

# Structures géométriques liées aux algèbres de Lie graduées

Julien Chenal

► **To cite this version:**

Julien Chenal. Structures géométriques liées aux algèbres de Lie graduées. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2010. Français. NNT : 2010NAN10036 . tel-01748201

**HAL Id: tel-01748201**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748201>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse  
présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I  
en Mathématiques  
par  
Julien CHENAL

---

**Structures géométriques  
liées aux algèbres de Lie graduées**

---

Soutenue publiquement le 21 juin 2010.

Membres du Jury :

Rapporteurs :	<b>Olivier Mathieu</b> <b>Erhard Neher</b>	DR CNRS, Lyon Professeur, Ottawa
Examineurs :	<b>Wolfgang Bertram</b> <b>Jean-Louis Clerc</b> <b>Hubert Rubenthaler</b>	Professeur, Nancy (Directeur de thèse) Professeur, Nancy Professeur, Strasbourg (Président du jury)

---



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Wolfgang pour sa disponibilité et ses nombreux conseils. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec lui pendant ces quatre années.

Un grand merci à Erhard Neher pour sa lecture attentive de mon manuscrit, dans une langue qui n'est pas la sienne. Merci également à Olivier Mathieu d'avoir accepté de rapporter ce travail, ainsi qu'à Hubert Rubenthaler et Jean-Louis Clerc d'avoir fait partie de mon jury.

J'ai trouvé à l'IECN une ambiance de travail (mais pas que...) exceptionnelle, grâce notamment aux adeptes plus ou moins réguliers des pauses-café, qui sont devenus bien plus que de simples collègues de travail ; à savoir deux rouquemoutes, un affreux jongleur, un roumain, un amateur d'"art", un portos, un geek(11), un michachou, un fan de rugby (un peu geek aussi), un chevelu brasseur et jongleur, un carcassonnais qui ne comprend jamais rien, une chinoise "tabon, tabon" , sans oublier les deux plus jolies blondes du labo. Je suis sûr qu'ils se reconnaîtront !

J'ai également rencontré durant ces quatre années, une bande de sympathiques chimistes avec qui les repas et le café (encore...) ont été particulièrement agréables. Merci à vous, Lau (même si tu as abandonnés en route), Kat, Delphine, Séb, Stéphane et (je garde le meilleur pour la fin) M. Henry.

Merci aussi à tous ceux qui étaient présents le jour J et ce, en dépit du fait qu'ils n'ont pas compris grand chose à ce que j'ai raconté : Allan, Fred, Rémi, Séb, Tumun... Votre présence était très importante pour moi !

Enfin, pour la présence et le soutien inconditionnel de ma famille : MERCI!!



# Table des matières

<b>I Algèbres de Lie graduées</b>	<b>13</b>
I.1 Algèbres de Lie $\Gamma$ -graduées . . . . .	14
I.1.1 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduations et systèmes triples de Lie . . . . .	15
I.1.2 Systèmes triples de Lie et espaces symétriques . . . . .	15
I.2 Algèbres de Lie $\mathbb{Z}$ -graduées . . . . .	16
I.2.1 Généralités . . . . .	16
I.2.2 3-graduations et théorie de Jordan . . . . .	19
I.2.3 5-graduations et paires de Freudenthal-Kantor . . . . .	21
I.2.4 Systèmes triples de Lie et $\mathbb{Z}$ -graduations . . . . .	22
I.2.5 Algèbre de Lie graduée universelle et systèmes triples de Jordan .	23
I.3 Algèbres de Lie graduées par un système de racines . . . . .	30
I.3.1 Le cas de la dimension finie . . . . .	30
I.3.2 Le cas de la dimension infinie . . . . .	32
I.4 Classification des $\mathbb{Z}$ -graduations d'une algèbre de Lie semi-simple réelle .	34
I.4.1 Classification . . . . .	34
I.4.2 Exemples . . . . .	42
<b>II Géométrie de drapeaux généralisée</b>	<b>51</b>
II.1 Groupe projectif élémentaire . . . . .	51
II.2 Géométrie de drapeaux généralisée . . . . .	53
II.3 Réalisation géométrique de la géométrie de drapeaux . . . . .	55
II.3.1 Filtrations d'une algèbre de Lie . . . . .	55
II.3.2 Transversalité de deux filtrations . . . . .	56
II.3.3 Lien entre géométrie de drapeaux et filtrations . . . . .	60
II.4 Réalisation de $\mathfrak{g}$ comme espace de champs polynomiaux . . . . .	63
II.4.1 Fibré tangent et fibré de structure . . . . .	63
II.4.2 Le noyau canonique . . . . .	67
II.4.3 Réalisation de $\mathfrak{g}$ comme champs polynomiaux . . . . .	69
II.4.4 "Action" de $G$ dans la carte $\mathfrak{n}_1^+$ . . . . .	71
<b>III Le cas <math>\mathfrak{g} = \text{End}_R(V)</math></b>	<b>75</b>
III.1 Drapeaux et opérateurs d'Euler . . . . .	75
III.2 Lien avec les filtrations . . . . .	77
III.3 Réalisation de la géométrie de drapeaux généralisée . . . . .	78

<b>IV</b>	<b>Structure de variété différentielle</b>	<b>81</b>
IV.1	Construction d'une structure de variété sur $X^+$	81
IV.1.1	Hypothèses	81
IV.1.2	Construction d'une structure différentiable	82
IV.1.3	Fibrés différentiables	88
IV.2	Construction d'une structure de variété sur $X_j^+$	89
<b>A</b>	<b>Construction de Chevalley</b>	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Réalisation de <math>\mathfrak{g}</math> comme algèbre de champs polynomiaux</b>	<b>103</b>
<b>C</b>	<b>Calcul différentiel général</b>	<b>109</b>
C.1	Fonctions de classe $C^1$	109
C.2	Fonctions de classe $C^k$	110
C.3	Variété différentielle	111



# Introduction

**Problème général.** Le troisième théorème de Lie assure que pour toute algèbre de Lie réelle ou complexe  $\mathfrak{g}$ , de dimension finie, il existe un unique groupe de Lie connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Autrement dit, on a une bijection entre l'ensemble des algèbres de Lie réelles ou complexes de dimension finie et celui des groupes de Lie connexes et simplement connexes. Plus précisément, cette correspondance est même une équivalence de catégories. La question centrale dans le travail qui suit est de savoir quelles structures géométriques correspondent aux *algèbres de Lie graduées* i.e savoir quel objet géométrique correspond à une algèbre de Lie s'écrivant

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_{\gamma},$$

où  $\Gamma$  est un groupe abélien et les  $\mathfrak{g}_{\gamma}$  sont des  $\mathbb{K}$ -modules tels que  $[\mathfrak{g}_{\gamma}, \mathfrak{g}_{\gamma'}] \subset \mathfrak{g}_{\gamma+\gamma'}$ . On dit d'une telle algèbre de Lie qu'elle est  $\Gamma$ -graduée. Pour préciser cette question, considérons deux exemples classiques.

**Exemple classique : le cas  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée.** Si  $\mathfrak{g}$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ , avec  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$ ,  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$  et  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_0$ , le module  $\mathfrak{g}_1$  possède une structure de *système triple de Lie* (voir la définition I.1.2) et O. Loos a montré qu'il existe une bijection entre les systèmes triples de Lie réels ou complexes de dimension finie et les *espaces symétriques* connexes, simplement connexes [Loo69]. En effet, l'espace tangent en un point de base  $o$  d'un espace symétrique possède une structure de système triple de Lie et réciproquement, à un système triple de Lie réel ou complexe de dimension finie, on associe un espace symétrique connexe, simplement connexe, avec un point de base  $o$ , dont l'espace tangent en  $o$  est le système triple de Lie considéré. Autrement dit, on a une équivalence de catégories entre les systèmes triples de Lie réels ou complexes de dimension finie et les espaces symétriques connexes, simplement connexes avec un point de base. Ce résultat est bien sûr lié au troisième théorème de Lie et les hypothèses "réel ou complexe" et "de dimension finie" sont primordiales.

**Cadre général.** Dans cette thèse, on ne se contentera pas de s'intéresser au cas réel ou complexe mais on considérera des algèbres de Lie sur des anneaux commutatifs (quasi) quelconques et on ne se bornera pas non plus à la dimension finie. Nous étudierons principalement les *algèbres de Lie  $(2k+1)$ -graduées* i.e s'écrivant

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=-k}^k \mathfrak{g}_n,$$

où les  $\mathfrak{g}_n$  sont des sous-modules de  $\mathfrak{g}$  tels que  $[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subset \mathfrak{g}_{n+m}$ .

**Exemple classique : le cas 3-gradu e.** Le cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-gradu e,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$  a été  etudi e notamment par J. R. Faulkner [Fau83] et O. Loos [Loo79] et [Loo95] qui s’intéressent aux liens entre les algèbres de Lie 3-gradu es et la *théorie de Jordan*. En effet, dans ce cas,  $[[\mathfrak{g}_{\pm 1}, \mathfrak{g}_{\mp 1}], \mathfrak{g}_{\pm 1}] \subset \mathfrak{g}_{\pm 1}$  et la paire  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  porte une structure de *paire de Jordan*, donnée par  $(X, Y, Z) \mapsto [[X, Y], Z]$  (voir la définition I.2.3). Ensuite, W. Bertram et K-H. Neeb ont défini, dans [BN04], un objet géométrique qui correspond à une algèbre de Lie 3-gradu e, appel e *géométrie projective généralisée*. Cet objet est défini à partir de la notion de *complétion projective d’une paire de Jordan* introduite par O. Loos dans [Loo79] puis reprise par J. R. Faulkner dans [Fau83]. Cette construction est analogue à celle des espaces projectifs ou plus généralement des variétés grassmanniennes, lagrangiennes ou des quadriques projectives, où on injecte un espace affine dans un espace projectif. La géométrie projective généralisée d’une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  3-gradu e est en fait caractérisée par la paire de Jordan  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  associée [BN04].

Nous étudierons si des constructions analogues existent pour une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -gradu e. En d’autres termes et de manière simple (voire simpliste), on peut résumer la situation et poser la problématique de ce travail à l’aide du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Algèbres de Lie} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ graduées} \end{array} \right\} & \leftrightarrow \{ \text{Systèmes triples de Lie} \} & \leftrightarrow \{ \text{Espaces symétriques} \} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Algèbres de Lie} \\ 3\text{-graduées} \end{array} \right\} & \leftrightarrow \{ \text{Paires de Jordan} \} & \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Géométries projectives} \\ \text{généralisées} \end{array} \right\} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Algèbres de Lie} \\ (2k + 1) \text{ graduées} \end{array} \right\} & \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Quel est} \\ \text{l’objet infinitésimal?} \end{array} \right\} & \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Quel est} \\ \text{l’objet géométrique?} \end{array} \right\} \end{array}$$

**Construction de l’objet géométrique.** Dans ce travail, nous allons définir un objet géométrique qui correspond aux algèbres de Lie  $(2k + 1)$ -graduées, que nous appellerons une *géométrie de drapeaux généralisée de type k-gradu e*. C’est une généralisation de la géométrie projective généralisée associée à une algèbre de Lie 3-gradu e. Dans le cas classique où  $\mathfrak{g}$  est l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})$ , associée au système de racines de type  $A_n$ , munie d’une  $(2k + 1)$ -graduation, alors la géométrie de drapeaux généralisée associée à  $\mathfrak{g}$  est une vari ete de drapeaux au sens classique. Ceci explique le nom de “géométrie de drapeaux généralisée”. Un des buts de cette thèse sera d’expliciter la construction de cette géométrie de drapeaux généralisée qui repose sur les notions de *groupe projectif élémentaire* et de *complétion projective d’une paire de Jordan*.

**Structure de vari ete.** Un autre but de ce travail sera de construire une structure de vari ete différentielle sur la géométrie de drapeaux généralisée (théorème IV.1.1), à l’aide d’un calcul différentiel défini sur un anneau topologique (quasi) quelconque. Ce calcul différentiel g en eralis e a été introduit et d evolopp e par W. Bertram, H. Glöckner et K-H. Neeb dans [BGN04] puis [Ber08]. Un résultat analogue au théorème IV.1.1 a été d emontr e dans [BN05] dans le cas des algèbres de Lie 3-graduées.

A présent, présentons de manière plus précise les résultats qui suivent.

**Algèbres binaires et systèmes ternaires.** Dans une première partie, nous allons tout d'abord présenter quelques généralités sur les algèbres de Lie graduées, notamment expliquer la structure que porte la paire  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$   $(2k+1)$ -graduée, en fonction de la longueur de la graduation. Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée, l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 &\rightarrow \mathfrak{g}_1 \\ (X, Y, Z) &\mapsto [[X, Y], Z] \end{aligned}$$

munit  $\mathfrak{g}_1$  d'une structure de système triple de Lie. On a en fait une bijection entre l'ensemble des algèbres de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées et celui des systèmes triples de Lie, donnée par le *plongement standard* d'un système triple de Lie. On a également une bijection entre l'ensemble des algèbres de Lie 3-graduées telles que  $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$  et celui des paires de Jordan. En effet, si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ , les deux applications

$$\begin{aligned} T^+ : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 &\rightarrow \mathfrak{g}_1 & \text{et} & & T^- : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{-1} &\rightarrow \mathfrak{g}_{-1} \\ (x, y, z) &\mapsto [[x, y], z] & & & (u, v, w) &\mapsto [[u, v], w] \end{aligned}$$

définissent une structure de paire de Jordan sur  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$ . La réciproque est donnée par la *construction de Kantor-Koecher-Tits* [Ber00], [BN04] ou [Mey70]. De même, on peut construire une bijection entre l'ensemble des algèbres de Lie 5-graduées et celui des *paires de Freudenthal-Kantor* [Ber02a]. Dans le cas général où  $\mathfrak{g}$  est  $(2k+1)$ -graduée, la paire  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  possède une structure de *paire de Jordan généralisée* toujours donnée par les applications  $T^+$  et  $T^-$  et il existe une construction, due à I. Kantor [Kan70] et [Kan72], qui, à un *système triple de Jordan généralisé* associe une algèbre de Lie graduée, appelée *algèbre de Lie graduée universelle* (voir la partie I.2.5). En revanche, il n'existe pas de résultat établissant une bijection entre l'ensemble des algèbres de Lie  $(2k+1)$ -graduées engendrées par  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  et certains systèmes triples de Jordan généralisés. On dit simplement d'un système triple de Jordan généralisé qu'il est *de type k* si son algèbre de Lie graduée universelle est  $(2k+1)$ -graduée.

**Graduation par un système de racines.** Toujours dans la première partie, nous mentionnerons d'autres exemples de graduations : le cas des algèbres de Lie graduées par un système de racines ; tout d'abord lorsque  $\mathfrak{g}$  est complexe, simple et de dimension finie, ce qui amène à une classification de ces algèbres de Lie, puis lorsque  $\mathfrak{g}$  est de dimension infinie. En particulier, on peut citer les *algèbres de Kac-Moody* [Kac90] et [Moo68] qui généralisent les algèbres de Lie semi-simples de dimension finie, mais aussi les *algèbres de Lie graduées par un systèmes de racines* [BM92] et [BN06].

**La classification de S. Kaneyuki et H. Asano.** Nous terminerons cette première partie par la classification des  $\mathbb{Z}$ -gradués d'une algèbre de Lie semi-simple réelle de dimension finie, due à S. Kaneyuki et H. Asano dans [KA88], qui fait le lien entre les  $\mathbb{Z}$ -gradués et les graduations par un système de racines. Plus précisément, la graduation par un système de racines d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , réelle, semi-simple et de dimension finie permet de construire des  $\mathbb{Z}$ -gradués de longueur finie et cette construction permet d'établir une bijection entre les classes d'isomorphie des  $\mathbb{Z}$ -gradués de  $\mathfrak{g}$  et certaines classes d'équivalence des partitions d'un système fondamental du système de racines de

$\mathfrak{g}$ . Pour finir, nous considérerons quelques exemples simples d'algèbres de Lie de matrices (de type  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$ ) pour visualiser les classes d'isomorphie des 3- et 5-graduations de ces algèbres.

**Le groupe projectif élémentaire.** Dans une deuxième partie, nous présenterons la construction de la géométrie de drapeaux généralisée associée à une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée. Cette construction repose très fortement sur la notion de *groupe projectif élémentaire* introduite par J. R. Faulkner dans [Fau83]. Si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$  est  $(2k+1)$ -graduée, alors pour tout élément  $x$  dans la “partie positive” de la graduation,  $\mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1$ , on définit un automorphisme de  $\mathfrak{g}$  par

$$e^{\text{ad}(x)} := \sum_{n=0}^{2k} \frac{(\text{ad}(x))^n}{n!} \in \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

On définit les mêmes automorphismes  $e^{\text{ad}(y)}$  si  $y$  appartient à la “partie négative” de la graduation, à savoir  $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$ . On peut alors considérer deux groupes

$$\begin{aligned} U^+ &:= \{e^{\text{ad}(x)}, x \in \mathfrak{g}_k \cdots \oplus \mathfrak{g}_1\} \text{ et} \\ U^- &:= \{e^{\text{ad}(y)}, y \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}\}. \end{aligned}$$

Et alors le groupe projectif élémentaire de  $\mathfrak{g}$  est le sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  engendré par  $U^+$  et  $U^-$ , on le notera  $G$ . On considère également  $H$  le sous-groupe des éléments de  $G$  qui préservent le graduation de  $\mathfrak{g}$  et on pose

$$P^+ := HU^+ \text{ et } P^- := HU^-.$$

Alors la géométrie de drapeaux généralisée associée à  $\mathfrak{g}$  est définie par les deux espaces homogènes

$$X^+ := G/P^- \text{ et } X^- := G/P^+,$$

ainsi qu'une relation, dite de *transversalité*, définie sur  $X^+ \times X^-$  (voir la définition II.2.1).

**Géométrie de drapeaux généralisée et filtrations.** On a déjà mentionné que dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , la géométrie de drapeaux généralisée est une variété de drapeaux classique. En fait, chaque espace  $X^+$  et  $X^-$  est une variété de drapeaux, par exemple, si  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée,  $X^+$  et  $X^-$  sont des grassmanniennes. On peut alors se demander s'il est possible dans le cas général de réaliser ces deux espaces à l'aide d'un objet se rapprochant des drapeaux. La réponse est oui, et l'objet considéré est la notion de *filtration* d'une algèbre de Lie. Plus précisément, une  $(2k+1)$ -filtration d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est un drapeau de sous-espaces

$$\mathfrak{n} = (0 \subset \mathfrak{n}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_{-k+1}), \text{ tels que } [\mathfrak{n}_n, \mathfrak{n}_m] \subset \mathfrak{n}_{n+m}.$$

On définit également une relation de transversalité sur l'espace  $\mathcal{F}$  des filtrations de  $\mathfrak{g}$  et alors si  $\mathfrak{g}$  est  $(2k+1)$ -graduée, on a une injection  $X^+ \times X^- \hookrightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ ,  $G$ -équivariante et compatible avec les deux notions de transversalité. Autrement dit, les deux espaces  $X^+$  et  $X^-$  se réalisent comme ensemble de filtrations de  $\mathfrak{g}$ . Le théorème II.3.2 et les arguments utilisés pour le démontrer sont très proches de ceux utilisés par W. Kaup dans [Kau83]

et H. Upmeyer dans [Upm85] dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie Banach complexe 3-graduée. La suite de cette partie consiste à introduire des objets purement algébriques (principalement des “fibrés” sur  $X^+$  et  $X^-$ , ainsi que certaines sections de ces fibrés) afin de réaliser  $\mathfrak{g}$  comme un espace de champs polynomiaux sur  $\mathfrak{n}_1^+ = \mathfrak{g}_k \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_1$  (voir la partie II.4.3) et de montrer que l’action du groupe projectif élémentaire sur  $X^+$  est “rationnelle” sur  $\mathfrak{n}_1^+$  (voir la section II.4.4). Enfin, on introduira également un *noyau canonique* qui caractérise la relation de transversalité et qui généralise les *opérateurs de Bergman* d’une paire de Jordan (voir la définition II.4.4).

**Un exemple : le cas de  $\mathfrak{g} = \mathbf{End}_R(V)$ .** Dans le troisième chapitre, nous étudierons le cas où  $\mathfrak{g} = \mathbf{End}_R(V)$ , avec  $R$  une algèbre associative unitaire sur un anneau commutatif  $\mathbb{K}$ . Dans ce cas,  $\mathfrak{g}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie pour le crochet usuel  $[A, B] = AB - BA$ . Nous verrons alors que la géométrie de drapeaux généralisée associée à une graduation de  $\mathfrak{g}$  s’obtient comme ensembles de drapeaux de  $V$ . Ce qui “justifie” le nom choisi, *géométrie de drapeaux généralisée*, pour notre objet géométrique.

**Structure de variété et remarques topologiques.** Dans l’annexe C, nous introduisons le calcul différentiel général sur un anneau topologique quelconque développé par W. Bertram, H. Glöckner et K-H. Neeb dans [BGN04] et [Ber08]. Alors que le cadre classique du calcul différentiel est de considérer le corps des réels ou des complexes et des objets de dimension finie, cette théorie étend la géométrie différentielle dans deux directions à la fois i.e considérer d’autres corps que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ou même simplement un anneau topologique, mais aussi des objets de dimension infinie. Nous rappellerons ensuite la définition d’une *variété différentielle* dans ce cadre. Elle ressemble beaucoup à la notion de variété différentielle au sens classique à l’aide d’un atlas. Dans le chapitre IV, nous montrerons que sous certaines hypothèses, une telle structure de variété différentielle peut être construite sur  $X^+$  et  $X^-$  (voir le théorème IV.1.1). Dans le cas réel ou complexe et de dimension finie, pour montrer que le quotient d’un groupe de Lie  $G$  par un sous-groupe  $P$  est une variété, il suffit de montrer que  $P$  est fermé. Les méthodes que nous utiliserons pour montrer que  $X^+ = G/P^-$  est une variété sont bien différentes. En effet, dans le cas général, nous ne considérerons pas de topologie sur le groupe  $G$ , ni sur  $H$ . Nous ne pourrons donc pas utiliser les arguments classiques de la géométrie différentielle usuelle. L’existence d’un groupe de Lie  $\overline{G} \subset G$  tel que  $X^+ = G/P^- = \overline{G}/\overline{P}^-$  est d’ailleurs une question intéressante et toujours ouverte. Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie Banach, on peut choisir  $\overline{G} = \mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ , mais qu’en est-il dans le cas général ?

### Problèmes ouverts.

**Objet infinitésimal.** Tout d’abord, nous avons défini la géométrie de drapeaux généralisée associée à une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée. Il serait intéressant d’avoir une approche plus axiomatique de cet objet géométrique. Ensuite, nous avons déjà mentionné qu’il n’existe pas de résultat établissant une bijection, voire une équivalence de catégories, entre les algèbres de Lie  $(2k + 1)$ -graduées et certains systèmes triples de Jordan généralisés. Il serait intéressant de trouver une caractérisation des systèmes triples de Jordan généralisés de type  $k$ . Cette question est en fait très proche de déterminer l’objet infinitésimal correspondant à la géométrie de drapeaux généralisée. L’espace tangent d’un espace symétrique possède une structure de système triple de Lie, la géométrie

projective généralisée est caractérisée par sa paire de Jordan associée, mais quelle structure supplémentaire possède la paire  $(T_{o^+}X^+, T_{o^-}X^-)$  des espaces tangents à  $X^+$  et  $X^-$  en  $o^+ = P^-$  et  $o^- = P^+$ ? Nous appellerons un tel objet une *paire de Jordan généralisée de type  $k$ -graduée*.

**Structure de contact.** Cette structure graduée (ou filtrée) des espaces tangents à  $X^+$  et  $X^-$  devrait permettre de définir une *structure de contact* dans ce cadre très général. La notion de *géométrie de contact* a été introduite par S. Lie et celle de *contact généralisé* a été étudiée notamment par M. Cowling, F. De Mari, A. Korányi et H. M. Reimann dans [CDMKR05] dans le cadre d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  agissant sur l'espace quotient  $G/P$ , où  $P$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ . La géométrie de drapeaux généralisée d'une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée semble être un bon cadre pour construire une telle structure de contact (ou multicontact).

**Application produit et structure d'espace homogène principal.** Enfin, la relation de transversalité sur  $X^+ \times X^-$  nous permet de définir une autre structure géométrique sur la géométrie de drapeaux généralisée. Si  $a \in X^- \subset \mathcal{F}$ , on note  $a^\top$  l'ensemble des éléments de  $X^+$  étant transverses à  $a$ . Alors un groupe d'automorphismes de la forme  $\{e^{\text{ad}(x)}, x \in \mathfrak{a}_1\}$  agit simplement transitivement sur  $a^\top$ , de sorte que  $a^\top$  possède une structure d'*espace homogène principal* (ou *torseur* [Cer43]). Autrement dit, si on fixe un élément  $y$  transverse à  $a$ , alors  $a^\top$  possède une structure de groupe d'élément neutre  $y$ . Cette notion peut être vue comme un analogue pour les groupes de l'affinisation d'un espace vectoriel. Cette structure nous permet de considérer une *application produit* :

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathcal{D} := \{(a, x, y, z) \in X^- \times X^+ \times X^+ \times X^+, x, y, z \in a^\top\} &\rightarrow X^+ \\ (a, x, y, z) &\mapsto (xyz)_a \end{aligned}$$

où  $(xyz)_a$  est la loi de groupe sur  $a^\top$  d'élément neutre  $y$ . Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$  est de type  $A_n$ , munie d'une 3-gradation, W. Bertram et M. Kinyon ont montré dans [BK09a] qu'on pouvait étendre cette application à  $\mathcal{F}^5$  tout entier et que cette application possède des propriétés de symétrie remarquables (associativité, symétrie par rapport au groupe de Klein...) Il est naturel de se demander si dans le cas général d'une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée, l'application  $\Sigma$  se prolonge sur  $\mathcal{F}^4$  tout entier et si oui, quelles sont alors les propriétés de symétrie de ce prolongement.

Une partie des résultats qui suivent ont été annoncés dans [Che09].

# Chapitre I

## Algèbres de Lie graduées

L'objet de base dans ce travail est la notion d'*algèbre de Lie*, introduite par S. Lie (1842-1899). C'est un outil algébrique ("simple") permettant d'étudier les objets géométriques que sont les *groupes de Lie* ("plus difficiles à comprendre"). C'est S. Lie qui s'intéressa le premier à ces *groupes de transformations continues* pour étudier certaines propriétés des équations différentielles. L'exemple fondateur d'un groupe de Lie est le groupe des matrices inversibles réelles ou complexes et dans ce cas, l'algèbre de Lie associée est l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ou complexes, muni du crochet  $[ ; ]$ , défini par  $[A, B] := AB - BA$ , qui mesure le défaut de commutativité du produit des matrices.

Ce furent ensuite W. Killing (1847-1923) puis E. Cartan (1869-1951) qui développèrent l'étude des groupes de Lie pour arriver à une classification des groupes de Lie simples complexes. Puis C. Chevalley (1909-1984), membre du groupe Bourbaki, s'intéressa aux groupes et algèbres de Lie sur des corps autres que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , grâce à certains groupes d'automorphismes, appelés aujourd'hui *groupes de Chevalley* [Car72], [Hum78] ou [Ste68].

Avec le langage actuel, un groupe de Lie (réel ou complexe) est un groupe topologique, muni d'une structure de variété différentielle i.e localement difféomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  et tel que la multiplication et l'inversion sont lisses. Comme dit plus haut, l'exemple fondateur est  $GL_n(\mathbb{C})$  ou  $GL_n(\mathbb{R})$ . Mais on peut également citer leurs sous-groupes fermés, comme  $SL_n(\mathbb{C})$  (ou  $SL_n(\mathbb{R})$ ) le *groupe spécial linéaire*, des matrices de déterminant 1,  $O_n(\mathbb{C})$  le *groupe orthogonal*,  $SO_n(\mathbb{C}) = O_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$ ,  $U(n)$  le *groupe unitaire*,  $SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$  ou encore  $Sp_{2n}(\mathbb{C})$  le *groupe des matrices symplectiques* de taille  $2n$  et leur version réelle (voir [MT86] pour une liste de groupes de Lie classiques sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

À un groupe de Lie  $G$ , on associe une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , définie comme l'espace tangent à  $G$  en l'élément neutre. Autrement dit, localement autour du neutre, on peut identifier les éléments de  $G$  et ceux de  $\mathfrak{g}$ . On a donc autour de l'élément neutre "remplacé" l'objet géométrique, difficile à comprendre... par un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ , plus simple à étudier.

En se basant sur l'exemple des matrices, on peut définir une algèbre de Lie sur un anneau  $\mathbb{K}$  de la manière suivante :

**Définition I.0.1.** Une *algèbre de Lie* sur  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -module muni d'une application  $[\ ; \ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  bilinéaire telle que :

(AL1) pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $[x, x] = 0$  (on dit que  $[\ ; \ ]$  est alterné),

(AL2) pour tout  $(x, y, z) \in \mathfrak{g}$ ,  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  (on dit que  $[\ ; \ ]$  satisfait l'*identité de Jacobi*).

Reprenons l'exemple de l'introduction,  $\mathfrak{g} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , muni du commutateur

$$[A, B] := AB - BA,$$

et montrons que  $\mathfrak{g}$  est bien une algèbre de Lie. Soit  $(A, B, C) \in \mathfrak{g}$ . On a

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) \\ &\quad - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC \\ &\quad - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $[\ ; \ ]$  satisfait (AL2). L'autre condition est vérifiée par définition donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une algèbre de Lie.

On vérifie aisément que les sous-espaces de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  suivants sont aussi des algèbres de Lie :  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr } A = 0\}$ ,  $\mathfrak{o}(n) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A + A^t = 0\}$ ... Ce sont des sous-espaces de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , stables par le crochet. On les appelle des *sous-algèbres de Lie* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Si, au lieu de  $\mathbb{R}$ , on se place sur un autre anneau (commutatif), tout de qu'on vient de dire reste vrai. Donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , muni du crochet usuel est une algèbre de Lie sur  $\mathbb{K}$ .

On s'intéressera dans la suite plus particulièrement aux algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  *graduées* i.e  $\mathfrak{g}$  est somme directe de sous-espaces qui se comportent bien par rapport au crochet. Plus précisément, nous allons étudier les  $\mathbb{Z}$ -graduations (qui peuvent être de longueur finie ou non), mais aussi des graduations plus générales, par un groupe abélien, par exemple le réseau engendré par un système de racines.

## I.1 Algèbres de Lie $\Gamma$ -graduées

On considère un anneau  $\mathbb{K}$  (pour l'instant) quelconque. Nous allons présenter ici la notion de  $\Gamma$ -graduation d'une algèbre de Lie où  $\Gamma$  est un groupe abélien puis regarder un exemple simple d'une telle graduation, le cas où  $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Définition I.1.1.** Soit  $\Gamma$  un groupe abélien et  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{K}$ . On dit que  $\mathfrak{g}$  est  $\Gamma$ -gradué si  $\mathfrak{g}$  est de la forme :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma,$$

où chaque  $\mathfrak{g}_\gamma$  est un sous-module de  $\mathfrak{g}$  et  $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{\gamma'}] \subset \mathfrak{g}_{\gamma+\gamma'}$  pour tout  $(\gamma, \gamma') \in \Gamma$ .



On remarque que cette définition est l'analogue de la notion d'algèbre associative graduée; ici la loi utilisée est naturellement le crochet de Lie et non plus le produit associatif. Le premier exemple intéressant à étudier est celui où  $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### I.1.1 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduations et systèmes triples de Lie

Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  une algèbre de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée. On a  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_0$  et  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$  donc on peut considérer l'application trilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 &\rightarrow \mathfrak{g}_1 \\ (x, y, z) &\mapsto [x, y, z] := [[x, y], z]. \end{aligned}$$

Et pour  $(u, v, w, x, y, z) \in \mathfrak{g}_1$ , on vérifie qu'on a :

$$(STL1) \quad [x, y, z] = -[y, x, z],$$

$$(STL2) \quad [x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0,$$

$$(STL3) \quad [u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]].$$

**Définition I.1.2.** Un  $\mathbb{K}$ -module  $\mathfrak{q}$ , muni d'une application trilinéaire  $[ , , ]$  vérifiant (STL1), (STL2) et (STL3) est appelé un *système triple de Lie*.

Ainsi, si  $\mathfrak{g}$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée, alors  $(\mathfrak{g}_1, [ , , ])$  est un système triple de Lie i.e à une algèbre de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée, on associe un système triple de Lie. Qu'en est-il de la réciproque? A partir d'un système triple de Lie donné, peut-on construire une algèbre de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée? La réponse est oui et l'algèbre de Lie ainsi construite est appelée le *plongement standard* du système triple de Lie [Loo69]. Rappelons ici sa construction.

Soit  $\mathfrak{q}$  un système triple de Lie. On va construire une algèbre de Lie à partir  $\mathfrak{q}$ . Pour cela, si  $(x, y) \in \mathfrak{q}$ , on considère

$$\begin{aligned} R(x, y) : \mathfrak{q} &\rightarrow \mathfrak{q} \\ z &\mapsto [x, y, z]. \end{aligned}$$

Alors par (STL3),  $R(x, y)$  est une dérivation de  $\mathfrak{q}$ . On considère alors  $R(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}) \subset \text{Der}(\mathfrak{q})$ , la sous-algèbre de  $\text{Der}(\mathfrak{q})$  engendrée par les éléments de la forme  $R(x, y)$ , pour  $(x, y) \in \mathfrak{q}$  et on pose  $\mathfrak{g}(\mathfrak{q}) := R(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}) \oplus \mathfrak{q}$ . On définit alors sur  $\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$  un crochet bilinéaire et antisymétrique de la façon suivante :

- i) Si  $(x, y) \in \mathfrak{q}$ ,  $[x, y] := R(x, y) : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ ,
- ii) Si  $D \in R(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ ,  $x \in \mathfrak{q}$ ,  $[D, x] := Dx$ ,
- iii) Si  $D_1, D_2 \in R(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ ,  $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ .

**Définition I.1.3.**  $\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$  est une algèbre de Lie, appelée le *plongement standard* de  $\mathfrak{q}$ .

### I.1.2 Systèmes triples de Lie et espaces symétriques

Nous venons de voir qu'il existe une bijection entre l'ensemble des algèbres de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées et celui des systèmes triples de Lie, mais quel est l'objet géométrique correspondant? Même si cette première partie est essentiellement algébrique, intéressons

nous quelques instants à la géométrie. La réponse à la question précédente est la notion d'*espaces symétrique*. En effet, soit  $G/H$  un espace symétrique i.e  $G$  est un groupe de Lie et  $H$  est un sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif  $\sigma$  de  $G$ . On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . On a alors la décomposition en espaces propres  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ , où  $\mathfrak{h}$  est l'espace propre associé à la valeur propre 1 de  $\sigma$ , la différentielle de  $\sigma$  et  $\mathfrak{q}$  est l'espace propre associé à la valeur propre -1. Comme  $\sigma$  est un automorphisme d'ordre 2, on a  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ ,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$  et  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{h}$ . Autrement dit,  $\mathfrak{g}$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée et donc  $(\mathfrak{q}, [ , ], [ , , ]) est un système triple de Lie. Si on considère  $\mathfrak{g}$  comme une algèbre de Lie de champs de vecteur sur  $M = G/H$ , l'application d'évaluation  $\mathfrak{q} \rightarrow T_oM, X \mapsto X_o$ , où  $T_oM$  est l'espace tangent en  $o = eH$ , est une bijection. Ainsi, l'espace tangent en  $o$  à un espace symétrique est un système triple de Lie et  $[x, y, z]$  correspond (au signe près) au tenseur de courbure en  $o$  de la connexion canonique de  $M$  [Loo69].$

Réciproquement, à un système triple de Lie  $\mathfrak{q}$ , réel ou complexe, de dimension finie, on associe  $\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$  son plongement standard. C'est donc une algèbre de Lie réelle ou complexe et de dimension finie donc il existe un groupe de Lie  $G$  connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On considère ensuite l'involution  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (D, X) \mapsto (D, -X)$ , où  $D \in R(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$  et  $x \in \mathfrak{q}$ . Alors  $\sigma$  induit une involution  $\sigma$  de  $G$ , le sous-groupe des points fixes de  $\sigma$ ,  $H = G^\sigma$ , est connexe d'après [Loo69] et  $M := G/H$  est un espace symétrique connexe, simplement connexe de système triple de Lie associé  $\mathfrak{q}$ . Autrement dit, on obtient une bijection entre l'ensemble des systèmes triples de Lie réels (ou complexes) de dimension finie et celui des espaces symétriques connexes et simplement connexes. Plus précisément, on a une équivalence de catégories [Loo69].

Nous reviendrons plus tard sur l'exemple des systèmes triples de Lie et nous ferons le lien avec la notion que nous allons présenter maintenant, à savoir la notion de  $\mathbb{Z}$ -graduation d'une algèbre de Lie.

Avant cela, il faut remarquer que la notion de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation d'une algèbre de Lie ne correspond pas à celle de *super-algèbre de Lie* [Kac77]. En effet, dans la définition d'une super-algèbre de Lie, on remplace (AL1) et (AL2) par des versions également  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées. Nous ne parlerons pas ici de la théorie, très importante, des super-algèbres de Lie, avec principalement l'étude de leurs représentations [Kac78] et les généralisations des résultats connus pour les algèbres de Lie, tels que les modules de plus haut poids, les modules de Verma, la formule des caractères, [Ser05], [Ser98] ...

Passons en revanche à la notion de  $\mathbb{Z}$ -graduation.

## I.2 Algèbres de Lie $\mathbb{Z}$ -graduées

### I.2.1 Généralités

A présent, nous allons développer la notion de  $\mathbb{Z}$ -graduation d'une algèbre de Lie et donner des exemples simples de telles graduations sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Puis nous ferons le lien entre les  $\mathbb{Z}$ -graduations de longueur finie et les objets algébriques que sont les systèmes triples de Lie introduits précédemment, les *paires de Jordan* [Loo75], les *paires de Freudenthal-Kantor* [Kam89] ou de manière plus générale les *systèmes triples de Jordan généralisés* [KA88] et [Kan72].

**Définition I.2.1.** Une *algèbre de Lie  $\mathbb{Z}$ -graduée* (sur  $\mathbb{K}$ ) est une algèbre de Lie sur  $\mathbb{K}$  de la forme

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n, \text{ avec } \mathfrak{g}_n \text{ un } \mathbb{K}\text{-sous-module de } \mathfrak{g} \text{ et } [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subset \mathfrak{g}_{n+m} \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Pour faire le lien avec ce qui précède, si  $\mathfrak{g}$  est  $\mathbb{Z}$ -graduée, alors la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{pair}} \oplus \mathfrak{g}_{\text{impair}},$$

avec  $\mathfrak{g}_{\text{pair}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{2n}$  et  $\mathfrak{g}_{\text{impair}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{2n+1}$  est une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  et donc  $\mathfrak{g}_{\text{impair}}$  est un système triple de Lie.

**Définition I.2.2.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $\mathbb{Z}$ -graduée. On dira que  $\mathfrak{g}$  est  $(2k+1)$ -graduée si le support de la gradation est fini i.e  $\mathfrak{g}_n = \{0\}$  si  $|n| > k$ . Autrement dit, il n'y a que  $(2k+1)$  sous-espaces intervenant dans la décomposition de  $\mathfrak{g}$  :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}.$$

Dans ce cas, l'application  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  définie par  $DX = nX$  si  $X \in \mathfrak{g}_n$  est une *dérivation* de  $\mathfrak{g}$  (i.e  $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$ ), appelée la *dérivation caractéristique* de la gradation. On a alors  $(D - k \text{ Id}) \dots (D - \text{ Id})D(D + \text{ Id}) \dots (D + k \text{ Id}) = 0$ . Réciproquement, si les entiers de 2 à  $2k$  sont inversibles dans  $\mathbb{K}$ , alors toute dérivation  $D$  de  $\mathfrak{g}$  qui vérifie  $(D - k \text{ Id}) \dots (D - \text{ Id})D(D + \text{ Id}) \dots (D + k \text{ Id}) = 0$  est diagonalisable et sa décomposition en espaces propres est une  $(2k+1)$ -gradation de  $\mathfrak{g}$ ; la somme directe étant due au fait que les entiers  $2, \dots, 2k$  sont inversibles. En effet, si  $x \in \mathfrak{g}_n \cap \left( \sum_{m \neq n} \mathfrak{g}_m \right)$ , on a  $x = \sum_{m \neq n} x_m$  avec  $x_m \in \mathfrak{g}_m$  et alors  $nx = Dx = \sum_{m \neq n} mx$  i.e  $\sum_{m \neq n} (n - m)x_m = 0$ . Or la plus grande valeur prise par  $n - m$  est  $2k$  donc  $n - m$  est inversible et donc  $x = 0$ . Donc on peut identifier l'espace des  $(2k+1)$ -gradations de  $\mathfrak{g}$  avec l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{G}} := \{D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), (D - k \text{ Id}) \dots (D - \text{ Id})D(D + \text{ Id}) \dots (D + k \text{ Id}) = 0\}.$$

Si  $D = \text{ad}(E)$ , avec  $E \in \mathfrak{g}$ ,  $D$  est appelée une *dérivation intérieure* et  $E$  un *opérateur d'Euler* de la gradation. On définit alors

$$\mathcal{G} := \left\{ \text{ad}(E), E \in \mathfrak{g}, \text{ad}(E) \in \tilde{\mathcal{G}} \right\}$$

l'espace des  $(2k+1)$ -gradations intérieures de  $\mathfrak{g}$ .

On remarque que si  $E$  et  $E'$  sont deux opérateurs d'Euler d'une même gradation, alors  $E - E'$  appartient au centre de  $\mathfrak{g}$  donc si  $\mathfrak{g}$  est sans centre, l'opérateur d'Euler d'une gradation, s'il existe, est unique. En particulier, c'est le cas si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. Par ailleurs, si toute dérivation est intérieure, la dérivation caractéristique provient nécessairement d'un opérateur d'Euler. Ce qui est encore le cas si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. En résumé, si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, toute  $(2k+1)$ -gradation est intérieure et admet un unique opérateur d'Euler.

Reprenons l'exemple des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et intéressons-nous à certaines de ses  $\mathbb{Z}$ -gradations.

Commençons par le plus simple, à savoir les 3-graduations de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

Alors  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$  est muni de la 3-gradation suivante :

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{K} \right\}, \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{K} \right\}, \text{ et } \mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{K} \right\},$$

et dans ce cas, la dérivation caractéristique est donnée par l'opérateur d'Euler suivant :

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si on fixe un couple  $(p, q)$  tel que  $n = p + q$ , alors on obtient une 3-gradation de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en considérant :

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \right\}, \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}) \right\},$$

$$\text{et } \mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Ainsi pour chaque couple  $(p, q)$ , on obtient une 3-gradation de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Et dans ce cas, l'opérateur d'Euler de la gradation est donné par

$$E := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0_q \end{pmatrix}.$$

De manière analogue, si on fixe un triplet  $(p, q, r)$  tel que  $p + q + r = n$ , alors on obtient une 5-gradation de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en posant :

$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \right\}, \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), F \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), E \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), J \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \end{pmatrix}, D \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), H \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \right\}, \text{ et } \mathfrak{g}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix}, G \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Ainsi pour chaque triplet  $(p, q, r)$ , on obtient une 5-gradation de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et dans ce cas, l'opérateur d'Euler de la gradation est donné par

$$E := \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0_q & 0 \\ 0 & 0 & -I_r \end{pmatrix}.$$

Nous reviendrons plus en détails sur les  $\mathbb{Z}$ -graduations de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  (mais aussi des autres algèbres de Lie classiques) dans la suite, lorsque nous nous intéresserons à la classification des  $\mathbb{Z}$ -graduations des algèbres de Lie semi-simples réelles présente dans [KA88].

Les résultats sur les  $\mathbb{Z}$ -graduations, notamment les classifications des  $\mathbb{Z}$ -graduations de longueur finie des algèbres de Lie simples réelles ou complexes (par exemple celle de [KA88]) ont de nombreuses applications. On peut citer l'étude des orbites nilpotentes par V. Kac [Kac80], [EK05] qui utilise la notion de *bonnes  $\mathbb{Z}$ -graduations*, ou l'étude de certains espaces, comme les espaces symétriques [FKK<sup>+</sup>00] et les R-espaces symétriques [Loo85]. En effet, les espaces symétriques et les R-espaces symétriques sont fortement liés aux algèbres de Lie 3-graduées. Cette remarque nous amènera à nous poser dans la suite la question de savoir quel objet géométrique correspond aux algèbres de Lie possédant une graduation plus longue. Pour l'instant, nous allons nous focaliser sur l'aspect algébrique, et dans ce cadre, les  $\mathbb{Z}$ -graduations nous permettent aussi l'étude d'objets algébriques non associatifs, par exemple les paires ou les algèbres de Jordan, liées aux 3-graduations [Loo75], les paires de Freudenthal-Kantor, liées aux 5-graduations [Kam89], mais aussi les systèmes triples de Jordan généralisés [KA88] ou les paires associatives [Ber10] et [BK09a].

Nous allons nous intéresser ici à ces différents objets et voir leurs liens avec les  $\mathbb{Z}$ -graduations d'une algèbre de Lie.

## I.2.2 3-graduations et théorie de Jordan

Dans cette partie,  $\mathbb{K}$  est un anneau commutatif unitaire avec 2 et 3 inversibles. On considère  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{K}$ , 3-graduée. On a donc  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ . Alors par définition, on a  $[[\mathfrak{g}_{\pm 1}, \mathfrak{g}_{\mp 1}], \mathfrak{g}_{\pm 1}] \subset \mathfrak{g}_{\pm 1}$ . On obtient donc deux applications trilinéaires :

$$\begin{aligned} T^\pm : \mathfrak{g}_{\pm 1} \times \mathfrak{g}_{\mp 1} \times \mathfrak{g}_{\pm 1} &\rightarrow \mathfrak{g}_{\pm 1} \\ (x, y, z) &\mapsto T^\pm(x, y, z) := [[x, y], z] \end{aligned}$$

On utilisera aussi la notation  $T^\pm(x, y)z := T^\pm(x, y, z)$ , de sorte que, pour tout couple  $(x, y) \in \mathfrak{g}_{\pm 1} \times \mathfrak{g}_{\mp 1}$ , on a  $T^\pm(x, y) \in \text{End}(\mathfrak{g}_{\pm 1})$ .

