



**HAL**  
open science

## Chaînes de spins quantiques hors de l'équilibre

Thierry Platini

► **To cite this version:**

Thierry Platini. Chaînes de spins quantiques hors de l'équilibre. Autre [cond-mat.other]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2008. Français. NNT : 2008NAN10150 . tel-01748197

**HAL Id: tel-01748197**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748197>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➤ Contact SCD Nancy 1 : [theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr](mailto:theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

U.F.R Sciences & Techniques de la Matière et des Procédés  
Ecole Doctorale Energie Mécanique et Matériaux  
Formation Doctorale Physique et Chimie de la Matière et des Matériaux

# THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de :

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

DISCIPLINE : SCIENCES PHYSIQUES

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE STATISTIQUE

par **Thierry PLATINI**

## Chaînes de spins quantiques hors de l'équilibre

Soutenance publique prévue le 1 Juillet 2008 devant le jury composé de

Membres du jury :

Rapporteurs : P. Calabrese, Ricertore in formazione, Université de Pise, Italie  
F. van Wijland, Maître de Conférences,  
Université Denis Diderot, Paris VII

Examineurs : S. Attal, Professeur, Université Claude Bernard, Lyon I  
J. M. Luck, Expert Senior CEA, SphT Saclay  
B. Berche, Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I  
D. Karevski, Maître de Conférences,  
Université Henri Poincaré, Nancy I (Directeur de Thèse)

---

**Laboratoire de Physique des Matériaux**  
**Faculté des Sciences & Techniques - 54500 Vandœuvre-lès-Nancy**



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Présentation du modèle <math>XY</math></b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Généralités sur le modèle <math>XY</math></b>	<b>5</b>
1.1	Diagonalisation canonique . . . . .	5
1.2	Diagramme de phase du modèle $XY$ . . . . .	8
1.2.1	Vecteurs propres et valeurs propres du modèle $XX$ . . . . .	9
1.2.2	Vecteurs propres et valeurs propres du modèle d'Ising . . . . .	10
1.2.3	Diagramme de phase du modèle $XY$ . . . . .	10
1.3	Propriétés de l'équilibre . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Dynamique du système</b>	<b>14</b>
2.1	Evolution temporelle des opérateurs fermioniques . . . . .	14
2.2	Evolution temporelle des opérateurs de Clifford . . . . .	15
<b>II</b>	<b>Dynamique unitaire</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Relaxation à partir d'un état initial inhomogène</b>	<b>18</b>
3.1	Etat initial et évolution temporelle . . . . .	18
3.2	Valeur moyenne . . . . .	20
3.3	Système préparé dans un état complètement factorisé . . . . .	22
3.4	Evolution d'une interface . . . . .	23
3.4.1	Le modèle $XX$ . . . . .	24
3.4.2	Le modèle d'Ising . . . . .	25
3.5	Evolution d'un sous-système saturé en champs . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Mise en contact de sous-systèmes thermalisés - Interface "<i>Bain - Système</i>"</b>	<b>29</b>
4.1	Conditions initiales . . . . .	29
4.2	Evolution du profil d'aimantation transverse, ( $T_b = \infty$ ) . . . . .	30
4.3	Généralisation au cas $T_b \neq \infty$ et définition du courant d'aimantation . . . . .	31
4.4	Etude du modèle $XX$ . . . . .	33
4.4.1	A température nulle . . . . .	34
4.4.2	A température non nulle . . . . .	37
4.5	Etude du modèle d'Ising critique . . . . .	40
4.5.1	A température nulle . . . . .	41
4.5.2	A hautes températures . . . . .	43

4.6	Etat stationnaire . . . . .	43
4.7	Conclusion . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Relaxation d'un sous-système de taille finie</b>	<b>49</b>
5.1	Etude du modèle $XX$ . . . . .	50
5.1.1	A température nulle . . . . .	50
5.1.2	A température non nulle . . . . .	51
5.2	Etude du modèle d'Ising critique . . . . .	52
5.3	Conclusion . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Entropie d'intrication : Généralités</b>	<b>55</b>
6.1	Généralités . . . . .	55
6.2	Entropie d'un système bipartite . . . . .	56
6.3	Entropie de von Neumann, sous extensivité . . . . .	57
6.4	Le cas de systèmes unidimensionnels . . . . .	58
6.5	Effet de la température, retour de l'extensivité . . . . .	59
6.6	Entropie d'intrication et chaînes de spins quantiques . . . . .	60
6.6.1	La matrice densité réduite . . . . .	60
6.6.2	Corrélateurs des opérateurs de Clifford . . . . .	62
6.6.3	Le diagramme de phase du modèle $XY$ . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Evolution de l'entropie d'intrication dans les systèmes hors de l'équilibre</b>	<b>67</b>
7.1	L'entropie d'intrication du modèle $XY$ . . . . .	67
7.2	Le cas d'une trempe globale . . . . .	68
7.3	Le cas d'une trempe locale . . . . .	69
7.3.1	Sur un système infini . . . . .	69
7.3.2	Sur un système semi-infini . . . . .	72
7.4	Conclusion . . . . .	79
<b>III</b>	<b>Systèmes quantiques ouverts : interactions répétées</b>	<b>81</b>
<b>8</b>	<b>Interactions répétées</b>	<b>83</b>
8.1	Description du processus d'interactions répétées . . . . .	83
8.2	Equation d'évolution du système . . . . .	85
8.2.1	Matrice densité réduite . . . . .	85
8.2.2	Limite continue . . . . .	87
<b>9</b>	<b>Interactions répétées sur une chaîne <math>XY</math></b>	<b>88</b>
9.1	Etat initial . . . . .	89
9.2	Dynamique des opérateurs de Clifford . . . . .	89
9.3	Evolution temporelle de la matrice densité réduite . . . . .	90
9.4	Valeur moyenne d'une observable . . . . .	92
9.5	Limite continue . . . . .	94
9.5.1	Evolution libre du système . . . . .	95
9.5.2	Evolution d'un système ouvert . . . . .	95
9.5.3	Interaction entre premiers voisins . . . . .	96
9.5.4	Influence du système sur l'environnement . . . . .	97

9.6	Conclusion	98
<b>10</b>	<b>Modèle Jouet</b>	<b>99</b>
10.1	Relaxation de l'aimantation	99
10.2	Entropie d'intrication	100
10.3	Energie dissipée dans le bain, travail	102
10.4	Equation de Lindblad	103
10.5	1 spin et 2 bains	104
10.6	Conclusion	105
<b>11</b>	<b>Relaxation de la chaîne <math>XX</math></b>	<b>106</b>
11.1	Dissipation par un bord	106
11.2	Evolution temporelle dans le régime des temps $t < L_s$	107
11.3	Convergence vers l'état stationnaire	112
11.3.1	Etat stationnaire	112
11.3.2	Convergence	113
11.4	Loi de Fourier	117
11.4.1	Chaîne $XX$ homogène	118
11.4.2	Gaz de spins presque libres	120
11.4.2.1	Gaz de spins isolé	121
11.4.2.2	Système ouvert sur l'environnement	121
11.4.3	Résultats préliminaires et perspectives	123
11.5	Conclusion et Perspectives	125
<b>12</b>	<b>Conclusion</b>	<b>126</b>
<b>13</b>	<b>Appendice</b>	<b>128</b>
13.1	Eléments de la matrice $\mathbf{R}(t)$	128
13.2	Calcul explicite de l'aimantation transverse	128
13.3	Contributions de volume et de surface des profils $p^j$	130
13.4	Fonction de Green du modèle $XX$ à température nulle	130
13.5	Fonction de Green du modèle d'Ising à température nulle	132
13.6	Fonction de Green du modèle $XX$ à température finie	132
13.7	Interaction répétées; limite continue	133

# Introduction

La physique des systèmes à l'équilibre est depuis longtemps bien comprise, décrite par le formalisme, robuste, de la physique statistique. En revanche, hors de l'équilibre, il n'existe pas de cadre théorique général qui puisse être considéré comme l'analogue de la théorie des ensembles. En général, on se contente d'approches phénoménologiques ou on se restreint à traiter les situations proches de l'équilibre, par le biais de la théorie de la réponse linéaire. Pour des systèmes loin de l'équilibre ou maintenus dans un état stationnaire par l'application de courants macroscopiques, aucune approche systématique n'existe.

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans le contexte de la physique des systèmes en dehors de l'équilibre. Alors que dans le cadre de l'étude du vieillissement, le point de départ de nombreux travaux consiste en la variation brutale d'un paramètre extérieur, comme la température ou le champ magnétique [54, 61, 62], nous considérons ici, l'évolution temporelle générée par la mise en interaction de sous-systèmes. L'état initial est inhomogène et la dynamique tend à l'homogénéisation [30, 36, 37, 68, 63, 64, 66, 67]. Nous sommes alors libres d'étudier l'évolution de systèmes en tenant compte de l'effet de la température (considérant pour cela l'état de Gibbs de chaque sous-système), ou au contraire, de focaliser notre attention sur les effets purement quantiques qui dominent à température nulle. On pourra, suivant les cas, se pencher sur l'étude des problèmes liés aux transferts de chaleur et d'énergie ou s'intéresser à des notions strictement quantiques telles que l'intrication. Enfin, une situation intermédiaire, consisterait en la mise en interaction de deux sous-systèmes : l'un préparé dans l'état fondamental, l'autre dans un état thermique.

Les chaînes de spins sont d'excellentes candidates pour cette étude, car elles comptent de nombreux atouts, dont un majeur : leur faible dimensionnalité. Dans bien des cas, le comportement des systèmes de basse dimensionnalité échappe à l'intuition classique et présente un comportement exotique. Le caractère unidimensionnel de ces systèmes permet surtout le développement d'outils analytiques (fermionisation [1, 15], bosonisation [2, 3]) et plus souvent numériques [71, 72, 73]. Ces modèles sont aussi le support de nombreux domaines de la physique moderne et sont analysés, par exemple, dans le cadre des phénomènes critiques et de la décohérence [4, 5, 6].

Ce travail propose une analyse de l'évolution temporelle du modèle  $XY$  quantique, à travers l'étude du profil d'aimantation transverse et du courant associé. Dans la première partie, nous présentons le modèle  $XY$  ainsi que la transformation de Jordan-Wigner qui consiste en une réécriture de l'hamiltonien en terme d'opérateurs fermioniques permettant la diagonalisation exacte du problème.

Nous exposons dans la seconde partie, le comportement hors équilibre, généré par l'évolu-

tion unitaire qui, elle-même, est obtenue par la mise en interaction de sous-systèmes. Après avoir exposé dans le chapitre 3, l'état initial choisi ainsi que l'hamiltonien qui gouverne la dynamique, nous entrons, avec les chapitres 4 et 5, dans le vif du sujet. Nous y considérons l'évolution de systèmes thermalisés par paquets et analysons le comportement d'échelle de l'aimantation transverse et du courant dans la limite des temps longs. Dans ce contexte, la majeure partie des résultats est obtenue de façon analytique, confirmée par une étude numérique exacte et validée par la comparaison aux résultats de la littérature [36, 37, 38]. Le chapitre 6 a pour but d'introduire la notion d'intrication mesurée par l'entropie de von Neumann. Dans le chapitre 7, nous étudions la dynamique, à température nulle, générée par une trempe locale. L'étude de l'entropie d'intrication est essentiellement numérique et permet, dans un premier régime de temps, de valider les prédictions de la théorie conforme [136]. Nous analysons alors, loin de l'équilibre, le comportement de l'intrication de systèmes critiques puis non-critiques.

Dans une troisième partie, notre étude se tournera vers la dynamique de systèmes quantiques ouverts. L'interaction avec l'environnement est décrite dans le chapitre 8 par le processus, récemment proposé [146, 147, 148, 149], d'interactions répétées. Une analyse théorique de l'évolution du modèle  $XY$ , en interaction avec l'environnement, est donnée dans le chapitre 9. Nous y donnons l'équation d'évolution discrète de l'ensemble des corrélateurs et obtenons, dans la limite d'interactions continues, l'équation différentielle qui gouverne l'évolution du système. Nous poursuivons, dans le chapitre 10, par une étude analytique d'un modèle jouet qui nous permet de tester l'influence des paramètres contrôlant la forme de l'interaction avec le bain. Dans le dernier chapitre, nous analysons numériquement l'évolution du modèle  $XX$  ouvert et étudions la relaxation du système vers l'état stationnaire décrit par A. Dhahri [153]. Dans le cadre de la physique associée aux problèmes de transfert de chaleur, ce chapitre se termine par une étude préliminaire d'un modèle de spin presque libre, nous permettant de conclure sur des perspectives.

Les travaux exposés dans ce manuscrit ont fait l'objet de publications scientifiques :

Entanglement evolution after connecting finite to infinite quantum chains

Eisler V., Karevski D., Platini T., Peschel I.  
*J. Stat. Mech.* (2008) 01023

Relaxation in the  $XX$  quantum chain

Platini T., Karevski D.  
*J. Phys. A : Math. Theor.* 40 (2007) 1711-1726

(Publication in proceedings) Out of equilibrium process in Ising quantum chains

Platini T., Karevski D.  
*Journal of Physics : Conference Series* 40 (2006) 93

Scaling and front dynamics in Ising quantum chains

Platini T., Karevski D.  
*European Physical Journal B* 48 (2005) 225

Première partie

Présentation du modèle  $XY$

# Chapitre 1

## Généralités sur le modèle $XY$

Le modèle  $XY$  en champ nul a d'abord été diagonalisé en 1961 par Lieb, Schultz et Mattis [1]. L'année qui suivit, Katsura [7] obtient les solutions sous champ et en 1970 Pfeuty [10] résout le modèle d'Ising en champ transverse. Il convient de citer les travaux précurseurs réalisés sur le comportement en dehors de l'équilibre, à la fin des années 1960 par Neimeijer [8] et Tjion [9] ainsi que l'analyse détaillée du modèle  $XY$  et du comportement des fonctions de corrélations obtenue en 1971 par Barouch et McCoy [17, 18, 19, 20]. Plus récemment, le modèle  $XX$  isotrope a été le support d'études réalisées, en dehors de l'équilibre, dans le cadre de la condensation de Bose-Einstein [66, 67].

Dans ce chapitre, après une présentation du modèle  $XY$ , nous exposons la transformation de Jordan-Wigner permettant le mapping du modèle  $XY$  en un modèle de fermions sur réseau. La diagonalisation du modèle  $XY$  consiste alors en la réécriture de l'hamiltonien sous la forme d'un hamiltonien de fermions libres. Dans un deuxième temps, nous donnerons le spectre des excitations associé au modèle ainsi que les vecteurs propres, dans le cas des modèles  $XX$  et Ising critiques. Pour finir nous discuterons rapidement les propriétés de ce modèle, par l'étude simple du comportement de l'aimantation du spin de surface.

### 1.1 Diagonalisation canonique

Nous considérons l'hamiltonien du modèle  $XY$  [1, 7, 8, 10] décrivant une chaîne quantique de spins en interactions, donné par

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L-1} [J_x \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J_y \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y] - \frac{h}{2} \sum_{n=1}^L \sigma_n^z, \quad (1.1)$$

où  $\sigma_n$  sont les matrices de Pauli associées au site  $n$ ,  $h$  le champ magnétique appliqué dans la direction  $z$ ,  $J_x$  et  $J_y$  les constantes de couplage entre premiers voisins, fonction du paramètre d'anisotropie  $\kappa$  :

$$J_x = \frac{1 + \kappa}{2}, \quad J_y = \frac{1 - \kappa}{2} \quad \kappa \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

La limite inférieure ( $\kappa = 0$ ) correspond au modèle  $XX$  dont la symétrie est continue. Bien que ce modèle ne présente pas de transition ordre-désordre, deux phases distinctes peuvent

être identifiées, l'une paramagnétique et l'autre critique. Dans cette dernière la longueur de corrélation diverge, conduisant à une décroissance lente des fonctions de corrélations [11, 12]. Toujours, dans le cas du modèle  $XX$ , la relation  $[H, M^z] = 0$  (avec  $M^z = \sum_j \sigma_j^z$ ) impose la conservation simultanée de l'énergie de liaison et de l'énergie d'interaction avec le champ. Cette propriété est perdue dès que l'on s'écarte de  $\kappa = 0$  et on autorise alors l'échange d'énergie entre ces deux secteurs. La limite supérieure ( $\kappa = 1$ ) décrit le modèle d'Ising quantique et correspond à la limite anisotrope extrême du modèle d'Ising classique à deux dimensions. Ces deux modèles se situent dans la même classe d'universalité [13, 14], de sorte que le modèle quantique, comme l'analogue classique, présente un point critique séparant les phases paramagnétique et ferromagnétique.

Sous la transformation de Jordan-Wigner [15] l'hamiltonien du modèle  $XY$  se réécrit comme l'hamiltonien d'une chaîne de fermions. L'objectif est de faire apparaître les opérateurs création et annihilation de particules à partir des opérateurs "échelle", définis par  $\sigma_n^\pm = (\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)/2$ . On note, en effet, que les opérateurs "échelle" obéissent aux règles d'anticommutations sur un même site  $\{\sigma_n^+ \sigma_n^-\} = 1$ , mais commutent lorsqu'ils sont associés à des sites différents. L'introduction de l'opérateur  $A_n$  donné par  $A_n = \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z)$  permet de définir les opérateurs fermioniques

$$c_n = A_n \sigma_n^- \quad (1.3)$$

$$c_n^\dagger = \sigma_n^+ A_n^\dagger = A_n \sigma_n^+ \quad (1.4)$$

Afin de diagonaliser l'hamiltonien (1.1) nous utiliserons la transformation de Jordan-Wigner en termes d'opérateurs de Clifford,  $\Gamma_n^1$  et  $\Gamma_n^2$  [21] (ou fermion de Majorana [16]) :

$$\Gamma_n^1 = A_n \sigma_n^x \quad (1.5)$$

$$\Gamma_n^2 = -A_n \sigma_n^y \quad (1.6)$$

Ces opérateurs ont l'avantage d'être hermitien ( $(\Gamma_n^\nu)^\dagger = \Gamma_n^\nu$ ) et vérifient les relations d'anticommutation

$$\{\Gamma_n^\nu, \Gamma_m^\mu\} = 2\delta_{n,m}\delta_{\nu,\mu}, \quad \forall \nu, \mu = 1, 2; \quad \forall n, m = 1, \dots, L. \quad (1.7)$$

Les différents termes de l'hamiltonien s'expriment en fonction des opérateurs de site :

$$\sigma_n^z = -i\Gamma_n^2 \Gamma_n^1 \quad (1.8)$$

$$\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x = -i\Gamma_n^2 \Gamma_{n+1}^1 \quad (1.9)$$

$$\sigma_n^y \sigma_{n+1}^y = -i\Gamma_{n+1}^2 \Gamma_n^1 \quad (1.10)$$

La nature quadratique de l'hamiltonien, en terme d'opérateurs de Clifford, assure l'intégrabilité du modèle. Des termes supplémentaires, comme  $\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z$ , apparaissent par exemple dans le modèle d'Heisenberg [22]. La réécriture en fonction des opérateurs de Clifford conduit à  $\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \propto \Gamma_n^2 \Gamma_n^1 \Gamma_{n+1}^2 \Gamma_{n+1}^1$  de sorte que la méthode utilisée ici s'avère inutile. De plus le caractère non local de la transformation aboutit, pour certaines observables, à l'apparition de chaînes d'opérateurs de Clifford.

$$\sigma_n^x = \prod_{j=1}^{n-1} (-i\Gamma_j^2 \Gamma_j^1) \Gamma_n^1 \quad (1.11)$$

$$\sigma_n^x \sigma_m^x = i\Gamma_n^2 \prod_{j=n+1}^{m-1} (-i\Gamma_j^2 \Gamma_j^1) \Gamma_m^1 \quad (1.12)$$

Ainsi l'application d'un champ dans la direction  $x$  ou l'ajout d'interactions à longue portée brise le caractère intégrable du modèle. Cependant tant que l'hamiltonien reste quadratique en terme d'opérateurs de Clifford il reste intégrable; ainsi un hamiltonien plus général peut être construit en ajoutant une interaction, dite de Dzyaloshinskii-Moriya [28, 29, 30], de la forme  $\sigma_n^x \sigma_{n+1}^y - \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x$ .

Nous poursuivons en introduisant l'opérateur "colonne" à  $2L$ -composantes  $\mathbf{\Gamma}$  défini par :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \Gamma_2^1 \\ \vdots \\ \Gamma_L^1 \\ \Gamma_1^2 \\ \Gamma_2^2 \\ \vdots \\ \Gamma_L^2 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

dont l'opérateur adjoint est donné par  $\mathbf{\Gamma}^\dagger = (\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_L^1, \Gamma_1^2, \dots, \Gamma_L^2)$ . Nous noterons  $\mathbf{\Gamma}_n$  la  $n^{ieme}$  composante de l'opérateur  $\mathbf{\Gamma}$ , ainsi

$$\mathbf{\Gamma}_n = \Gamma_n^1, \quad \mathbf{\Gamma}_{n+L} = \Gamma_n^2, \quad \forall n = 1, \dots, L. \quad (1.14)$$

L'hamiltonien (1.1) s'écrit sous la forme compacte :

$$H = \frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{T} \mathbf{\Gamma} \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice hermitienne [40, 41] de dimension  $2L \times 2L$  :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

avec  $\mathbf{C}$  (de dimension  $L \times L$ ) donnée par :

$$\mathbf{C} = -i \begin{pmatrix} h & J_y & & \\ J_x & h & J_y & \mathcal{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathcal{O} & & J_x & h & J_y \\ & & & J_x & h \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

En définissant les vecteurs propres  $V_q$  et valeurs propres  $\epsilon_q$  de  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} V_q = \epsilon_q V_q, \quad q = 1, \dots, 2L, \quad (1.18)$$

on construit la matrice unitaire  $\mathbf{U}$  telle que :

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^\dagger, \quad (1.19)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}$  diagonale ( $\Lambda_{p,q} = \epsilon_q \delta_{p,q}$ ). L'équation (1.15) devient alors

$$H = \frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{\Gamma}. \quad (1.20)$$

Finalement, en définissant  $\mathbf{X} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{\Gamma} / \sqrt{2}$  et  $\mathbf{X}_q$  la  $q^{ieme}$  composante de  $\mathbf{X}$ , on obtient :

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{\Lambda} \mathbf{X} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{2L} \epsilon_q \mathbf{X}_q^\dagger \mathbf{X}_q, \quad (1.21)$$

avec

$$\mathbf{X}_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{2L} V_q^*(n) \mathbf{\Gamma}_n \quad (1.22)$$

$$\mathbf{X}_q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{2L} V_q(n) \mathbf{\Gamma}_n. \quad (1.23)$$

On vérifie facilement que les opérateurs  $\mathbf{X}_q$  et  $\mathbf{X}_q^\dagger$  obéissent aux relations d'anticommutations fermioniques, définissant ainsi les opérateurs créations et annihilation :

$$\{\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_k^\dagger\} = \delta_{q,k} \quad (1.24)$$

$$\{\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_k\} = \{\mathbf{X}_q^\dagger, \mathbf{X}_k^\dagger\} = 0. \quad (1.25)$$

La structure particulière de  $\mathbf{\Gamma}$  nous permet de définir les vecteurs réels, à  $L$  composantes,  $\phi_q$  et  $\psi_q$  tels que :

$$V_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_q \\ -i\psi_q \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

vérifiant les relations obtenues par Lieb, Schultz et Mattis [1] en 1961 :

$$-i\mathbf{C}\psi_q = \epsilon_q \phi_q \quad (1.27)$$

$$\mathbf{C}^\dagger \phi_q = -i\epsilon_q \psi_q. \quad (1.28)$$

Ces relations sont invariantes sous le changement simultané de  $\epsilon_q \rightarrow -\epsilon_q$  et  $\psi_q \rightarrow -\psi_q$ , de sorte que pour chaque couple  $(\epsilon_q, V_q)$  où  $\epsilon_q > 0$ , correspond un couple  $(-\epsilon_q, V_{q'})$  pour lequel  $\phi_{q'} = \phi_q$  et  $\psi_{q'} = -\psi_q$ . L'égalité  $\mathbf{X}_{q'}^\dagger = \mathbf{X}_q$  nous pousse à associer un trou à chaque excitation d'énergie négative. Cela nous permet une dernière réécriture de l'hamiltonien en terme de fermions libres, avec  $\epsilon_q \geq 0, \forall q = 1, \dots, L$  :

$$H = \sum_{q=1}^L \epsilon_q \left( \mathbf{X}_q^\dagger \mathbf{X}_q - \frac{1}{2} \right). \quad (1.29)$$

Dès lors le problème consiste essentiellement en la résolutions des équations (1.27, 1.28). La solution du modèle  $XY$  en champ nul, fut obtenue par Lieb, Schultz and Mattis en 1961 [1].

## 1.2 Diagramme de phase du modèle $XY$

Dans cette section nous présentons rapidement le diagramme de phase du modèle  $XY$ . Les équations (1.27, 1.28) reliant les vecteurs  $\phi$  et  $\psi$  conduisent à

$$j_y \phi_q(n-1) + h \phi_q(n) + j_x \phi_q(n+1) = -\epsilon_q \psi_q(n). \quad (1.30)$$

En utilisant l'ansatz  $\phi_q(n) = e^{iqn}$  et  $\psi_q(n) = -e^{i\theta_q} e^{iqn}$  il vient :

$$\epsilon_q = \sqrt{(h + \cos q)^2 + \kappa^2 \sin^2 q}, \quad (1.31)$$

avec la condition

$$\theta_q = \arctan\left(\frac{\kappa \sin q}{h + \cos q}\right), \quad 0 \leq \theta_q < 2\pi. \quad (1.32)$$

Les conditions de bords  $\phi_q(L+1) = \psi_q(0) = 0$ , imposent alors

$$\begin{aligned} \phi_q(k) &\propto \sin(qk - \theta_q) \\ \psi_q(k) &\propto \sin(qk), \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec  $q(L+1) = n\pi + \theta_q$  ou plus explicitement

$$q = \frac{\pi}{L+1} \left( n - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\kappa \sin q}{h + \cos q}\right) \right). \quad (1.34)$$

### 1.2.1 Vecteurs propres et valeurs propres du modèle $XX$

Dans le cas de la chaîne  $XX$ , la constante d'anisotropie  $\kappa$  est nulle et la condition (1.34) conduit à :

$$q = \frac{n\pi}{L+1}, \quad n = 1, \dots, L+1. \quad (1.35)$$

Les vecteurs propres et valeurs propres sont simplement donnés par :

$$\phi_q(k) = -\psi_q(k) = \frac{2}{\sqrt{L+1}} \sin(qk) \quad \text{et} \quad \epsilon_q = |h + \cos q|. \quad (1.36)$$

Dans la limite thermodynamique, on pose  $q = \pi - \theta$ , avec  $\theta \in [0, \pi]$ . Le spectre devient simplement

$$\epsilon(\theta) = |h - \cos \theta|. \quad (1.37)$$

Dans la région  $h > 1$ , les excitations sont toutes strictement positives et le gap entre l'état fondamental et le premier état excité est donné par l'excitation d'énergie minimum  $\epsilon(0) = h - 1$ . La vitesse associée aux excitations est

$$v(\theta) = \partial_\theta \epsilon(\theta), \quad (1.38)$$

de sorte que la vitesse  $v_0$  associée au premier état excité est donnée par  $v_0 = v(0) = 0$ . Finalement, pour les  $0 \leq h < 1$ , le gap se ferme en  $q_f = \arccos h$ , l'état fondamental est deux fois dégénéré et la vitesse associée aux excitations voisines de  $\epsilon_{q_f}$  est

$$v(q_f + \delta) \simeq \sqrt{1 - h^2} + \delta h, \quad \delta > 0. \quad (1.39)$$

### 1.2.2 Vecteurs propres et valeurs propres du modèle d'Ising

Dans le cas du modèle d'Ising ( $\kappa = 1$ ) le spectre en énergie et la condition (1.34) deviennent :

$$\epsilon_q = \sqrt{h^2 + 1 + 2h \cos q} \quad (1.40)$$

$$q = \frac{\pi}{L+1} \left( n - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\sin q}{h + \cos q} \right) \right). \quad (1.41)$$

- Pour les  $h > 1$ , dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , l'équation (1.41) possède  $L$  solutions réelles, le spectre des excitations est strictement positif et la vitesse associée au premier état excité est nulle.

- Exactement pour la valeur de  $h = 1$ , le gap se ferme en  $q_f = \pi$  et la condition (1.41) devient  $\theta_q = q/2$ , conduisant à :

$$q = \frac{2n\pi}{2L+1}, \quad n = 1, \dots, L+1. \quad (1.42)$$

Sous le changement de variable  $q \rightarrow \pi - q$ , nous obtenons les vecteurs propres en champ critique :

$$\begin{aligned} \phi_q(k) &= \frac{2}{\sqrt{2L+1}} (-1)^{k+1} \sin(q(k-1/2)) \\ \psi_q(k) &= \frac{2}{\sqrt{2L+1}} (-1)^k \sin(qk), \end{aligned} \quad (1.43)$$

avec

$$\epsilon_q = 2|\sin(q/2)|. \quad (1.44)$$

Finalement, dans la région  $0 \leq h < 1$ , l'équation (1.41) possède  $L-1$  solutions réelles plus une complexe pour  $q_0 = \pi + i\nu$  et telle que

$$\tanh(\nu(L+1)) + \frac{\sinh \nu}{h - \cosh(\nu)} = 0, \quad (1.45)$$

dont la solution est, à l'ordre dominant,  $\nu \approx -\ln h$ . Finalement, cette solution est associée à un mode localisé pour lequel les vecteurs propres sont donnés par :

$$\begin{aligned} \phi_{q_0}(k) &\propto (-1)^k \sinh(\nu(L+1-k)) \\ \psi_{q_0}(k) &\propto -(-1)^k \sinh(\nu k). \end{aligned} \quad (1.46)$$

L'excitation  $\epsilon_0$  associée au mode localisé  $q_0$  est nulle, l'état fondamental est doublement dégénéré.

### 1.2.3 Diagramme de phase du modèle XY

Généralement le spectre du modèle XY est donné dans la limite thermodynamique par :

$$\epsilon(\phi) = \sqrt{(h + \cos \phi)^2 + \kappa^2 \sin^2 \phi}, \quad \phi \in [-\pi, \pi]. \quad (1.47)$$

Ainsi, pour toute valeur de  $\kappa$ , le modèle  $XY$  présente un gap dans la région  $h > 1$ , qui se ferme sur la ligne critique  $h = 1$ . Finalement, dans la région  $h \leq 1$ , l'état fondamental est dégénéré, le spectre du modèle  $XY$  (pour  $\kappa \neq 0$ ) présente un gap entre le premier état excité et le second, alors que dans le cas du modèle  $XX$  ( $\kappa = 0$ ), le spectre est continu et le système est critique pour les champs  $h \leq 1$ . Sur l'ensemble des points critiques du plan  $(h, \kappa)$ , la longueur de corrélation diverge, entraînant une décroissance lente des fonctions de corrélations.

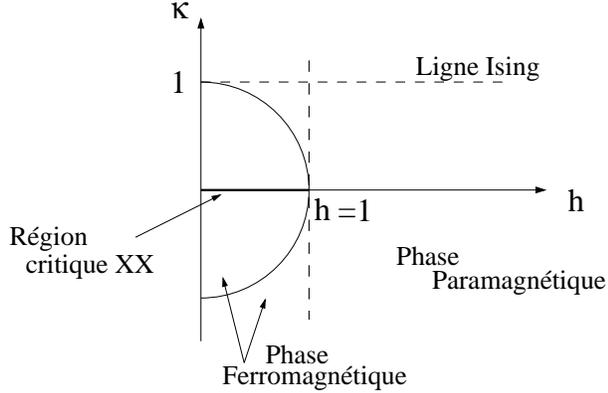


FIG. 1.1 – Diagramme de phase du modèle  $XY$ .

Ainsi à température nulle, le rôle du paramètre de contrôle est joué par le champ transverse  $h$ , alors que, dans le cas du modèle d'Ising, le paramètre d'ordre est donné par la moyenne de l'aimantation dans la direction  $\sigma^x$ . Les propriétés de l'équilibre sont données par l'état fondamental, celui-ci résulte de la compétition de l'interaction d'échange avec l'interaction magnétique. Finalement, dans la limite des champs forts, les moments de spin sont tous alignés dans la direction  $z$ , en revanche, en champ faible, c'est l'interaction d'échange qui domine, favorisant l'ordre dans l'une des directions  $\pm x$ .

### 1.3 Propriétés de l'équilibre

A partir des vecteurs propres  $\phi_q, \psi_q$  et valeurs propres  $\epsilon_q$ , nous pouvons en principe calculer n'importe quelle quantité comme par exemple, la moyenne de l'aimantation dans les directions  $x, y$  et  $z$ , ainsi que la densité d'énergie ou les fonction de corrélations. Cependant le caractère non local des opérateurs de spin en terme d'opérateurs de Clifford complique certains calculs. En effet la moyenne de l'aimantation dans la direction  $x$ , dans un état  $|\chi\rangle$ , sur un site  $n$  est donnée par :

$$m_n^x = \langle \chi | \sigma_n^x | \chi \rangle = \langle \chi | \prod_{j=1}^{n-1} (-\Gamma_j^2 \Gamma_j^1) \Gamma_n^1 | \chi \rangle. \quad (1.48)$$

Cependant, grâce au théorème de Wick, l'aimantation dans l'état fondamental est obtenue par le calcul d'un Pfaffian [18] ou d'un déterminant [1] dont la taille croît linéairement avec

l'indice  $n$  du site considéré. Cela permet finalement le calcul numérique de profil d'aimantation [23, 24] et aussi de l'aimantation de volume. Dans le cas de la chaîne d'Ising, au voisinage du point critique [10], l'aimantation de volume est donnée par :

$$m^x \propto (1 - h)^{1/8}, \quad (1.49)$$

pour  $h < 1$  et  $m^x = 0$  pour  $h \geq 1$ .

Une analyse simple du comportement du premier spin de la chaîne, permet d'obtenir de nombreuses informations sur le comportement du système en volume [25, 26] et de reconstruire le diagramme de phase du modèle  $XY$ . Pour cela considérons l'aimantation moyenne, du premier spin  $\sigma_1^x$ , dans l'état  $|+\rangle$  formé par la combinaison linéaire de l'état fondamental  $|0\rangle$  et du premier état excité  $|1\rangle$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle). \quad (1.50)$$

De cette façon, on brise la symétrie  $\pm x$  ce qui conduit à  $\langle \sigma^x \rangle \neq 0$ . La matrice de Pauli  $\sigma_1^x$  à l'avantage de s'écrire simplement en terme d'opérateurs de Clifford puisque

$$\sigma_1^x = \Gamma_1^1 = \sum_q \phi_q(1) (\eta_q^\dagger + \eta_q). \quad (1.51)$$

Ainsi l'aimantation sur la surface est simplement donnée par

$$m_s^x = \phi_1(1). \quad (1.52)$$

Afin d'obtenir le vecteur  $\phi_1$ , dans la limite d'un système semi-infini, on réécrit la relation  $C^\dagger \phi_1 = 0$  sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \phi_1(n+1) \\ \phi_1(n) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \phi_1(n) \\ \phi_1(n-1) \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

avec

$$K = - \begin{pmatrix} \frac{2h}{1+\kappa} & \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Par itérations on obtient alors la composante  $n+1$  du vecteur  $\phi_1$

$$\phi_1(n+1) = (-1)^n \phi_1(1) (K^n)_{1,1}, \quad (1.55)$$

où  $(K^n)_{1,1}$  est le premier élément de la matrice  $K^n$ . Finalement l'aimantation de surface est obtenue en normant le vecteur  $\phi$  ( $\sum_i \phi_1^2(i) = 1$ ) et conduit à [26] :

$$m_s^x = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |(K^n)_{1,1}|^2 \right)^{-1/2}. \quad (1.56)$$

L'étude des valeurs propres de  $K$  permet de mettre en évidence, de façon très simple, le comportement critique du modèle  $XY$ . On obtient simplement, le comportement de l'aimantation de surface du modèle d'Ising à l'approche du point critique  $h = 1$

$$m_s^x \approx (1 - h)^{1/2}, \quad (1.57)$$

ou encore l'exposant critique  $\nu = 1$  associé à la divergence de la longueur de corrélation  $\xi$  :

$$\xi \approx (1 - h)^{-\nu}. \quad (1.58)$$

Finalement, pour une analyse détaillée des propriétés critiques de surfaces, nous renvoyons le lecteur vers la référence [26] et au chapitre 2 de [27].

## Chapitre 2

# Dynamique du système

En physique quantique la dynamique peut être associée aux états du système ou aux opérateurs de façon complètement équivalente. Dans la représentation de Schrödinger elle est portée par les états du système et gouvernée par l'hamiltonien  $H$  à travers l'équation de Liouville quantique [42] :

$$\partial_t \rho(t) = -i [H, \rho(t)] = \mathcal{L}(\rho(t)), \quad (2.1)$$

où  $\rho$  est la matrice densité telle que  $Tr\{\rho(t)\} = 1$  et  $\mathcal{L}$  le super-opérateur de Liouville. Dans la représentation d'Heisenberg la fonction d'onde du système est invariante et les opérateurs évoluent dans le temps suivant l'équation :

$$\partial_t \mathcal{A}(t) = i [H, \mathcal{A}(t)]. \quad (2.2)$$

La valeur moyenne d'une observable  $\mathcal{A}$  est alors donnée par :

$$\langle \mathcal{A} \rangle(t) = Tr\{\rho(t)\mathcal{A}\} = Tr\{\rho(0)\mathcal{A}(t)\}. \quad (2.3)$$

Lorsque l'hamiltonien est indépendant du temps l'opérateur d'évolution temporelle s'écrit simplement

$$U(t) = \exp(-itH) \quad (2.4)$$

et nous permet de définir dans la représentation de Schrödinger, la matrice densité dépendante du temps

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad (2.5)$$

ou dans la représentation d'Heisenberg, l'évolution d'une observable  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(t) = U^\dagger(t)\mathcal{A}(0)U(t). \quad (2.6)$$

### 2.1 Evolution temporelle des opérateurs fermioniques

L'évolution temporelle des opérateurs création  $\mathbf{X}_q^\dagger$  et annihilation  $\mathbf{X}_q$ , gouvernée par l'hamiltonien

$$H_q = \epsilon_q \left( \mathbf{X}_q^\dagger \mathbf{X}_q - \frac{1}{2} \right) \quad (2.7)$$

est simplement donnée par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_q^\dagger(t) \\ \mathbf{X}_q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it\epsilon_q} & 0 \\ 0 & e^{-it\epsilon_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_q^\dagger \\ \mathbf{X}_q \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Ce qui conduit simplement à l'équation de l'évolution de l'opérateur "colonne"  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}(t) = e^{-it\Lambda}\mathbf{X}. \quad (2.9)$$

## 2.2 Evolution temporelle des opérateurs de Clifford

Puisque les opérateurs de site  $\Gamma_n$  sont donnés par une combinaison linéaire des opérateurs fermioniques  $\mathbf{X}_q$ , leur évolution temporelle s'obtient simplement en utilisant la relation  $\mathbf{X} = \mathbf{U}^\dagger \Gamma / \sqrt{2}$  et son inverse  $\Gamma = \sqrt{2}\mathbf{U}\mathbf{X}$ . A l'instant  $t$  on écrit :

$$\Gamma(t) = \sqrt{2}\mathbf{U}\mathbf{X}(t). \quad (2.10)$$

En utilisant l'équation (2.9) on obtient

$$\Gamma(t) = \sqrt{2}\mathbf{U}e^{-it\Lambda}\mathbf{X} = \mathbf{U}e^{-it\Lambda}\mathbf{U}^\dagger\Gamma(0), \quad (2.11)$$

conduisant à

$$\Gamma(t) = e^{-it\mathbf{T}}\Gamma(0). \quad (2.12)$$

Par la suite nous poserons  $\mathbf{R}(t) = e^{-it\mathbf{T}}$ . On vérifie aisément  $\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^\dagger(t) = \mathbf{R}^\dagger(t)\mathbf{R}(t) = 1$ ,  $\mathbf{R}^\dagger(t) = \mathbf{R}^T(t) = e^{it\mathbf{T}}$  et on montre (voir appendice) que ses éléments sont donnés par :

$$\mathbf{R}_n^m(t) = \sum_{q=1}^L \phi_q(n) \cos(\epsilon_q t) \phi_q(m) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{R}_n^{m+L}(t) = -\mathbf{R}_{m+L}^n(t) = \sum_{q=1}^L \phi_q(n) \sin(\epsilon_q t) \psi_q(m) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{R}_{n+L}^{m+L}(t) = \sum_{q=1}^L \psi_q(n) \cos(\epsilon_q t) \psi_q(m), \quad \text{où } n, m = 1, \dots, L. \quad (2.15)$$

Ainsi l'évolution d'un élément  $\Gamma_n$  de l'opérateur "colonne"  $\Gamma$  est notée :

$$\Gamma_n(t) = \mathbf{R}_n^p(t)\Gamma_p(0) \quad (2.16)$$

où la somme sur les indices en position haute et basse est sous entendue.

Notons qu'il n'est pas nécessaire de diagonaliser l'hamiltonien pour arriver à l'équation d'évolution (2.12). En effet celle ci s'obtient simplement en notant la relation suivante :

$$[H, \Gamma_n] = -\sum_j \mathbf{T}_{j,n} \Gamma_n, \quad (2.17)$$

que l'on écrit encore sous la forme

$$\partial_t \Gamma = -i\mathbf{T}\Gamma, \quad (2.18)$$

conduisant finalement à l'équation (2.12).

Deuxième partie

Dynamique unitaire

Dans cette partie, nous étudierons l'évolution temporelle d'un système fermé, préparé dans un état inhomogène [30, 36, 37, 38, 46, 63, 64, 69].

Nous commencerons, dans le chapitre 3, par définir précisément l'état initial imposé au système ainsi que la dynamique qui gouverne l'évolution temporelle. Concentrant notre analyse sur des quantités moyennes telles que l'aimantation transverse ou le courant d'aimantation, nous reviendrons sur certains résultats de la littérature, dans le cas particulier d'un état initial complètement factorisé.

Dans le chapitre 4, nous présenterons une étude du comportement de l'interface ("Bain-Système") générée par la mise en contact de sous-systèmes thermalisés (aux températures  $T_b$  et  $T_s$ ). Dans un premier temps, une analyse, du comportement du profil d'aimantation transverse  $m^z(x, t)$ , est donnée dans le cas  $T_b = \infty$ . Ces résultats seront généralisés, très simplement pour des températures  $T_b$  arbitraires. En définissant le courant d'aimantation  $j^z(x, t)$  associé au profil  $m^z(x, t)$  nous examinons, le comportement hors de l'équilibre des modèles  $XX$  et Ising critique ( $h = 1$ ), en distinguant la dynamique de l'état fondamental de la dynamique obtenue sous l'effet de la température. Le chapitre 4 se termine par une étude des propriétés de l'état stationnaire dans laquelle nos résultats sont comparés à ceux de la référence [36].

Le chapitre 5 traite de l'évolution d'un système de taille finie en contact par ses deux extrémités avec un "bain". Là encore, cette analyse sera effectuée pour les modèles  $XX$  et Ising critique ( $h = 1$ ).

Le chapitre 6 a pour but d'introduire l'ensemble des éléments nécessaires à la compréhension de la notion d'entropie d'intrication. Nous y définirons la mesure de l'entropie de von Neumann en rappelant les résultats obtenus ces dernières années, en particulier sur les systèmes unidimensionnels. Ce chapitre se termine par un examen de l'entropie d'intrication en fonction des paramètres  $\kappa$  et  $h$  du modèle  $XY$  permettant la construction du diagramme de phase du modèle  $XY$ . Dans le chapitre 7, nous présenterons la méthode, nous permettant, en dehors de l'état d'équilibre, l'étude de l'entropie d'intrication sur le modèle  $XY$ . Puis nous reviendrons sur quelques résultats de la littérature dans le cas de trempes globales et locales. En particulier, lors de la mise en contact de sous-système préparés dans l'état fondamental, nous confirmerons les prédictions de la théorie conforme par des calculs numériques exacts et analyserons, finalement, le comportement de l'entropie d'intrication dans la limite des temps longs.

## Chapitre 3

# Relaxation à partir d'un état initial inhomogène

Ce chapitre a pour but d'exposer l'état initial imposé au système ainsi que de fixer l'hamiltonien total qui gouverne l'évolution temporelle. Nous détaillerons la méthode utilisée pour obtenir la moyenne d'observables, focalisant notre attention sur des quantités locales, telles que l'aimantation transverse. Finalement, nous reviendrons sur certains résultats dans le cas extrême où l'état initial est dit complètement factorisé.

### 3.1 Etat initial et évolution temporelle

Le système considéré est décrit par l'hamiltonien unidimensionnel du modèle  $XY$ . La chaîne est initialement découpée en sous-systèmes sans interactions. L'hamiltonien total  $H^0$  se décompose sur l'ensemble des sous-systèmes décrits par  $H_j$  :

$$H^0 = \sum_j H_j, \quad (3.1)$$

avec  $[H_j, H_p] = 0$ . Chaque sous-système, de taille  $L_j$ , est décrit par le modèle  $XY$  et on note  $(\sigma_n^\nu)_j$  la  $n^{ieme}$  matrice de Pauli ( $\nu = x, y, z$ ) du sous-système  $j$ . L'hamiltonien  $H_j$  est alors

$$H_j = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L_j-1} [J_x(\sigma_n^x)_j(\sigma_{n+1}^x)_j + J_y(\sigma_n^y)_j(\sigma_{n+1}^y)_j] - \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{L_j} (\sigma_n^z)_j. \quad (3.2)$$

En définissant  $(\mathbf{T}_n)_j$  les opérateurs de Cliffords dans le sous-système  $j$ , il suit

$$H_j = -\frac{1}{4} \sum_{n,m=1}^{L_j} (\mathbf{T}_n)_j (\mathbf{T}_{n,m})_j (\mathbf{T}_m)_j, \quad (3.3)$$

où la structure de la matrice  $\mathbf{T}_j$  (de dimension  $2L_j \times 2L_j$ ) est donnée dans le chapitre 1 (équations 1.16 et 1.17). Le sous-système  $j$  est préparé à la température  $1/\beta_j$  et l'on note

$\rho_j$  sa matrice densité :

$$\rho_j = \frac{1}{Z_j} \exp(-\beta_j H_j). \quad (3.4)$$

L'état du sous-système  $j$  est un état gaussien, complètement caractérisé par les corrélateurs à deux points. On définit la matrice  $I_j$  dont les éléments sont :

$$(I_j)_{n,m} = \langle -i(\Gamma_n^2)_j (\Gamma_m^1)_j \rangle = Tr\{-i(\Gamma_n^2)_j (\Gamma_m^1)_j \rho_j\}. \quad (3.5)$$

En définissant les vecteurs propres

$$V_q^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_q^j \\ -i\psi_q^j \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

et valeurs propres  $\epsilon_q^j$ , permettant la diagonalisation canonique de l'hamiltonien  $\mathcal{H}_j$ , tels que

$$T_j V_q^j = \epsilon_q^j V_q^j, \quad (3.7)$$

nous obtenons l'expression suivante :

$$(I_j)_{n,m} = - \sum_{q=1}^{L_j} \psi_q^j(n) \phi_q^j(m) \tanh\left(\frac{\beta_j \epsilon_q^j}{2}\right). \quad (3.8)$$

Chaque sous-système étant préparé indépendamment, la matrice densité est donnée par le produit  $\rho(0) = \prod_{\otimes j} \rho_j$ . Dans un tel état, il n'existe pas de corrélations entre sous-systèmes. Pour deux observables  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , appartenant à des sous-systèmes différents, cela se traduit par la relation

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{B} \rangle(0) = \langle \mathcal{A} \rangle(0) \langle \mathcal{B} \rangle(0). \quad (3.9)$$

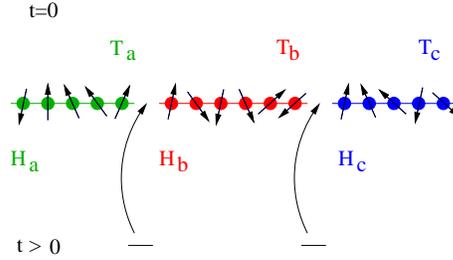


FIG. 3.1 – Mise en contact des sous-systèmes initialement découplés.

