Problèmes aux limites pour les équations de Hamilton-Jacobi avec viscosité et données initiales peu régulières

Simona Dabuleanu

▶ **To cite this version:**

Simona Dabuleanu. Problèmes aux limites pour les équations de Hamilton-Jacobi avec viscosité et données initiales peu régulières. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2003. Français. NNT : 2003NAN10058 . tel-01748137

HAL Id: tel-01748137
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748137

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Simona Maria DĂBULEANU

Problèmes aux limites pour les équations de Hamilton-Jacobi avec viscosité et données initiales peu régulières

Soutenue publiquement le 23 juin 2003

Membres du jury :

Président :	
Bernard ROYNETTE	Professeur à l'Université Henri Poincaré , Nancy
Rapporteurs :	
Philippe LAURENÇOT	HDR-Chargé de Recherche CNRS à l'Université Paul Sabatier,Toulouse
Philippe SOUPLET	Professeur à l'Université de Picardie, Saint-Quentin
Examinateurs :	
Didier SCHMITT	Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy
Marius TUCSNAK	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy
Directeur de thèse :	
Saïd BENACHOUR	Professeur à l'Université Nancy 2

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Tout d'abord je tiens à exprimer ma profonde reconnaisance au Professeur Saïd Benachour pour avoir accepté de me guider dans ce travail durant ces trois dernières années. Cette thèse, dont on trouvera l'origine dans ses travaux, a pu être realisée en grande partie grâce à lui. Je lui serai toujours redevable pour ce qui'il m'a apporté par sa rigueur, ses connaissances, sa contribution à ma formation mathématique ainsi que sa cordialité et sa grande disponibilité.

Je suis spécialement reconnaisante à Bernard Roynette de m'avoir si chaleureusement accueilli au Département de Mathématiques de l'UHP, en tant que Responsable de DEA pendant ma toute première année à Nancy. Je suis très touchée par sa gentillesse et par l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.

Les Professeurs Philippe Laurençot et Philippe Souplet m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse. J'aimerais ici les remercier pour les nombreuses remarques et suggestions qui m'ont permis d'ameliorer le contenu de ce memoire.

Didier Schmitt et Marius Tucsnak (à qui je dois mon arrivée à Nancy) ont toujours manifesté un chaleureux intérêt pour mon travail. Je les remercie pour leurs précieuses indications, ainsi que pour la gentillesse d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai été très heureuse d'apprendre que le Professeur Grzegorz Karch a accepté de faire partie du jury en tant que professeur invité. Je lui en suis très reconnaissante.

Je trouve ici l'occasion de remercier tous ceux qui, professeurs ou amis, m'ont soutenu pendant ces trois dernières années. Je pense en particulier à Mădalina Deaconu et à Mihai Grădinaru qui m'ont beaucoup encouragé pendant cette période, sans oublier la bonne humeur de mes collègues : Takéo, Florent, Christophe, Bertrand, Olivier, Sébastian, Martin, Patricio...et bien d'autres encore.

Mes souvenirs remontent aussi à la période vécue en Roumanie en tant qu'étudiante à la Faculté de Mathématique de Craiova. Je voudrais également adresser mes plus sincéres remerciements au Professeur Vicenţiu Rădulescu que j'ai eu la chance d'avoir comme enseignant en EDP. Sans aucun doute, je peux dire que c'est lui qui est à l'origine de cette réussite. Je le remercie pour toute son aide, ses bons conseils et pour avoir accepté de faire partie du jury en tant que professeur invité.

Une autre personne qui revient dans mes pensées est le Professeur Aristide Leonte que je remercie pour sa manière discrète de nous faire apprendre la théorie des probabilités à l'Université.

Je voudrais remercier aussi tous mes anciens amis que j'ai laissés en Roumanie et les nouveaux amis que j'ai rencontré en France et à qui je dois la réussite du pot de cette thèse.

Enfin, je ne peux pas oublier le soutien et l'amour de mes parents, de ma famille et surtout celui de mon mari sans qui je n'aurais pas pu mener à son terme ce travail. Cette thèse leurs est dédiée.

À mon père ...

Table des matières

Introduction 9

Notations 17

Chapitre I. Problèmes aux limites de type Cauchy-Dirichlet pour l'équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité. 19

1. Introduction 19
2. Quelques résultats préliminaires sur l'équation de la chaleur 20
3. Résultats principaux 28
4. Preuve du Théorème I.2 31
5. Preuve du Théorème I.3 40
6. Preuve du Théorème I.4 47
7. Preuve du Théorème I.5 50
8. Preuve du Théorème I.6 54
9. Preuve du Théorème I.7 56
10. Preuve du Théorème I.8 58

Chapitre II. Problèmes aux limites de type Cauchy-Neumann pour l'équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité. 63

1. Introduction 63
2. Quelques résultats préliminaires sur l'équation de la chaleur avec une condition au bord homogène de type Neumann 64
3. Résultats principaux 73
4. Preuve du Théorème II.2 76
5. Preuve du Théorème II.3 83
6. Preuve du Théorème II.4 84
7. Preuve du Théorème II.5 96
8. Preuve du Théorème II.6 99

Chapitre III. Comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy-Dirichlet. 101

1. Introduction et résultats principaux 101
2. Preuve du Théorème III.1 104
3. Preuve du Théorème III.3 104

Chapitre IV. Comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy-Neumann. 111
1. Introduction et résultats principaux 111
2. Résultats préliminaires 116
3. Preuve du Théorème IV.1 121
4. Preuve du Théorème IV.2 134
5. Preuve du Théorème IV.3 137
6. Preuve du Théorème IV.5 143

Bibliographie 157

Introduction

1. Origine physique des équations étudiées

Cette thèse est consacrée à l'étude d'équations aux dérivées partielles de type "Hamilton-Jacobi avec viscosité" :

$$(VHJ) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans} \quad]0,+\infty[\times\Omega, \\ u(0) = \mu_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

avec une condition aux limites de type Dirichlet homogène :

$$(D) \qquad u = 0 \ \text{ sur } \ ]0,+\infty[\times\partial\Omega,$$

ou bien une condition aux limites de type Neumann homogène :

$$(N) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \ ]0,+\infty[\times\partial\Omega.$$

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et à frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Pour tout $x \in \partial\Omega$, $\nu(x)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x. Les paramètres a, p seront choisis telles que $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p > 0$ et la donnée initiale μ_0 sera une mesure de Radon bornée sur Ω, ou bien une fonction mesurable de l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, ou bien une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.

Les équations de type (VHJ) sont d'un grand intérêt aussi bien mathématique que physique. En effet, on les trouve, en particulier, dans les problèmes relatifs au calcul des variations, ainsi que les problèmes de réaction-diffusion. D'une part, elles peuvent servir de modèles dans la théorie des équations paraboliques, car elles constituent le plus simple exemple d'équation parabolique quasi-linéaire, dont le terme non-linéaire est une fonction du gradient de la solution. D'autre part, ces équations interviennent dans la théorie du contrôle détérministe et stochastique (voir [**36**]) ainsi que dans l'étude des problèmes de perturbations singulières qui jouent un rôle important dans la théorie des grandes déviations. Celle-ci est une partie de la théorie des perturbations aléatoires des systèmes dynamiques (voir [**6, 34, 35, 37**]). Plus précisément si on note par $P_\varepsilon(t,x)$ la probabilité qu'un processus de diffusion partant de x à l'instant t avec un petit bruit d'inténsité $\varepsilon > 0$ reste dans un domaine bornée $\Omega \in \mathbb{R}^N$ jusqu'à l' instant fixé $T > 0$, alors $P_\varepsilon(t,x)$ satisfait une équation parabolique linéaire dans $[0,T] \times \Omega$ avec les conditions aux limites :

$$P_\varepsilon(t,x) = 0, \quad \text{pour} \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega \quad \text{et} \quad P_\varepsilon(T,x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in \Omega.$$

La théorie des grandes déviations étudie le comportement de P_ε au voisinage de 0 lorsque ε tends vers 0. Une méthode classique qui répond à cette question est de considérer la fonction u_ε définie par :

$$u_\varepsilon = -\varepsilon \log P_\varepsilon.$$

Si le processus de diffusion est le mouvement brownien d'intensité $(2\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, alors la fonction u_ε vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta u_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon|^2 & \text{dans }]0,+\infty[\times\Omega, \\ u_\varepsilon = +\infty & \text{sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega, \\ u_\varepsilon(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

de plus, lorsque ε tend vers 0, on peut démontrer sous des hypothèses convenables que u_ε converge vers une fonction u, solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u|^2 & \text{dans }]0,+\infty[\times\Omega, \\ u = +\infty & \text{sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega, \\ u(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

Ce modèle correspond donc au problème (VHJ) avec condition au bord de type Dirichlet. Pour le problème de Neumann, on peut considérer des modèles de processus dont les trajectoires sont refléchies sur le bord du domaine Ω.

Signalons que ces équations interviennent aussi dans l'étude de la croissance de surfaces, qui sont en réalité des films minces, séparant deux couches (par exemple deux fluides de densités différentes : eau douce-eau salée, vapeur-eau, etc...).
Un modèle de croissance de surfaces qui se déplaceraient à vitesse constante a été développé par M.Kardar-G.Parisi-Y.-C.Zang dans [**45**]. Avec une approche "continue des mécanismes", ce modèle est décrit par l'équation aux dérivées partielles :

$$(KPZ_1) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \gamma \Delta h + \lambda |\nabla h|^2 + \eta.$$

Où la fonction h désigne la hauteur de la surface et t la variable temporelle. Le premier terme du membre de droite de l'équation (KPZ_1) représente la diffusion et γ peut être considéré comme "une tension de surface". Le deuxième terme du membre de droite provient du processus de déplacement des particules (la constante λ mesure par exemple la vitesse de sédimentation). Enfin, le dernier terme est produit par une force stochastique de courte mémoire et d'espérance nulle. Dans sa forme la plus simple, η représente un "bruit blanc" de loi Gaussienne. En prenant en compte d'autres effets de surface, J.Krug-H.Spohn, [**49**] ont étendu ce modèle avec l'EDP :

$$(KPZ_2) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \gamma \Delta h + \lambda |\nabla h|^p + \eta,$$

Pour $p > 0$ l'équation (KPZ_2) est connue sous le nom de l'équation KPZ généralisée. En particulier, en négligeant le bruit blanc η cette équation est parfois appelée équation KPZ déterministe généralisée.

2. Quelques références

Dans ce paragraphe on résume briévement les nombreuses contributions à l'étude du problème (VHJ) ainsi qu'aux problèmes voisins.

Le problème parabolique semi-linéaire :

$$(PS_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|u|^{\gamma-1}u & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega, \\ u = 0 \text{ sur} \quad]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(0) = \mu_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $\gamma > 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ a fait l'objet de nombreuses études.
Sans être exhaustif, on peut citer d'une part les travaux de F.B. Weissler [**70, 71**] qui a étudié l'existence et l'unicité des solutions faibles locales du problème (PS_1) avec une donné initiale une fonction mesurable dans l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega), q \geq 1$ et d'autre part P.L. Lions [**57**] et W.-M.Ni-P.E.Sacks [**59**] qui ont étudié le comportement asymptotique des solutions. H.Brezis-Th.Cazenave " ont revisité" le problème (PS_1) dans [**22**] et ont amelioré certains résultats en démontrant l'unicité des solutions dans une classe plus large et plus appropriée. H.Brezis-A.Friedman ont étudié dans [**23**] le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^N$ avec des données initiales moins régulières (des mesures de Radon bornées). Plus précisément ils ont démontré dans ce cas, l'existence de solutions faibles pour tout γ inférieur à un exposant critique $\gamma_c = \frac{N+2}{N}$ et la non-existence de solutions faibles dès que $\gamma \geq \gamma_c$. P.Baras-M.Pierre [**5**] ont donné des conditions nécesaires et suffisantes sur l'exposent γ et la donnée initiale μ_0 pour avoir l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème aux limites (PS_1).
Signalons que dans ces travaux il apparaît les exposants critiques suivants :

$$\gamma_c = \frac{N+2}{N} \quad \text{et} \quad q_c = \frac{N(\gamma-1)}{2},$$

et on peut observer que :

$$q_c \geq 1 \Longleftrightarrow \gamma \geq \gamma_c.$$

P.Quittner [**61**] et P.Quittner-Ph.Souplet [**62**] ont étudié des systèmes paraboliques du type (PS_1) et (VHJ).

Un autre problème lié à (VHJ) est le problème parabolique semi-linèaire :

$$(PS_2)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|u|^{\gamma-1}u + b|\nabla u|^p & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega, \\ u = 0 \text{ sur} \quad]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(0) = \mu_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, $\gamma, p > 1$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
M. Chipot et F.B. Weissler [**26**] se sont intéréssés à l'existence de solutions globales du problème (PS_2) lorsque $a > 0$ et $b < 0$. Ils ont mis en évidence la compétition entre les paramètres γ et p, en donnant des conditions suffisantes sur la donnée initiale μ_0 et les exposants γ et p pour que les solutions explosent en temps fini.

D'autres investigations sur des problèmes du type (PS_2) ont été faites par L.Boccardo-F.Murat-J.-P.Puel [**19**], Ph.Souplet-F.B.Weissler [**68**] et plus récemment par F.Andreu-L.Boccardo-L.Orsina-S.Segura de León [**4**] et Ph.Souplet [**66**], [**67**].

Le problème de Cauchy dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$:

$$(PC_3)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N, \\ u(0) = \mu_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

a été beaucoup étudié. Lorsque la donnée initiale est assez régulière, par exemple $\mu_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ telle que μ_0 ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 soient bornées sur $\mathbb{R}^N$, L.Amour-M.Ben-Artzi [**3**] et M. Ben-Artzi [**7**] ont démontré l'existence globale et l'unicité des solutions classiques pour le problème de Cauchy (PC_3) lorsque $p \geq 1$. B.Gilding-M.Guedda-R.Kersner [**39**] ont éténdu ces résultats aux données initiales $\mu_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $p > 0$.
Si la donnée initiale μ_0 n'est pas régulière, plus précisément si μ_0 est dans un espace de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < \infty$ ou bien si μ_0 est une mesure de Radon bornée, des résultats de (non-)existence et de (non-)unicité de solutions faibles du problème (PC_3) ont été obtenus par M.Ben-Artzi-Ph. Souplet-F.B.Weissler dans [**9**] et S.Benachour-Ph.Laurençot dans [**13**], en fonction des paramètres $p \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Dans leur étude un rôle essentiel est joué par les deux exposants critiques :

$$p_c = \frac{N+2}{N+1} \quad \text{et} \quad q_c = \frac{N(p-1)}{2-p} \quad \text{si } p < 2,$$

où :

$$q_c \leq 1 \Leftrightarrow p \leq p_c.$$

Outre l'existence et l'unicité de solutions pour le problème de Cauchy, le comportement asymptotique des solutions est analysé par : S. Benachour-Ph. Laurençot-D. Schmitt dans [**11**], S. Benachour-Ph. Laurençot-D. Schmitt-Ph. Souplet dans [**12**], B. Gilding-M. Guedda-R. Kersner dans [**39**], M.Ben-Artzi-H.Koch dans [**8**] et Ph.Laurençot-Ph.Souplet dans [**54**]. Par une méthode probabiliste S.Benachour-B.Roynette-P.Valois [**14**] et [**15**] ont construit la solution fondamentale de la première équation de (PC_3) lorsque $p = 1$. Cette solution fondamentale permet d'obtenir la description du comportement asymptotique des solutions.

3. Le problème aux limites sur des domaines bornés, pour les équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité

Sur des ouverts bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, le problème (VHJ) avec une condition aux limites de type Dirichlet homogène (D) ou Neumann homogène (N) a été très peu étudié.
Parmi les résultats connus on mentionne celui de N. Alaa [**1**], qui a démontré l'existence et l'unicité de solutions "mild", lorsque la donnée initiale est une mesure de Radon bornée et $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$. Rappelons aussi qu'à l'aide de propriétés sur les semi-groupes qui préservent la monotonie, M.G.Crandall-P.L.Lions-P.E.Souganidis [**28**] ont prouvé l'existence d'une borne universelle pour les solutions positives du problème de Cauchy-Dirichlet lorsque $p > 1$, $a < 0$ et μ_0 est une fonction continue positive qui s'annule sur la frontière $\partial\Omega$ (Théorème 2.1, p.172 dans [**28**]). Cette estimation leur a permis de démontrer ensuite l'existence de solutions et l'unicité dans certains cas. Ainsi, ils ont prouvé que le problème de Cauchy-Dirichlet homogène avec la condition initiale $\mu_0 = +\infty$ sur un ouvert $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et $\mu_0 = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ admet une unique solution positive.
Un résultat plus récent est celui de Ph. Souplet [**67**], qui a démontré le "blow-up du gradient des solutions" lorsque $a > 0$, $p > 2$ et pour des données initiales "assez gandes".
Finalement on rappelle que le problème stationnaire (elliptique) associé au problème (VHS), a été étudié, entre autres, par P.L. Lions [**56**] et N.Alaa- M.Pierre [**2**].

4. Résumé des résultats obtenus

Dans cette thèse on se propose de continuer les investigations sur les solutions du problème de Cauchy-Dirichlet $[(VHJ) + (D)]$ et Cauchy-Neumann $[(VHJ) + (N)]$ et on étudie certaines questions telles que l'existence de solutions faibles, l'unicité, la régularité et le comportement asymptotique des solution, lorsque t tend vers $+\infty$.
Un intérêt particulier est accordé aux problèmes $[(VHJ) + (D)]$ et $[(VHJ) + (N)]$ lorsque la donnée initiale μ_0 est peu régulière ou même singulière.

Dans le Chapitre I, on étudie le problème de Cauchy-Dirichlet et on établit des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions du problème $[(VHJ) + (D)]$ en fonction de la donnée initiale μ_0, de l'exposant p et du signe de a. On mentionne que les problèmes aux limites dans des ouverts bornés, n'ont pas été étudié lorsque $p \in]0, 1[$. Voici, les résultats principaux de ce chapitre :

(*i*) Cas $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. D'une part, pour $0 < p < \frac{N+2}{N+1}$, et μ_0 une mesure de Radon bornée, on démontre en utilisant un théorème de point fixe, que le problème $[(VHJ) + (D)]$ admet une solution faible; de plus cette solution est unique si $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. D'autre part, si $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on obtient l'existence et l'unicité des solutions lorsque la donnée initiale μ_0 est dans $L^q(\Omega)$ avec $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.

(*ii*) Lorsque $a < 0$ et $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on montre que le problème $[(VHJ) + (D)]$ admet au moins une solution pour tout $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$.

(*iii*) Dans le cas $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $\mu_0 = \delta_{x_0}$ (masse de Dirac au point x_0 de Ω) et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on prouve qu'il n'existe pas de solutions faibles pour le problème $[(VHJ) + (D)]$.

(*iv*) Finalement on étudie le cas sur-quadratique. On sait que, si $a > 0$, $p > 2$ et μ_0 assez grand, alors le gradient de la solution classique u du problème $[(VHJ) + (D)]$ explose en temps fini, (tandis que u reste uniformément bornée, voir [**67**]). Dans cette partie on démontre que pour $a < 0$ et $p \geq 2$ le problème $[(VHJ) + (D)]$ admet au moins une solution globale pour des données initiales positives dans $L^1_{+,approx}$ (cf. définition (3.6) dans le Chapitre I).

Dans le Chapitre II, on s'intèresse au problème de Cauchy-Neumann $[(VHJ) + (N)]$. Comme dans le Chapitre I nous établissons des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions du problème $[(VHJ) + (N)]$ en fonction de la donnée initiale μ_0, de l'exposant p et du signe du nombre réel a. Les résultats principaux peuvent être résumés ainsi :

(*i*) Cas $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. D'une part, pour $0 < p < \frac{N+2}{N+1}$, et μ_0 une mesure de Radon bornée, on démontre en utilisant un théorème de point fixe, que le problème $[(VHJ) + (N)]$ admet une solution faible; de plus, cette solution est unique si $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. D'autre part, si $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on obtient l'existence et l'unicité des solutions lorsque la donnée initiale μ_0 est dans $L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.

(*ii*) Lorsque $a < 0$ et $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on montre que le problème $[(VHJ) + (N)]$ admet au moins une solution pour tout $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$.

(*iii*) Finalement dans le cas $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $\mu_0 = \delta_{x_0}$ (la masse de Dirac au point x_0 de Ω) et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on prouve qu'il n'existe pas de solutions faibles pour le problème $[(VHJ)+(N)]$.

Le Chapitre III est consacré à l'étude du comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy-Dirichlet $[(VHJ) + (D)]$. On présente les résultats obtenus, en mentionnant toutefois que le sujet est loin d'être épuisé.

(*i*) Lorsque $a < 0$, $p \in]0, 1[$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, alors il y a extinction, en temps fini, des solutions du problème $[(VHJ) + (D)]$. C'est à dire :
il existe $T^* > 0$ tel que toute solution u du problème $[(VHJ) + (D)]$ vérifie :

$$u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout} \quad (t, x) \in]T^*, +\infty[\times\Omega.$$

(*ii*) Si $a < 0$, $p \geq 1$ et $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$, alors toute solution faible u du problème de Cauchy-Dirichlet converge vers 0, uniformément sur $\overline{\Omega}$, lorsque $t \to +\infty$.

(*iii*) Finalement on étudie le cas $a > 0$ et $p \in [1, 2[$. Si $\mu_0 \in L^q(\Omega), \mu_0 \geq 0$ avec :

$$q \geq 1 \text{ lorsque } \ p \in [1, \tfrac{N+2}{N+1}[\text{ et } \ q > q_c = \tfrac{N(p-1)}{2-p} \text{ lorsque } p \in [\tfrac{N+2}{N+1}, 2[,$$

alors la solution globale u du problème $[(VHJ) + (D)]$ converge vers 0, uniformément sur $\overline{\Omega}$, lorsque $t \to \infty$.

Dans le Chapitre IV, on revient d'abord sur l'étude du problème de Cauchy-Nemann $[(VHJ) + (N)]$ lorsque Ω est un ouvert convexe, borné et on donne des résultats d'existence et d'unicité

de la solution lorsque la donnée initiale est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Ensuite, on aborde l'étude du comportement asymptotique des solutions en fonction de l'exposant p et du signe de a. Cette étude est basée sur des estimations sur le gradient des solutions du problème de Cauchy-Neumann$[(VHJ)+(N)]$, estimations qui sont obtenues par une technique due à S.N. Bernstein. Ces estimations font l'objet des Théorèmes IV.1 et IV.2 et constituent la clé essentielle pour l'obtention, en particulier, d'un résultat d'extinction des solutions, énoncé dans le Théorème IV.3 :

Si $p \in]0.1[$ *alors pour toute solution* u *du problème* $[(VHJ)+(N)]$ *avec une donnée initiale dans* $C(\overline{\Omega})$, *il existe* $T^* > 0$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$u(t,x) \equiv c, \ \textit{pour tout } t > T^* \ \textit{et } x \in \Omega.$$

Cette propriété est appelée : propriété d'extinction en temps fini du gradient de la solution u du problème $[(VHJ)+(N)]$.

Enfin, dans le Théorème IV.3 on prouve que pour $p \geq 1$ la solution du problème de Cauchy-Neumann $[(VHJ)+(N)]$ converge, uniformément sur $\overline{\Omega}$, vers une constante, lorsque $t \to +\infty$.

Finalement, nous considérons aussi le problème aux limites, peu habituel, suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times]0,+\infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \ ]0,+\infty[\times \partial\Omega, \\ u(0) = +\infty \quad \text{dans } \ D, \\ u(0) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \setminus \overline{D}, \end{cases}$$

où $p \in]1,+\infty[$, Ω et D sont deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ à frontières assez regulières tels que $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et Ω est supposé convexe. Le problème de Cauchy-Dirichlet associé au problème ci-dessus a déjà été étudié dans [**28**]. Avec le Théorème IV.5, nous complétons les résultats de [**28**], en démontrant l'existence des solutions positives lorsque $p > 1$ et l'unicité lorsque $p \in]1,2[$. Signalons que les estimations sur le gradient des solutions qui sont obtenues dans le Théorème IV.2 jouent un rôle essentiel dans la preuve de l'existence des solutions.

Notations

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière assez régulière.
Pour $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$, $B_r(x_0)$ est la boule de centre x_0 et rayon r.
Pour tout $0 < \tau < T \leq \infty$ notons par $Q_T =]0,T[\times\Omega$, $\Gamma_T =]0,T[\times\partial\Omega$, $Q_{\tau,T} =]\tau,T[\times\Omega$ et $\Gamma_{\tau,T} =]\tau,T[\times\partial\Omega$.
$C(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.
$C^+(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions positives appartenant à $C(\overline{\Omega})$.
$C_b(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω.
$C_0(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues, bornées sur $\overline{\Omega}$ et qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$;
$C_0^+(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions positives appartenant à $C_0(\overline{\Omega})$.
$C_c(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues et à support compact dans Ω.
$C_c^\infty(\Omega)$ (resp. $C_c^\infty(Q_T)$) est l'espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω et à support compact dans Ω (resp. Q_T).
$C^{1,2}(Q_T)$ est l'espace des fonctions continues u dans Q_T telles que les dérivées : $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $(\dfrac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq i\leq N}$, $(\dfrac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j})_{1\leq i,j\leq N}$, existent et appartiennent à $C(Q_T)$.
On introduit les espaces de Hölder :
Soit α un nombre réel positif et $[\alpha]$ sa partie entière telle que $[\alpha] < \alpha$, alors :
$C^\alpha(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions f définies sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées partielles :
$\dfrac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ existent pour tout entiers $k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ tels que $k_1+k_2+\cdots+k_n \leq [\alpha]$, et sont Hölder uniformément continues de paramètre $\alpha - [\alpha]$ dans $\overline{\Omega}$. On muni cet espace de la norme :

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sum_{\substack{k_1,k_2,\cdots,k_n\geq 0 \\ k_1+k_2+\cdots+k_n\leq[\alpha]}} \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} \right\|_{C^{\alpha-[\alpha]}(\overline{\Omega})} \quad \text{si} \quad \alpha > 1,$$

où :

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega} \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^p} \quad \text{si} \quad p \in]0,1].$$

Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ alors :
$C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q})$ désigne l'espace des fonctions f définies sur $\overline{Q}$ dont les dérivées partielles :
$\dfrac{\partial^{l+k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial t^l \partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$ existent pour tout entiers $l, k_1, k_2, \cdots, k_n \geq 0$ tels que $2l+k_1+k_2+\cdots+$

$k_n \leq [\alpha]$, sont uniformément continues dans $\overline{Q}$ et telle que la norme suivante :

$$\|f\|_{C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q})} = \sum_{\substack{l,k_1,k_2,\cdots,k_n \geq 0 \\ 2l+k_1+k_2+\cdots+k_n \leq [\alpha]}} \left\| \frac{\partial^{2l+k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial t \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{C^{(\alpha-[\alpha])/2,\alpha-[\alpha]}(\overline{Q})} \quad \text{si} \quad \alpha > 1,$$

soit finie, où :

$$\|f\|_{C^{(\alpha-[\alpha])/2,\alpha-[\alpha]}(\overline{Q})} = \sup_{(t,x)\in\overline{Q}} |f(t,x)| + \sup_{\substack{(s,x),(t,y)\in\overline{Q} \\ (s,x)\neq(t,y)}} \frac{|f(s,x)-f(t,y)|}{|t-s|^{\alpha/2}+|x-y|^{\alpha}} \quad \text{si} \quad p \in]0,1].$$

On notera par : $C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$ (resp. $C^{\alpha/2,\alpha}_{loc}(Q)$), l'espace des fonctions f appartenant à $C^{\alpha}(\overline{\Omega'})$ (resp. $C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q'})$) pour tout ouvert Ω' tel que $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ (resp. Q' tel que $Q' \subset \overline{Q'} \subset Q$).

On note par :

$\mathcal{M}_b(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon bornées sur Ω. $\mathcal{M}_b(\Omega)$ sera muni de la norme usuelle $\| \ \|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}$.

$\mathcal{M}^+_b(\Omega)$ est l'espace des mesures de Radon bornées et positives ;

Pour $q \geq 1$, $\| \ \|_q$ désigne la norme dans l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega)$.

$L^q_+(\Omega)$ l'espace des fonctions positives appartenant à $L^q(\Omega)$.

Pour $q \geq 1$ et $p \geq 1$, on note par :

$W^{1,q}(\Omega)$ l'espace Sobolev des fonctions u de $L^q(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distributions : $(\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq i\leq N}$, soient dans $L^q(\Omega)$;

$W^{1,q}(Q_T)$ l'espace Sobolev des fonctions u de $L^q(Q_T)$ telles que les dérivées au sens des distributions : $\frac{\partial u}{\partial t}, (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq i\leq N}$ soient dans $L^q(Q_T)$.

$W^{1,2}_q(Q_T)$ l'espace Sobolev des fonctions u de $L^q(Q_T)$ dont les dérivées au sens des distributions : $\frac{\partial u}{\partial t}$, $(\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq i\leq N}$, $(\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j})_{1\leq i,j\leq N}$, existent et appartiennent à $L^q(Q_T)$.

$W^{1,2}_{p,q}(Q_T)$ l'espace Sobolev des fonctions u de $L^p(0,T;L^q(\Omega))$ dont les dérivées au sens des distributions : $\frac{\partial u}{\partial t}, (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1\leq i\leq N}$, $(\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j})_{1\leq i,j\leq N}$, existent et appartiennent à $L^p(0,T;L^q(\Omega))$.

On note par :

$(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ le semi-groupe de contraction dans $L^q(\Omega), q \geq 1$ pour l'équation de la chaleur avec une condition au bord homogène de type Dirichlet.

$(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe de contraction dans $L^q(\Omega), q \geq 1$ pour l'équation de la chaleur avec une condition au bord homogène de type Neumann.

La fonction inconnue u sera une fonction mesurable sur $Q_T =]0,T[\times\Omega$ à valeurs réelles. Afin de simplifier les notations, pour tout $t \in]0,T[$, on définit la fonction $u(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ par $u(t)(x) = u(t,x)$ pour $x \in \Omega$. Dans la suite, on utilisera $u(t)$ à la place de $u(t,\cdot)$ et vice-versa. Pour une telle fonction, u^+ est définie par $u^+ = \max\{0,u\}$.

CHAPITRE I

Problèmes aux limites de type Cauchy-Dirichlet pour l'équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité.

RÉSUMÉ. On étudie l'existence, l'unicité et la régularité des solutions faibles pour l'équation de Hamilton-Jacobi visqueuse $u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p$, $t > 0$, $x \in \Omega$ avec condition de Dirichlet homogène au bord et donnée initiale μ_0 non régulière. L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est borné et régulier, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et p est un nombre réel positif. On considère en particulier les cas où la donnée initiale μ_0 est une mesure de Radon bornée ou bien appartient à un espace de Lebesgue $L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$.

1. Introduction

On considère le problème aux limites parabolique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans} \quad]0, +\infty[\times\Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad]0, +\infty[\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = \mu_0(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné à frontière régulière, de classe au moins C^3. Le problème de Cauchy sur l'espace entier $\mathbb{R}^N$ a été beaucoup étudié (voir [**3, 7, 9, 13, 11, 12, 15, 39, 68**]). Lorsque la donnée initiale est continue bornée, $\mu_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $p > 0$, dans [**39**]. B.Gilding-M.Guedda- R.Kersner ont montré d'une part l'existence et l'unicité des solutions fortes du problème de Cauchy et d'autre part ils ont étudié la régularité et le comportement asymptotique des solutions. Si la donnée initiale μ_0 n'est pas régulière, plus précisément dans l'espace de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^N), 1 \leq q < \infty$ ou bien une mesure de Radon bornée, plusieurs résultats d'existence et de non existence pour des solutions faibles du problème (1.1) ont été présentés dans [**9**] et [**13**], en fonction de l'exposant $p \geq 1$. Sur des ouverts bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dans [**1**] l'existence et l'unicité des solutions mild ont été démontrées, lorsque la donnée initiale est une mesure de Radon bornée et $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$. Rappelons qu'à l'aide de propriétés sur les semi-groupes qui préservent la monotonie, M.G.Crandall, P.L.Lions et P.E.Souganidis ont prouvé l'existence d'une borne universelle pour les solutions positives du problème de Cauchy-Dirichlet lorsque $p > 1$ et μ_0 est une fonction continue positive qui s'annule sur la frontière $\partial\Omega$ (Théorème 2.1, p.172 dans [**28**]). Aussi dans [**19**], [**40**] et [**53**] on trouve des résultats d'éxistence des "solutions faibles" pour des problème parabolique non-linéaire plus générale avec des conditions aux limites de type Dirichlet.

Dans ce chapitre, on établit plusieurs résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions du problème (1.1) en fonction de la donnée initiale μ_0 et de l'exposant p. On mentionne

aussi que le cas $p \in]0,1[$ n'a jamais été étudié dans des ouverts bornés. Voici en résumé les résultats principaux :

(*i*) Cas $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. D'une part, pour $0 < p < \frac{N+2}{N+1}$, et μ_0 une mesure de Radon bornée, on démontre en utilisant des théorèmes du point fixe, que le problème (1.1) admet une solution faible; de plus cette solution est unique si $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. D'autre part, si $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on obtient l'existence et l'unicité de la solution lorsque la donnée initiale μ_0 est dans $L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.

(*ii*) Lorsque $a < 0$ et $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on montre que le problème (1.1) admet au moins une solution pour tout $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$.

(*iii*) Dans le cas $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $\mu_0 = \delta_{x_0}$ (masse de Dirac en un point x_0 de Ω) et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on prouve qu'il n'y a pas de solutions faibles pour le problème (1.1).

(*iv*) Finalement, on étudie le cas sur-quadratique. Si $a > 0$, $p > 2$ et μ_0 assez grand, on sait que le gradient de la solution classique u du problème (1.1) explose en temps fini, tandis que u reste uniformément borné (cf. [**67**]). Dans cette dernière partie on démontre que pour $a < 0$ et $p \geq 2$ le problème (1.1) admet une unique solution globale pour des données initiales dans $L^1(\Omega)$ et positives.

2. Quelques résultats préliminaires sur l'équation de la chaleur

On rappelle d'abord les définitions suivantes :

Définition I.1. *Soient $\{\mu_n\}_n$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_b(\Omega)$ et $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. On dit que*

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mu \quad \textit{dans} \quad \mathcal{M}_b(\Omega) \quad \textit{faible},$$

si pour tout $\varphi \in C_b(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi(x)\mu_n(dx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi(x)\mu(dx) \quad .$$

Théorème I.1. *(*[**5, 21, 24, 63**]*) Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$. Alors le problème aux limites :*

$$\begin{cases} u \in C([0,+\infty[; L^q(\Omega)) \cap L^1(0,T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \textit{dans} \qquad \mathcal{D}'(Q_T) \\ u(t,x) = \mu_0 \qquad \textit{dans} \qquad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une unique solution, pour tout $T > 0$. Posons

$$e^{t\Delta}\mu_0 = u(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0+\infty[,$$

alors $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \geq 1$ (dans le cas $q = 1$ voir [**24, 63**] *où ce semi-groupe est prolongé de $L^2(\Omega)$ à $L^1(\Omega)$).*

Définition I.2. *$(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ est appelé le semi-groupe de la chaleur.*

Nous rappelons quelques propriétés concernant le semi-groupe de la chaleur $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$.

Proposition I.1. *Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, alors pour tout $r \in [q, +\infty[$ (resp. $r = \infty$) la fonction $t \to e^{t\Delta}\mu_0$ est dans $C(]0,\infty[; W_0^{1,r}(\Omega))$ (resp. $C(]0,\infty[; W^{1,\infty}(\Omega))$). De plus, il existe une constante positive $C(q,r)$ telle que :*

$$\|e^{t\Delta}\mu_0\|_r \leq C(q,r)t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_q \quad \text{pour tout} \quad t > 0 \tag{2.2}$$

$$\|\nabla e^{t\Delta}\mu_0\|_r \leq C(q,r)(1+t^{-(\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})})\|\mu_0\|_q \quad \text{pour tout} \quad t > 0 \tag{2.3}$$

Voir [**63**] (Lemme 3, p.25) pour la preuve de (2.2) et [**68**] (Lemme A6, Lemme A7) pour la preuve de (2.3).

Remarque I.1. *L'estimation (2.3) est vraie même pour $r = q = \infty$ (voir par exemple* [**69**]*, p.35), et on obtient dans ce cas :*

$$\|\nabla e^{t\Delta}\mu_0\|_\infty \leq C(1+t^{-\frac{1}{2}})\|\mu_0\|_\infty, \quad \text{pour tout} \quad t > 0, \tag{2.4}$$

où la constante C dépend seulement de N et Ω.

Dans la suite on veut généraliser cette proposition pour des données mesures. Pour ce faire on donne d'abord un résultat d'existence de solutions de l'équation de la chaleur avec pour donnée initiale, une mesure de Radon bornée.

Proposition I.2. *Pour tout $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ l'équation de la chaleur à donnée initiale μ_0 admet une unique solution faible u au sens :*

$$\begin{cases} u \in C(]0,+\infty[, L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D}'(Q_T) \\ u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{M}_b(\Omega) \ \text{faible} \end{cases} \tag{2.5}$$

pour tout $T > 0$. De plus, pour $s, r \geq 1$ vérifiant : $\frac{2}{s} + \frac{N}{r} > N + 1$ on a :

$$u \in L^\infty(0,\infty; L^1(\Omega)) \cap L^s(0,T; W_0^{1,r}(\Omega))$$

et

$$\|u(t)\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \tag{2.6}$$

$$\|u\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Remarque I.2. *Si u est une fonction dans $C((0,T); L^1(\Omega))$ telle que $u(t) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0$ dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$ faible, alors $u \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$.*

Démonstration:

a) Unicité

Grâce à la Remarque I.2, l'unicité est une conséquence directe du Lemme 3.4 dans [**5**].

b) Existence

Si on note par p_Ω le noyau de la chaleur avec une condition au bord de type Dirichlet homogène (voir par exemple [**30**]), alors p_Ω satisfait les propriétés suivantes :

$$p_\Omega \in C^\infty(]0,\infty[\times\Omega\times\Omega) \cap C(]0,\infty[\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}) \tag{2.8}$$

Pour tout $\varphi \in L^1(\Omega)$ et $x \in \Omega$:

$$e^{t\Delta}\varphi(x) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\varphi(y)\,dy, \tag{2.9}$$

Pour tout $t, s > 0$ et $x, y \in \Omega$:

$$p_\Omega(t+s,x,y) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,z)\cdot p_\Omega(s,z,y)\,dz. \tag{2.10}$$

et

$$p_\Omega \geq 0 \text{ dans }]0,\infty[\times\Omega\times\Omega \text{ avec } \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\,dy \leq 1, \text{ pour tout } x\in\Omega,\ t>0. \tag{2.11}$$

Soient $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $(u_0^n)_n$ une suite de fonctions dans $C_c^\infty(\Omega)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} u_0^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0 \ \text{ dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \text{ faible,} \\ \|u_0^n\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \end{cases} \tag{2.12}$$

et notons par :

$$u^n(t,x) = e^{t\Delta}u_0^n(x) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)u_0^n(y)\,dy. \tag{2.13}$$

Alors (cf. par exemple Lemme 3.3 dans [**5**]) u^n est l'unique solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} u^n \in C([0,T[;L^1(\Omega))\cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{D}'(Q_T) \\ u^n(0) = u_0^n \ \text{ dans } \ \Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

De plus, pour tout $s, r \geq 1$ tels que : $\frac{2}{s} + \frac{N}{r} > N+1$ on a :

$$u^n \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))\cap L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$$

et

$$\|u^n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|u^n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)\|u_0^n\|_1 \tag{2.15}$$

Grâce à (2.8) on peut considérer :

$$u(t,x) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\mu_0(dy) \tag{2.16}$$

En utilisant (2.8) et (2.12) on peut passer à la limite dans (2.13) et on obtient :

$$u^n(t,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t,x), \text{ pour tout } (t,x)\in]0,\infty[\times\Omega \tag{2.17}$$

De plus, grâce à (2.12) on peut appliquer le résultat de compacité du Lemme 3.3 dans [**5**] et on déduit que la suite $(u^n)_n$ est relativement compacte dans $L^r(Q_T)$ pour tout $r \in [1, \frac{N+2}{N}[$. Ainsi, de (2.17) il résulte que, à une sous-suite près :

$$u^n \to u \text{ dans } L^r(Q_T). \tag{2.18}$$

Ce qui nous permet de passer à la limite dans (2.14) et on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{D}'(Q_T) \tag{2.19}$$

Afin d'identifier la donnée initiale, on considère $\varphi \in C_b(\Omega)$. D'après (2.16) on a :

$$\int_\Omega u(t,x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \Big(\int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\mu_0(dy)\Big)\varphi(x)dx = \int_\Omega \Big(\int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\varphi(x)dx\Big)\mu_0(dy)$$
$$= \int_\Omega e^{t\Delta}\varphi(y)\mu_0(dy) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi(y)\mu_0(dy),$$

où la dernière limite est obtenue grâce au Théorème de la convergence dominée car :

$$e^{t\Delta}\varphi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varphi \ \text{ p.p. dans } \ \Omega$$

et

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty.$$

D'une part, pour montrer (2.6) il suffit d'intégrer (2.16) sur Ω et d'utiliser la propriété (2.11) du noyau de la chaleur.

D'autre part, pour montrer (2.7), on reconsidère la suite $(u^n)_n$ définie par (2.13) . Grâce à (2.15) et (2.12) la suite $(u^n)_n$ est bornée dans $L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$ pour tout $s,r>0$ vérifiant $\frac{2}{s}+\frac{N}{r} > N+1$. Par conséquent, à une sous-suite près :

$$u^n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega)),$$

et

$$\|u\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u^n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}.$$

Ainsi l'inégalité (2.7) est établie.

Soient $t,s>0$, alors, en utilisant (2.10) et (2.16) on obtient :

$$u(t+s,x) = \int_\Omega p_\Omega(t+s,x,y)\mu_0(dy) = \int_\Omega\int_\Omega p_\Omega(t,x,z)p_\Omega(s,z,y)dz\mu_0(dy)$$
$$= \int_\Omega p_\Omega(t,x,z)u(s,z)dz = e^{t\Delta}u(s)(x)$$

Comme $u(s) \in L^1(\Omega)$ pour tout $s>0$, on déduit que l'application $t \to u(t)$ est dans $C(]0,T[;L^1(\Omega))$ ce qui achève la preuve de la Proposition I.2. □

En notant par $e^{t\Delta}\mu_0$ la solution faible, donnée par la Proposition I.2 on a :

$$\begin{cases} e^{(t+s)\Delta}\mu_0 = e^{t\Delta}e^{s\Delta}\mu_0 \ \text{ pour tout } \ s>0, t>0, \\ \lim\limits_{t\to 0} e^{t\Delta}\mu_0 = \mu_0 \ \text{ dans } \ \mathcal{M}_b(\Omega) \ \text{ faible}, \\ \|e^{t\Delta}\mu_0\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Avec les notations ci-dessus on peut généraliser la Proposition I.1 à des données initiales dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$.

Proposition I.3. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Alors pour tout $r \in [1,+\infty[$ (resp. $r=\infty$) la fonction $t \to e^{t\Delta}\mu_0$ est dans $C(]0,\infty[;W_0^{1,r}(\Omega))$ (resp. $C(]0,\infty[;W^{1,\infty}(\Omega))$). De plus il existe une constante positive $C(r)$ telle que :*

$$\|e^{t\Delta}\mu_0\|_r \leq C(r)t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \ \text{ pour tout } \ t>0, \tag{2.21}$$

$$\|\nabla e^{t\Delta}\mu_0\|_r \leq C(r)(1+t^{-(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})})\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \ \text{ pour tout } \ t>0. \tag{2.22}$$

Démonstration:
Soit $\varepsilon \in]0,t[$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ alors $e^{\varepsilon\Delta}\mu_0 \in L^1(\Omega)$ et grâce à la Proposition I.1, et à la relation (2.20) on a d'une part :

$$\begin{aligned}\|e^{t\Delta}\mu_0\|_r = \|e^{(t-\varepsilon)\Delta}e^{\varepsilon\Delta}\mu_0\|_r &\leq C(r)(t-\varepsilon)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|e^{\varepsilon\Delta}\mu_0\|_1 \\ &\leq C(r)(t-\varepsilon)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\|\nabla e^{t\Delta}\mu_0\|_r = \|\nabla(e^{(t-\varepsilon)\Delta}e^{\varepsilon\Delta}\mu_0)\|_r &\leq C(r))(1+(t-\varepsilon)^{-(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})})\|e^{\varepsilon\Delta}\mu_0\|_1 \\ &\leq C(r)(1+(t-\varepsilon)^{-(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})})\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}\end{aligned}$$

Pour obtenir (2.21) et (2.22), il suffit de faire tendre $\varepsilon \searrow 0$ dans les inégalités ci-dessus.
Afin de démontrer que $e^{t\Delta}\mu_0 \in C(]0,\infty[;W_0^{1,r}(\Omega))$ (resp. $e^{t\Delta}\mu_0 \in C(]0,\infty[;W^{1,\infty}(\Omega))$), on fixe $t_0 \in]0,+\infty[$ et on considère $(t_n)_n$ une suite de nombres réels qui converge vers t_0. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t_n - 2\varepsilon > 0$ et si on note $u_0^\varepsilon = e^{\varepsilon\Delta}\mu_0$, alors, $u_0^\varepsilon \in L^1(\Omega), r \geq 1$, et grâce à la continuité en t pour le semi-groupe de la chaleur dans $L^r(\Omega), r \geq 1$ on a :

$$\|e^{t_0\Delta}\mu_0 - e^{t_n\Delta}\mu_0\|_r = \|e^{(t_0-\varepsilon)\Delta}u_0^\varepsilon - e^{(t_n-\varepsilon)\Delta}u_0^\varepsilon\|_r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même, la relation (2.3) implique :

$$\begin{aligned}\|\nabla(e^{t_0\Delta}\mu_0 - e^{t_n\Delta}\mu_0)\|_r &= \|\nabla e^{\varepsilon\Delta}(e^{(t_0-2\varepsilon)\Delta}u_0^\varepsilon - e^{(t_n-2\varepsilon)\Delta}u_0^\varepsilon)\|_r \\ &\leq C(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}})\|e^{(t_0-2\varepsilon)\Delta}u_0^\varepsilon - e^{(t_n-2\varepsilon)\Delta}u_0^\varepsilon\|_r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

et la démonstration de la Proposition I.3 est achevée. □

Dans la suite, on considère le problème aux limites non-homogène pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad Q_T, \\ u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u(0,x) = \mu_0(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

On introduit les définitions suivantes :

Définition I.3. *Soient $T > 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $f \in L^1(Q_T)$. On appelle solution faible du problème (2.23), une fonction u qui vérifie :*

$$\begin{cases} u \in C(]0,T[;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T) \\ u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0(x) \quad \textit{dans} \quad \Omega \quad \textit{faible.} \end{cases} \tag{2.24}$$

Remarque I.3. *Soit $f \in L^1(Q_T)$, alors $f(s) \in L^1(\Omega)$ pour presque tout $s \in]0,T[$. Puisque $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction dans $L^1(\Omega)$ (voir par exemple* [**24**]*) on a :*

$$\|e^{(t-s)\Delta}f(s)\|_1 \leq \|f(s)\|_1.$$

Par conséquent, $\int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds$ *est une intégrale de Bochner absolument convergente dans l'espace* $L^1(\Omega)$. *De plus* $t \to \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds$ *est dans* $C([0,T], L^1(\Omega))$. *Ainsi, il est plus pratique de travailler avec la solution "mild".*

Définition I.4. *Soient* $T > 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ *et* $f \in L^1(Q_T)$. *On appelle solution mild du problème (2.23), une fonction* $u \in C([0,T[; L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T; W_0^{1,1}(\Omega))$ *qui vérifie :*

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds, \quad t \in]0,T[. \tag{2.25}$$

Proposition I.4. *Soient* $T > 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ *et* $f \in L^1(Q_T)$. *Alors le problème (2.23) admet une unique solution faible* u. *Cette solution satisfait :*

$$u \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^1(\Omega)) \cap L^s(0,T; W_0^{1,r}(\Omega))$$

pour $s, r \geq 1$ *vérifiant :*

$$\frac{2}{s} + \frac{N}{r} > N + 1. \tag{2.26}$$

De plus, on a :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|u\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}), \tag{2.27}$$

où $T \to C(s,r,T,\Omega)$ *est une fonction croissante.*

Démonstration:
Comme dans la Proposition I.2, l'unicité est une simple conséquence du Lemme 3.4 dans [**5**]
On passe à la preuve de l'existence et on considère $(u_0^n)_n$ et $(f^n)_n$ deux suites de fonctions dans l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(Q_T)$, telles que :

$$\begin{cases} u_0^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mu_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_b(\Omega) \quad \text{faible}, \\ \|u_0^n\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \end{cases} \tag{2.28}$$

et

$$f^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^1(Q_T). \tag{2.29}$$

Grâce à la Remarque I.3, on pose :

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds. \tag{2.30}$$

et pour tout entier n, on introduit :

$$u^n(t) = e^{t\Delta}u_0^n + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f^n(s)\,ds. \tag{2.31}$$

Alors u^n est une solution mild du problème (2.23) correspondant aux données u_0^n et f^n. Grâce à la régularité de ces données on peut appliquer la Proposition 4.1.6 in [**25**] et on obtient que u^n est une solution classique du problème (2.23). Ainsi, d'après le Lemme 3.3 dans [**5**] on a :

$$u^n \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$$

pour tout $s, r > 0$ satisfaisant (2.26). De plus :

$$\|u^n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|u^n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)(\|f^n\|_{L^1(Q_T)} + \|u_0^n\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}). \tag{2.32}$$

En faisant appel à la preuve de la Proposition I.2, plus précisément à la relation (2.18), et grâce à (2.28) et (2.29), on peut passer à la limite dans (2.31) et on obtient qu'à une sous-suite près :

$$u^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^1(Q_T). \tag{2.33}$$

De plus grâce à (2.32) on déduit que u^n est bornée dans $L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$, et par conséquent, à une sous-suite près :

$$u^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ faiblement dans } L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega)),$$

pour tout $s, r > 0$ satisfaisant (2.26). D'une part, d'après (2.32) on a :

$$\|u\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u^n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(T,\Omega,s,q)(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)})$$

D'autre part, en utilisant (2.20) et les propriétés du semi-groupe de contraction $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ dans $L^1(\Omega)$, on déduit :

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} &\leq \|e^{t\Delta}\mu_0\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\ &\leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|f\|_{L^1(Q_T)}.\end{aligned}$$

Puisque u^n est une solution classique du problème (2.23) et satisfait (2.33), on peut passer à la limite lorsque $n \to \infty$ et on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T).$$

D'après (2.20) on a :

$$e^{t\Delta}\mu_0 \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0 \text{ dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \text{ faible,}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \|\int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Comme u est donné par (2.30) on déduit que :

$$u(t) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0 \text{ dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \text{ faible.}$$

Ce qui prouve que u est solution faible du problème (2.23).

En considérant T_1 et T_2 tels que $0 \leq T_1 \leq T_2$ alors $Q_{T_1} \subset Q_{T_2}$ et il est facile de vérifier que la constante $C(s,r,T,\Omega)$ qui intervient dans la relation (2.27) est croissante par rapport à $T \in [0,+\infty)$. Ainsi, la preuve de la Proposition I.4 est complète. □

Remarque I.4. *Dans la Définition I.4, la solution mild peut être introduite seulement par (2.25) sans l'hypothèse de régularité $u \in L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$. En effet, la preuve ci-dessus montre que la solution "mild" satisfait cette régularité et qu'elle est identique à la solution faible qui est unique.*

Étant donnée une solution faible du problème (2.23) on a les propriétés de régularité suivantes :

Proposition I.5. *Soient $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ et $f \in L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))$, avec*

$$\gamma, r > 1 \quad et \quad \frac{N}{2r} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} < 1, \tag{2.34}$$

alors la solution u du problème (2.23) donnée par (2.25) est dans l'espace $C(\overline{Q_T})$.

