enfin, concernant le nombre de bandes terminales (figure 3.9c), parmi les méthodes d'estimation en sous-bandes, celle fondée sur la *règle 1* aboutit au plus petit nombre (ici 2 bandes sur 8, en moyenne), quelle que soit la valeur du RSB. Les méthodes adaptatives utilisant la *règle 3* et la *règle 4* (platitude spectrale et énergie des signaux) sont pratiquement équivalentes. La première approche est néanmoins préférable parce que plus facile à mettre en oeuvre (il suffit de fixer un taux de fausses alarmes pour déterminer le seuil de détection).

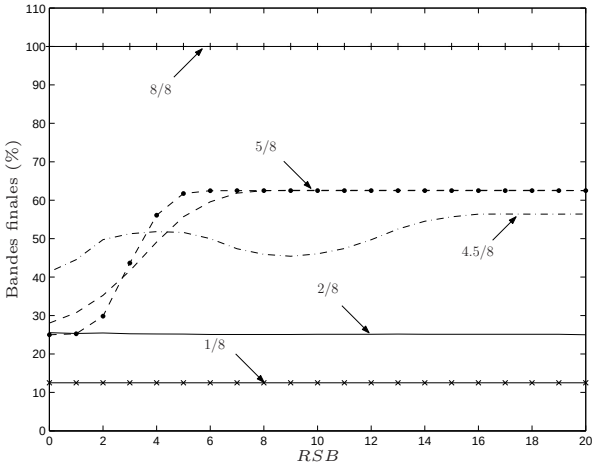
La figure 3.10 représente le découpage obtenu avec les méthodes de décomposition adaptatives pour deux valeurs du RSB, l'une étant faible (4 dB) et l'autre élevée (16 dB). L'approche basée sur la *règle 4* n'est pas représentée en raison de sa similitude avec celle basée sur la *règle 3*. Les niveaux de gris indiquent le nombre de fois qu'une bande est visitée par la procé-




*(a)* variance de $\omega_1$



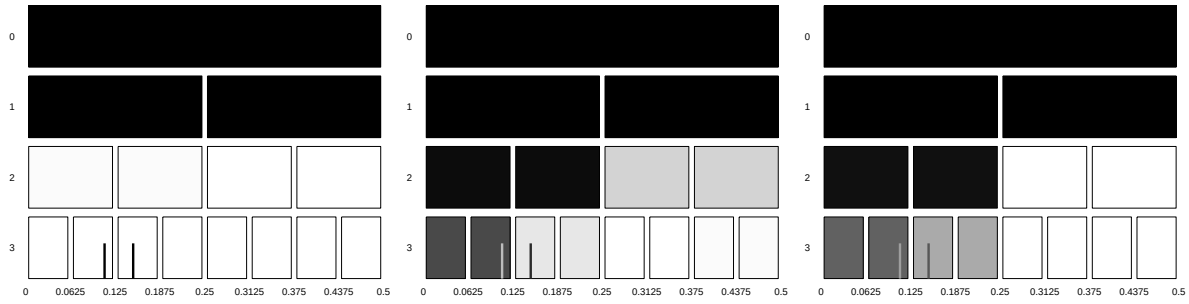

*(b)* taux de détection de $\omega_1$



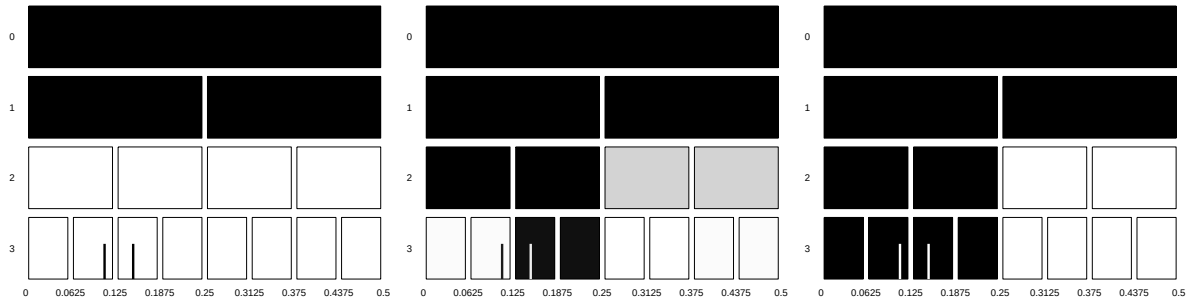

*(c)* bandes finales

FIGURE 3.9 – Résultats de l'estimation – ordre de prédiction variable ($p_0 = 64$).

dure de découpage/estimation. Le niveau $i = 0$ étant toujours visité, il est représenté en noir. On remarque que, pour les deux valeurs du RSB, l'approche utilisant la *règle 1* s'arrête au niveau $i = 1$ de la décimation. Ce comportement s'explique par l'utilisation d'un grand ordre de modélisation qui est, dans le cas considéré, suffisant pour avoir une estimation correcte à ce niveau (voir aussi les figures 3.9a-b). Comme attendu, d'après la figure 3.10f, à RSB élevé, l'approche utilisant la *règle 3* parvient jusqu'au niveau $i = 3$ dans les bandes où les composantes que l'on cherche à estimer sont localisées ($j = 1, 2$). Ceci explique, d'une part, sa similitude avec l'approche uniforme sur le plan de la variance d'estimation et, d'autre part, sa variance plus élevée par rapport à l'approche globale. En effet, comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, l'approche globale est préférable à l'approche uniforme lorsque le filtre utilisé est relativement long, ce qui est le cas ici. On remarque également que l'approche fondée sur la *règle 2* (règle de Karrakchou) arrête la décomposition au niveau $i = 2$ dans la cas de la première composante (cf. figure 3.10e), à RSB élevé. Par conséquent, sa




*(a)* Règle 1 (4 dB) *(b)* Règle 2 (4 dB) *(c)* Règle 3 (4 dB)




*(d)* Règle 1 (16 dB) *(e)* Règle 2(16 dB) *(f)* Règle 3 (16 dB)

FIGURE 3.10 – Noeuds visités par les approches adaptatives – ordre de prédiction variable ($p_0 = 64$).

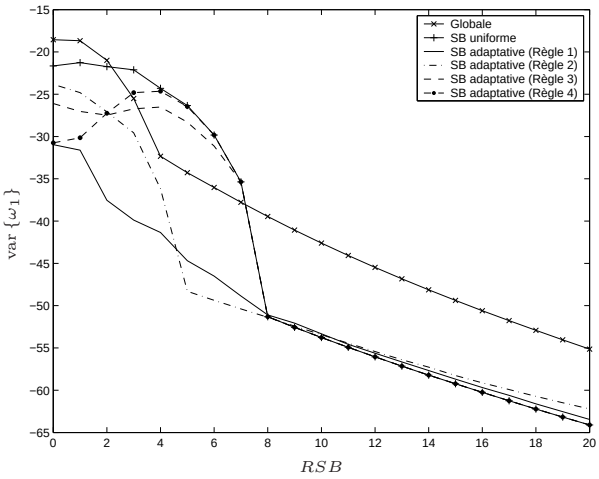
variance d'estimation est comprise entre celles obtenues avec l'approche adaptative proposée et l'approche uniforme (figure 3.9a).

En résumé, l'approche adaptative utilisant la *règle 1* est la plus performante puisqu'elle présente un taux de détection maximal et une complexité minimale (image du nombre de bandes) relativement aux autres méthodes en sous-bandes. Elle est suivie par celle fondée sur la *règle 2*.

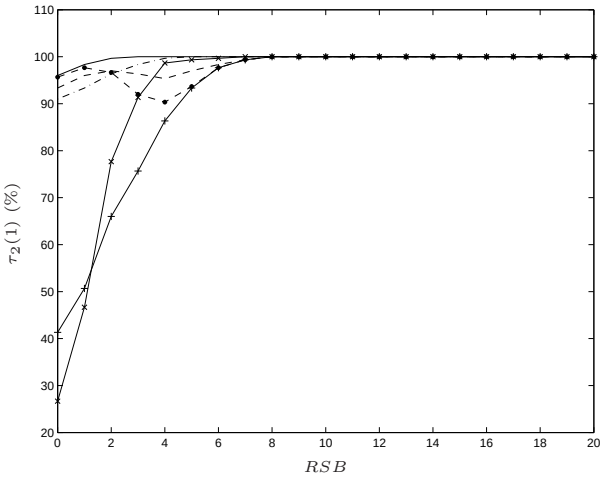
### 3.6.2 Ordre de prédiction fixe

Parfois, il est souhaitable de fixer un ordre de prédiction arbitraire et laisser l'approche adaptative déterminer le meilleur découpage correspondant à cet ordre. C'est le cas notamment lorsque le nombre réel de composantes est inconnu, ou connu mais trop élevé pour une estimation globale. Pour analyser le comportement des approches adaptatives dans une telle situation, on considère le cas d'un ordre de prédiction $p_i = 8$, pour toute valeur de $i$.

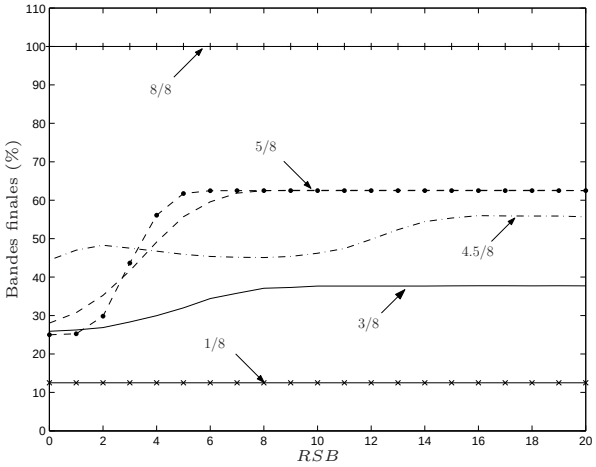
L'utilisation d'un ordre de prédiction identique dans toutes les bandes indépendamment de leur profondeur revient finalement à privilégier une estimation en sous-bandes. Ceci est confirmé par la figure 3.11a qui montre que la variance de l'approche globale est la plus élevée et celle de l'approche uniforme est la plus faible, à fort RSB. Les décompositions adaptatives basées sur les *règles 3* et *4* ne dépendent pas de l'ordre utilisé ; leurs performances finissent par tendre vers les mêmes que celles de l'approche uniforme (variance et taux de détections




*(a)* variance de $\omega_1$




*(b)* taux de détection de $\omega_1$



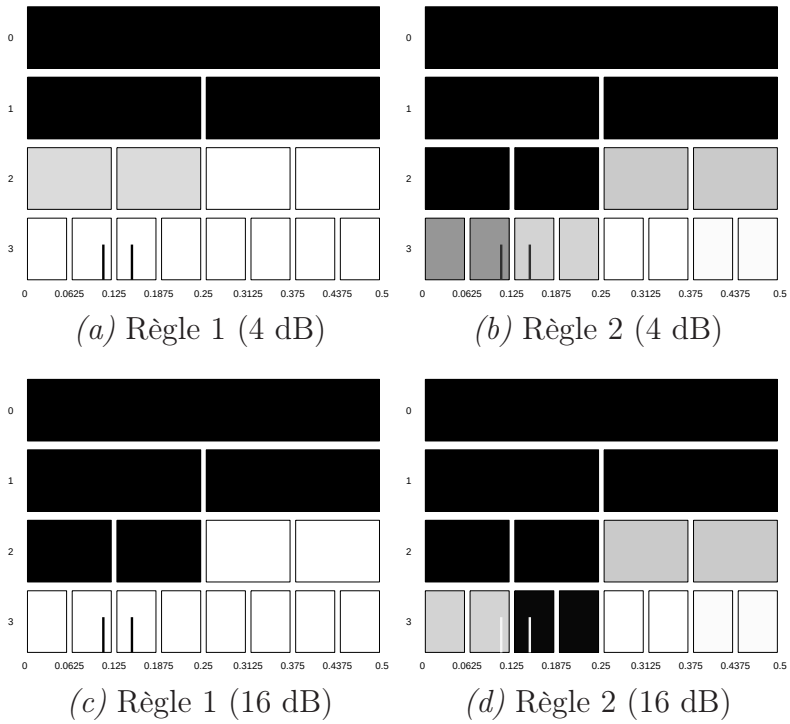

*(c)* bandes finales

FIGURE 3.11 – Résultats de l'estimation – ordre de prédiction fixe ($p_i = 8$).

correctes). En comparaison avec les résultats du paragraphe précédent, l'approche adaptative utilisant les résidus tend ici vers une décomposition uniforme à RSB élevé du point de vue de la variance d'estimation. Elle reste néanmoins la plus performante à faible RSB. Ceci se reflète directement sur le taux de détections correctes (figure 3.11b). Sur cette figure, on peut constater que le taux de détections obtenu avec la méthode proposée converge plus vite vers l'unité. Ce résultat permet donc d'établir le comportement typique d'une décomposition en sous-bandes adaptative basée sur la *règle 1* : le découpage est arrêté dès que l'estimation est jugée correcte par le critère de platitude spectrale. En terme de complexité, cette méthode conduit à un peu moins de 40% de bandes terminales (figure 3.11c), alors que les autres approches adaptatives aboutissent à 55% (*règle 1*) et 60% (*règles 3-4*). Ici encore, le critère fondé sur les résidus d'estimation réalise le meilleur compromis détection/variance.

Les seules méthodes de décomposition adaptative dont l'arbre dépend de l'ordre de modélisation sont celles fondées sur les *règles 1* et *2*. Par exemple, l'approche utilisant *règle 3*

aboutit au même découpage que celui présenté sur la figure 3.10. Les arbres de décomposition moyens obtenus avec les deux approches précédentes sont montrés sur la figure 3.12. Une comparaison avec les résultats de la figure 3.10 montre que l'approche basée sur la *règle 1* conduit, en moyenne, jusqu'au niveau de décimation $i = 2$ dans le cas d'un ordre $p_i = 8$, alors que celle fondée sur la *règle 2* a quasiment le même comportement dans les deux situations.




*(a)* Règle 1 (4 dB) *(b)* Règle 2 (4 dB)

*(c)* Règle 1 (16 dB) *(d)* Règle 2 (16 dB)

FIGURE 3.12 – Noeuds visités par les approches adaptatives – ordre de prédiction fixe ($p_i = 8$).

En résumé, l'approche proposée vérifie les objectifs que l'on s'est fixé dans le paragraphe 3.2.2, c'est-à-dire la maximisation du taux de détections et la minimisation de la profondeur de la décomposition. Cette approche dépend étroitement de l'ordre utilisé. En effet, dans le cas où cet ordre est élevé, la décomposition est stoppée à des niveaux généralement inférieurs à ceux atteint avec les autres méthodes adaptatives. Dans le cas contraire, la décomposition devient plus profonde, ses performances asymptotiques tendent vers celles d'un découpage uniforme mais sa complexité est moindre.

## 3.7 Conclusion

Ce chapitre se voulait être un prolongement naturel de l'étude des performances de l'estimation des pôles en sous-bandes. Nous avons vu lors de l'étude de la décomposition uniforme que ces performances dépendent étroitement du facteur de décimation et du filtre utilisés. Ceci nous a amené à considérer des formes adaptatives du découpage.

Après avoir clairement décrit les objectifs poursuivis au travers d'une décomposition adaptative, à savoir la maximisation du taux de détection, l'arrêt des bandes vides et un certain contrôle de la variance d'estimation, nous avons identifié les faiblesses des critères d'arrêt existants. Ceci nous a conduit à proposer l'utilisation d'un test de blancheur (ou plus précisément un test fondé sur la platitude spectrale locale) sur les résidus de l'estimation, comme critère d'arrêt. Deux tests de blancheur ont été considérés : celui de Drouiche et celui de Fisher. Ces tests sont réalisés dans le domaine fréquentiel pour tenir compte des bandes de transition introduites par le filtre. La comparaison de ces deux tests a montré que celui de Drouiche est le mieux adapté dans le cas de sinusoïdes amorties.
Les simulations effectuées ont permit de dégager les résultats principaux suivants :

- les approches adaptatives utilisant des règles d'arrêt fondées sur le signal en sous-bande permettent de stopper la décomposition des bandes vides, mais généralement pas celles qui contiennent des modes même si ceux-ci sont correctement détectés ;
- les décompositions utilisant les règles d'arrêt *1* et *2* (paragraphe 3.3.5) aboutissent au taux de détection le plus élevé ;
- suivant l'ordre de prédiction utilisé, l'approche fondée sur les résidus aboutit à une décomposition plus ou moins profonde, mais sa complexité (nombre de bandes finales) est toujours moindre que celle des autres approches.

Enfin, un avantage supplémentaire de la décomposition proposée est de fournir implicitement une validation des paramètres estimés par vérification de la blancheur des résidus d'estimation. Les approches les plus performantes, c'est-à-dire celles basées sur les règles *1* et *2*, vont être analysées plus en détail dans le chapitre suivant en utilisant des signaux réels de spectroscopie RMN.

# Chapitre 4

# Application à la spectroscopie de résonance magnétique nucléaire

## 4.1 Introduction

Depuis la découverte, en 1945, du phénomène de résonance magnétique nucléaire (RMN), cette technique est devenue une discipline en soi couvrant un large domaine allant de la chimie préparative aux applications biomédicales. Cette technologie permet d'obtenir des données utiles pour caractériser la structure d'une molécule, qu'elle soit libre ou fixée à des cibles biologiques. De ce fait, elle est particulièrement attractive, puisque non destructive, pour l'identification d'une substance à l'état solide ou liquide.

Le signal délivré par un spectromètre contient des informations qui caractérisent les différents produits chimiques intervenant dans l'échantillon analysé, sous la forme d'exponentielles amorties noyées dans du bruit. Ceux-ci se manifestent donc, dans le domaine spectral, par la présence d'un certain nombre de raies définies par leur position fréquentielle (ou déplacement chimique), leur élargissement et leur amplitude. Le traitement du signal en RMN a pour objectif d'identifier tous ces paramètres à partir d'un minimum de connaissances *a priori* sur les propriétés spectroscopiques de l'échantillon. Dans le cadre de la spectroscopie du carbone-13 de mélanges compliqués, les signaux rencontrés sont souvent de complexité élevée (très grands nombres de composantes, parfois très proches, amplitudes très différentes et longueurs importantes). Dans cette configuration, les méthodes à haute résolution appliquées directement sur le signal mesuré ne donnent pas des résultats satisfaisants parce qu'elles nécessitent des ordres faramineux et elles ne peuvent pas traiter efficacement toutes les mesures disponibles [GH94, Hen97, TD02]. C'est justement dans ce contexte que l'approche en sous-bandes peut être bénéfique, car permettant un traitement par segments fréquentiels séparés.

Ce chapitre est dédié à l'estimation des paramètres de signaux issus de la spectroscopie RMN du carbone-13 ($^{13}$C). Dans le premier paragraphe, nous présentons, de manière très

concise, les bases de la spectroscopie RMN. Ensuite, nous passons en revue les méthodes du traitement du signal, les plus couramment utilisées par la communauté RMN, et nous discutons de leurs limitations. Enfin, après une description détaillée des signaux utilisés, les performances des méthodes d'estimation en sous-bandes en termes de détection, fausses alarmes et complexité numérique sont analysées et commentées.

## 4.2 Principes de base de la spectroscopie RMN

Selon les résultats de la mécanique quantique, l'énergie d'interaction des moments magnétiques nucléaires avec un champ magnétique extérieur est constituée d'un certain nombre de niveaux discrets caractéristiques. Il est possible, au moyen d'un émetteur à haute fréquence, d'induire une transition entre ces niveaux d'énergie. L'absorption d'énergie qui en résulte est enregistrée sous forme de raie spectrale ou signal de résonance (spectre de RMN). La base de la RMN étant le magnétisme nucléaire, seuls les atomes dont le noyau possède un moment magnétique donnent lieu au phénomène de résonance, parmi lesquels le proton $^{1}$H et l'isotope du carbone $^{13}$C. Tous les noyaux ayant un nombre de masse et un nombre atomique pairs (par exemple le carbone $^{12}$C), de par leur moment magnétique nul, ne sont pas actifs. Nous allons maintenant exposer brièvement les principes physiques de la spectroscopie de résonance magnétique nucléaire. Le lecteur intéressé pourra trouver une présentation plus détaillée dans les ouvrages de référence suivants [Fri91, Can91, Gün93]. Les notations utilisées dans ce paragraphe lui sont propres.

### 4.2.1 Moment nucléaire et moment magnétique

La spectroscopie par résonance magnétique se fonde sur les propriétés magnétiques des noyaux atomiques. La majorité des noyaux possède un moment angulaire intrinsèque noté $\mathbf{P}$. La mécanique quantique indique que ce moment est quantifié :

$$P = \sqrt{I(I+1)}\hbar \tag{4.1}$$

où $\hbar = h/2\pi$, $h$ étant la constante de Planck. $I$ est le nombre de spin (ou nombre quantique du moment magnétique angulaire). Il peut prendre les valeurs $I = 0,\ 1/2,\ 1, \ldots$ jusqu'à 6, celle-ci dépend de la nature du noyau observé. Le moment angulaire $\mathbf{P}$ est associé à un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ qui lui est proportionnel :

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{P} \tag{4.2}$$

où $\gamma$ est constant pour chaque nucléide. Il est appelé rapport gyromagnétique. La sensibilité de détection d'un nucléide dans une expérience RMN dépend de ce rapport ; plus $\gamma$ est grand, plus le nucléide est sensible (facile à observer). D'après les équations (4.1) et (4.2), le moment

magnétique $\mu$ s'exprime par la relation :

$$\mu = \gamma\sqrt{I(I+1)}\hbar \tag{4.3}$$

Donc, les nucléides ayant un spin $I = 0$ n'ont pas de moment magnétique et ne peuvent pas être observés par la spectroscopie RMN.

Si un noyau est placé dans un champ magnétique homogène $\mathbf{B}_0$, le moment angulaire $P$ prend une direction telle que sa composante $P_z$ dans la direction du champ statique (axe $z$) est :

$$P_z = m\hbar \tag{4.4}$$

où $m$ est le nombre quantique magnétique et prend l'une des valeurs $m = -I, ..., 0, ..., I$. Pour les noyaux du proton et du carbone-13, qui ont un spin $I = 1/2$, le moment angulaire est représenté par la figure 4.1a.

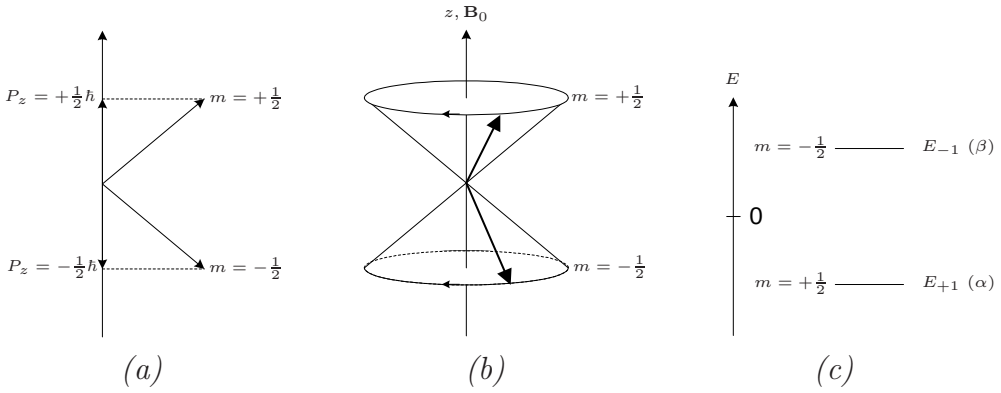



FIGURE 4.1 – Précession et énergie des dipôles nucléaires ayant un spin $I = 1/2$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}_0$. (a) direction du moment magnétique $\mathbf{P}$ ; (b) mouvement de précession du dipôle ; (c) niveaux d'énergie permis.

