



HAL
open science

Modélisation du comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme à base de fer type Fe-Mn-Si

Fatma Ellouze Jemal

► **To cite this version:**

Fatma Ellouze Jemal. Modélisation du comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme à base de fer type Fe-Mn-Si. Autre [cond-mat.other]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2009. Français. NNT : 2009NAN10135 . tel-01748295

HAL Id: tel-01748295

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748295v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITE HENRI POINCARÉ NANCY I
ÉCOLE DOCTORALE D'ÉNERGIE, MECANIQUE ET MATERIAUX (EMMA), ED 409

UNIVERSITE DE SFAX
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE L'ÉCOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE SFAX

THÈSE

en cotutelle, présentée en vue d'obtenir le titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré – Nancy I et de l'Université de Sfax

par

Fatma JEMAL ELLOUZE

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT THERMOMÉCANIQUE D'UN
ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME À BASE DE FER TYPE Fe-Mn-Si

Thèse dirigée par

Coté français : M. Tarak BEN ZINEB

Coté tunisien : M. Chedly BRADAI

M. Tarak BOURAOUI

Soutenue le 13 novembre 2009 devant le jury composé de :

Rapporteurs	M. Abel CHEROUAT	Professeur, Université de Technologie de Troyes
	M. Zoubair TOURKI	Maître de Conférences, Université de Sousse
Examineurs	M. Etienne PATOOR	Professeur, ENSAM, Metz
	M. Chedly BRADAI	Maître de Conférences, Université de Sfax
	M. Tarak BEN ZINEB	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I
	M. Tarak BOURAOUI	Maître de Conférences, Université de Monastir

À mes parents

À ma petite famille : Wissem, Zaineb et Ayoub

À mes proches, à tous mes amis

REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier vivement mes directeurs de thèse **M. Chedly Bradai**, Maître de Conférences à l'ENIS et **M. Tarak Ben Zineb** professeur à l'ESSTIN à Nancy pour leurs soutiens permanent durant mon travail. Je remercie particulièrement **M. Tarak Bouraoui**, Maître-Assistant Habilité à l'IPEIM Monastir, initiateur de ce sujet de thèse, pour son encadrement scientifique et ses encouragements.*

*Mes remerciements s'adressent également à **M. Foued El Halouani** professeur à l'ENIS et responsable de l'Unité Physique et Mécanique des Matériaux (UPMM)*

*Je remercie les membres du laboratoire **LEMTA** de NANCY pour leur accueil chaleureux durant mes séjours scientifiques à Nancy. Je remercie également les membres du laboratoire **LPMM** de l'ENSAM Metz pour l'aide qu'ils m'ont apportée en ce qui concerne la réalisation des essais de traction à différentes températures.*

Mes vifs remerciements s'adressent au Comité Mixte de Coopération Universitaire (CMCU), et plus particulièrement aux responsables du projet 04S1117 (Messieurs Normand, Ben Hassin, Ben Zineb et Bouraoui) qui ont permis le financement de mes séjours scientifiques en France.

Je suis reconnaissante à tous les enseignants de l'ENIS qui ont contribué à ma formation.

Je remercie vivement les membres de jury d'avoir accepté d'examiner mon travail.

J'aimerais également remercier d'avance tout ceux qui liront ce mémoire et souhaiterons me faire part leurs critiques.

Enfin, je ne pourrais clore cette partie sans remercier mon mari et mes enfants qui m'accompagnent dans cette aventure et qui me donnent la force d'avancer. Je les remercie vivement d'avoir accepté mes absences répétées.

TABLE DES MATIERES

Table des matières.....	1
Introduction générale.....	5
 CHAPITRE I	
 Introduction aux alliages à mémoire de forme et à la modélisation des comportements thermomécaniques associées aux transformations martensitiques	
I. Introduction	8
II. Les AMF: historique, différentes familles et actualité de leur développement industriel	8
II. Transformation martensitique et propriétés thermomécaniques associées.....	14
II.1 Transformation thermoélastique et non thermoélastique	15
II.2 Effet mémoire de forme simple sens.....	17
II.3 Effet mémoire de forme double sens.....	21
II.4 Superélasticité	22
II.5 Effet amortissant	23
II.6 Plasticité de transformation et effet mémoire double assisté	24
III. les alliages à mémoire de forme à base de fer	26
III.1 Compositions types	26
III.2 Durabilité et optimisation des AMF à base de fer.....	27
IV. Modélisation des comportements thermomécaniques associés à la transformation martensitique	28
IV.1 Introduction	28
IV.2 Modélisation de la plasticité de transformation dans les aciers TRIP.....	29

IV.3	Modélisation de la transformation martensitique induite par déformation au cours de la mise en forme des aciers inox	31
IV.4	Modélisation des comportements thermomécaniques associés à la transformation martensitique dans les alliages a mémoire de forme.....	33
V.	Conclusions	37

CHAPITRE II

Étude expérimentale du comportement thermomécanique de l'alliage à mémoire de forme Fe-32Mn-6Si

I.	Introduction :.....	40
II.	Composition chimique de l'alliage étudié et traitement thermique de référence : ..	40
III.	Mise en évidence de la transformation martensitique réversible et mesure des points de transformation.....	41
III.1	Mesure de la résistance électrique.....	41
III.2	Mesure dilatométrique :	42
IV.	Comportement thermomécanique	43
IV.1	Mise en évidence de l'effet mémoire de forme en flexion :.....	43
IV.2	Comportement mécanique en traction.....	44
IV.3	Mesure de dureté de l'état austénitique.....	46
IV.4	Sollicitation en traction et mesure de l'effet mémoire de forme.....	47
IV.5	Micrographie et dureté de l'état monophasé austénite et biphasé austénite plus martensite induite sous contrainte	49
IV.6	Diagramme contrainte-température.....	52
V.	Conclusion :	58

CHAPITRE III

Modélisation et intégration numérique du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme Fe-Mn-Si

I. Introduction	60
II. Choix des variables internes.....	61
III. Thermodynamique de la transformation de phase et de la plasticité.....	62
IV. Détermination de l'énergie de gibbs	63
IV.1 Énergie élastique :	65
IV.2 Forces thermodynamiques.....	69
V. Méthodes d'intégration numérique	71
VI. Conclusion.....	76

CHAPITRE IV

Validation du modèle et implantation dans un code élément finis

I. Introduction	78
II. Identification des paramètres.....	78
III. Analyse de sensibilité aux paramètres du modèle	80
IV. Validation du modèle	85
IV.1 Chargement unidirectionnel	85
IV.2 Chargement complexe.....	88
V. Implantation du modèle dans ABAQUS	89

VI. Validation : tests préliminaires	92
VII. Conclusion.....	94
Conclusion générale	95
Références bibliographiques	98
Annexe.....	106

Introduction générale

Le développement des alliages à mémoire de forme est long et hasardeux de leur découverte à leur utilisation industrielle concrète. Le transfert technologique des laboratoires vers les industries nécessite la levée de plusieurs verrous scientifiques et techniques. Parmi ces verrous à lever nous citons une bonne connaissance par les ingénieurs des caractéristiques du matériau, le développement d'outils de dimensionnement d'applications et la maîtrise des coûts de mise en œuvre de la solution.

Les alliages à mémoire de forme à base de fer présentent des propriétés thermomécaniques intéressantes induites par les mécanismes couplés de transformation martensitique et de glissement plastique. De nombreuses études expérimentales ont été réalisées dans divers laboratoires de recherche. Ils ont permis de caractériser ces alliages aussi bien au niveau métallurgique que thermomécanique. En revanche, les études au sujet de la modélisation de leur comportement thermomécanique sont encore relativement peu nombreuses et se limitent généralement à des formulations unidimensionnelles. Ces études sont nécessaires à l'optimisation de leurs performances et au dimensionnement des applications par la méthode des éléments finis.

L'objectif principal de ces travaux de thèse vise à apporter une contribution dans l'objectif de combler ce manque en développant une formulation tridimensionnelle décrivant le comportement thermomécanique de ces alliages et intégrant l'effet des mécanismes de transformation de phase et de glissement plastique ainsi que leur interaction.

La démarche que nous avons adoptée pour mener à bien ce travail a débuté par une étude bibliographique sur les alliages à mémoire de forme en mettant l'accent sur les spécificités des AMF à base de fer. Nous sommes également intéressés à l'état de l'art sur la modélisation du comportement thermomécanique des matériaux métalliques conditionné par transformation de phase à l'état solide. La synthèse de cette étude bibliographique est présentée au chapitre I.

Un certain nombre de données expérimentales et d'hypothèses sont nécessaires pour la compréhension des mécanismes en jeu (transformation de phase et plasticité) et la description la plus physique possibles lors de la modélisation d'un tel comportement. Il est donc nécessaire d'effectuer une campagne expérimentale. Après avoir effectué des observations métallographiques et des essais de résistivité pour la détermination des températures de

transformation, des essais thermomécaniques sont réalisés. Cette campagne est décrite au chapitre II dans lequel sont également présentés l'alliage étudié et les résultats obtenus..

La partie modélisation comportement thermomécanique de ces alliages a constitué la phase principale de notre travail. Le modèle du comportement formulé est basé sur une description micromécanique des mécanismes de transformation de phase et de glissement plastique au niveau du réseau cristallin. Une version macroscopique de la formulation est obtenue en considérant d'une manière homogène équivalente l'effet de ces deux mécanismes.

La formulation adoptée lors de la modélisation est détaillée au chapitre III en précisant le choix des variables internes et l'approche thermodynamique de la transformation de phase et du glissement plastique. Ce chapitre développe également les méthodes d'intégration numérique adoptées.

Dans la dernière phase de notre travail, nous nous sommes intéressés à la validation du modèle et son implantation dans le code éléments finis ABAQUS. Le chapitre IV décrit cette procédure d'implantation en passant par la routine UMAT. Par la suite l'intégration sera validée par rapport aux résultats expérimentaux toute en identifiant les paramètres du modèle caractérisant l'alliage étudié.

Chapitre I

Introduction aux alliages à mémoire de forme et à la modélisation des comportements thermomécaniques associés aux transformations martensitiques

Sommaire

I.	Introduction	8
II.	Les AMF: historique, différentes familles et actualité de leur développement industriel	8
II.	Transformation martensitique et propriétés thermomécaniques associées	14
II.1	Transformation thermoélastique et non thermoélastique	15
II.2	Effet mémoire de forme simple sens.....	17
II.3	Effet mémoire de forme double sens	21
II.4	Superélasticité.....	22
II.5	Effet amortissant	23
II.6	Plasticité de transformation et effet mémoire double assisté	24
III.	Les alliages à mémoire de forme à base de fer	26
III.1	Compositions types	26
III.2	Durabilité et optimisation des AMF à base de fer.....	27
IV.	Modélisation du comportement thermomécanique associé à la transformation martensitique et au glissement plastique	28
IV.1	Introduction.....	28
IV.2	Modélisation de la plasticité de transformation dans les aciers TRIP.....	29
IV.3	Modélisation de la transformation martensitique induite par déformation au cours de la mise en forme des aciers inox.....	31
IV.4	Modélisation du comportement thermomécanique associé à la transformation martensitique dans les alliages a mémoire de forme	33
V.	Conclusions	37

I. Introduction

Considérés comme des matériaux « intelligents » et « avancés », les alliages à mémoire de forme (AMF) suscitent, depuis trois décennies, un intérêt croissant chez les industriels et les scientifiques. Ces matériaux, sont des solutions très intéressantes susceptibles de résoudre des problèmes rencontrés dans différents domaines industriels. Un alliage métallique possède une mémoire de forme si après déformation permanente à basse température, il retrouve sa forme initiale par simple chauffage [1]. L'appellation mémoire de forme ne recouvre qu'une partie des différents aspects du comportement qui dépend, avant tout, de la nature, du nombre et de la séquence des cycles de chargements thermomécaniques [2]. L'origine du comportement thermomécanique spécifique des alliages à mémoire de forme est une transition de phase à l'état solide réversible appelée transformation martensitique.

Les alliages à mémoire de forme les plus connus sont ceux à base de nickel-titane ou de cuivre-Aluminium ou cuivre- Zinc. Depuis la fin des années 80, nous avons noté l'émergence des alliages à mémoire de forme à base de fer qui présentent l'avantage d'avoir un rapport qualité/prix intéressant. Malgré cet avantage le développement de cette famille d'alliages est relativement limité et des efforts sont encore attendus pour surmonter les difficultés techniques de tenue en service et d'optimisation. De plus la mise au point de dispositifs en AMF à base de fer fiable nécessite un outil « modélisation » performant et efficace. C'est dans ce cadre que se situe le travail de cette thèse. Pour introduire le contexte général de notre étude, nous présentons dans le premier chapitre une étude bibliographique qui s'articule autour des mots-clés : Alliages à mémoire de forme (AMF), transformation martensitique et modélisation des comportements thermomécaniques associés.

II. Les AMF: historique, différentes familles et actualité de leur développement industriel

Les alliages à mémoire de forme sont caractérisés par un effet mémoire de forme : c'est la faculté d'un matériau de retrouver une forme bien précise par un simple chauffage. Ce phénomène a été découvert en 1932 par Chang et Read [3] sur un alliage or-cadmium. Cet effet fut ensuite observé en 1938 sur un alliage de cuivre-zinc. Mais les premières études ont été réalisées en 1962, puis en 1963 l'effet mémoire a été mis en évidence sur un alliage nickel-titane.

Pour que ces alliages soient efficaces et performants, de nombreuses difficultés, telles que la maîtrise des phénomènes de fatigue et de vieillissement, doivent être surmontées. De plus la mise au point de dispositifs, à base d'AMF, fiable, demande une connaissance de la modélisation du comportement de cette classe de matériaux.

Les alliages à mémoire de forme peuvent être classés en plusieurs catégories suivant différents critères (similitude de la transformation de phase, matériau, types d'applications, performances, prix,). Trois principales familles des AMF sont les plus étudiées, les alliages à base de Ti-Ni (Ti-Ni-Cu, Ti-Ni-Fe, Ti-Ni-Al), les alliages à base de Cu (Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni, Cu-Al-Be), et les alliages à base de Fe (Fe-Pt, Fe-Mn-Si,). Les alliages à base de Ni-Ti sont ceux qui présentent les meilleures performances : 7 à 8 % de déformation réversible (contre 4 % pour les cuivreux et les aciers) et une bonne tenue à la corrosion même en milieux agressifs. En plus de l'effet mémoire de forme simple sens et double sens, ces alliages peuvent présenter dans certaines conditions un comportement superélastique. Ces propriétés peuvent être à l'origine d'applications industrielles intéressantes. Il importe de préciser que les alliages à mémoire de forme à base de Ni-Ti sont capables d'exercer une contrainte importante de recouvrement (jusqu'à 600 MPa) lors d'un retour contraint à la forme austénitique.

Dans la bibliographie, on s'intéresse principalement à l'effet mémoire de forme. Cependant, le retour contraint est fortement modifié lorsqu'une force est appliquée induisant un décalage des températures limites de transformation. La principale conséquence de l'effet mémoire de forme des alliages Ni-Ti est donc le retour contraint, tandis que le retour libre n'est que le cas particulier où la contrainte reste nulle. L'effet superélastique suscite également un intérêt pour le développement de certaines applications nécessitant une souplesse importante (déformation réversible importante). Quelques auteurs [4, 5] ont étudié le retour contraint pour des fils de Ni-Ti et montrent sa capacité à générer une force proportionnelle à la température (Figure I-1 et Figure I-2).

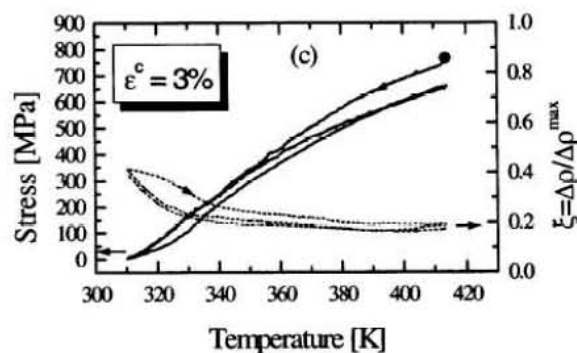


Figure I-1 : Retour contraint d'un fil Ni-Ti [4]

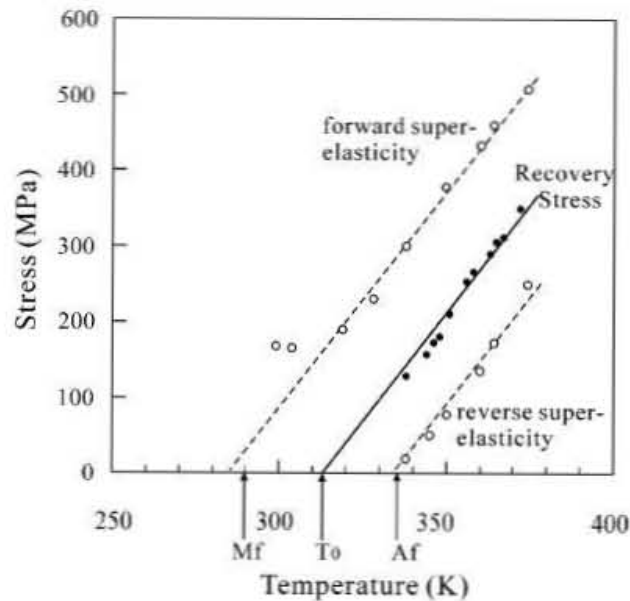


Figure I-2 : Retour contraint d'un fil Ni-Ti [5]

La deuxième famille des AMF est celle des alliages à base de cuivre qui ont des propriétés comparables à celles des alliages Ni-Ti. Il s'agit essentiellement des alliages Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni et Cu-Al-Be. Ils sont caractérisés par leurs excellentes conductivités électrique et thermique. Mais ils sont relativement difficiles à transformer, surtout pour des points de transition à basses températures où ils deviennent fragiles à cause de la forte anisotropie élastique d'un grain à l'autre induisant un gradient de contraintes aux joints des grains. Des travaux sont en cours pour développer des alliages monocristallins permettant de s'affranchir de ces défauts.

La troisième famille d'alliage est celle à base de fer. Les premiers alliages de cette famille qui ont montré un bon effet mémoire sont les alliages Fe-Pt et Fe-Pd [6]. La transformation martensitique dans ces alliages est du type γ (cfc) \leftrightarrow α' (cc). Dans les alliages Fe-Pt, un ordonnancement de la phase mère a été mis en évidence, et la transformation dans ces alliages peut être thermoélastique ou non suivant le paramètre d'ordre. Les alliages Fe-Pt et Fe-Pd ne présentent qu'un intérêt théorique du fait du coût élevé du Pt et du Pd. D'autres alliages à base de fer dans le système Fe-Ni ont montré un effet mémoire de forme. Nous citons à titre d'exemple les alliages Fe-Ni-C et Fe-Ni-Co-Ti [7]. Ce sont les aciers du système Fe-Mn-Si et ses dérivés qui ont suscité le plus d'intérêt grâce à leur bon effet mémoire de forme et leur coût relativement réduit. La transformation martensitique dans ces aciers est du type γ (cfc) \leftrightarrow ϵ (hc). C'est cette classe d'alliages qui nous intéresse dans cette étude. Quelques données bibliographiques au sujet de ces alliages seront montrées au paragraphe III.

Les applications basées sur des comportements en AMF exploitent les différentes propriétés thermomécaniques de ces alliages particulièrement l'effet mémoire de forme simple et double sens ainsi que la superélasticité. En 1969 la première application industrielle est apparue avec l'utilisation de manchons en alliage NiTi pour raccorder des tuyauteries hydrauliques sur des chasseurs F14. Accouplement de tube en Titane : Devant la difficulté d'assembler deux tubes en Titane par soudage, la société Raychem propose d'utiliser un manchon serrant, en utilisant l'effet mémoire de forme plutôt que la dilatation thermique pour accoupler les tubes. Le diamètre intérieur du manchon en AMF en phase austénitique est inférieur au diamètre du tube à raccorder. Ensuite le manchon est expansé en phase martensitique pour que son diamètre devienne supérieur à celui du tube à raccorder, après assemblage des tubes on chauffe le manchon pour assurer le serrage. Cet effort de serrage est très important pour tenter de retrouver son diamètre initial (il s'agit d'un retour contraint) (figure I-3).



Figure I-3 : Accouplement de tube en titane [8]

Le secteur biomédical est devenu le domaine majeur des applications de ces alliages. Ces dernières se divisent en deux grandes catégories : les implants (agrafe, prothèse...) qui utilisent en général les forces développées en retour contraint et les instruments chirurgicaux qui utilisent l'effet superélastique [9]. Dans l'utilisation des agrafes, il s'agit d'exercer une contrainte de compression sur les fragments d'os afin de resserrer les parties ouvertes et accélérer le processus de resoudage (figure I-4).



Figure I-4: Agrafes d'ostéotomie [9]

Une autre application médicale très importante des AMF est dans le domaine cardiovasculaire. La pose d'un implant endovasculaire (stent) assure la dilatation de l'artère bloquée. Le « stent » est inséré à basse température. La température du corps humain assure l'échauffement du « stent ». Ce dernier, placé au bon endroit, s'ouvre pour permettre une circulation sanguine. Ce composant est en Ni-Ti et utilise l'effet mémoire simple sens (figure I-5).

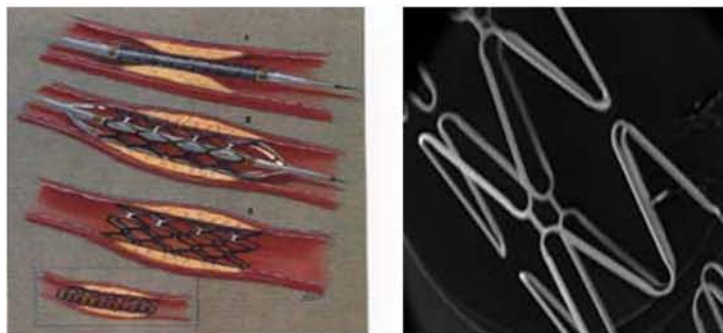


Figure I-5 : Utilisation des AMF pour les maladies Cardiovasculaires [9]

L'utilisation des AMF dans la lunetterie fut également un grand succès. Exploitant la super-élasticité des AMF, les lunettes sont beaucoup plus résistantes. Les lunettes existent en Ni-Ti ou en alliage cuivreux monocristallin, avec un avantage certain pour ce dernier du fait d'une plus grande flexibilité (figure I-6).