Démonstration:
Soient $(u_0^n)_n$ et $(f^n)_n$ deux suites de fonctions respectivement dans $C_c^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(Q_T)$ et vérifiant :

$$\begin{cases} u_0^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0 & \text{dans} \quad L^\infty(\Omega), \\ f^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f & \text{dans} \quad L^\gamma(0,T;L^r(\Omega)). \end{cases} \tag{2.35}$$

Notons par u^n la solution de (2.23) correspondante aux données f_n et u_0^n. Alors, compte tenu de la régularité du domaine on a :

$$u^n \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$$

et

$$u^n(t) = e^{t\Delta}u_0^n + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f_n(s)\, ds$$

Cette dernière relation regroupée avec (2.25) et (2.2) implique :

$$\begin{aligned} \|u^n(t) - u(t)\|_\infty &\le \|e^{t\Delta}u_0^n - e^{t\Delta}\mu_0\|_\infty + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} f_n(s) - e^{(t-s)\Delta} f(s)\|_\infty\, ds \\ &\le \|u_0^n - \mu_0\|_\infty + C(r) \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2r}} \|(f^n - f)(s)\|_r\, ds \\ &\le \|u_0^n - \mu_0\|_\infty + C(r) \left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2r}\cdot\gamma'} \right)^{\frac{1}{\gamma'}} \|f^n - f\|_{L^\gamma(0,T,L^r(\Omega))}, \end{aligned}$$

où $\gamma' = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$. Grâce à (2.34) on a $\dfrac{N}{2r} \cdot \gamma' < 1$, donc l'intégrale ci-dessus est finie. On obtient :

$$\|u^n(t) - u(t)\|_{L^\infty(Q_T)} \le \|u_0^n - \mu_0\|_\infty + C(r,\gamma,T) \cdot \|f^n - f\|_{L^\gamma(0,T,L^r(\Omega))} \tag{2.36}$$

Compte tenu de (2.35) et (2.36) on déduit que $u_n \to u$ uniformément sur $\overline{Q_T}$, lorsque $n \to \infty$. Par conséquent

$$u \in C(\overline{Q_T}).$$

□

Proposition I.6. *Soit $f \in L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))$, où $\gamma, r \geq 1$. Notons par $u \in C([0,T];L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ la solution faible du problème aux limites :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q_T, \\ u(t,x) = 0 & \text{sur } \Gamma_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

alors : $u \in L^\gamma(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))$ et

$$\|u\|_{L^\gamma(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(r) T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))}.$$

Démonstration:
En utilisant le semi-groupe de la chaleur, on a :

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\, ds$$

d'où, grâce à (2.3), pour tout $t \in]0,T[$:

$$\|\nabla u(t)\|_r \leq \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} f(s)\|_r \, ds \leq C(r) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|f(s)\|_r \, ds,$$

En appliquant l'inégalité de Young on obtient finalement :

$$\|u\|_{L^\gamma(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(r) T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))}.$$

□

3. Résultats principaux

Donnons d'abord les définitions des notions de solutions faibles du problème (1.1) lorsque $p \in]0,\infty[$ et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Définition I.5. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. On appelle solution faible du problème (1.1) une fonction $u \in C([0,\infty[;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ telle que $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T)$ pour tout $T > 0$ et qui vérifie :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ u(t) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \mu_0 & \text{dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \text{ faible.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition I.6. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. On appelle solution mild du problème (1.1) une fonction $u \in C([0,\infty[;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ telle que $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T)$ pour tout $T > 0$ et qui vérifie :*

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \int_0^t e^{(t-s)\Delta} |\nabla u|^p(s)\, ds. \tag{3.2}$$

D'après la Remarque I.4 les deux définitions sont équivalentes, ainsi on appelle solution faible toute solution mild.

On peut énoncer maintenant les résultats principaux.
Le premier théorème concerne le cas $0 < p < 1$. À notre connaissance ce cas n'a jamais été étudié sur des ouverts bornés. En effet, seul dans [**39**] on trouve un résultat d'existence et d'unicité de solutions dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$ et uniquement pour des données initiales continues et bornées.

Théorème I.2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $0 < p < 1$. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution faible globale.*
De plus, pour tout $T > 0$, cette solution est unique dans les deux cas suivants :
a) Si $0 < p < \frac{2}{N+1}$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$,
b) Si $\frac{2}{N+1} \leq p < 1$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q > \frac{pN}{2-p}$.

La preuve de ce théorème est structurée en quatre étapes. D'abord, à l'aide du Théorème de point fixe de Schauder on démontre l'existence d'une solution locale, ensuite on donne un résultat de régularité qui nous permet de prolonger cette solution locale en une solution globale. Finalement on démontre l'unicité dans les cas *a*) et *b*) ci-dessus.

Le cas $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$ qui suit a été beaucoup étudié dans le cadre du problème de Cauchy sur l'espace entier $\mathbb{R}^N$ (voir [**3, 9, 13, 39**]) ainsi que dans des ouverts bornés avec une condition au bord de type Dirichlet homogène (voir [**1, 28**]). Dans le deuxième théorème on donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème (1.1). Ce résultat est analogue a celui de N. Alaa, [**1**] où la donnée initiale est supposée positive. Notre preuve est tout à fait différente est reste valable pour une donnée initiale non-signée.

Théorème I.3. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. Alors le problème (1.1) admet une unique solution faible.*

La preuve suit presque les mêmes étapes que le théorème précédent. Le fait que $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$ nous permet d'obtenir l'unicité de la solution, car, dans ce cas la fonction $\xi \to |\xi|^p$ est localement Lipschitz. Quant à l'existence locale d'une solution, elle est obtenue grâce au Théorème de point fixe de Banach.

Les résultats suivants concernent toujours le cas de la croissance sous-quadratique. On donne des conditions suffisantes sur la donnée initiale pour que le problème (1.1) admette des solutions faibles. On note par q_c l'exposant :

$$q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}.$$

Cet exposant critique apparaît aussi dans ([**9**], p. 343), ([**13**], p. 2013) et ([**28**], p. 189) et on observe que q_c est relié à l'autre exposant critique, $\frac{N+2}{N+1}$ par :

$$q_c \geq 1 \Longleftrightarrow p \geq \frac{N+2}{N+1}.$$

On a le résultat suivant :

Théorème I.4. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$. Si $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q > q_c$, alors le problème (1.1) admet une solution faible $u \in C([0,+\infty[; L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,pq}(\Omega)$ pour tout $T > 0$. Cette solution est unique dans cet espace et de plus c'est une solution classique globale sur $]\tau, +\infty[\times\Omega, \tau > 0$.*

Signalons que les preuves de l'existence de solutions dans Théorème I.3 et Théorème I.4, et la première partie dans le résultat de régularité sont assez proches de la preuve du Théorème 2.1 dans [**9**] qui concerne le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$, car on a les mêmes estimations (2.21) et (2.22) sur le noyau de la chaleur dans des ouverts bornés. En revanche, on utilise des arguments différents pour prouver d'une part l'unicité des solutions dans Théorème I.3 et d'autre part la régularité des solutions.

Dans le cas $a < 0$, le résultat suivant établit l'existence de la solution avec une hypothèse moins restrictive sur la donnée initiale.

Théorème I.5. *Soient $a < 0$, $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ et $\mu_0 \in L^1(\Omega)$, $\mu_0 \geq 0$. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution faible $u \in C([0,+\infty[; L^1(\Omega))$*

Le théorème qui suit est un résultat de non-existence de solutions pour des données mesures lorsque l'exposant $p \geq \frac{N+2}{N+1}$. Ce résultat est analogue à celui de S. Benachour et Ph. Laurencot dans [**13**], pour l'espace entier $\mathbb{R}^N$.

Théorème I.6. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $T > 0$, $x_0 \in \Omega$ et M une constante positive quelconque. Alors il n'existe pas de fonction :*

$$u \in C(]0,T[; L^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.3}$$

telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T), \\ u(t) \to M\delta_{x_0} \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_b(\Omega) \quad \text{faible.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Autrement dit, le problème aux limites (1.1) n'admet pas de solutions faibles pour $\mu_0 = M\delta_{x_0}$, $M > 0$.

Comme dans [**9**], ce résultat peut être prolongé aux mesures p-atomiques lorsque $\frac{N+2}{N+1} \leq p < N$ (voir la Remarque I.10 ci-dessous).

Finalement on analyse le cas sur-quadratique qui correspond à $p \geq 2$. D'après le Théorème 7.10 de [**38**] on sait que si $\mu_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ alors le problème (1.1) admet une unique solution maximale $u \in C^{0,1}([0,T^*[\times\overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(]0,T^*[\times\Omega)$ où $T^* \in]0,+\infty]$ est le temps maximal d'existence de la solution. De plus si $T^* < \infty$, alors :

$$\lim_{t \to T^*} \sup_{x \in \Omega} (|u(t,x)| + |\nabla u(t,x)|) = \infty. \tag{3.5}$$

Par conséquent, la solution u peut être uniformément bornée et pourtant ne pas être globale lorsque :

$$\lim_{t \nearrow T^*} \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(t,x)| = +\infty.$$

Dans cette situation on dit qu'il y a "blow-up du gradient", c'est à dire le gradient explose en temps fini. Lorsque $a > 0$, $p > 2$ et $\mu_0 \in C_0^1(\Omega)$, dans [**67**], P. Souplet a démontré que le gradient des solutions du problème (1.1), explose en temps fini, pour des données initiales μ_0 "assez grandes". Signalons que ce phénomène n'a pas lieu pour le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$.
Dans le cas d'une équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité et absorption (correspondant à $a < 0$) on a le résultat d'existence de solutions globales suivant :

Théorème I.7. *Soient $p \geq 2$ et $a < 0$. Alors pour toute donnée initiale $\mu_0 \in C_0^1(\overline{\Omega}), \mu_0 \geq 0$, la solution maximale u du problème (1.1) est une solution globale.*

Un résultat analogue a été prouvé dans [[**28**], Théorème 2.1] mais la preuve est assez compliquée. En effet, dans [**28**], le but principal est de construire des solutions de (1.1) avec donnée initiale prenant la valeur $+\infty$ sur un ouvert régulier et borné D de Ω dont la fermeture $\overline{D}$ est dans Ω. Ce résultat est obtenu à l'aide d'un théorème abstrait sur les semi-groupes. Notre preuve fait appel à une méthode différente.

Le Théorème I.7 peut être généralisé à des données initiales moins régulières. Comme dans [**9**] on introduit l'espace :

$$L^1_{+,approx} = \{\mu_0 \in L^1_+(\Omega) |\ \exists (u_0^n)_n,\ u_0^n \in C_0^1(\overline{\Omega});\ 0 \leq u_0^n \nearrow \mu_0\}. \tag{3.6}$$

On a le résultat suivant :

Théorème I.8. *Soient $p \geq 2$ et $a < 0$. Alors pour tout $\mu_0 \in L^1_{+,approx}$, le problème (1.1) admet au moins une solution faible qui vérifie pour tout $T > 0$:*

$$\begin{cases} u \in C([0, +\infty[; L^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p \quad dans \quad \mathcal{D}'(Q_T), \\ u(0) = \mu_0 \quad dans \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

La clé de la preuve de ce théorème est une estimation du gradient de la solution u de (3.7). Signalons que cette estimation est vérifiée aussi par la solution correspondante du problème de Cauchy dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$, (voir [**39**]).

4. Preuve du Théorème I.2

a) **Existence locale**
On considère $T \in]0, 1[$, $q \in]1 \frac{N+2}{N+1}[$ et notons par $X = X(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u :]0, T] \to W_0^{1,q}(\Omega)$ telles que :

$$\|u\|_X = \max\{\sup_{]0,T]} t^\beta \|u(t)\|_q, \sup_{]0,T]} t^{\beta+\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_q\} \leq \infty,$$

où

$$\beta = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Des espaces à poids, du type $X(T)$, liés à l'opérateur de la chaleur, ont déjà été introduits par T.Kato [**46**], T.Kato-H.Fujita [**47**], H.Brezis-T.Cazenave [**22**], M.Ben-Artzi-P.Souplet-F.B.Weissler [**9**] et F.B.Weissler [**70, 71**].
On a $X \hookrightarrow L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ avec injection continue. Pour $u \in L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ on définit les fonctionnelles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ par :

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\, ds$$

et

$$\mathcal{F}u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \cdot \mathcal{G}u(t).$$

alors $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ sont des opérateurs continus de $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ dans $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$.
En effet, soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ une suite telle que :

$$u_n \to u \ \text{ dans } \ L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)),$$

et notons par $f_n = |\nabla u_n|^p$ et $f = |\nabla u|^p$, alors, puisque $p \in]0,1[$ on a :

$$|f_n - f| = ||\nabla u_n|^p - |\nabla u|^p| \leq |\nabla u_n - \nabla u|^p \to 0 \ \text{ dans } \ L^{q/p}(Q_T)$$

ainsi

$$f_n \to f \ \text{ dans } \ L^{q/p}(Q_T)$$

et la suite $v_n = \mathcal{G}u_n - \mathcal{G}u$ est solution faible dans $C([0,T];L^1(\Omega)) \cap L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_n}{\partial t} - \Delta v_n = f_n - f \ \text{ dans } \ \mathcal{D}'(Q_T), \\ v_n(t,x) = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_T, \\ v_n(0,x) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega. \end{cases}$$

D'après le Théorème IV.9.1 de [**51**], $v_n \in W^{1,2}_{q/p}(Q_T)$ et on a l'estimation

$$\|v_n\|_{W^{1,2}_{q/p}(Q_T)} \leq C \cdot \|f_n - f\|_{q/p}.$$

Comme $p \in]0,1[$, en particulier on a :

$$\mathcal{G}u_n \to \mathcal{G}u \ \text{ dans } \ L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)).$$

Ainsi $\mathcal{G}$ est continue sur $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ ce qui entraîne $\mathcal{F}$ continue sur le même espace.

Soit $K > 0$ et notons par $X_K(T)$ la boule fermée de rayon K de $X(T)$, et par $\overline{X_K(T)}$ la fermeture de $X_K(T)$ dans l'espace $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$. Afin d'appliquer un théorème de point fixe de Schauder (voir le Corollaire 11.2, p.280, [**31**] ou Proposition 18, p.270 dans [**64**]), on cherche $T_1 \in]0,1[$ et $K_1 > 0$ tels que :

$$\mathcal{F} : \overline{X_{K_1}(T_1)} \to \overline{X_{K_1}(T_1)}, \tag{4.1}$$

soit une fonction bien définie et $\mathcal{F}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ soit relativement compact dans $L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$. Soit $u \in X$. D'une part, d'après la relation (2.2) on a :

$$\|\mathcal{G}u(t)\|_q \leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\|_q \leq \int_0^t \||\nabla u(s)|^p\|_q\, ds \leq \int_0^t |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \|\nabla u(s)\|_q^p\, ds$$

$$\leq |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \|u\|_X^p \int_0^t s^{-p(\beta+\frac{1}{2})}\, ds \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1-p}{q}}}{1-p(\beta+\frac{1}{2})} \cdot t^{1-p(\beta+\frac{1}{2})}\|u\|_X^p \leq C_1 \cdot t^{1-p(\beta+\frac{1}{2})}\|u\|_X^p$$

Notons par $\gamma = 1-p(\beta+\frac{1}{2})$ alors compte tenu des hypothèses faites sur p et q, on a $0<\gamma<1$. Ainsi les inégalités ci-dessus impliquent :

$$t^\beta \|\mathcal{G}u(t)\|_q \leq C_1 t^{\gamma+\beta}\|u\|_X^p. \tag{4.2}$$

D'autre part grâce à (2.3) on a :

$$\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_q \leq \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\|_q\, ds$$

$$\leq C(q)\cdot \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)|^p\|_q\, ds \leq C(q)|\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \||\nabla u(s)\|_q^p\, ds$$

$$\leq C(q)\cdot |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \|u\|_X^p \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-p(\beta+\frac{1}{2})}\, ds \leq C_2 t^{-\frac{1}{2}+\gamma}\|u\|_X^p$$

et donc

$$t^{\frac{1}{2}+\beta}\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_q \leq C_2 \cdot t^{\gamma+\beta}\|u\|_X^p \tag{4.3}$$

Compte tenu de (4.2) et (4.3) on tire :

$$\|\mathcal{G}(u)\|_X \leq C_3 \cdot T^{\gamma+\beta}\|u\|_X^p$$

Cette inégalité et la Proposition I.3 donnent l'estimation suivante sur $\mathcal{F}(u)$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u)\|_X &\leq \|e^{t\Delta}\mu_0\|_X + |a|\|\mathcal{G}(u)\|_X \leq C(q)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + |a|\cdot C_3\|u\|_X^p \cdot T^{\gamma+\beta} \\ &\leq C_1(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|u\|_X^p \cdot T^{\gamma+\beta}),\end{aligned}$$

où la constante C_4 ne dépend que de $|\Omega|, |a|, p, q$ et N. On peut choisir K_1 et $T_1 \in]0,1[$ tels que

$$C_4(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + K_1^p \cdot T_1^{\gamma+\beta}) < K_1 \tag{4.4}$$

On obtient que pour tout $u \in X_{K_1}(T_1)$ on a $\mathcal{F}(u) \in X_{K_1}(T_1)$. Cela implique :

$$X_{K_1}(T_1) \subset \mathcal{F}^{-1}(X_{K_1}(T_1)) \subset \mathcal{F}^{-1}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$$

Comme $\mathcal{F}$ est un opérateur continu dans $L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$, alors $\mathcal{F}^{-1}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est fermé dans $L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$ et on déduit :

$$\overline{X_{K_1}(T_1)} \subset \mathcal{F}^{-1}(\overline{X_{K_1}(T_1)}).$$

Il reste à montrer que $\mathcal{F}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est relativement compact dans $L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$. Pour ce faire, comme

$$\mathcal{F}(\overline{X_{K_1}(T_1)} = e^{t\Delta}\mu_0 + a\cdot\mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$$

il suffit de démontrer que $\mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est relativement compact dans $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$. Soit $(u_n)_n \subset \overline{X_{K_1}(T_1)}$ et $(\mathcal{G}(u_n))_n$ la suite bornée correspondante de $\mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$. Pour tout $(t,x) \in Q_{T_1}$ on pose :

$$f_n(s,x) = |\nabla u_n(s,x)|^p$$

alors $f_n \in L^{q/p}(Q_{T_1})$ et

$$\|f_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})} = \left(\int_0^{T_1} \int_\Omega |\nabla u_n(s)|^q \right)^{p/q} = \|u_n\|^p_{L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))}. \tag{4.5}$$

Soit $\theta = 1 - q(\frac{1}{2} + \beta)$. Comme $1 < q < \frac{N+2}{N+1}$ on a $\theta > 0$ et pour tout $u \in X(T_1)$:

$$\|u\|_{L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))} = \left(\int_0^{T_1} \int_\Omega |\nabla u|^q dx dt \right)^{1/q} \leq \|u\|_X \left(\int_0^{T_1} t^{-q(\frac{1}{2}+\beta)} \right)^{1/q} \leq \|u\|_X \left(\frac{T_1^\theta}{\theta} \right)^{1/q}.$$

On en déduit que pour tout $u \in \overline{X_{K_1}(T_1)}$:

$$\|u\|_{L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))} \leq K_1 \left(\frac{T_1^\theta}{\theta} \right)^{1/q}. \tag{4.6}$$

Ainsi, compte tenu de (4.5) et (4.6) on tire :

$$\|f_n\|_{q/p} \leq C(p,q,N) \cdot K_1^p \cdot T_1^{p\theta/q}, \tag{4.7}$$

donc la suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^{q/p}(Q_{T_1})$. De plus comme $\mathcal{G}u_n \in W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1})$ est une solution faible du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{G}u_n}{\partial t} - \Delta \mathcal{G}u_n = f_n & \text{dans} \quad Q_{T_1}, \\ \mathcal{G}u_n(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{T_1}, \\ \mathcal{G}u_n(0,x) = 0 & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases}$$

On obtient d'après le Théorème IV.9.1 de [**51**] que

$$\|\mathcal{G}u_n\|_{W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1})} \leq C(T_1,\Omega) \cdot \|f_n\|_{q/p}$$

Par conséquent $(\mathcal{G}u_n)_n$ est bornée dans $W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1})$ et grâce à la suite d'injections,

$$W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1}) \underset{\text{compacte}}{\hookrightarrow} L^{q/p}(0,T_1;W^{1,q/p}(\Omega)) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$$

et au fait que $(\mathcal{G}u_n)_n \subset L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$ on obtient que :

$$(\mathcal{G}u_n)_n \quad \text{est relativement compact dans } L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$$

On peut alors appliquer le Théorème de Schauder, et on obtient l'existence d'une fonction $u \in \overline{X_{K_1}(T_1)}$ vérifiant :

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \int_0^t e^{(t-s)\Delta} |\nabla u(s)|^p \, ds. \tag{4.8}$$

En particulier

$$u \in C([0,T_1[;W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^q(0,T_1;W_0^{1,q}(\Omega))$$

et

$$\max\{\sup_{]0,T_1]} t^{\beta}\|u(t)\|_q, \sup_{]0,T_1]} t^{\frac{1}{2}+\beta}\|\nabla u(t)\|_q\} \leq K_1$$

Par conséquent, la solution u est dans l'espace $X_{K_1}(T_1)$ et compte tenu de (2.27) et (4.8) on obtient aussi $u \in L^{\infty}(0,T_1;L^1(\Omega))$. Ainsi u est une solution locale du problème (1.1) sur Q_{T_1}. □

b) **Régularité**

Proposition I.7. *Il existe $\delta \in]0,1[$, indépendant de $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, tel que toute solution faible $u \in C(]0,T[;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ du problème aux limites (1.1), vérifie*

$$u \in C_{loc}^{1+\delta/2,2+\delta}(Q_{\tau,T}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau,T}}) \quad \forall \tau \in]0,T[$$

Démonstration:
On fixe $\tau \in]0,T[$ et on décompose le problème (1.1) en deux parties.
(*i*) Soit donc $u_1 \in C([\tau/2n,T];L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ la solution faible du problème aux limites (2.1) sur $Q_{\tau/2n,T}$ avec donnée initiale $u(\tau/2n,\cdot) \in W_0^{1,1}(\Omega)$, où n est un entier positif qui sera choisi ultérieurement. Alors u_1 vérifie :

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_{\tau/2n,T}), \\ u_1(t,x) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\tau/2n,T}, \\ u_1(\tau/2n,x) = u(\tau/2n,x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Grâce à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur (voir par exemple le Théorème XI.1 dans [**20**]) et à la régularité du domaine Ω, pour tout $\delta \in]0,1[$ on a :

$$u_1 \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{2\tau/2n,T}})$$

(*ii*) Notons par f la fonction

$$f(t,x) = a|\nabla u(t,x)|^p \text{ sur } Q_T, \tag{4.9}$$

et soit $u_2 \in C([\tau/2n,T];L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ la solution faible du problème :

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = f & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_{\tau/2n,T}), \\ u_2(t,x) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\tau/2n,T}, \\ u_2(\tau/2n,x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Puisque $|\nabla u| \in L^1(Q_T)$ on a $f \in L^{1/p}(Q_T)$. Grâce à la régularité des solutions des équations paraboliques (cf. Théorème IV.9.1 dans [**51**]) on obtient $u_2 \in W_{1/p}^{1,2}(Q_{\tau/2n,T})$.
(*iii*) Puisque $u = u_1 + u_2$ on tire $u \in W_{1/p}^{1,2}(Q_{2\tau/2n,T})$ et par conséquent :

$$|\nabla u| \in L^{1/p}(Q_{2\tau/2n,T}),$$

ce qui implique :

$$f \in L^{1/p^2}(Q_{2\tau/2n,T}).$$

On peut répéter ce processus et on obtient par récurrence que :

$$f \in L^{1/p^n}(Q_{\tau/2,T}) \text{ et } u \in W_{1/p^n}^{1,2}(Q_{\tau/2,T}).$$

On choisit n suffisamment grand tel que $\frac{1}{p^n} > N+2$ alors, grâce au Lemme II.3.3 dans [**51**], pour tout $\nu \in]0,1[$ satisfaisant $0 < \nu < 1-(N+2)p^n$ on a :

$$|\nabla u| \in C^{\nu/2,\nu}(\overline{Q_{\tau/2,T}}),$$

et en particulier :

$$f \in C^{p\nu/2,p\nu}(\overline{Q_{\tau/2,T}}).$$

On reconsidère les problèmes (P_1) et (P_2) sur $Q_{\tau/2,T}$ avec donnée initiale $u(\tau/2,\cdot)$. En utilisant les mêmes notations, on obtient d'une part $u_1 \in C^\infty(Q_{\tau,T})$. D'autre part puisque $f \in C^{p\nu/2,p\nu}(\overline{Q_{\tau/2,T}})$, grâce au Théorème III.12.2 dans [**51**] on a $u_2 \in C^{1+p\nu/2,2+p\nu}_{loc}(Q_{\tau/2,T}) \cap C^{p\nu/2,p\nu}(\overline{Q_{\tau/2,T}})$.

En regroupant ces deux derniers résultats on obtient finalement $u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}_{loc}(Q_{\tau,T}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$ avec $\delta \in]0,1[$, ce qui achève la preuve de la Proposition I.7 □

Proposition I.8. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $0 < p < 1$. Si $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq 1$ alors toute solution faible u du problème (1.1) est dans $C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $1 \leq r < 2$. De plus si $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ alors u est dans $C(\overline{Q_T})$.*

Démonstration:

Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ et $u \in C(]0,T[;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ une solution faible du problème (1.1) à donnée μ_0. Posons $u_1 = e^{t\Delta}\mu_0$. Alors u_1 est solution faible du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = 0 & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_1(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u_1(0,x) = \mu_0(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Puisque $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, on a $u_1 \in C([0,T];L^q(\Omega))$ et grâce à (2.3) on obtient :

$$\|\nabla u_1(t)\|_q \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|\mu_0\|_q \quad \text{pour tout} \quad t \in]0,T[.$$

Par conséquent $u_1 \in L^r(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $1 \leq r < 2$.

Notons par f la fonction :

$$f(t,x) = a|\nabla u|^p(t,x) \quad \text{p.p} \quad (t,x) \in Q_T$$

et par u_2 la solution faible du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = f & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_2(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u_2(0,x) = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Puisque $|\nabla u| \in L^1(Q_T)$, on a $f \in L^{1/p}(Q_T)$ et grâce à la Proposition I.6 on obtient $u_2 \in L^{1/p}(0,T;W_0^{1,1/p}(\Omega))$.

Montrons que $u_2 \in C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $r \in [1,2[$.

Soit $r \in [1,2[$ fixé et posons $n_1 = \left[\frac{\ln r}{\ln 1/p}\right] + 1$ et $n_2 = \left[\frac{\ln q}{\ln 1/p}\right] + 1$, où $[a]$ est la partie entière du nombre réel a.

Alors on a $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ et :

$$\frac{1}{p^{n_1-1}} \leq r < \frac{1}{p^{n_1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p^{n_2-1}} \leq q < \frac{1}{p^{n_2}}.$$

On examine les différentes possibilités.
(i) Le cas $r \leq q$. On a $n_1 \leq n_2$.
Si $n_1 = 1$ alors $r < 1/p$. Puisque $u = u_1 + u_2$, on obtient dans ce cas :

$$u \in L^r(0,T; W_0^{1,\min\{1/p,q\}}(\Omega))$$

Si $n_1 \geq 2$ alors $n_2 \geq 2$ et par suite $q \geq 1/p$. $|\nabla u| \in L^{1/p}(Q_T)$ implique $f \in L^{1/p^2}(Q_T)$ et grâce à la Proposition I.6 on obtient :

$$u_2 \in L^{1/p^2}(0,T; W_0^{1,1/p^2}(\Omega)).$$

Par récurrence on montre que :

$$u_2 \in L^{1/p^{n_1}}(0,T; W_0^{1,1/p^{n_1}}(\Omega)).$$

Donc lorsque $n_1 = n_2$ on a $r < \frac{1}{p^{n_1}}$ et $q < \frac{1}{p^{n_1}}$ et par suite

$$u_2 \in L^r(0,T; W_0^{1,q}(\Omega)),$$

ce qui implique $u \in L^r(0,T; W_0^{1,q}(\Omega))$.
Dans le cas $n_2 > n_1$ par la même méthode on démontre que $u_2 \in L^{r/p}(0,T; W_0^{1,1/p^{n_2}}(\Omega))$ et par conséquent $u \in L^r(0,T; W_0^{1,q}(\Omega))$. En particulier $f \in L^r(0,T; L^q(\Omega))$ d'où on tire $u \in C([0,T]; L^q(\Omega)))$.
(ii) Le cas $r > q$ se traite de la même manière.

Supposons dans la suite que $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ alors grâce au point précédent

$$u \in C([0,T]; L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T; W_0^{1,q}(\Omega)) \text{ pour tout } q > 1 \text{ et } 1 \leq r < 2$$

et $f \in L^{r/p}(0,T, W^{1,q/p}(\Omega))$. Ainsi, comme $0 < p < 1 \leq r$ on peut choisir q assez grand tel que :

$$\frac{N}{2 \cdot q/p} \cdot \frac{r/p}{r/p - 1} < 1$$

Les hypothèses de la Proposition I.5 étant satisfaites, on obtient $u \in C(\overline{Q_T})$ et la preuve de la Proposition I.8 est achevée. □

c) Existence globale

Soit u une solution faible du problème aux limites (1.1) sur $]0,T]$. D'après la Proposition I.7 pour tout $t_0 \in]0,T[$, $u(t_0) \in L^\infty(\Omega)$ et grâce au Principe de Comparaison (cf. par exemple le Théorème 2.16 dans [**38**]) on a :

$$u(t,x) \leq \|u(t_0)\|_\infty \text{ pour tout } (t,x) \in [t_0,T] \times \Omega$$

et donc

$$\|u(T)\|_1 \leq |\Omega| \|u(T)\|_\infty \leq |\Omega| \|u(t_0)\|_\infty$$

On reprend la preuve d'existence locale pour le problème (1.1) avec donnée initiale $u(T)$ et on fixe $T_2 > 0$ et $K_2 > 0$ vérifiant :

$$C_4(|\Omega| \cdot \|u(t_0)\|_\infty + K_2^p \cdot T_2^{\gamma+\beta}) < K_2$$

où C_4 est la même constante qui intervient dans (4.4) et qui ne dépend que de p, N, Ω et a. On peut alors prolonger la solution sur $[T, T+T_2]$. Puisque T_2 et K_2 dépendent cette fois ci de $\|u(t_0)\|_\infty$ et ne dépendent plus de la donnée initiale $u(T)$, on peut continuer le processus et on obtient l'existence globale d'une solution sur Q_∞. □

d) Unicité

Proposition I.9. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $0 < p < 1$ alors le problème (1.1) admet une unique solution faible dans les deux cas suivants :*
a) Si $0 < p < \frac{2}{N+1}$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$,
b) Si $\frac{2}{N+1} \leq p < 1$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q > \frac{pN}{2-p}$.

Démonstration:
Avant de commencer la preuve on fait l'observation suivante :

Remarque I.5. *Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $0 < p < 1$, alors grâce à la Proposition I.4, toute solution faible u de (1.1) vérifie : $u \in L^s(0,T; W_0^{1,s}(\Omega))$ pour tout $s \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$.*

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème (1.1) et posons $u = u_1 - u_2$ et $f = a(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p)$. Alors u est une solution faible du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{dans} \quad Q_T, \\ u = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_T, \\ u(0,x) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

D'abord on montre que $u \in C(\overline{Q_T})$ dans les deux cas a) et b) ci-dessus.
a) Le cas $0 < p < \frac{2}{N+1}$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$.
Grâce à la Remarque I.5, on a $u \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega)) \cap L^s(0,T; W_0^{1,s}(\Omega))$ et $f \in L^{s/p}(Q_T)$ pour tout $s \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$. Puisque $0 < p < \frac{2}{N+1}$ on obtient :

$$\lim_{s \nearrow \frac{N+2}{N+1}} \frac{N}{2 \cdot s/p} \cdot \frac{s/p}{s/p - 1} = \frac{Np(N+1)}{2[(N+2) - p(N+1)]} < 1$$

et donc, on peut trouver s tel que $1 \leq s < \frac{N+2}{N+1}$ et :

$$\frac{N}{2 \cdot s/p} \cdot \frac{s/p}{s/p - 1} < 1.$$

Comme u est une solution du problème (4.10) avec pour donnée initiale 0, grâce à la Proposition I.5 on obtient $u \in C(\overline{Q_T})$.
b) Le cas $\frac{2}{N+1} \leq p < 1$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q > \frac{pN}{2-p}$.
Grâce à la Proposition I.8 pour tout $r \in [1, 2[$, $u \in C([0,T]; L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T; W^{1,q}(\Omega))$ est une solution faible du problème (4.10) où $f \in L^{r/p}(0,T; L^{q/p}(\Omega))$.
Puisque q est choisi tel que $q > \frac{pN}{2-p}$ on a :

$$\lim_{r \nearrow 2} \frac{N}{2 \cdot q/p} \cdot \frac{r/p}{r/p - 1} = \frac{pN}{q(2-p)} < 1,$$

ainsi, on peut trouver r tel que $1 \leq r < 2$ et :

$$\frac{N}{2 \cdot q/p} \cdot \frac{r/p}{r/p - 1} < 1.$$

Les hypothèses de la Proposition I.5 étant de nouveau satisfaites avec la donnée initiale $\mu_0 \equiv 0$ on déduit que $u \in C(\overline{Q_T})$.
Ainsi dans les deux cas ci-dessus, en vertu de la Proposition I.7 on obtient :

$$u \in C^{1+\delta/2,\ 2+\delta}_{loc}(Q_{\tau,T}) \cap C(\overline{Q_T})\ \forall \tau \in]0,T[$$

Le reste de la preuve est plus ou moins standard grâce au Principe de Comparaison (cf. [**38, 44**] par exemple). Nous le reproduisons juste pour être complet.
Dans ce qui suit on considère $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, et on pose :

$$z(t,x) = u(t,x) - At - \varepsilon(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

alors

$$z \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(]0,T] \times \overline{\Omega})$$

et

$$z(t,x) \leq 0 \ \text{ dans } \ [0,T] \times \partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega$$

Montrons que $z \leq 0$ sur $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Si z prend des valeurs positives en un point de Q_T alors z admet un maximum positif en $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \Omega$. Ainsi au point (t_0,x_0) où z atteint un maximum positif on a :

$$(\nabla z)(t_0,x_0) = 0,$$

$$(\Delta z)(t_0,x_0) \leq 0$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t_0,x_0) \geq 0$$

Pour montrer que :

$$z(t,x) \leq 0 \ \text{ pour tout } \ (t,x) \in Q_T, \tag{4.12}$$

il suffit de trouver une valeur $A = A(\varepsilon)$ telle que en tout point $(t,x) \in]0,T] \times \Omega$ vérifiant $(\nabla z)(t,x) = 0$ on ait :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z\right)(t,x) < 0.$$

De plus, si la dépendence de A par rapport à ε est telle que $A \to 0$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$, en faisant tendre ε vers 0 dans (4.11) on obtient

$$u(t,x) \leq 0$$

Pour ce faire on observe que :

$$\nabla z = \nabla u - \varepsilon(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \tag{4.13}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \varepsilon[n + (n-1)|x|^2](1+|x|^2)^{-3/2} - A$$

Puisque

$$\{n + (n-1)|x|^2\} \cdot (1+|x|^2)^{-3/2} \leq n \ \text{ pour tout } \ x \in \Omega$$

on en déduit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z \leq a(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p) + n\varepsilon - A \tag{4.14}$$

Ainsi, en tout point $(t,x) \in Q_T$ pour lequel $(\nabla z)(t,x) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &\leq |a|\{|\nabla u_2 + \varepsilon(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x|^p - |\nabla u_2|^p\} + n\varepsilon - A \\ &\leq |a| \cdot |\varepsilon(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x|^p + n\varepsilon - A \leq |a|\varepsilon^p + n\varepsilon - A \end{aligned} \tag{4.15}$$

Il suffit de prendre

$$A = 2(n\varepsilon + |a| \cdot \varepsilon^p)$$

pour réaliser

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,x) - \Delta z < 0$$

en tout point $(t,x) \in Q_T$ tel que $\nabla z(t,x) = 0$.
On en déduit (4.12) et par suite on a :

$$u(t,x) \leq 2(n\varepsilon + |a|\varepsilon^p) + \varepsilon(1+|x|^2)^{1/2}.$$

Par passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0_+$ on obtient $u(t,x) \leq 0$. De même on montre que $u(t,x) \geq 0$, ce qui achève la preuve de l'unicité des solutions faibles. □

Remarque I.6. *Pour la preuve de la Proposition I.9, Ph. Souplet a indiqué le choix plus simple suivant pour la fonction z dans (4.11) :*

$$z = e^{-t}u.$$

5. Preuve du Théorème I.3

a) **Unicité**

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème (1.1) sur Q_T. Posons $u = u_1 - u_2$, alors pour tout $t \in]0,T[$, on a :

$$u(t) = a \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p)(\tau)\, d\tau.$$

De la Proposition I.4, on déduit que pour tout $s, r \geq 1$ qui vérifient $\frac{2}{s} + \frac{N}{r} > N+1$:

$$u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega)),$$

de plus on a l'estimation :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|u\|_{L^s(0,T;W_0^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)\||\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p\|_1 \tag{5.1}$$

où C est une fonction croissante par rapport à la variable T.
On va traiter séparément les cas $p > 1$ et $p = 1$.
(i) Si $p > 1$ on prend $s = r = p$ dans la relation (5.1) et on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(Q_T)} &\leq |a| \cdot C(p,T,\Omega) \cdot \||\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p\|_{L^1(Q_T)} \\ &\leq |a| \cdot p \cdot C(p,T,\Omega) \cdot (\|\nabla u_1\|_{L^p(Q_T)}^{p-1} + \|\nabla u_2\|_{L^p(Q_T)}^{p-1}) \cdot \|\nabla u\|_{L^p(Q_T)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Compte tenu de (5.1) et du fait que $|\nabla u_1|$ et $|\nabla u_2| \in L^p(Q_T)$, on obtient dans ce cas :

$$\lim_{T \searrow 0} |a| \cdot p \cdot C(p,T,\Omega)(\|\nabla u_1\|_{L^p(Q_T)}^{p-1} + \|\nabla u_2\|_{L^p(Q_T)}^{p-1}) = 0.$$

Donc, en vertu de (5.2), on peut toujours trouver $\tilde{T} \in]0,T[$ tel que :

$$\|\nabla u\|_{L^p(Q_{\tilde{T}})} \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^p(Q_{\tilde{T}})}$$

Par conséquent :

$$\nabla u = 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_{\tilde{T}},$$

c'est à dire $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. dans $Q_{\tilde{T}}$. Alors, compte tenu de (5.1) on tire :

$$\|u\|_{L^s(0,\tilde{T};W^{1,r}(\Omega))} = 0$$

donc $u_1 = u_2$ p.p. dans $Q_{\tilde{T}}$. Par un argument classique on peut déduire que $u_1 = u_2$ dans Q_T.
(ii) Pour le cas $p = 1$, dans la relation (5.1) on choisit $1 < r = s < \frac{N+2}{N+1}$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^r(Q_T)} &\leq |a| \cdot C(r,T,\Omega) \cdot \||\nabla u_1| - |\nabla u_2|\|_{L^1(Q_T)} \\ &\leq |a| \cdot C(r,T,\Omega) \cdot T^{\frac{1}{r'}}|\Omega|^{\frac{1}{r'}} \cdot \|\nabla u\|_{L^r(Q_T)}\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{T \searrow 0} |a| \cdot C(r,T,\Omega) \cdot T^{\frac{1}{r'}}|\Omega|^{\frac{1}{r'}} = 0$$

de même que dans le cas précédent on obtient $u_1 = u_2$ sur Q_T. □

b) **Existence locale**
Soit $T \in]0,1[$ et notons par $X = X(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u :]0,T] \to W_0^{1,p}(\Omega)$ telles que :

$$\|u\|_X = max\{\sup_{]0,T]} t^{\alpha}\|u(t)\|_p, \ \sup_{]0,T]} t^{\alpha+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_p\} < \infty$$

où

$$\alpha = \frac{N}{2}(1 - \frac{1}{p}). \tag{5.3}$$

Pour $u \in X$ on définit les fonctionnelles :

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p \, ds \tag{5.4}$$

et

$$\mathcal{F}u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \cdot \mathcal{G}u(t). \tag{5.5}$$

Soit $K > 0$ et notons par $X_K(T)$ la boule fermée de rayon K dans $X(T)$. Afin d'appliquer le Théorème de point fixe de Banach on cherche $T_1 \in]0,1[$ et $K_1 > 0$ tels que :

$$\mathcal{F}(X_{K_1}(T_1)) \subset X_{K_1}(T_1)$$

et $\mathcal{F}$ soit une contraction sur $X_{K_1}(T_1)$.
Soit $u \in X_K(T)$. D'une part, compte tenu de (2.2) on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}u(t)\|_p &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\|_p\, ds \leq\ C(p)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\||\nabla u(s)|^p\|_1\, ds \\ &= C(p)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|\nabla u(s)\|_p^p\, ds \leq C(p)\|u\|_X^p \int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\, ds \\ &\leq C(p)\|u\|_X^p \cdot t^{1-p(\alpha+\frac{1}{2})-\alpha}\cdot \int_0^1 (1-s)^{-\alpha}\cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\, ds\end{aligned}$$

Le paramètre α étant donné par (5.3) on pose :

$$\gamma = 1 - p(\alpha + \frac{1}{2}).$$

Grâce à l'hypothése, $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$ on a alors $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\gamma > 0$. Ainsi on peut déduire que :

$$t^{\alpha}\|\mathcal{G}u(t)\|_p \leq C_1\|u\|_X^p T^{\gamma}. \tag{5.6}$$

D'autre part, l'estimation (2.3) implique :

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_p &\leq \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\|_p\, ds \leq C(p)\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\|\nabla u(s)\|_p^p\, ds \\ &\leq C(p)\|u\|_X^p \cdot t^{1-p(\alpha+\frac{1}{2})-(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\, ds.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\gamma > 0$, on en déduit :

$$t^{\alpha+\frac{1}{2}}\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_p \leq C_2\|u\|_X^p T^{\gamma}. \tag{5.7}$$

En regroupant les relations (5.6) et(5.7) on obtient

$$\|\mathcal{G}(u)\|_X \leq C_3 \cdot \|u\|_X^p \cdot T^{\gamma}. \tag{5.8}$$

Grâce aux estimations (2.21) et (2.22), pour tout $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, l'application $]0,T[\ni t \to e^{t\Delta}\mu_0 \in X$. Alors, compte tenu de (5.8), la fonctionnelle $\mathcal{F}$ vérifie :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u)\|_X &\leq \|e^{t\Delta}\mu_0\|_X + |a|\cdot\|\mathcal{G}(u)\|_X \\ &\leq C(p)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + C_3\|u\|_X^p\cdot T^{\gamma},\end{aligned}$$

d'où :

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \leq C_4(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|u\|_X^p \cdot T^{\gamma}) \tag{5.9}$$

où la constante C_4 ne dépend que de p, N, a, et Ω.
Soient maintenant u_1 et u_2 dans $X_K(T)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_p &\leq |a| \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(|\nabla u_1|^p(s) - |\nabla u_2|^p(s))\|_p \, ds \\
&\leq C'(p) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \||\nabla u_1(s)|^p - |\nabla u_2(s)|^p\|_1 \, ds \\
&\leq C'(p) \cdot p \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\|\nabla u_1(s)\|_p^{p-1} + \|\nabla u_2(s)\|_p^{p-1}) \|\nabla u_1(s) - \nabla u_2(s)\|_p \, ds \\
&\leq C'(p) \cdot K^{p-1} \cdot T^\gamma \cdot t^{-\alpha} \|u_1 - u_2\|_X,
\end{aligned}$$

d'où :

$$t^\alpha \|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_p \leq C'(p) \cdot K^{p-1} \cdot T^\gamma \|u_1 - u_2\|_X.$$

De même on a :

$$t^{\alpha+\frac{1}{2}} \|\nabla \mathcal{F}u_1(t) - \nabla \mathcal{F}u_2(t)\|_p \leq C''(p) \cdot K^{p-1} \cdot T^\gamma \|u_1 - u_2\|_X.$$

Des deux dernières inégalités on déduit :

$$\|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_X \leq C_5 \cdot K^{p-1} \cdot T^\gamma \|u_1 - u_2\|_X. \tag{5.10}$$

Soit $C_6 = \max\{C_4, C_5\}$, alors la constante C_6 ne dépend que de a, p, N et Ω et on peut choisir $K_1 > 0$ et $T_1 \in]0,1[$ tels que :

$$C_6(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + K_1^p \cdot T_1^p) < \frac{K_1}{2} \tag{5.11}$$

Alors, grâce aux relations (5.9) et (5.10) pour tout $u \in X_{K_1}(T_1)$, $\mathcal{F}(u) \in X_{K_1}(T_1)$ et donc l'application :

$$\mathcal{F} : X_{K_1}(T_1) \to X_{K_1}(T_1)$$

est bien définie. De plus

$$\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\|_X \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_X.$$

C'est à dire que $\mathcal{F}$ est une contraction sur $X_{K_1}(T_1)$. Alors on peut appliquer le Théorème du point fixe de Banach, et on obtient l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in X_{K_1}(T_1)$ vérifiant :

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \int_0^t e^{(t-s)\Delta} |\nabla u(s)|^p \, ds, \tag{5.12}$$

pour tout $t \in]0, T_1[$.
Comme $u \in X_{K_1}(T_1)$ alors $u \in L^p(0, T_1; W_0^{1,p}(\Omega))$, et on peut conclure que u est une solution faible du problème (1.1) sur Q_{T_1}.

c) **Régularité**

Proposition I.10. *Il existe $\delta \in]0,1[$ indépendant de μ_0 tel que la solution faible locale u du problème (1.1) trouvée ci-dessus vérifie :*

$$u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}_{loc}(Q_{\tau,T_1}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau,T_1}}) \quad \textit{pour tout} \quad \tau \in]0,T_1[.$$

Démonstration:
On montre d'abord que $u \in L^\infty(\tau,T_1;W^{1,\infty}(\Omega))$ pour tout $\tau \in]0,T_1[$. En effet, on sait déjà que : $u \in X \subset C(]0,T_1[;W^{1,p}_0(\Omega))$. Grâce à l'unicité de cette solution sur Q_{T_1} on a :

$$u(t) = e^{(t-\tau)\Delta}u(\tau) + a\int_\tau^t e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\,ds, \tag{5.13}$$

pour tout $0 < \tau < t < T_1$. Comme $1 \le p < \frac{N+2}{N+1}$ on peut fixer deux constantes m et r telles que :

$$p \le m < r \le \infty \quad \text{et} \quad \frac{p}{m} - \frac{1}{N} < \frac{1}{r}. \tag{5.14}$$

On suppose d'abord que pour un certain $m \ge p$ donné, la solution u satisfait :

$$max\{\sup_{]0,T_1]} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m})}\|u(t)\|_m, \sup_{]0,T_1]} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_m\} < L_m, \tag{5.15}$$

où L_m est une constante qui dépend de m et T_1. On veut démontrer que u satisfait la même inégalité avec r à la place de m, où m et r vérifient (5.14). Pour ce faire, on prend $\tau = \frac{t}{2}$ dans la relation (5.13) et on applique les estimations (2.2) et (2.3).
D'une part on a :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_r &\le \|e^{(t/2)\Delta}u(t/2)\|_r + C\int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\||\nabla u(s)|^p\|_{m/p}\,ds \\
&\le C\cdot t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})}\|u(t/2)\|_m + C\int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\|\nabla u(s)\|_m^p\,ds \\
&\le C\cdot L_m\cdot t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})} + C\cdot L_m^p\cdot\int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\cdot s^{-p(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{2})}\,ds \\
&\le C\cdot L_m\cdot t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})} + C\cdot L_m^p\cdot t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})+1-p(\alpha+\frac{1}{2})} \\
&\quad\times\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\cdot s^{-p(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{2})}\,ds,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

où $\alpha = \frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})$.
D'autre part :

$$\|\nabla u(t)\|_r \le \|\nabla e^{(t/2)\Delta} u(t/2)\|_r + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\||\nabla u(s)|^p\|_{m/p}\,ds$$

$$\le C\cdot t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\|u(t/2)\|_m + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\|\nabla u(s)\|_m^p\,ds$$

$$\le C\cdot L_m\cdot t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} + C\cdot L_m^p\cdot\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\cdot s^{-p(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{2})}\,ds$$

$$\le C\cdot L_m\cdot t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} + C\cdot L_m^p\cdot t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}+1-p(\alpha+\frac{1}{2})}$$
$$\times\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\cdot s^{-p(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{2})}\,ds. \qquad (5.17)$$

Compte tenu de (5.14) les intégrales au second membre de (5.16) et (5.17) convergent. Donc la relation (5.15) est vraie pour r à la place de m, où r vérifie (5.14) et pour une certaine constante L_r. On va démontrer, par récurrence, que la relation (5.15) reste valable pour tout $r \in [p,+\infty]$. D'après la construction de u, (5.15) est vraie pour $m = p$. On considère une suite $(m_i)_{i\ge 0}$, croissante vérifiant :

$$\begin{cases} m_0 = p, \\ \dfrac{p}{m_i} - \dfrac{1}{N} < \dfrac{1}{m_{i+1}} \quad \text{pour tout} \quad i \ge 0, \end{cases} \qquad (5.18)$$

et pour laquelle u satisfait :

$$max\{\sup_{]0,T]} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m_i})}\|u(t)\|_{m_i}, \sup_{]0,T]} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{m_i})+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_{m_i}\} < L_{m_i}$$

Posons par exemple :

$$\begin{cases} m_0 = p, \\ m_i = \begin{cases} \frac{N(N+1)m_{i-1}}{N(N+2)-m_{i-1}} \wedge r \text{ si } m_{i-1} < \min\{r, N(N+2)\}, \\ r \qquad \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Comme $1 \le p < \frac{N+2}{N+1}$ la suite m_i définie ci-dessus vérifie (5.18). De plus après un nombre fini d'itérations on obtient $m_i = r$ et finalement on déduit :

$$max\{\sup_{]0,T_1]} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(t)\|_r, \sup_{]0,T_1]} t^{\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_r\} < L_r, \qquad (5.19)$$

pour tout $r \in [p,+\infty]$. En particulier pour $r = +\infty$ on a :

$$u \in L^\infty(\tau, T_1; W^{1,\infty}(\Omega)) \quad \text{pour tout} \quad 0 < \tau < T_1. \qquad (5.20)$$

Il reste à démontrer $u \in C_{loc}^{1+\delta/2,2+\delta}(Q_{\tau,T_1}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau,T_1}})$.
Pour $\tau \in]0,T_1[$ on note par $u_1 \in C([\tau/3,T_1];L^1(\Omega)) \cap L^1(\tau/3,T_1;W_0^{1,1}(\Omega))$ la solution faible

du problème aux limites :

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_{\tau/3,T_1}), \\ u_1(t,x) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\tau/3,T_1}, \\ u_1(\tau/3,x) = u(\tau/3,x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Puisque $u(\tau/3) \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ on obtient grâce à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur (voir par exemple le Théorème XI.1 de [**20**])et à la régularité du domaine Ω, pour tout $\delta \in]0,1[$ on a :

$$u_1 \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})$$

Posons :

$$f(t,x) = a|\nabla u|^p(t,x),$$

alors, d'après (5.20), $f \in L^r(Q_{\tau/3,T_1})$ pour tout $r \geq 1$. Notons par $u_2 \in L^1(\tau/3,T;W_0^{1,1}(\Omega))$ la solution faible du problème aux limites :

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = f & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_{\tau/3,T_1}), \\ u_2(t,x) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\tau/3,T_1}, \\ u_2(\tau/3,x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Grâce au Théorème IV.9.1 dans [**51**] on a $u_2 \in W_r^{1,2}(Q_{\tau/3,T_1})$.
Puisque $u = u_1 + u_2$ sur $Q_{\tau/3,T_1}$ et $u_1 \in C^\infty(Q_{2\tau/3,T_1})$, on obtient alors $u \in W_r^{1,2}(Q_{2\tau/3,T_1})$, pour tout $r \geq 1$. On prend r tel que $r > N+2$. Alors, grâce au Lemme II.3.3 dans [**51**], pour tout $\delta \in]0,1[$ satisfaisant $0 < \delta < 1 - \frac{N+2}{r}$, on a :

$$|\nabla u| \in C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T_1}}), \tag{5.21}$$

d'où on déduit :

$$f \in C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T_1}}).$$

On reconsidère les problèmes (P_1) et (P_2) ci-dessus, cette fois-ci sur $Q_{\frac{2\tau}{3},T}$ et avec pour donnée initiale $u(\frac{2\tau}{3},.)$. En utilisant les mêmes notations on obtient d'une part

$$u_1 \in C^\infty(\overline{Q_{\tau,T_1}}) \tag{5.22}$$

Et d'autre part, comme $f \in C^\delta(\overline{Q_{2\tau/3,T}})$ on a :

$$u_2 \in C_{loc}^{1+\delta/2,2+\delta}(Q_{2\tau/3,T}) \tag{5.23}$$

(cf. par exemple le Théorème III.12.2 dans [**51**]). Compte tenu de (5.22), (5.23) et (5.21) on tire :

$$u \in C_{loc}^{1+\delta/2,2+\delta}(Q_{\tau,T}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}}),$$

ce qui achève la preuve de la Proposition I.10. □

d) **Existence globale**

On a l'existence locale de la solution sur $]0,T_1]$. Grâce à la régularité de u, pour tout $t_0 \in]0,T_1[$, $u(t_0,.) \in L^\infty(\Omega)$. Par la même méthode que dans le Théorème I.2 on peut démontrer l'existence globale des solutions faibles de (1.1).