Alors, comme  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$  sont abéliens, on a par l'identité de Jacobi :

$$T^\pm(x, \cdot, z) = T^\pm(z, \cdot, x), \text{ pour tout } (x, z) \in \mathfrak{g}_{\pm 1}.$$

Par ailleurs, on obtient la relation suivante pour  $T^\pm$  :

$$T^\pm(u, v)T^\pm(x, y, z) = T^\pm(T^\pm(u, v, x), y, z) - T^\pm(x, T^\mp(v, u, y), z) + T^\pm(x, y, T^\pm(u, v, z)),$$

pour tout  $(u, x, z) \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$ ,  $(v, y) \in \mathfrak{g}_{\mp 1}$ . En effet,

$$\begin{aligned} T^\pm(u, v)T^\pm(x, y, z) &= \left[ [u, v], [[x, y], z] \right] \\ &= \left[ [[u, v], [x, y]], z \right] + \left[ [x, y], [[u, v], z] \right] \\ &= \left[ [[u, v], x], y, z \right] + \left[ [x, [[u, v], y]], z \right] + \left[ [x, y], [[u, v], z] \right] \\ &= T^\pm(T^\pm(u, v, x), y, z) - T^\pm(x, T^\mp(v, u, y), z) + T^\pm(x, y)T^\pm(u, v, z) \end{aligned}$$

On remarque d'ailleurs que cette relation est vraie pour une graduation de n'importe quelle longueur.

Cette observation nous amène à poser la définition suivante :

**Définition I.2.3.** Une paire de  $\mathbb{K}$ -modules  $(V^+, V^-)$  munis de deux applications tri-linéaires  $T^+ : V^+ \times V^- \times V^+ \rightarrow V^+$  et  $T^- : V^- \times V^+ \times V^- \rightarrow V^-$  vérifiant :

(PJ1)  $T^\pm(x, \cdot, z) = T^\pm(z, \cdot, x)$ , pour tout  $(x, z) \in V^\pm$ ,

(PJ2)  $T^\pm(u, v)T^\pm(x, y, z) = T^\pm(T^\pm(u, v, x), y, z) - T^\pm(x, T^\mp(v, u, y), z) + T^\pm(x, y, T^\pm(u, v, z))$ ,  
pour tout  $(u, x, z) \in V^\pm, (v, y) \in V^\mp$ ,

est appelée une *paire de Jordan*.

Puisque 2 et 3 ont été supposés inversibles dans  $\mathbb{K}$ , cette définition coïncide avec celle de [Loo75]. Ainsi, à une algèbre de Lie 3-graduée  $\mathfrak{g}$ , on associe une paire de Jordan  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$ .

Réciproquement, soit  $(V^+, V^-)$  une paire de Jordan. On va construire une algèbre de Lie 3-graduée telle que  $\mathfrak{g}_{\pm 1} = V^\pm$  (voir [Mey70]). Pour cela, on considère les opérateurs

$$T^\pm(x, y) : V^\pm \rightarrow V^\pm, z \mapsto T^\pm(x, y)z := T^\pm(x, y, z), \text{ pour } x \in V^\pm, y \in V^\mp.$$

Donc  $T^\pm(x, y) \in \text{End}(V^\pm)$ . On considère également l'*algèbre des dérivations* de  $(V^+, V^-)$  définie par

$$\text{Der}(V^+, V^-) := \{(A^+, A^-), A^\pm T^\pm(x, y, z) = T^\pm(A^\pm x, y, z) + T^\pm(x, A^\mp y, z) + T^\pm(x, y, A^\pm z)\},$$

où  $(A^+, A^-) \in \text{End}(V^+) \times \text{End}(V^-)$  et  $(x, y, z) \in V^\pm \times V^\mp \times V^\pm$ .

Alors par (PJ2), les opérateurs de la forme  $(T^+(x, y), -T^-(y, x))$  sont des dérivations de  $(V^+, V^-)$ , qu'on appelle *dérivations intérieures*. On considère  $\text{Ider}(V^+, V^-)$  la sous-algèbre de  $\text{Der}(V^+, V^-)$  engendrée par les dérivations intérieures, et également

$$E := (\text{Id}_{V^+}, -\text{Id}_{V^-}) \in \text{Der}(V^+, V^-),$$

appelé *opérateur d'Euler* de la paire  $(V^+, V^-)$ . Alors on définit

$$TKK(V^+, V^-) := V^+ \oplus (\text{Ider}(V^+, V^-) + \mathbb{K}E) \oplus V^-.$$

On munit  $TKK(V^+, V^-)$  du crochet  $[\cdot; \cdot]$  bilinéaire et alterné défini par :

- i) Si  $(x, y) \in V^+ \times V^-$ ,  $[x, y] = (T^+(x, y), -T^-(y, x))$ ,
- ii) Si  $D = (D^+, D^-) \in \text{Ider}(V^+, V^-) + \mathbb{K}E$ ,  $x \in V^+$ ,  $y \in V^-$ ,  $[D, x] = D^+x$  et  $[D, y] = D^-y$ ,
- iii) Si  $D_1 = (D_1^+, D_1^-)$ ,  $D_2 = (D_2^+, D_2^-)$ ,  $[D_1, D_2] = ([D_1^+, D_2^+], [D_1^-, D_2^-])$ .

On peut vérifier aisément que le crochet ainsi défini munit  $TKK(V^+, V^-)$  d'une structure d'algèbre de Lie mais on peut également remarquer que  $TKK(V^+, V^-)$  n'est autre que le plongement standard du système triple de Lie  $\mathfrak{q} = V^+ \oplus V^-$ .

**Définition I.2.4.** L'algèbre de Lie  $TKK(V^+, V^-)$  est appelée l'*algèbre de Kantor-Koecher-Tits* de la paire  $(V^+, V^-)$ . Par définition, elle est 3-graduée et  $\text{ad}(E)$  est la dérivation caractéristique associée à la graduation i.e  $E$  est un opérateur d'Euler de la graduation.

On remarque que si  $\mathfrak{g}_0 \subset \text{Der}(V^+, V^-)$  est une sous-algèbre de  $\text{Der}(V^+, V^-)$  contenant  $\text{Ider}(V^+, V^-)$  et  $E$ , alors il existe une unique structure d'algèbre de Lie 3-graduée sur  $\mathfrak{g} = V^+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus V^-$ , telle que  $[x, y] = (T^+(x, y), -T^-(y, x))$  pour  $(x, y) \in V^+ \times V^-$ . Le choix de  $\mathfrak{g}_0 = \text{Ider}(V^+, V^-) + \mathbb{K}E$  a l'avantage que dans ce cas,  $\mathfrak{g}$  est sans centre.

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des paires de Jordan et les algèbres de Lie 3-graduées telles que  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}] = \mathfrak{g}_0$  et vérifiant que si un élément  $x_0 \in \mathfrak{g}_0$  commute avec  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$  alors  $x_0 = 0$ ; les deux constructions présentées ci-dessus étant réciproque l'une de l'autre (voir par exemple [Ber00] ou [Neh96]).

### I.2.3 5-graduations et paires de Freudenthal-Kantor

On vient de voir qu'à une algèbre de Lie 3-graduée, on peut associer une paire de Jordan. On peut donc se demander quel objet algébrique correspond à une algèbre de Lie munie d'une graduation plus longue. Intéressons-nous pour le moment au cas où notre algèbre de Lie est 5-graduée et considérons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-2}$ . Comme précédemment, on a deux applications trilinéaires

$$\begin{aligned} T^\pm : \mathfrak{g}_{\mp 1} \times \mathfrak{g}_{\mp 1} \times \mathfrak{g}_{\pm 1} &\rightarrow \mathfrak{g}_{\pm 1} \\ (x, y, z) &\mapsto T^\pm(x, y, z) := [[x, y], z] \end{aligned}$$

Le crochet de  $\mathfrak{g}$  satisfaisant toujours l'identité de Jacobi, on a toujours que  $T^+$  et  $T^-$  vérifient l'identité (PJ2). En revanche,  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$  ne sont plus abéliens car  $[\mathfrak{g}_{\pm 1}, \mathfrak{g}_{\pm 1}] \subset \mathfrak{g}_{\pm 2}$  donc on n'a plus que  $T^\pm$  est symétrique en  $x$  et  $z$  (on suppose que  $\mathfrak{g}_{\pm 2} \neq 0$  i.e on a une vraie 5-graduation et pas une 3-graduation). On va alors introduire un opérateur mesurant le défaut le commutativité de  $T^\pm$  en  $x$  et  $z$ . Pour  $(x, z) \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$ , on pose :

$$K^\pm(x, z) := T^\pm(x, \cdot, z) - T^\pm(z, \cdot, x) : \mathfrak{g}_{\mp 1} \rightarrow \mathfrak{g}_{\pm 1}.$$

Alors on montre que les opérateurs  $K^\pm(x, z)$  vérifient l'identité suivante :

$$K^\pm(x, z)T^\mp(v, u) = K^\pm(K^\pm(x, z)v, u) - T^\pm(u, v)K^\pm(x, z),$$

pour  $(u, x, z) \in V^\pm$ ,  $v \in V^\mp$ . Ceci nous amène à poser la définition suivante :

**Définition I.2.5.** Une paire de  $\mathbb{K}$ -modules  $(V^+, V^-)$  munis de deux applications trilinéaires  $T^+ : V^+ \times V^- \times V^+ \rightarrow V^+$  et  $T^- : V^- \times V^+ \times V^- \rightarrow V^-$  telles que si on pose  $K^\pm(x, z) = T^\pm(x, \cdot, z) - T^\pm(z, \cdot, x)$ , on a

- (PFK1)  $K^\pm(x, z)T^\mp(v, u) = K^\pm(K^\pm(x, z)v, u) - T^\pm(u, v)K^\pm(x, z)$ , pour  $(u, x, z) \in V^+$ ,  $v \in V^-$ ,  
(PFK2)  $T^\pm(u, v)T^\pm(x, y, z) = T^\pm(T^\pm(u, v, x), y, z) - T^\pm(x, T^\mp(v, u, y), z) + T^\pm(x, y, T^\pm(u, v, z))$ ,  
pour tout  $(u, x, z) \in V^\pm$ ,  $(v, y) \in V^\mp$ ,

est appelée une *paire de Freudenthal-Kantor*.

On trouve cette notion de paires de Freudenthal-Kantor dans [Ber02a]. Ainsi, à une algèbre de Lie 5-graduée, on associe une paire de Freudenthal-Kantor  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$ . Réciproquement, on peut adapter la construction de Kantor-Koecher-Tits pour construire, à partir d'une paire de Freudenthal-Kantor une algèbre de Lie 5-graduée, engendrée par  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Soit  $(V^+, V^-)$  une paire de Freudenthal-Kantor. On considère cette fois encore  $\text{Ider}(V^+, V^-)$  la sous-algèbre de  $\text{Der}(V^+, V^-)$  engendrée par les dérivations intérieures de la paire  $(V^+, V^-) : \{(T^+(x, y), -T^-(y, x)), x \in V^+, y \in V^-\}$ , mais aussi  $\mathfrak{g}_{\pm 2} \subset \text{End}(V^\mp, V^\pm)$ , le  $\mathbb{K}$ -module engendré par les opérateurs de la forme  $K^\pm(x, z)$ ,  $(x, z) \in V^\pm$ . On considère enfin  $E := (\text{Id}_{V^+}, -\text{Id}_{V^-})$ . On définit alors le module

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_2 \oplus V^+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus V^- \oplus \mathfrak{g}_{-2},$$

où  $\mathfrak{g}_0 = \text{Ider}(V^+, V^-) + \mathbb{K}E$ , et on le munit d'un crochet bilinéaire et alterné défini par :

- i) Si  $(x, y) \in V^+ \times V^-$ ,  $[x, y] = (T^+(x, y), -T^-(y, x))$ ,

- ii) Si  $D = (D^+, D^-) \in \mathfrak{g}_0, x \in V^+, y \in V^-, [D, x] = D^+x$  et  $[D, y] = D^-y$ ,
- iii) Si  $D_1 = (D_1^+, D_1^-), D_2 = (D_2^+, D_2^-) \in \mathfrak{g}_0, [D_1, D_2] = ([D_1^+, D_2^+], [D_1^-, D_2^-])$ ,
- iv) Si  $K^\pm(x, z) \in \mathfrak{g}_{\pm 2}, y \in V^\mp, u \in V^\pm, [K^\pm(x, z), y] = K^\pm(x, z)y$  et  $[K^\pm(x, z), u] = 0$ ,
- v) Si  $K^\pm(x, z) \in \mathfrak{g}_{\pm 2}, D = (D^+, D^-) \in \mathfrak{g}_0, [D, K^\pm(x, z)] = K^\pm(D^\pm x, z) - K^\pm(x, D^\pm z)$ ,
- vi) Si  $K^+(x, z) \in \mathfrak{g}_2, K^-(u, v) \in \mathfrak{g}_{-2}$ ,

$$[K^+(x, z), K^-(u, v)] = (T^+(K^+(x, z)u, v) - T^+(K^+(x, z)v, u); -T^-(v, K^+(x, z)u) + T^-(u, K^+(x, z)v)),$$

- vii) Si  $K^\pm(x, z), K^\pm(a, b) \in \mathfrak{g}_{\pm 2}, [K^\pm(x, z), K^\pm(a, b)] = 0$ .

On a alors le résultat suivant :

**Proposition I.2.1.** *Le  $\mathbb{K}$ -module  $\mathfrak{g}$ , muni du crochet  $[\cdot, \cdot]$  est une algèbre de Lie 5-graduée de dérivation caractéristique  $\text{ad}(E)$ .*

*Démonstration.*

Comme pour le cas des paires de Jordan, on peut montrer au cas par cas que le crochet satisfait l'identité de Jacobi, mais on peut aussi remarquer que cette construction correspond encore une fois au plongement standard du système triple de Lie  $\mathfrak{q} := V^+ \oplus V^-$ .  $\square$

## I.2.4 Systèmes triples de Lie et $\mathbb{Z}$ -graduations

Revenons sur l'exemple des espaces symétriques. On a vu que dans ce cas, l'espace tangent en  $o = eH$  d'un espace symétrique  $M = G/H$  possède une structure de système triple de Lie. Autrement dit, l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée, en reprenant les notations de la partie I.1.2. On suppose à présent que  $\mathfrak{h} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ .

**Définition I.2.6.** Un endomorphisme  $I : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$  est appelé une *polarisation* si  $I^2 = \text{Id}$  i.e si  $I$  est une involution.

On dit en outre que  $I$  est *twisté* si  $I[x, y, z] = [Ix, y, z] + [x, Iy, z] + [x, y, Iz]$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathfrak{q}$  i.e  $I$  est une dérivation de  $[\cdot, \cdot, \cdot]$ .

On suppose qu'il existe une telle polarisation twistée sur  $\mathfrak{q}$ . Alors on a la décomposition suivante de  $\mathfrak{q}$  en sous-espaces propres de  $I : \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_{-1}$  où  $\mathfrak{q}_1$  est l'espace propre associé à la valeur propre 1 et  $\mathfrak{q}_{-1}$  celui associé à -1.

Par ailleurs, si  $(x, y) \in \mathfrak{q}, [x, y] \in \mathfrak{h}$  et  $[I, [x, y]] = I[x, y] - [x, y]I = [Ix, y] + [x, Iy]$  donc  $\text{ad}(I)$  définit une dérivation de  $\mathfrak{g}$ , laissant stable  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{q}$ . Elle induit donc une décomposition de  $\mathfrak{g}$  en sous-espaces propres de  $\text{ad}(I)$  :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_n \mathfrak{g}_n, \quad \text{avec } [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subset \mathfrak{g}_{n+m}.$$

D'où les relations suivantes :

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1] \subset \mathfrak{h}_2, \quad [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_{-1}] \subset \mathfrak{h}_0, \quad \text{et } [\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-1}] \subset \mathfrak{h}_{-2}.$$



Comme on a supposé que  $\mathfrak{h}$  est engendré par  $\mathfrak{q}$ , on a  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_{-2}$ , et alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{q}_{-1} \oplus \mathfrak{h}_{-2}$$

est une 5-graduation de  $\mathfrak{g}$ .

Regardons maintenant le cas où cette 5-graduation est en fait une 3-graduation i.e lorsque  $\mathfrak{h}_{\pm 2} = 0$ .

**Définition I.2.7.** Une polarisation  $I$  d'un système triple de Lie  $\mathfrak{q}$  est dite *invariante* si  $I$  commute avec  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$  i.e  $I[x, y, z] = [x, y, Iz]$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathfrak{q}$ .

On suppose à présent que  $I$ , polarisation twistée de  $\mathfrak{q}$  est en outre invariante. Alors si  $(x, y) \in \mathfrak{q}_1$ , on a  $[x, y] = [x, Iy] = -[Ix, y] = -[x, y]$ , d'où  $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1] = 0$  et de même  $[\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-1}] = 0$  et par suite  $\mathfrak{h}_2 = 0 = \mathfrak{h}_{-2}$ . Donc finalement

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{q}_{-1}$$

est une 3-graduation.

Cette construction d'algèbres de Lie graduées peut se faire en termes de systèmes triples de Lie uniquement, en utilisant le plongement standard. Et donc on vient de voir que si  $\mathfrak{q}$  possède une polarisation twistée  $I$ , alors  $\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$  est 5-graduée et si  $I$  est en outre invariante,  $\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$  est 3-graduée. On a déjà rencontré ces deux cas de figure lors de la construction de Kantor-Koecher-Tits associée à une paire de Freudenthal-Kantor ou une paire de Jordan.

## I.2.5 Algèbre de Lie graduée universelle et systèmes triples de Jordan

Nous avons vu dans les parties précédentes qu'à une paire de Jordan ou à une paire de Freudenthal-Kantor, on pouvait associer une algèbre de Lie graduée (3 ou 5-graduée). Dans cette partie, nous allons présenter une généralisation de cette construction, due à Kantor [Kan70] et [Kan72], qui, à un *système triple de Jordan généralisé* [Kan72], [KA88] associe une algèbre de Lie graduée, appelée *algèbre de Lie graduée universelle*. Contrairement aux cas précédents, la graduation n'est pas nécessairement de longueur finie.

Dans les parties précédentes, nous avons plutôt parlé de paires de modules (de Jordan, ou de Freudenthal-Kantor). Faisons tout d'abord le lien entre paires (par exemple de Jordan) et systèmes triples (de Jordan). Soit  $(V^+, V^-)$  une paire de Jordan.

**Définition I.2.8.** On appelle *involution* de la paire  $(V^+, V^-)$  un couple d'applications linéaires  $\tau = (\tau^+, \tau^-)$ ,  $\tau^\pm : V^\pm \rightarrow V^\mp$  telles que

$$(Inv1) \quad \tau^\pm T^\pm(x, y, z) = T^\mp(\tau^\pm x, \tau^\mp y, \tau^\pm z), \text{ pour tout } (x, y, z) \in V^\pm,$$

$$(Inv2) \quad \tau^\mp \circ \tau^\pm = \text{Id}_{V^\pm}.$$

Un couple d'applications linéaires  $\sigma = (\sigma^+, \sigma^-)$ ,  $\sigma^\pm : V^\pm \rightarrow V^\mp$  ne vérifiant que la condition (Inv1) est appelé un *anti-automorphisme* de la paire  $(V^+, V^-)$ .

Supposons que notre paire de Jordan  $(V^+, V^-)$  admet une telle involution. Alors on pose  $V := V^+$  et  $\{xyz\} := T^+(x, \tau^+y, z)$  pour  $(x, y, z) \in V$ . Cette application  $\{ \}$  satisfait les deux identités suivantes :

$$(STJ1) \quad \{xyz\} = \{zyx\} \text{ pour tout } (x, y, z) \in V,$$

$$(STJ2) \quad \{uv\{xyz\}\} = \{\{uvx\}yz\} - \{x\{vuy\}z\} + \{xy\{uvz\}\} \text{ pour tout } (u, v, x, y, z) \in V.$$

**Définition I.2.9.** Un  $\mathbb{K}$ -module  $V$ , muni d'une application trilinéaire vérifiant (STJ1) et (STJ2) est appelé un *système triple de Jordan*.

Donc, à une paire de Jordan munie d'une involution, on associe un système triple de Jordan.

Réciproquement, si  $V$  est système triple de Jordan, on pose

$$V^+ := V =: V^- \text{ et } T^\pm(x, y, z) := \{xyz\}.$$

Alors  $(V^+, V^-)$  est une paire de Jordan et  $\text{Id} : V^\pm \rightarrow V^\mp$  est une involution.

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des paires de Jordan avec involution et celui des systèmes triples de Jordan. Mais on peut aussi construire une bijection entre l'ensemble des paires de Jordan et celui des systèmes triples de Jordan *polarisés* (voir la définition I.2.10).

Soit  $(V^+, V^-)$  une paire de Jordan. On pose  $V := V^+ \oplus V^-$  et on définit un produit triple sur  $V$  en posant pour  $x = x^+ + x^-$ ,  $y = y^+ + y^-$ ,  $z = z^+ + z^- \in V$ ,

$$\{xyz\} := T^+(x^+, y^-, z^+) + T^-(x^-, y^+, z^-).$$

Alors  $V$  est un système triple de Jordan tel que  $\{V^\pm V^\pm V^\pm\} = 0$  et  $\{V^\pm V^\mp V^\pm\} \subset V^\pm$ . Ce qui nous amène à la définition d'un système triple de Jordan polarisé :

**Définition I.2.10.** Un système triple de Jordan  $V$  est dit *polarisé* si  $V = V^+ \oplus V^-$ , où  $V^+$  et  $V^-$  sont deux sous-modules de  $V$  tels que  $\{V^\pm V^\pm V^\pm\} = 0$  et  $\{V^\pm V^\mp V^\pm\} \subset V^\pm$ .

On obtient alors une bijection entre l'ensemble des paires de Jordan et celui des systèmes triples de Jordan polarisés. On peut munir ces ensembles de structures de catégories et construire des équivalences de catégories entre elles [Loo75], [Ber00].

On peut calquer cette construction pour construire, en partant d'une paire de Freudenthal-Kantor, un système triple de Freudenthal-Kantor [Ber02a].

On a vu plus tôt que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie 3-graduée, alors  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  est une paire de Jordan et si  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée, alors  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  est une paire de Freudenthal-Kantor. Qu'en est-il si  $\mathfrak{g}$  possède une graduation plus longue, voire de longueur infinie? On peut toujours considérer les opérateurs :

$$T^\pm : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\pm 1} \times \mathfrak{g}_{\mp 1} \times \mathfrak{g}_{\pm 1} & \rightarrow & \mathfrak{g}_{\pm 1} \\ (x, y, z) & \mapsto & [[x, y], z] \end{array} .$$

Alors par l'identité de Jacobi, les opérateurs  $T^\pm$  satisfont toujours l'identité (PJ2). Ceci nous amène à poser la définition suivante :

**Définition I.2.11.** Une paire de  $\mathbb{K}$ -modules  $(V^+, V^-)$ , munis d'applications trilinéaires  $T^\pm : V^\pm \times V^\mp \times V^\pm \rightarrow V^\pm$  satisfaisant (PJ2) est appelée une *paire de Jordan généralisée*.

Ainsi, à une algèbre de Lie graduée, on associe une paire de Jordan généralisée. Comme précédemment pour les paires de Jordan, on considère également les systèmes triples de Jordan généralisés, définis dans [Kan72] ou [KA88].

**Définition I.2.12.** Un  $\mathbb{K}$ -module  $V$ , muni d'une application trilinéaire  $\{ \quad \}$  vérifiant (STJ2) est appelé un système triple de Jordan généralisé.

On peut appliquer les mêmes constructions que pour les paires de Jordan afin d'obtenir différentes bijections entre les paires de Jordan généralisées et les systèmes triples de Jordan généralisés.

La suite de cette partie va consister à expliquer la construction de Kantor, présentée dans [Kan70] et [Kan72], généralisant la construction de Kantor-Koecher-Tits, qui à un système triple de Jordan généralisé associe une algèbre de Lie graduée [Kan72], [KA88] et [Pal09].

Considérons tout d'abord un module  $V$  (pour l'instant sans produit triple). On pose  $\tilde{U}_{-1} := V$ . On cherche à construire une algèbre de Lie graduée :

$$\tilde{U} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{U}_n.$$

On considère tout d'abord  $\tilde{U}_-$  l'algèbre de Lie libre engendrée par  $\tilde{U}_{-1}$  [Bou72]. Alors, par définition,  $\tilde{U}_-$  possède une graduation naturelle :

$$\tilde{U}_- = \bigoplus_{n \geq 1} \tilde{U}_{-n},$$

où  $\tilde{U}_{-n}$  est engendré par les éléments de la forme  $[[\dots [x_1, x_2], \dots], x_n]$ ,  $x_i \in \tilde{U}_{-1}$ . On rappelle que l'algèbre de Lie libre engendrée par  $\tilde{U}_{-1}$  est définie comme l'algèbre associative libre engendrée par  $\tilde{U}_{-1}$ , notée  $Lib(\tilde{U}_{-1})$ , quotientée par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme :

i)  $Q(a) = a \cdot a$ , avec  $a \in Lib(\tilde{U}_{-1})$ ,

ii)  $J(a, b, c) = a \cdot (b \cdot c) + b \cdot (c \cdot a) + c \cdot (a \cdot b)$ , pour  $(a, b, c) \in Lib(\tilde{U}_{-1})$ ,

où  $\cdot$  est le produit dans  $Lib(\tilde{U}_{-1})$ . La classe de  $a \cdot b$  est alors notée  $[a, b]$ .

Reste à présent à construire

$$\tilde{U}_+ = \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{U}_n$$

et à définir un crochet. Pour cela, on considère  $\tilde{U}_n$  l'ensemble des applications  $(n+1)$ -linéaires sur  $\tilde{U}_{-1}$  et à valeurs dans  $\tilde{U}_{-1}$ . Si  $\mathbb{K}$  est un corps et si  $\tilde{U}_{-1}$  est de dimension finie, alors en notant  $\tilde{U}_{-1}^*$  l'espace dual de  $\tilde{U}_{-1}$ , on a

$$\tilde{U}_n = \left( \otimes^{n+1} \tilde{U}_{-1}^* \right) \otimes \tilde{U}_{-1}.$$

Et on pose

$$\tilde{U}_+ := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n.$$

Il reste alors à définir un crochet de Lie sur  $\tilde{U}_+$ .

Si  $(A_0, B_0) \in \tilde{U}_0 = \text{End}(V)$ , on considère le crochet usuel  $[A_0, B_0] = A_0B_0 - B_0A_0$ .

Si  $A_0 \in \tilde{U}_0$  et  $B_1 \in \tilde{U}_1$ , alors  $A_0 : V \rightarrow V$  et  $B_1 : V \times V \rightarrow V$  sont respectivement linéaire et bilinéaire. Dans ce cas, on veut que  $[A_0, B_1]$  appartienne à  $\tilde{U}_1$  i.e  $[A_0, B_1]$  doit être une application bilinéaire. Alors on pose pour  $(x, y) \in V$  :

$$[A_0, B_1](x, y) := A_0(B_1(x, y)) - B_1(A_0x, y) - B_1(x, A_0y).$$

Plus généralement, si  $A_0 \in \tilde{U}_0$  et  $B_k \in \tilde{U}_k$ , alors  $[A_0, B_k]$  doit appartenir à  $\tilde{U}_k$  et alors on pose, pour  $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in V$  :

$$[A_0, B_k](x_1, \dots, x_{k+1}) := A_0(B_k(x_1, \dots, x_{k+1})) - B_k(A_0x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) - \dots - B_k(x_1, \dots, x_k, A_0x_{k+1}). \quad (\text{I.1})$$

On peut alors définir  $[ \ , \ ]$  de manière récursive sur  $[\tilde{U}_i, \tilde{U}_j]$  en connaissant  $[\tilde{U}_{i-1}, \tilde{U}_j]$  et  $[\tilde{U}_i, \tilde{U}_{j-1}]$ , de sorte que l'identité de Jacobi soit vérifiée, ou bien utiliser la formule explicite suivante, pour  $A_k \in \tilde{U}_k$ ,  $B_l \in \tilde{U}_l$  et  $(x_1, \dots, x_{k+l+1}) \in V$  :

$$[A_k, B_l] := A_k \square B_l - B_l \square A_k, \quad \text{où} \quad (\text{I.2})$$

$$A_k \square B_l(x_1, \dots, x_{k+l+1}) := \sum_{s=0}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq l+s} A_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, B_l(x_1, \dots, \dots, \widehat{x_{i_1}}, \dots, \widehat{x_{i_s}}, \dots, x_{l+s+1}), x_{l+s+2}, \dots, x_{k+l+1}).$$

Lorsque  $s = 0$ , la condition  $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq l + s$  est vide et alors

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq l+s} \dots = A_k(B_l(x_1, \dots, x_{l+1}), x_{l+2}, \dots, x_{k+l+1}).$$

Pour  $k = 0$  et  $l = 0$ , on retrouve le crochet usuel sur  $\text{End}(V)$ , si  $k = 0$  et  $l$  quelconque, on retrouve la formule (I.1) et si  $k = 1$  et  $l = 1$ , on a

$$[A_1, B_1](x, y, z) = A_1(B_1x, y, z) + A_1(x, B_1y, z) + A_1(x, y, B_1z) - B_1(A_1x, y, z) - B_1(x, A_1y, z) - B_1(x, y, A_1z).$$

**Proposition I.2.2** (I. Kantor [Kan70]).  $\tilde{U}_+$ , muni du crochet défini par (I.2) est une algèbre de Lie graduée.

Il reste alors à définir le crochet entre un élément de  $\tilde{U}_+$  et un élément de  $\tilde{U}_-$ . Pour cela, on utilise le fait qu'un élément  $x_1 \circ \dots \circ x_k := [[\dots [x_1, x_2], \dots], x_k]$  s'écrit comme somme d'éléments  $x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}$  appartenant à  $\text{Lib}(\tilde{U}_{-1})$ , l'algèbre associative libre engendrée par  $\tilde{U}_{-1}$  [Bou72]. Alors si  $A_k \in \tilde{U}_k$  et  $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \in \text{Lib}(\tilde{U}_{-1})$ , on pose :

$$[A_k, x] := \begin{cases} A_k(x_1, \dots, x_l, \cdot, \dots, \cdot) \in \tilde{U}_+ & \text{si } l \leq k+1 \\ A_k(x_1, \dots, x_{k+1}) \circ x_{k+2} \circ \dots \circ x_l \in \tilde{U}_- & \text{si } l > k+1 \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Puis on étend cette définition par linéarité pour  $A \in \tilde{U}_k$  et  $x \in \tilde{U}_{-l}$ . Par exemple,

i) Si  $A_0 \in \tilde{U}_0$  et  $x \in \tilde{U}_{-1}$ , alors  $[A_0, x] = A_0x$ .

ii) Si  $A_0 \in \tilde{U}_0$  et  $[x_1, x_2] \in \tilde{U}_{-2}$ , alors

$$[A_0, [x_1, x_2]] = [A_0, x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_1] = [A_0x_1, x_2] - [A_0x_2, x_1] = [A_0x_1, x_2] + [x_1, A_0x_2].$$

iii) Si  $A_k \in \tilde{U}_k$ ,  $x \in \tilde{U}_{-1}$  et  $(y_1, \dots, y_k) \in \tilde{U}_{-1}$ , alors  $[A_k, x](y_1, \dots, y_k) = A_k(x, y_1, \dots, y_k)$ .

iv) Si  $A_k \in \tilde{U}_k$ ,  $[x_1, x_2] \in \tilde{U}_{-2}$  et  $(y_1, \dots, y_{k-1}) \in \tilde{U}_{-1}$ , alors

$$[A_k, [x_1, x_2]](y_1, \dots, y_{k-1}) = A_k(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{k-1}) - A_k(x_2, x_1, y_1, \dots, y_{k-1}).$$

Alors on a le théorème suivant :

**Théorème I.2.1** (I. Kantor [Kan70]). *Le module  $\tilde{U} = \tilde{U}_+ \oplus \tilde{U}_- = \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{U}_n \oplus \bigoplus_{n < 0} \tilde{U}_n$  muni du crochet défini par les relations (I.2) et (I.3) est une algèbre de Lie graduée i.e  $[\tilde{U}_m, \tilde{U}_n] \subset \tilde{U}_{m+n}$ .*

La démonstration de ce résultat repose sur le résultat général suivant :

**Lemme I.2.1** (I. Kantor). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On note*

$$P_a^k(x_1, \dots, x_k) := [[\dots [a, x_1], x_2], \dots, x_k].$$

Alors on a :

$$P_{[a,b]}^{k+l-1} = P_a^k \square P_b^l - P_b^l \square P_a^k.$$

**Définition I.2.13.** Cette algèbre de Lie  $\tilde{U}$  est appelée l'algèbre de Lie graduée universelle de  $V$  et elle est l'unique algèbre de Lie graduée, à isomorphisme près, à vérifier la propriété universelle suivante : pour tout algèbre de Lie graduée  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$  et tout isomorphisme  $\psi : \mathfrak{g}_- = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{-n} \rightarrow \tilde{U}_-$  d'algèbres de Lie graduées, il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie graduées  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{U}$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_- & \xrightarrow{\psi} & \tilde{U}_- \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{U} \end{array}$$

*Démonstration.*

On vient de voir que  $\tilde{U}$  est bien une algèbre de Lie graduée. Soit  $\mathfrak{g}$  une autre algèbre de Lie graduée et  $\psi : \mathfrak{g}_- \rightarrow \tilde{U}_-$  un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées. On considère  $\varphi$  un morphisme d'algèbres de Lie graduées prolongeant  $\psi$ . Montrons tout d'abord qu'il n'existe qu'un seul candidat possible pour  $\varphi$ .

Soit  $a \in \mathfrak{g}_0$  et  $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ . On a  $\varphi[a, x] = \psi[a, x]$  car  $[a, x] \in \mathfrak{g}_{-1}$ .

Par ailleurs,  $\varphi[a, x] = [\varphi a, \psi x] = (\varphi a)(\psi x)$  par définition du crochet dans  $\tilde{U}$ . Donc pour tout  $v \in V$ , nécessairement

$$(\varphi a)(v) = \psi[a, \psi^{-1}v].$$

On suppose que pour tout  $a \in \mathfrak{g}_{n-1}$  et  $(v_1, \dots, v_n) \in V$ , on a

$$(\varphi a)(v_1, \dots, v_n) = \psi [\dots [a, \psi^{-1}v_1] \dots, \psi^{-1}v_n].$$

Soit à présent  $a \in \mathfrak{g}_n$ ,  $x \in \mathfrak{g}_{-1}$  et  $(v_1, \dots, v_n) \in V$ . On a par hypothèse

$$\varphi[a, x](v_1, \dots, v_n) = \psi [\dots [[a, x], \psi^{-1}v_1] \dots, \psi^{-1}v_n].$$

Mais par ailleurs,  $\varphi[a, x](v_1, \dots, v_n) = [\varphi a, \psi x](v_1, \dots, v_n) = (\varphi a)(\psi x, v_1, \dots, v_n)$ . Autrement dit, pour tout  $(v_1, \dots, v_{n+1}) \in V$ , on a

$$(\varphi a)(v_1, \dots, v_{n+1}) = \psi [\dots [a, \psi^{-1}v_1] \dots, \psi^{-1}v_{n+1}].$$

Donc finalement, si  $\varphi$  existe, elle est définie de manière unique pour tout  $a \in \mathfrak{g}_n$  et  $(v_1, \dots, v_{n+1}) \in V$  par,

$$(\varphi a)(v_1, \dots, v_{n+1}) = \psi [\dots [a, \psi^{-1}v_1] \dots, \psi^{-1}v_{n+1}].$$

Réciproquement, si on définit  $\varphi$  ainsi, par le lemme I.2.1,  $\varphi|_{\mathfrak{g}_+}$  est un morphisme d'algèbres de Lie graduées de  $\mathfrak{g}_+$  dans  $\tilde{U}_+$ . Il reste donc à voir que  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathfrak{g}$  dans  $\tilde{U}$ . Soit  $a \in \mathfrak{g}_n$  et  $x \in \mathfrak{g}_{-m}$ . Si  $n - m \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi[a, x] : \quad V \times \dots \times V &\rightarrow V \\ (v_1, \dots, v_{n-m+1}) &\mapsto \psi [\dots [[a, x], \psi^{-1}v_1] \dots, \psi^{-1}v_{n-m+1}] \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\psi x \in \tilde{U}_{-m}$  donc  $\psi x$  s'écrit comme somme d'éléments de  $Lib(V)$  :

$$\psi x = \sum_{i_1, \dots, i_m} \alpha_{i_1, \dots, i_m} \psi x_{i_1} \cdot \dots \cdot \psi x_{i_m}.$$

$$\begin{aligned} \text{Et alors } [\varphi x, \psi x](v_1, \dots, v_{n-m+1}) &= \sum_{i_1, \dots, i_m} (\varphi a)(\psi x_{i_1}, \dots, \psi x_{i_m}, v_1, \dots, v_{n-m+1}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m} \psi [[\dots [a, x_{i_1}], \dots, x_{i_m}], \psi^{-1}v_1], \dots, \psi^{-1}v_{n-m+1}] \\ &= \psi [\dots [[a, x], \psi^{-1}v_1], \dots, \psi^{-1}v_{n-m+1}]. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de l'unicité de la définition du crochet de Lie entre  $a \in \mathfrak{g}_n$ , vu comme élément de  $(\otimes^{n+1} \mathfrak{g}_{-1}^*) \otimes \mathfrak{g}_{-1}$ , et  $x \in \mathfrak{g}_{-m}$ . Donc  $\varphi[a, x] = [\varphi a, \psi x]$ .

Le cas où  $n - m < 0$  se traite de manière analogue et donc  $\varphi$  est un bien un morphisme d'algèbres de Lie graduées prolongeant  $\psi$ .

Ainsi, il existe un unique morphisme  $\varphi$  prolongeant  $\psi$ .

Enfin, montrons que si  $\mathfrak{g}$  est une autre algèbre de Lie graduée vérifiant la même propriété que  $\tilde{U}$ , alors  $\mathfrak{g}$  et  $\tilde{U}$  sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie graduées. Par hypothèse,  $\mathfrak{g}_-$  et  $\tilde{U}_-$  sont isomorphes, il suffit donc de montrer que  $\mathfrak{g}_+$  et  $\tilde{U}_+$  sont isomorphes. Mais on a les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_- & \xrightarrow{\psi} & \tilde{U}_- \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{U} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{U}_- & \xrightarrow{\psi^{-1}} & \mathfrak{g}_- \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{U} & \xrightarrow{\varphi'} & \mathfrak{g} \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_- & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathfrak{g}_- \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi' \circ \varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Donc par unicité  $\varphi' \circ \varphi = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$  et de manière analogue  $\varphi \circ \varphi' = \text{Id}_{\tilde{U}}$ . D'où  $\mathfrak{g}$  est isomorphe à  $\tilde{U}$ .  $\square$

Intéressons-nous à présent à la situation où  $V$  possède en outre une structure de système triple de Jordan généralisé. Alors pour  $(x, y) \in V$ , l'opérateur  $L(x, y) : V \rightarrow V, z \mapsto \{xyz\}$  appartient à  $\tilde{U}_0$  et  $M(y) : V \times V \rightarrow V, (x, z) \mapsto \{xyz\}$  appartient à  $\tilde{U}_1$ . On considère alors  $U_0$  la sous-algèbre de  $\tilde{U}_0$  engendrée par  $\{L(x, y), (x, y) \in V\}$  et  $U_1$  le sous-espace de  $\tilde{U}_1$  formé des opérateurs  $\{M(y), y \in V\}$ . On pose également  $U_{-1} := \tilde{U}_{-1} = V$ . Alors on a les relations suivantes entre ces opérateurs :

$$[M(y), x] = L(x, y), [L(x, y), z] = \{xyz\}, [L(x, y), M(z)] = -M(\{yxz\}), \text{ et}$$

$$[L(u, v), L(x, y)] = L(\{uvx\}, y) - L(x, \{vuy\}).$$

Les deux dernières relations sont simplement des réécritures de (STJ2). Ce qui entraîne que

$$[U_1, U_{-1}] = U_0, [U_0, U_{-1}] \subset U_{-1}, [U_1, U_0] \subset U_1, \text{ et } [U_0, U_0] \subset U_0.$$

Alors, toujours d'après [Kan72], il existe une unique sous-algèbre de Lie graduée de  $\tilde{U}$ ,

$$\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U_n,$$

minimale au sens où  $\mathcal{L}(V)$  ne contient pas d'idéal gradué dans  $\bigoplus_{n \geq 2} U_{-n}$ . En fait, la sous-algèbre de Lie de  $\tilde{U}$  engendrée par  $U_1$  et  $U_{-1}$ , notée  $\mathcal{L}_0(V)$  possède un unique idéal gradué maximal  $D$ , contenu dans  $\bigoplus_{n \geq 2} \tilde{U}_{-n}$  et alors  $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}_0(V)/D$ . Par ailleurs,  $U_{n+1} = [U_n, U_1]$  donc  $\mathcal{L}(V)$  est engendrée par  $U_1$  et  $U_{-1}$ .

**Définition I.2.14.** Cette algèbre de Lie graduée,  $\mathcal{L}(V)$ , est appelée l'*algèbre de Kantor* associée au système triple de Jordan généralisé  $V$ .

On dit qu'un système triple de Jordan généralisé est *de type  $k$*  ou *d'ordre  $k$*  si  $\mathcal{L}(V)$  est  $(2k + 1)$ -graduée.

Alors on a le résultat suivant :

**Théorème I.2.2** (I. Kantor [Kan72]). *Soit  $V$  un système triple de Jordan généralisé.  $V$  est de type 1 (ou du premier ordre) si et seulement si  $V$  est un système triple de Jordan.*

*Démonstration.*

On a déjà vu que si  $\mathcal{L}(V) = U_1 \oplus U_0 \oplus U_{-1}$  est 3-graduée, alors  $(U_1, U_{-1})$  est une paire de Jordan. Par ailleurs, d'après [Kan72] et [KA88], il existe un automorphisme involutif  $\tau$  de  $\mathcal{L}(V)$ , renversant la graduation. Alors  $\tau$  définit une involution de la paire  $(U_1, U_{-1})$  et donc  $V$  est un système triple de Jordan.

Réciproquement, si  $V$  est un système triple de Jordan, alors

$$\begin{aligned} [M(a), M(b)](x, y, z) &= \{\{xby\}az\} + \{\{xbz\}ay\} + \{xa\{ybz\}\} \\ &\quad - \{\{xay\}bz\} - \{\{xaz\}by\} - \{xb\{yaz\}\} \end{aligned}$$

donc en utilisant (STJ2), on montre que  $[M(a), M(b)] = 0$  et donc  $U_2 = 0$ . Comme  $U_{n+1} = [U_n, U_1]$ , on obtient que  $U_n = 0$  pour  $n \geq 2$ . Par ailleurs, en utilisant  $\tau$ ,  $\tau(U_n) = U_{-n}$  donc  $U_{-n} = 0$  pour  $n \geq 2$  et par suite  $\mathcal{L}(V)$  est 3-graduée.  $\square$

Dans le cas où  $V$  est un système triple de Jordan, l'automorphisme  $\tau$  identifie  $U_{-1}$  et  $U_1$  par  $y \mapsto M(y)$  et donc  $\mathcal{L}(V)$  est isomorphe à l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits associée à  $V$  (modulo l'ajout de l'opérateur d'Euler  $E$ ). La construction de Kantor généralise donc bien celle de Kantor-Koecher-Tits pour les paires de Jordan (ou les systèmes triples de Jordan). De manière analogue au théorème précédent, on montre que les systèmes triples de Jordan généralisés d'ordre 2 sont les systèmes triples de Freudenthal-Kantor [AK88]. Ainsi, nous avons fait le lien entre les paires ou systèmes triples (de Jordan, de Freudenthal-Kantor, ou de Jordan généralisé) et les algèbres de Lie graduées.

Pour l'instant, nous n'avons envisagé que des graduations par les groupes abéliens  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}$ . Nous allons donc, dans la partie suivante étudier le cas où  $\mathfrak{g}$  est graduée par un système de racines [Bou68].

## I.3 Algèbres de Lie graduées par un système de racines

### I.3.1 Le cas de la dimension finie

Nous allons, dans cette partie, nous concentrer sur les algèbres de Lie graduées par un système de racines. Nous allons tout d'abord expliquer cet outil classique pour la classification des algèbres de Lie simples complexes [Bou75] puis nous verrons que cette "machinerie" peut servir pour donner des informations sur certaines  $\mathbb{Z}$ -graduations des algèbres de Lie semi-simples, réelles ou complexes : les graduations de longueur finie et engendrées par  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$ , et même aboutir à une classification de ces  $\mathbb{Z}$ -graduations [KA88].