Dans la représentation classique, le dipôle nucléaire est animé d'un mouvement de *précession* autour de l'axe $z$ (figure 4.1b). La vitesse angulaire de ce mouvement est ce que l'on appelle la fréquence de Larmor et s'exprime par la relation :

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\gamma\mathbf{B}_0 \tag{4.5}$$

Par ailleurs, l'énergie du dipôle magnétique est proportionnelle à la densité du champ magnétique appliqué :

$$E_m = -\mu_z B_0 = -m\gamma\hbar B_0 \tag{4.6}$$

Pour un noyau de spin $I$, il existe $2I+1$ états d'énergie appelés niveaux nucléaires de Zeeman. Ces niveaux d'énergie (notés $\alpha$ et $\beta$) sont représentés sur la figure 4.1c dans le cas $I = 1/2$.

La différence d'énergie entre deux niveaux consécutifs est :

$$\Delta E = \gamma \hbar B_0 \tag{4.7}$$

Jusqu'ici, nous avons considéré un noyau atomique isolé. Dans un échantillon de RMN, il existe bien sûr un très grand nombre de noyaux $N$. La répartition de ces noyaux entre les deux niveaux d'énergie pour $I = 1/2$ est donné par la statistique de Boltzmann :

$$\frac{N_\beta}{N_\alpha} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \simeq 1 - \frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T} \tag{4.8}$$

où $N_\alpha$ (resp. $N_\beta$) est le nombre de noyaux dans le niveau d'énergie $\alpha$ (resp. $\beta$). $k_B$ est la constante de Boltzmann et $T$ la température absolue. Comme $N_\beta > N_\alpha$, il en résulte à l'équilibre une aimantation macroscopique $\mathbf{M}_0$ dirigée le long du champ appliqué. Son expression est donnée par la loi de Curie :

$$M_0 = N \frac{\gamma^2 \hbar^2 B_0}{4 k_B T} \tag{4.9}$$

### 4.2.2 Condition de résonance

Dans une expérience RMN, des transitions entre les différents niveaux d'énergie sont induites en appliquant un champ $\mathbf{B}_1$, ici orienté selon l'axe $x$, de fréquence appropriée $\nu_1$. En effet, une transition peut avoir lieu si $\nu_1$ est choisie telle que :

$$h\nu_1 = \Delta E \tag{4.10}$$

Les transitions entre le niveau d'énergie bas et le niveau d'énergie haut correspondent à une absorption d'énergie. Les transitions inverses correspondent à une émission d'énergie. A partir des équations (4.7) et (4.10), on obtient la condition de résonance :

$$\nu_1 = \nu_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B_0 \tag{4.11}$$

Dans ce cas, il se produit une interaction entre l'aimantation macroscopique $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{B}_1$ et par suite une déviation de $\mathbf{M}_0$ de sa position de repos le long de l'axe $z$ d'un angle $\Theta$. $\mathbf{M}_0$ décrit alors un mouvement de précession autour de l'axe $z$ (figure 4.2). La projection de $\mathbf{M}_0$ sur l'axe $z$ ($M_z$) diminue et il apparaît dans la direction $y$ une aimantation transversale $M_{x,y}$ qui peut être mise en évidence par une bobine réceptrice.

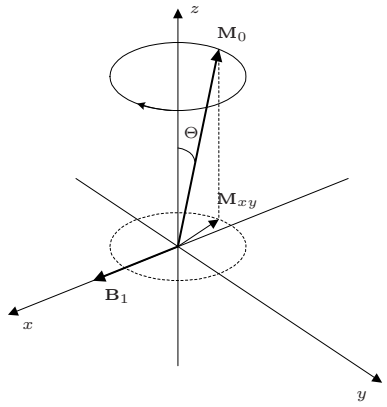



FIGURE 4.2 – Précession de l'aimantation $\mathbf{M}_0$ en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}_1$.

### 4.2.3 Effets de relaxation

A l'instant où le champ $\mathbf{B}_1$ est interrompu, l'aimantation macroscopique $M_0$ tend à revenir à sa position d'équilibre, c'est-à-dire selon l'axe $z$, ceci par relaxation. Ce mouvement est décrit par les équations de Bloch. La première équation concerne la composante $M_z$ (relaxation longitudinale) :

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1} \tag{4.12}$$

où $T_1$ est appelé *temps de relaxation longitudinale* ou de *relaxation du réseau de spins*. Les composantes $M_x$ et $M_y$ sont obtenues en considérant un repère $x' - y'$ tournant dans le plan $x - y$ avec une vitesse angulaire $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ :

$$\frac{dM_{x'}}{dt} = M_{y'}(\omega_0 - \omega_1) - \frac{M_{x'}}{T_2} \tag{4.13}$$

$$\frac{dM_{y'}}{dt} = -M_{x'}(\omega_0 - \omega_1) - \frac{M_{y'}}{T_2} \tag{4.14}$$

où $T_2$ est le temps de relaxation transversale (spin-spin). En introduisant l'aimantation transversale complexe $M_{x'y'} = M_{x'} + \jmath M_{y'}$, et compte-tenu des conditions initiales $M_{x'y'}(0) = M_0$ et $M_z = 0$, on obtient les fonctions temporelles suivantes :

$$M_z(t) = M_0\big(1 - \exp(-t/T_1)\big) \tag{4.15}$$

$$M_{x'y'}(t) = M_0 \exp(-t/T_2) \exp(\jmath 2\pi\nu t) \tag{4.16}$$

où $\nu = \nu_1 - \nu_0$ est la fréquence relative dans le repère tournant. Si la vitesse de rotation $\omega_1$ coïncide avec la pulsation de résonance, alors $M_{x'y'}(t)$ décroît exponentiellement vers zéro avec une constante de temps $T_2$. En général, le signal obtenu est une sinusoïde amortie de fréquence $\nu_1 - \nu_0$. Ce signal est appelé *signal de précession libre* ou, de l'anglais, « *free induction decay* » (FID). La partie réelle (resp. imaginaire) correspondant à la transformée de Fourier d'un FID constitue le spectre d'absorption (resp. spectre de dispersion). La figure

4.3 montre l'allure théorique d'un spectre de signal RMN. Le spectre d'absorption prend la forme d'une lorentzienne lorsque la phase est nulle.

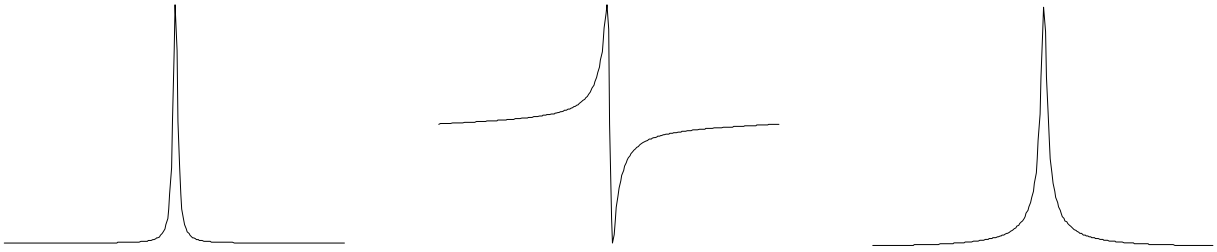



FIGURE 4.3 – Spectre d'un signal de RMN.

### 4.2.4 Déplacement chimique

En pratique, les noyaux ne sont pas isolés et le signal de résonance nucléaire contient en fait plusieurs résonances. Les molécules qui intéressent les chimistes contiennent en effet une variété de noyaux qui se différencient par leur environnement chimique. Les résonances sont donc influencées par l'environnement du noyau observé. Ainsi, pour les molécules diamagnétiques, le champ magnétique efficace $B_{\text{eff}}$, au niveau du noyau, s'exprime par la relation :

$$B_{\text{eff}} = (1 - \sigma)B_0 \tag{4.17}$$

où $\sigma$ est la constante d'écran, de l'ordre de $10^{-4}$ à $10^{-5}$ pour les protons. Elle dépend uniquement de l'environnement chimique et magnétique du noyau. De ce fait, la condition de résonance devient :

$$\nu_0 = \frac{\gamma}{2\pi}(1 - \sigma)B_0 \tag{4.18}$$

La figure 4.4 montre le spectre RMN $^1$H à 90MHz ($B_0 = 2.11$T) d'un mélange de bromoforme ($CHBr_3$), de méthylène bromide ($CH_2Br_2$), de méthyl-bromide ($CH_2Br$) et de tétraméthylesylane (TMS, $Si(CH_3)_4$). Le signal TMS apparaît exactement à 90MHz (référence). Les signaux des autres substances apparaissent au voisinage de cette fréquence.
Pour rendre les fréquences de résonance mesurées en Hz indépendantes de $B_0$, on introduit la quantité $\delta$, appelée *déplacement chimique*, définie par la relation :

$$\delta = \frac{\nu_{\text{substance}} - \nu_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref}}} \times 10^6 \tag{4.19}$$

où $\nu_{\text{ref}}$ est la fréquence de résonance d'une substance de référence (le TMS, dans l'exemple précédent). Le déplacement chimique s'exprime en parties par million (ppm).

Finalement, le signal de précession libre mesuré ne contient pas une fréquence unique mais

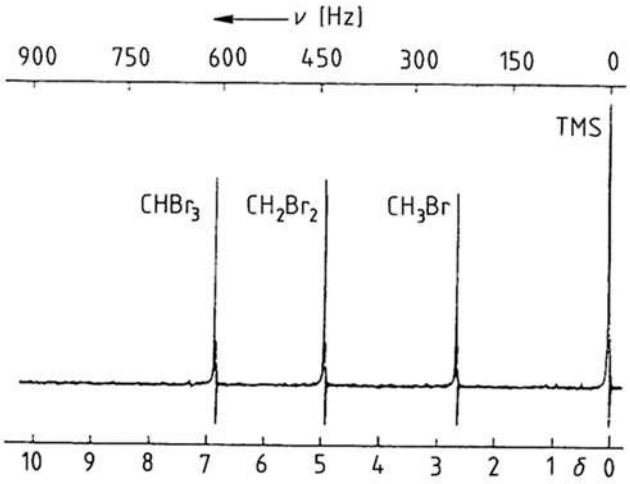



FIGURE 4.4 – Exemple d'un spectre de RMN $^1$H à 90MHz (tiré de [Fri91]).

une superposition de signaux de fréquences différentes, caractéristiques des structures chimiques étudiées. Le signal observé est alors de la forme :

$$M_{x'y'}(t) = \sum_{i=1}^{M} M_{0i} \exp(-t/T_{2i}) \exp(\jmath 2\pi\nu_i t) \tag{4.20}$$

ce qui correspond à un signal contenant $M$ exponentielles amorties. Bien sûr, le signal mesuré est entaché de bruit provenant de plusieurs sources (sonde, environnement, bruit électronique du système de traitement, etc.). En général, il est supposé blanc [Hen97].

### 4.2.5 Présentation d'une expérience RMN

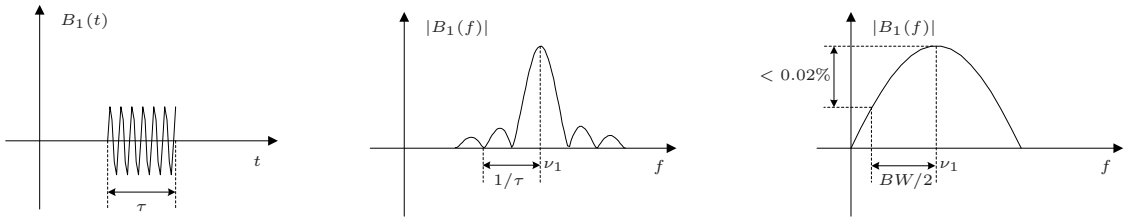
Un spectromètre de base, comme ceux utilisés à partir des années 1970, est constitué essentiellement d'un aimant($\mathbf{B}_0$), d'un générateur radio-fréquence ($\nu_1$) et d'un récepteur composé d'une sonde et d'un amplificateur. Il existe deux méthodes pour induire les transitions dans l'échantillon : la première consiste à modifier la densité du flux magnétique $B_0$ en fixant $\nu_1$ et la seconde consiste à faire varier $\nu_1$ en imposant un flux constant $B_0$. Dans les deux méthodes, le spectre est enregistré point par point quand $B_0$ ou $\nu_1$ varie de façon continue. Cette méthode d'excitation est appelée *onde continue*.

Une innovation importante dans la construction des spectromètres a été l'introduction des cryoaimants qui a rendu possible la génération de champs magnétiques importants (supérieurs à 2.35T) permettant ansi d'augmenter la sensibilité. En pratique, des flux magnétiques variant entre 1.41 et 18.79T sont utilisés. Cet intervalle correspond dans le cas du proton à des fréquences de résonance entre 60 et 800MHz (voir tableau 4.1). Un autre pas décisif a été franchi avec la découverte de la spectroscopie RMN impulsionnelle. Avec cette méthode, tous les noyaux d'un échantillon sont simultanément excités au moyen d'une impulsion radio-fréquence $\nu_1$ pendant un court instant $\tau$. L'impulsion ainsi produite contient, en plus de la

fréquence $\nu_1$, une bande fréquentielle centrée autour de $\nu_1$ (figure 4.5). Cependant, seule une partie de cette bande permet d'induire des transitions et sa largeur est approximativement proportionnelle à $\tau^{-1}$. La durée de l'excitation est alors choisie de telle façon que la bande passante de l'impulsion soit dix à cent fois plus grande que la largeur du spectre observé, pour que tous les noyaux soient uniformément excités. En pratique, la durée de l'excitation est de l'ordre de quelques micro-secondes.

| $B_0$ [T] | Fréquences de résonance [MHz] | |
|---|---|---|
| | $^1$H | $^{13}$C |
| 1.41 | 60 | 15.1 |
| 2.35 | 100 | 25.15 |
| 4.70 | 200 | 50.3 |
| 7.05 | 300 | 75.4 |
| 9.40 | 400 | 100.6 |
| 11.74 | 500 | 125.7 |
| 14.09 | 600 | 150.9 |

TABLE 4.1 – Fréquences de résonance du proton et du carbone-13 à différentes densités du flux magnétique $\mathbf{B}_0$.




*(a)* *(b)* *(c)*

FIGURE 4.5 – (a) Impulsion radio-fréquence ; (b) Module de la transformée de Fourier ; (c) Largeur utile.

La procédure expérimentale de détection du signal RMN est susceptible d'introduire un déphasage $\phi$ qui s'ajoute à l'argument $2\pi\nu t$ de la fonction sinusoïdale (cf. équation (4.16)). Cette phase comporte généralement une contribution indépendante de la fréquence, $\phi_0$, et une contribution, $\nu\phi_1$, directement proportionnelle à la fréquence $\nu$. Dans ce cas, la partie réelle du spectre contient à la fois des composantes d'absorption et de dispersion. Le déphasage peut être corrigé au moyen d'une opération mathématique appelée *correction de phase* [Can91]. Par ailleurs, à cause de la faible sensibilité de la spectroscopie RMN et du bruit introduit par les appareils d'acquisition, une seule mesure n'est généralement pas suffisante. Pour améliorer le RSB, on additionne les résultats de $N_a$ mesures indépendantes (dites accumulations ou *scans*) de la même expérience et le RSB final s'en trouve augmenté d'un facteur $N_a$ (ou $\sqrt{N_a}$ lorsque, selon l'usage en RMN, le RSB est défini comme le rapport de l'amplitude à l'écart-type du bruit).

## 4.3 Analyse des signaux de précession libre

Traditionnellement, les signaux issus de la spectroscopie RMN sont analysés à l'aide de la transformée de Fourier. Cette approche présente l'avantage d'être simple et rapide. Lorsque les différentes fréquences sont bien séparées, une simple intégration numérique des pics permet de retrouver les amplitudes correspondantes. Cela suppose bien sûr un RSB suffisant et une bonne ligne de base du spectre. Dans le cas contraire, il est nécessaire de procéder à un désenchevêtrement des raies. Une approche communément utilisée consiste à déterminer le nombre de composantes du signal ou à le fixer *a priori* puis à estimer les paramètres des lorentziennes (dans le domaine fréquentiel) par moindres carrés non-linéaires (e.g. [GLA90]). Les inconvénients de cette méthode sont multiples [Hen97], en plus des problèmes soulevés par l'optimisation non-linéaire (initialisation, convergence globale, etc.), le modèle lorentzien n'est jamais exact, la correction de phase n'étant pas parfaite.

Pour pallier les problèmes inhérents à la transformée de Fourier, plusieurs méthodes modernes du traitement du signal ont été appliquées à l'analyse des signaux de RMN. Elles incluent les méthodes du maximum de vraisemblance [MG89, ZCS98], du maximum d'entropie [LSS85, Ste88], de prédiction linéaire [BdBBvO85, GL88, Ste88, TN88, Koe99], dans l'espace d'état [BdBvO87, MBHC91, PvdBdBvO92, vHCDvH94] et plus récemment la méthode FDM (pour *filter diagonalization method*) [WN95, HVMS98]. Ces méthodes permettent d'estimer les paramètres d'un FID (fréquence, facteur d'amortissement, intensité ou amplitude et phase) directement dans le domaine temporel. Même si des résultats très satisfaisants ont été obtenus dans les cas particuliers de signaux présentant un nombre modéré de composantes et d'échantillons, des limitations naturelles de ces méthodes apparaissent quand elles sont appliquées à des signaux longs contenant un très grand nombre de modes. En effet, dans ce cas, les algorithmes d'estimation doivent traiter des matrices, dont les dimensions sont parfois très importantes, qui doivent être inversées. Ceci entraîne un coût de calcul prohibitif et requiert une capacité de mémoire importante. Dans le cas de signaux compliqués, il est plus judicieux de réaliser une décomposition en sous-bandes avant la phase d'estimation elle-même. Dans ce contexte, quelques techniques d'estimation spectrale locale ont déjà été proposées dans la littérature RMN [TN88, MDKL89] et cette idée semble intéresser encore cette communauté [MTS98, TD02]. La réduction de la complexité a également été abordée à partir d'autres points de vue. Par exemple, certains auteurs ont mis en oeuvre des algorithmes rapides pour résoudre les équations de prédiction linéaire en exploitant certaines propriétés de la matrice de données [GH94]. Ces approches permettent d'utiliser des ordres de prédiction très grands (10000 et plus), mais restent inefficaces pour analyser des signaux de plusieurs milliers d'échantillons. De plus, la recherche des racines du polynôme de prédiction (ou des valeurs propres d'une matrice) devient peu fiable dans ce cas à cause des erreurs numériques.

Notre objectif dans le paragraphes suivants est d'évaluer la pertinence de l'approche en sous-

bandes pour l'estimation des paramètre d'un FID de n'importe qu'elle longueur. Contrairement à la technique LP-ZOOM proposée dans [TN88], l'approche utilisée réalise une décomposition systématique de la totalité du spectre du signal sans aucune information *a priori* sur la position fréquentielle des pôles. Dans un premier temps, nous analysons l'approche uniforme puis nous étudions le cas de la décomposition adaptative. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous évaluons l'apport de la décomposition en général du point de vue spécifique du rapport signal-sur-bruit. En effet, les FIDs étant obtenus par accumulation de mesures successives, le fait de pouvoir travailler à RSB plus faible, permet une réduction appréciable des temps d'expérimentation. Enfin, les deux stratégies d'estimation des amplitudes (en sous-bandes et en bande globale) sont comparées en utilisant un signal obtenu à partir d'une analyse quantitative.

## 4.4 Signaux analysés

Ces signaux vont servir de base à l'évaluation des performances de l'estimation en termes de bonnes et de fausses détections. Les compositions chimiques théoriques leur correspondant sont connues. Toutefois, dans la pratique, les spectres mesurés présentent des différences avec le « spectre théorique » du fait de la présence possible d'impuretés.

Les deux signaux réels, appelés CNMR1 et CNMR2, sont issus de la spectroscopie du carbone-13 de deux substances contenant un certain nombre de produits dans du chloroforme ($CDCl_3$). Ils ont été enregistrés sur un spectromètre Brucker AM 400 avec une fréquence d'observation de 100.62MHz. Ils ont une longueur de 131 072 échantillons et sont obtenus après $N_a = 1000$ accumulations. Des détails sur ces signaux ainsi que les caractéristiques chimiques correspondantes sont donnés dans l'annexe D.1. CNMR1 et CNMR2 contiennent, respectivement, 28 et 104 raies spectrales. Concernant les signaux complexes CNMR3($N_a$), dont les caractéristiques sont présentées dans l'annexe D.2, ceux-ci sont obtenus sur un même produit mais avec différents nombres d'accumulations $N_a$ et correspondent donc à différentes valeurs du RSB. Il sont utilisés dans la partie 4.7 pour montrer l'apport de l'analyse en sous-bandes en terme de réduction du nombre d'accumulations nécessaires.

L'analyse de ces signaux est effectuée sur la base d'une décomposition dyadique (décimations successives par un facteur 2). Pour cela, on traite seulement la bande fréquentielle $[0, 0.5]$, dans le cas des signaux réels CNMR1 et CNMR2. Les signaux CNMR3($N_a$) sont complexes mais à bande limitée à $[-0.25, 0.25]$, ce qui permet de se se restreindre également à la bande $[0, 0.5]$ après modulation. Dans toutes les estimations en sous-bandes, le nombre de composantes est estimé en utilisant le critère MDL. Concernant le facteur de sur-détermination utilisé avec l'approche SVD-HOYW (défini au paragraphe 1.6.2), celui-ci est fixé dans tous les essais à $c = 2p$, où $p$ est l'ordre de modélisation.

## 4.5 Décomposition uniforme

Hormis le choix de la méthode d'estimation et du filtre de décimation, l'approche uniforme nécessite le réglage de deux paramètres supplémentaires : la profondeur de la décomposition et l'ordre de prédiction utilisé dans chaque sous-bande. Le banc de filtres retenu vérifie les conditions établies dans le deuxième chapitre (cf. équations (2.19)). Concernant la méthode d'estimation, nous avons choisi de comparer la méthode KT à l'approche SVD-HOYW.

- **Filtre de décimation :**
  Dans le cas de la décomposition redondante et dyadique, le prototype du filtre de décimation est un filtre passe-bas dont la fréquence limite dans la bande passante est $f_p = \omega_p/2\pi = 0.125$. La fréquence limite $f_a = \omega_a/2\pi$ de la bande atténuée est un paramètre libre qui doit appartenir à l'intervalle $]0.125, 0.25]$ pour éviter les repliements spectraux. D'après les remarques du paragraphe 2.5.2, puisque dans notre cas les signaux sont de longueur importante, $f_a$ devrait être plus proche de $f_p$ que de 0.25. Ceci afin de réduire l'apparition de modes dans la bande de transition qui peuvent interférer avec les modes situés à l'intérieur de la bande passante.