6. Preuve du Théorème I.4

Soit $T \in]0,1[$ et notons par $X = X(T)$ l'espace des fonctions continues $u :]0,T] \to W_0^{1,pq}(\Omega)$ qui vérifient :

$$\|u\|_X = \max\{\sup_{]0,T]} t^\alpha \|u(t)\|_{pq},\ \sup_{]0,T]} t^{\frac{1}{2}+\alpha} \|\nabla u(t)\|_{pq}\} < \infty$$

où

$$\alpha = \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{pq}). \tag{6.1}$$

Comme dans la preuve du Théorème I.3 on définit les fonctionnelles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sur X (cf. (5.4) et (5.5)) et on note par $X_K(T)$ la boule fermée de rayon K de $X(T)$. Afin de pouvoir appliquer le Théorème de point fixe de Banach il suffit de trouver K_1 et T_1 tels que : $\mathcal{F}(X_{K_1}(T_1)) \subset X_{K_1}(T_1)$ et $\mathcal{F}$ soit une contraction sur $X_{K_1}(T_1)$. Ainsi les estimations (2.2) et (2.3) appliquées aux opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ donnent d'une part :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t)\|_{pq} &\le \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\|_{pq}\, ds \le C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \||\nabla u(s)|^p\|_q\, ds \\
&\le C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|\nabla u(s)\|_{pq}^p\, ds \le C(p,q) \cdot \|u\|_X^p \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\, ds \\
&\le C(p,q)\|u\|_X^p \cdot t^{1-\alpha-p(\alpha+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma = 1 - p(\alpha + \frac{1}{2}). \tag{6.2}$$

Comme $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$ on a $\gamma > 0$ et on déduit :.

$$t^\alpha \|\mathcal{G}u(t)\|_{pq} \le C(p,q) \cdot \|u\|_X^p T^\gamma. \tag{6.3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_{pq} &\le \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta}|\nabla u(s)|^p\|_{pq}\, ds \le C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \||\nabla u(s)|^p\|_q\, ds \\
&\le C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \|\nabla u(s)\|_{pq}^p\, ds \le C(p,q)\|u\|_X^p \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\, ds \\
&\le C(p,q)\|u\|_X^p \cdot t^{1-(\alpha+\frac{1}{2})-p(\alpha+\frac{1}{2})},
\end{aligned}$$

d'où

$$t^{\alpha+\frac{1}{2}} \|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_{pq} \le C(p,q)\|u\|_X^p T^\gamma. \tag{6.4}$$

En regroupant (6.3) et (6.4) on obtient :

$$\|\mathcal{G}(u)\|_X \le C_1 \|u\|_X^p T^\gamma. \tag{6.5}$$

De même, grâce aux relations (2.2), (2.3) et (6.5) on a :

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \le C_2(\|\mu_0\|_q + \|u\|_X^p T^\gamma), \tag{6.6}$$

où la constante C_2 ne dépend que de p, q, N, a et Ω.

Montrons que $\mathcal{F}$ est une contraction pour T assez petit. On considère u_1 et u_2 dans $X_K(T)$,

alors pour tout $t \in]0,T[$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_{pq} &\leq |a| \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p)(s)\|_{pq} \\
&\leq C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \||\nabla u_1(s)|^p - |\nabla u_2(s)|^p\|_q \, ds \\
&\leq C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\|\nabla u_1(s)\|_{pq}^{p-1} + \|\nabla u_2(s)\|_{pq}^{p-1}) \|(\nabla u_1 - \nabla u_2)(s)\|_{pq} \, ds \\
&\leq C(p,q) K^{p-1} \|u_1 - u_2\|_X \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-p(\frac{1}{2}+\alpha)} \leq C(p,q) K^{p-1} t^{1-p(\alpha+\frac{1}{2})-\alpha} \|u_1 - u_2\|_X,
\end{aligned}$$

d'où :

$$t^{\alpha} \|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_{pq} \leq C(p,q) K^{p-1} T^{\gamma} \|u_1 - u_2\|_X.$$

De même on montre que :

$$t^{\alpha+\frac{1}{2}} \|\nabla \mathcal{F}u_1(t) - \nabla \mathcal{F}u_2(t)\|_{pq} \leq C(p,q) K^{p-1} T^{\gamma} \|u_1 - u_2\|_X.$$

Par conséquent :

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_X \leq C_3 \cdot K^{p-1} T^{\gamma} \|u_1 - u_2\|_X. \tag{6.7}$$

On pose $C_4 = \max\{C_2, C_3\}$ et on choisit K_1 et T_1 tels que :

$$C_4(\|\mu_0\|_q + K_1^p \cdot T_1^{\gamma}) \leq \frac{1}{2} K_1. \tag{6.8}$$

Alors $\mathcal{F}(X_{K_1}(T_1)) \subset X_{K_1}(T_1)$ et pour tout $u_1, u_2 \in X_{K_1}(T_1)$ on a :

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_X \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_X.$$

On peut appliquer le Théorème du point fixe de Banach et on obtient l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in X_{K_1}(T_1)$ qui vérifie :

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \int_0^t e^{(t-s)\Delta} |\nabla u(s)|^p \, ds, \ t \in [0, T_1[. \tag{6.9}$$

Grâce à (6.9) et au fait que $u \in X_{K_1}(T_1)$ il est facile de voir que $u \in C([0,T_1]; L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T_1; W^{1,pq}(\Omega))$ et par conséquent u est une solution faible du problème (1.1) sur $[0,T_1]$

b) Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème (1.1) sur Q_T et telles que :

$$u_1, u_2 \in C([0,T]; L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T; W^{1,pq}(\Omega)) \tag{6.10}$$

Puisque u_1 et u_2 vérifient (6.9) on peut appliquer (2.3) et on obtient :

$$\|\nabla u_1(t) - \nabla u_2(t)\|_{pq} \leq \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta}|\nabla u_1(s)|^p - |\nabla u_2(s)|^p\|_{pq}\, ds, \quad t \in]0,T[,$$

$$\leq \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \||\nabla u_1(s)|^p - |\nabla u_2(s)|^p\|_q\, ds,$$

où α est défini par (6.1).
Grâce à l'inégalité de Young et compte tenu de (6.2) on déduit :

$$\begin{aligned}\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^p(0,T;L^{pq}(\Omega))} &\leq C \cdot T^{\gamma/p} \||\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega))} \\ &\leq C \cdot T^{\gamma/p} \|(|\nabla u_1|^{p-1} + |\nabla u_2|^{p-1})|\nabla u_1 - \nabla u_2|\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega)))} \\ &\leq C \cdot T^{\gamma/p} (\||\nabla u_1|^{p-1} \cdot |\nabla u_1 - \nabla u_2|\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega)))} + \\ &\qquad \||\nabla u_2|^{p-1} \cdot |\nabla u_1 - \nabla u_2|\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega))}),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^p(0,T;L^{pq}(\Omega))} \leq C \cdot T^{\gamma/p} (&\|\nabla u_1\|^{p-1}_{L^p(0,T;L^{pq}(\Omega))} + \|\nabla u_2\|^{p-1}_{L^p(0,T;L^{pq}(\Omega))}) \\ &\cdot \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^p(0,T;L^{pq}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Puisque $\gamma > 0$ alors $T \to C(T)T^{\gamma/p}$ est une fonction croissante et comme $|\nabla u_1|, |\nabla u_2| \in L^p(0,T;L^{pq}(\Omega))$, on peut choisir $\tilde{T}$ assez petit tel que :

$$C \cdot \tilde{T}^{\gamma/p} (\|\nabla u_1\|^{p-1}_{L^p(0,\tilde{T};L^{pq}(\Omega))} + \|\nabla u_2\|^{p-1}_{L^p(0,\tilde{T};L^{pq}(\Omega))}) \leq \frac{1}{2}.$$

De (6.11) on déduit :

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^p(0,\tilde{T};L^{pq}(\Omega))} \leq \frac{1}{2} \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^p(0,\tilde{T};L^{pq}(\Omega))}.$$

Par conséquent $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. dans $Q_{\tilde{T}}$ et grâce à (6.9) on a :

$$u_1 = u_2 \text{ p.p. dans } Q_{\tilde{T}}$$

Par un argument classique on montre que $u_1 = u_2$ dans Q_T et la preuve de l'unicité est achevée.
□

Remarque I.7. *Comme dans la preuve du Théorème I.3, on peut montrer que la solution locale u ainsi trouvée satisfait $u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}_{loc}(Q_{\tau,T_1}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau,T_1}})$ pour un certain $\delta \in]0,1[$ et pour tout $\tau \in]0,T_1[$; de plus par la même méthode on peut prolonger cette solution locale en une solution globale sur Q_∞.*

Remarque I.8. *La preuve du Théorème I.4 reste valable pour tout $1 \leq p < 2$ et*

$$\begin{cases} q \geq 1 \quad si \quad 1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}, \\ q > \frac{N(p-1)}{2-p} \quad si \quad \frac{N+2}{N+1} \leq p < 2. \end{cases} \tag{6.12}$$

En particulier, si on prend $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ alors, pour tout $T > 0$, le problème (1.1) admet une unique solution u dans l'espace $C([0,T],L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,pq}_0(\Omega))$ pour tout q vérifiant

(6.12). Cette solution est dans $C^{1+\delta/2,2+\delta}_{loc}(Q_{\tau,T}) \cap C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$ *et satisfait :*

$$\max\{\sup_{]0,T]} t^{\alpha}\|u(t)\|_{pq}, \sup_{]0,T]} t^{\frac{1}{2}+\alpha}\|\nabla u(t)\|_{pq}\} < \infty, \tag{6.13}$$

où α *est donné par (6.1).*

La Remarque I.8 peut être complétée par le résultat de régularité suivant :

Proposition I.11. *Si* $1 \leq p < 2$ *et* $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ *alors la solution du problème (1.1) est dans* $C(\overline{Q_T})$*, pour tout* $T > 0$.

Démonstration:
On note par $f = a|\nabla u|^p$ et on fixe q tel que $q > \frac{Np}{2-p}$. En particulier q vérifie (6.12), et d'après (6.13) on a :

$$\sup_{t\in]0,T]} t^{p(\frac{1}{2}+\alpha)}\|f(t)\|_q < \infty, \tag{6.14}$$

où α est défini par (6.1).
Grâce au choix de q on a :

$$\lim_{r\nearrow p(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{N}{2q}\frac{r}{r-1} = \frac{N}{(2-p)\cdot q - pN + N} < 1.$$

Ainsi il est possible de trouver r tel que :

$$1 < r < \frac{1}{p(\alpha+\frac{1}{2})} < 2 \quad \text{et} \quad \frac{N}{2q}\cdot\frac{r}{r-1} < 1. \tag{6.15}$$

Avec r et q vérifiant (6.15), et grâce à (6.14) on a :

$$\|f\|^r_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq C\left(\int_0^T t^{-pr(\alpha+\frac{1}{2})}\,dt\right) \leq C\left[\frac{T^{1-pr(\alpha+\frac{1}{2})}}{1-pr(\alpha+\frac{1}{2})}\right] < \infty.$$

Ainsi les hypothèses de la Proposition I.5 sont vérifiées et on obtient $u \in C(\overline{Q_T})$. □

7. Preuve du Théorème I.5

Pour tout $n \in N$ posons

$$u_0^n(x) = \begin{cases} \mu_0(x) & \text{si } \mu_0(x) < n, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $(u_0^n)_n \subset L^\infty(\Omega)$ est une suite croissante de fonctions positives qui converge presque partout et dans $L^1(\Omega)$ vers μ_0. On fixe $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$. En particulier pour tout $n \in N$ $u_0^n \in L^q(\Omega)$ et d'après le Théorème I.4, il existe une unique solution faible du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = a|\nabla u^n|^p & \text{dans} \quad Q_T, \\ u^n(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u^n(0,x) = u_0^n(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.1}$$

telle que

$$u_n \in C([0,T], L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^{1+\delta/2,2+\delta}_{loc}(Q_{\tau,T}), \tag{7.2}$$

pour tout $\tau \in]0,T[$.
Grâce aux Principe de Comparaison pour les solutions faibles d'équations paraboliques(voir par exemple [**1**] ou [**44**]) la suite $(u_n)_n$ est croissante et converge presque partout vers une fonction qu'on note u.
Montrons que $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Soit $v^n = e^{t\Delta}u_0^n$ la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale u_0^n. Puisque $a < 0$ en utilisant de nouveau le Principe de Comparaison on obtient :

$$0 \leq u^n \leq v^n \leq v \ \text{ dans } \ Q_T. \tag{7.3}$$

Où $v = e^{t\Delta}\mu_0$. On passe à la limite dans (7.3) lorsque $n \to \infty$ et on obtient :

$$0 \leq u \leq v \quad \text{dans } \ Q_T. \tag{7.4}$$

Comme $\mu_0 \in L^1(\Omega)$, grâce à la relation (2.2) on obtient $v \in L^r(Q_T) \cap L^\infty(0,T,L^1(\Omega))$ pour tout $1 \leq r < \frac{N+2}{N}$. Ainsi, d'après (7.4), $u \in L^r(Q_T) \cap L^\infty(0,T,L^1(\Omega))$ et comme la suite u_n est croissante et converge presque partout vers u on tire que :

$$u^n \to u \ \text{ dans } L^r(Q_T) \text{ et p.p. dans } \quad Q_T. \tag{7.5}$$

De plus, grâce à (7.3) pour tout $t \in]0,T[$, la suite $(u^n(t))_n$ est croissante et majorée par $v(t) \in L^2(\Omega)$. Alors, en utilisant le Théorème de la Convergence Monotone, pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$u^n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \ \text{ dans } L^2(\Omega) \ \text{ pour tout } \ t \in]0,T[. \tag{7.6}$$

On fixe $\tau \in]0,T[$ et η tels que $\frac{1}{\eta} + \frac{p}{2} = 1$. Comme :

$$\begin{array}{l} u^n \to u \quad \text{dans } \ Q_{\tau,T}, \\ 0 \leq u^n \leq v^n = e^{t\Delta}u_0^n \end{array}$$

et

$$v^n \to v = e^{t\Delta}\mu_0 \ \text{ fortement dans } L^\eta(Q_{\tau,T}),$$

on déduit :

$$u^n \to u \quad \text{fortement dans } \ L^\eta(Q_{\tau,T}), \tag{7.7}$$

(Voir par exemple le Corollaire 1.4.14 dans [**48**] ou Proposition 18, p.270 dans [**64**]).
En intégrant sur Q_T la première équation du problème (7.1) on obtient :

$$\int_\Omega u^n(t,x)\,dx - a\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^p\,dx\,dt = \int_\Omega u_0^n(x)\,dx + \int_0^T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial \nu}(t,x)\,d\sigma(x)\,dt,$$

où ν est la normale extérieure au domaine Ω et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$.
D'après (7.3), pour tout $(t,x) \in \Gamma_T$ on a

$$\frac{\partial u^n}{\partial \nu}(t,x) = \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{u^n(t,x+\lambda\nu)}{\lambda} \leq 0$$

Par conséquent :

$$|a|\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^p\,dx\,dt \leq \|u_0^n\|_1 \leq \|\mu_0\|_1, \tag{7.8}$$

donc la suite $(u^n)_n$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Compte tenu de (7.7), à une sous-suite près, on a :

$$u^n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{7.9}$$

d'où

$$u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Pour $\tau \in]0,T[$ fixé, montrons que :

$$|\nabla u_n|^p \to |\nabla u|^p \quad \text{dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}) \quad \text{fort.} \tag{7.10}$$

D'une part, en multipliant la première équation du problème (7.1) par u_n et en intégrant sur $Q_{\tau,T}$ on a :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u^n(T,x))^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^n(\tau,x))^2\,dx + \int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n(s,x)|^2\,dxds = a\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n(s,x)|^p u^n(s,x)\,dxds.$$

Comme $u^n \geq 0$ et $a < 0$ on tire :

$$\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (u^n)^2(\tau,x)\,dx.$$

D'autre part, en regroupant (7.3) et l'inégalité (2.2), pour tout $t \in]\tau,T[$ on a :

$$\|u^n(t)\|_2 \leq \|v^n(t)\|_2 = \|e^{t\Delta}u_0^n\|_2 \leq Ct^{-\frac{N}{4}}\|u_0^n\|_1 \leq C\tau^{-\frac{N}{4}}\|\mu_0\|_1. \tag{7.11}$$

D'où

$$\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^2\,dx \leq C\tau^{-\frac{N}{2}}\|\mu_0\|_1, \tag{7.12}$$

et par conséquent

$$(|\nabla u^n|)_n \quad \text{est bornée dans} \quad L^2(Q_{\tau,T}),$$

c'est à dire :

$$(|\nabla u^n|^p)_n \quad \text{est bornée dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}). \tag{7.13}$$

Puisque $1 < \frac{2}{p} \leq \frac{2(N+1)}{N+2}$, il existe une sous-suite notée toujours par $(|\nabla u^n|^p)_n$, telle que :

$$a|\nabla u^n|^p \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}). \tag{7.14}$$

En particulier

$$a|\nabla u^n|^p \to g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T).$$

On passe à la limite dans (7.1) et on trouve que u vérifie l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T). \tag{7.15}$$

Dans la suite, on veut démontrer que $(u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega))$. Pour ce faire, soient u^n et u^m deux solutions de (7.1) avec pour données initiales u_0^n et u_0^m respectivement. Alors (u^n-u^m) satisfait l'équation :

$$\frac{\partial(u^n-u^m)}{\partial t}-\Delta(u^n-u^m)=a(|\nabla u^n|^p-|\nabla u^m|^p) \text{ dans } Q_{\tau,T}.$$

La régularité (7.2) de (u^n-u^m) permet de multiplier cette dernière équation par (u^n-u^m) et d'intégrer sur $Q_{\tau,T}$, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega (u^n-u^m)^2(T)\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega (u^n-u^m)^2(\tau)\,dx+\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n-\nabla u^m|^2\,dx\,ds\\ =a\int_\tau^T\int_\Omega (|\nabla u^n|^p-|\nabla u^m|^p)(u^n-u^m)\,dx\,ds.\end{aligned}\tag{7.16}$$

Grâce à (7.6), (7.7) et (7.13) on peut passer à la limite dans la dernière égalité lorsque $n,m\to\infty$, et on obtient :

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n-\nabla u^m|^2\,dx\,ds=0.$$

Ainsi, $(u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega))$. En particulier, à une sous-suite près, on a :

$$|\nabla u^n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}|\nabla u| \text{ dans } L^2(Q_{\tau,T}) \text{ et p.p. dans } Q_{\tau,T},$$

ce qui implique :

$$|\nabla u^n|^p\to|\nabla u|^p \text{ dans } L^{2/p}(Q_{\tau,T}) \text{ lorsque } n\to\infty.$$

Ce dernier point et la relation (7.14) nous permet de faire l'identification :

$$g=a|\nabla u|^p \text{ p.p. dans } Q_{\tau,T}.$$

Finalement : $u\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^2(]\tau,T[;H_0^1(\Omega))\cap W_{2/p}^{1,2}(Q_{\tau,T})$ et vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=a|\nabla u|^p \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_{\tau,T}).\tag{7.17}$$

Il reste à identifier la donnée initiale μ_0. Pour ce faire, on va prouver d'abord que $u\in C([0,T];L^1(\Omega))$. Soit $(t_m)_m$ une suite qui décroit vers 0. Puisque $v\in C([0,T];L^1(\Omega))$ à une sous-suite près qu'on note $(t_{m'})_{m'}$, on a :

$$v(t_{m'})\to\mu_0 \text{ p.p dans } \Omega.$$

On peut passer à la limite dans (7.3) et on a

$$\limsup_{t_{m'}\to0}u(t_{m'},x)\le\limsup_{t_{m'}\to0}v(t_{m'},x)=\mu_0(x) \text{ p.p } x\in\Omega.\tag{7.18}$$

Comme pour tout $n\in N$, $u^n\in C([0,T],L^q(\Omega))$, par un procédé d'extraction diagonale on trouve une sous-suite $(t_{m''})_{m''}$ de $(t_{m'})_{m'}$ tel que

$$u^n(t_{m''},x)\to u_0^n(x) \text{ pour tout } n\in N \text{ et p.p. } x\in\Omega.$$

La suite $(u^n)_n$ étant croissante on a :

$$u^n(t_{m''}, x) \leq u(t_{m''}, x).$$

On passe à la limite dans l'inégalité ci-dessus et on obtient

$$u_0^n(x) = \liminf_{t_{m''} \to 0} u^n(t_{m''}, x) \leq \liminf_{t_{m''} \to 0} u(t_{m''}, x). \tag{7.19}$$

Grâce à la monotonie de u_0^n on en déduit :

$$\mu_0(x) \leq \liminf_{t_{m''} \to 0} u(t_{m''}, x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Ce dernier point regroupé avec (7.18) donnent :

$$\limsup_{t_{m''} \to 0} u(t_{m''}, x) \leq \mu_0(x) \leq \liminf_{t_{m''} \to 0} u(t_{m''}, x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

D'où :

$$u(t_{m''}, x) \to \mu_0(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

De plus :

$$0 \leq u(t_{m''}, x) \leq v(t_{m''}, x) \text{ dans } \Omega$$

et

$$v(t_{m''}, x) \to \mu_0(x) \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ lorsque } t_{m''} \to 0.$$

On en déduit(cf. par exemple le Corollaire 1.4.14 de [**48**]) :

$$u(t_{m''}) \to \mu_0 \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ lorsque } t_{m''} \to 0. \tag{7.20}$$

Ainsi, on a démontré que toute suite $(t_m)_{m \geq 1}$ telle que $t_m \searrow 0$, lorsque $m \to \infty$, contient une sous-suite $(t_{m''})$ telle que (7.20) soit vérifiée. Donc :

$$u(t) \to \mu_0 \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ lorsque } t \to 0$$

Finalement $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ et compte tenu de (7.9) et (7.17), on conclut que u est solution faible du problème aux limites (1.1). □

8. Preuve du Théorème I.6

Ce résultat est vrai lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, (cf. [**13**]) et la preuve utilise un argument local, grâce à une troncature adaptée à l'équation parabolique. Pour cette raison, lorsque Ω est un ouvert borné, le problème peut être résolu par la même idée. Plus précisément supposons qu'il existe une fonction u satisfaisant (3.3) et (3.4) et posons $r = \frac{p(N+1)}{N}$. Alors, grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on a :

$$\int_0^T \|u(t)\|_r^r \, dt \leq C \int_0^T \|\nabla u(t)\|_p^{rN/(N+1)} \cdot \|u(t)\|_1^{r/(N+1)} \, dt \leq C \|u\|^{r/(N+1)}_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \cdot \|u\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}.$$

Par conséquent

$$u \in L^r(Q_T). \tag{8.1}$$

Soit $B_r(x_0) \subset \Omega$ la boule de centre x_0 et de rayon r et soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ une fonction positive à support compact dans $]-T,T[\times B_r(x_0)$ telle que $\varphi(0,x_0)=1$. Pour tout $k \geq 1$ posons :

$$\varphi_k(t,x) = \varphi(k^2 t, k(x-x_0)+x_0) \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Le support de chaque φ_k étant inclu dans $]-T,T[\times B_r(x_0)$ on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t,x) = 0 \ \text{ pour tout } \ (t,x) \neq (0,x_0). \tag{8.2}$$

Pour $q \geq 1$ on a :

$$\|\varphi_{k,t}\|_{L^q(Q_T)} + \|\Delta\varphi_k\|_{L^q(Q_T)} \leq k^{2-(N+2)/q}(\|\varphi_t\|_{L^q(Q_T)} + \|\Delta\varphi\|_{L^q(Q_T)}),$$

ainsi, pour tout $q \in]1, \frac{N+2}{2}]$:

$$(\varphi_{k,t}, \Delta\varphi_k) \ \text{ converge fortement vers zéro dans } \ L^q(Q_T) \tag{8.3}$$

En multipliant la première équation de (3.4) par φ_k et et en intégrant sur $]t,T[\times\Omega$, on obtient :

$$-\int_\Omega u(t,x)\varphi_k(t,x)\,dx = \int_t^T\int_\Omega u(\varphi_{k,t}+\Delta\varphi_k)\,dx\,ds + a\int_t^T\int_\Omega |\nabla u|^p\varphi_k\,dx\,ds.$$

Compte tenu de (3.3) et (3.4), on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus lorsque $t \searrow 0$. On obtient :

$$-M = \int_0^T\int_\Omega u(\varphi_{k,t}+\Delta\varphi_k)\,dx\,ds + a\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^p\cdot\varphi_k\,dx\,ds \tag{8.4}$$

Grâce à la régularité (3.3) de u, à la relation (8.2) et au Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue on a d'une part :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^p\varphi_k\,dx\,ds = 0 \tag{8.5}$$

et d'autre part, comme $u \in L^r(Q_T)$ et $r' = \frac{r}{r-1} = \frac{p(N+1)}{p(N+1)-N} \in]1, \frac{N+2}{2}]$ lorsque $p \geq (N+2)/(N+1)$ on obtient grâce à (8.3) :

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega u(\varphi_{k,t}+\Delta\varphi_k)\,dx\,ds = 0$$

Ainsi on peut passer à la limite dans (8.4), lorsque $k \to +\infty$, et on obtient $-M=0$, donc une contradiction. Cela achève la preuve du Théorème I.6. □

Remarque I.9. *Signalons que la preuve de non-existence des solutions faibles dans* [**13**], *Théorème 4, p. 2011, est valable pour $a<0$, aussi bien que pour $a>0$.*

Remarque I.10. *Comme dans [*[**9**]*, Théorème 4.4], on peut démontrer la non-existence de solution faible lorsque $a<0$, $N \geq 2$, $\frac{N+2}{N+1} < p < N$, et la donnée initiale μ_0 est une mesure*

p-atomique positive, $\mu_0 \neq 0$, à support compact dans Ω. En effet, en notant par v la solution de (2.1) avec donnée initiale μ_0, et par $\tilde{v}$ la solution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$ alors :

$$\begin{cases} \tilde{v} \in C([0,T[;L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\mathbb{R}^N)), \\ \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \Delta \tilde{v} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'((0,\mathbb{R}^N), \\ \tilde{v}(t) \underset{t \searrow 0}{\rightharpoonup} \tilde{\mu_0} \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N) \quad \text{faible}, \end{cases}$$

où $\tilde{\mu_0}$ est donné par :

$$\tilde{\mu_0} = \begin{cases} \mu_0 & \text{dans} \quad \Omega; \\ 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Comme $\tilde{\mu_0} \geq 0$ on a $\tilde{v} \geq 0$ dans $]0,T[\times\mathbb{R}^N$. En particulier, $\tilde{v}|_{]0,T[\times\partial\Omega} \geq 0$. Par conséquent on peut appliquer le principe de comparaison et on obtient :

$$v \leq \tilde{v} \quad \text{dans} \quad Q_T.$$

Supposons maintenant que, sous les hypothèses ci-dessus, il existe une solution faible u du problème (1.1), alors, en utilisant de nouveau le principe de comparaison on obtient :

$$u \leq v \leq \tilde{v} \quad \text{dans} \quad Q_T,$$

on peut utiliser la même preuve que celle du Théorème 4.4 dans [**9**]. *Ainsi, on peut démontrer le même résultat de non-existence de solution sur des ouverts bornés Ω, pour des données initiales μ_0 p-atomiques.*

9. Preuve du Théorème I.7

Pour $\mu_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$, d'après le Théorème 7.10 de [**38**], le problème aux limites (1.1) admet une unique solution classique maximale $u \in C^{0,1}([0,T^*[\times\overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(Q_{T^*})$, où T^* est le temps maximal d'existence de la solution u. Supposons que $T^* < \infty$ et notons par $v = e^{t\Delta}\mu_0$ la solution du problème aux limites (2.1) à donnée initiale $\mu_0 \in C_0^1(\Omega)$. Par le principe de comparaison on a :

$$0 \leq u \leq v \quad \text{sur } [0,T^*[\times\Omega. \tag{9.1}$$

De plus pour tout $(t,x) \in [0,T^*[\times\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{u(t,x+\lambda\nu)}{\lambda}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(t,x) = \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{v(t,x+\lambda\nu)}{\lambda}$$

Grâce à (9.1) on tire :

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(t,x) \leq \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0,T^*[\times\Omega \tag{9.2}$$

Soit $i \in \{1,\cdots,N\}$ et $\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$ alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\nu,e_i)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\cos(\nu,e_i).$$

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Compte tenu de (9.2) on en déduit :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \text{ sur } [0,T^*]\times\partial\Omega \tag{9.3}$$

Pour $i \in \{1,\cdots,N\}$ on note par :

$$M_i = \sup_{(t,x)\in[0,T^*]\times\Omega} |\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x)|, \tag{9.4}$$

et on dérive, par rapport à la variable x_i, la première équation du problème (1.1). Alors, d'après (9.3) et (9.4) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \Delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = ap|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad \text{sur} \quad [0,T^*[\times\Omega, \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\right| \leq M_i \quad \text{sur} \quad [0,T^*[\times\partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(0,x) = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{9.5}$$

Pour $(t,x)\in[0,T^*[\times\Omega$ on note par :

$$b(t,x) = ap|\nabla u|^{p-2}\cdot\nabla u.$$

Fixons $T\in]0,T^*[$ quelconque. Puisque $u\in C^{0,1}([0,T]\times\overline{\Omega})$ et $p\geq 2$ on a :

$$|b|\in C([0,T]\times\overline{\Omega}).$$

Pour $i=1\cdots n$ et $(t,x)\in Q_T$ notons par :

$$f_i(t,x) = b(t,x)\cdot\nabla(\frac{\partial u}{\partial x_i})(t,x),$$

alors, grâce à la régularité de b et u on a :

$$f_i\in L^\infty_{loc}(Q_T).$$

En particulier :

$$f_i\in L^q_{loc}(Q_T), \text{ pour } q>(N+2)/2.$$

D'après (9.5) et les résultats classiques de régularité pour équations paraboliques (voir le Théorème 7.13 dans [**55**], par exemple) on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\in W^{1,2}_{q,loc}(Q_T), \quad i=1\cdots n.$$

Comme $q>(N+2)/2$ on a :

$$W^{1,2}_{q,loc}\hookrightarrow C^{\alpha/2,\alpha}_{loc}(Q_T)$$

pour tout $\alpha\in]0,\frac{q-(N+2)/2}{q}[$ (voir le Lemme 3.3 dans [**51**]). Ainsi :

$$|\nabla u|\in C^{\alpha/2,\alpha}_{loc}(Q_T). \tag{9.6}$$

Si on note par :

$$g(t,x) = a|\nabla u|^p(t,x) \text{ in } Q_T,$$

comme $p\geq 2$, la relation (9.6) implique :

$$g\in C^{\alpha/2,\alpha}_{loc}(Q_T).$$

On revient au problème (1.1) et on utilise un argument classique de "bootstrap" afin d'accroitre la régularité de la solution u. Ainsi, grâce aux résultats de régularité locale pour les équations paraboliques (Théorème III.12.2 dans [**51**]) on obtient :

$$u \in C_{loc}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_T).$$

Donc, en utilisant des propriétés classiques des espaces de Hölder (voir [**50**], p. 126) on déduit :

$$g \in C_{loc}^{\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha}(Q_T).$$

En appliquant de nouveau les résultats de régularité locale pour les solutions des problèmes paraboliques, (Théorème III.12.2 in [**51**]] on obtient finalement :

$$u \in C_{loc}^{\frac{3+\alpha}{2},3+\alpha}(Q_T).$$

Donc, en particulier $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$. Cette régularité regroupée avec (9.3) nous permet d'appliquer le Principe de Comparaison, (Théorème 2.16, p.52 dans [**38**]), au problème (9.5) sur $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Il en résulte :

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)| \leq M_i \quad \text{sur} \quad [0,T] \times \overline{\Omega}.$$

Comme M_i est une constante qui ne dépend pas de T et comme $T \in]0,T^*[$ a été choisi arbitrairement on déduit :

$$|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)| \leq M_i \quad \text{sur} \quad [0,T^*[\times\overline{\Omega}, \tag{9.7}$$

pour tout $i = 1 \cdots N$. Ainsi, compte tenu de (9.4) et (9.7) on obtient :

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(Q_{T^*})} \leq \sqrt{N}\|\nabla v\|_{L^\infty(Q_{T^*})}. \tag{9.8}$$

De plus, d'après (9.1) on a :

$$\sup_{(t,x)\in[0,T^*[\times\Omega} |u(t,x)| \leq \|v\|_{L^\infty(Q_{T^*})} \tag{9.9}$$

Donc, si on note par :

$$M = \|v\|_{L^\infty(Q_{T^*})} + \sqrt{N}\|\nabla v\|_{L^\infty(Q_{T^*})},$$

alors, en regroupant (9.8) et (9.9) on obtient :

$$\sup_{(t,x)\in[0,T^*[\times\overline{\Omega}} (|u(t,x)| + |\nabla u(t,x)|) \leq M,$$

ce qui contredit (3.5). Par conséquent $T^* = \infty$ et u est une solution globale classique du problème (1.1) sur $]0,+\infty[\times\Omega = Q_\infty$. □

10. Preuve du Théorème I.8

Pour démontrer l'existence d'une solution faible on utilise une méthode analogue à celle de la preuve du Théorème I.5. Soient $\mu_0 \in L^1_{+,approx}$ et $(u_0^n)_n \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ une suite de fonctions positives telle que :

$$u_0^n \nearrow \mu_0 \quad \text{a.e. in} \quad \Omega, \tag{10.1}$$

alors :

$$\begin{cases} u_0^n \to \mu_0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \\ \|u_0^n\|_1 \leq \|\mu_0\|_1. \end{cases} \tag{10.2}$$

Soit $T > 0$ et notons par :

$$u^n \in C^{0,1}([0,+\infty[\times\overline{\Omega}) \cap C_{loc}^{\frac{3+\alpha}{2},3+\alpha}(Q_\infty), \tag{10.3}$$

la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = a|\nabla u^n|^p & \text{dans } Q_T, \\ u^n(t,x) = 0 \text{ sur } \Gamma_T, \\ u^n(0,x) = u_0^n(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{10.4}$$

donnée par le Théorème I.7, où $\alpha \in]0,1[$. Alors u^n vérifie le lemme suivant :

Lemme I.1. *Soient $T \in]0,1[$, $a < 0$, $p \geq 2$ et $u_0^n \in C_0^1(\overline{\Omega})$ une fonction positive. Soit u^n la solution du problème (10.4) ayant la régularité (10.3). Alors :*

$$\|\nabla u^n(t)\|_\infty \leq Ct^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}\|u_0^n\|_1, \quad \textit{pour tout } t \in (0,T), \tag{10.5}$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de a, Ω et N.

Démonstration:
La preuve de (10.5) est réalisée à l'aide d'une "technique de Bernstein" et suit les mêmes arguments que dans [**13**], [**28**] et [**39**].
Soit $v_n = e^{t\Delta}u_0^n$ la solution de l'équation de la chaleur (le problème (2.1)), avec pour donnée initiale u_0^n. Grâce au Principe de Comparaison on a :

$$0 \leq u^n \leq v^n \quad \text{dans} \quad Q_T, \tag{10.6}$$

et comme que dans la preuve du Théorème I.7, point (9.3), on peut montrer que pour $i = 1 \cdots n$:

$$\left|\frac{\partial u^n}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial v^n}{\partial x_i}\right| \text{ sur } \Gamma_T. \tag{10.7}$$

Ensuite, en utilisant les relations (2.4) et (10.7) on a :

$$\|\nabla u^n(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|\nabla v^n(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C_0 t^{-\frac{1}{2}}\|u_0^n\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{pour tout } t \in]0,T[, \tag{10.8}$$

où C_0 est une constante positive qui dépend de Ω et N.
On fixe l'entier n et $\varepsilon > 0$ et soit $M_\varepsilon = \|u_0^n\|_\infty + \varepsilon$, alors d'après (10.6) on a :

$$\|u^n\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|v^n\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|u_0^n\|_\infty \leq M_\varepsilon. \tag{10.9}$$

Notons par :

$$w = \frac{|\nabla u^n|^2}{\theta(u^n)} \text{ dans } Q_T, \tag{10.10}$$

où θ est une fonction positive dans $C^2([0,M_\varepsilon])$, qu'on va choisir ultérieurement. Alors grâce à la régularité de u^n donnée par (10.3) on déduit :

$$w \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$$

et vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w - d(t,x)\cdot\nabla w - \theta''(u^n)w^2 - a(p-1)\theta'(u^n)\theta^{\frac{p-2}{2}}(u^n)w^{1+p/2} = \\ = -\frac{2}{\theta(u^n)}\sum_{1\leq i,j\leq N}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2, \end{aligned} \tag{10.11}$$

où

$$d(t,x) = \left(pa|\nabla u^n|^{p-2} + 2\frac{\theta'(u^n)}{\theta(u^n)} \right) \nabla u^n.$$

On définit θ par la formule suivante :

$$\theta(u) = C_0^2 M_\varepsilon^2 + M_\varepsilon u - \frac{1}{2}u^2,$$

où C_0 est la même constante qui intervient dans la relation (10.8). Alors, d'après (10.9) on a :

$$\theta(u^n) \geq C_0^2 M_\varepsilon^2, \quad \theta'(u^n) \geq 0 \ \text{ et } \ \theta''(u^n) = -1.$$

Ces relations, regroupées avec (10.11) impliquent :

$$\mathcal{L}w + w^2 \leq 0 \tag{10.12}$$

où

$$\mathcal{L}w = \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w - d(t,x)\nabla w \tag{10.13}$$

Notons par g la fonction :

$$g(t) = t^{-1}, \quad t > 0.$$

Alors :

$$\mathcal{L}g + g^2 = 0. \tag{10.14}$$

De plus, compte tenu de (10.8) on a :

$$\|w(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \frac{\|v^n(t)\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}}{C_0^2 M_\varepsilon^2} \leq \frac{C_0^2 t^{-1} \|u_0^n\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{C_0^2 M_\varepsilon^2} < t^{-1}. \tag{10.15}$$

Grâce aux relations (10.13), (10.14) et (10.15) on peut appliquer le Principe de Comparaison, (Théorème 2.16, p. 52 dans [**38**]) afin d'obtenir :

$$w(t,x) \leq g(t) \ \text{ dans } \ Q_T.$$

Cela implique :

$$\|\nabla u^n(t)\|_\infty \leq \sqrt{(C_0^2+1)}(\|u_0^n\|_\infty + \varepsilon) t^{-\frac{1}{2}}, \ \text{ pour tout } \ t \in]0,T[.$$

On passe à la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, dans la relation ci-dessus, et on a :

$$\|\nabla u^n(t)\|_\infty \leq \sqrt{(C_0^2+1)}\|u_0^n\|_\infty t^{-\frac{1}{2}}, \ \ t \in]0,T[, \tag{10.16}$$

c'est à dire :

$$\|\nabla u^n(t)\|\|_\infty \leq \sqrt{(2C_0^2+2)}\|u^n(t/2)\|_\infty t^{-\frac{1}{2}}.$$

Puisque u^n est une sous-solution de l'équation de la chaleur , grâce à (2.2) et à l'inégalité ci-dessus on obtient :

$$\|\nabla u^n(t)\|_\infty \leq C t^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} \|u_0^n\|_1$$

ce qui achève la preuve du Lemme I.1. □

On intègre, sur $]0,T[\times\Omega$, la première équation du problème (10.4) et on obtient :

$$\int_\Omega u^n(T,x)\,dx - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u^n}{\partial \nu}(s,x)\,dx\,ds - a\int_0^T \int_\Omega |\nabla u^n|^p(s,x)\,dx\,ds = \int_\Omega u_0^n(x)\,dx.$$

Grâce aux relations (9.2), (10.2) et (10.6) on tire :

$$|a| \int_0^T \int_\Omega |\nabla u^n|^p(s,x)\, ds\, dx \leq \int_\Omega u_0^n(x)\, dx \leq \int_\Omega \mu_0(x)\, dx.$$

Par conséquent, la suite $(u^n)_n$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ et, en particulier relativement compacte pour la topologie faible de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Alors, d'une part la suite $(a|\nabla u^n|^p)_n$ est bornée dans $L^1(Q_T)$ et d'autre part, grâce à (10.2) la suite $(u_0^n)_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Ainsi, on peut appliquer le Lemme 3.3 dans [**5**] au problème (10.4) et on obtient que la suite $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $L^r(Q_T)$ pour tout $r \in [1, \frac{N+2}{N}[$. Donc, à une sous-suite près :

$$u^n \to u \quad \text{dans} \quad L^r(Q_T) \text{ fort} \quad \text{et p.p dans} \quad Q_T. \tag{10.17}$$

De plus, comme la suite $(u^n)_n$ est relativement compacte pour la topologie faible de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ on déduit que $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Soit $\tau \in]0,T[$. D'après (2.2), (10.2) et (10.6) on a :

$$\|u^n\|_{L^\infty(Q_{\tau,T})} \leq \|v^n\|_{L^\infty(Q_{\tau,T})} \leq C\tau^{-\frac{N}{2}} \|u_0^n\|_1 \leq C\tau^{-\frac{N}{2}} \|\mu_0\|_1. \tag{10.18}$$

En regroupant les relations (10.17) et (10.18) on peut appliquer le Théorème de la convergence dominée et on a d'une part :

$$u^n \to u \quad \text{dans} \quad L^\eta(Q_{\tau,T}) \quad \text{pour tout } \eta \geq 1. \tag{10.19}$$

D'autre part, grâce au Lemme I.1 :

$$\|\nabla u^n\|_{L^\infty(Q_{\tau,T})} \leq C\tau^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} \|u_0^n\|_1 \leq C\tau^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{2}} \|\mu_0\|_1 \tag{10.20}$$

On en déduit que, pour tout $q \in [1,+\infty)$, la suite $(|\nabla u^n|^p)_n$ est bornée dans $L^q(Q_{\tau,T})$ et donc, à une sous-suite près :

$$a|\nabla u^n|^p \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans} \quad L^q(Q_{\tau,T}). \tag{10.21}$$

On peut passer à la limite, lorsque $n \to \infty$, dans la première équation du problème (10.4) et on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{dans} \quad D'(Q_T). \tag{10.22}$$

Comme $g \in L^q(Q_{\tau,T})$ pour tout $q > 1$, $u \in L^\infty(\tau,T;W^{1,\infty}(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ et vérifie (10.22), alors grâce aux résultats classiques sur la régularité des solutioons des équations paraboliques (voir [**51**], p. 341) on déduit que :

$$u \in W_q^{1,2}(Q_{\tau,T}) \cap L^\infty(\tau,T;W^{1,\infty}(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{pour tout} \quad q \in]1,+\infty[. \tag{10.23}$$

Dans ce qui suit on démontre que, à une sous-suite près :

$$|\nabla u^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\nabla u| \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T. \tag{10.24}$$

Pour ce faire, soient u^n et u^m vérifiant (10.4), alors $(u^n - u^m)$ est une solution du problème :

$$\frac{\partial (u^n - u^m)}{\partial t} - \Delta(u^n - u^m) = a(|\nabla u^n|^p - |\nabla u^m|^p) \quad \text{dans} \quad Q_{\tau,T}.$$

Soit $\varphi \in C_c^1(\tau, T)$. La régularité (10.3) de $(u^n - u^m)$ nous permet de multiplier cette dernière équation par $(u^n - u^m)\varphi$ et d'intégrer sur $Q_{\tau,T}$. Ainsi on obtient :

$$-\frac{1}{2}\int_\tau^T\int_\Omega (u^n - u^m)^2\varphi_t dxds + \int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n - \nabla u^m|^2\varphi\, dxds$$
$$= a\int_\tau^T\int_\Omega (|\nabla u^n|^p| - |\nabla u^m|^p)(u^n - u^m)\varphi\, dxds$$

Grâce aux relations (10.19) et (10.21) on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus et on obtient :

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n - \nabla u^m|^2\varphi\, dxds = 0, \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in C_c^1(\tau, T).$$

D'après (10.19) il résulte :

$$|\nabla u^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\nabla u| \text{ dans } L^2_{loc}(0, T; L^2(\Omega)) \tag{10.25}$$

Ainsi, à une sous-suite près, la relation (10.24) est satisfaite. En regroupant (10.20) et (10.24) on déduit que, pour tout $q \in [1, +\infty[$:

$$a|\nabla u^n|^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a|\nabla u|^p \text{ dans } L^q(Q_T). \tag{10.26}$$

Alors, compte tenu de (10.21) on peut conclure :

$$g = a|\nabla u|^p.$$

Finalement $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W_q^{1,2}(Q_{\tau,T})$ pour tout $q \in [1, +\infty)$ et vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_{\tau,T}). \tag{10.27}$$

Afin d'identifier la donnée initiale, grâce à la relation (10.1), on peut utiliser la même méthode que dans le Théorème I.5. Ainsi on obtient que u est une solution faible locale pour le problème (3.7).

Pour q suffisamment grand, grâce à (10.23), on a $u \in C^{0,1}(\overline{Q_{\tau,T}})$. Par conséquent, il existe $t_0 \in]\tau, T[$ tel que $u(t_0) \in C_0^1(\overline{\Omega})$. On est alors dans le cadre des hypothèses du Théorème I.7. Pour obtenir l'existence d'une solution globale il suffit d'appliquer le Théorème I.7 au problème (3.7) avec la donnée initiale $u(t_0)$.

Remarque I.11. *L'identification : $g = a|\nabla u|^p$ peut s'obtenir, grâce à la remarque suivante de Ph.Souplet. Il suiffit d'utiliser d'une part le fait que, grâce au Lemme I.1, la suite $(|\nabla u^n|)_n$ reste bornée dans $L^\infty(Q_{\tau,T}), \tau > 0$ et d'autre part le résultat de régularisation, Lemme II.3.3 dans* [**51**], *qui donne une estimation dans un espace de Hölder pour ∇u^n. En particulier, on obtient que la suite $(|\nabla u^n|)_n$ reste bornée dans $C^\delta(\overline{Q_{\tau,T}}), \tau > 0, \delta \in]0, 1[$. D'où on peut déduire (10.24).*

□

CHAPITRE II

Problèmes aux limites de type Cauchy-Neumann pour l'équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité.

RÉSUMÉ. On étudie l'existence, l'unicité et la régularité des solutions faibles de l'équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité : $u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p$, $t > 0$, $x \in \Omega$ avec une condition de Neumann homogène au bord et la donnée initiale μ_0, une mesure de Radon bornée ou bien une fonction mesurable dans un espace de Lebesgue $L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$. L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est supposé borné et régulier, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $p \in]0, 2[$.

1. Introduction

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans} \quad]0, +\infty[\times\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad]0, +\infty[\times\partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = \mu_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné à frontière régulière de classe au moins C^3. Le problème de Cauchy (1.1) avec une condition de Dirichlet homogène au bord, a été étudié dans [**1, 10, 19, 28**]. D'une part, lorsque $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$ et μ_0 est une mesure de Radon bornée, l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème de Cauchy-Dirichlet ont été démontrées par N. Alaa [**1**]. D'autre part, en utilisant une méthode différente S. Benachour et S. Dabuleanu [**10**], ont fait une analyse plus complète du problème de Cauchy-Dirichlet lorsque $p \in]0. + \infty[$. Aussi l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, de l'exposant $p > 0$ et de la donnée initiale μ_0, selon que celle-ci est une mesure de Radon bornée ou une fonction mesurable dans l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$ sont étudiées dans [**10**]. Signalons aussi qu'à l'aide de propriétés sur les semi-groupes qui préservent la monotonie, M.G.Crandall, P.L.Lions et P.E.Souganidis [**28**] ont prouvé l'existence d'une borne universelle pour les solutions positives du problème de Cauchy-Dirichlet lorsque $p > 1$ et μ_0 est une fonction continue positive qui s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Cette estimation leur a permis de démontrer l'existence des solutions et l'unicité dans certains cas. Ainsi, ils ont aussi prouvé, que le problème de Cauchy-Dirichlet homogène avec condition initiale $\mu_0 = +\infty$ sur un ouvert $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et $\mu_0 = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ admet une unique solution positive.
Le problème de Cauchy sur l'espace entier $\mathbb{R}^N$, a été beaucoup étudié (voir [**3, 7, 9, 13, 15, 39, 68**]). Lorsque la donnée initiale μ_0 est continue bornée sur $\mathbb{R}^N$ et $p > 0$, dans [**39**] on trouve une étude sur l'existence et l'unicité des solutions fortes de (1.1) ainsi que sur la régularité et le comportement asymptotique des solutions. Lorsque la donnée initiale n'est pas régulière, dans [**9**] et [**13**] on trouve des résultats d'existence, d'unicité et sur le comportement asymptotique

pour les solutions faibles du problème de Cauchy en fonction de l'exposant $p \geq 1$.
a notre connaissance, le problème (1.1) n'a pas été étudié. La version stationnaire du problème (1.1) à été abordée dans [**56**].
Dans cette partie, nous reprenons l'étude réalisée dans le Chapitre I pour le problème de Cauchy-Dirichlet en établissant des résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions du problème aux limites (1.1) en fonction de la donnée initiale μ_0 et de l'exposant p.
Les résultats principaux peuvent être résumés ainsi :

(*i*) Cas $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. D'une part, pour $0 < p < \frac{N+2}{N+1}$, et μ_0 une mesure de Radon bornée, on démontre en utilisant un théorème de point fixe, que le problème (1.1) admet une solution faible; de plus cette solution est unique si $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. D'autre part, si $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on obtient l'existence et l'unicité de la solution faible lorsque la donnée initiale μ_0 est dans $L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.

(*ii*) Lorsque $a < 0$ et $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on montre que le problème (1.1) admet au moins une solution faible pour tout $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$.

(*iii*) Finalement dans le cas $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $\mu_0 = \delta_{x_0}$ (masse de Dirac en un point x_0 de Ω) et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on prouve qu'il n'y a pas de solutions faibles pour le problème (1.1).