L'évolution temporelle non évidente du système est engendrée par l'activation des interactions entre sous-systèmes voisins et elle est donc gouvernée par l'opérateur unitaire

$$U(t) = \exp(-itH). \quad (3.10)$$

où l'hamiltonien total  $H$  s'écrit

$$H = \sum_j H_j + \sum_j H_{j,j+1}^I, \quad (3.11)$$

avec  $H_{j,j+1}^I$  correspondant à l'interaction entre sous-systèmes de sorte que l'ensemble de la chaîne (de taille  $\mathcal{L} = \sum_j L_j$ ) est décrit par le modèle  $XY$  :

$$H_{j,j+1}^I = -\frac{1}{2} \left[ J_x (\sigma_{L_j}^x)_j (\sigma_{L_{j+1}}^x)_{j+1} + J_y (\sigma_{L_j}^y)_j (\sigma_{L_{j+1}}^y)_{j+1} \right]. \quad (3.12)$$

La moyenne d'une observable  $\mathcal{A}$  à l'instant  $t$  est donnée par :

$$\langle \mathcal{A} \rangle(t) = Tr\{\mathcal{A}\rho(t)\} = Tr\{\mathcal{A}(t)\rho(0)\}. \quad (3.13)$$

avec dans les représentations de Schrödinger ou d'Heisenberg :

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(t) = U^\dagger(t)\mathcal{A}(0)U(t). \quad (3.14)$$

## 3.2 Valeur moyenne

De façon générale toute observable peut se ré-exprimer en fonction des opérateurs de Clifford. A titre d'exemple :

$$\sigma_n^z = -i\Gamma_n^2\Gamma_n^1 \quad (3.15)$$

$$\sigma_n^x = \prod_{j=1}^{n-1} (-i\Gamma_j^2\Gamma_j^1)\Gamma_n^1 \quad (3.16)$$

$$\sigma_n^y = -\prod_{j=1}^{n-1} (-i\Gamma_j^2\Gamma_j^1)\Gamma_n^2. \quad (3.17)$$

Chaque sous-système étant préparé dans un état gaussien, le théorème de Wick permet de ré-exprimer la moyenne de toute observable en fonction de la moyenne des corrélateurs à deux points de la forme  $\langle -i\mathbf{\Gamma}_m\mathbf{\Gamma}_n \rangle$ . On définit la matrice  $\mathcal{M}$ , de dimension  $2\mathcal{L} \times 2\mathcal{L}$ , dont les éléments sont :

$$\mathcal{M}_{m,n} = \langle -i\mathbf{\Gamma}_m\mathbf{\Gamma}_n \rangle. \quad (3.18)$$

Son évolution temporelle est obtenue par l'action de la matrice de rotation  $\mathbf{R}(t) = e^{-it\mathbf{T}}$  sur la matrice  $\mathcal{M}(0)$  contenant les corrélations à l'instant  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) &= \langle -i\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(t) \rangle \\ \mathcal{M}(t) &= \mathbf{R}(t)\mathcal{M}(0)\mathbf{R}^T(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainsi les quantités telles que l'énergie de liaison, l'aimantation transverse ou le courant d'aimantation sont données par l'équation (3.19), avec plus particulièrement

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \mathcal{M}_{n+\mathcal{L},n}(t) \quad (3.20)$$

$$\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle(t) = \mathcal{M}_{n+\mathcal{L},n+1}(t) \quad (3.21)$$

$$\langle \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y \rangle(t) = \mathcal{M}_{n+1+\mathcal{L},n}(t). \quad (3.22)$$

**Les éléments de la matrice**  $R(t)$  s'expriment en terme des fonctions de Bessel, dans le cas d'un système thermodynamique décrit par le modèle d'Ising critique ( $h = 1$ ) ou par le modèle  $XX$  [30, 64]. Ainsi pour le modèle d'Ising en champ critique  $h = 1$

$$\begin{aligned} R_{l,k} = R_{l+\mathcal{L},k+\mathcal{L}} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^1 \rangle_t &= \langle \Gamma_k^2 | \Gamma_l^2 \rangle_t = (-1)^{k+l} J_{2(l-k)}(2t) \\ R_{l+\mathcal{L},k} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^2 \rangle_t &= (-1)^{k+l} J_{2(l-k)+1}(2t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

et pour le modèle  $XX$

$$\begin{aligned} R_{l,k} = R_{l+\mathcal{L},k+\mathcal{L}} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^1 \rangle_t &= \langle \Gamma_k^2 | \Gamma_l^2 \rangle_t = i^{l-k} J_{l-k}(t) \begin{cases} \cos(ht), & l-k = 2p \\ -i \sin(ht) & l-k = 2p+1 \end{cases} \\ R_{l+\mathcal{L},k} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^2 \rangle_t &= i^{l-k} J_{l-k}(t) \begin{cases} -\sin(ht), & l-k = 2p \\ -i \cos(ht) & l-k = 2p+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Les éléments de la matrice**  $\mathcal{M}(0)$  sont donnés par la moyenne des corrélateurs dans l'état initial. Chaque sous-système  $j$  étant préparé dans un mélange statistique des états propres de  $H_j$  (éq. 3.4 et 3.3), on montre que les corrélateurs formés de deux opérateurs de Clifford appartenant à des sous-système différents ( $a$  et  $b$ ) sont nuls [43] :

$$\langle \Gamma_{n \in a} \Gamma_{m \in b} \rangle = 0. \quad (3.25)$$

Ce résultat reflète le fait que les sous-systèmes sont préparés dans des états gaussiens indépendants. En réarrangeant les éléments de  $\mathbf{\Gamma}$  de la façon suivante,

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_{S(j)} \\ \mathbf{\Gamma}_{S(j+1)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Gamma}_{S(j)} = \begin{pmatrix} (\Gamma_1^1)_j \\ \vdots \\ (\Gamma_{L_j}^1)_j \\ (\Gamma_1^2)_j \\ \vdots \\ (\Gamma_{L_j}^2)_j \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

la matrice  $\mathcal{M}(0)$  prend une structure diagonale par block :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathcal{M}_{j-1} & 0 & & & \\ & & 0 & \mathcal{M}_j & 0 & & \\ & & & 0 & \mathcal{M}_{j+1} & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

où les  $\mathcal{M}_j$  sont des matrices, de dimension  $2L_j \times 2L_j$ , associées aux sous-systèmes  $j$ , dont la structure est :

$$\mathcal{M}_j = -i\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & I_j^\dagger \\ I_j & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

et où les éléments de  $I_j$  sont donnés par l'équation (3.8).

**Le calcul de l'aimantation transverse** (voir appendice) dans le cas du modèle d'Ising critique et  $XX$ , fait apparaître un produit de convolution discret [43, 44, 45]. En définissant les profils  $p^j$  de la façon suivante :

$$p^j(k) = \mathcal{M}_{k+\mathcal{L}, k+j}(0) = \text{Tr}\{-i\Gamma_k^2 \Gamma_{k+j}^1 \rho(0)\}, \quad (3.29)$$

avec en particulier  $p^0(k) = \langle \sigma_k^z \rangle(0)$ , un calcul explicite conduit à :

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_j \left( F_t^j \star p^j \right) (n), \quad (3.30)$$

où pour le modèle d'Ising critique ( $h = 1$ ), les fonctions  $F_t^j$  sont données par :

$$(-1)^j F_t^j(n) = J_{2n}(2t)J_{2n-2j}(2t) - J_{2n+1}(2t)J_{2n-2j-1}(2t), \quad (3.31)$$

et pour le modèle  $XX$  par

$$(-1)^j F_t^{2j}(n) = J_n(t)J_{n-2|j|}(t), \quad \forall h, \quad (3.32)$$

avec  $F_t^j(n) = 0$  pour les valeurs de  $j$  impaires.

### 3.3 Système préparé dans un état complètement factorisé

L'état initial est dit complètement factorisé lorsque les spins sont préparés indépendamment les uns des autres. La matrice densité est simplement donnée par  $\rho(0) = \rho_j^{\otimes \mathcal{L}}$  où  $\rho_j$  est fonction de l'hamiltonien local  $H_j = -h\sigma_j^z/2$ ,

$$\rho_j \propto \exp(\gamma_j \sigma_j^z/2), \quad \gamma_j = \beta_j h. \quad (3.33)$$

Des résultats exacts ont été obtenus dans ce cas, lors de l'étude de la dynamique de systèmes préparés dans un état spatialement homogène [46, 65] puis inhomogène [30, 46, 63, 64, 69]. L'influence d'un terme supplémentaire de la forme  $\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z$  et de couplages dimérisés [70] ont aussi été étudiés. Dans cette situation, des résultats numériques sont apportés par renormalisation de la matrice densité dépendante du temps. Cette méthode demande de considérer des systèmes unidimensionnels ainsi que des interactions entre premiers voisins [71, 72], elle est largement utilisée sur des modèles de chaînes de spins [73, 74], des modèles fermioniques [75, 76] et notamment dans les problèmes de nature bosonique liés à l'études des atomes ultra froid [77, 78, 79, 80].

L'état initial étant complètement factorisé cela conduit à  $p^j(k) = \delta_{j,0} \langle \sigma_k^z \rangle$ , avec  $\langle \sigma_k^z \rangle = \tanh(\gamma_k/2)$ . Dans ce cas le profil d'aimantation initial est la seule donnée nécessaire afin de fixer l'état du système à un instant ultérieur. L'équation (13.15) s'écrit simplement comme le produit de convolution discret (noté  $\star$ ) de la fonction de Green  $F_t^0$  avec le profil d'aimantation transverse initial :

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = (F_t^0 \star \langle \sigma^z \rangle)(k) = \sum_k F_t^0(n-k) \langle \sigma_k^z \rangle. \quad (3.34)$$

Dans la limite continue, la solution explicite pour le modèle  $XX$  ( $\kappa = 0$ ) et pour le modèle d'Ising critique ( $h = 1$ ,  $\kappa = 1$ ) est donnée par [64] :

$$m^z(x, t) = \int dy F_t^0(x - y) m^z(y, 0), \quad (3.35)$$

avec pour la fonction de Green

$$F_t^0(x) = \frac{1}{t} f_\kappa\left(\frac{x}{t}\right), \quad (3.36)$$

où la fonction d'échelle  $f_\kappa$  est, pour  $\kappa = 0$  et  $\kappa = 1$ ,

$$f_\kappa(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (1 - v^2)^{\kappa-1/2} & |v| < 1 \\ 0 & |v| \geq 1. \end{cases} \quad (3.37)$$

Le support borné de la fonction de Green traduit l'existence d'une région causale  $x/t \leq 1$  due à une vitesse  $v_q = \partial_q \epsilon(q)$  de propagation maximale des excitations, vitesse fixée ici à 1 par une normalisation appropriée de l'Hamiltonien. Dans la limite asymptotique,  $t \gg 1$ , pour laquelle l'expression (3.36) est exacte, l'aimantation totale ( $M^z(t) = \int dx m^z(x, t)$ ) est

$$M^z(t) = M^z(0) \int_{-1}^1 dv f_\kappa(v) = M^z(0) \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right). \quad (3.38)$$

Bien que l'aimantation totale ne soit conservée que dans le cas du modèle  $XX$ , après un régime transitoire, le résultat précédent montre que, même dans le cas du modèle d'Ising, le système atteint un état dans lequel l'aimantation résiduelle (après une perte initiale rapide) totale  $\dot{M}^z$  est conservée :  $\partial_t M^z(t) = 0$ .

### 3.4 Evolution d'une interface

L'étude de l'interface entre deux régions préparées dans un état pur permet, entre autre, de mettre en évidence le rôle de la fonction de Green. L'interprétation qui est faite des résultats est fortement liée à la notion de causalité. Le système est préparé dans un état initial présentant une marche d'aimantation :

$$|\mathbf{K}\rangle = |\downarrow\rangle^{\otimes L/2} |\uparrow\rangle^{\otimes L/2}, \quad (3.39)$$

où  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$  sont les états propres de la matrice de Pauli  $\sigma^z$  tels que

$$\sigma^z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad \text{et} \quad \sigma^z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle. \quad (3.40)$$

Un tel état est susceptible d'être obtenu sous l'action d'un champ magnétique intense et inhomogène. Le profil d'aimantation transverse à l'instant initial est

$$m^z(x, 0) = 2H(x) - 1, \quad (3.41)$$

où  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside. A l'instant  $t$  le produit de convolution avec la fonction de Green (eq. 3.35) conduit à la forme d'échelle  $m^z(x, t) = m^z(x/t)$  avec

$$m^z(x/t) = 2 \int_{-1}^{x/t} dv f_\kappa(v) - \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right). \quad (3.42)$$

En dehors du cône de lumière (région acausale notée  $\mathcal{A}_c$ ) la moyenne de l'aimantation transverse est une constante donnée par :

$$m^z(v) = \begin{cases} -m_{\mathcal{A}_c}^z & v < -1 \\ m_{\mathcal{A}_c}^z & v > 1. \end{cases} \quad \text{avec} \quad m_{\mathcal{A}_c}^z = 1 - \frac{\kappa}{2} \quad . \quad (3.43)$$

Dans la région  $x > t$  (respectivement  $x < -t$ ), cette constante correspond à la valeur obtenue si l'état initial avait été l'état homogène  $|H^+\rangle = |\uparrow\rangle^{\otimes \mathcal{L}}$  (respectivement  $|H^-\rangle = |\downarrow\rangle^{\otimes \mathcal{L}}$ ). Notons que dans le cas du modèle  $XX$ ,  $m_{\mathcal{A}_c}^z = 1$  alors que l'on constate une perte de l'aimantation pour le modèle d'Ising puisque  $m_{\mathcal{A}_c}^z = 1/2$ . Nous expliquons cette perte d'aimantation plus loin.

### 3.4.1 Le modèle $XX$

Dans le modèle  $XX$  les états homogènes  $|H^+\rangle$  et  $|H^-\rangle$  sont des états propres du système. Seule l'excitation générée par l'interface est à l'origine de l'évolution du système. Dans la région acausale le système est donc localement à l'équilibre avec  $m^z(x, t) = -m_{\mathcal{A}_c}^z = -1$  dans la région  $x < -t$  et  $m^z(x, t) = m_{\mathcal{A}_c}^z = 1$  pour  $x > t$ . Finalement,  $\forall h$ , l'intégration de l'équation (3.42) conduit à :

$$m^z(x/t) = \begin{cases} -1 & x \leq -t \\ \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{t}\right), & |x/t| < 1 \\ 1 & x \geq t. \end{cases} \quad (3.44)$$

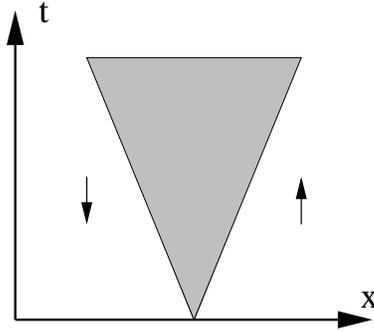


FIG. 3.2 – Propagation de l'excitation générée par l'interface. Dans la région acausale le système apparaît localement à l'équilibre et hors de l'équilibre dans le cône de lumière.

Ce résultat est indépendant de la valeur du champ  $h$  et de façon générale on vérifie que la dynamique de l'aimantation, dans le modèle  $XX$ , n'est pas fonction du champ transverse (eq. 13.17). C'est une conséquence directe de la symétrie de l'hamiltonien  $[M^z, H^{XX}] = 0$ . En effet l'excitation est uniquement véhiculée par le terme d'interaction d'échange

$$H_{ech} = -\frac{1}{4} \sum_n (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) \quad (3.45)$$

Pour être plus explicite on définit les opérateurs d'évolution  $U_{ech}(t)$  et  $U_z(t)$  comme :

$$U_{ech}(t) = \exp(-itH_{ech}), \quad \text{et} \quad U_z(t) = \exp(ithM^z). \quad (3.46)$$

Puisque  $[M^z, H_{ech}] = 0$ , l'opérateur d'évolution s'écrit comme le produit  $U(t) = U_{ech}(t)U_z(t)$  de sorte que

$$\sigma_n^z(t) = U^\dagger(t)\sigma_n^z U(t) = U_{ech}^\dagger(t)\sigma_n^z U_{ech}(t). \quad (3.47)$$

Ainsi l'évolution temporelle des opérateurs  $\sigma_n^z$  est indépendante de  $h$  et est uniquement gouvernée par le terme d'interaction d'échange.

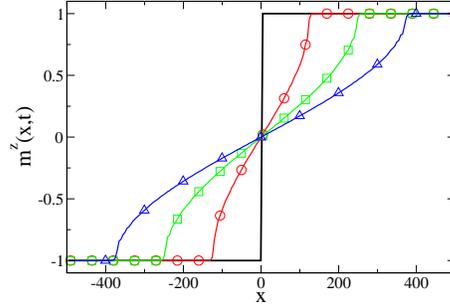


FIG. 3.3 – Evolution de l'interface générée par un état spatialement inhomogène  $|\mathbf{K}\rangle$  dans le cas du modèle  $XX$ , pour les temps  $t = 0, 125, 250$  et  $375$ .

### 3.4.2 Le modèle d'Ising

Dans le modèle d'Ising, en champ critique  $h = 1$ , les états homogènes  $|H^+\rangle$  et  $|H^-\rangle$  ne sont pas des états propres du système. Afin de décrire le système dans la région acausale il est nécessaire de comprendre la relaxation du modèle d'Ising préparé dans un état homogène et complètement factorisé. Cette étude a été réalisée par G. M. Schütz et S. Trimper (1999) [46]. Ainsi la variation de l'aimantation transverse est comprise de la façon suivante : l'interaction entre spin a pour effet de créer des corrélations spatiales, notamment des corrélations de la forme  $\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle$ . La conservation de l'énergie impose, en même temps que la variation de l'énergie de liaison ( $e_n = -\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle / 2$ ), la chute de l'aimantation transverse. Au point critique les termes d'interaction d'échange et d'interaction magnétique contribuent avec la même intensité. L'aimantation transverse varie alors de  $m^z = 1$  vers  $m^z = 1/2$  de sorte que les corrélations  $\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle$  passent de 0 à  $\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle = 1/2$ . Ce que confirme l'expression exacte obtenue dans [46] :

$$m^z(t) = \frac{1}{2} + \frac{J_1(4t)}{2t}, \quad (3.48)$$

où  $J_1$  est une fonction de Bessel.

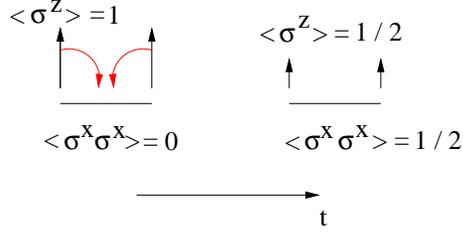


FIG. 3.4 – Perte d’aimantation associée au transfert de l’énergie d’interaction Zeeman vers l’énergie de liaison.

Le comportement asymptotique de la fonction de Bessel montre que la relaxation vers l’aimantation stationnaire est algébrique :

$$m^z(t) - 1/2 \propto t^{-3/2}, \quad (3.49)$$

avec un exposant de décroissance égale à  $3/2$ . Ainsi après un régime transitoire (il s’agit ici d’un abus de langage puisque la décroissance est algébrique), dans lequel les deux domaines d’aimantation  $\pm 1$  évoluent vers  $\pm 1/2$ , le profil d’aimantation dans la limite asymptotique est donné par (3.42) :

$$m^z(x/t) = \begin{cases} -1/2 & x \leq -t \\ \frac{1}{\pi} \left( \arcsin(x/t) + x/t \sqrt{1 - (x/t)^2} \right), & |x/t| < 1 \\ 1/2 & x \geq t. \end{cases} \quad (3.50)$$

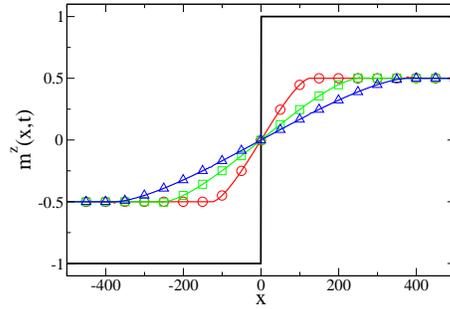


FIG. 3.5 – Evolution de l’interface générée par un état spatialement inhomogène  $|\mathbf{K}\rangle$  dans le cas du modèle d’Ising, pour les temps  $t = 0, 125, 250$  et  $375$ .

### 3.5 Evolution d’un sous-système saturé en champs

L’étude de la relaxation d’une goutte, d’aimantation  $+1$ , dans une mer, d’aimantation  $-1$ , est obtenue en considérant l’état initial

$$|\mathbf{D}\rangle = |\downarrow \dots \downarrow \uparrow \dots \uparrow \downarrow \dots \downarrow\rangle, \quad (3.51)$$

où  $L_s$  spins, au centre du système, sont préparés dans l'état  $|\uparrow\rangle$  tandis que le reste de la chaîne est préparé dans l'état  $|\downarrow\rangle$ . La transformation de Jordan-Wigner nous donne la possibilité d'interpréter l'état  $|\mathbf{D}\rangle$  comme la mise en contact d'un "*petit système*", où chaque site est occupé par un fermion, avec un environnement vide. La relation  $\sigma_n^z = 2c_n^\dagger c_n - 1$  nous permet d'écrire l'état  $|\mathbf{D}\rangle$  sous la forme :

$$|\mathbf{D}\rangle = |0 \dots 0, 1 \dots 1, 0 \dots 0\rangle, \quad (3.52)$$

où les états  $|1\rangle$  et  $|0\rangle$  sont les états propres de l'opérateur nombre de particules  $n = c^\dagger c$ . Notons que dans le cadre de l'étude des condensats de Bose-Einstein, une situation analogue a été étudiée, décrivant la détente brutale d'un gaz de bosons de coeur dur [66, 67]. Des études sur les chaînes  $XX$  et Ising critique ont montré [46, 64] que l'aimantation de la partie *système*  $M^z(t)$  convergeait de façon algébrique vers une valeur stationnaire  $M_{st}^z$ . Partant de l'équation (3.35) nous allons retrouver ce résultat. En effet, le profil initial d'aimantation étant donné par  $m^z(x, 0) = 2\Pi(x/L_s) - 1$  où  $\Pi$  est la fonction porte, telle que :

$$\Pi(v) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq v \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 < |v|, \end{cases} \quad (3.53)$$

il est facile de vérifier que, dans la limite des temps longs  $t \gg L_s$ , la fonction de Green  $F_t^0(x) = f_\kappa(x/t)/t$  apparaît explicitement dans l'expression du profil d'aimantation :

$$m^z(x, t) = 2 \frac{L_s}{t} f_\kappa\left(\frac{x}{t}\right) - m_{\mathcal{A}_c}^z \quad \text{avec} \quad m_{\mathcal{A}_c}^z = 1 - \frac{\kappa}{2}. \quad (3.54)$$

L'aimantation résiduelle intégrée définie par :

$$M^z(t) = \int_{-L_s/2}^{L_s/2} dx m^z(x, t), \quad (3.55)$$

est simplement

$$M^z(t) = M_{st}^z + \frac{2L_s^2}{t} f_\kappa(0), \quad \text{avec} \quad M_{st}^z = -L_s m_{\mathcal{A}_c}^z. \quad (3.56)$$

Notons que la relaxation vers l'état stationnaire se fait de la même façon pour les modèles  $XX$  et Ising puisque  $f_1(0) = f_0(0) = 1/\pi$ . Seul  $M_{st}^z$  est fonction du paramètre d'anisotropie. Ainsi pour le modèle  $XX$  ( $\kappa = 0$ ) le "*système*" relaxe vers l'état d'aimantation du "*bain*" d'où  $M_{st}^z/L_s = -1$ . Dans le cas du modèle d'Ising ( $\kappa = 1$ ) l'aimantation stationnaire est celle du "*bain*" s'il avait évolué librement,  $M_{st}^z/L_s = -1/2$  (c'est à dire si l'état initial avait été l'état homogène  $|H^-\rangle$ ).

Une analyse du vieillissement lors de la relaxation du modèle  $XX$  préparé dans l'état  $|\mathbf{D}\rangle$  a été réalisée dans la référence [46]. Les fonctions de corrélation à deux temps  $\langle \mathcal{Q}(t)\mathcal{Q}(t') \rangle$ , sont habituellement utilisées pour mettre en évidence l'évolution du système et plus particulièrement le caractère vieillissant de celui-ci. Lorsque le système est en dehors de l'équilibre les fonctions de corrélations dépendent à la fois des temps  $t$  et  $t'$ , où  $t$  est le temps d'attente correspondant à l'âge du système et  $t' > t$ . Au contraire dans le cas d'un système à l'équilibre les fonctions de corrélations ne dépendent que de la différence des temps  $\tau = t' - t$ . Le vieillissement a d'abord été étudié sur des systèmes, décrits de façon classique

[48, 51, 50] puis quantique [52, 53, 49, 46, 47]. Les fonctions de corrélations de l'aimantation transverse, définies comme  $C_{n,m}^{z,z}(t, t') = \langle \sigma_n^z(t) \sigma_m^z(t') \rangle$ , ont notamment été analysées sur les chaînes d'Ising [47] et  $XX$  [46]. Dans ce dernier cas, la fonction de corrélation normalisée  $R(t, \tau) = C_M^{z,z}(t, t + \tau) / C_M^{z,z}(t, t)$  avec  $C_M^{z,z}(t, t') = \langle M_s^z(t) M_s^z(t') \rangle - \langle M_s^z(t) \rangle \langle M_s^z(t') \rangle$  où  $M_s^z = \sum_{n \in L_s} \sigma_n^z$  est l'aimantation totale dans le système, présente un comportement vieillissant typique [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62] :

$$R(t, \tau) = f\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{1 + \tau/t}, \quad L_s \ll t, t + \tau \ll L_s^2. \quad (3.57)$$

## Chapitre 4

# Mise en contact de sous-systèmes thermalisés - Interface "*Bain - Système*"

Dans ce chapitre, nous analysons l'évolution temporelle d'une l'interface ("Bain-Système") obtenue par la mise en contact de sous-systèmes thermalisés à des températures différentes. Pour commencer, nous étudierons le comportement du profil d'aimantation transverse  $m^z(x, t)$  dans le cas d'un bain à température infinie  $T_b = \infty$  et d'un système à température finie  $T_s$ . Dans ce cas, on montrera que le profil d'aimantation s'écrit comme un produit de convolution faisant intervenir une fonction de Green  $G_t(x)$ . Ces résultats sont simplement généralisés lorsque les températures  $T_b$  et  $T_s$  sont quelconques. Nous définirons le courant d'aimantation  $j^z(x, t)$  associé au profil  $m^z(x, t)$  que l'on analysera, pour les modèles  $XX$  et Ising critique ( $h = 1$ ), en distinguant la dynamique de l'état fondamental de la dynamique obtenue sous l'effet de la température. Nous terminerons cette étude par l'analyse des propriétés de l'état stationnaire en comparant nos résultats aux travaux de W. Aschbacher [36].

### 4.1 Conditions initiales

Commençons par considérer l'interface créée par la mise en contact de deux sous-systèmes, semi-infinis, thermalisés aux températures  $1/\beta_b$  et  $1/\beta_s$ . L'information pertinente sur l'état initial est donnée par la matrice  $\mathcal{M}$ , formée des corrélateurs à deux points  $\langle \Gamma \Gamma \rangle$ . La chaîne étant divisée en deux sous-systèmes, la matrice  $\mathcal{M}$  prend la structure suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_b & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_s \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{M}_b$  et  $\mathcal{M}_s$  sont associées à chaque sous-système et dont la structure est :

$$\mathcal{M}_b = -i\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & I_b^\dagger \\ I_b & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_s = -i\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & I_s^\dagger \\ I_s & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Les éléments de  $I_s$  et  $I_b$  sont donnés par l'équation (3.8). En prenant la limite d'un "bain" à température infinie, dans celui-ci, l'aimantation transverse ainsi que l'énergie de liaison tombent à zéro. De façon générale, dans la limite  $\beta_b \rightarrow 0$  on a  $\mathbf{I}_b = 0$ . Les éléments de la partie "système" (éq. 3.8) se décomposent en deux termes, associés aux contributions de volume et de surface (voir appendice) et ainsi le profil d'aimantation à l'instant initial s'écrit sous la forme :

$$m^z(k, 0) = H(k) (m_V^z + m_S^z(k)), \quad (4.3)$$

où  $m_V^z$  est la densité d'aimantation de volume et  $m_S^z(k)$  la contribution due à la surface libre. La fonction d'Heaviside  $H(k)$  est telle que  $m^z(-|k|, 0) = 0$ , reflétant ainsi le fait que le bain est préparé à température infinie. Cette décomposition est valable pour l'ensemble des profils  $p^j(k)$  introduit précédemment :

$$p^j(k) = H(k) (p_V^j + p_S^j(k)). \quad (4.4)$$

Pour le **modèle XX**

$$p_V^j = (-1)^j \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \cos(j\theta) \tanh(\beta_s \epsilon_h(\theta)/2) \quad (4.5)$$

$$p_S^j(k) = (-1)^{j+1} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \cos((2k+j)\theta) \tanh(\beta_s \epsilon_h(\theta)/2), \quad (4.6)$$

où  $\epsilon_h(\theta) = h - \cos(\theta)$ . Pour le **modèle d'Ising** au point critique ( $h = 1$ ),

$$p_V^j = (-1)^j \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \sin(\theta(1/2 - j)) \tanh(\beta_s \sin(\theta/2)) \quad (4.7)$$

$$p_S^j(k) = (-1)^j \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \sin(\theta(2k + j - 1/2)) \tanh(\beta_s \sin(\theta/2)). \quad (4.8)$$

## 4.2 Evolution du profil d'aimantation transverse, ( $T_b = \infty$ )

En séparant les contributions de volume et de surface, la densité d'aimantation transverse, donnée par l'équation (13.15), devient

$$m^z(n, t) = \sum_j (F_t^j \star p_V^j H)(n) + \sum_j (F_t^j \star p_S^j H)(n). \quad (4.9)$$

Il paraît alors acceptable de ne pas tenir compte des effets liés à la surface libre initiale, puisque, dans la limite des temps longs, le front d'onde est localisé en  $x = t \gg 1$ . On montre que l'aimantation transverse au niveau du front d'onde est donnée à l'ordre dominant par  $m^z(t, t) \simeq m_V^z$  (voir schéma 4.1). En effet dans le cas critique (pour Ising avec  $T_s = 0$  et  $h = 1$  ou XX avec  $T_s = 0$  et  $h < 1$ ) la contribution de surface à l'aimantation décroît de façon algébrique  $m_S(k) \propto 1/k$ . L'aimantation au niveau de l'interface est alors :

$$m^z(t, t) \simeq m_V^z + \mathcal{O}(t^{-1}). \quad (4.10)$$

Négliger le terme de surface permet de réécrire le profil d'aimantation comme un produit de convolution avec  $m^z(n, 0)$ . Dans cette approximation, le profil d'aimantation est

$$m^z(n, t) = (G_t \star m^z(0))(n), \quad (4.11)$$

où

$$G_t(n) = \frac{1}{m_V^z} \sum_j p_V^j F_t^j(n) \quad \text{et} \quad m^z(n, 0) = m_V^z H(n). \quad (4.12)$$

Le profil initial étant proportionnel à la fonction d'Heaviside, la fonction de Green est obtenue, dans la limite continue, en dérivant l'équation (4.11)

$$\partial_x m^z(x, t) = m^z(0) G_t(x). \quad (4.13)$$

Le calcul exact est effectué en appendice pour le modèle d'Ising préparé à température nulle, en champ critique ( $T_b = \infty, T_s = 0, h = 1$ ) et pour le modèle  $XX$  sans restriction ( $T_b = \infty, T_s, h$ ). On montre finalement que la fonction de Green  $G_t(x)$  s'écrit sous la forme

$$G_t(x) = \frac{1}{m_V^z t} g\left(\frac{x}{t}\right), \quad (4.14)$$

avec pour le modèle d'Ising, préparé dans l'état ( $T_b = \infty, T_s = 0, h = 1$ ),

$$g(v) = \frac{1}{\pi} \Pi\left(\frac{v}{2}\right) \quad (4.15)$$

et pour le modèle  $XX$  avec ( $T_b = \infty, T_s, h$ ),

$$g(v) = \frac{\tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h - \sqrt{1 - v^2})\right) + \tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h + \sqrt{1 - v^2})\right)}{2\pi\sqrt{1 - v^2}}, \quad (4.16)$$

où  $g(v)$  s'annule en dehors du cône de lumière ( $|v| \geq 1$ ).

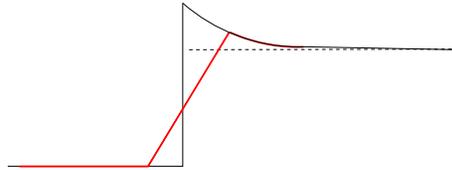


FIG. 4.1 – Schéma du profil d'aimantation. Loin de l'interface, seule l'aimantation de volume contribue significativement au profil d'aimantation.

### 4.3 Généralisation au cas $T_b \neq \infty$ et définition du courant d'aimantation

Le profil de l'aimantation transverse est obtenu de façon exacte dans le cas général, où le "bain" est préparé à la température  $T_b$ , respectivement  $T_s$  pour la partie "système". Dans ce cas, le profil d'aimantation initial  $m_{T_b, T_s}^z(x, 0)$  est

$$m_{T_b, T_s}^z(x, 0) = (m_{T_b, \infty}^z)_0(x) + (m_{\infty, T_s}^z)_0(x), \quad (4.17)$$

avec

$$(m_{T_b, \infty}^z)_0(x) = H(-x)m_{T_b}^z, \quad (m_{\infty, T_s}^z)_0(x) = H(x)m_{T_s}^z, \quad (4.18)$$

où l'on note  $m_{T_s}^z$  et  $m_{T_b}^z$  la contribution du volume à l'aimantation transverse dans le "système" et le "bain" et où rappelons le, on a négligé la contribution de surface. Ainsi, à l'instant  $t$ , l'équation (4.9) conduit à :

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = \sum_j F_t^j * (p_{T_b}^j H_- + p_{T_s}^j H), \quad (4.19)$$

avec  $H_-(x) = H(-x)$  et où  $p_{T_j}^j$  est la contribution de volume aux profils, définis précédemment (équation 3.29), dans le sous-système préparé à température  $T_j$ . Cette dernière équation peut encore s'écrire

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = m_{T_b, \infty}^z(x/t) + m_{\infty, T_s}^z(x/t), \quad (4.20)$$

où  $m_{\infty, T_s}^z(x/t)$  (resp.  $m_{T_b, \infty}^z(x/t)$ ) correspond au profil d'aimantation obtenu dans le cas d'un "bain" (resp. un "système") préparé à température infinie, avec

$$\begin{aligned} m_{\infty, T_s}^z(x/t) &= ((G_t)_{T_s} * (m_{\infty, T_s}^z)_0)(x) \\ m_{T_b, \infty}^z(x/t) &= ((G_t)_{T_b} * (m_{T_b, \infty}^z)_0)(x), \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $(G_t)_{T_j}$  est la fonction de Green associée à chacun des sous-systèmes  $j = s, b$ , préparés à la température  $T_j$  (voir par exemple l'équation (4.16) pour le modèle  $XX$ ).

En écrivant la fonction de Green sous la forme d'échelle

$$(G_t)_{T_j} = \frac{1}{tm_{T_j}^z} g_{T_j} \left( \frac{x}{y} \right), \quad (4.22)$$

on obtient immédiatement :

$$m_{\infty, T_s}^z(x/t) = \int_{-1}^{x/t} dv g_{T_s}(v) \quad (4.23)$$

$$m_{T_b, \infty}^z(x/t) = \int_{x/t}^1 dv g_{T_b}(v), \quad (4.24)$$

avec, pour des raisons de symétrie évidentes,  $m_{T_j, \infty}^z(x/t) = m_{\infty, T_j}^z(-x/t)$  de sorte que  $g_{T_j}(-v) = g_{T_j}(v)$ . Ainsi le profil d'aimantation est donné par

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = \int_{-1}^1 dv g_{T_s, T_b}(v, x/t), \quad (4.25)$$

avec

$$g_{T_s, T_b}(v, x/t) = g_{T_b}(v)H(v - x/t) + g_{T_s}(v)H(x/t - v), \quad (4.26)$$

et en particulier

$$m_{T_b, T_s}^z(0) = \int_0^1 dv (g_{T_b}(v) + g_{T_s}(v)). \quad (4.27)$$

Il est alors facile de vérifier que la moyenne de l'aimantation transverse est conservée ; puisque la fonction de Green  $G_t(x)$  est une fonction homogène de degré 1, elle obéit à l'équation d'Euler que l'on peut écrire sous la forme d'une équation de continuité :

$$\partial_t G_t(x) + \partial_x \left( \frac{x}{t} G_t(x) \right) = 0. \quad (4.28)$$

Le lecteur trouvera plus loin, une discussion détaillée sur la conservation de l'aimantation transverse dans le cas du modèle d'Ising. Finalement, on définit le courant d'aimantation transverse à travers l'équation de continuité.

$$\partial_t m^z + \partial_x j^z = 0 \quad (4.29)$$

et on montre simplement que le courant d'aimantation est

$$j_{T_b, T_s}^z(x/t) = j_{T_b, \infty}^z(x/t) + j_{\infty, T_s}^z(x/t), \quad (4.30)$$

avec

$$j_{\infty, T_s}^z(x/t) = \int_{-1}^{x/t} dv v g_{T_s}(v), \quad (4.31)$$

$$j_{T_b, \infty}^z(x/t) = - \int_{-1}^{x/t} dv v g_{T_b}(v). \quad (4.32)$$

En particulier

$$j_{T_b, T_s}^z(0) = \int_0^1 dv v (g_{T_s}(v) - g_{T_b}(v)). \quad (4.33)$$

Une interprétation des expressions (4.27) et (4.33) est réalisée plus loin, lors de l'étude des propriétés de l'état stationnaire.

## 4.4 Etude du modèle $XX$

Nous présentons ici, un moyen simple d'obtenir la fonction de Green associée au problème. Pour cela on suppose que pour tout temps, la valeur de l'aimantation au niveau de l'interface est donnée par la moyenne de l'aimantation du "bain" et du "système"

$$m^z(0, t) = m_V^z/2. \quad (4.34)$$

Il convient d'utiliser l'hypothèse d'échelle, confirmée par Ogata [68], affirmant que lors de la mise en contact de deux sous-systèmes, la moyenne de toute observable  $\mathcal{O}_n$  localisée dans le voisinage du site  $n$  est donnée par la forme d'échelle suivante :  $\langle \mathcal{O}_n \rangle(t) = \Phi_{\mathcal{O}}(n/t)$ . Ainsi par dérivation nous obtenons :

$$\partial_x m^z(x, t) = \frac{1}{t} \Phi'_z \left( \frac{x}{t} \right) = m_V^z G_t(x). \quad (4.35)$$

Notons que dans la région acausale ( $\mathcal{A}_c$ ) le profil d'aimantation est constant, imposant ainsi  $\partial_x m^z(x, t)|_{\mathcal{A}_c} = 0$ . Nous en déduisons la forme d'échelle de la fonction de Green.

$$G_t(x) = \frac{1}{m_V^z} \frac{1}{t} g \left( \frac{x}{t} \right), \text{ avec } g(v) = \Phi'_z(v) = t \partial_x m^z(x, t) \quad (4.36)$$

et

$$g(v) = 0 \quad \text{pour} \quad |v| \geq 1. \quad (4.37)$$

Le produit de convolution (4.11) devient

$$m^z(x, t) = \int_{-1}^{x/t} dv g(v). \quad (4.38)$$

Rappelons que  $m_V^z = p_V^0$  est donnée par l'équation (13.20). Ainsi l'hypothèse (4.35) conduit à l'égalité :

$$m^z(0, t) = \int_{-1}^0 dv g(v) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{2\pi} \tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h - \cos\theta)\right) = \frac{m_V^z}{2}. \quad (4.39)$$

Un changement de variables approprié permet d'aboutir finalement à l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^0 dv g(v) = \int_{-1}^0 dv \frac{\tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h - \sqrt{1-v^2})\right) + \tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h + \sqrt{1-v^2})\right)}{2\pi\sqrt{1-v^2}}, \quad (4.40)$$

qui par identification conduit au résultat exact (4.16).

#### 4.4.1 A température nulle

Nous allons, pour le moment, focaliser notre attention sur le cas extrême où  $T_b = \infty$  et  $T_s = 0$ , mais nous reviendrons plus tard sur le rôle de la température. Ainsi, à température nulle, il nous faut distinguer la région critique du modèle  $XX$  ( $h < 1$ ) de la région  $h \geq 1$ . Le terme  $\tanh(\beta_s \epsilon_h(\theta)/2)$  qui apparaît dans l'expression de la fonction de Green devient  $\text{sgn}(\epsilon_h(\theta))$ .

**1-Dans la région  $h \geq 1$**  les excitations sont toutes positives et l'état fondamental du "système" est l'état  $|H^+\rangle = |\uparrow\rangle^{\otimes L_s}$ . Dans cette situation la matrice densité de la chaîne  $\rho(0) = \rho_b \otimes \rho_s$  se ramène au cas complètement factorisé avec

$$\rho_s = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|^{\otimes x > 0} \quad (4.41)$$

et, le bain étant à température infinie

$$\rho_b = \left( \frac{|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|}{2} \right)^{\otimes x < 0}. \quad (4.42)$$

La fonction de Green est donnée dans la section (3.3), on rappelle :

$$G_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{avec} \quad g(v) = \frac{1}{t} \frac{1}{\pi\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.43)$$

La densité d'aimantation à l'instant initial est simplement  $m^z(x, 0) = H(x)$  et son évolution temporelle est obtenue par l'intégration de la fonction  $g(v)$ .

$$m^z(x, t) = \int_{-1}^{x/t} dv g(v) = \frac{1}{\pi} \arcsin(x/t) + \frac{1}{2}. \quad (4.44)$$

**2-Pour les champs**  $h < 1$ , le système est critique et la fonction de Green prend alors la forme particulière (figure 4.2) [45] (voir l'appendice pour une démonstration)

$$G_t(x) = \frac{1}{tm_V^z} g\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} \frac{1}{2 \arcsin(h) \sqrt{1 - (x/t)^2}}, \quad \sqrt{1 - h^2} \leq |x/t| < 1, \quad (4.45)$$

et zéro autrement. Ainsi, à coté de la vitesse maximale  $v = 1$ , une nouvelle vitesse caractéristique  $v_h = \sqrt{1 - h^2}$  apparaît dans le problème, fonction du champ extérieur  $h$ . Cette vitesse est associée aux excitations de basse énergie du spectre de la chaîne  $\epsilon(q) = h - \cos q$ . A la fermeture du gap, en  $q_f = \arccos h$  la vitesse  $v_h$  est

$$v_h = \left. \frac{\partial \epsilon(q)}{\partial q} \right|_{q_f} = \sin \arccos h = \sqrt{1 - h^2}. \quad (4.46)$$

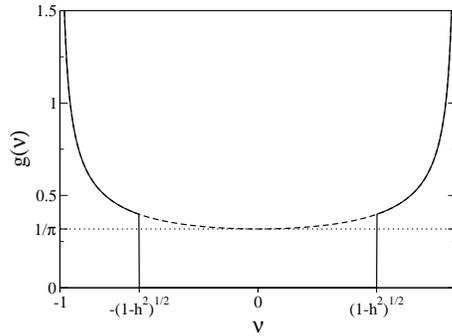


FIG. 4.2 – Fonction  $g(v)$  associée au modèle  $XX$  dans le cas  $T_s = 0$  et  $T_b \rightarrow \infty$  pour les champs  $h = 1$  (---) et  $h = 0.8$  (—).

**2-a) Profil d'aimantation.** Le support déconnecté de la fonction de Green est la cause de l'apparition d'un profil d'aimantation plat au centre de la chaîne [30, 45] :

$$m^z(x, t) = \Phi_h(x/t) + m_V^z/2, \quad (4.47)$$

avec la fonction d'échelle  $\Phi_h(v)$ , telle que  $\Phi_h(-v) = -\Phi_h(v)$  et

$$\Phi_h(v) = \begin{cases} 0 & 0 \leq v \leq v_h \\ m_V^z/2 - \arccos(v)/\pi & v_h < v \leq 1 \\ m_V^z/2 & v < 1. \end{cases} \quad (4.48)$$

Dans la région  $|x/t| \leq v_h$ , l'aimantation transverse est exactement donnée par la moyenne des aimantations du "système" et du "bain"; ainsi la chaîne apparaît localement dans un état stationnaire hors de l'équilibre, traversée par un courant d'aimantation transverse (donc d'énergie) constant. En effet, à partir de l'équation de continuité sur réseau  $\partial_t m^z(n, t) + j(n, t) - j(n-1, t) = 0$  et avec  $\frac{d}{dt} \sigma_n^z = i[H, \sigma_n^z]$  il est possible d'identifier un opérateur de courant local :

$$J_n = \frac{1}{2} (\sigma_n^y \sigma_{n+1}^x - \sigma_n^x \sigma_{n+1}^y) = \frac{-i}{2} (\Gamma_n^2 \Gamma_{n+1}^2 + \Gamma_n^1 \Gamma_{n+1}^1) \quad (4.49)$$

dont la moyenne à l'instant  $t$  est asymptotiquement donnée dans la limite continue par

$$j(x, t) = j_h(v) = \frac{-1}{\pi} \begin{cases} h & 0 \leq v \leq v_h \\ \sqrt{1-v^2} & v_h < v < 1, \end{cases} \quad (4.50)$$

avec  $j_h(-v) = j_h(v)$ . Les résultats numériques obtenus par diagonalisation exacte sont reproduits figure (4.3) pour les champs  $h = 1$  et  $h = 0.75$ . L'accord entre les courbes numériques et les résultats analytiques est excellent.

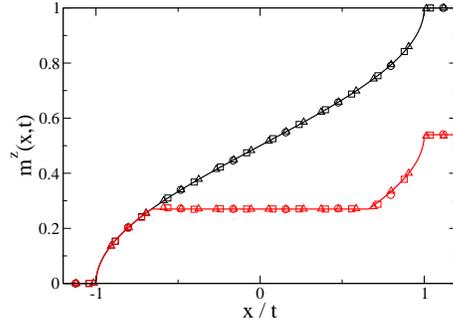


FIG. 4.3 – Résultats numériques et analytiques de l'aimantation transverse pour les champs  $h = 1$  (courbe du haut) et  $h = 0.75$  (courbe du bas). Les résultats numériques sont tracés en fonction de  $x/t$  pour les temps  $t = 125$  (cercles), 250 (carrés) et 375 (triangles).

**2-b) Dynamique du front d'onde.** L'onde générée par l'interface entre le "*bain*" et le "*système*" est la cause de l'évolution temporelle de la chaîne. Deux fronts d'onde se propagent avec une vitesse de  $v = \pm 1$ , l'un dans la partie "*système*" l'autre dans le "*bain*". V. Hunyadi, Z. Rácz et L. Sasvári [69] (en 2004) ont montré que le profil d'aimantation, localisé au niveau des fronts d'ondes, obéissait à la forme d'échelle suivante :

$$\delta m_{\pm}^z(x, t) = m^z(x, t) - m^z(\pm t, t) = \frac{\pm 1}{t^{1/3}} \mathcal{F} \left( \frac{t \mp x}{t^{1/3}} \right). \quad (4.51)$$

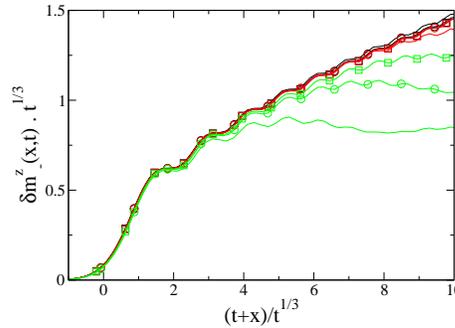


FIG. 4.4 – Courbes numériques du front d'onde se propageant dans le "*bain*" pour les champs  $h = 1$ ,  $h = 0.75$  et  $h = 0.5$ , aux temps  $t = 125$ , 250 et 375 à température nulle.

La figure (4.4) montre clairement que le front d'onde présente une structure en escalier dont chaque marche porte une aimantation  $\mu = 1$ . Alors que la largeur des marches augmente avec le temps comme  $t^{1/3}$ , leur hauteur diminue de sorte que l'aire sous chaque marche, représentant un quantum d'aimantation  $\mu = 1$ , reste constante. La vitesse  $v_h$ , définie précédemment, apparaît alors comme la vitesse associée à la queue du paquet d'ondes qui traverse le système. A l'instant  $t$ , l'onde est alors étalée sur une longueur  $l(t)$  définie par  $l(t) = (v_{max} - v_{min})t = (1 - v_h)t$ , laissant derrière elle, le système dans un état stationnaire.

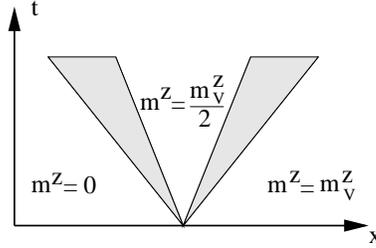


FIG. 4.5 – Schéma de l'évolution de l'interface générée par la mise en contact de deux sous-systèmes.

#### 4.4.2 A température non nulle

**a) Le profil de l'aimantation transverse** dans le cas général, où le "bain" est préparé à la température  $T_b$ , respectivement  $T_s$  pour la partie "système", s'obtient très simplement à partir de l'égalité (4.20). On rappelle

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = m_{T_b, \infty}^z(x/t) + m_{\infty, T_s}^z(x/t), \quad (4.52)$$

avec

$$\begin{aligned} m_{\infty, T_s}^z(x/t) &= ((G_t)_{T_s} * (m_{\infty, T_s}^z)_0)(x) \\ m_{T_b, \infty}^z(x/t) &= ((G_t)_{T_b} * (m_{T_b, \infty}^z)_0)(x), \end{aligned} \quad (4.53)$$

où  $(G_t)_{T_j}$  est la fonction de Green associée à chacun des sous-systèmes  $j = s, b$ , préparés à la température  $T_j$  (équation 4.16). Dans la situation où  $T_b > T_s$  un profil d'aimantation non monotone peut apparaître lorsqu'à l'origine ( $v = 0$ ) la condition suivante est satisfaite :

$$\partial_v m_{T_b, T_s}^z(v)|_0 = \partial_v (m_{T_b, \infty}^z(v)|_0 + m_{\infty, T_s}^z(v)|_0) < 0. \quad (4.54)$$

De plus, si les sous-systèmes sont plongés dans des champs différents  $h_s$  et  $h_b$ , la condition pour laquelle le profil d'aimantation apparaît non monotone est donnée explicitement par :

$$\tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h_s - 1)\right) + \tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h_s + 1)\right) < \tanh\left(\frac{\beta_b}{2}(h_b - 1)\right) + \tanh\left(\frac{\beta_b}{2}(h_b + 1)\right) \quad (4.55)$$

On constate que cette condition est satisfaite dès que l'on fait le choix  $T_s = 0$  et  $h_s < 1$  [68]. Sur la figure (4.6) est tracé le profil d'aimantation transverse de la chaîne XX dans le cas  $T_b = 1$ ,  $T_s = 0$  et  $h_s = h_b = 0.9$ . On note que le comportement de l'aimantation transverse

est linéaire dans la région  $|x/t| < v_h$ ,  $m_{T_b,0}^z(v) \simeq m_{T_b,0}^z(0) + pv$  avec une pente  $p$  fonction de la température  $1/\beta_b$  et du champ  $h$

$$p = -\frac{\tanh\left(\frac{\beta_b}{2}(h-1)\right) + \tanh\left(\frac{\beta_b}{2}(h+1)\right)}{2\pi}. \quad (4.56)$$

Dans la région  $|x/t| < v_h$ , où le profil est linéaire, le courant d'aimantation transverse est

$$j_{T_b,0}^z(v) \simeq j_{T_b,0}^z(0) - \frac{|p|}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2, \quad \text{avec} \quad j_{T_b,0}^z(v) < 0. \quad (4.57)$$

La valeur du courant d'aimantation est évidemment négative traduisant le fait que le l'aimantation transite de la région de forte aimantation vers la région de faible aimantation. En terme de particules fermioniques, on dira que le courant de particule s'écoule du réservoir le plus dense vers le réservoir le moins peuplé.