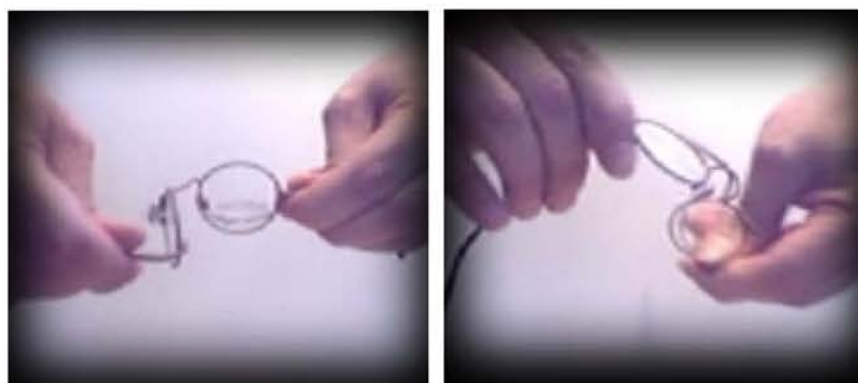


Figure I-6 : Lunette en AMF [8]

Les arches sont en Ni-Ti (Nickel-Titane) du fait de sa biocompatibilité. Le fil constituant l'arche utilise la superélasticité de cet alliage. Ainsi, le fil s'adapte mieux à la denture du patient et de plus les efforts répartis sur celle-ci sont beaucoup plus homogènes. Enfin, cela espace les visites chez l'orthodontiste pour le contrôle de la tension du fil (figure I-7).



Figure I-7 : Arche pour appareil dentaire [8]

La grande majorité des applications commercialisées sont basées sur des comportements en AMF de la famille Ni-Ti et des alliages à base de cuivre sous forme monocristalline. Par ailleurs, Les AMF à base de fer peuvent être choisis pour le développement d'applications de grande envergure en raison de leur bon rapport qualité prix. La résistance mécanique de cette famille d'alliages favorise leur utilisation dans des conditions sévères. Malgré leurs bonnes perspectives, ces aciers n'ont pas connu encore l'essor attendu avec un large spectre de domaines d'applications. Les applications les plus intéressantes de cette famille de matériaux, sont développées actuellement par la société Japonaise Awaji Materia Co, LTD [10]. Parmi ces applications, nous pouvons citer la bague de serrage des pipelines de transport de pétrole décrite par la figure I-8 A. D'une manière générale, cette bague de serrage peut être également utilisée dans l'assemblage des tubes qui véhiculent, divers liquides, dans les installations industrielles. Une deuxième application intéressante, développée récemment par la même société, consiste à doter les rails de grue d'éclisse¹ en alliage à mémoire de forme à base de fer. Les rails de grue, reliés habituellement par des éclisses en acier ordinaire, finissent par présenter un espace dû aux vibrations provoquées par le fonctionnement des grues. Cet espace aurait comme conséquence la formation de bosselures et de fissures, ce qui affecte négativement le déplacement des grues. L'éclisse en AMF a été adoptée comme un produit de remplacement pour palier à cet inconvénient. L'effet mémoire de forme de l'éclisse en AMF est exploité pour rattraper l'espace entre les rails et maintenir les rails bout-à-bout en service (figure 1-8 B). D'autres idées sont actuellement en cours d'investigation, où l'alliage à mémoire de forme à base de fer est utilisé comme matériau amortissant pour des applications en génie civil.

¹ Plaque d'acier réunissant deux rails par leur extrémité.¹

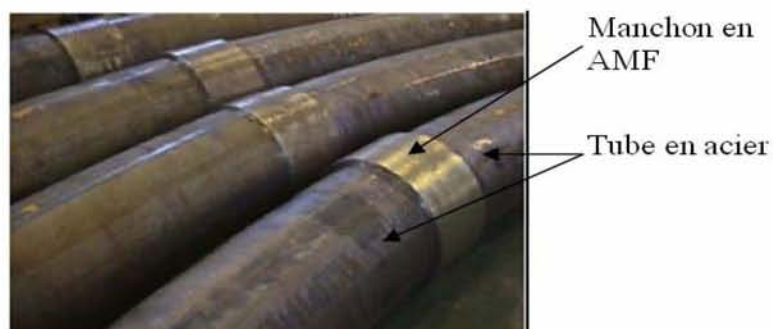


Figure I-8 A : Accouplement de tube en acier [10]

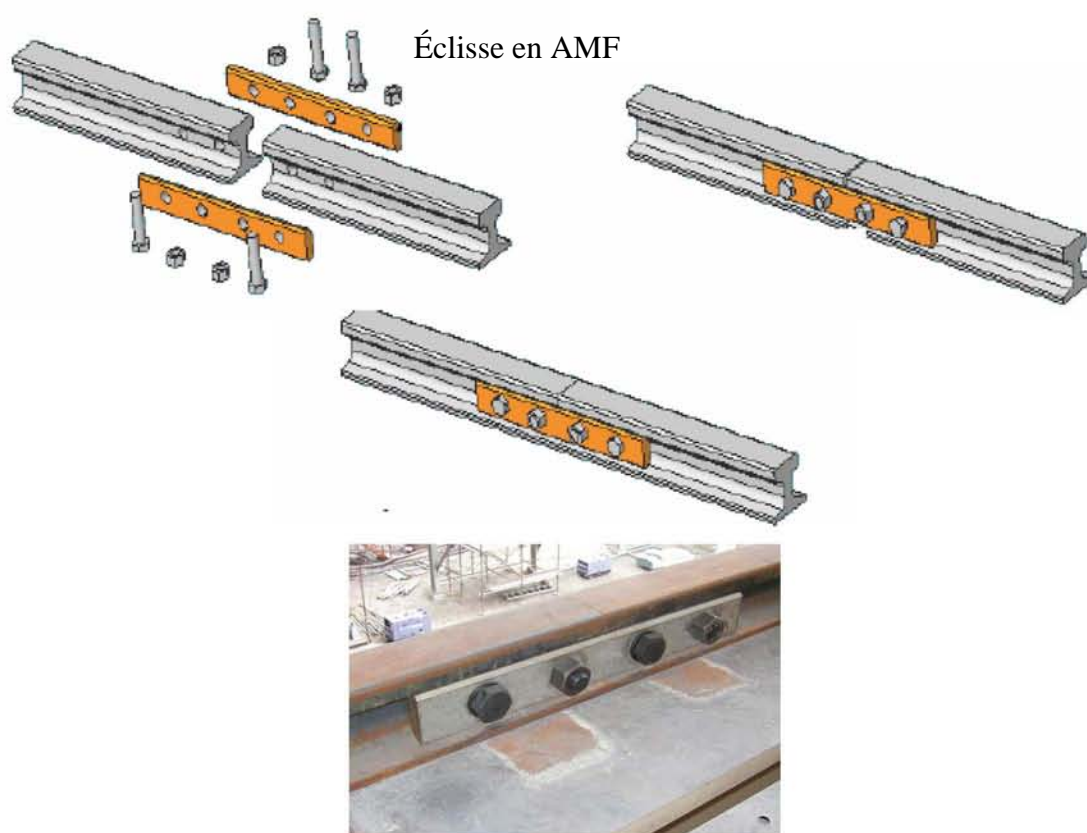


Figure I-8 B : Mise en place d'éclisse en AMF pour des rails de grue [10]

II. Transformation martensitique et propriétés thermomécaniques associées

Il est bien connu que la trempe d'un acier donne naissance à une microstructure extrêmement fine appelée martensite. La martensite de l'acier est obtenue à partir de l'austénite par une transformation de phase sans diffusion. Les termes de martensite et de transformation martensitique ont été étendus à d'autres alliages (Cu, Fe-Cr, ...). Cette transformation

constitue un changement de phase particulier à l'état solide qui est à l'origine des propriétés remarquables des alliages à mémoire de forme. La transformation martensitique est définie par Cohen et al. [6] et Guenin [11], comme une transformation displacive du premier ordre entraînant une déformation homogène du réseau, constituée principalement par du cisaillement.

La transformation est dite de premier ordre car les deux phases coexistent et il existe une interface entre l'austénite et la martensite. Elle se manifeste par un changement de structure cristalline qui se produit par un déplacement coordonné des atomes sur quelques distances interatomiques. C'est pourquoi la transformation martensitique est sans diffusion. L'absence de diffusion implique non seulement que la phase austénitique (phase mère) et la martensite ont la même composition chimique, mais que de plus, la martensite hérite de l'ordre et des défauts de la phase mère [12]. La transformation est dite displacive, autrement dit sans diffusion atomique car elle agit par un déplacement coopératif des atomes sur des distances relativement faibles par rapport aux paramètres de maille du réseau cristallin [13].

La transformation martensitique présente également une déformation homogène du réseau cristallographique. Le changement microstructural est constitué principalement par un cisaillement. Cette définition a été légèrement modifiée par Christian et al. [14] en précisant que la transformation martensitique est sans diffusion atomique et se produisant par germination et croissance. Elle est caractérisée par une déformation homogène du réseau constituée par un cisaillement.

II.1 Transformation thermoélastique et non thermoélastique

A l'échelle microscopique, en dépit de l'autoaccommodation, l'austénite et la martensite doivent se déformer pour accommoder la déformation liée à l'apparition de la martensite. Il faut différencier les cas où cette déformation reste dans le domaine élastique ou, au contraire, entre dans le domaine plastique [15, 16]. Lorsque cette déformation reste dans le domaine élastique, la transformation est dite thermoélastique. La transformation martensitique thermoélastique est caractérisée par une faible hystérésis. Au refroidissement, il y a croissance continue des plaquettes de martensite et simultanément nucléation de nouvelles plaquettes. Les interfaces sont complètement glissiles. Quand la température est maintenue constante, la transformation s'arrête, mais quand elle est de nouveau abaissée, la croissance des plaquettes redémarre par déplacement des interfaces. Les interfaces s'arrêtent quand les plaquettes se bloquent sur d'autres plaquettes ou aux joints de grains.

La limite d'élasticité de l'austénite n'est jamais atteinte. Ainsi, au refroidissement, l'échantillon stocke de l'énergie sous une forme élastique qui contribuera à la force motrice pour la transformation inverse au chauffage. Celle-ci se produira par le mouvement inverse des interfaces précédentes, ce qui permet un retour à la structure initiale. La déformation de transformation est accommodée élastiquement, la réversion de la martensite s'accompagne du retour à la forme initiale. Si l'échantillon est à une température comprise entre M_s et M_f alors une faible variation de la température, dans un sens ou dans l'autre, fera croître ou diminuer les plaquettes de martensite formées. Cette transformation est observée dans les AMF à base Ni-Ti et à base de cuivre [16]. Les principales caractéristiques de la phase de transformation sont :

- Transformation associée avec déformation non élastique [17].
- L'austénite et la martensite coexistent durant la phase de transformation, d'où l'existence d'un plan invariant qui sépare les deux phases [18].
- La transformation produit une contrainte de cisaillement. Cette transformation est cristallographiquement réversible [19].

On parle de martensite non-thermoélastique lorsque la déformation engendrée entre dans le domaine plastique. Il y a alors apparition de dislocations, qui immobilisent les interfaces austénite/martensite. La transformation non thermoélastique est caractérisée par une forte hystérésis. Pendant le refroidissement, les plaquettes de martensite se développent et s'arrêtent quand la température est maintenue constante. Cependant, pour un nouvel abaissement de température, elles ne vont pas nécessairement continuer leur mouvement et la poursuite de la transformation va se réaliser par germination et croissance de nouvelles plaquettes. La formation de ces plaquettes, induit des contraintes en raison des variations de forme et de volume qui l'accompagnent. Pour un certain niveau de ces contraintes, la limite d'élasticité de la phase mère sera atteinte.

La transformation inverse ne se produira pas par mouvement inverse des interfaces, mais par germination d'austénite à l'intérieur des plaquettes de martensite. Cette réversion est relativement plus exigeante en énergie motrice ce qui justifie l'importance de l'hystérésis. Il est important de préciser que la réversion décrite ici concerne la martensite thermique (autoaccommodée). Une réversion par mouvement des interfaces peut également se produire pour une martensite non thermoélastique mais induite sous contrainte (cas des alliages à mémoire de forme à base de fer)[20].

II.2 Effet mémoire de forme simple sens

L'effet mémoire de forme est défini comme étant le recouvrement de forme au chauffage après déformation en phase martensitique (cas des AMF usuels) où le recouvrement de forme au chauffage après déformation engendrée par la création de martensite induite sous contrainte (cas des AMF à base de fer). En absence des contraintes appliquées, les variantes de martensite s'arrangent habituellement en gardant la même forme (accommodation de la déformation). Par application des chargements mécaniques, les variantes de martensite sont forcement réorientées dans la direction des contraintes pour devenir une seule variante qui aboutit à une déformation macroscopique non élastique. Après chauffage, la phase martensitique retourne à la phase austénitique et la déformation non élastique sera recouverte : C'est l'effet mémoire de forme.

L'application d'une contrainte sur un réseau austénitique, pour les alliages à mémoire de forme à base de fer, va induire de la martensite orientée : c'est la martensite induite sous contrainte. Après chauffage, la phase martensitique retourne à la phase austénitique et la déformation de transformation sera recouverte. Ces deux mécanismes d'effet mémoire sont détaillés dans les paragraphes suivants.

II.2.1 Mécanisme d'effet mémoire de forme pour les alliages conventionnels

Dans le cas de l'utilisation de l'effet mémoire de forme, le matériau initialement austénitique possède une forme donnée. Il est refroidi à une température inférieure à M_f et devient totalement martensitique. Il est important de noter que la forme est macroscopiquement inchangée. Une contrainte externe est appliquée dans cet état martensitique et l'échantillon prend une autre forme. C'est donc la déformation physique et non pas la transformation martensitique, qui fait changer l'échantillon de forme. Lors de l'application de cette contrainte, il y a déformation élastique de la martensite, puis réorientation des plaquettes de martensite. En effet, la martensite est stable à cette température ($T < A_s$) et une déformation subsiste. Il suffit alors de réchauffer le matériau au-delà de A_f , pour que la transformation inverse (martensite \rightarrow austénite) se produise et que l'échantillon retrouve sa forme initiale (figure I-9). L'alliage fournit alors soit un déplacement, soit un travail ou les deux à la fois, convertissant ainsi l'énergie thermique en travail mécanique avec un rendement de l'ordre de 10 % [21].

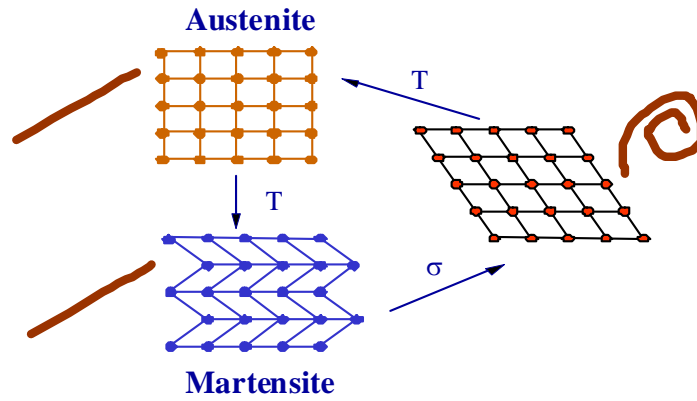


Figure I-9: Mécanisme de l'effet mémoire de forme dans les alliages AMF conventionnels représenté dans un modèle bidimensionnel (2 variantes de martensite).

D'un point de vue mécanique, nous observons cet effet (Figure I-10) lorsque l'alliage est soumis à un chargement thermomécanique correspondant aux séquences (a)+ (b) +(c) (Figure I-11).

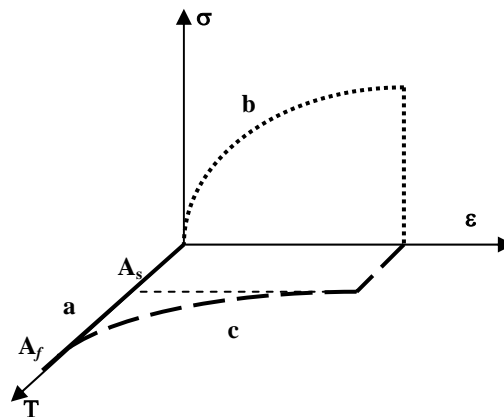


Figure I-10 : Cycle thermomécanique et effet mémoire simple sens

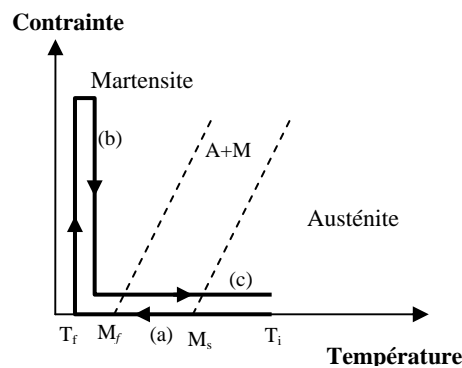


Figure I-11 : Chargement thermomécanique séquentiel permettant d'obtenir l'effet mémoire de forme simple sens.

Le trajet (a) : transformation martensitique complète (on traverse complètement la zone biphasée), mais sans déformation macroscopique (σ étant nulle, il n'y a pas d'orientation privilégiée, pour les variantes). Plusieurs variantes sont activées, elles génèrent des déformations microscopiques qui se compensent pour donner une déformation macroscopique nulle : on dit que ces variantes sont auto-accommodantes (Figure I-12)

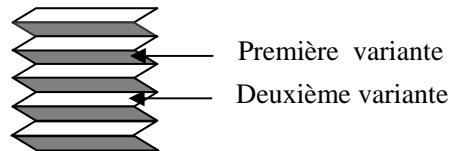


Figure I-12: Schématisation d'un groupe de 2 variantes auto-accommodantes

Trajet (b) : On a une réorientation des variantes sous l'augmentation de la contrainte qui crée une déformation résiduelle à la décharge, on est en présence d'un état martensitique déformé par rapport à l'état austénitique initial.

Trajet (c) : Ce trajet permet de visualiser l'effet mémoire simple sens, associé à la transformation martensitique inverse. La martensite a été « orientée » par la contrainte σ à l'étape précédente, cette transformation provoque donc une déformation inverse de celle créée par la contrainte et l'alliage recouvre donc sa forme initiale.

La mise en évidence de l'effet mémoire simple sens à partir d'un alliage initialement en phase austénitique est représentée sur la Figure I-13.

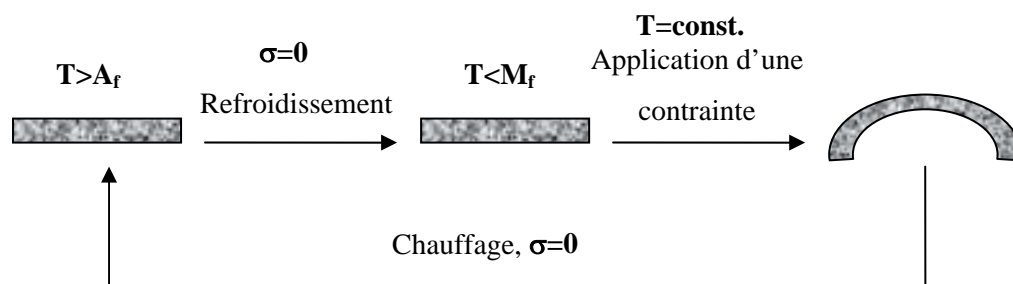


Figure I-13 : Mise en évidence de l'effet mémoire de forme pour les alliages à mémoire de forme conventionnels.

II.2.2 Mécanisme d'effet mémoire de forme pour les alliages à base de fer type Fe-Mn-Si

Les alliages à mémoire de forme à base de fer (type Fe-Mn-Si) présentent un bon effet mémoire de forme (allant jusqu'à 5%). Le mécanisme responsable est différent de celui décrit précédemment pour les alliages à mémoire de forme usuels. L'application d'une contrainte sur un réseau austénitique va induire de la martensite orientée. Ceci aura pour conséquence une déformation macroscopique (la martensite obtenue est appelée martensite induite sous contrainte). Le chauffage permet le retour au réseau et donc à la forme initiale [22] (Figure I-14). Nous observons cet effet (Figure I-15) lorsque l'alliage est soumis à un chargement thermomécanique correspondant aux séquences (a) + (b).

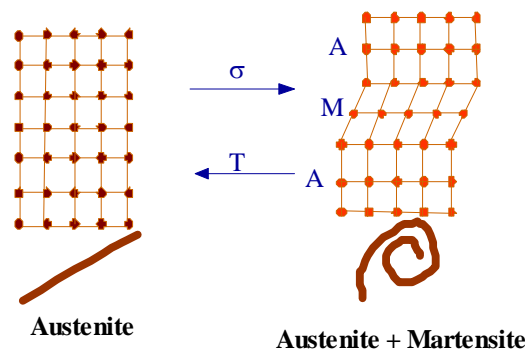


Figure I-14 : Schéma de l'effet mémoire de forme dans les aciers à mémoire de forme du système Fe-Mn-Si.

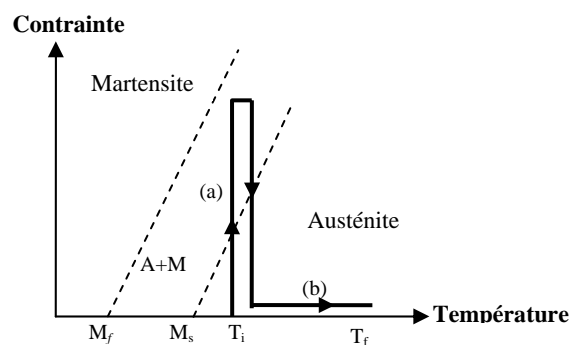


Figure I-15 : Chargement thermomécanique séquentiel permettant d'obtenir l'effet mémoire de forme dans les alliages de type Fe-Mn-Si.

Trajet (a) : L'application d'une contrainte sur un état austénitique va induire de la martensite orientée et on aura un état biphasé (austénite +martensite).

Trajet (b) : Après relâchement de la contrainte et chauffage, la phase martensitique retourne à la phase austénitique. C'est la transformation martensitique inverse.

II.3 Effet mémoire de forme double sens

Des cycles thermomécaniques tels que ceux décrits dans le cas de l'effet mémoire simple sens peuvent être répétés un certain nombre de fois. On obtient alors un phénomène de conditionnement. Un échantillon conditionné se déforme spontanément au refroidissement et reprend sa forme initiale au chauffage au-dessus d' A_f . Ce comportement ne nécessite aucune contrainte extérieure : c'est l'effet mémoire double sens. Il existe plusieurs façons de réaliser les traitements de conditionnement [23]. L'effet mémoire double sens après éducation est observé dans les alliages présentant une transformation martensitique thermoélastique (alliage Ni-Ti, alliage de cuivre) (Figure I-16 et Figure I-17).