2. Quelques résultats préliminaires sur l'équation de la chaleur avec une condition au bord homogène de type Neumann

Tout d'abord on rappelle la définition suivante :

Définition II.1. *Soient $\{\mu_n\}_n$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_b(\Omega)$ et $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. On dit que*

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mu \text{ dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \text{ faible,}$$

si pour tout $\varphi \in C_b(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi(x)\mu_n(dx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi(x)\mu(dx) \ .$$

L' étude du problème (1.1) est basée sur des propriétés du semi-groupe de la chaleur dans $L^q(\Omega), q \geq 1$, avec une condition au bord homogène de type Neumann. N'ayant pas trouvé de preuves complètes de ces propriétés, il nous a semblé utile de les écrire. On considère le problème aux limites suivant pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad Q_\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad Q_\infty, \\ u(0,\cdot) = \mu_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Rappelons d'abord le résultat de base suivant :

Théorème II.1. [**63**] *Pour tout $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, le problème (2.1) admet une unique solution faible dans $C([0,+\infty[; L^q(\Omega)) \cap L^1(0,T; W_0^{1,1}(\Omega))$.*

On note par $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe dans $L^q(\Omega), q \geq 1$ associé au problème (2.1) et par $p_\Omega(t,x,y)$ le noyau de la chaleur pour le même problème. Alors la solution de (2.1) est donnée par :

$$u(t,x) = S(t)\mu_0(x) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\mu_0(y)\,dy, \text{ pour tout } (t,x) \in [0,+\infty[\times\Omega \tag{2.2}$$

De plus d'après [**32**] on a :

$$p_\Omega \in C^\infty(]0,+\infty[\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$$

et pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l p_\Omega(t,x,y)\right| \leq C(T,\Omega)t^{-(\frac{N}{2}+\frac{|\alpha|}{2}+l)}e^{-\frac{c|x-y|^2}{t}}, \text{ pour tout } (t,x,y) \in]0,T[\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega} \tag{2.3}$$

D'où on peut déduire les résultats suivants :

Proposition II.1. *Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$ et $S(t)\mu_0$ la solution faible de (2.1) donnée par la relation (2.2). Alors pour tout $T > 0$ et $r \in [q,+\infty]$, la fonction $t \to S(t)\mu_0$ est dans $C(]0,T[;W^{1,r}(\Omega))$. De plus on a les estimations :*

$$\|S(t)\mu_0\|_r \leq C(r,q,T,\Omega)t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_q, \quad \textit{pour tout } t \in]0,T[; \tag{2.4}$$

$$\|\nabla_x S(t)\mu_0\|_r \leq C(r,q,T,\Omega)t^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_q, \quad \textit{pour tout } t \in]0,T[\ . \tag{2.5}$$

Démonstration:
La preuve utilise essentiellement l'estimation (2.3) sur le noyau de la chaleur. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}\|S(t)\mu_0\|_r &= \left\|\int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\mu_0(y)\,dy\right\|_r \leq C(T,\Omega)\left\|\int_\Omega t^{-\frac{N}{2}}e^{-\frac{c|x-y|^2}{t}}|\mu_0(y)|\,dy\right\|_r \\ &\leq C(T,\Omega)\left\|\int_{\mathbb{R}^N} t^{-\frac{N}{2}}\ e^{-\frac{c|x-y|^2}{t}}|\mu_0(y)|\,dy\right\|_r\end{aligned}$$

En notant par :

$$K(t,x) = t^{-\frac{N}{2}}\ e^{-\frac{c|x|^2}{t}}, \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$$

on a :

$$\|S(t)\mu_0\|_r \leq C(T,\Omega)\|K(t) * \mu_0\|_r.$$

De plus, grâce à l'inégalité de Young avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{q} - 1$ on obtient :

$$\|S(t)\mu_0\|_r \leq C(T,\Omega)\|K(t)\|_s\|\mu_0\|_q.$$

Par un calcul classique on a :

$$\|K(t)\|_s = C(r,q)t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

et on en déduit (2.4).
De même on a :

$$\|\nabla_x S(t)\mu_0\|_r = \left\| \int_\Omega \nabla_x p_\Omega(t,x,y)\mu_0(y)\,dy \right\|_r \le C(T,\Omega) \left\| \int_\Omega t^{-(\frac{N}{2}+\frac{1}{2})} e^{-\frac{c|x-y|^2}{t}} |\mu_0(y)|\,dy \right\|_r$$
$$\le C(T,\Omega) \left\| \int_{\mathbb{R}^N} t^{-(\frac{N}{2}+\frac{1}{2})}\ e^{-\frac{c|x-y|^2}{t}} |\mu_0(y)|\,dy \right\|_r \le C(T,\Omega) t^{-\frac{1}{2}} \|K(t) * \mu_0\|_r$$
$$\le C(r,q,T,\Omega) t^{-[\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}]} \|\mu_0\|_q$$

d'où (2.5).
Pour démontret la continuité dans $C(]0,T[;W^{1,r}(\Omega))$ on peut utiliser les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition I.3 et le fai que le semi-groupe $(S(t))_{t\ge 0}$ est fortement continu sur $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1,+\infty]$ (cf. par exemple Lemme 2, p.19 dans [**63**]). □

Cette proposition admet une extension à des données initiales qui sont des mesures bornées. Donnons d'abord la notion de solution faible suivante :

Définition II.2. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Une solution faible du problème (2.1) est une fonction $u \in L^\infty(0,+\infty;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ et vérifiant :*

$$-\int_0^T \int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dxdt = \int_\Omega \varphi(0,x)\mu_0(dx) \tag{2.6}$$

pour tout $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$ avec $\varphi(T,x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Proposition II.2. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, alors le problème (2.1) admet une unique solution faible au sens de la Définition II.2. Cette solution est donnée par :*

$$u(t,x) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)\mu_0(dy) \quad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\Omega, \tag{2.7}$$

de plus :
(i)

$$u \in L^s(0,T,W^{1,r}(\Omega)) \cap L^\infty(0,+\infty;L^1(\Omega))$$

pour tout $T > 0$ et s,r réels vérifiant :

$$s \ge 1, \quad r \ge 1 \quad et \quad \frac{2}{s} + \frac{N}{r} > N+1, \tag{2.8}$$

(ii)

$$\|u\|_{L^\infty(0,+\infty;L^1(\Omega))} \le \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \tag{2.9}$$

(iii)

$$\|u\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \le C(s,r,T,\Omega)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \tag{2.10}$$

Démonstration:
Existence
Comme, pour tout (t,x) fixé dans $]0+\infty[\times\Omega$, $p_\Omega(t,x,\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, en particulier on a

$p_\Omega(t,x,\cdot) \in C_b(\Omega)$. Donc l'intégrale dans (2.7) est bien définie.
Soit u la fonction définie par (2.7) et soit $(u_0^n)_n$ une suite de fonctions dans $C_c^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} u_0^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \mu_0 \text{ dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \text{ faible,} \\ \|u_0^n\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Posons

$$u^n(t,x) = S(t)u_0^n(x) = \int_\Omega p_\Omega(t,x,y)u_0^n(y)\,dy, \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\Omega,$$

Puisque $p_\Omega \in C^\infty(]0,+\infty[\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ alors, grâce à (2.11) on obtient :

$$u^n \to u \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_\infty), \quad \text{lorsque } n \to \infty \tag{2.12}$$

et

$$u^n \to u \text{ p.p dans } Q_\infty, \quad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{2.13}$$

D'après (2.4), (2.5) et (2.11), pour tout $s,r \in [1,+\infty[$ vérifiant (2.8) on a :

$$\|u^n\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)\|u_0^n\|_1 \leq C(s,r,T,\Omega)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}$$

C'est à dire que la suite (u^n) est bornée dans $L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))$, donc, lorsque $r,s > 1$ et vérifient (2.8) "à une sous-suite près" on a :

$$u^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ faiblement dans } L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega)). \tag{2.14}$$

En particulier (2.14) reste valable aussi pour $r = s = 1$. On en déduit que, d'une part :

$$\|u\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u^n\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)},$$

et d'autre part, comme u^n est une solution classique du problème (2.1), en multipliant par la fonction $sign(u^n)$ la première équation de (2.1) et en intégrant sur Q_t, on obtient :

$$\|u^n(t)\|_1 \leq \|u_0^n\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \text{ pour tout } t \in [0,+\infty[.$$

Ainsi, grâce à (2.13) et au Lemme de Fatou on obtient :

$$\|u(t)\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \quad \text{pour presque tout } t \in [0,+\infty[,$$

d'où :

$$\|u\|_{L^\infty(0,+\infty;L^1(\Omega))} \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Il reste à vérifier la relation (2.6). Puisque u^n est une solution classique de (2.1), u^n est aussi une solution faible, ainsi :

$$-\int_0^T \int_\Omega u^n \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla\varphi\,dxdt = \int_\Omega \varphi(0,x)u_0^n(x)\,dx,$$

pour tout $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$ avec $\varphi(T,x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.
Grâce aux relations (2.11) et (2.14) on peut passer à la limite, lorsque n tend vers ∞, dans l'égalité ci-dessus et on obtient que u vérifie (2.6). C'est à dire que u est une solution faible du problème (2.1).

Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème (2.1) et posons :

$$u = u_1 - u_2$$

alors, u vérifie :

$$-\int_0^T \int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx\, dt = 0 \tag{2.16}$$

pour tout $\varphi \in C^1([0,T] \times \overline{\Omega})$ avec $\varphi(T,x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Soit $\theta \in C_c^\infty(Q_T)$ et soit $\psi \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = \theta & \text{dans} \quad Q_T, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ \psi(T,\cdot) = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Alors, on peut utiliser ψ comme fonction test dans (2.16) et on a :

$$-\int_0^T \int_\Omega u \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi\, dx\, dt = 0$$

et grâce à (2.17) et à la formule de Green on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega u(-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi)\, dx\, dt = 0$$

Finalement, pour tout $\theta \in C_c^\infty(Q_T)$ on a :

$$\int_0^T \int_\Omega u \cdot \theta = 0$$

donc $u \equiv 0$ dans Q_T et la preuve de l'unicité est achevée. □

Proposition II.3. *Pour tout $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, notons par $S(t)\mu_0$ la fonction donnée par (2.7). Alors :*

$$\begin{cases} i) \quad S(t+s)\mu_0 = S(t)S(s)\mu_0, \\ ii) \quad \lim\limits_{t \to 0} S(t)\mu_0 = \mu_0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{M}_b(\Omega) \quad \textit{faible}, \\ iii) \quad \|S(t)\mu_0\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Démonstration :

Soit $(u^n)_n$ la suite de solutions, introduites dans la preuve de la Proposition II.2 et définies par :

$$u^n(t,x) = S(t)u_0^n(x).$$

Grâce à (2.13) et à l'estimation (2.3) sur le noyau p_Ω il est facile de voir que pour tout $t > 0$:

$$S(t)u_0^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S(t)\mu_0 \text{ dans } L^r(\Omega), \quad 1 \leq r < \infty. \tag{2.19}$$

Alors, d'une part on a :

$$S(t+s)\mu_0 = \lim_{n\to\infty} S(t+s)u_0^n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(s)u_0^n$$
$$= S(t)\lim_{n\to\infty} S(s)u_0^n = S(t)S(s)\mu_0,$$

où toutes les limites ci-dessus sont considérées dans $L^1(\Omega)$, ce qui prouve le point i).
D'autre part, pour tout $\varphi \in C_b(\Omega)$, grâce au théorème de Fubini on a :

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \varphi(x)S(t)\mu_0(x)\,dx = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \left(\int_\Omega \varphi(x)p_\Omega(t,x,y)\mu_0(dy)\right)dx$$
$$= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \left(\int_\Omega \varphi(x)p_\Omega(t,x,y)\,dx\right)\mu_0(dy) = \lim_{t\to 0}\int_\Omega S(t)\varphi(y)\mu_0(dy) = \int_\Omega \varphi(y)\mu_0(dy).$$

ce qui prouve le deuxième point de (2.18).
Finalement, le troisième point est une conséquence de (2.9). □

Avec les notations ci-dessus on a le résultat suivant :

Proposition II.4. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $S(t)\mu_0$ la solution faible de (2.1) donnée par (2.7). Alors pour tout $T > 0$ et $r \in [1,+\infty]$, la fonction $t \to S(t)\mu_0$ est dans $C(]0,T[;W^{1,r}(\Omega))$ et satisfait les estimations :*

$$\|S(t)\mu_0\|_r \le C(r,T,\Omega)t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \quad \textit{pour tout } t \in]0,T[; \tag{2.20}$$

$$\|\nabla_x S(t)\mu_0\|_r \le C(r,T,\Omega)t^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \quad \textit{pour tout } t \in]0,T[; \tag{2.21}$$

où $T \to C(r,T,\Omega)$ est une fonction croissante.

Démonstration:
Pour $\varepsilon > 0$ et $t \in]\varepsilon,T[$ on a :

$$S(t)\mu_0 = S(t-\varepsilon)S(\varepsilon)\mu_0.$$

Puisque $S(\varepsilon)\mu_0 \in L^1(\Omega)$ alors, d'après la Proposition II.1 :

$$t \to S(t-\varepsilon)S(\varepsilon)\mu_0 \in C(]\varepsilon,T[;W^{1,r}(\Omega))$$

d'où

$$t \to S(t)\mu_0 \in C(]0,T[;W^{1,r}(\Omega))$$

pour tout $r \in [1,+\infty]$. D'une part, en appliquant (2.4) on a :

$$\|S(t)\mu_0\|_r = \|S(t-\varepsilon)S(\varepsilon)\mu_0\|_r \le C(r,T,\Omega)(t-\varepsilon)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|S(\varepsilon)\mu_0\|_1$$

et grâce à (2.15) on tire :

$$\|S(t)\mu_0\|_r \le C(r,T,\Omega)(t-\varepsilon)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}$$

On en déduit alors (2.20) en passant à la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$.
D'autre part, grâce à (2.5) on a :

$$\|\nabla_x S(t)\mu_0\|_r = \|\nabla_x S(t-\varepsilon)[S(\varepsilon)\mu_0]\|_r \le C(r,T,\Omega)(t-\varepsilon)^{-(\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})}\|S(\varepsilon)\mu_0\|_1$$

Comme ci-dessus on obtient (2.21), ce qui achève la preuve de la Proposition II.4. □

Dans la suite on considère le problème aux limites suivant pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u(0,\cdot) = \mu_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

On introduit d'abord la classe de solutions faibles de (2.22) :

Définition II.3. *Soient $T > 0$, $f \in L^1(Q_T)$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Une solution faible du problème (2.22) est une fonction $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ vérifiant :*

$$-\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega f \cdot \varphi\, dxdt + \int_\Omega \varphi(0,x)\mu_0(dx), \tag{2.23}$$

pour tout $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$ avec $\varphi(T,x) = 0,\ \forall x \in \Omega$.

Remarque II.1. *Soit $f \in L^1(Q_T)$, alors $f(s) \in L^1(\Omega)$ pour presque tout $s \in]0,T[$. Puisque $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction dans $L^1(\Omega)$ (voir par exemple* [**63**]*) on a :*

$$\|S(t)f(s)\|_1 \leq \|f(s)\|_1.$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^t S(t)f(s)\, ds$ est une intégrale de Bochner absolument convergente dans l'espace $L^1(\Omega)$. De plus la fonction $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t S(t)f(s)\, ds$ est dans $C([0,T],L^1(\Omega))$.

Ainsi, il est préférable de travailler avec les solutions "mild" définies ci-dessous.

Définition II.4. *Soient $T > 0$, $f \in L^1(Q_T)$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. On appelle solution "mild" du problème (2.22) toute fonction $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ qui vérifie :*

$$u(t) = S(t)\mu_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds. \tag{2.24}$$

On a le résultat suivant :

Proposition II.5. *Soient $f \in L^1(Q_T)$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, alors le problème (2.22) admet une unique solution faible. Cette solution satisfait :*

$$u \in L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),$$

pour s, r réels vérifiant :

$$s \geq 1, \quad r \geq 1, \ \text{et} \ \ \frac{2}{s} + \frac{N}{r} > N + 1.$$

De plus :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|u\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)(\|f\|_{L^1(Q_T)} + \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}), \tag{2.25}$$

où $T \to C(s,r,T,\Omega)$ est une fonction croissante.

Démonstration:
La preuve de l'unicité est analogue à celle de la Proposition II.2. Ainsi on ne l'écrit pas.
Pour montrer l'existence d'une solution, posons :

$$u(t) = S(t)\mu_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds \tag{2.26}$$

Tout d'abord on démontre que la fonction u donnée par (2.26) satisfait (2.25).
D'une part, d'après (2.15), pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$\|u(t)\|_1 \leq \|S(t)\mu_0\|_1 + \int_0^t \|S(t-s)f(s)\|_1 \leq \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|f\|_{L^1(Q_T)}.$$

D'autre part, grâce aux relations (2.20) et (2.21), pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_r &\leq \|S(t)\mu_0\|_r + \int_0^t \|S(t-s)f(s)\|_r\,ds \\ &\leq C(r,T,\Omega)(t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|f(s)\|_1\,ds).\end{aligned}$$

Soit H la fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0; \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Posons :

$$\tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & \text{si } t \in [0,T], \\ 0 & \text{si } t \in]-\infty,0[\cup]T,+\infty[. \end{cases}$$

Soit $\chi_{[0,T]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,T]$. Alors l'inégalité ci-dessus devient :

$$\|u(t)\|_r \leq C(r,T,\Omega)(t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \int_{\mathbb{R}} (t-s)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}H(t-s)\chi_{[0,T]}(t-s)\|\tilde{f}(s)\|_1\,ds)$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons :

$$N(t) = t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\,H(t)\chi_{[0,T]}(t);\ t \in \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\|u(t)\|_r \leq C(r,T,\Omega)\cdot(t^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + (N * \|\tilde{f}\|_1)(t)),$$

et, pour tout $s, r \geq 1$ vérifiant (2.8) on obtient grâce à l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^s(0,T;L^r(\Omega))} &\leq C(r,T,\Omega)(T^{\frac{1}{s}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|N\|_{L^s(0,T)}\|f\|_{L^1(Q_T)} \\ &\leq C(r,T,\Omega)T^{\frac{1}{s}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|f\|_{L^1(Q_T)}).\end{aligned}$$

De même, en utilisant (2.21), on démontre :

$$\|\nabla u\|_{L^s(0,T;L^r(\Omega))} \leq C(r,T,\Omega)T^{\frac{1}{s}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|f\|_{L^1(Q_T)})$$

Grâce à (2.8) on a :

$$\frac{1}{s} - \frac{N}{2}(1-\frac{1}{r}) - \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi, en regroupant les inégalités ci-dessus on obtient :

$$\|u\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \leq C(s,r,T,\Omega)(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|f\|_{L^1(Q_T)})$$

où $T \to C(s,r,T,\Omega)$ est une fonction croissante.
Il reste seulement à vérifier que u est une solution faible de (2.22), plus précisément, que u vérifie (2.23). Pour ce faire on considère $(u_0^n)_n$ et $(f^n)_n$ deux suites de fonctions respectivement dans $C_c^\infty(\Omega)$ et dans $C_c^\infty(Q_T)$ vérifiant :

$$f^n \to f \qquad \text{dans} \qquad L^1(Q_T) \tag{2.27}$$

et

$$\begin{cases} u_0^n \rightharpoonup \mu_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_b(\Omega) \quad \text{faible,} \\ \|u_0^n\|_1 \le \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Pour $t \in]0,T[$, posons :

$$u^n(t) = S(t)u_0^n + \int_0^t S(t-s)f^n(s)\,ds. \tag{2.29}$$

Alors, $u^n \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ et est la solution classique du problème (2.22) aux données f^n et u_0^n. Par conséquent, u^n vérifie :

$$-\int_0^T\int_\Omega u^n \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla\varphi\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega f^n\cdot\varphi\,dxdt + \int_\Omega \varphi(0,x)u_0^n(x)\,dx, \tag{2.30}$$

pour tout $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$ avec $\varphi(T,x) = 0$, pour tout $x \in \Omega$.
Compte tenu de (2.4) on a :

$$\begin{aligned} \|u^n(t) - u(t)\|_1 &\le \|S(t)u_0^n - S(t)\mu_0\|_1 + \int_0^t \|S(t-s)(f^n(s) - f(s))\|_1\,ds \\ &\le \|S(t)u_0^n - S(t)\mu_0\|_1 + \int_0^t \|f^n(s) - f(s)\|_1\,ds \\ &\le \|S(t)u_0^n - S(t)\mu_0\|_1 + \|f^n - f\|_{L^1(Q_T)}. \end{aligned}$$

D'où on tire :

$$\|u^n - u\|_{L^1(Q_T)} \le \|S(\cdot)u_0^n - S(\cdot)\mu_0\|_{L^1(Q_T)} + T\|f^n - f\|_{L^1(Q_T)}. \tag{2.31}$$

D'une part, d'après (2.19), pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$\|S(t)u_0^n - S(t)\mu_0\|_1 \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

d'autre part, d'après (2.15) et (2.28) :

$$\|S(t)u_0^n - S(t)\mu_0\|_1 \le 2\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}, \text{ pour tout } t \in]0,T[\text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit, grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, que

$$\|S(\cdot)u_0^n - S(\cdot)\mu_0\|_{L^1(Q_T)} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

En regroupant (2.27), (2.31) et ce dernier point on tire :

$$u^n \to u \quad \text{fortement dans} \quad L^1(Q_T) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{2.32}$$

u^n étant donnée par (2.29), par le même argument que dans la preuve de la Proposition II.2 on a :

$$\|u^n\|_{L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))} \le C(s,r,T,\Omega)(\|u_0^n\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|f^n\|_{L^1(Q_T)})$$

pour tout $s, r \in [1, +\infty[$ vérifiant (2.8). Donc grâce à (2.27) et (2.28) la suite $(u^n)_n$ est bornée dans $L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega))$ donc, lorsque $r, s > 1$ et vérifient (2.8) "à une sous-suite près" on a :

$$u^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ faiblement dans } L^s(0,T;W^{1,r}(\Omega)).$$

En particulier, cette relation reste valable aussi pour $r = s = 1$. Finelement, cette dernière convergence nous permet de passer à la limite dans (2.30), lorsque $n \to \infty$, et d'obtenir que u est une solution faible du problème (2.22) et vérifie (2.25). Cette solution étant unique la preuve de la Proposition II.5 est achevée. □

Remarque II.2. *D'après la preuve de la Proposition II.5 ci-dessus, la solution "mild" u du problème (2.22) est identique à la solution faible qui est unique. Ainsi on appelera solution faible du problème (2.22) toute fonction qui vérifie soit la Définition II.3 soit la Définition II.4.*

Etant donnée une solution faible du problème (2.22) on a les deux propriétés de régularité suivantes :

Proposition II.6. *Soient $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ et $f \in L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))$ avec $\gamma, r \geq 1$ vérifiant :*

$$\frac{N}{2r} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) < 1, \tag{2.33}$$

alors la solution u du problème (2.22) donnée par (2.24) est dans l'espace $C(\overline{Q_T})$.

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la Proposition I.5, aussi elle sera omise.

Enfin, la proposition suivante est une conséquence des Théorèmes 2.3.3.6 et 2.4.2.6 de [**41**] et du Corollaire 1.1 de [**27**] (voir aussi [**43**]).

Proposition II.7. *Soit $f \in L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))$, avec $\gamma \geq 1$ et $r > 1$. Notons par $u \in L^\infty(0,T;L^r(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ la solution faible du problème aux limites :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.34}$$

alors $u \in W^{1,2}_{\gamma,r}(Q_T)$ et il existe une constante $C = C(\gamma, r, T, \Omega)$ telle que

$$\|u\|_{W^{1,2}_{\gamma,r}(Q_T)} \leq C(\gamma, r, T, \Omega)(\|f\|_{L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))} + \|u\|_{L^\gamma(0,T;L^r(\Omega))}).$$

3. Résultats principaux

Pour $p \in]0, \infty[$ et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on introduit les deux notions suivantes de solutions faibles du problème (1.1).

Définition II.5. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, on appelle solution faible du problème (1.1) une fonction $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ telle que $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T)$, pour tout $T > 0$ et qui vérifie :*

$$-\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dxdt = a \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \varphi\, dxdt + \int_\Omega \varphi(0,x)\mu_0(dx), \qquad (3.1)$$

pour toute fonction $\varphi \in C^1(Q_T)$ telle que $\varphi(T,x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Définition II.6. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, on appelle solution "mild" du problème (1.1) une fonction $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ telle que $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T)$ pour tout $T > 0$ et qui vérifie :*

$$u(t) = S(t)\mu_0 + a \int_0^t S(t-s)|\nabla u|^p(s)\, ds, \quad t \in [0,T]. \qquad (3.2)$$

où $(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de la chaleur dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$ avec condition au bord du type Neumann (voir Définition II.2, Proposition II.2 et (2.18)).

D'après la Remarque II.2, ces deux définitions sont équivalentes. Ainsi conviendra d'appeler solution faible toute solution "mild".

Remarque II.3. *Grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, si $p \geq 1$, toute solution faible u est dans $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, pour tout $T > 0$.*

On considère d'abord le cas $0 < p < 1$. Dans ce cas le problème de Cauchy pour des données initiales continues et bornées est étudié dans [**39**] et le problème de Cauchy-Dirichlet pour des données initiales peu regulières est étudié dans [**10**].

Théorème II.2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $0 < p < 1$. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution faible.*
De plus si Ω est convexe cette solution est unique dans les deux cas suivants :
a) Si $0 < p < \frac{2}{N+1}$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$;
b) Si $\frac{2}{N+1} \leq p < 1$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q > \frac{pN}{2-p}$.

La preuve de ce théorème est structurée en quatre étapes. Tout d'abord à l'aide du Théorème de point fixe de Schauder on démontre l'existence d'une solution locale, ensuite on établit un résultat de régularité qui nous permet de prolonger cette solution locale en une solution globale. Finalement on démontre l'unicité des solutions dans les cas *a*) et *b*) lorsque Ω est convexe.

Lorsque $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$, d'une part le problème de Cauchy dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$ a été étudié dans [**3, 9, 13, 39**] et d'autre part le problème de Cauchy-Dirichlet a été étudié dans [**1, 10, 28**]. Le théorème suivant donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible pour le problème de Cauchy-Neumann (1.1).

Théorème II.3. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ et $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. Alors le problème (1.1) admet une unique solution faible.*

La preuve suit presque les mêmes étapes que celle du théorème précédent. Comme la fonction $|\xi| \to |\xi|^p$ est localement Lipschitzienne pour $p \geq 1$, cela permet de démontrer l'unicité de la solution. Quant à l'existence d'une solution locale, elle est obtenue grâce à un théorème de point fixe de Banach.

Dans le théorème suivant on étudie le cas $p \in [1, 2[$ et on donne une condition suffisante sur la donnée initiale pour que le problème (1.1) admette des solutions. On note par q_c l'exposant :

$$q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$$

Cet exposant critique apparaît aussi dans les travaux ([**9**], p.343), ([**13**], p.2013) et ([**28**], p.189). De plus, on observe que :

$$q_c \geq 1 \Longleftrightarrow p \geq \frac{N+2}{N+1}.$$

On a le résultat suivant :

Théorème II.4. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $p \in [1, 2[$. Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec :*

$$q \geq 1 \text{ si } p \in [1, \tfrac{N+2}{N+1}[\text{ ou bien } q > q_c \text{ si } p \in [\tfrac{N+2}{N+1}, 2[.$$

Alors le problème (1.1) admet une solution faible $u \in C([0, +\infty[; L^q(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,pq}(\Omega))$. De plus cette solution est unique dans cet espace.

Le cas $a < 0$, correspond à un phénomène d'absorption, pour lequel on prouve l'existence des solutions avec une hypothèse moins restrictive sur la donnée initiale.

Théorème II.5. *On suppose $a < 0$, $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ et $\mu_0 \in L^1(\Omega)$, $\mu_0 \geq 0$. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution faible $u \in C([0, +\infty[; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W^{1,p}(\Omega))$.*

Le théorème suivant est un résultat de non-existence de solutions pour des données initiales dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$, lorsque l'exposant $p \geq \frac{N+2}{N+1}$. Ce résultat est analogue à celui de [**13**] relatif au problème de Cauchy dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$.

Théorème II.6. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $T > 0$, $x_0 \in \Omega$ un point fixé et M une constante positive quelconque. Alors il n'existe pas de fonction :*

$$u \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \tag{3.3}$$

vérifiant :

$$-\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dxdt = a \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \varphi\, dxdt + M\varphi(0, x_0) \tag{3.4}$$

pour tout $\varphi \in C^1(Q_T)$ avec $\varphi(T, x) = 0$, pour tout $x \in \Omega$. Autrement dit, le problème aux limites (1.1) n'admet pas de solutions faibles lorsque $\mu_0 = M\delta_{x_0}$.

Signalons que des investigations analogues ont été faites dans le Chapitre II (où bien dans[**10**]) pour le problème de Cauchy-Dirichlet homogène. Ainsi, dans ce chapitre, on évitera parfois de développer les mêmes calculs mais on indiquera les ajustements nécessaires.

4. Preuve du Théorème II.2

a) Existence locale

On considère $T > 0$ et $1 < q < \frac{N+2}{N+1}$. Notons par $X = X(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u :]0,T] \to W^{1,q}(\Omega)$ telles que :

$$\|u\|_X = \max\{\sup_{]0,T]} t^{\alpha}\|u(t)\|_q, \sup_{]0,T]} t^{\alpha+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_q\} < \infty.$$

où

$$\alpha = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Les espaces à poids du type $X(T)$ liés à l'opérateur de la chaleur ont été introduits en particulier par T.Kato [**46**], T.Kato-H.Fujita [**47**], H.Brezis-T.Cazenave [**22**], M.Ben-Artzi-P.Souplet-F.B.Weissler [**9**] et F.B.Weissler [**70, 71**].

On remarque d'abord que l'injection de X dans $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$ est continue. Pour $u \in L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$ on définit les fonctionnelles :

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t S(t-s)|\nabla u(s)|^p\, ds$$

et

$$\mathcal{F}u(t) = S(t)\mu_0 + a \cdot \mathcal{G}u(t).$$

alors $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ sont des opérateurs continus de $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$ dans $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$. En effet soit $(u_n)_{n\geq 1} \subset L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$ tel que :

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega)),$$

et notons par f_n et f les fonctions : $f_n = |\nabla u_n|^p$ et $f = |\nabla u|^p$. Puisque $p \in]0,1[$ on a :

$$|f_n - f| = ||\nabla u_n|^p - |\nabla u|^p| \leq |\nabla u_n - \nabla u|^p \to 0 \quad \text{dans} \quad L^{q/p}(Q_T);$$

ainsi

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad L^{q/p}(Q_T)$$

et la suite $(\mathcal{G}u_n - \mathcal{G}u)_{n\geq 1}$ vérifie :

$$\mathcal{G}u_n(t) - \mathcal{G}u(t) = \int_0^t S(t-s)(f_n - f)(s)\, ds.$$

Puisque $1 < q < \frac{N+2}{N+1}$ on obtient grâce à la relation (2.25) :

$$\|\mathcal{G}u_n - \mathcal{G}u\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \leq C(q,T,\Omega)\|f_n - f\|_{L^1(Q_T)},$$

d'où

$$\mathcal{G}u_n \longrightarrow \mathcal{G}u \quad \text{dans} \quad L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega)).$$

Pour $K > 0$ on note par $X_K(T)$ la boule fermée de rayon K de $X(T)$, et par $\overline{X_K(T)}$ la fermeture de $X_K(T)$ dans l'espace $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$. Afin d'appliquer un théorème du point fixe de Schauder (cf. par exemple : Corollaire 11.2, p. 280 [**31**]), on cherche $T_1 > 0$ et $K_1 > 0$ tels que :

$$\mathcal{F} : \overline{X_{K_1}(T_1)} \to \overline{X_{K_1}(T_1)} \tag{4.1}$$

soit une application bien définie et $\mathcal{F}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ soit relativement compact dans $L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$. Soit $u \in X$, grâce à (2.4) on a d'une part :

$$\|\mathcal{G}u(t)\|_q \leq \int_0^t \|S(t-s)|\nabla u(s)|^p\|_q ds \leq \int_0^t \||\nabla u(s)|^p\|_q \, ds \leq \int_0^t |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \|\nabla u(s)\|_q^p \, ds$$

$$\leq |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \|u\|_X^p \int_0^t s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})} \, ds \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1-p}{q}}}{1-p(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot t^{1-p(\alpha+\frac{1}{2})} \|u\|_X^p \leq C(p,q,\Omega) \cdot t^{\gamma} \|u\|_X^p.$$

Notons par $\gamma = 1 - p(\alpha + \frac{1}{2})$, alors compte tenu des hypothèses sur p et q on a $0 < \gamma < 1$. Ainsi les inégalités ci-dessus donnent :

$$t^{\alpha} \|\mathcal{G}u(t)\|_q \leq C(p,q,\Omega) t^{\gamma+\alpha} \|u\|_X^p. \tag{4.2}$$

D'autre part, en utilisant (2.5) on obtient :

$$\|\nabla \mathcal{G}u(t)\|_q \leq \int_0^t \|\nabla S(t-s)|\nabla u(s)|^p\|_q \, ds$$

$$\leq C(q) \cdot \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \||\nabla u(s)|^p\|_q \, ds \leq C(q) \cdot |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_q^p \, ds$$

$$\leq C(q) \cdot |\Omega|^{\frac{1-p}{q}} \|u\|_X^p \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})} \, ds \leq C(p,q,\Omega) \cdot t^{-\frac{1}{2}+\gamma} \cdot \|u\|_X^p;$$

et donc

$$t^{\frac{1}{2}+\alpha} \|\nabla \mathcal{G}u(t)\|_q \leq C(p,q,\Omega) \cdot t^{\gamma+\alpha} \|u\|_X^p. \tag{4.3}$$

Compte tenu de (4.2) et (4.3) on tire :

$$\|\mathcal{G}(u)\|_X \leq C_1 \cdot T^{\gamma+\alpha} \|u\|_X^p.$$

Alors en utilisant la Proposition II.4 et cette dernière inégalité, pour tout $u \in X$, on a :

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \leq \|S(t)\mu_0\|_X + |a| \|\mathcal{G}(u)\|_X \leq C(q) \|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + |a| \cdot C_1 \|u\|_X^p \cdot T^{\gamma+\alpha},$$

donc :

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \leq C_2(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|u\|_X^p \cdot T^{\gamma+\alpha}), \tag{4.4}$$

où la constante C_2 ne dépend que de $|\Omega|, |a|, p, q$ et N. On choisit K_1 et T_1 tels que

$$C_2(\|\mu_0\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + K_1^p \cdot T_1^{\gamma+\alpha}) < K_1. \tag{4.5}$$

Ainsi, pour tout $u \in X_{K_1}(T_1)$ on a $\mathcal{F}(u) \in X_{K_1}(T_1)$. Cela implique :

$$X_{K_1}(T_1) \subset \mathcal{F}^{-1}(X_{K_1}(T_1)) \subset \mathcal{F}^{-1}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$$

Comme $\mathcal{F}$ est une opérateur continu dans $L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$ alors $\mathcal{F}^{-1}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est fermé dans $L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$ et on déduit que :

$$\overline{X_{K_1}(T_1)} \subset \mathcal{F}^{-1}(\overline{X_{K_1}(T_1)}).$$

Il reste à montrer que $\mathcal{F}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est relativement compact dans $L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$. Comme

$$\mathcal{F}(\overline{X_{K_1}(T_1)} = e^{t\Delta}\mu_0 + a \cdot \mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$$

il suffit de démontrer que $\mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est relativement compact dans $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))$. Soit $(u_n)_n \subset \overline{X_{K_1}(T_1)}$ et $(\mathcal{G}(u_n))_n$ la suite bornée correspondante dans $\mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$. Pour tout $(t,x) \in Q_{T_1}$ on pose :

$$f_n(s,x) = |\nabla u_n(s,x)|^p$$

alors $f_n \in L^{q/p}(Q_{T_1})$ et

$$\|f_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})} = \left(\int_0^{T_1} \int_\Omega |\nabla u_n(s)|^q \right)^{p/q} \leq \|u_n\|^p_{L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))}. \tag{4.6}$$

Soit $\theta = 1 - q(\frac{1}{2} + \alpha)$. Comme $1 < q < \frac{N+2}{N+1}$ alors $\theta > 0$ et pour tout $u \in X(T_1)$ on a :

$$\|u\|_{L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))} \leq \|u\|_X \left(\int_0^{T_1} (t^{-q(\frac{1}{2}+\alpha)} + t^{-q\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|u\|_X \left(\frac{T_1^\theta}{\theta} + \frac{T_1^{\theta+\frac{q}{2}}}{\theta + \frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par densité on obtient que pour tout $u \in \overline{X_{K_1}(T_1)}$

$$\|u\|_{L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))} \leq C(p,q)K_1 \cdot (T_1^\theta + T_1^{\theta+\frac{q}{2}})^{\frac{1}{q}}. \tag{4.7}$$

Ainsi, compte tenu de (4.6) et (4.7) on tire :

$$\|f_n\|_{q/p} \leq C(p,q) \cdot K_1^p \cdot (T_1^\theta + T_1^{\theta+\frac{q}{2}})^{\frac{p}{q}} \tag{4.8}$$

donc la suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^{q/p}(Q_{T_1})$.
Comme :

$$\mathcal{G}u_n(t) = \int_0^t S(t-s)f_n(s)\,ds,$$

grâce aux relations (2.4) et (2.5) on a $\mathcal{G}u_n \in L^{q/p}(0,T_1;W^{1,q/p}(\Omega))$ et

$$\|\mathcal{G}u_n\|_{L^{q/p}(0,T_1;W^{1,q/p}(\Omega))} \leq C(p,q,T_1,\Omega)\|f_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})}.$$

Ainsi, par la régularité des solutions des équations paraboliques (cf. par exemple le Théorème 7.20 de [**55**]) on a : $\mathcal{G}u_n \in W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1})$ et vérifie l'estimation :

$$\|D_t\mathcal{G}u_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})} + \|D_x^2\mathcal{G}u_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})} \leq C(q/p,T_1,\Omega)\|f_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})}.$$

En regroupant les deux dernières inégalités on a :

$$\|\mathcal{G}u_n\|_{W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1})} \leq C(p,q,T_1,\Omega)\|f_n\|_{L^{q/p}(Q_{T_1})}.$$

Puisque $(f_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^{q/p}(Q_{T_1})$ alors la suite $(\mathcal{G}u_n)_n$ est bornée dans $W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1})$. Et comme l'injection :

$$W^{1,2}_{q/p}(Q_{T_1}) \hookrightarrow L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega)),$$

est compacte, on en déduit que la suite $(\mathcal{G}u_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$, ce qui prouve que $\mathcal{G}(\overline{X_{K_1}(T_1)})$ est relativement compact dans $L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$.

On peut alors appliquer le Théorème de Schauder et on obtient l'existence d'une fonction $u \in \overline{X_{K_1}(T_1)}$ qui vérifie :

$$u(t) = S(t)\mu_0 + a\int_0^t S(t-s)|\nabla u(s)|^p\,ds \quad \forall t \in]0,T_1[. \tag{4.9}$$

En particulier

$$u \in C(]0,T_1[;W^{1,q}(\Omega)) \cap L^q(0,T_1;W^{1,q}(\Omega))$$

et

$$\max\{\sup_{]0,T_1]} t^{\alpha}\|u(t)\|_q, \sup_{]0,T_1]} t^{\frac{1}{2}+\alpha}\|\nabla u(t)\|_q\} < K_1.$$

Par conséquent $u \in X_{K_1}(T_1)$. En regroupant (4.9) avec (2.25) on obtient :

$$u \in L^{\infty}(0,T_1;L^1(\Omega)).$$

Ainsi u est une solution locale du problème (1.1) sur Q_{T_1}.

□

b) Régularité

Proposition II.8. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Il existe $\delta \in]0,1[$, indépendant de μ_0 tel que toute solution locale $u \in L^{\infty}(0,T,L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ du problème aux limites (1.1), vérifie :*

$$u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}}) \quad \textit{pour tout } \tau \in]0,T[.$$

Démonstration:
On fixe $\tau \in]0,T[$ et on décompose le problème (1.1) en deux parties.
(i) Notons par u_1 la solution du problème aux limites (2.1) sur $Q_{\tau/2n,T}$ avec la donnée initiale $u(\tau/2n,\cdot) \in W^{1,1}(\Omega)$. Plus précisément :

$$u_1(t) = S(t-\tau/2n)u(\tau/2n), \quad t \in [\tau/2n,T], \tag{4.10}$$

où $n \in \mathbf{N}^*$ sera choisi ultérieurement. Grâce à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur (voir par exemple le Théorème XI.1 de [**20**]) et à la régularité du domaine Ω, pour tout $\delta \in]0,1[$ on a :

$$u_1 \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{2\tau/2n,T}})$$

(cf. par exemple le Théorème XI.1 dans [**20**]).
(ii) Posons :

$$u_2(t) = \int_{\tau/2n}^t S(t-s)f(s)\,ds \text{ pour tout } t \in]\tau/2n,T[, \tag{4.11}$$

où

$$f(t,x) = a|\nabla u(t,x)|^p, \quad (t,x) \in Q_T$$

Comme

$$f \in L^{1/p}(Q_T),$$

on peut appliquer la Proposition II.7 et le Théorème 7.20 dans [**55**] sur la régularité des solutions des équations paraboliques dans les espaces $L^q(\Omega), q > 1$. Ainsi, on obtient :

$$u_2 \in W^{1,2}_{1/p}(Q_{\tau/2n,T}).$$

Puisque $u = u_1 + u_2$, en regroupant (4.10), (4.11) et ce dernier point on déduit :

$$|\nabla u| \in L^{1/p}(Q_{2\tau/2n,T}),$$

et par conséquent :

$$f \in L^{1/p^2}(Q_{2\tau/2n,T}).$$

Par récurrence on montre que :

$$u \in W^{1,2}_{1/p^n}(Q_{\tau/2,T}),$$

On choisit n assez grand tel que $\frac{1}{p^n} > N + 2$. Alors, grâce au Lemme II.3.3 dans [**51**], pour tout $\beta \in]0,1[$ satisfaisant $0 < \beta < 1 - (N+2)p^n$, on a :

$$|\nabla u| \in C^{\beta/2,\beta}(\overline{Q_{\tau/2,T}}),$$

qui entraîne :

$$f \in C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{\tau/2,T}}) \quad \text{avec } \delta = p\beta < 1.$$

On reconsidère les fonctions u_1 et u_2 définies sur $]\tau/2, T[$ par :

$$u_1(t) = S(t - \tau/2)u(\tau/2); \quad \tau/2 \leq t < T$$

et

$$u_2(t) = \int_{\tau/2}^{t} S(t-s)f(s)\,ds; \quad \tau/2 \leq t < T.$$

Alors, par le même argument ci-dessus, $u_1 \in C^\infty(\overline{Q_{\tau,T}})$ et grâce au Théorème IV.5.3 dans [**51**] on a :

$$u_2 \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau/2,T}}).$$

Comme $u = u_1 + u_2$, on obtient :

$$u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}}),$$

ce qui achève la preuve de la Proposition II.8. □

Proposition II.9. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $0 < p < 1$. Si $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq 1$ alors toute solution faible u du problème (1.1) est dans $C([0,T]; L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T; W^{1,q}(\Omega))$ pour tout $1 \leq r < 2$. De plus si $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ alors u est dans $C(\overline{Q_T})$.*

La preuve de ce résultat étant analogue à celle de la Proposition I.8 nous l'omettons.
L'existence d'une solution globale s'obtient, grâce à la régularité ci-dessus, par la même méthode que dans le Théorème I.2.

c) Unicité

Proposition II.10. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p \in]0,1[$ et Ω un ouvert convexe, alors le problème (1.1) admet une unique solution faible dans les deux cas suivants :*

a) Si $0 < p < \frac{2}{N+1}$ *et* $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ *;*
b) Si $\frac{2}{N+1} \leq p < 1$ *et* $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ *avec* $q > \frac{pN}{2-p}$.

Tout d'abord il convient de faire les deux remarques suivantes qui vont être utiles dans la suite.

Remarque II.4. *Soit* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^N$ *contenant l'origine et dont la frontière est régulière. Pour* $x \in \partial\Omega$, *soit* $\nu(x)$ *la normale extérieure à* $\partial\Omega$ *au point* x. *Alors :*

$$x \cdot \nu(x) > 0.$$

Remarque II.5. *Soient* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *et* $0 < p < 1$, *alors grâce à la Proposition II.5, toute solution faible* u *de (1.1) avec pour donnée initiale* $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ *vérifie :*

$$u \in L^s(0,T;W^{1,s}(\Omega)) \quad \textit{pour tout} \quad s \in [1, \frac{N+2}{N+1}[.$$

Démonstration de la Proposition II.10 :
Tout d'abord on prouve l'unicité des solutions faibles lorsque Ω est un ouvert convexe contenant l'origine.
Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles du problème (1.1) et posons $u = u_1 - u_2$ et $f = a(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p)$. Alors u est solution faible du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{dans} \quad Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u(t,x) \underset{t \searrow 0}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_b(\Omega) \quad \text{faible.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Grâce à la Remarque II.5 on a $f \in L^{s/p}(Q_T)$ pour tout $s \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$. Alors, en utilisant les Propositions II.6 et II.8 on peut montrer que dans les deux cas *a)* et *b)* de la Proposition II.10 ci-dessus on a :

$$u \in C^{1+\delta/2,\, 2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}}) \cap C(\overline{Q_T}), \text{ pour tout } \tau \in]0,T[.$$

(pour les détails, voir aussi Proposition I.9). La régularité de la fonction u étant acquise, le reste de la preuve est basé sur le principe de maximum. On suit une méthode analogue à celle dans [**39**] et [**44**]. Nous le reproduisons, dans le cas d'une condition au bord de type Neumann juste pour être complet et surtout, pour faire apparaître l'utilité de l'hypothèse de convexité sur l'ouvert Ω.
Dans le résultat qui suit on considère deux nombres réels $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, et on pose :

$$z(t,x) = u(t,x) - At - \varepsilon(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Alors on a :

$$z \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(]0,T] \times \overline{\Omega}),$$
$$z(0,x) \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

et grâce à la Remarque II.4

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(t,x) = -\frac{\varepsilon \cdot x \cdot \nu}{\sqrt{1+|x|^2}} < 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_T. \tag{4.14}$$

Montrons que $z \leq 0$ sur $[0,T] \times \overline{\Omega}$. On raisone par l'absurde. Si z prend des valeurs positives en des points de Q_T alors z admet un maximum positif en $(t_0, x_0) \in]0,T] \times \Omega$. En effet, si $(t_0, x_0) \in]0,T] \times \partial\Omega$ on a :

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(t_0, x_0) = \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{z(t_0, x_0 + \lambda\nu) - z(t_0, x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

ce qui contredit la relation (4.14).
Ainsi au point $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \Omega$ où z atteint un maximum positif on a :

$$(\nabla z)(t_0, x_0) = 0,$$

$$(\Delta z)(t_0, x_0) \leq 0$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t_0, x_0) \geq 0.$$

Pour montrer que :

$$z(t,x) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in Q_T, \tag{4.15}$$

il suffit de trouver une valeur $A = A(\varepsilon)$ telle que en tout point $(t,x) \in]0,T] \times \Omega$ vérifiant $(\nabla z)(t,x) = 0$ on ait :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z\right)(t,x) < 0.$$

De plus, si la dépendance de A par rapport à ε est telle que $A = A(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$, alors en faisant tendre ε vers 0 dans (4.13) on obtient

$$u(t,x) \leq 0.$$

Par un calcul facile, on trouve qu'il convient de prendre

$$A = 2(N\varepsilon + |a| \cdot \varepsilon^p)$$

pour réaliser

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,x) - \Delta z(t,x) < 0$$

en tout point $(t,x) \in Q_T$ tel que $\nabla z(t,x) = 0$. Ce qui contredit :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t_0, x_0) - \Delta z(t_0, x_0) \geq 0$$

On en déduit (4.15) et par suite on a

$$u(t,x) \leq 2(N\varepsilon + |a|\varepsilon^p)t + \varepsilon(1 + |x|^2)^{1/2} \text{ dans } Q_T.$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0_+$ on obtient $u(t,x) \leq 0$ dans Q_T. Comme u_1 et u_2 jouent des rôles symétriques on a aussi $u(t,x) \geq 0$ dans Q_T, ce qui achève la preuve de l'unicité des solutions faibles lorsque Ω est un ouvert convexe, contenant l'origine.
Dans le cas où Ω ne contient pas l'origine, il suffit d'effectuer une translation pour se ramener à un ouvert convexe et contenant l'origine : $\Omega_{x_0} = \Omega - x_0$, où $x_0 \in \Omega$. □

5. Preuve du Théorème II.3

Hormis le résultat de régularité, la preuve de ce théorème est analogue à celle du Théorème 3.2 dans [**10**]. Ainsi, nous donnons seulement l'idée de la preuve de l'existence de solutions faibles locales et quelques remarques concernant la régularité des solutions. Cette régularité des solutions est utilisée pour réaliser le prolongement des solutions sur Q_∞.

a) Existence locale

Soit $T > 0$ et notons par $X = X(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u :]0,T] \to W^{1,p}(\Omega)$ telles que :

$$\|u\|_X = max\{\sup_{]0,T]} t^\alpha \|u(t)\|_p, \sup_{]0,T]} t^{\alpha+\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_p\} < +\infty,$$

où

$$\alpha = \frac{N}{2}(1 - \frac{1}{p}). \tag{5.1}$$

Pour $u \in X$ on définit les fonctionnelles :

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t S(t-s)|\nabla u(s)|^p \, ds \tag{5.2}$$

et

$$\mathcal{F}u(t) = S(t)\mu_0 + a \cdot \mathcal{G}u(t). \tag{5.3}$$

Soit $K > 0$ et notons par $X_K(T)$ la boule fermée de rayon K de $X(T)$. Afin d' appliquer le Théorème de point fixe de Banach et démontrer l'existence de la solution locale du problème (1.1) il suffit de trouver $T_1 > 0$ et $K_1 > 0$ tels que :

$$\mathcal{F}(X_{K_1}(T_1)) \subset X_{K_1}(T_1)$$

et $\mathcal{F}$ soit une contraction sur $X_{K_1}(T_1)$ (pour les détails, voir la preuve du Théorème I.3 ou bien Théorème 3.2 dans [**10**]).

b) Régularité

Proposition II.11. *Il existe $\delta \in]0,1[$ indépendant de $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ tel que la solution faible locale $u \in X_{K_1}(T_1)$ trouvée ci-dessus vérifie*

$$u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T_1}}) \quad \textit{pour tout} \quad 0 < \tau < T_1. \tag{5.4}$$

On observe que dans (5.4) on obtient la régularité de la solution sur $\overline{Q_{\tau,T_1}}$. Ce résultat est dû au fait que dans le cas d'un problème aux limites avec une condition au bord de type Neumann homogène on peut utiliser le Théorème IV.5.3 dans [**51**], qui exige des conditions de compatibilité d'ordre zero, tandis que pour le cas d'une condition de Dirichlet au bord, le théorème correspondant IV.5.2 de [**51**] exige des conditions de compatibilité d'ordre un, qui ne sont pas satisfaites en général ; dans ce dernier cas, on perd la régularité de la solution jusqu'au bord de Q_T. Mis à part cet aspect la preuve de la proposition II.11 est analogue à celle de la Proposition I.10.

6. Preuve du Théorème II.4

La preuve de l'existence de solutions faibles locales suit la même méthode que celle du Théorème I.4. Toutefois, on va la redévelopper pour mettre en évidence les arguments différents par rapport au problème de Cauchy-Dirichlet.

a) Existence locale

Soit $T > 0$ et notons par $X = X(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues $u :]0,T] \to W^{1,pq}(\Omega)$ vérifiant :

$$\|u\|_X = \max\{\sup_{]0,T]} t^{\alpha}\|u\|_{pq}, \sup_{]0,T]} t^{\frac{1}{2}+\alpha}\|\nabla u\|_{pq}\} < \infty,$$

où

$$\alpha = \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{pq}). \tag{6.1}$$

Comme dans la preuve du Théorème II.3 on définit sur X les fonctionnelles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ (cf. (5.2) et (5.3)) et on note par $X_K(T)$ la boule fermée de rayon K de $X(T)$. Afin de pouvoir appliquer le Théorème de point fixe de Banach il suffit de trouver K_1 et T_1 tels que : $\mathcal{F}(X_{K_1}(T_1)) \subset X_{K_1}(T_1)$ et $\mathcal{F}$ soit une contraction sur $X_{K_1}(T_1)$. Ainsi les inégalités (2.4) et (2.5) appliquées aux opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ donnent :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t)\|_{pq} &\le \int_0^t \|S(t-s)|\nabla u(s)|^p\|_{pq}\,ds \le C(p,q)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\||\nabla u(s)|^p\|_q\,ds \\
&\le C(p,q)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|\nabla u(s)\|_{pq}^p\,ds \le C(p,q)\cdot\|u\|_X^p\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\,ds \\
&\le C(p,q)\|u\|_X^p\cdot t^{1-\alpha-p(\alpha+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma = 1 - p(\alpha + \frac{1}{2}), \tag{6.2}$$

comme $q > \frac{N(p-1)}{2-p}$ on a $\gamma > 0$. Alors, d'une part on a :

$$t^{\alpha}\|\mathcal{G}u(t)\|_{pq} \le C(p,q)\|u\|_X^p T^{\gamma}, \text{ pour tout } t \in]0,T[. \tag{6.3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_{pq} &\le \int_0^t \|\nabla S(t-s)|\nabla u(s)|^p\|_{pq}\,ds \le C(p,q)\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\||\nabla u(s)|^p\|_q\,ds \\
&\le C(p,q)\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\|\nabla u(s)\|_{pq}^p\,ds \le C(p,q)\cdot\|u\|_X^p\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\cdot s^{-p(\alpha+\frac{1}{2})}\,ds \\
&\le C(p,q)\|u\|_X^p\cdot t^{1-(\alpha+\frac{1}{2})-p(\alpha+\frac{1}{2})},
\end{aligned}$$

d'où :

$$t^{\alpha+\frac{1}{2}}\|\nabla\mathcal{G}u(t)\|_{pq} \le C(p,q)\cdot\|u\|_X^p T^{\gamma} \text{ pour tout } t \in]0,T[. \tag{6.4}$$

En regroupant (6.3) et (6.4) on obtient :

$$\|\mathcal{G}(u)\|_X \le C_1\cdot\|u\|_X^p T^{\gamma}. \tag{6.5}$$

Enfin, grâce aux relations (2.4), (2.5) et (6.5) on a :

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \leq C_2(\|\mu_0\|_q + \|u\|_X^p T^\gamma), \tag{6.6}$$

où la constante C_2 ne dépend que de p, q, N, a et Ω.
Montrons que $\mathcal{F}$ est une contraction sur $X_K(T)$ pour T assez petit.
Pour ce faire on considère u_1 et u_2 dans $X_K(T)$, alors pour tout $0 < t < T$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_{pq} &\leq |a| \int_0^t \|S(t-s)(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p)(s)\|_{pq}\, ds \\
&\leq C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \||\nabla u_1(s)|^p - |\nabla u_2(s)|^p\|_q\, ds \\
&\leq C(p,q) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\|\nabla u_1(s)\|_{pq}^{p-1} + \|\nabla u_2(s)\|_{pq}^{p-1}) \|(\nabla u_1 - \nabla u_2)(s)\|_{pq}\, ds \\
&\leq C(p,q) K^{p-1} \|u_1 - u_2\|_X \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot s^{-p(\frac{1}{2}+\alpha)}\, ds, \\
&\leq C(p,q) K^{p-1} t^{1-p(\alpha+\frac{1}{2})-\alpha} \|u_1 - u_2\|_X,
\end{aligned}$$

d'où :

$$t^\alpha \|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\|_{pq} \leq C(p,q) K^{p-1} T^\gamma \|u_1 - u_2\|_X.$$

De même on montre que :

$$t^{\alpha+\frac{1}{2}} \|\nabla \mathcal{F}u_1(t) - \nabla \mathcal{F}u_2(t)\|_{pq} \leq C(p,q) K^{p-1} T^\gamma \|u_1 - u_2\|_X.$$

Par conséquent :

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_X \leq C_3 \cdot K^{p-1} T^\gamma \|u_1 - u_2\|_X. \tag{6.7}$$

On pose $C_4 = \max\{C_2, C_3\}$, où C_2 et C_3 sont données par les relations (6.6) et (6.7), et on choisit K_1 et T_1 tels que :

$$C_4(\|\mu_0\|_q + K_1^p \cdot T_1^\gamma) \leq \frac{1}{2} K_1. \tag{6.8}$$

Alors $\mathcal{F}(X_{K_1}(T_1)) \subset X_{K_1}(T_1)$ et

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_X \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_X,$$

pour tout $u_1, u_2 \in X_{K_1}(T_1)$. Par suite on peut appliquer le Théorème de point fixe de Banach et on obtient l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in X_{K_1}(T_1)$ qui vérifie :

$$u(t) = S(t)\mu_0 + a \int_0^t S(t-s)|\nabla u(s)|^p\, ds. \tag{6.9}$$

Grâce à (6.9) et au fait que $u \in X_{K_1}(T_1)$ il est facile de voir que $u \in C([0,T_1]; L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T_1; W^{1,pq}(\Omega))$ et par conséquent u est une solution faible du problème (1.1) sur Q_{T_1}.

b) Unicité

Par les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème I.4, on peut montrer que la solution locale u trouvée ci-dessus est unique dans l'espace $C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,pq}(\Omega))$.