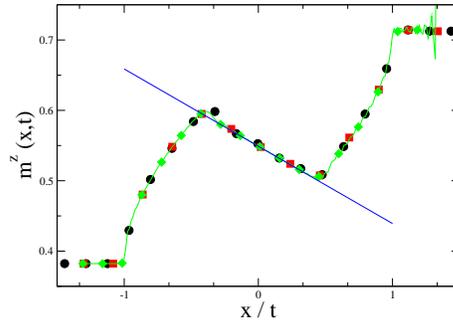


FIG. 4.6 – Courbes numériques du profil d'aimantation pour les temps  $t = 125, 250$  et  $375$  en champs  $h = 0.9$ , avec  $T_b = 1, T_s = 0$ .

**A haute température** ( $T_s \gg 1$  et  $T_b \gg 1$ ), le comportement d'une interface séparant deux sous-systèmes s'obtient facilement en développant à l'ordre dominant (4.16) dans (4.21) ce qui conduit à

$$m_{T_b, T_s}^z(x, t) = (F_t^0 * (m_{T_b, T_s}^z)_0)(x), \quad (4.58)$$

où  $(m_{T_b, T_s}^z)_0$  est le profil initial donné par

$$(m_{T_b, T_s}^z)_0(x) = H(-x)m_{T_b}^z + H(x)m_{T_s}^z. \quad (4.59)$$

On retrouve naturellement la fonction de Green  $F_t^0(x) = \frac{1}{\pi t} \frac{\Pi(v/2)}{\sqrt{1-v^2}}$  obtenue précédemment dans le cas d'un état initial complètement factorisé (eq. 3.36). On le comprend aisément en notant qu'à haute température l'énergie d'agitation thermique, grande devant l'énergie de liaison, découple les spins de la chaîne.

Dans la région causale, le profil d'aimantation est

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = \frac{m_{T_s}^z + m_{T_b}^z}{2} + \frac{m_{T_s}^z - m_{T_b}^z}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{t}\right). \quad (4.60)$$

La fonction de Green  $F_t^0(x) = f_\kappa(x/t)/t$  étant une fonction homogène de degré 1, elle obéit à l'équation d'Euler que l'on peut écrire sous la forme d'une équation de continuité :

$$\partial_t F_t^0(x) + \partial_x \left( \frac{x}{t} F_t^0(x) \right) = 0. \quad (4.61)$$

Par définition, la fonction de Green étant la réponse magnétique (transverse) impulsionnelle, cette dernière équation nous permet d'identifier un courant impulsionnel  $j_i(x, t) = x/t F_t^0(x)$  et l'on montre aisément que le courant associé à l'état initial  $m_0^z(x)$  est simplement donné par le produit de convolution  $(j_i \star m_0^z)(x)$  soit

$$j_{T_b, T_s}^z(x/t) = -\frac{m_{T_s}^z - m_{T_b}^z}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}. \quad (4.62)$$

Au voisinage de l'origine,  $x/t \ll 1$  le profil d'aimantation transverse est donc linéaire et un courant constant, au premier ordre en  $x/t$ , lui est associé tel que

$$j_{T_b, T_s}^z(v) = -\partial_v m_{T_b, T_s}^z(v). \quad (4.63)$$

En définissant le courant d'énergie comme  $J = -hj^z/2$  ainsi que l'énergie par site  $E(v) = -hm_{T_b, T_s}^z(v)/2$ , on obtient

$$J \simeq -\partial_v E(v). \quad (4.64)$$

**b) L'analyse du front d'onde** est simple à prendre en compte dans la situation où  $\beta_b$  reste à zéro alors que l'on fait varier la température du "*système*". On constate numériquement que la structure en escalier, présente dans le profil d'aimantation, persiste à température finie mais avec un moment magnétique porté par chaque marche fonction de la température et du champ  $\mu(h\beta_s) = \tanh(\beta_s h/2)$ , suggérant la relation suivante :

$$\delta m_\pm^z(x, t) = \frac{\pm 1}{t^{1/3}} \mathcal{F} \left( \frac{t \mp x}{t^{1/3}} \right) \tanh \left( \frac{\beta_s}{2} h \right). \quad (4.65)$$

Les résultats numériques obtenus par diagonalisation exacte et représentés sur la figure (4.7), pour différents temps et valeurs du champs  $h$ , confirment parfaitement la forme d'échelle (4.65).

Il est intéressant de noter que  $\mu(h\beta_s)$  correspond à l'aimantation moyenne d'un spin isolé, plongé dans un champ  $h$  à la température  $1/\beta_s$ . On comprendre la relaxation du système comme la détente brutale d'un gaz de spins libres. Les spins, initialement confinés sur la droite du système, se propagent dans le "*bain*". Chaque marche d'aimantation du front d'onde est associée à la propagation d'un spin d'aimantation  $\mu(h\beta_s)$ .

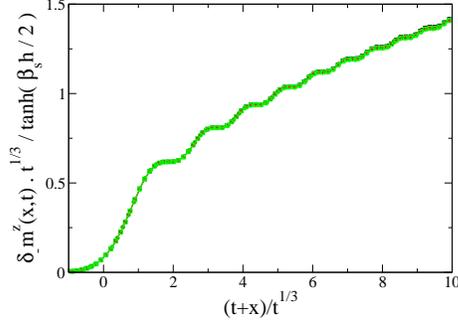


FIG. 4.7 – Courbes numériques du front d'onde se propageant dans le "bain" pour les champs  $h = 1$ ,  $h = 0.75$  et  $h = 0.5$ , aux temps  $t = 125$ ,  $250$  et  $375$  à la température  $T_s = 1$ .

## 4.5 Etude du modèle d'Ising critique

De la même façon que précédemment, nous présentons ici, un moyen simple d'obtenir la fonction de Green du modèle d'Ising, associée à la dynamique du profil d'aimantation dans le cas d'un bain à température infinie et d'un système préparé à la température  $T_s = 1/\beta_s$ . Avec les hypothèses suivantes :

$$m^z(0, t) = m_V^z/2 \quad (4.66)$$

et

$$G_t(x) = \frac{1}{m_V^z} \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right), \text{ avec } g(v) = 0, \text{ pour } |v| \geq 1, \quad (4.67)$$

et en utilisant l'équation (13.22), on obtient pour la densité d'aimantation au niveau de l'interface

$$m^z(0, t) = \int_{-1}^0 dv g(v) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\pi} \sin(\theta) \tanh(\beta_s \sin \theta) = \frac{m_V^z}{2}. \quad (4.68)$$

Un changement de variable approprié conduit à l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^0 dv g(v) = \int_{-1}^0 dv \frac{1}{\pi} \tanh\left(\beta_s \sqrt{1-v^2}\right). \quad (4.69)$$

Par identification, on obtient

$$g(v) = \frac{1}{\pi} \tanh\left(\beta_s \sqrt{1-v^2}\right). \quad (4.70)$$

Dans la limite d'un système préparé à température nulle ( $\beta_s \rightarrow \infty$ ) on retrouve la fonction porte de l'équation (4.15) dont une démonstration rigoureuse est donnée en appendice.

### 4.5.1 A température nulle

Dans la limite d'un système préparé à température nulle la fonction de Green associée à l'évolution de l'aimantation transverse est donnée par  $G_t(x) = 1/(m_V^z t)g(x/t)$  avec

$$g(x/t) = \frac{1}{\pi} \Pi(x/2t). \quad (4.71)$$

où  $\Pi$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . Le profil d'aimantation est obtenu par l'intégration de la fonction de Green et conduit à un comportement linéaire de l'aimantation transverse dans la région causale. L'aimantation prend la forme d'échelle :

$$m^z(x, t) = \frac{m_V^z}{2} (\Phi(x/t) + 1), \quad (4.72)$$

avec la fonction d'échelle  $\Phi(v)$ , telle que  $\Phi(-v) = -\Phi(v)$  et

$$\Phi(v) = \begin{cases} v & 0 < v \leq 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases}. \quad (4.73)$$

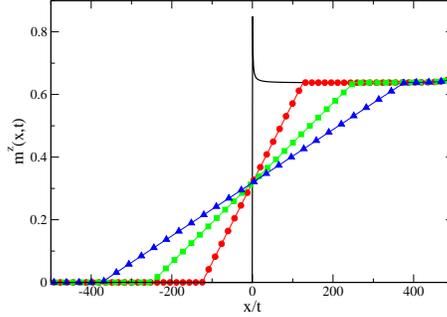


FIG. 4.8 – Courbes numériques du profil d'aimantation pour les temps  $t = 0$  (noir),  $t = 125$  (cercles), 250 (carrés) et 375 (triangles) en champs  $h = 1$ , avec  $T_b = \infty$ ,  $T_s = 0$ .

L'aimantation transverse est tracée sur la figure (4.8) pour différents temps. Les résultats numériques indiquent clairement que l'excès initial d'aimantation dû à la l'interface ne contribue pas significativement au profil asymptotique. En effet, d'après (4.72) seule la contribution de volume de l'aimantation transverse est conservée au cours du temps tandis que celle associée à l'interface (présence initialement de deux bords libres) est perdue. En décomposant la densité d'aimantation sur ces deux contributions  $m^z(x, t) = m^{z,V}(x/t) + m^{z,i}(x, t)$ , la variation de l'aimantation totale à l'instant  $t$  est donnée par la perte de la contribution de l'interface dans la région  $x \leq t$ , comme schématisé sur la figure (4.9). On a

$$\Delta M^z(t) = M^{z,i}(t) - M^{z,i}(0) \simeq - \int_0^t dx m^{z,i}(x, 0) \quad (4.74)$$

où l'on a tenu compte de la conservation du terme de volume ( $\partial_t M^{z,V} = 0$ ).

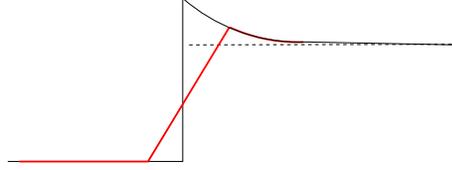


FIG. 4.9 – Schéma du profil d'aimantation au niveau de l'interface. La partie dissipée de l'aimantation est essentiellement donnée par l'aimantation de surface, intégrée dans la région  $x \leq t$ . La causalité impose ici  $m^{z,i}(x, t) = m^{z,i}(x, 0)$  pour les  $x > t$ .

La dérivée temporelle de l'aimantation totale est donc donnée par le profil initial de l'aimantation de surface :

$$\partial_t M^z(t) = \partial_t \Delta M^z(t) = -m^{z,i}(t, 0). \quad (4.75)$$

Ce résultat est parfaitement validé par les données numériques représentées sur la figure (4.10). L'accord parfait entre les courbes numérique et la conjecture (4.75) nous permet d'affirmer que seule la contribution de volume est conservée, alors que la contribution de l'interface à l'aimantation est dissipée.

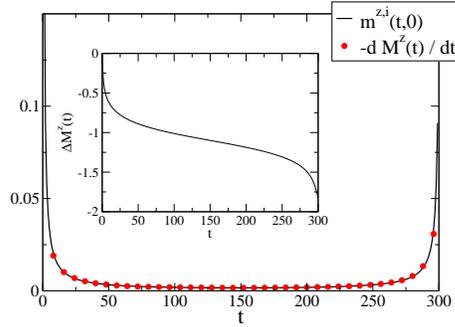


FIG. 4.10 – Dans le graphique principal est représenté  $-\partial_t M^z(t)$  ainsi que le profil d'aimantation initial  $m^{z,i}(t, 0)$ , l'accord entre les courbes est excellent. Dans l'insert est tracé la variation de l'aimantation  $\Delta M^z(t)$  en fonction du temps.

Le courant d'aimantation transverse est obtenu comme précédemment dans le cas  $XX$  par convolution du courant impulsionnel  $j_i^z = x/t G_t(x)$  avec le profil initial  $m_V^z H(x)$ , conduisant à

$$j^z(x, t) = j^z(v) = -\frac{m_V^z}{4}(1 - v^2) \quad |v| < 1 \quad (4.76)$$

et zéro autrement. Au voisinage de l'origine (pour les temps longs), à l'ordre dominant en  $x/t$  on obtient

$$j^z(v) \simeq -\frac{1}{2} \partial_v m^z(v) \quad (4.77)$$

reliant le courant à l'aimantation. Asymptotiquement, dans la limite  $t \rightarrow \infty$  le système se retrouve localement dans un état stationnaire hors de l'équilibre traversé par un courant constant (à l'ordre dominant) et avec une aimantation  $m_V^z/2$  qui est la moyenne arithmétique des aimantations d'équilibre du bain et du système.

### 4.5.2 A hautes températures

Le comportement d'une interface séparant deux sous-systèmes préparés à hautes températures est obtenu, comme précédemment, en utilisant la relation

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = m_{T_b, \infty}^z(x/t) + m_{\infty, T_s}^z(x/t).$$

La fonction de Green est donnée explicitement par  $g(v)$ , elle devient à haute température et à l'ordre dominant

$$g(v) = \frac{1}{\pi} \tanh\left(\beta_j \sqrt{1 - (x/t)^2}\right) \simeq \frac{1}{\pi} \beta_j \sqrt{1 - (x/t)^2}. \quad (4.78)$$

Une fois de plus on retrouve la fonction de Green (eq. 3.36) associée à un état initial complètement factorisé. En effet il vient :

$$(G_t)_{T_j}(x) \simeq \frac{1}{tm_{T_j}^z} \frac{1}{\pi} \beta_j \sqrt{1 - (x/t)^2}, \quad (4.79)$$

où  $m_{T_j}^z \simeq \beta_j/2$ , de sorte que  $(G_t)_{T_j}(x) = 2F_t^0$ . Finalement

$$m_{T_b, T_s}^z(x, t) = (2F_t^0 * (m_{T_b, T_s}^z)_0)(x), \quad (4.80)$$

où  $(m_{T_b, T_s}^z)_0$  est le profil initial donnée par

$$(m_{T_b, T_s}^z)_0(x) = H(-x)m_{T_b}^z + H(x)m_{T_s}^z. \quad (4.81)$$

Dans la région causale, le profil et le courant d'aimantation sont

$$\begin{aligned} m_{T_b, T_s}^z(x/t) &= \frac{m_{T_s}^z + m_{T_b}^z}{2} + \frac{m_{T_s}^z - m_{T_b}^z}{\pi} \left( \arcsin\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{x}{t} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2} \right). \\ j_{T_b, T_s}^z(x/t) &= -\frac{2}{3\pi} (m_{T_s}^z - m_{T_b}^z) \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Dans la région  $|x/t| \ll 1$ , le courant est relié à l'aimantation par la relation :

$$j_{T_b, T_s}^z \simeq -\frac{1}{3} \partial_v m_{T_b, T_s}^z(v). \quad (4.83)$$

## 4.6 Etat stationnaire

Lors de la mise en contact de sous-systèmes préparés à des températures différentes, les propriétés de l'état stationnaire, obtenu dans la limite asymptotique  $t \rightarrow \infty$ , ont été analysées [31, 32, 33, 34, 36, 37, 38]. Plus particulièrement, l'état stationnaire est obtenu en laissant évoluer une chaîne formée de deux sous-systèmes semi-infinis mis en contact par

l'intermédiaire d'un sous-système de taille  $L_s$ . Les sous-systèmes sont initialement thermalisés aux températures  $1/\beta_L$ ,  $1/\beta_s$  et  $1/\beta_R$  (de gauche à droite sur la figure 4.11). L'ensemble des sous-systèmes est décrit par l'hamiltonien  $H^{XY}$  du modèle  $XY$  et l'on note  $H_L$ ,  $H_s$  et  $H_R$  l'hamiltonien de chaque sous-système.

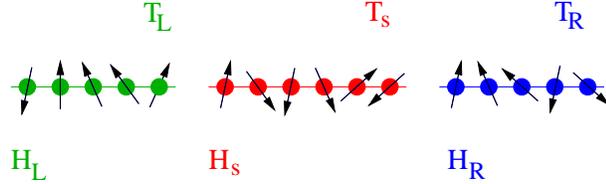


FIG. 4.11 – Schéma de la mise en contact de deux sous-systèmes semi-infinis, par l'intermédiaire d'un block de taille  $L_s$ . De gauche à droite, les sous-systèmes sont préparés aux températures  $1/\beta_L$ ,  $1/\beta_s$  et  $1/\beta_R$ .

Dans ce contexte, les fonctions de corrélations ainsi que la production d'entropie dans l'état stationnaire ont été étudiées [35, 36]. Il a été démontré que l'état stationnaire est indépendant de  $\beta_s$  ainsi que de la taille  $L_s$  du sous-système connectant les deux bains. Ainsi la situation  $L_s = 0$  correspond à l'étude réalisée sur les modèles  $XX$  et Ising dans les sections précédentes. En particulier, il a été démontré que l'état stationnaire est décrit par l'opérateur densité

$$\rho_{st} \propto \exp(-\beta H_{st}), \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\beta_R + \beta_L}{2}, \quad (4.84)$$

avec

$$H_{st} = H^{XY} + \frac{\delta}{\beta} H_J, \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\beta_R - \beta_L}{2}, \quad (4.85)$$

où  $H_J$  est un terme d'interaction à longue portée de type courant de la forme :

$$H_J = \frac{1}{2i} \sum_{n < m} \tilde{k}(n-m) (S_{n,m}^{y,x} - S_{n,m}^{x,y}) \quad (4.86)$$

et

$$S_{n,m}^{\mu,\nu} = \sigma_n^\mu \sigma_{n+1}^z \dots \sigma_{m-1}^z \sigma_m^\nu, \quad (4.87)$$

où  $\tilde{k}$  est la transformée de Fourier de  $k(q)$  définie par

$$k(q) = \epsilon_q \text{sign}(2h \sin q - (1 - \kappa^2) \sin 2q). \quad (4.88)$$

On rappelle ici que  $\epsilon_q = ((h - \cos q)^2 + \kappa^2 \sin^2 q)^{1/2}$  est l'énergie des excitations associées au modèle  $XY$ .

Dans l'état stationnaire, nous montrons facilement (bien que cela ne soit pas explicitement écrit de la sorte dans [36]) que le profil d'aimantation transverse est plat et qu'il est donné par

$$m^z(x) = \frac{m_{T_s}^z + m_{T_b}^z}{2} \quad (4.89)$$

où évidemment  $m_T^z$  est l'aimantation transverse d'équilibre pour une température  $T$ . Par ailleurs, un courant d'aimantation non nul traverse le système :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} j_{T_b, T_s}^z(x/t) = j_{T_b, T_s}^z(0) = j_{T_b, \infty}^z(0) + j_{\infty, T_s}^z(0) \quad (4.90)$$

$$= \int_0^1 dv v (g_{T_b}(v) - g_{T_s}(v)), \quad (4.91)$$

où  $g_T(v)$  est donnée par les équations (4.16) et (4.70) pour les modèles  $XX$  et Ising. Là encore, ce résultat n'apparaît pas explicitement dans la référence [36]. Notons que lorsque  $\delta = 0$  le système relaxe vers l'état d'équilibre, avec évidemment  $j_{T_b, T_s}^z = 0$ . Dans le cas du modèle  $XX$ , on obtient, après quelques efforts, la moyenne de l'opérateur courant, calculée à partir de l'état stationnaire proposé par W. Aschbacher [36] :

$$j_{T_b, T_s}^z = j_{T_b, \infty}^z + j_{\infty, T_s}^z, \quad (4.92)$$

avec

$$j_{\infty, T_s}^z = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \tanh \left( \frac{\beta}{2} (h - \cos \theta) \right), \quad (4.93)$$

qui, sous le changement de variable  $v = \partial_\theta (h - \cos \theta) = \sin \theta$  conduit à l'expression (4.90). Dans le cas du modèle d'Ising, il est cependant impossible de définir un opérateur courant associé à l'aimantation puisque  $[H, M^z] \neq 0$ . Néanmoins, dans la limite continue, on vérifie que l'opérateur courant d'énergie du modèle d'Ising  $j_e^{Ising}(x)$  est lié à l'opérateur du courant d'aimantation du modèle  $XX$  par la relation

$$j_e^{Ising}(x) = -\frac{j_z^{XX}(x)}{2}. \quad (4.94)$$

Au point critique, l'aimantation transverse et les corrélations  $\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle$  contribuent avec la même intensité; on suppose alors l'égalité  $\partial_t e_{link}^{Ising} = \partial_t e_z^{Ising}$ , avec

$$e_{link}^{Ising}(n, t) = -\frac{1}{2} \langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle(t), \quad e_z^{Ising}(n, t) = -\frac{1}{2} \langle \sigma_n^z \rangle(t). \quad (4.95)$$

La relation de continuité pour la densité d'énergie  $e(x, t)$  devient :

$$\partial_t m^z(x, t) + \frac{1}{2} \partial_x j_z^{XX}(x, t) = 0. \quad (4.96)$$

De sorte que, la moyenne de l'opérateur courant d'aimantation du modèle  $XX$  doit nous permettre d'obtenir la moyenne du courant d'aimantation transverse du modèle d'Ising à un facteur 1/2 près. Finalement on vérifie

$$j_{T_b, T_s}^z = j_{T_b, \infty}^z + j_{\infty, T_s}^z, \quad (4.97)$$

avec

$$j_{\infty, T_s}^z = \frac{1}{2} j_z^{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \tanh(\beta \sin(\theta/2)), \quad (4.98)$$

de sorte que sous le changement de variable  $v = \cos(\theta/2)$ , on obtient l'expression (4.90) avec

$$g(v) = \frac{1}{\pi} \tanh(\beta \sqrt{1 - v^2}). \quad (4.99)$$

Finalement il est toujours possible d'écrire l'aimantation et le courant sous la forme :

$$m_{\infty, T_s}^z = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} Tr\{\sigma^z \rho(\theta)\} \quad (4.100)$$

$$j_{\infty, T_s}^z = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \partial_\theta \epsilon(\theta) Tr\{\sigma^z \rho(\theta)\}, \quad (4.101)$$

où  $\epsilon(\theta)$  est le spectre des excitations (avec pour  $XX$ ,  $\epsilon(\theta) = h - \cos\theta$ ) et où  $\rho(\theta)$  est la matrice densité d'un mode

$$\rho(\theta) = \frac{1}{Z(\theta)} \exp(\beta\epsilon(\theta)/2). \quad (4.102)$$

L'aimantation étant reliée à la densité de particules à travers la relation  $\sigma_n^z = 2c_n^\dagger c_n - 1$ , il est commode d'interpréter ces résultats en terme de fermions. Ainsi, l'on constate que la densité de particules dans l'état stationnaire est simplement la somme de la densité de particules de chaque mode libre. De même, le courant dans l'état stationnaire est la somme des courants associées aux modes libres, qui est donnée par  $j(\theta) = v(\theta)\bar{n}(\theta)$ , avec  $\bar{n}(\theta) = Tr\{\sigma^z \rho(\theta)\}$ .

Alors que le profil d'aimantation est plat dans la limite asymptotique c'est le terme d'interaction  $H_J$  qui est à l'origine du courant d'aimantation traversant le système. En effet certains éléments de  $H_J$  sont associés au flux d'énergie  $\phi_L$  et  $\phi_R$  s'échappant des bains  $L$  et  $R$ . A titre d'exemple on donne  $\phi_R$  défini comme :

$$\phi_R = -i[H^{XY}, H_R]. \quad (4.103)$$

Ainsi  $\phi_R$  s'exprime en fonction des opérateurs  $S^{x,y}$  et  $S^{y,x}$  :

$$\phi_R = \frac{1 + \kappa^2}{8} (S_{L_s, L_s+2}^{x,y} - S_{L_s, L_s+2}^{y,x}) - h \left( \frac{1 + \kappa}{2} S_{L_s, L_s+1}^{x,y} - \frac{1 - \kappa}{2} S_{L_s, L_s+1}^{y,x} \right). \quad (4.104)$$

Il est alors possible de définir la production d'entropie dans l'état stationnaire comme

$$Ep = \beta_L \langle \phi_L \rangle_{st} + \beta_R \langle \phi_R \rangle_{st}, \quad (4.105)$$

avec  $\langle \phi_L \rangle_{st} + \langle \phi_R \rangle_{st} = 0$ . Il a été démontré que la production d'entropie est positive [39] et en particulier on peut réécrire la production d'entropie sous la forme :

$$Ep = 2\delta \langle \phi_R \rangle_{st} \geq 0. \quad (4.106)$$

Ainsi lorsque  $\delta > 0$  le flux d'énergie s'écoule du réservoir le plus chaud vers le réservoir plus froid.

L'entropie de von Neumann calculée sur une block de  $n$  spins dans l'état stationnaire est caractérisée par la moyenne des température  $\beta$  ainsi que par l'écart en température  $\delta$ . On définit l'entropie dans l'état stationnaire comme :

$$S_{\beta, \delta}(n) = Tr\{\rho_{st}(n) \ln \rho_{st}(n)\}, \quad (4.107)$$

où  $\rho_{st}(n)$  est la matrice densité réduite obtenue en traçant sur les degrés de liberté extérieurs au block considéré  $\rho_{st}(n) = Tr_{ext}\{\rho_{st}\}$ . Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , pour  $0 \leq \delta < \beta < \infty$ , l'entropie croît linéairement avec la taille du block considéré :

$$S_{\beta, \delta}(n) = C_{\beta, \delta} n + \mathcal{O}(n), \quad \text{avec} \quad C > 0. \quad (4.108)$$

Il a été démontré que l'entropie dans l'état stationnaire est strictement plus grande que l'entropie d'un système à l'équilibre à la température  $\beta$ , ce qui se traduit par l'inégalité suivante :

$$C_{\beta,\delta} > C_{\beta,0}. \quad (4.109)$$

Ce résultat ne s'applique pas si l'un des sous-systèmes est préparé à température nulle. Dans ce cas le comportement de l'entropie de von Neumann dépend fortement des corrélations spatiales dans l'état fondamental. En particulier au point critique, lorsque la longueur de corrélation diverge, l'entropie d'intrication croît comme le logarithme de  $n$ . L'étude du comportement de l'entropie lors de la mise en interaction de sous-systèmes préparés dans l'état fondamental est effectuée dans le chapitre 3.

## 4.7 Conclusion

Nous avons étudiés analytiquement et numériquement l'évolution temporelle générée par la mise en interaction de sous systèmes thermalisés à des températures différentes. Une analyse du cas complètement factorisé (chapitre 3), largement étudié au préalable, nous a permis de saisir le comportement général induit par un état spatialement inhomogène et de mettre en exergue, les fonctions d'échelles associées à l'aimantation transverse ainsi qu'à la fonction de Green. Nous avons noté, dans le cas du modèle d'Ising, partant d'un état complètement factorisé, que le système atteint (après un régime transitoire) un état où l'aimantation est conservée. Dans le chapitre 4 nous sommes entrés dans le coeur du problème en étudiant la relaxation d'une interface séparant deux sous-systèmes préparés aux températures  $T_b$  et  $T_s$ . Dans un premier temps, lorsque la température du bain est infinie ( $T_b = \infty$ ), nous avons obtenu de façon exacte la fonction de Green associée au profil d'aimantation transverse, dans les cas  $XX$  ( $\forall h, \forall T_s$ ) et Ising critique ( $h = 1$ ) à température nulle ( $T_s = 0$ ). Ainsi le profil d'aimantation à l'instant  $t$  est donné par le produit de convolution

$$m_{\infty, T_s}^z(x/t) = ((G_t)_{T_s} * m_0^z)(x). \quad (4.110)$$

Nous avons proposé une méthode simple permettant d'obtenir les fonctions de Green exactes des modèles  $XX$  et Ising et avons ainsi généralisé notre étude dans le cas d'un bain préparé à température finie. Dans ce cas précis nous avons montré que le profil ainsi que le courant d'aimantation sont fonction de la variable d'échelle  $x/t$ . En particulier nous avons mis en évidence que l'étude d'un problème à deux températures ( $T_s, T_b$ ) se ramène, grâce aux égalités suivantes

$$m_{T_b, T_s}^z(x/t) = m_{T_b, \infty}^z(x/t) + m_{\infty, T_s}^z(x/t) \quad j_{T_b, T_s}^z(x/t) = j_{T_b, \infty}^z(x/t) + j_{\infty, T_s}^z(x/t),$$

à l'étude du problème à une température.

Une analyse du modèle  $XX$  a montré, à température nulle ( $T_s = 0$ ) et pour les champs  $h \geq 1$ , que le comportement de l'aimantation transverse était simplement donnée par l'analyse du cas complètement factorisé. Cependant, dans la région  $h < 1$ , nous avons mis en évidence, la présence d'un profil plat d'aimantation, localisé au centre du système dans la région  $|x| < v_h$ , définie par la vitesse associée au premier état excité  $v_h = \sqrt{1 - h^2}$ . Dans cette situation nous avons obtenu exactement, les formes d'échelle des courants et profils d'aimantation. Une

étude numérique de l'effet de la température nous a permis d'analyser les propriétés du front d'onde, conduisant à interpréter la relaxation de l'interface comme la détente brutale d'un gaz de spins. L'agitation thermique détruisant les corrélations, une étude analytique du comportement à haute température conduit à la fonction de Green du cas complètement factorisé, nous permettant d'obtenir les formes d'échelle des profil et courant d'aimantation et de lier ces quantités, lorsque localement, l'état du système s'approche de l'état stationnaire ( $|x/t| \ll 1$ ).

L'étude du modèle d'Ising a montré que le système présente, à température nulle ( $T_s = 0$ ), un profil d'aimantation linéaire dans la région causale. En particulier, nous avons obtenu, le profil d'aimantation en ne considérant que la contribution de volume et avons pu vérifier numériquement, que la contribution due à l'interface était dissipée dans le secteur énergétique formé par les corrélations  $\langle \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x \rangle$ . Nous avons obtenu, dans la limite hautes températures, les fonctions d'échelles du problème.

Finalement nos résultats nous permettent de sonder les propriétés du système proche de l'état stationnaire ( $|x/t| \ll 1$ ) et en particulier de retrouver les résultats obtenus par W. Aschbacher [36], validant ainsi la méthode (simpliste), proposée pour obtenir la fonction de Green, notamment dans le cas du modèle d'Ising. Ainsi dans la limite asymptotique, le système rejoint un état stationnaire, traversé par un courant d'aimantation, le profil d'aimantation est constant, donné par la moyenne des aimantations du système et du bain.

## Chapitre 5

# Relaxation d'un sous-système de taille finie

A présent nous étudions la relaxation d'un sous-système de taille  $L_s$ , préparé à température  $1/\beta_s$ , en contact, par ses deux extrémités, avec un bain préparé à haute température ( $\beta_b = 0$ ). Les résultats, obtenus dans la section précédente, peuvent être interprétés dans ce contexte, décrivant le comportement des interfaces dans le cas  $1 \ll t \ll L_s$ . L'état stationnaire est l'état d'équilibre imposé par les bains et la matrice densité  $\rho_{st}$  est simplement donnée par (4.84) avec  $\delta = 0$ . Nous analysons ici la relaxation du système vers l'état stationnaire pour les temps  $t \gg L_s$ .

Dans la limite  $L_s \gg 1$ , la contribution de l'interface est négligée. Le profil d'aimantation à l'instant  $t$  est donné par le produit de convolution (4.11). En ne considérant que la contribution de volume, le profil d'aimantation à l'instant initial est

$$m^z(x, 0) = m_V^z \Pi\left(\frac{x}{L_s}\right), \quad \Pi(v) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq v \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 < |v|, \end{cases} \quad (5.1)$$

conduisant dans la limite des temps longs  $t \gg L_s$  à :

$$m^z(x, t) \simeq \frac{L_s}{t} g\left(\frac{x}{t}\right). \quad (5.2)$$

Le courant d'aimantation est simplement donné dans la limite asymptotique par

$$j^z(x, t) \simeq \frac{L_s}{t} \frac{x}{t} g\left(\frac{x}{t}\right), \quad (5.3)$$

et l'on note que que  $j^z$  est une fonction impaire, traduisant ainsi la présence d'une source d'aimantation (donc de courant) au centre du système.

La densité d'aimantation de la partie "système"  $m^z(t)$  définie comme :

$$m^z(t) = \int_{-L_s/2}^{L_s/2} \frac{dx}{L_s} m^z(x, t) \quad (5.4)$$

est alors

$$m^z(t) \simeq \frac{L_s}{t} g(0) = L_s m_V^z G_t(0). \quad (5.5)$$

La relaxation de l'aimantation transverse est alors algébrique. Le coefficient dépend explicitement de la fonction de Green du modèle considéré. Les modèles  $XX$  et Ising sont traités successivement.

## 5.1 Etude du modèle $XX$

### 5.1.1 A température nulle

Dans le cas d'un système préparé à température nulle ( $T_s = 0$ ) il est une fois encore, nécessaire, de séparer les régions  $h < 1$  et  $h \geq 1$ .

**Dans la région  $h \geq 1$ ,** nous retrouvons le comportement obtenu dans le cas d'un système préparé dans un état complètement factorisé :

$$m^z(t) \simeq \frac{L_s}{\pi t}. \quad (5.6)$$

Un calcul explicite montre qu'il convient de distinguer les régions  $t < L_s$  et  $t > L_s$ . La limite  $\tau = L_s$  est le temps nécessaire aux excitations les plus rapides pour traverser le système de taille  $L_s$ . On obtient :

$$m^z(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi} ht/L_s & t \leq \tau \\ \frac{2}{\pi} \arcsin(L_s/t) - \frac{2}{\pi} t/L_s \left(1 - \sqrt{1 - (L_s/t)^2}\right) & \tau < t. \end{cases} \quad (5.7)$$

**Pour les champs  $h < 1$ ,** la fonction de Green s'annule en  $x = 0$  imposant ainsi  $M^z(t) = 0$ , dans la limite  $t \gg L_s$ . Nous en concluons que l'aimantation de la partie "*système*" s'annule en un temps fini  $\tau_h$ . La valeur de  $\tau_h$  correspond au temps nécessaire, aux excitations de vitesse  $v_h = \sqrt{1 - h^2}$ , pour traverser le système. Il s'en suit  $\tau_h = L_s/\sqrt{1 - h^2}$ . Le calcul exact met clairement en évidence le rôle des échelles de temps  $\tau$  et  $\tau_h$  :

$$m^z(t) = \begin{cases} m_V^z - \frac{2}{\pi} ht/L_s & t \leq \tau \\ m_V^z - \frac{2}{\pi} \arccos(L_s/t) - \frac{2}{\pi} t/L_s \left(h - \sqrt{1 - (L_s/t)^2}\right) & \tau < t \leq \tau_h \\ 0 & \tau_h < t. \end{cases} \quad (5.8)$$

On constate sur la figure (5.1) un accord satisfaisant entre les courbes numériques et analytiques. Pour toute valeur du champ  $h$ , la relaxation de l'aimantation est linéaire pour les temps  $t < \tau$ .

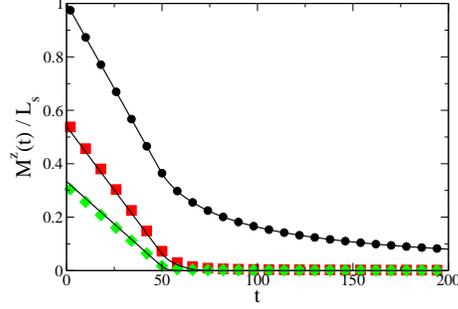


FIG. 5.1 – Densité de l'aimantation transverse pour différentes valeurs du champ (de haut en bas)  $h = 1, 0.75$  et  $0.5$ .

Cependant ces résultats ne sont valides que dans la limite  $L_s \rightarrow \infty$ . Pour un "système" de taille finie des corrections apparaissent dans la fonction de Green de sorte que  $G_t(x) = (g(x/t) + \mathcal{O}(1/L_s))/tm_{\check{V}}$ . Conduisant dans la limite des temps longs à :

$$m^z(t) \simeq \begin{cases} L_s/\pi t + \mathcal{O}(1/t) & h \geq 1 \\ \mathcal{O}(1/t) & h < 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Ainsi, bien que le caractère algébrique de la relaxation persiste dans la région critique, on note que le rapport  $M_{h < 1}^z(t)/M_{h \geq 1}^z(t)$  est d'ordre  $1/L_s$ . C'est dans ce sens que la relaxation est plus rapide, pour les champs  $h < 1$ , puisque indépendante de la taille du sous "système". Notons que la vitesse associée au premier état excité est nulle pour les  $h \geq 1$  alors que pour les champs  $h < 1$  la vitesse associée est  $v(k_f) = \sqrt{1 - h^2}$ .

Ces deux régimes sont le reflet du changement de la relation de dispersion au passage du point  $h = 1$ . En effet pour les champs  $h \geq 1$  la relation de dispersion a une forme parabolique  $\epsilon_h(q) \simeq h - 1 + q^2$  alors qu'elle devient linéaire pour les  $h < 1$ ,  $\epsilon_h(q) \simeq |q - \arccos(h)|\sqrt{1 - h^2}$ .

### 5.1.2 A température non nulle

Il est possible d'obtenir le comportement de l'aimantation d'un "système" préparé à la température  $T_s \neq 0$  (le bain reste à  $T_b = \infty$ ). En utilisant la fonction de Green vue précédemment, on obtient à l'ordre dominant :

$$m^z(t) \propto \frac{L_s}{2\pi t} \left( \tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h-1)\right) + \tanh\left(\frac{\beta_s}{2}(h+1)\right) \right). \quad (5.10)$$

Pour les champs  $h < 1$  il subsiste une signature du caractère plus rapide de la relaxation. En effet dans la limite des températures suffisamment basses ( $T_s \ll 1$ ) on obtient

$$m^z(t) \propto \frac{L_s}{\pi t} \exp(-\beta_s(1-h)). \quad (5.11)$$

Il est alors possible de définir une température limite  $T_0$  telle que pour  $T \leq T_0$ , on retrouve une densité d'aimantation indépendante de la taille du "système". Cette quantité est

$$T_0 = \frac{1-h}{\ln(L_s)}. \quad (5.12)$$

## 5.2 Etude du modèle d'Ising critique

Nous calculons ici le profil d'aimantation exact lors de la relaxation d'un sous-système de taille finie  $L_s$  préparé à la température  $T_s$ . Le "système" est en interaction avec deux "bains" à température infinie ( $T_b = \infty$ ). On vérifie, dans la limite des temps longs, lorsque l'on trace  $m^z(x, t)$  en fonction de la variable  $x/t$ , que le profil d'aimantation est donné par la fonction de Green (5.2). A température nulle, pour les temps  $t > L_s$ , le calcul conduit à :

$$m^z(x, t) = \frac{1}{\pi t} \psi(x, t), \quad (5.13)$$

avec  $\psi(-x, t) = \psi(x, t)$  et

$$\psi(x, t) = \begin{cases} L_s & 0 \leq x < t - L_s/2 \\ L_s/2 + t - x & t - L_s/2 \leq x < t + L_s/2 \\ 0 & x \geq t + L_s/2. \end{cases} \quad (5.14)$$

L'aimantation transverse est tracée figure (5.2) pour différents temps. Le profil d'aimantation est indépendant de  $x$  ( $m^z = L_s/\pi t$ ) dans la région  $|x| < t - L_s/2$ . Sur un domaine de taille  $L_s$ , l'aimantation décroît linéairement vers zéro. La pente dans la région linéaire est  $\partial_x m^z(x, t) = 1/\pi t$ . Lorsque l'on trace la fonction  $\psi(x, t)$  en fonction de la variable d'échelle  $x/t$ , la largeur associée à la région linéaire décroît comme  $L_s/t$ . Ainsi, à la frontière entre les régions causale et acausale, la fonction  $\psi$  passe de  $L_s$  à zéro sur un domaine de taille  $L_s/t$ . De sorte que  $\psi(x, t)$  tracée en fonction de la variable  $x/t$  conduit, pour  $t \rightarrow \infty$ , à la fonction porte, imposée par la fonction de Green

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{x}{t}, t\right) = L_s \Pi\left(\frac{x}{t}\right). \quad (5.15)$$

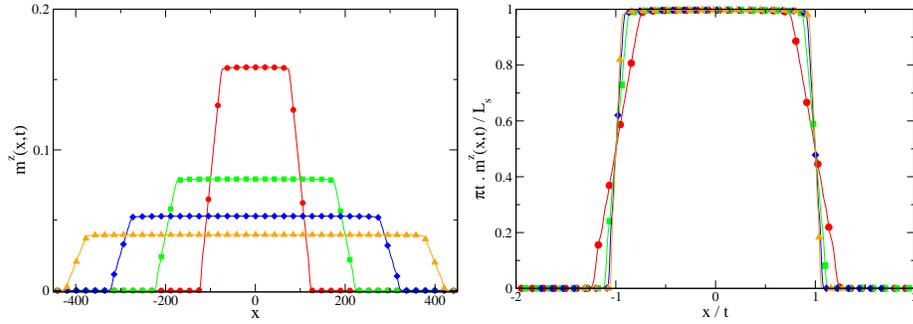


FIG. 5.2 – Graphique de gauche : évolution de l'aimantation transverse lors de la mise en contact d'un sous système de taille  $L_s = 50$  préparé à température nulle, avec deux "bains" à température infinie. Les courbes sont tracées pour les temps  $t = 100, 200, 300$  et  $t = 400$ . Graphique de droite : Profil d'aimantation en fonction de la variable d'échelle  $x/t$ .

Comme dans le modèle  $XX$ , la décroissance de l'aimantation totale du système est algébrique,  $M^z(t)/L_s = L_s/\pi t$ . L'effet de la température est simplement pris en compte par

le terme  $\tanh(\beta_s)$  conduisant à :

$$\frac{M^z(t)}{L_s} = \frac{L_s}{\pi t} \tanh(\beta_s) = L_s m_V^z G_t(0). \quad (5.16)$$

On vérifie que la fonction de Green, à température finie ( $T_s \neq 0$ ), obtenue précédemment sur des arguments simples, nous donne accès au profil d'aimantation dans ce cas précis. On a tracé, figure (5.3), le profil d'aimantation transverse calculé numériquement, à partir d'une diagonalisation exacte de l'hamiltonien, ainsi que le résultat analytique donné par les équations (4.70) et (5.2). L'accord entre les courbes est tout à fait satisfaisant.

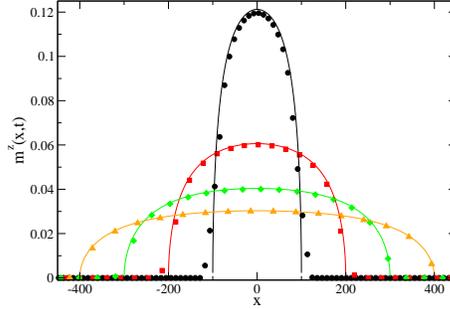


FIG. 5.3 – Evolution de l'aimantation transverse lors de la mise en contact d'un sous système de taille  $L_s = 50$  préparé à la température  $T_s = 1$ , avec deux "bain" à température infinie. On compare ici les résultats numériques obtenus pour les temps  $t = 100, 200, 300$  et  $t = 400$  avec la forme analytique.

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons examiné la relaxation de l'aimantation lors de la mise en interaction d'un système de taille finie  $L_s$  avec deux bains préparés à haute température ( $T_b = \infty$ ). Dans la limite des temps longs  $t \gg L_s \gg 1$  nous avons montré que les profils d'aimantation et de courant sont simplement donnés par la fonction de Green. Nous avons étudié en particulier, l'évolution de la densité d'aimantation définie sur le système  $m^z(t)$ , qui dans la limite asymptotique est simplement donnée par la valeur de la fonction de Green en  $x = 0$  ( $m^z(t) \propto G_t(0)$ ). Ainsi pour le modèle  $XX$  à température nulle, nous avons constaté un changement conséquent de la relaxation du système dépendant de l'intensité du champ magnétique  $h$ . Le calcul exact, en champ fort  $h > 1$ , nous a permis de mettre en évidence l'existence d'une unique échelle de temps  $\tau = L_s$  de sorte que pour les temps  $t < \tau$  la relaxation de l'aimantation est linéaire puis algébrique pour les temps  $t > \tau$ . Cependant, dans la région critique,  $h < 1$ , nous avons mis en évidence l'existence d'une seconde échelle de temps  $\tau_h = L_s/v_h$ , associée à la vitesse de la première excitation, de sorte que pour les temps  $t > \tau_h$  l'aimantation dans le système est nulle à l'ordre dominant. Finalement une étude du modèle d'Ising critique a montré que le profil d'aimantation, tracé en fonction de la variable d'échelle  $x/t$ , converge effectivement vers la fonction de Green. Cette analyse a été étendue en considérant l'effet de la température, nous avons alors confronté les résultats

analytiques aux courbes numériques, obtenues par diagonalisation exact. L'accord excellent entre les courbes valide la fonction de Green des chapitres précédents.

## Chapitre 6

# Entropie d'intrication : Généralités

La notion d'intrication joue un rôle important en mécanique quantique et permet, entre autre, de mettre en évidence l'existence de transition de phase [81, 82, 83]. Ce chapitre traite des propriétés de l'entropie d'intrication de systèmes quantiques préparés à température nulle. Dans une première partie, nous donnerons une interprétation de ce qu'est l'entropie d'intrication en rappelant les principaux résultats de ces dernières années. Dans un deuxième temps, en se focalisant sur l'étude du modèle  $XY$ , nous reviendrons sur les propriétés de la matrice densité réduite nous permettant le calcul de l'entropie d'intrication. Par la suite, l'analyse de l'entropie d'intrication en fonction du champ  $h$  et du paramètre d'anisotropie  $\kappa$  nous permettra de reconstruire le diagramme de phase du modèle  $XY$ . Nous terminerons l'étude de l'entropie d'intrication dans le chapitre suivant par une analyse réalisée en dehors de l'équilibre, en portant notre attention sur les résultats obtenus en collaboration avec V. Eisler, I. Peschel et D. Karevski [84], lors d'une trempe locale, dans la limite des temps longs.

### 6.1 Généralités

L'existence d'une transition de phase à température nulle peut être caractérisée par le comportement de l'entropie d'intrication. Cette quantité, définie comme l'entropie de von Neumann, mesure l'intrication entre sous-systèmes. Sur un système donné, dans un espace de dimension  $d$ , l'entropie d'intrication d'un block  $\mathcal{A}$  (de rayon  $L_{\mathcal{A}}$ ) avec l'extérieur, est donnée par l'entropie de von Neumann du block considéré et calculée à partir de la matrice densité réduite  $\rho_{\mathcal{A}}$ . Il est alors naturel d'attendre un changement du comportement de l'intrication pour les longueurs  $L_{\mathcal{A}}$  de l'ordre de la longueur de corrélation  $\xi$ . L'ensemble des propriétés de  $\mathcal{A}$  étant déterminé par la matrice densité réduite  $\rho_{\mathcal{A}}$ , la structure et le spectre de  $\rho_{\mathcal{A}}$ , ont été analysés, pour des systèmes unidimensionnelle [85, 86, 87, 88, 89] et pour des systèmes de dimensions  $d > 1$  [90].

De nombreux travaux, aussi bien analytiques que numériques ont été réalisées ces dernières années clarifiant l'interprétation de l'entropie d'intrication [93, 95, 100]. Elle apparaît comme une mesure de l'intrication des degrés de liberté d'un sous-système  $\mathcal{A}$  avec l'extérieur  $\mathcal{B}$ . Cette mesure se fait au travers de l'interface, séparant  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , sur une longueur fixée par la longueur de corrélation  $\xi$ . L'intrication apparaît comme une quantité commune aux sous-systèmes. En dehors du point critique, en particulier lorsque  $\xi \ll L_{\mathcal{A}}$ , seuls les degrés

de liberté proches de l'interface sont intriqués avec l'extérieur. L'entropie d'intrication est alors proportionnelle à l'interface séparant les sous-systèmes, vérifiant ainsi la loi des aires [91] et la propriété de sous additivité [92].

À l'approche du point critique, la longueur de corrélation diverge. Ainsi même les degrés de liberté situés loin de l'interface sont intriqués avec l'extérieur, conduisant, pour les systèmes fermioniques, à une violation de la loi des aires [97, 98, 99, 100].