- **Profondeur de la décomposition :**
  L'un des problèmes cruciaux d'une décomposition uniforme est le choix du niveau du découpage. Si la décomposition n'est pas assez profonde, il peut y avoir des bandes où des problèmes de résolution et de découplage subsistent. En revanche, lorsque celle-ci est trop profonde, le nombre de bandes vides devient plus important, la probabilité d'apparition de raies parasites également et bien sûr la charge de calcul s'en trouve accrue.

- **Ordre de prédiction en sous-bande :**
  L'ordre de prédiction est plus ou moins important suivant la profondeur de la décomposition et la complexité du problème. Comme nous l'avons indiqué dans les simulations du chapitre précédent, le choix de ce paramètre peut se faire de deux façons [RP96]. Si l'on a une idée de l'ordre à utiliser dans la bande globale, il suffit alors de le diviser par le nombre de sous-bandes pour obtenir l'ordre en sous-bandes. Dans le cas contraire, il faut le définir *a priori*, suivant le facteur de décimation considéré (l'ordre est d'autant plus faible que le facteur de décimation total est élevé). Il est clair que cette dernière approche est préférable puisque, en général, il n'y a aucune raison pour que la complexité soit uniformément répartie sur le spectre.

L'influence de ces paramètres va maintenant être étudiée sur deux exemples de signaux réels. Dans un premier temps, on s'intéresse au taux de détection en sous-bandes en fonction de la profondeur de la décomposition pour un ordre de prédiction *fixe* à tous les niveaux de la décomposition. Le cas d'un ordre variable est traité dans le paragraphe 4.5.3.

### 4.5.1 Le signal CNMR1

On considère d'abord un filtre de décimation ayant une bande de transition assez large ($f_p = 0.125$ et $f_a = 0.20$). L'ondulation maximale dans la bande passante est fixée à $\delta_1 = 0.01$. Pour minimiser le repliement spectral de modes dont les amplitudes sont relativement très importantes, nous avons fixé l'atténuation du filtre à -60 dB ($\delta_2 = 0.001$). Avec ces spécifications, le filtre passe-bas equiripple obtenu a un ordre $N_f = 33$, ce qui est raisonnable au regard de la longueur du signal considéré (128k échantillons) et des facteurs de décimation utilisés.

Deux méthodes d'estimation sont employées : SVD-HOYW et KT. L'ordre de prédiction utilisé pour les deux méthodes est $p = 20$ sur toutes les branches. Cet ordre est évidemment trop faible dans la bande globale mais l'on peut espérer qu'il devienne suffisant au bout d'un certain nombre de décimations par 2. Le tableau 4.2 montre le nombre de modes bien estimés et le nombre de raies parasites, en fonction du niveau de la décomposition. On constate que l'ordre utilisé convient à partir du niveau 7 pour la méthode SVD-HOYW et à partir du niveau 9 pour la méthode KT. L'approche SVD-HOYW a un taux de détection toujours supérieur et converge plus vite vers le vrai nombre de modes. On remarque également que le nombre de raies parasites est moins important avec SVD-HOYW. Dans les deux cas, et comme on pouvait s'y attendre, le taux de détection est une fonction croissante du facteur de décimation.

| Niveau | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Facteur de décimation | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| SVD-HOYW | 15–2 | 20–1 | 23–3 | 28–3 | 28–2 | 28–1 |
| KT | 7–4 | 19–0 | 20–1 | 25–4 | 27–4 | 28–4 |

TABLE 4.2 – Nombre de composantes bien estimées et parasites en fonction du facteur de décimation pour le signal CNMR1 ($f_a = 0.20$).

Pour montrer l'influence de la largeur de la bande de transition du filtre, nous avons effectué une autre décomposition/estimation, dans les mêmes conditions que précédemment, mis à part le fait que la fréquence $f_a$ est fixée à 0.15. Ce filtre possède alors une réponse impulsionnelle beaucoup plus grande : $N_f = 103$. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.3. Globalement, il apparaît que le nombre de raies parasites a diminué, alors que le taux de bonnes détections a légèrement augmenté pour des facteurs de décimation faibles (entre 16 et 64). La réduction des raies parasites peut s'expliquer par la réduction de l'effet intermodes grâce au choix d'un filtre ayant une transition plus abrupte. L'amélioration du taux de détection s'explique de la même façon. Cependant, comme nous l'avons constaté dans les deux chapitres précédents, quand la décomposition devient de plus en plus profonde, le transitoire introduit par le filtre devient plus important et ceci peut avoir des conséquences négatives sur la détection en sous-bandes, en particulier sur les modes très amortis.

| Niveau | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Facteur de décimation | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| SVD-HOYW | 16–2 | 21–1 | 25–1 | 27–0 | 28–0 | 28–2 |
| KT | 9–3 | 15–0 | 21–0 | 23–0 | 28–1 | 28–0 |

TABLE 4.3 – Nombre de composantes bien estimées et parasites en fonction du facteur de décimation pour le signal CNMR1 ($f_a = 0.15$).

Le tableau 4.4 présente les paramètres estimés du signal CNMR1 pour un facteur de décimation de 256, toutes les composantes étant détectées à ce niveau par les deux méthodes. L'approche KT est bien sûr optimale au niveau suivant. Cependant, en termes de précision, les résultats sont identiques au niveau considéré. A titre de comparaison, dans les colonnes de droite de ce tableau sont présentés les résultats d'une estimation globale avec un ordre de prédiction $p = 800$, le nombre de composantes étant *supposé connu* (le signal CNMR1 est réel : $M = 56$). Cette hypothèse forte n'est pas considérée en sous-bandes ; le nombre de composantes est *estimé* par le MDL. On constate que les méthodes SVD-HOYW et KT utilisées en sous-bandes donnent approximativement les mêmes estimations en fréquence, en amplitude et en facteur d'amortissement. On relève toutefois deux composantes pour lesquelles les différences sont sensibles. Il s'agit de deux raies particulièrement proches, $R_4$ et $R_5$, pour lesquelles les paramètres estimés par l'approche SVD-HOYW sont plus précis (facteurs d'amortissement). Les trois composantes $R_{18}$, $R_{19}$ et $R_{20}$ correspondent au solvant, ils sont identifiables par leur facteur d'amortissement relativement élevé. Enfin, la méthode d'estimation dans la bande globale a permis de détecter $N_D = 30$ composantes, mais seuls $N_{DC} = 16$ modes sont corrects.

Dans le but de réduire les fausses détections, on utilisera par la suite le filtre de décimation avec $f_a = 0.15$.

### 4.5.2 Le signal CNMR2

Le signal CNMR2 présente un nombre important de modes. Pour cette raison, nous avons augmenté l'ordre de prédiction à $p = 60$, mais ceci reste très faible en regard des ordres utilisés habituellement en RMN pour ce type de signal ($p > 1000$). D'après le tableau 4.5, on remarque une nette augmentation du nombre de composantes parasites en fonction de la profondeur de la décomposition, surtout avec la méthode SVD-HOYW. Ceci est dû, d'une part, à la multiplication du nombre de bandes vides et, d'autre part, à l'utilisation d'un ordre de prédiction trop important dans les bandes qui ne présentent pas une grande complexité. La réduction de l'ordre de prédiction permet, bien sûr, de limiter le nombres de raies parasites mais le taux de bonnes détections s'en trouve affecté. Une solution à ce problème consiste à utiliser une décomposition adaptative.
La méthode SVD-HOYW présente certes un nombre de raies parasites plus important que

| | KT-SB | | | HOYW-SB | | | KT-BG | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Raie | $f$ | $A(\%)$ | $\alpha \times 10^{-4}$ | $f$ | $A(\%)$ | $\alpha \times 10^{-4}$ | $f$ | $A(\%)$ | $\alpha \times 10^{-4}$ |
| 1 | 0.10271 | 2.60 | 0.72 | 0.10271 | 2.63 | 0.75 | – | – | – |
| 2 | 0.10279 | 3.11 | 0.76 | 0.10279 | 3.12 | 0.78 | 0.10280 | 3.53 | 1.91 |
| 3 | 0.11876 | 5.90 | 0.77 | 0.11876 | 5.82 | 0.74 | – | – | – |
| 4 | 0.11899 | 7.94 | 1.41 | 0.11898 | 4.93 | 0.85 | 0.11894 | 13.09 | 6.60 |
| 5 | 0.11903 | 3.51 | 0.30 | 0.11902 | 6.42 | 0.61 | – | – | – |
| 6 | 0.13871 | 2.29 | 0.81 | 0.13871 | 2.28 | 0.79 | – | – | – |
| 7 | 0.14086 | 11.54 | 0.82 | 0.14086 | 11.51 | 0.80 | 0.14085 | 9.75 | 1.61 |
| 8 | 0.14260 | 3.06 | 0.82 | 0.14260 | 3.08 | 0.80 | – | – | – |
| 9 | 0.14269 | 5.64 | 0.86 | 0.14269 | 5.67 | 0.85 | 0.14274 | 9.55 | 4.22 |
| 10 | 0.14287 | 11.59 | 0.81 | 0.14287 | 11.57 | 0.81 | – | – | – |
| 11 | 0.14308 | 2.72 | 0.98 | 0.14308 | 2.67 | 0.94 | – | – | – |
| 12 | 0.14386 | 5.28 | 0.83 | 0.14386 | 5.26 | 0.82 | 0.14394 | 5.99 | 5.63 |
| 13 | 0.14541 | 3.01 | 0.85 | 0.14541 | 3.02 | 0.86 | 0.14546 | 3.24 | 3.46 |
| 14 | 0.14842 | 4.72 | 0.79 | 0.14842 | 4.72 | 0.79 | – | – | – |
| 15 | 0.14926 | 6.15 | 0.85 | 0.14926 | 6.17 | 0.86 | – | – | – |
| 16 | 0.14953 | 2.65 | 0.77 | 0.14952 | 2.65 | 0.78 | 0.14942 | 7.84 | 7.97 |
| 17 | 0.15022 | 5.77 | 0.81 | 0.15022 | 5.77 | 0.81 | 0.15018 | 7.90 | 6.44 |
| – | 0.27050 | 0.38 | 0.24 | – | – | – | – | – | – |
| 18 | 0.27054 | 96.88 | 3.10 | 0.27054 | 99.20 | 3.26 | 0.27056 | 68.66 | 3.35 |
| 19 | 0.27134 | 100.00 | 3.85 | 0.27134 | 100.00 | 3.87 | 0.27136 | 100.00 | 7.08 |
| 20 | 0.27214 | 98.35 | 3.25 | 0.27214 | 98.40 | 3.25 | 0.27212 | 75.76 | 3.98 |
| 21 | 0.39277 | 2.67 | 0.99 | 0.39276 | 2.68 | 1.00 | 0.39277 | 4.94 | 13.53 |
| 22 | 0.39321 | 3.11 | 1.02 | 0.39321 | 3.12 | 1.02 | – | – | – |
| 23 | 0.41144 | 5.92 | 0.87 | 0.41144 | 5.90 | 0.85 | 0.41147 | 10.46 | 13.70 |
| 24 | 0.41175 | 5.11 | 0.94 | 0.41175 | 5.08 | 0.91 | – | – | – |
| 25 | 0.41190 | 6.09 | 0.90 | 0.41189 | 6.08 | 0.89 | 0.41195 | 5.08 | 2.40 |
| 26 | 0.42594 | 3.41 | 1.29 | 0.42594 | 3.43 | 1.31 | – | – | – |
| 27 | 0.42612 | 2.86 | 1.26 | 0.42612 | 2.85 | 1.25 | 0.42600 | 3.58 | 4.43 |
| 28 | 0.46544 | 1.06 | 0.84 | 0.46544 | 1.10 | 0.97 | 0.46539 | 0.88 | 2.55 |
| $N_{DC}/N_D$ | 28/29 | | | 28/28 | | | 16/30 | | |

TABLE 4.4 – Paramètres estimés du signal CNMR1 par une décomposition uniforme en sous-bandes ($d = 256$, $f_a = 0.15$).

la méthode KT, mais elle a permit de détecter plus de modes du signal. Comme on verra plus loin, le fait d'utiliser une technique adaptative rend cette méthode plus attractive.

### 4.5.3 Vers une décomposition adaptative

Nous avons vu que pour un ordre de prédiction fixe (le même dans toutes les sous-bandes et dans la bande globale), le taux de détection augmente avec le niveau de la décomposition. Analysons à présent le cas d'un ordre de prédiction *variable*, fonction de la profondeur. On considère ici le cas du signal CNMR1. L'ordre est fixé à $p_0 = 640$ au niveau $i = 0$ (signal original). Au niveau $i = 1$, l'ordre utilisé dans chacune des deux bandes est $p_1 = p_0/2 = 320$. En règle générale, l'ordre de prédiction dans les bandes du niveau $i$ est $p_i = 640/2^i$, ce qui donne un ordre total de 640 sur l'ensemble des ces bandes. Ainsi, on arrive à $p_4 = 40$ ($d = 16$). Le nombre total de modes détectés, relativement à la composition théorique, augmente de 15 (niveau 0) à 19 (niveau 4), comme le montre la figure 4.6. Par conséquent, le taux de

| Niveau | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Facteur de décimation | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| SVD-HOYW | 45–5 | 75–6 | 87–9 | 92–11 | 94–23 |
| KT | 25–4 | 57–5 | 78–7 | 90–4 | 90–6 |

TABLE 4.5 – Nombre de composantes bien estimées et parasites en fonction du facteur de décimation. Signal CNMR2.

détection augmente aussi avec un ordre de prédiction variable. Il faut, bien sûr, pour cela utiliser un ordre suffisamment grand au niveau 0, mais ceci entraîne des coûts de calcul importants aux premiers niveaux de la décomposition, situation que l'on cherche justement à éviter.

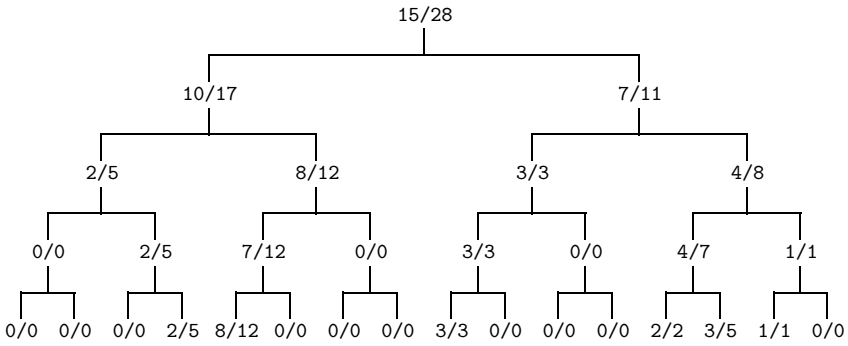



FIGURE 4.6 – Nombre de raies détectées, relativement au nombre théorique, obtenu en utilisant un ordre de prédiction variable.

L'attribution des ordres de prédiction entre différents noeuds d'un étage de la décomposition par la règle précédente (division par le nombre de bandes) n'est, bien sûr, pas optimale. L'idéal serait d'utiliser un ordre plus important dans les bandes présentant des problèmes de résolution dynamique et fréquentielle et un ordre plus faible dans les bandes vides. Un tel critère d'attribution peut justement être obtenu grâce à la décomposition adaptative. Il peut être formulé comme suit. On se fixe un ordre de prédiction, arbitrairement faible, à utiliser pour chacun des signaux en sous-bandes, quel que soit le niveau de la décomposition. Le découpage adaptatif s'arrêtera sur les noeuds où cet ordre « convient » à la complexité rencontrée. Si cet ordre n'est pas suffisant pour un noeud donné, la décomposition continue. Par exemple, sur la figure 4.6, les noeuds (3,0), (3,3) et (3,5) auraient pu ne pas être décomposés puisqu'ils ne contiennent aucune composante. Dans ce cas, au niveau 4, on aurait eu 10 bandes au lieu de 16 et l'attribution des ordres de prédiction aurait été mieux effectuée.

## 4.6 Décomposition adaptative

L'approche adaptative évite le choix de la profondeur du découpage en ajustant cette dernière au contenu spectral de chaque bande. Les seuls paramètres de la technique adaptative sont

donc le filtre de décimation et l'ordre de prédiction, arbitrairement faible, à utiliser à tous les niveaux de la décomposition. On considère ici les deux règles d'arrêt retenues dans le chapitre précédent : le test de platitude spectrale des résidus (*règle 1*) et le critère MDL (*règle 2*). Concernant le test de platitude de la DSP, il faut fixer *a priori* le taux de fausses alarmes. Sur les signaux présentés, on n'a pas observé de grande incidence du choix de ce dernier sur la décomposition sous réserve de le choisir entre 1% et 10%. Nous l'avons alors fixé à 1%.

### 4.6.1 Le signal CNMR1

Le tableau 4.6 montre les résultats de l'estimation obtenus avec une décomposition adaptative en sous-bandes utilisant les deux règles d'arrêt. L'ordre de prédiction, identique dans chaque bande, est fixé comme précédemment à $p = 20$. La comparaison entre les deux approches est faite sur la base du taux de détection et du nombre de bandes finales (la décomposition est arrêtée volontairement au niveau $i = 9$ ou $d = 512$).

| | | Modes détectés | | | Sous-bandes | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Règle | Méthode | Corrects | Parasites | Total | Arrêtées | Décomposables | Total |
| 1 | SVD-HOYW | 28/28 | 0 | 28 | 40 | 0 | 40/512 |
| | KT | 28/28 | 0 | 28 | 52 | 0 | 52/512 |
| 2 | SVD-HOYW | 28/28 | 0 | 28 | 57 | 22 | 79/512 |
| | KT | 28/28 | 0 | 28 | 35 | 24 | 59/512 |

TABLE 4.6 – Résultats de la décomposition adaptative du signal CNMR1.

Du point de vue des bonnes détections et des raies parasites, les approches aboutissent au même résultat : toutes les composantes théoriques sont détectées sans aucune fausse détection. En revanche, le nombre de noeuds décomposables est nul avec la *règle 1*, alors qu'avec la *règle 2*, il est de 22 pour la méthode SVD-HOYW et de 24 pour KT. Concernant le nombre de bande terminales, il est entre 6 et 12 fois plus faible relativement à une décomposition uniforme réalisée avec $d = 512$. De plus, ce nombre est plus faible avec la règle proposée. Enfin, à titre de comparaison, si l'on prend la méthode SVD-HOYW avec la règle proposée, le nombre de bandes finales est de 40. Etant donné que l'ordre utilisé dans chacune des sous-bandes est $p = 20$, l'ordre correspondant dans la bande globale est $p = 800$, qui n'est d'ailleurs pas suffisant pour détecter tous les modes du signal original (cf. tableau 4.4).

Les arbres de décomposition obtenus avec les deux approches adaptatives et une estimation par la méthode SVD-HOYW sont représentés sur les figures 4.7 et 4.8. Globalement, la *règle 1* assure un meilleur découpage de l'axe fréquentiel et arrête la décomposition à un niveau bien plus faible. De plus, les résidus d'estimation sont meilleurs (voir aussi la figure 4.9).
Grâce à la décomposition adaptative, nous avons pu réaliser une attribution adaptée de l'ordre de prédiction en fonction du contenu spectral de chaque bande. En effet, les figures

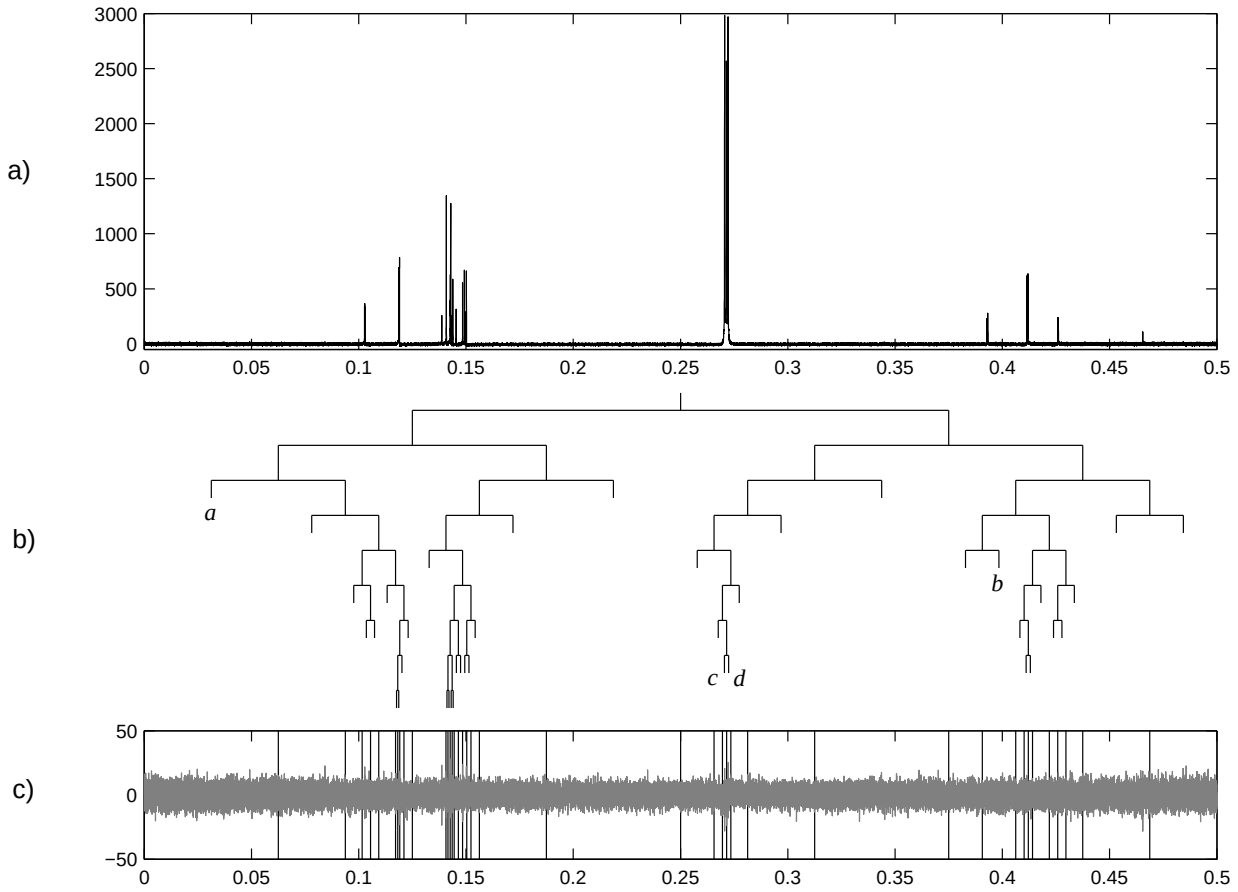



FIGURE 4.7 – Décomposition adaptative réalisée sur le signal CNMR1 en utilisant la *règle 1* : (a) signal, (b) arbre de décomposition et (c) résidus en sous-bandes.