Remarque II.6. *Comme dans la preuve du Théorème II.3, on peut montrer que la solution locale u ainsi trouvée vérifie $u \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T_1}})$ pour un certain $\delta \in]0,1[$ et pour tout $\tau \in]0,T_1[$. De plus par la même méthode on peut prolonger cette solution locale en une solution globale sur Q_∞.*

Remarque II.7. *Soit $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ alors, pour tout $T>0$, le problème (1.1) admet une unique solution u dans l'espace $C([0,T],L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,pq}(\Omega))$ pour tout $q > \max\{1,q_c\}$. Cette solution est dans $C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$ et satisfait :*

$$\max\{\sup_{]0,T]} t^\alpha \|u\|_{pq}, \sup_{]0,T]} t^{\frac{1}{2}+\alpha}\|\nabla u\|_{pq}\} < \infty, \tag{6.10}$$

où α est donné par (6.1).

La Remarque II.7 peut être complétée par le résultat de régularité suivant, dont la preuve est développée dans la Proposition I.11.

Proposition II.12. *Si $1 \le p < 2$ et $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ alors la solution du problème (1.1) est dans $C(\overline{Q_T})$, pour tout $T>0$.*

Sous les hypothèses du Théorème II.4 on a le principe de comparaison suivant :

Proposition II.13. *Soient $p \in [1,2[$ et μ_1, μ_2 dans $L^q(\Omega)$ avec $q > \max\{1,q_c,\frac{2(p-1)}{2-p}\}$ et notons par u_1 et u_2 dans $C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,pq}(\Omega))$, les solutions du problème (1.1), données par le Théorème II.4, et correspondantes aux données initiales μ_1 et μ_2. Si*

$$\mu_1 \le \mu_2 \qquad p.p \text{ dans } \quad \Omega$$

alors

$$u_1 \le u_2 \qquad p.p \text{ dans } \quad Q_T \tag{6.11}$$

Démonstration:

La preuve est analogue à celle du Lemme 4.1 dans [**1**], relatif à un problème aux limites de type Cauchy-Dirichlet. On peut adapter cette preuve au problème (1.1) (du type Cauchy-Neumann) en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger au lieu de l'inégalité de Poincaré. Pour être complet, on donne la preuve de ce principe de comparaison, en faisant apparaître les points techniques essentiels relatifs au problème (1.1).

Puisque u_1 et u_2 sont des solutions du problème (1.1) correspondant aux données μ_1 et μ_2, d'après le Théorème II.4 on tire que u_1 et u_2 vérifient (6.10). Comme $q > \max\{1,q_c\}$ et α est donnée par (6.1) on en déduit qu'il existe $r \in]p,2[$ tel que

$$r(\frac{1}{2}+\alpha) < 1, \tag{6.12}$$

par suite $u_1, u_2 \in L^r(0,T,W^{1,pq}(\Omega))$.

Posons

$$u = u_1 - u_2 \text{ dans } Q_T,$$

alors

$$u \in C([0,T[;L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T;W^{1,pq}(\Omega)), \tag{6.13}$$

est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p) \ \text{ dans } \ Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_T, \\ u(0) = \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ \text{ dans } \ \Omega. \end{cases} \tag{6.14}$$

Puisque $p \in [1,2[$ il existe $\theta : Q_T \to [0,1]$ tel que :

$$a(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p) = ap|\theta\nabla u_1 + (1-\theta)\nabla u_2|^{p-2}(\theta\nabla u_1 + (1-\theta)\nabla u_2)\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2) = A\cdot\nabla u,$$

où $A : Q_T \to \mathbb{R}^N$ est définit par :

$$A(t,x) = ap|\theta\nabla u_1 + (1-\theta)\nabla u_2|^{p-2}(t,x)(\theta\nabla u_1 + (1-\theta)\nabla u_2)(t,x). \tag{6.15}$$

Grâce à la régularité de u_1 et u_2 on en déduit que

$$A \in L^{\frac{r}{p-1}}(0,T;L^{\frac{pq}{p-1}}(\Omega)). \tag{6.16}$$

Posons :

$$f = a(|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p) \ \text{ dans } \ Q_T,$$

et

$$u_0 = \mu_1 - \mu_2 \ \text{ dans } \ \Omega.$$

Alors $f \in L^{r/p}(0,T;L^q(\Omega))$, $u_0 \in L^q(\Omega)$, et il existe deux suites de fonctions $(u_0^n)_n \subset C_c^\infty(\Omega)$ et $(f^n)_n \subset C_c^\infty(Q_T)$ qui vérifient :

$$u_0^n \to u_0 \ \text{ dans } \ L^q(\Omega), \quad u_0^n \leq 0 \ \text{ dans } \ \Omega. \tag{6.17}$$

et

$$f^n \to f \ \text{ dans } \ L^{r/p}(0,T;L^q(\Omega)). \tag{6.18}$$

Notons par $u^n \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = f^n \ \text{ dans } \ Q_T, \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_T, \\ u^n(0) = u_0^n \ \text{ dans } \ \Omega. \end{cases} \tag{6.19}$$

On veut montrer que :

$$u^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ dans } \ C([0,T[;L^q(\Omega)) \cap L^r(0,T;W^{1,pq}(\Omega)). \tag{6.20}$$

Puisque u^n et u sont des solutions "mild" respectivement des problèmes (6.19), et (6.14), on peut écrire :

$$u^n = S(t)u_0^n + \int_0^t S(t-s)f^n(s)\,ds$$

et

$$u = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

D'une part, grâce à (2.4), il existe une constante $C_1(q,T,\Omega)>0$ telle que :

$$\|u^n-u\|_{L^\infty(0,T,L^q(\Omega))}\leq C_1(q,T,\Omega)[\|u_0^n-u_0\|_q+\|f^n-f\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega))}].$$

D'autre part, en utilisant (2.5), l'inégalité de Young et (6.12), il existe une autre constante $C_2(r,q,T,\Omega)>0$ telle que :

$$\|\nabla u^n-\nabla u\|_{L^r(0,T;L^{pq}(\Omega))}\leq C_2(r,q,T,\Omega)T^{\frac{1}{r}-(\frac{1}{2}+\alpha)}\|u_0^n-u_0\|_q+T^{\frac{1}{r}-(\frac{1}{2}+\alpha)}\|f^n-f\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega))}.$$

Ainsi, grâce aux relations (6.12), (6.17) et (6.18) on déduit (6.20).

On va utiliser une méthode d'energie pour démontrer que $u^+\equiv 0$ dans Q_T. Pour $\varepsilon\in]0,\min\{r-p,pq-p\}[$, $R>0$, $n\in\mathbb{N}^*$, on introduit les fonctions j_R et$j_{n,r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

$$j_R(\xi)=\begin{cases}0 \text{ si } \xi<0,\\ \xi^\varepsilon \text{ si } 0\leq\xi\leq R,\\ R^\varepsilon \text{ si } \xi>R\end{cases}$$

et

$$j_{R,n}(\xi)=\begin{cases}0 \text{ si } \xi<\frac{1}{n},\\ \xi^\varepsilon \text{ si } \frac{1}{n}\leq\xi\leq R,\\ R^\varepsilon \text{ si } \xi>R\end{cases}$$

Puis considérons les fonctions I_R et $I_{R,n}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

$$I_R(\xi)=\int_0^\xi j_R(s)\,ds \quad\text{et}\quad I_{R,n}(\xi)=\int_0^\xi j_{R,n}(s)\,ds$$

On multiplie la première équation du problème (6.19) par $j_{R,n}(u^n)$ et on intègre sur Q_t, pour t fixé dans $]0,T[$. Puisque $u_0^n\leq 0$ dans Ω, on a $I_{R,n}(u_0^n)=0$. Ainsi, on obtient :

$$\int_\Omega I_{R,n}(u^n(t))dx+\varepsilon\int\int_{[\frac{1}{n}<u^n<R]\cap Q_t}(u^n)^{\varepsilon-1}|\nabla u^n|^2\,dxds=\int_0^t\int_\Omega j_{R,n}(u^n)f^n\,dxds. \tag{6.21}$$

Grâce à (6.18) et (6.20), à une sous-suite près, on a :

$$f^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f \text{ p.p. dans } Q_T,$$

et

$$u^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}u \text{ p.p. dans } Q_T,$$

La fonction $j_{R,n}$ étant continue, on déduit :

$$j_{R,n}(u^n)f^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}j_{R,n}(u)f \text{ p.p dans } Q_T.$$

De plus :

$$|j_{R,n}(u^n)f^n|\leq R^\varepsilon|f_n|.$$

Ainsi, grâce à (6.18) et au Théorème de Lebesgue (Corollaire 1.4.14 dans [**48**]) on déduit d'une part que :

$$j_{R,n}(u^n)f^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}j_R(u)f \text{ dans } L^1(Q_T). \tag{6.22}$$

D'autre part, à une sous-suite près,

$$I_{R,n}(u^n(t))\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}I_R(u(t)) \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et

$$|I_{R,n}(u^n(t))| \leq R^{\varepsilon}|u^n(t)|.$$

De même que ci-dessus, compte tenu de (6.20) et du [Corollaire 1.4.14 dans [**48**]] on déduit :

$$I_R(u^n(t)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I_R(u(t) \text{ dans } L^1(\Omega). \tag{6.23}$$

Finalement, d'après (6.20), à une sous-suite près :

$$(u^n)^{\varepsilon-1}|\nabla u^n|^2\chi_{[\frac{1}{n}<u^n<R]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u^{\varepsilon-1}|\nabla u|^2\chi_{[0<u\leq R]} \text{ p.p dans } Q_T, \tag{6.24}$$

où χ_Q est la fonction indicatrice de l'ensemble $Q \subset Q_T$.
En regroupant (6.21), (6.22), (6.23) et (6.24), on obtient grâce au lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}\int_\Omega I_R(u(t))dx + \varepsilon \int\int_{[0<u<R]\cap Q_t} (u)^{\varepsilon-1}|\nabla u|^2\,dxds \leq \int_0^t\int_\Omega j_R(u)f\,dxds.\\ \leq \int_0^t\int_\Omega j_R(u)A\nabla u\,dxds \leq \int_0^t\int_\Omega j_R(u)|A||\nabla u|\,dxds,\end{aligned} \tag{6.25}$$

où A est la fonction définie dans la relation (6.15).
Grâce au choix de $\varepsilon \in]0, \min\{r-p, pq-p\}[$, à la régularité (6.16) de A, et à la régularité (6.13) de u on a :

$$|u|^{\varepsilon}|A||\nabla u| \in L^1(Q_T).$$

Ce dernier point et le Théorème de la Convergence Dominée nous permet de passer à la limite dans la relation (6.25), lorsque $R \to \infty$. Ainsi, on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon+1}\,dx + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon-1}|\nabla u^+|^2\,dxds \leq \int_0^t\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon}|A||\nabla u^+|\,dxds. \tag{6.26}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder et à l'inégalité de Young on a d'une part :

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon}|A||\nabla u^+|\,dxds \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon-1}|\nabla u^+|^2\,dxds\\ +C(\varepsilon)\|A\|^2_{L^{\frac{r}{p-1}}(0,T;L^{\frac{pq}{p-1}}(\Omega))}\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega (u^+)^{(\varepsilon+1)\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.\end{aligned} \tag{6.27}$$

En regroupant (6.26) et (6.27) on obtient d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon+1}\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\int_\Omega (u^+)^{\varepsilon-1}|\nabla u^+|^2\,dxds \leq\\ \leq C(\varepsilon)\|A\|^2_{L^{\frac{r}{p-1}}(0,T;L^{\frac{pq}{p-1}}(\Omega))}\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega (u^+)^{(\varepsilon+1)\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.\end{aligned}$$

D'autre part, compte tenu de (6.16), on en déduit :

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega (u^+(t))^{\varepsilon+1}\,dx + \frac{2\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2}\int_0^t\int_\Omega |\nabla((u^+)^{\frac{\varepsilon+1}{2}})|^2\,dxds \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega (u^+)^{(\varepsilon+1)\frac{pq}{pq+2-2p}}\,dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}\,ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.$$

En posant $w = (u^+)^{\frac{\varepsilon+1}{2}}$, l'inégalité ci-dessus devient :

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx + \frac{2\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2}\int_0^t\int_\Omega |\nabla w|^2\,dxds \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^{\frac{2pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}\,ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}. \tag{6.28}$$

On va distinguer trois cas :
i) Le cas $N > 2$. Dans ce cas on peut utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla w(t)|^2\,dx \geq C\Big(\int_\Omega |w(t)-\tilde{w}(t)|)^{2^*}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}},$$

où

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \tilde{w}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w(t)\,dx.$$

En injectant cette inégalité dans (6.28) on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx + k(\varepsilon)\int_0^t\Big(\int_\Omega |w(s)-\tilde{w}(s)|^{2^*}(s)\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}}ds$$
$$\leq C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^{\frac{2pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}\,ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}. \tag{6.29}$$

Ainsi on tire :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx + k(\varepsilon)\int_0^t\Big(\int_\Omega |w(s)-\tilde w(s)|^{2^*}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}}ds \le \\
&\quad\le C(\varepsilon)\|((w-\tilde w)+\tilde w)^2\|_{L^{\frac{r}{r+2-2p}}(0,t;L^{\frac{pq}{pq+2-2p}}(\Omega))} \\
&\quad\le C(\varepsilon)\|(w-\tilde w)^2\|_{L^{\frac{r}{r+2-2p}}(0,t;L^{\frac{pq}{pq+2-2p}}(\Omega))} + C(\varepsilon)\|\tilde w^2\|_{L^{\frac{r}{r+2-2p}}(0,t;L^{\frac{pq}{pq+2-2p}}(\Omega))} \\
&\quad\le C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w(s)-\tilde w(s)|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \\
&\qquad\qquad + C(\varepsilon)\Big(\int_0^t(|\Omega|\tilde w)^{2\frac{r}{r+2-2p}}\,ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \qquad (6.30)\\
&\quad\le C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w(s)-\tilde w(s)|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \\
&\qquad\qquad + C'(\varepsilon)\Big(\int_0^t(\int_\Omega w^2\,dx)^{\frac{r}{r+2-2p}}\,ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.
\end{aligned}
$$

Puisque $q > \frac{N(p-1)}{2-p} > \frac{N(p-1)}{p}$ on a :

$$2\frac{pq}{pq+2-2p} < 2^*.$$

ainsi il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que :

$$\frac{pq}{pq+2-2p} = \frac{2^*}{2}\lambda + (1-\lambda).$$

Et grâce à l'inégalité de Hölder on déduit :

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} = \\
&\qquad = \Big(\int_0^t\Big[\Big(\int_\Omega |w-\tilde w|^{2^*\lambda+2(1-\lambda)}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \\
&\qquad \le \Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^{2^*}dx\Big]^{\lambda\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^2dx\Big]^{(1-\lambda)\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.
\end{aligned}
$$

De nouveau le fait que $q > q_c$ implique :

$$pq > \frac{N(p-1)r}{r+2-2p} \Longleftrightarrow \lambda\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p} < \frac{2}{2^*}.$$

Par conséquent, en appliquant encore une fois l'inégalité de Hölder à la dernière ligne de l'inégalité précédente on obtient :

$$\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde{w}|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \le \Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde{w}|^{2^*}dx\Big]^{\frac{2}{2^*}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1}{\gamma}} \times\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde{w}|^2dx\Big]^{(1-\lambda)\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}\gamma'}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1}{\gamma'}}, \tag{6.31}$$

où

$$\gamma=\frac{2}{2^*\lambda}\frac{pq}{pq+2-2p}\frac{r+2-2p}{r}=\frac{pq(r+2-2p)}{N(p-1)r}>1. \tag{6.32}$$

et

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1.$$

Grâce au choix de q :

$$\frac{r+2-2p}{r}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{N(p-1)}{pq}<1,$$

On note par $\sigma=\gamma\dfrac{r}{r+2-2p}>\gamma>1$ et σ' le conjugué de σ :

$$\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma'}=1,$$

et on applique l'inégalité de Hölder pour le couple (σ,σ') à (6.31), alors :

$$C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde{w}|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \le k(\varepsilon)\int_0^t\Big(\int_\Omega |w-\tilde{w}|^{2^*}dx\Big)^{\frac{2}{2^*}}ds +k'(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde{w}|^2dx\Big]^{(1-\lambda)\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}\gamma'}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{\sigma'}{\gamma'}}. \tag{6.33}$$

Ainsi, en regroupant (6.30) et (6.33) on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx \le k'(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde{w}|^2dx\Big]^{(1-\lambda)\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}\gamma'}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{\sigma'}{\gamma'}} +C'(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2\,dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}. \tag{6.34}$$

Par un calcul facile on trouve que :

$$(1-\lambda)\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}\gamma'=\frac{\gamma-1}{\sigma-1}<1 \tag{6.35}$$

et

$$\frac{r+2-2p}{r}\frac{\sigma'}{\gamma'}=\frac{\sigma-1}{\gamma-1}. \tag{6.36}$$

En regroupant (6.34), (6.35) et (6.36) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx &\le k'(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^2dx\Big]^{\frac{\gamma-1}{\sigma-1}}ds\Big)^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}} + C'(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2dx\Big]^{\frac{\sigma}{\gamma}}ds\Big)^{\frac{\gamma}{\sigma}}\\ &\le k'(\varepsilon)\|(w-\tilde w)^2\|_{L^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}}(0,t;L^1(\Omega))} + C'(\varepsilon)\|w^2\|_{L^{\frac{\sigma}{\gamma}}(0,t;L^1(\Omega))}\\ &\le k'(\varepsilon)\|w^2\|_{L^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}}(0,t;L^1(\Omega))} + k'(\varepsilon)\|\tilde w^2\|_{L^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}}(0,t;L^1(\Omega))} + C'(\varepsilon)\|w^2\|_{L^{\frac{\sigma}{\gamma}}(0,t;L^1(\Omega))}\\ &\le 2k'(\varepsilon)\|w^2\|_{L^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}}(0,t;L^1(\Omega))} + C'(\varepsilon)\|w^2\|_{L^{\frac{\sigma}{\gamma}}(0,t;L^1(\Omega))}.\end{aligned} \tag{6.37}$$

Comme $\dfrac{\sigma-1}{\gamma-1} > \dfrac{\sigma}{\gamma}$ en appliquant l'inégalité de Hölder à la dernière inégalité on obtient finalement :

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx \le C(\varepsilon,T)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2\,dx\Big]^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}}ds\Big)^{\frac{\gamma-1}{\sigma-1}} \quad \text{pour tout} \quad t\in]0,T[. \tag{6.38}$$

Enfin, pour $t\in]0,T[$ on note :

$$y(t) = \Big(\int_\Omega w^2(t)\,dx\Big)^{\frac{\sigma-1}{\gamma-1}},$$

alors y est une fonction positive qui vérifie l'inégalité :

$$y(t) \le C(\varepsilon,T)\int_0^t y(s)\,ds, \quad \text{pour tout} \quad t\in]0,T[. \tag{6.39}$$

Ainsi, grâce à l'inégalité de Gronwall on déduit :

$$y = 0 \quad \text{dans} \quad]0,T[.$$

D'où on tire :

$$u^+ = 0 \quad \text{p.p. dans} \quad Q_T$$

ce qui prouve (6.11) dans le cas $N > 2$.

ii) Le cas $N = 1$. Dans ce cas, à la place de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on utilise l'inégalité suivante :

$$\|(w-\tilde w)(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \le |\Omega|\int_\Omega |\nabla w(t)|^2\,dx \quad \text{pour tout} \quad t\in]0,T[. \tag{6.40}$$

On remplaçe cette inégalité dans (6.28) et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx + k_1(\varepsilon)\int_0^t \|w(s)-\tilde w(s)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\,ds \\ \le C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \\ \le C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} + \\ +C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.\end{aligned} \tag{6.41}$$

Par un calcul facile on obtient grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \le k_1(\varepsilon)\int_0^t\|w-\tilde w\|^2_{L^\infty(\Omega)}ds \\ +k_2(\varepsilon,\lambda)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}(1-\lambda\frac{r+2-2p}{r})}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}\frac{1}{1-\lambda}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1-\lambda}{1-\lambda\frac{r+2-2p}{r}}}\end{aligned}$$

Où $\lambda\in]0,1[$ a été choisi tel que :

$$\frac{pq}{pq+2-2p}(1-\lambda\frac{r+2-2p}{r})\le 1, \tag{6.42}$$

cela est possible grâce au choix de $q>\frac{2(p-1)}{2-p}$. Compte tenu de (6.42) et (6.41) on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx \le \\ \le k_2(\varepsilon,\lambda)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega |w-\tilde w|^{2\frac{pq}{pq+2-2p}(1-\lambda\frac{r+2-2p}{r})}dx\Big]^{\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p}\frac{1}{1-\lambda}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1-\lambda}{1-\lambda\frac{r+2-2p}{r}}} \\ +C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2\,dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.\end{aligned} \tag{6.43}$$

Grâce à (6.42) on peut appliquer encore une fois l'inégalité de Hölder dans la dernière intégrale de (6.43) et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx \le k_2(\varepsilon,\lambda)\Big(\int_0^t\Big(\int_\Omega\Big[w-\tilde w\Big]^2dx\Big)^{\frac{r}{r+2-2p}\frac{r-\lambda(r+2-2p)}{r-\lambda r}\frac{1}{1-\lambda}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1-\lambda}{1-\lambda\frac{r+2-2p}{r}}} \\ +C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2\,dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}}.\end{aligned} \tag{6.44}$$

On note par $\gamma = \frac{r-\lambda(r+2-2p)}{r-\lambda r}\frac{1}{1-\lambda} > 1$ alors d'après (6.44) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon+1}\int_\Omega w^2(t)\,dx \le 2k_2(\varepsilon,\lambda)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2 dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}\gamma}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1}{\gamma}}\\ +C(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2\,dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}} \qquad (6.45)\\ \le C'(\varepsilon)\Big(\int_0^t\Big[\int_\Omega w^2 dx\Big]^{\frac{r}{r+2-2p}\gamma}ds\Big)^{\frac{r+2-2p}{r}\frac{1}{\gamma}}.\end{aligned}$$

En notant par :

$$y(t) = (\int_\Omega w^2(t)\,dx)^{\frac{r}{r+2-2p}\gamma} \text{ dans } [0,T[,$$

alors (6.45) s'écrit :

$$y(t) \le k_3(\varepsilon)\int_0^t y(s)\,ds \text{ pour tout } t\in]0,T[.$$

Comme dans le cas précédent, en utilisant le lemme de Gronwall, on tire

$$y \equiv 0 \text{ dans } [0,T[$$

d'où on obtient $u^+ = 0$ dans Q_T.

iii) Le cas $N = 2$. Compte tenu du fait que dans ce cas l'inégalité de Poincaré-Wirtinger devient :

$$\|(w-\tilde{w})(t)\|^2_{L^\delta(\Omega)} \le C(\Omega,\delta)\int_\Omega |\nabla w(t)|^2\,dx \text{ pour tout } t\in]0,T[,$$

pour tout $\delta \in [1,+\infty[$. On choisi δ tel que :
d'une part :

$$2\frac{pq}{pq+2-2p} < \delta,$$

et d'autre part :

$$\frac{2}{1-\frac{N(p-1)}{q(2-p)}} < \delta,$$

ce qui est possible puisque $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p} = \frac{2(p-1)}{2-p}$. Alors, pour $\lambda \in]0,1[$ vérifiant :

$$\frac{pq}{pq+2-2p} = \frac{\delta}{2}\lambda + (1-\lambda),$$

on obtient :

$$\lambda\frac{pq+2-2p}{pq}\frac{r}{r+2-2p} = \frac{1}{\delta-2}\frac{4(p-1)}{pq}\frac{r}{r+2-2p} < \frac{1}{\delta-2}\frac{4(p-1)}{2-p} < \frac{2}{\delta}.$$

Dans la suite, on peut resoudre ce cas comme pour $N > 2$ en remplaçant 2^* par δ. Ainsi la preuve de la Proposition II.13 est achevée. □

7. Preuve du Théorème II.5

Pour tout entier $n \in N$ posons

$$u_0^n(x) = \begin{cases} \mu_0(x) & \text{si } \mu_0(x) < n, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\mu_0 \geq 0$, alors $(u_0^n)_n \subset L^\infty(\Omega)$ est une suite croissante de fonctions positives qui converge presque partout et dans $L^1(\Omega)$ vers μ_0. On fixe $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$. En particulier pour tout $n \in N$, $u_0^n \in L^q(\Omega)$ et d'après le Théorème II.4, il existe une unique solution faible du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = a|\nabla u^n|^p & \text{dans} \quad Q_T, \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial \nu}(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ u^n(0,x) = u_0^n(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

telle que :

$$u^n \in C([0,T], L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T; W^{1,pq}(\Omega)) \cap C^{1+\delta/2, 2+\delta}(\overline{Q_{\tau T}}), \tag{7.2}$$

pour tout $\tau \in]0,T[$.

Grâce au Principe de Comparaison [Proposition II.13] la suite $(u_n)_n$ est croissante et converge presque partout sur Q_T vers une fonction u.

Montrons que $u \in L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega))$. Soit $v^n = S(t)u_0^n$ la solution de l'équation de la chaleur (2.1) et avec la donnée initiale u_0^n. Puisque $a < 0$, par le Principe de Comparaison on a :

$$0 \leq u^n \leq v^n \quad \text{dans} \quad Q_T. \tag{7.3}$$

On passe à la limite dans (7.3), lorsque $n \to \infty$ et on obtient :

$$0 \leq u \leq v \quad \text{p.p dans} \quad Q_T, \tag{7.4}$$

où $v = S(t)\mu_0$. Comme $\mu_0 \in L^1(\Omega)$, grâce à la relation (2.9) on a $v \in L^\infty(0,T,L^1(\Omega))$. On en déduit, d'après (7.4), que $u \in L^\infty(0,T,L^1(\Omega))$. Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante et converge presque partout vers u on tire que :

$$u^n \to u \quad \text{dans } L^1(Q_T) \quad \text{et p.p dans } Q_T. \tag{7.5}$$

De plus, grâce à (7.3), pour tout $t \in]0,T[$ la suite $(u^n(t))_n$ est croissante et majorée par $v(t) \in L^2(\Omega)$. Alors, en utilisant le Théorème de la Convergence Monotone, pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$u^n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{pour tout} \quad t \in]0,T[. \tag{7.6}$$

On fixe $\tau \in]0,T[$ et η tels que $\frac{1}{\eta} + \frac{p}{2} = 1$. Comme :

$$\begin{array}{l} u^n \to u \quad \text{p.p. dans} \quad Q_{\tau,T}, \\ 0 \leq u^n \leq v^n = e^{t\Delta} u_0^n \end{array}$$

et

$$v^n \to v = e^{t\Delta}\mu_0 \quad \text{dans } L^\eta(Q_{\tau,T}),$$

on déduit cf. par exemple Corollaire 1.4.14 dans [**48**]] que :

$$u^n \to u \quad \text{dans} \quad L^\eta(Q_{\tau,T}). \tag{7.7}$$

En intégrant sur Q_T la première équation du problème (7.1) on obtient :

$$\int_\Omega u^n(T,x)\,dx - a\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^p\,dx\,dt = \int_\Omega u_0^n(x)\,dx.$$

Par conséquent :

$$|a|\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^p\,dx\,dt \le \|u_0^n\|_1 \le \|\mu_0\|_1, \tag{7.8}$$

c'est à dire que $(|\nabla u^n|)_n$ est bornée dans $L^p(Q_T)$. Donc, quitte à extraire une sous-suite de $(|\nabla u^n|)_n$ on a :

$$\nabla u^n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \nabla u \quad \text{faiblement dans} \quad [L^p(Q_T)]^N. \tag{7.9}$$

En regroupant (7.4), (7.5) et (7.9) on a :

$$u \in L^\infty(0,T,L^1(\Omega)) \text{ et } |\nabla u| \in L^p(Q_T). \tag{7.10}$$

On veut obtenir

$$u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,L^1(\Omega)), \tag{7.11}$$

alors, il reste à montrer que $u \in L^p(Q_T)$.
Comme pour presque tout $t \in]0,T[$ on a $u(t) \in L^1(\Omega)$ et $|\nabla u(t)| \in L^p(Q_T)$, grâce au Théorème d'injection pour les espaces de Sobolev on en déduit d'une part que :

$$u(t) \in L^p(\Omega) \quad \text{pour presque tout} \quad t \in]0,T[.$$

D'autre part, compte tenu de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger on a :

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_p \le C(p,\Omega)\|\nabla u(t)\|_p \quad \text{p.p.t} \quad t \in]0,T[,$$

où :

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)\,dx.$$

En intégrant sur $]0,T[$ cette dernière inégalité on obtient en particulier :

$$\|u\|^p_{L^p(Q_T)} \le C(p,\Omega)(T\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\nabla u\|^p_{L^p(Q_T)}).$$

Grâce à (7.10) on tire $u \in L^p(Q_T)$ et le point (7.11) est prouvé.
Pour $\tau \in]0,T[$ fixé, montrons que :

$$|\nabla u_n|^p \to |\nabla u|^p \quad \text{dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}). \tag{7.12}$$

D'une part, en multipliant la première équation du problème (7.1) par u_n et en intégrant sur $Q_{\tau,T}$ on a :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u^n(T,x))^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^n(\tau,x))^2\,dx + \int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^2\,dx\,dt = a\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n|^p \cdot u^n\,dx\,dt.$$

Comme $u^n \ge 0$ et $a < 0$ on tire :

$$\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^2\,dx\,dt \le \frac{1}{2}\int_\Omega (u^n)^2(\tau,x)\,dx.$$

D'autre part, en regroupant (7.3) et (2.4), on obtient :

$$\|u^n(\tau)\|_2 \leq \|v^n(\tau)\|_2 = \|S(\tau)u_0^n\|_2 \leq C\tau^{-\frac{N}{4}}\|u_0^n\|_1 \leq C\tau^{-\frac{N}{4}}\|\mu_0\|_1. \tag{7.13}$$

D'où :

$$\int_\tau^T \int_\Omega |\nabla u^n(t,x)|^2\, dx\, dt \leq C\tau^{-\frac{N}{2}}\|\mu_0\|_1^2, \tag{7.14}$$

par conséquent,

$$(|\nabla u^n|)_n \quad \text{est bornée dans} \quad L^2(Q_{\tau,T}),$$

c'est à dire :

$$(|\nabla u^n|^p)_n \quad \text{est bornée dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}).$$

Puisque $1 < \frac{2}{p} \leq \frac{2(N+1)}{N+2}$, quitte à extraire une sous-suite, on a :

$$a|\nabla u^n|^p \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} g \quad \text{faiblement dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}). \tag{7.15}$$

Soit $\varphi \in C^1(\overline{Q_{\tau,T}})$ telle que $\varphi(T,x) = 0$, pour tout $x \in \Omega$. On multiplie la première équation de (7.1) par φ et on intègre les deux membres sur $Q_{\tau,T}$:

$$-\int_\tau^T \int_\Omega u^n(t,x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\, dx\, dt + \int_\tau^T \int_\Omega \nabla u^n(t,x)\cdot\nabla\varphi(t,x)\, dx\, dt = a\int_\tau^T \int_\Omega |\nabla u^n|^p(t,x)\cdot\varphi(t,x)\, dx\, dt + \int_\Omega \varphi(\tau,x)u^n(\tau,x)\, dx.$$

Grâce aux relations (7.5), (7.6), (7.9) et (7.15), on peut passer à la limite, lorsque $n \to \infty$, dans l'inégalité ci-dessus et on obtient :

$$\begin{aligned} -\int_\tau^T \int_\Omega u(t,x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)dxdt + \int_\tau^T \int_\Omega \nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(t,x)dxdt = \\ \int_\tau^T \int_\Omega g(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt + \int_\Omega \varphi(\tau,x)u(\tau,x)\, dx. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Par conséquent, u est la solution faible du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = g & \text{dans} \quad Q_{\tau,T}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\tau,T} \\ w(\tau,\cdot) = u(\tau,\cdot) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.17}$$

Montrons que $(u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\tau,T;H^1(\Omega))$. Pour ce faire, soient u^n et u^m les solutions de (7.1) correspondantes aux données initiale u_0^n et u_0^m respectivement. Alors $(u^n - u^m)$ satisfait :

$$\frac{\partial(u^n-u^m)}{\partial t} - \Delta(u^n-u^m) = a(|\nabla u^n|^p - |\nabla u^m|^p) \quad \text{dans} \quad Q_{\tau,T}.$$

Compte tenu de (7.2) on peut multiplier cette dernière équation par $(u^n - u^m)$ et l'intégrer sur $Q_{\tau,T}$, ainsi on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega (u^n-u^m)^2(T)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^n-u^m)^2(\tau)\,dx + \int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n - \nabla u^m|^2\,dx\,ds \\ = a\int_\tau^T\int_\Omega (|\nabla u^n|^p - |\nabla u^m|^p)(u^n-u^m)\,dx\,ds.\end{aligned} \tag{7.18}$$

Grâce à (7.6), (7.7) et (7.15) on peut passer à la limite dans (7.18), lorsque $n, m \to \infty$. On obtient :

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega |\nabla u^n - \nabla u^m|^2\,dx\,ds = 0.$$

Compte tenu de (7.7), on en déduit que $(u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\tau,T;H^1(\Omega))$. En particulier, à une sous-suite près, on a :

$$\nabla u^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nabla u \quad \text{dans} \quad L^2(Q_{\tau,T}) \quad \text{et p.p. dans} \quad Q_{\tau,T},$$

ce qui implique :

$$|\nabla u^n|^p \to |\nabla u|^p \quad \text{dans} \quad L^{2/p}(Q_{\tau,T}) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

En regroupant ce dernier point avec la relation (7.15) on peut faire l'identification :

$$g = a|\nabla u|^p \quad \text{p.p. dans } Q_{\tau,T}.$$

De plus u ayant la régularité (7.11), pour qu'elle soit une solution du problème (1.1) il ne reste plus qu'à identifier la donnée initiale μ_0. Pour ce faire on peut utiliser les mêmes arguments que dans le Théorème I.5. Aussi on ne redéveloppe pas ce point.

8. Preuve du Théorème II.6

Ce résultat est déjà connu lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, (cf. Théorème 4 dans [**13**]), et la preuve utilise un argument de troncature et "scaling" qui concentre le problème sur une boule $B_r(x_0)$ de centre x_0 et de rayon $r > 0$ telle que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Par conséquent, lorsque Ω est un ouvert borné, on peut adapter la preuve de [**13**] au cas du problème aux limites (1.1).

CHAPITRE III

Comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy-Dirichlet.

RÉSUMÉ. On étudie le comportement asymptotique pour la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi visqueuse : $u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p$, $t > 0$, $x \in \Omega$ avec une condition de Dirichlet homogène au bord et avec une donnée initiale, une fonction continue μ_0 qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$. L'ouvert Ω est supposé borné et régulier, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $p > 0$.

1. Introduction et résultats principaux

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans} \quad]0,+\infty[\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = \mu_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné à frontière régulière de classe au moins C^3. Le problème de Cauchy-Dirichlet (1.1) a été étudié dans [**1, 10, 19, 28**], ainsi que dans le Chapitre II de ce mémoire. En effet, lorsque la donnée initiale est une mesure de Radon bornée et $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, dans [**1**] N. Alaa démontre l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème (1.1). En utilisant une méthode différente S. Benachour et S. Dabuleanu [**10**], ont fait une analyse plus complète du problème de Cauchy-Dirichlet. Dans [**10**], l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, de l'exposant $p > 0$ et de la donnée initiale μ_0, selon que celle-ci est une mesure de Radon bornée ou une fonction mesurable dans l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$. Signalons aussi qu'à l'aide de propriétés sur les semi-groupes qui préservent la monotonie, M.G.Crandall, P.L.Lions et P.E.Souganidis [**28**] ont prouvé l'existence d'une borne universelle pour les solutions positives du problème de Cauchy-Dirichlet lorsque $p > 1$ et μ_0 est une fonction continue positive et qui s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Cette estimation leur a permis de démontrer l'existence de solutions et l'unicité dans certains cas. Leur but est de prouver que le problème de Cauchy-Dirichlet homogène "non-standard" avec condition initiale $\mu_0 = +\infty$ sur un ouvert $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et $\mu_0 = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ admet une unique solution positive. L'étude de ce problème est liée à la théorie des grandes déviations dans certains processus de diffusion de Markov.

Dans la suite on présente, un résumé des résultats du Chapitre I, qui sont utiles pour analyser le comportement asymptotique des solutions du problème (1.1).

(*i*) Cas $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. D'une part, pour $0 < p < \frac{N+2}{N+1}$, et μ_0 une mesure de Radon bornée, on démontre en utilisant un théorème de point fixe, que le problème (1.1) admet une solution faible ; de plus cette solution est unique si $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$. D'autre part, si $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on

obtient l'existence et l'unicité de la solution lorsque la donnée initiale μ_0 est dans $L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.

(ii) Lorsque $a < 0$ et $\frac{N+2}{N+1} \leq p < 2$ on montre que le problème (1.1) admet au moins une solution pour tout $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$.

(iii) Dans le cas $p \geq \frac{N+2}{N+1}$, $\mu_0 = \delta_{x_0}$ (masse de Dirac en un point x_0 de Ω) et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on prouve que le problème (1.1) n'admet pas de solutions faibles.

(iv) Finalement dans le cas sur-quadratique, on démontre que pour $a < 0$ et $p \geq 2$ le problème (1.1) admet une unique solution globale pour des données initiales vérifiant une certaine régularité.

On est en mesure maintenant d'énoncer les résultats principaux. La notion de solution faible est celle introduite dans le Chapitre I.

Théorème III.1. *Soient $a < 0$, $p \in]0,1[$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$. Alors pour toute solution faible u du problème (1.1) il existe $T^* > 0$ tel que*

$$u(t,x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in]T^*, +\infty[\times\Omega. \tag{1.2}$$

Cette propriété est l'appelée "extinction en temps fini de la solution du problème (1.1)".

La preuve repose sur les résultats de [**11, 12, 39**] concernant le comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$. En effet, lorsque $a < 0$, après avoir réalisé un prolongement à $\mathbb{R}^N$ de la donnée initiale, la solution du problème de Cauchy est une sur-solution pour le problème de Cauchy-Dirichlet. Ainsi, du fait qu'il y a extinction pour le problème de Cauchy, on en déduit l'extinction en temps fini des solutions du problème de Cauchy-Dirichlet. La preuve est développée dans le paragraphe 2.

Remarque III.1. *Dans le cas $a > 0$, $p \in]0,1[$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$ il n'y a pas d'extinction en temps fini de la solution u du problème (1.1), car, dans ce cas, u est minorée par la solution de l'equation de la chaleur à donnée initiale μ_0.*

Le théorème suivant décrit le comportement asymptotique des solutions du problème (1.1) lorsque $a < 0$ et $p \geq 1$.

Théorème III.2. *Soient $a < 0$, $p \geq 1$ et $\mu_0 \in L^1(\Omega), \mu_0 \geq 0$. Alors toute solution faible u du problème (1.1) converge uniformément vers 0 lorsque $t \to \infty$.*

Ce résultat tient compte du fait que la solution $e^{t\Delta}\mu_0$, du problème relatif à l'équation de la chaleur à donnée initiale μ_0, est une sur-solution du problème (1.1). D'après les résultats classiques sur l'équation de la chaleur avec une condition de Dirichlet homogène (voir par exemple Lemme 3, p. 25 dans [**63**]) on sait que :

$$\|e^{t\Delta}\mu_0\|_\infty \leq C(1 + t^{-\frac{N}{2}})e^{-\lambda t}\|\mu_0\|_1, \quad \text{pour tout} \quad t \in]0, +\infty[,$$

où λ est la première valeur propre du Laplacien dans Ω avec une condition au bord de type Dirichlet homogène. On en déduit que la solution faible u du problème (1.1) vérifie :

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1 + t^{-\frac{N}{2}})e^{-\lambda t}\|\mu_0\|_1, \quad \text{pour tout} \quad t \in]0, +\infty[. \tag{1.3}$$

Ce qui nous donne le taux de décroissance de la solution u. En particulier, u converge uniformément vers 0 lorsque $t \to \infty$. Ainsi, le Théorème III.2 est démontré. □

On continue l'étude sur le comportement asymptotique des solutions de (1.1) avec le cas $a > 0$, $p \in [1, 2[$. Dans ce cas, la remarque suivante est très utile.

Remarque III.2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p \in [1, 2[$. Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ où :*

$$q \geq 1 \text{ si } p \in [1, \tfrac{N+2}{N+1}[\text{ et } q > q_c = \tfrac{N(p-1)}{2-p} \text{ si } p \in [\tfrac{N+2}{N+1}, 2[.$$

Alors, d'après le Théorème I.4 et la Remarque I.8, le problème (1.1) admet une unique solution globale $u \in C(]0, T[, L^q(\Omega) \cap L^p(0, T; W_0^{pq}(\Omega)) \cap C^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_{\tau,T})$, où $\delta \in]0, 1[$ et $\tau \in]0, T[$, vérifiant :

$$u(t) = e^{t\Delta}\mu_0 + a \int_0^t e^{(t-s)\Delta} |\nabla u|^p \, ds. \tag{1.4}$$

De plus, il existe une constante C_4 qui ne dépend que de a, p, q, N et Ω (cf. la relation (6.8) du Chapitre I), telle que, pour tout $T_1 > 0$, $K_1 > 0$ vérifiant :

$$C_4(\|\mu_0\|_q + K_1^p T_1^\gamma) \leq \frac{K_1}{2}, \tag{1.5}$$

on ait :

$$\max\{ \sup_{t \in]0, T_1]} t^\alpha \|u(t)\|_{pq}, \sup_{t \in]0, T_1]} t^{\frac{1}{2}+\alpha} \|\nabla u(t)\|_{pq} \} \leq K_1, \tag{1.6}$$

où

$$\alpha = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{pq}\right)$$

et

$$\gamma = 1 - p\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

En particulier, tous ces résultats restent vrais si la donnée initiale $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ et d'après la Remarque I.8 du Chapitre I, la solution u appartient à $C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$.

Compte tenu de la remarque ci-dessus on a le résultat suivant :

Théorème III.3. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p \in]1, 2[$ et $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$, alors la solution globale u du problème (1.1) converge vers 0, uniformément dans $\overline{\Omega}$, lorsque $t \to \infty$.*

En combinant la Remarque III.2 et le Théorème III.3 on a le corollaire suivant :

Corollaire III.1. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $p \in]1, 2[$. Soit $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, où ;*

$$q \geq 1 \text{ si } p \in [1, \tfrac{N+2}{N+1}[\text{ et } q > q_c = \tfrac{N(p-1)}{2-p} \text{ si } p \in [\tfrac{N+2}{N+1}, 2[.$$

Alors la solution globale u du problème (1.1) converge vers 0, uniformément dans $\overline{\Omega}$, lorsque $t \to \infty$.

2. Preuve du Théorème III.1

(i)Tout d'abord on démontre le résultat pour des données initiales dans $C_0^+(\Omega)$.
Soit donc $\mu_0 \in C_0(\Omega)$ telle que $\mu_0 \geq 0$ et considérons $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ l'unique solution du problème (1.1).
Posons :

$$\tilde{\mu_0}(x) = \begin{cases} \mu_0(x) & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Et soit $\tilde{u} \in C^{1,2}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^N) \cap C([0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ (voir [**39**]), l'unique solution sur $\mathbb{R}^N$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{u} = a|\nabla \tilde{u}|^p & \text{dans} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R}^N, \\ \tilde{u}(0,x) = \tilde{\mu_0}(x) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.1}$$

Grâce au Principe de Comparaison $\tilde{u}$ est une fonction positive et puisque $a < 0$, $p \in]0,1[$ et $\tilde{\mu_0}$ est à support compact dans $\mathbb{R}^N$, d'après [**11**] et [**39**] on obtient d'une part qu'il y a extinction en temps fini de la solution $\tilde{u}$ du problème (1.1). C'est à dire :

$$\exists\, T^* > 0; \quad \tilde{u}(t,x) = 0 \quad \forall\ (t,x) \in]T^*, +\infty[\times\mathbb{R}^N.$$

D'autre part, sur Q_∞ la fonction $\tilde{u}$ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{u} = a|\nabla \tilde{u}|^p & \text{dans} \quad Q_\infty, \\ \tilde{u}(t,x) \geq 0 & \text{sur} \quad \Gamma_\infty, \\ \tilde{u}(0,x) = \mu_0(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Donc, $\tilde{u}$ est une sur-solution du problème (1.1). Ainsi, grâce au Principe de Comparaison, (Théorème 16, p.52 dans [**38**]), on a :

$$0 \leq u \leq \tilde{u} \quad \text{dans} \quad Q_\infty. \tag{2.3}$$

Par conséquent il existe T^*, tel que la solution u vérifie la relation (1.2).

(ii) Examinons le cas général, où $\mu_0 \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$. D'une part d'après la régularité des solutions du problème (1.1), pour tout $\tau > 0$, $u(\tau) \in C_0^+(\Omega)$. D'autre part, grâce au résultat d'unicité lorsque la donnée initiale est continue, u est la solution forte du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = a|\nabla w|^p & \text{dans} \quad Q_{\tau,\infty} \\ w(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\tau,\infty} \\ w(\tau,x) = u(\tau,x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

D'après l'étape précédente (i), il existe $T^* > \tau$ tel que u vérifie (1.2) ce qui achève la preuve du Théorème III.1. □

3. Preuve du Théorème III.3

La preuve du Théorème III.3 sera faite en plusieurs étapes. Donnons d'abord quelques propriétés des solutions du problème (1.1) introduites par la Remarque III.2. Pour $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$

notons par $T(t)\mu_0 \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$ la solution associée à cette donnée initiale μ_0. Alors on a le résultat suivant :

Proposition III.1. *$(T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe, continu sur $C_0(\overline{\Omega})$, qui préserve la monotonie. C'est à dire :*
(i) $(t,\varphi) \to T(t)\varphi$ est continue de $[0,+\infty[\times C_0(\overline{\Omega})$ dans $C_0(\overline{\Omega})$;
(ii) $T(t)T(\tau) = T(t+\tau)$ pour tout $t,\tau \geq 0$;
(iii) $T(0)\varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in C_0(\overline{\Omega})$;
(iv) Pour tout $\varphi,\psi \in C_0(\overline{\Omega})$ telles que $\varphi \leq \psi$ on a : $T(t)\varphi \leq T(t)\psi$, $\forall t > 0$.
En particulier $(T(t))_{t\geq 0}$ est "un système dynamique sur $C_0(\overline{\Omega})$".

Démonstration:
Soient (t^n,φ^n) une suite qui converge vers (t,φ) dans $[0,+\infty[\times C_0(\overline{\Omega})$. Alors, grâce au Principe de Comparaison, (Théorème 16, p.52 dans [**38**]) et à la relation (1.4) on a :

$$\begin{aligned}\|T(t^n)\varphi^n - T(t)\varphi\|_\infty &\leq \|T(t^n)(\varphi^n-\varphi)\|_\infty + \|T(t^n)\varphi - T(t)\varphi\|_\infty \\ &\leq \|\varphi^n-\varphi\|_\infty + \|T(t^n)\varphi - T(t)\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t^n)\varphi^n - T(t)\varphi\|_\infty = 0$$

Ainsi, on en déduit (i).
Le point (ii) est une conséquence de l'unicité de la solution du problème (1.1) dans $C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$, et l'unicité est obtenue en utilisant le Principe de Comparaison, (Théorème 16, p.52 dans [**38**]).
Quant au point (iii), il est évident.
Enfin, le point (iv) est une conséquence du même Principe de Comparaison, (Théorème 16, p.52 dans [**38**]). □

La preuve du Théorème III.3 est basée d'une part sur le Principe d'Invariance de LaSalle (cf. par exemple Théorème 9.2.3, p.144 dans [**25**]) et d'autre part sur la convergence des trajectoires vers les états stationnaires lorsque l'on dispose d'une fonctionnelle de Liapunov stricte (cf. par exemple Théorème 9.2.7, p.144 dans [**25**]). Ainsi, on va étudier d'abord l'ensemble E des états stationaires du semi-groupe $(T(t))_t \geq 0$. Plus précisément cet ensemble est défini par :

$$E = \{w \in C_0(\overline{\Omega});\ T(t)w = w, \forall\ t \geq 0\}.$$

Grâce à la régularité des solutions du problème (1.1) on déduit qu'il existe $\delta \in (0,1)$ tel que :

$$E = \{w \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\delta}(\Omega);\ -\Delta w = a|\nabla w|^p\} \tag{3.1}$$

La proposition suivante donne une caractérisation de l'ensemble E, lorsque $p \in [1,2[$.

Proposition III.2. *Soit $p \in [1,2[$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Alors, la fonction nulle est le seul état stationnaire du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Autrement dit le problème aux limites :*

$$\begin{cases} w \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\delta}(\Omega), \\ -\Delta w = a|\nabla w|^p, \end{cases} \tag{3.2}$$

n'admet que la solution $w \equiv 0$.

Démonstration:
Donnons la preuve pour $a > 0$, car, si $a < 0$, il suffit de changer w avec $-w$.
Soit $w \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\delta}(\Omega)$ une solution du problème (3.2). Puisque $a > 0$, alors w vérifie :

$$-\Delta w \geq 0,$$

et d'après le "Principe du maximum" on en déduit :

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} w = \min_{x\in\partial\Omega} w = 0.$$

Par conséquent :

$$w \geq 0 \ \text{ dans } \ \Omega.$$

Montrons que :

$$w \leq 0 \ \text{ dans } \ \Omega. \tag{3.3}$$

On va distinguer les deux cas suivants : selon que $p \in]1, 2[$ et $p = 1$.
i) Le cas $p \in]1, 2[$: Pour $\varepsilon > 0$, on définit la fonction :

$$z(x) = w(x) - \varepsilon(M - (1 + |x|^2)^{1/2}), \quad x \in \Omega. \tag{3.4}$$

où

$$M = \sup_{x\in\Omega}(1 + |x|^2)^{1/2}.$$

Alors d'après (3.2) :

$$z \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\delta}(\Omega)$$

et

$$z \leq 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Montrons que :

$$z \leq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}. \tag{3.6}$$

Si z prend des valeurs positives en des points de Ω alors grâce à (3.5), z admet un maximum positif en $x_0 \in \Omega$. Ainsi, au point x_0 où z atteint un maximum positif on a :

$$(\nabla z)(x_0) = 0,$$

et

$$-(\Delta z)(x_0) \geq 0$$

Donc, pour obtenir (3.6), il suffit de montrer qu'en tout point $x \in \Omega$ tel que $(\nabla z)(x) = 0$ on a :

$$-\Delta z(x) < 0. \tag{3.7}$$

Par un calcul facile, on obtient qu'en tout point $x \in \Omega$ vérifiant $(\nabla z)(x) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
-\Delta z(x) &= -\Delta w(x) - \varepsilon\frac{N + (N-1)|x|^2}{(1+|x|^2)^{3/2}} = a|\nabla w|^p(t,x) - \varepsilon\frac{N + (N-1)|x|^2}{(1+|x|^2)^{3/2}} \\
&= a\varepsilon^p\frac{|x|^p}{(1+|x|^2)^{p/2}} - \varepsilon\frac{N + (N-1)|x|^2}{(1+|x|^2)^{3/2}} \\
&\leq a\varepsilon^p|d_\Omega|^p - \varepsilon\frac{N}{(1+|\delta_\Omega|^2)^{3/2}} \\
&\leq a\varepsilon|d_\Omega|^p(\varepsilon^{p-1} - \frac{N}{a|d_\Omega|^p(1+|d_\Omega|^2)^{3/2}}),
\end{aligned}$$

où d_Ω est le diamètre du domaine Ω. Ainsi, puisque $p \in]1,2[$, pour ε assez petit tel que :

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{N}{a|d_\Omega|^p(1+|d_\Omega|^2)^{3/2}}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{3.8}$$

on obtient (3.7). Par conséquent la relation (3.6) est vérifiée et compte tenu de (3.4) on tire :

$$0 \leq w(t,x) \leq \varepsilon(M - (1+|x|^2)^{1/2}),$$

pour tout ε vérifiant (3.8). Par passage à la limite, lorsque $\varepsilon \to 0_+$, on obtient :

$$w \equiv 0 \ \text{ dans } \ Q_T.$$

ii) Le cas $p = 1$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $x_0 \notin \overline{\Omega}$ et soit z une fonction définie sur Ω par :

$$z(x) = w(x) - \varepsilon(M - e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}}), \quad x \in \Omega. \tag{3.9}$$

où

$$M = \sup_{x\in\Omega} e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}},$$

Alors comme précédemment il suffit de montrer qu'en tout point $x \in \Omega$ tel que $(\nabla z)(x) = 0$ la relation (3.7) est vérifiée. En effet, on a

$$\begin{aligned}
-\Delta z(x) &= -\Delta w(x) - \varepsilon(N + |x-x_0|^2)e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}} \\
&= a|\nabla w| - \varepsilon(N+|x-x_0|^2)e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}} \\
&= a\varepsilon|x-x_0|e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}} - \varepsilon(N+|x-x_0|^2)e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}} \\
&\leq \varepsilon(a-|x-x_0|))|x-x_0|e^{\frac{|x-x_0|^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour obtenir (3.7) il suffit de choisir $x_0 \notin \overline{\Omega}$ telle que $\min_{x\in\Omega}|x-x_0| > a$. Cela achève la preuve de la Proposition III.2. □

Dans ce qui suit on considère l'espace $C_0(\overline{\Omega})$ muni de la norme usuelle :

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Rappelons d'abord, la notion de fonction de Liapunov (resp. Liapunov sticte) pour le système dynamique $(T(t))_{t\geq 0}$ sur $C_0(\overline{\Omega})$ (cf. [**25**] par exemple).