## 6.2 Entropie d'un système bipartite

Un système bi-partite est composé de deux sous-système  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dont les espaces de Hilbert sont  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ , tels que l'espace de Hilbert total  $\mathcal{H}$  est formé par le produit direct  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Par définition les sous-systèmes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont intriqués s'il est impossible d'écrire l'état  $|\chi\rangle$  du système sous la forme d'un produit direct :

$$|\chi\rangle \neq |\Phi^{\mathcal{A}}\rangle \otimes |\Psi^{\mathcal{B}}\rangle, \quad (6.1)$$

où  $|\Phi^{\mathcal{A}}\rangle$  et  $|\Psi^{\mathcal{B}}\rangle$  sont des états vivants respectivement dans les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . L'entropie d'intrication  $E(|\chi\rangle)$ , d'un système préparé dans l'état  $|\chi\rangle$ , est définie par l'entropie de Von Neumann  $S(\rho_{\mathcal{A}})$  du sous-système  $\mathcal{A}$  :

$$E(|\chi\rangle) = S(\rho_{\mathcal{A}}) = -Tr\{\rho_{\mathcal{A}} \ln(\rho_{\mathcal{A}})\}, \quad (6.2)$$

où  $\rho_{\mathcal{A}}$  est la matrice densité réduite du sous-système  $\mathcal{A}$  définie par :

$$\rho_{\mathcal{A}} = Tr_{\mathcal{B}}\{|\chi\rangle\langle\chi|\}. \quad (6.3)$$

On démontre facilement l'égalité suivante  $E(|\chi\rangle) = S(\rho_{\mathcal{A}}) = S(\rho_{\mathcal{B}})$ , appuyant le fait que l'intrication est une quantité commune aux sous-systèmes. Pour cela on décompose l'état  $|\chi\rangle$  sur les vecteurs  $|\Phi_p^{\mathcal{A}}\rangle$  et  $|\Psi_q^{\mathcal{B}}\rangle$ , formant une base des espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$

$$|\chi\rangle = \sum_{p,q} c_{p,q} |\Phi_p^{\mathcal{A}}\rangle \otimes |\Psi_q^{\mathcal{B}}\rangle, \quad (6.4)$$

nous permettant ainsi d'écrire la matrice densité totale sous la forme :

$$\rho = \sum_{p,q,p',q'} |\Phi_p^{\mathcal{A}}\rangle \otimes |\Psi_q^{\mathcal{B}}\rangle c_{p,q} c_{p',q'}^* \langle\Phi_{p'}^{\mathcal{A}}| \otimes \langle\Psi_{q'}^{\mathcal{B}}|. \quad (6.5)$$

En effectuant une trace partielle, sur les degrés de liberté de  $\mathcal{B}$  (respectivement  $\mathcal{A}$ ), on obtient les éléments des matrices densités réduites  $\rho_{\mathcal{A}}$  (respectivement  $\rho_{\mathcal{B}}$ )

$$(\rho_{\mathcal{A}})_{p,p'} = (cc^\dagger)_{p,p'} \quad \text{et} \quad (\rho_{\mathcal{B}})_{q,q'} = (c^T c^*)_{q,q'}. \quad (6.6)$$

On vérifie alors, pour tout entier positif  $k$  l'égalité  $Tr(\rho_{\mathcal{A}})^k = Tr(\rho_{\mathcal{B}})^k$ , imposant la relation :

$$S(\rho_{\mathcal{A}}) = S(\rho_{\mathcal{B}}). \quad (6.7)$$

Notons que les notions d'intrication et de corrélation entre sous-systèmes sont liées. En effet pour un état non-intriqué, il est facile de montrer que les corrélations entre observables  $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$

et  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  sont nulles alors que inversement, des systèmes intriqués sont nécessairement dans des états de corrélations non nulles. Prenons pour exemple les états  $|\chi(\theta)\rangle$  définis par :

$$|\chi(\theta)\rangle = \cos\theta|\Phi^{\mathcal{A}}\rangle \otimes |\Psi^{\mathcal{B}}\rangle + \sin\theta|\Psi^{\mathcal{A}}\rangle \otimes |\Phi^{\mathcal{B}}\rangle. \quad (6.8)$$

Lorsque  $\theta = 0$ , l'état  $|\chi(0)\rangle$  n'est pas un état intriqué et on vérifie l'absence de corrélations entre les observables  $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  :

$$\langle\chi(0)|\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{B}}|\chi(0)\rangle - \langle\chi(0)|\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}}|\chi(0)\rangle\langle\chi(0)|\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{B}}|\chi(0)\rangle = 0. \quad (6.9)$$

Lorsque le système est préparé dans l'état  $|\chi(\theta)\rangle$ , la matrice densité réduite de  $\mathcal{A}$  décrit un mélange statistique d'états donné par :

$$\rho_{\mathcal{A}} = |\Phi_{\mathcal{A}}\rangle \cos^2\theta \langle\Phi_{\mathcal{A}}| + |\Psi_{\mathcal{A}}\rangle \sin^2\theta \langle\Psi_{\mathcal{A}}|. \quad (6.10)$$

L'entropie de Von Neumann est une mesure de l'information sur le mélange statistique et on obtient dans ce cas :

$$S(\rho_{\mathcal{A}}) = - \left( \frac{1+x}{2} \ln \left( \frac{1+x}{2} \right) + \frac{1-x}{2} \ln \left( \frac{1-x}{2} \right) \right), \quad (6.11)$$

avec  $x = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ . Notons que l'état d'intrication maximum  $S_{\mathcal{A}} = \ln 2$  est obtenu pour  $x = 0$  soit  $\theta = \pm\pi/4$ .

### 6.3 Entropie de von Neumann, sous extensivité

Ces dernières années, différentes mesures de l'intrication ont été étudiées [101, 81, 102, 103] [104, 105, 106, 107]. Nous ne considérons ici que l'entropie d'intrication de von Neumann pour laquelle différents résultats analytiques ont déjà été obtenus. Notamment lors de l'étude de système unidimensionnelle par des méthodes de théorie conforme, il a été montré que l'entropie, d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}}$ , variait comme  $\ln L_{\mathcal{A}}$ , le coefficient de proportionnalité étant fixé par la charge centrale du modèle [99, 97]. Plus récemment les propriétés de l'intrication dans des systèmes désordonnés [108, 109, 110, 111] et apériodiques [112, 113] ont été décrites.

A température nulle, les propriétés des systèmes quantiques sont imposées par l'état fondamental dont la structure est plus ou moins complexe, dépendant du système considéré. L'intrication entre les états des blocks  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  conduit à une description statistique du sous-système  $\mathcal{A}$  (6.6). L'égalité  $S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{B}}$  (6.7) traduit le fait que l'intrication est une propriété commune aux sous-systèmes [91]. On dira simplement que *l'entropie est une fonction du nombre de degrés de liberté dans  $\mathcal{A}$  intriqués avec  $\mathcal{B}$* . Notons que lorsque la longueur de corrélation est finie, plus précisément lorsque  $\xi \ll L_{\mathcal{A}}$ , les degrés de liberté intriqués sont localisés au niveau de l'interface séparant  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Ainsi le nombre de degrés de liberté  $n_{\mathcal{A}}$  (respectivement  $n_{\mathcal{B}}$ ) dans le sous-système  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\mathcal{B}$ ), localisés au niveau de l'interface est :

$$n_{\mathcal{A}} = n_{\mathcal{B}} \propto \Omega L_{\mathcal{A}}^{d-1} \xi, \quad (6.12)$$

où  $\Omega$  est la densité de degrés de liberté (supposée constante). Dès lors, l'entropie d'intrication n'est pas une quantité extensive et ne peut dépendre que de l'interface séparant  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . En

notant  $\varrho$  le nombre d'états accessibles par degré de liberté et en supposant l'ensemble des états équiprobables, on obtient :

$$S_{\mathcal{A}} = \ln(\varrho^{n_{\mathcal{A}}}) = \Omega L_{\mathcal{A}}^{d-1} \xi \ln \varrho. \quad (6.13)$$

Lorsque  $\xi \ll L_{\mathcal{A}}$ , la densité  $\varrho$  ne dépend que de  $\xi$  et vérifie nécessairement  $\varrho(\xi) \leq \varrho_0$ , où  $\varrho_0$  est la dimension de l'espace de Hilbert associé à un degré de liberté. Finalement l'entropie d'intrication est une quantité sous extensive, puisque proportionnelle à l'interface séparant  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  :

$$S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{B}} \propto L_{\mathcal{A}}^{d-1}. \quad (6.14)$$

Cette propriété, commune à l'entropie des trous noirs [114, 115, 116, 117] est connue sous le nom de "loi des aires" [93, 94, 118]. Si la loi des aires est valable en générale, le cas particulier des systèmes critiques conduit à une correction logarithmique. En effet, au point critique, la longueur de corrélation  $\xi$  diverge, l'ensemble des degrés de liberté de  $\mathcal{A}$  est intriqué avec l'extérieur et la loi des aires est violée [95, 96, 107, 98, 100]. L'entropie d'intrication est alors donnée par :

$$S_{\mathcal{A}} \propto L_{\mathcal{A}}^{d-1} \ln(L_{\mathcal{A}}). \quad (6.15)$$

## 6.4 Le cas de systèmes unidimensionnels

Pour les systèmes  $1d$ , une théorie critique conforme à  $1 + 1$  dimensions [99] permet d'obtenir le comportement de l'entropie d'intrication. Ainsi l'entropie  $S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}})$  d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}}$  appartenant à un système de taille finie  $L$ , aux conditions de bords périodiques, est donnée par :

$$S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}) = S_{\mathcal{B}}(L - L_{\mathcal{A}}) = \frac{c}{3} \ln \left( \frac{L}{\pi a} \sin \left( \frac{\pi L_{\mathcal{A}}}{L} \right) \right) + c'_1, \quad (6.16)$$

où  $c$  est la charge centrale du modèle associé à la théorie conforme et  $\mathcal{B}$  est le domaine complémentaire de  $\mathcal{A}$ . Dans la limite d'un système thermodynamique ( $L \rightarrow \infty$ ), le système est critique et on obtient :

$$S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}) = \frac{c}{3} \ln \left( \frac{L_{\mathcal{A}}}{a} \right) + c'_1. \quad (6.17)$$

Lorsque l'on s'écarte du point critique, on vérifie que l'entropie d'intrication est indépendante de la taille du sous-système considéré et fixée par la longueur de corrélation :

$$S_{\mathcal{A}} \sim \frac{c}{3} \ln \left( \frac{\xi}{a} \right) + c'_1. \quad (6.18)$$

Finalement, en dehors du point critique, l'intrication est locale, se faisant sur la longueur de corrélation  $\xi$ . Une bonne approximation de la matrice densité totale  $\rho$  peut donc être obtenue en diagonalisant l'hamiltonien d'un sous-système, dont la taille est de l'ordre de la longueur de corrélation. Ce résultat est habilement exploité dans une méthode du groupe de renormalisation de la matrice densité [119].

L'entropie d'intrication d'un sous-système présentant la forme d'un peigne (fig. 6.1) a été calculée sur les modèles unidimensionnels tels que le modèle  $XX$  [120]. Le block  $\mathcal{A}$  considéré est constitué de  $L_{\mathcal{A}}$  spins équidistants et l'on note  $p$  le nombre de liaisons séparant deux spins voisins.

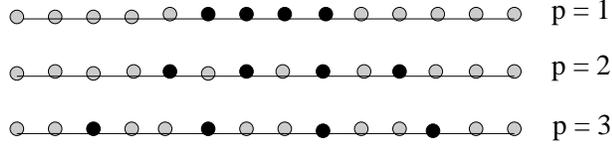


FIG. 6.1 – Schéma des différentes géométrie du sous-système  $\mathcal{A}$  (en noir), pour les  $p = 1, 2$  et 3.

Dans ce cas, l'entropie d'intrication  $S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}, p)$  est donnée par :

$$S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}, p) = e_1(p)L_{\mathcal{A}} + e_2(p) \ln L_{\mathcal{A}} + \mathcal{O}(1), \quad (6.19)$$

où  $e_1$  et  $e_2$  sont fonction du champ magnétique extérieur et  $0 \leq e_1(p) \leq 1$ . En particulier, lorsque le domaine  $\mathcal{A}$  n'est constitué que d'un seul block ( $p = 1$ ) on a  $e_1(1) = 0$  de sorte que seul le terme logarithmique contribue dans l'équation 6.19. Dans la limite  $p \rightarrow \infty$ , le block  $\mathcal{A}$  tend vers un ensemble  $L_{\mathcal{A}}$  spins indépendants, les coefficients  $e_1$  et  $e_2$  sont alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} e_1(p) = S_{\mathcal{A}}(1, 1), \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} e_2(p) = 0, \quad (6.20)$$

où  $S_{\mathcal{A}}(1, 1)$  est l'entropie d'intrication d'un spin ( $L_{\mathcal{A}} = 1$ ). Ainsi chaque spin contribue séparément et l'entropie d'intrication est simplement :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}, p) = L_{\mathcal{A}} S_{\mathcal{A}}(1, 1). \quad (6.21)$$

## 6.5 Effet de la température, retour de l'extensivité

Lorsque le système est préparé dans un état de Gibbs, à température non nulle ( $T \neq 0$ ), le caractère extensif de l'entropie d'intrication est retrouvé [98]. Pour les systèmes unidimensionnels, une expression exacte, obtenue par une théorie conforme [99], nous donne l'entropie d'intrication en fonction de la température. Ainsi dans la limite d'un système thermodynamique, l'entropie d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}}$  est

$$S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}, \beta) = \frac{c}{3} \ln \left( \frac{\beta}{\pi a} \sinh \left( \frac{\pi L_{\mathcal{A}}}{\beta} \right) \right) + c'_1, \quad (6.22)$$

conduisant à l'extensivité dans la limite  $L_{\mathcal{A}} \gg 1$ ,

$$S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}, \beta) = L_{\mathcal{A}} s + \frac{c}{3} \ln \left( \frac{\xi}{a} \right) + c'_1, \quad \text{avec} \quad s = \frac{c \pi}{3 \beta}, \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\beta}{2\pi}. \quad (6.23)$$

Notons que le comportement d'un système critique est obtenu en prenant la limite  $\beta \rightarrow \infty$  et conduit à l'équation (6.17).

Ainsi, à température nulle, l'entropie de von Neumann est bien une mesure de l'intrication. Il a d'ailleurs été démontré (à température nulle) que l'intrication définie comme l'entropie "valence bond" a le même comportement asymptotique que l'entropie d'intrication [107]. Cette étude a été réalisée sur le modèle d'Heisenberg antiferromagnétique dont l'hamiltonien est  $H = \sum_{i,j} J_{i,j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$  ( $J_{i,j} > 0$ ). L'entropie "valence bond" y est définie par la relation  $S_{\mathcal{A}}^{VB}(|\Psi\rangle) = \ln(2) \cdot n_{\mathcal{A}}(|\Psi\rangle)$ , où  $n_{\mathcal{A}}(|\Psi\rangle)$  est le nombre d'état singulets qui traverse l'interface entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . C'est aussi le cas de l'entropie "single copy entanglement"  $E_1$  [121, 122], qui dans la limite asymptotique vérifie

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}})}{E_1(L_{\mathcal{A}})} = 2, \quad (6.24)$$

où  $E_1(L_{\mathcal{A}})$  est donnée par la plus grande valeur propre  $\omega_1$  de la matrice densité réduite de  $\mathcal{A}$ ,  $E_1(L_{\mathcal{A}}) = \ln(1/\omega_1)$ . Cependant, à température finie, l'entropie d'intrication n'est pas une mesure satisfaisante de l'intrication entre sous-systèmes. En effet, l'entropie de von Neumann ne permet pas de distinguer les contributions de l'intrication et de la température à la description statistique de la matrice densité réduite.

## 6.6 Entropie d'intrication et chaînes de spins quantiques

Dans cette section nous étudions le comportement de l'entropie d'intrication de chaînes de spins quantiques définies par le modèle  $XY$ . Lorsque la chaîne est préparée à température nulle, la matrice densité réduite d'un sous-système  $\mathcal{A}$  est caractérisée par un état gaussien. L'état du système peut donc être complètement déterminé par l'ensemble de ses corrélateurs à deux points  $\langle \Gamma_n^i \Gamma_m^j \rangle$  [123, 124]. La méthode utilisée pour obtenir une mesure de l'entropie d'intrication repose sur ce résultat. Dans un premier temps, nous présentons les éléments permettant d'arriver à ce résultat. Puis, en définissant l'ensemble des corrélateurs à deux points, nous verrons explicitement comment obtenir l'entropie d'intrication. Finalement, une analyse des propriétés de l'intrication nous permettra de reconstruire le diagramme de phase du modèle  $XY$ .

### 6.6.1 La matrice densité réduite

La matrice densité réduite de modèles intégrables, fermioniques et bosoniques, a été le sujet de recherches récentes. Cet opérateur joue un rôle central dans le cadre de l'étude de l'entropie d'intrication mais aussi dans l'étude du groupe de renormalisation de la matrice densité (DMRG) [119]. Ainsi pour un système, décrit par l'hamiltonien  $H$  du modèle  $XY$ , préparé dans l'état fondamental  $|\Psi_0\rangle$ , il a été montré que la matrice densité réduite, d'un sous-système connexe  $\mathcal{A}$ , prenait la forme [85, 86, 87, 88, 90] :

$$\rho_{\mathcal{A}} \propto \exp(-\tilde{H}), \quad (6.25)$$

où  $\tilde{H}$  est l'hamiltonien effectif de  $\mathcal{A}$ , dont l'atout majeur est d'être intégrable. Nous exposons ici, le fil conducteur de la démonstration effectuée dans la référence [86] conduisant au résultat (6.25). Sous la transformation de Jordan-Wigner l'hamiltonien du modèle  $XY$  (eq. 1.1) prend la forme :

$$H = \sum_{i,j=1}^L \left( c_i^\dagger A_{i,j} c_j + \frac{1}{2} (c_i^\dagger B_{i,j} c_j^\dagger + h.c.) \right), \quad (6.26)$$

où les opérateurs  $c_n^\dagger$  et  $c_n$  sont les opérateurs créations et annihilation de fermions sur le site  $n$ , définis par :

$$c_n = \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z) (\sigma_n^x - i\sigma_n^y) \quad \text{et} \quad c_n^\dagger = \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z) (\sigma_n^x + i\sigma_n^y). \quad (6.27)$$

Puisque  $H$  est un opérateur hermitien, les matrices  $A$  et  $B$  sont respectivement symétrique et antisymétrique. Notons que les opérateurs fermioniques sont reliés aux opérateurs de Cliffords définis (eq. 1.5) par les équations

$$\begin{aligned} 2c_n &= \Gamma_n^1 + \Gamma_n^2 \\ 2c_n^\dagger &= \Gamma_n^1 - \Gamma_n^2. \end{aligned} \quad (6.28)$$

L'hamiltonien est finalement diagonalisé sous la transformation canonique suivante [1] :

$$\eta_q = \sum_n (g_{q,n} c_n + h_{q,n} c_n^\dagger), \quad (6.29)$$

conduisant à :

$$H = \sum_q \epsilon_q \left( \eta_q^\dagger \eta_q - \frac{1}{2} \right), \quad (6.30)$$

où les valeurs propres  $\epsilon_q$  sont données par les équations aux valeurs propres :

$$(A - B)(A + B)\phi_q = \epsilon_q^2 \phi_q, \quad (A + B)(A - B)\psi_q = \epsilon_q^2 \psi_q, \quad (6.31)$$

avec  $\phi_q(n) = g_{q,n} + h_{q,n}$  et  $\psi_q(n) = g_{q,n} - h_{q,n}$ . La matrice densité totale du système préparé dans l'état fondamental  $|\Psi_0\rangle$  tel que  $\eta_q |\Psi_0\rangle = 0 \forall q$ , est donnée par :

$$\rho = |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| = P |0\rangle \langle 0| P^\dagger, \quad \text{avec} \quad P = |\Psi_0\rangle \langle 0|, \quad (6.32)$$

où  $|0\rangle$  est l'état vide en terme de fermions de réseaux, de sorte que  $\forall j, c_j |0\rangle = 0$ . L'opérateur  $P$  s'exprime en fonction des opérateurs fermioniques  $c_n^\dagger$  [86] :

$$P = C \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{n,m} G_{n,m} c_n^\dagger c_m^\dagger \right), \quad (6.33)$$

où les éléments de  $G$  s'obtiennent en imposant  $\eta_q |\Psi_0\rangle = 0$ . La matrice densité réduite d'un block  $\mathcal{A}$  est alors obtenue en effectuant la trace sur les degrés de liberté extérieur. Pour cela on utilise les états cohérents fermioniques  $|\Theta\rangle$ , construits à partir de l'état vide  $|0\rangle$  et des variables de Grassmann  $\theta_n$  :

$$|\Theta\rangle = |\theta_1, \dots, \theta_L\rangle = \exp \left( - \sum_n \theta_n c_n^\dagger \right) |0\rangle, \quad (6.34)$$

tels que

$$c_n |\Theta\rangle = \theta_n |\theta_1, \dots, \theta_L\rangle. \quad (6.35)$$

Ainsi la trace d'un opérateur  $\mathcal{O}$  est donnée par :

$$Tr\{\mathcal{O}\} = \int d\Theta^* d\Theta e^{-\Theta^* \cdot \Theta} \langle -\Theta | \mathcal{O} | \Theta \rangle \quad \text{avec} \quad \Theta^* \cdot \Theta = \sum_j \theta_j^* \theta_j, \quad (6.36)$$

où  $d\Theta = \prod_j d\theta_j$  et nous permet d'écrire les éléments de matrice de  $\rho_{\mathcal{A}}$  comme :

$$\langle \zeta | \rho_{\mathcal{A}} | \zeta' \rangle = \int_{\mathcal{B}} d\Theta^* d\Theta e^{-\Theta^* \cdot \Theta} \langle \zeta, -\Theta | \rho | \zeta', \Theta \rangle, \quad (6.37)$$

avec  $|\zeta\rangle = |\dots, \zeta_{j \in \mathcal{A}}, \dots\rangle$  et  $|\Theta\rangle = |\dots, \theta_{j \in \mathcal{B}}, \dots\rangle$ . En utilisant l'équation (6.32), l'intégrale (6.37) reste quadratique en terme des variables de Grassmann et permet de reconstruire la matrice densité réduite (voir [86] pour les détails de la démonstration) :

$$\rho_{\mathcal{A}} = |C|^2 \exp\left(\sum_{i,j} c_i^\dagger \alpha_{i,j} c_j^\dagger\right) \exp\left(\sum_{i,j} c_i^\dagger (\ln \beta)_{i,j} c_j\right) \exp\left(\sum_{i,j} -c_i \alpha_{i,j} c_j\right), \quad (6.38)$$

où les matrices  $\alpha$  et  $\beta$  (de dimension  $L_{\mathcal{A}} \times L_{\mathcal{A}}$ ) sont définies par  $a^{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ ,  $a^{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ,  $a^{\mathcal{B},\mathcal{A}}$  et  $a^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$  obtenues en décomposant la matrice  $G$  en quatre blocks, de sorte que l'élément  $G_{n,m}$  appartient à  $a^{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$  si  $n \in \mathcal{X}$  et  $m \in \mathcal{Y}$  ( $\mathcal{X} = \mathcal{A}, \mathcal{B}$ ). Les définitions de  $\alpha$  et  $\beta$  sont :

$$\alpha = a^{\mathcal{A},\mathcal{A}} + c a^{\mathcal{B},\mathcal{B}} c^T, \quad \beta = c c^T \quad \text{avec} \quad c = a^{\mathcal{A},\mathcal{B}} (1 - a^{\mathcal{B},\mathcal{B}})^{-1}. \quad (6.39)$$

La matrice densité est diagonalisée sous une transformation de Bogoliubov :

$$\rho_{\mathcal{A}} = K \exp(-\tilde{H}) = K \exp\left(-\sum_{q=1}^{L_{\mathcal{A}}} \tilde{\epsilon}_q f_q^\dagger f_q\right), \quad (6.40)$$

où  $K$  est telle que  $Tr \rho_{\mathcal{A}} = 1$ . Pour terminer, on exprime l'hamiltonien effectif  $\tilde{H}$  sous la forme :

$$\tilde{H} = \sum_{i,j=1}^{L_{\mathcal{A}}} \left( c_i^\dagger \tilde{A}_{i,j} c_j + \frac{1}{2} (c_i^\dagger \tilde{B}_{i,j} c_j^\dagger + h.c.) \right), \quad (6.41)$$

telle que les valeurs propres  $\tilde{\epsilon}_q$  vérifient :

$$(\tilde{A} - \tilde{B})(\tilde{A} + \tilde{B})\tilde{\phi}_q = \tilde{\epsilon}_q^2 \tilde{\phi}_q, \quad (\tilde{A} + \tilde{B})(\tilde{A} - \tilde{B})\tilde{\psi}_q = \tilde{\epsilon}_q^2 \tilde{\psi}_q \quad (6.42)$$

avec

$$\tilde{\phi}_q(n) = \tilde{g}_{q,n} + \tilde{h}_{q,n}, \quad \tilde{\psi}_q(n) = \tilde{g}_{q,n} - \tilde{h}_{q,n} \quad (6.43)$$

où  $\tilde{g}_q$  et  $\tilde{h}_q$  permettent la construction des opérateurs fermioniques  $f_q^\dagger$  et  $f_q$  (comme dans l'équation 6.29). Ainsi l'état qui caractérise le sous-système  $\mathcal{A}$  est Gaussien. L'ensemble des corrélateurs à deux points suffit à déterminer l'état du sous-système et permet d'obtenir l'entropie d'intrication du block considéré.

### 6.6.2 Corrélateurs des opérateurs de Clifford

Dans le cas du modèle  $XY$  [82, 123, 83], le résultat précédent implique qu'il est toujours possible de réécrire la matrice densité de la façon suivante :

$$\rho_{\mathcal{A}} \propto \exp\left(-\tilde{H}\right), \quad \text{avec} \quad \tilde{H} = - \sum_{n,m=1}^{2L_{\mathcal{A}}} \mathbf{\Gamma}_n \tilde{\mathbf{T}}_{n,m} \mathbf{\Gamma}_m, \quad (6.44)$$

où  $\mathbf{\Gamma}_n$  sont les opérateurs de Clifford appartenant au sous-système  $\mathcal{A}$ . On rappelle que l'opérateur colonne  $\mathbf{\Gamma}$  est défini par :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{L_{\mathcal{A}}}^1 \\ \Gamma_1^2 \\ \vdots \\ \Gamma_{L_{\mathcal{A}}}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Afin d'obtenir l'entropie d'intrication du sous-système  $\mathcal{A}$ , on définit la matrice des corrélateurs  $\tilde{C}$ , de dimension  $2L_{\mathcal{A}} \times 2L_{\mathcal{A}}$ , dont les éléments sont :

$$\tilde{C}_{n,m} = \langle \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_m \rangle = \langle \chi | \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_m | \chi \rangle, \quad n, m = 1, \dots, 2L_{\mathcal{A}}. \quad (6.46)$$

Lorsque le système est dans un état propre de l'hamiltonien du modèle  $XY$ , la matrice des corrélateurs prend la forme :

$$\tilde{C} = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{P} \\ \tilde{P}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

où  $\tilde{P}$  est une matrice de dimension  $L_{\mathcal{A}} \times L_{\mathcal{A}}$  dont les éléments sont  $\tilde{P}_{n,m} = \langle \Gamma_n^1 \Gamma_m^2 \rangle$ . Les termes diagonaux sont donnés par l'identité puisque

$$\langle (\Gamma_n^\nu)^2 \rangle = \langle \mathbb{I} \rangle = 1, \quad \nu = 1, 2. \quad (6.48)$$

On montre que les termes de la forme  $\langle \Gamma_n^\nu \Gamma_m^\nu \rangle$  ( $\nu = 1, 2$  et  $n \neq m$ ) sont égaux à zéro. En particulier certains de ces termes peuvent être interprétés comme des termes de courant, nécessairement nuls à l'équilibre. En définissant les vecteurs propres  $\mathcal{V}_q$  de la matrice  $\tilde{C}$  ainsi que les valeurs propres  $p_q$  tels que :

$$\mathcal{V}_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_q \end{pmatrix}, \quad (6.49)$$

où  $\Phi_q$  et  $\Psi_q$  sont des vecteurs de dimension  $L_{\mathcal{A}}$  et

$$\tilde{C} \mathcal{V}_q = (1 + p_q) \mathcal{V}_q, \quad (6.50)$$

on obtient les relations suivantes, similaires aux équations obtenues dans le chapitre 1 (eq. 1.27) :

$$\tilde{P} \Psi_q = p_q \Phi_q, \quad \tilde{P}^\dagger \Phi_q = p_q \Psi_q. \quad (6.51)$$

Ainsi pour chaque couple  $(p_q, \mathcal{V}_q)$  où  $p_q > 0$ , correspond un couple  $(-p_q, \mathcal{V}_{q'})$  pour lequel  $\Phi_{q'} = \Phi_q$  et  $\Psi_{q'} = -\Psi_q$ . Finalement dans la base formée par les opérateurs fermioniques  $f_q$  et  $f_q^\dagger$  définis par :

$$f_q = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L_{\mathcal{A}}} (\Phi_q(m)\Gamma_m^1 + \Psi_k(m)\Gamma_m^2), \quad (6.52)$$

la matrice  $C$  est diagonale

$$\tilde{C}_{k,k'} = 2\langle f_k^\dagger f_{k'} \rangle = \delta_{k,k'}(1 + p_k). \quad (6.53)$$

Elle correspond à la matrice des corrélations de  $L_{\mathcal{A}}$  fermions sans interactions. L'hamiltonien de la matrice densité réduite peut alors s'écrire comme l'hamiltonien de fermions libres :

$$\tilde{H} = \sum_{q=1}^{L_{\mathcal{A}}} \tilde{\epsilon}_q \left( f_q^\dagger f_q - \frac{1}{2} \right), \quad (6.54)$$

dont le spectre des excitations  $\tilde{\epsilon}_q$  est déterminé par la relation  $2\langle f_q^\dagger f_q \rangle = 1 + p_q$  et conduit à :

$$\tilde{\epsilon}_q = \ln \left( \frac{1 - p_q}{1 + p_q} \right). \quad (6.55)$$

L'entropie d'intrication est la somme de l'entropie associée à chaque mode  $q$

$$S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}) = \sum_{q=1}^{L_{\mathcal{A}}} S_q \quad (6.56)$$

avec

$$S_q = - \left( \frac{1 + p_q}{2} \ln \left( \frac{1 + p_q}{2} \right) + \frac{1 - p_q}{2} \ln \left( \frac{1 - p_q}{2} \right) \right). \quad (6.57)$$

### 6.6.3 Le diagramme de phase du modèle $XY$

L'étude de l'entropie d'intrication permet de redécouvrir le diagramme de phase du modèle  $XY$ . En effet, alors que l'entropie d'intrication, d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}}$ , sature pour  $L_{\mathcal{A}} > \xi$ , la présence d'un point critique est caractérisée par une divergence logarithmique de l'entropie d'intrication. En considérant la limite thermodynamique du modèle  $XY$ , il convient d'étudier l'entropie maximum définie comme :

$$S_{\max} = \lim_{L_{\mathcal{A}} \rightarrow \infty} S_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}}). \quad (6.58)$$

Nous présentons ici le comportement de l'entropie d'intrication  $S_{\max}$  dans le cas du modèle d'Ising ( $\kappa = 1$ ), avant d'exposer les résultats obtenus dans la référence [124] en fonction des paramètres de contrôle  $h$  et  $\kappa$  (eq. 1.1).

Sur la ligne  $\kappa = 1$ , lorsque  $h \rightarrow 1$ , la longueur de corrélation diverge comme  $\xi = (1-h)^{-1}$ , ainsi l'entropie d'intrication à saturation est

$$S_{\max}(h \rightarrow 1, \kappa = 1) \sim -\frac{1}{6} \ln |1 - h| = \frac{1}{6} \ln \xi. \quad (6.59)$$

**Dans la phase paramagnétique** ( $h > 1$ ), lorsque le champ augmente, l'entropie d'intrication décroît de façon strictement monotone. En particulier dans la limite  $h \rightarrow \infty$ , l'état fondamental tend vers l'état homogène et complètement factorisé  $|H^+\rangle = \prod_{\otimes} |\uparrow\rangle$  pour lequel les spins sont indépendants de sorte que  $S_{max}(h \rightarrow \infty, \kappa = 1) = 0$ .

**Dans la région ferromagnétique** ( $h < 1$ ), lorsque le champ  $h$  diminue, l'entropie d'intrication décroît de façon monotone et présente un minimum locale, en champ nul ( $h = 0$ ), pour lequel  $S_{max} = \ln 2$ . En ce point, l'état fondamental est dégénéré et donné par les états de Bell :

$$\begin{aligned} |GS_1(h = 0, \kappa = 1)\rangle &= \prod_n (|\uparrow_n\rangle + |\downarrow_n\rangle) \\ |GS_2(h = 0, \kappa = 1)\rangle &= \prod_n (|\uparrow_n\rangle - |\downarrow_n\rangle). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dans la référence [83] l'accent est mis sur les courbes, du plan  $(h, \kappa)$ , d'entropie constante. Ainsi le point qui caractérise le modèle d'Ising en champ nul  $(0, 1)$  appartient au cercle défini par  $h^2 + \kappa^2 = 1$ . Sur ce cercle, l'entropie présente un minimum locale  $S_{max} = \ln 2$  puisque l'état fondamental est dégénéré, donné par un produit direct d'états locaux :

$$\begin{aligned} |GS_1\rangle &= \prod_n (\cos \theta |\uparrow_n\rangle + \sin \theta |\downarrow_n\rangle) \\ |GS_2\rangle &= \prod_n (\cos \theta |\uparrow_n\rangle - \sin \theta |\downarrow_n\rangle), \end{aligned} \quad (6.61)$$

avec  $\cos^2(2\theta) = (1 - \kappa)/(1 + \kappa)$ . Ainsi, cette ligne sépare la région  $h^2 + \kappa^2 > 1$  pour laquelle l'intrication entre spins est dite parallèle, de la région  $h^2 + \kappa^2 < 1$  où l'intrication entre spins est dite antiparallèle. Voir figure (6.2) et la référence [106].

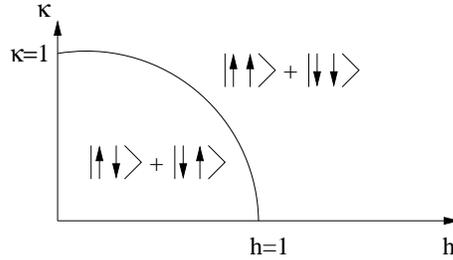


FIG. 6.2 – Ligne d'entropie minimum dans le diagramme de phase du modèle XY. La ligne  $h^2 + \kappa^2 = 1$  sépare les régions d'intrication parallèle et antiparallèle.

**Dans la région paramagnétique**, les courbes d'entropie constante sont des hyperboles, définies par le paramètre  $\kappa_0$ , dont l'équation est :

$$h^2 - \left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^2 = 1, \quad 0 \leq \kappa_0 < \infty. \quad (6.62)$$

**Dans la région ferromagnétique**, les courbes d'entropie constante sont des ellipses, dont

l'équation est :

$$h^2 + \left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^2 = 1, \quad 0 \leq \kappa_0 < \infty. \quad (6.63)$$

Notons que ces équations ne permettent pas d'obtenir l'entropie d'intrication au point ( $h = 1, \kappa = 0$ ). En effet, ce point est le point d'intersection de toutes les courbes d'entropie constante. Il correspond aussi à l'intersection de la ligne critique  $h = 1$  et de la région critique ( $\kappa = 0, h \leq 1$ ).

Il est possible d'approcher les points critiques, de façon particulière, en cherchant à faire tendre les ellipses vers les lignes critiques. Pour cela il convient de prendre les limites  $\kappa_0 \rightarrow 0$  et  $\kappa_0 \rightarrow \infty$ . Ainsi, à l'approche du segment critique ( $\kappa = 0, h < 1$ ), l'entropie d'intrication diverge :

$$S_{\max}(h < 1, \kappa \rightarrow 0) = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \frac{1}{6} \ln(1 - h^2). \quad (6.64)$$

De même en approchant la ligne critique  $h = 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} S_{\max}(h \rightarrow 1^-, \kappa) &= -\frac{1}{6} \ln(1 - h^2) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\kappa}{2}\right) \\ S_{\max}(h \rightarrow 1^+, \kappa) &= -\frac{1}{6} \ln(h^2 - 1) + \frac{1}{3} \ln(4\kappa), \end{aligned} \quad (6.65)$$

Il est intéressant de noter, au passage de la ligne critique  $h = 1$ , que la différence  $\Delta S$ , définie comme

$$\Delta S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (S_{\max}(h = 1 + \epsilon, \kappa) - S_{\max}(h = 1 - \epsilon, \kappa)), \quad (6.66)$$

est donnée par  $\Delta S = \ln 2$ . Ainsi la variation d'entropie au passage de la ligne critique  $h = 1$  est une signature de la transition entre les phases paramagnétiques et ferromagnétiques. Remarquons que  $\Delta S = \ln N_{G_s}^{(-)} - \ln N_{G_s}^{(+)}$  où  $N_{G_s}^{(+)}$  (respectivement  $N_{G_s}^{(-)}$ ) correspond à la dégénérescence de l'état fondamental dans la régions  $h > 1$  (respectivement  $h < 1$ ).

L'analyse du diagramme de phase se termine en notant que, dans la phase paramagnétique, pour toute valeur de  $\kappa$ , l'entropie présente un minimum absolu lorsque  $h \rightarrow \infty$ . L'étude de l'entropie d'intrication à saturation a permis de mettre en évidence la présence de points critiques ( $\forall \kappa, h = 1$  et  $\kappa = 0, \forall h < 1$ ), mais aussi l'existence du champ de factorisation  $h_f = \sqrt{1 - \kappa^2}$  [106, 125], pour lequel l'entropie d'intrication est minimum. Notons que pour l'ensemble des points  $(h_f, \kappa)$  l'entropie d'intrication  $S(L_{\mathcal{A}}, p)$  calculée sur un peigne (voir figure 6.1) est indépendante de  $L_{\mathcal{A}}$  et de  $p$   $S(L_{\mathcal{A}}, p) = \ln 2$ , puisque l'état fondamental est deux fois dégénéré et complètement factorisé.

## Chapitre 7

# Evolution de l'entropie d'intrication dans les systèmes hors de l'équilibre

Alors que les propriétés de l'entropie d'intrication sont de mieux en mieux comprises dans le cadre de l'équilibre, les recherches se tournent actuellement vers l'étude de son comportement en dehors de l'équilibre. Différents travaux dont l'étude porte sur la propagation de l'intrication ont été réalisés [126, 127, 128, 129, 130, 131] en considérant, par exemple, un état initial dont l'intrication est localisée. On peut imaginer préparer une chaîne de spins dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , à l'exception de deux spins voisins que l'on prépare dans un état intriqué. L'interaction d'échange entre spins va permettre la propagation de l'intrication le long de la chaîne. L'intrication entre deux sites  $n$  et  $m$  et le reste de la chaîne est alors mesurée par l'entropie de Von Neumann à partir de la matrice densité réduite à deux sites  $\rho_{n,m}$ . La propagation de l'intrication peut être balistique, dans le cas de système homogène, ou diffusive dans le cas de système désordonné. Un autre scénario hors équilibre possible est obtenu lors d'une trempe : dans cette situation le système est préparé dans un état propre de l'hamiltonien  $H_0$  puis brutalement plongé sous un champ extérieur  $h$ . L'hamiltonien qui gouverne la dynamique est alors modifié et entraîne le système en dehors de l'équilibre. Dans la section qui suit nous présenterons la méthode que nous avons utilisée afin d'obtenir l'entropie d'intrication de chaînes quantiques en dehors de l'état d'équilibre. Puis nous reviendrons sur quelques résultats obtenus lors d'une trempe globale avant d'analyser le cas associé à une trempe locale. Dans cette dernière partie nous confirmerons les prédictions de la théorie conforme par des calculs numériques exactes et l'on analysera le comportement de l'entropie d'intrication dans la limite des temps longs.

### 7.1 L'entropie d'intrication du modèle $XY$

Notons que la méthode utilisée est exactement calquée sur celle conduisant à l'entropie d'intrication à l'équilibre. Ainsi lorsque le système est hors de l'équilibre l'entropie d'intrication s'obtient à partir des fonctions de corrélations. Pour un système fini, de taille  $\mathcal{L}$ , la

dynamique de la matrice  $C$ , formée par les corrélateurs à deux points, est (eq. 3.19) :

$$C(t) = R(t)C(0)R^\dagger(t). \quad (7.1)$$

Le comportement de l'entropie d'intrication est obtenu à partir des corrélateurs des opérateurs de Clifford du block  $\mathcal{A}$  considéré. Ainsi on construit la matrice  $\tilde{C}(t)$  (de dimension  $2L_{\mathcal{A}} \times 2L_{\mathcal{A}}$ ) contenant les corrélateurs du sous-système  $\mathcal{A}$ . Comme dans le cas d'un système à l'équilibre, l'entropie d'intrication est obtenue grâce aux valeurs propres  $1 + p_q(t)$  de la matrice  $\tilde{C}(t)$ ,

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \sum_{q=1}^{2L_{\mathcal{A}}} S_q(t), \quad (7.2)$$

avec

$$S_q(t) = - \left( \frac{1 + p_q(t)}{2} \ln \left( \frac{1 + p_q(t)}{2} \right) + \frac{1 - p_q(t)}{2} \ln \left( \frac{1 - p_q(t)}{2} \right) \right). \quad (7.3)$$

## 7.2 Le cas d'une trempe globale

P. Calabrese et J. Cardy ont étudié, lors d'une trempe, l'évolution de l'intrication d'un système unidimensionnel décrit par une théorie conforme critique [132]. Le système est préparé dans l'état fondamental ( $|\psi_{h_0}\rangle$ ) de l'hamiltonien  $H(h_0)$ , et brutalement placé sous champ  $h \neq h_0$ . La dynamique du système est alors gouvernée par  $H(h)$  et l'état du système évolue suivant l'équation :

$$|\psi_{h_0}\rangle(t) = \exp(-itH(h))|\psi_{h_0}\rangle(0). \quad (7.4)$$

Pour ne citer que les résultats principaux on donne ici le comportement de l'entropie d'intrication obtenue par la théorie conforme. Ainsi, pour toutes valeurs de  $h_0$  et  $h \neq h_0$ , l'entropie d'intrication d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}}$  à l'instant  $t$  est :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) \propto \begin{cases} ct & t < L_{\mathcal{A}}/2 \\ cL_{\mathcal{A}} & t > L_{\mathcal{A}}, \end{cases} \quad (7.5)$$

où  $c$  est la charge centrale associée à la théorie conforme. Les régions  $t < L_{\mathcal{A}}/2$  et  $t > L_{\mathcal{A}}/2$  sont à distinguer. Notons que le caractère extensif de l'entropie d'intrication est retrouvé pour les temps  $t > L_{\mathcal{A}}/2$  alors que l'entropie croît linéairement pour les temps  $t < L_{\mathcal{A}}/2$ . Le temps associé au changement de régime  $t^* = L_{\mathcal{A}}/2$  correspond au temps nécessaire aux excitations (de vitesse  $v = 1$ ), partant des deux extrémités du block, pour ce rejoindre au centre du sous système. L'étude du modèle d'Heisenberg [133], défini par l'hamiltonien

$$H(\Delta) = J \sum_j (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z), \quad (7.6)$$

vient confirmer ce résultat. Lors d'une trempe brutale  $\Delta_0 \rightarrow \Delta$  l'entropie d'intrication croît linéairement :

$$S_{\mathcal{A}}(t) \simeq Jt, \quad t < t^* \quad (7.7)$$

et sature pour les temps  $t > t^*$ . Le temps caractéristique  $t^*$  est défini par  $L_{\mathcal{A}}/2v(\Delta)$  où  $v(\Delta)$  est la vitesse des excitations ( $v = \partial\epsilon_k/\partial k|_{k=0}$ ). Une interprétation satisfaisante du comportement de  $S_{\mathcal{A}}(t)$ , permettant de comprendre le résultat (7.5), est donnée par P. Calabrese et J. Cardy [132] en considérant que les excitations véhiculent l'intrication entre degrés de liberté. L'entropie d'intrication étant alors supposée proportionnelle aux nombres de paires de quasi particules intriquées, les degrés de liberté en  $x \in \mathcal{A}$  et  $y \in \mathcal{B}$  sont intriqués si les excitations d'une même paire, émise en un point  $z$ , arrivent simultanément en  $x$  et  $y$ . Ainsi l'entropie d'intrication croît linéairement pour les temps  $t < t^*$ . Au temps  $t = L_{\mathcal{A}}/2$ , les excitations ont recouvert l'ensemble du block et l'intrication est maximale. Le cas du modèle d'Heisenberg désordonné a aussi été étudié numériquement [133], la propagation des quasi particules  $y$  est plus lente et conduit à l'évolution logarithmique donnée par  $S_{\mathcal{A}}(t) \simeq \ln(t)$ .

### 7.3 Le cas d'une trempe locale

Différentes études ont été menées [84, 135, 136] lors de trempe locale, c'est à dire lors d'une variation brutale mais localisée de l'hamiltonien. Un tel protocole consiste, par exemple, en l'application d'un champs sur un site  $j$ , ou en la modification du terme d'échange entre deux spins voisins. La variation locale de l'hamiltonien a un effet d'autant plus fort que la dimensionnalité du système est faible. Ainsi à une dimension, annuler une interaction entre proche voisin, ou au contraire ajouter une interaction revient à sectionner le système ou à joindre deux sous-systèmes initialement indépendants. Dans le premier cas, lorsque l'on sectionne le système en deux blocks  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , l'entropie d'intrication initiale est conservée. En effet la dynamique associée au block  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\mathcal{B}$ ) est unitaire, gouvernée par l'opérateur d'évolution  $U_{\mathcal{A}}(t)$  (respectivement  $U_{\mathcal{B}}(t)$ ), avec

$$U_{\mathcal{A}}(t) = \exp(-itH_{\mathcal{A}}), \quad \text{et} \quad U_{\mathcal{B}}(t) = \exp(-itH_{\mathcal{B}}), \quad (7.8)$$

où  $H_{\mathcal{A}}$  (respectivement  $H_{\mathcal{B}}$ ) est l'hamiltonien du block  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\mathcal{B}$ ) décrit par le modèle  $XY$  (eq. 1.1). Ainsi  $S_{\mathcal{A}}(t) = S_{\mathcal{B}}(t) = S_{\mathcal{A}}(0) = S_{\mathcal{B}}(0)$ . En revanche, lors de la mise en contact de blocks initialement sans interaction, l'entropie d'intrication présente une évolution. Dans la première section nous exposerons les résultats obtenues par V. Eisler [135] et P. Calabrese [136] sur l'évolution de l'entropie d'intrication lors d'une trempe locale effectuée sur un système infini. Dans un deuxième temps, nous étudierons le comportement de l'entropie d'intrication lors de la mise en contact d'un block de taille finie avec un sous-système infini [84].

#### 7.3.1 Sur un système infini

V. Eisler et I. Peschel [135] ont étudié l'entropie de la chaîne  $XX$  présentant initialement un défaut localisé sur une liaison  $n$ . Dans cette situation le système est préparé dans l'état fondamental associé à  $H(\alpha)$  :

$$H(\alpha) = -\frac{1}{4} \sum_j (1 - \alpha\delta_{j,n})(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y), \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (7.9)$$

Puis, pour les temps  $t > 0$ , la dynamique est gouvernée par l'hamiltonien homogène  $H(\alpha = 0)$ .

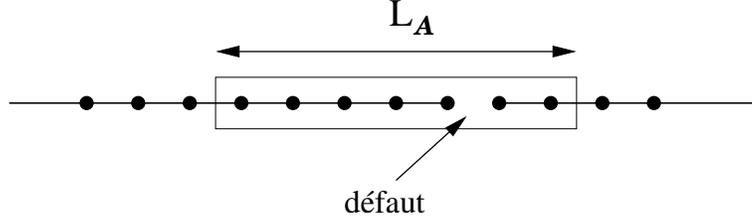


FIG. 7.1 – Schéma d'un block de taille  $L_s$  d'un système infinie, préparé dans un état présentant un défaut.

Les distances séparant le défaut, localisé en  $n$ , des bords gauche et droit du block sont respectivement notées  $L_1$  et  $L_2$ . On vérifie que l'entropie d'intrication reste constante pour les temps  $t < t_1 \approx \min(L_1, L_2)$ . Ce temps correspond au temps nécessaire aux excitations, initialement localisées sur le défaut, pour atteindre l'interface la plus proche. L'analyse du spectre de l'hamiltonien effectif  $\tilde{H}$ , défini à travers la matrice densité réduite (6.25), montre que les valeurs propres  $\tilde{\epsilon}_q$  restent constantes pour les temps  $t < t_1$ .

Pour les temps  $t > t_1$  presque toutes les valeurs propres  $\epsilon_k$  convergent rapidement vers une valeur d'équilibre  $e_k$ . Seule une valeur  $\epsilon_{an}(t)$  dite "anormale", présente une évolution lente,  $\epsilon_{an}(t) \approx \ln(t/\tau)$ . Il est intéressant de constater que pour les temps  $t$  tels que  $\epsilon_{an}(t) = e_{q+1}$  les valeurs propres  $\epsilon_q$  et  $\epsilon_{q+1}$  échangent leurs rôles comme schématisé figure (7.2). L'ensemble des excitations étant constant à l'exception de  $\epsilon_{an}$ , l'évolution de l'entropie d'intrication est déterminée par le comportement de la valeur propre anormale.

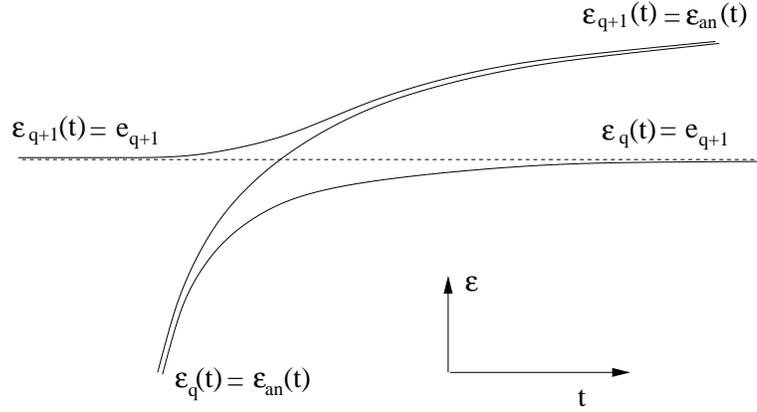


FIG. 7.2 – Schéma de l'évolution des excitations. Lorsque  $\epsilon_q(t) = \epsilon_{an}(t) \simeq e_{q+1}$  les excitations  $\epsilon_q$  et  $\epsilon_{q+1}$  échangent leurs rôles.

Pour les temps  $t > t_1$ , l'entropie croît rapidement et la valeur maximale de l'entropie d'intrication  $S_{max}$  est atteinte pour les temps de l'ordre de  $t_2 \approx \max(L_1, L_2)$ . La différence  $S_{max} - S_\infty$  est

$$S_{max} - S_\infty = c(\alpha) \ln L_A + k(\alpha), \quad (7.10)$$

où  $c(\alpha)$  et  $k(\alpha)$  sont fonction de l'intensité associée au défaut, avec en particulier  $c(0) = k(0) = 0$  et où  $S_\infty$  correspond à la valeur d'équilibre dans un système sans défaut. Finalement on observe, pour les temps  $t \gg t_2$ , une relaxation lente vers  $S_\infty$ . Les résultats numériques permettent d'écrire l'entropie d'intrication sous la forme :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \begin{cases} S_{L_{\mathcal{A}}}(0) & t < t_1 \\ S_\infty + a \frac{\ln t}{t} + \frac{b}{t} & t \gg t_2, \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Le cas particulier obtenu lorsque le défaut est localisé sur une interface du block  $\mathcal{A}$ , conduit à une évolution immédiate de l'entropie d'intrication. Un premier résultat est obtenu [135] par analogie avec les propriétés d'équilibre d'un système présentant un défaut localisé [137]. En considérant que l'effet de la dynamique est de transporter le défaut dans le système, les auteurs de [135] obtiennent l'expression suivante de l'entropie d'intrication :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \frac{c_0}{3} \ln L_{\mathcal{A}} + \frac{c_1}{3} \ln(t/L_{\mathcal{A}}) + \frac{c_2}{6} \ln(1 - t/L_{\mathcal{A}}) + k, \quad (7.11)$$

où toutes les constantes  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  et  $k$  sont fonction de l'intensité du défaut.