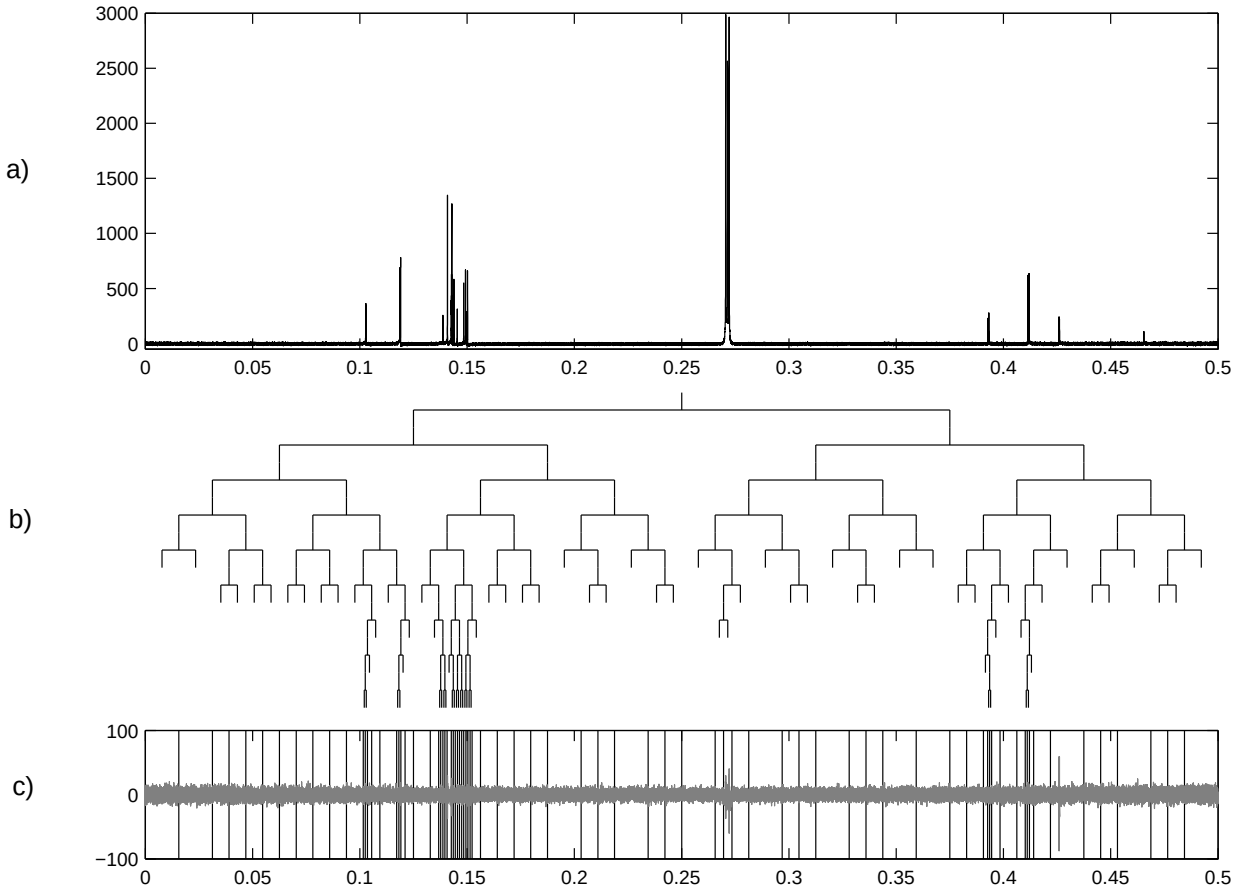



FIGURE 4.8 – Décomposition adaptative réalisée sur le signal CNMR1 en utilisant la *règle 2* : (a) signal, (b) arbre de décomposition et (c) résidus en sous-bande.

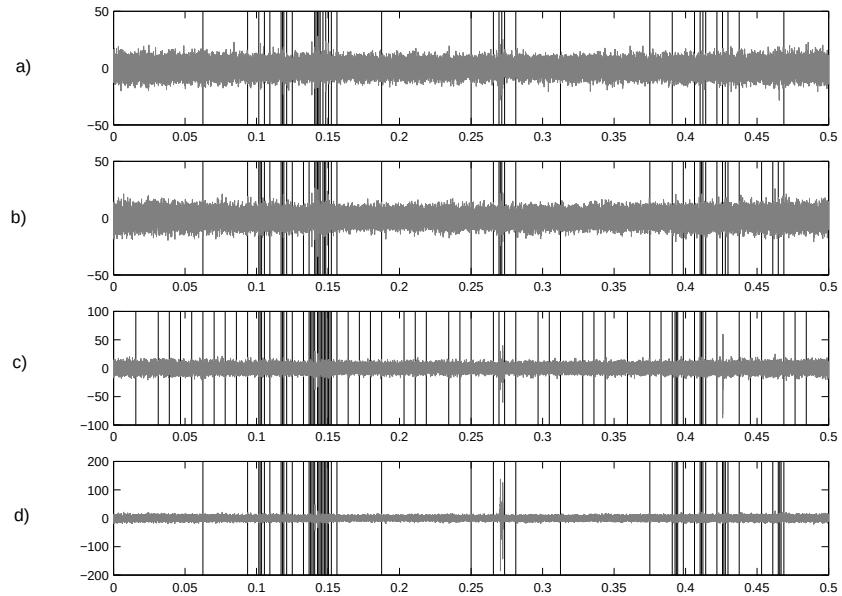



FIGURE 4.9 – Comparaison des résidus obtenus par une décomposition en sous-bandes adaptative du signal CNMR1. Méthode (a) SVD-HOYW et *règle 1* ; (b) KT et *règle 1* ; (c) SVD-HOYW et *règle 2* ; (d) KT et *règle 2*.

4.7 et 4.8 montrent que le même ordre est utilisé dans des bandes de largeurs différentes. Cet ajustement de l'ordre n'aurait pas pu se faire simplement avec l'approche uniforme. La figure 4.10 montre différentes situations où la décomposition adaptative est stoppée. Les bandes représentées correspondent aux branches de l'arbre de la figure 4.7 numérotées de *(a)* à *(d)*. La position de la bande passante du filtre de décimation est représentée par des pointillés. Le signal de la figure 4.10a ne contient aucun mode et est proche d'un bruit blanc (selon la mesure utilisée). Celui de la figure 4.10b contient deux modes. Ces derniers étant bien estimés, la séquence de résidus est pratiquement blanche (cf. figure 4.7c, bande *(b)*). Par conséquent, la décomposition du noeud correspondant est arrêtée. Les deux dernières figures présentent deux sous-bandes voisines contenant chacune deux modes. Dans la première, les modes sont à l'intérieur de la bande passante du filtre, par conséquent aucun des deux n'est rejeté. Par contre, dans la bande (8,139), la première composante apparaît dans la bande de transition du filtre et elle est donc rejetée. La mesure de platitude spectrale étant appliquée uniquement dans la bande passante, elle indique que les résidus présentent une DSP pratiquement plate et la décomposition est arrêtée.

### 4.6.2 Le signal CNMR2

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la décomposition adaptative, reposant sur la *règle 1*, couplée avec une estimation par la méthode SVD-HOYW surpasse l'approche adaptative basée sur la *règle 2* et l'approche uniforme, en termes de nombre de bandes finales. Pour montrer son intérêt du point de vue du taux de détection, on utilise ici le signal CNMR2, qui est de bien plus grande complexité.

Les résultats des deux approches adaptatives appliquées à ce signal sont présentés dans le tableau 4.7. Ils ont été obtenus en utilisant le même ordre de prédiction que lors de la décomposition uniforme ($p = 60$). La décomposition est arrêtée au niveau $i = 8$ ($d = 256$). On constate que, d'une part, la décomposition adaptative basée sur la *règle 1* est meilleure que celle utilisant la *règle 2*, que ce soit du point de vue du taux de détection, du nombre de composantes parasites ou du nombre de bandes finales : à la fin de la décomposition, la première approche débouche sur seulement 2 ou 3 noeuds décomposables, alors que la deuxième en produit 44 ou 60, selon la méthode d'estimation utilisée. D'autre part, une comparaison avec les résultats de la décomposition uniforme (tableau 4.5, $d = 256$) montre une réduction importante du nombre de raies parasites. De plus, la complexité est également diminuée puisque la méthode adaptative (SVD-HOYW et *règle 1*) utilise un ordre $p = 60$ sur, en tout, 89 bandes visitées alors que l'approche uniforme utilise le même ordre sur 256 bandes.

Le choix de l'ordre de prédiction $p = 60$ pourrait sembler trop élevé, en vue du taux de décimation considéré. En fait, avec les approches adaptatives, nous avons observé qu'un ordre $p = 40$ était suffisant pour avoir exactement les mêmes taux de détections que ceux

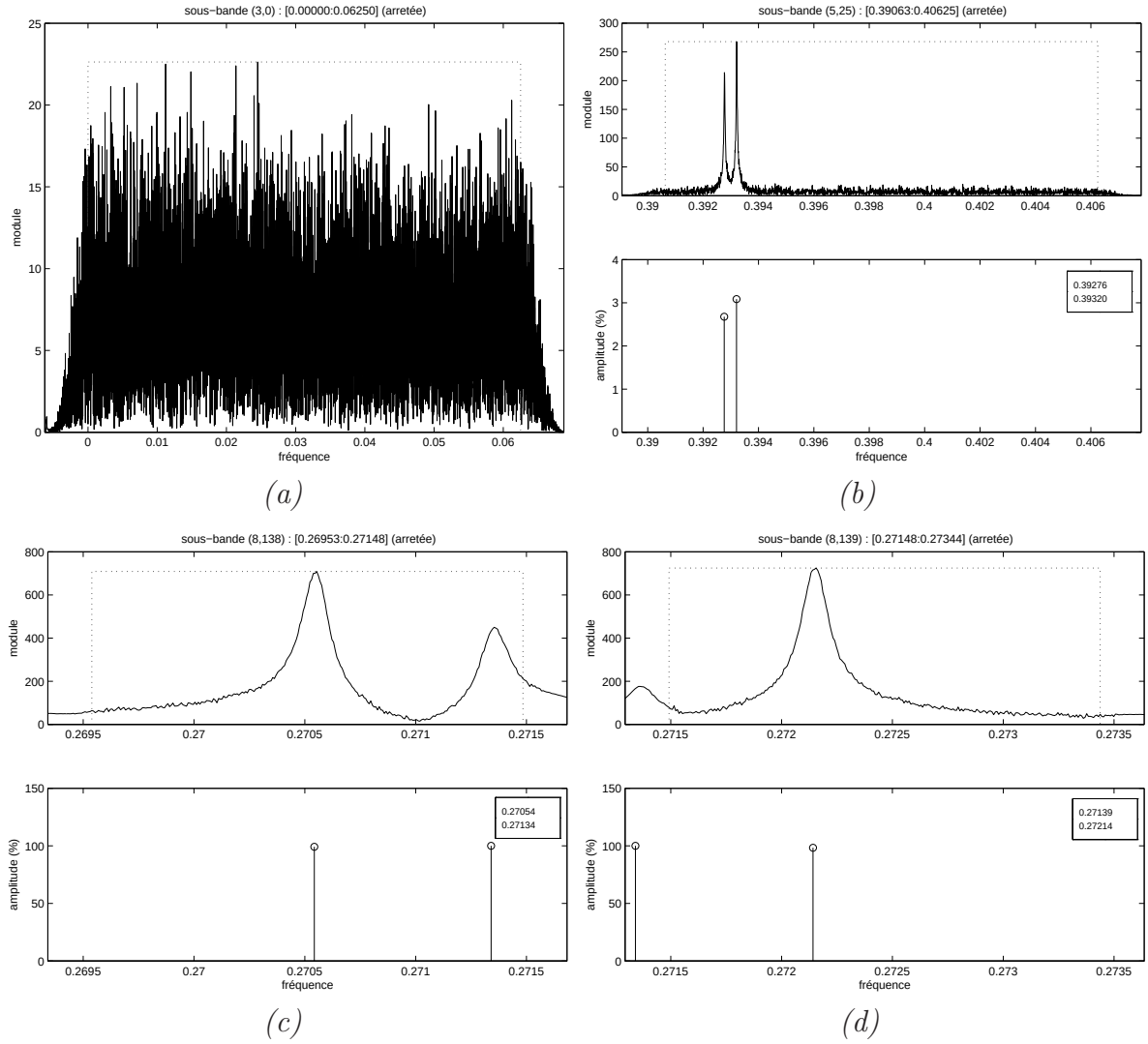



FIGURE 4.10 – Résultats obtenus sur certaines sous-bandes du signal CNMR1 par l'approche SVD-HOYW et le test de blancheur.

| Règle | Méthode | Modes détectés | | | Sous-bandes | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Corrects | Parasites | Total | Arrêtées | Décomposables | Total |
| 1 | SVD-HOYW | 95/104 | 7 | 102 | 43 | 2 | 45/256 |
| | KT | 93/104 | 3 | 96 | 54 | 3 | 57/256 |
| 2 | SVD-HOYW | 94/104 | 14 | 108 | 18 | 60 | 78/256 |
| | KT | 90/104 | 4 | 94 | 28 | 44 | 72/256 |

TABLE 4.7 – Résultats de la décomposition adaptative du signal CNMR2.

montré dans le tableau 4.7, un nombre de raies parasites équivalent et un nombre de bandes finales légèrement plus élevé (56 au lieu de 45 avec SVD-HOYW et *règle 1*). Cet ordre n'était pas suffisant dans le cas de l'approche uniforme. Ceci nous a conduit finalement à choisir dans les deux cas $p = 60$, pour que la comparaison soit significative.

L'arbre de la décomposition adaptative (*règle 1*) obtenu avec la méthode SVD-HOYW est représenté sur la figure 4.11. Les résidus de l'estimation obtenus avec les deux techniques adaptatives sont montrés sur la figure 4.12. On remarque que la segmentation de l'axe fréquentiel est mieux réalisée avec la *règle 1* et que la DSP des résidus issus de cette approche est plus proche de celle d'un bruit blanc.

Les sous-bandes numérotées de *(a)* à *(e)* de la figure 4.11 sont représentées sur la figure 4.13. La bande (3,0) de la figure 4.13a montre que le signal correspondant contient deux artefacts introduits par le système de mesure. Les deux composantes sont néanmoins détectées mais assimilées à des raies parasites. Bien sûr, toutes les composantes parasites ne proviennent pas nécessairement du processus d'acquisition du signal RMN mais peuvent être introduites par la méthode d'estimation lorsque l'ordre de prédiction utilisé est important et/ou lorsque le critère de sélection de l'ordre du modèle surestime le nombre de composantes. Cela semble être le cas, par exemple, du signal représenté sur la figure 4.13c, où la composante parasite n'apparaît pas dans le spectre de la transformée de Fourier.

Les figures 4.13b et 4.13d montrent deux cas de non-détection de composantes. Le premier est dû à l'enchevêtrement des raies (fréquences très proches et facteurs d'amortissement élevés). De ce fait, aucune méthode d'estimation, parmi celles testées, ne parvient à les séparer. Dans le deuxième cas, il n'y a pas de problème de résolution fréquentielle mais un problème de résolution dynamique. En effet, le mode non détecté a une amplitude très faible relativement à celle de certains modes proches. Par ailleurs, le test de blancheur ayant échoué, cette bande est encore décomposable et le mode non détecté à ce niveau de la décomposition est détectable au niveau supérieur. Enfin, la figure 4.13e montre un exemple où le test de blancheur a échoué alors que le seul mode de la bande est détecté. Ceci est dû soit à une mauvaise estimation des paramètres du mode, soit au seuil de détection utilisé (dicté par le taux de fausses alarmes). Même si ce problème n'a pas de conséquence sur les performances de l'estimation, il peut néanmoins être évité en diminuant le taux de fausses alarmes.

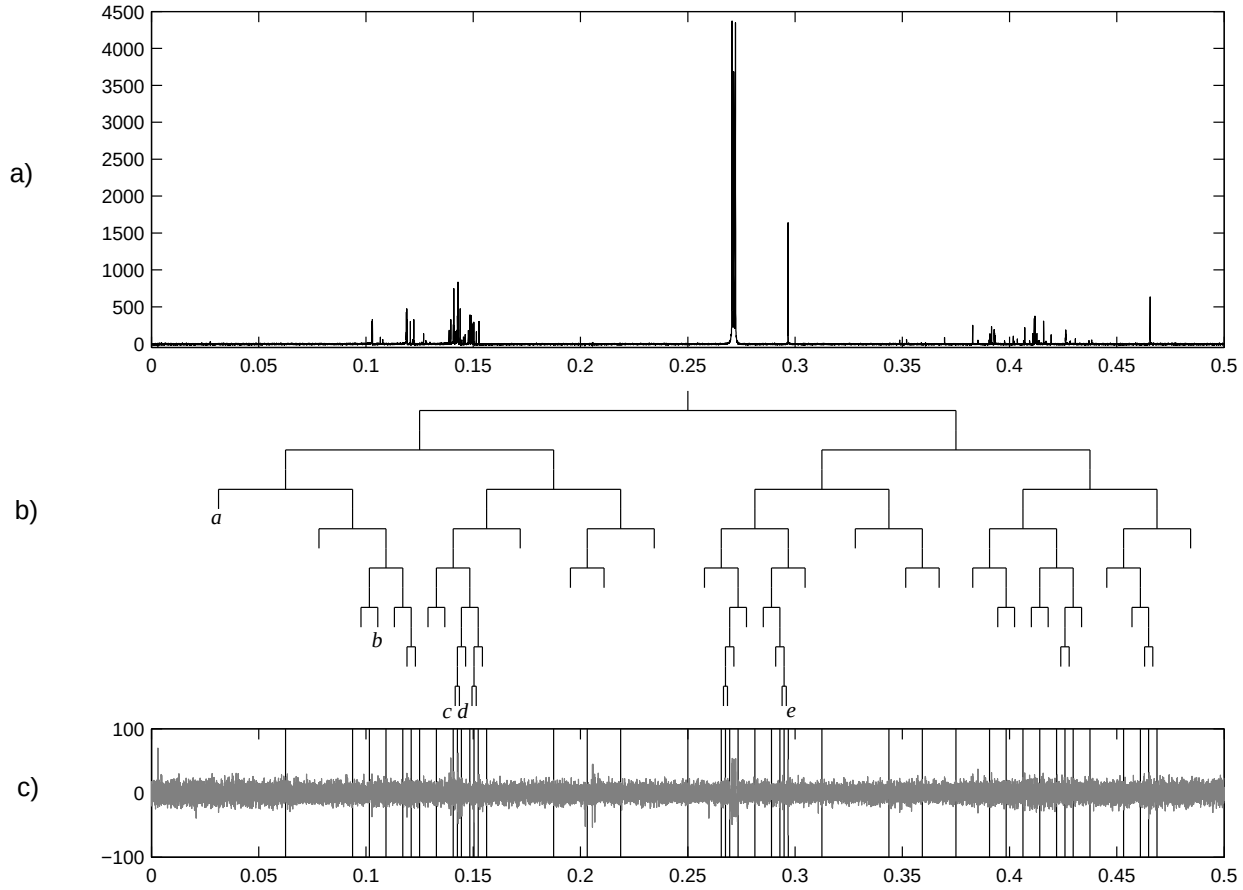



FIGURE 4.11 – Décomposition adaptative réalisée sur le signal CNMR2 en utilisant la *règle 1* : (a) signal, (b) arbre de décomposition et (c) résidus en sous-bande.

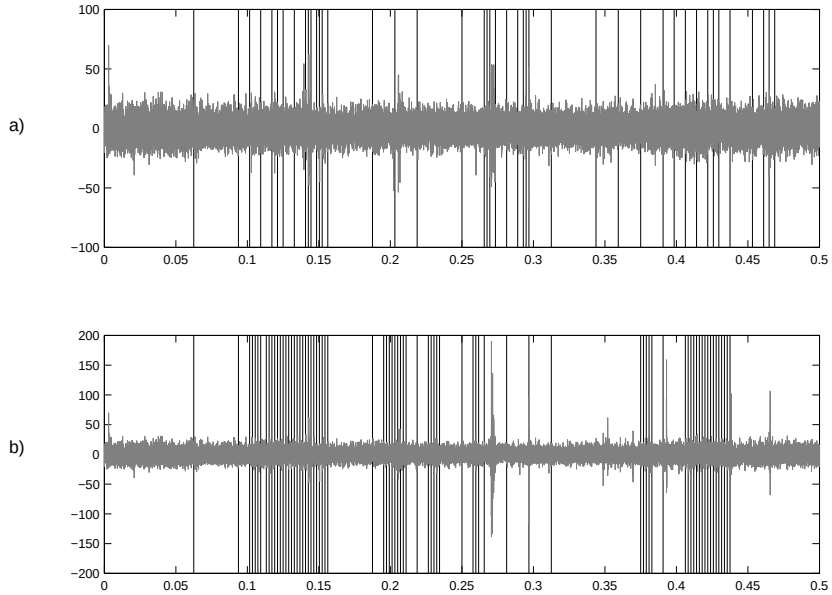



FIGURE 4.12 – Résidus de la décomposition en sous-bande adaptative du signal CNMR2 suivie d'une estimation par les méthodes (a) SVD-HOYW et *règle 1* et (b) SVD-HOYW et *règle 2*.