Attardons-nous tout d'abord sur l'exemple de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $(n+1)$  et de trace nulle (on peut bien sûr remplacer  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ ). Une base de  $\mathfrak{g}$  est donnée par la famille

$$\{E_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq n+1\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1, i+1}, 1 \leq i \leq n\},$$

où  $E_{ij}$  est la matrice ne comportant que des zéros sauf en position  $(i, j)$ , où elle comporte un 1. Par ailleurs, la famille  $\{E_{ii}, 1 \leq i \leq n+1\}$  forme une base de l'espace des matrices diagonales, noté  $\widehat{\mathfrak{h}}$ . On note  $\widehat{\epsilon}_i$  sa base duale. On note également  $\mathfrak{h}$  l'ensemble des éléments de  $\widehat{\mathfrak{h}}$  de trace nulle, i.e appartenant à  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$  et  $\epsilon_i := \widehat{\epsilon}_i|_{\mathfrak{h}}$ . Alors, pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ , on a

$$[h, E_{ij}] = (\epsilon_i(h) - \epsilon_j(h)) E_{ij}. \quad (\text{I.4})$$

Autrement dit, pour tout  $i \neq j$ ,  $E_{ij}$  est un vecteur propre de  $\text{ad}(h)$ , associé à la valeur propre  $\alpha_{ij}(h) := \epsilon_i(h) - \epsilon_j(h)$  et pour tout  $(h, h') \in \mathfrak{h}$ ,  $[h, h'] = 0$ . Donc finalement, pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(h) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est diagonalisable. Par ailleurs, comme  $\mathfrak{h}$  est abélien, par l'identité de Jacobi, pour tout  $(h, h') \in \mathfrak{h}$ ,  $\text{ad}(h)$  et  $\text{ad}(h')$  commutent. On a donc une famille d'endomorphismes diagonalisables et qui commutent deux à deux. On peut alors les diagonaliser simultanément i.e il existe une base de vecteurs propres communs à tous les  $\text{ad}(h)$ . Cette base est donnée par (I.4). Les valeurs propres de ces endomorphismes sont représentées par des formes linéaires sur  $\mathfrak{h}$ ; ce sont les  $\alpha_{ij}$ . On note



$\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}} := \mathbb{K}E_{ij}$  pour  $i \neq j$ ;  $\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}$  est l'espace propre commun à tous les  $\text{ad}(h)$ ,  $h \in \mathfrak{h}$ , associé à la "valeur propre" donnée par la forme linéaire  $\alpha_{ij}$  et  $\mathfrak{h}$  est, quant à lui, l'espace propre associé à la forme linéaire nulle. Si bien que :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}.$$

Dans cette décomposition,  $\mathfrak{h}$  s'appelle une *sous-algèbre de Cartan* de  $\mathfrak{g}$ , l'ensemble  $\Delta := \{\alpha_{ij}, i \neq j\}$  s'appelle le *système de racines* de  $\mathfrak{g}$  et les  $\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}$  sont appelés les *espaces radiciels*. On a par ailleurs

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj},$$

donc

$$[\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}, \mathfrak{g}^{\alpha_{jl}}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha_{il}}, [\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}, \mathfrak{g}^{\alpha_{ki}}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha_{kj}}, \text{ et } [\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}, \mathfrak{g}^{\alpha_{kl}}] = 0 \text{ sinon.}$$

Autrement dit, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux racines, alors  $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$  si  $\alpha + \beta$  est une racine et  $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = 0$  sinon. On note alors  $\Gamma$  le  $\mathbb{Z}$ -réseau engendré par  $\Delta$  i. e

$$\Gamma = \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{Z}\alpha_{ij}$$

et pour  $\alpha \in \Gamma$ , on pose  $\mathfrak{g}^{\alpha} := \mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}$  si  $\alpha = \alpha_{ij} \in \Delta$  et 0 sinon.  $\Gamma$  est un groupe abélien et

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

avec  $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ ; autrement dit  $\mathfrak{g}$  est  $\Gamma$ -graduée.

On généralise ensuite ce qu'on vient de faire au cas des algèbres de Lie semi-simples complexes de dimension finie. Soit  $\mathfrak{g}$  une telle algèbre de Lie.

**Définition I.3.1.** On appelle *sous-algèbre de Cartan* de  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre abélienne maximale  $\mathfrak{h}$  telle que pour tout  $x \in \mathfrak{h}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(x)$  est diagonalisable.

Pour une définition plus générale, par exemple si  $\mathfrak{g}$  n'est pas définie sur  $\mathbb{C}$ , ou si  $\mathfrak{g}$  n'est pas semi-simple, de même que pour la question de l'existence de telles sous-algèbres, on renvoie à [Bou75].

Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Pour  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , on note

$$\mathfrak{g}^{\alpha} := \{x \in \mathfrak{g}, \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x\} \text{ et } \Delta := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}, \mathfrak{g}^{\alpha} \neq 0\}.$$

Comme on a supposé que  $\mathfrak{h}$  est abélienne maximale, on a  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ .

**Définition I.3.2.** L'ensemble  $\Delta$  est appelé un *système de racines* de  $\mathfrak{g}$  et les éléments de  $\Delta$  sont appelés des *racines*. La décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espaces propres

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

est appelée la *décomposition en espaces radiciels* de  $\mathfrak{g}$ .

Encore une fois, on renvoie à [Bou68] pour une définition plus générale d'un système de racines.

Comme dans le cas particulier de  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ , on a  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ , pour  $\alpha, \beta \in \Delta$  et donc, là encore,  $\mathfrak{g}$  est  $\Gamma$ -graduée, où

$$\Gamma := \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\alpha.$$

Cette construction s'étend au cas des algèbres de Lie réelles, comme nous le verrons dans la partie suivante I.4, en considérant une *décomposition de Cartan*,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , en sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 d'une *involution de Cartan*, la sous-algèbre de Cartan étant alors remplacée par un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}$  [Kna02].

Cette théorie des sous-algèbres de Cartan ainsi que la classification des systèmes de racines irréductibles [Bou68] sont les ingrédients principaux dans la classification des algèbres de Lie simples complexes de dimension finie suivante :

**Théorème I.3.1.** *Toute algèbre de Lie simple, complexe et de dimension finie au moins 2 est isomorphe à l'une des algèbres de Lie classiques suivantes :*

- 1) (type  $A_n$ )  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ , de dimension  $n(n+1)$ ,  $n \geq 1$ ,
  - 2) (type  $B_n$ )  $\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C})$ , de dimension  $n(2n+1)$ ,  $n \geq 2$ ,
  - 3) (type  $C_n$ ),  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ , de dimension  $n(2n+1)$ ,  $n \geq 3$ ,
  - 4) (type  $D_n$ ),  $\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C})$ , de dimension  $n(2n-1)$ ,  $n \geq 4$ ,
- ou à une des algèbres de Lie exceptionnelles :

- 5) (type  $E_6$ )  $\mathfrak{e}_6$ ,
- 6) (type  $E_7$ )  $\mathfrak{e}_7$ ,
- 7) (type  $E_8$ )  $\mathfrak{e}_8$ ,
- 8) (type  $F_4$ )  $\mathfrak{f}_4$ ,
- 9) (type  $G_2$ )  $\mathfrak{g}_2$ .

### I.3.2 Le cas de la dimension infinie

Il n'existe pas de classification générale aussi simple pour les algèbres de Lie simples de dimension infinie. On peut néanmoins citer les *algèbres de Kac-Moody* [Kac90], [Moo68], qui constituent une part très importante de l'étude des algèbres de Lie de dimension infinie. Elle généralisent les algèbres de Lie semi-simples de dimension finie dont il a été question précédemment et sont définies de manière abstraite par générateurs et relations, associés à un système de racines ou plus précisément à une *matrice de Cartan généralisée*. On peut citer comme exemples d'algèbres de Kac-Moody les algèbres de Lie simples de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ , mais aussi les *algèbres de Kac-Moody affines* dont nous présentons ici la construction. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple et de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ , donc faisant partie de la liste du théorème I.3.1. On considère également  $\sigma$  un automorphisme

de  $\mathfrak{g}$  d'ordre  $m$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$  une racine primitive  $m$ -ième de l'unité. Alors  $\sigma$  est diagonalisable et on peut donc décomposer  $\mathfrak{g}$  en espaces-propres :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\bar{\lambda}}, \text{ où } \mathfrak{g}_{\bar{\lambda}} = \{x \in \mathfrak{g}, \sigma x = \zeta^\lambda x\}.$$

Au passage, on note qu'on obtient une  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$ . On définit ensuite

$$L(\mathfrak{g}, \sigma, m) := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\bar{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}z^\lambda \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}],$$

que l'on munit d'un crochet bilinéaire défini par

$$[x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu] = [x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\mu}}] \otimes z^{\lambda+\mu}.$$

Alors  $L(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ , muni de ce crochet, est une algèbre de Lie, appelée *algèbre de lacets*. On va ensuite effectuer une extension centrale de  $L(\mathfrak{g}, \sigma, m)$  à l'aide d'un *2-cocycle*. Pour cela, on considère la *forme de Killing* de  $\mathfrak{g}$ ,  $B(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y))$  et on définit

$$\tau(x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu) := \lambda \delta_{\lambda+\mu, 0} B(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\mu}}), \text{ où } \delta_{\lambda+\mu, 0} = 1 \text{ si } \lambda + \mu = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Alors pour tout  $(l_1, l_2, l_3) \in L(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ , on a les relations suivantes

$$\tau(l_1, l_1) = 0 \text{ et } \tau([l_1, l_2], l_3) + \tau([l_2, l_3], l_1) + \tau([l_3, l_1], l_2) = 0$$

i.e  $\tau$  est un cocycle. Alors on définit

$$\tilde{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) := L(\mathfrak{g}, \sigma, m) \oplus \mathbb{C}c,$$

muni du crochet suivant

$$[x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu]_{\tilde{L}} = [x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu]_L + \tau(x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu)c, \text{ et } [L, \mathbb{C}c] = 0.$$

Autrement dit,  $c$  est un élément central. On vérifie que  $\tilde{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$  est une algèbre de Lie. En outre,  $\tilde{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$  possède une dérivation caractéristique

$$d(x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda) = \lambda(x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda) \text{ et } d(c) = 0.$$

On considère alors

$$\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) := \tilde{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \rtimes \mathbb{C}d = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g}_{\bar{\lambda}} \otimes \mathbb{C}z^\lambda) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

muni du crochet suivant

$$[x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda + s_1 c + t_1 d, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu + s_2 c + t_2 d] = [x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\mu}}] \otimes z^{\lambda+\mu} + t_1 \mu (y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu) - t_2 \lambda (x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda) + \tau(x_{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda, y_{\bar{\mu}} \otimes z^\mu)c.$$

Alors  $\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$  est une algèbre de Kac-Moody, appelée *algèbre de Kac-Moody affine*.

Une autre classe d'algèbres de Lie de dimension infinie est composée des algèbres de Lie *graduées par un système de racines* [BM92], [BN06].

**Définition I.3.3.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0,  $\Delta$  un système de racines fini et  $\Gamma$  le  $\mathbb{Z}$ -réseau engendré par  $\Delta$ . On dit que  $\mathfrak{g}$  est *graduée par  $\Delta$*  ou  *$\Delta$ -graduée* si :

i)  $\mathfrak{g}$  possède une  $\Gamma$ -graduation :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}^\alpha, \text{ avec } \mathfrak{g}^\alpha \neq 0 \text{ si et seulement si } \alpha \in \Delta \cup \{0\},$$

- ii) il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{g}_\Delta$  de  $\mathfrak{g}$  isomorphe à l'algèbre de Lie simple déployée associée au système de racines  $\Delta$  (voir l'annexe A) et une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_\Delta$  de  $\mathfrak{g}_\Delta$  telle que  $\mathfrak{g}_\Delta^\alpha \subset \mathfrak{g}^\alpha$ , pour tout  $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ ,
- iii) pour tout  $h \in \mathfrak{h}_\Delta$ ,  $\text{ad}(h)$  agit diagonalement sur  $\mathfrak{g}^\alpha$  par la valeur propre  $\alpha(h)$ ,
- iv)  $\mathfrak{g}$  est engendrée par les espaces radiciels  $\mathfrak{g}^\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ .

Les algèbres de Lie simples sur  $\mathbb{C}$  sont de cette forme et on montre qu'une algèbre de Kac-Moody affine  $\widehat{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$  est également graduée par le système de racines associé à  $\mathfrak{g}$ . Grâce à la classification des systèmes de racines irréductibles, on peut établir une classification des algèbres de Lie graduées par un de ces systèmes de racines. Dans [BM92], S. Berman et R. V. Moody s'intéressent au cas des systèmes de rang au moins 2 et où toutes les racines ont la même longueur i.e de type  $A_n$ ,  $n \geq 2$ ,  $D_n$ ,  $n \geq 4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ , ou  $E_8$  et associent à  $\mathfrak{g}$  une algèbre qui est, suivant le type du système, soit associative (dans le cas où le système de racines est de type  $A_n$ ,  $n \geq 3$ ), soit associative et commutative (type  $D_n$  et  $E$ ), soit alternative (type  $A_2$ ), et qui permet de classifier les algèbres de Lie graduées par  $\Delta$ . Dans [BZ96], G. Benkart et E. Zelmanov complètent la classification de Berman et Moody en s'intéressant au cas des systèmes de racines de type  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $G_2$  et  $F_4$ . On peut également citer [Tit62] et [Neh96] dans lesquels J. Tits, puis E. Neher étudient le cas où le système de racines est de type  $A_1$ , ainsi que les liens avec la théorie de Jordan.

## I.4 Classification des $\mathbb{Z}$ -graduations d'une algèbre de Lie semi-simple réelle

### I.4.1 Classification

Dans cette partie, nous allons faire le lien entre les deux types de graduations que nous avons vus i.e les  $\mathbb{Z}$ -graduations et les graduations provenant d'un système de racines ; plus particulièrement, nous allons voir que la graduation provenant d'un système de racines permet de construire des  $\mathbb{Z}$ -graduations de longueur finie si le système de racines considéré est fini, ce qu'on supposera dans la suite. Cette construction sert dans [KA88] à classifier les  $\mathbb{Z}$ -graduations d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , semi-simple, réelle et de dimension finie, en établissant une bijection entre les classes d'isomorphie de ces graduations et les classes d'équivalence des partitions d'un système fondamental du système de racines associé à  $\mathfrak{g}$ . Nous allons expliquer dans la suite la construction de cette bijection.

On considère  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réelle, semi-simple et de dimension finie. On considère également une involution de Cartan  $\tau$ , et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan associée

i.e  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{p}$  sont les espaces-propres de  $\tau$  associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1. Soit  $\mathfrak{a}$  un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}$ . On note  $B(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y))$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  et  $B_\tau(x, y) := -B(x, \tau y)$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et  $\tau$  une involution de Cartan, la restriction de  $B$  à  $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$  est définie négative et sur  $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ ,  $B$  est définie positive donc  $B_\tau$  est un produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$ . Alors si  $a \in \mathfrak{a}$ , on a  $B_\tau(\text{ad}(a)x, y) + B_\tau(x, \text{ad}(a)y) = 0$ , donc si  $\text{ad}(a)$  stabilise un sous-espace  $V$  de  $\mathfrak{g}$ , il stabilise aussi  $V^\perp$  (par rapport à  $B_\tau$ ) et par suite  $\text{ad}(a)$  est semi-simple. Comme par définition,  $\mathfrak{a}$  est abélien, on peut, comme pour une sous-algèbre de Cartan, réduire simultanément tous les endomorphismes  $\text{ad}(a)$ ,  $a \in \mathfrak{a}$ . On considère alors pour  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ , le sous-espace radiciel

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{x \in \mathfrak{g}, \forall h \in \mathfrak{a}, [h, x] = \alpha(h)x\},$$

et le système de racines associé à  $\mathfrak{a}$  :

$$\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}, \mathfrak{g}^\alpha \neq 0\}.$$

On note  $(, )$  la restriction de  $B$  à  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ ;  $(, )$  est non-dégénérée, si bien qu'on identifie  $\Delta$  à un sous-ensemble de  $\mathfrak{a}$ . Alors on a la décomposition en espaces radiciels suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où  $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$  est le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Lorsqu'on considère une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ , on a  $\mathfrak{c}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$  mais dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est réelle, on n'a pas nécessairement  $\mathfrak{c}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ . On suppose en outre que  $\mathfrak{g}$  est  $(2k+1)$ -graduée :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=-k}^k \mathfrak{g}_n$$

et que  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$  ne sont pas réduits à 0. Comme  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, elle admet un unique élément d'Euler, noté  $E$ . Ensuite comme  $\mathfrak{g}$  est réelle, semi-simple et de dimension finie, d'après [Tan79],  $\mathfrak{g}$  admet une involution de Cartan renversant la graduation. On suppose que c'est la cas de  $\tau$ . Alors par unicité de l'élément d'Euler, on a  $\tau E = -E$ , donc  $E \in \mathfrak{p}$ . On suppose alors que  $E \in \mathfrak{a}$ . Le lemme suivant fait le lien entre la  $\mathbb{Z}$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  et la décomposition en espaces radiciels :

**Lemme I.4.1.** *On a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \oplus \bigoplus_{(\alpha, E)=0} \mathfrak{g}^\alpha, \\ \mathfrak{g}_n = \bigoplus_{(\alpha, E)=n} \mathfrak{g}^\alpha, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}^*. \end{array} \right.$$

*Démonstration.*

Tout d'abord, remarquons que  $(\alpha, E) = \alpha(E)$ . Ensuite, si  $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ , avec  $\alpha(E) = n \neq 0$ , alors  $[E, x] = nx$  donc  $x \in \mathfrak{g}_n$ . Donc

$$\bigoplus_{(\alpha, E)=n} \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}_n.$$

Réciproquement, si  $x \in \mathfrak{g}_n$ , on utilise la décomposition en espaces radiciels :

$$x = a + \sum_{\alpha \in \Delta} x^\alpha,$$

avec  $a \in \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$  et  $x^\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ . Donc

$$nx = [E, x] = [E, a] + \sum_{\alpha \in \Delta} [E, x^\alpha] = \sum_{\alpha \in \Delta} [E, x^\alpha] = \sum_{\alpha \in \Delta} (\alpha, E)x^\alpha.$$

Donc  $a = 0$  et pour tout  $\alpha \in \Delta$ ,  $(\alpha, E) = n$ . Donc

$$\mathfrak{g}_n \subset \bigoplus_{(\alpha, E)=n} \mathfrak{g}^\alpha \text{ et par suite, } \mathfrak{g}_n = \bigoplus_{(\alpha, E)=n} \mathfrak{g}^\alpha.$$

On raisonne de même si  $n = 0$ ; d'où le résultat.  $\square$

Ce résultat nous permet de construire une partition de  $\Delta$  :

$$\Delta = \bigcup_{n=-k}^k \Delta_n, \text{ où } \Delta_n := \{\alpha \in \Delta, (\alpha, E) = n\}.$$

Donc on a  $(\Delta_n + \Delta_m) \cap \Delta \subset \Delta_{n+m}$ . En particulier  $\Delta_0$  est un sous-système de racines de  $\Delta$ . On définit alors un ordre sur  $\Delta$  en posant

$$\alpha \geq 0 \text{ si } (\alpha, E) \geq 0,$$

et on considère  $\Pi$ , le système fondamental de racines simples de  $\Delta$  relatif à cet ordre. Alors on a

$$\Pi \subset \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n.$$

Ceci nous amène à poser la définition suivante :

**Définition I.4.1.** Soit  $\Pi$  un système fondamental du système de racines  $\Delta$ . On dit que  $\Pi$  est *compatible* avec la graduation de  $\mathfrak{g}$  si

$$\Pi \subset \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n.$$

Le système fondamental  $\Pi$  associé à l'ordre  $\alpha \geq 0$  si  $(\alpha, E) \geq 0$  est donc compatible avec la  $\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$ .

On pose ensuite  $\Pi_n := \Pi \cap \Delta_n$  et on obtient ainsi une partition de  $\Pi$  :

$$\Pi = \bigcup_{n=0}^r \Pi_n, \tag{I.5}$$

où  $r$  est tel que  $\Pi_r \neq \emptyset$  et  $\Pi_n = \emptyset$  pour  $n > r$ . Comme  $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$  par hypothèse,  $\Pi_1 \neq \emptyset$ . En revanche d'autres  $\Pi_i$  peuvent être vides. Par ailleurs, on peut montrer par récurrence sur la longueur des racines que  $\Pi_0$  est un système fondamental de  $\Delta_0$ .

**Définition I.4.2.** La partition de  $\Pi$  définie par (I.5) est appelée *la partition caractéristique* de la graduation  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$ . On la note  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$ .

On considère à présent  $W$  le groupe de Weyl du système de racines  $\Delta$  et  $W_0$  celui du sous-système  $\Delta_0$ . Comme  $\mathfrak{g}_0$  est stable par l'involution de Cartan  $\tau$ ,  $\mathfrak{a}$  est un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} =: \mathfrak{p}_0$ . Alors  $\Delta_0$  est le système de racines de  $\mathfrak{g}_0$  associé à  $\mathfrak{a}$ . Soit  $G$  le groupe des automorphismes intérieurs de  $\mathfrak{g}$  i.e  $G = (\text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ , la composante neutre du groupe des automorphismes de  $\mathfrak{g}$  puisque  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. On considère également  $G_0$ ,  $K$  et  $K_0$  les sous-groupes analytiques de  $G$  engendrés par  $\mathfrak{g}_0$ ,  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0$ . Alors on a  $W = N_K(\mathfrak{a})/C_K(\mathfrak{a})$  où  $N_K(\mathfrak{a})$  est le normalisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$  et  $C_K(\mathfrak{a})$  son centralisateur et  $W_0 = N_{K_0}(\mathfrak{a})/C_{K_0}(\mathfrak{a})$  avec les mêmes notations.

Nous pouvons à présent définir la notion d'isomorphisme entre deux algèbres de Lie graduées, ainsi qu'une relation d'équivalence sur les partitions de systèmes fondamentaux de racines :

**Définition I.4.3.** On considère deux algèbres de Lie graduées :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n \text{ et } \mathfrak{g}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_n.$$

On dit que  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont *isomorphes comme algèbres de Lie graduées* s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $\varphi$  entre  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  tel que  $\varphi(\mathfrak{g}_n) = \mathfrak{g}'_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

En particulier, si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$  est munie de deux  $\mathbb{Z}$ -graduations différentes, on dira que les deux graduations sont *équivalentes* si elles sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie graduées.

**Définition I.4.4.** Soit  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  deux algèbres de Lie semi-simples réelles et  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux systèmes de racines de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$ . On considère  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux systèmes fondamentaux de  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Soit  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  une partition de  $\Pi$  et  $(\Pi'_0, \dots, \Pi'_{r'})$  une partition de  $\Delta'$ . Alors les partitions sont dites *équivalentes* si  $r = r'$  et s'il existe un isomorphisme du diagramme de Dynkin de  $\Pi$  sur celui de  $\Pi'$  qui envoie  $\Pi_i$  sur  $\Pi'_i$  pour tout  $0 \leq i \leq r$ .

On peut à présent énoncer un résultat liant équivalence de partitions de systèmes fondamentaux et isomorphie entre algèbres de Lie graduées :

**Théorème I.4.1** (S. Kaneyuki et H. Asano [KA88]). *Soit  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  deux algèbres de Lie  $(2k + 1)$ -graduées réelles, semi-simples et de dimension finie. Soit  $\Delta$  et  $\Delta'$  les systèmes de racines de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  et  $\Pi$  et  $\Pi'$  des bases de  $\Delta$  et  $\Delta'$  compatibles avec les graduations de  $\mathfrak{g}$  et de  $\mathfrak{g}'$ . Soit enfin  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  et  $(\Pi'_0, \dots, \Pi'_{r'})$  les partitions de  $\Pi$  et  $\Pi'$  provenant de la condition de compatibilité de  $\Pi$  et  $\Pi'$  i.e  $\Pi_n = \Pi \cap \Delta_n$  et  $\Pi'_n = \Pi' \cap \Delta'_n$ .*

*Alors, si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie graduées, les partitions sont équivalentes.*

*Réciproquement, si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie et si les partitions sont équivalentes, alors  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont isomorphes comme algèbres de Lie graduées.*

*Démonstration.*

Soit  $E$  l'opérateur d'Euler de  $\mathfrak{g}$ . Puisque  $\Pi$  est compatible avec la graduation de  $\mathfrak{g}$ , on peut supposer que  $\Delta$  est le système de racines relatif à un sous-espace abélien maximal

$\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}$ , l'espace propre associé à la valeur propre -1 d'une involution de Cartan  $\tau$  de  $\mathfrak{g}$ , renversant la graduation et tel que  $E \in \mathfrak{a}$ . Autrement dit, on suppose qu'on a utilisé la construction qui précède pour obtenir  $\Delta$ . On note également  $\mathfrak{k}$  l'espace propre associé à la valeur propre 1 de  $\tau$ . On utilisera les mêmes notations avec des primes pour les objets associés à  $\mathfrak{g}'$ .

On suppose tout d'abord que  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie graduées et on note  $\varphi$  un tel isomorphisme. Alors  $\varphi\tau\varphi^{-1}$  est une involution de Cartan de  $\mathfrak{g}'$  renversant la graduation. D'après [KA88], il existe  $X_1 \in \mathfrak{g}'_0$  tel que  $\varphi_1 := (\exp X_1)\varphi$  satisfait  $\varphi_1\tau = \tau'\varphi_1$ , où l'exponentielle est celle du groupe adjoint de  $\mathfrak{g}'$ . Comme  $X_1 \in \mathfrak{g}'_0$ ,  $\varphi_1$  préserve les graduations. Par ailleurs, comme  $\varphi_1\tau = \tau'\varphi_1$ , on a  $\varphi_1(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}'$  et  $\varphi_1(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$ . Puisque  $\varphi_1$  préserve les graduations,  $\mathfrak{a}'$  et  $\varphi_1(\mathfrak{a})$  sont des sous-espaces abéliens maximaux de  $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{g}'_0$  donc ils sont conjugués sous le sous-groupe analytique engendré par  $\mathfrak{k}' \cap \mathfrak{g}'_0$  i.e il existe  $X_2 \in \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{g}'_0$  tel que  $\varphi_2(\mathfrak{a}) := (\exp X_2)\varphi_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$ . Comme  $X_2 \in \mathfrak{g}'_0$ , alors  $\varphi_2$  préserve aussi les graduations.

On considère à présent

$$\Delta = \bigcup_{n=-k}^k \Delta_n \text{ et } \Delta' = \bigcup_{n=-k}^k \Delta'_n,$$

les partitions de  $\Delta$  et  $\Delta'$  données par

$$\Delta_n = \{\alpha \in \Delta, (\alpha, E) = n\} \text{ et } \Delta'_n = \{\beta \in \Delta', (\beta, E') = n\}.$$

Puisque  $\varphi_2(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$ , on a  $\varphi_2(\Delta) = \Delta'$ , et même plus précisément,  $\varphi_2(\Delta_n) = \Delta'_n$  car  $\varphi_2$  préserve les graduations. Donc  $\varphi_2(\Pi)$  est un système fondamental de  $\Delta'$  compatible avec la graduation de  $\mathfrak{g}'$ . Donc d'après [KA88] et la décomposition  $W'_0 = N'_{K'_0}(\mathfrak{a}')/C'_{K'_0}(\mathfrak{a}')$ , on a qu'il existe  $X_3 \in \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{g}'_0$  tel que  $\varphi_3 := (\exp X_3)\varphi_2$  envoie  $\Pi$  sur  $\Pi'$  et même chaque  $\Pi_i$  sur  $\Pi'_i$  pour  $0 \leq i \leq r = r'$  et par suite les deux partitions  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  et  $(\Pi'_0, \dots, \Pi'_{r'})$  sont équivalentes.

Réciproquement, soit  $\psi$  un isomorphisme de  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  sur  $(\Pi'_0, \dots, \Pi'_{r'})$ . Par hypothèse,  $\psi$  s'étend en un isomorphisme de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{g}'$  (toujours noté  $\psi$ ). Soit  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  et  $\Pi' = \{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ . Les opérateurs d'Euler de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont uniquement déterminés par le fait que pour tout  $\alpha \in \Pi_n$ , on a  $(\alpha, E) = n$  et pour tout  $\beta \in \Pi'_n$ ,  $(\beta, E') = n$ . On numérote les racines dans chaque  $\Pi_n$  et  $\Pi'_n$  de sorte que  $\psi(\alpha_i) = \beta_i$  pour toutes les racines simples. Alors, on a pour  $\beta_i \in \Pi'_n$ ,  $(\psi(E), \beta_i) = (\psi(E), \psi(\alpha_i)) = (E, \alpha_i) = n$  donc  $\psi(E) = E'$  et donc les algèbres de Lie sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie graduées.  $\square$

Le théorème suivant donne alors une classification des  $\mathbb{Z}$ -graduations de  $\mathfrak{g}$  en établissant une bijection entre les classes d'isomorphie des graduations de  $\mathfrak{g}$  et les classes d'équivalence des partitions d'un système fondamental fixé de  $\mathfrak{g}$ .

**Théorème I.4.2** (S. Kaneyuki et H. Asano [KA88]). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réelle, semi-simple et de dimension finie et  $\Pi$  un système fondamental fixé d'un système de racines fixé  $\Delta$  de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des classes d'isomorphie de graduations de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des classes d'équivalence des partitions de  $\Pi$  sous le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de  $\Delta$ . Alors il existe une bijection  $\Phi$  de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.*



Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  une graduation de  $\mathfrak{g}$ . On considère  $(\Pi_0^{(1)}, \dots, \Pi_r^{(1)})$  la partition caractéristique de cette graduation. Alors il existe  $s \in W$  tel que  $s(\Pi^{(1)}) = \Pi$  et comme  $W = N_K(\mathfrak{a})/C_K(\mathfrak{a})$ , un représentant  $a \in G$  de  $s$  envoie  $\Pi^{(1)}$  sur  $\Pi$ . On définit alors une partition de  $\Pi$  en posant  $\Pi_n := a(\Pi_n^{(1)})$ . Alors par définition, les partitions  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  et  $(\Pi_0^{(1)}, \dots, \Pi_r^{(1)})$  sont équivalentes.

L'étape suivante consiste à montrer que si on choisit une autre graduation de  $\mathfrak{g}$ , isomorphe à celle choisie au départ, la partition caractéristique associée à cette graduation est équivalente à  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$ . Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}'_n$  une autre graduation de  $\mathfrak{g}$ , isomorphe à  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  par  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . A cette nouvelle graduation correspond un autre système fondamental,  $\Pi^{(2)}$  et une partition caractéristique  $(\Pi_0^{(2)}, \dots, \Pi_{r'}^{(2)})$ . Alors il existe  $b \in G$ , tel que  $b(\Pi^{(2)}) = \Pi$  et on pose  $\Pi'_n := b(\Pi_n^{(2)})$ . Donc  $(\Pi'_0, \dots, \Pi'_{r'})$  est une partition de  $\Pi$ , équivalente à  $(\Pi_0^{(2)}, \dots, \Pi_{r'}^{(2)})$ , partition de  $\Pi^{(2)}$ . Or d'après le théorème I.4.1, les partitions de  $\Pi^{(1)}$  et  $\Pi^{(2)}$  sont équivalentes donc  $r = r'$  et d'après la démonstration,  $\varphi$  induit un automorphisme de  $\mathfrak{g}$ , noté  $\tilde{\varphi}$ , de  $\Pi^{(2)}$  sur  $\Pi^{(1)}$ , qui envoie  $\Pi_n^{(2)}$  sur  $\Pi_n^{(1)}$  pour tout  $n$ . Alors  $b\tilde{\varphi}^{-1}a^{-1}$  induit un automorphisme du diagramme de Dynkin de  $\Pi$  envoyant  $\Pi_n$  sur  $\Pi'_n$ . Donc les partitions  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  et  $(\Pi'_0, \dots, \Pi'_{r'})$  sont équivalentes et on peut alors définir

$$\Phi([\mathfrak{g}_n]) = [(\Pi_0, \dots, \Pi_r)],$$

où  $[\mathfrak{g}_n]$  est la classe d'isomorphie de la graduation  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  et  $[(\Pi_0, \dots, \Pi_r)]$  la classe d'équivalence de la partition  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  de  $\Pi$ .

Tout d'abord, d'après le théorème I.4.1,  $\Phi$  est injective.

Montrons ensuite que  $\Phi$  est surjective i.e construisons à partir d'une partition de  $\Pi$ , une  $\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$ . On note  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  et on choisit  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  une partition de  $\Pi$ . On définit alors une fonction  $h_\pi$  sur  $\Delta$ ; si  $\alpha = \sum_{i=1}^l m_i(\alpha)\alpha_i$ , on pose

$$h_\pi(\alpha) := \sum_{\alpha_i \in \Pi_1} m_i(\alpha) + 2 \sum_{\alpha_i \in \Pi_2} m_i(\alpha) + \dots + r \sum_{\alpha_i \in \Pi_r} m_i(\alpha).$$

Si  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ , alors on a  $h_\pi(\alpha + \beta) = h_\pi(\alpha) + h_\pi(\beta)$ . Cette remarque va nous permettre de construire une graduation de  $\mathfrak{g}$  en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}_n := \bigoplus_{h_\pi(\alpha)=n} \mathfrak{g}^\alpha, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^*, \\ \mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{h_\pi(\alpha)=0} \mathfrak{g}^\alpha. \end{array} \right. \quad (\text{I.6})$$

Alors  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$  et si  $x \in \mathfrak{g}_n$  et  $y \in \mathfrak{g}_m$ , on a

$$[x, y] = \sum_{h_\pi(\alpha)=n} \sum_{h_\pi(\beta)=m} [x^\alpha, y^\beta] = \sum_{h_\pi(\alpha+\beta)=n+m} \underbrace{[x^\alpha, y^\beta]}_{\in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}} \in \mathfrak{g}_{n+m}.$$

Donc  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  est une  $\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$ . On pose alors  $\Delta_n := \{\alpha \in \Delta, h_\pi(\alpha) = n\}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On a donc  $\Pi_n = \Pi \cap \Delta_n$  et par construction de  $\Phi$ , on a  $\Phi([\mathfrak{g}_n]) = [(\Pi_0, \dots, \Pi_r)]$ . Donc  $\Phi$  est aussi surjective et par suite  $\Phi$  est bijective.  $\square$

**Définition I.4.5.** La graduation définie par les relations (I.6) est appelée *la graduation définie par la partition*  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$ .

Il faut noter que la longueur de la graduation définie par la partition  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  n'est pas  $2r + 1$ , mais il est facile de voir que  $h_\pi$  est maximale pour la plus grande racine  $\theta$  de  $\Delta$  et donc la longueur de la graduation est  $2h_\pi(\theta) + 1$ .

Par ailleurs, si on part d'une algèbre de Lie  $\mathbb{Z}$ -graduée  $\mathfrak{g}$ , d'opérateur d'Euler  $E$  et  $\Pi$  un système fondamental compatible avec la graduation alors la graduation de  $\mathfrak{g}$  définie par la partition de  $\Pi$  donnée par la condition de compatibilité est la graduation de départ. En effet, dans ce cas, on a  $\Pi_n = \Pi \cap \Delta_n = \{\alpha \in \Pi, (\alpha, E) = n\}$  et donc  $h_\pi(\alpha) = (\alpha, E)$ . La suite consiste à s'intéresser au cas des algèbres de Lie  $(2k + 1)$ -graduées où les parties "positive" et "négative" de  $\mathfrak{g}$  i.e  $\bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  et  $\bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_{-n}$  sont engendrées respectivement par  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Dans [KA88], de telles algèbres de Lie graduées sont dites *de type*  $\alpha_0$ . C'est notamment le cas lorsqu'on construit une algèbre de Lie graduée à partir d'un système de Jordan généralisé comme on l'a vu dans la partie précédente I.2.5. On reprend alors la terminologie de [KA88] et on pose la définition suivante :

**Définition I.4.6.** Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  une algèbre de Lie  $\mathbb{Z}$ -graduée, réelle et de dimension finie. On dit que  $\mathfrak{g}$  est *de type*  $\alpha_0$  si pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{n+1} &= [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_1] \\ \mathfrak{g}_{-n-1} &= [\mathfrak{g}_{-n}, \mathfrak{g}_{-1}], \end{cases}$$

i.e  $\mathfrak{g}_1$  engendre  $\bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_n$  et  $\mathfrak{g}_{-1}$  engendre  $\bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{-n}$ .

On peut caractériser le fait que  $\mathfrak{g}$  est de type  $\alpha_0$  grâce à la partition caractéristique de la graduation. En effet, on a le théorème suivant :

**Théorème I.4.3** (S. Kaneyuki et H. Asano [KA88]). *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réelle, semi-simple, de dimension finie et  $(2k + 1)$ -graduée, et  $(\Pi_0, \dots, \Pi_r)$  la partition caractéristique de la graduation de  $\mathfrak{g}$ . Alors la graduation est de type  $\alpha_0$  si et seulement si  $\Pi_n = \emptyset$  pour tout  $n \geq 2$ .*

Grâce à ce résultat, il suffit de considérer les sous-ensembles de  $\Pi$ ; ce qui nous amène à poser la définition suivante :

**Définition I.4.7.** Deux sous-ensembles de  $\Pi$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont dits *équivalents* s'il existe un automorphisme du diagramme de Dynkin de  $\Pi$  envoyant  $\Omega_1$  sur  $\Omega_2$ .

En combinant les théorèmes I.4.1 et I.4.2, on peut classifier les graduations de type  $\alpha_0$  par les classes d'équivalence des sous-ensembles de  $\Pi$  :

**Théorème I.4.4.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réelle, semi-simple et de dimension finie et  $\Pi$  un système fondamental d'un système de racines irréductible de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mathcal{G}_{\alpha_0}$  l'ensemble des classes d'isomorphie des graduations de  $\mathfrak{g}$  de type  $\alpha_0$  et  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$  l'ensemble des classes d'équivalence de tous les sous-ensembles non vides de  $\Pi$ . Alors il existe une bijection  $\Phi_{\alpha_0}$  de  $\mathcal{G}_{\alpha_0}$  sur  $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ .*

*Démonstration.*

Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  une  $\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathfrak{g}$ . Si elle est de type  $\alpha_0$ , alors d'après le théorème I.4.3, la partition caractéristique de la graduation est  $(\Pi_0, \Pi_1)$ . On note  $[(\mathfrak{g}_n)]$  la classe d'équivalence de la graduation. Alors d'après le théorème I.4.1, on peut définir  $\Phi_{\alpha_0}([( \mathfrak{g}_n)]) = [\Pi_1]$  où  $[\Pi_1]$  est la classe d'équivalence du sous-ensemble  $\Pi_1$ . La démonstration du théorème I.4.2 et le théorème I.4.3 montrent que  $\Phi_{\alpha_0}$  est une bijection.  $\square$

Pour terminer cette partie sur la classification et avant de considérer quelques exemples, on peut énoncer un résultat liant les classes d'isomorphie des  $(2k+1)$ -graduations  $\mathfrak{g}$  de type  $\alpha_0$  et la plus grande racine de  $\Delta$ . En effet, on suppose que  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  et on note  $\theta$  la plus grande racine de  $\Delta$ . Alors on peut décomposer  $\theta$  sur la base  $\alpha_i$ , de sorte que

$$\theta = \sum_{i=1}^l m_i(\theta) \alpha_i.$$

On note ensuite  $\mathcal{G}_{\alpha_0}^{(k)}$  l'ensemble des classes d'isomorphie des  $(2k+1)$ -graduations de type  $\alpha_0$  de  $\mathfrak{g}$  telles que  $\mathfrak{g}_k \neq 0$  et on pose

$$\mathcal{P}_{\alpha_0}^{(k)} := \bigcup_{r=1}^k \left\{ \{[\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}]\}, 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq l \mid \sum_{h=1}^r m_{i_h}(\theta) = k \right\}.$$

**Théorème I.4.5.** *Il existe une bijection  $\Phi_{\alpha_0}^{(k)}$  de  $\mathcal{G}_{\alpha_0}^{(k)}$  sur  $\mathcal{P}_{\alpha_0}^{(k)}$ .*

*Démonstration.*

On définit  $\Phi_{\alpha_0}^{(k)}$  comme  $\Phi_{\alpha_0}$  dans la démonstration du théorème I.4.4. Soit  $[(\mathfrak{g}_n)] \in \mathcal{G}_{\alpha_0}^{(k)}$  et  $(\Pi_0, \Pi_1)$  la partition caractéristique de  $\Pi$  associée à la graduation. Puisque  $\theta$  est la plus grande racine de  $\Delta$ , on a  $\theta \in \Delta_k$  donc  $k = (\theta, E) = \sum_{i=1}^l m_i(\theta) (\alpha_i, E)$  or par définition de l'ordre sur  $\Delta$ ,  $(\alpha_i, E) \in \mathbb{N}$ , donc le cardinal de  $\Pi_1$  est inférieur ou égal à  $k$ . Donc par le théorème I.4.4,  $\Phi_{\alpha_0}^{(k)}$  est une bijection de  $\mathcal{G}_{\alpha_0}^{(k)}$  sur  $\mathcal{P}_{\alpha_0}^{(k)}$ .  $\square$

On note que la plus grande graduation de  $\mathfrak{g}$  de type  $\alpha_0$  est de longueur  $(2 \sum m_i(\theta) + 1)$ , obtenue pour  $\Pi_0 = \emptyset$  et donc  $\Pi_1 = \Pi$ .

Ce résultat généralise légèrement celui de S. Kaneyuki et H. Asano ; en effet dans [KA88], les auteurs ne s'intéressent qu'au cas des 3- et 5-graduations, qui sont nécessairement de type  $\alpha_0$  si  $\mathfrak{g}$  est simple. En effet, c'est évident pour les 3-graduations, et si  $\mathfrak{g}$  est 5-gradué, on considère  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}] \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}]$  ; c'est un idéal de  $\mathfrak{g}$  non vide donc c'est  $\mathfrak{g}$  tout entier et par suite,  $\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$  et  $\mathfrak{g}_{-2} = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}]$ . On remarque que dans ce cas, on a également  $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$ . En revanche, il existe des 7-graduations qui ne sont pas de type  $\alpha_0$ , par exemple, dans le cas de  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  i.e  $\Delta = A_2$ , et  $\Pi$  la base constituée de  $\alpha_1 := \epsilon_1 - \epsilon_2$  et  $\alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$ , où  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, si on considère la graduation de  $\mathfrak{g}$  définie par la partition de  $\Pi$  donnée par  $\Pi_0 = \emptyset$ ,  $\Pi_1 = \{\alpha_1\}$

et  $\Pi_2 = \{\alpha_2\}$ , on obtient une 7-graduation de  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$  où  $\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ ,

$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$  et  $\mathfrak{g}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$ . Donc  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = 0$  et par

suite cette graduation n'est pas de type  $\alpha_0$ .

Dans la suite, nous allons donner les partitions des systèmes de racines réduites irréductibles classiques  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  (voir [Bou68] pour les bases choisies pour chaque système de racines) conduisant à des 3- et 5-graduations. Nous ne donnerons que  $\Delta_0$  et les  $\Delta_k$  puisque  $\Delta_{-k} = -\Delta_k$ ; d'après ce qui précède, ceci donne toutes les 3- et 5-graduations des algèbres de Lie simples classiques réelles correspondant à ces systèmes de racines. Nous utiliserons ensuite une réalisation de ces algèbres de Lie sous forme matricielle pour visualiser ces graduations. Nous reprendrons pour cela les réalisations données par M. Takeuchi dans [Tak66].

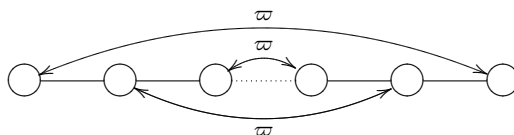
## I.4.2 Exemples

### a./ Système de type $A_{n-1}$ pour $n \geq 2$ .

Soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ; alors l'ensemble des racines est

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n\}.$$

On considère les racines simples  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . On pose  $\Pi$  le système fondamental de  $\Delta$  formé des  $\alpha_i$  et on considère la plus grande racine  $\theta := \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$ . Le diagramme de Dynkin est



Donc ses automorphismes sont l'identité et l'application  $\varpi$  envoyant  $\alpha_k$  sur  $\alpha_{n-k}$ . Intéressons-nous tout d'abord aux 3-graduations : d'après ce qui précède, les cas où  $\Pi_1 = \{\alpha_p\}$ , pour  $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  suffisent à définir toutes les classes d'équivalence des sous-ensembles à un seul élément de  $\Pi$ . Alors, la partition de  $\Delta$  pour  $\Pi_1 = \{\alpha_p\}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq p \text{ ou } p+1 \leq i < j \leq n-1\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq n-1\}. \end{aligned}$$

Considérons à présent  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Tr(A) = 0\}$  et l'application  $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, A \mapsto -{}^t A$ . Alors,  $\tau$  est un automorphisme involutif de  $\mathfrak{g}$  et donc  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{k}$  est l'espace propre associé à la valeur 1 et  $\mathfrak{p}$  celui associé à la valeur propre -1 de  $\tau$ . Le sous-espace  $\mathfrak{a}$  constitué des matrices de  $\mathfrak{g}$  qui sont diagonales est un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}$ . On sait alors que le système de racines  $\Delta$  relatif à  $\mathfrak{a}$  est de type  $A_{n-1}$  et que dans ce cas,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ . On rappelle également que  $\mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{R}E_{ij}$ , où  $(E_{ij})$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Alors, d'après ce qui précède, on a les 3-graduations suivantes pour  $\mathfrak{g}$ , avec  $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  :

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

où  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ .

En ce qui concerne les 5-graduations, les cas à regarder sont  $\Pi_1 = \{\alpha_p, \alpha_{p+q}\}$  pour  $1 \leq p \leq n-1$  et  $1 \leq q \leq n-p-1$ . Dans le cas où  $\Pi_1 = \{\alpha_p, \alpha_{p+q}\}$ , on a la partition de  $\Delta$  suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq p \text{ ou } p+1 \leq i < j \leq p+q \text{ ou } p+q+1 \leq i < j \leq n\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, (1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q) \text{ ou } (p+1 \leq i \leq p+q, p+q+1 \leq j \leq n)\}, \\ \Delta_2 &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, 1 \leq i \leq p, p+q+1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la 5-gradation suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p,n-(p+q)}(\mathbb{R})$ ,  $D \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ ,  $E \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ ,  $F \in \mathcal{M}_{q,n-(p+q)}(\mathbb{R})$ ,  $G \in \mathcal{M}_{n-(p+q),p}(\mathbb{R})$ ,  $H \in \mathcal{M}_{n-(p+q),q}(\mathbb{R})$  et  $J \in \mathcal{M}_{n-(p+q)}(\mathbb{R})$ .