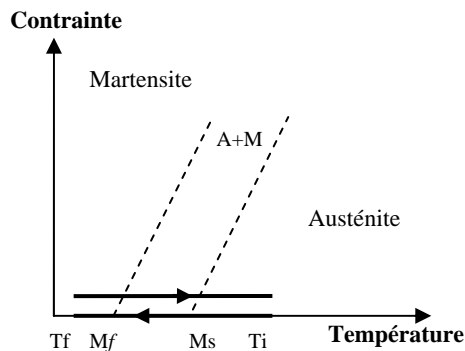


Figure I-16 : Chargement thermique permettant d'obtenir l'effet mémoire de forme double sens.

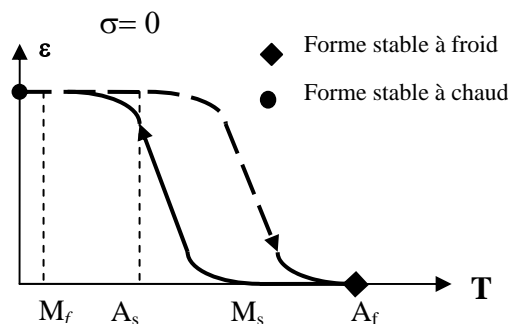


Figure I-17 : Effet mémoire de forme double sens : sans contraintes externes appliquées, une déformation ϵ_M de transformation lors d'un simple refroidissement est observée.

L'effet mémoire double sens est un effet super-thermique dans lequel les contraintes appliquées sont remplacées par des contraintes internes provenant du conditionnement. La mise en évidence de l'effet mémoire double sens est représentée par la Figure I-18.

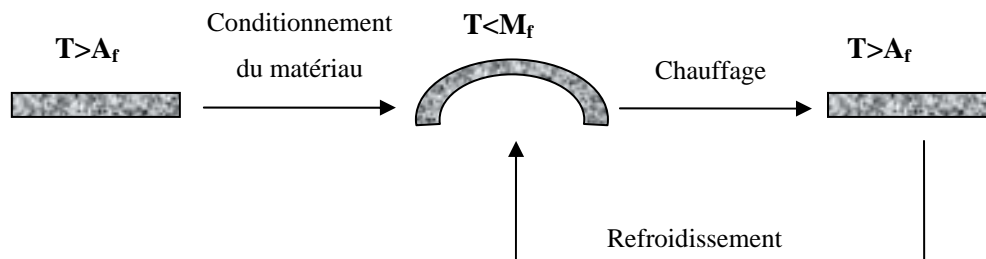


Figure I-18 : Mise en évidence de l'EMF double sens.

II.4 Superélasticité

La superélasticité est la possibilité de déformer un AMF de plusieurs % à partir de l'état initial austénitique, à une température légèrement supérieure à A_f . On applique une contrainte supérieure à une contrainte critique σ_c , la variante de martensite qui apparaît est orientée dans le sens le plus favorable par rapport à la direction du chargement [24, 25] et on observe une déformation importante dans le sens de la contrainte appliquée. Puis on retrouve la forme initiale lorsque la contrainte est relâchée. Au niveau de la courbe contrainte-déformation, on observe alors un plateau de déformation associé à un module beaucoup plus faible que le module élastique de l'austénite, (Figure. I-19).

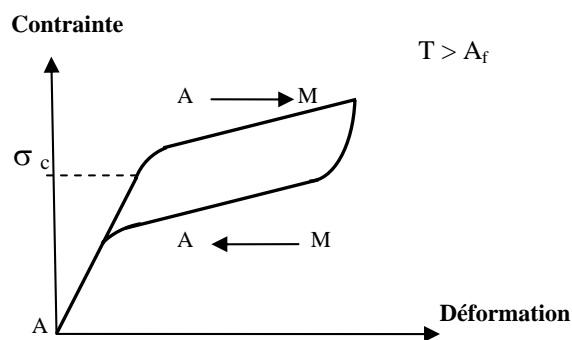


Figure I-19 : Effet superélastique

L'effet superélastique est utilisé pour plusieurs applications en Ni-Ti tel que les lunettes, les fils pour le textile, les prothèses dentaires...

II.5 Effet amortissant

L'effet amortissant correspond à la dissipation de l'énergie mécanique lors de la transformation martensitique. Les AMF présentent une faculté d'amortissement remarquable grâce à la formation sous contrainte de multiples plaquettes de martensite ce qui engendre la création et le mouvement d'une multitude d'interfaces entre l'austénite et la martensite et entre les variantes. Le déplacement de ces interfaces conduit à une dissipation de l'énergie par frottement, ce qui entraîne un amortissement conséquent. C'est lors de la transformation martensitique (et de la réversion) que le frottement intérieur est le plus important, car il est associé à la création et au déplacement des interfaces austénite/martensite et martensite/martensite très mobiles.

L'hystérésis dans les courbes de transformation pour les AMF à base de Cu et Ni-Ti indique une perte d'énergie lors d'un cycle thermomécanique. Ceci reflète la capacité d'un AMF à dissiper l'énergie d'une excitation mécanique externe. Cette propriété, appelée aussi frottement interne : Q^{-1} , présente également un grand intérêt pour des applications technique[26]. La Figure I-20 est un exemple d'une mesure réelle du frottement interne Q^{-1} d'un fil en Ni-Ti.

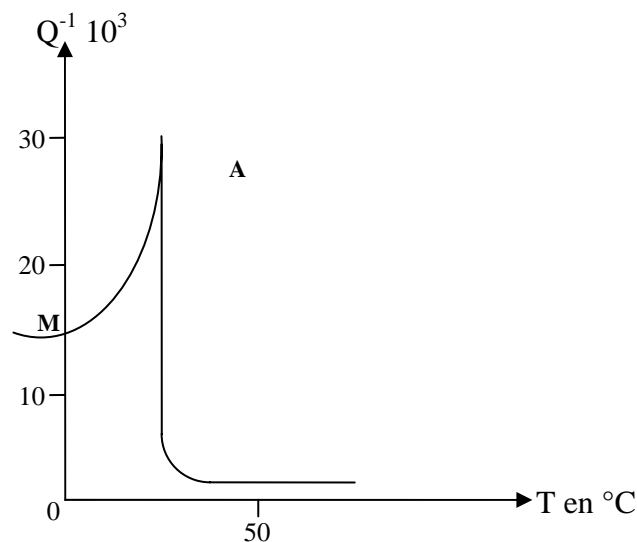


Figure I-20 : *Mesure réelle du frottement interne Q^{-1} en fonction de la température dans un fil en Ni-Ti [26]*

Le traitement thermique de l'AMF joue un rôle important pour ses propriétés d'amortissement. Par exemple, une trempe après un recuit génère une grande concentration de

lacunes qui limitent la mobilité des interfaces par piégeage. Par conséquent, l'amortissement est peu élevé pour un tel matériau. [26]

II.6 Plasticité de transformation et effet mémoire double assisté

Lors d'une transformation de phase, les matériaux métalliques présentent un adoucissement mécanique considérable au voisinage des températures de transformation. Dans ce domaine de température, la réponse des matériaux à une sollicitation mécanique, même faible, n'est ni celle de la phase mère, ni celle de la nouvelle phase transformée. Ce phénomène est appelé plasticité de transformation. Cette définition exprime que la plasticité est induite par la transformation, "Transformation Induced Plasticity" (TRIP). Deux mécanismes ont été proposés pour expliquer la plasticité de transformation et ses origines :

- ◆ Le mécanisme de Magee [27] (Figure I-21).

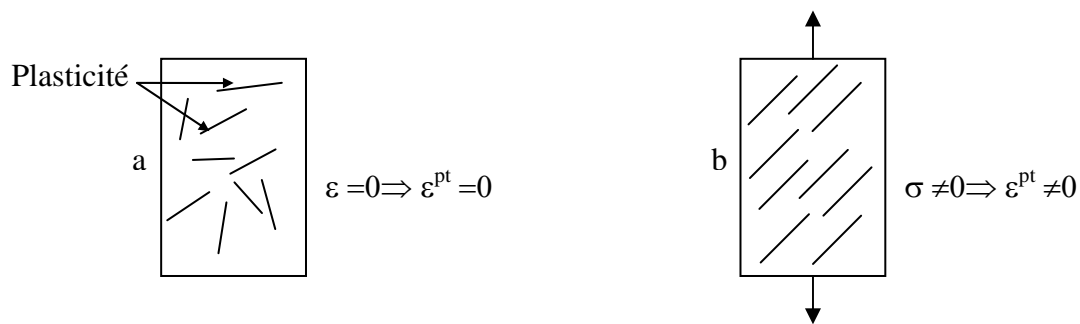


Figure I-21: Représentation schématique de la plasticité de transformation (mécanisme de Magee)(a) absence de contrainte appliquée et (b) application d'une contrainte

La transformation austénite - martensite se fait par formation de plaquettes de martensite dans la phase austénitique. Les caractéristiques thermomécaniques des deux constituants étant différentes, des sollicitations de cisaillement sont engendrées. En absence de contrainte appliquée, les plaquettes de martensite s'orientent aléatoirement. Par contre, si une contrainte extérieure est appliquée, cette dernière oriente les plaquettes suivant une même direction, et une déformation irréversible macroscopique dans la direction de la contrainte effective appliquée est alors observée.

- ◆ Le mécanisme de Greenwood et Johnson [28]. (Figure I-22).

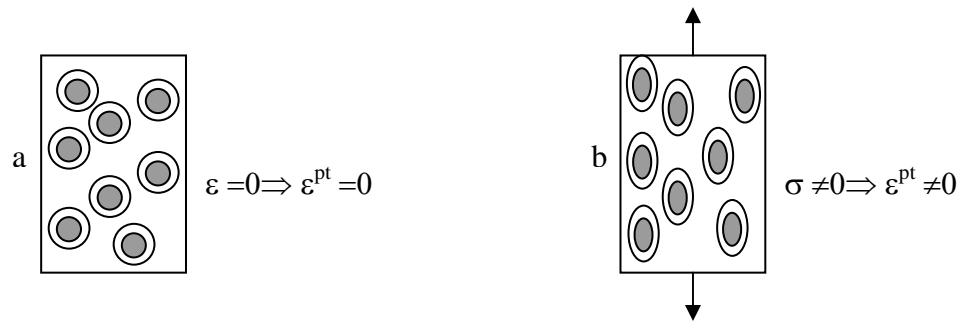
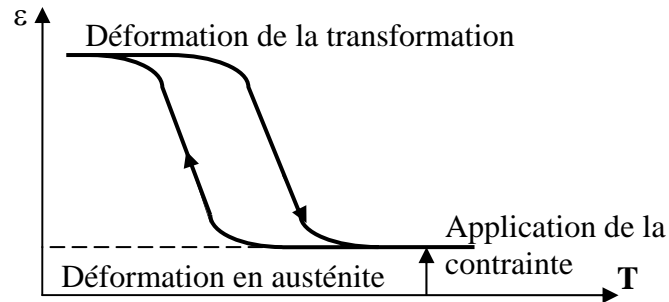


Figure I-22 : Représentation schématique de la plasticité de transformation (mécanisme de Greenwood et Johnson) : (a) absence de contrainte appliquée et (b) application d'une contrainte

La phase austénitique est une structure cubique à faces centrées, alors que les structures ferritiques ou martensitiques sont des structures cubiques centrées. La différence de compacité entre ces deux structures induit un changement de volume lors de la transformation. L'existence de contrainte externe au cours d'une transformation métallurgique à l'état solide, peut conduire à l'apparition d'une déformation plastique macroscopique même pour des niveaux de contrainte nettement inférieurs à la limite d'élasticité de la phase la plus molle.

Bouraoui et al [29] ont étudié la plasticité de transformation dans le cas des alliages à mémoire de forme à base de fer. Ils ont montré que l'abaissement de la température sous contrainte, favorise la formation et l'orientation de la martensite. Cette orientation des plaquettes de martensite, sous l'action d'une contrainte appliquée et maintenue, donne lieu à une plasticité de transformation. Dans les alliages à mémoire de forme, la plasticité de transformation, peut donner naissance à un effet mémoire double sens assisté. En effet, l'application d'une faible contrainte dans l'état austénitique provoque une déformation élastique. Le refroidissement sous contrainte, jusqu'à l'état martensitique, permet d'obtenir une déformation importante (plasticité de transformation). Un chauffage à haute température provoque le retour à la forme initiale lors de la réversion de la martensite. La figure I-23 représente le comportement de l'effet mémoire de forme double sens assisté par une contrainte externe.



Cycle obtenu lors d'une évolution en température sous une contrainte

Figure I-23: Schéma de l'effet mémoire double sens assisté (associé à la plasticité de transformation)

III. Les alliages à mémoire de forme à base de fer

De nombreuses études expérimentales, réalisées dans divers laboratoires de recherche ont permis de caractériser les alliages à mémoire de forme à base de fer aussi bien au niveau métallurgique que thermomécanique. Les résultats publiés concernent particulièrement les alliages de la famille Fe-Mn-Si. C'est une composition type de cette famille (Fe-Mn-Si) qui a été retenue pour mener notre étude expérimentale et théorique. Dans ce qui suit nous présentons une synthèse bibliographique de l'essentiel des résultats obtenus sur les AMF de la famille Fe-Mn-Si.

III.1 Compositions types

Les compositions optimales pour le ternaire Fe-Mn-Si sont les alliages avec 28 % à 32 % de Mn et de 5 % à 6 % de Si. Cependant la mauvaise tenue à la corrosion de ces alliages limite leur utilisation. D'autres compositions introduisant le chrome et le nickel sont commercialisées. La tenue à la corrosion pour ces nuances est nettement améliorée. L'ajout de Cr et Ni engendre la diminution de la teneur en Mn sans modifier celle en Si. Les compositions type de ces alliages sont :

Fe-28%Mn-6%Si-5%Cr

Fe-20%Mn-5%Si-8%Cr-5%Ni

Fe-16%Mn-5%Si-12%Cr-5%Ni

L'entrée en lice de nouvelles générations d'alliages basées sur le système Fe-Mn-Si s'est fait remarquer récemment. Dans ces nouvelles nuances, on introduit des éléments terre rares, le niobium, le carbone et l'azote avec des compositions de type Fe-Mn-Si-Cr-RE [30], Fe-Mn-Si-Cr-N [31], Fe-Mn-Si-Nb-C [32], Fe-Mn-Si-Cr-Ni-Nb-C [33]. L'intérêt de ces nouveaux alliages

réside dans l'amélioration notable de leur effet mémoire de forme. Par ailleurs, il est rapporté que, dans l'alliage Fe-25Mn-6Si-5Cr-0,14N, l'azote augmente la probabilité de formation des défauts d'empilement et le volume de martensite induite sous contrainte ce qui se traduit par un bon effet mémoire de forme [31]. L'addition du Cr et du Ni améliore la tenue à la corrosion [34].

III.2 Durabilité et optimisation des AMF à base de fer

Les alliages à mémoire de forme de type Fe-Mn-Si sont caractérisés par un bon effet mémoire de forme, mais par une faible résistance à la corrosion. Charfi et al. [35] ont envisagé un traitement de surface approprié permettant d'améliorer la résistance à la corrosion de l'alliage Fe-32Mn-6Si sans altérer sa propriété de mémoire de forme. Ils ont montré grâce aux mesures électrochimiques et thermomécaniques et aux essais de corrosion réalisés dans une chambre de brouillard salin, que le revêtement de zinc électrolytique suivi d'un traitement de chromatisation peut être considéré comme une bonne solution anticorrosion de l'alliage Fe-32Mn-6Si.

Van Caenegem et al.[36] ont étudié deux compositions chimiques d'alliages à mémoire de forme à base de fer Fe-29Mn-7Si et Fe-22Mn-7Si-5Cr. Ils ont déterminé par mesure dilatométrique, pour différentes déformations, les températures de transformation. D'autre part ils ont procédé à un essai de flexion pour mesurer la contrainte de recouvrement liée à l'effet mémoire de forme.

Koyama et al.[37] ont étudié l'effet de cyclage sur la déformation pour les alliages à mémoire de forme à base de fer. Pour cela ils ont étudié la courbe contrainte- déformation à chaque cycle. Ils ont constaté que le cyclage favorise la formation de la martensite induite sous contrainte. Ils ont aussi confirmé que le cyclage de 2 à 3% améliore l'effet mémoire de forme. Hang et al. [38] ont étudié l'effet du traitement thermomécanique sur l'alliage à mémoire de forme à base de fer type Fe-30Mn-6Si. Ils ont étudié deux types d'alliages : Le premier laminé à froid et le deuxième à l'état recuit. Ils ont constaté que la température M_s pour l'alliage laminé à froid est inférieure à celle d'un alliage ayant subi un recuit. Ils ont aussi montré que les alliages laminés à froid ont un mauvais effet mémoire de forme, car la structure déformée réduit ou empêche la transformation $\varepsilon \leftrightarrow \gamma$.

Malgré que l'alliage Fe-23,3 Mn-2,8Si n'a pas d'intérêt pratique, Bujoureu et al. [39] l'ont étudié et ils ont montré qu'il possède un bon effet mémoire de forme. Ce comportement est attribué à l'existence de la martensite introduite sous contrainte ε (hcp), après un essai de traction de déformation 4,3% sur un état austénitique γ .

La contrainte de recouvrement des alliages Fe-23,3 Mn-2,8Si, augmente de 200 MPa à 300 MPa après un cycle de chauffage-refroidissement entre la température ambiante et 200°C. Cet alliage peu être utilisé pour des applications industrielles tel que la bague de serrage.

Dong et al.[40] ont montré que l'ajout du Vanadium et du Carbone améliore l'effet mémoire de forme. Ils ont recouvré 70% après application de 4% de déformation à la température ambiante. La contrainte de recouvrement pour ces alliages est de l'ordre de 380 MPa pour un chauffage de 225 °C.

Nishima et al. [41] ont simulé le comportement thermomécanique des aciers TRIP et des AMF à base de fer. L'approche utilisée est capable de décrire le comportement observé expérimentalement. Ils ont tenu compte de l'évolution de la fraction volumique de la martensite après le chargement thermomécanique. Les auteurs ont constaté que l'énergie d'interaction entre les variantes de martensite est responsable de l'augmentation de la déformation dans la direction du chargement pour des fractions volumiques élevées (TRIP). Pour les AMF la simulation décrit la transformation inverse qui dépend du taux de la martensite formée.

IV. Modélisation du comportement thermomécanique associé à la transformation martensitique et au glissement plastique

IV.1 Introduction

La modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme usuel (Ni-Ti, cuivreux) est bien étudiée. Ce qui n'est pas le cas des alliages à mémoire de forme à base de fer tel que les Fe-Mn-Si et ces dérivés. Peu d'études se sont intéressées à la modélisation et la simulation numérique du comportement de ces alliages.

La modélisation des AMF à base de fer passe par la prise en considération de la transformation martensitique $\gamma \rightarrow \epsilon$ et du glissement plastique dans la phase austénitique ainsi que leurs interactions. D'une manière générale la transformation martensitique dans les aciers est à l'origine de comportements spécifiques tels que ceux obtenus dans les aciers TRIP et les aciers inoxydables. La modélisation de ces matériaux a fait l'objet d'un nombre relativement important d'études. La synthèse de ces travaux de recherche aide à appréhender la modélisation des AMF à base de fer de type Fe-Mn-Si.

IV.2 Modélisation de la plasticité de transformation dans les aciers TRIP

Les aciers TRIP présentent une ductilité élevée et une forte résistance. Cette propriété remarquable trouve son origine dans la transformation martensitique de l'austénite. Berveiller et al. [42] ont modélisé ce comportement avec une approche par transition d'échelle en utilisant le cadre de la micromécanique pour déterminer les forces motrices ainsi que les lois de germination et de croissance qui contrôlent l'évolution de la microstructure. La présence de frontières mobiles et la discontinuité du champ de déformation sont prises en compte dans l'écriture des équations du modèle.

Bouquerel et al. [43] ont proposé un modèle micromécanique basé sur une analyse des contributions des différentes phases susceptibles d'exister dans les aciers TRIP, telles que la ferrite, la bainite et la martensite. Il est important de préciser que la plasticité de transformation peut être mise en évidence en effectuant une sollicitation mécanique à une température donnée constante : la plasticité de transformation, liée à une transformation de phase, se traduit par une augmentation de déformation plastique globale (Figure I-24).

D'autres familles de modélisation basées sur une approche phénoménologique sont proposées. On peut citer : Greenwood, Johnson [28]. Dans leur analyse l'accommodation plastique est reliée au changement de volume qui est dû à la transformation martensitique. Les auteurs ont développé les relations constitutives entre les TRIP dans le cas unidimensionnel. Ensuite Leblond et al. [44] ont extrapolé les équations en tridimensionnel. Fischer et al. [45] ont ajouté au modèle l'effet de l'orientation.

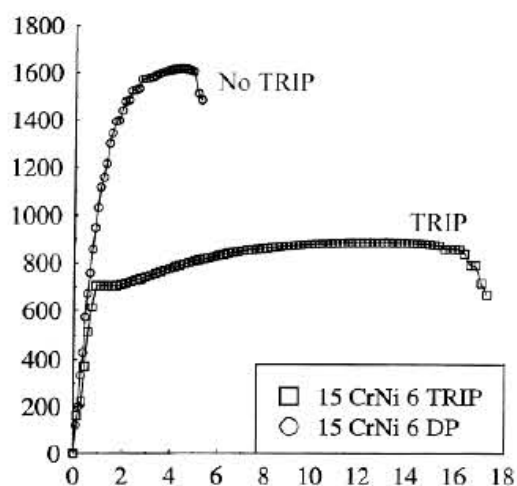


Figure I-24 : Comportement d'un acier TRIP en traction [45]

Leblond et al. [44] ont développé un modèle phénoménologique basé sur la décomposition de la déformation.

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{pl} + \varepsilon^{tp}$$

ε^{el} : Déformation élastique

ε^{th} : Déformation thermique

ε^{pl} : Déformation plastique

ε^{tp} : Déformation de transformation

Cette approche tient compte d'une part, de la variation de la contrainte et la température et d'autre part de la fraction volumique de la martensite formée au cours de la transformation. Ce modèle a donné des réponses au niveau contrainte-déformation, mais en raison de sa nature phénoménologique, il n'inclue pas d'informations cristallographiques. Stringfellow et al. [46] ont utilisé une formulation unidimensionnelle, dans la quelle ils ont lié l'évolution de la martensite à la déformation plastique, pour aboutir à un modèle qui tient compte de ces caractéristiques microstructurales. Bhattacharyya et Weng [47] ont tenu compte du taux d'accroissement de la fraction volumique de la martensite formée au niveau de l'expression de l'énergie libre du Gibbs. Puis ils ont adopté un modèle isotropique pour avoir une réponse sur l'élasticité de l'austénite et de la martensite. Fischer et al.[45] ont décrit le début de la transformation en fonction de l'incrément de la variation de l'énergie libre de Gibbs. Ils ont calculé numériquement la germination et la croissance dans un modèle bidimensionnel en tenant compte de l'orientation des variantes de la martensite. Les études réalisées par Olivier et al. [48], et Kruijer et al. en 2003 [49] sur les aciers TRIP ont été focalisées aux phénomènes de la transformation et en particulier l'orientation cristallographique des différents grains du VER.