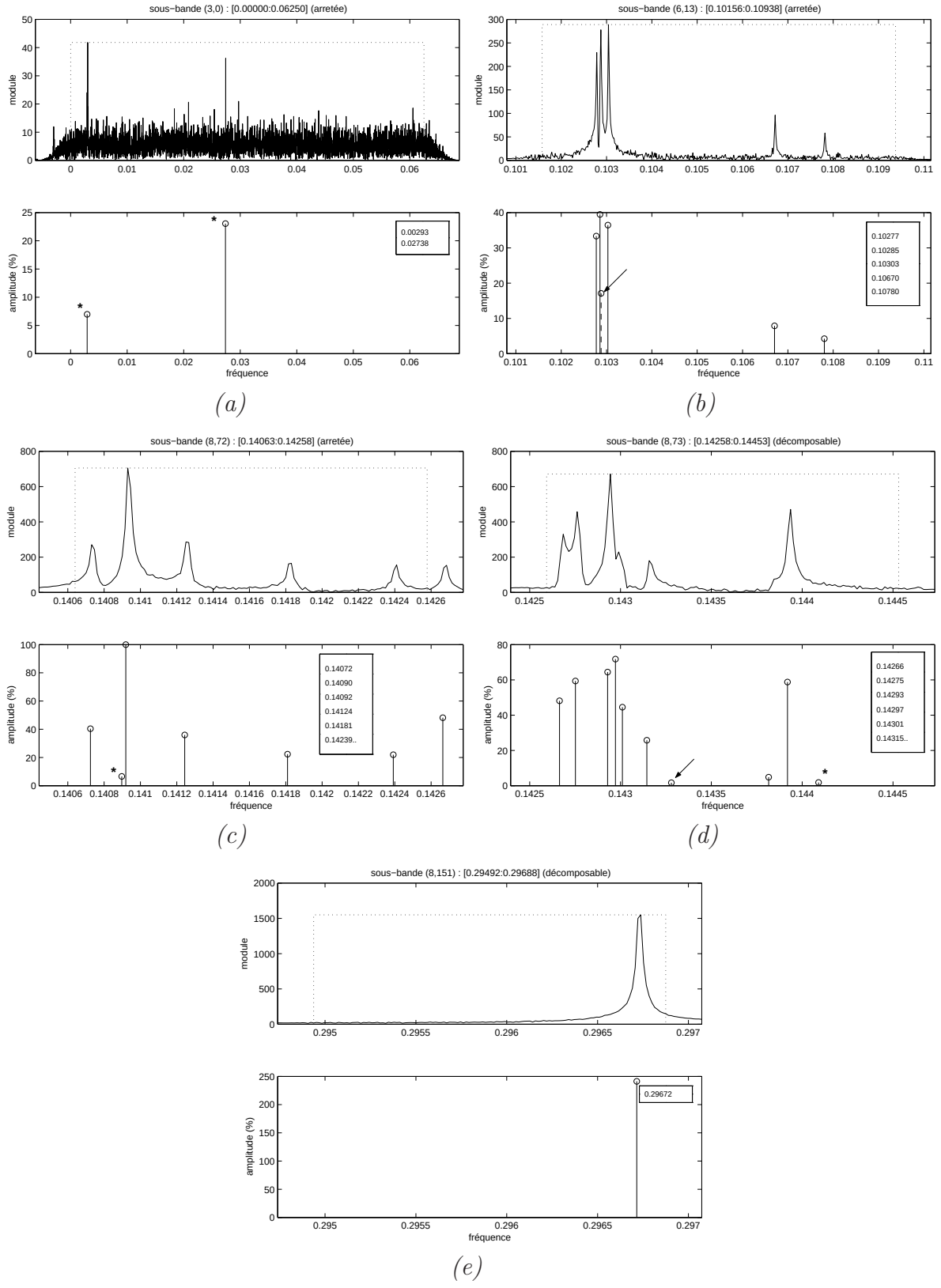



FIGURE 4.13 – Résultats obtenus sur certaines sous-bandes du signal CNMR2 par l'approche SVD-HOYW et le test de blancheur. Les astérisques (*) indiquent des composantes parasites et les flèches les raies théoriques non-détectées.

| | Théorique | | | Estimation | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Raie | $\delta$ (ppm) | $f$ | $I$ (%) | $f$ | $A$ (%) | $\alpha \times 10^{-4}$ | $\phi$ (deg) |
| – | – | – | – | 0.00293 | 6.97 | 1.88 | 172.66 |
| – | – | – | – | 0.02738 | 23.05 | 7.93 | -178.84 |
| 1 | 144.26 | 0.10277 | 32.05 | 0.10277 | 33.33 | 0.92 | 7.11 |
| 2 | 144.23 | 0.10286 | 24.45 | 0.10285 | 39.46 | 0.78 | 8.81 |
| 3 | 144.22 | 0.10288 | 17.10 | – | – | – | – |
| 4 | 144.06 | 0.10303 | 42.38 | 0.10303 | 36.45 | 0.77 | 2.62 |
| 5 | 142.64 | 0.10670 | 11.49 | 0.10670 | 7.89 | 0.71 | 6.27 |
| 6 | 142.25 | 0.10780 | 7.42 | 0.10780 | 4.24 | 0.79 | 7.79 |
| 7 | 141.71 | 0.10918 | 0.85 | – | – | – | – |
| 8 | 137.86 | 0.11882 | 50.00 | 0.11882 | 45.68 | 0.68 | 9.30 |
| 9 | 137.84 | 0.11894 | 24.45 | 0.11894 | 21.14 | 0.58 | 4.06 |
| 10 | 137.75 | 0.11905 | 50.38 | 0.11905 | 50.52 | 0.83 | -6.87 |
| 11 | 137.78 | 0.11908 | 34.20 | 0.11908 | 38.47 | 0.53 | 12.73 |
| 12 | 137.71 | 0.11919 | 17.42 | 0.11919 | 16.41 | 0.61 | -2.60 |
| 13 | 137.11 | 0.12072 | 43.37 | 0.12071 | 35.51 | 0.78 | 8.03 |
| 14 | 136.70 | 0.12177 | 7.42 | 0.12177 | 6.09 | 0.81 | 20.28 |
| 15 | 136.42 | 0.12228 | 48.70 | 0.12228 | 43.73 | 0.72 | 7.04 |
| 16 | 136.35 | 0.12261 | 7.03 | 0.12262 | 4.25 | 1.12 | -30.21 |
| 17 | 134.98 | 0.12599 | 3.52 | 0.12599 | 0.59 | 0.61 | -5.47 |
| 18 | 134.60 | 0.12685 | 19.70 | 0.12685 | 18.68 | 0.92 | 6.69 |
| 19 | 134.28 | 0.12787 | 7.42 | 0.12786 | 4.37 | 0.83 | 14.06 |
| 20 | 133.46 | 0.12981 | 2.54 | 0.12980 | 1.66 | 0.43 | 90.96 |
| 21 | 129.92 | 0.13877 | 25.19 | 0.13877 | 24.90 | 0.93 | 13.68 |
| 22 | 129.61 | 0.13955 | 48.70 | 0.13955 | 48.51 | 0.90 | 10.71 |
| 23 | 129.13 | 0.14064 | 1.70 | – | – | – | – |
| 24 | 129.11 | 0.14073 | 43.37 | 0.14072 | 40.40 | 0.79 | 15.33 |
| – | – | – | – | 0.14090 | 6.57 | 0.18 | -97.12 |
| 25 | 129.06 | 0.14092 | 100.00 | 0.14092 | 100.00 | 0.77 | 11.02 |
| 26 | 128.94 | 0.14124 | 39.40 | 0.14124 | 35.96 | 0.67 | 10.97 |
| 27 | 128.72 | 0.14181 | 24.45 | 0.14181 | 22.36 | 0.72 | 10.06 |
| 28 | 128.47 | 0.14239 | 22.98 | 0.14239 | 21.92 | 0.75 | 12.16 |
| 29 | 128.37 | 0.14267 | 50.86 | 0.14266 | 48.16 | 0.71 | 7.86 |
| 30 | 128.31 | 0.14275 | 64.11 | 0.14275 | 59.37 | 0.68 | 4.60 |
| 31 | 128.25 | 0.14293 | 100.00 | 0.14293 | 64.41 | 0.67 | 7.11 |
| 32 | 128.23 | 0.14297 | 22.98 | 0.14297 | 71.77 | 0.96 | -36.28 |
| 33 | 128.23 | 0.14301 | 24.45 | 0.14301 | 44.52 | 0.97 | 39.01 |
| 34 | 128.15 | 0.14315 | 25.19 | 0.14315 | 25.76 | 0.75 | 9.45 |
| 35 | 128.07 | 0.14326 | 1.70 | – | – | – | – |
| 36 | 127.88 | 0.14382 | 5.08 | 0.14382 | 4.81 | 0.18 | 11.73 |
| 37 | 127.86 | 0.14392 | 64.11 | 0.14392 | 58.77 | 0.73 | 4.13 |
| – | – | – | – | 0.14409 | 1.83 | 0.21 | -98.42 |
| 38 | 127.62 | 0.14464 | 7.03 | 0.14464 | 1.19 | 0.63 | -31.82 |
| 39 | 127.55 | 0.14469 | 7.42 | 0.14468 | 9.96 | 0.99 | -18.49 |
| 40 | 127.24 | 0.14547 | 17.10 | 0.14547 | 14.05 | 0.84 | 4.38 |
| 41 | 126.95 | 0.14628 | 17.42 | 0.14628 | 13.45 | 0.76 | 6.21 |
| 42 | 126.37 | 0.14774 | 24.45 | 0.14774 | 23.35 | 0.91 | 11.75 |
| 43 | 126.06 | 0.14848 | 50.38 | 0.14848 | 43.71 | 0.77 | 7.68 |
| 44 | 126.03 | 0.14851 | 7.42 | 0.14851 | 13.19 | 0.58 | -1.03 |
| 45 | 125.97 | 0.14861 | 42.38 | 0.14861 | 39.36 | 0.75 | 7.78 |
| 46 | 125.81 | 0.14902 | 5.08 | 0.14902 | 7.16 | 0.86 | -15.49 |
| 47 | 125.80 | 0.14907 | 48.70 | 0.14906 | 46.31 | 0.73 | 10.66 |
| 48 | 125.72 | 0.14931 | 34.20 | 0.14931 | 30.14 | 0.75 | 4.31 |
| 49 | 125.63 | 0.14955 | 11.49 | 0.14955 | 1.86 | 0.56 | -80.97 |

*suite sur la page suivante*

*suite de la page précédente*

| Raie | $\delta$ (ppm) | $f$ | $I$ (%) | $f$ | $A$ (%) | $\alpha \times 10^{-4}$ | $\phi$ (deg) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 125.62 | 0.14956 | 0.85 | – | – | – | – |
| 51 | 125.59 | 0.14958 | 32.05 | 0.14959 | 41.79 | 0.85 | -3.59 |
| 52 | 125.45 | 0.14996 | 7.42 | 0.14996 | 7.28 | 0.48 | -10.58 |
| 53 | 125.38 | 0.15006 | 43.37 | 0.15006 | 37.04 | 0.74 | 4.37 |
| – | – | – | – | 0.15021 | 4.59 | 0.20 | -116.98 |
| 54 | 125.33 | 0.15028 | 50.00 | 0.15028 | 49.35 | 0.73 | 4.62 |
| 55 | 125.23 | 0.15052 | 3.52 | – | – | – | – |
| 56 | 124.85 | 0.15146 | 24.45 | 0.15146 | 20.91 | 0.80 | -0.43 |
| 57 | 124.37 | 0.15268 | 42.38 | 0.15268 | 36.95 | 0.79 | 4.68 |
| – | – | – | – | 0.25985 | 2.33 | 0.51 | -170.69 |
| 58 | 77.30 | 0.27064 | | 0.27063 | 1898.45 | 2.78 | 17.82 |
| – | – | – | – | 0.27086 | 69.25 | 3.20 | 40.23 |
| 59 | 77.00 | 0.27143 | | 0.27143 | 1899.61 | 3.29 | 16.47 |
| 60 | 76.70 | 0.27223 | | 0.27223 | 1854.96 | 2.75 | 14.87 |
| 61 | 67.60 | 0.29672 | | 0.29672 | 241.31 | 0.77 | 21.43 |
| 62 | 46.48 | 0.34875 | 7.67 | 0.34876 | 4.02 | 1.16 | 35.59 |
| 63 | 45.49 | 0.35112 | 0.85 | – | – | – | – |
| 64 | 45.12 | 0.35200 | 10.72 | 0.35200 | 6.39 | 0.89 | 25.80 |
| 65 | 38.13 | 0.36970 | 11.49 | 0.36971 | 8.68 | 1.07 | 27.34 |
| 66 | 32.87 | 0.38280 | 42.38 | 0.38280 | 36.18 | 0.92 | 27.11 |
| 67 | 31.98 | 0.38528 | 7.67 | 0.38529 | 3.83 | 0.79 | 20.63 |
| 68 | 30.26 | 0.38985 | 0.85 | – | – | – | – |
| 69 | 29.88 | 0.39046 | 7.67 | 0.39046 | 6.64 | 1.08 | 52.63 |
| 70 | 29.67 | 0.39087 | 21.45 | 0.39087 | 18.54 | 0.88 | 31.03 |
| 71 | 29.37 | 0.39158 | 43.37 | 0.39158 | 34.67 | 0.97 | 28.74 |
| 72 | 28.89 | 0.39283 | 32.05 | 0.39282 | 29.73 | 1.11 | 34.46 |
| 73 | 28.85 | 0.39303 | 24.45 | 0.39303 | 19.59 | 1.01 | 31.64 |
| 74 | 28.72 | 0.39326 | 17.10 | 0.39326 | 13.01 | 1.03 | 30.75 |
| 75 | 26.98 | 0.39765 | 7.42 | 0.39764 | 4.59 | 1.45 | 75.65 |
| 76 | 25.35 | 0.40173 | 21.19 | 0.40172 | 17.19 | 1.01 | 36.23 |
| 77 | 25.30 | 0.40202 | 7.67 | 0.40201 | 3.88 | 1.31 | 63.41 |
| 78 | 24.65 | 0.40365 | 11.49 | 0.40365 | 7.75 | 0.95 | 30.38 |
| 79 | 23.47 | 0.40650 | 7.67 | 0.40649 | 5.29 | 1.10 | 67.86 |
| 80 | 23.24 | 0.40707 | 43.37 | 0.40707 | 34.57 | 1.02 | 27.45 |
| 81 | 22.38 | 0.40924 | 1.70 | – | – | – | – |
| 82 | 22.34 | 0.40935 | 7.67 | 0.40935 | 3.93 | 0.95 | 48.60 |
| 83 | 21.75 | 0.41079 | 21.45 | 0.41079 | 18.67 | 0.94 | 38.31 |
| 84 | 21.46 | 0.41151 | 50.00 | 0.41151 | 47.14 | 0.87 | 31.20 |
| 85 | 21.41 | 0.41164 | 24.45 | 0.41164 | 22.74 | 0.94 | 29.15 |
| 86 | 21.33 | 0.41182 | 50.38 | 0.41182 | 45.78 | 0.83 | 28.15 |
| 87 | 21.27 | 0.41197 | 34.20 | 0.41197 | 30.89 | 0.84 | 25.02 |
| 88 | 21.20 | 0.41215 | 17.42 | 0.41215 | 13.06 | 0.72 | 21.44 |
| 89 | 20.99 | 0.41278 | 19.70 | 0.41278 | 16.54 | 0.98 | 25.44 |
| 90 | 20.67 | 0.41351 | 7.42 | 0.41349 | 3.49 | 1.08 | 58.87 |
| 91 | 20.54 | 0.41382 | 7.03 | 0.41381 | 2.42 | 0.59 | 47.72 |
| 92 | 19.71 | 0.41587 | 48.70 | 0.41587 | 44.21 | 0.93 | 29.33 |
| 93 | 19.30 | 0.41700 | 7.67 | 0.41700 | 3.00 | 1.00 | 34.65 |
| 94 | 18.33 | 0.41938 | 21.45 | 0.41938 | 16.09 | 0.95 | 27.13 |
| 95 | 15.88 | 0.42600 | 17.10 | 0.42600 | 16.68 | 1.28 | 48.58 |
| 96 | 15.65 | 0.42609 | 24.45 | 0.42609 | 17.94 | 1.35 | 30.43 |
| 97 | 15.61 | 0.42618 | 32.05 | 0.42618 | 26.35 | 1.17 | 20.78 |
| 98 | 15.28 | 0.42698 | 3.52 | 0.42698 | 0.99 | 0.05 | 150.44 |
| 99 | 14.86 | 0.42811 | 7.42 | 0.42811 | 2.69 | 1.35 | 48.53 |
| 100 | 14.78 | 0.42837 | 7.42 | 0.42837 | 2.78 | 0.87 | 1.75 |

*suite sur la page suivante*

*suite de la page précédente*

| Raie | $\delta$ (ppm) | $f$ | $I$ (%) | $f$ | $A$ (%) | $\alpha \times 10^{-4}$ | $\phi$ (deg) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 101 | 13.86 | 0.43065 | 11.49 | 0.43065 | 7.21 | 1.06 | 30.94 |
| 102 | 11.33 | 0.43699 | 7.67 | 0.43698 | 3.24 | 0.89 | 65.95 |
| 103 | 10.82 | 0.43827 | 10.72 | 0.43827 | 5.93 | 0.90 | 34.22 |
| 104 | 0.00 | 0.46550 | 94.63 | 0.46550 | 86.69 | 0.85 | 28.03 |

TABLE 4.8: Comparaison entre la composition théorique et le résultat de l'estimation en sous-bande du signal CNMR2. Méthode SVD-HOYW et test de blancheur.

Pour terminer l'analyse de ce signal, le tableau 4.8 présente la liste des paramètres théoriques du signal CNMR2 et les paramètres estimés par la méthode SVD-HOYW. On peut remarquer que la fréquence des modes détectés est généralement très bien estimée par la méthode proposée. Concernant les modes manqués, deux situations peuvent être distinguées : non-détection de 8 pics d'amplitudes très faibles (généralement inférieures à 2%) et non-séparation du mode $R_3$ discuté précédemment (figure 4.13b). Les composantes dites parasites (introduites soit par le système de mesure soit par la méthode d'estimation elle-même) peuvent être éliminées en tenant compte soit de la linéarité de phase dans le cas de signaux RMN bruts soit de la propriété de phase nulle si la correction de phase est effectuée. En effet, quoique, dans notre cas, la correction de phase du signal CNMR2 soit réalisée sommairement, on peut clairement observer que la plupart des composantes parasites ont une phase très éloignée de la moyenne de celles des modes réels. Cette propriété peut bien sûr être utilisée comme une information *a priori* pour la synthèse d'algorithmes d'estimation plus robustes aux raies parasites. Toujours du point de vue spectroscopique, les raies parasites peuvent également être distinguées en considérant les facteurs d'amortissement correspondants. En effet, en RMN du carbone-13, ces facteurs sont généralement dans la même gamme, exceptés ceux du solvant (raies $R_{58}$, $R_{59}$ et $R_{60}$). Ainsi, les composantes ayant un facteur d'amortissement trop faible ou trop élevé peuvent être éliminées.

Enfin, concernant les amplitudes, la méthode d'estimation donne des résultats corrects pour les modes éloignés des fréquences manquées. En effet, lorsqu'un mode est manqué, l'amplitude des modes qui se trouvent au voisinage a tendance à augmenter. C'est le cas, par exemple, des raies $R_2$ et $R_3$. Même lorsque des modes très proches sont correctement détectés, l'estimation des amplitudes se détériore tout de même en raison de la trop grande proximité. C'est le cas des raies $R_{31}$, $R_{32}$ et $R_{33}$ qui appartiennent à la bande représentée sur la figure 4.13d.

## 4.7 Réduction du nombre d'accumulations

Les avantages d'une analyse en sous-bandes observés précédemment tendent à suggérer que l'on peut réduire le nombre d'accumulations sans pour autant perdre en termes de performances. Pour nos essais, on dispose d'une bibliothèque de 9 signaux appelés CNMR3($N_a$).

Ils correspondent à la même molécule et ont une longueur de 64k échantillons chacun mais diffèrent par le nombre d'accumulations utilisé ($N_a$ = 1, 4, 16, 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048). La molécule analysée ainsi que les correspondances modes–liaisons chimiques sont présentées dans l'annexe D.2. La figure 4.14 représente le spectre d'absorption de chacun des signaux. On constate une amélioration progressive du RSB de chaque composante. Ceci se fait bien sûr au détriment d'un temps d'acquisition plus important. Les trois lignes qui apparaissent dans l'intervalle $[0, 0.1]$ et visibles sur tous les spectres représentent en fait trois triplets (9 composantes) et correspondent au solvant (pyricine D5). Ces modes ne nous intéressent pas dans le cadre de cette analyse, puisque leur position est connue pour le chimiste et que, de toute façon, celle-ci est facile à déterminer. En revanche, les deux composantes, d'amplitude plus faible, apparaissant dans le même intervalle et visibles à partir de $N_a = 256$ sont importantes pour caractériser la molécule.

L'analyse de l'ensemble de ces signaux est effectuée en utilisant la décomposition en sous-bandes adaptative fondée sur le test de platitude spectrale des résidus (*règle 1*) et l'estimation par la méthode SVD-HOYW ($p = 50$ dans toutes les branches de l'arbre). Comme dans le cas des deux signaux précédents, un seul découpage est suffisant pour avoir accès à tous les paramètres du signal, la bande d'intérêt étant limitée à $[-0.25, 0.25]$. Nous proposons une analyse des résultats à un niveau de décomposition maximal $i = 6$ (correspondant à $d = 64$ pour la décomposition uniforme). Au delà de $i = 6$, le nombre de détections reste inchangé. En terme de détection, les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.9. On constate que le taux de détection est nul lorsque le nombre d'accumulations est inférieur à 16. Ceci est simplement dû aux erreurs d'estimation, la région d'inclusion étant définie autour des fréquences théoriques avec une erreur maximale de $\Delta f = 10^{-4}$. La méthode proposée permet de détecter toutes les composantes à partir de $N_a = 512$, alors qu'avec les méthodes utilisées traditionnellement en RMN, il faut un minimum de 2048 accumulations pour la molécule considérée. Le gain obtenu ici est donc d'un facteur 4, ce qui représente dans ce cas une baisse du temps d'acquisition de 1 heure à 15 minutes. En général, en RMN du $^{13}$C, le temps d'acquisition dure parfois plus de 36 heures lorsque les produits analysés sont en faible concentration. Dans pareils situations, le gain en temps n'est pas négligeable. Enfin, il faut préciser que si le critère du cercle n'est pas utilisé pour sélectionner les pôles du signal, l'ensemble des raies théoriques est détecté pour $N_a = 256$, mais ceci s'accompagne d'un nombre de raies parasites important.

| Accumulations | 1 | 4 | 16 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Raies détectées | 0 | 0 | 0 | 17 | 32 | 42 | 45 | 45 | 45 |
| Raies manquées | 45 | 45 | 45 | 28 | 13 | 3 | 0 | 0 | 0 |

TABLE 4.9 – Nombre de détections et de manques à la détection en fonction du nombre d'accumulations.

La liste des fréquences estimées par l'approche proposée est présentée dans le tableau 4.10.

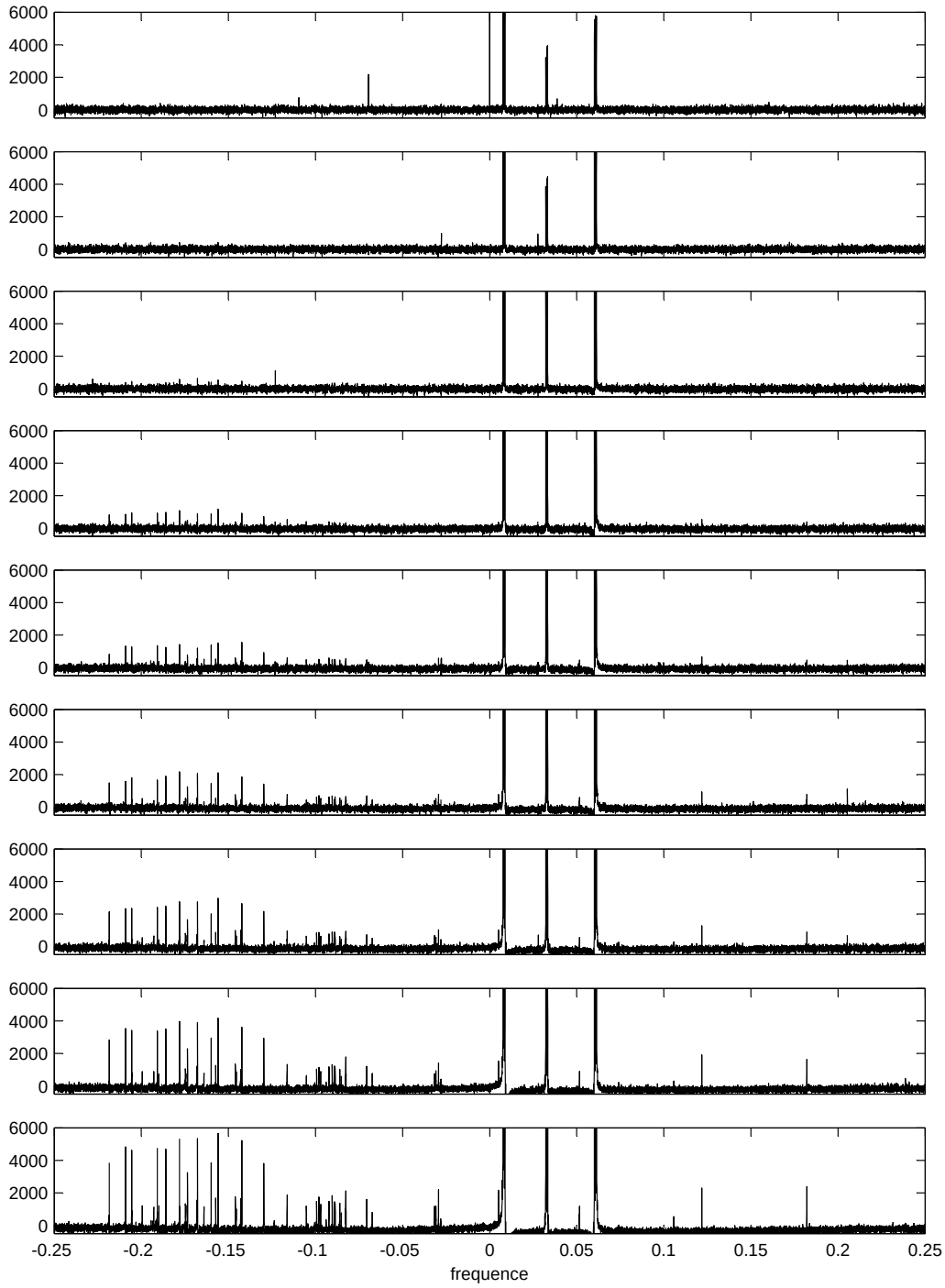



FIGURE 4.14 – Spectre des signaux CNMR3($N_a$), obtenus avec différents nombres d'accumulations. Du haut vers le bas, le nombre d'accumulations est respectivement de 1, 4, 16, 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048.