Définition III.1. *Une fonction $\Phi : C_0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ est appelée fonction de Liapunov pour le système dynamique $(T(t))_{t\geq 0}$ si elle vérifie les conditions suivantes :*
a) *Φ est continue sur $C_0(\overline{\Omega})$,*
b) *Pour tout $t > 0$ et $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ on a :*

$$\Phi(T(t)\mu_0) \leq \Phi(\mu_0). \tag{3.10}$$

De plus on dit que Φ est une fonction de Liapunov stricte pour $(T(t))_{t\geq 0}$ si la condition suivante est realisée :
Si $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ tel que $\Phi(T(t)\mu_0) = \Phi(\mu_0)$ pour tout $t > 0$ alors μ_0 est un état stationnaire de $(T(t))_{t\geq 0}$.

Dans la proposition suivante on démontre entre autres que la norme usuelle de $C_0(\overline{\Omega})$ est une fonction de Liapunov stricte pour $(T(t))_{t\geq 0}$.

Proposition III.3. *Sous les hypothèses du Théorème III.3 on a les résultats suivants :*
i) La fonction :

$$\Phi : C_0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(\mu_0) = \|\mu_0\|_\infty \tag{3.11}$$

est une fonction de Liapunov stricte pour le système dynamique $(T(t))_{t\geq 0}$.
ii) Pour tout $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ *l'ensemble* $\{T(t)\mu_0; t \geq 0\}$ *est relativement compact dans* $C_0(\overline{\Omega})$.

Démonstration:
La relation (3.10) est une simple conséquence du Principe de Comparaison pour le problème (1.1) (Théorème 16, p.52 dans [**38**]) pour le problème (1.1).
Ainsi pour achever le point *i)* il nous reste à démontrer que Φ est une fonction de Liapunov stricte pour $(T(t))_{t\geq 0}$. Soit donc, $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ tel que :

$$\|T(t)\mu_0\|_\infty = \|\mu_0\|_\infty \text{ pour tout } t > 0.$$

En particulier pour $t_0 > 0$ fixé il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$|[T(t_0)\mu_0](x_0)| = \|\mu_0\|_\infty.$$

Grâce à (3.10) on sait que :

$$|[T(t)\mu_0](x)| \leq \|\mu_0\|_\infty \text{ pour tout } (t,x) \in Q_\infty.$$

Ainsi, on déduit que (t_0, x_0) est un point de maximum positif ou bien un point de minimum négatif pour la fonction $T(\cdot)\mu_0$ sur Q_∞.
On a deux posibilités :
a) Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et dans ce cas $[T(t_0)\mu_0](x_0) = 0$ d'où on déduit $\mu_0 \equiv 0$. Comme 0 est le seul état stationnaire de $(T(t))_{t\geq 0}$ le point *i)* est démontré dans ce cas.
b) Soit $x_0 \in \Omega$. Fixons $T_0 > t_0$ et supposons que la fonction $T(\cdot)\mu_0$ atteint un maximum positif au point $(t_0, x_0) \in Q_{T_0}$ (le cas minimum négatif se démontre de la même façon). Pour simplifier la notation posons :

$$u(t,x) = [T(t)\mu_0](x), \ (t,x) \in Q_{T_0}$$

alors $u \in C(\overline{Q_{T_0}}) \cap C^{1,2}(Q_{T_0})$ et vérifie :

$$\mathcal{L}u = 0$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur parabolique linéaire défini sur $C^{1,2}(Q_{T_0})$ par

$$\mathcal{L}w = \Delta w + b(t,x) \cdot \nabla w - \frac{\partial w}{\partial t},$$

et

$$b(t,x) = a|\nabla u(t,x)|^{p-2}\nabla u(t,x), \quad (t,x) \in Q_{T_0}.$$

Grâce à la régularité de u et au fait que $p \in]1,2[$, la fonction b est continue sur Q_{T_0} et on peut appliquer le Principe du maximum fort (Théorème 1, p.34 dans [**38**]) afin d'obtenir :

$$u(t,x) = u(t_0,x_0), \quad \text{pour tout } (t,x) \in Q_{t_0},$$

et par la continuité jusqu'au bord de la fonction u on a :

$$u(t,x) = u(t_0,x_0), \quad \text{pour tout } (t,x) \in \overline{Q_{t_0}}.$$

Comme u vérifie une condition au bord de type Dirichlet homogène on déduit $u(t_0, x_0) = 0$ d'où $\mu_0 \equiv 0$ ce qui achève le point $i)$ dans ce dernier cas.

Pour démontrer le point $ii)$ on utilise la Remarque III.2, (relation (1.6)). Soit $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ et fixons $q > \max\{\frac{N}{p}, \frac{N(p-1)}{2-p}\}$. Soient $K_1, T_1 > 0$ tels que :

$$C_4(|\Omega|^{1/q}\|\mu_0\|_\infty + K_1^p T_1^\gamma) \leq \frac{K_1}{2} \tag{3.12}$$

alors K_1, T_1 vérifient (1.5) et d'après (1.6), pour $\varepsilon \in]0, \frac{T_1}{2}[\bigcap]0, 1[$ on déduit :

$$\|T(t)\mu_0\|_{W_0^{1,pq}(\Omega)} \leq K_1 \varepsilon^{-(\alpha+\frac{1}{2})}, \quad \text{pour tout } t \in [\varepsilon, T_1]. \tag{3.13}$$

Montrons que la relation (3.13) a lieu pour tout $t \in [\varepsilon, +\infty[$. En effet, soit $t_0 > T_1$. Grâce au Principe de Comparaison on a :

$$\|T(t_0 - \frac{T_1}{2})\mu_0\|_\infty \leq \|\mu_0\|_\infty,$$

et donc, (3.12) est vérifiée pour $\|T(t_0 - \frac{T_1}{2})\mu_0\|_\infty$ à la place de $\|\mu_0\|_\infty$. Ainsi grâce à (1.6) on obtient

$$\|T(t)\mu_0\|_{W_0^{1,pq}(\Omega)} \leq K_1 \varepsilon^{-(\alpha+\frac{1}{2})}, \quad \text{pour tout } t \in [t_0 - \frac{T_1}{2} + \varepsilon, t_0 + \frac{T_1}{2}].$$

En particulier (3.13) est vérifiée pour tout $t_0 > T_1$. Ainsi, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{T_1}{2}[\bigcap]0, 1[$, l'ensemble $\{T(t)\mu_0; t \geq \varepsilon\}$ est borné dans $W_0^{1,pq}(\Omega)$. Grâce au choix de q tel que $pq > N$, l'injection :

$$W_0^{1,pq}(\Omega) \hookrightarrow C_0(\overline{\Omega})$$

est compacte. Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{T_1}{2}[\bigcap]0, 1[$, l'ensemble $\{T(t)\mu_0; t \geq \varepsilon\}$ est relativement compacte dans $C_0(\overline{\Omega})$. Fixons $\varepsilon \in]0, \frac{T_1}{2}[\bigcap]0, 1[$ alors d'une part l'ensemble :

$$\{T(t)\mu_0; t \geq \varepsilon\} \quad \text{est relativement compacte dans } \ C_0(\overline{\Omega})$$

et d'autre part, comme $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe continu sur $C_0(\overline{\Omega})$ on déduit que l'ensemble :

$$\{T(t)\mu_0; t \in [0, \varepsilon]\} \quad \text{est relativement compacte dans } \ C_0(\overline{\Omega}).$$

En regroupant les deux derniers points on achève la preuve de la Proposition III.3. □

Preuve du Théorème III.3 :

Soit $\mu_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ et notons par :

$$\omega(\mu_0) = \{w \in C_0(\overline{\Omega}); \exists t_n \to \infty \ \text{ tel que } T(t_n)\mu_0 \to w \ \text{ dans } C_0(\overline{\Omega}), \ \text{lorsque } \ n \to \infty\},$$

l'ensemble $\omega-$limite de μ_0 relatif au semi-groupe $(T(t)_{t\geq 0}$. Alors grâce à la Proposition III.3 on peut appliquer le Théorème 9.2.7 dans [**25**] et on obtient que l'ensemble $\omega-$limite est inclu dans l'ensemble des états stationnaires de $(T(t))_{t\geq 0}$. Ainsi par le Principe d'Invariance de LaSalle (voir Théorème9.2.3 dans [**25**]), pour tout $\mu_0 \in C_0(\Omega)$ on a :

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(T(t)\mu_0) \ \text{ existe et est fini.}$$

Posons

$$L = \lim_{t\to\infty} \Phi(T(t)\mu_0),$$

alors :

$$L \in \{\Phi(w);\ w \in \omega(\mu_0) \subset E\},$$

où E est l'ensemble des états stationnaires du système dynamique $(T(t))_{t\geq 0}$. D'après la Proposition III.2 on a $E = \{0\}$, et on déduit que :

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(T(t)\mu_0) = 0,$$

ce qui achève la preuve du Théorème III.3. □

Remarque III.3. *Dans le cas $a > 0$, $p \in]0,1[$ et $\mu_0 \in C_0^+(\overline{\Omega})$, on peut obtenir des estimations du type (1.5) et (1.6) pour les solutions du problème (1.1). Ainsi le résultat de la Propositions III.1 reste valable dans ce cas. Pourtant, on ne cannaît pas le comportement asymptotique des solutions, car lorsque $p \in]0,1[$ et $\Omega = B_1(0)$ (la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$), l'ensemble E des états stationnaires contient au moins deux éléments. Autrement dit l'équation elliptique (3.2) admet au moins une solution non-nulle. Effectivement la fonction :*

$$w(x) = \frac{(1-p)^{\frac{2-p}{1-p}}}{(2-p)(N-(N-1)p)^{\frac{1}{1-p}}}(1-|x|^{\frac{2-p}{1-p}}),$$

est une solution non-nulle du problème (3.2) dans $\Omega = B_1(0)$.

Remarque III.4. *Lorsque $a > 0$, $p > 2$ et la donnée initiale μ_0 est assez grande, dans* [**67**] *Ph. Souplet a démontré que le gradient de la solution du problème (1.1) explose en temps fini. Mis à part ce résultat on ne connaît pas d'autres investigations sur le comportement asymptotique des solutions dans le cas sur-quadratique si $a > 0$.*

CHAPITRE IV

Comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy-Neumann.

RÉSUMÉ. On étudie d'abord l'existence et l'unicité des solutions fortes pour l'équation de Hamilton-Jacobi visqueuse $u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p$, $t > 0$, $x \in \Omega$ avec condition de Neumann homogène au bord et à donnée initiale μ_0, une fonction continue jusqu'au bord. L'ouvert Ω est supposé borné, régulier et convexe, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $p > 0$. Ensuite, on s'intéresse au comportement asymptotique de la solution en fonction de l'exposant p et on démontre en particulier que, pour $p \in]0,1[$, il y a extinction en temps fini du gradient de la solution, tandis que pour $p \geq 1$ la solution converge uniformément vers une constante, lorsque $t \to \infty$. Dans la dernière partie, on étudie lea solutions lorsque $p > 1$ et la donnée initiale $\mu_0 = +\infty$ sur un ouvert $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et $\mu_0 = 0$ sur $\Omega \setminus \overline{D}$.

1. Introduction et résultats principaux

On considère l'équation parabolique suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p & \text{dans} \quad]0,+\infty[\times\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = 0 & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = \mu_0(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné à frontière régulière de classe au moins C^3.

Le problème de Cauchy sur l'espace entier $\mathbb{R}^N$ a été beaucoup étudié (voir [**3, 7, 9, 13, 15, 39, 68**]). Sur des ouverts bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et en fonction de l'exposant p des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy-Dirichlet ont été obtenues dans [**1, 10, 28, 67**], et dans [**29**] pour le problème de Cauchy-Neumann selon l'appartenance de la donnée initiale μ_0 à plusieurs espaces fonctionnels $(L^q(\Omega), \mathcal{M}_b(\Omega), C(\overline{\Omega}))$. En effet, l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème (1.1), lorsque $p \in]0,2[$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et pour des données initiales μ_0 qui sont des mesures de Radon bornées ou des fonctions mesurables dans l'espace $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$ sont étudiés dans [**29**]. A notre connaissance, le problème (1.1) n'a pas été étudié dans le cas sur-quadratique : $p \geq 2$.

Dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$, le comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy a été étudié dans [**11, 12**], lorsque $a < 0$ et pour des données initiales μ_0 des fonctions positives. Dans [**12**], on trouve en particulier le résultat suivant : si $a < 0$, $p \in]0,1[$ et si la donnée initiale μ_0 est périodique, il y a extinction, en temps fini, de la solution du problème (1.1). Comme toute solution positive du problème de Cauchy est une sur-solution du problème de Cauchy-Dirichlet homogène, ce résultat de [**12**], reste valable sur des ouverts bornés pour le problème de Cauchy-Dirichlet.

Dans cette partie on analyse le problème (1.1) lorsque Ω est un ouvert convexe borné et on donne des résultats d'existence et d'unicité de la solution lorsque la donnée initiale est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Ensuite on étudie le comportement asymptotique des solutions en fonction de l'exposant p. Cette étude est basée sur des estimations du gradient des solutions du problème (1.1), estimations qui sont obtenues par une technique due à S.N. Bernstein. Ces etimations font l'objet du Théorème IV.1 et du Théorème IV.2, elles constituent la clé essentielle pour l'obtention en particulier d'un résultat d'extinction énoncé dans le Théorème IV.3 : si $p \in]0.1[$ alors pour toute solution u du problème (1.1) à donnée initiale dans $C(\overline{\Omega})$ il existe $T^* > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u(t,x) \equiv c, \text{ pour tout } t > T^* \text{ et } x \in \Omega.$$

Cette propriété est appelée : "extinction en temps fini du gradient de la solution u du problème (1.1)". Enfin, dans le Théorème IV.3 on prouve aussi que pour $p \geq 1$ la solution du problème (1.1) converge uniformément vers une constante, lorsque $t \to \infty$.
Finalement, nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times]0, +\infty[; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \ ]0, +\infty[\times \partial\Omega; \\ u(0) = +\infty \quad \text{dans } \ D; \\ u(0) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \setminus \overline{D}; \end{cases} \tag{1.2}$$

où $p \in]1, +\infty[$, Ω et D sont deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ à frontières assez regulières tels que $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et Ω convexe. Ce problème est lié à la théorie des grandes deviations dans certains processus de diffusion de Markov.
Signalons que le problème de Cauchy-Dirichlet associé à (1.2) a été déjà étudié par M.G.Crandall, P.L.Lions et P.E.Souganidis. A l'aide de propriétés sur les semi-groupes qui préservent la monotonie, ils ont prouvé dans [**28**], l'existence d'une borne universelle pour les solutions positives du problème de Cauchy-Dirichlet lorsque $p > 1$ et μ_0 est une fonction continue positive qui s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Cette estimation leur a permis de démontrer que le problème de Cauchy-Dirichlet homogène avec condition initiale $\mu_0 = +\infty$ sur un ouvert $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et $\mu_0 = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ admet une unique solution positive.
Le Théorème IV.5 nous complète les résultats de [**28**], en obtenant l'existence de solutions positives pour le problème aux limites (1.2) et l'unicité seulement lorsque $p \in]1, 2[$. Les estimations du gradient obtenues dans le Théorème IV.2 jouent un rôle essentiel dans la preuve de l'existence des solutions.
Fixons d'abord quelques notations :
Soit u une fonction de $C(\overline{Q_\infty})$. Pour tout $t \geq 0$ notons par :

$$M(t) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(t,x) \tag{1.3}$$

et

$$m(t) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(t,x), \tag{1.4}$$

Dans le Théorème 1.1 ci-dessous on démontre l'existence et l'unicité des solutions du problème (1.1) pour tout $p > 0$, lorsque Ω est un ouvert borné, convexe, à frontière assez régulière et la donnée initiale $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$. On établit aussi des estimations sur le gradient de la solution u du problème (1.1), en fonction de $m(t)$ et $M(t)$, de l'exposent p et de la donnée initiale μ_0. Ces estimations seront très utiles dans la preuve du Théorème IV.3.

Voici les principaux résultats :

Théorème IV.1. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, Ω un ouvert convexe et borné, $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$, et $p > 0$. Alors le problème (1.1) admet une unique solution*

$$u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$$

pour tout $T > 0$ et $\tau \in]0,T[$. De plus cette solution vérifie :

$$t \to M(t) \text{ est une fonction décroissante sur } \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

$$t \to m(t) \quad \text{est une fonction croissante sur } \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} (M(s) - m(s))(t-s)^{-\frac{1}{2}} \text{ pour tout } t > s \geq 0, \tag{1.7}$$

et si $p \neq 1$

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \leq \left(\frac{\max\{p,2\}}{p|1-p|}\right)^{1/p} (M(s) - m(s))^{1/p}(t-s)^{-1/p} \text{ pour tout } t > s \geq 0. \tag{1.8}$$

La preuve utilise une technique due à S.N. Bernstein. Cette méthode a été utilisée dans [**13, 28, 39**] et [**56**], pour démontrer des estimations analogues à (1.7) et (1.8) pour le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$.
Cette technique a été utilisée aussi par Ph. Benilan [**16**] afin d'obtenir des estimations tres fines pour les solutions de " l'équation des milieux poreux".
Dans le résultat suivant on donne des estimations sur le gradient des solutions du problème (1.1) lorsque $a < 0$, $p > 1$ et la donnée initiale μ_0 est une fonction continue et positive. Ainsi on trouve une borne universelle pour le gradient de la solution, estimation qui va être très utile dans la preuve du Théorème IV.5.

Théorème IV.2. *Soient Ω un ouvert convexe et borné, $a < 0$ et $p > 1$. Soient $\mu_0 \in C^+(\overline{\Omega})$, et u l'unique solution du problème (1.1) donnée par le Théorème IV.1. Alors on a les estimations suivantes :*

$$\|\nabla u^{(p-1)/p}(t)\|_\infty \leq C(p,\Omega)\|u_0\|_1^{(p-1)/p} t^{-(p(N+1)-N)/2p}, \tag{1.9}$$

et

$$\|\nabla u^{(p-1)/p}(t)\|_\infty \leq |a|^{-1/p} \frac{(p-1)^{(p-1)/p}}{p} t^{-1/p}. \tag{1.10}$$

Des estimations analogues ont été obtenues pour le gradient de la solution du problème de Cauchy dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$ et $a < 0$, (voir [**13**]). Notre preuve suit les mêmes arguments qui sont basés sur une technique due a S.N. Bernstein. Signalons qu'en général les estimations (1.9) et (1.10) ne sont pas vérifiées par la solution du problème de Cauchy-Dirichlet (voir la

Remarque IV.7 ci-dessous).

Le résultat suivant concerne le comportement asymptotique des solutions du problème (1.1).

Théorème IV.3. *Soient $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, Ω un ouvert convexe et borné et $p > 0$. Soient $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ et u la solution du problème (1.1). Alors :*

i) Si $p \in]0,1[$, il y a extinction en temps fini du gradient de la solution u, c'est à dire : il existe $T^* \in [0,+\infty[$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u(t,x) \equiv c \text{ pour tout } t \geq T^* \text{ et } x \in \overline{\Omega},$$

ii) Si $p \in [1,+\infty[$, alors la solution $u(t,\cdot)$ converge uniformément sur $\overline{\Omega}$ vers une constante lorsque $t \to \infty$. De plus le taux de convergence est donné par :

$$M(t) - m(t) \leq \left(\frac{8f(t/2)}{t^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \forall\ t > 0,$$

f étant donné par (5.22) et γ par (5.2).

Remarque IV.1. *D'après (5.22) on a :*

$$\left(\frac{8f(t/2)}{t^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \asymp \begin{cases} C_1 t^{-\frac{2}{\gamma}} e^{-C_2 t} & si \quad p = 1, \\ C_3 t^{-\frac{\alpha+1}{\gamma(\alpha-1)}} & si \quad p > 1. \end{cases}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes positives qui dépendent de p, N, γ, et γ et α sont données par (5.2) et (5.5).

La démonstration utilise de manière essentielle les estimations (1.7) et (1.8). La preuve est presque analogue à celle développée dans [**12**] pour obtenir le comportement asymptotique des solution du problème de Cauchy dans le cas de l'espace entier $\mathbb{R}^N$ et lorsque la donnée initiale est une fonction continue périodique.

Remarque IV.2. *Le Théorème IV.3 est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, alors que dans* [**11**] *et* [**12**] *le résultat n'est prouvé que lorsque $a < 0$.*

Remarque IV.3. *Lorsque $p \in]0,2[$, l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1), ont été démontrées dans* [**29**] *pour des données initiales moins régulières, en utilisant un théorème du point fixe.*

Plus précisément on a :

Théorème IV.4.

i) Si $p \in]0,1[$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et μ_0 est une mesure de Radon bornée, alors le problème (1.1) admet au moins une solution faible globale u telle que pour tout $T > 0$ et $\tau \in]0,T[$:

$$u \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T; W^{1,1}(\Omega)) \cap C^{1+\delta/2, 2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$$

et

$$u(t) = S(t)\mu_0 + a \int_0^t S(t-s)|\nabla u(s)|^p \, ds, \quad t \in]0,T[.$$

De plus si Ω est un ouvert convexe cette solution est unique dans les deux cas suivants :

a) Si $p \in]0, \frac{2}{N+1}]$ et $\mu_0 \in \mathcal{M}_b(\Omega)$,

b) Si $p \in]\frac{2}{N+1}, 1[$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$ avec $q > \frac{pN}{2-p}$,

ii) Si $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et μ_0 est une mesure de Radon bornée, le problème (1.1) admet une unique solution faible globale u vérifiant :

$$u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$$

pour tout $T > 0$ et $\tau \in]0,T[$.

iii) Si $p \in [\frac{N+2}{N+1}, 2[$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$ alors le problème (1.1) admet une unique solution faible et globale :

$$u \in C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,pq}(\Omega)) \cap C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$$

pour tout $T > 0$ et $\tau \in]0,T[$.

Le corollaire suivant s'est déduit des Théorème IV.3 et Théorème IV.4 ci-dessus.

Corollaire IV.1. *Soit Ω un ouvert convexe, borné et à frontière assez régulière et $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Alors :*

i) Si $p \in]0,1[$ et μ_0 est une mesure de Radon bornée, il y a extinction en temps fini du gradient de toute solution faible u du problème (1.1).

ii) La solution faible $u(t,\cdot)$ du problème (1.1) converge uniformément sur $\overline{\Omega}$, vers une constante $c \in \mathbb{R}$, lorsque $t \to \infty$ dans les deux cas suivants :

a) $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$ et μ_0 est une mesure de Radon bornée,

b) $p \in [\frac{N+2}{N+1}, 2[$ et $\mu_0 \in L^q(\Omega)$, $q > q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$.

Dans la suite on analyse le problème aux limites (1.2) qui est lié à la théorie des grandes déviations. Rappelons que ce problème avec une condition au bord de type Dirichlet homogène, a été étudié dans [**28**], lorsque $p > 1$ et $a < 0$. Il convient alors d'introduire d'abord la définition suivante :

Définition IV.1. *Une solution faible du problème (1.2) est une fonction positive $u \in C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}})$ qui vérifie pour tout $0 < \tau < T < \infty$:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \text{ dans } \ Q_{\tau,T}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\tau,T}, \end{cases}, \tag{1.11}$$

$$\lim_{t \searrow 0} u(t,\cdot) = 0 \text{ uniformément sur tout compact de } \ \overline{\Omega} \setminus \overline{D} \tag{1.12}$$

et

$$\lim_{t \searrow 0} u(t,\cdot) = +\infty \text{ uniformément sur tout compact de } \ D. \tag{1.13}$$

Théorème IV.5. *Supposons $p \in]1, +\infty[$. Soit Ω, D deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ à frontières assez régulières tels que Ω soit convexe et $\overline{D} \subset \Omega$. Alors le problème (1.2) admet au moins une solution au sens de la Définition IV.1.*

De plus cette solution est unique si $p \in]1,2[$

On démontrera l'existence locale en utilisant quelques propriétés des semi-groupes qui préservent la monotonie. Ces propriétés sont bien développées dans [**28**]. On utilisera aussi de façon essentielle la convexité du domaine Ω, plus précisément les estimations du gradient de la solution de (1.1) obtenues dans le Théorème IV.2. Lorsque $1 < p < 2$, dans [**28**], l'unicité des solutions du problème de Cauchy-Dirichlet n'est prouvée que si Ω et D sont étoilés par rapport au même point. On observera que notre preuve de l'unicité des solutions faibles est valable pour tout ouvert Ω à frontière assez régulière, aussi bien pour le problème aux limites avec une condition de Neumann homogène que pour le problème aux limites avec une condition de Dirichlet homogène.

2. Résultats préliminaires

Donnons d'abord quelques résultats qui seront utilisés dans les preuves des théorèmes énoncés ci-dessus.

Lemme IV.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et à frontière assez régulière et $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$. Notons par $m = \min_{x\in\Omega} \mu_0(x)$ et $M = \max_{x\in\Omega} \mu_0(x)$.*
Alors il existe une suite $(u_0^n)_{n\geq 1} \subset C^{3+\beta}(\overline{\Omega}), (\beta \in]0,1[)$ telle que :

$$u_0^n \searrow \mu_0 \text{ lorsque } n \to \infty, \tag{2.1}$$

$$m + \frac{1}{2^{n+1}} \leq u_0^n \leq M + \frac{1}{2^{n-1}}, \ \forall n \geq 1, \tag{2.2}$$

et

$$\frac{\partial u_0^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Démonstration:
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $v_0^n = \mu_0 + \frac{1}{2^n}$, alors $(v_0^n)_n \subset C(\overline{\Omega})$. Pour $t > 0$ posons :

$$v^n(t) = S(t)v_0^n,$$

où $(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de la chaleur dans $L^q(\Omega), q \geq 1$, pour le problème de Neumann homogène.
Alors $v^n \in C(\overline{Q_\infty}) \cap C^\infty(\overline{Q_{\tau,\infty}})$ pour tout $\tau \in]0,\infty[$, de plus :

$$\frac{\partial v^n}{\partial \nu}(t,x) = 0 \text{ pour tout } (t,x) \in \Gamma_T.$$

Puisque $v^n \in C(\overline{Q_\infty})$, il existe t_n assez proche de 0 tel que

$$|v^n(t_n,x) - v_0^n(x)| < \frac{1}{2^{n+2}} \ \forall x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Posons :

$$u_0^n(x) = v^n(t_n,x).$$

Alors $u_0^n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et vérifie la condition (2.3). De plus grâce à (2.4) on a d'une part :

$$u_0^n - \mu_0 = (u_0^n - v_0^n) + (v_0^n - \mu_0) \leq \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

et d'autre part :

$$u_0^n - \mu_0 = (u_0^n - v_0^n) + (v_0^n - \mu_0) \geq -\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

D'où on tire (2.2).

Pour montrer que $(u_0^n)_n$ est une suite décroissante, il suffit de calculer :

$$u_0^n - u_0^{n+1} = (u_0^n - v_0^n) + (v_0^n - v_0^{n+1}) + (v_0^{n+1} - u_0^{n+1}) \geq -\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+3}} > 0$$

Enfin, on obtient (2.1). □

Lemme IV.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe et borné et q un nombre réel tel que $q > N$. Compte tenu de l'injection de Sobolev $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, pour tout $u \in W^{1,q}(\Omega)$, on peut poser :*

$$M_u = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \quad \text{et } m_u = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x),$$

alors :

$$M_u - m_u \leq C \|\nabla u\|_q, \tag{2.5}$$

où la constante C ne dépend que de q, N et Ω.

Démonstration:

La preuve est analogue à celles des Lemmes 7.16 et 7.17 dans [**31**].

Ω étant supposé convexe, pour tout $x, y \in \Omega$ on a $(1-t)x + ty \in \Omega$ et

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \nabla u((1-t)x + ty) \cdot (x - y)\, dt,$$

d'où :

$$u(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\, dy = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_0^1 \nabla u((1-t)x + ty) \cdot (x - y)\, dt\, dy.$$

Notons par :

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\, dy$$

et

$$d = diam(\Omega).$$

Alors

$$|u(x) - u_\Omega| \leq \frac{d}{|\Omega|} \int_\Omega \int_0^1 |\nabla u((1-t)x + ty)| dt\, dy$$

$$\leq \frac{d}{|\Omega|} \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u((1-t)x + ty)|\, dy\, dt.$$

On fait le changement de variable $(1-t)x + ty = \zeta$ et, pour tout $t \in [0,1]$, on note par Ω_t l'ensemble :

$$\Omega_t = \{\zeta = (1-t)x + ty; y \in \Omega\} \subset \Omega,$$

alors :

$$|u(x) - u_\Omega| \leq \frac{d}{|\Omega|} \int_0^1 \int_{\Omega_t} |\nabla u(\zeta)| t^{-N} dt\, d\zeta.$$

L'inégalité de Hölder appliquée avec $q > N$ donne :

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_\Omega| &\leq \frac{d}{|\Omega|} \int_0^1 \left[\int_\Omega |\nabla u(\zeta)|^q \, d\zeta \right]^{1/q} |\Omega_t|^{1-1/q} t^{-N} \, dt \\
&\leq \frac{d}{|\Omega|} \|\nabla u\|_q \cdot \int_0^1 t^{N(1-1/q)} t^{-N} |\Omega|^{1-1/q} \, dt \\
&\leq \frac{d}{|\Omega|^{1/q}} \|\nabla u\|_q \cdot \int_0^1 t^{-N/q} \, dt \\
&\leq \frac{d}{|\Omega|^{1/q}} \frac{q}{q-N} \|\nabla u\|_q.
\end{aligned}$$

Finalement pour tout $x, y \in \Omega$ on obtient :

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_\Omega| + |u_\Omega - u(y)| \leq \frac{2d}{|\Omega|^{1/q}} \cdot \frac{q}{q-N} \|\nabla u\|_q,$$

d'où on tire la relation (2.5). Ainsi, le Lemme IV.2 est prouvé. □

Lemme IV.3. *Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ soit un ouvert convexe et borné et soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} |_{\partial\Omega} = 0$. Alors :*

$$\frac{\partial}{\partial \nu} |\nabla u|^2 \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Pour la preuve de ce lemme voir le Lemme I.1, p. 350 dans [**56**].

Le lemme qui suit est un Principe de Comparaison pour des équations paraboliques non-linéaires. Ce résultat généralise le Principe de Comparaison dans [**44**] à un cas où les fonctions sont un peu moins régulières.

Lemme IV.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe, borné et à frontière assez régulière et soit $\mathcal{N}$, l'opérateur parabolique non-linéaire, défini par :*

$$\mathcal{N}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f(t, x, u, \nabla u)$$

où f est une fonction uniformément continue qui vérifie :
pour tout $r > 0$ il existe $L_r > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}
|f(t, x, y_1, v_1) - f(t, x, y_2, v_2)| \leq L_r(|y_1 - y_2| + |v_1 - v_2|), \\
\text{pour tout } (t, x) \in Q_T \text{ et } \ y_1, y_2 \in]-r, r[, \ v_1, v_2 \in B_r(0),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

où :

$$B_r(0) = \{\xi \in \mathbb{R}^N; \ |\xi| < r\}.$$

Soient u^1 et u^2 deux fonctions dans $C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$, $\tau \in]0,T[$ telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{N}(u^1)(t,x) \leq 0 \leq \mathcal{N}(u^2)(t,x) \text{ pour tout } (t,x) \in Q_T \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial \nu} \leq \dfrac{\partial u^2}{\partial \nu} \text{ sur } \Gamma_T \\ u^1(0,x) \leq u^2(0,x) \text{ pour tout } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

Alors

$$u^1 \leq u^2 \text{ dans } Q_T.$$

On commence par faire la remarque suivante qui sera très utile dans la suite :

Remarque IV.4. *Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine. On suppose que Ω est convexe, à frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Soit $\nu(x)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ en x. Alors :*

$$x \cdot \nu(x) > 0, \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Démonstration du lemme IV.4

Supposons d'abord que Ω est un ouvert convexe qui contient l'origine et notons par :

$$R = \max\{ \sup_{(t,x)\in Q_T} |u_1(t,x)|; \sup_{(t,x)\in Q_T} |\nabla u_1|(t,x); \sup_{(t,x)\in Q_T} |u_2(t,x)|; \sup_{(t,x)\in Q_T} |\nabla u_2|(t,x)\}.$$

Alors, d'après (2.6), il existe $L_R > 0$ tel que :

$$|f(t,x,u_1,\nabla u_1) - f(t,x,u_2,\nabla u_2)| \leq L_R(|u_1-u_2| + |\nabla u_1 - \nabla u_2|), \text{ pour tout } (t,x) \in Q_T. \tag{2.8}$$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$ notons par :

$$z(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x) - \varepsilon e^{Ct}(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}},$$

où $C = 2L_R + N$. Alors, d'après la régularité de u_1 et u_2 on a :

$$z \in C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T).$$

Pour tout $t \in [0,T]$ posons :

$$\phi(t) = \max\{\sup_{x\in\Omega} z(t,x); 0\},$$

alors $\varphi \in C([0,T])$, et pour tout $t \in]0,T]$ on peut définir :

$$\overline{\varphi'}(t) = \limsup_{h \searrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t-h)}{h}.$$

Pour montrer que :

$$z \leq 0 \text{ dans } Q_T, \tag{2.9}$$

il suffit de prouver que :

$$\overline{\varphi'}(t) \leq L_R \varphi(t) \text{ pour tout } t \in]0,T[. \tag{2.10}$$

En effet, comme $\varphi(0) = 0$ et $\varphi \geq 0$, on peut appliquer le Théorème 4.1 dans [**42**] à l'inégalité différentielle (2.10) et on déduit $\varphi \equiv 0$. Ce qui implique (2.9).

Preuve de (2.10) :

Soit $t \in]0,T]$.

Si $\varphi(t) = 0$ alors (2.10) est vérifié, car, dans ce cas $\overline{\varphi'}(t) \leq 0$.

Si $\varphi(t) > 0$, alors il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que :

$$z(t,x_0) = \varphi(t) > 0.$$

Montrons que $x_0 \notin \partial\Omega$. En effet, si $x_0 \in \partial\Omega$, d'une part :

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(t,x_0) = \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{z(t,x_0+\lambda\nu) - z(t,x_0)}{\lambda} \geq 0.$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse (2.7) et à la Remarque IV.4 on a :

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \varepsilon e^{Ct} \frac{x\cdot\nu}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq -\varepsilon e^{Ct} \frac{x\cdot\nu}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} < 0 \text{ sur } \Gamma_T.$$

Donc, il y a une contradiction. Par conséquent, $x_0 \in \Omega$ est un point de maximum positif pour la fonction $\Omega \ni x \to z(t,x)$ et

$$\nabla z(t,x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta z(t,x_0) \leq 0. \tag{2.11}$$

Puisque, pour $h > 0$ on a $z(t-h,x_0) \leq \varphi(t-h)$, on obtient d'une part :

$$\overline{\varphi'}(t) \leq \lim_{h \nearrow 0} \frac{z(t,x_0) - z(t-h,x_0)}{h} = \frac{\partial z}{\partial t}(t,x_0). \tag{2.12}$$

D'autre part, grâce à (2.8) et (2.11), au point (t,x_0), on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial t}(t,x_0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x_0) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x_0) - \varepsilon C e^{Ct}(1+|x_0|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Delta(u_1-u_2)(t,x_0) + f(t,x_0,u_1,\nabla u_1) - f(t,x_0,u_2,\nabla u_2) - \varepsilon C e^{Ct}(1+|x_0|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Delta z(t,x_0) + \varepsilon e^{Ct} \frac{(N+(N-1)|x_0|^2)}{(1+|x_0|^2)^{3/2}} + L_R|u_1-u_2| + L_R|\nabla u_1 - \nabla u_2| - \varepsilon C e^{Ct}(1+|x_0|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon e^{Ct}\left(N + L_R \frac{|x_0|}{(1+|x_0|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + L_R z(t,x_0) - \varepsilon(L_R+N)e^{Ct}(1+|x_0|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq L_R z(t,x_0) + \varepsilon(N+L_R)e^{Ct} - \varepsilon(N+L_R)e^{Ct}(1+|x_0|^2)^{\frac{1}{2}} \leq L_R\varphi(t).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

On rappelle qu'on a choisi $C = 2L_R + N$ et que $z(t,x_0) = \varphi(t)$.
En regroupant (2.12) et (2.13) on déduit (2.10). Ainsi la preuve de (2.9) est achevée. En faisant tendre ε vers 0 dans (2.9) on obtient

$$u_1 \leq u_2 \text{ dans } \ Q_T.$$

Remarque IV.5. *Si Ω ne contient pas l'origine, vu que la première équation de (1.1) est invariante par translation, on peut ramener l'étude du problème sur $\Omega_{x_0} = \Omega - x_0$, où $x_0 \in \Omega$.*

Cette dernière remarque achève la preuve du Lemme IV.4. □

Dans la suite on note par $G :]0,+\infty[\times\Omega\times\Omega$ le noyau de la chaleur avec une condition de type Neumann homogène au bord, c'est à dire, pour tout $y \in \Omega$ fixé, $G(\cdot,\cdot,y)$ vérifie :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,x,y) = \Delta_x G(t,x,y) \ \text{ dans } \ Q_\infty, \\
\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(t,x,y) = 0 \quad \text{sur } \ \Gamma_\infty, \\
G(t,x,y) \underset{t\to 0}{\rightharpoonup} \delta_y(x) \quad \text{dans } \mathcal{M}_b(\Omega) \ \text{ faible.}
\end{cases}$$

Plusieurs propriétés de ce noyau ont été établies dans [**32, 38**] parmi lesquelles le résultat suivant que nous utiliserons par la suite.

Lemme IV.5. [**32, 38**] *Soit Ω un ouvert borné et à frontière assez régulière et G le noyau de la chaleur avec une condition au bord homogène de type Neumann. Alors pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, et pour tout $T > 0$, il existe deux constantes $c > 0$ et $C(T) > 0$ telles que G satisfait l'inégalité :*

$$|D_x^\alpha D_t^l G(t,x,y)| \leq C(T) t^{-(\frac{N}{2}+\frac{|\alpha|}{2}+l)} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{2.14}$$

pour tout $(t,x,y) \in]0,T[\times\Omega\times\Omega$.

Soit, $\mu_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $S(t)\mu_0$ la solution de l'équation de la chaleur avec une donnée initiale μ_0 et une condition au bord homogène de type Neumann. Alors :

$$S(t)\mu_0(x) = \int_\Omega G(t,x,y)\mu_0(y)\,dy.$$

Grâce à (2.14), pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et pour tout $T > 0$ on a l'estimation :

$$\|D_x^\alpha D_t^l S(t)\mu_0\|_\infty \leq C(T)\|\mu_0\|_\infty t^{-(\frac{|\alpha|}{2}+l)}, \tag{2.15}$$

où $C(T)$ est une constante positive.

3. Preuve du Théorème IV.1

On démontre le théorème lorsque $a > 0$. Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et on observe que si v est la solution du problème (1.1) avec la donnée initiale $-\mu_0$ à la place de μ_0 et $-a$ à la place de a, alors $u = -v$ est la solution du problème (1.1) correspondant aux données a et μ_0.

Soit $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ et posons $M(0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \mu_0(x)$ et $m(0) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \mu_0(x)$. Alors, d'après le Lemme IV.1, il existe une suite de fonctions $(u_0^n)_{n\geq 1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0^n \searrow \mu_0 \\ \dfrac{\partial u_0^n}{\partial \nu} = 0 \\ m(0) + \frac{1}{n} \leq u_0^n \leq M(0) + \frac{2}{n}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Comme dans [**13**] et [**39**] on introduit une régularisation de la fonction $\xi \to a|\xi|^p$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on considère la fonction $F_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} a(\varepsilon + |\xi|^2)^{p/2} & \text{si} \quad 0 < p \leq 1, \\ a(-\varepsilon + |\xi|^2)(\varepsilon + |\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}} & \text{si} \quad 1 < p < 2, \\ a|\xi|^p & \text{si} \quad p \geq 2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $\rho > 0$. Montrons que pour tout $\xi_1, \xi_2 \in B_\rho(0)$ et $\varepsilon \in]0,1[$:

$$|F_\varepsilon(\xi_1) - F_\varepsilon(\xi_2)| \leq K\rho^{\max\{p-1,0\}}|\xi_1 - \xi_2|^{\min\{p,1\}}, \tag{3.3}$$

où K est une constante qui ne dépend que de p et a.

On utilise le théorème des accroissements finis, et on distinguera les trois cas ci-dessous : Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que :

Cas $0 < p \leq 1$:

$$|F_\varepsilon(\xi_1) - F_\varepsilon(\xi_2)| = a[(\varepsilon + |\xi_1|^2)^{p/2} - (\varepsilon + |\xi_2|^2)^{p/2}] \leq a[(\varepsilon + |\xi_1|^2)^{1/2} - (\varepsilon + |\xi_2|^2)^{1/2}]^p$$
$$\leq a\left(\frac{|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|}{(\varepsilon + |\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|^2)^{1/2}}|\xi_1 - \xi_2|\right)^p \leq a|\xi_1 - \xi_2|^p.$$

Cas $1 < p < 2$:

$$|F_\varepsilon(\xi_1) - F_\varepsilon(\xi_2)| \leq |\nabla F_\varepsilon(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2)|$$
$$\leq a\frac{2|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|(2\varepsilon + \frac{p}{2}(|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|^2 - \varepsilon))}{(\varepsilon + |\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|^2)^{2-p/2}}|\xi_1 - \xi_2|$$
$$\leq 4a|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|^{p-1}|\xi_1 - \xi_2| \leq 4a\rho^{p-1}|\xi_1 - \xi_2|.$$

Cas $p \geq 2$:

$$|F_\varepsilon(\xi_1) - F_\varepsilon(\xi_2)| \leq |\nabla F_\varepsilon(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2)||\xi_1 - \xi_2|$$
$$\leq ap \cdot |\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|^{p-1}|\xi_1 - \xi_2| \leq ap\rho^{p-1}|\xi_1 - \xi_2|.$$

De plus, $F_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ vérifie les inégalités :

$$(\nabla F_\varepsilon)(\xi) \cdot \xi - F_\varepsilon(\xi) \leq a(p-1)|\xi|^p \quad \text{si } 0 < p \leq 1 \tag{3.4}$$
$$(\nabla F_\varepsilon)(\xi) \cdot \xi - F_\varepsilon(\xi) \geq a(p-1)|\xi|^p \quad \text{si} \quad p > 1 \tag{3.5}$$

En effet, lorsque $0 < p \leq 1$ on a :

$$(\nabla F_\varepsilon)(\xi) \cdot \xi - F_\varepsilon(\xi) = a\frac{p|\xi|^2 - (\varepsilon + |\xi|^2)}{(\varepsilon + |\xi|^2)^{1-p/2}} = a\frac{(p-1)|\xi|^2 - \varepsilon}{(\varepsilon + |\xi|^2)^{1-p/2}}$$
$$= -a\frac{\varepsilon + (1-p)|\xi|^2}{(\varepsilon + |\xi|^2)^{1-p/2}} = -a\frac{\varepsilon + (1-p)|\xi|^2}{(\varepsilon + |\xi|^2)} \cdot (\varepsilon + |\xi|^2)^{p/2}$$
$$\leq -a\frac{(1-p)(\varepsilon + |\xi|^2)}{\varepsilon + |\xi|^2} \cdot (\varepsilon + |\xi|^2)^{p/2} \leq -a(1-p)(\varepsilon + |\xi|^2)^{p/2} \leq a(p-1)|\xi|^p,$$

si $1 < p < 2$ alors :

$$(\nabla F_\varepsilon)(\xi) \cdot \xi - F_\varepsilon(\xi) = a\frac{(p-1)(\varepsilon + |\xi|^2)^2 + 3\varepsilon(2-p)|\xi|^2 + \varepsilon^2(2-p)}{(\varepsilon + |\xi|^2)^{2-p/2}}$$
$$\geq a(p-1)(\varepsilon + |\xi|^2)^{p/2} \geq a(p-1)|\xi|^p,$$

finalement, si $p \geq 2$ on a :

$$(\nabla F_\varepsilon)(\xi) \cdot \xi - F_\varepsilon(\xi) = ap|\xi|^{p-2}\xi \cdot \xi - a|\xi|^p = a(p-1)|\xi|^p.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\rho_n = \sup_{x \in \overline{\Omega}}\{|\nabla u_0^n|(x)\}. \tag{3.6}$$

Alors, il existe $\delta \in]0,1[$ et une fonction $F_{n,\varepsilon}$, telle que :

$$F_{n,\varepsilon} \in C^{2+\delta}(\mathbb{R}^N), \tag{3.7}$$

$$F_{n,\varepsilon}(\xi) = F_\varepsilon(\xi) \quad \text{si} \quad \xi \in B_{\rho_n+1}(0), \tag{3.8}$$
$$F_{n,\varepsilon}(\xi) = \nu_n(1 + |\xi|^2) \quad \text{si} \quad |\xi| \geq \rho_n + 2, \tag{3.9}$$
$$|F_{n,\varepsilon}(\xi)| \leq \nu_n(1 + |\xi|^2) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{3.10}$$

où ν_n est une constante qui ne dépend que de ρ_n et p.
Avec la fonction $F_{n,\varepsilon}$ introduite ci-dessus on considère le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F_{n,\varepsilon}(\nabla u) \text{ dans } Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0^n \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Grâce à la régularité de u_0^n et aux relations (3.1), (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) on peut appliquer le Théorème V.7.4 dans [**51**] au problème (3.11). Ainsi, il existe $u^{n,\varepsilon} \in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})$ avec $\alpha \in]0,1[$, unique solution de (3.11). Posons :

$$f_{n,\varepsilon}(t,x) = F_{n,\varepsilon}(\nabla u^{n,\varepsilon})(t,x). \tag{3.12}$$

Alors, de la régularité de $F_{n,\varepsilon}$ et $u^{n,\varepsilon}$ on tire :

$$f_{n,\varepsilon} \in C^{\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha}(\overline{Q_T})$$

et $u^{n,\varepsilon}$ vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{n,\varepsilon}}{\partial t} - \Delta u^{n,\varepsilon} = f_{n,\varepsilon} \text{ dans } Q_T, \\ \dfrac{\partial u^{n,\varepsilon}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T, \\ u^{n,\varepsilon}(0,\cdot) = u_0^n \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Grâce au théorème sur la régularité locale des solutions du problème aux limites (3.13) (cf. par exemple le Théorème III.12.2 dans [**51**]), on obtient :

$$u^{n,\varepsilon} \in C_{loc}^{\frac{3+\alpha}{2},3+\alpha}(Q_T) \cap C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T}).$$

Démontrons que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$|\nabla u^{n,\varepsilon}(t,x)| \leq \rho_n \quad \forall\ (t,x) \in Q_T, \tag{3.14}$$

où ρ_n est donnée par (3.6).
Pour ce faire, on utilise une technique due à S.N. Bernstein. On introduit d'abord l'opérateur parabolique défini sur $C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$ par :

$$\mathcal{L}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + b(t,x) \cdot \nabla v,$$

où $b \in [L^\infty(Q_T)]^N$ est donné par :

$$b(t,x) = -(\nabla F_{n,\varepsilon})(\nabla u^{n,\varepsilon})(t,x) \text{ dans } Q_T.$$

Posons $w = |\nabla u^{n,\varepsilon}|^2$, alors $w \in C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$ et vérifie :

$$\mathcal{L}(w) = -2 \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 u^{n,\varepsilon}}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \leq 0,$$

et grâce au Lemme IV.3 et aux relations (3.1) et (3.6) on a :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_T \\ &w(0,x) \leq \rho_n^2 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

Ainsi, par le Principe de Comparaison, (Lemme IV.4), on obtient :

$$w \leq \rho_n^2 \text{ dans } Q_T$$

et la relation (3.14) est démontrée.

En regroupant (3.8), (3.11) et (3.14), on obtient finalement que $u^{n,\varepsilon} \in C_{loc}^{\frac{3+\alpha}{2},3+\alpha}(Q_T) \cap C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})$ est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F_\varepsilon(\nabla u) \text{ dans } Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T, \\ u(0,\cdot) = u_0^n \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

On observe que, dans (3.15), F_ε est indépendante de u. Pour $\varepsilon > 0$ et n entier positifon pose :

$$m_{n,\varepsilon} = m(0) + \frac{1}{n} - a\varepsilon^{p/2} \cdot T \tag{3.16}$$

et

$$M_{n,\varepsilon} = M(0) + \frac{2}{n} + a\varepsilon^{p/2} \cdot T. \tag{3.17}$$

Dans la proposition suivante on donne des estimations qui nous permettront de faire le passage à la limite dans (3.15), lorsque ε tend vers 0 :

Proposition IV.1. *Pour tout $p \in]0,+\infty[$, la solution $u^{n,\varepsilon} \in C_{loc}^{\frac{3+\alpha}{2},3+\alpha}(Q_T) \cap C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q_T})$ du problème (3.15) vérifie :*

$$m_{n,\varepsilon} \leq u^{n,\varepsilon} \leq M_{n,\varepsilon} \quad \textit{dans} \quad Q_T, \tag{3.18}$$

$$\|\nabla u^{n,\varepsilon}(t)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} (M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \textit{ pour tout } t \in]0,T[, \tag{3.19}$$

et, si $p \neq 1$:

$$\|\nabla u^{n,\varepsilon}(t)\|_\infty \leq \left(\frac{\max\{p,2\}}{p|1-p|}\right)^{1/p} (M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n})^{1/p} \cdot t^{-1/p} \textit{ pour tout } t \in]0,T[. \tag{3.20}$$

Démonstration:

La double inégalité (3.18) est une simple conséquence du Lemme IV.4.

Pour démontrer (3.19) et (3.20) on utilise une technique de Bernstein, analogue à celle utilisée dans [**13**],[**39**] et [**56**].

On introduit la fonction w suivante définie sur Q_T par :

$$w = \frac{|\nabla u^{n,\varepsilon}|^2}{\theta(u^{n,\varepsilon})}. \tag{3.21}$$

où θ est une fonction strictement positive de classe $C^2([m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}])$ et qui sera fixée ultérieurement en fonction de l'exposant p.