Cherkaoui et al. [50] ont adopté une approche basée sur la description des mécanismes de la transformation martensitique et de la plasticité. Une forme simple de l'expression de la dissipation est proposée afin de tenir compte de l'effet de la germination et de la croissance des variantes de martensite. La dissipation mène à choisir les fractions volumiques de la martensite comme variables internes décrivant l'évolution de la microstructure. Ils ont proposé une loi de comportement d'un monocristal d'austénite dans le quel la transformation de phase est couplée avec la plasticité.

Pour étudier l'effet de la température et de la vitesse de déformation sur l'écoulement plastique, Rusinek et al. [51] ont réalisé de nombreux essais expérimentaux en traction uniaxiale pour diverses vitesses de déformation à différentes températures. En complément, ils

ont réalisé des mesures en thermographie infrarouge dans le but d'obtenir une information supplémentaire sur l'élévation de température. La combinaison de ces résultats permet d'avoir des informations sur les mécanismes de déformation agissant non seulement sur l'écoulement plastique mais aussi sur la transformation de phase au cours de la déformation plastique.

La capacité d'érouissage des aciers multiphasés à effet TRIP est fortement influencée par les dislocations au sein de la matrice ferritique suite à la transformation martensitique de l'austénite retenue. A côté du durcissement par apparition de martensite dure au sein d'une matrice ferritique ductile, l'amélioration des propriétés mécaniques des aciers multiphasés à effet TRIP dépend également du taux de transformation de l'austénite et du durcissement par dislocations qui en résulte. [51]

IV.3 Modélisation de la transformation martensitique induite par déformation au cours de la mise en forme des aciers inox

Les aciers inoxydables sont des aciers alliés contenant une teneur de carbone inférieure à 1,2% et une teneur en chrome supérieure à 10%. Pratiquement, il faut atteindre 12% de chrome pour que l'acier soit considéré inoxydable grâce à la formation d'une couche superficielle d'oxyde de chrome exceptionnellement stable d'un point de vue thermodynamique. Les aciers inoxydables possèdent d'excellentes qualités de résistance à la corrosion notamment en milieu atmosphérique, de très bonnes caractéristiques mécaniques et de bonnes aptitudes à la mise en forme à froid ou à chaud. Les éléments d'alliage jouent un rôle plus ou moins important dans la détermination de la structure des aciers inoxydables et possibles instabilités microstructurales. Cependant, c'est le chrome et le nickel qui sont les constituants les plus importants. La détermination des lois de comportement des aciers inoxydables austénitiques métastables exige une bonne connaissance de la cinétique et des lois d'évolution de la transformation martensitique. Olson et Cohen [52] qui ont été les pionniers dans le domaine de la modélisation, ont développé un modèle phénoménologique pour décrire la cinétique de la transformation martensitique.

De nombreuses études ont donc été menées pour décrire le comportement des aciers inoxydables austénitiques et l'influence de la transformation martensitique sur ce comportement. Onyuna et al. [53] ont étudié le comportement mécanique de l'acier inoxydable 304 en le considérant comme un mélange biphasé, ils proposent une relation pour décrire la contrainte d'écoulement similaire à celle proposée par Bargui et al. [54]. La loi de comportement proposée par ces auteurs, permet de prendre en compte l'influence de la déformation et de la température sur la transformation martensitique.

De leurs parts, Diani et Parks [55] ont développé un modèle polycristallin pour simuler différents états de contraintes et voir leurs effets sur la cinétique de la transformation martensitique. Ils ont ainsi vérifié que la fraction volumique de martensite induite par déformation est liée à l'état de contrainte, à la température et également à la texture initiale du matériau.

Les propriétés des aciers inoxydables à de basses températures sont fortement influencées par la transformation martensitique induite par déformation plastique. Les plaquettes de martensite incorporées dans la matrice austénitique provoquent la concentration locale d'effort et bloquent le mouvement des dislocations. Par conséquent l'existence de la martensite induit l'écroutissement.

Le modèle constitutif de Skoczen [56] décrit la transformation de phase induite par déformation plastique à basses températures, qui provoque la présence de deux effets fondamentaux : interaction des dislocations avec les inclusions de la martensite et augmentation de la rigidité du matériau qui est due à la présence de la martensite. L'interaction des dislocations avec les inclusions de la martensite est indiquée par le module d'écroutissement qui dépend de la fraction volumique de la martensite. Les deux effets contribuent à un écroutissement non-linéaire qui se produit dès que le processus de transformation de phase commence.

Comme application, il a utilisé les pièces de charpente sous forme de tiges de section circulaire (cylindres). La microstructure est obtenue par torsion imposante aux températures cryogéniques. L'intensité de la transformation de phase et la profondeur de la zone transformée est obtenue par commande cinématique appropriée (angle de torsion).

Les caractéristiques microstructurales et cinétiques de la transformation martensitique induite par déformation plastique de l'acier AISI 304 ont été établies par diffraction des rayons X en dispersion d'énergie couplée aux analyses métallographiques au M.E.B. sur des éprouvettes de traction uniaxiale sollicitées à température ambiante et à basses températures (- 196 °C).

Gallée et al. [57] ont remarqué que l'apparition de la phase martensitique engendre des problèmes au niveau des procédés de mise en forme et notamment l'apparition de casses différées, il est nécessaire de développer une loi de comportement tridimensionnelle spécifique aux nuances austénitiques et prenant en compte cette transformation martensitique. De même, l'influence du changement de phase sur l'emboutissabilité de la nuance instable 304 comparativement à la nuance 316 plus stable peut être appréciée expérimentalement sur des essais d'emboutissage et numériquement par une modélisation basée sur une approche macroscopique et sur une approche micromécanique intégrant le changement de phase.

IV.4 Modélisation du comportement thermomécanique associé à la transformation martensitique dans les alliages à mémoire de forme

Pour construire un modèle, nous allons tout d'abord analyser les modèles présents dans la bibliographie. Il en existe deux types : les approches phénoménologiques et les approches micromécaniques. Les premiers sont les plus adaptés aux simulations par éléments finis, mais le modèle micromécanique décrit de manière plus physique les mécanismes à l'origine du comportement des AMF.

IV.4.1 Approches micromécaniques

L'approche de type micromécanique, avec transition d'échelle, où l'on considère une variable locale scalaire caractéristique, comme la fraction volumique d'une variante de martensite à l'intérieur d'un grain. Cette approche est basée sur la résolution d'une série d'équations constitutives pour un volume élémentaire représentatif de la microstructure de l'alliage. Le comportement global est alors déterminé à partir de la description du comportement local de chaque grain en passant par une technique de transition d'échelle tel que la méthode autocohérente.

Dans le domaine des matériaux à transformation de phase, et plus particulièrement celui des alliages à mémoire de forme, la plupart des lois de comportement sont basées sur la thermodynamique des processus irréversibles. Patoor et al. [58] déterminent le potentiel thermodynamique de Gibbs relatif à un volume polycristallin dans lequel peuvent coexister, dans chaque grain, 24 variantes possibles de martensite. Ce potentiel thermodynamique est fonction de la température, du tenseur de contrainte et du taux de martensite dans chaque grain qui sont des paramètres intrinsèques du modèle. L'expression qui en résulte est une fonction scalaire de second ordre qui tient compte de l'interaction entre les variantes de martensite dans un grain. Cette interaction se manifeste comme étant une énergie mécanique interne. Le type de potentiel choisi dépend des variables de contrôle utilisées pour connaître l'état thermodynamique du système. Afin d'obtenir un pilotage en contrainte et en température il faut définir l'énergie libre de Gibbs du système.

Patoor et al. [59] ont obtenu une expression simplifiée du potentiel thermodynamique, qui est fonction du taux de martensite formée pour chaque variante, de la température et le tenseur de contrainte. La réponse du système, c'est-à-dire, la variation du taux de martensite pour une contrainte et une température données, est obtenue par minimisation du potentiel

thermodynamique. Une fois le taux de martensite est connu, la déformation de transformation dans un grain peut être calculée en additionnant les déformations provenant des différentes variantes actives. Le comportement macroscopique est déduit à partir de la technique d'homogénéisation autocohérente. Cette approche demande la connaissance du nombre de grains et leurs orientations respectives dans le volume étudié. Dans les modèles micromécaniques, de nombreuses variables internes sont nécessaires. Ce sont généralement les 24 fractions volumiques de variantes de martensite, multipliés par le nombre de grains considérés par le Volume Élémentaire Représentatif (VER).

Le modèle bilinéaire constitue un autre exemple d'une telle approche, plusieurs auteurs l'ont utilisé pour modéliser le comportement superélastique des AMF. Dans le cas du comportement superélastique, l'approche de ce modèle est basée sur l'approximation du comportement en une série de lignes dans le plan contrainte- déformation. Dans ce modèle la réponse en traction d'un alliage à mémoire de forme peut se décomposer en une droite traduisant le comportement élastique et une autre traduisant la transformation martensitique.

Müller et Xu [60] ont proposé un modèle bilinéaire basé sur l'énergie thermodynamique d'équilibre en utilisant les équations de type de Vander Waals. Ce qui conduit à construire ce modèle par une série de lignes droites. D'autre part, Sun et Hwang [61] ont développé un modèle général en tenant compte des principaux comportements de l'alliage à mémoire de forme, tels que la superélasticité et l'effet caoutchoutique. Leur travail est basé sur le potentiel thermodynamique similaire à celui utilisé par Likhatchev [62] et Patoor [58].

IV.4.2 Approches phénoménologiques

L'approche de type macroscopique phénoménologique, où l'on considère une relation directe entre les variables internes et la déformation macroscopique de la transformation. C'est l'approche adoptée lorsque les modèles sont destinés au calcul de structures, le faible nombre de variables internes impliquant un temps de calcul sensiblement moins élevé.

Les premiers modèles phénoménologiques ont été développés par Tanaka [63] pour la modélisation du comportement superélastique de ces alliages en unidimensionnel. Raniecki et L'excellent [64] Brinson et Bekker, [65] ont développé un modèle basé sur un pseudo-diagramme de phase simplifié permettant de simuler des trajets thermomécaniques comme le refroidissement sous contrainte, l'effet mémoire ou encore la réorientation. Ensuite Boyd et Lagoudas [66] ont utilisé ces modèles pour une extension en tridimensionnel. Tanaka [63] a

déterminé les équations thermomécaniques constitutives et les équations qui décrivent la cinétique de la transformation martensitique à partir des considérations thermodynamiques. Tanaka [67] a obtenu une relation qui décrit l'évolution de la fraction volumique de la martensite en fonction du chargement thermomécanique. Le comportement de l'alliage est déduit de l'énergie libre de Helmholtz de la structure. Les hypothèses principales de cette approche sont : une déformation de transformation orientée suivant la direction de la contrainte, une fraction volumique qui décrit la quantité de martensite orientée, une deuxième fraction volumique qui décrit la quantité de martensite autoaccommodée. La difficulté consiste à définir explicitement les énergies libres associées à l'austénite, à la martensite orientée et à la martensite autoaccommodée ainsi que l'énergie libre d'interaction entre chaque phase. Mais cette énergie ne permet de déterminer que les limites de début de transformation austénite → martensite et inverse. Dans leurs travaux, Lagoudas et al. et Boyd et al. [66,68] ont pu déterminer la déformation de transformation, en se basant sur les concepts qui sont initialement développés par Tanaka [63, 67].

Bekker et Brinson [69] considèrent un jeu de données expérimentales pour définir la réponse à différents chargements thermomécaniques. Un diagramme de transformation contrainte-température combiné à des cinétiques décrivant la transformation est utilisé pour déduire le comportement. Certains modèles [70, 71], sont basés sur la construction du diagramme de transformation à partir d'une analyse thermomécanique de la transformation martensitique. Ceci permet de définir une description mathématique capable de prédire la réponse unidirectionnelle de l'AMF. D'autres modèles sont construits en tenant compte de la similitude entre la superélasticité et la plasticité [72]. La transformation de l'austénite en martensite débute lorsque la surface de charge est atteinte et se termine lorsque le matériau devient totalement martensitique. En utilisant une formulation inspirée de la plasticité, ces modèles sont adoptés au calcul par élément finis pour des chargements isothermes. Par contre, si l'influence de la température est intégrée au niveau de la surface de charge, l'effet mémoire de forme ainsi que le recouvrement contraint, exploités par plusieurs applications, ne sont pas prédits.

Pour modéliser le comportement des cycles partiels il faut, plus que l'identification des variables internes, introduire les paramètres mécaniques supplémentaires qui permettent de déterminer d'une façon unique l'état thermomécanique du matériau. Amengual et al. ont proposé en 1996 [73] un modèle qui donne des résultats assez précis au moins dans des cas des cycles partiels du première ordre. La modélisation se base sur l'expression du taux de martensite en fonction de la température. Les auteurs introduisent une nouvelle variable

d'état : la variation de taux de martensite par rapport à la température, elle correspond à la pente des courbes de cycles partiels. Les valeurs initiales de cette variable sont données d'une telle façon que les cycles partiels dans leurs extrémités sont soit tangents soit parallèles aux cycles principaux. Par exemple, sur la partie descendante de la boucle d'hystérésis (chauffage) cette variable est égale à la pente de la tangente, tandis que sur la partie ascendante (refroidissement) elle est nulle. La valeur de la pente d'un cycle partiel dans tous les points à l'intérieur de la boucle d'hystérésis est calculée comme une combinaison linéaire de ces valeurs sur les deux extrémités. Le dernier pas consiste à réécrire cette dernière expression en fonction du taux de martensite et de la température. Une autre méthode nommée la méthode intégrale, a été proposée par Ortin [74]. Les diagrammes contrainte-déformation ont été utilisés et la déformation dans un cycle partiel se présente sous forme d'intégrale. La situation devient plus complexe lorsqu'on cherche à considérer l'influence des défauts dans le matériau, notamment l'influence des rassemblements de dislocations sur le maillage. Il devient alors nécessaire de mettre en valeur l'aspect de la déformation plastique [75]. L'excellent et Bourbon [76] ont divisé le taux de martensite en trois contributions : une martensite auto-accommodante, une martensite orientée, et une martensite résiduelle instantanée, pour représenter des effets cycliques.

Peultier et al. [77] ont développé un modèle basé sur une approche phénoménologique à variables internes définies à l'échelle macroscopique d'un matériau polycristallin. Le choix des variables internes permet de distinguer l'effet de la transformation de phase de celui de l'orientation des variantes de martensite et donc de la déformation de la martensite.

Le modèle présenté par Peultier et al. [77] est dédié aux calculs de structure comportant des éléments en alliage à mémoire de forme. L'objectif est d'obtenir une loi permettant une bonne description de tous les comportements thermomécaniques spécifiques des AMF tout en restant bien adaptée aux calculs par éléments finis. La majeure partie des dispositifs utilisant des éléments actifs étant en nickel-titane, le développement de ces applications nécessite un outil de conception adapté aux spécificités de cet alliage. La facilité d'identification des paramètres du matériau, et la prise en compte des principaux comportements des AMF constituent les points forts de ce modèle. Par ailleurs, Y. Chemisky [78] a apporté des modifications significatives au modèle de Peultier, permettant de mieux rendre compte de la diversité du comportement des AMF, notamment au voisinage des températures de transformation. La prise en compte de comportements spécifiques aux alliages nickel-titane a aussi été ajoutée. L'implémentation numérique a été particulièrement travaillée, afin d'obtenir un modèle

robuste capable de simuler un grand nombre de trajets thermomécaniques en utilisant le logiciel ABAQUS.

Goliboroda et al. [79] sont les seuls qui ont utilisé l'approche phénoménologique pour la modélisation de l'alliage à mémoire de forme à base de fer après un chargement cyclique. Ils ont utilisé un model phénoménologique à deux niveaux synthétiques pour la déformation non linéaire. Ce modèle a été employé pour la réflexion de l'interaction du processus de la déformation. L'approche mène à une faible description de l'effet cyclique qui a lieu après un chargement complexe de température et de la contrainte. Le modèle établi est basé sur des prétentions physiques de la déformation du cisaillement. Ainsi ce modèle a pu être appliqué pour la description de différentes natures de processus de déformation. Dans cette approche les auteurs ont supposé que les dislocations de la plasticité dans l'état biphasé dépendent de la fraction volumique de la martensite. Ils tiennent compte de l'action de micro-contraintes dans les micro-déformations.

Panico et Brinson [80] ont pris en compte les trajets de chargement non proportionnels multiaxiaux, ainsi que le comportement de réorientation de la martensite et de transformation de phase. Les lois d'évolution de ce modèle permettent de modifier la fraction volumique de deux types de martensite. Les effets superélastiques et de l'effet mémoire double sens assisté sont modélisés par l'évolution de la fraction volumique de martensite orientée.

Toutes ces formulations sont adaptées pour la modélisation de la transformation de phase des alliages à mémoire de forme, mais elles ne tiennent pas en compte le glissement plastique et son interaction avec la transformation.

V. Conclusions

Une synthèse bibliographique a été réalisée. D'une part le comportement des alliages à mémoire de forme usuels tel que la superélasticité, l'effet mémoire de forme simple et double sens, d'autre part nous nous sommes intéressés aux alliages à mémoire de forme à base de fer type Fe-Mn-Si. Cet alliage, comme les AMF usuels, se distingue des autres alliages par un son comportement thermomécanique qui a pour origine la transformation martensitique de phase. Il se spécifie des alliages à mémoire de forme usuels par le couplage entre la transformation martensitique (variante), et la plasticité (système de glissement plastique).

Les différents types de comportements observés dans ces alliages ont été commentés, mais leurs succès industriel restent modestes. Pour réussir une application en alliages à mémoire de forme à base de fer, nous avons besoin d'un outil numérique de dimensionnement de ces

applications faisant appel à une loi de comportement assez représentative des mécanismes de transformation et de plasticité.

A partir de la bibliographie nous avons étudié les lois du comportement et les approches utilisées pour la modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme à base de fer. Vu le manque d'études sur la modélisation de ces alliages nous avons traité le cas des aciers TRIP et les aciers inoxydables qui ont un comportement spécifique assez proche de celui des AMF à base de fer. Pour cela nous avons réalisé une synthèse des travaux de recherche pour ces deux matériaux afin d'aider à la modélisation des AMF à base de fer type Fe-Mn-Si.

Nous nous sommes inspirés de ces approches de la bibliographie afin de développer un modèle décrivant le comportement des alliages à mémoire de forme à base de fer. Il décrit l'effet de la transformation de phase et du glissement plastique ainsi que leur interaction. Dans le chapitre suivant une étude de caractérisation expérimentale est présentée. Elle a permis de mettre en évidence les principales propriétés de ces alliages et d'alimenter le modèle proposé et décrit dans le chapitre III. Enfin le quatrième chapitre est consacré à la validation de ce modèle et à son implantation dans le code élément fini ABAQUS.

Chapitre II

Étude expérimentale du comportement thermomécanique de l'alliage à mémoire de forme Fe-32Mn-6Si

Sommaire

I.	Introduction	40
II.	Composition chimique de l'alliage étudié et traitement thermique de référence.....	40
III.	Mise en évidence de la transformation martensitique réversible et mesure des points de transformation.....	41
III.1	Mesure de la résistance électrique.....	41
III.2	Mesure dilatométrique :	42
IV.	Comportement thermomécanique.....	43
IV.1	Mise en évidence de l'effet mémoire de forme en flexion.....	43
IV.2	Comportement mécanique en traction.....	44
IV.3	Mesure de dureté de l'état austénitique.....	46
IV.4	Sollicitation en traction et mesure de l'effet mémoire de forme	47
IV.5	Micrographie et dureté de l'état monophasé austénite et biphasé austénite-martensite induite sous contrainte.....	49
IV.6	Diagramme contrainte-température	52
V.	Conclusion	58

I. Introduction

Dans le cadre de nos travaux de thèse nous nous sommes intéressés aux alliages à mémoire de forme à base de fer type Fe-Mn-Si. Ces aciers ont suscité le plus d'intérêt grâce à leur bon effet mémoire de forme et leur coût relativement réduit. L'objectif était de contribuer à la conception d'une application en AMF exploitant le comportement thermomécanique. Pour cela on a réalisé une étude expérimentale. Notre étude est basée sur la réalisation des essais pour la caractérisation de l'alliage, des essais de dureté, des essais de dilatométrie, des observations micrographiques et des essais thermomécaniques (chargement mécanique à température constante suivie d'un chauffage pour l'estimation de la déformation de transformation).

II. Composition chimique de l'alliage étudié et traitement thermique de référence

L'alliage étudié a été élaboré par la société française Aubert et Duval. Il a été forgé en barreaux à chaud, à l'état austénitique à 1050°C pendant une heure, puis trempé à l'eau.

Tableau II-1: Composition chimique de l'acier étudié (en masse %)

Fe	Mn	Si	C	N	S
Balance	31,6	6,45	0,018	0,0052	0,0079

La nuance de l'alliage étudié est considérée comme la référence de la famille des alliages à mémoire de forme à base de fer de type Fe-Mn-Si. L'état de réception est caractérisé par une importante couche d'oxyde, résultante de la mise en forme à haute température.

Les analyses métallographiques et les mesures physiques réalisées sur cet état ont révélé que l'alliage est biphasé : coexistence de l'austénite et de la martensite [81]. La présence de la martensite thermique n'est pas favorable à l'effet mémoire de forme. Par ailleurs, il a été également montré qu'un chauffage à 600°C pendant une heure suivi d'un refroidissement à l'air confère à l'alliage un état austénitique à l'ambiante. C'est ce traitement que nous avons adopté comme référence [82].

III. Mise en évidence de la transformation martensitique réversible et mesure des points de transformation

III.1 Mesure de la résistance électrique

La mesure de la résistance électrique est une méthode expérimentale largement utilisée comme outil de recherche pour la caractérisation et l'étude des matériaux métalliques. Les alliages à mémoire de forme présentent une transformation martensitique réversible. La mesure de leur résistance électrique nous apporte des précisions sur leur comportement en température.