Hormis les trois composantes non-détectées pour $N_a = 256$, toutes les fréquences sont correctement estimées avec une erreur moyenne de $4.10^{-5}$. Concernant plus particulièrement les amplitudes, les deux dernières colonnes de ce tableau montrent les résultats obtenus en utilisant 2048 accumulations d'un signal « quantitatif » correspondant à la molécule précédente. Dans une expérimentation quantitative, toutes les composantes du signal mesuré ont théoriquement la même amplitude. Dans le tableau 4.10, elles sont normalisées par rapport à celle de la première composante estimée. La première de ces deux colonnes indique une estimation effectuée dans les sous-bandes, le résultat est transformé vers la bande globale selon les relations (3.42) et (3.43). Les résultats affichés sur la deuxième sont obtenus directement dans la bande globale après une transformation des modes estimés en sous-bandes.

| | | Fréquences estimées en fonction de $N_a$ | | | | Analyse quantitative | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liaison | Théorie | 256 | 512 | 1024 | 2048 | $A$(%) SB | $A$(%) FB |
| C24/H24 | -0.21840 | -0.21837 | -0.21837 | -0.21837 | -0.21837 | 100.00 | 100.00 |
| C25/H25 | -0.20900 | -0.20902 | -0.20901 | -0.20901 | -0.20901 | 100.54 | 98.39 |
| C26/H26 | -0.20552 | -0.20553 | -0.20553 | -0.20552 | -0.20553 | 135.72 | 128.13 |
| C6/H6 | -0.19940 | -0.19942 | -0.19940 | -0.19939 | -0.19941 | 97.18 | 93.05 |
| C11/H11 | -0.19284 | -0.19279 | -0.19285 | -0.19285 | -0.19285 | 61.69 | 49.78 |
| C30/H30 | -0.19076 | -0.19079 | -0.19080 | -0.19080 | -0.19080 | 85.40 | 82.35 |
| C2/H2 | -0.18989 | -0.18985 | -0.18988 | -0.18985 | -0.18987 | 110.59 | 102.59 |
| C27/H27 | -0.18587 | -0.18588 | -0.18588 | -0.18588 | -0.18588 | 117.34 | 110.04 |
| C20 | -0.17812 | -0.17809 | -0.17809 | -0.17809 | -0.17809 | 130.29 | 132.26 |
| C15/H15+C21/H21 | -0.17454 | -0.17446 | -0.17442 | -0.17444 | -0.17442 | 147.98 | 157.20 |
| C29/H29 | -0.17348 | -0.17345 | -0.17345 | -0.17345 | -0.17345 | 100.50 | 100.91 |
| C22/H22 | -0.16807 | -0.16809 | -0.16811 | -0.16808 | -0.16808 | 88.18 | 50.26 |
| C7/H7+C10 | -0.16767 | -0.16769 | -0.16769 | -0.16768 | -0.16769 | 195.62 | 216.30 |
| C1/H1 | -0.16397 | -0.16406 | -0.16404 | -0.16401 | -0.16401 | 85.14 | 78.52 |
| C8 | -0.15986 | -0.15989 | -0.15988 | -0.15989 | -0.15989 | 111.82 | 112.12 |
| C18/H18 | -0.15721 | -0.15721 | -0.15724 | -0.15724 | -0.15724 | 123.39 | 94.79 |
| C14 | -0.15584 | -0.15585 | -0.15585 | -0.15585 | -0.15585 | 117.74 | 119.17 |
| C9/H9 | -0.14599 | -0.14602 | -0.14601 | -0.14601 | -0.14601 | 103.44 | 79.14 |
| C19/H19 | -0.14547 | -0.14548 | -0.14545 | -0.14547 | -0.14547 | 87.22 | 94.77 |
| C5/H5 | -0.14291 | -0.14288 | -0.14291 | -0.14291 | -0.14291 | 124.33 | 109.11 |
| C17 | -0.14223 | -0.14227 | -0.14227 | -0.14227 | -0.14227 | 126.26 | 125.65 |
| C4 | -0.12963 | -0.12963 | -0.12963 | -0.12963 | -0.12963 | 135.13 | 126.52 |
| A6 | -0.11619 | -0.11623 | -0.11626 | -0.11625 | -0.11625 | 105.47 | 67.88 |
| B5 | -0.10525 | -0.10517 | -0.10519 | -0.10521 | -0.10521 | 83.67 | 54.98 |
| A4 | -0.09928 | -0.09929 | -0.09930 | -0.09931 | -0.09930 | 122.88 | 65.45 |
| B4 | -0.09805 | -0.09806 | -0.09803 | -0.09803 | -0.09803 | 93.44 | 48.01 |
| C5 | -0.09693 | -0.09704 | -0.09699 | -0.09702 | -0.09701 | 118.51 | 63.34 |
| A2 | -0.09231 | -0.09226 | -0.09225 | -0.09227 | -0.09226 | 95.81 | 52.35 |
| C16/H16 | -0.09037 | -0.09037 | -0.09037 | -0.09036 | -0.09036 | 130.06 | 59.54 |
| B2 | -0.08914 | -0.08909 | -0.08910 | -0.08910 | -0.08910 | 109.65 | 53.08 |
| A3 | -0.08875 | -0.08870 | -0.08870 | -0.08870 | -0.08870 | 115.98 | 74.07 |
| A5 | -0.08611 | – | -0.08606 | -0.08605 | -0.08605 | 77.86 | 62.01 |
| C4 | -0.08524 | – | -0.08513 | -0.08512 | -0.08512 | 104.66 | 98.68 |
| B3 | -0.08269 | -0.08267 | -0.08259 | -0.08259 | -0.08260 | 126.31 | 47.40 |
| C2 | -0.08252 | – | -0.08246 | -0.08250 | -0.08248 | 56.64 | 82.31 |
| C3/H3 | -0.07059 | -0.07054 | -0.07055 | -0.07054 | -0.07055 | 89.24 | 49.81 |
| C3 | -0.06730 | -0.06734 | -0.06737 | -0.06734 | -0.06734 | 86.04 | 53.59 |
| C1 | -0.03174 | -0.03169 | -0.03165 | -0.03164 | -0.03162 | 81.19 | 33.15 |
| A1 | -0.03089 | -0.03083 | -0.03080 | -0.03081 | -0.03080 | 94.38 | 40.45 |

*suite sur la page suivante*

*suite de la page précédente*

| Liaison | Théorie | 256 | 512 | 1024 | 2048 | $A(\%)$ SB | $A(\%)$ FB |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B1 | -0.02942 | -0.02937 | -0.02936 | -0.02936 | -0.02936 | 97.56 | 41.89 |
| C12/H12 | 0.00505 | 0.00504 | 0.00505 | 0.00506 | 0.00506 | 121.57 | 121.63 |
| C13 | 0.05153 | 0.05159 | 0.05159 | 0.05159 | 0.05159 | 101.54 | 88.54 |
| C6 | 0.10566 | 0.10576 | 0.10574 | 0.10572 | 0.10571 | 127.82 | 22.80 |
| C28 | 0.12176 | 0.12181 | 0.12180 | 0.12180 | 0.12181 | 94.70 | 84.57 |
| C23/H23 | 0.18200 | 0.18209 | 0.18208 | 0.18212 | 0.18213 | 105.10 | 72.25 |

TABLE 4.10: Liste des paramètres estimés par la méthode adaptative en fonction du nombre d'accumulations. Méthode SVD-HOYW et test de blancheur.

On constate que, pour les composantes théoriques ayant des fréquences comprises entre $-0.21840$ et $-0.12963$, les deux techniques donnent approximativement les mêmes estimations qui se situent autour de 100%, avec une erreur plus ou moins importante. Par contre, pour les autres composantes, les amplitudes estimées dans la bande globale sont nettement moins précises. Ce manque de précision s'explique par la présence proche des modes liés au solvant dont les intensités sont de 50 à 200 fois plus grandes que celles des autres modes. Dans cette situation, une estimation globale des amplitudes n'est pas conseillée. Ce problème est évité par l'approche en sous-bandes, les modes du solvant étant isolés dans des bandes séparées, d'où une meilleure estimation dans cette zone. Ce résultat est vérifié sur d'autres signaux présentant les mêmes problèmes de résolution dynamique, mais il n'est pas généralisable à toutes les situations. En effet, nous avons constaté que lorsque les modes sont bien séparés avec une différence d'amplitude relativement faible, une estimation dans la bande globale est préférable.

## 4.8 Commentaires et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de décomposition/estimation en sous-bandes sur des signaux réels de spectroscopie du carbone-13 correspondant à des mélanges de complexité moyenne et élevée.

De façon générale, les résultats obtenus à partir d'une décomposition uniforme montrent que ce type d'analyse est particulièrement conseillé pour le traitement des signaux très longs et contenant un nombre important de composantes. Cette technique permet d'éviter les limitations observées lors d'une estimation globale appliquée au signal d'origine, en utilisant un principe simple : diviser pour régner. Les avantages de cette approche par rapport à une estimation globale incluent une amélioration sensible du taux de détection et une réduction importante des fausses alarmes (raies parasites). De plus, elle permet l'utilisation d'ordres plus faibles. Evidemment, cela suppose que l'ordre de prédiction et la profondeur de la décomposition soient correctement choisis.

Les approches adaptatives, en général, permettent d'éviter le choix de ces deux paramètres. Dans ce type d'approches, la profondeur de la décomposition est déterminée de façon au-

tomatique. L'ordre de prédiction peut être fixé *a priori*, charge à l'algorithme de trouver le découpage correspondant. Nous avons vu que, parmi les deux règles d'arrêt utilisées, celle fondée sur la « blancheur » des résidus est meilleure parce qu'elle permet d'obtenir un arbre de décomposition dans lequel le nombre de bandes finales est minimisé. Sur le plan de la charge de calcul, cette approche est donc plus intéressante que l'approche uniforme. De plus, ce critère couplé avec une estimation par la méthode SVD-HOYW maximise le taux de détections correctes tout en réduisant le nombre de raies parasites. Enfin, l'utilisation du critère de blancheur sur les résidus fournit implicitement un test de validité des paramètres estimés.
Les avantages de l'approche adaptative proposée nous ont conduit à penser que l'on peut réduire le nombre d'accumulations nécessaires et diminuer ainsi le temps d'acquisition. L'exemple présenté confirme cette hypothèse. En général, l'estimation en sous-bandes nécessite un nombre d'accumulations très inférieur à celui utilisé couramment en RMN avec des méthodes telles que la transformée de Fourier ou la prédiction linéaire appliquées directement sur le signal mesuré. Enfin, concernant l'estimation des amplitudes, nous avons montré que, lorsque l'on a affaire à des signaux présentant des problèmes de résolution dynamique et fréquentielle, leur estimation en sous-bandes est plus précise.
Sur le plan de l'application RMN, l'approche proposée devrait permettre une analyse en *aveugle* d'échantillons. Ceci pourrait être d'une grande utilité en chimie combinatoire. Cette technique permet de produire de vastes bibliothèques de composés relativement rapidement. Ces bibliothèques peuvent ensuite être consultées pour trouver, par exemple, des candidats pour composés médicamenteux. L'estimation en sous-bandes est également conseillée quand le nombre d'échantillons à analyser est problématique ou lorsque certaines composantes ont des amplitudes trop élevées (raie de l'eau, par exemple) qui cachent la présence d'autres modes d'amplitude beaucoup plus faible.

Il existe bien sûr des limitations inhérentes à la méthode adaptative proposée. La première d'entre elles concerne le couplage entre la décomposition est l'estimation, assuré par le test de blancheur des résidus. De ce fait, la décomposition dépend de la méthode d'estimation utilisée et cela suppose donc que cette dernière soit performante.
Dans le cas des signaux qui comportent certaines composantes très fortement amorties proches d'autres composantes faiblement amorties (ce qui est souvent le cas en spectroscopie du proton dans laquelle ces composantes correspondent à des composés à l'état solide), la méthode ne donne pas des résultats satisfaisants. En effet, cette approche a parfois tendance à « effacer » ces composantes lorsque la décomposition est trop profonde (amplification de l'amortissement). La troncature du transitoire ne fait qu'accentuer le problème en supprimant une information utile présente au début du signal en sous-bande. Il existe bien sûr des situations où ce comportement est souhaitable. C'est le cas, par exemple, quand on veut supprimer la ligne de base d'un spectre. Mais dans d'autres situations, ceci entraîne la perte d'une information utile pour caractériser l'échantillon étudié. Par conséquent, l'approche adaptative telle que décrite dans ce mémoire est seulement conseillée dans le cas où les

largeurs de raie présentent une certaine homogénéité. Nous envisageons d'étendre cette technique pour tenir compte du problème précédent en lui adjoignant, par exemple, un critère sur les amortissements.
Enfin, nous avons vu que l'approche SVD-HOYW est plus performante que la méthode KT en termes de détection. Ceci est obtenu au prix d'une augmentation du temps de calcul. En effet, la méthode SVD-HOYW nécessite un temps supplémentaire pour estimer la fonction d'autocorrélation. Pour fixer les idées, dans le cas du signal le plus complexe traité ici (en l'occurrence, le signal CNMR2), l'approche SVD-HOYW nécessite un temps deux fois plus grand que la méthode KT. Ce temps reste néanmoins raisonnable ; il est de 1min pour SVD-HOYW avec un ordre $p = 60$ (Pentium PC 2.4 GHz).

# Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire consistait à analyser les performances de la décomposition en sous-bandes essentiellement dans le cadre de l'estimation des fréquences de signaux sinusoïdaux, ceci en vue de proposer une stratégie de découpage adaptatif en sous-bandes. Le contexte physique concerne l'analyse des signaux issus de la spectroscopie de résonance magnétique nucléaire mis à notre disposition par le Laboratoire de Méthodologie RMN de l'Université Henri Poincaré. Ces signaux se distinguent par leur complexité, due à leur grand nombre de composantes, amorties, souvent proches et d'intensités très différentes. Une autre difficulté est leur longueur rendant impossible l'utilisation des méthodes paramétriques dans le cadre d'un traitement global.

Nous avons commencé par une présentation, dans le cas général de l'estimation en bande globale, de quelques méthodes paramétriques les plus couramment utilisées pour identifier les paramètres d'un signal exponentiel amorti. Nous avons vu en simulation que ces techniques ont des performances très proches et que la méthode KT présente un biais légèrement plus faible sur le facteur d'amortissement, ce qui donne à penser que cette méthode permet de détecter plus de modes du signal par le critère du cercle unitaire. Nous avons alors sélectionné cette méthode pour la suite de l'étude. Nous avons ensuite considéré la modélisation ARMA de ces signaux et les conditions de son utilisation, du point de vue de l'estimation de la fonction d'autocorrélation. Dans ce cadre, nous avons montré que pour les signaux amortis, l'utilisation des équations de Yule-Walker modifiées, d'une part, et d'un estimateur de l'autocorrélation adapté, d'autre part, permet d'améliorer le rapport signal-sur-bruit, à condition de choisir convenablement le paramètre de réglage de cet estimateur. Nous avons alors proposé une méthode permettant le calcul de la valeur optimale de ce paramètre. L'approche résultante améliore, à la fois, la précision et le taux de détection par le critère du cercle, par rapport à la méthode KT et à d'autres approches de type ARMA.

Dans le cadre de l'estimation en sous-bandes, nous avons présenté une analyse de l'ensemble des modifications subies par le signal d'origine dans un banc de filtres. Celle-ci met en avant le caractère MA du bruit en sous-bandes, dû précisément au choix d'un banc de filtres à recouvrement. Cette structure a été sélectionnée pour éviter le problème de repliement spectral qui engendre des ambiguïtés sur la position réelle des fréquences estimées en sous-bandes. Par la suite, nous avons abordé les problèmes spécifiques de l'estimation du nombre de com-

posantes en sous-bandes et de l'utilisation des composantes polyphasées. Dans le premier cas, toujours à cause de la structure du banc de filtres choisi, nous avons proposé une modification sur les critères de sélection de l'ordre pour tenir compte des zones atténuée et de transition de la réponse fréquentielle du filtre de décimation. Concernant les composantes polyphasées, nous avons vu que leur utilisation n'améliore pas les performances de l'estimation à cause de la forte dépendance entre composantes successives. Enfin, les avantages d'une estimation paramétrique en sous-bandes ont été mis en évidence à la fois sur le plan de la précision, de la détection et de la complexité numérique.

Lorsque l'on veut réaliser une décomposition en sous-bandes, un des problèmes qui se pose est celui du choix du facteur de décimation car celui-ci conditionne les résultats de l'estimation. En effet, plus ce facteur augmente, plus le nombre d'échantillons diminue et plus les facteurs d'amortissement augmentent. De ce fait, il existe un facteur de décimation pour lequel les performances d'une estimation en sous-bandes sont optimales, en termes de taux de détections. Pour optimiser la décomposition, nous avons alors proposé une procédure de décomposition adaptée au signal. Celle-ci repose sur une règle d'arrêt fondée sur une mesure de blancheur des résidus, en général, et sur la platitude spectrale locale de ces derniers dans le cas de la décomposition redondante considérée. Nous avons pu voir au travers de simulations numériques que cette méthode nous permettait d'atteindre des performances tout à fait honorables, plus particulièrement, sur le plan de la détection et du nombre de bandes finales et ceci comparativement à la décomposition uniforme et aux techniques adaptatives fondées sur d'autres règles d'arrêt. De plus, cette technique assure parallèlement une variance d'estimation raisonnable, induite par la maximisation du taux de détections.

Dans la dernière partie de ce mémoire, nous avons appliqué l'approche adaptative proposée sur des signaux réels de spectroscopie RMN de complexité élevée. Les résultats montrent l'efficacité de l'approche par rapport à une estimation dans le cadre d'une décomposition uniforme, sur plusieurs points : taux de détection, nombre de raies parasites et complexité numérique. De plus, nous avons vu que l'adaptativité de la décomposition rend le choix des ordres de prédiction en sous-bandes moins crucial. Enfin, nous avons montré que la méthode adaptative proposée permet de traiter des signaux obtenus avec un nombre d'accumulations plusieurs fois inférieur à ceux généralement utilisés en spectroscopie par transformée de Fourier, ce qui induit une réduction appréciable des temps d'expérimentation. En dehors de la RMN, des problèmes de formulation analogues sont présents dans de nombreux autres domaines dans lesquels les résultats établis sont directement transposables. Ainsi, bien que ce ne soit pas présenté dans ce mémoire, cette technique a été appliquée avec succès sur des sinusoïdes pures, simplement en levant la contrainte imposée par le critère du cercle unitaire.

Cette étude a permis de dégager des points importants concernant l'estimation paramétrique dans le contexte de bancs de filtres. En particulier, le choix de la structure des filtres et de leur agencement doit impérativement être effectué en concordance avec l'objectif poursuivi.

Lorsque l'on s'intéresse à la position des fréquences en sous-bandes, le repliement spectral doit être évité. Des précautions particulières doivent également être prises pour déterminer l'ordre du modèle exponentiel en sous-bandes. De plus, la décomposition adaptative est conseillée lorsque le choix du facteur de décimation est problématique. Cette situation se rencontre lorsque l'on a affaire à des signaux amortis ou plus généralement à des spectres présentant une répartition non-uniforme des modes, ce qui est, bien sûr, souvent le cas en pratique. Dans ce contexte, la décomposition fondée sur la platitude spectrale des résidus est plus intéressante car elle permet de stopper la décomposition là où les autres techniques ne parviennent pas à le faire.

Nous avons également recensé quelques limitations de l'approche adaptative proposée. En premier lieu, l'utilisation des résidus suppose évidemment que la méthode d'estimation elle-même soit performante. Dans le cas contraire, l'approche adaptative fondée sur le critère MDL pourrait être une alternative, puisque indépendante de la méthode d'estimation utilisée. Par ailleurs, dans le cas des signaux qui comportent des modes ayant des facteurs d'amortissement très différents, cette approche a tendance à ne pas détecter les modes les plus amortis. Ceci est dû, d'une part, à l'amplification des amortissements en sous-bandes et, d'autre part, à la suppression du transitoire introduit par les filtres.

En terme de perspectives, il serait tout d'abord intéressant d'étudier l'influence du nombre d'échantillons d'un signal amorti sur les performances de l'estimation, tant du point de vue de la détection que de celui de la précision. En effet, nous avons vu au premier chapitre, que pour les critères de sélection de l'ordre tel que le MDL, et en raison du terme de pénalité, il existe un nombre optimal d'échantillons qui maximise la probabilité de détection. De plus, une analyse encore en cours d'étude suggère qu'il existe un nombre « suffisant » d'échantillons (en terme d'information de Fisher) qui permette d'atteindre la borne de Cramér-Rao. Il serait donc intéressant de vérifier, d'une part, si ces critères se rejoignent et, d'autre part, s'il est possible de déterminer analytiquement ce nombre.
D'autre part, concernant le réglage optimal de l'estimateur de l'autocorrélation analysé au premier chapitre, il serait souhaitable de pouvoir déterminer une image du facteur d'amortissement avant la phase d'estimation proprement dite.