## b./ Système de type $B_n$ pour $n \geq 2$ .

Soit toujours  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Le système de racines est donné par

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n, \pm\epsilon_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

On considère les racines simples  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $\alpha_n := \epsilon_n$ . On note  $\Pi$  le système fondamental de  $\Delta$  formé des  $\alpha_i$  et on note  $\theta := \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \dots + \alpha_n)$  la plus grande racine. Le diagramme de Dynkin est



Le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin est restreint à l'identité. Par définition de  $\theta$ , il n'existe qu'une seule classe d'équivalence de sous-ensembles de  $\Pi$  à un seul élément donnant une 3-gradation :  $\Pi_1 = \{\alpha_1\}$ . La partition de  $\Delta$  correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n, \pm\epsilon_i, 2 \leq i \leq n\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_1, \epsilon_1 \pm \epsilon_j, 2 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$



avec  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{k,2n+1-2k}(\mathbb{R})$ ,  $C, F \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ,  $C' + C = 0 = F' + F$ ,  
 $D \in \mathcal{M}_{2n+1-2k,k}(\mathbb{R})$ ,  $E \in \mathcal{M}_{2n+1-2k}(\mathbb{R})$ ,  $E' + E = 0$ .

c./ Système de type  $C_n$  pour  $n \geq 3$ .

Soit  $(\epsilon_i)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble des racines est

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n, \pm 2\epsilon_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

On pose  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $\alpha_n := 2\epsilon_n$  et on considère  $\Pi$  le système fondamental formé des racines simples  $\alpha_i$ . La plus grande racine est  $\theta := 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) + \alpha_n$ . Le diagramme de Dynkin est



Le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin est restreint à l'identité. Par définition de  $\theta$ , il n'y a que  $\Pi_1 = \{\alpha_n\}$  qui donne une 3-graduation. La partition de  $\Delta$  correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_i + \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq n, 2\epsilon_i, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les 5-graduations, chaque cas  $\Pi_1 = \{\alpha_k\}$  pour  $1 \leq k \leq n-1$  donne une 5-graduation non-isomorphe aux autres. Dans ce cas, la partition de  $\Delta$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq k, \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), k+1 \leq i < j \leq n, \pm 2\epsilon_i, k+1 \leq i \leq n\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n\}, \\ \Delta_2 &= \{\epsilon_i + \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq k, 2\epsilon_i, 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned}$$

Considérons la matrice  $J'_n := \begin{pmatrix} 0 & K_n \\ -K_n & 0 \end{pmatrix}$  et l'ensemble

$$\mathfrak{sp}'(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}), {}^t X J'_n + J'_n X = 0\}.$$

Alors on a  $T\mathfrak{sp}'(n, \mathbb{R})T = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  où  $T := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & K_n \end{pmatrix} \in O(2n)$ . Alors si  $X \in \mathfrak{sp}'(n, \mathbb{R})$ , on a  $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}$  avec  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B$  et  $C$  symétriques par rapport à la deuxième diagonale. Les matrices diagonales de  $\mathfrak{sp}'(n, \mathbb{R})$  forment un sous-espace abélien maximal et le système de racines associé est de type  $C_n$ . Pour  $\Pi = \{\alpha_n\}$ , seule partition de  $\Pi$  fournissant une 3-graduation, on a :

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

où  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B$  et  $C$  symétrique par rapport à la deuxième diagonale.

Enfin, si  $\Pi = \{\alpha_k\}$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on a la 5-graduation suivante :

$$\mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C' \\ 0 & 0 & 0 & -B' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & G & 0 \\ 0 & L & -F' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A' \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H' & -E' & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

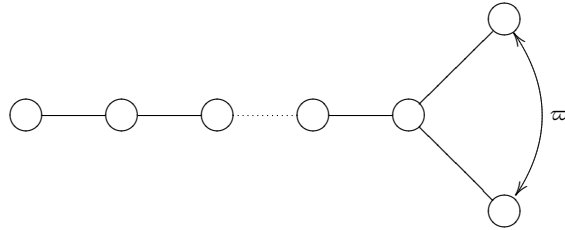
où  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ,  $B, C \in \mathcal{M}_{k, n-k}(\mathbb{R})$ ,  $D, M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ,  $D' = D$ ,  $M = M'$ ,  $E, H \in \mathcal{M}_{n-k, k}(\mathbb{R})$ ,  $F \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ ,  $G, L \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ ,  $G = G'$ ,  $L = L'$ .

#### d./ Système de type $D_n$ pour $n \geq 4$ .

Soit  $(\epsilon_i)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Le système de racines considéré cette fois est

$$\Delta = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Soit  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $\alpha_n := \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$ . Et on considère  $\Pi$  le système fondamental formés des  $(\alpha_i)$ . Enfin, la plus grande racine est  $\theta = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2}) + \alpha_{n-1} + \alpha_n$ . Le diagramme de Dynkin est



Les seuls automorphismes du diagramme sont l'identité et  $\varpi$  qui fixe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$  et qui échange  $\alpha_{n-1}$  et  $\alpha_n$  si  $n \geq 5$  et si  $n = 4$ , le groupe des automorphismes est le groupe diédral  $\mathcal{D}_3$ . Donc, les partitions où  $\Pi_1 = \{\alpha_1\}$  et  $\Pi_1 = \{\alpha_n\}$  suffisent à décrire toutes les 3-graduations pour  $n \geq 5$  et  $\Pi_1 = \{\alpha_1\}$  suffit pour  $n = 4$ . Si  $\Pi_1 = \{\alpha_1\}$ , alors la partition de  $\Delta$  est donnée par :

$$\Delta_0 = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), 2 \leq i < j \leq n\},$$

$$\Delta_1 = \{\epsilon_1 \pm \epsilon_j, 2 \leq j \leq n\},$$

alors que si  $\Pi_1 = \{\alpha_n\}$ , on a :

$$\Delta_0 = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\Delta_1 = \{\epsilon_i + \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}.$$



En ce qui concerne les 5-graduations, il faut étudier les cas où  $\Pi_1 = \{\alpha_k\}$  pour  $2 \leq k \leq n-2$ ,  $\Pi_1 = \{\alpha_1, \alpha_n\}$  et  $\Pi_1 = \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$  si  $n \geq 5$  et si  $n = 4$ , il suffit de regarder  $\Pi_1 = \{\alpha_2\}$  et  $\Pi_1 = \{\alpha_3, \alpha_4\}$ .

Si  $\Pi_1 = \{\alpha_k\}$  avec  $2 \leq k \leq n-2$ , on a la partition suivante de  $\Delta$  :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq k, \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), k+1 \leq i < j \leq n\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n\}, \\ \Delta_2 &= \{\epsilon_i + \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq k\}.\end{aligned}$$

Si  $\Pi_1 = \{\alpha_1, \alpha_n\}$ , alors on a :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 2 \leq i < j \leq n\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_1 - \epsilon_j, 2 \leq j \leq n, \epsilon_i + \epsilon_j, 2 \leq i < j \leq n\}, \\ \Delta_2 &= \{\epsilon_1 + \epsilon_j, 2 \leq j \leq n\}.\end{aligned}$$

Enfin, si  $\Pi_1 = \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$  la partition de  $\Delta$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), 1 \leq i < j \leq n-1\}, \\ \Delta_1 &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_n, 1 \leq i \leq n-1\}, \\ \Delta_2 &= \{\epsilon_i + \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq n-1\}.\end{aligned}$$

On considère à présent,  $\mathfrak{o}'(2n, \mathbb{R})$  i.e l'ensemble des matrices d'ordres  $2n$  antisymétriques par rapport à la deuxième diagonale. Alors

$$\mathfrak{o}'(2n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}, A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B + B' = 0, C + C' = 0 \right\}.$$

On considère le sous-espace de  $\mathfrak{o}'(2n, \mathbb{R})$  formé des matrices diagonales; c'est un sous-espace abélien maximal pour lequel le système de racines associé est de type  $D_n$ . Reprenons alors les partitions de  $\Delta$  et construisons les graduations de  $\mathfrak{o}'(2n, \mathbb{R})$  associées :

Si  $\Pi_1 = \{\alpha_1\}$ , on obtient la 3-graduation suivante :

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & \dots & x_{2n-1} & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -x_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -x_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & A & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ y_2 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ y_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & -y_{2n-1} & \dots & -y_2 & 0 \end{pmatrix},$$



$$\mathfrak{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & \cdots & u_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & \cdots & v_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -v_{n-1} & -u_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -v_1 & -u_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ ,  $B, C \in \mathfrak{o}'(n-1, \mathbb{R})$ ,  $(x, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}$ .

Enfin, si  $\Pi_1 = \{\alpha_1, \alpha_n\}$ , on a la 5-graduation suivante :

$$\mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & B & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & A & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & -A' & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & C & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_{n-1} & \cdots & -u_1 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{g}_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -v_{n-1} & \cdots & -v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ ,  $B, C \in \mathfrak{o}'(n-1, \mathbb{R})$ ,  $(a, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}$ .

On remarque qu'il n'y a donc que trois "formes" possibles pour les 3-graduations des algèbres de Lie réelles simples classiques, à savoir

$$\left( \begin{array}{c|c} \langle p \rangle & \langle n-p \rangle \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array} \right) \text{ dans le cas } A_n \text{ avec } \Pi_1 = \{\alpha_p\},$$

$$\left( \begin{array}{c|c} \langle n \rangle & \langle n \rangle \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array} \right) \text{ dans les cas } C_n \text{ et } D_n \text{ et } \Pi_1 = \{\alpha_n\},$$

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \langle 1 \rangle & \langle l \rangle & \langle 1 \rangle \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & 0 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline 0 & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array} \right) \text{ dans les cas } B_n(l = 2n - 1) \text{ et } D_n(l = 2n - 2) \text{ avec } \Pi_1 = \{\alpha_1\}.$$

Les nombres apparaissant au dessus des matrices représentent la taille des blocs composant ces matrices.

Et de même, il y a seulement trois "formes" possibles pour les 5-graduations :

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \langle p \rangle & \langle q \rangle & \langle n-p-q \rangle \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array} \right) \text{ dans le cas } A_n \text{ avec } \Pi_1 = \{\alpha_p, \alpha_{p+q}\},$$

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \langle k \rangle & \langle l \rangle & \langle k \rangle \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array} \right) \text{ dans les cas } B_n(l = 2n + 1 - 2k), C_n(l = 2n - 2k) \text{ ou } D_n(l = 2n - 2k) \\ \text{et } \Pi_1 = \{\alpha_k\} \text{ ou dans le cas } D_n(l = 2) \text{ et } \Pi_1 = \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\},$$

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} \langle 1 \rangle & \langle n-1 \rangle & \langle n-1 \rangle & \langle 1 \rangle \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 & 0 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \hline \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline 0 & \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array} \right) \text{ dans le cas } D_n \text{ et } \Pi_1 = \{\alpha_1, \alpha_n\}.$$

On trouve une liste des 3- et 5-graduations des algèbres de Lie simples classiques sous forme de tableaux dans [KA88] et dans la partie II de [FKK<sup>+</sup>00]. Dans ce dernier, on trouve également une liste des 3- et 5-graduations des algèbres de Lie classiques simples complexes et des algèbres de Lie exceptionnelles.

# Chapitre II

## Géométrie de drapeaux généralisée

Comme nous l'avons mentionné précédemment, à un groupe de Lie, on associe une algèbre de Lie, comme étant l'espace tangent en  $e$ , le neutre du groupe considéré. On a également vu que si  $M = G/H$  est un espace symétrique, alors  $T_oM$ , l'espace tangent en  $o = eH$ , possède une structure de système triple de Lie. Dans [BN04], W. Bertram et K. H. Neeb définissent la *géométrie projective généralisée* associée à une algèbre de Lie 3-graduée et montrent que cette géométrie est caractérisée par la paire de Jordan associée. Dans la suite de ce travail, nous allons nous poser la question de savoir quel objet algébrique peut caractériser la géométrie associée aux algèbres de Lie munie d'une  $\mathbb{Z}$ -graduation de longueur finie. La première chose à faire est donc de définir la géométrie associée à une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée; nous l'appellerons la *géométrie de drapeaux généralisée* [Che09]. Cette notion étend celle de géométrie projective généralisée introduite dans [BN04] et pour la définir, nous allons utiliser un analogue à la construction de Chevalley pour une algèbre de Lie complexe simple et de dimension finie [Car72], [Hum78] ou [Ste68]. On renvoie à l'annexe A pour plus d'explications sur la construction de Chevalley. Cette construction se base également sur la notion de *groupe projectif élémentaire* introduite par O. Loos dans [Loo79] puis par J. R. Faulkner dans [Fau83]. Il est important de remarquer que notre construction fonctionne pour une algèbre de Lie sur un anneau  $\mathbb{K}$  (quasi) quelconque et de dimension finie ou non.

### II.1 Groupe projectif élémentaire

Intéressons-nous dans un premier temps au cas des algèbres de Lie 3-graduées. Ce sont O. Loos dans [Loo79] et [Loo95] et J. R. Faulkner dans [Fau83] qui s'intéressèrent à ce cas et ses liens avec la théorie de Jordan. Ils introduisirent tout d'abord le concept de *groupe projectif élémentaire* et de *complétion projective* d'une paire de Jordan. Puis O. Loos reprit cette notion de groupe projectif élémentaire pour développer celle de *quasi-inversibilité* d'un quadruplet. On peut également citer B. Allison qui, avec J. R. Faulkner dans [AF99] ont défini le groupe projectif élémentaire dans le cas des paires de Freudenthal-Kantor, et W. Bertram et K-N. Neeb qui se basèrent sur ces notions de groupe projectif élémentaire et de complétion projective pour construire une structure de variété différentielle sur la *géométrie projective généralisée* d'une algèbre de Lie 3-graduée [BN04] et [BN05]. Nous reviendrons plus longuement sur ce travail dans les parties suivantes. Pour l'instant, nous

allons généraliser ces différentes notions pour des graduations plus longues. Les résultats qui suivent ont été annoncés dans [Che09].

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée sur un anneau commutatif  $\mathbb{K}$  dans lequel les entiers sont inversibles. On note  $D$  la dérivation caractéristique associée à la graduation. Alors pour  $x \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ , la dérivation  $\text{ad}(x)$  est nilpotente, d'indice  $(2k+1)$ . On peut donc considérer l'endomorphisme suivant :

$$e^{\text{ad}(x)} := \sum_{n=0}^{2k} \frac{(\text{ad}(x))^n}{n!} \in \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Alors  $e^{\text{ad}(x)}$  est bien défini et est un automorphisme de  $\mathfrak{g}$  car on a supposé les entiers inversibles. Dans le cas d'une graduation de longueur  $(2k+1)$ , il faut, pour que  $e^{\text{ad}(x)}$  soit un automorphisme que tous les entiers jusqu'à  $(2k+1)$  soient inversibles. On a donc supposé que tous les entiers sont inversibles pour que ce qui suit ne dépende pas de la longueur de la graduation considérée, mais on pourrait être moins restrictif sur  $\mathbb{K}$ .

Tout ce qui précède est encore vrai si on remplace  $x$  par  $y \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_{-n}$ . On considère alors les deux groupes constitués de ces opérateurs :

$$U^+ := \left\{ e^{\text{ad}(x)}, x \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n \right\} \quad \text{et} \quad U^- := \left\{ e^{\text{ad}(y)}, y \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_{-n} \right\}.$$

La formule de Campbell-Hausdorff, qui dans ce cas est polynomiale, assure que  $U^+$  et  $U^-$  sont bien des groupes.

**Définition II.1.1.** On considère également le groupe engendré par  $U^+$  et  $U^-$  :

$$G := PE(\mathfrak{g}, D) := \langle U^+, U^- \rangle \subset \text{Aut}(\mathfrak{g}),$$

appelé le *groupe projectif élémentaire* de  $(\mathfrak{g}, D)$ , [Loo95] et [BN04]. On définit aussi

$$H := \{g \in G, g \circ D = D \circ g\},$$

l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec la dérivation caractéristique et enfin

$$P^+ := HU^+ \quad \text{et} \quad P^- := HU^-.$$

Les éléments de  $H$  commutent avec  $D$  donc préservent la graduation et ainsi normalisent  $U^+$  et  $U^-$ , si bien que  $P^+$  et  $P^-$  sont des sous-groupes de  $G$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$  est l'analogie dans le cas  $(2k+1)$ -graduée d'une sous-algèbre parabolique, rencontrée dans le cadre des algèbres de Lie simples associées à un système de racines [Bou75]. De même pour  $\mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$ , ainsi  $P^+$  et  $P^-$  peuvent être pensés comme des "sous-groupes paraboliques" de  $G$ .

Parfois, lorsqu'une graduation de  $\mathfrak{g}$  est fixée, il est pratique d'utiliser une notation "matricielle" des automorphismes de  $\mathfrak{g}$ . Si  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , on définit

$$g_{ij} := \text{pr}_i \circ g \circ \iota_j : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_i, \quad \text{pour } i, j = -k, \dots, k,$$

où  $\text{pr}_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$  est la projection de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{g}_i$  et  $\iota_j : \mathfrak{g}_j \hookrightarrow \mathfrak{g}$  est l'inclusion de  $\mathfrak{g}_j$  dans  $\mathfrak{g}$ . Alors on peut écrire  $g$  sous forme matricielle

$$g = \begin{pmatrix} g_{k,k} & \cdots & g_{k,-k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{-k,k} & \cdots & g_{-k,-k} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients d'une telle matrice ne sont pas des éléments de  $\mathbb{K}$  mais des applications linéaires de  $\mathfrak{g}_i$  dans  $\mathfrak{g}_j$ . Avec cette écriture, les éléments de  $U^+$  sont représentés par des matrices triangulaires supérieures, avec l'identité sur chaque bloc de la diagonale, ceux de  $U^-$  par des matrices triangulaires inférieures ayant l'identité sur la diagonale et les éléments de  $H$  sont, quant à eux, représentés par des matrices diagonales. Cette écriture justifie la remarque sur le fait que  $P^+$  et  $P^-$  peuvent être vus comme des sous-groupes paraboliques. En effet, les éléments de  $P^+$  sont représentés par des matrices triangulaires supérieures et si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , alors  $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $P^+$  est constitué des matrices triangulaires supérieures de  $G$ , qui forment bien un sous-groupe parabolique. Nous allons dans la suite définir la *géométrie de drapeaux généralisée* de  $\mathfrak{g}$ , qui étend la *géométrie projective généralisée* définie dans [BN04] pour des algèbres de Lie 3-graduées.

## II.2 Géométrie de drapeaux généralisée

Dans le cas où on considère  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , munie de la  $(2n+1)$ -graduation définie par  $\Pi_0 = \emptyset$  et  $\Pi_1 = \Pi$  avec les notations de la partie I.4, alors  $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $P^+$  est le sous-groupe des matrices de  $G$  qui sont triangulaires supérieures. Dans ce cas, l'espace quotient  $G/P^+$  peut être vu comme l'espace des drapeaux complets de  $\mathbb{C}^n$  :

$$\{(0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n), \dim(V_i) = i\}.$$

En effet,  $G$  agit transitivement sur les drapeaux complets de  $\mathbb{C}^n$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , on considère le drapeau standard défini par  $V_i := \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Alors  $P^+$  est le stabilisateur de ce drapeau, si bien que

$$G/P^+ \cong G.(0 \subset \mathbb{C}e_1 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^n) \cong \{(0 \subset V_1 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^n), \dim(V_i) = i\}.$$

On va considérer l'analogie de cette construction dans le cas d'une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée. Pour cela, on définit trois espaces homogènes :

$$M := G/H, \quad X^+ := G/P^- \quad \text{et} \quad X^- := G/P^+.$$

On notera  $(o^+, o^-)$  le point de base  $(P^-, P^+)$  dans  $X^+ \times X^-$ . Dans la suite, on verra que les espaces  $X^+$  et  $X^-$  ont une réalisation géométrique proche de celle des drapeaux. Mais pour l'instant définissons une relation de *transversalité* sur  $X^+ \times X^-$ .

**Définition II.2.1.** Si  $x \in X^+$  et  $y \in X^-$ , alors on dit que  $x$  et  $y$  sont *transverses*, ce qu'on notera  $x \top y$ , si  $(x, y)$  est conjugué sous l'action de  $G$  sur  $X^+ \times X^-$  du point de base  $(o^+, o^-)$  i.e il existe  $g \in G$  tel que  $(x, y) = (go^+, go^-)$ . On pose

$$(X^+ \times X^-)^\top := \{(x, y) \in X^+ \times X^-, x \top y\}, \text{ et pour } x \in X^\pm, x^\top := \{y \in X^\mp, x \top y\}.$$

La donnée  $(X^+, X^-, \top)$  sera appelée une *géométrie de drapeaux généralisée de type  $k$ -graduée*.

La relation de transversalité peut être définie en utilisant l'espace homogène  $M$  grâce au lemme suivant :

**Lemme II.2.1.**

- i) Si  $x = go^+ \in X^+$  et  $y = g'o^- \in X^-$ , alors  $x$  et  $y$  sont transverses si et seulement s'il existe  $z \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $x = g'e^{\text{ad}(z)}o^+$ .
- ii) On a  $P^+ \cap P^- = H$ . Donc  $\bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n \subset X^+$  via  $x \mapsto e^{\text{ad}(x)}o^+$  et  $(o^-)^\top \cong \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ .
- iii) L'espace  $M$  est isomorphe à  $(X^+ \times X^-)^\top$  i.e  $H$  est le stabilisateur du point de base  $(o^+, o^-)$ .

*Démonstration.*

- i) On a  $x \top y$  si et seulement si  $gP^- \top g'P^+$  i.e il existe  $\gamma \in G$  tel que  $gP^- = \gamma P^-$  et  $g'P^+ = \gamma P^+$  i.e il existe  $p^+ \in P^+$  tel que  $gP^- = g'p^+P^-$  et donc  $x$  et  $y$  sont transverses si et seulement s'il existe  $z \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $x = g'e^{\text{ad}(z)}P^-$ .
- ii) On a clairement  $H \subset P^+ \cap P^-$ . Réciproquement, si  $g \in P^+ \cap P^-$ , alors  $he^{\text{ad}(x)} = h'e^{\text{ad}(y)}$  avec  $(h, h') \in H$ , et  $x \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ ,  $y \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_{-n}$ . Donc  $g$  stabilise la graduation de  $\mathfrak{g}$  et ainsi  $x = 0 = y$ . Donc  $g \in H$ . D'où  $H = P^+ \cap P^-$ .  
Soit  $x = go^+ \in X^+$ . On a  $x \top o^-$  si  $g \in P^+$  i.e  $x = e^{\text{ad}(z)}ho^+ = e^{\text{ad}(z)}o^+$  donc l'application

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n &\rightarrow (o^-)^\top \subset X^+ \\ x &\mapsto e^{\text{ad}(x)}o^+ \end{aligned}$$

est bien définie et surjective. Par ailleurs, si  $e^{\text{ad}(x)}o^+ = e^{\text{ad}(y)}o^+$  pour  $(x, y) \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  alors  $e^{-\text{ad}(y)}e^{\text{ad}(x)} \in P^+ \cap P^- = H$  donc  $e^{-\text{ad}(y)}e^{\text{ad}(x)} = 1$  et alors  $x = y$ . D'où  $(o^-)^\top \cong \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ .

- iii) Soit  $g \in G$ . Par définition, les éléments  $go^+$  et  $go^-$  sont transverses; en outre, on a  $Ho^+ = o^+$  et  $Ho^- = o^-$  donc l'application  $gH \mapsto g(o^+, o^-)$  est bien définie. Par ailleurs, si  $g(o^+, o^-) = g'(o^+, o^-)$  alors  $g'^{-1}g \in P^+ \cap P^- = H$  et donc  $g \in g'H$  donc l'application est aussi injective. Finalement, soit  $(go^+, g'o^-) \in (X^+ \times X^-)^\top$ .  
On a  $g'^{-1}g \in P^+$  donc il existe  $x \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $go^+ = g'e^{\text{ad}(x)}o^+$ . Donc, on a  $g'e^{\text{ad}(x)}(o^+, o^-) = (g'e^{\text{ad}(x)}o^+, g'e^{\text{ad}(x)}o^-) = (go^+, g'o^-)$ . Et ainsi  $M \cong (X^+ \times X^-)^\top$ .



□

En utilisant la terminologie introduite par W. Bertram et H. Löwe dans [BL08],  $(X^+, X^-, \top)$  est une *géométrie de paires linéaires*.

## II.3 Réalisation géométrique de la géométrie de drapeaux

Reprenons le cas où  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $P^+$  est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On a déjà vu que  $G/P^+$  est l'ensemble des drapeaux complets de  $\mathbb{C}^n$ .

Si au contraire, on considère le cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée, cette fois on a

$$P^+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C}) \right\}$$

et  $G/P^+$  est l'ensemble des sous-espaces de  $\mathbb{C}^n$  de dimension  $p$  i.e  $X^- \cong \mathrm{Gras}_p(\mathbb{C}^n)$  et alors  $X^+ = G/P^- \cong \mathrm{Gras}_{n-p}(\mathbb{C}^n)$ . Dans ce cas, deux sous-espaces  $E$  et  $F$  de  $X^+$  et  $X^-$  sont transverses si  $E \oplus F = \mathbb{C}^n$ . On obtient donc une réalisation géométrique des espaces  $X^+$  et  $X^-$  ainsi que de la relation de transversalité.

On voudrait trouver un objet se rapprochant des drapeaux pour obtenir une telle réalisation des espaces  $X^+$  et  $X^-$  ainsi que la relation  $\top$  dans le cas général. Cet objet est la notion de *filtration* d'une algèbre de Lie.

### II.3.1 Filtrations d'une algèbre de Lie

Tout d'abord, on définit la notion de filtration d'une algèbre de Lie, celle-ci n'étant pas nécessairement graduée.

**Définition II.3.1.** Une  $(2k+1)$ -filtration de  $\mathfrak{g}$  est un drapeau de sous-espaces :

$$0 = \mathfrak{n}_{k+1} \subset \mathfrak{n}_k \subset \mathfrak{n}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_{-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_{-k+1} \subset \mathfrak{n}_{-k} = \mathfrak{g} \quad \text{avec } [\mathfrak{n}_n, \mathfrak{n}_m] \subset \mathfrak{n}_{n+m}.$$

Un tel drapeau sera noté  $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_{-k+1})$ , et l'espace des  $(2k+1)$ -filtrations de  $\mathfrak{g}$  sera noté  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Si  $\mathfrak{n} \in \tilde{\mathcal{F}}$ , alors  $\mathrm{ad}(x)$  avec  $x \in \mathfrak{n}_1$  est nilpotent et donc l'automorphisme  $e^{\mathrm{ad}(x)}$  est bien défini. On note alors

$$U(\mathfrak{n}) := e^{\mathrm{ad}(\mathfrak{n}_1)} := \{e^{\mathrm{ad}(x)}, x \in \mathfrak{n}_1\} \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

le groupe correspondant. Puisque  $[\mathfrak{n}_m, \mathfrak{n}_n] \subset \mathfrak{n}_{m+n}$ , le groupe  $U(\mathfrak{n})$  préserve la filtration  $\mathfrak{n}$ .

Intéressons-nous à présent au lien entre filtration et graduation. Si  $\mathfrak{g}$  est  $(2k+1)$ -graduée, de dérivation caractéristique  $D$ , on considère deux  $(2k+1)$ -filtrations de  $\mathfrak{g}$ , appelées les *filtrations positive et négative associées à la graduation*, et définies par

$$\mathfrak{n}^+(D) := (\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k+1})$$

et  $\mathfrak{n}^-(D) := (\mathfrak{g}_{-k} \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \mathfrak{g}_{-k+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k-1})$ .

Une  $(2k+1)$ -filtration  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{g}$  est dite *intérieure* si  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E))$ , avec  $E \in \mathfrak{g}$ . L'espace des  $(2k+1)$ -filtrations intérieures de  $\mathfrak{g}$  sera noté  $\mathcal{F}$ .

Nous avons à présent l'objet de base pour la réalisation géométrique des espaces  $X^+$  et  $X^-$ . Il faut maintenant définir une relation de transversalité entre deux filtrations.

### II.3.2 Transversalité de deux filtrations

**Définition II.3.2.** Soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  deux  $(2k+1)$ -filtrations de  $\mathfrak{g}$ . On dit que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont *transverses* si pour  $-k+1 \leq n \leq k$ , on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_n \oplus \mathfrak{m}_{-n+1}$ . Dans ce cas, on notera  $\mathfrak{m} \top \mathfrak{n}$ .

Par construction, les filtrations associées à une dérivation  $D$ ,  $\mathfrak{n}^+(D)$  et  $\mathfrak{n}^-(D)$  sont transverses. Réciproquement, on va montrer que deux filtrations transverses proviennent d'une dérivation ou, de manière équivalente, d'une graduation.

**Théorème II.3.1.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée. Alors on a :

- i) Soit  $\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E)) \in \mathcal{F}$ . Alors  $e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1)}E = E + \mathfrak{n}_1$ .
- ii) Soit  $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ . Alors  $\mathfrak{m} \top \mathfrak{n}$  si et seulement s'il existe  $E \in \mathfrak{g}$  tel que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E))$  et  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E))$ .
- iii) Soit  $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ . Alors  $e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1)}$  agit simplement transitivement sur  $\mathfrak{n}^\top := \{\mathfrak{m} \in \mathcal{F}, \mathfrak{m} \top \mathfrak{n}\}$ .

*Démonstration.*

- i) On a de manière évidente  $e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1)}E \subset E + \mathfrak{n}_1$ .

Montrons l'inclusion inverse ; soit  $X \in \mathfrak{n}_1$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \{3, \dots, k+1\}$ , il existe  $Y^n \in \mathfrak{n}_1$  tel que

$$e^{\text{ad}(Y^n)}E = E + X + R^n \text{ où } R^n \in \mathfrak{n}_n.$$

Si  $n = k+1$ , alors  $\mathfrak{n}_{k+1} = 0$ , donc  $R^{k+1} = 0$  et par suite  $e^{\text{ad}(Y^{k+1})}E = E + X$ .

Par définition,  $X \in \mathfrak{n}_1$  donc  $X = \sum_{i=1}^k X_i$ , avec  $X_i \in \mathfrak{g}_i$ . On pose

$$Y^3 := \sum_{i=1}^k -\frac{1}{i} X_i.$$

Alors on a

$$e^{\text{ad}(Y^3)}E = E + [Y^3, E] + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \text{ad}(Y^3)^j E.$$

Donc  $e^{\text{ad}(Y^3)}E = E + X + R^3$ , avec  $R^3 := \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \text{ad}(Y^3)^j E \in \mathfrak{n}_3$ .

A présent, soit  $n \in \{3, \dots, k\}$  tel qu'il existe  $Y^n \in \mathfrak{n}_1$  avec  $e^{\text{ad}(Y^n)}E = E + X + R^n$  et  $R^n \in \mathfrak{n}_n$ . Comme  $R^n \in \mathfrak{n}_n$ , on peut écrire  $R^n = \sum_{i=n}^k R_i^n$ , où  $R_i^n \in \mathfrak{g}_i$ . Soit

$$Y^{n+1} := Y^n + \frac{1}{n} R_n^n \in \mathfrak{n}_1.$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors, on a } e^{\text{ad}(Y^{n+1})}E &= E + [Y^n, E] + \frac{1}{n} [R_n^n, E] + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \text{ad} \left( Y^n + \frac{1}{n} R_n^n \right)^j E \\
&= E + [Y^n, E] - R_n^n + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \text{ad} (Y^n)^j E + \widetilde{R}^n \\
&= e^{\text{ad}(Y^n)}E - R_n^n + \widetilde{R}^n.
\end{aligned}$$

Le premier terme dans  $\widetilde{R}^n$  est  $\left[ Y^n, \left[ \frac{1}{n} R_n^n, E \right] \right] = -[Y^n, R_n^n] \in \mathfrak{n}_{n+1}$  donc  $\widetilde{R}^n \in \mathfrak{n}_{n+1}$ .

$$\begin{aligned}
\text{D'où } e^{\text{ad}(Y^{n+1})}E &= E + X + \sum_{i=n+1}^k R_i^n + \widetilde{R}^n \\
&= E + X + R^{n+1}, \text{ avec } R^{n+1} := \sum_{i=n+1}^k R_i^n + \widetilde{R}^n \in \mathfrak{n}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Finalement, il existe  $Y := Y^{k+1} \in \mathfrak{n}_1$  tel que  $e^{\text{ad}(Y)}E = E + X$ . Donc  $E + \mathfrak{n}_1 \subset e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1)}E$  et par suite  $e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1)}E = E + \mathfrak{n}_1$ .

- ii) On a déjà remarqué que  $\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E))$  et  $\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E))$  sont transverses. Pour montrer la réciproque, supposons que  $\mathfrak{m} \top \mathfrak{n}$ . Puisque  $\mathfrak{n}$  est intérieure, il existe  $E' \in \mathfrak{g}$  tel que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E'))$ . Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  la  $(2k+1)$ -graduation de  $\mathfrak{g}$  associée à  $\text{ad}(E')$ . On a donc  $\mathfrak{n}_1 = \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ . Comme  $\mathfrak{m} \top \mathfrak{n}$ , on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{m}_0$  donc il existe  $Z' \in \mathfrak{n}_1$  tel que  $E' - Z' \in \mathfrak{m}_0$ . Donc, par i), il existe  $Z \in \mathfrak{n}_1$  tel que  $e^{\text{ad}(Z)}E' = E' - Z'$ . Soit à présent

$$E := e^{\text{ad}(Z)}E' = E' - Z' \in \mathfrak{m}_0.$$

Montrons que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E))$  et  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E))$ .

Puisque  $Z \in \mathfrak{n}_1$ , on a

$$\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(e^{\text{ad}(Z)}E')) = e^{\text{ad}(Z)}\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E')) = e^{\text{ad}(Z)}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}.$$

Donc  $\mathfrak{n}$  est la filtration positive associée à  $\text{ad}(E)$ .

Par ailleurs,  $E \in \mathfrak{m}_0$ , donc la filtration  $\mathfrak{m}$  est  $\text{ad}(E)$ -stable. En outre,  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E))$  est aussi  $\text{ad}(E)$ -stable. Donc, comme  $\mathfrak{m} \top \mathfrak{n}$ , on a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{-k+1} \oplus \mathfrak{m}_k$ , et cette décomposition est  $\text{ad}(E)$ -stable. Comme  $\mathfrak{n}_{-k+1} = \text{Ker}(\text{ad}(E) - k \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\text{ad}(E) + (k-1) \text{Id})$ , on a

$$\mathfrak{m}_k = \text{Ker}(\text{ad}(E) + k \text{Id}) \text{ i.e } \mathfrak{m}_k = (\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E)))_k.$$

De manière analogue, on a que  $\mathfrak{m}_{-n+1}$  est un supplémentaire  $\text{ad}(E)$ -stable de  $\mathfrak{n}_n$ , donc comme  $\mathfrak{n}_n = \text{Ker}(\text{ad}(E) - k \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\text{ad}(E) - n \text{Id})$  est aussi  $\text{ad}(E)$ -stable, il s'en suit que  $\mathfrak{m}_{-n+1} = (\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E)))_{-n+1}$ . Donc  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E))$  et finalement,  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  sont bien les filtrations associées à  $\text{ad}(E)$ .

- iii) Puisque  $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ , il existe  $E' \in \mathfrak{g}$  tel que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E'))$  et alors  $\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E')) \in \mathfrak{n}^\top$ . Soit  $\mathfrak{m} \in \mathfrak{n}^\top$ . Par ii), il existe  $Z \in \mathfrak{n}_1$  tel que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E))$  et  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E))$  avec  $E = e^{\text{ad}(Z)}E' \in \mathfrak{m}_0$ . Donc  $\mathfrak{m} = e^{\text{ad}(Z)}\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E'))$  et alors  $e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1)}$  agit transitivement sur  $\mathfrak{n}^\top$ .

Cette action est également simple car si  $E'$  et  $E = e^{\text{ad}(Z)}E' = E' - Z'$ , avec  $(Z, Z') \in \mathfrak{n}_1$ , ont les mêmes filtrations associées :

$$\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E')) \text{ et } \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E)) = \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E')),$$

alors  $\text{ad}(E) = \text{ad}(E')$  i.e  $\text{ad}(Z') = 0$ . Or si  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_n$  est la  $(2k+1)$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  associée à  $\text{ad}(E')$ , on peut écrire  $Z' = \sum_{n=1}^k Z'_n$ , où  $Z'_n \in \mathfrak{g}_n = \text{Ker}(\text{ad}(E') - n \text{Id})$  et alors  $0 = \text{ad}(Z')E' = -\sum_{n=1}^k nZ'_n$ , donc pour tout  $n \in \{1, \dots, k\}$ ,  $Z'_n = 0$  i.e  $Z' = 0$  et par suite  $E = E'$ .

□

Ce résultat est une généralisation au cas des algèbres de Lie de celui de W. Bertram et H. Löwe dans [BL08], où ils considèrent les filtrations d'un  $\mathbb{K}$ -module, définissent une relation de transversalité pour ces filtrations, analogue à celle présentée ici et montrent que deux filtrations transverses proviennent d'une graduation.

On peut à présent caractériser deux dérivations intérieures ayant les mêmes filtrations positives associées :

**Corollaire II.3.1.** *Soit  $D_1 = \text{ad}(E_1)$  et  $D_2 = \text{ad}(E_2)$  deux dérivations intérieures. Pour  $n \in \{-k, \dots, k\}$ , on note  $\mathfrak{g}_n := \{X \in \mathfrak{g}, [E_1, X] = nX\}$  la graduation de  $\mathfrak{g}$  associée à  $D_1$ . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i)  $E_1$  et  $E_2$  ont les mêmes filtrations positives associées i.e  $\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_1)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_2))$ .

ii) Il existe  $v \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $D_2 = e^{\text{ad}(v)}D_1e^{-\text{ad}(v)}$ .

iii) On a  $D_1 - D_2 \in \text{ad}\left(\bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n\right)$ .

*Démonstration.*

i)  $\Rightarrow$  ii) Les filtrations  $\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E_2))$  et  $\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_2)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_1))$  sont transverses donc  $\mathfrak{n}^-(\text{ad}(E_2)) \in \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_1))^\top$  et alors par la partie iii) du théorème II.3.1, il existe un élément  $v \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $E_2 = e^{\text{ad}(v)}E_1$ . Donc  $D_2 = e^{\text{ad}(v)}D_1e^{-\text{ad}(v)}$ .

ii)  $\Rightarrow$  i) Si  $v \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  alors  $e^{\text{ad}(v)} \in U^+(\text{ad}(E_1))$  et puisque  $D_2 = e^{\text{ad}(v)}D_1e^{-\text{ad}(v)}$ , on a  $E_2 = e^{\text{ad}(v)}E_1$ . Donc  $\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_2)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(e^{\text{ad}(v)}E_1)) = e^{\text{ad}(v)}\mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_1)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(E_1))$  car  $e^{\text{ad}(v)} \in U^+(\text{ad}(E_1))$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii) Si  $D_2 = e^{\text{ad}(v)}D_1e^{-\text{ad}(v)}$ , avec  $v \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  alors  $D_2 = \text{ad}(e^{\text{ad}(v)}E_1)$ , mais par le point i) du théorème II.3.1,  $e^{\text{ad}(v)}E_1 \in E_1 + \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ . Donc  $D_2 \in \text{ad}\left(E_1 + \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n\right)$  i.e  $D_2 \in D_1 + \text{ad}\left(\bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n\right)$ . D'où  $D_2 - D_1 \in \text{ad}\left(\bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n\right)$ .

iii)⇒ii) On suppose que  $D_2 - D_1 \in \text{ad} \left( \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n \right)$ . Alors il existe  $z \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $D_2 = D_1 + \text{ad}(z) = \text{ad}(E_1 + z)$ . Par la partie i) du théorème II.3.1, il existe  $v \in \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$  tel que  $E_1 + z = e^{\text{ad}(v)} E_1$  et donc  $D_2 = \text{ad}(e^{\text{ad}(v)} E_1) = e^{\text{ad}(v)} D_1 e^{-\text{ad}(v)}$ .  $\square$

On peut ensuite utiliser la forme matricielle des automorphismes de  $\mathfrak{g}$  pour donner une caractérisation du fait que deux filtrations sont transverses.

**Corollaire II.3.2.** *Soit  $D = \text{ad}(E) \in \mathcal{G}$ . On considère la graduation de  $\mathfrak{g}$  associée à  $D$  et  $(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-) = (\mathfrak{n}^+(D), \mathfrak{n}^-(D))$ , les filtrations associées. Soit  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Alors sont équivalents :*

i) Les filtrations  $\mathfrak{n}^+$  and  $g.\mathfrak{n}^-$  sont transverses.

$$ii) \left\{ \begin{array}{ll} g_{-k, -k} & \in \text{GL}(\mathfrak{g}_{-k}) \\ \begin{pmatrix} g_{-k+1, -k+1} & g_{-k+1, k} \\ g_{-k, -k+1} & g_{-k, -k} \end{pmatrix} & \in \text{GL}(\mathfrak{g}_{-k} \oplus \mathfrak{g}_{-k+1}) \\ \vdots & \\ \begin{pmatrix} g_{-1, -1} & \cdots & g_{-1, -k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{-k, -1} & \cdots & g_{-k, -k} \end{pmatrix} & \in \text{GL}(\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}) \\ \begin{pmatrix} (g^{-1})_{k, k} & \cdots & (g^{-1})_{k, 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g^{-1})_{1, k} & \cdots & (g^{-1})_{1, 1} \end{pmatrix} & \in \text{GL}(\mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1) \\ \vdots & \\ \begin{pmatrix} (g^{-1})_{k, k} & (g^{-1})_{k, k-1} \\ (g^{-1})_{k-1, k} & (g^{-1})_{k-1, k-1} \end{pmatrix} & \in \text{GL}(\mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{k-1}) \\ (g^{-1})_{k, k} & \in \text{GL}(\mathfrak{g}_k) \end{array} \right.$$

*Démonstration.*

i) est équivalent à i')  $\mathfrak{g} = g(\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k+n}) \oplus \mathfrak{g}_{-k+n+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$  pour tout  $n \in \{0, \dots, 2k-1\}$  et donc à

$$i'') \left\{ \begin{array}{lll} g(\mathfrak{g}_{-k}) & \text{est un supplémentaire de} & \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k+1} \\ g(\mathfrak{g}_{-k} \oplus \mathfrak{g}_{-k+1}) & \text{est un supplémentaire de} & \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g(\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}) & \text{est un supplémentaire de} & \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \\ g^{-1}(\mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1) & \text{est un supplémentaire de} & \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{-1}(\mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{k-1}) & \text{est un supplémentaire de} & \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k-2} \\ g^{-1}(\mathfrak{g}_k) & \text{est un supplémentaire de} & \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k-1} \end{array} \right.$$

et ii) est équivalent à i").

□

A présent, par la partie ii) du théorème II.3.1, on peut identifier une graduation intérieure  $D = \text{ad}(E) \in \mathcal{G}$  et les filtrations intérieures associées  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{n}^+(D), \mathfrak{n}^-(D))$ . Donc on peut noter  $G(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  le groupe  $G(D)$ , et de manière analogue pour  $H(D)$  et  $P^\pm(D)$ . En outre, par le point iii) du théorème II.3.1, le groupe  $e^{\text{ad}(m_1)}$  agit simplement transitivement sur  $\mathfrak{m}^\top$  donc le groupe  $G(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  ne dépend pas de  $\mathfrak{n}$ , la filtration transverse à  $\mathfrak{m}$  choisie. Donc on peut écrire  $G(\mathfrak{m}) := G(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ , où  $\mathfrak{n}$  est une  $(2k+1)$ -filtration transverse à  $\mathfrak{m}$  quelconque. De même,  $U^+(\mathfrak{m}) = U^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est indépendant de  $\mathfrak{n}$ , mais les groupes  $U^-(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  et  $P^-(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  dépendent, pour leur part, de  $\mathfrak{n}$ .

Nous sommes à présent en moyen de faire le lien entre la géométrie de drapeaux généralisée d'une algèbre de Lie graduée  $\mathfrak{g}$ , définie plus tôt et l'espaces des filtrations de  $\mathfrak{g}$  et montrer que les deux relations de transversalité définies sur ces deux objets sont compatibles.