Des essais de mesure de résistance électrique ont été déjà réalisés [21] sur les AMF à base de fer de type Fe-Mn-Si (figure II-1). Bouraoui [21] a pris un échantillon qui a subi un traitement de référence et il a effectué le cycle suivant :

25°C → -150°C → 280°C → 25°C

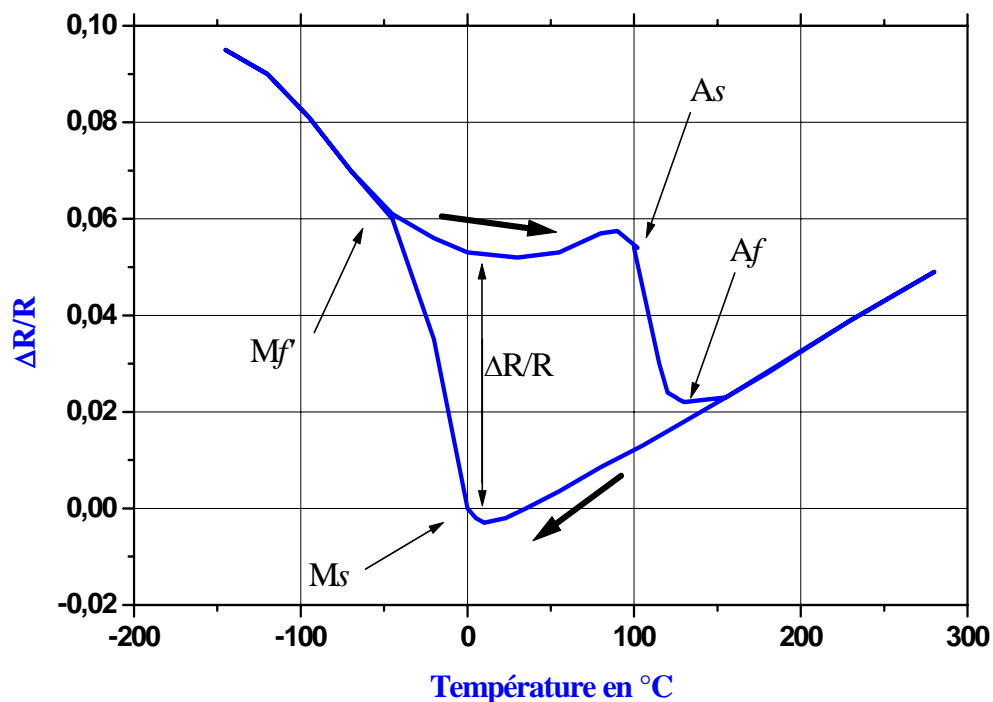


Figure II-1 : Variation de la résistance électrique en température [21]

Les températures de transformation (M_s , A_s , A_f) sont déterminées à 10% et 90%. Nous précisons que dans notre cas, les pourcentages sont calculés à partir de la quantité de la martensite formée. La température particulière M_f' est déterminée quand les courbes de

chauffage et de refroidissement se recouvrent. La transformation martensitique inverse paraît être beaucoup moins étalée en température que la transformation martensitique directe pour laquelle il est difficile de déterminer avec précision le point de fin de transformation M_f . Mais pour alimenter notre modèle développé dans le chapitre III, nous avons besoin que des températures de transformation (M_s , A_s , et A_f). À partir de la figure II-1, nous relevons les températures de transformation : $M_s = 0 \pm 5^\circ\text{C}$, $M_f = -60 \pm 5^\circ\text{C}$, $A_s = 100 \pm 5^\circ\text{C}$, $A_f = 125 \pm 5^\circ\text{C}$.

III.2 Mesure dilatométrique :

Pour vérifier les températures de transformation, nous avons réalisé des mesures dilatométriques en température. La dilatométrie est une technique expérimentale particulièrement utilisée pour analyser le comportement dimensionnel des matériaux soumis à un cycle thermique. Cette méthode caractérise non seulement la dilatabilité, mais permet aussi l'étude des différentes évolutions structurales qui peuvent se développer au sein de l'alliage au cours du cycle. Ces mesures sont utiles pour mettre en évidence l'effet mémoire de forme et de déterminer les températures de transformation.

L'appareil utilisé est un dilatomètre Adamel équipé d'un système de chauffage et de refroidissement. La vitesse de chauffage est fixée à 2°Cmn^{-1} . Nous avons réalisé des mesures dilatométriques au chauffage en suivant le cycle thermique suivant $0^\circ\text{C} \rightarrow 400^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}$. Ensuite pour suivre la transformation inverse, nous avons réalisé le cycle suivant $0^\circ\text{C} \rightarrow 180^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}$, (Figure II-2).

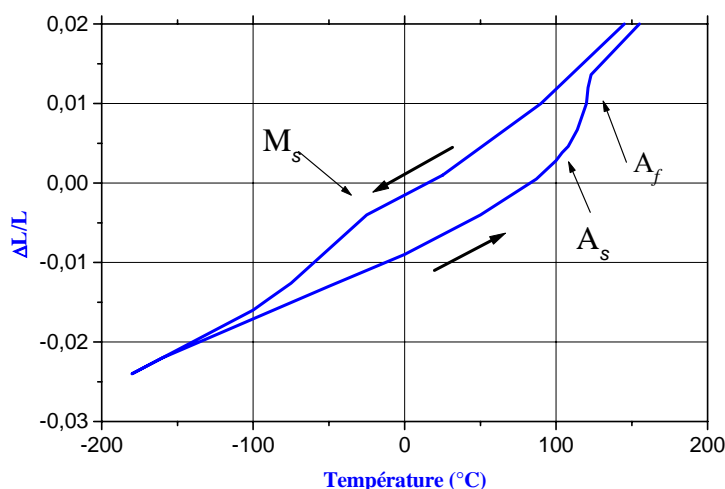


Figure II-2 : Mesure dilatométrique pour l'alliage Fe-Mn-Si

Nous remarquons que les températures A_s , A_f et M_s déterminées par mesure dilatométrique sont proches de celles déterminées par mesure de la résistivité électrique. $M_s = -20 \pm 5^\circ\text{C}$, $A_s = 105 \pm 5^\circ\text{C}$, $A_f = 120 \pm 5^\circ\text{C}$. Le rapport $\frac{\Delta L}{L}$ nous renseigne sur la quantité de martensite qui disparaît au chauffage.

IV. Comportement thermomécanique

IV.1 Mise en évidence de l'effet mémoire de forme en flexion

Pour la nuance donnée, il est relativement facile de mettre en évidence l'effet mémoire de forme. Il suffit de disposer d'une lame de faible épaisseur (0,2 ou 0,3) (Figure II-3).



Figure II-3 : Forme initiale d'une lame d'épaisseur 0,3 mm

La lame peut être enroulée sur une tige de diamètre égale à 10 mm (figure II-4)



Figure II-4: Déformation de la lame

Après cette opération, la lame est en forme de U (figure II-5)

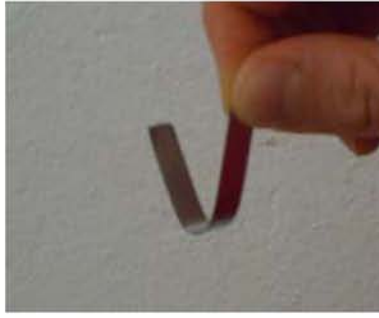


Figure II-5 : *Lame après déformation*

La lame peut retrouver sa forme initiale par simple chauffage (figure II-6)

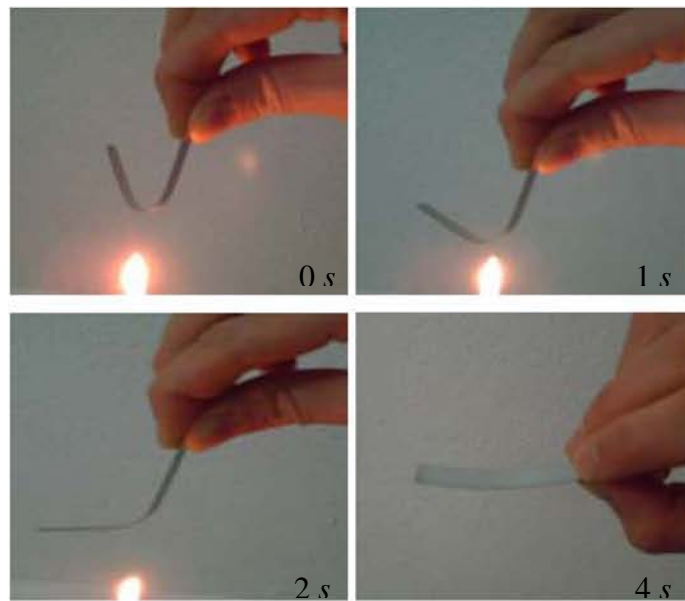


Figure II-6 : *Mise en évidence de l'effet mémoire de forme*

Nous avons réalisé une déformation $\varepsilon = \frac{e}{D} = \frac{0,3}{10} = 0,03 \rightarrow \varepsilon = 3\%$. Suivie d'un chauffage

local par une flamme pour quelques secondes (environ 4 secondes). Cet essai nous a permis de mettre en évidence le bon effet mémoire de forme de cet alliage. Nous avons constaté que l'éprouvette ne retrouve pas exactement sa forme initiale. En effet, pour une contrainte donnée à la température ambiante, l'alliage à mémoire de forme à base de fer passe de l'austénite à la martensite (transformation martensitique réversible) ou voit apparaître du glissement plastique au niveau de l'austénite induisant une déformation irréversible [82].

IV.2 Comportement mécanique en traction

Pour analyser notre alliage et comprendre les phénomènes de transformation de phase et des systèmes de glissement plastiques, nous avons réalisé des chargements mécaniques à

température constante suivie d'un chauffage pour l'estimation de la déformation de transformation. Les dimensions et la forme de l'éprouvette de traction sont précisées dans la figure II-4 et le tableau II-7.

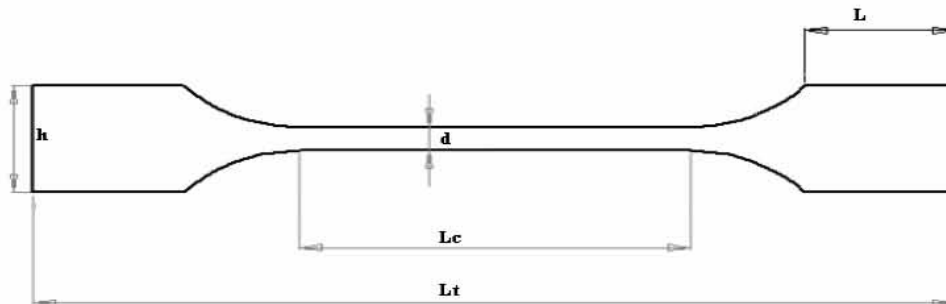


Figure II-7 : Éprouvette de traction à différentes températures

Tableau II-2 : Caractéristiques géométriques des éprouvettes

Lc	Lt	L	h	d	Épaisseur
50mm	135mm	20mm	16mm	6mm	1mm

Vu que l'acier de notre étude nous a été fourni par la société Aubert et Duval sous forme d'un barreau de section carrée de côté 18mm, les éprouvettes ont été découpées par électroérosion. Nous avons réalisé un essai de traction jusqu'à rupture à la température ambiante et sur une éprouvette à l'état austénitique (γ), (Figure II-8). La machine de traction utilisée est une machine MTS de charge maximale égale à 5KN à transmission mécanique. Cette machine est équipée d'un extensomètre de longueur égale à 50mm, et une vitesse de déformation fixée à $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

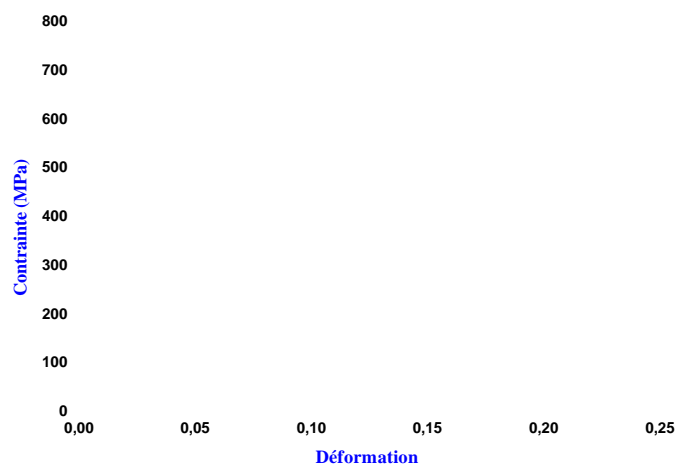


Figure II-8 : Courbe de traction à l'ambiante jusqu'à rupture

À partir de la courbe de traction, il est clair que nous ne pouvons pas déterminer avec précision le début de la transformation martensitique $\gamma \rightarrow \epsilon$. C'est une caractéristique des aciers à mémoire de forme de type Fe-Mn-Si. En effet, pour les alliages non ferreux à mémoire de forme le début de la transformation martensitique se traduit par un plateau (augmentation de la déformation pour une contrainte quasi-constante) [59,83]. Cette différence de comportement est expliquée par le fait que, contrairement aux alliages non ferreux, la transformation martensitique des aciers à mémoire de forme n'est pas purement thermoélastique [84] et la phase martensitique formée est plus dure que la phase mère austénitique comme nous allons le montrer lors de nos essais de dureté.

Cette courbe nous informe sur le module de Young (pente de la partie linéaire élastique) $E=130000$ MPa est plus importante que le module de Ni-Ti ($E =70000$ MPa) ou celui de cuivre ($E=90000$ MPa). La pente non linéaire de la courbe représente la transformation martensitique couplée avec la plasticité de l'austénite. Cette partie peut être approximée à une pente de 2000 MPa. La limite à la rupture pour ces alliages est proche des alliages cuivreux : entre 400 et 700MPa, mais elle est faible par rapport aux Ni-Ti : entre 800 et 1000 MPa.

IV.3 Mesure de dureté de l'état austénitique

Avant de procéder aux mesures de dureté, nous avons pris plusieurs échantillons à l'état austénitique qui ont subi un polissage mécanique et une attaque chimique. L'épaisseur éliminée est environ de 50 μm . Le réactif d'attaque utilisé est le Nital de composition : 4 % Nital, 96% d'éthanol. A partir d'une dizaine de mesures de dureté avec un duromètre de charge 3kg, nous avons relevé une valeur moyenne égale à 210 Hv qui montre bien que notre état est purement austénitique, [21]. Une empreinte de dureté réalisée sur un état austénitique provoque des traces proches de l'empreinte. Ces traces peuvent correspondre à des macles mécaniques dans l'austénite ou bien à des aiguilles de martensite (figure II-11).

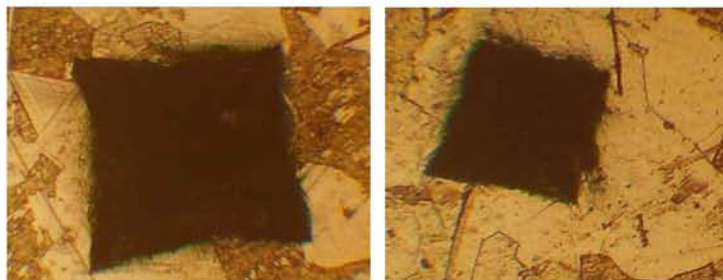


Figure II-11 : Trace autour d'une empreinte de dureté sur un échantillon à l'état austénitique

Pour mieux étudier ces traces nous avons pris un état purement austénitique (figure II-12-a) sur lequel nous avons réalisé une empreinte de dureté de charge 3kg (figure II-12-b). Nous remarquons qu'il y a des traces autour de l'empreinte de différentes directions (figure II-12-c). Après polissages et attaque chimique nous remarquons que les traces existent (figure II-12-d), ce qui confirme que ces traces ne correspondent pas à des macles mécaniques dans l'austénite. Ces traces pourraient être des fines plaquettes de martensite formées sous contrainte mécanique de compression.

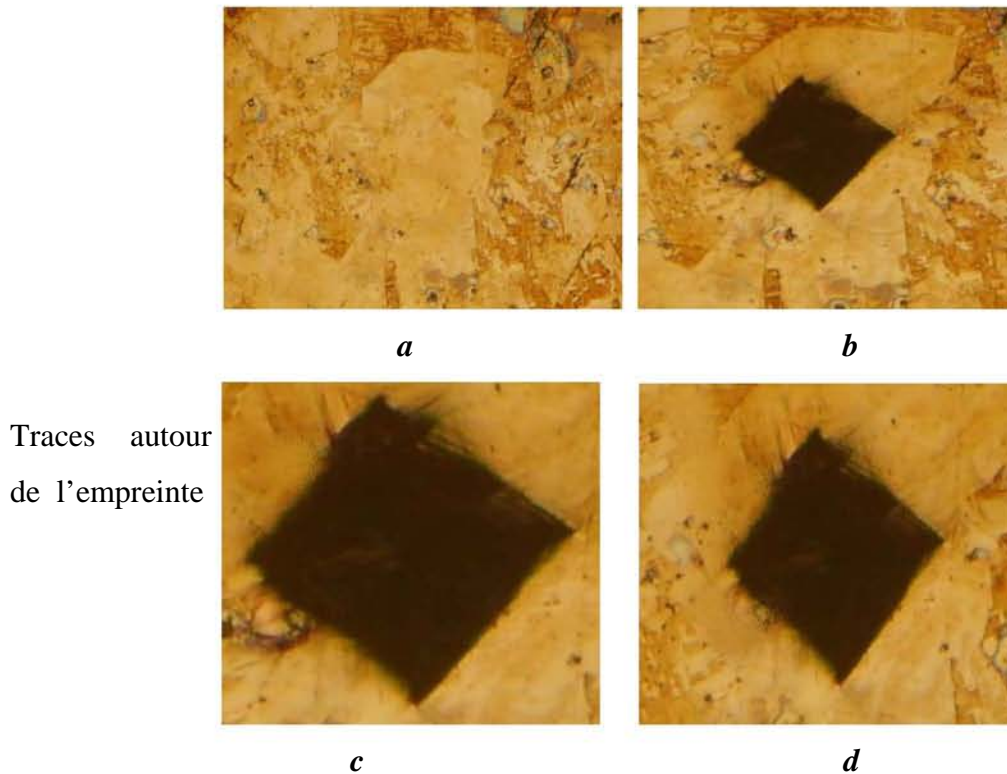


Figure II-12: Empreinte de dureté sur un échantillon à l'état austénitique

IV.4 Sollicitation en traction et mesure de l'effet mémoire de forme

Nous avons réalisé un essai de traction à l'ambiante sur une éprouvette à l'état austénitique (γ). La déformation imposée est de 4,5%. La machine de traction utilisée est une machine MTS de charge maximale égale à 5KN à transmission mécanique. Cette machine est équipée d'un extensomètre de longueur égale à 50mm, et une vitesse de déformation fixée à $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Pour la mesure de l'effet mémoire nous avons utilisé un dilatomètre Adamel DTH60 équipé d'un système de chauffage. La vitesse de chauffage est fixée à 2 Kmn^{-1} , (Figure II-13).

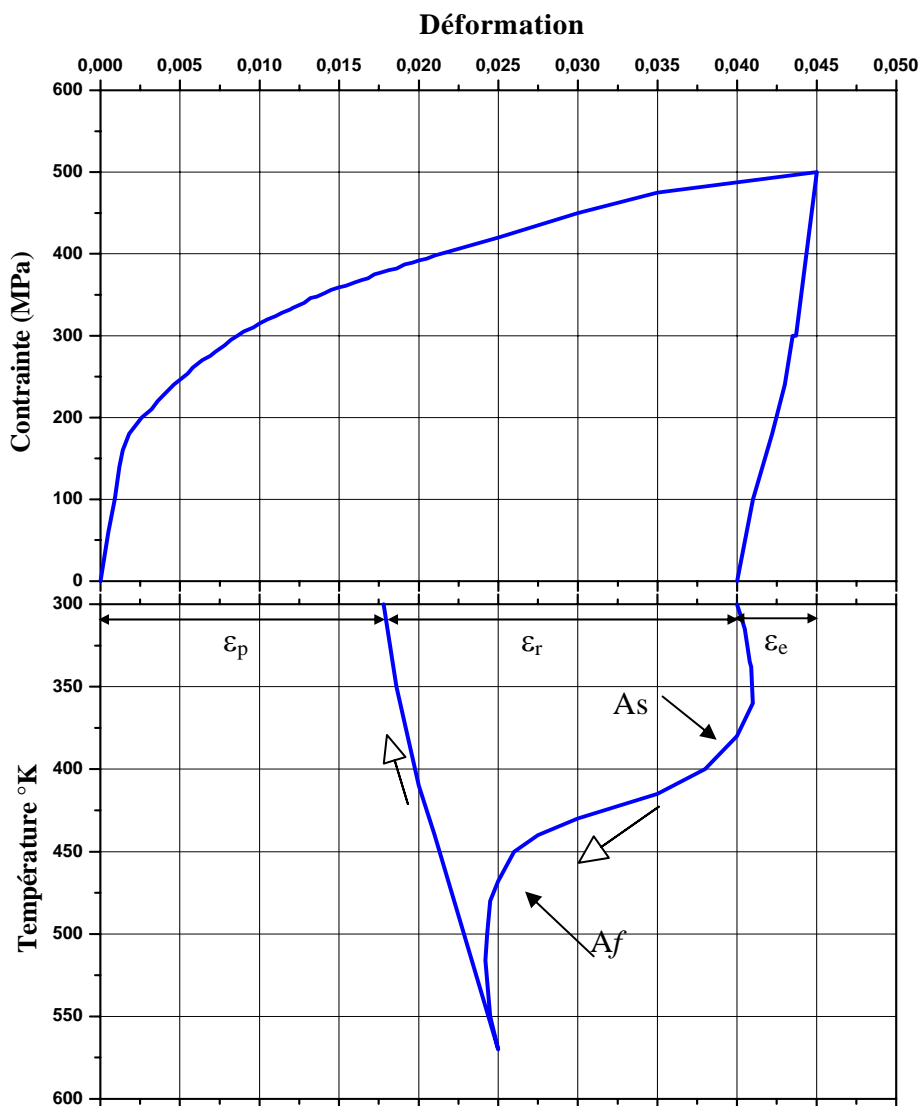


Figure II-13 : Courbe contrainte-déformation et mesure de l'effet mémoire de forme

En pratique, on détermine la contrainte pour une déformation de transformation de 0,2% en traçant la parallèle à la partie linéaire de la courbe. Nous rappelons que la contrainte $\sigma_{0,2\%}$ correspond à l'apparition de martensite, donc différente de la limite élastique habituellement déterminée à 0,2% de déformation plastique. Concernant la partie décharge, on remarque que la courbe est incurvée. Nous pouvons déterminer la déformation récupérée à la relaxation. Ce comportement ne peut être considéré comme effet caouchoutique malgré les similitudes dans les courbes observées vue que la température de l'essai n'étant pas inférieure à M_f . Cette propriété a été observée par Nishijima [85] pour des alliages dits à élasticité non linéaire qui est appelée également pseudoélasticité. Duering et Zadno [86] expliquent que la pseudoélasticité peut être due aux mouvements réversibles des joints de macles dans la phase

austénitique ou martensitique. Dans les matériaux qui se déforment par maclage, il est possible que la position des macles dans l'état déformé ne soit pas stable et qu'il existe une force qui entraîne le retour des macles à une position stable [87].