Une autre perspective de recherche concerne l'utilisation d'autres types de décomposition en sous-bandes et en particulier la possibilité d'appliquer une décomposition en paquets d'ondelettes. Cette décomposition n'a pas été utilisée à cause des problèmes qui apparaissent dans les zones de transition des filtres associés (atténuation de modes et repliement spectral). Dans ce cas de figure, il serait intéressant d'étudier la possibilité de réaliser un découpage adaptatif dans lequel les zones de transition des filtres sont associées aux bandes vides (adaptativité longitudinale et transversale).
Le problème de l'estimation des amplitudes n'a été abordé que de façon sommaire. Or, les premiers résultats que nous avons obtenus semblent montrer que la décomposition en sous-

bandes permet d'envisager également une amélioration de ce point de vue. Il conviendrait donc d'effectuer une analyse plus complète afin de quantifier cet apport.

Concernant l'application RMN, nous envisageons par la suite de prendre en compte certaines informations spécifiques *a priori*, en particulier la linéarité de la phase. Celle-ci peut être employée pour la détection des raies parasites ou bien alors pour la synthèse d'un algorithme d'estimation utilisant cette information. De plus, nous comptons apporter quelques modifications à l'algorithme adaptatif proposé pour qu'il soit plus sensible à la présence de modes très fortement amortis, situation que l'on retrouve souvent en spectroscopie du proton.

# Annexe A

# Bornes de Cramér-Rao pour un processus exponentiel amorti

## A.1 Plusieurs composantes amorties

On considère le processus exponentiel amorti décrit par l'équation (1.1). On suppose que le bruit $e(n)$ est un processus gaussien indépendant, de moyenne nulle et de variance (connue) $\sigma_e^2$. Soit $\theta = [\omega_1 \ \cdots \ \omega_M \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_M \ A_1 \ \cdots \ A_M \ \phi_1 \ \cdots \ \phi_M]^T$ le vecteur des paramètres inconnus. La fonction log-vraisemblance s'écrit (cf. équation (1.41)) :

$$L(\mathbf{y}|\theta) = -\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{x})^H(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\sigma_e^2} + c \tag{A.1}$$

où $c$ est une constante ($c = -N\ln 2\pi - N\ln\sigma_e^2$). Les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, chacun de longueur $N$, sont formés respectivement par les données non-bruitées et bruitées. La borne de Cramér-Rao du vecteur $\theta$ est la diagonale de l'inverse de la matrice d'information de Fisher qui est donnée par l'expression :

$$\mathbf{F} = \mathbb{E}\left\{\frac{\partial L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial\theta}\left(\frac{\partial L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial\theta}\right)^T\right\} \tag{A.2}$$

Par un simple calcul, on peut montrer que :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma_e^2} 2\mathcal{R}e\left\{\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta}\right)^H\right\} \tag{A.3}$$

Sachant que [YP95] :

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta} = \mathrm{diag}[\mathbf{A}\ \mathbf{A}\ \mathbf{I}\ \mathbf{A}].\begin{bmatrix} \jmath\Phi\mathbf{Z}' \\ -\Phi\mathbf{Z}' \\ \Phi\mathbf{Z} \\ \jmath\Phi\mathbf{Z} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{S}.\mathbf{V} \tag{A.4}$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(A_1 \ \cdots \ A_M)_{M\times M} \tag{A.5}$$

$$\Phi = \mathrm{diag}(e^{\jmath\phi_1} \ \cdots \ e^{\jmath\phi_M})_{M\times M} \tag{A.6}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{N-1} \end{bmatrix}_{M\times N} \tag{A.7}$$

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & \cdots & (N-1)z_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & z_M & \cdots & (N-1)z_M^{N-1} \end{bmatrix}_{M\times N} \tag{A.8}$$

on obtient finalement :

$$\mathbf{F}^{-1} = \sigma_e^2\mathbf{S}^{-1}[2\mathcal{R}e\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\}]^{-1}\mathbf{S}^{-1} \triangleq \sigma_e^2\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{S}^{-1} \tag{A.9}$$

Les bornes de Cramér-Rao des paramètres correspondent aux éléments de la diagonale de la matrice $\mathbf{F}^{-1}$ :

$$\begin{cases} CRB(\omega_i) = \frac{Q_{ii}}{\eta_i} \\ CRB(\alpha_i) = \frac{Q_{(i+M)(i+M)}}{\eta_i} \\ CRB(A_i) = \frac{A_i^2 Q_{(i+2M)(i+2M)}}{\eta_i} \\ CRB(\phi_i) = \frac{Q_{(i+3M)(i+3M)}}{\eta_i} \end{cases} \tag{A.10}$$

pour $i = 1, \cdots, M$. La quantité $\eta_i$ est le rapport signal-sur-bruit de la $i^{\text{ème}}$ composantes.

**Théorème 2 ([YP95])** *Pour un processus exponentiel amorti, les bornes de Cramér-Rao vérifient les relations :*

$$CRB(\omega_i) = CRB(\alpha_i) \tag{A.11}$$

$$CRB(A_i) = A_i^2 CRB(\phi_i) \tag{A.12}$$

■

## A.2 Une composante amortie

Dans le cas d'un mode unique, la borne de Cramér-Rao pour la fréquence et le facteur d'amortissement a pour expression [YP95] :

$$CRB(\omega_1) = CRB(\alpha_1) = \frac{(1-|z_1|^2)^3(1-|z_1|^{2N})}{2\eta_1[-N^2|z_1|^{2N}(1-|z_1|^2)^2 + |z_1|^2(1-|z_1|^{2N})^2]} \tag{A.13}$$

Asymptotiquement ($N \to \infty$), cette borne n'est pas nulle. En effet :

$$\lim_{N\to\infty} CRB(\omega_1) = \frac{(1-|z_1|^2)^3}{2\eta_1|z_1|^2} \tag{A.14}$$

## A.3 Une sinusoïde pure

La borne de Cramér-Rao dans le cas particulier d'un amortissement nul se déduit de l'équation (A.13) :

$$\lim_{\alpha_1\to 0} CRB(\omega_1) = \frac{1}{\eta_1}\frac{6}{N(N^2-1)} = \frac{\sigma_e^2}{A_1^2}\frac{6}{N(N^2-1)} \tag{A.15}$$

Ce résultat peut être retrouvé dans [Swi93].

# Annexe B

# Approche IQML : Iterative Quadratic Maximum Likelihood

Si on construit la matrice $\mathbf{A}^H$ de dimension $(N-M)\times N$ :

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} a_M & a_{M-1} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_M & \cdots & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_M & a_{M-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

alors, d'après l'équation (1.3), on a $\mathbf{A}^H\mathbf{Z} = 0$, où $\mathbf{Z}$ est la matrice de Vandermonde définie dans l'équation (1.43). Par conséquent, les colonnes de $\mathbf{Z}$ sont orthogonales aux colonnes de $\mathbf{A}$. En utilisant les opérateurs de projection, on a :

$$\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^H\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^H = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H \tag{B.2}$$

La fonction de coût (1.46) devient alors :

$$J_2(\mathbf{a}) = \mathbf{y}^H\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{y} \tag{B.3}$$

avec $\mathbf{a} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_M]^T$. De plus, on peut remplacer le terme $\mathbf{A}^H\mathbf{y}$ par l'expression :

$$\mathbf{A}^H\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(M) & y(M-1) & \cdots & y(0) \\ y(M+1) & y(M) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-1) & y(N-2) & \cdots & y(N-M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}\mathbf{a}'$$

Finalement, le MLE de $\mathbf{a}$ est donné par :

$$\arg\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{a}'\|^2 \triangleq \arg\min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}'^H\mathbf{Y}^H(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{a}' \tag{B.4}$$

L'idée consiste maintenant à utiliser l'équation :

$$\|\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{A}_{k-1}^H\mathbf{A}_{k-1})^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{a}'_k\|^2 \tag{B.5}$$

de manière itérative, où $\mathbf{a}'_k$ est une approximation de $\mathbf{a}'$ à la $k^{\text{ème}}$ itération et la matrice $\mathbf{A}_{k-1}$ est construite à partir du vecteur $\mathbf{a}'_{k-1}$. A chaque itération, une approximation de $\mathbf{a}'_k$ est obtenue en minimisant un critère quadratique, puisque $\mathbf{A}_{k-1}$ est fixée. Cette méthode est appelée IQML (*Iterative quadratic maximum likelihood method*) [BM86]. Sa mise en oeuvre nécessite un jeux de paramètres initiaux et un certain nombre d'itérations pour converger.

# Annexe C

# Propriété de récurrence des termes d'autocorrélation estimés

Les méthodes d'estimation des paramètres de sinusoïdes amorties faisant appel explicitement à l'estimation préalable de la séquence d'autocorrélation considèrent le système d'équations suivant (en prédiction arrière) :

$$\begin{bmatrix} \hat{r}(1,p+1) & \hat{r}(2,p+1) & \cdots & \hat{r}(p,p+1) \\ \hat{r}(1,p+2) & \hat{r}(2,p+2) & \cdots & \hat{r}(p,p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}(1,p+c) & \hat{r}(2,p+c) & \cdots & \hat{r}(p,p+c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}(0,p+1) \\ \hat{r}(0,p+2) \\ \vdots \\ \hat{r}(0,p+c) \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

où $\hat{r}(i,j)$ correspond aux différents estimateurs de la fonction d'autocorrélation discutés au paragraphe 1.6. Notre objectif est de montrer que la récurrence vérifiée par le signal non-bruité $x(n)$ dans l'équation (1.4) est également vérifiée, en moyenne, par la séquence d'autocorrélation.

## C.1 Méthode HOYW : estimateur pré-fenêtré

Dans le cas de la méthode HOYW, l'estimateur de l'autocorrélation est donné par la relation (1.55). Notons d'abord que $y_b(n)$ s'écrit :

$$y_b(n) = y(N-n-1),\ n = 0,1,...,N-1 \tag{C.2}$$

Nous avons alors :

$$\hat{r}(i,j) = \frac{1}{N} \sum_{k=\max(i,j)}^{N-1} y(N-k+i-1)y^*(N-k-j-1) \tag{C.3}$$

Sachant que $y(n) = x(n) + e(n)$ où $x(n)$ est un terme déterministe et $e(n)$ est un bruit blanc à moyenne nulle et de variance $\sigma_e^2$, il vient :

$$\mathbb{E}\left\{\hat{r}(i,j)\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=\max(i,j)}^{N-1}\Big(x(N-k+i-1)x^*(N-k-j-1) + \sigma_e^2\delta(i-j)\Big) \tag{C.4}$$

D'après la structure de l'équation (C.1), nous avons $i < j$. Il s'ensuit que le terme $\delta(i-j)$ dans l'équation précédente est nul. Dans le cas du modèle exponentiel, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\hat{r}(i,j)\right\} &= \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{M}\Big(h_l\sum_{k=j}^{N-1}\sum_{m=1}^{M}h_m^*(z_l z_m^*)^{N-k-1}z_m^{*j}\Big).z_l^i \\ &= \sum_{l=1}^{M}h_l'(j).z_l^i \end{aligned} \tag{C.5}$$

Il est donc clair que, pour $j > p$ fixé, la séquence $\mathbb{E}\left\{\hat{r}(i,j)\right\}$ contient les mêmes modes $\{z_l\}_{l=1}^{M}$ que le signal non-bruité $x(n)$. Par conséquent, $\hat{r}(i,j)$ vérifie, en moyenne, une équation de récurrence par rapport à $i$ du même type que celle d'un processus ARMA standard.

## C.2 Méthode de Händel

L'estimateur de la fonction d'autocorrélation intervenant dans la méthode de Händel est donné dans l'équation (1.60). En utilisant le même raisonnement que précédemment, il est aisé de montrer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\hat{r}(i,j)\right\} &= \frac{1}{N-L-p}\sum_{l=1}^{M}\Big(h_l\sum_{k=0}^{N-L-p-1}\sum_{m=1}^{M}h_m^*(z_l z_m^*)^k z_m^{*j}\Big).z_l^i \\ &= \sum_{l=1}^{M}h_l'(j).z_l^i \end{aligned} \tag{C.6}$$

L'estimateur de Händel vérifie donc bien l'équation de récurrence (1.49).

# Annexe D

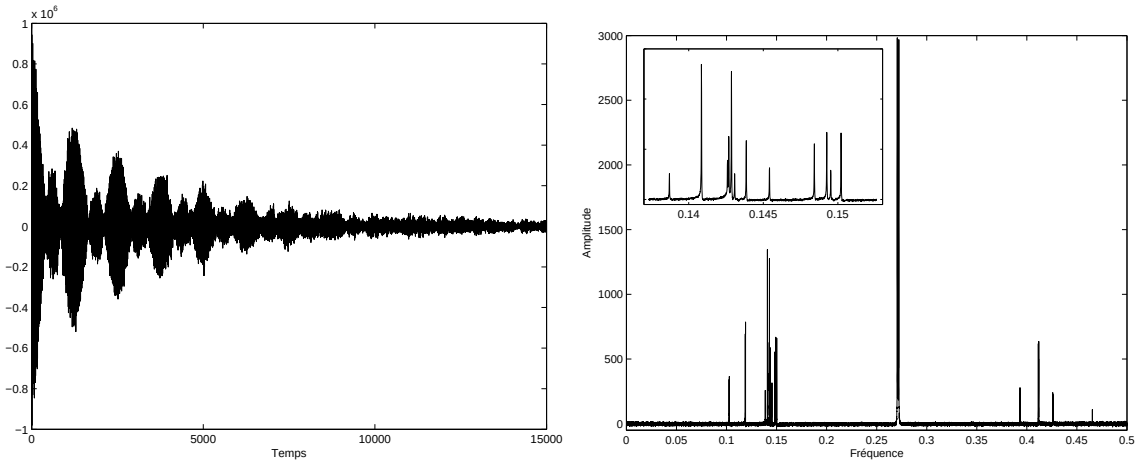
# Description des signaux analysés

## D.1 Signaux CNMR1 et CNMR2

Les tableaux D.1 et D.2 montrent la composition chimique des signaux CNMR1 et CNMR2, respectivement. Les signaux correspondants ainsi que leurs spectres d'absorption sont représentés sur les figures D.1 et D.2.

| Substances | Formules | Quantités (g) |
|---|---|---|
| Benzène | $C_6H_6$ | 0.0362 |
| Ethylbenzène | $C_8H_{10}$ | 0.2818 |
| Toluène | $C_7H_8$ | 0.5195 |
| 1,3–Dimethylbenzène | $C_8H_{10}$ | 0.2449 |
| 1,3–Dimethyl–5–ethylbenzène | $C_8H_{14}$ | 0.4002 |
| Chloroforme–D | $CDCl_3$ | – |

TABLE D.1 – Composition chimique du signal CNMR1.




*(a)* *(b)*

FIGURE D.1 – (a) Le signal temporel CNMR1 ; (b) Le spectre d'absorption.

| Substances | Formules | Quantités (g) |
|---|---|---|
| Toluène | $C_7H_8$ | 0.5322 |
| *m*–Ethyltoluène | $C_9H_{12}$ | 0.3395 |
| Ethylbenzène | $C_8H_{10}$ | 0.3931 |
| *o*-Xylène | $C_8H_{10}$ | 0.2986 |
| 1,3–Dimethyl–5–ethylbenzene | $C_{10}H_{14}$ | 0.2651 |
| *m*-Xylène | $C_8H_{10}$ | 0.3089 |
| Tetraline | $C_{10}H_{12}$ | 0.3312 |
| Indane | $C_9H_{10}$ | 0.2893 |
| *n*–Propylbenzène | $C_9H_{12}$ | 0.1593 |
| *p*-Xylène | $C_8H_{10}$ | 0.1208 |
| 1,2–Dimethyl–3–ethylbenzène | $C_{10}H_{14}$ | 0.1150 |
| 1,3,5–Trimethylbenzène | $C_9H_{12}$ | 0.0806 |
| Naphtalène | $C_{10}H_8$ | 0.0188 |
| 1,2,3–Trimethylbenzène | $C_9H_{12}$ | 0.0488 |
| Isobutylbenzène | $C_{10}H_{14}$ | 0.0132 |
| Benzène | $C_6H_6$ | 0.0765 |
| 2,4–Dimethylhexane | $C_8H_{18}$ | 0.1012 |
| 2,3,4–Trimethylpentane | $C_8H_{18}$ | 0.1489 |
| TMS | $C_4H_{12}Si$ | – |
| Dioxane | $C_4H_8O_2$ | – |
| Chloroforme–D | $CDCl_3$ | – |

TABLE D.2 – Composition chimique du signal CNMR2.

## D.2 Signal obtenu avec différents nombres d'accumulations : CNMR3

La figure D.3 représente la molécule analysée. Le nombre d'accumulations utilisées pour obtenir le signal RMN du carbone-13 varie entre 1 et 2048. Les spectres correspondants sont représentés sur la figure 4.14. La liste des raies du spectre est décrite dans le tableau D.3 et la figure D.4.

| Atome | Déplacement [ppm] | Fréquence |
|---|---|---|
| C1/H1 | 37.897 | -0.16397 |
| C2/H2 | 25.016 | -0.18989 |
| C3/H3 | 84.303 | -0.07059 |
| C4 | 54.961 | -0.12963 |
| C5/H5 | 48.363 | -0.14291 |
| C6/H6 | 20.286 | -0.19940 |
| [a]C7/H7 | 36.059 | -0.16767 |
| C8 | 39.940 | -0.15986 |
| C9/H9 | 46.833 | -0.14599 |
| [a]C10 | 36.059 | -0.16767 |
| C11/H11 | 23.550 | -0.19284 |
| C12/H12 | 121.90 | 0.00505 |
| C13 | 145.00 | 0.05153 |
| C14 | 41.936 | -0.15584 |
| [b]C15/H15 | 32.644 | -0.17454 |
| C16/H16 | 74.475 | -0.09037 |
| C17 | 48.699 | -0.14223 |
| C18/H18 | 41.254 | -0.15721 |
| C19/H19 | 47.088 | -0.14547 |
| C20 | 30.866 | -0.17812 |
| [b]C21/H21 | 32.644 | -0.17454 |
| C22/H22 | 35.856 | -0.16807 |
| C23/H23 | 209.84 | 0.18200 |
| C24/H24 | 10.845 | -0.21840 |
| C25/H25 | 15.516 | -0.20900 |
| C26/H26 | 17.248 | -0.20552 |
| C27/H27 | 27.010 | -0.18587 |
| C28 | 179.90 | 0.12176 |
| C29/H29 | 33.172 | -0.17348 |
| C30/H30 | 24.583 | -0.19076 |

*a.* Liaisons chimiques partageant la même fréquence de résonance.

*b.* Idem.

**Noyaux de sucre**

A - Galactopyranose

| Position | Déplacement [ppm] | Fréquence |
|---|---|---|
| 1 | 104.04 | -0.03089 |
| 2 | 73.512 | -0.09231 |
| 3 | 75.278 | -0.08875 |
| 4 | 70.048 | -0.09928 |
| 5 | 76.593 | -0.08611 |
| 6 | 61.640 | -0.11619 |

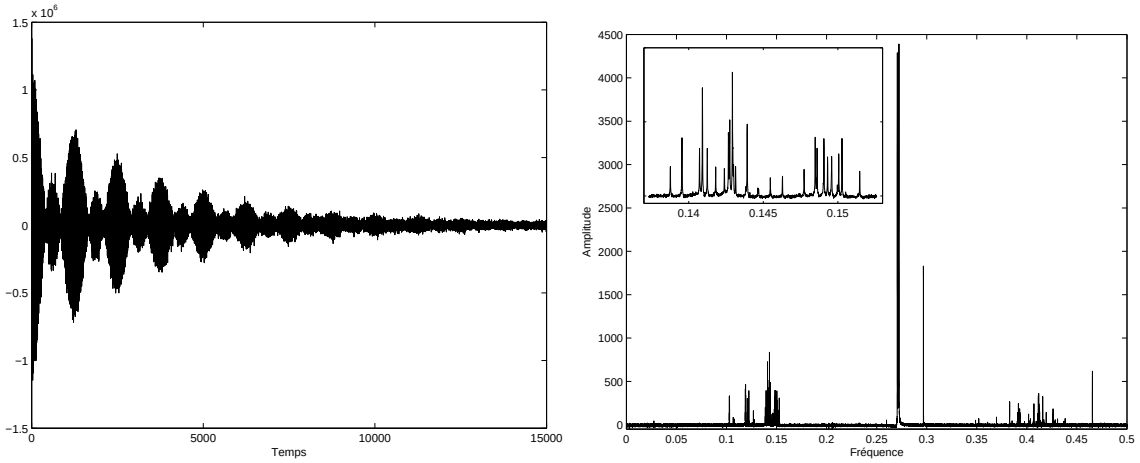
B - Xylopyranose

| Position | Déplacement [ppm] | Fréquence |
|---|---|---|
| 1 | 104.77 | -0.02942 |
| 2 | 75.088 | -0.08914 |
| 3 | 78.294 | -0.08269 |
| 4 | 70.658 | -0.09805 |
| 5 | 67.079 | -0.10525 |

C - Acide glucuronique

| Position | Déplacement [ppm] | Fréquence |
|---|---|---|
| 1 | 103.62 | -0.03174 |
| 2 | 78.374 | -0.08252 |
| 3 | 85.939 | -0.06730 |
| 4 | 77.024 | -0.08524 |
| 5 | 71.214 | -0.09693 |
| 6 | 171.90 | 0.10566 |

TABLE D.3 – Correspondance avec les signaux de RMN.




*(a)* *(b)*

FIGURE D.2 – (a) Le signal temporel CNMR2 ; (b) Le spectre d'absorption.

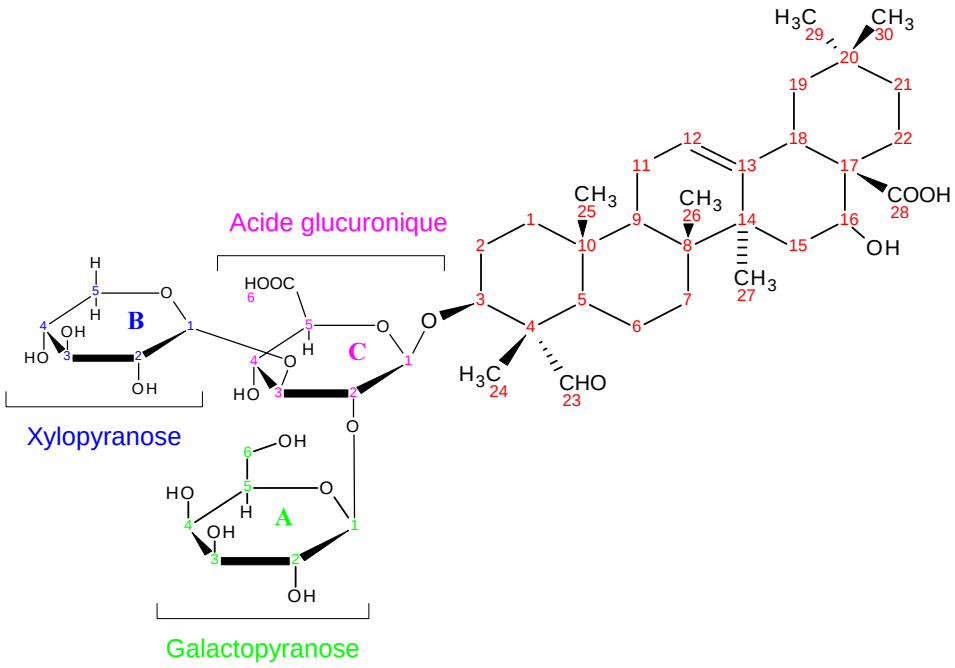



FIGURE D.3 – Molécule analysée.