### II.3.3 Lien entre géométrie de drapeaux et filtrations

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée, avec  $D := \text{ad}(E) \in \mathcal{G}$  sa dérivation caractéristique. Soit  $(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-) := (\mathfrak{n}^+(D), \mathfrak{n}^-(D))$  les filtrations positive et négative associées à  $D$ . Rappelons les définitions de la géométrie de drapeaux généralisée de  $\mathfrak{g}$  :

$$X^\pm := G/P^\mp, \quad M := G/H.$$

Le point de base  $(P^-, P^+)$  dans  $X^+ \times X^-$  est noté  $(o^+, o^-)$ . Enfin,

$$\mathfrak{n}_1^+ = \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n \text{ et } \mathfrak{n}_1^- = \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_{-n}.$$

**Théorème II.3.2.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

i) *Les orbites de  $D$ , respectivement de  $\mathfrak{n}^\pm$ , sous l'action de  $G$  sont isomorphes à  $M$ , respectivement à  $X^\mp$  i.e*

$$H = \{g \in G, g \cdot (\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-) = (\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-)\} \quad \text{et} \quad P^\pm = \{g \in G, g \cdot \mathfrak{n}^\pm = \mathfrak{n}^\pm\}.$$

*En outre, on a  $P^+ \cap P^- = H$ ,  $P^\pm \cap U^\mp = \{1\}$ , et*

$$P^\pm = \{g \in G, gDg^{-1} - D \in \text{ad}(\mathfrak{n}_1^\pm)\} = \{g \in G, gE - E \in Z(\mathfrak{g}) + \mathfrak{n}_1^\pm\},$$

*où  $Z(\mathfrak{g})$  est le centre de  $\mathfrak{g}$ .*

ii) *Si on identifie  $X^\pm$  avec les orbites correspondantes dans  $\mathcal{F}$ , alors*

$$\mathcal{G} \cap (X^+ \times X^-) = M.$$

iii) *Pour tout  $\mathfrak{m} \in X^-$ , on a  $\mathfrak{m}^\top \subset X^+$ . En particulier,  $\mathfrak{n}_1^+$  est identifié avec  $(o^-)^\top$  via  $v \mapsto e^{\text{ad}(v)}o^+$ , donc on peut identifier l'espace  $\mathfrak{n}_1^+$  et son image dans  $X^+$ .*

iv) On considère l'ensemble  $\Omega^+ := \{g \in G, g.o^+ \in \mathfrak{n}_1^+\}$ . Alors l'application

$$\mathfrak{n}_1^+ \times H \times \mathfrak{n}_1^- \rightarrow \Omega^+, \quad (v, h, w) \mapsto e^{\text{ad}(v)} h e^{\text{ad}(w)}$$

est une bijection.

*Démonstration.*

i) Un élément  $g \in G$  stabilise  $(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-)$  si et seulement si  $g$  stabilise la graduation de  $\mathfrak{g}$  i.e  $g$  commute avec la dérivation caractéristique i.e  $g \in H$ . Donc on a bien  $H = \{g \in G, g.(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-) = (\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-)\}$ .

Les groupes  $U^+$  and  $H$  stabilisent  $\mathfrak{n}^+$  donc  $P^+$  stabilise  $\mathfrak{n}^+$ . Réciproquement, si  $g \in G$  est tel que  $g.\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+$  alors  $g.\mathfrak{n}^-$  est transverse à  $g.\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+$  donc il existe  $v \in \mathfrak{n}_1^+$  tel que  $g.\mathfrak{n}^- = e^{\text{ad}(v)}.\mathfrak{n}^-$ . Donc  $h := e^{-\text{ad}(v)}g$  stabilise  $\mathfrak{n}^+$  et  $\mathfrak{n}^-$  donc  $h \in H$  et alors  $g = e^{\text{ad}(v)}h \in P^+$ . De même pour  $P^-$ .

Donc  $P^+ \cap P^-$  est le stabilisateur de  $(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-)$  i.e  $H$ .

Par ailleurs, si  $g \in P^+ \cap U^-$ , alors  $g = e^{\text{ad}(v)}$ , avec  $v \in \mathfrak{n}_1^-$ . Or par le point iii) du théorème II.3.1, l'application  $v \mapsto e^{\text{ad}(v)}.\mathfrak{n}^+$  est injective et  $g.\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+$  donc  $v = 0$ , et par suite  $g = 1$ .

Enfin,  $g.\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+$  si et seulement si  $D$  et  $gDg^{-1}$  ont la même filtration positive associée, si et seulement si  $gDg^{-1} \in \text{ad}(\mathfrak{n}_1^+)$  par le corollaire II.3.1. De même pour  $P^-$ .

ii) On a clairement  $G.(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-) \in \mathcal{G} \cap (X^+ \times X^-)$  donc  $M \subset \mathcal{G} \cap (X^+ \times X^-)$ . Réciproquement, soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in \mathcal{G} \cap (X^+ \times X^-)$ . Comme  $\mathfrak{m} \in X^+$ , il existe  $g \in G$  tel que  $\mathfrak{m} = g.\mathfrak{n}^+$ .

Donc  $g^{-1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{n}^+, g^{-1}.\mathfrak{n}) \in \mathcal{G} \cap (X^+ \times X^-)$  et alors, il existe  $v \in \mathfrak{n}_1^+$  tel que  $g^{-1}.\mathfrak{n} = e^{\text{ad}(v)}.\mathfrak{n}^-$  par la partie iii) du théorème II.3.1.

D'où  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = g.(\mathfrak{n}^+, e^{\text{ad}(v)}.\mathfrak{n}^-) = g e^{\text{ad}(v)}.(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-) \in G.(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-)$ .

iii) Soit  $\mathfrak{m} \in X^-$ . On a  $\mathfrak{m} = g.\mathfrak{n}^-$  pour  $g \in G$ . Donc, par le point iii) du théorème II.3.1,  $\mathfrak{m}^\top \subset X^+$ . En particulier,  $o^- \in X^-$  et  $(o^-)^\top = e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_1^+)}.o^+$ .

iv) Soit  $(v, h, w) \in \mathfrak{n}_1^+ \times H \times \mathfrak{n}_1^-$ . Alors  $g := e^{\text{ad}(v)} h e^{\text{ad}(w)} \in U^+ P^-$  donc  $g.o^+ \in \mathfrak{n}_1^+$  et donc l'application est bien définie. A présent, on suppose  $g \in \Omega^+$  et soit  $v := g.o^+ \in \mathfrak{n}_1^+$ . Alors  $e^{-\text{ad}(v)}g.o^+ = o^+$ . Donc par le point i), on a  $p := e^{-\text{ad}(v)}g \in P^- = H U^-$  donc  $e^{-\text{ad}(v)}g = h e^{\text{ad}(w)}$ , avec  $w \in \mathfrak{n}_1^-$ . Donc  $g = e^{\text{ad}(v)} h e^{\text{ad}(w)}$  et par suite, l'application est surjective.

Ensuite, si  $g = e^{\text{ad}(v_1)} h_1 e^{\text{ad}(w_1)} = e^{\text{ad}(v_2)} h_2 e^{\text{ad}(w_2)}$  alors  $\underbrace{e^{-\text{ad}(v_2)} e^{\text{ad}(v_1)} h_1}_{\in P^+} = \underbrace{h_2 e^{\text{ad}(w_2)} e^{-\text{ad}(w_1)}}_{\in P^-}$ .

Or par i),  $P^+ \cap P^- = H$  donc  $v_1 = v_2$ . De manière analogue,  $w_1 = w_2$  et donc  $h_1 = h_2$ . D'où l'application est aussi injective. Finalement, on a bien une bijection. □

On remarque, grâce à ce théorème que les deux définitions de transversalité, définies sur  $X^+ \times X^-$  et sur les filtrations transverses, sont compatibles. Plus précisément, on a une injection

$$X^+ \times X^- \hookrightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F},$$

$G$ -équivariante et compatible avec les relations de transversalité.

Définissons à présent des opérateurs qui joueront un rôle central dans la suite de ce travail.

**Définition II.3.3.** Pour  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , on définit les *dénominateurs* et *co-dénominateurs* de  $g$ , pour  $1 \leq i \leq k$  par :

$$d_g(x)_i = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ (e^{-\text{ad}(x)}g^{-1}) \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^+} \in \text{End}(\mathfrak{n}_i^+) \quad \text{et} \quad c_g(x)_i = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^-} \circ (ge^{\text{ad}(x)}) \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^-} \in \text{End}(\mathfrak{n}_i^-),$$

où  $\text{pr}_{\mathfrak{n}_i^\pm}$  est la projection de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{n}_i^\pm$  et  $\iota_{\mathfrak{n}_i^\pm}$  est l'inclusion de  $\mathfrak{n}_i^\pm$  dans  $\mathfrak{g}$ . Alors, pour tout  $1 \leq i \leq k$ , les applications

$$d_g : \mathfrak{n}_1^+ \rightarrow \text{End}(\mathfrak{n}_i^+), \quad x \mapsto d_g(x)_i \quad \text{et} \quad c_g : \mathfrak{n}_1^+ \rightarrow \text{End}(\mathfrak{n}_i^-), \quad x \mapsto c_g(x)_i$$

sont des applications polynomiales.

Si  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $w \in \mathfrak{n}_1^-$ , on définit également pour  $1 \leq i \leq k$ ,

$$B^+(x, w)_i := d_{e^{\text{ad}(w)}}(x)_i \quad \text{et} \quad B^-(w, x)_i := c_{e^{\text{ad}(w)}}(x)_i.$$

Ces opérateurs sont appelés les *opérateurs de Bergman généralisés*.

Ils peuvent en effet être vus comme une généralisation de l'opérateur de Bergman dans une paire de Jordan [Loo75]. Plus précisément, si  $\mathfrak{g} = TKK(V^+, V^-)$ , on a juste  $B^+(x, w) = d_{e^{\text{ad}(w)}}(x)$  et  $B^-(w, x) = c_{e^{\text{ad}(w)}}(x)$  et ces deux opérateurs sont bien des opérateurs de Bergman de la paire de Jordan  $(V^+, V^-)$  [BN04].

On a alors, en utilisant les dénominateurs et co-dénominateurs la caractérisation suivante :

**Corollaire II.3.3.** Soit  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Alors les points suivants sont équivalents :

- i) On a  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$  i.e les filtrations  $\mathfrak{n}^+$  et  $ge^{\text{ad}(x)}\mathfrak{n}^-$  sont transverses.
- ii) Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $d_g(x)_i$  et  $c_g(x)_i$  sont inversibles.

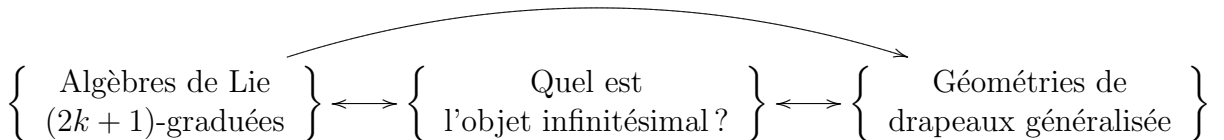
*Démonstration.*

Il suffit d'appliquer le corollaire II.3.2 à  $ge^{\text{ad}(x)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . □

En particulier, avec les notations du théorème II.3.2, on a

$$\Omega^+ = \{g \in G, \forall i \in \{1, \dots, k\}, d_g(o^+)_i \text{ et } c_g(o^+)_i \text{ sont inversibles}\}.$$

Nous avons donc réussi à définir un objet géométrique, la géométrie de drapeaux généralisée, associé à une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée, qui “généralise” les variétés de drapeaux sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ . Cet objet généralise également la géométrie projective généralisée associée à une algèbre de Lie 3-graduée. Nous pouvons donc à présent “actualiser” le diagramme de l'introduction :





## II.4 Réalisation de $\mathfrak{g}$ comme espace de champs polynomiaux

On continue d'utiliser les notations introduites précédemment :  $\mathcal{G}$  pour l'espace des  $(2k+1)$ -graduations intérieures et  $\mathcal{F}$  pour celui des  $(2k+1)$ -filtrations intérieures d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Dans un premier temps, nous allons introduire certains objets, purement algébriques mais en empruntant le vocabulaire de la géométrie différentielle ; principalement, nous allons définir des "fibrés" sur  $\mathcal{F}$  et certaines de leurs sections. Ensuite, nous fixerons une dérivation  $D \in \mathcal{G}$ , ce qui nous permettra de considérer la géométrie de drapeaux généralisée associée et nous construirons une réalisation de  $\mathfrak{g}$  comme espace de champs polynomiaux sur  $\mathfrak{n}_1^+ = \bigoplus_{n=1}^k \mathfrak{g}_n$ . Enfin nous utiliserons le fait que  $\mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$  (par le théorème II.3.2) pour "trivialiser" l'action du groupe projectif élémentaire  $G$  sur  $X^+$  dans le "domaine de carte"  $\mathfrak{n}_1^+$ .

### II.4.1 Fibré tangent et fibré de structure

Dans le chapitre suivant, nous allons, à l'aide d'un calcul différentiel défini sur un anneau topologique (voir l'annexe C), construire sur  $X^+$  et  $X^-$ , les espaces de la géométrie de drapeaux généralisée associée à  $\mathfrak{g}$ , une structure de variété différentielle (théorème IV.1.1). C'est pourquoi, nous allons dans la suite utiliser le terme de "fibré" même si pour l'instant, nous n'avons que des structures purement algébriques. Nous montrerons plus tard que les objets introduits ici sont bien des fibrés différentiels sur  $X^+$  et  $X^-$ .

**Définition II.4.1.** Pour une  $(2k+1)$ -filtration  $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_k \subset \mathfrak{n}_{k-1} \subset \dots \subset \mathfrak{n}_{-k+1})$ , et  $1 \leq i \leq k$ , on définit les  $\mathbb{K}$ -modules suivants :

$$T_{\mathfrak{n}}^{(i)} \mathcal{F} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-i+1}, \quad T'_{\mathfrak{n}}{}^{(i)} \mathcal{F} := \mathfrak{n}_i.$$

On note  $T_{\mathfrak{n}} \mathcal{F} := T_{\mathfrak{n}}^{(1)} \mathcal{F} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_0$  et  $T'_{\mathfrak{n}} \mathcal{F} := T'_{\mathfrak{n}}{}^{(1)} \mathcal{F} = \mathfrak{n}_1$ , que nous appellerons l'*espace tangent de  $\mathcal{F}$  en  $\mathfrak{n}$*  et l'*espace structural de  $\mathcal{F}$  en  $\mathfrak{n}$* , en suivant la terminologie de [BN04]. Si  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-(\text{ad}(E))$  est la filtration négative associée à un opérateur d'Euler  $E$ , alors  $\mathfrak{n}_{-i+1} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{i-1}$  et  $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-i}$ , et donc  $T_{\mathfrak{n}}^{(i)} \mathcal{F} \cong \mathfrak{g}_k \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_i$  et  $T'_{\mathfrak{n}}{}^{(i)} \mathcal{F} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-i}$ .

On définit également

$$T^{(i)} \mathcal{F} := \bigcup_{\mathfrak{n} \in \mathcal{F}} T_{\mathfrak{n}}^{(i)} \mathcal{F} \quad \text{et} \quad T'^{(i)} \mathcal{F} := \bigcup_{\mathfrak{n} \in \mathcal{F}} T'_{\mathfrak{n}}{}^{(i)} \mathcal{F},$$

où l'union est disjointe, donc on peut définir les projections suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{(i)} : & T^{(i)} \mathcal{F} & \rightarrow \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \pi'^{(i)} : & T'^{(i)} \mathcal{F} & \rightarrow \mathcal{F} \\ & Y \in T_{\mathfrak{n}}^{(i)} \mathcal{F} & \mapsto \mathfrak{n} & & x \in T'_{\mathfrak{n}}{}^{(i)} \mathcal{F} \mapsto \mathfrak{n} \end{array}.$$

On pose également  $T\mathcal{F} := T^{(1)} \mathcal{F}$  et  $T'\mathcal{F} := T'^{(1)} \mathcal{F}$  et on appelle ces espaces le *fibré tangent de  $\mathcal{F}$*  et le *fibré structural* ou *fibré de structure de  $\mathcal{F}$* .

Intéressons-nous à présent aux liens entre  $T_n^{(i)}\mathcal{F}$  et  $T_n^{\prime(i)}\mathcal{F}$  dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et de dimension finie.

**Lemme II.4.1.** *Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , alors pour tout  $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ , et  $1 \leq i \leq k$ , on a  $(T_n^{(i)}\mathcal{F})^* \cong T_n^{\prime(i)}\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.*

Soit  $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ . Comme  $\mathfrak{n}$  est une filtration intérieure, elle provient d'une graduation  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$ . Si  $x \in \mathfrak{g}_i$  et  $y \in \mathfrak{g}_j$ , alors  $\text{ad}(x)\text{ad}(y)(\mathfrak{g}_l) \subset \mathfrak{g}_{i+j+l}$ . Or  $\mathfrak{g}_l \cap \mathfrak{g}_{i+j+l} = \{0\}$  si  $i+j \neq 0$  donc si on choisit une base de chaque  $\mathfrak{g}_n$ , on obtient une base de  $\mathfrak{g}$  dans laquelle la matrice de  $\text{ad}(x)\text{ad}(y)$  n'a que des zéros sur la diagonale et donc la forme de Killing  $B(x, y) = \text{Tr ad}(x)\text{ad}(y) = 0$ . On peut donc considérer  $\tilde{B} : \mathfrak{n}_i \times \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-i+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est non-dégénérée car  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et ainsi on a bien  $(T_n^{(i)}\mathcal{F})^* \cong T_n^{\prime(i)}\mathcal{F}$ .  $\square$

Ainsi, dans le cas particulier où  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , les fibrés  $T^{\prime(i)}\mathcal{F}$  sont les fibrés duaux des  $T^{(i)}\mathcal{F}$  i.e  $T^{\prime(i)}\mathcal{F} \cong (T^{(i)}\mathcal{F})^*$ . En particulier, le fibré de structure  $T'\mathcal{F}$  est le fibré cotangent  $(T\mathcal{F})^*$ .

Le groupe  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  agit sur  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  et alors pour  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , on définit les applications linéaires suivantes :

$$T_n^{(i)}g : \begin{array}{ccc} T_n^{(i)}\mathcal{F} & \rightarrow & T_{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} \\ Y \text{ mod } \mathfrak{n}_{-i+1} & \mapsto & gY \text{ mod } \mathfrak{g}\mathfrak{n}_{-i+1} \end{array}, \quad T_n^{\prime(i)}g : \begin{array}{ccc} T_n^{\prime(i)}\mathcal{F} & \rightarrow & T_{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}}^{\prime(i)}\mathcal{F} \\ Y & \mapsto & gY \end{array}$$

et si on définit les applications  $T^{(i)}g$  et  $T^{\prime(i)}g$  de la manière suivante :

$$T^{(i)}g : \begin{array}{ccc} T^{(i)}\mathcal{F} & \rightarrow & T^{(i)}\mathcal{F} \\ Y \text{ mod } \mathfrak{n}_{-i+1} \in T_n^{(i)}\mathcal{F} & \mapsto & gY \text{ mod } \mathfrak{g}\mathfrak{n}_{-i+1} \in T_{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} \end{array} \quad \text{et}$$

$$T^{\prime(i)}g : \begin{array}{ccc} T^{\prime(i)}\mathcal{F} & \rightarrow & T_{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}}^{\prime(i)}\mathcal{F} \\ Y \in T_n^{\prime(i)}\mathcal{F} & \mapsto & gY \in T_{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}}^{\prime(i)}\mathcal{F} \end{array},$$

alors on a  $T^{(i)}(g \circ h) = T^{(i)}g \circ T^{(i)}h$  et  $T^{\prime(i)}(g \circ h) = T^{\prime(i)}g \circ T^{\prime(i)}h$ .

A présent, fixons une dérivation  $D \in \mathcal{G}$  et définissons  $X^\pm \subset \mathcal{F}$  comme précédemment ; on peut alors définir les espaces  $T_n^{(i)}X^\pm$ ,  $T_n^{\prime(i)}X^\pm$  et également les fibrés  $T^{(i)}X^\pm$  et  $T^{\prime(i)}X^\pm$ . Nous allons à présent montrer que ces fibrés peuvent être vus, toujours dans un sens purement algébrique, comme des "fibrés associés" aux représentations de  $P^-$  données par les dénominateurs en 0,  $d_p(o)_i$  et les co-dénominateurs en 0,  $c_p(0)_i$ . Pour cela, on va considérer  $o^- = \mathfrak{n}^+(D) \in X^-$  et  $o^+ = \mathfrak{n}^-(D) \in X^+$ , les points de base de  $X^-$  et  $X^+$ . On note également  $\mathfrak{n}_i^+ := \mathfrak{g}_i \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k = \mathfrak{n}^+(D)_i$  et  $\mathfrak{n}_i^- := \mathfrak{g}_{-i} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k} = \mathfrak{n}^-(D)_i$ . On rappelle la définition II.3.3 des dénominateurs et co-dénominateurs : pour  $x \in \mathfrak{n}_i^+$  et  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , on a

$$d_g(x)_i = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ e^{-\text{ad}(x)}g^{-1} \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^+} \quad \text{et} \quad c_g(x)_i = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^-} \circ ge^{\text{ad}(x)} \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^-}.$$

Alors  $d_g(x)_i \in \text{End}(\mathfrak{n}_i^+)$  et  $c_g(x)_i \in \text{End}(\mathfrak{n}_i^-)$ .

En particulier, pour  $g = p \in P^-$  et  $x = 0$ , on obtient  $d_p(0)_i \in \text{End}(\mathfrak{n}_i^+)$  et  $c_p(0)_i \in \text{End}(\mathfrak{n}_i^-)$ . Mais comme  $p \in P^-$ ,  $p.o^+ = o^+$  et donc par le corollaire II.3.3,  $d_p(0)_i$  et  $c_p(0)_i$  sont inversibles, si bien qu'on obtient

$$\begin{array}{ccc} P^- & \rightarrow & \text{GL}(\mathfrak{n}_i^+) \quad \text{et} \quad P^- \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{n}_i^-) \\ p & \mapsto & d_p(0)_i \qquad \qquad p \mapsto c_p(0)_i \end{array} .$$

**Lemme II.4.2.** *Les applications  $\rho_i^+ : P^- \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{n}_i^+)$  et  $\rho_i^- : P^- \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{n}_i^-)$  sont des morphismes de groupes.*

*Démonstration.*

Soit  $p_1, p_2 \in P^-$ . On a  $d_{p_1 p_2}(0)_i = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p_2^{-1} p_1^{-1} \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^+}$  mais  $p_2 \in P^-$  donc  $\text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p_2^{-1} = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p_2^{-1} \circ \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+}$  et donc  $d_{p_1 p_2}(0)_i = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p_2^{-1} \circ \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p_1^{-1} \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^+} = d_{p_2}(0)_i d_{p_1}(0)_i$ . D'où  $d_{p_1 p_2}(0)_i^{-1} = d_{p_1}(0)_i^{-1} d_{p_2}(0)_i^{-1}$ .

Par ailleurs, on a directement que  $c_{p_1 p_2}(0)_i = c_{p_1}(0)_i c_{p_2}(0)_i$ .  $\square$

Concentrons-nous à présent sur  $\rho_i^+$ . On considère

$$G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+ := G \times \mathfrak{n}_i^+ / \sim,$$

où  $(g, x_i) \sim (gp, \rho_i^+(p)^{-1} x_i)$  pour  $g \in G, x_i \in \mathfrak{n}_i^+$  et  $p \in P^-$ .

**Théorème II.4.1.** *Pour  $1 \leq i \leq k$ , on a  $T^{(i)}X^+ \cong G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+$  i.e il existe une bijection  $G$ -équivariante entre  $T^{(i)}X^+$  et  $G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+$ .*

*Démonstration.*

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{(i)} : G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+ & \rightarrow & T^{(i)}X^+ \\ [g, x_i] & \mapsto & \left( T_{o^+}^{(i)} g \right) x_i = gx_i \text{ mod } g(\mathfrak{n}_{-i+1}^-) \end{array}$$

Regardons tout d'abord si  $\varphi^{(i)}$  est bien définie. Si on choisit  $(gp, \rho_i^+(p)^{-1} x_i)$ , un autre représentant de  $[g, x_i]$ , on a  $\left( T_{o^+}^{(i)}(gp) \right) (\rho_i^+(p)^{-1} x_i) = \left( T_{o^+}^{(i)} g \circ T_{o^+}^{(i)} p \right) d_p(0)_i x_i$ . Or

$$\begin{array}{ccc} T_{o^+}^{(i)} p : T_{o^+}^{(i)} X^+ \cong \mathfrak{n}_i^+ & \rightarrow & T_{o^+}^{(i)} X^+ \cong \mathfrak{n}_i^+ \\ x_i & \mapsto & (\text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p) x_i \end{array}$$

Autrement dit,  $T_{o^+}^{(i)} p = d_p(0)_i^{-1}$  et par suite  $\left( T_{o^+}^{(i)}(gp) \right) \rho_i^+(p)^{-1} x_i = \left( T_{o^+}^{(i)} g \right) x_i$ . Donc  $\varphi^{(i)}$  est bien définie.

Soit  $\mathfrak{m} \in X^+$ . Alors il existe  $g \in G$  tel que  $\mathfrak{m} = g.o^+$ . Soit  $x \in T_{\mathfrak{m}}^{(i)} X^+ = \mathfrak{g}/\mathfrak{m}_{-i+1}$ .

On a  $g^{-1}x \in T_{o^+}^{(i)} X^+ \cong \mathfrak{n}_i^+$ . Donc  $\varphi^{(i)}([g, g^{-1}x]) = x \in T_{\mathfrak{m}}^{(i)} X^+$  donc  $\varphi^{(i)}$  est surjective.

Soit  $(g_1, g_2, x_1, x_2)$  tels que  $\left( T_{o^+}^{(i)} g_1 \right) x_1 = \left( T_{o^+}^{(i)} g_2 \right) x_2$ .

Tout d'abord, on a  $g_1.o^+ = g_2.o^+$  i.e  $g_1^{-1}g_2.o^+ = o^+$  donc  $g_1^{-1}g_2 = p \in P^-$  i.e  $g_2 = g_1 p$ .

Et alors  $\left(T_{o^+}^{(i)}g_2\right)x_2 = \left(T_{o^+}^{(i)}g_1 \circ T_{o^+}^{(i)}p\right)x_2 = \left(T_{o^+}^{(i)}g_1\right)d_p(0)_i^{-1}x_2$ . Donc on peut écrire  $x_1 - d_p(0)_i^{-1}x_2 \in \text{Ker}\left(T_{o^+}^{(i)}g_1\right)$ . Mais si  $x \in \mathfrak{n}_i^+$  appartient au noyau de  $T_{o^+}^{(i)}g_1$ , on a  $g_1x \in g(\mathfrak{n}_{-i+1}^-)$  i.e  $x \in \mathfrak{n}_{-i+1}^-$  donc  $x \in \mathfrak{n}_i^+ \cap \mathfrak{n}_{-i+1}^- = \{0\}$  donc dans notre cas, on obtient  $x_1 = d_p(0)_i^{-1}x_2$  i.e  $x_2 = d_p(0)_i x_1$ , donc  $(g_1, x_1) \sim (g_2, x_2)$  et par suite  $\varphi^{(i)}$  est injective. Enfin,  $\varphi^{(i)}(g' \cdot [g, x_i]) = \varphi^{(i)}([g'g, x_i]) = \left(T_{g \cdot o^+}^{(i)}g' \circ T_{o^+}^{(i)}g\right)x_i = \left(T_{g \cdot o^+}^{(i)}g'\right) \cdot \varphi^{(i)}([g, x_i])$ . Donc  $\varphi^{(i)}$  est  $G$ -équivariante. Finalement, on a bien que  $T^{(i)}X^+$  et  $G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+$  sont isomorphes en tant que  $G$ -fibrés.  $\square$

Lorsqu'une structure de variété différentielle aura été construite sur  $X^+$ , alors la représentation  $\rho_1^+$  sera en fait la représentation d'isotropie, autrement dit  $d_p(0)_1^{-1}$  sera la différentielle de  $p$  en 0. Cela justifie le nom de fibré tangent pour  $TX^+ \cong G \times_{P^-} \mathfrak{n}_1^+$ . On a évidemment, de manière analogue le résultat suivant :

**Théorème II.4.2.** *Pour  $1 \leq i \leq k$ , on a  $T^{(i)}X^+ \cong G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^-$ .*

Ces deux derniers résultats restent bien sûr valables si on remplace  $X^+$  par  $X^-$  et  $P^-$  par  $P^+$ .

On peut à présent s'intéresser à des sections éventuelles de ces différents fibrés. Il est assez facile d'en construire pour les  $T^{(i)}\mathcal{F}$ . En effet,

**Définition II.4.2.** Si  $Y \in \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ , alors pour  $1 \leq i \leq k$ , on définit

$$Y_{\mathfrak{n}}^{(i)} := Y \text{ mod } \mathfrak{n}_{-i+1} \in T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F}.$$

On obtient ainsi des applications

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^{(i)} : \mathcal{F} &\rightarrow T^{(i)}\mathcal{F} \\ \mathfrak{n} &\mapsto Y_{\mathfrak{n}}^{(i)} \end{aligned}$$

**Lemme II.4.3.** *Les  $\tilde{Y}^{(i)}$  définissent des sections de  $T^{(i)}\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.*

Par définition, on a  $\pi^{(i)} \circ \tilde{Y}^{(i)}(\mathfrak{n}) = \pi^{(i)}(Y \text{ mod } \mathfrak{n}_{-i+1}) = \mathfrak{n}$ . Donc  $\pi^{(i)} \circ \tilde{Y}^{(i)} = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ .  $\square$

**Définition II.4.3.** En particulier, pour  $i = 1$ ,  $Y_{\mathfrak{n}} := Y_{\mathfrak{n}}^{(1)}$  est appelé la *valeur de  $Y$  en  $\mathfrak{n}$* , et l'application

$$\begin{aligned} \tilde{Y} : \mathcal{F} &\rightarrow T\mathcal{F} \\ \mathfrak{n} &\mapsto Y_{\mathfrak{n}} \end{aligned}$$

définit un *champ de vecteurs sur  $\mathcal{F}$* , qu'on appellera *champ conforme*.

On peut alors munir l'ensemble des champs conformes d'un crochet de Lie en posant que l'application  $Y \mapsto \tilde{Y}$  est un homomorphisme. On obtient ainsi une structure d'algèbre de Lie sur les champs conformes. Dans l'annexe B, nous définirons un autre crochet de Lie sur les champs conformes (comme vecteurs du fibré tangent  $TX^+$ ) et on se demandera si  $Y \mapsto \tilde{Y}$  est toujours un homomorphisme.

## II.4.2 Le noyau canonique

Soit  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in \mathcal{F}$ . Alors les espaces  $T_{\mathfrak{n}}\mathcal{F}$  et  $T'_{\mathfrak{m}}\mathcal{F}$  sont des  $\mathbb{K}$ -modules filtrés de la manière suivante :

$$T_{\mathfrak{n}}\mathcal{F} = T_{\mathfrak{n}}^{(1)}\mathcal{F} \rightarrow T_{\mathfrak{n}}^{(2)}\mathcal{F} \rightarrow \dots \rightarrow T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} \rightarrow \dots \rightarrow T_{\mathfrak{n}}^{(k)}\mathcal{F} \quad \text{et}$$

$$T'_{\mathfrak{m}}\mathcal{F} \hookrightarrow T'_{\mathfrak{m}}{}^{(k-1)}\mathcal{F} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow T'_{\mathfrak{m}}{}^{(k-i)}\mathcal{F} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow T'_{\mathfrak{m}}{}^{(1)}\mathcal{F} = T'_{\mathfrak{m}}\mathcal{F}.$$

Or pour  $1 \leq i \leq k$ ,  $T'_{\mathfrak{m}}{}^{(i)}\mathcal{F}$  est un sous-espace de  $\mathfrak{g}$  donc d'après ce qui précède, il définit des sections de  $T^{(i)}\mathcal{F}$ , si bien qu'on peut définir les applications  $\mathbb{K}$ -linéaires suivantes :

**Définition II.4.4.**

$$K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)} : \begin{array}{ccc} T'_{\mathfrak{m}}{}^{(i)}\mathcal{F} = \mathfrak{m}_i & \rightarrow & T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-i+1} \\ Y & \mapsto & Y_{\mathfrak{n}}^{(i)} = Y \bmod \mathfrak{n}_{-i+1} \end{array}$$

On obtient alors le diagramme suivant où les applications  $K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)}$  relient les deux diagrammes précédents :

$$\begin{array}{ccc} T'_{\mathfrak{m}}{}^{(1)}\mathcal{F} = \mathfrak{m}_1 & \xrightarrow{K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(1)}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_0 = T_{\mathfrak{n}}^{(1)}\mathcal{F} \\ \uparrow \text{J} & & \downarrow \\ T'_{\mathfrak{m}}{}^{(2)}\mathcal{F} = \mathfrak{m}_2 & \xrightarrow{K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(2)}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-1} = T_{\mathfrak{n}}^{(2)}\mathcal{F} \\ \uparrow \text{J} & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \\ \uparrow \text{J} & & \downarrow \\ T'_{\mathfrak{m}}{}^{(i)}\mathcal{F} = \mathfrak{m}_i & \xrightarrow{K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-i+1} = T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} \\ \uparrow \text{J} & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \\ \uparrow \text{J} & & \downarrow \\ T'_{\mathfrak{m}}{}^{(k)}\mathcal{F} = \mathfrak{m}_k & \xrightarrow{K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(k)}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-k+1} = T_{\mathfrak{n}}^{(k)}\mathcal{F} \end{array}$$

**Définition II.4.5.** La collection des applications  $(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{(i)}, K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)})$ ,  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ , et  $1 \leq i \leq k$  est appelée *noyau canonique*.

Dans la suite, nous allons voir que  $K^{(i)} : (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \mapsto K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)}$  définit une section d'un certain fibré sur  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ . Pour cela, on définit

$$\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F}) := \bigcup_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{F}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T'_{\mathfrak{m}}{}^{(i)}\mathcal{F}, T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F}),$$

où l'union est disjointe, et également la projection

$$\begin{aligned} \Pi^{(i)} : \quad & \text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ & \varphi_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T_{\mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F}, T_{\mathbf{n}}^{(i)}\mathcal{F}) \mapsto (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Alors par définition,  $K_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{(i)} \in \text{Hom}(T_{\mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F}, T_{\mathbf{n}}^{(i)}\mathcal{F})$  donc on obtient

$$\begin{aligned} K^{(i)} : \quad & \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \Pi^{(i)} \circ K^{(i)} = \text{Id}_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} \\ & (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto K_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{(i)} \end{aligned}$$

Donc  $K^{(i)}$  est une section du fibré

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F}) & \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \end{array} .$$

Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on a remarqué que  $T_{\mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F} \cong (T_{\mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F})^*$  donc dans ce cas, on a

$$\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F}) \cong (T^{(i)}\mathcal{F})^* \boxtimes T^{(i)}\mathcal{F} = T^{(i)}\mathcal{F} \boxtimes T^{(i)}\mathcal{F}.$$

Autrement dit,  $\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F})$  est un fibré au dessus de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  et pour tout  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathcal{F}$ , la fibre au dessus de  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ , notée  $\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F})_{(\mathbf{m}, \mathbf{n})}$ , est isomorphe à  $T_{\mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F} \otimes T_{\mathbf{n}}^{(i)}\mathcal{F}$ . Dans le cas général, on a le résultat suivant :

**Théorème II.4.3.** *i)  $K^{(i)}$  est une section  $G$ -équivariante de  $\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F})$ .*

*ii) Soit  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ . On a  $\mathbf{m} \top \mathbf{n}$  si et seulement si pour tout  $i$ , les applications  $K_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^{(i)}$  et  $K_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{(i)}$  sont des isomorphismes.*

*Démonstration.*

i)  $G$  agit sur  $\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F})$  de la manière suivante : si  $g \in G$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(T_{\mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F}, T_{\mathbf{n}}^{(i)}\mathcal{F})$ ,

$g \cdot \varphi = T_{\mathbf{n}}^{(i)}g \circ \varphi \circ (T_{\mathbf{m}}^{(i)}g)^{-1}$ . Donc  $g \cdot \varphi \in \text{Hom}(T_{g \cdot \mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F}, T_{g \cdot \mathbf{n}}^{(i)}\mathcal{F})$ . On a déjà vu que  $K^{(i)}$  est une section donc il suffit de montrer qu'elle est équivariante. Soit  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ ,  $g \in G$ . On a :

$$\begin{aligned} K_{g \cdot \mathbf{n}, g \cdot \mathbf{m}}^{(i)} : \quad & T_{g \cdot \mathbf{m}}^{(i)}\mathcal{F} \rightarrow T_{g \cdot \mathbf{n}}^{(i)}\mathcal{F} \\ & Y \in g(\mathbf{m}_i) \mapsto Y \text{ mod } g(\mathbf{n}_{-i+1}) \end{aligned} .$$

Soit  $Y \in g(\mathbf{m}_i)$ . Il existe  $Z \in \mathbf{m}_i$  tel que  $Y = gZ = (T_{\mathbf{m}}^{(i)}g)Z$  et alors

$$\begin{aligned} K_{g \cdot \mathbf{n}, g \cdot \mathbf{m}}^{(i)}(gZ) &= gZ \text{ mod } g(\mathbf{n}_{-i+1}) \\ &= (T_{\mathbf{n}}^{(i)}g)(Z \text{ mod } \mathbf{n}_{-i+1}) \\ &= (T_{\mathbf{n}}^{(i)}g)(K_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{(i)}(Z)) \end{aligned}$$

Autrement dit, on a  $K_{g \cdot \mathbf{n}, g \cdot \mathbf{m}}^{(i)} = T_{\mathbf{n}}^{(i)}g \circ K_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{(i)} \circ (T_{\mathbf{m}}^{(i)}g)^{-1} = g \cdot K_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{(i)}$ . Donc  $K^{(i)}$  est  $G$ -équivariante.

ii) Par définition,  $K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)}$  est bijective si et seulement si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{n}_{-i+1}$  donc  $\mathfrak{m} \top \mathfrak{n}$  si et seulement si pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)}$  et  $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}^{(i)}$  sont des isomorphismes. □

On a déjà vu que  $X^\pm \subset \mathcal{F}$  donc, comme on a considéré  $T^{(i)}X^\pm \subset T^{(i)}\mathcal{F}$ , on peut considérer  $\text{Hom}^{(i)}(T'X^+, TX^-)$  ou  $\text{Hom}^{(i)}(T'X^-, TX^+)$ . Alors ces fibrés se réalisent comme des fibrés associés (comme les  $T^{(i)}X^\pm$ ). En effet, on a le résultat suivant :

**Théorème II.4.4.** *Pour tout  $i$ , on a*

$$\begin{aligned} \text{Hom}^{(i)}(T'X^+, TX^-) &\cong (G \times G) \times_{(P^- \times P^+)} \text{End}(\mathfrak{n}_i^-) \text{ et} \\ \text{Hom}^{(i)}(T'X^-, TX^+) &\cong (G \times G) \times_{(P^+ \times P^-)} \text{End}(\mathfrak{n}_i^+), \end{aligned}$$

où  $(G \times G) \times_{(P^- \times P^+)} \text{End}(\mathfrak{n}_i^-) := (G \times G) \times \text{End}(\mathfrak{n}_i^-) / \sim$  avec  $(g, g', \varphi) \sim (gp^-, g'p^+, c_{p^+}(0)_i^{-1} \varphi c_{p^-}(0)_i)$  et  $(G \times G) \times_{(P^+ \times P^-)} \text{End}(\mathfrak{n}_i^+) := (G \times G) \times \text{End}(\mathfrak{n}_i^+) / \sim$  avec  $(g, g', \varphi) \sim (gp^+, g'p^-, d_{p^+}(0)_i \varphi d_{p^-}(0)_i^{-1})$ .

*Démonstration.*

Les démonstrations se font comme celles des théorèmes II.4.1 et II.4.2. □

On peut alors restreindre le noyau canonique  $K^{(i)}$  à  $X^\pm \times X^\mp$  et le voir comme une section de  $\text{Hom}^{(i)}(T'X^\pm, TX^\mp)$ .

Par ailleurs, si  $x \in \mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$  et  $y \in \mathfrak{n}_1^- \subset X^-$ , alors les applications  $K_{x,y}^{(i)}$  sont données par

$$K_{x,y}^{(i)} : \begin{array}{ccc} T'_{y \cdot o^-} X^- & \rightarrow & T'_{x \cdot o^+} X^+ \\ e^{\text{ad}(y)} Y & \mapsto & \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(x)} e^{\text{ad}(y)} Y) \end{array} .$$

Autrement dit,  $K_{x,y}^{(i)} = B^+(x, -y)_i$  i.e  $K_{x,y}^{(i)}$  est un opérateur de Bergman généralisé.

### II.4.3 Réalisation de $\mathfrak{g}$ comme champs polynomiaux

A partir de maintenant, fixons une dérivation  $D \in \mathcal{G}$  de  $\mathfrak{g}$ , ce qui revient à fixer une  $(2k+1)$ -graduation. On peut donc considérer la géométrie de drapeaux généralisée associée à  $(\mathfrak{g}, D)$ . Dans le chapitre IV, nous allons construire une structure de variété différentielle sur  $X^+$  de sorte que, localement  $X^+$  sera modelé sur l'espace

$$\mathfrak{n}_1^+ = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k.$$

Ceci nous amène donc à poser la définition suivante :

**Définition II.4.6.** On considère

$$\mathcal{A} := \{(g(\mathfrak{n}_1^+), \varphi_g), g \in G\}, \text{ où } \varphi_g : g(\mathfrak{n}_1^+) \rightarrow \mathfrak{n}_1^+, g \cdot x \mapsto x$$

appelé l'*atlas naturel de  $X^+$* . Et toujours en empruntant le vocabulaire de la géométrie différentielle, les applications  $\varphi_g$  seront appelées les *cartes* de l'atlas  $\mathcal{A}$ .

Dans la partie précédente, nous avons vu que  $T^{(i)}X^+ \cong G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+$  ; on va donc identifier  $T^{(i)}X^+$  et  $G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+$ . On a également vu que les applications  $\tilde{Y}^{(i)}$  définissent des sections de  $T^{(i)}X^+$ . Or, les sections de  $G \times_{P^-} \mathfrak{n}_i^+$  s'identifient à la représentation de  $G$  induite par celle de  $P^-$  et donc elles correspondent aux fonctions  $f : G \rightarrow \mathfrak{n}_i^+$  telles que pour tout  $p \in P^-$ ,  $f(gp) = d_p(0)_i f(g)$ . En effet, considérons une telle fonction  $f$ . On définit alors

$$\begin{aligned} s_f : X^+ &\rightarrow T^{(i)}X^+ \\ g.o^+ &\mapsto \left( T_{o^+}^{(i)}g \right) f(g) . \end{aligned}$$

Alors  $s_f$  est une section de  $\begin{array}{c} T^{(i)}X^+ \\ \downarrow \\ X^+ \end{array}$  et on montre que toutes les sections sont de cette

forme. En particulier, la fonction correspondant à la section  $\tilde{Y}^{(i)}$  est

$$\begin{aligned} f_Y^{(i)} : G &\rightarrow \mathfrak{n}_i^+ \\ g &\mapsto \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+}(g^{-1}Y) . \end{aligned}$$

En effet,  $s_{f_Y^{(i)}}(g.o^+) = \left( T_{o^+}^{(i)}g \right) \left( \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+}(g^{-1}Y) \right)$  i.e

$$s_{f_Y^{(i)}}(g.o^+) = \left( T_{o^+}^{(i)}g \right) (g^{-1}Y \bmod \mathfrak{n}_{-i+1}^-) = Y \bmod g(\mathfrak{n}_{-i+1}^-) = \tilde{Y}^{(i)}(g.o^+).$$

Dans le cas particulier où  $g = e^{\text{ad}(x)}$ , avec  $x \in \mathfrak{n}_i^+$ , on identifie la restriction de  $\tilde{Y}^{(i)}$  sur  $\mathfrak{n}_i^+$  avec la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^{+(i)} = f_{Y|_{\mathfrak{n}_i^+}} : \mathfrak{n}_i^+ &\rightarrow \mathfrak{n}_i^+ \\ x &\mapsto \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+}(e^{-\text{ad}(x)}Y) . \end{aligned}$$

On remarque que  $x \mapsto \tilde{Y}^{+(i)}(x)$  est polynomiale en  $x$ . On obtient donc une application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \text{Pol}(\mathfrak{n}_i^+) , \\ Y &\mapsto \tilde{Y}^{+(i)} \end{aligned}$$

où  $\text{Pol}(\mathfrak{n}_i^+)$  est l'ensemble des champs polynomiaux sur  $\mathfrak{n}_i^+$ .

Si  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée, on a une seule application :

$\tilde{Y}^+ = \tilde{Y}^{+(1)} : x \mapsto \text{pr}_{\mathfrak{g}_1}(e^{-\text{ad}(x)}Y) = \text{pr}_{\mathfrak{g}_1}\left(Y - [x, Y] + \frac{1}{2}[x, [x, Y]]\right)$  et on retrouve les formules de [BN04].

Si  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée, la situation se complique légèrement ; tout d'abord, on obtient deux applications :

$\tilde{Y}^{+(2)} : x \in \mathfrak{g}_2 \mapsto \text{pr}_{\mathfrak{g}_2}(e^{-\text{ad}(x)}Y) = \text{pr}_{\mathfrak{g}_2}\left(Y - [x, Y] + \frac{1}{2}[x, [x, Y]]\right)$  donc on trouve des expressions proches de celles dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée, à savoir :

- si  $Y \in \mathfrak{g}_2$ ,  $\tilde{Y}^{+(2)}(x) = Y$ ,
- si  $Y \in \mathfrak{g}_1$ ,  $\tilde{Y}^{+(2)}(x) = 0$ ,
- si  $Y \in \mathfrak{g}_0$ ,  $\tilde{Y}^{+(2)}(x) = -[x, Y]$ ,
- si  $Y \in \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $\tilde{Y}^{+(2)}(x) = 0$ ,
- si  $Y \in \mathfrak{g}_{-2}$ ,  $\tilde{Y}^{+(2)}(x) = \frac{1}{2}[x, [x, Y]]$ .