Les examens micrographiques réalisés sur notre acier montrent que les grains austénitiques sont souvent maclés. Il est possible que la pseudoélasticité puisse être attribuée aux macles de l'austénite déformée et non transformée en martensite. Après relâchement de la contrainte à la température ambiante, l'échantillon présente une déformation ε_e . Au chauffage nous aurons une déformation réversible ε_r et une déformation irréversible ou de plasticité ε_p .

Nous remarquons que le chauffage conduit à la disparition quasi complète de la plasticité de transformation. Cet effet résulte des mouvements réversibles des dislocations partielles de schokley permettant à la martensite induite sous contrainte de redonner, au chauffage, une austénite de réversion. A l'état austénitique, l'application d'une déformation ε_0 peut se décomposer en deux termes : $\varepsilon_0 = \varepsilon_{p+} + \varepsilon_r + \varepsilon_e$. Après la décharge nous aurons $\varepsilon_1 = \varepsilon_{p+} + \varepsilon_r$. Après chauffage $\varepsilon_2 = \varepsilon_{p+} + \varepsilon_{irr}$

IV.5 Micrographie et dureté de l'état monophasé austénite et biphasé austénite-martensite induite sous contrainte

Les dimensions et la forme de l'éprouvette sont précisées dans la figure suivante :

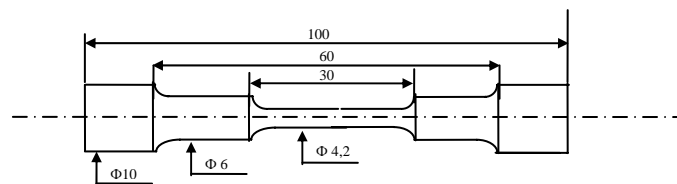


Figure II-14 : Éprouvette de traction

Nous avons pris une éprouvette sur laquelle nous avons réalisé des empreintes de dureté distantes de 8 mm pour repérer la distance de référence (figure II-15). Ensuite nous avons imposé une déformation en traction de 5%.

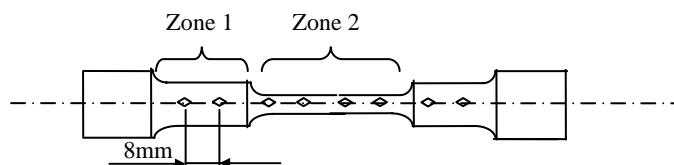


Figure II-15 : Emplacement des empreintes de dureté sur l'éprouvette de traction

Pour contrôler la déformation après retour élastique nous avons mesuré la distance entre les empreintes tableau II-3.

Tableau II-3 : Mesures de déformation après retour élastique

Déformation ϵ	
Zone 1	0,018
Zone 2	0,031

Après l'essai nous avons découpé des échantillons de différentes parties de l'éprouvette afin de les observer par microscope optique (figure II-16).

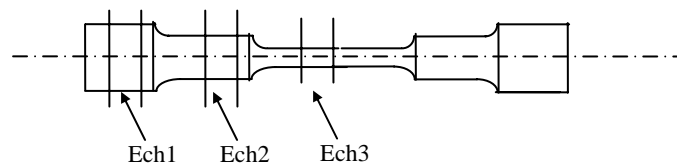


Figure II-16 : Échantillons pour mesures de dureté et observations micrographiques.

Après enrobage, polissage et attaque chimique nous avons réalisé des mesures de dureté et des observations micrographiques.

IV.5.1 Mesure de dureté

Les mesures de dureté sont représentées dans le tableau II-4.

Tableau II-4 : Mesures de dureté pour différentes échantillons

Dureté en Hv	
Ech 1	210
Ech 2	233
Ech 3	255

Les duretés de l'Ech2 et Ech3 sont plus élevées que celle de l'Ech1. Nous pouvons conclure que la dureté de l'état biphasé est supérieure à celle de l'austénite [21].

IV.5.1 Observations micrographiques

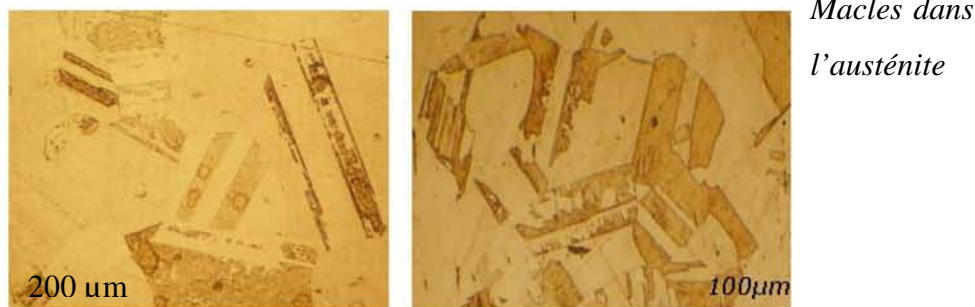


Figure II-17- : Métallographie de l'Ech 1 après le traitement thermique de référence – Polissage mécanique –attaque chimique

La figure II-17 confirme bien le résultat précédent c'est que l'Ech1 est à l'état austénitique. Nous observons les grains, les joints de grains, et les macles de l'austénite. La martensite induite sous contrainte est représentée dans les figures II-18 et II-19. Les variantes de martensite sont désorientées.

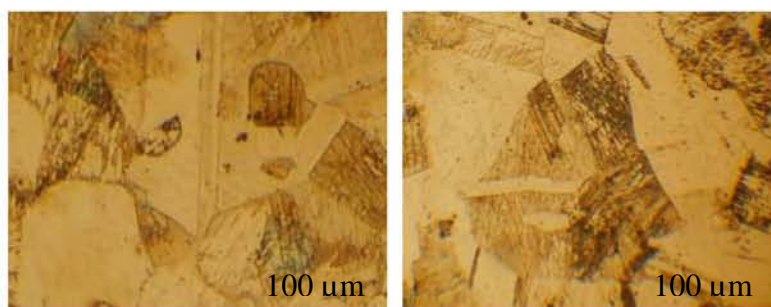
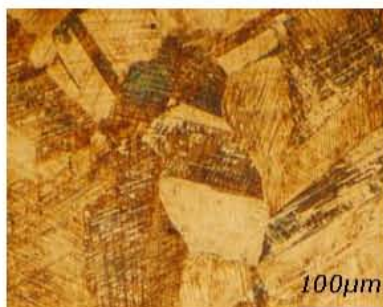


Figure II-18: Métallographie de l'Ech 2 après le traitement thermique de référence – Polissage mécanique –attaque chimique

Dans la figure II-18 nous remarquons qu'il y a encore des macles dans l'austénite, mais nous pouvons noter la présence de quelques variantes de martensite. Dans la figure II-19 il y a une transformation importante de l'austénite en martensite.



Figures II-19 : Métallographie de l'Ech 3 après le traitement thermique de référence –
Polissage mécanique –attaque chimique

L'étude micrographique sur un seul grain de l'échantillon 3, nous a révélés que la martensite peut être orientée. Nous remarquons aussi que les variantes de martensite sont sous forme des aiguilles ayant une orientation différente d'un grain à l'autre. Ces observations micrographiques nous informent aussi sur la taille du grain environ 50 μm . Ces résultats nous aiderons dans le chapitre suivant pour la détermination des différentes énergies et de justifier quelques hypothèses pour le modèle.

IV.6 Diagramme contrainte-température

La dernière partie expérimentale de notre travail correspond à une série d'essais de traction à différentes températures (Figure III-4). La machine de traction utilisée est celle conçue et réalisée au LPMM à l'ENSAM de Metz dans le cadre de la thèse de Peultier [88]. Dans la conception de la machine il y a une séparation entre la partie mécanique et la partie thermique. L'éprouvette est plongée dans un bain d'huile régulé en température tandis que l'extensomètre et le capteur de force sont à la température ambiante. Ceci est dû au fait que l'axe de l'éprouvette est décalé par rapport à l'axe de la machine. La température est mesurée à l'aide d'un thermocouple (Figure II-20).

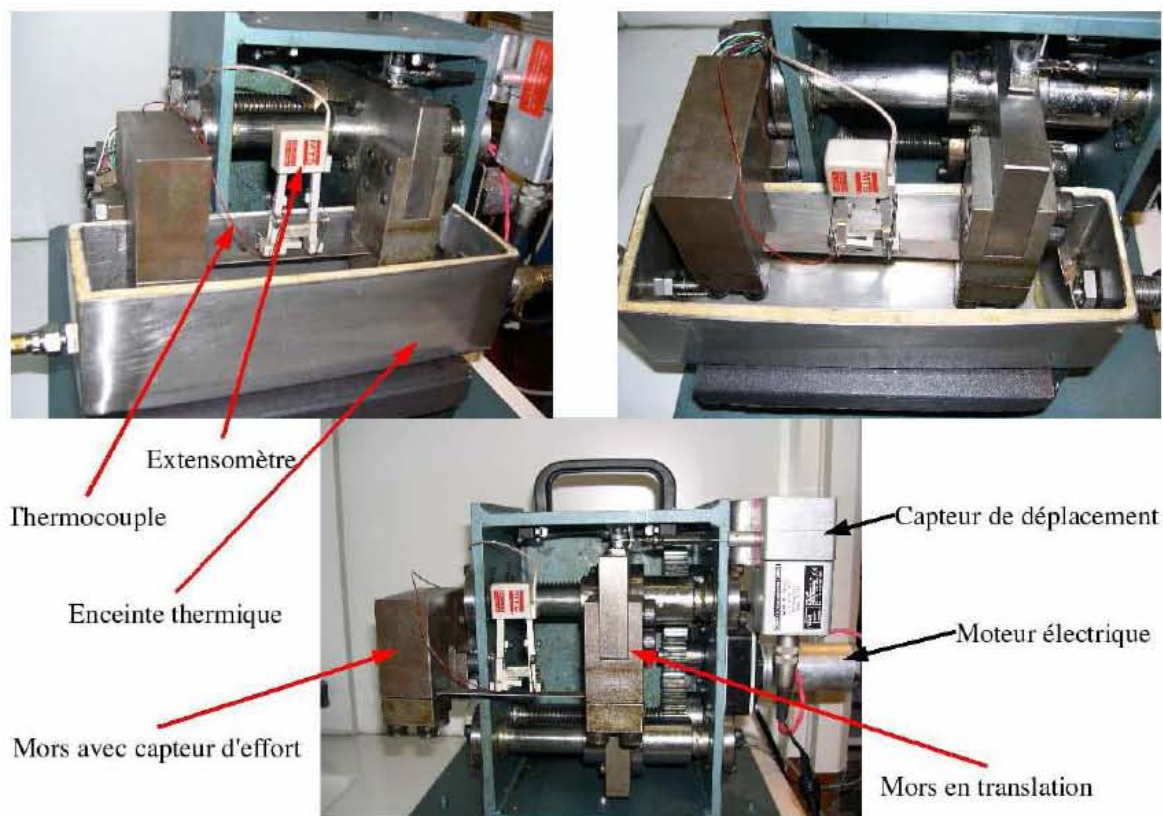


Figure II-20 : Machine expérimentale de traction [88]

La partie mécanique du dispositif permet d'imposer un allongement à l'éprouvette tout en mesurant la force nécessaire et la déformation locale. Le pilotage de l'allongement et l'acquisition des mesures sont effectués par un PC, ce qui permet de réaliser une boucle d'asservissement de la force. La machine est composée d'un bâti sur lequel est fixé une traverse fixe qui sert également de capteur d'effort. Une traverse mobile en translation permet d'imposer un allongement à l'éprouvette. Cette translation est imposée par un système mécanique de vis-écrou actionné par plusieurs étages de réduction à engrenage par un moteur électrique à courant continu.

Un capteur de déplacement donne une position approximative de la traverse mobile par rapport au bâti, mais le montage n'est pas assez précis pour effectuer une mesure d'allongement de l'éprouvette. L'allongement est mesuré en local grâce à un extensomètre de capacité de déformation de -25% à +25%. Afin de réaliser des mesures de température précises et homogènes nous avons choisi de plonger l'éprouvette dans un bain d'huile. La température du fluide est contrôlée (Température entre 20°C et 180°C°).

IV.6.1 Protocole d'essai :

Les essais thermomécaniques ont été réalisés à différentes températures avec une éprouvette vierge pour chaque température. Partant d'un état initial austénitique, le matériau est d'abord amené à la température de test, puis un cycle thermomécanique de traction suivi d'un chauffage est appliqué. Pour commencer on chauffe le bain d'huile et on immerge l'éprouvette pour assurer un chauffage uniforme. Ensuite nous appliquons un chargement jusqu'à une déformation de 2% et on décharge. Enfin on réalise un chauffage pour récupérer la déformation de transformation.

Le chargement appliqué en traction est limité de manière à ne pas saturer la transformation. La déformation de transformation n'est pas réversible après décharge à contrainte nulle. Néanmoins, la transformation inverse (de la martensite vers l'austénite) peut être forcée en appliquant un chauffage à une température supérieure à 180°C. Ce chauffage permet de récupérer la partie transformée. On revient par refroidissement à la température d'essai et on refait le 2^{ème} cycle avec chargement de 4% sans démonter à l'éprouvette.

IV.6.2 Résultats expérimentaux et discussions :

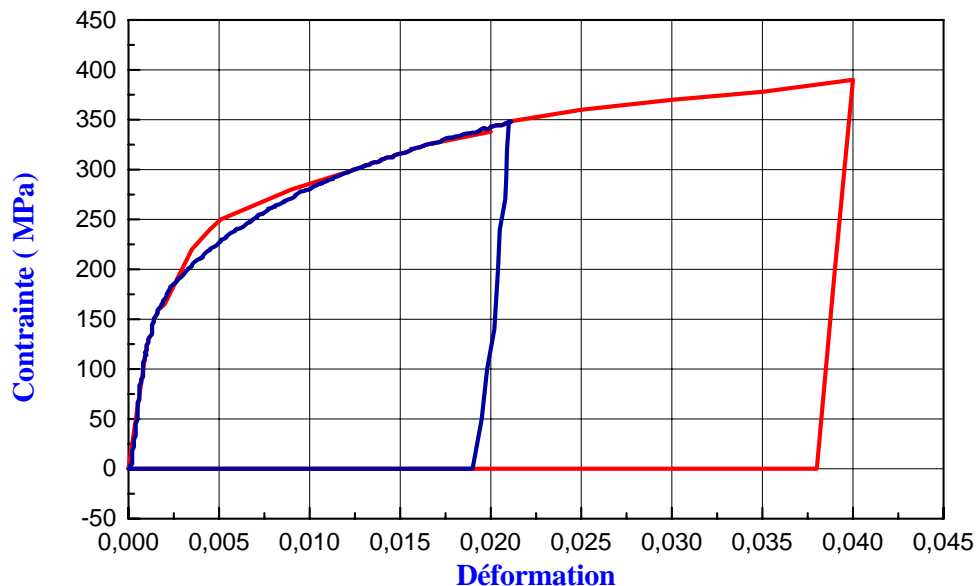


Figure II-21: Courbe de traction (charge – décharge – chauffage) pour $T=20^{\circ}\text{C}$

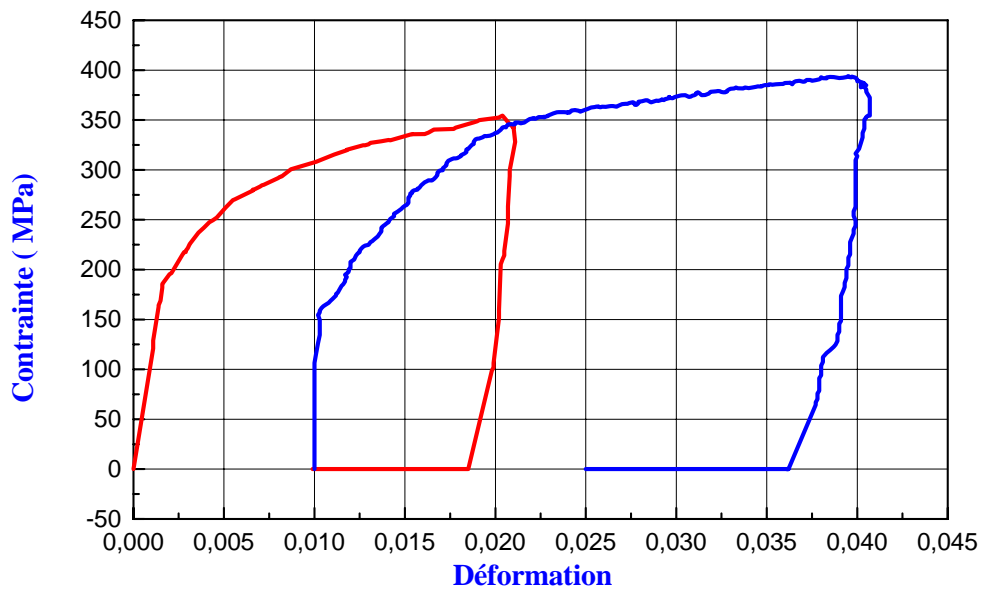


Figure II-22 : Courbe de traction (charge – décharge – chauffage) pour $T=50^{\circ}\text{C}$

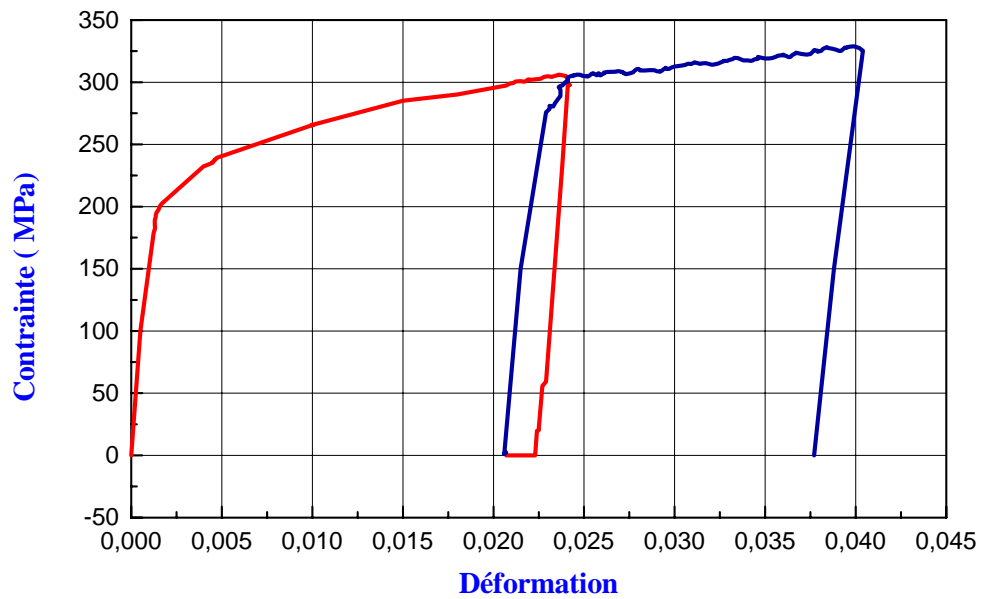


Figure II-23 : Courbe de traction (charge – décharge – chauffage) pour $T=130^{\circ}\text{C}$

On rappelle que pour les aciers à mémoire de forme du type Fe-Mn-Si, on a une difficulté pour déterminer le début de la transformation martensitique $\gamma \rightarrow \varepsilon$ (paragraphe IV-2). Lorsqu'on décharge on constate un retour libre qui est parallèle à la partie élastique et leur

la pente correspond au module d'Young. La déformation récupérée est appelée déformation élastique.

Après le chauffage à contrainte nulle on récupère la déformation de la transformation et la partie de déformation restante correspond à la déformation induite par le glissement plastique. Dans le cas où nous avons récupéré toute la déformation imposée (figure II-21), nous n'avons que de la transformation martensitique. Pour la figure II-22 nous avons de la transformation et de la plasticité vu qu'au chauffage nous ne récupérons que la déformation liée à la transformation martensitique.

A haute température nous atteindrons la limite d'élasticité du matériau avant l'activation de la transformation martensitique. Cela est constaté à partir du croisement entre la décharge du premier cycle et le chargement du deuxième cycle (figure II-23). À partir des courbes de traction, nous pouvons déterminer la contrainte critique $\sigma_{0,2\%}$, pour chaque température d'essai. Cette contrainte critique peut correspondre, suivant la température d'essai, au début de la transformation martensitique ou au début de la plastification de l'austénite figure II-24. Si la température est inférieure à M_s^σ , alors c'est le début de la transformation martensitique qui se déclenche. Si la température est supérieure à M_s^σ , alors c'est le début de la plastification de l'austénite.

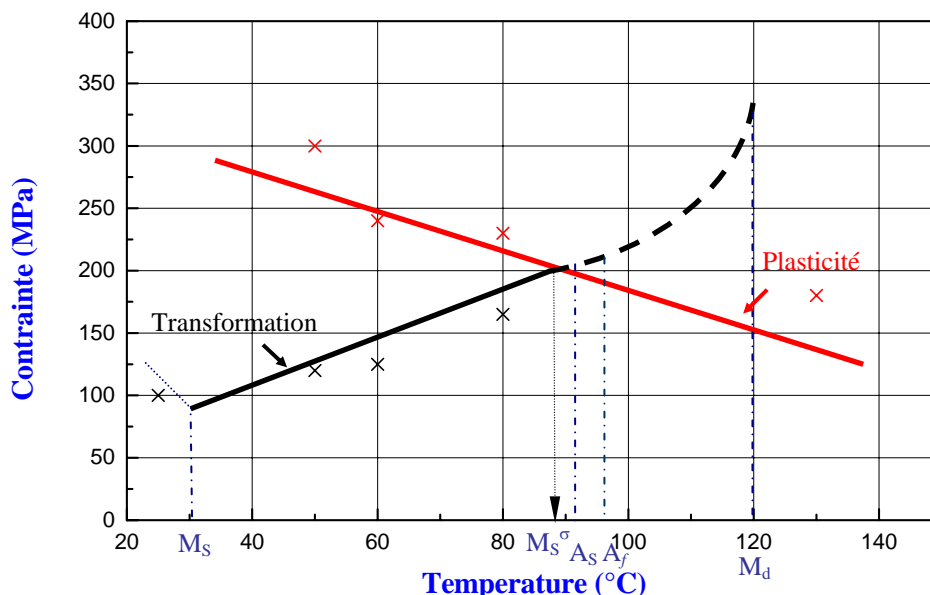


Figure II-24 : Variation de la contrainte critique produisant une déformation permanente (de transformation ou plastique) en fonction de la température en traction

- Un premier domaine pour des températures inférieures à M_s^σ ($M_s^\sigma=390\pm 10$ K), où la variation de contrainte nécessaire pour induire la transformation augmente linéairement en fonction de la température d'essai. Les contraintes induisant la martensite sont inférieures à la limite d'élasticité de la phase mère. La martensite formée est dite induite sous contrainte ("stress induced martensite").