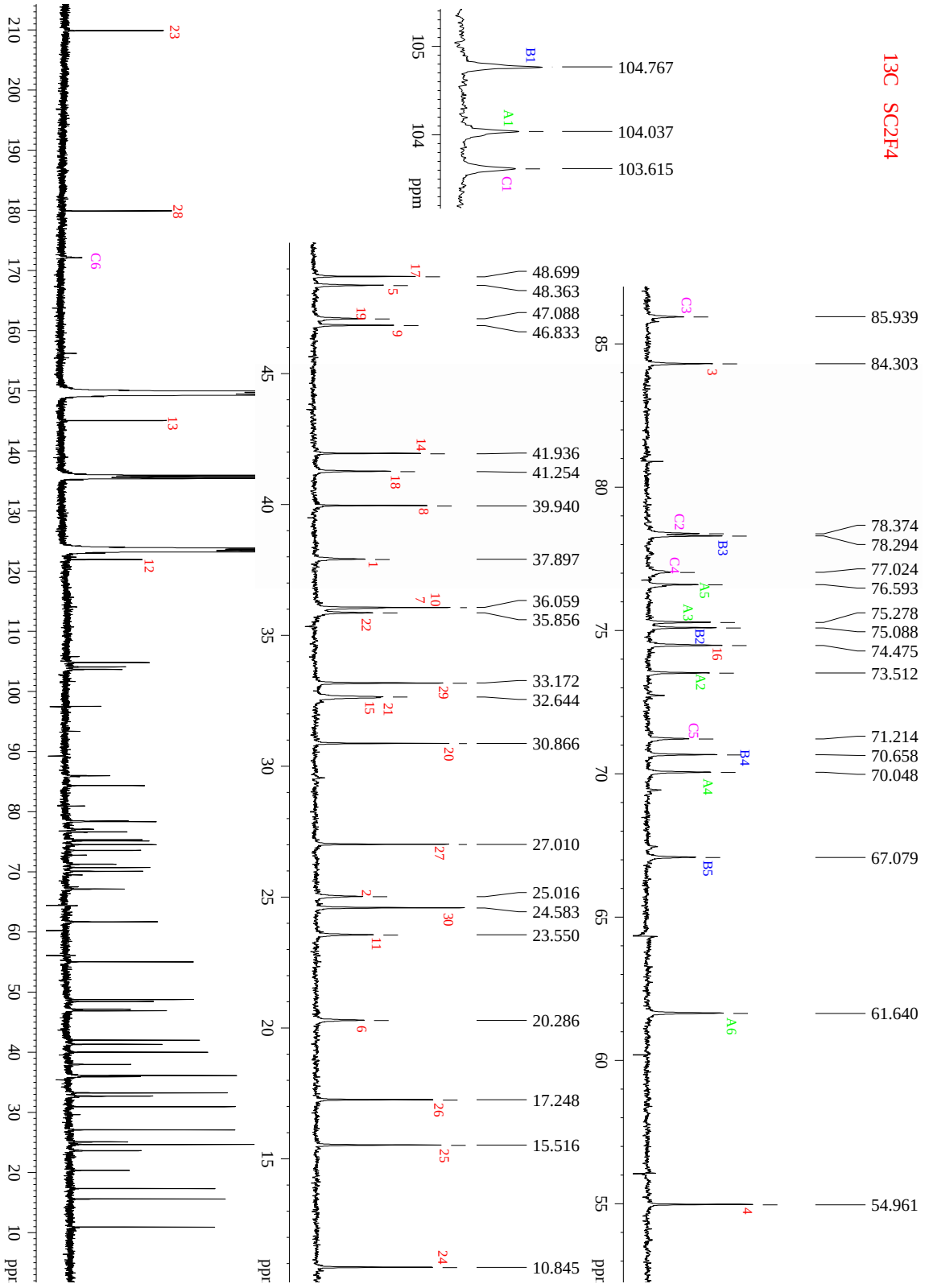



FIGURE D.4 – Spectre d'absorption du signal CNMR3(2048). Ce spectre se lit de droite à gauche.

# Bibliographie


[AH92] A. N. Akansu et R. A. Haddad. *Multiresolution Signal Decomposition : Transforms, subbands, and wavelets*. Academic Press, 1992.

[BA95] A. Benyassine et A. N. Akansu. Subspectral modeling in filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(12) :3050–3053, 1995.

[BdBBvO85] H. Barkhuijsen, R. de Beer, W. M. M. J. Bovée, et D. van Ormondt. Retrieval of frequencies, amplitudes, damping factors, and phases from time-domain signals using a linear least-squares procedure. *Journal of Magnetic Resonance*, 63 :465–481, 1985.

[BdBvO87] H. Barkhuijsen, R. de Beer, et D. van Ormondt. Improved algorithm for noniterative time domain model fitting to exponentially damped magnetic resonance signals. *Journal of Magnetic Resonance*, 73 :553–557, 1987.

[Bel96] M. Bellanger. *Traitement numérique du signal : Théorie et pratique*. Collection technique et scientifique des télécommunications. Masson, Paris, 5 ème édition, 1996.

[BJ76] G. E. P. Box et G. M. Jenkins. *Time Series Analysis. Forecasting and Control*. Holden-Day, Oakland, 1976.

[BM86] Y. Bresler et A. Makovski. Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34(5) :1081–1089, 1986.

[BMM02] D. Bonacci, P. Michel, et C. Mailhes. Subband decomposition and frequency warping for spectral estimation. Dans *Proceedings of the 11th European Signal and Image Processing Conference*, pages 147–150, 2002.

[Cad82] J. A. Cadzow. Spectral estimation : An overdetermined rational model equation approach. *Proceedings of the IEEE*, 70(9) :907–939, 1982.

[Can91] D. Canet. *La RMN, concept et méthodes*. InterEditions, Paris, 1991.

[Chi96] D.-M. Chiang. *Parametric signal processing techniques for model mismatch and mixed parameter estimation*. Ph.d. dissertation, The Ohio State University, 1996.

[CL82] Y. T. Chan et R. P. Langford. Spectral estimation via the high-order Yule-Walker equations. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 30(5) :689–698, 1982.

[CMQW90] R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, et M. V. Wickerhauser. Signal processing and compression with wave packets. Rapport interne, Numerical Algorithms Research Group, Yale University, 1990. `http ://www.math.yale.edu/pub/wavelets/papers/cmqw.tex`.

[CMW92] R. R. Coifman, Y. Meyer, et M. V. Wickerhauser. Wavelet analysis and signal processing. Dans B. Ruskai *et al.*, éditeur, *Wavelets and Their Application*, pages 153–178, Boston, 1992.

[CTO89] H. Clergeot, S. Tressens, et A. Ouamri. Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the Cramér-Rao bounds. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(11) :1703–1720, 1989.

[CW87] J. A. Cadzow et M.-M. Wu. Analysis of transient data in noise. *IEE Proceedings*, 134(1) :69–78, 1987.

[CW92] R. R. Coifman et M. V. Wickerhauser. Entropy-based algorithms for best basis selection. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) :713–718, 1992.

[DJ94] D. L. Donoho et I. M. Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, 1994.

[DMC95] A. Ducasse, C. Mailhes, et F. Castanié. Amplitude and phase estimator study in Prony method for noisy exponential data. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1796–1799, 1995.

[dP95] G. de Prony. Essai expérimental et analytique : Sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool, à différentes températures. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1(2) :24–76, 1795.

[Dro00] K. Drouiche. A new test for whiteness. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(7) :1864–1871, 2000.

[DT02] E.-H. Djermoune et M. Tomczak. SNR enhancement of damped exponential signals in noise. Dans *Proceedings of the 11th European Signal and Image Processing Conference*, pages 139–142, 2002.

[DT03] E.-H. Djermoune et M. Tomczak. An adaptive subband decomposition method for high resolution nuclear magnetic resonance spectroscopy. Dans *Proceedings of the 3rd International Symposium on Physics in Signal and Image Processing*, pages 193–196, Grenoble, France, 2003.

[Duc97] A. Ducasse. *Estimation de sous-harmoniques à l'aide de méthodes paramétriques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1997.

[FP84] B. Friedlander et B. Porat. The modified Yule-Walker method of ARMA spectral estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 20(2) :158–173, 1984.

[Fri84] B. Friedlander. The overdetermined recursive instrumental variable method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 :353–356, 1984.

[Fri91] H. Friebolin. *Basic one- and two-dimensional NMR spectroscopy*. VCH, New York, 1991.

[Fuc88] J.-J. Fuchs. Estimating the number of sinusoids in additive white noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(12) :1846–1853, 1988.

[GH94] H. Gesmar et P. C. Hansen. Fast linear prediction and its application to NMR spectroscopy. *Journal of Magnetic Resonance Series A*, 106 :236–240, 1994.

[GL88] H. Gesmar et J. J. Led. Spectral estimation of complex time-domain NMR signals by linear prediction. *Journal of Magnetic Resonance*, 76 :183–192, 1988.

[GL89] G. H. Golub et C. H. Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1989.

[GLA90] H. Gesmar, J. J. Led, et F. Abildgaard. Improved methods for quantitative spectral analysis of NMR data. *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, 22(3) :255–288, 1990.

[GLC96] J. Grouffaud, P. Larzabal, et H. Clergeot. Some properties of ordered eigenvalues of a Wishart matrix : Application in detection test and model order selection. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2465–2469, Atlanta, Georgia, 1996.

[GM74] A. H. Gray et J. D. Markel. A spectral flatness measure for studying the autocorrelation method of linear prediction of speech analysis. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 22 :207–217, 1974.

[GS58] O. Grenander et G. Szegö. *Toeplitz forms and their applications*. University of California Press, Berkeley, California, 1958.

[Gün93] H. Günther. *La spectroscopie de RMN*. Masson, Paris, 1993.

[Hän93] P. Händel. High-order Yule-Walker estimation of the parameters of exponentially damped cisoids in noise. *Signal Processing*, 32(3) :315–328, 1993.

[HC93] J.-K. Hwang et Y.-C. Chen. A combined detection-estimation algorithm for the harmonic-retrieval problem. *Signal Processing*, 30(2) :177–197, 1993.

[Hen97] N. Henzel. *Développement d'un nouvel outil d'analyse spectrale et d'estimation des paramètres de signaux RMN $^{13}C$.* Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 1997.

[Hil56] F. B. Hildebrand. *Spectral analysis and its applications.* Holden-Day, 1956.

[HS88] Y. Hua et T. K. Sarkar. Perturbation analysis of TK method for harmonic retrieval problem. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(2) :228–240, 1988.

[HS90] Y. Hua et T. K. Sarkar. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(5) :814–824, 1990.

[HVMS98] H. Hu, Q. N. Van, V. A. Mandelshtam, et A. J. Shaka. Reference deconvolution, phase correction, and line listing of NMR spectra by the 1D filter diagonalization method. *Journal of Magnetic Resonance*, 134 :76–87, 1998.

[JW68] G. M. Jenkins et D. G. Watts. *Spectral analysis and its applications.* Holden-Day, 1968.

[KAR83] R. Kung, K. S. Arun, et D. V. Bhaskar Rao. State-space and singular value decomposition-based approximation methods for the harmonic retrieval problem. *Journal of the Optical Society of America*, 73(12) :1799–1811, 1983.

[Kay80] S. M. Kay. Noise compensation for autoregressive spectral estimates. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 28(3) :292–303, 1980.

[Kay88] S. M. Kay. *Modern spectral estimation : Theory and application.* Prentice-Hall, 1988.

[KB86] M. Kaveh et A. J. Barabell. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34(2) :331–341, 1986.

[KM01] D. Kundu et A. Mitra. Estimating the number of signals of the damped exponential models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 36 :245–256, 2001.

[Koe99] P. Koehl. Linear prediction spectral analysis of NMR data. *Progress in NMR Spectroscopy*, 34 :257–299, 1999.

[KPTV87] A. C. Kot, S. Parthasarathy, D. W. Tufts, et R. J. Vaccaro. The statistical analysis of state-variable balancing and Prony's method in parameter estimation. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1549–1552, 1987.

[KT82] R. Kumaresan et D. W. Tufts. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 30(6) :833–840, 1982.

[KvdBL93] M. Karrakchou et C. van den Branden Lambrecht. Estimation d'exponentielles complexes à partir d'une décomposition adaptative en sous-bandes. Dans *Actes du 14ème Colloque GRETSI*, pages 193–196, 1993.

[KY88] K. Konstantinides et K. Yao. Statistical analysis of effective singular values in matrix rank determination. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(5) :757–763, 1988.

[LSS85] E. D. Laue, J. Skilling, et J. Staunton. Maximum entropy reconstruction of spectra containing antiphase peaks. *Journal of Magnetic Resonance*, 63 :418–424, 1985.

[Mal00] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l'école polytechnique, 2000.

[Mar87] S. L. Marple. *Digital spectral analysis with applications*. Prentice-Hall, 1987.

[Mar98] S. Marcos. *Les méthodes à haute résolution : Traitement d'antennes et analyse spectrale*. Hermès, Paris, 1998.

[MAS00] F. G. Meyer, A. Z. Averbuch, et J.-O. Strömberg. Fast adaptive wavelet packet image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(5) :792–800, 2000.

[MBHC91] P. Mutzenhardt, J. Brondeau, F. Humbert, et D. Canet. Algorithm based on a new proof of HSVD equations derived without invoking singular value decomposition. *Journal of Magnetic Resonance*, 94 :543–549, 1991.

[MDKL89] A. R. Mazzeo, M. A. Delsuc, A. Kumar, et G. C. Levy. Generalized maximum entropy deconvolution of spectral segments. *Journal of Magnetic Resonance*, 81 :512–519, 1989.

[MG89] M. I. Miller et A. S. Greene. Maximum-likelihood estimation for nuclear magnetic resonance spectroscopy. *Journal of Magnetic Resonance*, 83 :525–548, 1989.

[Mou96] P. Moulin. Signal estimation using adapted tree-structured bases and the MDL principle. Dans *IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pages 141–143, Paris, France, 1996.

[MTS98] V. A. Mandelshtam, H. S. Taylor, et A. J. Shaka. Application of the filter diagonalization method to one- and two-dimensional NMR spectra. *Journal of Magnetic Resonance*, 133 :304–312, 1998.

[NKK02] M. Niedzwiecki, T. Klaput, et P. Kaczmarek. Increasing accuracy of frequency estimation by decimation. Dans *Proceedings of the 11th European Signal and Image Processing Conference*, pages 135–138, 2002.

[OC89] A. Okhovat et J. R. Cruz. Statistical analysis of the Tufts-Kumaresan and principal Hankel components methods for estimating damping factors of single complex exponentials. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2286–2289, 1989.

[Oui89] H. Ouibrahim. Prony, Pisarenko, and the matrix pencil : A unified presentation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(1) :133–134, 1989.

[PB87] T. W. Parks et C. S. Burrus. *Digital filter design*. John Wiley & Sons, Inc., 1987.

[Pri89] M. B. Priestley. *Spectral analysis and time series*. Academic Press, Londres, 6ème édition, 1989.

[PvdBdBvO92] W. Pijnappel, A. van den Boogaart, R. de Beer, et D. van Ormondt. SVD-based quantification of magnetic resonance signals. *Journal of Magnetic Resonance*, 97 :122–134, 1992.

[QL83] M. P. Quirk et B. Liu. Improving resolution for autoregressive spectral estimation by decimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31(3) :630–637, 1983.

[RA92] B. D. Rao et K. S. Arun. Model based processing of signals : A state space approach. *Proceedings of the IEEE*, 80(2) :281–309, 1992.

[Rao88] B. D. Rao. Perturbation analysis of an SVD-based linear prediction method for estimating the frequencies of multiple sinusoids. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(7) :1026–1035, 1988.

[RB93] V. U. Reddy et L. S. Biradar. SVD-based information theoretic criteria for detection of the number of damped/undamped sinusoids and their performance analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41 :2872–2881, 1993.

[RBN96] S. Rouquette, Y. Berthoumieu, et M. Najim. An efficient subband decomposition based on the Hilbert transform for high-resolution spectral estimation. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 409–412, 1996.

[RH89] B. D. Rao et K. V. S. Hari. Performance analysis of ESPRIT and TAM in determining the direction of arrival of plane waves in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(12) :1990–1995, 1989.

[Ris00] J. Rissanen. MDL denoising. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(7) :2537–2543, 2000.

[RP92a] S. Rao et W. A. Pearlman. On the superiority of coding and estimation from subbands. Dans *Conference on Information Sciences and Systems*, pages 890–895, Princeton, NJ, 1992.

[RP92b] S. Rao et W. A. Pearlman. Spectral estimation from subbands. Dans *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pages 69–73, Victoria, Canada, 1992.

[RP96] S. Rao et W. A. Pearlman. Analysis of linear prediction, coding, and spectral estimation from subbands. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(4) :1160–1178, 1996.

[RPK86] R. Roy, A. Paulraj, et T. Kailath. ESPRIT–a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34(5) :1340–1342, 1986.

[RPK87] R. Roy, A. Paulraj, et T. Kailath. Comparative performance of ESPRIT and MUSIC for direction-of-arrival estimation. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 3, pages 2344–2347, Dallas, 1987.

[RY87] M. A. Rahman et K.-B. Yu. Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(10) :1440–1454, 1987.

[Sch79] R. O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. Dans *Proceedings of RADC Spectral Estimation Workshop*, pages 243–258, Rome, NY, 1979.

[Sch91] L. L. Scharf. The SVD and reduced rank signal processing. *Signal Processing*, 25 :113–133, 1991.

[SLL00] P. Stoica, H. Li, et J. Li. Amplitude estimation of sinusoidal signals : Survey, new results, and an application. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(2) :338–352, 2000.

[SM97] P. Stoica et R. L. Moses. *Introduction to spectral analysis*. Pentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[SMSL91] P. Stoica, R. L. Moses, T. Söderström, et J. Li. Optimal high-order Yule-Walker estimation of sinusoidal frequencies. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(6) :1360–1368, 1991.

[SN89] P. Stoica et A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(5) :720–741, 1989.

[SN91] P. Stoica et A. Nehorai. Performance comparison of subspace rotation and MUSIC methods for direction estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(2) :446–453, 1991.

[SS90] P. Stoica et T. Söderström. High-order Yule-Walker equations for estimating sinusoidal frequencies : the complete set of solutions. *Signal Processing*, 20 :257–263, 1990.

[SST89] P. Stoica, T. Söderström, et F. Ti. Asymptotic properties of the high-order Yule-Walker estimates of sinusoidal frequencies. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(11) :1721–1734, 1989.

[Ste74] M. A. Stephens. EDF statistics for goodness-of-fit and some comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69 :730–737, 1974.

[Ste88] D. S. Stephenson. Linear prediction and maximum entropy methods in NMR spectroscopy. *Progress in NMR Spectroscopy*, 20 :515–626, 1988.

[Swi93] D. N. Swingler. Frequency estimation of closely spaced sinusoids : Simple approximations to the Cramér-Rao lower bound. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(1) :489–494, 1993.

[SYM94a] W. M. Steedly, C.-H. J. Ying, et R. L. Moses. A modified TLS-Prony method using data decimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(9) :2292–2303, 1994.

[SYM94b] W. M. Steedly, C.-H. J. Ying, et R. L. Moses. Statistical analysis of TLS-based Prony techniques. *Automatica*, 30(1) :115–129, 1994.

[TD02] M. Tomczak et E.-H. Djermoune. A subband ARMA modeling approach to high-resolution NMR spectroscopy. *Journal of Magnetic Resonance*, 158(1) :86–98, 2002.

[TF94] S.L. Tan et T.R. Fischer. Linear prediction of subband signals. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 12(9) :1576–1583, 1994.

[TK82] D. W. Tufts et R. Kumaresan. Estimation of frequencies of multiple sinusoids : Making linear prediction perform like maximum likelihood. *Proceedings of the IEEE*, 70(9) :975–989, 1982.

[TKV91] D. W. Tufts, A. C. Kot, et R. J. Vaccaro. The threshold effect in signal processing algorithms which use an estimated subspace. Dans R. Vaccaro, éditeur, *SVD and Signal Processing II : Algorithms, Analysis and Applications*, New York, 1991.

[TN88] J. Tang et J. R. Norris. Linear prediction z-transform (LPZ) method, Padé rational approximation, and the Burg maximum entropy extrapolation. *Journal of Magnetic Resonance*, 78 :23–30, 1988.

[TSPA95] B. Tang, A. Shen, G. Pottie, et A. Alwan. Spectral analysis of sub-band filtered signals. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1324–1327, 1995.

[TV01a] A. Tkacenko et P. P. Vaidyanathan. The role of filter banks in sinusoidal frequency estimation. *Journal of the Franklin Institute*, 338 :517–547, 2001.

[TV01b] A. Tkacenko et P. P. Vaidyanathan. Sinusoidal frequency estimation using filter banks. Dans *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3089–3092, 2001.

[Vai93] P. P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks*. Signal Processing. Prentice-Hall, 1993.

[vdBLK95] C. van den Branden Lambrecht et M. Karrakchou. Wavelet packet-based high-resolution spectral estimation. *Signal Processing*, 47 :135–144, 1995.

[vHCDvH94] S. van Huffel, H. Chen, C. Decaniere, et P. van Hecke. Algorithm for time-domain NMR data fitting based on total least squares. *Journal of Magnetic Resonance Series A*, 110 :228–237, 1994.

[WK85] M. Wax et T. Kailath. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-33 :387–392, 1985.

[WN95] M. R. Wall et D. Neuhauser. Extraction, through filter-diagonalization, of general quantum eigenvalues or classical normal mode frequencies from a small number of residues or a short-time segment of a signal. I. Theory and application to a quantum-dynamics model. *Journal of Chemistry and Physics*, 102 :8011–8022, 1995.

[WZ89] M. Wax et I. Ziskind. Detection of the number of coherent signals by the MDL principle. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(8) :1190–1196, 1989.

[XRK94] G. Xu, R. H. Roy, et T. Kailath. Detection of the number of sources via exploitation of centro-symmetric property. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1) :102–112, 1994.

[YB93] S. F. Yau et Y. Bresler. Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2) :804–820, 1993.

[Yin96] C. J. YING. *Stochastic exponential modeling and applications to radar signal processing*. Ph.d. dissertation, The Ohio State University, 1996.

[YM95] C.-J. YING et R. L. MOSES. On model order determination of complex exponential signals. Dans *Proceedings of SYSID'94. 10th IFAC Symposium on System Identification*, pages 83–88, 1995.

[YP95] Y.-X. YAO et S. M. PANDIT. Cramér-Rao lower bounds for a damped sinusoidal process. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(4) :878–885, 1995.

[YP99] C. J. YING et L. C. POTTER. Minimum variance linear estimation of amplitudes for exponential signal models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(9) :2522–2525, 1999.

[ZCS98] G. ZHU, W. Y. CHOY, et B. C. SANCTUARY. Spectral parameter estimation by an iterative quadratic maximum likelihood method. *Journal of Magnetic Resonance*, 135 :37–43, 1998.

[ZWYR89] Q.-T. ZHANG, K. M. WONG, P. C. YIP, et J. P. REILLY. Statistical analysis of the performance of information theoretic criteria in the detection of the number of signals in array processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(10) :1557–1567, 1989.