Mais également  $\tilde{Y}^{+(1)} : x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_2 \mapsto \text{pr}_{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2} (e^{-\text{ad}(x)}Y)$  i.e  
 $\tilde{Y}^{+(1)}(x) = \text{pr}_{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2} \left( Y - [x, Y] + \frac{1}{2} [x, [x, Y]] - \frac{1}{6} [x, [x, [x, Y]]] + \frac{1}{24} [x, [x, [x, [x, Y]]]] \right)$  et

alors :

$$\text{si } Y \in \mathfrak{g}_2, \tilde{Y}^{+(1)}(x) = Y,$$

$$\text{si } Y \in \mathfrak{g}_1, \tilde{Y}^{+(1)}(x) = Y - [x, Y],$$

$$\text{si } Y \in \mathfrak{g}_0, \tilde{Y}^{+(1)}(x) = -[x_1, Y] - [x_2, Y] + \frac{1}{2} [x_1, [x_1, Y]],$$

$$\text{si } Y \in \mathfrak{g}_{-1}, \tilde{Y}^{+(1)}(x) = -[x_2, Y] + \frac{1}{2} [x_1, [x_1, Y]] + [x_1, [x_2, Y]] - \frac{1}{6} [x_1, [x_1, [x_1, Y]]],$$

$$\text{si } Y \in \mathfrak{g}_{-2}, \tilde{Y}^{+(2)}(x) = [x_1, [x_2, Y]] - \frac{1}{6} [x_1, [x_1, [x_1, Y]]] + \frac{1}{2} [x_2, [x_2, Y]] - \frac{1}{2} [x_1, [x_1, [x_2, Y]]] + \frac{1}{24} [x_1, [x_1, [x_1, [x_1, Y]]]].$$

#### II.4.4 “Action” de $G$ dans la carte $\mathfrak{n}_1^+$

On a vu dans la partie II.3 que dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  est 3-graduée, alors

$$X^- \cong \text{Gras}_p(\mathbb{C}^n) \text{ et } X^+ \cong \text{Gras}_{n-p}(\mathbb{C}^n).$$

En outre,  $\mathfrak{n}_1^+ \cong \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{C})$  et  $\mathfrak{n}_1^+ \hookrightarrow X^+$  par  $X \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} v \\ Xv \end{pmatrix}, v \in \mathbb{C}^{n-p} \right\}$ . Dans cette carte, l’action du groupe  $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ Xv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ (C + DX)(A + BX)^{-1}v \end{pmatrix},$$

si  $(A + BX)$  est inversible. Cette condition signifie que le point  $x = \begin{pmatrix} v \\ Xv \end{pmatrix} \in \text{Gras}_p(\mathbb{C}^n)$

n’est pas envoyé à l’infini par  $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ . Autrement dit, le groupe projectif agit dans la carte  $\mathfrak{n}_1^+$  par homographies.

La suite de cette partie sera consacrée à étudier l’action du groupe  $G$  dans le domaine de carte  $\mathfrak{n}_1^+$  pour trouver une expression “rationnelle” de  $(g \cdot x)$  en fonction de  $g \in \text{Aut}(g)$ ,  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $d_g(x)_1$  lorsque  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ . Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée, on trouve effectivement une expression simple, sous forme rationnelle [BN04] :

$$g \cdot x = d_g(x)^{-1}n_g(x), \text{ où } n_g(x) \text{ est une application polynomiale quadratique en } x.$$

Dans le cas général, l’étude est plus compliquée et nécessite de regarder chaque “coordonnée” de  $(g \cdot x) \in \mathfrak{n}_1^+$ . Lorsque nous aurons construit une structure de variété différentielle sur  $X^+$ , nous verrons qu’il existe un lien entre la différentielle d’un élément  $g \in \text{Aut}(g)$ , notée  $d_g(x)$  pour  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  tel que  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$  et l’opérateur  $d_g(x)_1$  défini plus tôt. Montrons tout d’abord que les  $d_g(x)_i$  vérifient une relation proche de la relation de cocycle vérifiée par la différentielle.

**Proposition II.4.1.** Soit  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ ,  $x \in \mathfrak{n}_i^+$  tel que  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_i^+$ . Alors on a

$$\widetilde{(g^{-1}Y)}^{+(i)}(x) = d_g(x)_i (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_i \widetilde{Y}^{+(i)}(g \cdot x).$$

En outre, si  $x \in \mathfrak{n}_i^+$ , et  $g_1, g_2 \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  sont tels que  $g_2 \cdot x \in \mathfrak{n}_i^+$  et  $g_1 g_2 \cdot x \in \mathfrak{n}_i^+$ , alors

$$d_{g_1 g_2}(x)_i = d_{g_2}(x)_i (e^{\text{ad}(g_2 \cdot x)})_i d_{g_1}(g_2 \cdot x)_i = d_{g_2}(x)_i d_{\text{Id}}(g_2 \cdot x)_i^{-1} d_{g_1}(g_2 \cdot x)_i.$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathfrak{n}_i^+$  et  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  tel que  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_i^+$ . Alors d'après le point iv) du théorème II.3.2, il existe  $p(g, x) \in P^-$  tel que  $g e^{\text{ad}(x)} = e^{\text{ad}(g \cdot x)} p(g, x)$  donc

$$p(g, x)^{-1} = e^{-\text{ad}(x)} g^{-1} e^{\text{ad}(g \cdot x)},$$

et par suite, on a

$$p(g, x)_i^{-1} = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p(g, x)^{-1} \circ \iota_{\mathfrak{n}_i^+} = d_g(x)_i (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_i = d_g(x)_i d_{\text{Id}}(g \cdot x)_i^{-1}$$

car  $e^{\text{ad}(g \cdot x)}|_{\mathfrak{n}_i^+} = (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_i$ . Donc,

$$\widetilde{(g^{-1}Y)}^{+(i)}(x) = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (e^{-\text{ad}(x)} g^{-1} Y) = \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (p(g, x)^{-1} e^{-\text{ad}(g \cdot x)} Y).$$

Mais comme  $p(g, x)^{-1} \in P^-$ , sa matrice est triangulaire inférieure et donc

$$\text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} \circ p(g, x)^{-1} = p(g, x)_i^{-1} \circ \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+}$$

i.e pour  $y \in \mathfrak{g}$ , les coordonnées dans  $\mathfrak{n}_i^+$  de  $p(g, x)^{-1} y$  ne dépendent que des coordonnées de  $y$  dans  $\mathfrak{n}_i^+$ , donc on a

$$\widetilde{(g^{-1}Y)}^{+(i)}(x) = d_g(x)_i (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_i \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} Y) = d_g(x)_i (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_i \widetilde{Y}^{+(i)}(g \cdot x).$$

En particulier, pour  $Y = v \in \mathfrak{n}_i^+$ , on a  $\widetilde{(g^{-1}v)}^{+(i)}(x) = d_g(x)_i (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_i \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} v)$  donc

$$\widetilde{(g^{-1}v)}^{+(i)}(x) = d_g(x)_i v.$$

A présent, si  $g_2 \cdot x \in \mathfrak{n}_i^+$  et  $g_1 g_2 \cdot x \in \mathfrak{n}_i^+$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} d_{g_1 g_2}(x)_i v &= \widetilde{(g_2^{-1} g_1^{-1} v)}^{+(i)}(x) = d_{g_2}(x)_i (e^{\text{ad}(g_2 \cdot x)})_i \widetilde{(g_1^{-1} v)}^{+(i)}(g_2 \cdot x) \\ &= d_{g_2}(x)_i (e^{\text{ad}(g_2 \cdot x)})_i d_{g_1}(g_2 \cdot x)_i v. \end{aligned}$$

Donc finalement, on a  $d_{g_1 g_2}(x)_i = d_{g_2}(x)_i (e^{\text{ad}(g_2 \cdot x)})_i d_{g_1}(g_2 \cdot x)_i$ .  $\square$

Nous pouvons à présent trouver une expression “rationnelle” de l'action de  $G$  sur  $\mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$ . Dans le chapitre IV, cela nous permettra de montrer que sous certaines hypothèses, le groupe  $U^-$  et a fortiori  $G$  tout entier agit sur  $\mathfrak{n}_1^+$  de manière  $C^\infty$ .

**Définition II.4.7.** Soit  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  et  $x \in \mathfrak{n}_1^+$ . On pose

$$n_g(x) := \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(x)} g^{-1} E),$$

où  $E$  est l'opérateur d'Euler associé à la graduation de  $\mathfrak{g}$ , autrement dit  $D = \text{ad}(E)$ . On remarque que  $n_g(x) = \widetilde{(g^{-1}E)}^{+(1)}(x)$  et l'application  $n_g : \mathfrak{n}_1^+ \rightarrow \mathfrak{n}_1^+, x \mapsto n_g(x)$ , appelée la *numérateur de  $g$*  est polynomiale.

A présent, soit  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  tel que  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ . Montrons que  $g \cdot x$  peut s'exprimer en fonction de  $d_g(x)_1$  et  $n_g(x)$ . Rappelons que dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée, d'après [BN04], on a

$$g \cdot x = d_g(x)_1^{-1} n_g(x).$$

**Proposition II.4.2.** Soit  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  tel que  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ . Alors il existe des applications  $\psi_2, \dots, \psi_k$  telles que pour tout  $2 \leq n \leq k$ ,  $\psi_n : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \dots \times \mathfrak{g}_{n-1} \rightarrow \mathfrak{g}_n$  est  $(n-1)$ -linéaire et

$$(g \cdot x)_n = \frac{1}{n} \text{pr}_{\mathfrak{g}_n} (d_g(x)_1^{-1} n_g(x)) - \frac{1}{n} \psi_n((g \cdot x)_1, \dots, (g \cdot x)_{n-1}).$$

Par ailleurs,  $(g \cdot x)_1 = \text{pr}_{\mathfrak{g}_1} (d_g(x)_1^{-1} n_g(x))$ .

Autrement dit, il existe  $R_2^+(g \cdot x) \in \mathfrak{n}_2^+$  tel que

$$[E, g \cdot x] = d_g(x)_1^{-1} n_g(x) + R_2^+(g \cdot x)$$

et donc on peut considérer que le groupe  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  agit dans la carte  $\mathfrak{n}_1^+$  par des “applications fractionnaires” ou “birationnelles”.

*Démonstration.*

Par définition, on a  $\widetilde{(g^{-1}E)}^{+(1)}(x) = n_g(x)$  mais d'après la proposition II.4.1, on a également  $\widetilde{(g^{-1}E)}^{+(1)}(x) = d_g(x)_1 (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_1 \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E)$ . Autrement dit

$$d_g(x)_1 (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_1 \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E) = n_g(x)$$

i.e  $(e^{\text{ad}(g \cdot x)})_1 \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E) = d_g(x)_1^{-1} n_g(x)$ . Il nous faut donc exprimer

$$(e^{\text{ad}(g \cdot x)})_1 \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E).$$

Puisque  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ , on a  $\text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E) = e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E - E$  et donc

$$(e^{\text{ad}(g \cdot x)})_1 \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)} E) = E - e^{\text{ad}(g \cdot x)} E.$$

Ainsi, on obtient  $E - e^{\text{ad}(g \cdot x)} E = d_g(x)_1^{-1} n_g(x)$ . Il nous reste alors à exprimer  $E - e^{\text{ad}(g \cdot x)} E$  en fonction des coordonnées  $(g \cdot x)_n$  de  $g \cdot x$  pour obtenir le résultat souhaité. Pour cela, considérons  $v \in \mathfrak{n}_1^+$  et écrivons  $v = \sum_{n=1}^k v_n$ , avec  $v_n \in \mathfrak{g}_n$ . Alors, on peut écrire

$$E - e^{\text{ad}(v)} E = [E, v] + \frac{1}{2} [v, [E, v]] + \dots = \sum_{n=1}^k n v_n + \psi_n(v_1, \dots, v_{n-1}),$$

où l'application  $\psi_n : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots \times \mathfrak{g}_{n-1} \rightarrow \mathfrak{g}_n$  est  $(n-1)$ -linéaire et représente la partie de la coordonnée de  $E - e^{\text{ad}(v)}E$  dans  $\mathfrak{g}_n$  ne dépendant que de  $v_1, \dots, v_{n-1}$ . On a par exemple  $\psi_1, \psi_2 = 0$ ,  $\psi_3(v_1, v_2) = \frac{1}{2}[v_1, v_2]$  et  $\psi_4(v_1, v_2, v_3) = [v_1, v_3] + \frac{1}{6}[v_1, [v_1, v_2]]$ . Donc d'après ce qui précède, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} k(g \cdot x)_k + \psi_k((g \cdot x)_1, \dots, (g \cdot x)_{k-1}) \\ \vdots \\ 3(g \cdot x)_3 + \frac{1}{2}[(g \cdot x)_1, (g \cdot x)_2] \\ 2(g \cdot x)_2 \\ (g \cdot x)_1 \end{pmatrix} = d_g(x)_1^{-1} n_g(x) .$$

Donc on a bien  $(g \cdot x)_1 = \text{pr}_{\mathfrak{g}_1}(d_g(x)_1^{-1} n_g(x))$  et pour tout  $2 \leq n \leq k$ ,

$$(g \cdot x)_n = \frac{1}{n} (d_g(x)_1^{-1} n_g(x)) - \frac{1}{n} \psi_n((g \cdot x)_1, \dots, (g \cdot x)_{n-1}) .$$

□

On a donc une généralisation au cas des algèbres de Lie  $(2k+1)$ -graduées de la formule présente dans [BN04], mais où est apparu un terme supplémentaire dû à l'action de  $e^{\text{ad}(g \cdot x)}$  sur  $\mathfrak{n}_1^+$ . Dans l'annexe B, on verra que cette action joue également un rôle important si on veut réaliser  $\mathfrak{g}$  comme algèbre de Lie de champs polynomiaux sur  $\mathfrak{n}_1^+$ . Cette action, en particulier celle du groupe  $G$ , par des applications fractionnaires sera très importante pour montrer dans le chapitre IV que le groupe  $G$  agit par des difféomorphismes sur  $X^+$ .

# Chapitre III

## Le cas $\mathfrak{g} = \text{End}_R(V)$

Nous avons déjà vu dans les parties II.2 et II.3 que dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  est muni d'une graduation, la géométrie de drapeaux généralisée associée se réalise effectivement comme des drapeaux de sous-espaces de  $\mathbb{C}^n$ . Nous allons voir dans cette partie que ce fait se généralise dans le cas où  $\mathfrak{g} = \text{End}_R(V)$ , avec  $R$  une algèbre associative unitaire sur un anneau  $\mathbb{K}$  commutatif tel que les entiers sont inversibles dans  $\mathbb{K}$  et  $V$  un module sur  $R$  (par exemple, à droite). On va donc considérer une telle algèbre  $R$  et  $V$  un module sur  $R$ .

### III.1 Drapeaux et opérateurs d'Euler

Pour toute la suite, on fixe un entier  $k$  et on va s'intéresser dans ce chapitre aux  $(2k+1)$ -graduations de  $\text{End}_R(V)$ .

**Définition III.1.1.** On appelle *drapeau (de longueur  $k$ )* de  $V$  une suite de sous-espaces de  $V$  :

$$0 \subset E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{k-1} \subset V, \text{ noté } E = (E_0 \subset \cdots \subset E_{k-1}).$$

On définit alors une relation de *transversalité* sur l'ensemble des drapeaux en posant que deux drapeaux  $E$  et  $F$  sont transverses si

$$V = E_i \oplus F_{k-i-1}, \text{ pour tout } 0 \leq i \leq k-1.$$

On notera  $\mathcal{D}$  l'ensemble des drapeaux admettant un drapeau transverse, ainsi que  $(\mathcal{D} \times \mathcal{D})^\top := \{(E, F) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, E \top F\}$  l'ensemble des drapeaux transverses et si  $E \in \mathcal{F}$ , on note  $E^\top := \{F \in \mathcal{D}, E \top F\}$ , l'ensemble des drapeaux transverses à  $E$ .

On va à présent considérer un ensemble d'endomorphismes de  $V$  qui vont jouer le rôle d'opérateurs d'Euler pour  $\mathfrak{g} = \text{End}_R(V)$ . Pour cela, il faut différencier les cas où  $k$  est pair ou impair. On va supposer que  $k = 2n$  est pair. Alors on considère

$$\mathcal{P} := \{p \in \text{End}_R(V), p(p-1)(p+1) \cdots (p-n)(p+n) = 0\}.$$

Dans le cas où  $k = 2n+1$  est impair, il faut considérer

$$\mathcal{P} := \{p \in \text{End}_R(V), p(p-1)(p+1) \cdots (p-n) = 0\}.$$

Dans la suite, on va supposer que  $k = 2n$  mais l'autre cas se traite de manière totalement analogue.

Pour  $p \in \mathcal{P}$ , on définit les drapeaux suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} d^+(p) := \left( \text{Ker}(p-n) \subset \text{Ker}(p-n) \oplus \text{Ker}(p-n+1) \subset \cdots \subset \text{Ker}(p-n) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(p+n-1) \right) \\ d^-(p) := \left( \text{Ker}(p+n) \subset \text{Ker}(p+n) \oplus \text{Ker}(p+n-1) \subset \cdots \subset \text{Ker}(p+n) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(p-n+1) \right) \end{array} \right\}.$$

Alors les deux drapeaux  $d^+(p)$  et  $d^-(p)$  sont transverses. On montrera dans la suite que deux drapeaux transverses proviennent d'un tel endomorphisme  $p \in \mathcal{P}$ . On considère à présent  $\mathfrak{g} = \text{End}_R(V)$ , muni du crochet usuel  $[A, B] = AB - BA$ . Le crochet n'est en général pas  $R$  bilinéaire (car  $R$  n'est pas nécessairement commutative) mais comme  $\mathbb{K}$  est un anneau commutatif,  $\mathfrak{g}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie. Par ailleurs, si  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\text{ad}(p)$  définit une dérivation de  $\mathfrak{g}$  et si on écrit

$$V = \text{Ker}(p - n\text{Id}) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(p + n\text{Id}) = V_n \oplus \cdots \oplus V_{-n},$$

la décomposition de  $V$  en espaces propres de  $p$ , alors  $p$  est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & -n+1 & \\ & & & & -n \end{pmatrix},$$

qui définit une dérivation de  $\mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}(p) \in \mathcal{G}$  dont la  $(2k+1)$ -graduation associée est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_k &= \left\{ \left( \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{-n,n} \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right), A_{-n,n} \in \text{Hom}_R(V_{-n}, V_n) \right\}, \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}_0 &= \left\{ \left( \begin{array}{ccccc} A_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_{n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{-n+1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{-n} \end{array} \right), A_i \in \text{End}_R(V_i) \right\}, \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}_{-k} &= \left\{ \left( \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ A_{n,-n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right), A_{n,-n} \in \text{Hom}_R(V_n, V_{-n}) \right\}. \end{aligned}$$

On obtient alors une application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{G}$ , l'espace des  $(2k+1)$ -graduations intérieures de  $\mathfrak{g}$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{G} \\ p &\mapsto \text{ad}(p) \end{aligned}$$

## III.2 Lien avec les filtrations

Par ailleurs, à un drapeau  $E = (E_0 \subset \dots \subset E_{k-1}) \in \mathcal{D}$ , on associe une  $(2k+1)$ -filtration de  $\mathfrak{g}$ , notée  $\mathfrak{n}_E$ , en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{n}_k = \{X \in \mathfrak{g}, XV \subset E_0, XE_j = 0, \forall 0 \leq j \leq k-1\}, \\ \mathfrak{n}_{k-1} = \{X \in \mathfrak{g}, XV \subset E_1, XE_{k-1} \subset E_0, XE_j = 0, \forall 0 \leq j \leq k-2\}, \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_{k-i} = \{X \in \mathfrak{g}, XV \subset E_i, XE_{k-1} \subset E_{i-1}, \dots, XE_{k-i} \subset E_0, XE_j = 0, \forall 0 \leq j \leq k-i-1\}, \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_1 = \{X \in \mathfrak{g}, XE_j \subset E_{j-1}, \forall 0 \leq j \leq k\}, \\ \mathfrak{n}_0 = \{X \in \mathfrak{g}, XE_j \subset E_j, \forall 0 \leq j \leq k-1\}, \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_{-k} = \{X \in \mathfrak{g}, XE_0 \subset E_{k-1}\}. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une application de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{F}$ , l'ensemble des  $(2k+1)$ -filtrations intérieures de  $\mathfrak{g}$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{F} \\ E &\mapsto \mathfrak{n}_E \end{aligned}$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \subset & \mathcal{D} \times \mathcal{D} \\ \varphi_{\mathcal{P}} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{D}} \\ \mathcal{G} & \subset & \mathcal{F} \times \mathcal{F} \end{array}$$

On remarque que ce diagramme est aussi invariant sous l'action du groupe  $\text{GL}_R(V)$ .

Si  $E \in \mathcal{D}$  est un drapeau de  $V$ , alors les éléments  $X \in \mathfrak{n}_1 (= (\mathfrak{n}_E)_1)$  sont nilpotents d'indice  $k+1$  et donc  $e^X$  est un polynôme en  $X$  de degré au plus  $k$ . On pose alors

$$U_E := \{e^X, X \in \mathfrak{n}_1\}.$$

Soit  $F \in E^\top$ . On considère également

$$U_F := \{e^Y, Y \in (\mathfrak{n}_F)_1\} \text{ et } G(E, F) = \langle U_E, U_F \rangle \subset \text{GL}_R(V).$$

On pose enfin

$$P_E := \{g \in G(E, F), gE = E\}, P_F := \{g \in G(E, F), gF = F\} \text{ et } H(E, F) = P_E \cap P_F.$$

Alors le but de la suite de cette partie est de montrer tout d'abord qu'il existe  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $E = d^+(p)$  et  $F = d^-(p)$ , et ensuite que

$$G(E, F)/P_E \cong G(E, F).E \rightarrow G(\text{ad}(p))\mathfrak{n}_E \cong G(\text{ad}(p))/P^+ = X^-$$

est bijective. Autrement dit, la géométrie de drapeaux généralisée associée à la  $(2k+1)$ -gradation de  $\mathfrak{g}$  donnée par  $\text{ad}(p)$  se réalise comme un ensemble de drapeaux de  $V$ .

### III.3 Réalisation de la géométrie de drapeaux généralisée

On a tout d'abord la proposition suivante :

#### **Proposition III.3.1.**

- i) Soit  $(E, F) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ . Alors  $E \top F$  si et seulement s'il existe  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $E = d^+(p)$  et  $F = d^-(p)$ .
- ii) Soit  $E \in \mathcal{D}$ . Alors  $U_E$  agit simplement transitivement sur  $E^\top$ .

*Démonstration.*

Cette proposition a déjà été montrée par W. Bertram et H. Löwe dans [BL08].  $\square$

Grâce à cette proposition, on se rend compte que  $G(E, F)$  ne dépend pas du drapeau transverse à  $E$  choisi. Autrement dit  $G(E, F) = G(E, F') = G_E$  pour tout  $(F, F') \in E^\top$ . On peut alors énoncer le théorème suivant :

#### **Théorème III.3.1.**

- i) Pour tout  $E \in \mathcal{D}$ ,  $\varphi_{\mathcal{D}}(E^\top) = \varphi_{\mathcal{D}}(E)^\top$ .
- ii) Pour tout  $p \in \mathcal{P}$ , l'application

$$\begin{aligned} GL_R(V).p &\rightarrow \mathcal{G} \\ g.p &\mapsto \text{ad}(g.p) \end{aligned}$$

est injective.

- iii) Pour tout  $E \in \mathcal{D}$ , l'application

$$\begin{aligned} GL_R(V).E &\rightarrow \mathcal{F} \\ gE &\mapsto \mathfrak{n}_{gE} \end{aligned}$$

est injective.

- iv) Soit  $p \in \mathcal{P}$ ,  $E = d^+(p)$  et  $F = d^-(p)$ . Alors l'application

$$G_E/P_E \cong G_E.E \rightarrow G(\text{ad}(p))\mathfrak{n}_E \cong G(\text{ad}(p))/P^+ = X^-$$

est une bijection.

*Démonstration.*

- i) Soit  $E \in \mathcal{D}$ . D'après la proposition III.3.1,  $E^\top = U_E F$  avec  $F \in E^\top$  fixé. Par ailleurs, l'action de  $U_E$  sur  $\mathfrak{g}$  coïncide avec l'action de  $e^{\text{ad}(\mathfrak{n}_E)_1}$  donc d'après le théorème II.3.1, on a bien  $\varphi_{\mathcal{D}}(E^\top) = \varphi_{\mathcal{D}}(E)^\top$ .
- ii) Soit  $e \in \mathcal{P}$  et  $g \in GL_R(V)$ . On pose  $f = g.e = geg^{-1}$  et on suppose que  $\text{ad}(e) = \text{ad}(f)$  i.e  $\text{ad}(e - f) = 0$ . Soit  $z := e - f \in Z(\text{End}_R(V))$ , le centre de  $\text{End}(V)$ . Montrons que  $z = 0$ . On a  $[z, e] = 0$  donc  $ef = fe$  i.e  $e$  et  $f$  commutent. Donc on peut décomposer  $V$  en espaces propres communs à  $e$  et  $f$  et alors on montre qu'on a

$$z(z-1)(z+1)\dots(z-2n)(z+2n) = 0.$$



On pose alors

$$z_1 := z(z-1)(z+1) \dots (z-2n) \text{ et } z_2 := z(z-1)(z+1) \dots (z-2n+1)(z+2n-1)(z+2n).$$

On a donc  $z_1(z+2n) = 0$ ; autrement dit  $z_1 z = -2n z_1$  i.e

$$z_1 e - g z_1 e g^{-1} = -2n z_1.$$

Donc si on montre que  $z_1 e$  appartient au centre de  $\text{End}_R(V)$ , on aura  $z_1 = 0$ . Or on montre même que  $z_1 e = -z_1$ . Pour cela, on développe complètement  $z_1$  et comme  $e(e-1)(e+1) \dots (e-n)(e+n) = 0$  et de même pour  $f$ , on remplace toutes les puissances de  $e$  et  $f$  supérieures à  $2n+1$ . Ensuite, en multipliant par  $e$ , on constate que  $z_1 e = -z_1$ . Le calcul dans le cas général est long et très pénible, nous allons donc simplement le présenter dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée. On a alors  $e^3 = e$  et  $f^3 = f$  et par suite

$$\begin{aligned} z_1 &= (e-f)(e-f-2)((e-f)^2-1) \\ &= ((e-f)^2-2(e-f))(e^2-2ef+f^2-1) \\ &= 6(e^2f-ef-ef^2+e^2f^2). \end{aligned}$$

Donc on a bien  $z_1 e = -z_1$  et par suite,  $z_1 = 0$ . On montre de même que  $z_2 = 0$  et alors dans le cas général, on a  $z_2 - z_1 = 4nz(z-1)(z+1)(z-2n+1)(z+2n-1) = 0$ . Par récurrence, on obtient finalement que  $z = 0$  i.e  $e = f$  et par suite, la restriction de  $\varphi_{\mathcal{P}}$  à l'orbite de  $p$  sous  $\text{GL}_R(V)$  est injective.

- iii) Soit  $E \in \mathcal{D}$ . Alors on peut écrire  $E = d^+(p)$  avec  $p \in \mathcal{P}$ . Soit  $(g, g') \in \text{GL}_R(V)$  tels que  $\mathfrak{n}_{gE} = \mathfrak{n}_{g'E}$ . Alors on a  $\mathfrak{n}^+(\text{ad}(g.p)) = \mathfrak{n}^+(\text{ad}(g'.p))$ . Donc d'après le corollaire II.3.1, on peut écrire  $\text{ad}(g'.p) = \text{ad}(e^{\text{ad}(v)}g.p)$  avec  $e^{\text{ad}(v)} \in U_{gE}$  donc  $g'.p = e^{\text{ad}(v)}g.p$  d'après le point précédent et donc  $g'E = d^+(g'.p) = e^{\text{ad}(v)}d^+(g.p) = d^+(g.p) = gE$ .
- iv) Il suffit de remarquer que l'action de  $P_E$  sur  $\mathfrak{g}$  coïncide avec celle de  $P^+$  puis d'utiliser les points ii) et iii).

□

Autrement dit, si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_R(V)$  est munie d'une  $(2k+1)$ -gradation associée à un élément de  $p \in \mathcal{P}$ , la géométrie de drapeaux généralisée associée s'identifie aux orbites de  $E = d^+(p)$  et  $F = d^-(p)$  sous le groupe  $G(E, F)$ .



# Chapitre IV

## Structure de variété différentielle

Pour l'instant, nous n'avons étudié que des structures algébriques. Il est temps à présent de s'intéresser à des questions analytiques. Nous allons dans cette partie construire une structure de variété différentielle sur les espaces de la géométrie de drapeaux généralisée associée à une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée. Pour cela, nous utiliserons la notion de calcul différentiel sur un anneau topologique développée par W. Bertram, H. Glöckner et K-H. Neeb dans [BGN04] et [Ber08]. Une présentation de ce calcul différentiel est faite dans l'annexe C. Le résultat principal de cette partie, le théorème IV.1.1 est une généralisation au cas des algèbres de Lie  $(2k + 1)$ -graduées du résultat de W. Bertram et K-H. Neeb dans [BN05] dans le cadre des 3-graduations. Ces résultats ont été annoncés dans [Che09].

### IV.1 Construction d'une structure de variété sur $X^+$

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée, sur un anneau  $\mathbb{K}$  tel que les entiers sont inversibles. On considère  $\mathfrak{n}^+$  et  $\mathfrak{n}^-$  les filtrations positive et négative associées à la graduation de  $\mathfrak{g}$  ainsi que  $(X^+, X^-, \top)$  la géométrie de drapeaux généralisée associée à  $\mathfrak{g}$ . Le but de cette partie est de construire sur  $X^+$  et  $X^-$  une structure de variété différentielle modelée sur  $\mathfrak{n}_1^+$  ou  $\mathfrak{n}_1^-$  (voir l'annexe C). Pour cela, nous devons faire quelques hypothèses sur l'anneau  $\mathbb{K}$ , les modules  $\mathfrak{n}_1^+$  et  $\mathfrak{n}_1^-$  ainsi que sur les opérateurs de Bergman introduits dans la définition II.3.3.

#### IV.1.1 Hypothèses

On suppose tout d'abord que  $\mathbb{K}$  est un anneau topologique et que  $\mathfrak{n}_1^+$  et  $\mathfrak{n}_1^-$  sont des  $\mathbb{K}$ -modules topologiques. On fait également les trois hypothèses suivantes :

(H1) pour  $(i, j, m, n, p, q, r) \in \{1, \dots, k\}$  avec  $i + j > 0$ ,  $m - n > 0$  et  $p - q + r > 0$ , les applications

$$R_{i,j}^\pm : \mathfrak{g}_{\pm i} \times \mathfrak{g}_{\pm j} \rightarrow \mathfrak{g}_{\pm(i+j)}, \quad F_{m,n}^\pm : \mathfrak{g}_{\pm m} \times \mathfrak{g}_{\mp n} \rightarrow \mathfrak{g}_{\pm(m-n)},$$
$$(x, y) \mapsto [x, y] \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

$$\text{et } T_{p,q,r}^{\pm} : \mathfrak{g}_{\pm p} \times \mathfrak{g}_{\mp q} \times \mathfrak{g}_{\pm r} \rightarrow \mathfrak{g}_{\pm(p-q+r)} \\ (x, y, z) \mapsto [[x, y], z]$$

sont continues; en particulier, les sous-algèbres  $\mathfrak{n}_1^+$  et  $\mathfrak{n}_1^-$  sont des algèbres de Lie topologiques,

(H2) l'ensemble  $(\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} := \{(x, w) \in \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-, e^{\text{ad}(w)} \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+\}$  est ouvert dans  $\mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-$ . Alors d'après le corollaire II.3.3, on a

$$(\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} = \{(x, w) \in \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-, 1 \leq j \leq k, B^+(x, w)_j \in \text{GL}(\mathfrak{n}_j^+), B^-(w, x)_j \in \text{GL}(\mathfrak{n}_j^-)\},$$

(H3) l'application  $(\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} \times \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- \rightarrow \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-$  est continue.  $(x, w), (u, v) \mapsto (B^+(x, w)_1^{-1}u, B^-(w, x)_1^{-1}v)$

Il faut tout de suite remarquer que nous ne fixons pas de topologie sur  $\mathfrak{g}_0$ .

## IV.1.2 Construction d'une structure différentiable

**Proposition IV.1.1.** *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), l'application*

$$(\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} \rightarrow \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- \\ (x, w) \mapsto (e^{\text{ad}(w)} \cdot x, e^{\text{ad}(x)} \cdot w)$$

est de classe  $C^{\infty}$ .

*Démonstration.*

Tout d'abord, on considère l'application

$$f : \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- \rightarrow \text{End}(\mathfrak{n}_1^+) \times \text{End}(\mathfrak{n}_1^-) \\ (x, w) \mapsto (B^+(x, w)_1, B^-(w, x)_1)$$

Comme on ne veut pas fixer de topologie sur  $\text{End}(\mathfrak{n}_1^+)$ , ça n'a pas de sens de supposer  $f$  continue. A la place, on va considérer l'application

$$\tilde{f} : (\mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-) \times (\mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-) \rightarrow \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- \\ (x, w), (u, v) \mapsto (B^+(x, w)_1 u, B^-(w, x)_1 v) .$$

On ne peut pas non plus supposer que l'inversion dans  $\text{GL}(\mathfrak{n}_1^+)$  est continue donc au lieu de considérer

$$jf : (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{n}_1^+) \times \text{GL}(\mathfrak{n}_1^-) \\ (x, w) \mapsto (B^+(x, w)_1^{-1}, B^-(w, x)_1^{-1}) ,$$

on considère l'application

$$\tilde{jf} : (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} \times (\mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-) \rightarrow \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- \\ (x, w), (u, v) \mapsto (B^+(x, w)_1^{-1}u, B^-(w, x)_1^{-1}v) .$$

Alors on a le lemme suivant :

**Lemme IV.1.1.** *On suppose  $\tilde{f}$  de classe  $C^{\infty}$  et  $\tilde{jf}$  continue. Alors  $\tilde{jf}$  est de classe  $C^{\infty}$ .*

*Démonstration.*

On renvoie à [BN05] pour la démonstration de ce résultat.  $\square$

En particulier,  $\widetilde{f}$  est polynomiale continue donc de classe  $C^\infty$  et par l'hypothèse (H3),  $\widetilde{jf}$  est continue, donc  $\widetilde{jf}$  est aussi de classe  $C^\infty$ .

Montrons à présent que  $(x, w) \mapsto e^{\text{ad}(w)} \cdot x$  est  $C^\infty$ . L'application  $(x, w) \mapsto n_{e^{\text{ad}(w)}}(x)$  est polynomiale continue donc de classe  $C^\infty$ . Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que les applications

$$\Delta_j := (x, w) \mapsto \text{pr}_{\mathfrak{g}_j} (e^{\text{ad}(w)} \cdot x) \text{ sont } C^\infty, \text{ pour } 1 \leq j \leq k,$$

où  $\text{pr}_{\mathfrak{g}_j}$  est la projection sur  $\mathfrak{g}_j$ ; or d'après la proposition II.4.2, on a

$$\Delta_1(x, w) = \text{pr}_{\mathfrak{g}_1} (B^+(x, w)_1^{-1} n_{e^{\text{ad}(w)}}(x)) = (\text{pr}_{\mathfrak{g}_1} \circ \widetilde{jf})(x, w, n_{e^{\text{ad}(w)}}(x), 0),$$

mais  $\text{pr}_{\mathfrak{g}_1}$  est linéaire et continue donc de classe  $C^\infty$  et par suite,  $\Delta_1$  est  $C^\infty$ .

Ensuite, on suppose que pour  $1 \leq j \leq i$ ,  $\Delta_j$  est  $C^\infty$ . Alors, on a vu, toujours dans la proposition II.4.2, que

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mathfrak{g}_{i+1}} (e^{\text{ad}(w)} \cdot x) &= \frac{1}{i+1} \sum_{j=1}^k d_{e^{\text{ad}(w)}}(x)_{i+1,j}^{-1} n_{e^{\text{ad}(w)}}(x)_j - \frac{1}{i+1} \psi_{i+1} ((e^{\text{ad}(w)} \cdot x)_1, \dots, (e^{\text{ad}(w)} \cdot x)_i) \\ &= \frac{1}{i+1} (\text{pr}_{\mathfrak{g}_{i+1}} \circ \widetilde{jf})(x, w, n_{e^{\text{ad}(w)}}(x), 0) - \frac{1}{i+1} (\psi_{i+1} \circ (\Delta_1, \dots, \Delta_i))(x, w). \end{aligned}$$

Mais  $\psi_{i+1}$  est multilinéaire et continue par l'hypothèse (H1) donc de classe  $C^\infty$  et donc par hypothèse de récurrence, on a que  $\Delta_{i+1}$  est  $C^\infty$ . D'où finalement, l'application  $(x, w) \mapsto e^{\text{ad}(w)} \cdot x$  est de classe  $C^\infty$ ; et ainsi l'application

$$\begin{aligned} (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^\times &\rightarrow \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- && \text{est de classe } C^\infty. \\ (x, w) &\mapsto (e^{\text{ad}(w)} \cdot x, e^{\text{ad}(x)} \cdot w) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition IV.1.2.** *Pour tout  $g \in G$  et tout  $x \in \mathfrak{n}_1^+$ , l'action de  $d_g(x)_1$  sur  $\mathfrak{n}_1^+$  est continue.*

*Démonstration.*

Pour montrer cela, nous allons raisonner sur la longueur de l'élément  $g \in G$  i.e le nombre d'éléments de  $U^+$  et  $U^-$  qui composent  $g$ . Si  $g = e^{\text{ad}(w_1)} e^{\text{ad}(v_1)}$ , alors

$$g \cdot x = e^{\text{ad}(w_1)} (e^{\text{ad}(v_1)} e^{\text{ad}(x)})_{\mathcal{O}^+} = e^{\text{ad}(w_1)} \cdot (v_1 * x),$$

où  $v_1 * x$  est donné par la formule de Campbell-Hausdorff, donc on a  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$  si et seulement si  $(v_1 * x, w_1) \in (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^\times$ . D'après la proposition II.4.1, on a

$$\begin{aligned} d_g(x)_1 = d_{e^{\text{ad}(w_1)} e^{\text{ad}(v_1)}}(x)_1 &= d_{e^{\text{ad}(v_1)}}(x)_1 (e^{\text{ad}(v_1 * x)})_1 d_{e^{\text{ad}(w_1)}}(v_1 * x)_1 \\ &= (e^{-\text{ad}(x)} e^{-\text{ad}(v_1)})_1 (e^{\text{ad}(v_1 * x)})_1 d_{e^{\text{ad}(w_1)}}(v_1 * x)_1 \\ &= (e^{\text{ad}(v_1)} e^{\text{ad}(x)})_1^{-1} (e^{\text{ad}(v_1 * x)})_1 B^+(v_1 * x, w_1)_1 \\ &= B^+(v_1 * x, w_1), \end{aligned}$$

si  $(v_1 * x, w_1) \in (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^\times$ . Donc l'application  $x \mapsto d_g(x)_1$  est polynomiale et coïncide sur un ouvert non vide avec  $B^+(v_1 * x, w_1)_1$  donc  $d_g(x)_1 = B^+(v_1 * x, w_1)_1$  agit continûment sur  $\mathfrak{n}_1^+$ .

Si  $g = \tilde{g}e^{\text{ad}(w)}e^{\text{ad}(v)}$ , on suppose que  $\tilde{g}$  agit de manière continue sur  $\mathfrak{n}_1^+$  et alors, on a

$$\begin{aligned} d_g(x)_1 &= d_{e^{\text{ad}(v)}}(x)_1 \left( e^{\text{ad}(v*x)} \right)_1 d_{\tilde{g}e^{\text{ad}(w)}}(v * x)_1 \\ &= d_{\tilde{g}e^{\text{ad}(w)}}(v * x)_1 \\ &= d_{e^{\text{ad}(w)}}(v * x)_1 \left( e^{\text{ad}(e^{\text{ad}(w)} \cdot (v*x))} \right)_1 d_{\tilde{g}}(e^{\text{ad}(w)} \cdot (v * x))_1 \\ &= B^+(v * x, w)_1 \left( e^{\text{ad}(e^{\text{ad}(w)} \cdot (v*x))} \right)_1 d_{\tilde{g}}(e^{\text{ad}(w)} \cdot (v * x))_1, \end{aligned}$$

si  $(v * x, w) \in (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^\times$ . Dans ce cas, on pose  $z := e^{\text{ad}(w)} \cdot (v * x) \in \mathfrak{n}_1^+$  et alors

$$d_g(x)_1 = B^+(v * x, w)_1 \left( e^{\text{ad}(z)} \right)_1 d_{\tilde{g}}(z)_1 = B^+(v * x, w)_1 B^+(-z, 0)_1 d_{\tilde{g}}(z)_1$$

donc  $x \mapsto d_g(x)_1$  est polynomiale et coïncide sur un ouvert non vide, avec l'élément  $B^+(v * x, w)_1 B^+(-z, 0)_1 d_{\tilde{g}}(z)_1$ , qui agit continûment sur  $\mathfrak{n}_1^+$  car les opérateurs  $B^+(u, v)_1$  sont des applications linéaires continues sur  $\mathfrak{n}_1^+$  et  $d_{\tilde{g}}(x)$  agit de manière continue par hypothèse, donc  $d_g(x)_1$  agit continûment sur  $\mathfrak{n}_1^+$ .  $\square$

On peut alors énoncer le résultat principal de cette partie, à savoir l'existence d'une structure de variété différentielle sur  $X^+$ .

**Théorème IV.1.1** (Structure de variété différentielle sur  $X^+$ ). *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), il existe sur  $X^+$  une structure de variété différentielle modelée sur  $\mathfrak{n}_1^+$ , définie de manière unique par le fait que  $\mathcal{A} = \{(g(\mathfrak{n}_1^+), \varphi_g), g \in G\}$  est un atlas de  $X^+$ , où*

$$\varphi_g : g(\mathfrak{n}_1^+) \rightarrow \mathfrak{n}_1^+, \quad g \cdot x \mapsto x, \quad \text{pour } g \in G.$$

Par ailleurs, pour  $g \in G$  tel qu'il existe  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  avec  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ , on pose

$$n_{(g)}^+ := \{x \in \mathfrak{n}_1^+, g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+\}.$$

Alors  $n_{(g)}^+$  est ouvert et si on considère  $x \in n_{(g)}^+$  et

$$g : \begin{array}{ccc} n_{(g)}^+ & \rightarrow & \mathfrak{n}_1^+ \\ x & \mapsto & g \cdot x \end{array},$$

alors la différentielle de  $g$  en  $x$  vaut

$$dg(x) = \Gamma^{-(g \cdot x)} d_g(x)_1^{-1} \Gamma^{-x},$$

où, pour  $v \in \mathfrak{n}_1^+$ ,  $\Gamma^v$  est la matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale telle que  $e^{\text{ad}(v)} \cdot (tu) - e^{\text{ad}(v)} o^+ = t\Gamma^v u + t^2 \dots$ . Autrement dit,  $\Gamma^v$  est la différentielle de la formule de Campbell-Hausdorff,  $y \mapsto v * y$  en 0 au sens de la définition C.1.1 de l'annexe C.

*Démonstration.*

L'espace  $X^+$  étant couvert par  $\{g(\mathfrak{n}_1^+), g \in G\}$ , on le munit de la topologie finale pour les applications

$$\Psi_g : \mathfrak{n}_1^+ \rightarrow g(\mathfrak{n}_1^+), v \mapsto g \cdot v$$

i.e  $\mathcal{O} \subset X^+$  est un ouvert si pour tout  $g \in G$ ,  $\Psi_g^{-1}(\mathcal{O})$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$  i.e  $g^{-1}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{n}_1^+$  est ouvert. Alors, par définition, cette topologie rend toutes les applications  $\Psi_g$  continues donc  $G$  agit par homéomorphismes sur  $X^+$ .

Ensuite, montrons que la topologie induite sur  $\mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$  est la topologie de départ sur  $\mathfrak{n}_1^+$ . Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $X^+$ . Alors  $\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}_1^+$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$  pour la topologie induite, mais  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $X^+$  donc  $\Psi_e^{-1}(\mathcal{O})$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$  donc  $\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}_1^+$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{U} \subset \mathfrak{n}_1^+$  un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$ . On cherche  $\mathcal{O} \subset X^+$  ouvert tel que  $\mathcal{U} = \mathcal{O} \cap \mathfrak{n}_1^+$ . Il suffit en fait de montrer que  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $X^+$  i.e pour tout  $g \in G$ ,  $\Psi_g^{-1}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$  i.e  $g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{n}_1^+$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$ .

Soit  $g \in G$ . Si  $g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{n}_1^+ = \emptyset$ , alors le résultat est vrai.

Sinon, soit  $x \in g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{n}_1^+$ . Alors  $ge^{\text{ad}(x)}.o^+ = g \cdot x \in \mathcal{U}$  donc quitte à remplacer  $g$  par  $g \circ e^{\text{ad}(x)}$ , on peut supposer que  $x = o^+$ . Alors  $g.o^+ \in \mathfrak{n}_1^+$ , donc par le point iv) du théorème II.3.2,  $g$  s'écrit

$$g = e^{\text{ad}(v)}he^{\text{ad}(w)}, \text{ avec } v \in \mathfrak{n}_1^+, h \in H, w \in \mathfrak{n}_1^-.$$

L'action de  $e^{\text{ad}(v)}$  sur  $\mathfrak{n}_1^+$  est donnée par  $d_{e^{\text{ad}(v)}}(0)$  donc d'après la proposition IV.1.2,  $e^{-\text{ad}(v)}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$ . Ensuite,  $h \cdot x = he^{\text{ad}(x)}.o^+ = e^{\text{ad}(hx)}.o^+ = hx$  donc l'action de  $h$  sur  $\mathfrak{n}_1^+$  est donnée par  $d_{h^{-1}}(0)$  donc est continue et par suite,  $h^{-1}e^{-\text{ad}(v)}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$ . Enfin, par la proposition IV.1.1, l'action de  $e^{\text{ad}(w)}$  sur  $\mathfrak{n}_1^+$  est continue donc finalement,  $e^{-\text{ad}(w)}h^{-1}e^{-\text{ad}(v)}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathfrak{n}_1^+$  donc la topologie de  $\mathfrak{n}_1^+$  correspond à la topologie induite par celle de  $X^+$ . En particulier,  $\mathfrak{n}_1^+$  est un ouvert de  $X^+$ .