La variation de contrainte, dans ce domaine de température, est donnée par la relation:

$$(d\sigma/dT)= 1,02 \text{ MPa/ } ^\circ\text{C}.$$

- Un deuxième domaine pour des températures supérieures à M_s^σ , où nous détectons les contraintes nécessaires pour induire une déformation plastique de la phase mère. Cette déformation précéderait la transformation martensitique et la martensite qui pourrait se former est dite martensite induite par déformation préalable de l'austénite ("strain induced martensite").

Dans ce domaine de température:

$$(d\sigma/dT)= -1 \text{ MPa/ } ^\circ\text{C}$$

Ce type de comportement a été observé par de nombreux auteurs sur différents alliages: tels que les alliages Fe-Ni [89,90] et les alliages Fe-Ni-C [91,92]. À $T > M_s$, il existe une contrainte de cisaillement critique qui va induire la transformation. Jusqu'à M_s^σ la déformation sera liée à la transformation martensitique. Au-delà de cette température, la déformation mesurée traduit un écoulement plastique de l'austénite.

Lorsque nous nous plaçons à une température constante inférieure à M_s^σ nous atteindrons la transformation de l'austénite en martensite (formation des variantes de martensite) et si nous augmentons la contrainte nous nous arriverons à plastifier l'austénite. A une température constante, cette courbe nous permet d'identifier la transformation ou la plasticité. Une question peut se poser, si nous augmentons la contrainte, est-ce que nous pourrions atteindre la plasticité à basse température ou la transformation à haute température ? Nous signalons que quelques auteurs [93] utilisent M_d pour ce que nous appelons M_s^σ . La température M_d serait, dans notre étude, la température à partir de laquelle la transformation martensitique ne se produit plus par application d'une contrainte extérieure.

V. Conclusion :

Dans notre étude expérimentale nous avons examiné l'alliage à mémoire de forme à base de fer type Fe-Mn-Si.

A l'état brut de réception, notre acier représente un état biphasé à l'ambiante. Pour cela nous avons réalisé un traitement thermique de référence pour stabiliser l'austénite. Pour la détermination des températures de transformation (M_s , F_s , A_f) nous avons réalisé des essais dilatométriques. La mise en évidence en flexion de l'effet mémoire de forme et l'essai de traction jusqu'à la rupture nous a permis de montrer que l'alliage Fe-Mn-Si présente, en plus de la transformation martensitique réversible, une plasticité d'austénite qui a lieu par l'application d'une contrainte extérieure élevée.

A partir des observations micrographiques et des essais de dureté nous avons constaté que la martensite qui se présente sous forme des variantes est plus dure que l'austénite. Nous avons remarqué aussi que l'empreinte de la dureté appliquée sur un état austénitique provoque des traces qui ne disparaissent pas par polissage. Ces traces sont des fines plaquettes de martensite qui se forment par compression lors de la réalisation de l'empreinte de dureté.

Nous avons étudié l'influence de la sollicitation thermomécanique sur la transformation martensitique. Enfin nous avons réalisé des essais de traction à différentes température en suivant un cycle de charge- décharge et chauffage pour confirmer que l'alliage à mémoire de forme à base de fer présente un domaine de transformation de phase aussi que la plasticité. Cette partie expérimentale est primordiale pour notre étude et elle sera exploitée pour la détermination des différents paramètres du modèle développé dans les chapitres qui suivent. En effet à partir de la courbe expérimentale réalisée à température ambiante, nous allons déterminer les paramètres de notre modèle et nous utilisons les autres pour le valider.

Chapitre III

Modélisation et intégration numérique du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme Fe-Mn-Si

Sommaire

I.	Introduction	60
II.	Choix des variables internes	61
III.	Thermodynamique de la transformation de phase et de la plasticité.....	62
IV.	Détermination de l'énergie libre de Gibbs.....	63
	IV.1 Énergie élastique	65
	IV.2 Forces thermodynamiques	69
V.	Méthodes d'intégration numérique.....	71
VI.	Conclusion	76

I. Introduction

La modélisation du comportement thermomécanique des AMF est d'une importance capitale en vue d'une utilisation optimale de ces alliages dans les applications industrielles. De nombreuses études ont été réalisées soit en mettant au point des modèles phénoménologiques, soit en analysant les mécanismes de transformation martensitique. Pour les AMF à base de fer, des études métallurgiques (détaillées dans le chapitre II) ont montré que leurs comportements thermomécaniques spécifiques sont directement liés à la formation et à la réversion de la martensite induite sous contrainte.

La modélisation du comportement d'un AMF à base de NiTi ou de cuivre, comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, consiste à déterminer l'évolution de sa déformation de transformation au cours du chargement. Cette déformation est liée directement à l'évolution de la fraction de martensite formée et à l'orientation des variantes. Plusieurs travaux ont été consacrés à ce problème et divers modèles sont proposés pour déterminer les lois d'évolution de ces deux paramètres. Une étape très importante dans la construction d'un modèle est le choix des variables internes et de l'échelle de description des mécanismes de déformation. Les AMF à base de Fer présentent, comme c'est décrit au chapitre II, du glissement plastique en plus de la transformation martensitique. Lors de la phase modélisation, il est nécessaire de décrire l'effet de ces deux mécanismes et leur interaction sur le comportement thermomécanique de ces alliages.

D'après la bibliographie, et comme nous l'avons précisé au premier chapitre, on distingue deux grandes familles de modèles : les modèles micromécaniques et les modèles phénoménologiques. L'approche micro-macro qui utilise généralement une description micromécanique à l'échelle du grain (monocristal) couplée à une technique de transition d'échelle, permet de prendre en compte les paramètres microstructuraux et s'adapte bien à la modélisation thermomécanique du comportement des AMF. L'approche phénoménologique n'utilise qu'un nombre réduit de variables internes qui sont identifiées à partir d'essais expérimentaux usuels. Cette approche est très utilisée pour le dimensionnement des applications en AMF car elle s'intègre facilement dans les codes de calcul par éléments finis. Cette d'approche ne tient pas compte explicitement de la microstructure et ne permet pas de prévoir l'effet de l'évolution microstructurale sur les propriétés mécaniques. Elle est adoptée pour notre modélisation toute en essayant de s'attacher aux mécanismes physiques. Ceci est rendu possible en partant d'une formulation thermodynamique basée sur l'expression de

l'énergie libre de Gibbs. De cette dernière, sont dérivées les forces motrices induisant les équations constitutives du comportement.

II. Choix des variables internes

La déformation macroscopique E_{ij} au niveau d'un Volume Élémentaire Représentatif d'un AMF à base de fer, comme nous l'avons précisé dans le deuxième chapitre, se décompose en une déformation élastique E_{ij}^e et une déformation inélastique E_{ij}^{ine} (la somme de la déformation de transformation E_{ij}^T et de la déformation de plasticité E_{ij}^P).

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^{ine} \quad (1)$$

La déformation de transformation est issue d'un changement de phase solide/solide qui transforme l'austénite en martensite. Ces deux phases n'ont pas les mêmes propriétés mécaniques et physico-chimiques. Il est donc intéressant de connaître l'évolution de la fraction de martensite au cours du chargement, notée f . Plusieurs modèles ont été développés dans la bibliographie pour déterminer les lois d'évolution de ces deux termes (E_{ij}^T, f).

A l'échelle du grain, comme nous l'avons montré dans le deuxième chapitre, la martensite est présentée sous forme de fines aiguilles caractérisées par un cisaillement homogène. A partir d'un cristal d'austénite, 24 variantes de martensite sont susceptibles d'être formées. Généralement les modèles micromécaniques utilisent les fractions volumiques de chaque variante comme variables internes [58, 59]. Dans l'approche phénoménologique, la martensite est caractérisée par sa fraction volumique globale f dans tout l'élément de volume V [94] :

$$f = \frac{V_M}{V} \quad (2)$$

V_M : Volume de la martensite formée. En introduisant cette fraction volumique globale et en supposant que la plasticité s'active uniquement au niveau de l'austénite, on pourra décomposer la déformation inélastique macroscopique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{ij}^{ine} &= \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_{VER}} \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv = \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_M} \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv + \frac{1}{V_{VER}} \int_{V_A} \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv \\ E_{ij}^{ine} &= \frac{V_M}{V_{VER}} \left(\frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon_{ij}^T(r) dv \right) + \frac{V_A}{V_{VER}} \left(\frac{1}{V_A} \int_{V_A} \varepsilon_{ij}^P(r) dv \right) \\ E_{ij}^{ine} &= E_{ij}^T + (1-f)E_{ij}^P \end{aligned} \quad (3)$$

Pour la suite de l'étude, nous supposons que la martensite est totalement orientée par la contrainte (micrographie représentée dans le chapitre II). Cela ne pose généralement pas des

problèmes dans le cas de chargements mécaniques mais l'hypothèse est trop restrictive dans le cas où la martensite est induite à partir d'un chargement thermique sous contrainte constante. En effet dans ce cas les variantes de martensite créées ne sont pas les mieux orientées par rapport au champ de contrainte macroscopique mais génèrent une déformation de transformation. Toutefois, comme c'est évoqué au chapitre II, cette martensite autoaccommodée est plus dure que l'austénite et il faut atteindre un niveau de contrainte assez élevé pour l'orienter. On s'intéressera alors uniquement à de la martensite créée par un chargement mécanique et orientée dans la direction de la contrainte. Ceci nous permet d'introduire la simplification suivante pour l'expression de la déformation de transformation macroscopique :

$$\boxed{\dot{E}_{ij}^T = \eta_{ij} \dot{f} \varepsilon^{\max}} \text{ et } \eta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{mn} S_{mn}}} \quad (4)$$

$$\text{Avec } S_{ij} = \Sigma_{ij} - \frac{1}{3} \Sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\boxed{\Delta E_{ij}^T = \eta_{ij} \varepsilon^{\max} \Delta f} \quad (5)$$

La plasticité est due à l'activation des systèmes de glissement au niveau de l'austénite largement détaillé dans la littérature. Dans le chapitre précédent nous avons montré que la plasticité peut avoir lieu, au niveau de la phase austénitique, soit à $T < M_s^\sigma$ avec une contrainte élevée, soit à $T > M_s^\sigma$. Dans le premier chapitre, nous avons constaté que le terme de plasticité n'intervient que dans la modélisation des aciers TRIP et non plus dans la modélisation des alliages à mémoire de forme usuels (Ni-Ti). La déformation de plasticité E_{ij}^P est définie tel que $\boxed{\dot{E}_{ij}^P = \eta_{ij} \dot{\gamma}}$ avec, γ , le facteur de glissement plastique.

III. Thermodynamique de la transformation de phase et de la plasticité

Généralement dans les modèles micromécaniques et phénoménologiques, l'énergie interne se décompose en deux contributions qui sont l'interaction entre les grains et l'interaction entre les variantes de martensites [95, 61, 96], nous pouvons citer le modèle de Peultier [77] qui tient compte de l'énergie d'interaction entre les grains, et les différentes variantes de martensite. Dans notre modèle nous avons intégré, en plus de la transformation de phase, l'effet du glissement plastique sur le comportement thermomécanique macroscopique des alliages à mémoire de forme à base de fer type Fe-Mn-Si. Pour cela nous devons intégrer deux

autres contributions qui sont l'énergie d'interaction entre les systèmes de glissement plastique, et l'énergie d'interaction entre les différentes variantes de martensite et les systèmes de glissement plastique. Afin de modéliser le comportement des alliages à mémoire de forme polycristallins à base de fer nous allons décrire le phénomène de transformation martensitique en intégrant l'effet de la plasticité d'un point de vue macroscopique.

La première étape de l'étude thermodynamique consiste à réaliser le bilan énergétique sur un volume élémentaire représentatif (VER). Ce VER est composé de plusieurs grains et chaque grain est formé d'une phase mère austénitique qui peut soit se transformer en martensite soit se plastifier (nous l'avons montré dans le chapitre II). Afin d'exprimer d'une manière explicite l'énergie du VER il est nécessaire de décrire la présence de martensite dans le matériau, la présence de la plasticité, la déformation de transformation produite par les variantes de martensite, et la déformation de plasticité produite par les systèmes de glissement plastique. Il faut aussi tenir compte des interactions entre, les grains, les variantes de martensite formée, les systèmes de glissement plastique, et les variantes de martensite formée et les systèmes de glissement plastique.

Pour déterminer le comportement du VER, on doit déterminer l'état de l'énergie libre de Gibbs ψ de l'élément du volume élémentaire en fonction des variables internes liées à la déformation de transformation E_{ij}^T , la déformation plastique E_{ij}^P et des variables de contrôle (contrainte Σ , température T).

IV. Détermination de l'énergie libre de Gibbs

L'utilisation de la thermodynamique permet de définir les conditions thermomécaniques de l'existence de la transformation austénite-martensite, et de l'existence de l'austénite plastifiée. Elle permet également de relier la variation de la déformation globale aux évolutions de la température, de la contrainte et de tenir compte des différents aspects d'interactions déjà cités. L'énergie de Helmholtz notée $\Phi(E, T)$ [97] se décompose en une énergie chimique due au changement de phase (W_{chimique}) et une énergie mécanique ($W_{\text{mécanique}}$). Cette dernière est constituée d'une énergie élastique due à la déformation élastique de l'élément ($W_{\text{élastique}}$) et d'une énergie d'interface entre les variantes de martensite dans V_M et les surfaces de contact ($W_{\text{interface}}$).

$$\boxed{\Phi(E, T) = W_{\text{chimique}} + W_{\text{mécanique}} = W_{\text{élastique}} + W_{\text{chimique}} + W_{\text{interface}}} \quad (6)$$

Lorsqu'un système $\{V_{\text{austénite}}, T\}$ est soumis à des forces extérieures (contrainte), il en résulte une énergie potentielle ($W_{\text{potentielle}}$). L'énergie libre de Gibbs notée ψ est la mieux adaptée pour décrire le comportement des alliages à mémoire de forme. Cette énergie est égale à l'énergie potentielle moins l'énergie de Helmholtz.

$$\psi(\Sigma, T) = W_{\text{potentielle}} - \Phi(E, T) = W_{\text{potentielle}} - W_{\text{chimique}} - W_{\text{élastique}} - W_{\text{interface}} \quad (7)$$

Dans la suite nous détaillons chaque énergie. D'abord l'énergie chimique est généralement approximée par une fonction linéaire de la température et de la fraction volumique de la martensite, en définissant T_0 la température d'équilibre thermodynamique.

$$W_{\text{chimique}} = B(T - T_0)f \quad (8)$$

Suite à un chargement thermomécanique (contrainte - température), un volume V_M d'austénite se transforme en martensite. Chaque variante de martensite est délimitée par une interface. Mais à partir des observations micrographiques faites dans le chapitre précédent nous remarquons que la martensite adoptant une géométrie lamellaire minimisant cette énergie, donc nous négligeons l'énergie d'interface par rapport aux autres.

Nous aurons
$$W_{\text{interface}} \approx 0 \quad (9)$$

Pour déterminer l'énergie potentielle $W_{\text{potentielle}} = \Sigma_{ij} E_{ij}$, nous décomposons la déformation totale en déformation élastique, déformation de transformation et déformation plastique en négligeant la dilatation.

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^T + (1 - f)E_{ij}^P \quad (10)$$

E_{ij}^e : Tenseur de déformation d'élasticité.

E_{ij}^T : Tenseur de déformation de transformation.

E_{ij}^P : Tenseur de déformation de plasticité.

Nous retrouvons l'expression finale de l'énergie potentielle :

$$W_{\text{potentielle}} = \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} E_{ij}^T + (1 - f) \Sigma_{ij} E_{ij}^P \quad (11)$$

Avec S_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 de souplesse et Σ_{ij} le tenseur des contraintes macroscopiques.

IV.1 Énergie élastique

L'énergie élastique stockée joue un rôle très important vu son influence dans l'évolution des variables internes au cours du chargement. Mais elle est également plus difficile à exprimer car elle a pour origine les incompatibilités de déformation au niveau de la microstructure. Il apparaît donc nécessaire de descendre à des échelles plus faibles que celles du VER, pour analyser les interactions micro-structurales et pouvoir ensuite les quantifier à l'aide de paramètres et de variables macroscopiques.

L'expression de l'énergie élastique est :

$$W_{\text{élastique}} = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^e(r) dV \quad (12)$$

Où $\sigma_{ij}(r)$ et $\varepsilon_{ij}^e(r)$ sont respectivement la contrainte et la déformation élastique locales au point (r) de l'élément de volume V.

On désigne la fonction indicatrice $\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{Si } r \in V_A \\ 0 & \text{Si } r \in V_M \end{cases}$

$$\text{Or } \boxed{\varepsilon_{ij}(r) = \varepsilon_{ij}^e(r) + (1 - \theta(r)) \varepsilon_{ij}^T(r) + \theta(r) \varepsilon_{ij}^P(r)} \quad (13)$$

$$W_{\text{élastique}} = \underbrace{\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}(r) dV}_{W_{\text{macro}}} - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) (1 - \theta(r)) \varepsilon_{ij}^T(r) - \varepsilon_{ij}^P(r) \theta(r) dV \quad (14)$$

D'après le lemme de Hill [98], nous avons dans le cas où les deux phases ont les mêmes propriétés élastiques :

$$\boxed{W_{\text{macro}} = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}(r) dV = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij}} \quad (15)$$

Dans la suite nous expliquerons la procédure de la détermination du deuxième terme de l'énergie élastique (équation 14). L'observation de la micro-structure du VER d'un AMF polycristallin montre qu'on peut décomposer la structure du matériau en trois échelles au niveau du VER. A chaque échelle les incompatibilités de déformation induisent une fluctuation de la contrainte par rapport au champ de contrainte macroscopique appliquée au VER. On décompose alors la contrainte en une somme de trois contributions.

$$\sigma_{ij}(r) = \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III} + \Sigma_{ij} \quad (16)$$

σ_{ij}^{II} est la contrainte moyenne au niveau du grain.

σ_{ij}^{III} est la contrainte moyenne par phase au niveau du grain.

Avec Σ_{ij} est la contrainte macroscopique globale. Or $\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV$ [99]. Dans la figure III-2 nous représentons la décomposition de la contrainte.

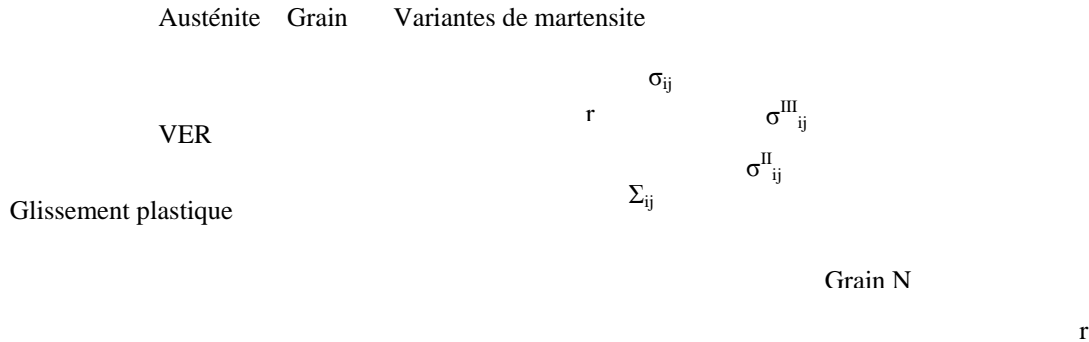


Figure III-2 : La décomposition de la contrainte d'ordre II et III

Les différentes interactions sont représentées dans la figure III-3

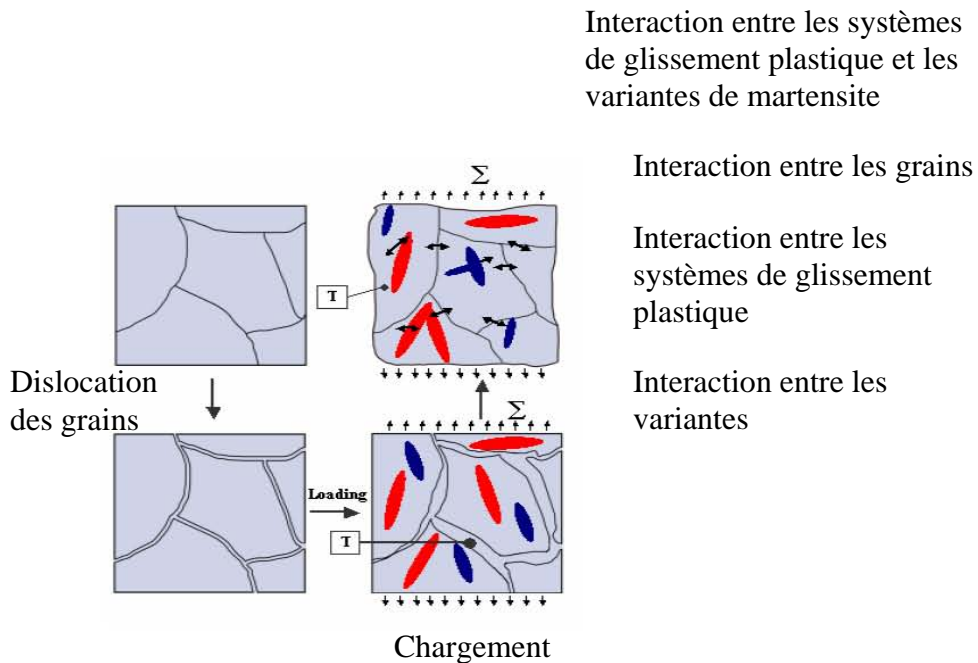


Figure III-3 : Représentation schématique des différentes sources d'énergie élastique interne dans un AMF polycristallin

On considère dans la suite que l'application de la déformation et de la contrainte est homogène au niveau du volume élémentaire représentatif noté (V).