Alors, d'après la régularité de la fonction $u^{n,\varepsilon}$ on a :

$$w \in C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T).$$

De plus :

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\dfrac{\partial |\nabla u^{n,\varepsilon}|^2}{\partial \nu}\theta(u^{n,\varepsilon}) - |\nabla u^{n,\varepsilon}|^2 \cdot \theta'(u^{n,\varepsilon})\dfrac{\partial u^{n,\varepsilon}}{\partial \nu}}{[\theta(u^{n,\varepsilon})]^2} = \frac{\dfrac{\partial |\nabla u^{n,\varepsilon}|^2}{\partial \nu}}{[\theta(u^{n,\varepsilon})]}, \text{ sur } \Gamma_T.$$

Comme θ est supposée positive, cette dernière relation combinée avec le Lemme IV.3 donnent :

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_T. \tag{3.22}$$

Notons par $\mathcal{N}$ l'opérateur parabolique semi-linéaire défini sur $C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$ par :

$$\mathcal{N}(v) = \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v - b(t,x) \cdot \nabla v - c(t,x)v^2 - d(t,x)v^{1+p/2}$$

où

$$b(t,x) = (\nabla F_\varepsilon)(\nabla u^{n,\varepsilon})(t,x) + \frac{2\theta'(u^{n,\varepsilon})\nabla u^{n,\varepsilon}(t,x)}{\theta(u^{n,\varepsilon})(t,x)},$$
$$c(t,x) = \theta''(u^{n,\varepsilon})(t,x),$$

et

$$d(t,x) = a(p-1)\theta^{\frac{p-2}{2}}(u^{n,\varepsilon})(t,x)\theta'(u^{n,\varepsilon})(t,x). \tag{3.23}$$

La fonction w étant donnée par (3.21) on a :

$$\mathcal{N}(w) = -\frac{2}{\theta(u^{n,\varepsilon})}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 u^{n,\varepsilon}}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\theta'(u^{n,\varepsilon})}{\theta^2(u^{n,\varepsilon})}[(\nabla F_\varepsilon)(\nabla u^{n,\varepsilon}) \cdot \nabla u^{n,\varepsilon} \tag{3.24}$$
$$-F_\varepsilon(\nabla u^{n,\varepsilon}) - a(p-1)|\nabla u^{n,\varepsilon}|^p]|\nabla u^{n,\varepsilon}|^2.$$

On va distinguer deux cas pour prouver (3.19).

i) Le cas $0 < p \leq 1$. Dans (3.21) on prend la fonction θ comme suit :

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}(M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n})^2 - \frac{1}{2}(M_{n,\varepsilon} - \xi)^2, \quad \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}],$$

où $m_{n,\varepsilon}$ et $M_{n,\varepsilon}$ sont définis par (3.16) et (3.17). Donc θ vérifie :

$$\theta(\xi) \geq \frac{1}{2n^2},$$
$$\theta'(\xi) = M_{n,\varepsilon} - \xi$$
$$\theta''(u) = -1,$$

et on déduit :

$$\theta'(u^{n,\varepsilon}) \geq 0$$

et

$$d(t,x) = a(p-1)\theta^{\frac{p-2}{2}}(u^{n,\varepsilon})(t,x)\theta'(u^{n,\varepsilon})(t,x) \leq 0.$$

En regroupant ces derniers points avec (3.4) et (3.24) on tire :

$$\mathcal{N}(w) \leq 0 \tag{3.25}$$

Compte tenu de (3.6) et (3.13) on a :

$$w(0) = \frac{|\nabla u_0^n|^2}{\theta(u_0^n)} \leq 2\rho_n^2 n^2.$$

L'entier n étant fixé, on considère $\eta > 0$ tel que :

$$w(0) \leq 2\rho_n^2 n^2 \leq \frac{1}{\eta}. \tag{3.26}$$

Notons par v la fonction définie sur Q_T par :

$$v(t,x) = (t+\eta)^{-1}.$$

Comme on est dans le cas $a > 0$ et $p \in]0,1[$ on a :

$$\mathcal{N}(v) = -d(t,x) \cdot (t+\eta)^{-(1+p/2)} \geq 0. \tag{3.27}$$

En regroupant les relations (3.22),(3.25), (3.26) et (3.27) on obtient grâce au Lemme IV.4 :

$$w(t,x) \leq (t+\eta)^{-1} < t^{-1} \quad \text{pour tout } (t,x) \in Q_T$$

d'où, on déduit (3.19) lorsque $p \in]0,1]$.

ii) Le cas $p > 1$. Dans (3.21) on considère la fonction θ suivante :

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}(M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n})^2 - \frac{1}{2}(\xi - m_{n,\varepsilon})^2, \quad \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}],$$

alors on a :

$$\theta(\xi) \geq \frac{1}{2n^2},$$
$$\theta'(\xi) = m_{n,\varepsilon} - \xi$$
$$\theta''(\xi) = -1,$$

et on en déduit :

$$\theta'(u^{n,\varepsilon}) \leq 0,$$

et

$$d(t,x) = a(p-1)\theta^{\frac{p-2}{2}}(u^{n,\varepsilon})(t,x)\theta'(u^{n,\varepsilon})(t,x) \leq 0.$$

En régroupant ces derniers points avec (3.5) et (3.24) on tire :

$$\mathcal{N}(w) \leq 0,$$

et comme précédemment on démontre (3.19) pour $p \geq 1$, en comparant w et v.

On va distinguer trois cas pour prouver (3.20). :
i) Le cas $0 < p < 1$. Dans (3.21) on choisit la fonction θ suivante :

$$\theta(\xi) = (\frac{2}{ap(1-p)})^{2/p}(M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n})^{\frac{2-p}{p}} \cdot (\xi - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n}),\ \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}]$$

Donc

$$\theta(\xi) \geq \left[\frac{2}{anp(1-p)}\right]^{2/p}, \quad \theta'(\xi) \geq 0 \ \text{ et } \ \theta''(\xi) = 0,\ \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}]. \tag{3.28}$$

w étant donné par (3.21), grâce aux relations (3.4) et (3.24) on obtient

$$\mathcal{N}(w) \leq 0 \tag{3.29}$$

Compte tenu de (3.11) et (3.28), on peut choisir $\eta > 0$ tel que :

$$w(0) = \frac{|\nabla u_0^n|^2}{\theta(u_0^n)} \leq 2\rho_n^2 \left[\frac{anp(1-p)}{2}\right]^{2/p} < \frac{1}{\eta^{2/p}}, \tag{3.30}$$

où ρ_n est donné par (3.6).
Soit v la fonction définie sur Q_T par :

$$v(t,x) = (t+\eta)^{-2/p}.$$

d étant défini par (3.23), avec notre choix de θ on a :

$$d(t,x) = -\frac{2}{p}\left(\frac{M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n}}{u - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n}}\right)^{\frac{2-p}{2}} \leq -\frac{2}{p}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{N}(v) = (-d - 2/p)(t+\eta)^{-\frac{p+2}{2}} \geq 0 \tag{3.31}$$

En regroupant les relations (3.22),(3.29),(3.30) et (3.31), on obtient grâce au Lemme IV.4 :

$$w(t,x) \leq (t+\eta)^{2/p} < t^{-2/p} \text{ pour tout } t > 0,$$

et on déduit (3.20), pour $0 < p \leq 1$.

ii) Le cas $1 < p < 2$. Dans (3.21), on choisit la fonction θ suivante :

$$\theta(\xi) = (\frac{2}{ap(p-1)})^{2/p}(M_{n,\varepsilon} - m_{n,\varepsilon} + \frac{1}{n})^{\frac{2-p}{p}}(M_{n,\varepsilon} - \xi + \frac{1}{n}),\ \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}]$$

Donc

$$\theta(\xi) \geq \left[\frac{2}{anp(p-1)}\right]^{2/p},\ \ \theta'(\xi) \leq 0 \ \text{ et } \ \theta''(\xi) = 0,\ \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}]. \tag{3.32}$$

et on obtient (3.20) par les mêmes arguments que précédemment.

iii) Le cas $p \geq 2$. Cette fois ci on démontre (3.20) comme dans les deux cas ci-dessus, en considérant la fonction :

$$\theta(\xi) = [\frac{1}{a(p-1)}(M_{n,\varepsilon} - \xi + \frac{1}{n})]^{2/p},\ \xi \in [m_{n,\varepsilon}, M_{n,\varepsilon}].$$

□

On revient au problème (3.15) et on remarque que la fonction

$$\varepsilon \to F_\varepsilon(\xi) \text{ est croissante si } \ 0 < p \leq 1$$

et

$$\varepsilon \to F_\varepsilon(\xi) \text{ est décroissante si } \ p > 1.$$

Alors, grâce aux relations (3.3) et (3.18) on peut appliquer le Lemme IV.4 au problème (3.15). On obtient que la suite $(u^{n,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est monotone et bornée par rapport à ε et par conséquent, il existe $u^n \in L^\infty(Q_T)$ tel que

$$u^{n,\varepsilon} \nearrow u^n \text{ dans } Q_T \ \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0, \ \text{ si } \ 0 < p \leq 1$$

et

$$u^{n,\varepsilon} \searrow u^n \text{ dans } Q_T \ \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0, \ \text{ si } \ p > 1$$

De plus, grâce aux relations (3.1) et (3.18) les hypothèses du Théorème V.7.2 de [**51**] sont satisfaites et on en déduit que les solutions $u^{n,\varepsilon}$ de (3.15) vérifient :

$$\|u^{n,\varepsilon}\|_{C^{\frac{1+\delta}{2},1+\delta}(Q_T)} \leq C \tag{3.33}$$

où $\delta \in]0,1[$ et C sont des constantes qui dépendent seulement de $m, M, \|u_0^n\|_\Omega^{(2)}$ et Ω. Ainsi, on en déduit que pour tout n, l'ensemble $\{u^{n,\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1\}$ est borné dans l'espace $C^{\frac{1+\delta}{2},1+\delta}(\overline{Q_T})$. Soit la fonction $f_{n,\varepsilon}$ donnée par (3.12), alors grâce à la régularité de F_ε et à (3.33), l'ensemble $\{f_{n,\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1\}$ est borné dans $C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_T})$. Puisque $u^{n,\varepsilon} \in C^{\frac{1+\delta}{2},1+\delta}(\overline{Q_T})$ est solution du problème (3.15), les hypothèses du Théorème IV.5.3 de [**51**] sur la régularité, dans les espaces de Hölder, des solutions d'équations paraboliques, sont vérifiées et on tire :

$$u^{n,\varepsilon} \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_T}),$$

de plus, il existe une constante $C > 0$, indépendante de $\varepsilon \in]0,1[$ tel que :

$$\|u^{n,\varepsilon}\|_{C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_T})} \leq C(\|u_0^n\|_{C^{2+\delta}(\overline{\Omega})} + \|f_{n,\varepsilon}\|_{C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_T})} \leq C_n \tag{3.34}$$

Ainsi, l'ensemble $\{u^{n,\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1\}$ est borné dans $C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_T})$. Comme pour tout $0 \leq \nu < \delta$

$$C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_T}) \hookrightarrow C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_T}),$$

avec injection compacte, on en déduit que l' ensemble $\{u^{n,\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1\}$ est relativement compact dans $C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_T})$ et donc "à une sous-suite près" on a d'une part :

$$u^{n,\varepsilon} \to u^n \text{ dans } C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_T}) \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0 \tag{3.35}$$

D'autre part, comme pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$F_\varepsilon(\xi) \to a|\xi|^p \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0$$

on peut passer à la limite dans le problème (3.15), lorsque $\varepsilon \searrow 0$, et on obtient que $u^n \in C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_T})$ est une solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = a|\nabla u^n|^p \quad \text{dans } Q_T, \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T, \\ u^n(0,x) = u_0^n(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.36}$$

De plus, grâce au Principe de Comparaison, [Théorème 1 dans [**44**]], cette solution est unique dans $C^{1,2}(\overline{Q_T})$.

L'objet de la proposition suivante est de montrer que cette suite $(u^n)_n$ vérifie aussi les estimations (3.18), (3.19) et (3.20) avec $\varepsilon = 0$, et reste bornée dans un espace de Hölder.

Proposition IV.2. *La solution $u^n \in C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_T})$ du problème (3.36) satisfait les propriétés suivantes :*

$$m(0) + \frac{1}{n} \leq u^n(t,x) \leq M(0) + \frac{2}{n}, \tag{3.37}$$

$$\|\nabla u^n(t)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} (M(0) - m(0) + \frac{2}{n}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } t \in]0,T[, \tag{3.38}$$

et, si $p \neq 1$:

$$\|\nabla u^n(t)\|_\infty \leq \left(\frac{\max\{p,2\}}{p|1-p|}\right)^{1/p} (M(0) - m(0) + \frac{2}{n})^{1/p} \cdot t^{-1/p}, \text{ pour tout } t \in]0,T[. \tag{3.39}$$

De plus, il existe $\delta \in]0,1[$ tel que pour tout $\tau \in]0,T[$:

$$\text{la suite } (u^n)_n \text{ est bornée dans } C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}}). \tag{3.40}$$

(Cette borne dépend seulement de $\tau, \Omega, p, m(0)$ et $M(0)$.)

Démonstration:

Les relations (3.37), (3.38) et (3.39) sont de simples conséquences de (3.18), (3.19), (3.20) et (3.35). Afin de démontrer (3.40) on note par f_n la fonction définie sur Q_T par :

$$f_n(t,x) = a|\nabla u^n|^p(t,x).$$

Alors $u^n \in C^{1+\frac{\nu}{2},2+\nu}(\overline{Q_T})$ est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n = f_n \ \text{ dans } Q_T, \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T, \\ u^n(0,\cdot) = u_0^n \ \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.41}$$

Soit $\tau \in]0,T[$. Grâce à la relation (3.38), $f_n \in L^\infty(Q_{\tau,T})$ et :

$$\|f_n\|_{L^\infty(Q_{\tau,T})} \leq \frac{a}{2^{p/2}}(M(0) - m(0) + 2)^p \tau^{-p/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.42}$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(Q_{\tau,T})$.
On décompose le problème ci-dessus en deux parties.
D'une part on note par v^n la solution de l'équation de la chaleur sur $Q_{\tau/3,T}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^n}{\partial t} - \Delta v^n = 0 \quad \text{dans} \quad Q_{\tau/3,T}, \\ \dfrac{\partial v^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\tau/3,T}, \\ v^n(\tau/3,x) = u^n(\tau/3,x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.43}$$

Grâce à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur on tire que :

$$v^n \in C^\infty(\overline{Q_{2\tau/3,T}}) \tag{3.44}$$

et d'après le Lemme IV.5 et les relation (2.15) et (3.37), pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a :

$$\|D_x^\alpha D_t^l v^n\|_{\infty,Q_{2\tau/3,T}} \leq C(T,\Omega)(M(0) + m(0) + 1)\tau^{-(\frac{|\alpha|}{2}+l)} \tag{3.45}$$

Ensuite, on note par w^n la solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w^n}{\partial t} - \Delta w^n = f_n(t,x) \ \text{ dans } Q_{\tau/3,T}, \\ \dfrac{\partial w^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\tau/3,T}, \\ w^n(\tau/3,\cdot) = 0 \ \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.46}$$

Compte tenu de (3.35), on a $f_n \in C^{\frac{1+\nu}{2},1+\nu}(\overline{Q_T})$ et on en déduit que $w^n \in C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau/3,T}})$. Comme $f_n \in L^\infty(Q_{\tau/3,T})$, en particulier on a $f_n \in L^q(Q_{\tau/3,T})$ pour tout $q > 1$. Ainsi on peut appliquer le Théorème 7.20 de [**55**], sur la régularité des solutions d'équations paraboliques dans les espaces L^q et on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que :

$$\|D_x^2 w^n\|_{q,Q_{\tau/3,T}} + \|D_t w^n\|_{q,Q_{\tau/3,T}} \leq C\|f_n\|_{q,Q_{\tau/3,T}} \leq C|Q_{\tau/3,T}|^{1/q}\|f_n\|_{\infty,Q_{\tau/3,T}}. \tag{3.47}$$

En regroupant (3.42) avec (3.47) on tire :

$$\|D_t w^n\|_{q,Q_{\tau/3,T}} + \|D_x^2 w^n\|_{q,Q_{\tau/3,T}} \leq C(M(0), m(0), p, \tau, T, \Omega). \tag{3.48}$$

Puisque $u^n = v^n + w^n$, d'après (3.45) et (3.48) on obtient d'une part :

$$\|D_t u^n\|_{q,Q_{2\tau/3,T}} + \|D_x^2 u^n\|_{q,Q_{2\tau/3,T}} \leq C(M(0), m(0), p, q, \tau, T, \Omega). \tag{3.49}$$

D'autre part, les relations (3.37) et (3.38) nous donnent :

$$\|u^n\|_{\infty,Q_{2\tau/3,T}} \leq C_1(M(0), m(0)) \tag{3.50}$$

et

$$\|D_x u^n\|_{\infty,Q_{2\tau/3,T}} \leq C_2(M(0), m(0), p, \tau). \tag{3.51}$$

En regroupant (3.49), (3.50) et (3.51) on obtient :

$$\|u^n\|_{W_q^{1,2}(Q_{2\tau/3,T})} \leq C(M(0), m(0), p, q, \tau, T, \Omega) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } q > 1.$$

On choisit $q > N+2$, et d'après le Lemme II.3.3 de [**51**] (sur les injections des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder), on déduit que pour tout β vérifiant $0 < \beta < 1 - \frac{N+2}{q}$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\nabla u^n\|_{C^{\beta/2,\beta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})} \leq C(q, \beta, \tau, T, \Omega)\|u^n\|_{W_q^{1,2}(Q_{2\tau/3,T})}.$$

Comme la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W_q^{1,2}(Q_{2\tau/3,T})$, on en déduit que $(|\nabla u_n|)_n$ est bornée dans $C^{\beta/2,\beta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})$. Par conséquent $(f_n = a|\nabla u_n|^p)_n$ est une suite de fonctions uniformément bornée dans $C^{\delta/2,\delta}(Q_{2\tau/3,T})$, où $\delta = \delta(\beta, p)$.

On revient de nouveau aux problèmes (3.41), (3.43) et (3.46) sur l'ouvert $Q_{2\tau/3,T}$. On reitère le procédé ci-dessus et grâce au Théorème IV.5.3 de [**51**] on a :

i) $w^n \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})$ et il existe une constante $C > 0$, indépendante de n telle que :

$$\|w^n\|_{C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})} \leq C\|f_n\|_{C^{\delta/2,\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})} \leq C(m(0), M(0), p, N, \tau, T, \Omega). \tag{3.52}$$

ii) v^n satisfait la relation (3.45) sur $Q_{\tau,T}$.

Donc, en regroupant (3.45) et (3.52) on obtient que $u^n \in C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$ et :

$$\|u^n\|_{C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{2\tau/3,T}})} \leq C(m(0), M(0), p, N, \tau, T, \Omega), \tag{3.53}$$

ce qui achève la preuve de la Proposition IV.2. □

Preuve de l'existence des solutions.

D'une part, grâce au Principe de Comparaison, [Théorème 1 dans [**44**]], et aux relations (3.1) et (3.37) la suite $(u^n)_n$ est décroissante et uniformément bornée. Par conséquent il existe $u \in L^\infty(Q_T)$ tel que :

$$u^n \searrow u \quad \text{dans} \quad Q_T. \tag{3.54}$$

D'autre part, en vertu de la Proposition IV.2, pour tout $\tau \in]0, T[$, la suite $(u^n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$. Comme $C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$ s'injecte de façon compacte dans $C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau,T}})$, pour $\nu \in]0, \delta[$, "à une sous-suite près", on a :

$$u^n \to u \text{ dans } C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau,T}}) \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{3.55}$$

Donc $u \in C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau,T}})$ et grâce aux relations (3.54) et (3.55) on peut passer à la limite dans la première et la deuxième équation du problème (3.36) et on obtient que pour tout $\tau \in]0, T[$, u vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = a|\nabla u|^p \text{ dans } Q_{\tau,T}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\tau,T}. \end{cases} \tag{3.56}$$

De plus, par passage à la limite dans (3.38) et (3.39), lorsque n tend vers l'infini, on obtient (1.7) et (1.8). Les relations (1.5) et (1.6) sont des simples conséquences du Lemme IV.4.

Il reste à identifier la donnée initiale μ_0.

Pour ce faire pour $t \in]0,T[$, notons $v(t) = S(t)\mu_0$ et $v^n = S(t)u_0^n$, où $(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de la chaleur dans $L^q(\Omega), q \geq 1$, pour le problème de Neumann. Alors, grâce au Principe de Comparaison, [Lemme IV.4], pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v^n \leq u^n \text{ dans } Q_T.$$

Grâce à (3.54), par passage à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient :

$$v \leq u \text{ dans } Q_T. \tag{3.57}$$

Ainsi, puisque $v \in C(\overline{Q_T})$, pour tout $x_0 \in \Omega$ on a :

$$\mu_0(x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\(t,x)\in Q_T}} v(t,x) \leq \liminf_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\(t,x)\in Q_T}} u(t,x). \tag{3.58}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u \leq u^n \text{ dans } Q_T,$$

alors :

$$\limsup_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\(t,x)\in Q_T}} u(t,x) \leq \limsup_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\(t,x)\in Q_T}} u^n(t,x) = u_0^n(x_0).$$

Puisque la suite $(u_0^n)_n$ est décroissante et converge vers μ_0 on peut passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus et on obtient :

$$\limsup_{\substack{(t,x)\to(0,x_0)\\(t,x)\in Q_T}} u(t,x) \leq \mu_0(x_0). \tag{3.59}$$

En regroupant (3.58) et (3.59) et le fait que x_0 est quelconque dans Ω on déduit que $u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau,T}})$ est une solution classique du problème (1.1). Ce qui achève la preuve de l'existence de solutions du problème 1.1, lorsque $a > 0$.

Preuve de l'unicité :

L'unicité sera une simple conséquence du Lemme suivant :

Lemme IV.6. *Soient $a > 0$, $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert à frontière assez régulière, $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$ et $u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau,T}})$ la solution du problème (1.1) obtenue ci-dessus. Soient $w_0 \in C(\overline{\Omega})$ et $w \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_{\tau,T}})$ une fonction vérifiant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \leq a|\nabla w|^p \ (\geq a|\nabla w|^p \ ) \ \text{ dans } \ Q_T, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0 \ (\geq 0 \ ) \ \text{ dans } \ \Gamma_T, \\ w(0,\cdot) = w_0 \leq \mu_0 \ (\text{resp. } w_0 \geq \mu_0 \ ) \ \text{ dans } \ \Omega. \end{cases} \tag{3.60}$$

Alors :

$$w \leq u \ (\text{resp. } w \geq u \ ) \ \text{ dans } \ Q_T.$$

Démonstration:

Ce résultat est analogue au [Lemme 7, [**51**]] et sa preuve suit les mêmes arguments.

Supposons d'abord que Ω soit un ouvert borné et convexe contenant l'origine et$w_0 \leq \mu_0$.

On considère deux nombres réels $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, et on pose :

$$z(t,x) = w(t,x) - u(t,x) - At^q - \varepsilon(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.61}$$

où $q = \min\{1, \frac{1}{p}\}$. Alors :

$$z \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(]0,T] \times \overline{\Omega}),$$
$$z(0,x) \leq 0 \ \text{ pour tout } \ x \in \Omega.$$

Grâce au Lemme IV.3 et à l'hypothèse (3.60) on a :

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial \nu}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) - \frac{\varepsilon \cdot x \cdot \nu}{\sqrt{1+|x|^2}} < 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_T. \tag{3.62}$$

Montrons que $z \leq 0$ sur $[0,T] \times \overline{\Omega}$.

Si z prend des valeurs positives en des points de Q_T alors z admet un maximum positif en $(t_0, x_0) \in]0,T] \times \Omega$. En effet, si $(t_0, x_0) \in]0,T] \times \partial\Omega$ on a :

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(t_0,x_0) = \lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{z(t_0, x_0 + \lambda\nu) - z(t_0,x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

ce qui contredit la relation (3.62).

Ainsi au point $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \Omega$ où z atteint un maximum positif on a :

$$(\nabla z)(t_0,x_0) = 0,$$
$$(\Delta z)(t_0,x_0) \leq 0$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t_0,x_0) \geq 0.$$

Pour montrer que :

$$z(t,x) \leq 0 \ \text{ pour tout } \ (t,x) \in Q_T, \tag{3.63}$$

il suffit de trouver une valeur $A = A(\varepsilon)$ telle que pour tout point $(t,x) \in]0,T] \times \Omega$ vérifiant $(\nabla z)(t,x) = 0$ on ait :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z\right)(t,x) < 0.$$

De plus, si la dépendance de A par rapport à ε est telle que $A = A(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$, alors en faisant tendre ε vers 0 dans (3.61) on obtient

$$w(t,x) \leq u(t,x) \ \text{ dans } \ Q_T.$$

Un calcul facile donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= \frac{\partial}{\partial t}(w-u) - \Delta(w-u) - qAt^{q-1} + \varepsilon \frac{N + (N-1)|x|^2}{(1+|x|^2)^{3/2}} \\ &\leq a|\nabla w|^p - a|\nabla u|^p - qAt^{q-1} + N\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, en tout point (t_0, x_0) pour lequel $\nabla z(t_0,x_0) = 0$ on a :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z \leq a(|\nabla u + \varepsilon \frac{x}{(1+|x|^2)^{1/2}}|^p - |\nabla u|^p) - qAt^{q-1} + N\varepsilon. \tag{3.64}$$

On va distinguer deux cas :

(i) Le cas $p \in]0,1]$. Dans ce cas on a $q = 1$ et (3.64) devient :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z \leq a\varepsilon^p (\frac{|x|}{(1+|x|^2)^{1/2}})^p - A + N\varepsilon \leq a\varepsilon^p - A + N\varepsilon.$$

Donc, il convient de prendre

$$A(\varepsilon) = 2(N\varepsilon + a \cdot \varepsilon^p)$$

pour réaliser

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,x) - \Delta z(t,x) < 0$$

en tout point $(t,x) \in Q_T$ tel que $\nabla z(t,x) = 0$. Ce qui contredit :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t_0,x_0) - \Delta z(t_0,x_0) \geq 0$$

On en déduit (3.63).
(ii) Le cas $p > 1$. Dans ce cas, grâce au théorème des accroissements finis, l'inégalité (3.64) devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &\leq ap\varepsilon \left(|\nabla u| + \varepsilon \frac{|x|}{(1+|x|^2)^{1/2}} \right)^{p-1} \frac{|x|}{(1+|x|^2)^{1/2}} + N\varepsilon - \frac{1}{p} A t^{1/p-1} \\ &\leq ap\varepsilon (|\nabla u| + \varepsilon)^{p-1} + N\varepsilon - \frac{1}{p} A t^{1/p-1}.\end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (1.8), on en déduit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z \leq ap\varepsilon \left(C(M(0) - m(0))^{1/p} t^{1/p} + \varepsilon \right)^{p-1} + N\varepsilon - \frac{1}{p} A t^{(1-p)/p}, \tag{3.65}$$

où C est la constante qui intervient dans la relation (1.8). Pour obtenir (3.63) il suffit de prendre

$$A(\varepsilon) = 2p\varepsilon [N T^{\frac{(p-1)}{p}} + ap(C(M(0) - m(0))^{1/p} + \varepsilon t^{1/p})^{p-1}]$$

dans la relation (3.65).
Dans les deux cas ci-dessus on obtient (3.63). Donc

$$(w-u)(t,x) \leq A(\varepsilon) t^q + \varepsilon (1+|x|^2)^{1/2} \text{ dans } Q_T,$$

avec :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon) = 0.$$

Ainsi, par passage à la limite, lorsque $\varepsilon \to 0_+$, on obtient $w \leq u$ dans Q_T, ce qui achève la preuve du Lemme IV.6 lorsque Ω est un ouvert convexe, contenant l'origine. Dans le cas où Ω ne contient pas l'origine, il suffit d'effectuer une translation pour se ramener à un ouvert convexe et contenant l'origine : $\Omega_{x_0} = \Omega - x_0$, où $x_0 \in \Omega$.
L'inégalité $w \geq u$ se démontre de la même façon. Ce qui achève la preuve du Théorème IV.1.
□

Remarque IV.6. *Le résultat du Lemme IV.6 reste vrai pour tout $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et donc, pour toute solution $u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}})$ du problème (1.1).*

4. Preuve du Théorème IV.2

Pour $p > 1$ notons par Φ la fonction définie par :

$$\Phi(r) = -ar^{p/2}, \quad \text{pour tout} \quad r \in]0, +\infty[. \tag{4.1}$$

On reprend les notations utilisées dans la preuve du Théorème IV.1. Soit $u^n \in C^{1+\nu/2,2+\nu}(\overline{Q_T})$ la solution du problème aux limites (cf (3.36)) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^n}{\partial t} - \Delta u^n + \Phi(|\nabla u^n|^2) \ \text{ dans } Q_T \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T \\ u^n(0,\cdot) = u_0^n \ \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

où u_0^n est définie par (3.1).
De plus u^n vérifie (3.37) :

$$\frac{1}{n} \leq m(0) + \frac{1}{n} \leq u^n(t,x) \leq M(0) + \frac{2}{n}, \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in Q_T, \tag{4.3}$$

car u_0 est supposée non-negative : $m(0) = \min\limits_{x\in\Omega} \mu_0(x) \geq 0$.
Grâce à la régularité de u^n on a $\Phi(|\nabla u^n|^2) = -a|\nabla u^n|^p \in C^{\frac{1+\nu}{2},1+\nu}(\overline{Q_T})$, pour un certain $\nu \in]0,1[$. Ainsi, d'après le théorème de régularisation locale,[Théorème III.12.2, [**51**]], on obtient :

$$u^n \in C^{1+\frac{\nu}{2},2+\nu}(\overline{Q_T}) \cap C_{loc}^{\frac{3+\nu}{2},3+\nu}(Q_T). \tag{4.4}$$

Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, définié par $f(r) = r^{p/p-1}$. Posons :

$$v^n = f^{-1}(u^n) \quad \text{et} \quad w^n = |\nabla v^n|^2.$$

D'après (4.3) et (4.4) :

$$v^n \in C^{1+\frac{\nu}{2},2+\nu}(\overline{Q_T}) \ \text{ et } \ w^n \in C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T),$$

et v^n est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^n}{\partial t} - \Delta v^n - \left(\dfrac{f''}{f'}\right)(v^n)|\nabla v^n|^2 + \dfrac{1}{f'(v^n)}\Phi((f'(v^n))^2|\nabla v^n|^2) = 0 \ \text{ dans } \ Q_T, \\ \dfrac{\partial v^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \ \Gamma_T, \\ v^n(0) = v_0^n = f^{-1}(u_0^n) \ \text{ dans } \quad \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

La fonction w^n vérifie : :

$$\frac{\partial w^n}{\partial t} - \Delta w^n = 2\nabla v^n \cdot \nabla\left(\frac{\partial v^n}{\partial t} - \Delta v^n\right) - 2 \sum_{1\leq i,j\leq N} \left|\frac{\partial^2 v^n}{\partial x_i x_j}\right|^2$$

Ainsi, grâce à (4.5) on trouve :

$$\frac{\partial w^n}{\partial t} - \Delta w^n \leq 2\nabla v^n \cdot \nabla\left(\left(\frac{f''}{f'}\right)(v^n)|\nabla v^n|^2 + \frac{1}{f'(v^n)}\Phi((f'(v^n))^2|\nabla v^n|^2\right).$$

Par un calcul facile on a :

$$\mathcal{L}w^n \leq 2\left(\frac{f''}{f'}\right)'(v^n)(w^n)^2 - 2\left(\frac{f''}{f'^2}\right)(v^n)\%Theta((f'(v^n))^2 w^n)w^n, \tag{4.6}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur parabolique linéaire défini sur $C^{0,1}(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$ par :

$$\mathcal{L}w = \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + 2\left\{ f'(v^n)\Phi'((f'(v^n))^2 w^n) - \left(\frac{f''}{f'}\right)(v^n)\right\} \nabla v^n \cdot \nabla w, \tag{4.7}$$

et

$$\Theta(r) = 2r\Phi'(r) - \Phi(r), \quad r \in [0, +\infty[. \tag{4.8}$$

D'une part :

$$\Theta(r) = |a|(p-1)r^{p/2} \geq 0, \quad r \geq 0, \tag{4.9}$$

et

$$\left(\frac{f''}{f'^2}\right)(r) = \frac{1}{p} r^{-p/(p-1)} \geq 0, \quad r \geq 0. \tag{4.10}$$

D'autre part, d'après (4.3) :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{(p-1)/p} \leq v^n(t,x) \leq (M(0) + \frac{2}{n})^{(p-1)/p}.$$

Par conséquent :

$$-2\left(\frac{f''}{f'}\right)'(v^n) = \frac{1}{p-1}(v^n)^{-2} \geq \frac{2}{p-1}(M(0) + \frac{2}{n})^{-2(p-1)/p} > 0. \tag{4.11}$$

Comme w^n est une fonction non-negative, en regroupant (4.8), (4.9), (4.10) et (4.11) on obtient :

$$\mathcal{L}w^n + \frac{2}{p-1}\left(M(0) + \frac{2}{n}\right)^{-2(p-1)/p} (w^n)^2 \leq 0, \quad \text{dans} \quad Q_T. \tag{4.12}$$

De plus, grâce au Lemme IV.3 on a :

$$\frac{\partial w^n}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_T. \tag{4.13}$$

Comme $v_0^n = f^{-1}(u_0^n)$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$w^n(0) = w_0^n = |\nabla v_0^n|^2 \leq \frac{(p-1)(M(0) + \frac{2}{n})^{2(p-1)/p}}{2\eta}. \tag{4.14}$$

Posons :

$$g^n(t) = \frac{(p-1)(M(0) + \frac{2}{n})^{2(p-1)/p}}{2(t+\eta)}, \tag{4.15}$$

alors g^n est une sur-solution du problème (4.12) car :

$$\mathcal{L}g^n + \frac{2}{p-1}\left(M(0) + \frac{2}{n}\right)^{-2(p-1)/p} (g^n)^2 = 0, \quad \text{dans} \quad Q_T$$

et

$$\frac{\partial g^n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_T.$$

Compte tenu de (4.14), par le Principe de Comparaison,[Lemme IV.4] on obtient :

$$w^n(t,x) \leq g^n(t,x), \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in Q_T.$$

Grâce à (3.55), par passage à la limite lorsque $n \to \infty$ et $\eta \to 0$, on en déduit

$$\|\nabla u^{(p-1)/p}(t)\|_\infty \leq \left(\frac{(p-1)}{2}\right)^{1/2} \|\mu_0\|_\infty^{(p-1)/p} t^{-1/2}, \quad t > 0. \tag{4.16}$$

En particulier :

$$\|\nabla u^{(p-1)/p}\|_\infty \leq (p-1)^{-1/2} \|u(t/2)\|_\infty^{(p-1)/p} t^{-1/2}.$$

Comme u est une sous-solution de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale μ_0, grâce à (2.14) on a :

$$\|u(t/2)\|_\infty \leq \|S(t/2)\mu_0\|_\infty \leq C(\Omega)t^{-\frac{N}{2}}\|\mu_0\|_1.$$

En regroupant ces dernières relations on obtient (1.9).

Preuve de (1.10). Grâce à (4.6) et (4.11) on obtient :

$$\mathcal{L}w^n + 2\left(\frac{f''}{f'^2}\right)(v^n)\Theta((f'(v^n))^2 w^n)w^n \leq 0.$$

Compte tenu de (4.9) et (4.10) on déduit :

$$\mathcal{L}w^n + 2|a|\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}(w^n)^{1+p/2} \leq 0. \tag{4.17}$$

Soit $\eta > 0$ tel que :

$$0 \leq w_0^n \leq |a|^{-2/p}\frac{(p-1)^{2(p-1)/p}}{p^2}\eta^{-2/p}, \tag{4.18}$$

et notons par :

$$h(t) = |a|^{-2/p}\frac{(p-1)^{2(p-1)/p}}{p^2}(t+\eta)^{-2/p}.$$

Alors h vérifie :

$$\mathcal{L}h + 2|a|\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}h^{1+p/2} = 0,$$

et grâce à (4.12), (4.18) et au Principe de Comparaison, Lemme IV.4 on tire :

$$w^n(t,x) \leq h(t,x), \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in Q_T.$$

Par passage à la limite, lorsque $n \to \infty$, on déduit grâce à (3.55) :

$$\|\nabla u^{(p-1)/p(t)}\|_\infty \leq |a|^{-1/p}\frac{(p-1)^{(p-1)/p}}{p}(t+\eta)^{-1/p},$$

pour tout $\eta > 0$ et $t > 0$ assez petit.
Enfin, lorsque $\eta \to 0$ on obtient (1.10) ce qui acheve la preuve du Théorème IV.2. □

Remarque IV.7. *En général, les estimations (1.9) et (1.10) du Théorème IV.2 ne sont pas vérifiées par les solutions du problème de Cauchy-Dirichlet.*
Démonstration:
On considère le problème de Cauchy-Dirichlet sur $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |\dfrac{\partial u}{\partial x}|^p = 0 \quad \textit{dans} \quad]0+\infty[\times]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \textit{pour tout } t \in]0,+\infty[, \\ u(0,x) = \mu_0(x) \quad \textit{dans} \quad]0,1[. \end{cases} \tag{4.19}$$

Compte tenu des résultats du Chapitre II(Théorème I.4 et Théorème I.7) on sait que si $p > 1$ *et* $\mu_0 \in C_c^\infty(]0,1[), \mu_0 \geq 0$ *le problème (4.19) admet une unique solution* $u \in C(\overline{Q_\infty}) \cap C^{1,2}(Q_\infty)$. *De plus, comme les conditions de compatibilité d'ordre un sont satisfaite dans ce cas on a* $u \in C^{1,2}(\overline{Q_\infty})$.

Supposons que cette solution vérifie les relations (1.9) et (1.10), alors comme pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,1[$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{p}{p-1}\frac{\partial(u^{\frac{p-1}{p}})}{\partial x}(t,x)u^{\frac{1}{p}}(t,x),$$

on déduit :

$$|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)| \leq C(t)u^{\frac{1}{p}}(t,x),$$

où $C(t)$ *est une constante positive qui dépend de* t*. Par conséquent pour tout* $t \in]0,+\infty[$ *les limites :*

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \quad et \quad \lim_{x\nearrow 1}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

existent et sont égales à 0*. D'où, on a d'une part :*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \quad t \in]0,+\infty[. \tag{4.20}$$

D'autre part, grâce à la régularité de u *et aux conditions aux limites dans (4.19) on a :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0 \quad t \in]0,+\infty[. \tag{4.21}$$

Ainsi, en regroupant (4.19), (4.20) et (4.21) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(t,1) = 0 \quad t \in]0,+\infty[. \tag{4.22}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$*, posons :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Comme $u \in C^{1,2}([0+\infty[\times[0,1])$ *et vérifie (4.20), (4.21) et (4.22) on déduit* $\tilde{u} \in C^{1,2}([0,+\infty[\times\mathbb{R})$ *et vérifie le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + |\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}| = 0 \quad dans \quad]0+\infty[\times\mathbb{R}, \\ \tilde{u}(0,x) = \tilde{u}_0(x) \quad dans \quad \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.23}$$

Comme $u_0 \neq 0$*, la solution du problème de Cauchy (4.23) ne peut pas être à support compact et on arrive à une contradiction.*

Remarque IV.8. *La preuve de la Remarque IV.7 peut s'obtenir grâce à la relation (4.20) qui contredit le Lemme de Hopf (cf par exemple Théorème 6, p.174 dans* [**60**]*).*

5. Preuve du Théorème IV.3

Soit β un nombre réel positif satisfaisant :

$$\beta > \left(\frac{2p+1-N}{N}\right)_+ \tag{5.1}$$

et posons

$$\gamma = N(\beta+1) \quad \text{et} \quad \eta = N(\beta+1) - p. \tag{5.2}$$

Puisque β vérifie (5.1) on a :

$$\eta > p+1 \tag{5.3}$$

Avec ces notations la proposition suivante sera d'un intérêt essentiel pour la preuve du Théorème IV.3.

Proposition IV.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné,convexe et à frontière régulière, et $\mu_0 \in C(\overline{\Omega})$. Notons par u la solution du problème (1.1) dont l'existence est donnée par le Théorème IV.1. Alors :*

i) La fonction $t \to (1+t)(M(t)-m(t))^\gamma$ est dans $L^1(0,+\infty)$,

ii) En notant par y la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$y(t) = \int_t^\infty (s-t)(M(s)-m(s))^\gamma \, ds$$

alors $y \in W^{2,\infty}(]0,+\infty[)$ et vérifie l'inéquation différentielle :

$$y'(t) + Cy(t)^\alpha \leq 0 \quad \forall\, t \in [0,+\infty) \tag{5.4}$$

où la constante positive C ne dépend que de $p, \beta, N, \Omega, (M(0)-m(0))$ et

$$\alpha = \frac{1+\eta}{2+\eta-p}. \tag{5.5}$$

Démonstration:

Notre preuve suit les mêmes idées et les mêmes arguments que celles du Lemme 3 dans [**11**] et du Lemme 12 dans [**12**].

Posons :

$$T^* = \inf\{t > 0; |\nabla u(t)| \equiv 0\}$$

alors T^* peut être défini de manière équivalente :

$$T^* = \inf\{t > 0; M(t) = m(t)\} = \inf\{t > 0; y(t) = 0\}. \tag{5.6}$$

Si $\mu_0 \equiv c$ alors $u \equiv c$, ce qui implique $T^* = 0$ et la Proposition IV.3 est achevée.

On suppose μ_0 non constante et par conséquent $T^* \in]0,+\infty]$. Soit $T \in]0,T^*[$ et $t \in [0,T[$. En intégrant la première équation du problème (1.1) sur $]t,T[\times\Omega$ et grâce aux relations (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6) on obtient :

$$|a| \int_t^T \int_\Omega |\nabla u(s,x)|^p \, dx \, ds \leq |\Omega|(M(t)-m(t))$$

D'après (5.2) et (5.3) on a :

$$\gamma = N(\beta+1) = \eta + p$$

alors, par majoration on obtient :

$$\|\nabla u(s)\|_\gamma^\gamma \leq \|\nabla u(s)\|_\infty^\eta \cdot \||\nabla u(s)|^p\|_1,$$

En regroupant les deux dernières inégalités on obtient :

$$\int_t^T \|\nabla u(s)\|_\infty^{-\eta} \cdot \|\nabla u(s)\|_\gamma^\gamma ds \leq \frac{|\Omega|}{|a|}(M(t)-m(t)) \tag{5.7}$$

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHEQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

On considère les deux cas suivants :
Cas (i) : $p \neq 1$. Grâce à la relation (1.8), pour tout $s \in]t, T[$ on a :

$$\|\nabla u(s)\|_\infty^{-\eta} \geq C_1 (s-t)^{\eta/p} (M(t) - m(t))^{-\eta/p}, \tag{5.8}$$

où C_1 est une constante positive qui ne dépend que de $p > 0$.
En vertu du Lemme IV.2 :

$$M(s) - m(s) \leq C_2 \|\nabla u(s)\|_\gamma \tag{5.9}$$

Ainsi les relations (5.7),(5.8) et (5.9) donnent :

$$\int_t^T (s-t)^{\eta/p} (M(s) - m(s))^\gamma \, ds \leq C_3 (M(t) - m(t))^{\gamma/p} \text{ pour tout } t \in [0, T] \tag{5.10}$$

où la constante C_3 ne dépend que de N, a, p, β, η et Ω.
On passe à la limite dans (5.10), lorsque $T \nearrow T^*$, et on obtient :

$$\int_t^{T^*} (s-t)^{\eta/p} (M(s) - m(s))^\gamma \, ds \leq C_3 (M(t) - m(t))^{\gamma/p} \text{ pour tout } t \in [0, T^*[\tag{5.11}$$

On fixe $\delta \in]0, T^*[$. En utilisant (1.5),(1.6) et (5.3) et (5.11) on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1+s)(M(s) - m(s))^\gamma \, ds &= \int_0^\delta (1+s)(M(s) - m(s))^\gamma \, ds + \int_\delta^{T^*} (1+s)(M(s) - m(s))^\gamma \, ds \\
&\leq (1+\delta)[\delta (M(0) - m(0))^\gamma + \delta^{-\eta/p} \int_\delta^{T^*} s^{\eta/p} (M(s) - m(s))^\gamma \, ds] \\
&\leq (1+\delta)[\delta (M(0) - m(0))^\gamma + \delta^{-\eta/p} \int_0^{T^*} s^{\eta/p} (M(s) - m(s))^\gamma \, ds].
\end{aligned}$$

De nouveau, en vertu de (1.5), (1.6) et (5.11) (qui est vraie en particulier pour $t = 0$), cette dernière intégrale est finie. Par conséquent :

$$t \to (1+t)(M(t) - m(t))^\gamma \in L^1(]0, +\infty[). \tag{5.12}$$

On en déduit alors que la fonction y est bien définie sur $[0, +\infty[$ et appartient à $W^{2,\infty}(]0, +\infty[)$.
En effet, pour tout $t > 0$, on a :

$$y'(t) = -\int_t^{+\infty} (M(s) - m(s))^\gamma \, ds \tag{5.13}$$

et

$$y''(t) = (M(t) - m(t))^\gamma. \tag{5.14}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder et à (5.3) la fonction y vérifie aussi :

$$(y(t))^{\eta/p} = (\int_t^\infty (s-t)(M(s)-m(s))^\gamma\, ds)^{\eta/p}$$
$$\leq [\int_t^{T^*} (s-t)^{\eta/p}(M(s)-m(s))^\gamma\, ds][\int_t^{T^*} (M(s)-m(s))^\gamma\, ds]^{\eta/p-1}$$

En regroupant cette dernière inégalité avec (5.10) on obtient :

$$y(t)^{\eta/p} \leq C \cdot y''(t)^{1/p}(-y'(t))^{\eta/p-1}, \tag{5.15}$$

c'est à dire :

$$y(t)^\eta \leq C \cdot y''(t) \cdot (-y'(t))^{\eta-p} \text{ pour tout } t \in [0, T^*[, \tag{5.16}$$

Compte tenu que $y'(t) \leq 0$, on multiplie l'inégalité (5.16) par $(-y'(t))$ et on l'intégre sur $]t, T^*[$. ce qui donne :

$$y(t)^{1+\eta} \leq C \cdot (-y'(t))^{2+\eta-p}\ t \in [0, T^*[$$

d'où, grâce à la définition de T^* :

$$y'(t) + \frac{1}{C} y(t)^{\frac{1+\eta}{2+\eta-p}} \leq 0 \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[$$

et la preuve de (5.4) est achevée pour $p \neq 1$.

Cas (ii) : Si $p = 1$. A la place de (1.8) on utilise cette fois-ci (1.7). Ainsi, pour tout $s \in]t, T[$, on a :

$$\|\nabla u(s)\|_\infty^{-\eta} \geq C_4 (s-t)^{\eta/2}(M(t)-m(t))^{-\eta}. \tag{5.17}$$

en regroupant les relations (5.7), (5.17) et (5.9) on obtient :

$$\int_t^T (s-t)^{\eta/2}(M(s)-m(s))^\gamma\, ds \leq C_5 (M(t)-m(t))^\gamma \text{ pour tout } t \in [0, T] \tag{5.18}$$

où la constante C_5 ne dépend que de N, a, p, β, η et Ω.

Grâce à (5.3) on a $\eta > 2$. Comme dans le cas précédent, on fixe $\delta \in]0, T^*[$, alors, en utilisant (1.5), (1.6), (5.3) et (5.18) on obtient :

$$\int_0^\infty (1+s)(M(s)-m(s))^\gamma\, ds = \int_0^\delta (1+s)(M(s)-m(s))^\gamma\, ds + \int_\delta^{T^*} (1+s)(M(s)-m(s))^\gamma\, ds$$
$$\leq (1+\delta)[\delta(M(0)-m(0))^\gamma + \delta^{-\eta/2} \int_\delta^{T^*} s^{\eta/2}(M(s)-m(s))^\gamma\, ds]$$
$$\leq (1+\delta)[\delta(M(0)-m(0))^\gamma + \delta^{-\eta/2} \int_0^{T^*} s^{\eta/2}(M(s)-m(s))^\gamma\, ds].$$

De nouveau, en vertu de (1.5), (1.6) et (5.18), cette dernière intégrale est finie. Par conséquent la relation (5.12) est vérifié aussi pour $p = 1$. Comme dans le premier cas on en déduit que la fonction y est bien définie sur $[0, +\infty[$ et appartient à $W^{2,\infty}(]0, +\infty[)$, la première dérivée et

la dérivée seconde étant données par les formules (5.13) et (5.14).
Comme $\eta > 2$, en utilisant l'inégalité d'Hölder on obtient cette fois ci :

$$(y(t))^{\eta/2} = (\int_t^\infty (s-t)(M(s)-m(s))^\gamma \, ds)^{\eta/2}$$
$$\leq [\int_t^{T^*} (s-t)^{\eta/2}(M(s)-m(s))^\gamma \, ds][\int_t^{T^*} (M(s)-m(s))^\gamma \, ds]^{\eta/2-1}$$

Compte tenu de (5.18), (5.13) et (5.14) on en déduit :

$$y(t)^{\eta/2} \leq C \cdot y''(t)(-y'(t))^{\eta/2-1} \tag{5.19}$$

et par les mêmes arguments que dans le cas précédent on obtient :

$$y'(t) + \frac{1}{C} y(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[$$

ce qui achève la preuve de la Proposition IV.3, lorsque $p = 1$. □

Preuve du Théorème IV.3 :
Soit :

$$y(t) = \int_t^\infty (s-t)(M(s)-m(s))^\gamma \, ds \quad t \in [0, \infty[,$$

la fonction définie dans la Proposition IV.3. On a obtenu que $y \in W^{2,+\infty}(]0, +\infty[)$ et il existe une constante positive C qui ne dépend que de p, β, N, Ω et $(M(0) - m(0))$ telle que y satisfait l'inéquation différentielle (5.4) :

$$y'(t) + Cy(t)^\alpha \leq 0, \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[,$$

avec α donné par (5.5) et

$$y(0) = \int_0^\infty s(M(s)-m(s))^\gamma \, ds \geq 0.$$

D'une part, si $p \in]0, 1[$ alors $\alpha \in]0, 1[$ et, d'après inégalité différentielle (5.4) et (5.6) on obtient que $T^* < \infty$ et :

$$y(t) \equiv 0 \text{ pour } t > T^*$$

Par conséquent, lorsque $p \in]0, 1[$, il y a extinction en temps fini du gradient de la solution du problème (1.1).
D'autre part, si $p \geq 1$ alors $\alpha \geq 1$ et grâce à (5.4) et au fait que y est une fonction positive, on déduit :

$$\frac{y'(t)}{y^\alpha(t)} \leq -\frac{1}{C} \quad \text{pour tout } \; t \in]0, +\infty[. \tag{5.20}$$

On va distinguer entre deux cas :
(i) Le cas $p > 1$. Dans ce cas on a alors $\alpha > 1$.
En intégrant sur $]0, t[$, $t > 0$, l'inégalité (5.20) on obtient :

$$y(t)^{1-\alpha} \geq y(0)^{1-\alpha} + \frac{(\alpha-1)t}{C},$$

c'est à dire :

$$y(t) \leq \left(\frac{1}{y(0)^{1-\alpha} + \frac{(\alpha-1)t}{C}} \right)^{1/(\alpha-1)} \qquad \text{pour tout} \quad t \in]0, +\infty[.$$

(ii) Le cas $p = 1$. Dans ce cas on a $\alpha = 1$.

En intégrant sur $]0, t[$, $t > 0$, l'inégalité (5.20) on obtient cette fois-ci :

$$\log y(t) \leq \log y(0) - \frac{t}{C},$$

c'est à dire :

$$y(t) \leq y(0) e^{-\frac{t}{C}}.$$

On obtient ainsi un taux de décroissance pour ls fonction y, lorsque $t \to \infty$.

Il suffit de démontrer que démontrer que :

$$\lim_{t \to \infty} M(t) - m(t) = 0, \tag{5.21}$$

pour voir que, lorsque $p \geq 1$, la solution u du problème (1.1) converge uniformément dans $\overline{\Omega}$ vers une constante, quand $t \to \infty$.

Pour ce faire on rappel que, d'après la Proposition IV.3 la fonction :

$$g(t) = (1 + t)(M(t) - m(t))^{\gamma} \text{ est dans } L^1(0, +\infty).$$

Comme $t \mapsto (M(t) - m(t))$ est une fonction positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, il existe une constante non-negative c telle que :

$$c = \lim_{t \to \infty} (M(t) - m(t))^{\gamma}.$$

Alors :

$$c(1 + t) \leq g(t),$$

et par conséquent, la fonction $t \to c(1 + t)$ est dans $L^1(0, +\infty)$, ce qui n'est possible que si $c = 0$. Ce qui prouve la relation (5.21).

On veut trouver maintenant un taux de décroissance de la fonction $t \mapsto (M(t) - m(t))$. Pour ce faire notons par f :

$$f(t) = \begin{cases} y(0) e^{-\frac{t}{C}} & \text{si} \quad p = 1, \\ \left(\frac{1}{y(0)^{(1-\alpha)} + \frac{(\alpha-1)t}{C}} \right)^{1/(\alpha-1)} & \text{si} \quad p > 1. \end{cases} \tag{5.22}$$

le taux de décroissance, trouvé ci-dessus, de la fonction y.

Alors, pour tout $t > 0$ on a :

$$\int_{t/2}^{t} (s - t/2)(M(s) - m(s))^{\gamma} \, ds \leq y(t/2) \leq f(t/2).$$

Comme l' application $s \mapsto (M(s) - m(s))$ est décroissante on en déduit :

$$(M(t) - m(t))^{\gamma} \int_{t/2}^{t} (s - t/2) \, ds \leq f(t/2), \quad \forall \; t > 0,$$

ou bien :

$$M(t) - m(t) \leq \left(\frac{8f(t/2)}{t^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \forall\, t > 0, \tag{5.23}$$

où f est donné par (5.22). Ainsi la preuve du Théorème IV.3 est achevée. □

6. Preuve du Théorème IV.5

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.2) on va utiliser certains résultats de [**28**] sur les semi-groupes continus qui préservent la monotonie.
Notons par $C^+(\overline{\Omega})$ le cône des fonctions positives dans l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ qui muni de la norme $\|\ \|_\infty$ est un espace de Banach.
Grâce au Théorème IV.1, pour tout $p \in]1, +\infty[$ et $\mu_0 \in C^+(\overline{\Omega})$, le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \text{ dans } Q_\infty; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \\ u(0) = \mu_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.1}$$

admet une unique solution classique et non négative :

$$u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1+\delta/2, 2+\delta}(\overline{Q_{\tau,T}}), \text{pour tout } \tau \in]0, T[,\ T > 0, \tag{6.2}$$

où $\delta \in]0, 1[$.
Notons par $T(t)\mu_0$ cette solution.