P. Calabrese et J. Cardy ont obtenu une expression exacte dans le cas précis d'un défaut d'intensité  $\alpha = 1$ , correspondant à la coupure dans la chaîne à l'instant initial. Ils ont montré que la dynamique obtenue par la mise en contact de deux sous-systèmes quantiques unidimensionnels, pouvait être décrite par une théorie quantique des champs [136]. L'entropie d'intrication, d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}}$  est étudiée dans cette situation et des résultats analytiques sont obtenus dans différents cas. Pour n'en citer que deux, nous exposons ici les résultats obtenus sur l'entropie d'intrication de la région  $x > l$  (situation 1 de la figure 7.3) et dans le cas correspondant au problème étudié par V. Eisler et I. Peschel [135] (situation 2 de la figure 7.3).

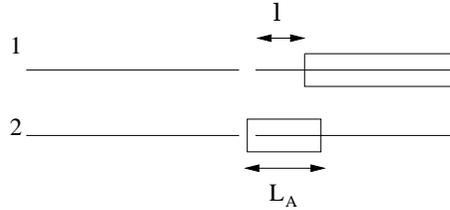


FIG. 7.3 – L'entropie d'intrication est étudiée dans deux cas. 1 - le block considéré est semi infini dans le sous-système de droite. 2 - le block considéré est de taille finie et le défaut est situé sur une des interfaces.

**Situation 1.** L'entropie d'intrication de la région  $\mathcal{A}$  ( $x > l$ ) est :

$$S(t) = \begin{cases} (c/6) \ln l + cst & t < t^* \\ (c/6) \ln(t^2 - l^2) + cst & t > t^*. \end{cases} \quad (7.12)$$

L'interprétation de ces résultats est simple. Pour les temps  $t < t^* = l$ , les excitations générées au niveau de l'interface n'ont pas encore atteint le block  $\mathcal{A}$  et l'entropie reste constante. Cette constante correspond à l'entropie d'équilibre d'un block de taille  $l$  ne présentant qu'une

interface. En effet, les sous-systèmes de gauche et de droite étant initialement déconnectés, l'entropie de von Neumann de la région  $\mathcal{A}$  mesure l'intrication entre les région  $\tilde{\mathcal{B}}$  ( $0 < x < l$ ) et  $\mathcal{A}$ . Ainsi à l'instant  $t = 0$ ,  $S_{\mathcal{A}}(0) = S_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)$  et puisque la mesure de l'intrication se fait au travers de l'interface, il faut attendre l'arrivée des excitations en  $l$  avant d'observer une évolution temporelle. Ainsi pour les temps  $t < t^*$  on a  $S_{\mathcal{A}}(t) = S_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)$ . Pour les temps  $t \gg l$  l'entropie est donnée par  $S(t) \propto \ln(t)$ , l'intrication se fait à travers l'interface sur une longueur  $\xi(t) \approx t$ .

**Situation 2.** Les résultats obtenues pour  $t < L_{\mathcal{A}}$  sont :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \frac{c}{2} \ln L_{\mathcal{A}} + \frac{c}{3} \ln \left( \frac{t}{L_{\mathcal{A}}} \right) + \frac{c}{6} \left( \ln \left( 1 - \frac{t}{L_{\mathcal{A}}} \right) - \ln \left( 1 + \frac{t}{L_{\mathcal{A}}} \right) \right) + cst \quad (7.13)$$

et

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \frac{c}{3} \ln L_{\mathcal{A}} + cst \quad \text{pour} \quad t > L_{\mathcal{A}}. \quad (7.14)$$

Cette situation correspond au problème étudié par V. Eisler et I. Peschel, dont le résultat est très proche de l'équation (7.13). Seul le terme en  $1 + t/L_{\mathcal{A}}$  est manquant. Cependant la théorie conforme ne décrit pas la relaxation, observée numériquement dans la limite des temps longs  $t \gg L_{\mathcal{A}}$  [135].

### 7.3.2 Sur un système semi-infini

#### Comportement critique aux temps courts

La théorie conforme a permis de prédire le comportement de l'entropie d'intrication [136] d'un block de taille finie  $L_{\mathcal{A}}$  que l'on vient ajouter à un système semi-infini (fig. 7.4). Dans la région  $t < 2L_{\mathcal{A}}$  l'entropie d'intrication est

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \frac{c}{6} \ln \left( \frac{4L_{\mathcal{A}}t}{\pi} \sin(\pi t/2L_{\mathcal{A}}) \right) + cst. \quad (7.15)$$

Nous avons confirmé ce résultat [84] par l'étude numérique exacte de l'entropie d'intrication sur les chaînes  $XX$  en champ nul et Ising en champ critique. L'équation (7.15) se généralise dans le cas de la mise en contact d'un block (de taille finie  $L_{\mathcal{A}}$ ), par ses deux extrémités, à deux systèmes semi-infinis :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}(t) = \frac{c}{3} \ln \left( \frac{2L_{\mathcal{A}}t}{\pi} \sin(\pi t/L_{\mathcal{A}}) \right) + cst. \quad (7.16)$$

Le préfacteur est multiplié par 2 puisque  $\mathcal{A}$  présente deux interfaces avec l'extérieur. Dans le cas semi-infini, les excitations se propagent en un temps  $t = L_{\mathcal{A}}$  jusqu'au bord libre sur lequel elles se réfléchissent avant de quitter le block  $\mathcal{A}$  au bout d'un temps  $t = 2L_{\mathcal{A}}$ . Pour le sous-système présentant deux interfaces, les excitations quittent le système à l'instant  $t = L_{\mathcal{A}}$ , de sorte que le temps caractéristique  $t^* = 2L_{\mathcal{A}}$  est remplacé par  $t^* = L_{\mathcal{A}}$  dans la géométrie infinie.

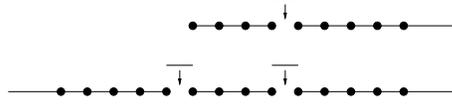


FIG. 7.4 – On étudie l'entropie d'intrication du sous-système fini, lors de la mise en contact avec l'extérieur. Dans un premier cas l'interaction ne se fait que sur l'un des bords. Dans la situation suivante, le contact se fait aux deux extrémités.

Nous généralisons, à la situation hors équilibre, le résultat obtenu par Iglói et al. [138], faisant le lien entre l'entropie d'intrication du modèle  $XY$  en champs nul et du modèle d'Ising en champ critique ( $Ic$ ). Sous une transformation duale, l'hamiltonien du modèle  $XY$  en champs nul, peut être décomposé en une somme de deux hamiltoniens indépendants  $H^{I,1}$  et  $H^{I,2}$  décrits par le modèle d'Ising. Pour cela on définit les opérateurs de sites :

$$S_n^{x,1} = \prod_{j=1}^{2n-1} \sigma_j^x, \quad S_n^{x,2} = \prod_{j=1}^{2n-1} \sigma_j^y \quad (7.17)$$

$$S_n^{z,1} = \sigma_{2n-1}^y \sigma_{2n}^y, \quad S_n^{z,2} = \sigma_{2n-1}^x \sigma_{2n}^x. \quad (7.18)$$

Ainsi l'hamiltonien du modèle  $XY$  en champs nul devient

$$H^{XY}(h=0) = \frac{1}{2} (H^{I,1} + H^{I,2}), \quad (7.19)$$

avec  $[H^{I,1}, H^{I,2}] = 0$  et

$$H_{I,1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L/2-1} J_x S_n^{x,1} S_{n+1}^{x,1} - \frac{J_y}{2} \sum_{n=1}^{L/2} S_n^{z,1}, \quad (7.20)$$

$$H_{I,2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L/2-1} J_y S_n^{x,2} S_{n+1}^{x,2} - \frac{J_x}{2} \sum_{n=1}^{L/2} S_n^{z,2}. \quad (7.21)$$

A l'instant  $t = 0$ , le système est divisé en deux blocks sans interaction et préparé dans l'état fondamental, formé par le produit direct

$$|\Phi_0\rangle_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = |\Phi_0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\Phi_0\rangle_{\mathcal{B}}, \quad (7.22)$$

où  $|\Phi_0\rangle_{\mathcal{A}}$  et  $|\Phi_0\rangle_{\mathcal{B}}$  sont les états fondamentaux de chaque block  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , se décomposant sur les deux hamiltoniens d'Ising  $H^{I,1}$  et  $H^{I,2}$  de sorte que :

$$|\Phi_0\rangle_{\mathcal{X}} = |\Phi_0\rangle_{\mathcal{X}}^{I,1} \otimes |\Phi_0\rangle_{\mathcal{X}}^{I,2}, \quad \mathcal{X} = \mathcal{A}, \mathcal{B}, \quad (7.23)$$

où  $|\Phi_0\rangle_{\mathcal{X}}^{I,j}$  est l'état fondamental de l'hamiltonien d'Ising  $H^{I,j}$  ( $j = 1, 2$ ) défini dans le bloc  $\mathcal{X}$ . Puisque que  $[H^{I,1}, H^{I,2}] = 0$ , l'opérateur d'évolution du modèle  $XY$  se factorise sous la forme :

$$U^{XY}(t) = U^{I,1}(t/2) U^{I,2}(t/2) \quad (7.24)$$

et l'état du système au temps  $t$

$$|\Phi_0\rangle_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(t) = |\Phi_0\rangle_{\mathcal{A}}^{I,1}(t/2) \otimes |\Phi_0\rangle_{\mathcal{B}}^{I,2}(t/2), \quad (7.25)$$

avec  $|\Phi_0\rangle_{\mathcal{A}}^{I,j}(t/2) = U^{I,j}(t/2)|\Phi_0\rangle_{\mathcal{A}}^{I,j} \otimes |\Phi_0\rangle_{\mathcal{B}}^{I,j}$  ( $j = 1, 2$ ). En traçant sur les degrés de liberté de  $\mathcal{B}$ , la matrice densité réduite du block  $\mathcal{A}$  est

$$\rho_{\mathcal{A}}^{XY}(t) = \rho_{\mathcal{A}}^{I,1}(t/2) \otimes \rho_{\mathcal{A}}^{I,2}(t/2), \quad (7.26)$$

conduisant à l'entropie d'intrication :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}^{XY}(t) = S_{L_{\mathcal{A}/2}}^{I,1}(t/2) + S_{L_{\mathcal{A}/2}}^{I,2}(t/2). \quad (7.27)$$

Dans le cas isotrope  $J_x = J_y = 1/2$ , les deux chaînes d'Ising sont identiques et critiques, il suit :

$$S_{L_{\mathcal{A}}}^{XX}(t) = 2S_{L_{\mathcal{A}/2}}^{Ic}(t/2). \quad (7.28)$$

Les résultats qui suivent sont tous associés au modèle  $XX$  (sauf mention contraire) dans le cas semi-infini et se généralisent simplement à la géométrie infinie et au modèle d'Ising critique.

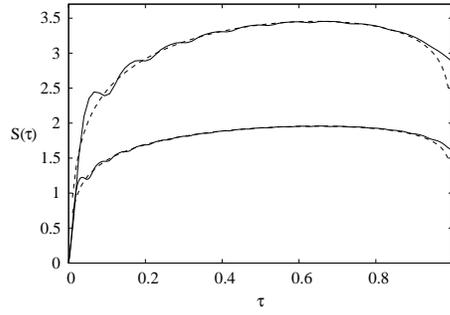


FIG. 7.5 – Evolution de l'entropie d'intrication pour les temps  $t/2 < L_{\mathcal{A}} = 60$ . Les résultats numériques sont en trait plein. Les résultats de la théorie conforme sont en pointillé. Ces résultats sont obtenus pour une géométrie infinie (courbe du haut avec  $\tau = t/L_{\mathcal{A}}$ ) et pour un système semi-infini (courbe du bas avec  $\tau = t/L_{\mathcal{A}}$ ).

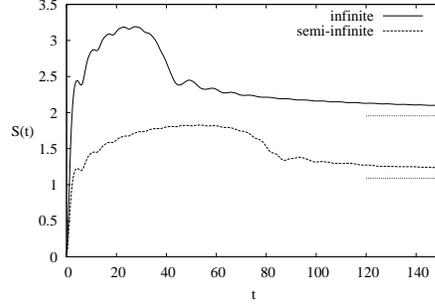


FIG. 7.6 – Entropie d'intrication d'un block de taille  $L_{\mathcal{A}} = 40$  pour les deux géométrie présentées figure 7.4. Les lignes horizontales pointillées correspondent à la valeurs d'équilibre.

La comparaison des résultats numériques et des prédictions analytiques, issues de la théorie conforme est tout à fait satisfaisante, comme en atteste le graphique (7.5). L'ajustement des résultats numériques par l'expression (7.15) conduit à  $c \approx 0.993$ . La théorie conforme, dans laquelle le spectre des excitations est linéaire, ne rend pas compte des oscillations présentées sur les graphiques (7.5), ainsi que du comportement dans la limite des temps longs  $t > L_{\mathcal{A}}$ . Ces effets sont des effets de réseau et sont associés à la relation de dispersion des excitations.

#### Comportement critique aux temps longs

Le comportement pour les temps  $t > 2L_{\mathcal{A}}$  indique une relaxation lente vers la valeur d'équilibre. Dans cette limite, l'entropie d'intrication décroît en  $1/t$  comme indiqué sur la figure (7.7) et présente une structure en escalier. Une analyse du spectre de la matrice densité réduite permet de relier le comportement de l'entropie pour les  $t > 2L_{\mathcal{A}}$  au comportement de la valeur propre irrégulière  $\epsilon_{an}(t)$ . En effet, alors que l'ensemble des valeurs propres évolue rapidement vers une constante, une seule d'entre elles ( $\epsilon_{an}(t)$ ) présente un comportement lent, dépendant du temps. On constate, dans le domaine des temps tracés sur la figure (7.8), que  $\epsilon_{an}(t)$  présente un plateau. D'autres plateaux apparaissent dans le comportement de  $\epsilon_{an}(t)$  pour des valeurs du temps plus grandes qui ne sont pas incluses sur le graphique (7.8). Ainsi l'entropie d'intrication est constante lorsque l'ensemble du spectre est constant,  $\epsilon_{an}$  incluse. Les plateaux apparaissent aux temps  $T_n$  défini par :

$$T_n = \frac{L_{\mathcal{A}}}{v_n} \approx \frac{L_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}} + 1)}{\pi n}, \quad (7.29)$$

où  $v_n$  est la vitesse des excitations définie par :

$$v_n = \partial_q \epsilon_q |_{q_n}, \quad \text{avec} \quad \epsilon(q) = \cos(q) \quad (7.30)$$

et

$$q_n = n \frac{\pi}{L_{\mathcal{A}} + 1}, \quad n = 1, \dots, L_{\mathcal{A}}. \quad (7.31)$$

Notons que  $T_n$  correspond au temps nécessaire à une excitation de vitesse  $v_n$  pour parcourir la distance  $L_{\mathcal{A}}$  et non pour ressortir du block  $\mathcal{A}$ .

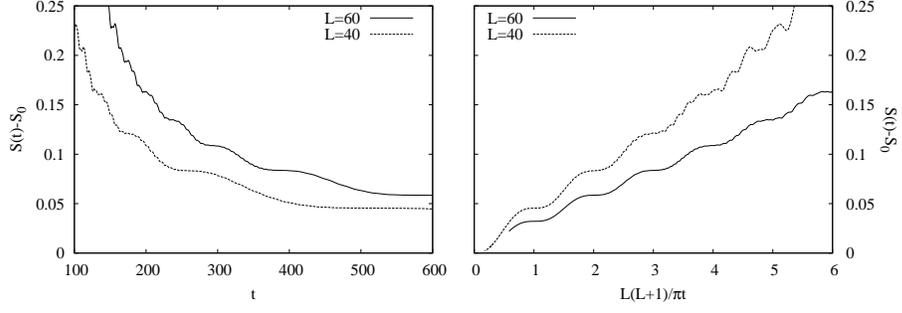


FIG. 7.7 – Entropie d’intrication pour les temps  $t > 100$  dans le cas d’une géométrie semi-infinie. Les courbes sont tracées en fonction de  $t$  (à gauche) et en fonction de  $L(L + 1)/\pi t$  (à droite). La valeur d’équilibre  $S_0$  est soustraite.

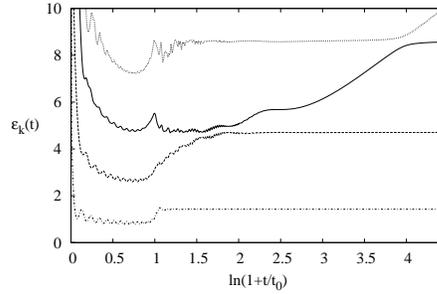


FIG. 7.8 – Evolution temporelle du bas du spectre de l’hamiltonien effectif de la matrice densité réduite, obtenue dans le cas de la géométrie semi-infinie, pour un block de taille  $L_{\mathcal{A}} = 40$ . Le paramètre  $t_0$  est choisi de sorte que pour  $t = 2L_{\mathcal{A}}$  il coïncide avec l’unité sur l’axe des abscisses.

### En dehors du point critique

L’évolution de l’entropie d’intrication du modèle d’Ising dans la région paramagnétique ( $h > 1$ ) présente des similitudes avec le cas critique. Une fois de plus, il convient de distinguer les temps  $t < 2L_{\mathcal{A}}$  et  $t > 2L_{\mathcal{A}}$ . En effet pour les temps courts, l’entropie d’intrication présente un plateau pour lequel  $S_{\mathcal{A}}$  est fonction du champ extérieur  $h$ , alors que pour les temps longs  $t > 2L_{\mathcal{A}}$ ,  $S_{\mathcal{A}}(t)$  relaxe lentement vers sa valeur d’équilibre.

### Comportement aux temps courts

Pour les temps  $t < L_{\mathcal{A}}$  l’entropie d’intrication oscille autour de la valeur du plateau  $S(h)$ . Cette dernière est fonction de la valeur du champ  $h$  mais est indépendante de  $L_{\mathcal{A}}$  pour les  $L_{\mathcal{A}} \gg \xi$ . On note, comme dans le cas critique, la présence d’oscillations relativement plus importantes (figure 7.11) puisque la valeur de  $S(h)$  est ici plus faible. On a pu vérifier numériquement avec une très bonne approximation (figure de droite 7.11), que  $S(h)$  était

donnée par :

$$S(h) = \sqrt{\pi}S_0(h), \quad (7.32)$$

où  $S_0(h)$  correspond à l'entropie d'intrication d'équilibre obtenue à saturation ( $L_{\mathcal{A}} \gg \xi$ ) en champs  $h$  [83, 139]. Une analyse détaillée des oscillations autour de  $S(h)$  montre que l'amplitude de celles-ci décroît comme  $1/t$  (figure 7.10) et que la période des oscillations est fonction du champ extérieur  $h$ . Un étude de la transformée de Fourier de la fonction  $W(t)$  définie par :

$$S(t) = \sqrt{\pi}S_0(h) + \frac{W(t)}{t}, \quad (7.33)$$

montre que les fréquences  $\omega_{\pm}$  qui dominent le comportement de l'entropie d'intrication sont associées aux bornes du spectre  $\epsilon_q$  du modèle d'Ising. Ainsi en notant  $\epsilon_+ = h+1$  et  $\epsilon_- = h-1$  les bornes supérieure et inférieure, on vérifie :

$$\omega_{\pm} = \epsilon_+ \pm \epsilon_-. \quad (7.34)$$

On note que le poids associé à la fréquence  $\omega_+ = 2h$  est le plus important (figure 7.10) et l'on vérifie la présence d'un maximum associé à une fréquence  $\omega = 0$ . Ainsi à l'ordre dominant, pour les temps  $t < 2L_{\mathcal{A}}$ , l'entropie d'intrication est

$$S(t) = \sqrt{\pi}S_0(h) + \frac{A}{t} (1 + B \cos(2ht)), \quad (7.35)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes dépendantes, à priori, de  $L_{\mathcal{A}}$  et de  $h$ .

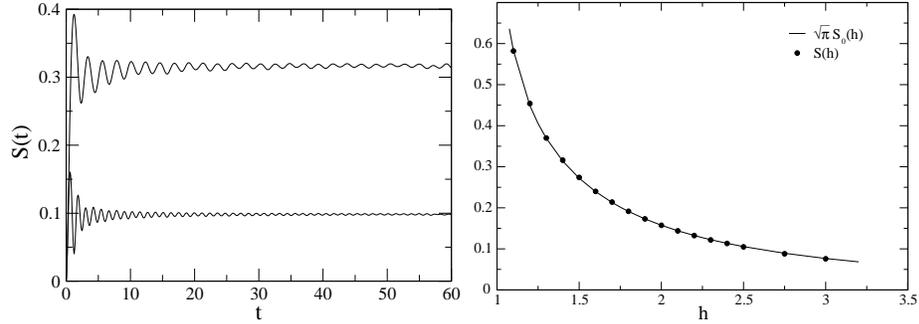


FIG. 7.9 – A gauche : Plateau de l'entropie d'intrication de la chaîne d'Ising non critique dans le cas semi-infini avec  $L_{\mathcal{A}} = 30$ ,  $h = 1.4$  (courbe du haut) et  $h = 2.6$  (courbe du bas). A droite : Valeurs du plateau de l'entropie d'intrication en fonction du champ  $h$ . La ligne correspond à la valeur d'équilibre  $S_0(h)$  divisé par  $\sqrt{\pi}$ .

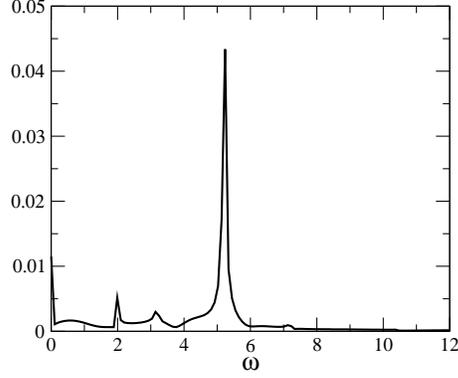


FIG. 7.10 – Transformée de Fourier de la fonction  $W(t)$ , pour  $h = 2.6$ . Le pic principal se situe en  $\omega_+ = 2h = 5.2$ .

### Comportement aux temps longs

Le comportement de l'entropie d'intrication pour les temps  $t > 2L_{\mathcal{A}}$  est tracé figure (7.11). Comme dans le cas critique, il semble que  $S(t)$  tende vers la valeur d'équilibre  $S_0$ . La méthode utilisée permet d'obtenir le comportement de  $S(t)$  jusqu'à des temps  $t$  de l'ordre de 300. Dans cette région le spectre de l'hamiltonien effectif diffère franchement de la forme asymptotique. Seule l'excitation la plus basse a convergé vers la valeur asymptotique [139], alors que les excitations suivantes sont irrégulières. Ainsi, il est délicat d'étudier en détail le comportement de  $S(t)$  dans la limite des temps longs. Alors que l'on note, dans le cas critique, la présence de paliers dans la relaxation de  $S(t)$ , on constate ici, la présence de noeuds (figure 7.11), qui comme précédemment apparaissent aux temps  $T_n$  définis par :

$$T_n = \frac{L_{\mathcal{A}}}{v_n}, \quad (7.36)$$

avec  $v_n = \partial_q \epsilon_q|_{q_n}$  et

$$\epsilon(q) = \sqrt{1 + h^2 + 2h \cos q}. \quad (7.37)$$

Nous avons également noté [84] qu'il était possible d'obtenir une superposition approximative des courbes de  $S(t)$  en fonction de  $t/L_{\mathcal{A}}$  ( $h$  fixé), impliquant une relaxation plus lente lorsque la taille  $L_{\mathcal{A}}$  du block considéré augmente.

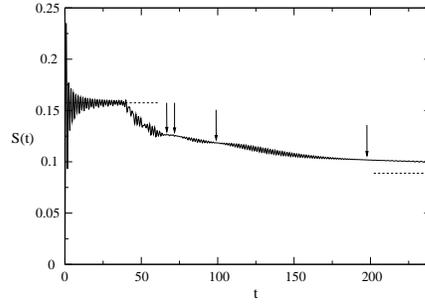


FIG. 7.11 – Evolution de l’entropie d’intrication de la chaîne d’Ising non critique dans le cas semi-infini avec  $L_A = 20$ . Les lignes horizontales pointillées indiquent le valeur du plateau ainsi que la valeur d’équilibre. Les flèches indiquent les quatre temps les plus longs  $T_n = L/v_n$ .

## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes penchés sur l’étude du comportement de l’entropie d’intrication en dehors de l’état d’équilibre, dans une situation qui correspond, là encore, à la mise en interaction de sous-systèmes voisins. Ce protocole est associé à une trempe locale, c’est à dire à une variation brutale et localisée de l’hamiltonien. Notre étude s’est focalisée sur le comportement de l’entropie d’intrication dans le cas d’une géométrie semi-infinie. Nous avons alors pu vérifier que le comportement de l’intrication est similaire au cas d’un système présentant initialement un défaut [135]. Par une diagonalisation exacte des modèles Ising et  $XX$ , nous avons alors confirmé le résultat obtenu par P. Calbrese et J. Cardy [136] dans le cadre de la théorie conforme. Ce résultat est validé dans un premier régime de temps, dont la longueur est fixée par la taille  $L_s$  du block considéré et la vitesse de l’excitation la plus rapide. Dans le cas d’un système critique, l’entropie d’intrication est donnée par une fonction universelle logarithmique, alors qu’en dehors du point critique, l’entropie présente un plateau dont la hauteur est reliée, avec un accord remarquable, à l’entropie d’équilibre  $\sqrt{\pi}S_0(h)$ . Il a également été possible de démontrer l’égalité suivante  $S_{L_A}^{XX}(t) = 2S_{L_A/2}^{Ic}(t/2)$ , liant l’entropie d’intrication des modèles d’Ising critique et  $XX$  en champ nul. L’analyse des propriétés de l’intrication dans la limite des temps longs, révèle une relaxation algébrique décorée par une structure en escalier, pour des temps  $T_n$  fixés par la vitesse  $v_n$  des excitations  $\epsilon_n$ . Dans la limite asymptotique l’entropie du block considéré converge alors vers la valeur d’équilibre. En dehors du point critique, l’étude numérique de l’intrication est plus difficile mais indique clairement une relaxation lente de l’entropie d’intrication, là encore, décorée par des oscillations dont les noeuds apparaissent en temps  $T_n$ . En définitive, que le système soit critique ou non, la relaxation vers l’état d’équilibre est systématiquement décorée. Ceci apparaît comme un effet de mémoire, associé au caractère discret des excitations dans le block initialement de taille finie.

Finalement une analyse de l’entropie de von Neumann dans les situations correspondant aux chapitres 3, 4 et 5 devrait compléter ces travaux. Dans le cas d’un système complètement factorisé présentant une interface  $|\uparrow\downarrow\rangle$ , l’entropie de von Neumann est effectivement une

mesure de l'intrication. Cependant, dans la situation associée au chapitre 4, la température vient alors dissimuler le comportement de l'intrication et seul le caractère entropique domine.

Troisième partie

Systemes quantiques ouverts :  
interactions répétées

Un système quantique ouvert est un système en interaction avec, ce qui, par définition, constitue l'environnement. Généralement, il est sous-entendu que le système est plutôt "petit" et "simple" face à l'environnement "grand" et "complexe". Le but d'une théorie des systèmes quantiques ouverts est de décrire le comportement du système, en tenant compte des interactions avec l'extérieur. Lorsque le système est préparé dans un état quelconque, l'interaction avec l'extérieur induit généralement une évolution temporelle. On espère alors vérifier la thermalisation du système et, dans les cas les plus simples, on souhaite pouvoir montrer qu'il existe un unique état laissé invariant sous l'interaction avec l'environnement. Si cet état est donné par l'état de Gibbs du système préparé à la température du bain, nous oserons conclure naïvement que la description du bain utilisée jusqu'alors est satisfaisante. Cependant, de nombreuses questions sont encore sans réponses, par exemple, le système converge-t-il vers l'état stationnaire quelque soit son état initial? Et si tel est le cas, à quelle vitesse la relaxation se fait-elle, et comment cette dernière est-elle fonction de la taille du système?

Pour une description de l'environnement dite "satisfaisante", on pourra chercher à épurer la définition du bain en essayant d'identifier les ingrédients incontournables qui assurent la thermalisation, la relaxation... Ces questions forment le cœur des interrogations de la théorie des systèmes quantiques ouverts.

Dans cette partie nous étudions un système quantique, décrit par le modèle  $XY$ , ouvert sur l'extérieur. La description que l'on donne de l'environnement est hamiltonienne et consiste en l'interaction répétée du système avec le bain. Dans une première partie nous définirons le processus d'interactions répétées proposé par S. Attal. [146] et nous donnerons les équations qui gouvernent la dynamique du système. Dans un deuxième temps, lorsque le système est décrit par le modèle  $XY$ , nous montrerons qu'il est possible de donner une description complète de l'état du système à partir des corrélateurs à deux points. Nous obtiendrons, dans la limite continue, une nouvelle équation gouvernant l'évolution temporelle de la matrice des corrélateurs. Après une étude analytique de la relaxation d'un modèle jouet, nous exposerons les résultats numériques portant sur la relaxation de système de grandes tailles.

# Chapitre 8

## Interactions répétées

Dans la physique des systèmes quantiques ouverts, il existe deux approches habituellement utilisées par les physiciens et mathématiciens : l'approche hamiltonienne et l'approche markovienne [140, 141, 142].

Une description hamiltonienne consiste en l'étude de la dynamique d'un "petit" système en interaction avec l'environnement, tous deux décrits par les hamiltoniens  $H_s$  et  $H_b$ . L'ensemble constitue un système fermé et la dynamique est réversible. L'enjeu consiste à se restreindre au système en cherchant à obtenir l'équation d'évolution qui lui est associée.

L'approche markovienne consiste en l'étude de l'évolution irréversible du système. L'interaction avec le bain est décrite par une équation différentielle stochastique (équation de Langevin quantique [143, 144]) ou par un générateur de Lindblad [145].

Le processus d'interactions répétées a récemment été proposé comme une description des interactions d'un système quantique avec l'environnement [146, 147, 148]. Cette description est a priori assez intuitive et, en ce sens, assez simple. Elle est le sujet de nombreuses études récentes essentiellement mathématiques [150, 151, 152, 153, 154].

### 8.1 Description du processus d'interactions répétées

Le processus d'interactions répétées permet de décrire l'interaction d'un système, dont l'hamiltonien est  $H_0$ , avec l'environnement, constitué de "copies" indépendantes et identiques, dont l'hamiltonien est  $H_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On note  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) les espaces de Hilbert associés au système et à la "copie"  $n$  de l'environnement ainsi que

$$H_{\mathcal{B}} = \sum_{\mathbb{N}^*} H_n \quad (8.1)$$

l'hamiltonien de l'environnement dont l'espace de Hilbert est donné par  $\mathcal{B} = \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mathcal{H}_j$ . L'ensemble système bain est initialement sans interaction et pour les temps  $t < 0$ , l'hamiltonien total est :

$$H(t < 0) = H_0 + H_{\mathcal{B}}. \quad (8.2)$$

La matrice densité initiale  $\rho(0)$  est formée par le produit direct des matrices densité réduites, associées au système  $\rho_s(0)$  et au bain  $\rho_{\mathcal{B}}(0)$

$$\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_{\mathcal{B}}(0), \quad (8.3)$$

où les copies de l'environnement sont préparées dans des états indépendants caractérisés par  $\rho_j$

$$\rho_{\mathcal{B}} = \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \rho_j. \quad (8.4)$$

Par la suite nous supposons que le système, ainsi que toutes les "copies" de l'environnement, sont préparés dans un état de Gibbs, aux températures  $1/\beta_s$  et  $1/\beta_b$  tel que :

$$\rho_s \propto \exp(-\beta_s H_0) \quad \text{et} \quad \rho_b \propto \exp(-\beta_b H_n) \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (8.5)$$

La description du bain correspond à celle d'un gaz parfait où chaque "copie"  $n$  est associée à une "particule". Une image simple du processus d'interaction entre le bain et le système consiste à supposer que l'interaction (système-bain) se fait lorsqu'une particule de l'environnement vient frapper la surface du système. Ainsi, lors d'un choc, (quand une particule du bain interagit avec le système sur un intervalle de temps  $\tau$ ) une partie de l'énergie de la particule est cédée au système ou inversement. Après interaction, la particule est réfléchie sur l'interface du système, laissant la place à une autre "copie" de l'environnement. Notons que si le terme "particule" est employé ici, c'est uniquement pour appuyer l'analogie avec le gaz parfait. Il n'est pas nécessaire de donner à l'hamiltonien  $H_n$  une structure simple ( $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^2$ ), il est d'ailleurs possible d'y faire intervenir un grand nombre de degrés de liberté. La dynamique de l'ensemble est finalement déterminée par l'hamiltonien total  $H$  pour les temps  $t > 0$ . Le processus d'interactions répétées est alors défini, sur chaque intervalle de temps  $[(n-1)\tau, n\tau]$ , par l'hamiltonien  $H$  décrivant l'interaction du système avec la  $n^{ieme}$  copie de l'environnement, de sorte que :

$$H(t) = H_0 + H_{0n} + H_{\mathcal{B}}, \quad t \in [(n-1)\tau, n\tau], \quad (8.6)$$

où  $H_{0n}$  est le terme d'interaction couplant les degrés de liberté du système à l'extérieur. L'opérateur qui gouverne l'évolution temporelle sur cet intervalle de temps est

$$L_n(\tau) = U_{0n}(\tau) \otimes \prod_{\mathbb{N}^* \setminus n} U_j(\tau), \quad (8.7)$$

où  $U_{0n}$  est l'opérateur d'évolution temporelle qui couple le système à la copie  $n$  et où  $\prod_{\mathbb{N}^* \setminus n} U_j$  décrit l'évolution libre du reste de l'environnement. Ces opérateurs sont simplement donnés par :

$$U_{0n}(\tau) = e^{-i\tau(H_0 + H_{0n} + H_n)} \quad (8.8)$$

$$U_j(\tau) = e^{-i\tau H_j} \quad j \in \mathbb{N} \setminus n. \quad (8.9)$$

Ainsi, l'opérateur qui génère l'évolution temporelle de l'instant  $t = 0$  à  $t = n\tau$  (soit après  $n$  interactions avec le bain) est donné par le produit :

$$\mathbb{U}(n\tau) = L_n(\tau) \dots L_3(\tau) L_2(\tau) L_1(\tau). \quad (8.10)$$

Finalement, dans la représentation de Schrödinger, la matrice densité à l'instant  $t = n\tau$  s'écrit :

$$\rho(n\tau) = \mathbb{U}(n\tau) \rho(0) \mathbb{U}(n\tau)^\dagger = L_n(\tau) \rho((n-1)\tau) L_n^\dagger(\tau), \quad (8.11)$$

alors que dans la représentation d'Heisenberg, pour une observable  $\mathcal{A}$ , la dynamique est

$$\mathcal{A}(n\tau) = \mathbb{U}^\dagger(n\tau)\mathcal{A}(0)\mathbb{U}(n\tau) = L_n^\dagger(\tau)\mathcal{A}((n-1)\tau)L_n(\tau). \quad (8.12)$$

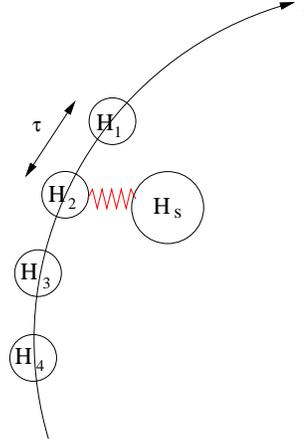


FIG. 8.1 – Schéma du processus d'interaction entre le système et l'environnement.

## 8.2 Equation d'évolution du système

Le processus d'interaction de l'ensemble système-environnement étant fixé, nous cherchons à obtenir une équation qui gouverne uniquement l'évolution de la partie système. Dans une première partie, en nous concentrant sur la matrice densité réduite du système  $\rho_s$  et en suivant les travaux de S. Attal [146, 147, 148, 149], on cherchera l'application nous permettant d'obtenir la matrice densité  $\rho_s$  à l'instant  $t = n\tau$ . Dans un deuxième temps, nous définirons l'équation d'évolution associée aux observables du système dans la représentation d'Heisenberg, avant de discuter la situation correspondante à la limite continue  $\tau \rightarrow 0$ .

### 8.2.1 Matrice densité réduite

Les propriétés du système sont données par la matrice densité réduite  $\rho_s$ , obtenue en effectuant la trace sur les degrés de liberté du bain. Ainsi, à l'instant  $t = n\tau$ , on a par définition :

$$\rho_s(n\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{B}}\{\rho(n\tau)\}. \quad (8.13)$$

On montre facilement que  $\rho_s(n\tau)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\rho_s(n\tau) = \text{Tr}_n \left\{ U_{0n}(\tau) (\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_n) U_{0n}^\dagger(\tau) \right\}, \quad (8.14)$$

où  $\text{Tr}_n$  définit la trace partielle effectuée sur les états de la  $n^{\text{ieme}}$  copie de l'environnement et où  $\rho_n$  est la matrice densité qui caractérise l'état de cette copie. Puisque les copies de

l'environnement sont toutes préparées dans un même mélange statistique défini par  $\rho_b$ , on a :

$$\rho_s(n\tau) = Tr \{ U(\tau) [\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_b] U^\dagger(\tau) \}, \quad (8.15)$$

où l'indice  $n$  est volontairement omis. Pour poursuivre, il nous faut définir les vecteurs propres de  $\rho_b$ , notés  $|\phi_k\rangle$ , ainsi que les valeurs propres  $p_k$  de sorte que :

$$\rho_b |\phi_k\rangle = p_k |\phi_k\rangle, \quad k = 1, \dots, \mathcal{N} = \dim(\mathcal{H}_n). \quad (8.16)$$

Ainsi dans la base  $\{|S_j\rangle \otimes |\phi_k\rangle\}$ , où l'ensemble des  $|S_j\rangle$  forment une base de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_0$ , le produit direct  $\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_b$  est donné par :

$$\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_b = \begin{pmatrix} p_1 \rho_s((n-1)\tau) & 0 & & & \\ 0 & p_2 \rho_s((n-1)\tau) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & 0 & p_{\mathcal{N}} \rho_s((n-1)\tau) \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Enfin, en définissant les opérateurs  $U_i^j$ , vivant dans  $\mathcal{H}_0$ , de sorte que

$$U[\rho_s \otimes \rho_b] U^\dagger = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \dots \\ U_2^1 & U_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \rho_s & 0 \\ 0 & p_2 \rho_s \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{1\dagger} & U_2^{1\dagger} & \dots \\ U_1^{2\dagger} & U_2^{2\dagger} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

on montre que la matrice densité réduite  $\rho_s(n\tau)$  est donnée par l'action d'une application complètement positive  $L_{\rho_b}$ , sur la matrice densité réduite à l'instant  $t = (n-1)\tau$  :

$$\rho_s(n\tau) = \mathbb{L}_{\rho_b}(\rho_s((n-1)\tau)), \quad (8.19)$$

avec

$$\mathbb{L}_{\rho_b}(X) = \sum_{q,k=1}^{\mathcal{N}} p_k U_q^k X U_q^{k\dagger}, \quad (8.20)$$

où  $\rho_b$ , placé en indice, rappelle que l'évolution du système dépend de l'état du bain au travers des valeurs propres  $p_k$ . Finalement par itérations successives on obtient :

$$\rho_s(n\tau) = \mathbb{L}_{\rho_b}^n(\rho_s(0)). \quad (8.21)$$

La dynamique d'une observable  $\mathcal{A}$ , appartenant au système, est simplement obtenue en notant que sa valeur moyenne est

$$\langle \mathcal{A} \rangle(n\tau) = Tr_s \{ \mathcal{A} \rho_s(n\tau) \}. \quad (8.22)$$

L'adjoint de  $L_{\rho_b}$  est défini grace au produit scalaire

$$(X, Y) = Tr_s \{ X Y^\dagger \}, \quad (8.23)$$

à travers la relation  $(X, \mathbb{L}_{\rho_b} Y) = (\mathbb{L}_{\rho_b}^\dagger X, Y)$ . On obtient finalement

$$\langle \mathcal{A} \rangle(n\tau) = Tr_s \{ \mathcal{A}(n\tau) \rho_s(0) \} = Tr_s \{ \mathbb{L}_{\rho_b}^{\dagger n}(\mathcal{A}) \rho_s(0) \}, \quad (8.24)$$

avec

$$\mathcal{A}(\tau) = \mathbb{L}_{\rho_b}^\dagger(\mathcal{A}) = \sum_{q,k=1}^{\mathcal{N}} p_k U_q^{k\dagger} \mathcal{A} U_q^k. \quad (8.25)$$

### 8.2.2 Limite continue

Le passage à la limite continue s'obtient en faisant tendre le temps d'interaction  $\tau$  vers zéro. La démonstration des résultats dans cette limite est délicate et demande une analyse rigoureuse. Nous exposons, sans démonstration, un des principaux résultats obtenus par S. Attal [149], lorsque le bain est préparé dans un état propre  $|\alpha\rangle$ . Ainsi l'équation (8.25) devient :

$$A(\tau) = \mathbb{L}_\alpha^\dagger(A) = \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} U_q^{\alpha\dagger} A U_q^\alpha, \quad (8.26)$$

puisque  $p_k = \delta_{k,\alpha}$ . Il a alors été démontré que l'équation discrète (8.25) conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t A(t) = \mathcal{L}(A(t)), \quad (8.27)$$

où  $\mathcal{L}$  est le générateur de Lindblad défini par :

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_i (2L_i^{\alpha*} X L_i^\alpha - \{L_i^{\alpha*} L_i^\alpha, X\}), \quad (8.28)$$

avec

$$L_\alpha^\alpha = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{U_\alpha^\alpha - \mathbb{I}}{\tau}, \quad \text{et} \quad L_i^\alpha = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{U_i^\alpha}{\sqrt{\tau}}, \quad i \neq \alpha. \quad (8.29)$$

Ainsi les solutions de l'équation discrète sont approchées, à l'ordre la plus bas, par l'équation différentielle (8.27),

$$\frac{\mathbb{L}_\alpha(A(n\tau)) - A(n\tau)}{\tau} \simeq \mathcal{L}(A(n\tau)) + \mathcal{O}(\tau). \quad (8.30)$$

## Chapitre 9

# Interactions répétées sur une chaîne $XY$

Dans la partie qui suit, le système ainsi que les copies de l'environnement sont modélisés par l'hamiltonien du modèle  $XY$ , sur une chaîne de longueur,  $L_s$  pour le système et  $L_b$  pour chaque copie de l'environnement. Les hamiltoniens sont notés  $H_{L_s}^{XY}$  et  $H_{L_b}^{XY}$  et donnés par :

$$H_{L_s}^{XY} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L_s-1} [J_s^x (\sigma_n^x)_s (\sigma_{n+1}^x)_s + J_s^y (\sigma_n^y)_s (\sigma_{n+1}^y)_s] - \frac{h_s}{2} \sum_{n=1}^{L_s} (\sigma_n^z)_s, \quad (9.1)$$

$$H_{L_b}^{XY} = -\lambda_b \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L_b-1} [J_b^x (\sigma_n^x)_b (\sigma_{n+1}^x)_b + J_b^y (\sigma_n^y)_b (\sigma_{n+1}^y)_b] + \frac{h_b}{2} \sum_{n=1}^{L_b} (\sigma_n^z)_b \right), \quad (9.2)$$

où  $(\sigma_n^\nu)_j$  ( $j = s, b$ ) sont les matrices de Pauli, décrivant les degrés de liberté de spin dans le système et le bain. Le champ magnétique appliqué dans la direction  $z$  est noté  $h_j$  ( $j=s,b$ ) et les constantes  $J_j^x$  et  $J_j^y$  sont fonctions du paramètre d'anisotropie  $\kappa_j$  ( $j = s, b$ ) telles que :

$$J_{s,b}^x = \frac{1 + \kappa_{s,b}}{2}, \quad J_{s,b}^y = \frac{1 - \kappa_{s,b}}{2}. \quad (9.3)$$

Finalement une constante multiplicative  $\lambda_b$  est ajoutée afin de contrôler l'échelle des énergies du spectre de l'environnement. Lorsque le contact avec l'environnement ne se fait que sur un des bords du système (voir figure 9.1), l'hamiltonien de l'ensemble système-bain est, là encore, décrit par le modèle  $XY$ , et l'on a sur l'intervalle de temps  $[(n-1)\tau, n\tau]$  :

$$H_L^{XY} = H_{L_s}^{XY} + H_{sb} + H_{L_b}^{XY}, \quad (9.4)$$

avec  $L = L_s + L_b$  et

$$H_{sb} = -\frac{\lambda_i}{2} [J_i^x (\sigma_{L_b}^x)_b (\sigma_1^x)_s + J_i^y (\sigma_{L_b}^y)_b (\sigma_1^y)_s], \quad (9.5)$$

où  $\lambda_i$  est une constante et où

$$J_i^x = \frac{1 + \kappa_i}{2}, \quad J_i^y = \frac{1 - \kappa_i}{2}. \quad (9.6)$$

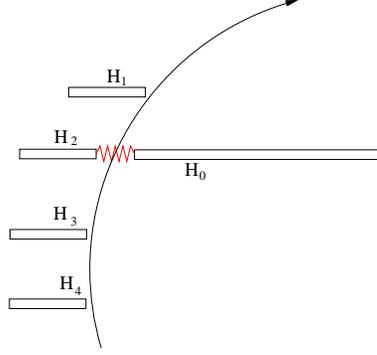


FIG. 9.1 – Schéma de l'interaction du système avec l'environnement. L'interaction se fait entre le dernier spin de l'environnement  $(\sigma_{L_b})_b$  et le premier spin du système  $(\sigma_1)_s$

## 9.1 Etat initial

On rappelle ici que le système et l'environnement sont préparés dans des états canoniques aux températures  $1/\beta_s$  et  $1/\beta_b$ . La matrice densité initiale est

$$\rho(0) = \rho_0 \otimes \rho_B, \quad (9.7)$$

avec

$$\rho_0 = \rho_s(0) = \frac{\exp(-\beta_s H_{L_s}^{XY})}{Z_s}, \quad Z_s = \text{Tr}\{\exp(-\beta_s H_{L_s}^{XY})\}, \quad (9.8)$$

et  $\rho_B = \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \rho_n$  avec  $\forall n$  :

$$\rho_n = \rho_b = \frac{\exp(-\beta_b H_{L_b}^{XY})}{Z_b}, \quad Z_b = \text{Tr}\{\exp(-\beta_b H_{L_b}^{XY})\}. \quad (9.9)$$

Notons que l'état initial du système est un état Gaussien puisque  $H_{L_s}^{XY}$  est quadratique en terme des opérateurs de Clifford. Nous verrons que la matrice densité réduite  $\rho_s$  reste dans un état Gaussien lors du processus d'interaction avec l'environnement. Avant d'arriver à ce résultat, nous rappellerons, dans la partie suivante, l'évolution temporelle des opérateurs de Cliffords.