Enfin, montrons que les changements de cartes sont  $C^\infty$ . D'abord, les cartes sont des homéomorphismes par définition de la topologie de  $X^+$ . Soit  $g_1, g_2 \in G$ , on pose

$$\Psi_{g_1, g_2} := \Psi_{g_2}^{-1} \circ \Psi_{g_1} : \mathfrak{n}_1^+ \cap \Psi_{g_1}^{-1}(\Psi_{g_2}(\mathfrak{n}_1^+)) \rightarrow \mathfrak{n}_1^+ \cap \Psi_{g_2}^{-1}(\Psi_{g_1}(\mathfrak{n}_1^+)).$$

On suppose  $\Psi_{g_1}(\mathfrak{n}_1^+) \cap \Psi_{g_2}(\mathfrak{n}_1^+) \neq \emptyset$ , soit alors  $g := g_2^{-1}g_1$  et  $x \in \Psi_{g_1}^{-1}(\Psi_{g_2}(\mathfrak{n}_1^+))$ . On a  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$  donc comme précédemment, on peut supposer  $x = o^+$ , et donc  $g = e^{\text{ad}(v)}he^{\text{ad}(w)}$ . Mais par la proposition IV.1.1,  $e^{\text{ad}(v)}$  et  $e^{\text{ad}(w)}$  agissent de manière lisse et  $h$  agit par  $d_{h^{-1}}(0)$  i.e par une application linéaire et continue donc de manière lisse. Donc  $\Psi_{g_1, g_2}$  est bien de classe  $C^\infty$ .

Il reste à présent à faire le lien entre la différentielle de  $g$  et l'opérateur  $d_g$  introduit plus tôt. Il est clair d'après ce qui précède que  $n_{(g)}^+$  est ouvert car  $\mathfrak{n}_1^+$  l'est et  $G$  agit par homéomorphismes sur  $X^+$ . Alors puisque  $g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ , on peut écrire

$$ge^{\text{ad}(x)} = e^{\text{ad}(g \cdot x)}he^{\text{ad}(w)}, \text{ avec } g \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+, h \in H \text{ et } w \in \mathfrak{n}_1^-$$

i.e  $g = e^{\text{ad}(g \cdot x)}he^{\text{ad}(w)}e^{-\text{ad}(x)}$ . Donc

$$dg(x) = d(e^{\text{ad}(g \cdot x)}he^{\text{ad}(w)}e^{-\text{ad}(x)})(x) = d(e^{\text{ad}(g \cdot x)}he^{\text{ad}(w)})(0)de^{-\text{ad}(x)}(x).$$

Or  $e^{-\text{ad}(x)} \cdot (x + tu) - e^{-\text{ad}(x)} \cdot x = t\Gamma^{-x}u$ , d'où  $de^{-\text{ad}(x)}(x) = \Gamma^{-x}$ .

Autrement dit,

$$\begin{aligned} dg(x) &= d(e^{\text{ad}(g \cdot x)} h e^{\text{ad}(w)})(0) \Gamma^{-x} \\ &= de^{\text{ad}(g \cdot x)}(0) dh(0) de^{\text{ad}(w)}(0) \Gamma^{-x} \\ &= \Gamma^{(g \cdot x)} h de^{\text{ad}(w)}(0) \Gamma^{-x}. \end{aligned}$$

En effet,  $h \cdot (tu) - h \cdot 0 = h e^{\text{ad}(tu)} \cdot o^+ = e^{\text{ad}(thu)} h \cdot o^+ = e^{\text{ad}(thu)} \cdot o^+ = thu$  donc  $dh(0) = h$ .

Il faut donc regarder  $de^{\text{ad}(w)}(0)$ . D'après la proposition II.4.2, on a

$$e^{\text{ad}(w)} \cdot (tu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \left[ B^+(tu, w)_1^{-1} n_{e^{\text{ad}(w)}}(tu) - \begin{pmatrix} \psi_k(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_{k-1}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Mais, par définition,  $n_{e^{\text{ad}(w)}}(tu) = \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+}(e^{-\text{ad}(tu)} e^{-\text{ad}(w)} E)$ , donc en développant en série entière, on obtient :

$$\begin{aligned} n_{e^{\text{ad}(w)}}(tu) &= \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} \left( \sum_{m=0}^{2k} \frac{(-1)^m}{m!} t^m (\text{ad}(u))^m \left( \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{n!} (\text{ad}(w))^n E \right) \right) \\ &= \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} \left( \sum_{m=0}^{2k} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} t^m (\text{ad}(u))^m (\text{ad}(w))^n E \right) \\ &= \sum_{m=0}^{2k} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} t^m \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} ((\text{ad}(u))^m (\text{ad}(w))^n E) \\ &= \sum_{m=1}^{2k} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} t^m \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} ((\text{ad}(u))^m (\text{ad}(w))^n E) \end{aligned}$$

car  $u \in \mathfrak{n}_1^+$  et  $w \in \mathfrak{n}_1^-$  donc  $e^{\text{ad}(w)} E \in \mathfrak{n}_0^-$ . Donc

$$\begin{aligned} \frac{n_{e^{\text{ad}(w)}}(tu)}{t} &\xrightarrow{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (\text{ad}(u) (\text{ad}(w))^n E) \\ &= \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} \left( \text{ad}(u) \left( - \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{n!} (\text{ad}(w))^n E \right) \right) \\ &= \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} ([e^{-\text{ad}(w)} E, u]) \end{aligned}$$

Il reste à présent à s'intéresser au terme  $\begin{pmatrix} \psi_k(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_{k-1}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . On va

montrer par récurrence que pour tout  $j$ ,

$$\frac{\psi_j(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_{j-1})}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Plus précisément, montrons que pour tout  $j \geq 3$ , il existe  $X_j \in \mathfrak{g}_j$  tel que

$$\psi_j(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_{j-1}) = t^{j-1} X_j.$$



Par définition, on a

$$\Delta(tu, w)_1 = t \sum_{j=1}^k \sum_{m=0}^{2k-1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{m+n+1}}{(m+1)!n!} t^m d_{e^{\text{ad}(w)}}(tu)_{1,j}^{-1} ((\text{ad}(u))^{m+1} (\text{ad}(w))^n E)_j, \text{ et}$$

$$\Delta(tu, w)_2 = \frac{1}{2} t \sum_{j=1}^k \sum_{m=0}^{2k-1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{m+n+1}}{(m+1)!n!} t^m d_{e^{\text{ad}(w)}}(tu)_{2,j}^{-1} ((\text{ad}(u))^{m+1} (\text{ad}(w))^n E)_j.$$

Donc  $\psi_3(\Delta(tu, w)_1, \Delta(tu, w)_2) = t^2 X_3$  avec  $X_3 \in \mathfrak{g}_3$ . Donc en particulier,

$$\frac{\psi_3(\Delta(tu, w)_1, \Delta(tu, w)_2)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

On suppose à présent que  $\psi_i(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_{i-1}) = t^{i-1} X_i$ , avec  $X_i \in \mathfrak{g}_i$ . Alors

$$\begin{aligned} \Delta(tu, w)_i &= \frac{t}{i} \sum_{j=1}^k \sum_{m=0}^{2k-1} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{m+n+1}}{(m+1)!n!} t^m d_{e^{\text{ad}(w)}}(tu)_{i,j}^{-1} ((\text{ad}(u))^{m+1} (\text{ad}(w))^n E)_j \\ &\quad - \frac{1}{i} \psi_i(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_{i-1}) \\ &= t \left( \frac{1}{i} \sum \dots - \frac{t^{i-2}}{i} X_i \right). \end{aligned}$$

Donc il existe  $X_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$  tel que  $\psi_{i+1}(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_i) = t^i X_{i+1}$  d'où

$$\frac{\psi_{i+1}(\Delta(tu, w)_1, \dots, \Delta(tu, w)_i)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

En fait, on a montré que dans chaque terme  $\Delta(tu, w)_i$ , on pouvait mettre  $t$  en facteur et donc comme  $\psi_i$  est multi-linéaire, on peut mettre en facteur  $t^{i-1}$ . Donc finalement, on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{\text{ad}(w)} \cdot (tu)}{t} &\xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} B^+(0, w)_1^{-1} \left( \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} [e^{-\text{ad}(w)} E, u] \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{\text{ad}(w)} [e^{-\text{ad}(w)} E, u]) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} ([E, e^{\text{ad}(w)} u]) \\ &= \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{\text{ad}(w)} u) \\ &= (d_{e^{\text{ad}(w)}}(0))_1^{-1} u. \end{aligned}$$

Donc  $de^{\text{ad}(w)}(0) = (d_{e^{\text{ad}(w)}}(0))_1^{-1}$ . D'où finalement, on obtient

$$dg(x) = \Gamma^{(g \cdot x)} (d_h(0))_1^{-1} (d_{e^{\text{ad}(w)}}(0))_1^{-1} \Gamma^{-x}.$$

Par ailleurs, d'après la proposition II.4.1, on a  $d_g(x)_1 = d_{e^{\text{ad}(w)}}(0)_1 d_h(0)_1 (e^{-\text{ad}(g \cdot x)})_1$  donc  $d_g(x)_1^{-1} = (e^{\text{ad}(g \cdot x)})_1 d_h(0)_1^{-1} d_{e^{\text{ad}(w)}}(0)_1^{-1}$  et par suite

$$dg(x) = \Gamma^{g \cdot x} (e^{-\text{ad}(g \cdot x)})_1 d_g(x)^{-1} \Gamma^{-x} = \Gamma^{(-g \cdot x)} d_g(x)_1^{-1} \Gamma^{-x},$$

d'après la démonstration de la proposition II.4.1. □

Il faut remarquer que nous n'avons fixé de topologie ni sur  $G$  ni sur  $H$ . Donc notre preuve ne peut pas utiliser les arguments classiques pour montrer que le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé est une variété différentielle. En effet, si  $\mathfrak{g}$  est réelle ou complexe et de dimension finie, il suffit de montrer que  $P^-$  est fermé pour conclure que  $X^+$  est une variété différentielle. Mais dans le théorème précédent, on n'a fait aucune hypothèse sur la dimension de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathbb{K}$  est un anneau quelconque, pas seulement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Par ailleurs, on peut se demander s'il existe un groupe de Lie  $\overline{G} \supset G$  tel que  $X^+ = G/P^- = \overline{G}/\overline{P^-}$ . Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie Banach, on peut prendre  $\overline{G} = \text{Aut}(\mathfrak{g})$  mais qu'en est-il dans le cas général ?

Enfin, concernant les hypothèses (H2) et (H3), si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et si  $\mathfrak{n}_1^+$  et  $\mathfrak{n}_1^-$  sont des espaces de Banach, alors par la condition (H1), les opérateurs de Bergman généralisés  $B^+(x, w)_1$  et  $B^-(w, x)_1$  appartiennent à l'algèbre de Banach  $L(\mathfrak{n}_1^+)$  ou  $L(\mathfrak{n}_1^-)$ , des opérateurs linéaires continus sur  $\mathfrak{n}_1^+$  ou  $\mathfrak{n}_1^-$ , dans lesquelles l'inversion est continue et donc (H2) et (H3) sont automatiquement vérifiées [Upm85]. En effet, les algèbres de Banach sont un cas particuliers d'*algèbres à inverse continu*.

### IV.1.3 Fibrés différentiables

Dans le chapitre II, nous avons introduit différents "fibrés" sur  $X^+$  et  $X^-$ . Il est temps à présent de montrer que ce sont des fibrés différentiels pour la structure de variété différentielle définie sur  $X^+$  et  $X^-$ . Commençons tout d'abord par le fibré tangent :

**Théorème IV.1.2.**  *$TX^+$  défini comme dans la définition II.4.1 coïncide avec le fibré tangent de  $X^+$  muni de la structure différentielle définie dans le théorème IV.1.1.*

*Démonstration.*

On a vu que  $TX^+$  est défini par la représentation de  $P^-$  donnée par  $p \mapsto d_p(0)^{-1}$  et le fibré tangent au sens différentiel est, quant à lui, associé à la représentation d'isotropie de  $P^- : p \mapsto T_{o^+}p = dp(0)$ . Or d'après le théorème IV.1.1, on a  $dp(0) = d_p(0)_1^{-1}$ . Les deux représentations coïncident et donc  $TX^+$  est bien le fibré tangent de  $X^+$  au sens différentiel.  $\square$

Si on s'intéresse aux autres fibrés  $T^{(i)}X^+$  ou  $T'^{(i)}X^+$ , on a le résultat suivant :

**Théorème IV.1.3.** *Les espaces  $T^{(i)}X^+$  et  $T'^{(i)}X^+$  sont des fibrés différentiels sur  $X^+$ . Ce sont en outre des fibrés vectoriels.*

*Démonstration.*

On a vu que les  $T^{(i)}X^+$  sont définis par les cocycles  $d_p(0)_i^{-1}$  et les  $T'^{(i)}X^+$  par les  $c_p(0)_i$ . Or ces cocycles sont lisses d'après la proposition IV.1.1 donc les  $T^{(i)}X^+$  et  $T'^{(i)}X^+$  sont bien des fibrés différentiels sur  $X^+$ .  $\square$

Nous avons de manière évidente des résultats analogues en remplaçant  $X^+$  par  $X^-$ . Ensuite, nous avons considéré des sections de ces différents fibrés, les applications  $\tilde{Y}^{(i)}$

introduites dans la définition II.4.2. Dans une carte, ces champs sont donnés par

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}^{+(i)} : \mathfrak{n}_1^+ &\rightarrow \mathfrak{n}_i^+, \\ x &\mapsto \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (e^{-\text{ad}(x)}Y) \end{aligned}$$

qui sont polynomiales et continues d'après l'hypothèse (H1). Ainsi

**Théorème IV.1.4.** *Pour  $Y \in \mathfrak{g}$ , les applications  $\widetilde{Y}^{(i)} : X^+ \rightarrow T^{(i)}X^+$  sont des sections lisses de  $T^{(i)}X^+$ .*

On a bien entendu un résultat analogue en remplaçant  $X^+$  par  $X^-$ .

Dans la partie II.4.2, nous avons également introduit le noyau canonique, et vu qu'on pouvait le considérer sur  $X^+ \times X^-$ . Alors dans ce cas, on a le résultat suivant :

**Théorème IV.1.5.** *Le noyau canonique  $K^{(i)} : X^+ \times X^- \rightarrow \text{Hom}^{(i)}(T'X^+, TX^-)$  est lisse.*

*Démonstration.*

Le noyau canonique est donné par

$$\begin{aligned} K^{(i)} : X^+ \times X^- &\rightarrow \text{End}(\mathfrak{n}_i^+), \\ (go^+, g'o^-) &\mapsto Y \mapsto \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (g^{-1}g'Y) \end{aligned}$$

Comme on n'a pas fixé de topologie sur  $\text{End}(\mathfrak{n}_i^+)$ , on considère

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{(i)} : X^+ \times X^- \times \mathfrak{n}_i^+ &\rightarrow \mathfrak{n}_i^+, \\ (go^+, g'o^-, Y) &\mapsto \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (g^{-1}g'Y) \end{aligned}$$

qui dans une carte est donnée par l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{+(i)} : \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_i^+ &\rightarrow \mathfrak{n}_i^+, \\ (x, y, Y) &\mapsto \text{pr}_{\mathfrak{n}_i^+} (e^{-\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(y)}Y) \end{aligned}$$

$\widetilde{K}^{+(i)}$  est polynomiale et continue par l'hypothèse (H1) donc de classe  $C^\infty$  et par suite le noyau canonique est lisse.  $\square$

Dans la partie suivante, nous allons considérer d'autres espaces homogènes, définis grâce à des sous-groupes de  $U^+$  et  $U^-$  et adapter la démonstration du théorème IV.1.1 pour construire une structure de variété sur ces nouveaux espaces.

## IV.2 Construction d'une structure de variété sur $X_j^+$

De manière plus générale, on peut considérer d'autres espaces homogènes  $X_j^\pm$ , définis de manière analogue à  $X^+$  et  $X^-$ . En effet, pour tout  $j \geq 2$ , le  $j^{\text{ième}}$  espace de  $\mathfrak{n}^+ : \mathfrak{n}_j^+ = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_j$  est une sous-algèbre de Lie nilpotente de  $\mathfrak{g}$ . On peut donc définir :

$$U_j^+ := \{e^{\text{ad}(x)}, x \in \mathfrak{n}_j^+\} \text{ et } P_j^+ := HU_j^+ = U_j^+H.$$

Comme précédemment, les éléments de  $H$  normalisent  $U_j^+$  donc  $P_j^+$  est un sous-groupe de  $G$ . On pose également  $P_{k+1}^+ := H$ . On définit de manière analogue des sous-groupes  $U_j^-$  et  $P_j^-$ . Alors  $P_{j+1}^\pm \subset P_j^\pm$  et on pose  $X_j^\pm := G/P_j^\pm$ , de sorte qu'on a

$$\begin{array}{ccc}
& X_{k+1}^+ = G/H = X_{k+1}^- & \\
& \swarrow p_k^+ & \searrow p_k^- \\
X_k^+ & & X_k^- \\
\downarrow p_{k-1}^+ & & \downarrow p_{k-1}^- \\
\vdots & & \vdots \\
\downarrow p_2^+ & & \downarrow p_2^- \\
X_2^+ & & X_2^- \\
\downarrow p_1^+ & & \downarrow p_1^- \\
X^+ = X_1^+ & & X^- = X_1^-
\end{array}$$

où  $p_i^\pm$  est la projection de  $X_{i+1}^\pm$  sur  $X_i^\pm$  donnée par  $p_i^\pm : gP_{i+1}^\pm \mapsto gP_i^\pm$ . On se souvient qu'on avait  $P^+ \cap P^- = H$ ; plus généralement, on a de même  $P_j^+ \cap P_j^- = H$ .

Soit  $2 \leq j \leq k+1$ . Le but de ce qui suit est, comme pour  $X^+$ , de construire une structure de variété différentielle sur  $X_j^+$ , mais cette fois modelée sur

$$\mathfrak{m}_j^+ := \mathfrak{n}_1^+ \times (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-j+1}) = (\mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1) \times (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-j+1}).$$

Dans la suite, on notera  $\mathfrak{q}_j^- := \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-j+1}$ , de sorte que  $\mathfrak{m}_j^+ = \mathfrak{n}_1^+ \oplus \mathfrak{q}_j^-$ . La première étape est de montrer qu'on peut considérer  $\mathfrak{m}_j^+$  comme un sous-ensemble de  $X_j^+$ .

**Proposition IV.2.1.** *L'application  $\mathfrak{m}_j^+ \rightarrow X_j^+$  est injective.*  
 $(x, w) \mapsto e^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(w)}P_j^-$

*Démonstration.*

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathfrak{n}_1^+$ ,  $(w_1, w_2) \in \mathfrak{q}_j^-$  tels que  $e^{\text{ad}(x_1)}e^{\text{ad}(w_1)}P_j^- = e^{\text{ad}(x_2)}e^{\text{ad}(w_2)}P_j^-$ . En particulier, on a  $e^{\text{ad}(x_1)}P^- = e^{\text{ad}(x_2)}P^-$  et donc comme  $\mathfrak{n}_1^+$  s'injecte dans  $X^+$  d'après le théorème II.3.2, on a  $x_1 = x_2 =: x$ . On a alors  $e^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(w_1)}P_j^- = e^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(w_2)}P_j^-$  donc  $e^{\text{ad}(-w_2)}e^{\text{ad}(w_1)} \in P_j^-$ . Or  $w_1$  et  $w_2$  sont des éléments de  $\mathfrak{q}_j^-$  et donc nécessairement  $w_1 = w_2$ .  $\square$

Le point central pour construire la structure de variété est de comprendre l'action de  $e^{\text{ad}(y)}$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$ , si  $y \in \mathfrak{n}_1^-$ . Pour cela, soit  $(x, w) \in \mathfrak{m}_j^+$  et  $y \in \mathfrak{n}_1^-$  tel que  $e^{\text{ad}(y)} \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$ . On a  $e^{\text{ad}(y)} \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$  i.e il existe  $p^- = e^{\text{ad}(t)}h \in P^-$  tel que  $e^{\text{ad}(y)}e^{\text{ad}(x)} = e^{\text{ad}(z)}p^-$  avec  $t \in \mathfrak{n}_1^-$ ,  $h \in H$  et  $z := e^{\text{ad}(y)} \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ .

On a donc  $e^{\text{ad}(y)} \cdot (x, w) = e^{\text{ad}(z)}p^-e^{\text{ad}(w)}P_j^- = e^{\text{ad}(z)}e^{\text{ad}(t)}e^{\text{ad}(hw)}P_j^-$ .

On a alors besoin du lemme suivant pour expliciter  $e^{\text{ad}(z)}e^{\text{ad}(t)}e^{\text{ad}(hw)}P_j^-$ .

**Lemme IV.2.1.** *Soit  $X \in \mathfrak{n}_1^-$ . Pour tout  $n \in \{1, \dots, k+1-j\}$ , il existe  $Z^n \in \mathfrak{n}_j^-$  tel que*

$$X^{\mathfrak{q}} * Z^n = X + R^{j+n}, \text{ avec } R^{j+n} \in \mathfrak{n}_{n+j}^- \text{ et } X^{\mathfrak{q}} \text{ est la projection sur } \mathfrak{q}_j^- \text{ de } X.$$

*Pour  $n = k+1-j$ , on a  $R^{j+n} \in \mathfrak{n}_{k+1}^- = 0$  et alors  $X^{\mathfrak{q}} * Z^n = X$  i.e  $e^{\text{ad}(X)} = e^{\text{ad}(X^{\mathfrak{q}})}e^{\text{ad}(Z^n)}$*

*Démonstration.*

On écrit  $X = \sum_{i=-1}^{-k} X_i$ , avec  $X_i \in \mathfrak{g}_i$ , si bien que  $X^{\mathfrak{q}} = \sum_{i=-1}^{-j+1} X_i$ . On pose

$$Z^1 := \sum_{i=-j}^{-k} X_i \in \mathfrak{n}_j^-.$$

Alors, on a  $X^{\mathfrak{q}} * Z^1 = X^{\mathfrak{q}} + Z^1 + R^{j+1} = X + R^{j+1}$ . Le premier terme dans  $R^{j+1}$  est  $\frac{1}{2} [X^{\mathfrak{q}}, Z^1] \in \mathfrak{n}_{j+1}^-$  donc  $R^{j+1} \in \mathfrak{n}_{j+1}^-$ .

Soit  $n \in \{1, k-j\}$  tel qu'il existe  $Z^n \in \mathfrak{n}_j^-$  avec  $X^{\mathfrak{q}} * Z^n = X + R^{j+n}$  et  $R^{j+n} \in \mathfrak{n}_{j+n}^-$ .

Alors on peut écrire  $R^{j+n} = \sum_{i=-j-n}^{-k} R_i^{j+n}$  et on pose

$$Z^{n+1} := Z^n - R_{-j-n}^{j+n} \in \mathfrak{n}_j^-.$$

D'où  $X^{\mathfrak{q}} * Z^{n+1} = X^{\mathfrak{q}} * Z^n - R_{-j-n}^{j+n} + \tilde{R}^{j+n+1}$ . Le premier terme de  $\tilde{R}^{j+n+1}$  est  $-\frac{1}{2} [X^{\mathfrak{q}}, R_{-j-n}^{j+1}]$  donc  $\tilde{R}^{j+n+1} \in \mathfrak{n}_{j+n+1}^-$  et alors

$$X^{\mathfrak{q}} * Z^{n+1} = X + R^{j+n} - R_{-j-n}^{j+n} + \tilde{R}^{j+n+1} = X + \underbrace{\sum_{i=-j-n-1}^{-k} R_i^{j+n} + \tilde{R}^{j+n+1}}_{R^{j+n+1}}.$$

Donc  $R^{j+n+1} \in \mathfrak{n}_{j+n+1}^-$ , l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang  $n+1$  et finalement, il existe  $Z := Z^{k+1-j} \in \mathfrak{n}_j^-$  tel que  $X^{\mathfrak{q}} * Z = X$ .  $\square$

En particulier, comme  $e^{\text{ad}(t)} e^{\text{ad}(w)} = e^{t*w}$ , on pose  $X := t*w \in \mathfrak{n}_1^-$  et  $X^{\mathfrak{q}}$  la projection de  $X$  sur  $\mathfrak{q}_j^-$ . Alors d'après le lemme précédent, il existe  $Z \in \mathfrak{n}_j^-$  tel que  $X^{\mathfrak{q}} * Z = X = t*w$  i.e  $e^{\text{ad}(t)} e^{\text{ad}(w)} = e^{\text{ad}(X)} = e^{\text{ad}(X^{\mathfrak{q}})} \underbrace{e^{\text{ad}(Z)}}_{\in P_j^-}$ . On peut alors énoncer la proposition suivante,

analogue de la proposition IV.1.1

**Proposition IV.2.2.** *L'application*  $(\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^{\times} \times \mathfrak{q}_j^- \rightarrow \mathfrak{m}_j^+$  *est de classe*  
 $((x, y), w) \mapsto e^{\text{ad}(y)} \cdot (x, w)$   
 $C^\infty$ .

*Démonstration.*

Soit  $(x, w) \in \mathfrak{m}_j^+$  et  $y \in \mathfrak{n}_1^-$  tel que  $e^{\text{ad}(y)} \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+$ . On a vu que dans ce cas, il existe  $t \in \mathfrak{n}_1^-, h \in H$  tels que  $e^{\text{ad}(y)} \cdot (x, w) = e^{\text{ad}(z)} e^{\text{ad}(t)} e^{\text{ad}(hw)} P_j^-$ . Donc par le lemme IV.2.1,  $e^{\text{ad}(y)} \cdot (x, w) = e^{\text{ad}(z)} e^{\text{ad}(t*(hw)^{\mathfrak{q}})} P_j^- = (z, t * (hw)^{\mathfrak{q}})$ . D'après la proposition IV.1.1,  $(x, y) \mapsto z$  est de classe  $C^\infty$ . En outre,  $(t, w) \mapsto t * w$  est polynomiale et continue donc de classe  $C^\infty$  par l'hypothèse (H1). Donc il reste à montrer que l'application  $((x, y), w) \mapsto (t, hw)$  est de classe  $C^\infty$ .

On a  $e^{\text{ad}(-z)} e^{\text{ad}(y)} e^{\text{ad}(x)} = e^{\text{ad}(t)} h$  donc en particulier  $e^{\text{ad}(-z)} e^{\text{ad}(y)} e^{\text{ad}(x)} E = e^{\text{ad}(t)} h E$ . Or

pour tout  $x \in \mathfrak{g}_n$ , on a  $nhx = h[E, x] = [hE, hx]$  donc  $hE$  est un opérateur d'Euler de la dérivation caractéristique associée à la graduation de  $\mathfrak{g}$ . Donc, on a

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_1^-}(e^{\mathrm{ad}(-z)}e^{\mathrm{ad}(y)}e^{\mathrm{ad}(x)}E) = e^{\mathrm{ad}(t)}hE - hE = - \sum_{i=-1}^{-k} it_i + \psi_i(t_{-1}, \dots, t_{i-1})$$

en utilisant les mêmes notations que pour la proposition IV.1.1. Le membre de gauche est une fonction de classe  $C^\infty$  par la proposition IV.1.1 donc par un raisonnement analogue à celui de la proposition IV.1.1, l'application  $(x, y) \mapsto t$  est de classe  $C^\infty$ .

Ensuite,  $hw = e^{-\mathrm{ad}(t)}e^{-\mathrm{ad}(z)}e^{\mathrm{ad}(y)}e^{\mathrm{ad}(x)}w$  donc d'après ce qui précède, l'application qui à  $((x, y), w)$  associe le membre de droite est de classe  $C^\infty$  car polynomiale et continue en  $(x, y, z, t, w)$  et donc l'application  $((x, y), w) \mapsto hw$  est de classe  $C^\infty$ . Donc finalement, l'application

$$\begin{aligned} (\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^\times \times \mathfrak{q}_j^- &\rightarrow \mathfrak{m}_j^+ && \text{est de classe } C^\infty. \\ ((x, y), w) &\mapsto e^{\mathrm{ad}(y)} \cdot (x, w) \end{aligned}$$

□

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour construire la structure de variété différentielle sur  $X_j^+$ .

**Théorème IV.2.1** (Structure de variété différentielle sur  $X_j^+$ ).

*Il existe sur  $X_j^+$  une structure de variété différentielle modelée sur  $\mathfrak{m}_j^+$ , définie par le fait que  $\mathcal{A}_j = \{(g(\mathfrak{m}_j^+), \varphi_g^j), g \in G\}$  est un atlas de  $X_j^+$ , où*

$$\varphi_g^j : g(\mathfrak{m}_j^+) \rightarrow \mathfrak{m}_j^+, g \cdot (x, w) \mapsto (x, w), \text{ pour } g \in G.$$

*Démonstration.*

La démonstration est assez semblable à celle pour  $X^+$ . En effet,  $X_j^+$  est recouvert par  $\{g(\mathfrak{m}_j^+), g \in G\}$  et pour  $g \in G$ , on considère

$$\varphi_g^j : g(\mathfrak{m}_j^+) \rightarrow \mathfrak{m}_j^+, g \cdot (x, w) \mapsto (x, w).$$

On munit alors  $X_j^+$  de la topologie finale pour les applications

$$\Psi_g^j : \mathfrak{m}_j^+ \rightarrow X_j^+, (x, w) \mapsto g \cdot (x, w) = ge^{\mathrm{ad}(x)}e^{\mathrm{ad}(w)}P_j^-$$

i.e  $\mathcal{O} \subset X_j^+$  est un ouvert si et seulement si pour tout  $g \in G$ ,  $(\Psi_g^j)^{-1}(\mathcal{O})$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$ , c'est-à-dire  $g^{-1}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{m}_j^+$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$  pour tout  $g \in G$ . Par définition de la topologie, les applications  $\Psi_g^j$  sont continues et donc  $G$  agit par homéomorphismes sur  $X_j^+$ .

L'étape suivante, comme dans le cas de  $X^+$ , est de montrer que la topologie induite sur  $\mathfrak{m}_j^+$  par celle de  $X_j^+$  est en fait la topologie de départ de  $\mathfrak{m}_j^+$ . Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $X_j^+$ , alors  $\mathcal{O} \subset \mathfrak{m}_j^+$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$  pour la topologie de départ.

Réciproquement, si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$ , il suffit de montrer que pour tout  $g \in G$ ,  $g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{m}_j^+$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$ ; le point important ici est la proposition IV.2.2 (comme dans le cas de  $X^+$ , la propriété clé était la proposition IV.1.1.) Si  $g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{m}_j^+ = \emptyset$ , alors le

résultat est vrai. Sinon, soit  $(x, w) \in g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{m}_j^+$ . Alors,  $ge^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(w)}P_j^- \in \mathcal{U} \subset \mathfrak{m}_j^+$ , donc en particulier,  $ge^{\text{ad}(x)}o^+ \in \mathfrak{n}_1^+$ ; donc quitte à remplacer  $g$  par  $ge^{\text{ad}(x)}$ , on peut supposer que  $x = 0$ . Alors  $g \in \Omega^+$  et donc d'après le point iv) du théorème II.3.2,  $g = e^{\text{ad}(v)}he^{\text{ad}(y)}$ , avec  $v \in \mathfrak{n}_1^+$ ,  $h \in H$  et  $y \in \mathfrak{n}_1^-$ . Or

$$e^{\text{ad}(v)} \cdot (x, w) = e^{\text{ad}(v)}e^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(w)}P_j^- = e^{\text{ad}(v*x)}e^{\text{ad}(w)}P_j^- = (v * x, w) \in \mathfrak{m}_j^+$$

donc l'action de  $e^{\text{ad}(v)}$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$  est de classe  $C^\infty$  donc en particulier continue et par suite  $e^{-\text{ad}(v)}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$ .

Ensuite  $h \cdot (x, w) = he^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(w)}P_j^- = e^{\text{ad}(hx)}he^{\text{ad}(w)}P_j^- = e^{\text{ad}(hx)}e^{\text{ad}(hw)}P_j^-$ . Donc

$$h \cdot (x, w) = (hx, hw) = (d_{h^{-1}}(0)_1x, c_h(0)_1w) \in \mathfrak{m}_j^+.$$

Or par la proposition IV.1.2, l'action de  $d_g(z)_1$  est continue sur  $\mathfrak{n}_1^+$  pour tout  $g \in G$  et  $z \in \mathfrak{n}_1^+$  et de manière duale, l'action de  $c_g(u)_1$  sur  $\mathfrak{n}_1^-$  est aussi continue donc finalement, l'action de  $h$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$  est continue et donc  $h^{-1}e^{-\text{ad}(v)}(\mathcal{U})$  est un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$ . Enfin, on a vu dans la proposition IV.2.2 que l'action de  $e^{\text{ad}(y)}$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$  est de classe  $C^\infty$  donc finalement  $g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathfrak{m}_j^+$  est bien un ouvert de  $\mathfrak{m}_j^+$  pour tout  $g \in G$  i.e  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $X_j^+$ . Donc la topologie induite par celle de  $X_j^+$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$  est la topologie de départ de  $\mathfrak{m}_j^+$ . En particulier,  $\mathfrak{m}_j^+$  est un ouvert de  $X_j^+$ .

Enfin, montrons que les changements de cartes sont de classe  $C^\infty$ . D'abord, par définition de la topologie de  $X_j^+$ , les cartes sont des homéomorphismes. Soit  $g_1, g_2 \in G$ . On pose

$$\Psi_{g_1, g_2}^j := (\Psi_{g_2}^j)^{-1} \circ \Psi_{g_1}^j : (\Psi_{g_1}^j)^{-1} (\Psi_{g_2}^j(\mathfrak{m}_j^+)) \cap \mathfrak{m}_j^+ \rightarrow (\Psi_{g_2}^j)^{-1} (\Psi_{g_1}^j(\mathfrak{m}_j^+)) \cap \mathfrak{m}_j^+$$

et on suppose que  $\Psi_{g_1}^j(\mathfrak{m}_j^+) \cap \Psi_{g_2}^j(\mathfrak{m}_j^+) \neq \emptyset$ . On pose alors  $g := g_2^{-1} \circ g_1$  et on considère  $(x, w) \in (\Psi_{g_1}^j)^{-1} (\Psi_{g_2}^j(\mathfrak{m}_j^+))$ ; comme précédemment, on peut supposer  $x = 0$  et alors, on écrit  $g = e^{\text{ad}(v)}he^{\text{ad}(y)}$  avec  $v \in \mathfrak{n}_1^+$ ,  $h \in H$  et  $y \in \mathfrak{n}_1^-$ . Or on a vu que  $e^{\text{ad}(v)}$  et  $e^{\text{ad}(y)}$  agissent de manière  $C^\infty$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$  et  $h$  agit par  $(d_{h^{-1}}(0)_1, c_h(0)_1)$  sur  $\mathfrak{m}_j^+$  donc également de manière lisse. Donc  $\Psi_{g_1, g_2}^j$  est bien de classe  $C^\infty$ .

Donc pour tout  $j$ ,  $X_j^+$  (et de manière duale  $X_j^-$ ) possède une structure de variété différentielle modelée sur  $\mathfrak{m}_j^+$ . Il reste alors à montrer que  $p_j : X_{j+1}^+ \rightarrow X_j^+$  est une submersion. Mais grâce au lemme IV.2.1, dans une carte,  $p_j^+$  s'écrit comme la projection

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{j+1}^+ = \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{q}_{j+1}^- &\rightarrow \mathfrak{m}_j^+ = \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{q}_j^- \\ (x, y_{-1} + \cdots + y_{-j}) &\mapsto (x, y_{-1} + \cdots + y_{-j+1}) \end{aligned} .$$

Donc pour tout  $j$ , l'application  $p_j^+$  est bien une submersion.  $\square$





# Conclusion

Nous allons présenter ici quelques problèmes ouverts liés à cette thèse.

**Une approche axiomatique des géométries de drapeaux généralisées.** Une axiomatique des géométries projectives généralisées (i.e dans le cadre des 3-graduations) a été développée dans [Ber02b]. On peut se demander si on peut faire de même dans le cas des  $(2k+1)$ -graduations, avec  $k > 1$ . Voici quelques structures qui pourraient nous permettre de définir une telle axiomatique. Si on considère  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée,  $(X^+, X^-, \top)$  sa géométrie de drapeaux généralisée, et si on fixe  $a \in X^+$  et  $y \in a^\top$ , alors pour tout  $(x, z) \in a^\top$ , on peut écrire

$$x = e^{\text{ad}(u)}y \text{ et } z = e^{\text{ad}(v)}y, \text{ avec } (u, v) \in a_1$$

car d'après le théorème II.3.1,  $e^{\text{ad}(a_1)}$  agit simplement transitivement sur  $a^\top$ . On peut donc poser

$$x \cdot_y z := e^{\text{ad}(u)}e^{\text{ad}(v)}y = e^{\text{ad}(u*v)}y \in a^\top,$$

où  $u*v$  est donné par la formule de Campbell-Hausdorff. Alors ce produit munit  $a^\top$  d'une structure de groupe de neutre  $y$ . On obtient donc une application

$$\begin{aligned} a^\top \times a^\top \times a^\top &\rightarrow a^\top. \\ (x, y, z) &\mapsto (xyz)_a := x \cdot_y z \end{aligned}$$

Cette application vérifie pour tout  $(x, y, z, u, v) \in a^\top$ ,

$$(G1) \quad (xy(zuv)_a)_a = ((xyz)_a uv)_a,$$

$$(G2) \quad (xxy)_a = y = (yxx)_a.$$

Autrement dit,  $a^\top$  possède une structure d'*espace homogène principal* ou *torseur* [Cer43], [Sch79] ou [BK09a]. Donc finalement, on a une application

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad \mathcal{D} &\rightarrow X^-, \\ (a, x, y, z) &\mapsto (xyz)_a \end{aligned}$$

où  $\mathcal{D} := \{(a, x, y, z), a \in X^+, (x, y, z) \in a^\top\} \subset X^+ \times X^- \times X^- \times X^-$ . On peut se demander s'il est possible de prolonger  $\Sigma$  à  $\mathcal{F}^4$  tout entier et caractériser la géométrie de drapeaux généralisée  $(X^+, X^-, \top)$  grâce aux propriétés de  $\Sigma$ . Ceci nous permettrait de définir de manière plus axiomatique ce qu'est une telle géométrie, sans qu'il n'y ait une algèbre de Lie graduée associée. On peut citer les travaux de W. Bertram et M. Kinyon [BK09a] et [BK09b], où ils donnent la définition d'une *géométrie associative*, qui correspond à une géométrie de drapeaux généralisée de type 1-gradué, autrement dit une géométrie projective généralisée, associée à une algèbre de Lie 3-graduée, de type  $A_n, B_n, C_n$  ou

$D_n$ .

Une définition axiomatique d'une géométrie de drapeaux généralisée permettrait d'avoir une approche catégorielle de ces objets et il serait alors légitime de se demander si on a une équivalence de catégories entre les géométries de drapeaux généralisées de type  $k$ -gradué et l'objet infinitésimal associé.

**Objet infinitésimal ou tangent d'une géométrie de drapeaux généralisée.** Ce problème est la version "infinitésimal" de la question précédente. On sait que dans le cas 3-gradué, les géométries projectives généralisées sont essentiellement en bijection avec les paires de Jordan. Mais quel sera l'objet correspondant dans le cas des graduations plus longues? Dans le cas général d'une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$ , on obtient une géométrie de drapeaux généralisée de type  $k$ -gradué et si  $o^-$  et  $o^+$  sont les filtrations positive et négative associée à la graduation de  $\mathfrak{g}$ ,  $(T_{o^-}X^-, T_{o^+}X^+)$  va posséder une structure de ce qu'on pourrait appeler, par exemple, une *paire de Jordan généralisée de type  $k$ -gradué*. Mais la définition axiomatique d'un tel objet n'est pas si claire. Dans le chapitre IV, nous avons introduits dans l'hypothèse (H1) plusieurs applications  $R_{i,j}^\pm$ ,  $F_{m,n}^\pm$  et  $T_{p,q,r}^\pm$ , mais nous ne nous sommes pas intéressés aux différentes propriétés qu'elles peuvent avoir. Par exemple,  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  possède une structure de paire de Jordan généralisée (de type  $k$ ) donc  $T_{1,1,1}^\pm$  vérifient (PJ2), qui traduit l'identité de Jacobi mais aussi d'autres identités plus difficiles à déterminer. Ensuite  $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_{-k})$  possède une structure de paire de Jordan; de même que les paires  $(\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_{-j})$  lorsque  $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{2j} = 0$ , autrement dit pour  $2j > k$ . En revanche, les structures des autres paires, "au milieu", sont plus difficiles à déterminer. Par exemple, dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée,  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  possède une structure de paire de Freudenthal-Kantor et  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_{-2})$  est une paire de Jordan. De même, si  $\mathfrak{g}$  est 7-graduée, alors  $(\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_{-3})$  et  $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_{-2})$  sont des paires de Jordan et  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$  est une paire de Jordan généralisée de type 3 donc  $T_{1,1,1}^\pm$  vérifient une propriété analogue de (PJ1) pour les paires de Jordan ou (PFK1) pour les paires de Freudenthal-Kantor, et qui caractérise le fait que  $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1] \neq 0$  mais  $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 0$ . Par ailleurs, il faut aussi s'intéresser aux propriétés qui peuvent lier les différents opérateurs  $R^\pm$ ,  $F^\pm$  et  $T^\pm$  entre eux.

Une fois posée la définition d'un tel objet, on pourra se demander si on a une équivalence de catégories entre les géométries de drapeaux généralisées de type  $k$ -gradué et les paires de Jordan généralisées de type  $k$ -gradué. Autrement dit, la question est de savoir si une géométrie de drapeaux généralisée est caractérisée par sa paire de Jordan généralisée de type  $k$ -gradué associée.

**Lien avec les structures de (multi-)contact de [CDMKR05].** La différence fondamentale entre le cas 3-gradué et le cas des graduations plus longues réside dans le fait que, dans le cas général,  $\mathfrak{n}_1^+$  et  $\mathfrak{n}_1^-$  ne sont plus abéliennes. Ceci se traduit d'une part, par la non-commutativité des groupes  $U^+$  et  $U^-$  (qui sont les noyaux des représentations d'isotropie linéaire de  $G$  sur  $X^+$  et  $X^-$ ), et d'autre part, par l'existence d'une *structure (multi-)contact invariante* sur  $X^\pm$  (voir [CDMKR05] pour le cas semi-simple réel de dimension finie). Considérons  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée ainsi que sa géométrie de drapeaux généralisée associée  $(X^+, X^-, \top)$ . Par définition,  $T_{o^+}X^+ \cong \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_1^+$ . En outre,  $\mathfrak{n}_1^+$  est filtré par

$$0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_1^+$$

et cette filtration de  $\mathfrak{n}_1^+$  est invariante sous l'action de  $P^-$  i.e invariante sous l'action du stabilisateur de  $o^+$ . On peut donc identifier chaque sous-espace  $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_i$  avec un sous-espace  $\mathfrak{f}_{i,o^+}$  de  $T_{o^+}X^+$ . On obtient donc une filtration de  $T_{o^+}X^+$  qui se prolonge en une distribution  $G$ -invariante sur  $X^+$ . Autrement dit, par l'action de  $G$ , on peut identifier tous les  $T_{go^+}X^+$ , pour  $go^+ \in X^+$ , avec  $\mathfrak{n}_1^+$  et donc pour chaque point  $go^+ \in X^+$ ,  $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_i$  s'identifie avec un sous-espace  $\mathfrak{f}_{i,go^+}$  de  $T_{go^+}X^+$ . On obtient ainsi une filtration de  $T_{go^+}X^+$ . Autrement dit, on a une filtration de distributions sur  $X^+$  (et de même sur  $X^-$ , où  $T_{o^-}X^- \cong \mathfrak{n}_1^-$ ) i.e  $X^+$  (et donc  $X^-$ ) est muni d'une *structure contact généralisée* [CDMKR05]. Il est alors naturel de considérer les applications qui préservent cette structure, appelées *applications contact* et ensuite de se demander si on a un analogue du théorème de Liouville dans ce cas très général; à savoir qu'une application contact  $f$ , de classe  $C^2$  d'un ouvert  $U \subset X^\pm$  dans son image  $f(U) \subset X^\pm$  est la restriction à  $U$  de l'action d'un élément  $g \in G$  sur  $X^\pm$ . M. Cowling, F. De Mari, A. Korányi et H. M. Reimann ont montré dans [CDMKR05] un tel résultat dans le cas où un groupe de Lie  $G$  semi-simple réel et de dimension finie agit sur l'espace quotient  $G/P$ , où  $P$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ . Mais qu'en est-il dans le cas général?



# Annexe A

## Construction de Chevalley

On a déjà dit qu'à un groupe de Lie, on associe une algèbre de Lie. Mais qu'en est-il de la réciproque ? A une algèbre de Lie quelconque, peut-on associer un groupe "de Lie" ? C'est le troisième théorème de Lie qui répond à cette question pour une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie. Dans ce cas, il existe un unique groupe de Lie connexe et simplement connexe, à isomorphisme près, dont l'algèbre de Lie associée est celle de départ. Dans le cas où l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est réelle ou complexe et semi-simple, il suffit de considérer le groupes des automorphismes de  $\mathfrak{g}$ , noté  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ . En effet, dans ce cas, l'algèbre de Lie de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  est  $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ . Nous allons voir dans la suite comment on construit certains sous-groupes de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  lorsque  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple et de dimension finie, à l'aide des systèmes de racines dont il a été question précédemment. Nous allons présenter la *construction de Chevalley*, qui utilise des bases particulières de  $\mathfrak{g}$ , appelées *bases de Chevalley*, pour construire certains automorphismes de  $\mathfrak{g}$ . Cette construction permet d'élargir l'étude des algèbres de Lie à d'autres corps que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  [Car72], [Hum78], [Ste68].