Proposition IV.4. *$(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe continu sur $C^+(\overline{\Omega})$ et ce semi-groupe préserve la monotonie. C'est à dire :*
(i) $(t, \varphi) \to T(t)\varphi$ est continue de $[0, +\infty[\times C^+(\overline{\Omega})$ dans $C^+(\overline{\Omega})$;
(ii) $T(t)T(\tau) = T(t + \tau)$ pour tout $t, \tau \geq 0$;
(iii) $T(0)\varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in C^+(\overline{\Omega})$;
(iv) Pour tout $\varphi, \psi \in C^+(\overline{\Omega})$ telles que $\varphi \leq \psi$ on a : $T(t)\varphi \leq T(t)\psi$, pour tout $t > 0$

Démonstration:
Soient (t^n, φ^n) une suite qui converge vers (t, φ) dans $[0, +\infty[\times C^+(\overline{\Omega})$. Alors, grâce au Principe de Comparaison, [cf. Lemme IV.6] et à la relation (6.2) on a :

$$\begin{aligned} \|T(t^n)\varphi^n - T(t)\varphi\|_\infty &\leq \|T(t^n)(\varphi^n - \varphi)\|_\infty + \|T(t^n)\varphi - T(t)\varphi\|_\infty \\ &\leq \|\varphi^n - \varphi\|_\infty + \|T(t^n)\varphi - T(t)\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t^n)\varphi^n - T(t)\varphi\|_\infty = 0$$

Ainsi, on en déduit (i).
Grâce à l'unicité de la solution du problème (6.1) dans l'espace défini par (6.2) on obtient (ii).
Quant au point (iii), il est évident.
Enfin, le point (iv) est une conséquence du Principe de Comparaison, [cf. Lemme IV.6]. □

La proposition suivante sera utile dans la preuve de l'existence de solutions. En posant :

$$\mathcal{C} = \{\varphi \in C^+(\overline{\Omega});\ \varphi = 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus D\}, \tag{6.3}$$

on a le résultat suivant :

Proposition IV.5. *Pour tout $t > 0$,*

$$T(t)\mathcal{C} \text{ est relativement compact dans } C^+(\overline{\Omega}) . \tag{6.4}$$

et

$$si \ \varphi_1 \in \mathcal{C} \ \text{ et } \ \varphi_2 \in \mathcal{C} \text{ alors } \ \varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathcal{C}. \tag{6.5}$$

La relation (6.5) est évidente, par contre la preuve de (6.4) sera faite en deux étapes en utilisant les deux lemmes suivants :

Lemme IV.7. *Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble borné de $C^+(\overline{\Omega})$. Alors, pour tout $t \in]0,T[$, l'ensemble $T(t)\mathcal{E}$ est relativement compact dans $C^+(\overline{\Omega})$*

Démonstation du Lemme IV.7 :
Pour $\varphi \in \mathcal{E}$ notons par $u_\varphi \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$, l'unique solution du problème (6.1) avec la donnée initiale φ (solution donnée par le Théorème IV.1). Ainsi, grâce aux relations (1.5), (1.6) et (1.7), u_φ vérifie :

$$\min_{x\in\Omega} \varphi(x) \leq u_\varphi \leq \max_{x\in\Omega} \varphi(x)$$

et

$$\|\nabla u_\varphi(t)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \|\varphi\|_\infty t^{-\frac{1}{2}} \text{ pour tout } \ t > 0.$$

Puisque $\mathcal{E}$ est borné dans $C^+(\overline{\Omega})$ on en déduit que pour tout $t > 0$ l'ensemble :

$$\{T(t)\varphi;\ \varphi \in \mathcal{E}\} \ \text{ est borné dans } \ W^{1,\infty}(\Omega).$$

Comme l'injection de $W^{1,\infty}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est compacte on en déduit que $T(t)\mathcal{E}$ est relativement compact dans $C^+(\overline{\Omega})$, pour tout $t > 0$.
Ce qui achève la preuve du Lemme IV.7. □

Lemme IV.8. *Soient $p \in]1,+\infty[$ et Ω un ouvert borné, convexe et à frontière régulière. Soient $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ un ouvert borné et à frontière régulière et $\mathcal{C}$ définie par (6.3). Pour $\varphi \in \mathcal{C}$ soit $T(t)\varphi$ la solution du problème (6.1) correspondant à cette donnée initiale φ. Alors, pour tout $t \in]0,T[$ il existe une constante $C(t,p,\Omega,D)$ telle que :*

$$\|T(t)\varphi\|_\infty \leq C(t,p,\Omega,D) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C} \tag{6.6}$$

Démonstration du Lemme IV.8 :
Avant de faire la preuve du point (6.6) on démontre d'abord qu'il existe une "borne universelle" pour $\|T(t)\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ et pour tout $t \in]0,T[$. Pour ce faire, on s'inspire, comme dans [**28**], d'une méthode assez utilisée en théorie du potentiel. Notons par $\theta \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^{1,2}(\Omega)$ la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -\Delta\theta = 1 \ \text{ dans } \ \Omega \setminus \overline{D}, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \ \partial D, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.7}$$

Alors d'après le principe de maximum et le Lemme de Hopf (voir [**33**], page 327), on obtient que

$$\inf_{x\in\Omega\setminus\overline{D}} \theta(x) = \min_{x\in\partial\Omega\cup\partial D} \theta(x) = 0,$$

de plus, grâce aux conditions aux limites dans (6.7), on déduit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} < 0 \text{ sur } \partial D \tag{6.8}$$

et

$$\theta > 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus \overline{D}. \tag{6.9}$$

Posons :

$$w(t,x) = \lambda e^{Ct} e^{\frac{1}{\theta(x)}}$$

où $\lambda > 0$ et $C > 0$ (C sera choisi ultérieurement en fonction de λ).

On a :

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x,t) = \lambda e^{Ct} \frac{\partial \theta}{\partial \nu}(-\frac{1}{(\theta(x))^2}) e^{\frac{1}{\theta(x)}}$$

et grâce à (6.7), (6.8) et (6.9) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = +\infty \text{ sur }]0,T[\times \partial D \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sur }]0,T[\times \partial \Omega \end{cases} \tag{6.10}$$

De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$:

$$w(0,x) = \lambda e^{\frac{1}{\theta(x)}} \geq \varphi(x) = 0 \text{ sur } \Omega \setminus D.$$

Il suffit alors, de trouver $C = C(\lambda)$ tel que :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + |\nabla w|^p \geq 0 \text{ dans }]0,T[\times \Omega \setminus \overline{D}, \tag{6.11}$$

pour conclure à l'aide du Principe de Comparaison, [cf. Lemme IV.4] que, pour tout $\lambda > 0$, il existe $C_\lambda > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$:

$$T(t)\phi \leq \lambda e^{C_\lambda t} e^{\frac{1}{\theta}} \text{ dans }]0,T[\times \Omega \setminus \overline{D}. \tag{6.12}$$

Preuve du point (6.11).

On a :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Cw, \quad \nabla w = -\frac{\nabla \theta}{\theta^2} \cdot w$$

et

$$\Delta w = w(-\frac{1}{\theta^2}\Delta\theta + 2\frac{|\nabla\theta|^2}{\theta^3} + \frac{|\nabla\theta|^2}{\theta^4}),$$

d'où :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + |\nabla w|^p = w(C - [\frac{1}{\theta^2} + (\frac{2}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4})|\nabla\theta|^2 - \frac{|\nabla\theta|^p w^{p-1}}{\theta^{2p}}]).$$

Posons :

$$g(\lambda,x) = \frac{1}{\theta^2} + (\frac{2}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4})|\nabla\theta|^2 - \frac{|\nabla\theta|^p \lambda^{p-1} e^{\frac{1}{(p-1)\theta}}}{\theta^{2p}} \geq \frac{1}{\theta^2} + (\frac{2}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4})|\nabla\theta|^2 - \frac{|\nabla\theta|^p w^{p-1}}{\theta^{2p}}$$

Alors, comme $|\nabla\theta| = |\frac{\partial\theta}{\partial\nu}| \neq 0$ et $\theta = 0$ sur la frontière de D compte tenu de la définition de w on a :

$$g(\lambda,x)|_{\partial D} = -\infty.$$

De plus, grâce à (6.9) :

$$g(\lambda,\cdot) \in C(\overline{\Omega} \setminus \overline{D})$$

Par conséquent, la fonction $g(\lambda,\cdot)$ est majorée dans $\overline{\Omega}\setminus\overline{D}$, par une constante qu'on note $C(\lambda)$. Il suffit alors de prendre $C_\lambda > \max\{0, C(\lambda)\}$ dans la définition de w afin d'obtenir (6.11). Ainsi on en déduit (6.12).
De plus, grâce à (6.9) il existe une constante $d>0$ telle que $\theta > d$ sur $\partial\Omega$ et par conséquent, en utilisant (6.12), pour tout $\varphi\in\mathcal{C}$ on a :

$$T(t)\phi \le \lambda e^{C_\lambda t+\frac{1}{d}} \text{ dans } \ ]0,T[\times\partial\Omega. \tag{6.13}$$

Preuve du point (6.6) :
Grâce au Théorème IV.2, plus précisément au point (1.10), pour tout $\varphi\in\mathcal{C}$ on a :

$$\|\nabla(T(t)\varphi)^{(p-1)/p}(t)\|_\infty \le \frac{(p-1)^{(p-1)/p}}{p}t^{-1/p}. \tag{6.14}$$

Soit donc $x_0\in\partial\Omega$ fixé. D'après (6.14), pour tout $t\in]0,T[$, $(T(t)\varphi)^{\frac{p-1}{p}}\in W^{1,\infty}(\Omega)$, alors

$$(T(t)\varphi)^{\frac{p-1}{p}}(x) = (T(t)\varphi)^{\frac{p-1}{p}}(x_0) + \int_0^1 \nabla_x(T(t)\varphi)^{\frac{p-1}{p}}(sx+(1-s)x_0)\cdot(x-x_0)ds$$

et, par conséquent, grâce à (6.13) et (6.14) on obtient :

$$\|(T(t)\varphi)^{\frac{p-1}{p}}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \lambda^{\frac{p-1}{p}}e^{\frac{p-1}{p}(C_\lambda t+\frac{1}{d})} + d_\Omega\frac{(p-1)^{\frac{(p-1)}{p}}}{p}t^{-1/p},$$

où d_Ω est le diamètre du domaine Ω. Ainsi, on en déduit (6.6) et la preuve du Lemme IV.8 est achevée. □

En regroupant les résultats des Lemmes IV.7 et IV.8 on peut en déduire (6.4) ce qui achève la preuve de la Proposition IV.5.

Preuve de l'existence de solutions faibles du problème (1.2) :
Pour tout $t\in]0,T[$, posons :

$$M(t,x) = \sup\{(T(t)\varphi)(x); \varphi\in\mathcal{C}\}. \tag{6.15}$$

Puisque $\mathcal{C}$ vérifie (6.4) et (6.5) on peut appliquer la Proposition 1.2 de [**28**] et on obtient que $\{M(t), t>0\}\subset C^+(\overline{\Omega})$ et de plus :

$$T(t)M(\tau) = M(t+\tau) \text{ pour tout } \tau>0 \text{ et } t\ge 0. \tag{6.16}$$

Donc, pour tout $\tau>0$, l'application $[0,T]\ni t\to M(t+\tau)$ à la régularité donnée par (6.2), de plus c'est une solution du problème (6.1).
Il reste à démontrer que l'application $t\mapsto M(t)$ vérifie les conditions initiales (1.12) et (1.13). Vérifions d'abord (1.12). Dans la preuve du Lemme IV.8 on a montré qu'il existe une fonction θ vérifiant (6.7),(6.8) et (6.9), telle que la relation (6.12) soit satisfaite, c'est à dire, pour tout $t\in]0,T[$ et $\varphi\in\mathcal{C}$:

$$T(t)\varphi \le \lambda e^{C_\lambda t}e^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{dans} \quad \Omega\setminus\overline{D}.$$

Compte tenu de (6.15), en passant à la borne supérieure, on en déduit :

$$M(t) \le \lambda e^{C_\lambda t}e^{\frac{1}{\theta}} \text{ dans } \ \Omega\setminus\overline{D}. \tag{6.17}$$

Soit K un compact dans $\Omega \setminus \overline{D}$, comme la fonction θ vérifie (6.9) alors il existe une constante positive $d = d(K)$ telle que $\theta(x) \geq d(K)$ dans K. En regroupant ce dernier point avec la relation (6.17) on obtient :

$$M(t) \leq \lambda e^{C_\lambda t} e^{\frac{1}{d(K)}} \text{ dans } K,$$

d'où on déduit :

$$0 \leq \limsup_{t \searrow 0} M(t) \leq \lambda e^{\frac{1}{d(K)}} \text{ uniformément dans } K$$

Comme la dernière inégalité a lieu pour tout $\lambda > 0$, on peut passer à la limite lorsque $\lambda \to 0_+$. On obtient alors (1.12).

Reste à prouver (1.13). Soit K un compact dans D. Pour $R > 0$ soit $\varphi \in \mathcal{C}$ telle que $\varphi \equiv 2R$ dans K. Comme $\varphi \in C^+(\overline{\Omega})$, grâce aux points (i) et (iii) de la Proposition IV.4 on a :

$$\lim_{t \searrow 0} T(t)\varphi = \varphi \text{ uniformément dans } \Omega.$$

C'est à dire : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon, \varphi)$ tels que pour tout $t \in]0, \delta(\varepsilon, \varphi)[$ on ait :

$$\|T(t)\varphi - \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

En particulier

$$\text{pour tout } t \in]0, \delta(\varepsilon, \varphi)[, \quad \|T(t)\varphi - 2R\|_{L^\infty(K)} < \varepsilon.$$

d'où

$$\text{pour tout } t \in]0, \delta(\varepsilon, \varphi)[, \quad T(t)\varphi > 2R - \varepsilon, \quad \forall\ x \in K,$$

Soit $\varepsilon \in]0, R[$, alors, grâce à (6.15) on obtient que, pour tout $R > 0$, il existe $\delta(\varepsilon, \varphi) = \delta(R)$ tels que, pour tout $t \in]0, \delta(R)[$ on ait :

$$M(t, x) > R \text{ pour tout } x \in K,$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on en déduit (1.13). Ainsi, on a démontré que :

$$u(t, x) = M(t, x) \text{ dans } Q_T,$$

est une solution du problème (1.2) au sens de la Définition IV.1. □

La preuve de l'unicité des solutions du problème (1.2) repose sur le Principe de Comparaison suivant :

Proposition IV.6. *Soient $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^N$ deux ouverts bornés et à frontières assez régulières tels que $D_1 \subset \overline{D_1} \subset D_2 \subset \overline{D_2} \subset \Omega$ et notons par :*

$$\mathcal{C}_1 = \{\varphi \in C^+(\overline{\Omega});\ \varphi = 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus D_1\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\varphi \in C^+(\overline{\Omega});\ \varphi = 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus D_2\},$$

$$M_1(t) = \sup\{T(t)\varphi; \varphi \in \mathcal{C}_1\} \tag{6.18}$$

et

$$M_2(t) = \sup\{T(t)\varphi; \varphi \in \mathcal{C}_2\}. \tag{6.19}$$

Soient u_1 et u_2 deux solutions positives du problème (1.2) correspondant respectivement aux ouverts D_1 et D_2 et au sens de la Definition IV.1.
Si u_1 est donnée par (6.18) ou bien si u_2 est donnée par (6.19) alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ dans } Q_T \tag{6.20}$$

Démonstration:
Cas *i)* **:** Soit u_1 une solution quelconque du problème (1.2) et soit u_2 la solution donnée par (6.19).
Comme $\overline{\Omega} \setminus D_2$ est un compact de $\overline{\Omega} \setminus \overline{D_1}$ on a :

$$\lim_{t \searrow 0} u_1(t, \cdot) = 0 \text{ uniformément sur } \overline{\Omega} \setminus D_2$$

Il en résulte que : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $\tau \in]0, \delta(\varepsilon)[$:

$$u_1(\tau, \cdot) - \varepsilon < 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus D_2$$

Alors, pour tout $\tau \in]0, \delta(\varepsilon)[$, il existe $\varphi_\tau \in \mathcal{C}_2$ tel que :

$$u_1(\tau, \cdot) - \varepsilon < \varphi_\tau \text{ dans } \Omega\ ,$$

c'est à dire, pour tout $\tau \in]0, \delta(\varepsilon)[$:

$$u_1(\tau, \cdot) < \varphi_\tau + \varepsilon \text{ dans } \Omega.$$

Puisque $(T(t))_{t \geq 0}$ préserve la monotonie, on en déduit :

$$T(t)u_1(\tau, \cdot) \leq T(t)(\varphi_\tau + \varepsilon) \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } \tau \in]0, \delta(\varepsilon)[\text{ et } t \in]0, T[,$$

d'où :

$$u_1(t + \tau, \cdot) \leq T(t)(\varphi_\tau + \varepsilon) \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } \tau \in]0, \delta(\varepsilon)[\text{ et } t \in]0, T[$$

Grâce à l'unicité des solutions du problème (1.1) à données continues on a :

$$T(t)(\varphi_\tau + \varepsilon) = T(t)(\varphi_\tau) + \varepsilon$$

et, comme $\phi_\tau \in \mathcal{C}_2$, on en déduit :

$$u_1(t + \tau, \cdot) \leq T(t)\varphi_\tau + \varepsilon \leq M_2(t) + \varepsilon \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } \tau \in]0, \delta(\varepsilon)[\text{ et } t \in]0, T[.$$

Donc :

$$u_1(t + \tau, \cdot) \leq M_2(t) + \varepsilon \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } \tau \in]0, \delta(\varepsilon)[\text{ et } t \in]0, T[.$$

On passe à la limite lorsque $\tau \searrow 0$ et puis lorsque $\varepsilon \searrow 0$ dans l'inégalité ci-dessus et on obtient :

$$u_1(t) \leq M_2(t) = u_2(t) \text{ pour tout } t \in]0, T[.$$

Cas *ii)* **:** Soit u_1 la solution donnée par (6.18) et soit u_2 une solution quelconque du problème (1.2).
Puisque $\overline{D_1} \subset D_2$ on ait :

$$\lim_{t \searrow 0} u_2(t, \cdot) = +\infty \text{ uniformément sur } \overline{D_1}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_1$, il existe alors $\delta(\varphi) > 0$ tel que pour tout $\tau \in]0, \delta(\varphi)[$ on a :

$$u_2(\tau, \cdot) \geq \|\varphi\|_\infty \geq \varphi \text{ dans } \overline{D_1}.$$

Comme $u_2(\tau, \cdot)$ est une fonction positive et $\varphi \in \mathcal{C}_1$, alors pour tout $\tau \in]0, \delta(\varphi)[$ on a :

$$u_2(\tau, \cdot) \geq \varphi \text{ dans } \Omega$$

Puisque $T(t)$ préserve la monotonie, alors :

$$u_2(t + \tau) = T(t)u_2(\tau) \geq T(t)\varphi \text{ pour tout } \tau \in]0, \delta(\varphi)[, \text{ pour tout } t \in]0, T[$$

On fait tendre τ vers 0 et on obtient :

$$u_2(t) \geq T(t)\varphi, \text{ pour tout } t \in]0, T[, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_1$$

u_1 étant donnée par (6.18), on en déduit (6.20). Ce qui achève la preuve de la Proposition IV.6. □

Preuve de l'unicité des solutions du problème (1.2) lorsque $p \in]1, 2[$ **:**
Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ouverts de $\mathbb{R}^N$ telle que :

$$D \subset \overline{D_{n+1}} \subset D_n, \text{ et } \overline{D} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n, \tag{6.21}$$

et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts de $\mathbb{R}^N$ telle que :

$$\overline{U_n} \subset U_{n+1} \subset D \text{ et } D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n. \tag{6.22}$$

Posons :

$$\mathcal{C}_{D_n} = \{\varphi \in C^+(\overline{\Omega});\ \varphi \equiv 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus D_n\}$$

et

$$\mathcal{C}_{U_n} = \{\varphi \in C^+(\overline{\Omega});\ \varphi \equiv 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus U_n\}.$$

Et notons par :

$$M_{D_n}(t) = \sup\{T(t)\varphi;\ \varphi \in \mathcal{C}_{D_n}\}$$

et

$$M_{U_n}(t) = \sup\{T(t)\varphi;\ \varphi \in \mathcal{C}_{U_n}\}.$$

Alors M_{D_n} et M_{U_n} sont des solutions du problème (1.2) correspondant aux ouverts D_n et U_n. Grâce à la Proposition IV.6 et aux relations (6.21) et (6.22), pour toute solution u du problème (1.2) correspondant à l'ouvert D et pour tout $t \in]0, T[$ on a :

$$M_{U_n}(t) \leq u(t) \leq M_{D_n}(t) \text{ dans } \Omega. \tag{6.23}$$

De plus, $(M_{U_n})_n$ est une suite croissante de fonctions et $(M_{D_n})_n$ est une suite décroissante. En notant par A et B leur limite respective, alors d'après (6.23), pour tout $t \in]0, T[$ on a :

$$A(t) \leq u(t) \leq B(t) \text{ dans } \Omega. \tag{6.24}$$

Montrons d'abord que $A = M$, où M est la solution de (1.2) donnée par (6.15).
D'une part, grâce à (6.24) pour tout $t \in]0, T[$ on a :

$$A(t) \leq M(t) \text{ dans } \Omega.$$

et d'autre part, pour avoir $M \leq A$, il suffit de démontrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$ et $t \in]0,T[$ on a :

$$T(t)\varphi \leq A(t) \text{ dans } \Omega. \tag{6.25}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{C}$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_{U_n}$ telle que :

$$\varphi_n \nearrow \varphi \text{ uniformément dans } \overline{\Omega}, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

La monotonie de $T(t)$ implique :

$$T(t)\varphi_n \nearrow T(t)\varphi, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T(t)\varphi_n \leq M_{U_n}(t) \leq A(t) \text{ dans } \Omega,$$

par passage à la limite lorsque $n \to \infty$, on en déduit (6.25).
Montrons maintenant que $M = B$. Grâce à (6.24) pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$M(t) \leq B(t) \text{ dans } \Omega$$

Il reste à démontrer que :

$$B \leq M. \tag{6.26}$$

La preuve de cette inégalité sera faite en plusieurs étapes.

Soit $R > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,T[$ posons :

$$M_{D_n,R}(t) = \sup\{T(t)\varphi;\ \varphi \in \mathcal{C}_{D_n},\ \|\varphi\|_\infty \leq R\} \tag{6.27}$$

Grâce au Principe de Comparaison, [cf. Proposition II.13], on a :

$$\|M_{D_n,R}\|_{\infty,Q_T} \leq R. \tag{6.28}$$

Comme dans la preuve de l'existence de solutions du problème (1.2), on peut démontrer que pour tout $\tau \in]0,T[$, $M_{D_n,R} \in C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}})$ et est une solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \text{ dans } Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_T, \\ u = R \text{ dans } D_n, \\ u = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \overline{D_n}, \end{cases} \tag{6.29}$$

la condition initiale étant vérifiée au sens suivant :

$$\lim_{t \searrow 0} u(t,\cdot) = 0 \text{ uniformément sur tout compact de } \overline{\Omega} \setminus \overline{D_n} \tag{6.30}$$

et

$$\lim_{t \searrow 0} u(t,\cdot) = R \text{ uniformément sur tout compact de } D_n. \tag{6.31}$$

$(M_{D_n,R})_n$ étant une suite décroissante, il existe une fonction u_R tel que :

$$u_R = \lim_{n \to \infty} M_{D_n,R} \text{ dans } Q_T. \tag{6.32}$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme IV.9. *Soit u_R la fonction définie par (6.32). Alors, pour tout $q \geq 1$ et $\tau \in]0,T[$ on a :*

$$u_R \in C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}}) \cap L^\infty(Q_T).$$

De plus, il existe $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ telle que u_R soit l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_R}{\partial t} - \Delta u_R + |\nabla u_R|^p = 0 \text{ dans } Q_T; \\ \dfrac{\partial u_R}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_T \\ u(t) = u_0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{6.33}$$

Démonstration:
Comme

$$M_{D_n,R}(t) = T(\tau)M_{D_n,R}(t-\tau) \in T(\tau)(C^+(\overline{\Omega}))$$

grâce à la Proposition IV.7 et à (6.28) on déduit que pour tout $t \in]0,T[$, $(M_{D_n,R}(t))_n$ est une suite relativement compacte dans $C^+(\overline{\Omega})$ et par conséquent, à une sous-suite près :

$$M_{D_n,R}(t) \to u_R(t) \text{ dans } C^+(\overline{\Omega}) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Alors pour tout $\tau > 0$ et $t \in]0,T[$ on a :

$$T(\tau)u_R(t) = T(\tau)(\lim_{n\to\infty} M_{D_n,R}(t)) = \lim_{n\to\infty} T(\tau)M_{D_n,R}(t) = \lim_{n\to\infty} M_{D_n,R}(\tau+t) = u_R(\tau+t).$$

Donc $u_R \in C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}})$ et vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_R}{\partial t} - \Delta u_R + |\nabla u_R|^p = 0 \text{ dans } Q_{\tau,T}, \\ \dfrac{\partial u_R}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\tau,T}. \end{cases} \tag{6.34}$$

De plus, grâce à (6.28) :

$$\|u_R\|_{L^\infty(Q_T)} \leq R \tag{6.35}$$

Montrons que $u_R \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.
Soit $\tau \in]0,T[$, multiplions la première équation de (6.34) par u_R et intégrons la sur $Q_{\tau,T}$:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_R(T,x)^2\,dx + \int_{Q_{\tau,T}} |\nabla u_R(t,x)|^2\,dx\,dt + \int_{Q_{\tau,T}} |\nabla u_R(t,x)|^p u_R(t,x)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_\Omega u_R(\tau,x)^2\,dx.$$

Compte tenu de (6.35) on déduit :

$$\int_{Q_{\tau,T}} |\nabla u_R(t,x)|^2\,dx\,dt \leq \frac{1}{2}R^2|\Omega|$$

On fait tendre $\tau \searrow 0$ dans l'inégalité ci-dessus et on obtient que $u_R \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$.
Soient $t \in]0,T[$ et $q \geq 1$. D'après (6.35) on tire :

$$\|u_R(t)\|_q \leq R|\Omega|^{1/q}. \tag{6.36}$$

Montrons qu'il existe $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tel que :

$$u_R(t) \underset{t\searrow 0}{\rightharpoonup} u_0 \text{ faiblement dans } L^q(\Omega), \quad \forall\, q \geq 1. \tag{6.37}$$

Soit $(t_n)_n$ une suite qui tend vers 0, alors grâce à (6.36), $(u_R(t_n))_n$ converge faiblement "à une sous-suite près" dans $L^q(\Omega)$.
Supposons qu'il existe deux sous-suites de $(t_n)_n$ notées par $(t_{n'})$ et $(t_{n''})$ telles que :

$$u_R(t_{n'}) \rightharpoonup u_0' \text{ faiblement dans } L^q(\Omega)$$

et

$$u_R(t_{n''}) \rightharpoonup u_0'' \text{ faiblement dans } L^q(\Omega).$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. En multipliant la première équation de (6.34) par φ et en l'intégrant sur $Q_{t_{n'},t}$ et $Q_{t_{n''},t}$ respectivement, on a d'une part :

$$\int_\Omega u_R(t)\varphi\,dx + \int_{Q_{t_{n'},t}} \nabla u_R \nabla\varphi\,dx\,ds + \int_{Q_{t_{n'},t}} |\nabla u_R|^p\varphi\,dx\,ds = \int_\Omega u_R(t_{n'})\varphi\,dx$$

et d'autre part on a :

$$\int_\Omega u_R(t)\varphi\,dx + \int_{Q_{t_{n''},t}} \nabla u_R \nabla\varphi\,dx\,ds + \int_{Q_{t_{n''},t}} |\nabla u_R|^p\varphi\,dx\,ds = \int_\Omega u_R(t_{n''})\varphi\,dx.$$

Donc, par passage à la limite lorsque $t_{n'} \searrow 0$ et $t_{n''} \searrow 0$ on déduit :

$$\int_\Omega u_0'(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u_0''(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Par conséquent :

$$u_0' \equiv u_0'' \equiv u_0 \text{ dans } \Omega$$

et (6.37) est vérifiée.

Finalement, on montrons que, pour tout $q \geq 1$, $u_R \in C([0,T], L^q(\Omega))$. Posons $f = -|\nabla u_R|^p \in L^{2/p}(Q_T)$. D'après la Proposition II.5, $u_R \in C(]0,T], L^q(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega))$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_R}{\partial t} - \Delta u_R = f \text{ dans } Q_T; \\ \dfrac{\partial u_R}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_T \\ u(t) \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } L^q(\Omega) \end{cases} \tag{6.38}$$

et pour tout $t \geq 0$:

$$u_R(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

On en déduit que $u_R \in C([0,T]; L^q(\Omega)$ est l'unique solution du problème (6.33) et en particulier :

$$u_R(t) \underset{t\searrow 0}{\longrightarrow} u_0 \text{ fortement dans } L^q(\Omega). \tag{6.39}$$

Par suite il existe un suite $t_n \searrow 0$ tel que :

$$u_R(t_n, x) \to u_0(x) \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{6.40}$$

Grâce à (6.35) on obtient que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec :

$$\|u_0\|_\infty \leq R.$$

Ce qui achève la preuve du Lemme IV.9 □

Notons par :

$$\psi_R = \begin{cases} R \ \text{ dans } \ \overline{D}, \\ 0 \ \text{ dans } \ \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{6.41}$$

alors on a le résultat suivant :

Lemme IV.10. *u_0 étant la fonction définie par (6.37), on a :*

$$u_0 \leq \psi_R \quad p.p. \ dans \quad \Omega. \tag{6.42}$$

Démonstration:
La suite $(M_{D_n,R})_n$ étant décroissante compte tenu de (6.30) on a :

$$u_R(t,x) \leq M_{D_n,R}(t,x) \text{ pour tout } (t,x) \in]0,T[\times\Omega.$$

On note par :

$$\psi_{n,R} = \begin{cases} R \ \text{ dans } \ \overline{D_n}, \\ 0 \ \text{ dans } \ \Omega \setminus \overline{D_n} \end{cases} \tag{6.43}$$

Alors, grâce à (6.30) et (6.31) on en déduit

$$\limsup_{t\searrow 0} u_R(t,x) \leq \psi_{n,R}(t,x) \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et, par passage à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient :

$$\limsup_{t\searrow 0} u_R(t,x) \leq \psi_R(t,x) \ \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{6.44}$$

Finalement, en regroupant (6.40) et (6.44) on obtient (6.42) et le Lemme IV.10 est prouvé. □

Pour tout $t \in]0,T[$, notons par :

$$M_{D,R}(t) = \sup\{T(t)\varphi;\ \varphi \in \mathcal{C},\ \|\varphi\|_\infty \leq R\} \tag{6.45}$$

Lemme IV.11. *Pour tout $\tau \in]0,T[$ et $q \geq 1$, la fonction $M_{D,R}$ vérifie :*

$$M_{D,R} \in C([0,T];L^q(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}}) \cap L^\infty(Q_T), \tag{6.46}$$

et de plus, $M_{D,R}$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 \ dans \ \ Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \Gamma_T, \\ u(0) = \psi_R \ \ dans \ \Omega \end{cases} \tag{6.47}$$

Démonstration:
Comme dans la preuve de l'existence de solutions pour le problème (1.2), on peut montrer que pour tout $\tau \in]0,T[$, $M_{D,R} \in C^{1,2}(\overline{Q_{\tau,T}})$ est une solution du problème (6.29), correspondant au domaine D et avec les conditions initiales (6.30) et (6.31). En particulier :

$$M_{D,R}(t) \to \psi_R \ \text{ p.p. dans } \ \Omega, \ \text{ lorsque } \ t \searrow 0$$

Grâce au Principe de Comparaison, [Proposition II.13],

$$\|M_{D,R}\|_{L^\infty(Q_T)} \leq R \tag{6.48}$$

Donc, lorsque $t \searrow 0$

$$M_{D,R}(t) \to \psi_R \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega), \text{ pour tout } q \geq 1. \tag{6.49}$$

On en déduit que pour tout $\tau \in]0,T[$ et $q \geq 1$, $M_{D,R}$ vérifie (6.46) et c'est l'unique solution du problème (6.47). □

Ainsi, les fonctions u_R et $M_{D,R}$ ont la même régularité donnée par (6.46) et vérifient le même problème aux limites (6.47) avec respectivement des conditions initiales u_0 et ψ_R satisfaisant (6.42). Afin de pouvoir appliquer le Principe de Comparaison [cf. Proposition II.13], on a besoin d'un résultat pour la régularité des solutions faibles du problème (1.1).

Lemme IV.12. *Soient $p \in]1,2[$, $\mu_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $u \in L^\infty(Q_T) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega))$, une solution faible du problème (1.1). Alors $u \in L^p(0,T,W^{pq}(\Omega))$, pour tout $q \geq 1$.*

Démonstration:
Pour tout $t \in]0,T[$ notons :

$$u_1(t) = S(t)\mu_0 \quad \text{et} \quad u_2 = a\int_0^t S(t-s)|\nabla u(s)|^p ds$$

Grâce aux relations (2.4) et (2.5) du Chapitre II, on a : $u_1 \in L^\infty(Q_T)$ et vérifie :

$$\|u_1(t)\|_{W^{1,pq}(\Omega)} \leq C(pq,T,\Omega)t^{-\frac{1}{2}}\|\mu_0\|_{pq} \leq C(pq,T,\Omega)|\Omega|^{1/pq}t^{-\frac{1}{2}}\|\mu_0\|_\infty, \quad \text{pour tout } t \in]0,T[,$$

pour tout $q \geq 1$. Par conséquent : $u_1 \in L^\infty(Q_T) \cap L^r(0,T,W^{1,pq}(\Omega))$ pour tout $r \in [1,2[$.
Montrons que u_2 a la même régularité.
Posons :

$$f = a|\nabla u|^p \quad \text{dans } Q_T.$$

Puisque $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ on a $f \in L^{2/p}(Q_T)$ et u_2 est la solution du problème (2.34) dans le Chapitre III. Grâce à la Proposition II.7 on a $u_2 \in W^{1,2}_{2/p}(Q_T)$ et comme u et u_1 sont dans $L^\infty(Q_T)$ on obtient $u_2 = u - u_1 \in L^\infty(Q_T)$. En particulier :

$$u_2 \in L^{2/p}(0,T;W^{2,2/p}(\Omega)). \tag{6.50}$$

Grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (cf. par exemple [**20**], p.195) pour tout $\varphi \in W^{2,\gamma}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a :

$$\|\nabla\varphi\|_{2\gamma} \leq C(\gamma,\Omega)\|\varphi\|^{\frac{1}{2}}_{W^{2,\gamma}(\Omega)}\|\varphi\|^{\frac{1}{2}}_\infty \tag{6.51}$$

Par conséquent :

$$\|\nabla u_2(t)\|_{\frac{4}{p}} \leq C(2/p,\Omega)\|u_2(t)\|^{\frac{1}{2}}_{W^{2,2/p}(\Omega)}\|u_2(t)\|^{\frac{1}{2}}_\infty, \quad \text{pour tout } t \in]0,T[$$

Puisque $u_2 \in L^\infty(Q_T)$, alors grâce à (6.50) on a :

$$u_2 \in L^{\frac{4}{p}}(0,T;W^{1,\frac{4}{p}}(\Omega)).$$

Soit $n = [\log_{2/p}\frac{pq}{2}]$ où $[a]$ est la partie entière du nombre réel a, alors :

$$2\left(\frac{2}{p}\right)^n \leq pq < 2\left(\frac{2}{p}\right)^{n+1}.$$

Si $n = 0$ alors $pq < \frac{4}{p}$ et comme $2 < \frac{4}{p}$ on en déduit que $u_2 \in L^r(0,T;W^{1,pq}(\Omega))$ pour tout $r \in]1,2[$, et la preuve du lemme IV.12 est achevée.
Si $n > 0$ alors $\frac{4}{p} \leq pq$ et $u = u_1 + u_2$ satisfait :

$$u \in L^r(0,T;W^{1,\frac{4}{p}}(\Omega)) \text{ pour tout } r \in [1,2[.$$

En particulier pour $r \in]p,2[$:

$$f \in L^{r/p}(0,T;L^{(\frac{2}{p})^2}(\Omega)).$$

Grâce à la Proposition II.7 on tire :

$$u_2 \in L^{r/p}(0,T;W^{2,(\frac{2}{p})^2}(\Omega)) \text{ pour tout } r \in]p,2[.$$

En appliquant de nouveau (6.51) on a :

$$u_2 \in L^{2r/p}(0,T;W^{1,2(\frac{2}{p})^2}(\Omega)).$$

Si $n = 1$ alors $pq < 2(\frac{2}{p})^2$ et comme $r < \frac{2r}{p}$ on obtient : $u_2 \in L^r(0,T;W^{1,pq}(\Omega))$.
Si $n > 1$, on continue le processus et on démontre, par récurrence, que pour tout $r \in]p,2[$:

$$u_2 \in L^{2r/p}(0,T;W^{1,2(\frac{2}{p})^{n+1}}(\Omega)),$$

d'où, on tire :

$$u_2 \in L^r(0,T;W^{1,pq}(\Omega)), \quad \text{pour tout } r \in]p,2[$$

On remarquera que la régularité ci-dessus, de u_2, est vraie pour tout $r \in]1,2[$. Ce qui achève la preuve du lemme IV.12. □

Grâce au lemme IV.12, u_R et $M_{D,R}$ appartiennent à $L^p(0,T;W^{1,pq}(\Omega))$ pour tout $q \geq 1$, et en particulier pour tout $q > \max\{1,q_c\}$, où $q_c = \frac{N(p-1)}{2-p}$. On peut appliquer le Principe de Comparaison, [Proposition II.13], au problème (6.47) et on a :

$$u_R(t) \leq M_{D,R}(t) \leq M(t) \text{ pour tout } t \in]0,T[, \tag{6.52}$$

u_R étant définie par (6.32).

Preuve du point (6.26) :
La suite $(M_{D_n})_n$ étant décroissante, pour tout $t \in]0,T[$ on a :

$$B(t) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{T(t)\varphi; \varphi \in \mathcal{C}_{D_n}\},$$

où la suite $(D_n)_n$ est définie par (6.21).
Donc, pour $(t_0,x_0) \in]0,T[\times\Omega$ fixé, on peut trouver une suite $(\varphi_n)_n$ telle que $\varphi_n \in \mathcal{C}_{D_n}$ et vérifie :

$$T(t_0)\varphi_n(x_0) \searrow B(t_0,x_0), \quad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{6.53}$$

Alors, grâce à (6.27) on a :

$$T(t)(\varphi_n \wedge R) \leq M_{D_n,R}(t) \text{ pour tout } t \in]0,T[. \tag{6.54}$$

Comte tenu de (6.32), par passage à la limite on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} T(t)(\varphi_n \wedge R) \leq u_R(t) \text{ dans } \Omega. \tag{6.55}$$

En regroupant les relations (6.52) et (6.55), pour tout $R > 0$ et $t \in]0, T[$ on a :

$$\limsup_{n\to\infty} T(t)(\varphi_n \wedge R) \leq M(t) \text{ dans } \Omega.$$

Donc, pour $(t_0, x_0) \in]0, T[\times\Omega$, fixé on a :

$$\limsup_{n\to\infty} T(t_0)(\varphi_n \wedge R)(x_0) \leq M(t_0, x_0), \quad \text{pour tout} \quad R > 0.$$

Alors :

$$\text{pour tout} \quad \varepsilon > 0, \exists\, n = n(\varepsilon) \quad \text{t.q.} \quad T(t_0)(\varphi_n \wedge R)(x_0) \leq M(t_0, x_0) + \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad n \geq n(\varepsilon).$$

On fait tendre R vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus et on obtient :

$$T(t_0)\varphi_n(x_0) \leq M(t_0, x_0) + \varepsilon.$$

Dons, par passage à la limite, lorsque $n \to \infty$, on tire grâce à (6.53) :

$$B(t_0, x_0) \leq M(t_0, x_0) + \varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$B(t_0, x_0) \leq M(t_0, x_0).$$

Le point (t_0, x_0) étant choisi arbitrairement, on en déduit (6.26). Ainsi :

$$A = M = B.$$

Finalement, grâce à (6.24) :

$$u = M.$$

est l'unique solution du problème (1.2). Ce qui achève la preuve du Théorème IV.5. □

Bibliographie

[1] N. Alaa. Solutions faibles d'équations paraboliques quasilinéaires avec données initiales mesure. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 3 :1–15, 1996.

[2] N. Alaa and M.Pierre. Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures. *SIAM J. Math. Anal.*, 24(1) :23–35, 1993.

[3] L. Amour and M. Ben-Artzi. Global existence and decay for a viscous Hamilton-Jacobi equation . *Nonlinear Anal*, 31 :621–628, 1998.

[4] F. Andreu, L. Boccardo, L. Orsina, and S. Segura de León. Existence results for L^1 data of some quasilinear parabolic problems with a quadratic gradient term and source. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(1) :1–16, 2002.

[5] P. Baras and M. Pierre. Problèmes paraboliques semilinéaires avec données mesures . *Applicable Analysis*, 18 :111–149, 1984.

[6] G. Barles. *Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 1994.

[7] M. Ben-Artzi. Global existence and decay for a nonlinear parabolic equation. *Nonlinear Anal.*, 19 :763–768, 1992.

[8] M. Ben-Artzi and H. Koch. Decay of mass for semilinear parabolic equation . *Comm. Partial Differential Equations*, 25(5-6) :869–881, 1999.

[9] M. Ben-Artzi, Ph. Souplet, and F.B.Weissler. The local theory for viscous Hamilton-Jacobi equations in Lebesgue spaces . *J. Math. Pures. Appl.*, 81 :343–378, 2002.

[10] S. Benachour and S. Dabuleanu. The mixed Cauchy-Dirichlet problem for a viscous Hamilton-Jacobi equation . *Accepté pour publication à Advances Diff. Equations*, 2003.

[11] S. Benachour, Ph. Laurençot, and D. Schmitt. Extinction and decay estimates for viscous Hamilton-Jacobi equations in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(4) :1103–1111, 2002.

[12] S. Benachour, Ph. Laurençot, D. Schmitt, and Ph. Souplet. Extinction and non-extinction for viscous Hamilton-Jacobi equation in $\mathbf{R^N}$. *Asymptot. Anal.*, 31(3-4) :229–246, 2002.

[13] S. Benachour and Ph. Laurencot. Global solutions to viscous Hamilton-Jacobi equations with irregular initial data . *Comm. Partial Differential Equations*, 24 :1999–2021, 1999.

[14] S. Benachour, B. Roynette, and P. Vallois. Solution fondamentale de $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$. *Astérisque*, 236 :41–71, 1996.

[15] S. Benachour, B. Roynette, and P. Vallois. Asymptotic estimates of solutions of $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, d \geq 2$. *J. Funct. Anal.*, 144 :301–324, 1997.

[16] Ph. Benilan. *Evolution equations and accretive operatots*. Lectures notes taken bu S. Lenhardt, University of Kentucky,Spring, 1981.

[17] S.N. Bernstein. A limitation on the moduli of a sequence of derivatives of solutions of equations of parabolic type. *Dolk. Acad. Nauk SSSR*, 18 :385–388, 1938.

[18] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, Th. Gallouët, and L. Orsina. Nonlinear parabolic equations with measure data . *J. Funct. Anal.*, 147 :237–258, 1997.

[19] L. Boccardo, F. Murat, and J.-P. Puel. Existence results for some quasilinear parabolic equations . *Nonlinear Anal.*, 13 :373–392, 1989.

[20] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1993.

[21] H. Brezis and Th. Cazenave. *Linear semigroups of contractions ; the Hille-Yosida theory and some applications*. Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Pierre et Marie Curie, 1993.

[22] H. Brezis and Th. Cazenave. A nonlinear heat equation with singular initial data . *J.Anal.Math.*, 68 :877–894, 1996.

[23] H. Brezis and A. Friedman. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions . *J.Math.Pures et Appl.*, 62 :73–97, 1983.

[24] H. Brezis and W.A. Strauss. Semi-linear second-order elliptic equations in L^1 . *J. Math. Soc. Japan*, 25 :565–590, 1973.

[25] Th. Cazenave and A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'evolution semi-linéaires.* Ellipses, 1990.

[26] M. Chipot and F. B. Weissler. Some blow up results for a nonlinear parabolic problem with gradient term . *SIAM J. Math. Anal.*, 104 :886–907, 1989.

[27] Th. Coulhon and D. Lamberton. Régularité L^p pour les équations d'évolution . *Publ. Math. Univ. Paris VII*, 26 :155–165, 1984/1985.

[28] M.G. Crandall, P.-L.Lions, and P.E. Souganidis. Maximal solutions and universal bounds for some partial differential equations of evolution . *Arch.Rational Mech.Anal.*, 105(2) :163–190, 1989.

[29] S. Dabuleanu. Problèmes aux limites pour des équations de Hamilton-Jacobi avec viscuosité . *Prépublications IECN*, 2003.

[30] B. Davies and Y. Safarov. *Spectral theory and geometry.* Cambridge University Press, 1999.

[31] D.Gilbarg and N.S.Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order* . Springer-Verlag, 1983.

[32] S.D. Eidelman and N.V. Ivasisen. Investigation on the Green matrix for a homogeneous parabolic boundary value problem . *Trans. Moscow Math. Soc.*, 23 :179–243, 1970.

[33] L.C. Evans. *Partial differential dquations* , volume 19. AMS, 1998.

[34] L.C. Evans and H. Ishii. A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities . *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non Linéaire*, 2 :1–20, 1985.

[35] L.C. Evans and P.E. Souganidis. A PDE approach to geometric optics for certain reaction di ffusion equations . *Ind.U.Math.J.*, 38 :773–797, 1989.

[36] W.H. Fleming and R.W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control.* Springer, Berlin, 1975.

[37] W.H. Fleming and P.E. Souganidis. A PDE viscosity solution approach to some problems of large deviation . *Ann.Scuola Norm. Sup.*, 13 :171–192, 1986.

[38] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type* . Prentice-Hall, Inc., 1964.

[39] B. Gilding, M. Guedda, and R. Kersner. The Cauchy problem for the KPZ equation . *LAMFA 1999 preprint, accepté à J. Math.Anal.Appl.*, 28.

[40] Th. Goudon and M. Saad. Parabolic equations involving 0th and 1st order terms with L^1 data . *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17 :433–469, 2001.

[41] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains* . Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[42] P. Hartman. *Ordinary differential equations* . John Wiley & Sons, Inc, 1964.

[43] M. Hieber and J. Pruss. Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates for parabolic evolution equations . *Comm. Part. Diff. Equations*, 22 :1647–1669, 1997.

[44] S. Kaplan. On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations . *Comm. Pure Appl. Math.*, XVI :305–330, 1963.

[45] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zang. Dynamic scaling of growing interfaces . *Phys. Rev. Lett.*, 56 :889–892, 1986.

[46] T. Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity . *Differ. Integral Equations.*, 7 :949–966, 1994.

[47] T. Kato and H. Fujita. On the nonstationary Navier-Stokes system . *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 32 :243–260, 1962.

[48] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques* . Springer, 1993.

[49] J. Krug and H. Spohn. Universality classes for deterministic surface growth . *Phys. Rev. A.*, 38 :4271–4283, 1988.

[50] N.V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces* , volume 12 of *Graduate Studies in Mathematics.* AMS, 1998.

[51] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, and N.N. Uralceva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* , volume 23. AMS, 1988.

[52] D. Lamberton. Equations d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p . *J. Func. Anal.*, 72(2) :252–262, 1997.

[53] R. Landes and V. Mustonen. On parabolic initial-boundary value problems with critical growth for the gradient. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 11(2) :135–138, 1994.

[54] Ph. Laurençot and Ph. Souplet. On the growth of mass for a viscous Hamilton-Jacobi equation . *J.d'Analyse Math.*, 89 :367–383, 2003.

[55] G.M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations.* World Scientific, 1998.

[56] P.L. Lions. Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires . *Arch. Rati. Mech. Anal.*, 74 :335–353, 1980.

[57] P.L. Lions. Asymptotic behaviour of some nonlinear heat equations. *Phys.D*, 5(2-3) :293–306, 1982.

[58] P.L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, volume 69 of *Reserch Notes in Mathematics.* Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[59] W.-M. Ni and P. Sacks. Singular behaviour in nonlinear equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 287 :657–671, 1985.

[60] M.H. Protter and H.F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations* . Prentice-Hall, INC, 1967.

[61] P. Quittner. Global existence for semiliear parabolic problems . *Adv. Math. Sci. Appl*, 10(2) :643–660, 2000.

[62] P. Quittner and Ph. Souplet. Admissible L_p norms for local existence and for continuation in semilinear parabolic systems are not the same . *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 131A :1435–1456, 2001.

[63] F. Rothe. *Real analysis, Third Edition.* Macmillan Publishing Company, 1998.

[64] H.L. Royden. *Global solutions of reaction-diffusion systems* , volume 1072. Springer-Verlag, 1984.

[65] J. Serrin. *Gradient estimates for solutions of nonlinear elliptic equations and parablic problems, Contributions in Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello.* Academic Press, New York, 1971.

[66] Ph. Souplet. Recent results and open problems on parabolic equations with gradient nonlinearities . *Electronic J. Diff. Equation*, 2001(20) :1–19, 2001.

[67] Ph. Souplet. Gradient blow-up for multidimensional nonlinear parabolic equations with general boundary conditions . *Diff.Int. Equation*, 15(2) :237–256, 2002.

[68] Ph. Souplet and F.B. Weissler. Poincare's inequality and global solutions of a nonlinear parabolic equation . *Ann. Inst. H.Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 16(3) :335–371, 1999.

[69] M.E. Taylor. *Partial differential equations III, Nonlinear equations* . Spinger-Verlag, 1996.

[70] F.B. Weissler. Semilinear evolution equations in Banach spaces . *J. funct. Anal.*, 32 :277–296, 1979.

[71] F.B. Weissler. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equation in L^p. *Indiana Univ. Math. J*, 29 :79–102, 1980.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Mademoiselle **DABULEANU Simona Maria**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY 1

en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER n° 834

Nancy, le 8 juillet 2003

Le Président de l'Université

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY I
LE PRÉSIDENT

Cl. BURLET

Université Henri Poincaré, Nancy I
24-30 rue Lionnois - B.P. 3069 - 54013 NANCY Cédex
Tél. : 03 83 68 20 00 - Fax : 03 83 68 21 00

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'équation de Hamilton-Jacobi avec viscosité :

$$(VHJ) \qquad u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p, t > 0, x \in \Omega,$$

où $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné à frontière assez régulière. On étudie l'existence, l'unicité et la régularité des solutions faibles des problèmes aux limites de (VHJ) avec une condition au bord homogène de type Dirichlet ou Neumann et des données initiales μ_0, des mesures de Radon bornées ou bien des fonctions mesurables dans un espace de Lebesgue $L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$. Des propriétes qualitatives des solutions faibles sont étudiées à l'aide d'une technique dûe à S.N. Bernstein. Un interêt particulier est accordé au comportement asymptotique des solutions pour des temps grands, en fonction du signe de a et de l'exposant p. On montre aussi l'existence de solutions de (VHJ) avec une condition au bord homogène du type Neumann, dans le cas où Ω est un ouvert convexe et la donnée initiale $\mu_0 = +\infty$ sur un ouvert $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ et $\mu_0 = 0$ sur $\Omega \setminus \overline{D}$.

Initial boundary-value problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with irregular initial data

This thesis deal with the viscous Hamilton-Jacobi equations of the form :

$$(VHJ) \qquad u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p, \ t > 0, \ x \in \Omega,$$

where $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $p > 0$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega$. We study the existence, uniqueness and regularity of weak solutions for (VHJ) equation with Dirichlet or Neumann homogeneous boundary conditions and irregular initial data μ_0. The cases of initial data μ_0 a bounded Radon measure, or a function in the Lebesgue space $L^q, 1 \leq q < \infty$ are investigated. Next, using the Bernstein technique we prove some qualitative properties of these solutions. A particular attention is given to the long time behaviour depending on the sign of a and the exponent p. We also study the existence and the uniqueness of the solutions of (VHJ) equation for the Neumann boundary condition, when Ω is a convex bounded domain and the initial data $\mu_0 = +\infty$ on a sub-domain $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ and $\mu_0 = 0$ on $\Omega \setminus \overline{D}$.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : équation parabolique non-linéaire, problème aux limites, équation de Hamilton-Jacobi, condition de Dirichlet, condition de Neumann, technique de Bernstein, comportement asymptotique.

Code A.M.S. : 35K55, 35K60, 35B33, 35B35, 35B65.

Institut Élie Cartan CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences-B.P.239 - 54506 Vandoeuvre-lès Nancy CEDEX