## 9.2 Dynamique des opérateurs de Clifford

Sur l'intervalle de temps  $](n-1)\tau, n\tau]$ , on définit les opérateurs de Clifford sur la chaîne totale (de longueur  $L = L_s + L_b$ ), formée par le système et la copie  $n$  de l'environnement. On rappelle que les opérateurs de Clifford sont donnés par :

$$\Gamma_n^1 = \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z) \sigma_n^x \quad (9.10)$$

$$\Gamma_n^2 = - \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z) \sigma_n^y, \quad (9.11)$$

avec  $(\Gamma_p^j)^\dagger = \Gamma_p^j$ , et  $\{\Gamma_p^j, \Gamma_k^i\} = 2\delta_{p,k}\delta_{j,i}$ . Pour les temps  $t$  appartenant à  $](n-1)\tau, n\tau]$ , il est possible de faire porter la dynamique aux opérateurs puisque la moyenne d'une observable  $\mathcal{A}$  à l'instant  $t = n\tau$  est simplement

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A} \rangle(n\tau) &= Tr_{s,n} \{ \mathcal{A} U_{0n}^\dagger(\tau) [\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_n] U_{0n}(\tau) \} \\ &= Tr_{s,n} \{ \mathcal{A}(\tau) [\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_n] \}.\end{aligned}\quad (9.12)$$

Ainsi la dynamique du système est portée par la matrice densité pour les temps  $t \leq (n-1)\tau$  alors que l'évolution du système sur l'intervalle  $](n-1)\tau, n\tau]$  est donnée par les opérateurs. Lorsque l'hamiltonien est indépendant du temps, on rappelle que l'évolution temporelle des opérateurs de Clifford est donnée par :

$$\mathbf{\Gamma}(t) = R(t)\mathbf{\Gamma}(0) = e^{-it\mathbf{T}}\mathbf{\Gamma}(0), \quad (9.13)$$

où  $\mathbf{\Gamma}$  est l'opérateur colonne défini par :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \Gamma_2^1 \\ \vdots \\ \Gamma_L^1 \\ \Gamma_1^2 \\ \Gamma_2^2 \\ \vdots \\ \Gamma_L^2 \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Ainsi la moyenne d'une observable quadratique en terme des opérateurs de Clifford  $\mathcal{A} = -i\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_{k'}$  sera donnée par la relation suivante :

$$\langle \mathcal{A} \rangle(n\tau) = Tr_{s,n} \{ -i\mathbf{\Gamma}_k(\tau)\mathbf{\Gamma}_{k'}(\tau) [\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_n] \}. \quad (9.15)$$

### 9.3 Evolution temporelle de la matrice densité réduite

Le système étant initialement préparé dans un état Gaussien, la matrice densité réduite  $\rho_s$  est complètement déterminée par l'ensemble des corrélateurs à deux points. Nous allons démontrer que l'état du système reste Gaussien lors de l'évolution temporelle, de sorte que pour tout temps, la donnée des corrélateurs à deux points détermine l'état du système. Pour cela, on commence par analyser la matrice densité du système au temps  $t = \tau$ . La matrice densité  $\rho_{0,1}(\tau)$  associée au système et à la première copie de l'environnement, est donnée par l'équation suivante :

$$\rho_{0,1}(\tau) = U_{0,1}(\tau) \left( \frac{\exp(-\beta_s H_{L_s}^{XY})}{Z_s} \otimes \frac{\exp(-\beta_b H_{L_b}^{XY})}{Z_b} \right) U_{0,1}^\dagger(\tau). \quad (9.16)$$

Puisque  $[H_{L_s}^{XY}, H_{L_b}^{XY}] = 0$ , on peut écrire  $\rho_{0,1}(\tau)$  sous la forme :

$$\rho_{0,1}(\tau) = \frac{1}{Z_{s,b}} U_{0,1}(\tau) \exp(-H_{0,1}) U_{0,1}^\dagger(\tau) = \frac{1}{Z_{s,b}} \exp(-\tilde{H}_{0,1}(\tau)), \quad (9.17)$$

avec  $Z_{s,b} = Z_s Z_b$  et

$$H_{0,1} = \beta_s H_{L_s}^{XY} + \beta_b H_{L_b}^{XY}, \quad \tilde{H}_{0,1}(\tau) = U_{0,n}(\tau) H_{0,1} U_{0,n}^\dagger(\tau). \quad (9.18)$$

Il est encore possible d'écrire l'hamiltonien  $H_{0,1}$  sous la forme :

$$H_{0,1} = \frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{T}_{0,1} \mathbf{\Gamma}, \quad (9.19)$$

avec

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_s C_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_b C_b \\ \beta_s C_s^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_b C_b^\dagger & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

et

$$C_j = -i \begin{pmatrix} h_j & J_j^y & & \\ J_j^x & h_j & J_j^y & \mathcal{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathcal{O} & J_j^x & h_j & J_j^y \\ & & J_j^y & h_j \end{pmatrix}, \quad j = s, b. \quad (9.21)$$

En utilisant l'égalité  $U_{0,n}^\dagger(\tau) = U_{0,n}(-\tau)$ , il suit

$$\tilde{H}_{0,1}(\tau) = \frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^\dagger(-\tau) \mathbf{T}_{0,1} \mathbf{\Gamma}(-\tau), \quad (9.22)$$

et la relation  $\mathbf{\Gamma}(\tau) = R(\tau) \mathbf{\Gamma}(0)$  conduit à :

$$\tilde{H}_{0,1}(\tau) = \frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{T}_{0,1}(\tau) \mathbf{\Gamma}, \quad (9.23)$$

avec  $\mathbf{T}_{0,1}(\tau) = R(\tau) \mathbf{T}_{0,1} R^\dagger(\tau)$ . Ainsi, à l'instant  $t = \tau$ , l'ensemble formé par le système et la première copie de l'environnement est dans un état Gaussien défini par :

$$\rho_{0,1}(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{4} \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{T}_{0,1}(\tau) \mathbf{\Gamma}\right)}{Z_{s,b}}. \quad (9.24)$$

Il est donc clair que la matrice densité réduite  $\rho_s(\tau)$  donnée par  $\rho_s(\tau) = \text{Tr}_1\{\rho_{0,1}(\tau)\}$  est, elle aussi, caractérisée par un état Gaussien et peut donc être complètement déterminée par la donnée des corrélateurs à deux points. En effet, les corrélateurs des opérateurs de Clifford vérifient le théorème de Wick. Avec en particulier  $\langle \mathbf{\Gamma}_n \rangle = 0$  et

$$\langle \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_m \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{\Gamma}_k \rangle = \langle \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_m \rangle \langle \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{\Gamma}_k \rangle - \langle \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_p \rangle \langle \mathbf{\Gamma}_m \mathbf{\Gamma}_k \rangle + \langle \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_k \rangle \langle \mathbf{\Gamma}_m \mathbf{\Gamma}_p \rangle. \quad (9.25)$$

Précisons que la moyenne formée du produit d'un nombre impaire d'opérateurs de Clifford est nulle alors que la moyenne du produit d'un nombre pair d'opérateurs  $\mathbf{\Gamma}_n$  se décompose sur les corrélateurs à deux points de la forme  $\langle \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{\Gamma}_m \rangle$ . Cette décomposition, due au théorème de Wick, reste évidemment valable lorsqu'on ne considère que les opérateurs de Clifford

appartenant à la partie système. La matrice densité réduite du système est donc caractérisée par un état Gaussien, que l'on écrit, à l'instant  $t = \tau$ , sous la forme :

$$\rho_s(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{4}\mathbf{\Gamma}_S^\dagger \tilde{\mathbf{T}}_0(\tau)\mathbf{\Gamma}_S\right)}{K(\tau)}, \quad K(\tau) = \text{Tr} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\mathbf{\Gamma}_S^\dagger \tilde{\mathbf{T}}_0(\tau)\mathbf{\Gamma}_S\right) \right\}, \quad (9.26)$$

où  $\mathbf{\Gamma}_S$  est l'opérateur colonne (de dimension  $2L_s$ ) formé par l'ensemble des opérateurs de Clifford appartenant au système. La matrice densité réduite  $\rho_s(\tau)$  est telle que :

$$\langle \mathbf{\Gamma}_{n \in S} \mathbf{\Gamma}_{m \in S} \rangle = \text{Tr}_s \{ \mathbf{\Gamma}_{n \in S} \mathbf{\Gamma}_{m \in S} \rho_s(\tau) \} = \text{Tr} \{ \mathbf{\Gamma}_{n \in S} \mathbf{\Gamma}_{m \in S} \rho_{0,1}(\tau) \}. \quad (9.27)$$

Finalement pour tout temps  $t = n\tau$ , la matrice densité réduite du système est caractérisée par un état Gaussien dont la matrice densité  $\rho_s(n\tau)$  est de la forme :

$$\rho_s(n\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{4}\mathbf{\Gamma}_S^\dagger \tilde{\mathbf{T}}_0(n\tau)\mathbf{\Gamma}_S\right)}{K(n\tau)}, \quad K(n\tau) = \text{Tr} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\mathbf{\Gamma}_S^\dagger \tilde{\mathbf{T}}_0(n\tau)\mathbf{\Gamma}_S\right) \right\}. \quad (9.28)$$

## 9.4 Valeur moyenne d'une observable

L'état du système étant Gaussien pour toute valeur de  $t$ , nous étudions ici l'évolution temporelle de la moyenne des corrélateurs à deux points. On définit, comme dans les chapitres précédents, la matrice  $\mathcal{M}^{(0,n)}$  sur l'ensemble formé par le système et la copie  $n$  de l'environnement, dont les éléments sont :

$$\mathcal{M}_{k,k'}^{(0,n)} = \langle -i\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{\Gamma}_{k'} \rangle, \quad (9.29)$$

avec  $k = 1, \dots, 2L$  ( $L = L_s + L_b$ ). Les indices 0 et  $n$ , placés en exposant, rappellent que la matrice est formée des corrélateurs entre le système (indice 0) et la "copie"  $n$ . Notons que les éléments diagonaux sont indépendants du temps ( $\mathcal{M}_{k,k}^{(0,n)} = -i$ ) puisque  $(\mathbf{\Gamma}_k)^2 = \mathbb{I}$  et on définit finalement la matrice  $\mathcal{C}^{(0,n)} = \mathcal{M}^{(0,n)} + i\mathbb{I}$  dont l'évolution temporelle est donnée par l'action de  $R(\tau)$

$$\mathcal{C}^{(0,n)}(n\tau) = R(\tau)\mathcal{C}^{(0,n)}((n-1)\tau)R^T(\tau), \quad (9.30)$$

avec, par définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k,k'}^{(0,n)}(n\tau) &= \text{Tr}_{0,n} \{ -i\mathbf{\Gamma}_k(\tau)\mathbf{\Gamma}_{k'}(\tau)(\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_b) \} + i\delta_{k,k'} \\ \mathcal{C}_{k,k'}^{(0,n)}((n-1)\tau) &= \text{Tr}_{0,n} \{ -i\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_{k'}(\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_b) \} + i\delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

En particulier, on notera  $\mathcal{C}_s^{(0,n)}$  le block de la matrice  $\mathcal{C}^{(0,n)}$  pour lequel les opérateurs  $\mathbf{\Gamma}_k$  et  $\mathbf{\Gamma}_{k'}$  appartiennent au système

$$\left( \mathcal{C}_s^{(0,n)} \right)_{k,k'}(n\tau) = \text{Tr}_0 \{ -i\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{\Gamma}_{k'} \rho_s(n\tau) \} + i\delta_{k,k'}. \quad (9.32)$$

Afin de poursuivre, on choisit de réorganiser l'opérateur  $\Gamma$  de la manière suivante :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_B \\ \Gamma_S \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \Gamma_B = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{L_b}^1 \\ \Gamma_1^2 \\ \vdots \\ \Gamma_{L_b}^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_S = \begin{pmatrix} \Gamma_{L_b+1}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_L^1 \\ \Gamma_{L_b+1}^2 \\ \vdots \\ \Gamma_L^2 \end{pmatrix}. \quad (9.33)$$

Dans l'état défini par  $\rho_s((n-1)\tau) \otimes \rho_n$  la matrice  $\mathcal{C}^{(0,n)}((n-1)\tau)$  prend une structure block diagonale, comme cela a déjà été discuté dans le chapitre 2 (voir équation 13.7). Cette structure reflète le fait qu'il n'existe pas de corrélation entre le système et la copie  $n$ , puisque pour les temps  $t < (n-1)\tau$  le système et la copie  $n$  sont indépendants. La matrice  $\mathcal{C}^{(0,n)}((n-1)\tau)$  est alors divisée en deux blocks  $\mathcal{C}_b$  (de dimension  $2L_b \times 2L_b$ ) et  $\mathcal{C}_s^{(0,n)}((n-1)\tau)$  (de dimension  $2L_s \times 2L_s$ ), contenant respectivement les informations sur l'état de la copie  $n$  et du système. On obtient :

$$\mathcal{C}^{(0,n)}((n-1)\tau) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_b & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_s^{(0,n)}((n-1)\tau) \end{pmatrix}, \quad (9.34)$$

avec, lorsque  $\Gamma_k$  et  $\Gamma_{k'}$  appartiennent au bain

$$(\mathcal{C}_b)_{k,k'} = Tr_n\{-i\Gamma_k\Gamma_{k'}\rho_b\} + i\delta_{k,k'}, \quad (9.35)$$

et lorsque  $\Gamma_k$  et  $\Gamma_{k'}$  appartiennent au système

$$(\mathcal{C}_s^{(0,n)})_{k,k'}((n-1)\tau) = Tr_0\{-i\Gamma_k\Gamma_{k'}\rho_s((n-1)\tau)\} + i\delta_{k,k'}. \quad (9.36)$$

En identifiant les équations (9.32) et (9.36) il suit :

$$\mathcal{C}_s^{(0,n)}((n-1)\tau) = \mathcal{C}_s^{(0,n-1)}((n-1)\tau). \quad (9.37)$$

Pour finir, on définit les blocks de la matrice  $R(\tau)$

$$R(\tau) = \begin{pmatrix} R_b^b & R_b^s \\ R_s^b & R_s^s \end{pmatrix}, \quad (9.38)$$

de sorte que l'évolution de la partie système  $\mathcal{C}_s^{(0,n)}(n\tau)$  est donnée par :

$$\mathcal{C}_s^{(0,n)}(n\tau) = R_s^s(\tau)\mathcal{C}_s^{(0,n-1)}((n-1)\tau)R_s^{s\dagger}(\tau) + R_s^b(\tau)\mathcal{C}_bR_s^{b\dagger}(\tau). \quad (9.39)$$

Pour alléger les notations, on utilisera  $\mathcal{C}_s(n\tau) = \mathcal{C}_s^{(0,n)}(n\tau)$ , il vient alors

$$\mathcal{C}_s(n\tau) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_b}(\mathcal{C}_s((n-1)\tau)) \quad (9.40)$$

et par itération

$$\mathcal{C}_s(n\tau) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_b}^n(\mathcal{C}_s(0)), \quad (9.41)$$

avec

$$\mathcal{L}_Y(X) = R_s^s X R_s^{s\dagger} + R_s^b Y R_s^{b\dagger}. \quad (9.42)$$

La matrice  $\mathcal{C}_s$  formée des corrélateurs à deux points est alors donnée par l'action successive de l'opérateur  $\mathcal{L}$  sur la matrice  $\mathcal{C}_s(0)$  décrivant l'état initial.

**Remarque :** Lorsque le système est préparé à température infinie, les éléments de la matrice  $\mathcal{C}_b$  s'annulent. Ainsi l'action de  $\mathcal{L}$  devient  $\mathcal{L}_0(X) = R_s^s X R_s^{s\dagger}$ , conduisant à

$$\mathcal{C}_s(n\tau) = (R_s^s)^n \mathcal{C}_s(0) (R_s^{s\dagger})^n. \quad (9.43)$$

## 9.5 Limite continue

La limite continue s'obtient en faisant tendre le temps d'interaction  $\tau$  vers zéro. Cela permet d'obtenir une équation différentielle gouvernant l'évolution de la matrice  $\mathcal{C}_s$ . Nous verrons qu'il est nécessaire de renormaliser l'intensité des couplages, le cas contraire conduisant à l'évolution libre du système. Dans la limite des temps d'interaction faible ( $\tau \ll 1$ ), la matrice  $R(\tau)$  s'écrit, à l'ordre en  $\tau^3$  :

$$R(\tau) \simeq 1 - i\tau \mathbf{T} - \frac{\tau^2 \mathbf{T}^2}{2} + \frac{i\tau^3 \mathbf{T}^3}{3!} + \mathcal{O}(\tau^4). \quad (9.44)$$

On définit les restrictions de  $\mathbf{T}$  sur le système et le bain de la manière suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_b T_b & \lambda_i \theta \\ \lambda_i \theta^\dagger & T_s \end{pmatrix}, \quad (9.45)$$

où  $T_j$ , de dimension  $2L_j \times 2L_j$  ( $j = s, b$ ), est donnée par :

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & C_j \\ C_j^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad C_j = -i \begin{pmatrix} h_j & J_j^y & & \\ J_j^x & h_j & J_j^y & \mathcal{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathcal{O} & J_j^x & h_j & J_j^y \\ & & J_j^y & h_j \end{pmatrix}, \quad (9.46)$$

et où les éléments de la matrice  $\theta$ , de dimension  $2L_b \times 2L_s$ , sont :

$$\theta_{n,m} = iJ_i^x \delta_{n,2L_b} \delta_{m,1} - iJ_i^y \delta_{n,L_b} \delta_{m,L_s+1}. \quad (9.47)$$

Notons que seul deux éléments de  $\theta$  sont non nuls, reflétant le fait que l'interaction ne se fait que par les bords, entre le dernier spin du bain et le premier spin du système. Il convient de ne pas utiliser immédiatement la forme explicite de  $\theta$  et de conserver une expression générale le plus longtemps possible. Sur les quatre blocks constituant la matrice  $\mathbf{T}$ , deux sont associés à la forme de l'interaction que l'on impose entre le système et le bain, et font intervenir la matrice  $\theta$ . Les deux autres blocks sont associés à la descriptions des couplages internes dans le système et le bain, et font intervenir les matrices notées  $T_s$  et  $T_b$ . Finalement l'équation différentielle de  $\mathcal{C}_s(t)$  est obtenue en prenant  $\tau \rightarrow 0$  et l'on définit :

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}_{\rho_b}(\mathcal{C}_s(n\tau)) - \mathcal{C}_s(n\tau)}{\tau}. \quad (9.48)$$

Les démonstrations des résultats obtenus plus bas sont présentées en appendice.

### 9.5.1 Evolution libre du système

Prendre la limite  $\tau \rightarrow 0$ , nous permet d'écrire une équation différentielle pour la matrice  $\mathcal{C}_s$  formée par les corrélateurs. On montre (voir appendice) lorsque l'on ne prend pas la peine de renormaliser les couplages que la limite (9.48) conduit à l'équation suivante :

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = -i[T_s, \mathcal{C}_s(t)]. \quad (9.49)$$

Cette équation décrit l'évolution libre du système et l'on vérifie facilement que la solution est

$$\mathcal{C}_s(t) = R_s(t) \mathcal{C}_s R_s^\dagger(t) \quad \text{avec} \quad R_s(t) = \exp(-itT_s). \quad (9.50)$$

Ce résultat se comprend simplement, puisque lorsque  $\tau$  tend vers zéro aucune information n'a le temps de traverser la liaison qui sépare le bain du système, ainsi le système évolue sans être influencé par le bain.

### 9.5.2 Evolution d'un système ouvert

Afin d'obtenir une équation différentielle qui décrive le système en interaction avec le bain, il est nécessaire de renormaliser les couplages. On montre alors (voir appendice) que l'unique renormalisation possible consiste à maintenir le produit  $\lambda_i \sqrt{\tau}$  constant lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . On note :

$$\Lambda_i = \sqrt{\tau} \lambda_i. \quad (9.51)$$

On obtient l'équation suivante :

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = -i[T_s, \mathcal{C}_s(t)] - \frac{\Lambda_i^2}{2} (\{\mathcal{C}_s(t), \theta^\dagger \theta\} - 2\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta). \quad (9.52)$$

Le premier terme du membre de droite dans l'équation (9.52) correspond à l'évolution libre de la partie système alors que le second terme décrit l'influence de l'environnement sur le système. L'état de l'environnement apparaît explicitement dans l'expression (9.52), il est caractérisé par  $\mathcal{C}_b$ . Rappelons que  $\mathcal{C}_b$  correspond à la matrice formée par la moyenne des corrélateurs à deux points appartenant au bain :

$$(\mathcal{C}_b)_{n,m} = Tr\{-i\Gamma_n \Gamma_m \rho_b\} + i\delta_{n,m}. \quad (9.53)$$

Finalement, la structure interne des interactions dans le bain est sans importance, puisque l'équation (9.52) est indépendante des quantités telles que  $h_b, J_b^x, J_b^y$ . Notons que, pour un bain préparé à température infinie,  $\mathcal{C}_b = 0$  et l'équation (9.52) devient :

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = -i[T_s, \mathcal{C}_s(t)] - \frac{\Lambda_i^2}{2} \{\mathcal{C}_s, \theta^\dagger \theta\}. \quad (9.54)$$

**La solution formelle** est apportée en définissant le super opérateur  $L$  et la constant  $K_b$

$$L(\cdot) = i[T_s, \cdot] + \frac{\Lambda_i^2}{2} \{\theta^\dagger \theta, \cdot\}, \quad K_b = \Lambda_i^2 \theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta. \quad (9.55)$$

L'équation (9.52) devient

$$\partial_t \mathcal{C}_s + L(\mathcal{C}_s) = K_b, \quad (9.56)$$

dont la solution est formellement donnée par :

$$\mathcal{C}_s(t) = e^{-tL} (\mathcal{C}_s(0) - S_B) + S_B, \quad (9.57)$$

où la matrice  $S_B = L^{-1}(K_b)$  décrit les propriétés de l'état stationnaire puisqu'elle contient l'ensemble des corrélateurs à deux points appartenant au système.

### 9.5.3 Interaction entre premiers voisins

Dans la partie qui suit nous analysons, l'influence du bain sur le système lorsque l'interaction système-bain est donnée par l'Hamiltonien  $H_{sb}$

$$H_{sb} = -\frac{\lambda_i}{2} [J_i^x (\sigma_{L_b}^x)_b (\sigma_1^x)_s + J_i^y (\sigma_{L_b}^y)_b (\sigma_1^y)_s]. \quad (9.58)$$

On rappelle que l'interaction ne se fait que sur un bord du système, entre premiers voisins, ici  $(\sigma_{L_b})_b$  et  $(\sigma_1)_s$ . Ainsi dans la limite continue, nous démontrons que seul l'état du spin de l'environnement directement en contact avec le système intervient dans l'équation d'évolution (9.52). Rappelons cette dernière :

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = -i[T_s, \mathcal{C}_s(t)] - \frac{\Lambda_i^2}{2} (\{\mathcal{C}_s, \theta^\dagger \theta\} - 2\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta). \quad (9.59)$$

En utilisant la forme explicite de  $\theta$  (13.47), les éléments de  $\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta$  sont donnés par :

$$(\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta)_{n,m} = m_b^z(L_b) J_i^x J_i^y (\delta_{n,1} \delta_{m,L_s+1} - \delta_{n,L_s+1} \delta_{m,1}). \quad (9.60)$$

On constate que seul l'état du spin  $(\sigma_{L_b})_b$  apparaît dans l'expression  $(\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta)$ , plus précisément, c'est l'aimantation moyenne sur le site  $L_b$  qui apparaît ici

$$m_b^z(L_b) = Tr\{-i\rho_b \Gamma_{L_b}^2 \Gamma_{L_b}^1\}. \quad (9.61)$$

Ainsi dans la limite continue, lorsque l'interaction système-bain, se fait entre premier voisins, seul le spin de l'environnement directement en contact avec le système joue un rôle dans l'équation (9.52). Dans ce cas, tout ce passe comme si le système était en interaction avec des copies de l'environnement formées d'un spin unique, dont l'hamiltonien  $H'_n$  est

$$H'_n = -\frac{h_b}{2} \sigma_n^z. \quad (9.62)$$

Celles-ci apparaissent comme préparées dans un état de Gibbs à la température effective  $1/\beta'_b$  telle que la moyenne de l'aimantation soit :

$$m_b^z = \tanh\left(\frac{\beta'_b h_b}{2}\right) = m_b^z(L_b). \quad (9.63)$$

Ainsi la température effective de chaque copie est donnée par :

$$\beta'_b = \frac{2}{h_b} \tanh(m_b^z(L_b)). \quad (9.64)$$

Nous choisirons par la suite, une description simple de l'environnement ( $\mathcal{H}_B = \bigotimes_n \mathbb{C}^2$ ), en considérant que chaque copie n'est formée que d'un spin unique.

Notons que le terme qui traduit l'influence du bain sur l'évolution du système, dans l'équation (9.60), est proportionnelle au produit  $J_i^x J_i^y$ , que l'on écrit en fonction du paramètre d'anisotropie  $\kappa_i$  :

$$J_i^x J_i^y = \frac{1 - \kappa_i^2}{4}. \quad (9.65)$$

Avec en particulier, dans le cas d'une interaction de type Ising ( $\kappa_i = 1$ ),  $J_i^x = 1$  et  $J_i^y = 0$  de sorte que  $\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta = 0$ , l'équation d'évolution (9.52) devient :

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = -i[T_s, \mathcal{C}_s(t)] - \frac{\Lambda_i^2}{2} \{\mathcal{C}_s, \theta^\dagger \theta\}. \quad (9.66)$$

Dans le cas où le paramètre d'anisotropie est  $\kappa_i = 1$ , tout ce passe comme si le champ magnétique appliqué dans le bain était nul  $h_b = 0$ , puisque dans ce cas, l'aimantation  $m_b^z(L_b) = 0$ , de sorte que l'équation (9.52) conduit directement à (9.66). Cette situation est indiscernable du cas où la température dans le bain est infinie  $\beta_b = 0$ , pour laquelle, là encore,  $m_b^z(L_b) = 0$ . Ainsi, en toute généralité, un système ouvert, décrit par le modèle XY, dont l'interaction avec le bain est fixé par une liaison de type Ising  $\kappa_i = 1$ , évolue systématiquement de la même façon, quelque soit l'état et l'hamiltonien du bain. Dès lors, il est parfaitement clair qu'une liaison pour laquelle  $\kappa_i = 1$  ne permettra pas de décrire l'interaction avec le bain de façon satisfaisant puisque finalement le système n'est ni influencé par l'hamiltonien du bain ni par l'état de celui-ci. Dans ce cas, la propriété de thermalisation n'est jamais satisfaite (sauf dans le cas d'un bain à température infinie) et nous choisirons par la suite  $\kappa_i \neq 1$ .

#### 9.5.4 Influence du système sur l'environnement

A présent, on s'intéresse à la façon dont l'état de l'environnement est modifié après une interaction avec le système. Ce calcul est fait dans la limite des temps d'interaction faibles (mais finis) et permettra d'extraire certaines informations sur l'évolution du système. En effet, lorsque l'équation de la matrice  $\mathcal{C}_s(t)$  est complexe, alors que le bain est finalement décrit que par un spin unique, il est plus simple d'obtenir et de résoudre l'équation d'évolution de la matrice  $\mathcal{C}_b$  décrivant l'état de la copie  $n$ . On note  $\mathcal{C}'_b(n\tau)$  la matrice  $\mathcal{C}_b$  associée à la copie  $n$  au temps  $t = (n + 1)\tau$ . On obtient le résultat suivant :

$$\mathcal{C}'_b(n\tau) = R_b^b \mathcal{C}_b R_b^{b\dagger} + R_b^s \mathcal{C}_s(n\tau) R_b^{s\dagger}, \quad (9.67)$$

qui dans la limite des temps d'interaction faibles, conduit à :

$$\delta \mathcal{C}_b(n\tau) = -\frac{\tau \Lambda_i^2}{2} (\{\mathcal{C}_b, \theta \theta^\dagger\} - 2\theta \mathcal{C}_s(n\tau) \theta^\dagger), \quad \delta \mathcal{C}_b(n\tau) = \mathcal{C}'_b(n\tau) - \mathcal{C}_b(n\tau). \quad (9.68)$$

La copie  $n$  étant constituée d'un seul spin, la matrice  $\mathcal{C}_b$  s'écrit

$$\mathcal{C}_b = \begin{pmatrix} 0 & -m_b^z \\ m_b^z & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.69)$$

où  $m_b^z$  est la moyenne de l'aimantation transverse dans la copie  $n$  donnée par :

$$m_b^z = \text{Tr}\{\rho_b \sigma_b^z\} = \text{Tr}\{-i\Gamma_b^2 \Gamma_b^1 \rho_b\}. \quad (9.70)$$

Lorsque les interactions système-bain se font entre premiers voisins, la matrice  $\theta$  est donnée par (13.47) et nous permet d'arriver au résultat suivant :

$$\delta m_b^z(n\tau) = -\frac{\tau}{t_\kappa} \left( m_b^z - \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} m_s^z(1, n\tau) \right), \quad (9.71)$$

avec

$$\frac{1}{t_\kappa} = \frac{\Lambda_i}{2} \frac{1 + \kappa_i^2}{2}, \quad (9.72)$$

où  $\kappa_i$  est la paramètre d'anisotropie défini sur la liaison système-bain et où  $m_s^z(1, n\tau)$  est l'aimantation transverse du premier spin du système ( $\sigma_1^z$ ), à l'instant  $t = n\tau$ . Ainsi, comme précédemment, puisque les interactions se font entre premiers voisins, le spin du bain n'est influencé que par le premier spin du système. Pour une liaison de type Ising ( $\kappa_i = 1$ ), l'équation précédente devient :

$$\delta m_b^z(n\tau) = -\frac{\tau}{t_1} m_b^z, \quad (9.73)$$

alors que dans le cas d'une liaison de type  $XX$  ( $\kappa_i = 0$ ), on obtient :

$$\delta m_b^z(n\tau) = -\frac{\tau}{t_0} (m_b^z - m_s^z(n\tau)). \quad (9.74)$$

Notons que dans le cas d'une liaison de type Ising, l'état du bain est modifié par l'interaction avec le système puisque  $\delta m_b^z \neq 0$ , mais le bain n'est pas influencé par l'état même du système puisque  $\delta m_b^z$  est indépendant de  $m_s^z$ . On constate, là encore, qu'une liaison de type Ising ne permet pas la communication entre le système et bain.

## 9.6 Conclusion

Nous avons analysé le processus d'interactions répétées appliqué au modèle  $XY$ , lorsque le système est en interaction avec l'environnement par les extrémités de la chaîne. Lorsque les états du système et de l'environnement sont choisis Gaussien, nous avons démontré que la matrice densité réduite du système  $\rho_s$  était pour tout temps caractérisée par un état Gaussien. Ainsi l'étude de  $\rho_s$  se réduit à l'analyse de l'évolution temporelle des corrélateurs à deux points, composant la matrice  $\mathcal{C}_s$ . Nous avons obtenu l'équation discrète associée à l'évolution de la matrice  $\mathcal{C}_s$  et donné l'équation différentielle dans la limite continue  $\tau \rightarrow 0$ , en renormalisant l'interaction avec le bain  $\lambda_i \propto \tau^{-1/2}$ . Dans le cas d'interaction entre premier voisins, nous avons démontré que seul l'état du spin du bain, directement en contact avec le système, était pertinent. Ce qui nous permet alors de réduire la description de chaque copie de l'environnement à un système à deux niveaux. Nous avons obtenu, en temps discret, un expression simple de la variation de l'aimantation du spin du bain, sur l'intervalle de temps  $\tau$ . Ici une première échelle de temps microscopique apparaît, donnée par  $t_\kappa$ .

# Chapitre 10

## Modèle Jouet

Le modèle le plus simple qu'il est possible de construire à partir du processus d'interactions répétées est obtenu lorsque le système est composé d'un seul spin. Rappelons que, dans la limite continue  $\tau \rightarrow 0$ , seul l'état du spin de l'environnement directement en contact avec le système entre dans le processus d'interaction, ainsi on choisit de décrire chaque copie du bain par un spin unique. Les hamiltoniens sont simplement :

$$\begin{aligned} H_s^{XY} &= -\frac{h_s}{2} \sigma_s^z, \\ H_n^{XY} &= H_b^{XY} = -\frac{h_b}{2} \sigma_b^z, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (10.1)$$

et le terme d'interaction est donnée par :

$$H_{sb} = -\frac{\lambda_i}{2} [J_i^x \sigma_b^x \sigma_s^x + J_i^y \sigma_b^y \sigma_s^y]. \quad (10.2)$$

### 10.1 Relaxation de l'aimantation

Commençons par rappeler l'équation (9.52) gouvernant l'évolution du système en contact avec l'environnement, obtenue dans la limite continue

$$\partial_t \mathcal{C}_s(t) = -i[T_s, \mathcal{C}_s(t)] - \frac{\Lambda_i^2}{2} (\{\mathcal{C}_s, \theta^\dagger \theta\} - 2\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta). \quad (10.3)$$

Dans le cas présent, les matrices  $\mathcal{C}_s(t)$  et  $\mathcal{C}_b$  prennent la forme simple :

$$\mathcal{C}_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & -m_s^z(t) \\ m_s^z(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_b = \begin{pmatrix} 0 & -m_b^z \\ m_b^z & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

où  $m_s^z(t)$  (respectivement  $m_b^z$ ) est la moyenne de l'aimantation transverse dans le système (respectivement dans le bain)

$$m_s^z(t) = \text{Tr}\{\rho_s(t) \sigma_s^z\} = \text{Tr}\{-i\Gamma_s^2 \Gamma_s^1 \rho_s(t)\} \quad (10.5)$$

$$m_b^z = \text{Tr}\{\rho_b \sigma_b^z\} = \text{Tr}\{-i\Gamma_b^2 \Gamma_b^1 \rho_b\}. \quad (10.6)$$

On vérifie à l'aide de l'équation (13.46) que  $T_s$  prend la forme :

$$T_s = \begin{pmatrix} 0 & -ih_s \\ ih_s & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

de sorte que le premier terme de l'équation (10.3) s'annule :

$$[T_s, \mathcal{C}_s(t)] = 0. \quad (10.8)$$

Au cours du temps, le système reste donc dans un mélange statistique des états  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ , seuls les poids associés à chaque état évoluent. La structure de  $\theta$  donnée par l'équation (13.47) nous permet d'écrire :

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -iJ_i^y \\ iJ_i^x & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.9)$$

et finalement, l'équation (10.3) conduit à :

$$\partial_t m_s^z(t) = -\frac{1}{t_\kappa} \left( m_s^z(t) - \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} m_b^z \right), \quad (10.10)$$

dont la solution est

$$m_s^z(t) = m_\infty + (m_s^z(0) - m_\infty) e^{-t/t_\kappa}, \quad (10.11)$$

avec

$$m_\infty = \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} m_b^z \quad \text{et} \quad \frac{1}{t_\kappa} = \frac{\Lambda_i^2}{2} \frac{1 + \kappa_i^2}{2}. \quad (10.12)$$

Ainsi dans la limite  $t \rightarrow \infty$  le système atteint un état stationnaire d'aimantation  $m_\infty$ , avec en particulier :

$$m_\infty = m_b^z, \quad \text{pour} \quad \kappa_i = 0, \quad (10.13)$$

$$m_\infty = 0, \quad \text{pour} \quad \kappa_i = 1. \quad (10.14)$$

Comme précédemment, on constate, pour une liaison de type Ising, que le système évolue systématiquement vers le même état stationnaire indépendamment de l'état du bain. Au contraire, dans le cas  $XX$ , le système converge vers l'état imposé par le bain. Notons que l'état stationnaire est indépendant de la constante de couplage  $\Lambda_i$ , celle-ci influe uniquement sur la vitesse des échanges système-bain. En particulier la vitesse des échanges augmente avec  $\Lambda_i$  conduisant à une relaxation plus rapide. Notons, que la relaxation est plus efficace (rapide) dans le cas du modèle  $XX$  que dans le cas du modèle d'Ising. ( $t_0 \geq t_\kappa \geq t_1$ )

## 10.2 Entropie d'intrication

Dans cette partie, nous étudions l'entropie d'intrication du système, préparé dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , avec le reste de l'environnement préparée dans l'état  $|\downarrow\rangle$ . L'aimantation du système est donnée par :

$$m_s^z(t) = m_\infty + (1 - m_\infty) e^{-t/t_\kappa}, \quad (10.15)$$

avec  $m_\infty = -(1 - \kappa_i^2)/(1 + \kappa_i^2)$ . Puisque le système est dans un mélange statistique des deux états  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$ , la matrice densité réduite du système s'écrit :

$$\rho_s(t) = \frac{\mathbb{I}}{2} + \frac{m_s^z(t)}{2} \sigma_s^z. \quad (10.16)$$

L'entropie d'intrication à l'instant  $t$ , donnée par l'entropie de von Neumann :

$$S(t) = -Tr\{\rho_s(t) \ln(\rho_s(t))\}, \quad (10.17)$$

est simplement

$$S(t) = -\left(\frac{1 + m_s^z(t)}{2} \ln\left(\frac{1 + m_s^z(t)}{2}\right) + \frac{1 - m_s^z(t)}{2} \ln\left(\frac{1 - m_s^z(t)}{2}\right)\right). \quad (10.18)$$

Le système étant préparé dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , l'entropie d'intrication à l'instant initial est nulle. Lors du processus d'interactions répétées l'entropie d'intrication passe par un maximum lorsque  $t = t^*$  avec

$$S(t^*) = \ln(2), \quad \text{avec} \quad \frac{t^*}{t_\kappa} = \ln\left(\frac{2}{1 - \kappa_i^2}\right). \quad (10.19)$$

Lorsque  $\kappa \rightarrow 1$ , on remarque que  $t^* \rightarrow \infty$ . Le système converge asymptotiquement vers l'état d'intrication maximale.

Dans la limite  $t \rightarrow \infty$  l'entropie d'intrication converge vers :

$$S_\infty(\kappa_i) = -\left(\frac{\kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} \ln\left(\frac{\kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2}\right) + \frac{1}{1 + \kappa_i^2} \ln\left(\frac{1}{1 + \kappa_i^2}\right)\right), \quad (10.20)$$

avec en particulier  $S_\infty(\kappa_i) \leq \ln(2)$  et

$$S_\infty(0) = 0, \quad S_\infty(1) = \ln(2). \quad (10.21)$$

Les courbes analytiques sont tracées figure (10.1) pour  $\kappa_i = 0$  et  $\kappa_i = 1/2$ . Notons que dans le cas du modèle  $XX$ , le système converge vers l'état  $|\downarrow\rangle$  imposé par le bain, conduisant à un état d'intrication nulle.

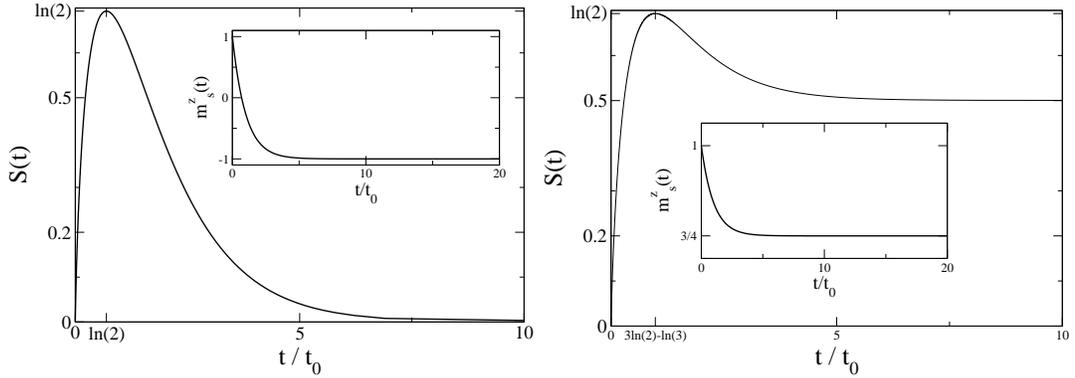


FIG. 10.1 – Les graphiques, de gauche à droite, sont associés aux constantes d'anisotropie  $\kappa_i = 0$  et  $\kappa_i = 1/2$ . Dans le graphique principal : entropie d'intrication  $S(t)$  est tracée en fonction de  $t/t_\kappa$ . Dans l'insert : aimantation transverse du système est représentée en fonction de la variable  $t/t_\kappa$ .

### 10.3 Energie dissipée dans le bain, travail

La variation d'aimantation de la copie  $n$  de l'environnement est donnée, dans la limite des temps d'interaction faibles, par l'équation (9.71)

$$\delta m_b^z(n\tau) = -\frac{\tau}{t_\kappa} \left( m_b^z - \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} m_s^z(n\tau) \right). \quad (10.22)$$

Quand le système a atteint l'état stationnaire, la variation d'aimantation dans le bain est constante,

$$\delta m_b^z = -\frac{\tau}{t_\kappa} \left( \frac{2\kappa_i}{1 + \kappa_i^2} \right)^2 m_b^z, \quad (10.23)$$

que l'on note dans la limite  $\tau \rightarrow 0$

$$dm_b^z = -\frac{dt}{t_\kappa} \left( \frac{2\kappa_i}{1 + \kappa_i^2} \right)^2 m_b^z. \quad (10.24)$$

Alors que l'état du système reste inchangé sous l'interaction avec l'environnement, les copies du bain sont en permanence modifiées par l'interaction avec le système. On définit l'énergie dissipée dans le bain sur l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  comme :

$$\Delta E_b(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dE_b(s), \quad (10.25)$$

où la variation infinitésimale d'énergie est donnée par  $dE_b(s) = -h_b dm_b^z/2$ . Dans l'état stationnaire, l'énergie dissipée n'est fonction que de la différence des temps  $T = t_2 - t_1$

$$\Delta E_b(T) = -\frac{T}{t_\kappa} \left( \frac{2\kappa_i}{1 + \kappa_i^2} \right)^2 E_b \quad (10.26)$$

avec  $E_b = -h_b m_b^z/2$ . Pour fixer les idées, considérons que le bain est préparé dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , ainsi dans l'état stationnaire, l'état du système est un mélange statistique des états de  $\sigma_s^z$  tel que l'aimantation moyenne est donnée par

$$m_\infty = \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} \leq 1. \quad (10.27)$$

Lors de l'interaction avec le bain,  $m_\infty$  étant inférieur à  $m_b^z$ , le système entraîne l'aimantation du bain vers une valeur plus faible de l'aimantation et la variation d'énergie dans le bain est positive ( $\Delta E_b(T) > 0$ ). Puisque que l'état du système est stationnaire, cette variation d'énergie se répercute nécessairement sur la liaison, de sorte que la variation d'énergie de liaison compense exactement la variation d'énergie du bain. On définit, le travail échangé  $W(T)$  sur un intervalle de temps  $T$  comme

$$W(T) = \sum_n \int_T dt \dot{\alpha}_n \partial_{\alpha_n} \langle H \rangle(t), \quad (10.28)$$

avec  $\alpha_n(t) = 1$  pour  $t \in [(n-1)\tau, n\tau]$  et où l'hamiltonien total est

$$H = H_s + H_B + \sum_{n>0} \alpha_n(t) H_{0,n}. \quad (10.29)$$

Puisque  $\partial_{\alpha_n} \langle H \rangle(t) = \langle H_{0,n} \rangle(t)$  et que  $\dot{\alpha}_n(t) = \delta(t - (n-1)\tau) - \delta(t - n\tau)$ , il vient

$$W(T) = \sum_n (\langle H_{0,n}((n-1)\tau) \rangle - \langle H_{0,n}(n\tau) \rangle). \quad (10.30)$$

A l'instant  $t = (n-1)\tau$ , il n'existe pas de corrélation entre le système et la copie  $n$ , ainsi l'énergie de liaison est nulle ( $\langle H_{0,n}((n-1)\tau) \rangle = 0$ ). La conservation de l'énergie sur l'intervalle de temps  $\tau$ , impose l'égalité suivante  $\langle H_{0,n}(n\tau) \rangle + \delta E_b = 0$  de sorte que, dans l'état stationnaire, on a :

$$\begin{aligned} W(T) &= - \sum_n \langle H_{0,n}(n\tau) \rangle = \sum_n \delta E_b \\ W(T) &= \Delta E_b(T). \end{aligned} \quad (10.31)$$

Gardons à l'idée que l'état du bain est l'état  $|\uparrow\rangle$  ainsi  $W(T) = \Delta E_b(T) \geq 0$ . L'augmentation d'énergie dans le bain, lors d'une interaction, permet de diminuer l'énergie de liaison et, en quelque sorte, de la stabiliser. En effet, pour séparer la copie  $n$  du système il faut alors briser la liaison en injectant de l'énergie. Cette quantité d'énergie injectée dans le système correspond au travail reçu par le système. Inversement, si les spins du bain sont préparés dans l'état  $|\downarrow\rangle$ , leur énergie est maximum lorsqu'ils arrivent sur le système et ne peut que décroître, ainsi  $W(T) = \Delta E_b(T) \leq 0$ . Cette variation d'énergie est transférée sur la liaison. La liaison est alors "instable" et se désexcite en fournissant le travail  $W(T)$ .

## 10.4 Equation de Lindblad

Dans le cas d'une liaison de type  $XX$ , et d'un bain préparé dans l'état

$$\rho_b = \frac{1+m_b^z}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1-m_b^z}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (10.32)$$

l'opérateur de Lindblad associé à l'évolution d'une observable  $X$  est donné dans la référence [153] (pour  $\Lambda_i = 4$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) = i[H_s, X] &+ (1+m_b^z)(2\sigma_- X \sigma_+ - \{n_-, X\}) \\ &+ (1-m_b^z)(2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_+, X\}), \end{aligned} \quad (10.33)$$

avec

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.34)$$

L'équation d'évolution de la moyenne d'une observable  $X$  s'obtient en calculant

$$\partial_t \langle X \rangle = Tr\{\rho_s \mathcal{L}(X)\}, \quad (10.35)$$

où  $\rho_s$  est la matrice densité du spin du système à l'instant  $t = 0$

$$\rho_s = \frac{1+m_s^z}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1-m_s^z}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (10.36)$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t \langle X \rangle = -2(m_s^z - m_b^z)Z_X(t), \quad \text{avec} \quad Z_X(t) = \text{Tr}\{\sigma^z X(t)\} \quad (10.37)$$

et

$$\partial_t Z_X(t) = -4Z_X(t). \quad (10.38)$$

La solution est alors

$$\langle X \rangle(t) = \langle X \rangle(0) + \left( (m_s^z - m_b^z) \frac{Z_X(0)}{2} \right) (e^{-4t} - 1), \quad (10.39)$$

et l'on vérifie que le système reste dans un état quadratique, c'est à dire dans un mélange statistique des états de  $\sigma^z$  puisque  $\langle \sigma^x \rangle(t) = \langle \sigma^x \rangle(0) = 0$  et  $\langle \sigma^y \rangle(t) = \langle \sigma^y \rangle(0) = 0$ . Finalement l'aimantation transverse est donnée par

$$\langle \sigma^z \rangle(t) = m_s^z(t) = (m_s^z - m_b^z)e^{-4t} + m_b^z. \quad (10.40)$$

## 10.5 1 spin et 2 bains

Dans le cas présent, le système est en contact de façon successive avec deux bains aux températures  $\beta_1$  et  $\beta_2$  (d'aimantation  $m_{b_1}^z, m_{b_2}^z$ ). Nous analysons la relaxation du système pour les faibles valeurs de  $\tau$ , avant de prendre la limite continue. En utilisant l'équation (10.10), on obtient au temps  $t = 2n\tau$  :

$$m_s^z(2n\tau) = m_s^z((2n-1)\tau) - \frac{\tau}{t_\kappa} \left( m_s^z((2n-1)\tau) - \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} m_{b_2}^z \right). \quad (10.41)$$

L'aimantation transverse du système est donnée, au premier ordre en  $\tau$ , par l'équation suivante :

$$m_s^z(2n\tau) \simeq m_{p,\infty} + (m_s^z(0) - m_{p,\infty})e^{-2n\tau/t_0} + \mathcal{O}(\tau^2), \quad (10.42)$$

avec

$$m_{p,\infty} \simeq \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} \bar{m}^z + \frac{\tau}{t_\kappa} \frac{1 - \kappa_i^2}{1 - \kappa_i^2} \frac{\Delta}{4} \quad (10.43)$$

où  $\bar{m}^z$  est la moyenne des aimantations,

$$\bar{m}^z = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_2}^z}{2} \quad \text{et} \quad \Delta = m_{b_2}^z - m_{b_1}^z. \quad (10.44)$$

Pour les valeurs impaires du temps  $((2n+1)\tau)$  l'aimantation transverse converge vers la valeurs  $m_{i,\infty}$  donnée par :

$$m_{i,\infty} \simeq \frac{1 - \kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2} \bar{m}^z - \frac{\tau}{t_\kappa} \frac{1 - \kappa_i^2}{1 - \kappa_i^2} \frac{\Delta}{4} + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (10.45)$$

Dans l'état stationnaire, l'aimantation du système oscille autour de l'aimantation moyenne  $\bar{m}^z$ . L'amplitude des oscillations étant proportionnelle à  $\tau$ , dans la limite continue, l'aimantation est gouvernée par l'équation :

$$m_s^z(t) = \bar{m}^z + (m_s^z(0) - \bar{m}^z)e^{-t/t_0}. \quad (10.46)$$

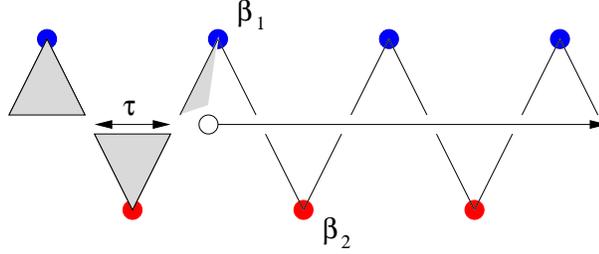


FIG. 10.2 – Schéma d'un processus d'interactions répétées.

Dans le cas  $XX$ , pour un système simultanément en contact avec les deux bains, le Lindbladien est donné par ([153]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) = [H_s, X] &+ 2(1 + \bar{m}^z)(2\sigma_- X \sigma_+ - \{n_-, X\}) \\ &+ (1 - \bar{m}^z)(2\sigma_+ X \sigma_- - \{n_+, X\}), \quad \Lambda_i = 4. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Comme précédemment, on obtient l'évolution de l'aimantation moyenne :

$$m_s^z(t) = \bar{m}^z + (m_s^z(0) - \bar{m}^z)e^{-8t}. \quad (10.48)$$

Un facteur 2 apparaît dans le temps de relaxation ; en effet, dans l'expression (10.46) le temps de relaxation donné pour  $\kappa_i = 0$ ,  $\Lambda_i = 4$  est  $t_\kappa = 1/4$ . On comprend aisément que la relaxation est plus rapide lorsque le système est en contact simultané avec les bains, puisque l'énergie est alors dissipée aux travers de deux liaisons.

## 10.6 Conclusion

Nous avons examiné l'évolution temporelle d'un modèle, composé d'un spin unique, en interaction avec l'extérieur et avons obtenu le comportement temporel de l'aimantation transverse moyenne, nous donnant ainsi accès à la matrice densité du système. On constate que la relaxation de l'aimantation est exponentielle, fixée par l'échelle de temps microscopique  $t_\kappa$ . Une liaison de type Ising ne permet pas la thermalisation vers l'état imposé par le bain, contrairement à une liaison de type  $XX$ , pour laquelle l'état stationnaire est donné par la matrice densité du bain. L'étude de l'entropie d'intrication nous a permis de mettre en évidence l'existence d'un état d'intrication maximum pour les temps  $t^* \propto t_\kappa$ . Finalement les résultats obtenus sont en parfait accord avec les solutions de la référence [153].

# Chapitre 11

## Relaxation de la chaîne $XX$

Dans ce chapitre nous étudions la relaxation de l'aimantation transverse d'une chaîne de spins de taille  $L_s$ , décrite par le modèle  $XX$ . Dans un premier temps nous exposerons les résultats obtenus lorsque le système est connecté à un seul bain, dans la limite des temps  $1 \ll t < L_s$  puis  $t \gg L_s$ . Dans la seconde partie, nous décrirons le comportement d'une chaîne de spins en interaction avec deux bains à des températures différentes, nous focalisant en particulier sur les propriétés de l'état stationnaire. Nous concluons ce chapitre en proposant quelques perspectives.