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple sur  $\mathbb{C}$  et de dimension finie,  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan et  $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$  le système de racines associé. Alors on a la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espaces radiciels :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Par la forme de Killing, notée  $B$ , on identifie  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}^*$ , de sorte que  $\Delta \subset \mathfrak{h}$ . Pour  $\alpha \in \Delta$ , on note

$$h_{\alpha} := \frac{2\alpha}{B(\alpha, \alpha)} \in \mathfrak{h},$$

appelée la *co-racine* correspondant à  $\alpha$ . Soit  $e_{\alpha}$  un élément non-nul de  $\mathfrak{g}^{\alpha}$ . Donc pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ , on a  $[h, e_{\alpha}] = \alpha(h)e_{\alpha}$ . On note également  $\Pi$  une base de  $\Delta$  et  $\Delta^+$  l'ensemble des racines positives pour l'ordre défini par  $\Pi$ . On suppose choisis les éléments  $e_{\alpha}$  pour  $\alpha \in \Delta^+$ . Alors il existe un unique  $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  tel que  $[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha}$ . Par suite, la famille  $\{h_{\alpha}, \alpha \in \Pi\} \cup \{e_{\alpha}, \alpha \in \Delta\}$  forme une base de  $\mathfrak{g}$ . On peut en fait choisir les  $e_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  de manière un peu plus précise, de sorte que

$$[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha} \quad \text{et} \quad [e_{\alpha}, e_{\beta}] = \pm N_{\alpha, \beta} e_{\alpha + \beta},$$

où  $N_{\alpha,\beta} = p + 1$  avec  $p$  le plus grand entier tel que  $\beta - p\alpha$  est une racine [Car72], [Ste68]. Dans ce cas, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [h_\alpha, h_\beta] &= 0, \\ [h_\alpha, e_\beta] &= \frac{2B(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \alpha)} e_\beta, \\ [e_\alpha, e_{-\alpha}] &= h_\alpha \\ \text{et } [e_\alpha, e_\beta] &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Delta \\ \pm N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition A.0.1.** Cette base de  $\mathfrak{g}$  est appelée une *base de Chevalley*.

Attardons nous quelques instants sur la question de l'unicité d'une telle base. Une algèbre de Lie simple de dimension finie possède plusieurs bases de Chevalley. Tout d'abord, chaque base de Chevalley est définie relativement à une sous-algèbre de Cartan. On rappelle que deux sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  sont conjuguées par un automorphisme de  $\mathfrak{g}$ . Si une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  est fixée, alors les espaces radiciels sont déterminés et la base de  $\mathfrak{h}$  dépend du choix d'un système fondamental  $\Pi$  du système de racines  $\Delta$  de  $\mathfrak{g}$ . Une fois fixée une base  $\Pi$  de  $\Delta$ , les éléments  $h_\alpha$  sont déterminés. Les différents systèmes fondamentaux de  $\Delta$  sont conjugués sous le groupe de Weyl de  $\Delta$ . Ensuite, une fois  $\Pi$  fixé, on peut choisir les éléments  $e_\beta$ ,  $\beta \in \Pi$  de manière arbitraire. Les autres  $e_\beta$ ,  $\beta \in \Delta^+ \setminus \Pi$  sont alors déterminés au signe près, par la relation  $[e_\alpha, e_\beta] = \pm(p+1)e_{\alpha+\beta}$ , puis la relation  $[e_\alpha, e_\beta] = h_\alpha$  détermine les  $e_\beta$ ,  $\beta \in \Delta^-$ .

Nous allons maintenant considérer des automorphismes particuliers de  $\mathfrak{g}$ . L'application  $\text{ad}(e_\alpha)$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$  qui est nilpotente. En effet, on a  $\text{ad}(e_\alpha)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^\alpha$  et  $\text{ad}(e_\alpha)\mathfrak{g}^\alpha = 0$  donc  $(\text{ad}(e_\alpha))^2\mathfrak{h} = 0$ . On a aussi  $\text{ad}(e_\alpha)\mathfrak{g}^{-\alpha} \subset \mathfrak{h}$  donc  $(\text{ad}(e_\alpha))^3\mathfrak{g}^{-\alpha} = 0$ . Enfin, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux racines linéairement indépendantes, comme  $\Delta$  est un ensemble fini, il existe un entier  $q$  maximal, tel que  $\beta + q\alpha \in \Delta$ . Donc  $(\text{ad}(e_\alpha))^{q+1}\mathfrak{g}^\beta = 0$  donc  $(\text{ad}(e_\alpha))^n = 0$  pour  $n$  suffisamment grand i.e  $\text{ad}(e_\alpha)$  est bien nilpotent. On peut donc considérer

$$e^{\text{ad}(e_\alpha)} := \sum_{n \geq 0} \frac{(\text{ad}(e_\alpha))^n}{n!} \in \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Comme on vient de le voir,  $\text{ad}(e_\alpha)$  est nilpotent donc la somme est en fait finie. Ensuite, pour  $\zeta \in \mathbb{C}$ , on note

$$x_\alpha(\zeta) := e^{\zeta \text{ad}(e_\alpha)}.$$

Alors on a les relations suivantes :

$$x_\alpha(\zeta)e_\alpha = e_\alpha, \quad x_\alpha(\zeta)e_{-\alpha} = e_{-\alpha} + \zeta h_\alpha - \zeta^2 e_\alpha \quad \text{et} \quad x_\alpha(\zeta)h_\alpha = h_\alpha - 2\zeta e_\alpha.$$

Par ailleurs, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux racines linéairement indépendantes, on a

$$x_\alpha(\zeta)h_\beta = h_\beta - 2\zeta \frac{B(\alpha, \beta)}{B(\beta, \beta)} e_\alpha \quad \text{et} \quad x_\alpha(\zeta)e_\beta = \sum_{n=0}^q M_{\alpha,\beta,n} \zeta^n e_{\beta+n\alpha}, \quad \text{où}$$

$$M_{\alpha,\beta,n} = \frac{1}{n!} N_{\alpha,\beta} N_{\alpha,\beta+\alpha} \cdots N_{\alpha,\beta+(n-1)\alpha}.$$

Mais on a supposé que  $N_{\alpha,\beta} = \pm(p+1)$ , donc

$$M_{\alpha,\beta,n} = \pm \frac{(p+1) \cdots (p+n)}{n!} = \pm \binom{p+n}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Donc  $x_\alpha(\zeta)$  transforme un élément de la base de Chevalley en une combinaison linéaire sur  $\mathbb{Z}$  des éléments de cette base ; les coefficients étant des monômes à coefficients entiers en  $\zeta$ . Cette propriété va nous permettre de définir de tels automorphismes d'une algèbre de Lie sur un autre corps que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{g}$  constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers de la base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ . Par construction,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  est stable par le crochet ; c'est donc une algèbre de Lie sur  $\mathbb{Z}$ . On considère alors un corps  $\mathbb{K}$  quelconque et on pose

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}.$$

Les éléments de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  s'écrivent alors

$$\sum_{\alpha \in \Pi} \lambda_\alpha (1 \otimes h_\alpha) + \sum_{\beta \in \Delta} \mu_\beta (1 \otimes e_\beta), \text{ avec } \lambda_\alpha, \mu_\beta \in \mathbb{K}.$$

Donc  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de base

$$\{\widetilde{h}_\alpha := 1 \otimes h_\alpha, \alpha \in \Pi\} \cup \{\widetilde{e}_\beta := 1 \otimes e_\beta, \beta \in \Delta\}.$$

On peut alors définir sur  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  un crochet de Lie en posant, pour  $(x, y)$  deux éléments de la base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ ,

$$[1 \otimes x, 1 \otimes y] = 1 \otimes [x, y],$$

puis en étendant par bilinéarité. Cette définition a un sens car  $[x, y]$  est un multiple entier d'un élément de la base de Chevalley donc on peut considérer le représentant de ce coefficient dans le corps premier de  $\mathbb{K}$ . Alors  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie simple associée au système de racines  $\Delta$ .

On considère à présent  $A_\alpha(\zeta)$  la matrice de  $x_\alpha(\zeta)$  dans la base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ . On a vu que les coefficients de  $A_\alpha(\zeta)$  sont de la forme  $k\zeta^i$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $i \geq 0$ . Soit  $t \in \mathbb{K}$  et  $\widetilde{A}_\alpha(t)$  la matrice obtenue à partir de  $A_\alpha(\zeta)$  en remplaçant  $k\zeta^i$  par  $\bar{k}t^i$ , où  $\bar{k}$  est l'élément du corps premier de  $\mathbb{K}$  correspondant à  $k \in \mathbb{Z}$ . On considère alors  $\widetilde{x}_\alpha(t)$  l'endomorphisme de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  ayant la matrice  $\widetilde{A}_\alpha(t)$  dans la base  $\{\widetilde{h}_\alpha, \alpha \in \Pi\} \cup \{\widetilde{e}_\beta, \beta \in \Delta\}$ . Alors d'après [Car72],  $\widetilde{x}_\alpha(t)$  est un automorphisme de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  pour tout  $\alpha \in \Delta$  et  $t \in \mathbb{K}$ .

**Définition A.0.2.** On définit alors le *groupe de Chevalley de type  $\mathfrak{g}$  sur le corps  $\mathbb{K}$* , noté  $G(\mathbb{K})$ , comme étant le sous-groupe des automorphismes de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$  engendré par les éléments  $\widetilde{x}_\alpha(t)$ , pour tout  $\alpha \in \Delta$ ,  $t \in \mathbb{K}$ .

On montre que  $G(\mathbb{K})$  est, à isomorphisme près, indépendant de la base de Chevalley choisie. Autrement dit,  $G(\mathbb{K})$  ne dépend que de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathbb{K}$  [Car72].

Intéressons-nous à présent à certains sous-groupes de  $G(\mathbb{K})$ . Soit  $\alpha \in \Delta$  et  $X_\alpha$  le sous-groupe engendré par les éléments  $\widetilde{x}_\alpha(t)$ , pour  $t \in \mathbb{K}$ . Alors  $\widetilde{x}_\alpha(t_1)\widetilde{x}_\alpha(t_2) = \widetilde{x}_\alpha(t_1 + t_2)$  donc  $X_\alpha$  est un sous-groupe de  $G(\mathbb{K})$  isomorphe à  $(\mathbb{K}, +)$ .

**Définition A.0.3.** Les sous-groupes  $X_\alpha$ , pour  $\alpha \in \Delta$ , sont appelés les *sous-groupes de racines* de  $G(\mathbb{K})$ .

On considère également  $U^+$  et  $U^-$  les sous-groupes engendrés par les éléments  $\widetilde{x}_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in \Delta^+$ , respectivement  $\alpha \in \Delta^- := -\Delta^+$  et  $t \in \mathbb{K}$ . Alors  $U^+$  est engendré par les  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta^+$ ,  $U^-$  est engendré par les  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta^-$  et  $G(\mathbb{K})$  est engendré par  $U^+$  et  $U^-$ .

On remarque bien sûr que la construction des groupes  $U^+$ ,  $U^-$  et  $G$  de la définition II.1.1 est analogue à cette construction de Chevalley.



# Annexe B

## Réalisation de $\mathfrak{g}$ comme algèbre de champs polynomiaux

Dans la définition II.4.3, nous avons considéré certains champs de vecteurs sur  $T\mathcal{F}$ . Une fois que nous avons défini une structure différentielle sur  $X^+$ , nous pouvons définir un crochet sur les champs de vecteurs sur  $X^+$  et ainsi obtenir une structure d'algèbre de Lie. D'autre part, dans la partie II.4.4, nous avons réalisé  $\mathfrak{g}$  comme un espace de champs polynomiaux sur  $\mathfrak{n}_1^+$  par  $Y \in \mathfrak{g} \mapsto \tilde{Y}^{+(1)}$ . On peut également munir cet espace  $Pol(\mathfrak{n}_1^+)$  d'une structure d'algèbre de Lie en posant pour  $P, Q \in Pol(\mathfrak{n}_1^+)$ ,

$$[P, Q](x) := dP(x)Q(x) - dQ(x)P(x),$$

où  $d$  est la différentielle usuelle sur les champs polynomiaux. Il est alors naturel de se demander si cette réalisation de  $\mathfrak{g}$  est un morphisme d'algèbres de Lie. La réponse est oui dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée. Pour le vérifier, on peut procéder au cas par cas selon que  $Y$  appartient à  $\mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{g}_0$  ou  $\mathfrak{g}_{-1}$  [BN04]. En revanche, dès que  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée, l'application  $Y \in \mathfrak{g} \mapsto \tilde{Y}^{+(1)}$  n'est plus un morphisme d'algèbres de Lie. En effet, si  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée, si  $(Y, Z) \in \mathfrak{g}_1$  et  $x = x_2 + x_1 \in \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$ , alors  $\widetilde{[Y, Z]}^{+(1)}(x) = [Y, Z]$  alors que  $[\tilde{Y}^{+(1)}, \tilde{Z}^{+(1)}] = 2[Y, Z]$ . Pour obtenir un morphisme d'algèbres de Lie, il faut modifier "légèrement" la définition de  $\tilde{Y}^{+(1)}$ . On pourrait modifier la définition du crochet sur l'espace  $Pol(\mathfrak{n}_1^+)$  en posant que  $Y \mapsto \tilde{Y}^{+(1)}$  est un morphisme d'algèbres de Lie, mais nous avons fait le choix de conserver le crochet "naturel" sur  $Pol(\mathfrak{n}_1^+)$ . Nous allons donc expliquer pourquoi il faut "corriger" la définition  $\tilde{Y}^{+(1)}$  et voir qu'après correction, nous tombons sur une formule donnée par I. Kantor dans [Kan01]. Dans cet article, il montre que sa formule définit un morphisme d'algèbres de Lie donc nous aurons bien le résultat recherché.

Pour cela, nous allons utiliser l'atlas considéré pour construire la structure différentielle sur  $X^+$  (définition II.4.6) et nous allons nous intéresser à l'action de  $\mathfrak{n}_1^+$  (ou  $U^+$ ) sur  $\mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$  dans le domaine de carte  $\mathfrak{n}_1^+$ . Pour cela fixons  $x \in \mathfrak{n}_1^+$  et regardons l'action de  $e^{\text{ad}(x)}$  sur  $\mathfrak{n}_1^+ \subset X^+$ . Si  $y \in \mathfrak{n}_1^+$ , alors  $e^{\text{ad}(x)} \cdot y = e^{\text{ad}(x)}e^{\text{ad}(y)}o^+ = e^{\text{ad}(x*y)}o^+$ , où  $x * y$  est

donné par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$\begin{aligned} x * y &= x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{\epsilon(n)} \frac{1}{q_1 + \dots + q_n + 1} \frac{(\text{ad}(x))^{p_1} (\text{ad}(y))^{q_1} \dots (\text{ad}(x))^{p_n} (\text{ad}(y))^{q_n} (\text{ad}(x))^m}{p_1! q_1! \dots p_n! q_n! m!} \\ &= x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \dots \end{aligned}$$

où  $\epsilon(0) = \{m \in \mathbb{N}\}$  et pour  $n \geq 1$ ,  $\epsilon(n) = \{p_1, q_1, \dots, p_n, q_n, m \in \mathbb{N}, p_i + q_i > 0, i \geq 1\}$ .  
Puisque  $\mathfrak{n}_1^+$  est nilpotente,  $x * y$  est un polynôme en  $x$  et  $y$ , de degré au plus  $k$ .  
Si on regarde à présent l'action de  $e^{\text{ad}(x)}$  dans la carte  $\mathfrak{n}_1^+$ , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} e^{\text{ad}(y)} o^+ \in \mathfrak{n}_1^+ & \xrightarrow{e^{\text{ad}(x)}} & e^{\text{ad}(x)} e^{\text{ad}(y)} o^+ \in \mathfrak{n}_1^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longrightarrow & x * y \end{array}$$

Mais d'après le théorème IV.1.2,  $TX^+$  est le fibré tangent de  $X^+$  donc l'action de  $T_{o^+} e^{\text{ad}(x)} = T_{o^+}^{(1)} e^{\text{ad}(x)}$  dans la carte  $\mathfrak{n}_1^+$  est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} T_{o^+} X^+ & \xrightarrow{T_{o^+} e^{\text{ad}(x)}} & T_{x \cdot o^+} X^+ \\ \\ Y \bmod \mathfrak{n}_0^- & \longrightarrow & e^{\text{ad}(x)} Y \bmod e^{\text{ad}(x)} \mathfrak{n}_0^- \\ \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 + \dots + Y_k & \xrightarrow{u \mapsto \Gamma^x u} & \tilde{Y}^{+(i)}(x) \end{array}$$

où  $\Gamma^x$  est la différentielle de  $y \mapsto x * y$  en 0. Autrement dit,  $x * (tu) - x * 0 = t\Gamma^x u + t^2 \dots$  et donc

$$\Gamma^x u = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1} \sum_{\substack{p_0 + \dots + p_j = n \\ p_i > 0 \text{ si } i > 0}} \frac{(\text{ad}(x))^n}{p_0! \dots p_j!} u = u + \frac{1}{2} [x, u] + \dots$$

On réutilise ici les notations introduites dans le théorème IV.1.1. On considère alors pour  $Y \in \mathfrak{g}$ ,

$$\tilde{Y}^+(x) := \Gamma^x \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(x)} Y) = \Gamma^x \tilde{Y}^{+(1)}.$$

M. Postnikov a montré dans [Pos85] le lemme suivant :

**Lemme B.0.2.** *On a*

$$\Gamma^x = \left( \frac{1 - e^{-\text{ad}(x)}}{\text{ad}(x)} \right)^{-1}.$$

*Démonstration.*

Nous allons démontrer ce résultat en développant en série entière le membre de droite et en utilisant les nombres de Bernoulli  $B_n$ . On a pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{a}{1 - e^{-\text{ad}(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} a^n = 1 + \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} a^{2n},$$

donc formellement,

$$\left( \frac{1 - e^{-\text{ad}(x)}}{\text{ad}(x)} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \frac{B_n}{n!} \text{ad}(x)^n.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout  $n$ , on a

$$(-1)^n \frac{B_n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i+1} \sum_{\substack{p_0+\dots+p_i=n \\ p_j>0 \text{ si } j>0}} \frac{1}{p_0! \dots p_i!}, \text{ i.e.}$$

$$B_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n+i}}{i+1} \sum_{\substack{p_0+\dots+p_i=n \\ p_j>0 \text{ si } j>0}} \frac{1}{p_0! \dots p_i!}.$$

Pour cela, on va noter  $P_n$  le membre de droite. Alors, tout d'abord on va isoler le terme pour  $i = 0$  :

$$P_n = (-1)^n + n! \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n+i}}{i+1} \sum_{\substack{p_0+\dots+p_i=n \\ p_j>0 \text{ si } j>0}} \frac{1}{p_0! \dots p_i!}.$$

On pose alors

$$I_n^{(i)} := \sum_{\substack{p_0+\dots+p_i=n \\ p_j>0 \text{ si } j>0}} \frac{1}{p_0! \dots p_i!} = \underbrace{\sum_{\substack{p_1+\dots+p_i=n \\ p_j>0}} \frac{1}{p_1! \dots p_i!}}_{p_0=0} + \underbrace{\sum_{\substack{p_1+\dots+p_{i+1}=n \\ p_j>0}} \frac{1}{p_1! \dots p_{i+1}!}}_{p_0 \neq 0}.$$

Ceci nous amène à considérer

$$J_n^{(i)} := \sum_{\substack{p_1+\dots+p_i=n \\ p_j>0}} \frac{1}{p_1! \dots p_i!},$$

de sorte que

$$I_n^{(i)} = J_n^{(i)} + J_n^{(i+1)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} P_n &= (-1)^n + n! \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n+i}}{i+1} (J_n^{(i)} + J_n^{(i+1)}) \\ &= (-1)^n + n! \left( \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n+i}}{i+1} J_n^{(i)} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{(-1)^{n+i-1}}{i} J_n^{(i)} \right) \\ &= (-1)^n + n! \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} J_n^{(1)} + \sum_{i=2}^n (-1)^{n+i} \left( \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right) J_n^{(i)} \right) \text{ car } J_n^{(n+1)} = 0 \\ &= (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{2} + n! \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^{n+i-1}}{i(i+1)} J_n^{(i)} \text{ car } J_n^{(1)} = \frac{1}{n!} \\ &= (-1)^n \left( \frac{1}{2} - n! \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i(i+1)} J_n^{(i)} \right) \end{aligned}$$

Donc finalement, on obtient

$$P_n = (-1)^{n+1} n! \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i(i+1)} J_n^{(i)}.$$

Il faut donc chercher à expliciter  $J_n^{(i)}$ . Pour cela, il suffit de s'intéresser à

$$e^a - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \text{ donc}$$

$$(e^a - 1)^i = \sum_{n=i}^{\infty} \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_i = n \\ p_j > 0}} \frac{1}{p_1! \dots p_i!} a^n = \sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(i)} a^n.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (e^a - 1)^i &= \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} e^{ra} (-1)^{i-r} \\ &= \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} a^n (-1)^{i-r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^i \binom{i}{r} (-1)^{i-r} r^n \right) a^n \end{aligned}$$

Et donc finalement, on a

$$J_n^{(i)} = \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^i \binom{i}{r} (-1)^{i-r} r^n.$$

Par conséquent,

$$P_n = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i(i+1)} \sum_{r=1}^i \binom{i}{r} (-1)^{i-r} r^n.$$

En modifiant légèrement l'écriture de  $P_n$ , on trouve

$$P_n = (-1)^n \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} r^{n-1} \sum_{i=r}^n \frac{\binom{i-1}{r-1}}{i+1}$$

et alors d'après [D'O89],  $P_n = B_n$  donc finalement, on a

$$\Gamma^x = \left( \frac{1 - e^{-\text{ad}(x)}}{\text{ad}(x)} \right)^{-1},$$

i.e

$$\tilde{Y}^+(x) = \left( \frac{1 - e^{-\text{ad}(x)}}{\text{ad}(x)} \right)^{-1} \text{pr}_{\mathfrak{n}_1^+} (e^{-\text{ad}(x)} Y).$$

□

Et alors d'après [Kan01], on a le résultat suivant :

**Théorème B.0.2.** *Si on munit  $Pol(\mathfrak{n}_1^+)$  du crochet défini pour  $P, Q \in Pol(\mathfrak{n}_1^+)$  par*

$$[P, Q](x) := dP(x)Q(x) - dQ(x)P(x),$$

*alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow Pol(\mathfrak{n}_1^+) \\ Y &\mapsto \tilde{Y}^+ \end{aligned}$$

*est un morphisme d'algèbres de Lie.*

Terminons cette partie en donnant les valeurs de  $\tilde{Y}^+$  lorsque  $\mathfrak{g}$  est 3- ou 5-graduée. Si  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée,  $x * y = x + y$ , si bien que  $\varphi^x(u) = u$  et alors

$$\tilde{Y}^+(x) = \begin{cases} Y & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_1 \\ [Y, x] & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_0 \\ \frac{1}{2} [x, [x, Y]] & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_{-1} \end{cases}$$

Et si  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée,  $x * y = x + y + \frac{1}{2} [x, y]$  d'où  $\varphi^x(u) = u + \frac{1}{2} [x, u]$  et alors pour  $x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ ,

$$\tilde{Y}^+(x) = \begin{cases} Y & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_2, \\ Y + \frac{1}{2} [x_1, Y] & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_1, \\ [Y, x_1] + [Y, x_2] & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_0, \\ [Y, x_2] + \frac{1}{2} [x_1, [x_1, Y]] + \frac{1}{2} [x_2, [x_1, Y]] + \frac{1}{12} [x_1, [x_1, [x_1, Y]]] & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_{-1}, \\ [x_1, [x_2, Y]] - \frac{1}{6} [x_1, [x_1, [x_1, Y]]] + \\ \frac{1}{2} [x_2, [x_2, Y]] - \frac{1}{24} [x_1, [x_1, [x_1, [x_1, Y]]] & \text{si } Y \in \mathfrak{g}_{-2}. \end{cases}$$

On retrouve les expressions données dans [Kan01] et [BN04] dans la cas où  $\mathfrak{g}$  est 3-graduée et celles de [Kan01] et [Pal06] dans la cas où  $\mathfrak{g}$  est 5-graduée.



# Annexe C

## Calcul différentiel général

Le cadre classique du calcul différentiel ou de la géométrie différentielle est de considérer le corps des réels ou des complexes mais aussi des objets de dimension finie. Une première généralisation possible est de considérer des variétés de dimension infinie i.e modélées sur un espace vectoriel de dimension infinie, par exemple un espace de Banach, on parle alors de *variétés banachiques* [Upm85] ou un espace de Fréchet et dans ce cas, on parle de *variétés fréchétiennes*. Mais il est difficile de généraliser à d'autres types d'espaces, encore plus généraux que les espaces localement convexes.

Une autre généralisation peut consister à s'intéresser à d'autres corps que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , par exemple les nombres p-adiques ou d'autres corps topologiques. La théorie que nous allons présenter dans la suite est due à W. Bertram, H. Glöckner et K. H. Neeb [BGN04] et [Ber08] et généralise la géométrie différentielle classique dans les deux directions précédentes. Nous allons présenter les bases de ce calcul différentiel "général" puis rappeler ce que sont les variétés différentielles dans ce contexte.

### C.1 Fonctions de classe $C^1$

Soit  $\mathbb{K}$  un anneau topologique commutatif et unitaire i.e  $\mathbb{K}$  est muni d'une topologie séparée telle que l'addition et le produit dans  $\mathbb{K}$  sont continus et l'ensemble  $\mathbb{K}^*$  des éléments inversibles de  $\mathbb{K}$  est un ouvert et l'inversion est continue. Dans la suite, on supposera également que  $\mathbb{K}^*$  est dense dans  $\mathbb{K}$ .

On dira qu'un  $\mathbb{K}$ -module  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -*module topologique* si  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -module muni d'une topologie séparée telle que l'addition et la multiplication par un scalaire sont continues. Soit  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{K}$ -modules topologiques et  $U \subset V$  un ouvert.

**Définition C.1.1.** Une application  $f : U \subset V \rightarrow W$  est de classe  $C^1$  s'il existe une application continue, notée

$$f^{[1]} : U^{[1]} := \{(x, v, t) \in U \times V \times \mathbb{K}, x + tv \in U\} \subset U \times V \times \mathbb{K} \rightarrow W,$$

telle que pour tout  $(x, v, t) \in U^{[1]}$ , on a

$$f(x + tv) - f(x) = tf^{[1]}(x, v, t).$$

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^n$  et  $W = \mathbb{R}^m$ , on retrouve la notion usuelle de fonctions de classe  $C^1$  [BGN04].

Comme  $\mathbb{K}^*$  est dense dans  $\mathbb{K}$ ,  $f^{[1]}$  est uniquement déterminée par  $f$  et donc on peut définir la *différentielle de  $f$*  par

$$\begin{aligned} df : U \times V &\rightarrow W \\ (x, v) &\mapsto f^{[1]}(x, v, 0) \end{aligned} .$$

Comme  $f^{[1]}$  est continue,  $df$  l'est également.

On a alors le lemme suivant qui rassemble les résultats classiques auxquels on s'attend :

**Lemme C.1.1.** *i) Pour tout  $x \in U$ ,  $df(x) : V \rightarrow W$  est une application  $\mathbb{K}$ -linéaire continue.*

*ii) Les applications multilinéaires continues sont de classe  $C^1$  et leur différentielle est donnée par la formule habituelle. Par ailleurs, les applications polynômiales  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  sont de classe  $C^1$  et leur différentielle est, elle aussi, donnée par la formule usuelle.*

*iii) L'inversion  $i : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  est de classe  $C^1$  et  $di(x)v = -x^{-2}v$ . Donc les fonctions rationnelles  $U \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  sont de classe  $C^1$ .*

On a également un résultat sur la composée d'applications de classe  $C^1$  :

**Proposition C.1.1.** *Soit  $f$  et  $g$  deux applications de classe  $C^1$  telles qu'on puisse définir  $g \circ f$ . Alors  $g \circ f$  est de classe  $C^1$  et  $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$ .*

On renvoie à [Ber08] et [BGN04] pour la démonstration de ces résultats et pour d'autres plus généraux.

## C.2 Fonctions de classe $C^k$

**Définition C.2.1.** Soit  $f : U \subset V \rightarrow W$  de classe  $C^1$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^2$  si  $f^{[1]}$  est de classe  $C^1$ . Dans ce cas, on définit  $f^{[2]} := (f^{[1]})^{[1]} : U^{[2]} \rightarrow W$  avec

$$U^{[2]} := (U^{[1]})^{[1]} = \left\{ ((x, v, t), (x', v', t'), s) \in U^{[1]} \times (U \times V \times \mathbb{K}) \times \mathbb{K}, (x, v, t) + s(x', v', t') \in \tilde{U}^{[1]} \right\} .$$

De manière récursive, on dira que  $f$  est de classe  $C^{k+1}$  si  $f$  est de classe  $C^k$  et  $f^{[k]}$  est de classe  $C^1$ . Dans ce cas, on définit  $U^{[k+1]} := (U^{[k]})^{[1]}$  et  $f^{[k+1]} := (f^{[k]})^{[1]} : U^{[k+1]} \rightarrow W$ .

On dira que  $f$  est de classe  $C^\infty$  si elle est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Nous pouvons à présent définir la notion de variété différentielle associée.



## C.3 Variété différentielle

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -module topologique qui va nous servir d'espace modèle pour notre variété.

**Définition C.3.1.** Un espace topologique  $M$  sera appelé une *variété différentielle de classe  $C^k$*  s'il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $M$  et des applications  $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset V$  telles que :

- i) Chaque  $\varphi_i$  est un homéomorphisme de  $U_i$ , ouvert de  $M$ , dans  $\varphi_i(U_i)$ , ouvert de  $V$ .
- ii) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , l'application  $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  et son inverse  $\varphi_{ji}$  sont de classe  $C^k$ .

On dira que  $M$  est une variété lisse si  $M$  est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $V = \mathbb{R}^n$ , on retrouve la notion de variété différentielle de dimension  $n$ . On peut remarquer ici que  $\mathbb{K}$  n'est pas nécessairement un corps et donc la notion de dimension d'une variété n'a plus véritablement de sens.

Pour de plus amples informations sur ces notions, notamment sur les notions de groupe de Lie et d'espace symétrique, ainsi que les objets infinitésimaux correspondant, ou encore la notion de fibré et celle de connexions dans ce cadre très général, on renvoie à [BGN04] et [Ber08].



# Index des notations

- $(\mathfrak{n}^+ \times \mathfrak{n}^-)^\times = \{(x, w) \in \mathfrak{n}_1^+ \times \mathfrak{n}_1^-, e^{\text{ad}(w)} \cdot x \in \mathfrak{n}_1^+\}$ , page 80
- $(X^+, X^-, \top)$  géométrie de drapeaux généralisée associée à une algèbre de Lie graduée, page 52
- $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  ensemble des automorphismes de  $\mathfrak{g}$ , page 50
- $\mathbb{K}$  anneau, page 11
- $\mathcal{A}$  atlas naturel de  $X^+$ , page 67
- $\mathcal{D}$  ensemble des drapeaux d'un module  $V$  admettant un drapeau transverses, page 73
- $\mathcal{F}$  ensemble des filtrations intérieures d'une algèbre de Lie, page 54
- $\mathcal{G}$  ensemble des graduations intérieures, page 15
- $\mathcal{L}(V)$  algèbre de Kantor d'un système triple de Jordan généralisé  $V$ , page 27
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ensemble des matrices carrées de taille  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , page 16
- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  ensemble des matrices de taille  $p \times q$  sur  $\mathbb{K}$ , page 16
- $\mathcal{P}$  ensemble des opérateurs d'Euler de  $\mathfrak{g} = \text{End}_R(V)$ , page 73
- $\Delta$  système de racines, page 29
- $\text{Der}(V^+, V^-)$  ensemble des dérivations de la paire de modules  $(V^+, V^-)$ , page 18
- $\mathfrak{g}$  algèbre de Lie, page 11
- $\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$  plongement standard de  $\mathfrak{q}$ , page 13
- $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$  algèbre de Lie  $\Gamma$ -graduée, page 12
- $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$  algèbre de Lie  $\mathbb{Z}$ -graduée, page 15
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$  algèbre de Lie  $(2k+1)$ -graduée, page 15
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  algèbre de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée, page 13
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$  décomposition de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , page 32
- $\Gamma^v$  différentielle de  $y \mapsto v * y$  en 0, page 82
- $\text{Hom}^{(i)}(T'\mathcal{F}, T\mathcal{F}) = \bigcup_{m,n \in \mathcal{F}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T_m^{(i)}\mathcal{F}, T_n^{(i)}\mathcal{F})$ , page 66
- $\text{Ider}(V^+, V^-)$  ensemble des dérivations intérieures de la paire  $(V^+, V^-)$ , page 18

- $(K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}^{(i)})$  noyau canonique, page 65
- $[\cdot, \cdot, \cdot]$  crochet triple de Lie , page 13
- $[\cdot, \cdot]$  crochet de Lie , page 11
- $\mathfrak{m}_j^+ = \mathfrak{n}_1^+ \oplus \mathfrak{q}_j^- = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-j+1}$ , page 88
- $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_{-k+1})$  filtration d'une algèbre de Lie, page 53
- $\mathfrak{n}^\pm(D)$  filtration positive, resp négative, associée à une graduation , page 54
- $\mathfrak{n}_1^\pm = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{\pm n}$  , page 58
- $\mathfrak{q}$  système triple de Lie, page 13
- $\mathfrak{q}_j^- = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-j+1}$ , page 88
- $\Omega^+ = \{g \in G, g.o^+ \in \mathfrak{n}_1^+\}$  , page 59
- $\Pi$  système fondamental d'un système de racines , page 34
- $\top$  relation de transversalité, page 52
- $B(\cdot, \cdot)$  forme de Killing , page 33
- $B^+(x, w)_i, B^-(w, x)_i$  opérateurs de Bergman généralisés, page 60
- $c_g(x)_i$  codénominateurs de  $g$  en  $x$  , page 60
- $D$  Dérivation caractéristique d'une graduation , page 15
- $d_g(x)_i$  dénominateurs de  $g$  en  $x$  , page 60
- $dg(x)$  différentielle de  $g$  en  $x$ , page 82
- $E$  opérateur d'Euler d'une graduation, page 15
- $G, PE(\mathfrak{g}, D)$  groupe projectif élémentaire, page 50
- $H = \{g \in G, g \circ D = D \circ g\}$ , page 50
- $n_g(x)$  numérateur de  $g$  en  $x$  , page 71
- $P^\pm = HU^\pm$  , page 50
- $Pol(\mathfrak{n}_i^+)$  ensemble des champs polynomiaux sur  $\mathfrak{n}_i^+$  , page 68
- $T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} = \mathfrak{n}_i$  , page 61
- $T_{\mathfrak{n}}'\mathcal{F} = \mathfrak{n}_1$ , espace structural de  $\mathcal{F}$  en  $\mathfrak{n}$  , page 61
- $T^\pm(\cdot, \cdot, \cdot)$  produit triple de Jordan , page 17
- $T_{\mathfrak{n}}^{(i)}\mathcal{F} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{-i+1}$  , page 61
- $T_{\mathfrak{n}}\mathcal{F} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}_0$ , espace tangent de  $\mathcal{F}$  en  $\mathfrak{n}$  , page 61
- $TKK(V^+, V^-)$  algèbre de Lie de Kantor-Koecher-Tits associée à la paire  $(V^+, V^-)$  , page 18

$U^\pm = \{e^{\text{ad}(x)}, x \in \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{\pm n}\}$  , page 50

$x * y$  formule de Campbell-Hausdorff, page 81

$x^\top$  ensemble des éléments transverses à  $x$  , page 52

$\text{End}_R(V)$  ensemble des endomorphismes d'un module  $V$  sur  $R$  une algèbre associative unitaire, page 73



# Bibliographie

- [AF99] B. N. Allison and J. R. Faulkner. Elementary groups and invertibility for Kantor pairs. *Comm. Algebra*, 27(2) :519–556, 1999.
- [AK88] H. Asano and S. Kaneyuki. On compact generalized Jordan triple systems of the second kind. *Tokyo J. Math.*, 11(1) :105–118, 1988.
- [Ber00] W. Bertram. *The geometry of Jordan and Lie structures*, volume 1754 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Ber02a] W. Bertram. Complex and quaternionic structures on symmetric spaces - Correspondance with Freudenthal-Kantor triple systems. *Theory of Lie Groups and Manifolds, Sophia Kokyuroku in Math.*, 45 :57–76, 2002.
- [Ber02b] W. Bertram. Generalized projective geometries : general theory and equivalence with Jordan structures. *Adv. Geom.*, 2(4) :329–369, 2002.
- [Ber08] W. Bertram. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces over general base fields and rings. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 192(900) :x+202, 2008.
- [Ber10] W. Bertram. Jordan structures and non-associative geometry. *Trends and Developments in Infinite Dimensional Lie Theory, Progress in Math., Birkhaeuser*, à paraitre, 2010, arXiv : math.RA/0706.1406.
- [BGN04] W. Bertram, H. Glöckner, and K.-H. Neeb. Differential calculus over general base fields and rings. *Expo. Math.*, 22(3) :213–282, 2004.
- [BK09a] W. Bertram and M. Kinyon. Associative Geometries. I : Grouds, linear relations and Grassmannians. *Prépublication 2009/13 de l'Institut Elie Cartan*, 2009, arXiv : math.RA/0903.5441.
- [BK09b] W. Bertram and M. Kinyon. Associative Geometries. II : Involution, the classical grouds and their homotopes. *Prépublication 2009/30 de l'Institut Elie Cartan*, 2009, arXiv : math.RA/0909.4438.
- [BL08] W. Bertram and H. Löwe. Inner ideals and intrinsic subspaces of linear pair geometries. *Adv. Geom.*, 8(1) :53–85, 2008.
- [BM92] S. Berman and R. V. Moody. Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy. *Invent. Math.*, 108(2) :323–347, 1992.
- [BN04] W. Bertram and K-H. Neeb. Projective completions of Jordan pairs. I. The generalized projective geometry of a Lie algebra. *J. Algebra*, 277(2) :474–519, 2004.

- [BN05] W. Bertram and K-H. Neeb. Projective completions of Jordan pairs. II. Manifold structures and symmetric spaces. *Geom. Dedicata*, 112 :73–113, 2005.
- [BN06] G. Benkart and E. Neher. The centroid of extended affine and root graded Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 205(1) :117–145, 2006.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [Bou72] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie.* Hermann, Paris, 1972. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349.
- [Bou75] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Hermann, Paris, 1975. Fasc. XXXVIII : Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII : Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII : Algèbres de Lie semi-simples déployées, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1364.
- [BZ96] G. Benkart and E. Zelmanov. Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras. *Invent. Math.*, 126(1) :1–45, 1996.
- [Car72] R. W. Carter. *Simple groups of Lie type.* John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 28.
- [CDMKR05] M. Cowling, F. De Mari, A. Korányi, and H. M. Reimann. Contact and conformal maps in parabolic geometry. I. *Geom. Dedicata*, 111 :65–86, 2005.
- [Cer43] J. Certaine. The ternary operation  $(abc) = ab^{-1}c$  of a group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 :869–877, 1943.
- [Che09] J. Chenal. Generalized flag geometries and manifolds associated to short  $\mathbb{Z}$ -graded Lie algebras in arbitrary dimension. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(1-2) :21–25, 2009.
- [D’O89] M. D’Ocagne. Sur les nombres de Bernoulli. *Bull. Soc. Math. France*, 17 :107–109, 1889.
- [EK05] A. G. Elashvili and V. G. Kac. Classification of good gradings of simple Lie algebras. In *Lie groups and invariant theory*, volume 213 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 85–104. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [Fau83] J. R. Faulkner. Stable range and linear groups for alternative rings. *Geom. Dedicata*, 14(2) :177–188, 1983.
- [FKK<sup>+</sup>00] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q. Lu, and G. Roos. *Analysis and geometry on complex homogeneous domains*, volume 185 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2000.
- [Hum78] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.
- [KA88] S. Kaneyuki and H. Asano. Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems. *Nagoya Math. J.*, 112 :81–115, 1988.



- [Kac77] V. G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Math.*, 26(1) :8–96, 1977.
- [Kac78] V. G. Kac. Representations of classical Lie superalgebras. In *Differential geometrical methods in mathematical physics, II (Proc. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1977)*, volume 676 of *Lecture Notes in Math.*, pages 597–626. Springer, Berlin, 1978.
- [Kac80] V. G. Kac. Some remarks on nilpotent orbits. *J. Algebra*, 64(1) :190–213, 1980.
- [Kac90] V. G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.
- [Kam89] N. Kamiya. A structure theory of Freudenthal-Kantor triple systems. III. *Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.*, 23 :33–51, 1989.
- [Kan70] I. L. Kantor. Graded Lie algebras. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, 15 :227–266, 1970.
- [Kan72] I. L. Kantor. Some generalizations of Jordan algebras. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, 16 :407–499, 1972.
- [Kan01] I. L. Kantor. On a vector field formula for the Lie algebra of a homogeneous space. *J. Algebra*, 235(2) :766–782, 2001.
- [Kau83] W. Kaup. A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces. *Math. Z.*, 183(4) :503–529, 1983.
- [Kna02] A. W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2002.
- [Loo69] O. Loos. *Symmetric spaces. I : General theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [Loo75] O. Loos. *Jordan pairs*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 460. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [Loo79] O. Loos. On algebraic groups defined by Jordan pairs. *Nagoya Math. J.*, 74 :23–66, 1979.
- [Loo85] O. Loos. Charakterisierung symmetrischer  $R$ -Räume durch ihre Einheitsgitter. *Math. Z.*, 189(2) :211–226, 1985.
- [Loo95] O. Loos. Elementary groups and stability for Jordan pairs. *K-Theory*, 9(1) :77–116, 1995.
- [Mey70] K. Meyberg. Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren. *Math. Z.*, 115 :58–78, 1970.
- [Moo68] R. V. Moody. A new class of Lie algebras. *J. Algebra*, 10 :211–230, 1968.
- [MT86] R. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1986.
- [Neh96] E. Neher. Lie algebras graded by 3-graded root systems and Jordan pairs covered by grids. *Amer. J. Math.*, 118(2) :439–491, 1996.
- [Pal06] J. Palmkvist. A realization of the Lie algebra associated to a Kantor triple system. *J. Math. Phys.*, 47(2) :023505, 9, 2006.

- [Pal09] J. Palmkvist. Generalized conformal realizations of Kac-Moody algebras. *J. Math. Phys.*, 50(1) :013532, 17, 2009.
- [Pos85] M. Postnikov. *Leçons de géométrie*. Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics]. “Mir”, Moscow, 1985. Groupes et algèbres de Lie. [Lie groups and Lie algebras], Translated from the Russian by Djilali Embarek.
- [Sch79] B. Schein. On the theory on inverse semigroups and generalized groups. *Twelve papers in logic and algebra, AMS Translations*, 113(2) :89–123, 1979.
- [Ser98] V. Serganova. Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 583–593 (electronic), 1998.
- [Ser05] V. Serganova. On representations of Cartan type Lie superalgebras. In *Lie groups and invariant theory*, volume 213 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 223–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [Ste68] R. Steinberg. *Lectures on Chevalley groups*. Yale University, New Haven, Conn., 1968. Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson.
- [Tak66] M. Takeuchi. Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces. In *Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry (Kyoto, 1965)*, pages 137–146. Nippon Hyoronsha, Tokyo, 1966.
- [Tan79] N. Tanaka. On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras. *Hokkaido Math. J.*, 8(1) :23–84, 1979.
- [Tit62] J. Tits. Une classe d’algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math.*, 24 :530–535, 1962.
- [Upm85] H. Upmeyer. *Symmetric Banach manifolds and Jordan  $C^*$ -algebras*, volume 104 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 96.



## Structures Géométriques liées aux algèbres de Lie graduées

Le but de ma thèse est de caractériser les *géométries* (de type parabolique) associées aux *algèbres de Lie*  $(2k + 1)$ -graduées et en particulier généraliser les travaux de W. Bertram et K-H. Neeb sur les algèbres de Lie 3-graduées [BN04]. Ceux-ci ont montré que l'objet géométrique associé à une algèbre de Lie 3-graduée, appelé la *géométrie projective généralisée*, est caractérisé par la *paire de Jordan* associée à l'algèbre de Lie.

Pour généraliser leurs résultats, nous considérons dans un premier temps le *groupe projectif élémentaire* d'une algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée, notion introduite par O. Loos dans [Loo79] et [Loo95], et reprise par J. R. Faulkner dans [Fau83]. A partir du groupe projectif élémentaire, noté  $G$ , nous pouvons définir deux espaces homogènes  $X^+$  et  $X^-$ , définis en quotientant  $G$  par deux sous-groupes, notés  $P^+$  et  $P^-$  [BN04], ainsi qu'une *relation de transversalité*  $\top$  sur  $X^+ \times X^-$ . Le triplet  $(X^+, X^-, \top)$  est appelé la *géométrie de drapeaux généralisée* associée à l'algèbre de Lie  $(2k + 1)$ -graduée.

Dans un second temps, on montre que cette géométrie de drapeaux généralisée se réalise à l'aide des filtrations de l'algèbre de Lie. Dans le cas particulier où l'algèbre de Lie considérée est  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , la géométrie de drapeaux généralisée est une variété de drapeaux. Ceci explique le nom de "géométrie de drapeaux généralisée".

Enfin, à l'aide d'un calcul différentiel généralisé, défini et développé par W. Bertram, H. Glöckner et K-H. Neeb, on peut construire une *structure de variété différentielle* sur chaque espace  $X^+$  et  $X^-$  de la géométrie de drapeaux généralisée.

Tous ces résultats sont annoncés dans [Che09].

---

Mots-clé : Algèbres de Lie graduées, Géométries de drapeaux généralisées, Groupe projectif élémentaire, Complétion projective, Calcul différentiel sur un anneau topologique, Variétés lisses.

---

Institut Élie Cartan Nancy  
Laboratoire de Mathématiques  
B.P. 239 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

---