### 11.1 Dissipation par un bord

Le système étudié est une chaîne de taille  $L_s$  décrite par l'hamiltonien du modèle  $XX$ . Les copies de l'environnement ne sont composées que par un spin venant taper la chaîne sur l'un des bords de sorte que l'hamiltonien total (système plus copie de l'environnement) est décrit par le modèle  $XX$

$$H_{L_s}^{XX} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{L_s-1} [(\sigma_n^x)_s (\sigma_{n+1}^x)_s + (\sigma_n^y)_s (\sigma_{n+1}^y)_s] - \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{L_s} (\sigma_n^z)_s, \quad (11.1)$$

$$H_b^{XX} = -\frac{h}{2} (\sigma_b^z)_b, \quad (11.2)$$

où l'on a choisi la même valeur du champ  $h$  dans le système et le bain et où le terme d'interaction est pris isotrope  $J_i^x = J_i^y = 1/2$

$$H_{sb} = -\frac{\lambda_i}{4} [(\sigma_{L_b}^x)_b (\sigma_1^x)_s + (\sigma_{L_b}^y)_b (\sigma_1^y)_s]. \quad (11.3)$$

On notera par la suite  $H_{s+b}^{XX}$  l'hamiltonien de l'ensemble système plus copie de l'environnement. L'étude numérique réalisée ici, est effectuée pour les valeurs de  $\tau$  finies, nous utilisons les constantes suivantes  $\lambda_i = 1$  et  $\tau = 1/4$  de sorte que la limite continue doit être prise en gardant la valeur de  $\Lambda_i = 1/2$  constante. Notons que le choix  $\lambda_i = 1$  impose la conservation de l'aimantation transverse ( $[H_{s+b}^{XX}, M^z] = 0$ ) lors de chaque interaction entre le système et une copie de l'environnement. Bien que l'aimantation soit conservée sur l'ensemble  $s + b$ , elle ne l'est pas sur la partie système uniquement.

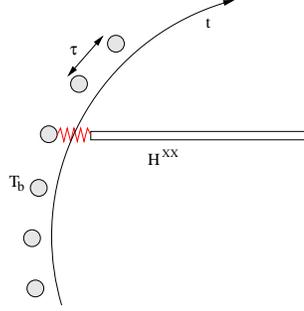


FIG. 11.1 – Schéma du processus d'interactions répétées sur la chaîne du modèle  $XX$ .

On choisit de préparer le système dans un état complètement factorisé  $\rho_s = \rho_j^{\otimes L_s}$  avec

$$\rho_j = \frac{1+m_b^z}{2} |\uparrow_j\rangle\langle\uparrow_j| + \frac{1-m_b^z}{2} |\downarrow_j\rangle\langle\downarrow_j|, \quad j = 1, \dots, L_s. \quad (11.4)$$

Chaque copie de l'environnement est préparée dans un état thermalisé à la température  $1/\beta_b$  de sorte que :

$$\rho_n = \rho_b = \frac{1+m_b^z}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1-m_b^z}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (11.5)$$

avec

$$m_b^z = \tanh\left(\frac{\beta_b h}{2}\right). \quad (11.6)$$

Sur l'intervalle de temps  $[(n-1)\tau, n\tau]$ , la relation  $[H_{s+b}^{XX}, M^z] = 0$  impose la conservation simultanée de l'aimantation transverse et de l'énergie de liaison. Dans l'état initial, la moyenne de l'énergie de liaison est nulle

$$E_{link}(0) = \left\langle -\frac{1}{4} \sum_n (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) \right\rangle = 0. \quad (11.7)$$

Ainsi pour le temps  $t = \tau$  et par itération, il suit  $E_{link}(n\tau) = 0$ . Finalement, l'évolution du modèle  $XX$ , préparé dans un état complètement factorisé, est gouvernée par la redistribution de l'énergie d'interaction magnétique. Il est possible de considérer le système comme un gaz de fermions, initialement indépendants, en contact avec un bain, permettant l'échange des particules sur l'un des bords. La matrice densité du système s'écrit simplement en terme de fermions,  $\rho_s = \rho_j^{\otimes L_s}$  avec

$$\rho_j = |\uparrow_j\rangle n_s \langle\uparrow_j| + |\downarrow_j\rangle (1-n_s) \langle\downarrow_j|, \quad j = 1, \dots, L_s, \quad (11.8)$$

où  $n_s$  est le taux d'occupation dans le système  $n_s = \langle c^\dagger c \rangle = (1+m_s^z)/2$ .

## 11.2 Evolution temporelle dans le régime des temps $t < L_s$

On s'intéresse d'abord à la relaxation de l'aimantation pour les temps  $t$  inférieurs à la taille  $L_s$  du système, de telle sorte que pour les  $L_s$  suffisamment grands, aux effets de taille

et de bord près, le système se comporte essentiellement comme un système semi-infini. Le profil ainsi que le courant d'aimantation transverse sont définis par :

$$\begin{aligned} m^z(n, t) &= \langle \sigma_n^z(t) \rangle \\ j^z(n, t) &= \frac{\langle \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x - \sigma_n^x \sigma_{n+1}^y \rangle(t)}{2}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

que l'on notera  $m^z(x, t)$  et  $j^z(x, t)$ , dans la limite continue. L'aimantation et le courant d'aimantation intégrés sont

$$M_{L_s}^z(t) = \int_{L_s} m^z(x, t) dx, \quad \text{avec} \quad M_{L_s}^z(0) = L_s m_s^z \quad (11.10)$$

$$J_{L_s}^z(t) = \int_{L_s} j^z(x, t) dx, \quad \text{avec} \quad J_{L_s}^z(0) = 0. \quad (11.11)$$

L'aimantation transverse étant une quantité conservée sur l'intervalle de temps  $](n-1)\tau, n\tau]$ , les variations d'aimantation, dans le système  $\delta M_{L_s}^z(n\tau)$  et dans le bain  $\delta m_b^z(n\tau)$  vérifient :

$$\delta m_b^z(n\tau) + \delta M_{L_s}^z(n\tau) = 0, \quad (11.12)$$

de sorte que l'équation (9.71) conduit à :

$$\delta M_{L_s}^z(n\tau) = -\delta m_b^z(n\tau) = -\frac{\tau}{t_0} (m^z(1, n\tau) - m_b^z), \quad (11.13)$$

où  $m^z(1, n\tau)$  est l'aimantation du premier spin en contact avec le bain à l'instant  $t = n\tau$  et où  $t_0$  est le temps de relaxation défini précédemment

$$t_0 = \frac{4}{\Lambda_i^2}. \quad (11.14)$$

Nous appuyant sur les résultats obtenus dans le chapitre 2, nous faisons l'hypothèse

$$m_s^z(x, t) = m_s^z(x/t) \quad 1 \ll t < L_s, \quad (11.15)$$

avec  $m^z(v) = m_s^z$  pour  $v > 1$ . Ainsi, dans la région ( $x > t$ ), le système est supposé localement à l'équilibre, de sorte que l'aimantation est donnée par l'aimantation initiale ( $m^z(x/t > 1) = m_s^z$ ). La frontière entre les régions causale et acausale est une fois de plus fixée par  $x/t = 1$  et associée à la vitesse maximale des excitations. Ainsi, dans la limite des temps longs, la variation d'aimantation est une constante

$$\delta M_{L_s}^z(n\tau) = -\frac{\tau}{t_0} (m^z(0) - m_b^z). \quad (11.16)$$

L'aimantation atteinte par le premier spin du système ( $m^z(0)$ ) dans la limite des temps longs est nécessairement fonction des aimantations initiales  $m_s^z$  et  $m_b^z$ . En utilisant le résultat obtenu dans le chapitre 2, on suppose la valeur de l'aimantation sur l'interface  $m^z(0)$  comme étant la moyenne pondérée des aimantations  $m_s^z$  et  $m_b^z$  ;

$$m^z(0) = f_0 m_b^z + (1 - f_0) m_s^z, \quad (11.17)$$

où  $f_0$  est une constante. On obtient dans la limite continue :

$$\begin{aligned}\partial_t M_{L_s}^z(t) &= -\frac{1-f_0}{t_0} (m_s^z - m_b^z) \\ M_{L_s}^z(t) &= M_{L_s}^z(0) - t \frac{1-f_0}{t_0} (m_s^z - m_b^z) \quad 1 \ll t < L_s.\end{aligned}\quad (11.18)$$

Notons, lorsque le bain et le système sont préparés dans le même état, de sorte que  $m_b^z = m_s^z$ , que l'aimantation transverse totale reste constante  $M_{L_s}^z(t) = M_{L_s}^z(0)$ . On vérifie par diagonalisation exacte (fig. 11.2) que le comportement de  $M_{L_s}^z(t)$  est effectivement donnée par l'équation (11.18), validant ainsi l'hypothèse (11.17). La valeur de  $f_0$  extraite est  $f_0 \simeq 0.097$ .

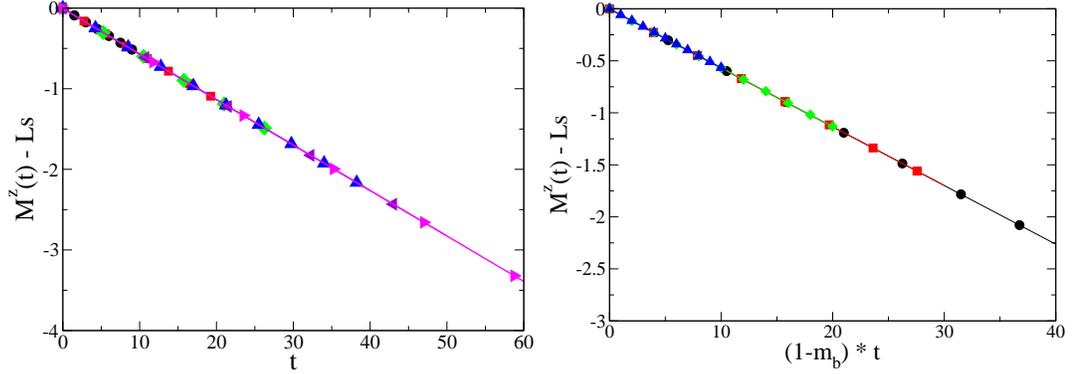


FIG. 11.2 – Résultats numériques, obtenus par diagonalisation exacte, représentant la relaxation de l'aimantation totale d'une chaîne  $XX$ , initialement dans l'état "up", avec  $h = 1$ ,  $\tau = 1/4$ . Sur le graphique de gauche, les calculs ont été réalisés pour  $\beta_b = \infty$  ( $m_b^z = 0$ ) et pour différentes tailles  $L_s = 10, 20, 30, 40, 50$  et  $60$ . Sur le graphique de droite, les calculs ont été réalisés pour  $L_s = 40$  et différentes valeurs de la température dans le bain, telle que  $m_b^z = 0, 0.25, 0.5$  et  $0.75$ .

Le profil d'aimantation transverse, obtenu numériquement, est tracé sur la figure (11.3), en fonction de la variable  $x$ , pour différentes valeurs du temps. Chaque spin du système étant préparé dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , le profil d'aimantation initiale est  $m^z(x, 0) = 1$ , dans la région acausale, on vérifie  $m^z(x > t, t) = 1$ . On constate que l'aimantation du spin directement en contact avec l'environnement atteint rapidement un état d'aimantation constant avec  $m^z(0, t) \simeq 0.9$ . On définit la fonction  $f(x/t)$  en écrivant le profil d'aimantation sous la forme :

$$m^z(x/t) = m_s^z - (m_s^z - m_b^z) f(x/t), \quad (11.19)$$

avec  $f(v) \sim 0$  dans la région acausale ( $v > 1$ ). Le calcul numérique de l'aimantation transverse nous permet de tracer le rapport

$$\frac{\Delta_s(t)}{\Delta_{s,b}} = \frac{m^z(x/t) - m_s^z}{m_s^z - m_b^z} = f(x/t) \quad (11.20)$$

et de vérifier figure (??) que le profil d'aimantation est effectivement donnée par l'équation (11.19). De plus, on vérifie sur le graphique (11.4) que l'enveloppe de la fonction  $f$  dépend de  $x/t$ , validant ainsi l'hypothèse (11.17). Finalement, l'aimantation intégrée est :

$$M_{L_s}^z(t) = L_s m_s^z - t(m_s^z - m_b^z) \int_0^1 dv f(v), \quad (11.21)$$

avec

$$\int_0^1 dv f(v) = \frac{1 - f(0)}{t_0}. \quad (11.22)$$

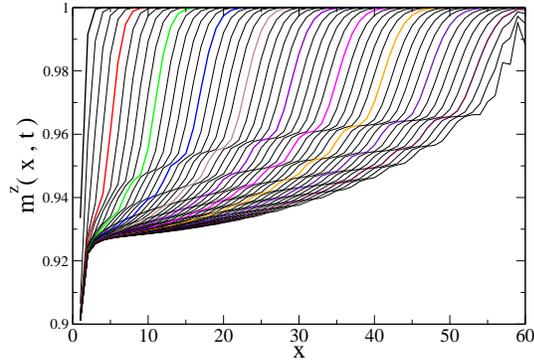


FIG. 11.3 – Profil de l'aimantation transverse  $m^z(x, t)$  tracé en fonction de  $x$ , pour différentes valeurs du temps, de  $t = 0$  à  $t = L_s = 60$ . Ces résultats sont obtenus, pour  $h = 1$ ,  $\lambda_i = 1$ ,  $\tau = 1/4$ ,  $m_s^z = 1$  et  $\beta_b = \infty$  ( $m_b^z = 0$ ).

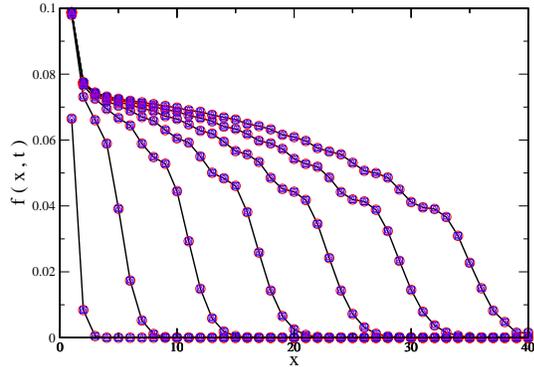


FIG. 11.4 – Fonction d'échelle  $f(x, t)$  pour différents temps  $t = 5\tau, 25\tau, 50\tau, 75\tau, 100\tau, 125\tau$  et  $150\tau$ . Ces résultats sont obtenus sur une chaîne de taille  $L_s = 40$ , avec  $h = 1$ ,  $\lambda_i = 1$ ,  $\tau = 1/4$ ,  $m_s^z = 1$  et pour différentes valeurs de l'aimantation du bain  $m_b^z = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ .

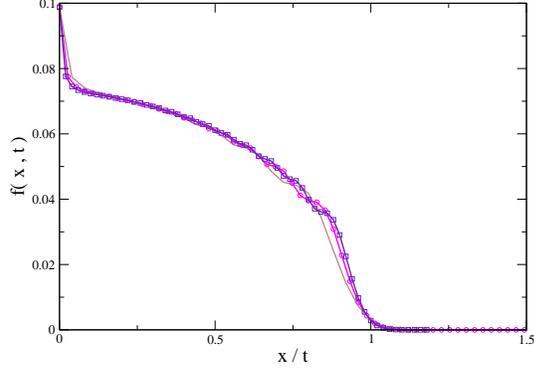


FIG. 11.5 – Fonction d'échelle  $f(x/t)$  pour différents temps  $t = 100\tau$ ,  $150\tau$  et  $200\tau$ . Ces résultats sont obtenus sur une chaîne de taille  $L_s = 60$  avec  $h = 1$ ,  $\lambda_i = 1$ ,  $\tau = 1/4$ ,  $m_s^z = 1$  et  $m_b^z = 0$ .

Puisque sur chaque intervalle de temps  $\tau$  l'aimantation transverse est conservée, la relation de continuité nous permet d'écrire le courant d'aimantation sous la forme :

$$j^z(x, t) = -(m_s^z - m_b^z)g(x/t), \quad (11.23)$$

avec  $g(\nu) \simeq 0$  pour  $\nu \geq 1$  et  $\nu f'(\nu) = g'(\nu)$ . Dans la région acausale, le système est localement à l'équilibre et le courant d'aimantation est nul. Finalement, le courant intégré est donnée par la relation suivante :

$$J_{L_s}^z(t) = -t(m_s^z - m_b^z) \int_0^1 dv g(v). \quad (11.24)$$

La valeur absolue du courant est tracée sur le graphique (11.6) en fonction de la variable d'échelle  $x/t$ . La relation de continuité nous permet de lier la variation d'aimantation totale au courant d'aimantation :

$$\partial_t M_{L_s}^z(t) = j^z(0), \quad 1 \ll t < L_s, \quad (11.25)$$

et d'obtenir l'égalité  $f(0) + t_0 g(0) = 1$  ainsi que la relation suivante entre l'aimantation et le courant d'aimantation au niveau de l'interface :

$$m^z(0) + t_0 j^z(0) = m_b^z. \quad (11.26)$$

Lorsque  $m_s^z = 1$  et  $m_b^z = 0$  l'équation (11.23) devient  $j^z(x/t) = -g(x/t)$ . On obtient  $g(0) \simeq 0.056$ .

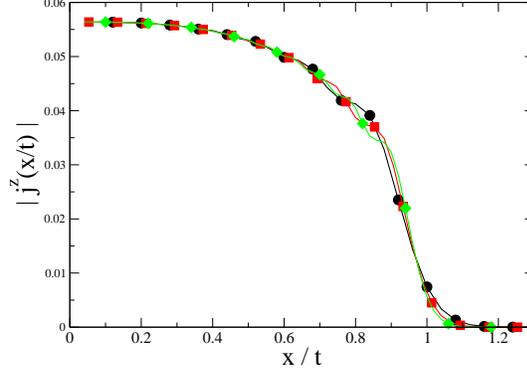


FIG. 11.6 – Profil de la densité de courant  $j(x/t)$ , en fonction de la variable  $x/t$  pour différents temps de  $t = 0$  à  $t = L_s = 60$ . Ces résultats sont obtenus pour  $h = 1$ ,  $\lambda_i = 1$ ,  $\tau = 1/4$ ,  $m_s^z = 1$  et  $m_b^z = 0$ .

On note, lorsque le bain et le système sont préparés dans le même état ( $m_b^z = m_s^z$ ), que le système reste alors inchangé lors du processus d'interactions répétées. Ainsi l'état stationnaire du système est donné par  $\rho_s(st) = \rho_b^{\otimes L_s}$ , où  $\rho_b$  est la matrice densité des copies de l'environnement. Dans l'état stationnaire le profil d'aimantation est plat

$$m_{st}^z(x) = m_b^z. \quad (11.27)$$

## 11.3 Convergence vers l'état stationnaire

### 11.3.1 Etat stationnaire

L'existence d'un état stationnaire, n'est pas le sujet de discussion ici, puisque nous venons de vérifier que l'état formé par le produit tensoriel de la matrice densité  $\rho_b$  sur chaque spin du système, est stationnaire. On note  $S_b$  la matrice formée par les corrélateurs de Clifford dans l'état stationnaire de sorte que  $\partial_t S_b = 0$ , c'est à dire :

$$i[T_s, S_b] = -\frac{\Lambda_i^2}{2} (\{S_b, \theta^\dagger \theta\} - 2\theta^\dagger C_b \theta). \quad (11.28)$$

On montre simplement que l'état pour lequel  $\rho_s = \rho_b^{\otimes L_s}$  est tel que la matrice  $S_b$  est donnée par :

$$S_b = m_b^z \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.29)$$

La structure particulièrement simple de  $S_b$  est liée au fait que les spins sont sans interaction. On montre alors que la matrice  $S_b$  vérifie simultanément les relations suivantes :

$$[T_s, S_b] = 0 \quad (11.30)$$

$$\{S_b, \theta^\dagger \theta\} = 2\theta^\dagger C_b \theta. \quad (11.31)$$

La première égalité nous indique que le système est dans un mélange statistique des états propres de l'hamiltonien du système, alors que la seconde relation conduit, en utilisant la forme explicite de  $\theta^\dagger \mathcal{C}_b \theta$  (9.60), a

$$m_\infty^z(1) = m_b^z, \quad (11.32)$$

où  $m_\infty^z(1)$  est l'aimantation du premier spin de la chaîne dans l'état stationnaire. Notons que l'état stationnaire est indépendant de la constante  $\Lambda_i$ .

L'existence et l'unicité de l'état stationnaire d'une chaîne décrite par le modèle  $XX$ , en contact avec deux bains (par les deux extrémités) à la température  $1/\beta$ , a été prouvé dans la référence [153]. L'état stationnaire donné est caractérisé par la matrice densité

$$\rho_s(st) = \rho_b^{\otimes L_s}. \quad (11.33)$$

Remarquons que le processus d'interactions répétées ne permet pas la thermalisation de la chaîne  $XX$ . En effet l'état stationnaire n'est pas l'état de Gibbs du système à la température du bain

$$\rho_s(st) \neq \frac{1}{Z} e^{-\beta_b H_{L_s}^{XX}}. \quad (11.34)$$

### 11.3.2 Convergence

Nous étudions la relaxation du système dans la limite des temps longs et commençons par porter notre attention sur le comportement de l'aimantation transverse. Rappelons que le système est préparé dans un état, homogène, complètement factorisé et d'aimantation  $m_s^z$ . L'interaction avec le bain se fait sur un des bords du système et avec un spin d'aimantation  $m_b^z$ . Nous avons tracé, sur la figure (11.7), le profil d'aimantation obtenu numériquement par diagonalisation exacte, en fonction de la variable  $x$ , pour différentes valeurs du temps  $t \geq 3200\tau$  dans le graphique principale et  $t \geq 13600\tau$  dans l'insert. Le calcul numérique a été effectué pour un système de taille  $L_s = 10$ , l'état du système à l'instant  $t = 0$  est formé par le produit tensoriel des états  $|\uparrow\rangle$  et chaque copie de l'environnement est préparée à la température  $1/\beta_b$  de sorte que son aimantation est  $m_b^z = \tanh(\beta_b h_b/2) = 1/2$ . On constate que le profil d'aimantation converge vers un profil d'aimantation plat avec dans la limite asymptotique  $m_s^z(x, t \rightarrow \infty) = m_b^z = 1/2$ . Notons que la relaxation est plus rapide sur les bords qu'au milieu du système, là où le profil d'aimantation est maximum  $m_{max}^z$ . Pour les temps  $t > 3200\tau$ , l'écart à l'aimantation stationnaire  $\delta = m_{max}^z - m_b^z$  est de l'ordre de  $\delta \simeq 1/10$  et  $\delta \simeq 1/100$  pour les temps  $t \geq 13600\tau$  (voir dans l'insert 11.7). Finalement, nous avons vérifié ces résultats sur des systèmes de plus grandes tailles mais aussi en considérant d'autres conditions initiales et valeurs de l'aimantation  $m_b^z$ , nous permettant de conclure sur la relaxation systématique vers le même état stationnaire.

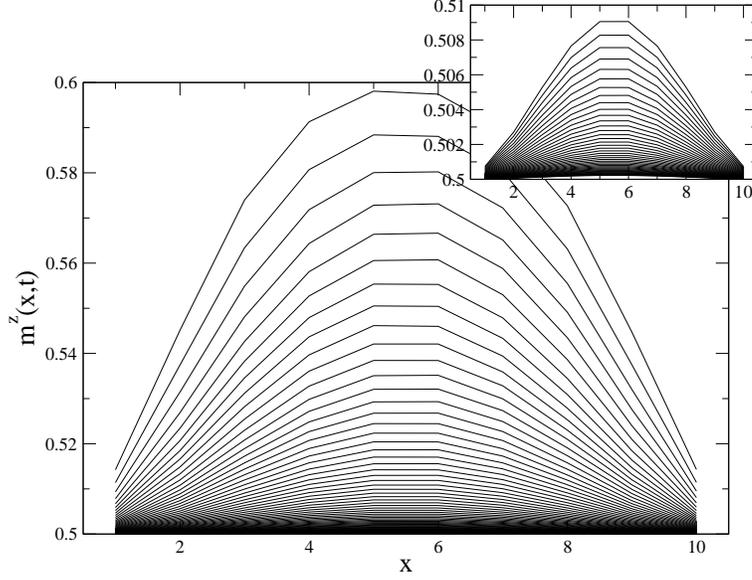


FIG. 11.7 – Profil d’aimantation du modèle  $XX$ , préparé dans l’état  $|\uparrow\rangle$ , en contact avec un bain dont l’aimantation transverse est  $m^z = 1/2$ . Les calculs numériques sont réalisés sur un système de taille  $L_s = 10$ , avec  $\tau = 1/4$ ,  $\lambda_i = 1$ . Les temps  $t \geq 800 = 3200\tau$  sont représentés dans le graphique principal et  $t \geq 3400 = 13600\tau$  dans l’insert.

Afin d’analyser l’approche de l’état stationnaire nous étudions ici le comportement de l’aimantation transverse totale, définie comme

$$M_{L_s}^z(t) = \int_{L_s} dx m_s^z(x, t). \quad (11.35)$$

Comme dans le cas du modèle jouet,  $M_{L_s}^z(t)$  présente une décroissance exponentielle dans la limite des temps longs. On vérifie alors la forme suivante :

$$M_{L_s}^z(t) = L_s m_b^z + L_s (m_s^z - m_b^z) \phi_1(t) \quad (11.36)$$

avec

$$\phi_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t) \propto e^{-t/T}. \quad (11.37)$$

Ainsi, dans la limite des temps longs,  $M_{L_s}^z(t)$  vérifie l’équation différentielle :

$$\partial_t M_{L_s}^z(t) = \frac{1}{T} (L_s m_s^z - M_{L_s}^z(t)). \quad (11.38)$$

Nous avons tracé, sur le graphique (11.8), la fonction  $\phi_1(t)$ , obtenue numériquement en fonction du temps pour différentes valeurs de l’aimantation initiale  $m_s^z$  et  $m_b^z$ , les courbes numériques se superposent parfaitement validant donc la forme (11.36).

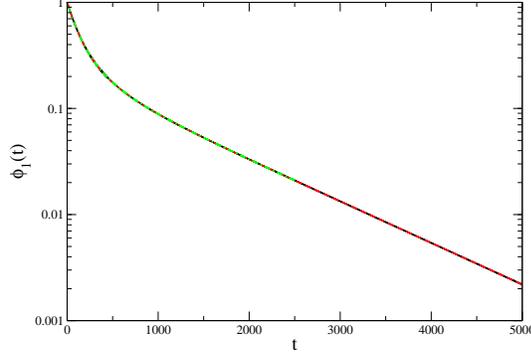


FIG. 11.8 – Fonction  $\phi_1(t)$  en ordonnée logarithmique. Les résultats numériques sont obtenus sur un système de taille  $L_s = 10$  avec  $\tau = 1/4$  et  $\lambda_i = 1$ . Trois situations sont représentées ;  $(m_s^z = 1, m_b^z = 0)$ ,  $(m_s^z = 1, m_b^z = 0.5)$  et  $(m_s^z = 0.75, m_b^z = 0.25)$ .

Nous avons étudié la dépendance du temps de relaxation  $T$  en fonction du temps d'interaction  $\tau$  en maintenant la valeur du couplage  $\lambda_i$  constante. Pour les temps d'interactions  $\tau < 1$  (figure 11.9), on vérifie alors :

$$T \propto \frac{1}{\tau}. \quad (11.39)$$

Ce résultat est à mettre en correspondance avec le résultat du modèle jouet, pour lequel le temps de relaxation est donné par :

$$t_\kappa = \frac{1}{\tau} \frac{2}{\lambda_i^2} \frac{2}{1 + \kappa_i^2}. \quad (11.40)$$

On écrira le temps de relaxation  $T$  sous la forme  $T \propto 1/\Lambda_i^2$ . L'analyse de  $T$  en fonction de la taille  $L_s$  du système est plus délicate et demande de pousser les calculs numériques sur des systèmes de grandes tailles. Il a été possible d'étudier la relaxation de système jusqu'à des tailles  $L_s = 40$ , les résultats indiquent un comportement algébrique du temps de relaxation  $T$  avec la taille du système. Nous avons représenté, sur la figure (11.9) le temps de relaxation  $T$  pour différentes valeurs de  $\tau$ , pour des tailles  $L_s \leq 40$ , l'exposant obtenu est de l'ordre de 2.73

$$T \propto \frac{L_s^{2.73}}{\Lambda_i^2}. \quad (11.41)$$

Des études sont actuellement en cours sur des systèmes de taille plus importante et devraient permettre d'obtenir avec précision l'exposant associé au temps de relaxation [155].

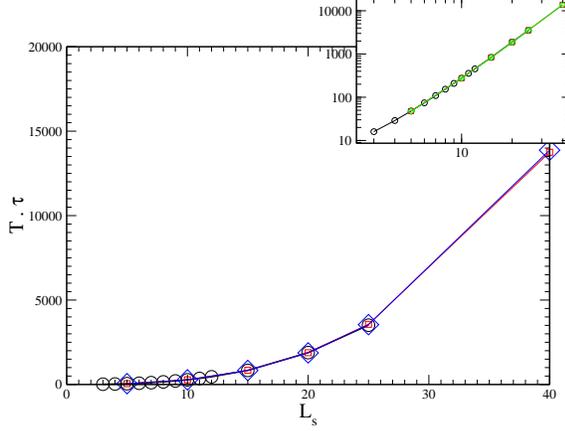


FIG. 11.9 – Produit  $T\tau$  en fonction de la taille  $L_s$  du système, pour  $\tau = 0.25, 0.5$  et  $0.75$ . Dans le l'insert, les mêmes courbes sont tracées en coordonnées logarithmique.

S'il est clair que l'état initial et final du système est complètement factorisé, ne présentant donc pas de corrélations, qu'en est-il en dehors de l'état d'équilibre? Une ébauche de réponse est donnée par l'analyse des corrélations à trois sites (mais quadratiques en terme d'opérateurs de Clifford) de la forme  $\langle \sigma_{n-1}^x \sigma_n^z \sigma_{n+1}^x \rangle$  et  $\langle \sigma_{n-1}^y \sigma_n^z \sigma_{n+1}^y \rangle$ . On définit les fonctions de corrélation  $C^{xxx}(t)$  et  $C^{yyz}(t)$  données par :

$$\begin{aligned} C^{xxx}(t) &= \sum_n \langle \sigma_{n-1}^x (-\sigma_n^z) \sigma_{n+1}^x \rangle(t) = \sum_n \langle -i\Gamma_{n-1}^2 \Gamma_{n+1}^1 \rangle(t) \\ C^{yyz}(t) &= \sum_n \langle \sigma_{n-1}^y (-\sigma_n^z) \sigma_{n+1}^y \rangle(t) = \sum_n \langle -i\Gamma_{n+1}^2 \Gamma_{n-1}^1 \rangle(t). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Ces deux quantités sont égales, dans le cas du modèle  $XX$ , pour lequel les composantes  $\sigma^x$  et  $\sigma^y$  jouent le même rôle. La fonction de corrélations  $C^{xxx}(t)$  est tracée sur la figure (11.10) lorsque le système, préparé dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , est en interaction avec un bain dont l'aimantation est  $m_b^z = 1/2$ . Les courbes sont associées aux tailles  $L_s = 5, L_s = 10, L_s = 15$  et  $L_s = 20$ . Dans un régime de temps intermédiaire, les fonctions de corrélations croissent et présentent un maximum  $C_m^{xxx}$  (pour les temps  $t_m$ ). Dans la limite des temps longs les fonctions de corrélation décroissent de façon exponentielle, avec

$$C^{xxx}(t) \sim e^{-t/T} \quad T \propto L_s^{2.73}. \quad (11.43)$$

On a pu vérifier que le maximum de la fonction de corrélation ( $C_m^{xxx}$ ) ainsi que la valeur du temps associée  $t_m$  dépendent linéairement de la taille du système  $L_s$ . Des travaux en cours sur l'entropie d'intrication devraient pouvoir vérifier que le comportement des fonctions de corrélation en  $t = t_m$  est une signature de l'état d'intrication maximale [155]. Ces résultats devraient être en accord, dans la limite  $L_s = 1$ , avec l'étude réalisée sur le modèle jouet.

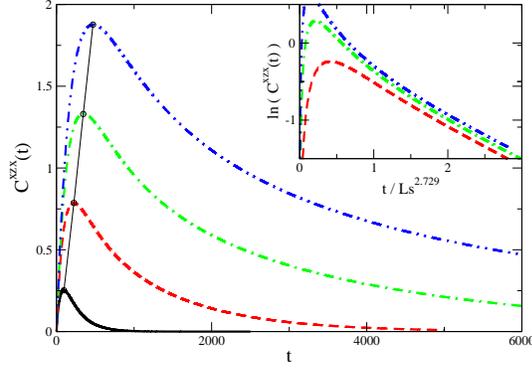


FIG. 11.10 – Fonction de corrélation en fonction du temps. Dans le cas de la chaîne  $XX$  avec  $h = 1$ ,  $\lambda_i = 1$  et  $\tau = 1/4$ . Le système est préparé dans un état complètement factorisé d'aimantation  $+1$  et l'aimantation du spin du bain est choisie  $m_b^z = 0.5$ . De bas en haut, pour les tailles  $L_s = 5, 10, 15$  et  $20$ .

## 11.4 Loi de Fourier

Lorsque expérimentalement, un système de taille  $L_s$  est mis en interaction, avec deux bains aux températures  $T_1$  et  $T_2$ , l'état stationnaire généralement attendu présente un gradient de température. La loi de Fourier stipule qu'un courant d'énergie  $J_Q$ , proportionnel au gradient de température  $J_Q = -\kappa \nabla T$ , traverse le système. La première étude aussi bien expérimentale que théorique du transport de chaleur dans les solides a été réalisée par J. Fourier autour de 1807 [156]. Debye [157] chercha à démontrer la loi de Fourier, à partir d'un modèle microscopique en utilisant la théorie cinétique des gaz comme description du comportement des phonons à l'intérieur d'un solide. Il obtint la relation suivante liant le courant d'énergie et le gradient de température

$$J_Q \propto c \bar{v} \bar{l} \nabla T, \quad (11.44)$$

où  $c$  est la capacité calorifique par unité de volume,  $\bar{v}$  la vitesse moyenne et  $\bar{l}$  le libre parcours moyen des phonons. On définit la conductivité thermique  $\kappa$  par  $\kappa \propto c \bar{v} \bar{l}$ . La loi de Fourier est alors vérifiée tant que le libre parcours moyen  $\bar{l}$  est fini. Ce qui, finalement n'est vrai que lorsque le cristal considéré présente des impuretés, où tant qu'il existe des interactions entre phonons. Clairement, sur un cristal parfait harmonique, les modes de vibrations étant indépendants, la constante  $\kappa$  diverge avec le libre parcours moyen associé aux phonons. L'introduction de couplage anharmonique entre atomes soulevant de sérieuses complications, Debye propose de considérer le mouvement brownien associé à chaque atome comme étant à l'origine d'irrégularité dans le réseau. Il fut alors possible de calculer le libre parcours moyen des phonons et d'obtenir une approximation de la conductivité thermique.

Peierls [160, 161] proposa une équation de Boltzmann modifiée et substitua aux particules classiques des quasi particules dont l'énergie et le vecteur d'onde sont quantifiés. Il apparaît alors que si l'énergie est une quantité conservée lors d'un choc entre phonons, le vecteur d'onde  $k$  ne l'est pas nécessairement. Ainsi le choc de deux phonons ( d'énergie  $\hbar\omega_1$ ,  $\hbar\omega_2$  et de vecteurs d'ondes  $k_1$  et  $k_2$  ) est à l'origine d'un phonon d'énergie  $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$  et d'impulsion

$p = \hbar(k_1 + k_2 + g)$ , où  $g$  est un vecteur du réseau réciproque. Il a été montré que les collisions pour lesquelles  $g = 0$ , appelées normales (N-processes), conduisent à une conductivité infinie du gaz de phonons. Les collisions pour lesquelles  $g \neq 0$  (Umklapprozess) sont susceptibles de conduire à une conductivité thermique finie [162, 163].

Depuis, de nombreuses études ont été menées et il semble largement accepté qu'une conduction de la chaleur dite "normale", requière une dynamique microscopique "complexe" (non-intégrable) [158, 159], alors qu'un transport balistique émerge systématiquement de l'étude de systèmes intégrables. Jusqu'à ce jour, aucune démonstration rigoureuse de la loi de Fourier, dans les domaines de la physique classique où quantique, n'a été obtenue, malgré le vif intérêt que suscite ce problème. Ainsi, les propriétés de transport de chaleur ont été largement étudiées, dans le cas de gaz unidimensionnel [175, 176], dans les systèmes harmoniques sur réseau [164, 164], en testant l'influence de la non linéarité [166] et du désordre [167, 168]. Dans le cadre de la physique quantique les systèmes de spins unidimensionnels, ont été le support de nombreuses études [169, 170, 171, 172, 173, 174]. Le lecteur pourra aussi se tourner vers les articles de revue suivants [177, 178].

Cette section a pour but de donner quelques perspectives, dans le cadre de l'étude du transport de chaleur, appliqué au cas des chaînes de spins dont l'interaction avec le bain est décrite par le processus d'interactions répétées. Dans un premier temps nous vérifierons, pour une chaîne  $XX$  homogène, la conjecture proposée par A. Dhahri [153], impliquant une conductivité thermique infinie. Dans une seconde partie, nous définirons un modèle décrivant une chaîne de spins presque libres, dont l'étude préliminaire, laisse supposer l'émergence de la loi de Fourier.

### 11.4.1 Chaîne $XX$ homogène

Lors de l'étude du modèle  $XX$  en contact avec deux bains, par le processus d'interactions répétées, A. Dhahri a récemment prouvé la convergence systématique du système vers l'état stationnaire. L'hamiltonien utilisé par l'auteur est le suivant :

$$\begin{aligned} H &= H_{b_1} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes H_{b_2} + \mathbb{I} \otimes H_s \otimes \mathbb{I} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\tau}} [\sigma_{b_1}^x \otimes (\sigma_1^x)_s + \sigma_{b_1}^y \otimes (\sigma_1^y)_s] \otimes \mathbb{I} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \mathbb{I} \otimes [(\sigma_{L_s}^x)_s \otimes \sigma_{b_2}^x + (\sigma_1^y)_s \otimes \sigma_{b_2}^y], \end{aligned} \quad (11.45)$$

avec  $H_{b_1} = \sigma_{b_1}^z$ ,  $H_{b_2} = \sigma_{b_2}^z$  et

$$H_s = \sum_{n=1}^{L_s-1} [(\sigma_n^x)_s (\sigma_{n+1}^x)_s + (\sigma_n^y)_s (\sigma_{n+1}^y)_s] + \sum_{n=1}^{L_s} (\sigma_n^z)_s. \quad (11.46)$$

L'étude analytique, de la matrice densité réduite associée à chaque spin du système dans l'état stationnaire, pour des chaînes de taille  $L_s = 2, 3$  et  $4$ , a conduit l'auteur à la conjecture suivante :

$$\rho^{(1)} = \frac{\rho_{b_1} + \rho_{b_2}}{2} - \frac{\rho_{b_2} - \rho_{b_1}}{4} \quad (11.47)$$

$$\rho^{(2)} = \dots = \rho^{(L_s-1)} = \frac{\rho_{b_1} + \rho_{b_2}}{2} \quad (11.48)$$

$$\rho^{(L_s)} = \frac{\rho_{b_1} + \rho_{b_2}}{2} + \frac{\rho_{b_2} - \rho_{b_1}}{4}, \quad (11.49)$$

avec

$$\rho^{(n)} = Tr_{L_s \setminus n} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_s(t) \right\}. \quad (11.50)$$

Finalement le profil d'aimantation est donné par

$$m_s^z(1) = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_1}^z}{2} + \frac{m_{b_1}^z - m_{b_1}^z}{4} \quad (11.51)$$

$$m_s^z(2) = \dots = m_s^z(L_s - 1) = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_2}^z}{2} \quad (11.52)$$

$$m_s^z(L_s) = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_1}^z}{2} - \frac{m_{b_1}^z - m_{b_1}^z}{4} \quad (11.53)$$

où  $m_{b_1}^z$  (respectivement  $m_{b_2}^z$ ) est la valeur de l'aimantation dans le bain 1 (respectivement 2). Nous avons représenté, sur le graphique (11.11), les résultats numériques du profil d'aimantation transverse de la chaîne  $XX$ , en contact avec deux bains, dans la limite des temps longs. Les valeurs d'aimantations dans le bain à gauche et à droite sont données par  $m_{b_1}^z = 1/4$  et  $m_{b_2}^z = 3/4$ . Une étude du profil d'aimantation en fonction du paramètre  $\lambda_s$ , permettant la redéfinition de l'hamiltonien ( $H_s^{XX} \rightarrow \lambda_s H_s^{XX}$ ), a été réalisée et permet de valider la conjecture [153]. Pour  $\Lambda_i = 4$ , les calculs numériques conduisent à la forme suivante du profil d'aimantation :

$$m_s^z(n, L_s) = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_2}^z}{2} + \gamma \frac{m_{b_1}^z - m_{b_2}^z}{2} (\delta_{n,1} - \delta_{n,L_s}), \quad (11.54)$$

où  $\gamma$  est fonction de  $\lambda_s$ . Pour la valeur de  $\lambda_s = 4$  l'hamiltonien  $H_s^{XX} \rightarrow 4H_s^{XX}$  correspond à l'hamiltonien (11.46) et on vérifie figure (11.12)  $\gamma = 1/2$ . On obtient ainsi les équations (11.51, 11.52 et 11.53). Dans la limite  $\lambda_s \rightarrow 0$  on a  $\gamma = 1$  et

$$m_s^z(1) = m_{b_1}^z \quad (11.55)$$

$$m_s^z(2) = \dots = m_s^z(L_s - 1) = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_2}^z}{2} \quad (11.56)$$

$$m_s^z(L_s) = m_{b_2}^z, \quad (11.57)$$

conduisant ainsi à

$$\rho^{(1)} = \rho_{b_1} \quad (11.58)$$

$$\rho^{(2)} = \dots = \rho^{(L_s-1)} = \frac{\rho_{b_1} + \rho_{b_2}}{2} \quad (11.59)$$

$$\rho^{(L_s)} = \rho_{b_2}. \quad (11.60)$$

Dans le cas  $\lambda_s \rightarrow 0$ , l'interaction avec le bain domine devant les interactions internes de la chaîne. Les spins sont libres pour  $\lambda_s = 0$  sauf aux bords où l'aimantation stationnaire est donnée par les résultats du modèle jouet.

Le système, bien que présentant un profil d'aimantation (d'énergie) plat, est évidemment traversé par un courant d'énergie. Dans l'état stationnaire l'équation de continuité conduit à  $\partial_x j_{st}^z(x) = 0$

$$j_{st}^z(x) = j_{st}^z(0). \quad (11.61)$$

La loi de Fourier n'est donc pas vérifiée ( $j_{st}^z \neq \partial_x m_{st}^z(x)$ ). La conductivité thermique définit comme

$$\kappa = \frac{j_{st}^z}{\partial_x m_{st}^z} \quad (11.62)$$

diverge lorsque le gradient du profil d'aimantation tend vers zéro.

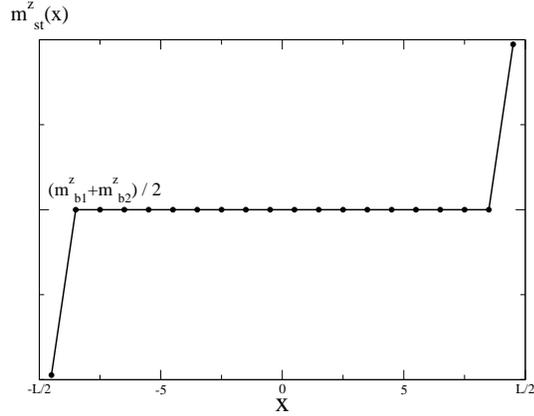


FIG. 11.11 – Profil de l'aimantation dans l'état stationnaire pour une chaîne de taille  $L_s = 20$ , avec  $\tau = 1/4$ ,  $\lambda_i = 1$ ,  $m_{b1}^z = 0.25$  et  $m_{b2}^z = 0.75$ .

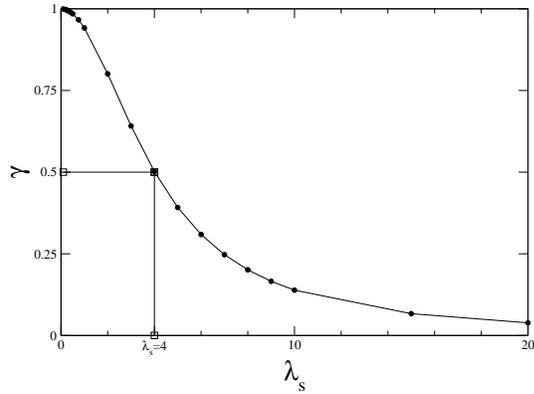


FIG. 11.12 – Coefficient  $\gamma$  en fonction du paramètre  $\lambda_s$ .

### 11.4.2 Gaz de spins presque libres

Dans cette section, nous définissons un modèle décrivant un système de spins presque libres et choisissons de modéliser l'interaction avec les bains par le processus d'interactions répétées. Du désordre est introduit de façon dynamique, et permet de faire émerger un

profil d'aimantation linéaire. Nous concluons cette partie en donnant quelques résultats préliminaires et en exposant les perspectives de recherches dans cette direction.

#### 11.4.2.1 Gaz de spins isolé

Commençons par considérer une chaîne de  $L_s$  spins sans interaction. Celle-ci est dite presque libre lorsque de temps en temps une interaction (entre premiers voisins) est activée sur un intervalle de temps  $\tau$ . L'hamiltonien du système est simplement donnée par la somme des hamiltoniens libres de chaque spin

$$H_s = -\frac{\hbar_s}{2} \sum_{j=1}^{L_s} (\sigma_j^z)_s. \quad (11.63)$$

Lorsqu'à l'instant  $t$ , une liaison  $n$  est choisie au hasard, l'hamiltonien du système devient

$$H_n = H_s + H_n^I \quad t \in ]t, t + \tau], \quad (11.64)$$

avec

$$H_n^I = -\frac{\lambda_s}{2} (J_s^x (\sigma_n^x)_s (\sigma_{n+1}^x)_s + J_s^x (\sigma_n^y)_s (\sigma_{n+1}^y)_s), \quad (11.65)$$

où  $\lambda_s$  est une constante. Pour finir, on définit  $P_s(n)$  la probabilité d'activer la liaison  $n$ , et  $Q_n(\tau)$  la probabilité du temps d'interaction  $\tau$  sur lequel l'interaction est activée, sachant  $n$ . Avec évidemment

$$\sum_{n=1}^{L_s-1} P_s(n) = 1, \quad \int_0^\infty d\tau Q_n(\tau) = 1. \quad (11.66)$$

#### 11.4.2.2 Système ouvert sur l'environnement

Le système est alors mis en interaction, par ses extrémités, avec deux bains aux températures  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Comme précédemment, on considère que de temps en temps, le premier spin du système (resp. le dernier spin du système) entre en interaction avec le bain 1 (resp. 2) sur un intervalle de temps  $\tau$ . Les hamiltoniens d'interactions sont donnés par

$$H_{b_1}^I = -\frac{\lambda_i}{2} (J_i^x \sigma_{b_1}^x (\sigma_1^x)_s + J_i^x \sigma_{b_1}^y (\sigma_1^y)_s), \quad (11.67)$$

$$H_{b_2}^I = -\frac{\lambda_i}{2} (J_i^x (\sigma_{L_s}^x)_s \sigma_{b_2}^x + J_i^x (\sigma_{L_s}^y)_s \sigma_{b_2}^y), \quad (11.68)$$

où  $\sigma_{b_1}$  et  $\sigma_{b_2}$  sont les matrices de Pauli décrivant les degrés de liberté de spin des bains 1 et 2, dont les hamiltoniens sont :

$$H_{b_1} = -\frac{\hbar_b}{2} \sigma_{b_1}^z, \quad H_{b_2} = -\frac{\hbar_b}{2} \sigma_{b_2}^z. \quad (11.69)$$

Pour finir on définit la probabilité d'activer une interaction par  $P(n)$  ( $n = 0, \dots, L_s$ ) ainsi que la probabilité  $Q_n(\tau)$  du temps d'interaction  $\tau$ . Avec évidemment

$$\sum_{n=0}^{L_s} P(n) = 1, \quad \int_0^\infty d\tau Q_n(\tau) = 1, \quad (11.70)$$

où  $P(0)$  (resp.  $P(L_s)$ ) est la probabilité d'activer l'interaction entre le bain 1 (resp. 2) et le premier spin (resp. dernier spin) du système.

Pour un état initial donné, on impose que la première interaction se fasse entre le bain 1 et le premier site. On note  $H_0$  l'hamiltonien sur l'intervalle de temps  $]0, \tau]$

$$H_0 = H_{b_1} + H_{b_1}^I + H_s + H_{b_2}, \quad (11.71)$$

et  $H_n$  l'hamiltonien associé lorsqu'une liaison  $n$  est tirée au hasard

$$H_n = H_{b_1} + H_s + H_n^I + H_{b_2}. \quad (11.72)$$

Ainsi l'opérateur d'évolution temporelle est

$$U_n(\tau_n) = e^{-i\tau_n H_n}, \quad (11.73)$$

où  $\tau_n$  est la valeur de  $\tau$  tirée au hasard suivant la loi de probabilité donnée par  $Q_n(\tau)$ . En notant  $N$  le nombre de liaisons ayant été activées entre deux interactions avec les bains, de sorte que l'interaction  $N + 1$  se fasse de nouveau avec l'un des bains, on écrit l'opérateur d'évolution sous la forme

$$U_{Z(N)}(N) = U_{n_N}(\tau_{n_N}) \dots U_{n_1}(\tau_{n_1}) \quad (11.74)$$

où  $Z(N)$  est l'ensemble des valeurs  $\{n_N, \dots, n_1\}$ . L'évolution de la matrice densité associée au système est alors

$$\rho_s(N + M) = Tr_{\mathcal{B}}\{U_{Z(N)}\rho_s(M)U_{Z(N)}^\dagger\} \quad (11.75)$$

et finalement on écrit

$$\rho_s(M + N) = L_{Z(N)}(\rho_s(M)), \quad (11.76)$$

avec

$$L_{Z(N)}(X) = \sum_{q,k=\pm} p_k(n_1)(U_{Z(N)}^k)_q X (U_{Z(N)}^k)_q^\dagger, \quad n_1 = 0, L_s \quad (11.77)$$

où  $p_\pm(0)$  et  $p_\pm(L_s)$  sont les probabilités associées aux états propres des bains de gauche et de droite, telles que :

$$\begin{aligned} \rho_{b_1} &= |\uparrow\rangle p_+(0) \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle p_-(0) \langle \downarrow| \\ \rho_{b_2} &= |\uparrow\rangle p_+(L_s) \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle p_-(L_s) \langle \downarrow|. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Par itération successive, on obtient

$$\rho_s(\mathcal{N}) = L_{Z(N_m)}(\dots L_{Z(N_2)}(L_{Z(N_1)}(\rho_s(0))), \quad \mathcal{N} = \sum_{j=1}^m N_j. \quad (11.79)$$

L'étude analytique d'un tel protocole est loin d'être évidente. De plus la résolution d'un tel problème est compliquée par le fait qu'un grand nombre de paramètres a été introduit lors de la définition du modèle; rappelons par exemple  $\lambda_s$ ,  $\lambda_i$ , ainsi que les lois de probabilité  $P(n)$  et  $Q_n(\tau)$ . Une étude rigoureuse dans la limite des temps continus pourrait permettre

de faire émerger le rôle de ces quantités et d'épurer un peu ce modèle en ne considérant que les quantités jugées pertinentes. De plus il serait particulièrement intéressant de comprendre, pour une distribution de probabilité  $Q_n(\tau)$  donnée, sous quelle renormalisation des couplages, dans le système et sur l'interaction, la solution est apportée dans la limite des temps continus. Finalement la définition d'un état stationnaire pose ici un problème, le processus proposé étant de nature dynamique. Une solution pourrait être apportée en étudiant la limite (si elle existe) de l'application  $\mathbf{L}$  définie comme

$$\mathbf{L} = \lim_{m \rightarrow \infty} L_{Z(N_m)} \circ \dots \circ L_{Z(N_2)} \circ L_{Z(N_1)}, \quad (11.80)$$

ainsi que la matrice densité  $\rho_{st}$  invariante sous  $\mathbf{L}$ ,

$$\mathbf{L}(\rho_{st}) = \rho_{st}. \quad (11.81)$$

### 11.4.3 Résultats préliminaires et perspectives

Les résultats qui suivent ont été obtenus numériquement sur des chaînes de petites tailles mais montrent déjà clairement un profil linéaire de l'aimantation transverse. Comme précédemment, nous avons pris les valeurs  $\lambda_i = \lambda_s = h = 1$ , la loi de probabilité d'activation d'un site  $n$  est choisi homogène  $P(n) = 1/(L_s + 1)$  alors que la distribution de probabilité  $Q_n(t)$  est choisi indépendante de  $n$  et donnée par  $Q_n(t) = Q(t)$  avec

$$Q(t) = \delta(t - \tau). \quad (11.82)$$

On écrit l'aimantation à l'instant  $t$  comme

$$m^z(n, t) = f(n, t) + \eta(n, t), \quad (11.83)$$

où  $\eta(n, t)$  caractérise les fluctuations et vérifie

$$\lim_{t_a \rightarrow \infty} \lim_{t_b \rightarrow \infty} \int_{t_a}^{t_a+t_b} \frac{dt}{t_b} \eta(n, t) = 0, \quad \forall n. \quad (11.84)$$

Dans la limite des temps longs on vérifie numériquement :

$$\lim_{t > 1} (f(n, t) - f_{st}(n)) \propto e^{-t/T}. \quad (11.85)$$

Sur la figure (11.13) nous avons tracé le comportement de l'aimantation totale en fonction du temps, ainsi que la probabilité  $P(M_{L_s}^z/L_s)$  obtenue en traçant un histogramme à partir de la courbe de  $M_{L_s}^z(t)$ . Les calculs numériques sont effectués sur une chaîne de taille  $L_s = 6$ , en prenant  $\tau = 1/4$ . On vérifie que la décroissance de l'aimantation est exponentielle et que la valeur d'équilibre fluctue autour de l'aimantation moyenne  $m^z = 0.5$  imposée par les bains ( $m_{b_1}^z = 1/4$ ,  $m_{b_2}^z = 3/4$ ). On constate que les fluctuations autour de la position d'équilibre sont gaussiennes (voir l'insert figure 11.13).

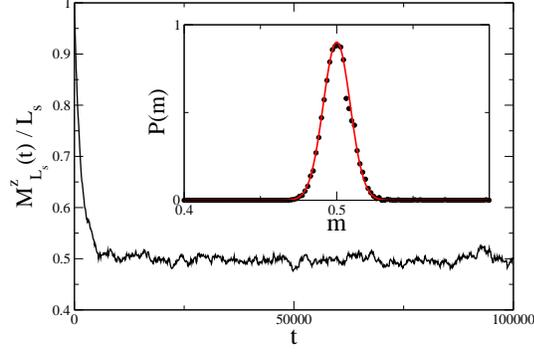


FIG. 11.13 – Relaxation de l'aimantation totale en fonction du temps, obtenue numériquement pour  $\tau = 1/4$ , avec  $m_{b_1}^z = 1/4$  et  $m_{b_2}^z = 3/4$ . Dans l'insert on a représenté la probabilité  $P(M_{L_s}^z/L_s)$  dans la limite des temps longs en traçant un histogramme à partir de la courbe de  $M_{L_s}^z(t)$ . Finalement un "fit" gaussien de  $P(m)$  est réalisé.

Le profil d'aimantation dans l'état stationnaire est obtenu en traçant la fonction  $f_{st}(n)$  :

$$f_{st}(n) = \lim_{t_a \rightarrow \infty} \lim_{t_b \rightarrow \infty} \int_{t_a}^{t_a+t_b} \frac{dt}{t_b} m^z(n, t). \quad (11.86)$$

On vérifie numériquement que le profil d'aimantation est linéaire, donné par :

$$f_{st}(n) = \frac{m_{b_1}^z + m_{b_2}^z}{2} + \gamma(m_{b_2}^z - m_{b_1}^z)x, \quad (11.87)$$

avec

$$\gamma \propto \tau^2. \quad (11.88)$$

Le profil d'aimantation transverse dans l'état stationnaire est tracé figure (11.14), pour un système de taille  $L_s = 6$  et différentes valeurs de  $\tau$ .

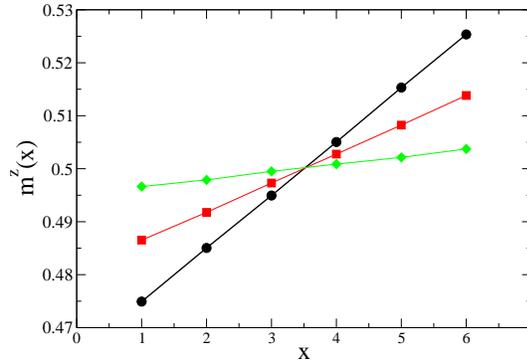


FIG. 11.14 – Profil de l'aimantation dans l'état stationnaire, obtenue numériquement pour  $\tau = 0.35$  (rond),  $\tau = 0.25$  (carré) et  $\tau = 0.125$  (diamant), avec  $m_{b_1}^z = 1/4$  et  $m_{b_2}^z = 3/4$ .

Si le profil d'aimantation est linéaire, l'aimantation sur les bord du système est loin d'être égale à l'aimantation des bords ( $m_{b_1}^z = 1/4$  et  $m_{b_2}^z = 3/4$ ). Cependant un choix judicieux de la valeur des couplages  $\lambda_s$  et  $\lambda_i$  devrait permettre d'ajuster la pente  $\gamma$ . Des résultats préliminaires, portant sur le comportement de  $\gamma$  avec la taille  $L_s$  du système, indiquent que  $\gamma$  ne dépend pas de  $L_s$  du moins pour les tailles  $1 \leq L_s \leq 30$ . Finalement, ce résultat est assez surprenant, alors qu'un comportement de la forme  $\gamma \propto 1/L_s$  était attendu.

## 11.5 Conclusion et Perspectives

Dans ce chapitre nous avons examiné la relaxation de l'aimantation transverse d'une chaîne de spin décrite par le modèle  $XX$ , préparée dans un état complètement factorisé. Ce modèle nous permet une interprétation des résultats, en terme de fermions sur réseau. Dans un premier temps, une étude numérique pour les temps  $t < L_s$ , nous a permis de décrire le comportement d'échelle du profil ainsi que du courant d'aimantation. La relation de continuité aboutit à une relation simple liant l'aimantation et le courant en  $x = 0$  au temps microscopique  $t_0$ ,

$$m^z(0) + t_0 j^z(0) = m_b^z. \quad (11.89)$$

Dans une seconde partie, nous avons vérifié que l'état stationnaire est complètement factorisé. Il est donné par le produit tensoriel de la matrice densité du bain sur chaque spin du système. Ainsi le processus d'interactions répétées ne permet pas la thermalisation de la chaîne de spins, dans le sens où

$$\rho_{st} = \rho_b^{\otimes L_s} \neq \frac{1}{Z} e^{-\beta_b H^{xx}}. \quad (11.90)$$

L'étude du comportement du système, dans la limite des temps longs  $t \gg L_s$ , a mis en évidence une relaxation exponentielle de l'aimantation transverse ainsi que des fonctions de corrélations. Le temps de relaxation est macroscopique, fonction du temps d'interaction ainsi que de la taille  $L_s$  du système considéré

$$T \propto \frac{L_s^\alpha}{\tau}, \quad (11.91)$$

où, des résultats préliminaires donnent  $\alpha \simeq 2.73$ .

Dans le cadre du problème de Fourier, nous avons vérifié, en l'absence de désordre, que l'état stationnaire du système présente un profil d'aimantation plat, marqué par des effets de bord sur les premiers et dernier spins. Ce qui conduit logiquement, à une conductivité thermique infinie et à la violation de la loi de Fourier. Afin d'obtenir une conductivité thermique finie, il est nécessaire d'introduire d'une façon ou d'une autre, une source de désordre dans le système. Nous proposons l'introduction d'un désordre dynamique par l'activation aléatoire de liaisons entre les spins voisins d'une chaîne ouvert sur l'environnement. Des résultats préliminaires montrent que les fluctuations de l'aimantation autour de la valeur d'équilibre, dans l'état stationnaire, sont gaussiennes. Enfin, nous avons obtenu dans la limite asymptotique, la forme d'échelle de la moyenne du profil d'aimantation, en fonction des aimantations  $m_{b_1}^z$  et  $m_{b_2}^z$ . L'état stationnaire présente alors un gradient d'aimantation. De prochaines études, en fonction de la taille du système devraient pouvoir conclure sur le comportement de la conductivité thermique ainsi que sur l'émergence de la loi de Fourier.

# Chapitre 12

## Conclusion

Les travaux exposés dans ce manuscrit se décomposent en deux parties. La première, traite de la dynamique unitaire générée par la mise en interaction de sous-systèmes. La seconde porte sur l'évolution temporelle de systèmes quantiques ouverts.

Pour les modèles  $XX$  et Ising, nous avons étudié analytiquement l'évolution de l'interface séparant deux sous-systèmes, préparés dans des états différents. La notion de causalité, ainsi que la réécriture de l'hamiltonien de ces modèles en terme d'excitations fermioniques libres, permet de comprendre le rôle de la variable d'échelle  $x/t$  dans les profils d'aimantation et de courant. Pour le modèle  $XX$  à température nulle ( $T_s = 0$ ), il convient de noter le rôle particulier joué par la vitesse  $v_h$  du premier état excité. Les résultats numériques, obtenus par diagonalisation exacte confirment l'ensemble des résultats analytiques. La limite  $x/t \rightarrow 0$  conduit aux propriétés de l'état stationnaire. Lorsque  $T_b \neq T_s$ , ce dernier est traversé par un courant et présente un profil d'aimantation plat.

En revanche, un système de taille finie en interaction avec deux "bains" (semi-infini), converge systématiquement vers un état d'équilibre. La relaxation se fait de façon algébrique comme indiqué par le comportement de l'aimantation intégrée  $M^z(t)/L_s \propto L_s/t$ . Une nouvelle échelle de temps  $\tau_h = L_s/v_h$  apparaît dans le modèle  $XX$ , de sorte que pour les temps  $t > \tau_h$  on ait  $M^z(t)/L_s \propto \mathcal{O}(t^{-1})$ .

A température nulle ( $T_b = T_s = 0$ ), l'étude de l'entropie d'intrication sur un système de taille finie nous pousse à distinguer deux régimes de temps ( $t < L_s$  et  $t > L_s$ ). Dans le premier, nous avons confirmé les résultats de la théorie conforme [136]. Pour les temps  $t > L_s$ , le système relaxe de façon algébrique vers un état d'équilibre ne présentant pas de courant et l'entropie d'intrication décroît comme  $S \propto t^{-1}$ . Nous proposons de poursuivre cette analyse par l'étude de la relaxation de l'entropie d'intrication vers un état stationnaire présentant un courant. Cette situation est à mettre en relation avec les travaux de V. Eisler [134] sur le modèle  $XX$ .

Nous avons donné une description détaillée du processus d'interaction répétées appliqué au modèle  $XY$  et avons obtenu l'équation différentielle gouvernant l'évolution temporelle des corrélateurs à deux points. Cela nous a permis de montrer, pour des interactions entre premiers voisins, qu'une description simple ( $\mathbb{C}^2$ ) des copies de l'environnement suffisait à modéliser le bain. Bien que simpliste, le modèle jouet permet de comprendre le mécanisme de relaxation et en particulier le rôle du paramètre d'anisotropie  $\kappa_i$  de la liaison bain-système. Sur un système de taille finie, nous avons obtenu le comportement d'échelle de l'aimantation

et du courant dans le régime des temps courts  $t < L_s$ . Pour les temps intermédiaires, nous avons constaté la présence d'un maximum dans les fonctions de corrélations à  $t = t_m$ . Nous proposons une étude de l'entropie d'intrication afin de vérifier que le temps  $t_m$  correspond bien au temps d'intrication maximale déjà remarqué pour le modèle jouet. Dans la limite des temps longs, les résultats numériques indiquent une relaxation exponentielle de l'aimantation du système vers sa valeur stationnaire.

Enfin, lorsque le système est en contact avec deux bains, à des températures différentes, nous avons vérifié numériquement que le profil d'aimantation est plat. Dans le but de faire émerger la loi de Fourier, nous proposons l'introduction d'un désordre dynamique en perturbant une chaîne de spins sans interaction par l'activation d'un couplage temporaire, positionné aléatoirement. Dans ce cas, des résultats préliminaires indiquent la présence d'un profil d'aimantation linéaire, encourageant pour la poursuite de l'étude dans cette direction.

# Chapitre 13

## Appendice

### 13.1 Eléments de la matrice $\mathbf{R}(t)$

Les éléments de  $\mathbf{R}$  sont donnés par :

$$\mathbf{R}_n^m = (\mathbf{U}e^{-it\Lambda}\mathbf{U}^\dagger)_{n,m} = \sum_{q=1}^{2L} \mathbf{U}_{n,q} e^{-it\Lambda_q} \mathbf{U}_{q,m}^\dagger \quad (13.1)$$

$$\mathbf{R}_n^m = \sum_{q=1}^{2L} V_q(m) e^{-it\epsilon_q} V_q^*(m). \quad (13.2)$$

En séparant les valeurs propres négatives et positives et en associant à chaque couple  $(\epsilon_q, V_q)$  le couple  $(-\epsilon_q, V_{q'})$  pour lequel  $\phi_{q'} = \phi_q$  et  $\psi_{q'} = -\psi_q$ , on a

$$\mathbf{R}_n^m = \sum_{q=1}^L (V_q(m) e^{-it\epsilon_q} V_q^*(m) + V_{q'}(m) e^{it\epsilon_q} V_{q'}^*(m)). \quad (13.3)$$

En traitant séparément les cas  $\mathbf{R}_n^m$ ,  $\mathbf{R}_n^{m+L}$ ,  $\mathbf{R}_{n+L}^m$  et  $\mathbf{R}_{n+L}^{m+L}$ , avec  $n, m = 1, \dots, L$  on obtient finalement les expressions (2.13, 2.14, 2.15) .

### 13.2 Calcul explicite de l'aimantation transverse

Le profil de l'aimantation transverse est donné par

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \langle -i\Gamma_n^2 \Gamma_n^1 \rangle = \mathcal{M}_{n+L,n}(t), \quad (13.4)$$

en utilisant la relation (3.19) on obtient

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_{k,k'} R_{n+L,k}(t) R_{k',n}(t) \mathcal{M}_{k,k'}. \quad (13.5)$$

En réarrangeant les éléments de  $\Gamma$  de la façon suivante,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{L}}^1 \\ \Gamma_1^2 \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{L}}^2 \end{pmatrix}, \quad (13.6)$$

la matrice  $\mathcal{M}(0)$  prend la structure

$$\mathcal{M} = -i\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & -I^T \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.7)$$

où  $I$  est une matrice de dimension  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & & \\ 0 & I_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (13.8)$$

et où les éléments de  $I_j$  sont donnés par l'équation (3.8). L'équation (13.5) devient

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_{k,k'} P_n^{k,k'}(t) I_{k,k'}, \quad (13.9)$$

avec

$$P_n^{k,k'}(t) = R_{n+\mathcal{L},k+\mathcal{L}}(t) R_{n,k'}(t) - R_{n+\mathcal{L},k}(t) R_{n,k'+\mathcal{L}}(t). \quad (13.10)$$

Les éléments de la matrice  $R(t)$  s'expriment en terme des fonctions de Bessel, dans le cas d'un système thermodynamique décrit par le modèle d'Ising critique ( $h = 1$ ) ou par le modèle  $XX$  [30, 64]. Ainsi pour le modèle d'Ising en champ critique  $h = 1$

$$\begin{aligned} R_{l,k} = R_{l+\mathcal{L},k+\mathcal{L}} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^1 \rangle_t &= \langle \Gamma_k^2 | \Gamma_l^2 \rangle_t = (-1)^{k+l} J_{2(l-k)}(2t) \\ R_{l+\mathcal{L},k} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^2 \rangle_t &= (-1)^{k+l} J_{2(l-k)+1}(2t), \end{aligned} \quad (13.11)$$

et pour le modèle  $XX$

$$\begin{aligned} R_{l,k} = R_{l+\mathcal{L},k+\mathcal{L}} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^1 \rangle_t &= \langle \Gamma_k^2 | \Gamma_l^2 \rangle_t = i^{l-k} J_{l-k}(t) \begin{cases} \cos(ht), & l-k = 2p \\ -i \sin(ht) & l-k = 2p+1 \end{cases} \\ R_{l+\mathcal{L},k} = \langle \Gamma_k^1 | \Gamma_l^2 \rangle_t &= i^{l-k} J_{l-k}(t) \begin{cases} -\sin(ht), & l-k = 2p \\ -i \cos(ht) & l-k = 2p+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.12)$$

En définissant les profils  $p^j$  de la façon suivante :

$$p^j(k) = I_{k,k+j}(0) = Tr\{-i\Gamma_k^2 \Gamma_{k+j}^1 \rho(0)\}, \quad (13.13)$$

avec en particulier  $p^0(k) = \langle \sigma_k^z \rangle(0)$ , le calcul conduit à :

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_j \sum_k P_n^{k,k+j}(t) p^j(k). \quad (13.14)$$

Finalement l'élément  $P_n^{k,k+j}(t)$  est fonction de la différence  $n - k$ , on note  $P_n^{k,k+j}(t) = F_t^j(n - k)$ . L'équation (13.14) devient

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_j \left( F_t^j \star p^j \right) (n), \quad (13.15)$$

où pour le modèle d'Ising critique ( $h = 1$ ), les fonctions  $F_t^j$  sont données par :

$$(-1)^j F_t^j(n) = J_{2n}(2t)J_{2n-2j}(2t) - J_{2n+1}(2t)J_{2n-2j-1}(2t), \quad (13.16)$$

et pour le modèle  $XX$  par

$$(-1)^j F_t^{2j}(n) = J_n(t)J_{n-2|j|}(t), \quad \forall h, \quad (13.17)$$

avec  $F_t^j(n) = 0$  pour les valeurs de  $j$  impaires.

### 13.3 Contributions de volume et de surface des profils $p^j$

Dans le sous-système de droite ( $k \geq 1$ ) les profils  $p^j$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} p^j(k) &= Tr\{-i\Gamma_k^2 \Gamma_{k+j}^1 \rho_s\} \\ &= -\sum_{q=1}^{L_s} \psi_q(k) \phi_q(k+j) \tanh\left(\frac{\beta_s \epsilon_q}{2}\right). \end{aligned} \quad (13.18)$$

En utilisant les vecteurs propres et valeurs propres des modèles  $XX$  et Ising donnés dans le chapitre 1 (éq. 1.36, 1.43 et 1.44) on obtient dans la limite continue :

$$p^j(k) = H(k) \left( p_V^j + p_S^j(k) \right). \quad (13.19)$$

Pour le **modèle  $XX$**

$$p_V^j = (-1)^j \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \cos(j\theta) \tanh(\beta_s \epsilon_h(\theta)/2) \quad (13.20)$$

$$p_S^j(k) = (-1)^{j+1} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \cos((2k+j)\theta) \tanh(\beta_s \epsilon_h(\theta)/2), \quad (13.21)$$

où  $\epsilon_h(\theta) = h - \cos(\theta)$ . Pour le **modèle d'Ising** au point critique ( $h = 1$ ),

$$p_V^j = (-1)^j \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \sin(\theta(1/2 - j)) \tanh(\beta_s \sin(\theta/2)) \quad (13.22)$$

$$p_S^j(k) = (-1)^j \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \sin(\theta(2k + j - 1/2)) \tanh(\beta_s \sin(\theta/2)). \quad (13.23)$$

### 13.4 Fonction de Green du modèle $XX$ à température nulle

Nous donnons les éléments de la démonstration conduisant à la fonction de Green du modèle  $XX$  lorsque  $T_b = \infty$  et  $T_s = 0$ . En ne considérant que la contribution de volume

$(p_V^j)$  le profil d'aimantation est

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_j \sum_k F_t^j(n-k) p_V^j(k). \quad (13.24)$$

en utilisant la relation  $p^j(k) = p^{-j}(k+j)$  il suit

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = p_V^0 \sum_{k=0}^{\infty} J_{n-k}^2(t) + 2 \sum_{k=0, j=1}^{\infty} (-1)^j J_{n-k}(t) J_{n-k-2j}(t) p_V^{2j}. \quad (13.25)$$

La dérivée  $\Phi'$  définie par  $\Phi'(n, t) = \langle \sigma_{n+1}^z \rangle(t) - \langle \sigma_n^z \rangle(t)$  est

$$\Phi'(n, t) = J_n(t) \left( m_V^z J_n(t) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j p^{2j} J_{n-2j}(t) \right). \quad (13.26)$$

En utilisant la forme asymptotique des fonctions de Bessel pour  $\nu \gg 1$

$$J_n(t) = J_\nu \left( \frac{\nu}{\cos \beta} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \tan \beta}} \cos \Psi, \quad (13.27)$$

avec  $\Psi = \nu(\tan \beta - \beta) - \pi/4$ , et en prenant la limite  $n \rightarrow \infty$  on a :

$$\begin{aligned} \Phi'(n, t) \simeq & \frac{2}{\pi t \sqrt{1 - (n/t)^2}} \cos^2 \Psi \left( m_V^z + 2 \sum_{j \geq 1} (-1)^j p^{2j} \cos(2j \arccos(n/t)) \right) \\ & - \frac{2}{\pi t \sqrt{1 - (n/t)^2}} \cos \Psi \sin \Psi \left( 2 \sum_{j \geq 1} (-1)^j p^{2j} \sin(2j \arccos(n/t)) \right) \end{aligned} \quad (13.28)$$

En ne gardant que le premier terme, où  $\cos^2 \Psi$  est remplacé par sa valeur moyenne 1/2, en utilisant l'expression des profils  $p_V^j$  donnée précédemment ainsi que les égalités suivantes

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^j \frac{\sin(jx)}{j} = -x/2 \quad \forall x \in ]-\pi, \pi[ \quad (13.29)$$

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^j \frac{\sin(jx)}{j} = \pi - x/2 \quad \forall x \in ]\pi, 3\pi[, \quad (13.30)$$

on obtient

$$\Phi'(n, t) = \frac{1}{\pi t \sqrt{1 - (n/t)^2}} \quad \sqrt{1 - h^2} < |n/t| \leq 1, \quad (13.31)$$

et zero autrement. Finalement la fonction de Green est simplement donnée par  $G_t(x) = \Phi'(x, t)/m^z(0)$ .

## 13.5 Fonction de Green du modèle d'Ising à température nulle

Nous donnons les éléments de la démonstration conduisant à la fonction de Green du modèle d'Ising lorsque  $T_b = \infty$  et  $T_s = 0$ . En ne considérant que la contribution de volume ( $p_V^j$ ) le profil d'aimantation est

$$\langle \sigma_n^z \rangle(t) = \sum_{j=0} \sum_k F_t^j(n-k) p_V^j(k), \quad (13.32)$$

avec

$$(-1)^j F_t^j(n-k) = J_{2(n-k)}(2t) J_{2(n-k)-2j}(2t) - J_{2(n-k)+1}(2t) J_{2(n-k)-2j-1}(2t). \quad (13.33)$$

A température nulle les  $p_V^j$  sont

$$p_V^j = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^j}{2j+1}. \quad (13.34)$$

La dérivée  $\Phi'(n+1, t) = \langle \sigma_{n+1}^z \rangle(t) - \langle \sigma_n^z \rangle(t)$  est donnée par :

$$\Phi'(n, t) = \frac{4}{\pi} J'_{2n}(2t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_{2n-2j-1}(2t)}{2j+1} - \frac{4}{\pi} J_{2n}(2t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{J'_{2n-2j-1}(2t)}{2j+1}. \quad (13.35)$$

En utilisant l'expression asymptotique des fonctions de Bessel on obtient la fonction de Green :

$$G_t(x) = \frac{1}{2t} \Pi\left(\frac{x}{2t}\right). \quad (13.36)$$

## 13.6 Fonction de Green du modèle $XX$ à température finie

Dans le cas du modèle  $XX$  à température finie, la dérivée  $\Phi'$  est donnée par :

$$\Phi'(n, t) = m^z(0) J_n^2(t) + J_n(t) A_n(t), \quad (13.37)$$

avec

$$A_n(t) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j p_V^{2j} J_{n-2j}(t). \quad (13.38)$$

On utilise la relation

$$\tanh(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2kx}, \quad \forall x \geq 0. \quad (13.39)$$

Ainsi pour les champs  $h \geq 1$  on a :

$$p_V^{2j} = I_{2j}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2\beta_s h k} I_{2j}(\beta_s k) J_{n-2j}(t). \quad (13.40)$$

Le comportement asymptotique des fonctions de Bessel conduit à :

$$J_n(t)A_n(t) \simeq \frac{2}{\pi t \sqrt{1 - (n/t)^2}} \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2\beta_s h k} 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j I_{2j}(\beta_s k) \cos(2j \arccos(n/t)). \quad (13.41)$$

Puisque  $I_{2j}(u) = (-1)^j J_{2j}(iu)$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j I_{2j}(\beta_s k) \cos(2j \arccos(n/t)) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(i\beta_s k) \cos(2j \arccos(n/t)) \\ &= \cosh(\beta_s k \sqrt{1 - (n/t)^2}) - J_0(i\beta_s k) \end{aligned} \quad (13.42)$$

Finalement l'expression (13.37) devient

$$\Phi'(n, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (n/t)^2}} \left( \tanh \left( \frac{\beta_s}{2} (h + \sqrt{1 - (n/t)^2}) \right) + \tanh \left( \frac{\beta_s}{2} (h - \sqrt{1 - (n/t)^2}) \right) \right).$$

### 13.7 Interaction répétées ; limite continue

L'évolution de la matrice  $X$  est donnée par  $X(\tau) = R(\tau)X R^\dagger(\tau)$ . Dans la limite des temps d'interaction faible ( $\tau \ll 1$ ), la matrice  $R(\tau)$  s'écrit, à l'ordre en  $\tau^4$  :

$$R(\tau) \simeq 1 - i\tau \mathbf{T} - \frac{\tau^2 \mathbf{T}^2}{2} + \frac{i\tau^3 \mathbf{T}^3}{3!} + \frac{\tau^4 \mathbf{T}^4}{4!} + \mathcal{O}(\tau^5). \quad (13.43)$$

On obtient  $\delta_\tau X(\tau) = (X(\tau) - X)/\tau$

$$\begin{aligned} \delta_\tau X(\tau) &= -i[\mathbf{T}, X] \\ &+ \frac{\tau}{2} (2\mathbf{T}X\mathbf{T} - \{X, \mathbf{T}^2\}) \\ &+ i\frac{\tau^2}{2} \left( \mathbf{T}[X, \mathbf{T}]\mathbf{T} + \frac{1}{3}[\mathbf{T}^3, X] \right) \\ &+ \tau^3 \left( \frac{1}{4!} \{ \mathbf{T}^4, X \} - \frac{1}{3!} \mathbf{T} \{ X, \mathbf{T}^2 \} \mathbf{T} + \frac{1}{4} \mathbf{T}^2 X \mathbf{T}^2 \right) \\ &+ \mathcal{O}(\tau^4) \end{aligned} \quad (13.44)$$

On définit les restrictions de  $\mathbf{T}$  sur le système et le bain de la manière suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_b T_b & \lambda_i \theta \\ \lambda_i \theta^\dagger & T_s \end{pmatrix}, \quad (13.45)$$

où  $T_j$ , de dimension  $2L_j \times 2L_j$  ( $j = s, b$ ), est donnée par :

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & C_j \\ C_j^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad C_j = -i \begin{pmatrix} h_j & J_j^y & & \\ J_j^x & h_j & J_j^y & \mathcal{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathcal{O} & J_j^x & h_j & J_j^y \\ & & & h_j \end{pmatrix}, \quad (13.46)$$

et où les éléments de la matrice  $\theta$ , de dimension  $2L_b \times 2L_s$ , sont :

$$\theta_{n,m} = iJ_i^x \delta_{n,2L_b} \delta_{m,1} - iJ_i^y \delta_{n,L_b} \delta_{m,L_s+1}. \quad (13.47)$$

On note  $X_s$ , respectivement  $X_b$ , les restrictions sur le système et le bain. On définit :

$$\delta_\tau X_s = \frac{X_s(\tau) - X_s}{\tau}. \quad (13.48)$$

Pour la partie système on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_\tau X_s \simeq & - i[T_s, X_s] \\ & - (\tau \lambda_i^2/2) (\{X_s, \theta^\dagger \theta\} - 2\theta^\dagger X_b \theta) - (\tau/2) (\{X_s, T_s^2\} - 2T_s X_s T_s) \\ & + (i\tau^2 \lambda_i^2 \lambda_b/6) ([\theta^\dagger T_b \theta, X_s] - 3\theta^\dagger [T_b, X_b] \theta) \\ & + (i\tau^2 \lambda_i^2/6) [\{T_s, \theta^\dagger \theta\}, X_s] + (i\tau^2/6) [T_s^3, X_s] \\ & + (i\tau^2 \lambda_i^2/2) ([\theta^\dagger X_b \theta, T_s] + T_s X_s \theta^\dagger \theta - \theta^\dagger \theta X_s T_s) \\ & + (i\tau^2/2) [T_s X_s T_s, T_s] \\ & + \mathcal{O}(\tau^3 \lambda_i^2 \lambda_b^2) + \mathcal{O}(\tau^3 \lambda_i^2 \lambda_b) \\ & + \mathcal{O}(\tau^3 \lambda_i^4) + \mathcal{O}(\tau^3 \lambda_i^2) + \mathcal{O}(\tau^3). \end{aligned} \quad (13.49)$$

En introduisant les exposants  $a$  et  $b$  tels que

$$\lambda_i = \frac{\Lambda_i}{\tau^{a/2}} \quad \lambda_b = \frac{\Lambda_b}{\tau^b} \quad (13.50)$$

les conditions  $\tau \lambda_i^2 < \infty$  et  $\tau^2 \lambda_i^2 \lambda_b < \infty$  sont vérifiées pour

$$0 \leq a \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq 2 - a. \quad (13.51)$$

En imposant que tous les termes d'ordre supérieur s'annulent dans la limite  $\tau \rightarrow 0$  il vient :

$$0 \leq b < \frac{3-a}{2}. \quad (13.52)$$

Finalement l'unique façon de renormaliser les couplages dans la limite  $\tau \rightarrow 0$  est de choisir  $a = 1$ . Pour toutes les valeurs de  $b < (3-a)/2$  les termes proportionnels à  $\tau^2 \lambda_i^2 \lambda_b$  s'annulent. Il reste alors :

$$\partial_t X_s = -i[T_s, X_s] - (\Lambda_i^2/2) (\{X_s, \theta^\dagger \theta\} - 2\theta^\dagger X_b \theta). \quad (13.53)$$

# Bibliographie

- [1] E. H. Lieb, T. D. Schultz and D. C. Mattis, *Ann. Phys.*, NY, **16**, p. 406, (1961).
- [2] A. O. Gogolin et al. *Bosonization and strongly correlated systems. Cambridge Univ. Press*, (1998).
- [3] J. von Delft et H. Schoeller, *Annalen Phys.*, **7**, p. 225, (1999).
- [4] J. M. Cai et al, *Phys. Rev. A*, **74**, p. 022328, (2006).
- [5] Y. C. Ou et H. Fang, *J. Phys. A : Math. Theor.*, **40**, p. 2455, (2007).
- [6] D. Rossini et al, *Phys. Rev. A*, **75**, p. 032333, (2007).
- [7] S. Katsura, *Phys. Rev.*, **127**, p. 1508, (1962).
- [8] Th. Niemeijer, *Physica*, **36**, p. 377, (1967).
- [9] J.A. Tjion, *Phys. Rev B*, **2**, p. 2411, (1970).
- [10] P. Pfeuty, *Ann. Phys.*, NY, **57**, p. 79, (1970).
- [11] V.L. Berezinskii, *Sov. Phys. JETP*, **32**, p. 493, (1971).
- [12] J.M. Kosterlitz et D.J. Thouless, *J. Phys. C*, **6**, p. 1181, (1973).
- [13] E. Fradkin et L. Susskind, *Phys. Rev. D*, **17**, p. 2637, (1978).
- [14] J.B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **51**, p. 659, (1979).
- [15] P. Jordan et E. Z. Wigner, *Z. Phys.*, **47**, p. 631, (1928).
- [16] B. Sriram Shastry et S. Diptiman, *Phys. Rev. B*, **55**, p. 2988, (1997).
- [17] E. Barouch et B. McCoy. *Phys. Rev. A*, **2**, p. 1075, (1970).
- [18] E. Barouch et B. McCoy. *Phys. Rev. A*, **3**, p. 786, (1971).
- [19] E. Barouch et B. McCoy. *Phys. Rev. A*, **3**, p. 2137, (1971).
- [20] E. Barouch et B. McCoy. *Phys. Rev. A*, **4**, p. 2331, (1971).
- [21] H. Hinrichsen. *J. Phys. A*, **27**, p. 5393, (1994).
- [22] H. Bethe. *Z. Physik*, **71**, p. 205, (1931).
- [23] L. Turban et F. Iglói. *J. Phys. A*, **30**, L.105, (1997).
- [24] D. Karevski et al. *J. Phys. A*, **33**, p. 2663, (2000).
- [25] I. Pechel *Phys. Rev. B*, **30**, p. 6783, (1984).
- [26] D. Karevski *J. Phys. A : Math. Gene*, **33**, L.313, (2000).
- [27] D. Karevski *Order, Disorder and Criticality : Advanced Problems of Phase Transition Theory - By Y. Holovatch*, World Scientific Publishing Company, (2004).

- [28] I. Tsukada, J. Takeya, T. Masuda and K. Uchinokura *Phys. Rev. Lett.*, **87**, p. 127203, (2001).
- [29] O. Derzhko and T. Krokhamalskii. *Phys. Rev. B*, **56**, p. 11659, (1997).
- [30] T. Antal, Z. Rácz, A. Rákos and G. M. Schütz *Phys. Rev. E*, **59**, p. 4912 (1999).
- [31] H. Araki et E. Barouch, *J. Stat. Phys.*, **31**, p. 327 (1983).
- [32] H. Araki, *RIMS Kyoto Univ.*, **20**, p. 277 (1984).
- [33] H. Araki, *Comm. Math. Phys.*, **132**, p. 155 (1990).
- [34] H. Araki et T. G. Ho, *Proc. Steklov. Inst. Math.*, **228**, p. 191 (2000).
- [35] D. Ruelle, *Comm. Math. Phys.*, **224**, p. 3 (2001).
- [36] W. Aschbacher, and C. A. Pillet *J. Stat. Phys.*, **112**, p. 1153 (2003).
- [37] W. Aschbacher et J. M. Barbaroux *Lett. Math. Phys.*, **77**, p. 11 (2006).
- [38] W. Aschbacher *Lett. Math. Phys.*, **79**, p. 1 (2007).
- [39] V. Jaksic et C. A. Pillet *Comm. Math. Phys.*, **217**, p. 285 (2002).
- [40] F. Igloi and L. Turban. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, p. 1206, (1996).
- [41] F. Igloi, L. Turban, D. Karevski and F. Szamla. *Phys. Rev. B*, **56**, p. 11031, (1997).
- [42] K. Blum. *density matrix theory and applications.*, Plenum Press, New York, (1981).
- [43] T. Platini and D. Karevski *Eur. Phys. J. B*, **48**, p. 225 (2005).
- [44] T. Platini and D. Karevski *Journal of Physics : Conference Series*, **40**, p. 93 (2006).
- [45] T. Platini and D. Karevski *J. Phys. A : Math. Theor.*, **40**, p. 1467 (2007).
- [46] G. M. Schütz and S. Trimper, *Europhys. Lett.*, **47**, p. 164 (1999).
- [47] F. Igloi et H. Reiger, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, p. 3233 (2000)
- [48] L. Cugliandolo et J. Kurchan, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, p. 173 (1993).
- [49] L. Cugliandolo et G. Lozano, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, p. 4979 (1998).
- [50] C. Godrèche et J. M. Luck, *J. Phys. : Condens. Matter*, **14**, p. 1589 (2002).
- [51] L. Cugliandolo et all., *J. Phys.*, **4**, p. 1641 (1994).
- [52] N. Pottier et A. Mauger, *Physica A*, **281**, p. 77 (2000).
- [53] A. Mauger et N. Pottier, *Phys. Rev. E*, **65**, p. 056197 (2002).
- [54] A. J. Bray *Adv. Phys.*, **43**, p. 357 (1994).
- [55] C Godrèche et al. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **33**, p. 1151 (2000).
- [56] C Godrèche et al. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **33**, p. 9141 (2000).
- [57] C Godrèche et al. *J. Phys. : Condens. Matter*, **14**, p. 1589 (2002).
- [58] A Crisanti et al. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **38**, p. R181 (2003).
- [59] P. Calabrese et al. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **38**, R133 (2005).
- [60] P. Calabrese et al. *J. Stat. Mech.*, p. 06016 (2006).
- [61] M. Henkel et al. *Ageing and the glass transition, Springer Lecture Notes in Physics*, **716**, (2007).
- [62] Cugliandolo *Slow Relaxation and Non Equilibrium Dynamics in Condensed Matter (Les Houches Session 77)*, ed J-L Barrat, J Dalibard, J Kurchan and M V Feigel'man (Berlin : Springer), (2003), (Preprint cond-mat/0210312) .

- [63] G. O. Berim, S. Berim and G. C. Cabrera *Phys. Rev. B*, **66**, p. 094401 (2002).
- [64] D. Karevski *Eur. Phys. J. B*, **27**, p. 147 (2002).
- [65] S. Abriet and D. Karevski *Eur. Phys. J. B*, **30**, p. 77 (2002).
- [66] M. Rigol and A. Muramatsu *Mod. Phys. Lett. B*, **19**, p. 861 (2005).
- [67] M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky and M. Olshanii *Phys. Rev. Lett.*, **98**, p. 050405 (2007).
- [68] Y. Ogata *Phys. Rev. E*, **66**, p. 066123 (2002).
- [69] V. Hunyadi, Z. Rácz and L. Sasvári *Phys. Rev. E*, **69**, p. 066103 (2004).
- [70] D. Gobert, C. Kollath, U. Schollwöck and G. Schütz *Phys. Rev. E*, **71**, p. 036102 (2005).
- [71] G. Vidal *Phys. Rev. Lett.*, **91**, p. 147902 (2003).
- [72] G. Vidal *Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 040502 (2004).
- [73] S. R. White et al. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 076401 (2004).
- [74] M. Znidaric et al. *Phys. Rev. B*, **77**, p. 064426 (2007).
- [75] K. A. Al-Hassanieh et al. *Phys. Rev. 1*, **71**, p. 195304 (2006).
- [76] F. Anders et al. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, p. 196801 (2005).
- [77] C. Kollath et al. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, p. 053606 (2005).
- [78] C. Kollath et al. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, p. 050402 (2006).
- [79] C. Kollath et al. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, p. 190601 (2007).
- [80] A. J. Daley et al. *Phys. Rev. Lett.*, **100**, p. 110404 (2008).
- [81] A. Osterloh et al. *Nature*, **416**, 608 (2002).
- [82] G. Vidal, J.I. Latorre, E. Rico and A. Kiatev, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, p. 227902 (2003).
- [83] F. Franchini, A. R. Its, B-Q. Jin and V. E. Korepin, *J. Phys. A : Math. Theor.*, **40**, p. 8467 (2007).
- [84] V. Eisler et al. *J. Stat. Mech.*, p. 01023 (2008).
- [85] I. Peschel and M-C. Chung, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **32**, p. 8419 (1999).
- [86] M-C. Chung and I. Peschel, *Phys. Rev. B*, **64**, p. 064412 (2001).
- [87] I. Peschel, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **36**, p. 205 (2003).
- [88] I. Peschel, *J. Stat. Mech.*, p. 06004 (2004).
- [89] S. A. Cheong and C. L. Henley *Phys. Rev. B*, **69**, (2004).
- [90] M-C. Chung and I. Peschel, *Phys. Rev. B*, **62**, p. 4191 (2000).
- [91] M. Srednicki, *Phys. Rev. Lett*, **71**, p. 666 (1993).
- [92] H. Tomoyoshi et al. *J. H. E. P.*, **02**, p. 042 (2007).
- [93] M.B. Plenio and al., *Phys. Rev. Lett.*, **94**, p. 060503 (2005).
- [94] M. Cramer, J. Eisert, M. B. Plenio and J. Dreißig *Phys. Rev A*, **73**, p. 012309 (2006).
- [95] D. Gioev and I. Klich, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, p. 100503 (2006).
- [96] M.M. Wolf *Phys. Rev. Lett.*, **96**, p. 010404 (2006).
- [97] C.G. Callan and F. Wilczek, *Phys. Lett. B*, **333**, p. 55 (1994).

- [98] V.E. Korepin, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, p. 096402-1 (2004).
- [99] P. Calabrese and J. Cardy, *J. Stat. Mech. : Theor. Exp.*, p. 06002 (2004).
- [100] W. Li and al., *Phys. Rev. B*, **74**, p. 073103 (2006).
- [101] M. B. Plenio et V. Vedral *Contemp. Phys.*, **39**, 431 (1998).
- [102] D. Bruss *J. of Math. Phys.*, **43**, 4237 (2002).
- [103] V. Vedral *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 197 (2002).
- [104] J. Eisert *PhD thesis : Entanglement in quantum information theory*, quant-ph/0610253 (2006).
- [105] M. B. Plenio et S. Virmani *Quant. Inf. Comp.*, **7**, 1 (2006).
- [106] L. Amico et al. *Phys. Rev. A*, **74**, 022322 (2006).
- [107] F. Alet, S. Capponi, N. Laflorencie and M. Mambrini *Phys. Rev. Lett.*, **99**, p. 117204 (2007).
- [108] G. Refael and J. E. Moore, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, p. 260602 (2004).
- [109] J. P. Keating and F. Mezzadri *Phys. Rev. Lett.*, **94**, p. 050501 (2005).
- [110] R. Santachiara *S. Stat. Mech.*, 06002 (2006).
- [111] A. Saguia and all. *Phys. Rev. A*, **75**, p. 052329 (2007).
- [112] R. Juhász and Z. Zimborás *J. Stat. Mech.*, p04004 (2007).
- [113] F. Iglói, R. Juhász and Z. Zimborás *EPL*, **79**, 37001 (2007).
- [114] J. D. Bekenstein *Phys. Rev. D*, **7**, p. 2333 (1973).
- [115] L. Bombelli and all, *Phys. Rev. D*, **34**, p. 373 (1986).
- [116] S. Das and S. Shankaranarayanan *Class. Quantum Grav.*, **24**, p. 5299 (2007).
- [117] S. Das, S. Shankaranarayanan and S. Sur *Phys. Rev. D*, **77**, p. 064013 (2008).
- [118] A. Riera and J. I. Latorre *Phys. Rev. A*, **74**, p. 052327.1 (2006).
- [119] S. White *Phys. Rev. B*, **48**, p10345, (1993).
- [120] J. P. Keating et al. *Phys. Rev. A*, **74**, p012311, (2006).
- [121] J. Eisert et M. Cramer *Phys. Rev. A*, **72**, p042112, (2005).
- [122] R. Orus et al. *Phys. Rev. A*, **73**, p060303 R, (2006).
- [123] J. I. Latorre, E. Rico and G. Vidal *Quant. Inf. Comput.*, **4**, 48-92, (2004).
- [124] A. R. Its, B-Q. Jin and V. E. Korepin, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **38**, p. 2975 (2005).
- [125] T. Roscilde et al. *Low Temp. Phys.*, **140**, 293, (2005).
- [126] V. Subrahmanyam *Phys. Rev. A*, **69**, 034304, (2004).
- [127] L. Amico et al. *Phys. Rev. A*, **69**, 022304, (2004).
- [128] S. Bravyi, M. B. Hastings et F. Verstraete *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 050401, (2006).
- [129] J. Eisert et T. J. Osborne *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 150404, (2006).
- [130] R. W. Cherg et L. S. Levitov *Phys. Rev. A*, **73**, 043614, (2006).
- [131] W. Dur et al. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 097203, (2005).
- [132] P. Calabrese et J. Cardy *J. Stat. Mech.*, p. 04010 (2005).
- [133] G. De Chiara et al. *J. Stat. Mech.*, p. 03001 (2006).

- [134] V. Eisler et Z. Zimborás *Phys. Rev. A*, **71** p. 042318 (2005).
- [135] V. Eisler et I. Peschel *J. Stat. Mech.*, p. 06005 (2007).
- [136] P. Calabrese et J. Cardy *J. Stat. Mech.*, p. 10004 (2007).
- [137] I. Peschel *J. Phys. A : Math. Gen.*, **36**, p. 4327 (2005).
- [138] F. Iglói et al. *EPL*, **81**, p. 57003 (2008).
- [139] I. Peschel *J. Stat. Mech.*, p. 12005 (2004).
- [140] S. Attal et al. *Open quantum systems I : The Hamilton approach - Springer*, (2006).
- [141] S. Attal et al. *Open quantum systems II : The Markovian approach - Springer*, (2006).
- [142] S. Attal et al. *Open quantum systems III : Recent developments - Springer*, (2006).
- [143] I.R. Senitzky *Phys. Rev.*, **119**, p. 600 (1960).
- [144] I.R. Senitzky *Phys. Rev.*, **124**, p. 642 (1961).
- [145] G. Lindblad *Commun. Math. Phys.*, **48**, p. 119 (1976).
- [146] S. Attal et A. Joye *J. Func Analysis*, **247**, p. 253 (2007).
- [147] S. Attal et A. Joye *J. Stat. Phys.*, **126**, p. 1241 (2007).
- [148] S. Attal et A. Dhahri *arXiv :0712.317v1 [math-ph]*, (2007).
- [149] S. Attal et Y. Pautrat *Ann. Henri Poincaré*, **7**, p.59 (2006).
- [150] L. Bruneau et al. *J. Func. Analysis*, **239**, p. 310 (2006).
- [151] L. Bruneau et al. *arXiv :0710.5908v2 [math-ph]*, (2008).
- [152] A. Dhahri *arXiv :0803.3059v1 [math.PR]*, (2008).
- [153] A. Dhahri *arXiv :0803.3060v1 [math.PR]*, (2008).
- [154] R. Vargas *arXiv :0804.1783v1 [math-ph]*, (2008).
- [155] T. Platini, S. Attal et D. Karevski *en rédaction*
- [156] J. Fourier *The analytical theory of heat - Dover Publ., New York,, (1955) Traduit du français : Théorie analytique de la chaleur (1822)*.
- [157] P. Debye *Vorträge über die kinetische Theorie des Materie ud der Elecktrizität, edited by M. Planck - Teubner, Leipzig, (1904)*.
- [158] G. Casati et al. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, p. 1861 (1984).
- [159] T. Prosen *Phys. Rev. Lett.*, **80**, p. 1808 (1998).
- [160] R. Peierls *Ann. Phys. (N. Y.)*, **3**, p. 1055 (1929).
- [161] R. Peierls *Quantum Theory of Solids - Clarendon Press, Oxford, (2000)*.
- [162] M. Wagner *Phil. Mag. B*, **79**, p. 1839 (1999).
- [163] E. Fermi et al. *Note e Memorie (Collected Papers) - The University of Chicago Press, Roma*, vol. **2**. Chap. "Studies of non Linear Problems" (1965).
- [164] U. Zürcher et Talkner *Phys. Rev. A*, **42**, p. 3267 (1990).
- [165] U. Zürcher et Talkner *Phys. Rev. A*, **42**, p. 3278 (1990).
- [166] S. Lepri et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p. 1896 (1997).
- [167] A. Dhar *Phys. Rev. Lett.*, **86**, p. 5882 (2001).
- [168] A. Dhar *cond-mat/0210470v2* (2008).

- [169] M. Michel et al. *Eur. Phys. J. B*, **34**, p. 325 (2003).
- [170] M. Michel et al. *Physica E*, **29**, p. 129 (2005).
- [171] C. Mejia-Monasterio et al. *Europhys. Lett.*, **72**, p. 520 (2005).
- [172] H. Wichterich et al. *Phys. Rev. E*, **76**, p. 031115 (2007).
- [173] C. Mejia-Monasterio et H. Wichterich *Eur. Phys. J. Special Topics*, **151**, p. 113 (2007).
- [174] C. Gaul et H. Büttner *Phys. Rev. E*, **76**, p. 011111 (2007).
- [175] A. Dhar *Phys. Rev. Lett.*, **86**, p. 3554 (2000).
- [176] P. Grassberger et al. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, p. 1806011 (2002).
- [177] F. Bonetto et al. *Fourier's law : a challenge to theorists : Mathematical Physics - London : Imperial College Press*, pp.128-51 (2000).
- [178] M. Michel et al. *Inter. J. Mod. Phys. B*, **20**, p. 4855 (2006).