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V (\Sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}) dV \\ \Sigma_{ij} &= \Sigma_{ij} + \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}) dV \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}) dV = 0}\end{aligned}\quad (17)$$

Nous combinons l'équation (14) et (16), nous aurons

$$\begin{aligned}W_{élastique} &= \frac{1}{2V_{VER}} \int_{V_{VER}} \sigma_{ij}(r) (\varepsilon_{ij}(r) - \varepsilon_{ij}^{ine}(r)) dv \\ W_{élastique} &= \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2V_{VER}} \int_{V_{VER}} \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}(r) dv - \frac{1}{2V_{VER}} \int_{V_{VER}} \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv \\ &-\frac{1}{2V_{VER}} \int_{V_{VER}} (\sigma_{ij}^{II}(r) + \sigma_{ij}^{III}(r)) \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv \end{aligned} \right]\end{aligned}\quad (18)$$

L'équation (18) est simplifiée par :

$$W_{élastique} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij}^e - \underbrace{\frac{1}{2V_{VER}} \int_{VER} \sigma_{ij}^{II}(r) \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv}_{II} - \underbrace{\frac{1}{2V_{VER}} \int_{VER} \sigma_{ij}^{III}(r) \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv}_{III}\quad (19)$$

Notre modèle est basé sur les travaux de Peultier [88], en ajoutant les phénomènes de plasticité. Le modèle de Peultier considère uniquement la déformation de transformation. Dans notre cas la déformation inélastique est induite par transformation martensitique et glissement plastique.

$$W_{intergranulaire} = \frac{1}{2V_{VER}} \int_{VER} \sigma_{ij}^{II}(r) \varepsilon_{ij}^{ine}(r) dv$$

L'expression de l'énergie d'interaction peut s'écrire de la manière suivante en fonction de la déformation inélastique macroscopique :

$$\boxed{W_{intergranulaire} = \frac{1}{2} H_g E_{ij}^{ine} E_{ij}^{ine}}\quad (20)$$

avec H_g est un paramètre matériau caractérisant les interactions intergranulaires. Pour plus de détails sur l'origine de cette expression, le lecteur pourra se reporter au manuscrit de la thèse de B. Peultier [88].

Il est de même pour l'expression de l'énergie intragranulaire. La déformation de transformation dans le modèle de Peultier est remplacée par la déformation inélastique.

$$W_{\text{int ragranulaire}} = -\frac{1}{2V_{\text{VER}}} \int_{\text{VER}} \sigma_{ij}^{\text{III}}(r) \varepsilon_{ij}^{\text{ine}}(r) dv$$

$$\boxed{W_{\text{int ragranulaire}} = \frac{1}{2} \left(H_v^T f^2 + (1-f) \gamma^2 H_s^P - H_{vp} f \gamma \right)} \quad (21)$$

D'autres interactions supplémentaires, en plus de celles entre variantes de martensite, sont à prendre également en compte. Il s'agit des interactions entre systèmes de glissement plastique et entre une variante de martensite et un système de glissement plastique. Les paramètres caractérisant ces interactions sont H_v^T décrivant l'interaction entre les variantes de martensites, H_s^P décrivant l'interaction entre les systèmes de glissement et H_{vp} qui décrit l'interaction entre les variantes de martensites et les systèmes de glissement plastique.

Les équations (19), (20) et (21) nous donnent l'expression finale de l'énergie élastique.

$$W_{\text{élastique}} = W_{\text{macro}} + W_{\text{intergranulaire}} + W_{\text{int ragranulaire}}$$

$$\boxed{W_{\text{élastique}} = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \frac{1}{2} H_g E_{ij}^{\text{ine}} E_{ij}^{\text{ine}} \\ &+ \frac{1}{2} \left(H_v^T f^2 + (1-f) \gamma^2 H_s^P - H_{vp} f \gamma \right) \end{aligned} \right)} \quad (22)$$

En regroupant les équations (8), (11), et (22) nous retrouvons l'expression finale de l'énergie libre de Gibbs :

$$\boxed{\Psi(\Sigma_{ij}, T, f, \gamma) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \sum_{ij} E_{ij}^{\text{ine}} - B(T - T_0) f \\ &- \frac{1}{2} \left(f^2 H_v^T + (1-f) \gamma^2 H_s^P - f \gamma H_{vp} \right) - \frac{1}{2} H_g E_{ij}^{\text{ine}} E_{ij}^{\text{ine}} \end{aligned} \right)} \quad (23)$$

Vu que les variables internes présentent des limitations physiques :

- La fraction martensitique f ne peut, par définition, prendre une valeur hors de l'intervalle $[0,1]$. Mais expérimentalement ne peut dépasser une valeur notée f^{max} .

L'expression de l'énergie libre de Gibbs n'est valable que dans le cas où les variables internes respectent les conditions de limitations physiques. Pour travailler sur une expression qui intègre directement ces conditions, on doit utiliser les multiplicateurs de Lagrange λ_0 et λ_1 , puis construire une expression modifiée à partir de l'expression de l'énergie du Gibbs développée pour le VER.

$$\begin{aligned}\lambda_0 f &= 0 \\ \lambda_1 (1 - f) &= 0\end{aligned}$$

λ_0 : Paramètre qui tient compte de la condition $f > 0$

λ_1 : Paramètre qui tient compte de la condition $f < 1$

On construit l'expression d'une pseudo-énergie libre intégrant l'effet de la saturation de la transformation. Nous remplaçons dans la suite de l'étude thermodynamique l'énergie libre de Gibbs par cette dernière.

$$L(\Sigma_{ij}, T, f, \gamma) = \Psi(\Sigma_{ij}, T, f, \gamma) - \lambda_0 \cdot f - \lambda_1 \cdot (1 - f) \quad (24)$$

IV.2 Forces thermodynamiques

Pour traduire l'équilibre thermodynamique, on utilise le 1^{er} et le 2nd principe de la thermodynamique. On suppose que le VER est à l'équilibre thermique donc nous aurons un flux de chaleur nul vers l'extérieur. En effet, la transformation est contrôlée par la température et non pas par le flux de chaleur, nous pouvons donc séparer l'équilibre thermique et l'équilibre mécanique. Nous supposons que la température est connue et elle est homogène en tout point du VER.

Le 1^{er} principe de la thermodynamique permet d'exprimer l'équilibre énergétique du VER par rapport aux échanges vers l'extérieur : l'accroissement de l'énergie interne volumique dU du matériau dépend du travail extérieur appliqué δW et de la chaleur apportée δQ [77].

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (25)$$

On impose au matériau une contrainte : $\delta W = \Sigma_{ij} dE_{ij}$. Pour une contrainte et température imposées et il est préférable d'utiliser l'enthalpie libre plutôt que l'énergie interne [77]

$$\begin{aligned}G &= U - TS - \Sigma_{ij} E_{ij} \\ dG &= -TdS - SdT - E_{ij} d\Sigma_{ij} + \delta Q\end{aligned}$$

Donc
$$TdS - \delta Q = -dG - SdT - E_{ij} d\Sigma_{ij} \quad (26)$$

Le 2nd principe de la thermodynamique :

Nous exprimons l'entropie du VER comme la contribution de trois sources : échange avec l'extérieur sous forme de chaleur, entropie créée par un changement d'état du matériau et entropie interne irréversible [77] :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_{\text{chang etat}} + dS_{\text{irré}} \quad (27)$$

Nous considérons que toute l'entropie interne créée au cours de la transformation martensitique est totalement récupérable par chauffage.

$$dS_{\text{irr}} \square 0$$

L'entropie créée par un changement de l'état interne du matériau est toujours positive ou nulle :

$$dS_{\text{chang etat}} \geq 0$$

D'où

$$\begin{aligned} dS - \frac{\delta Q}{T} &\geq 0 \\ TdS - \delta Q &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous remplaçons l'expression de δQ par celle tirée du 1^{er} principe

$$-dG - SdT - E_{ij}d\Sigma_{ij} \geq 0 \quad (28)$$

Pour intégrer les limitations physiques des variables internes on remplace la différentielle de l'enthalpie par la relation suivante :

$$F_{\sigma_{ij}} d\Sigma_{ij} + F_T dT + F_f df + F_\gamma d\gamma \geq 0 \quad (29)$$

$F_{\sigma_{ij}}$: Force élastique

F_T : Force entropique

F_f : Force thermodynamique de transformation

F_γ : Force thermodynamique de plasticité

Les forces élastiques et entropiques sont toujours nulles [77] :

$$F_{\sigma_{ij}} = 0$$

$$F_T = 0$$

L'équation (29) donne $F_f df + F_\gamma d\gamma \geq 0$

$F_m^f = \frac{dL}{df}$: Force motrice de la transformation.

$$F_m^f = \left(\begin{array}{l} -fH_V^T + \frac{1}{2}\gamma^2 H_s^P + \frac{1}{2}\gamma H_{vp} - B(T - T_0) + \\ (\Sigma_{ij} - H_g E_{ij}^{ine}) (\eta_{ij} \epsilon_{ij}^{tr} - E_{ij}^P) - \lambda_0 + \lambda_1 \end{array} \right) \quad (30)$$

F_c^f : Force critique de la transformation.

$$\boxed{F_c^f = \sigma_0^f - B(T - T_0)} \quad (31)$$

$F_m^\gamma = \frac{dL}{d\gamma}$: Force motrice de la plasticité.

$$\boxed{F_m^\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} H_{vp} f - (1-f)\gamma H_s^p \\ (\Sigma_{ij} - H_g E_{ij}^{ine}) \eta_{ij} (1-f) \end{pmatrix}} \quad (32)$$

F_c^γ : Force critique de la plasticité en tenant compte de l'effet d'un écrouissage isotrope, une loi de type puissance est adoptée comme suit :

$$\boxed{F_c^\gamma = \sigma_0 + kp^m} \quad (33)$$

Avec p correspond à la quantité de plasticité cumulée au cours du chargement définie par :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{E}_{ij}^P \dot{E}_{ij}^P}$$

L'équilibre thermodynamique de l'élément se traduit par les relations suivantes :

- Si $\begin{cases} F_m^f < F_c^f \\ F_m^\gamma < F_c^\gamma \end{cases}$ on n'a ni transformation ni plasticité donc nous avons un comportement

élastique de l'austénite :

$$\boxed{\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{E}_{kl}}$$

Avec $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ dans le cas d'un comportement élastique isotrope linéaire. λ et μ sont les coefficients de Lamé de l'alliage.

- Si $\begin{cases} F_m^f = F_c^f \text{ et } \dot{F}_m^f = 0 \\ F_m^\gamma < F_c^\gamma \end{cases}$ nous avons uniquement de la transformation martensitique.

Donc $p = cte$ et $\dot{p} = |\dot{\gamma}| = 0$.

- Si $\begin{cases} F_m^f < F_c^f \\ F_m^\gamma = F_c^\gamma \text{ et } \dot{F}_m^\gamma = \dot{F}_c^\gamma \end{cases}$ on a uniquement de la plasticité donc $\dot{f} = 0$.

- Si $\begin{cases} F_m^f = F_c^f \text{ et } \dot{F}_m^f = \dot{F}_c^f = 0 \\ F_m^\gamma = F_c^\gamma \text{ et } \dot{F}_m^\gamma = \dot{F}_c^\gamma \neq 0 \end{cases}$ nous avons transformation et plasticité

donc $\dot{p} = |\dot{\gamma}| \neq 0$ et $\dot{f} \neq 0$

V. Méthodes d'intégration numérique

Le modèle développé se résume à un système d'équations non linéaires. Pour cela nous allons nous appuyer sur une étude bibliographique des différentes méthodes d'intégration et leurs applications dans différents modèles. Le choix d'une méthode explicite permet d'intégrer facilement des modèles complexes. Par contre l'équilibre thermodynamique à la fin de l'incrément n'est pas forcément vérifié. En partant de la solution correspondant à l'équilibre au début de l'incrément et en imposant un incrément de chargement thermomécanique, la solution obtenue ne vérifie pas forcément les équations du comportement. Les modèles développés dans le cadre des matériaux standards sont bien adaptés à un schéma d'intégration implicite [100]. Pour cela les équations du modèle développé, correspondant à un système non linéaire, seront résolues de manière implicite par la méthode Newton-Raphson [101, 102]. Le principal inconvénient de cette méthode c'est de calculer et d'inverser numériquement le jacobien du système.

Le passage du modèle de la forme analytique à la forme numérique est une nécessité dans l'objectif d'une implantation dans un code par éléments finis. Ce passage n'est pas direct et induit des difficultés supplémentaires propres aux aspects numériques et discrets par opposition à la continuité et la dérivabilité du modèle analytique. Différentes méthodes d'intégration numérique existent qui minimisent l'erreur numérique mais qui sont chacune adaptées à un type d'équations : différentielle, intégrale, ...

Une étude bibliographique sur les méthodes d'intégration est primordiale pour assurer le bon choix de la méthode d'intégration. A partir de la bibliographie les équations nécessaires à la description du comportement peuvent être regroupées en deux types :

- Les équations différentielles qui décrivent une évolution des variables :

$$dX = G(X, Y) dY$$

- Les équations intégrales définies comme suit :

$$F(X, Y) = 0$$

Notons, qu'il est toujours possible par différentiation de réduire une équation intégrale en une équation différentielle. Par contre dans le cas général il n'est pas possible d'intégrer analytiquement les équations différentielles en équations intégrales [77]. Le but de l'intégration est de déterminer l'état des variables inconnues $X(t)$ (les variables internes f et γ ainsi que la contrainte Σ) lorsqu'on modifie les variables de pilotage $Y(t)$ (la déformation totale E et la température T) en suivant un trajet de chargement donné (avec t) un paramètre

d'évolution qui correspond au temps physique pour les modèles de comportement dépendant du temps).

Le choix de la technique d'intégration numérique est important pour avoir une bonne précision et une solution stable. Par conséquent, pour atteindre l'état de chargement (X_n, Y_n) il est nécessaire de découper le chargement en incréments intermédiaires de manière à augmenter la précision et la stabilité de la solution. En contre partie le temps de calcul augmente et limite le nombre d'incrément. Pour intégrer numériquement une équation on doit passer de la différentielle à l'incrément discret. Puis nous étudions les différentes méthodes de résolution des équations.

Rappelons que l'équation différentielle est : $dX = G(X, Y) dY$. Lors du passage au discret la notation différentielle dX disparaît, et sera remplacée par l'incrément ΔX . De manière générale on calcule l'incrément des variables inconnues ΔX en fonction de l'expression de $G(X, Y)$ et de dY :

$$\Delta X = f(G(X_n, Y_n) \Delta Y)$$

Intégration explicite

Cette technique est directement adaptée à la résolution de systèmes d'équations différentielles $dX = G(X, Y) dY$ [103]. Après passage de la différentielle vers l'incrément, nous exprimons, le système d'équations au début de l'incrément n (l'état initial) :

$$\Delta X = f(G(X_n, Y_n) \Delta Y)$$

Dans cette relation toutes les grandeurs sont connues puisque (X_n, Y_n) est l'état initial et ΔY est l'incrément des variables de pilotage. Le calcul de ΔX et de l'état final $(X_{n+\Delta X}, Y_{n+\Delta Y})$ est donc direct, mais dépend de la précision de la technique d'interpolation et de la taille de l'incrément de chargement. Pour appliquer cette technique à une équation intégrale $F(X, Y) = 0$, il faut tout d'abord la réduire sous forme différentielle. En effet, partant d'un état équilibré $F=0$, l'équilibre à l'instant suivant s'écrit sous la forme $F+dF=0$ qui se simplifie en $dF=0$ d'où :

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY = 0 \\ \Leftrightarrow dX &= G(X, Y) dY \end{aligned}$$

$$\text{Avec } G(X, Y) = - \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial Y} .$$

Intégration implicite

En partant de l'état initial connu X_n , nous cherchons l'état final des variables inconnues X_{n+1} qui vérifie l'équilibre à la fin de l'incrément $F(X_{n+1}, Y_{n+1}) = 0$. Cette fois le système à résoudre est fonction de l'état final des variables qui n'est justement pas encore connu c'est un système implicite.

L'intérêt majeur de cette méthode d'intégration est que la solution calculée est exacte et stable. Il est donc possible d'imposer des incréments de chargement importants si et seulement si la boucle itérative est convergente et le problème n'a qu'une seule solution. Si on souhaite appliquer cette technique à une équation différentielle $dX = G(X, Y) dY$ il faut tout d'abord réécrire celle-ci sous la forme d'une fonction à annuler :

$$F(\Delta X, \Delta Y) = \Delta X - f(G(X_n + \Delta X, Y_n + \Delta Y), \Delta Y) = 0$$

Il est nécessaire ici d'introduire comme inconnue l'incrément ΔX des variables pour passer de l'état initial à l'état final et non pas les variables à l'état final X_{n+1} . Cette méthode choisie n'élimine pas les problèmes d'exactitude de la solution calculée puisque il est toujours nécessaire de faire intervenir la translation de la différentielle vers l'incrément. Par contre, par rapport à une intégration explicite, le schéma implicite élimine le problème de stabilité de la solution calculée, mais reste les problèmes de convergence de la boucle itérative.

Résolution du système d'équations

Notre problème est la résolution d'un système d'équations non linéaires. À chaque incrément de chargement les équations du système sont modifiées et une nouvelle solution sera calculée. Nous avons défini dans ce chapitre quatre systèmes d'équations. Pour calculer la réponse du matériau nous devons sélectionner le comportement (élasticité, transformation, plasticité, et transformation avec plasticité) ensuite nous résolvons le système d'équations qui lui correspond. En effet, cette sélection se fait à partir d'une prédiction élastique. Une fois la sélection est terminée, il s'agit de résoudre un système d'équations non linéaires de manière implicite. Puisque le système est analytique, il est facile de déterminer le Jacobien en se basant sur la méthode de résolution de Newton-Raphson.

Choix du système d'équation à résoudre :

Pour connaître la fonction de charge qui doit être active au cours d'un incrément de chargement thermomécanique, il faut déterminer le mécanisme actif (élasticité,

transformation, plasticité, et transformation plus plasticité) à la fin de l'incrément. Lors de la résolution, nous effectuons une prédiction thermo-élastique. Ensuite nous vérifions les hypothèses de départ. La résolution du système engendre une évolution des variables internes jusqu'à ce que nous ayons l'activation d'une autre fonction de charge. Le système est résolu de manière à ce que les forces motrices et les forces critiques soient équilibrées en assurant que les variables internes s'incrémentent positivement jusqu'à ce que nous ayons une valeur limite de la fraction martensitique ou de la déformation plastique. L'algorithme de sélection est le suivant :

- Prédiction Thermo-élastique initiale de la contrainte et des variables internes sans activation de critère de charge : calcul des critères de charge.
- Si le critère de transformation pur est actif : résolution du système d'équations pour le cas de la transformation en assurant la mise à jour des critères de charge avec le nouvel état de contraintes et de variables internes.
- Si le critère de plasticité pur est actif : résolution du système d'équations pour le cas de la plasticité en assurant la mise à jour des critères de charge avec le nouvel état des contraintes et des variables internes.
- Si les critères de transformation et de la plasticité sont simultanément actifs : résolution du système d'équations pour les cas de la transformation et de la plasticité en assurant la mise à jour des critères de charge avec le nouvel état de contraintes et de variables internes.
- Si aucun des critères n'était actif le problème est résolu avec la prédiction thermo-élastique initiale.

Cet algorithme implique dans certains cas de résoudre à plusieurs reprises le système d'équations (approche itérative). L'étape suivante consiste à résoudre les différents systèmes d'équations. On note X le vecteur des variables inconnues du système (les variables internes f et γ ainsi que la contrainte Σ) et Y le vecteur des variables de pilotage (la déformation totale E et la température T). Nous exprimons la déformation de transformation et la déformation de plasticité sous forme incrémentale. Ainsi nous écrivons le problème sous la forme suivante où les inconnues sont les incréments du vecteur ΔX , tandis que les termes X , Y et ΔY sont des valeurs connues à l'état initial :

$$F(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = 0$$

Les équations du système sont résolues en utilisant la technique de Newton-Raphson. Cette méthode s'applique sur les systèmes d'équations non linéaires et consiste à faire un

développement limité au premier ordre. On dérive les équations en fonction des variables inconnues. Mais ce développement ne suffit pas pour avoir la bonne solution et il faut plusieurs itérations afin d'aboutir à la convergence de la solution, $X^{n+1} = X^n + \Delta X^n$. La correction calculée est notée $\delta \Delta X$.

Le schéma de Newton-Raphson est le suivant :

- Initialement $\Delta X^0 = 0$ et le système est déséquilibré $F(X + \Delta X, Y + \Delta Y) \neq 0$
- Approximation de Newton- Raphson $F(X + \Delta X^n, Y + \Delta Y) + J \delta \Delta X = 0$

Avec le jacobien $J = \frac{\partial F}{\partial \Delta X}$

- Calcul de la correction de Newton- Raphson par inversion de la relation précédente

$$\delta \Delta X = J^{-1}(-F(X + \Delta X^n, Y + \Delta Y))$$

- Mise à jour de l'incrément

$$\Delta X^{i+1} = \Delta X^i + \delta \Delta X$$

Les systèmes d'équations à résoudre pour les différentes configurations sont détaillés en annexe.

VI. Conclusion

L'objectif de cette étude est de développer un modèle tridimensionnel qui s'adapte au calcul par élément finis. Nous avons développé une formulation tridimensionnelle décrivant le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme à base de fer. Cette loi de comportement développée intègre l'effet des mécanismes de transformation de phase et de glissement plastique ainsi que leur interaction. L'expression de la loi de comportement obtenue se présente sous forme d'un système différentiel de premier ordre en fonction de la contrainte et sa vitesse et également de différentes variables internes et leurs vitesses. Nous avons adopté le schéma implicite d'intégration de Newton-Raphson pour la résolution de ce système. L'incrément de contrainte et de chaque variable interne sont ainsi calculés pour chaque incrément de déformation et de température de manière itérative.

L'étape suivante consiste à identifier les paramètres du modèle et de le valider en le comparant aux essais expérimentaux. Enfin une implantation dans le code éléments finis ABAQUS est décrite par la suite dans ce dernier chapitre.

Chapitre IV

Validation du modèle et implantation dans un code élément finis

Sommaire

I.	Introduction	78
II.	Identification des paramètres	78
III.	Analyse de la sensibilité aux paramètres du modèle.....	80
IV.	Validation du modèle.....	85
	IV.1 Chargement unidirectionnel	85
	IV.2 Chargement complexe	88
V.	Implantation du modèle dans ABAQUS.....	89
VI.	Validation : tests préliminaires.....	92
VII.	Conclusion	94

I. Introduction

Afin de vérifier la pertinence de la méthode d'intégration et la cohérence de l'approche développée, les résultats obtenus par simulation numérique pour chargement thermodynamique, sont confrontés à ceux obtenus expérimentalement lors d'une campagne expérimentale effectuée au LPMM à Metz utilisant la machine d'essais réalisée dans le cadre de la thèse de B. Peultier [88] et décrite dans le chapitre II. Pour cela nous commençons par l'identification des paramètres pilotant la loi du comportement du modèle. Ensuite nous analysons la sensibilité à ces paramètres pour des chargements thermomécaniques.

Afin de disposer d'un outil numérique de dimensionnement des applications en alliages à mémoire de forme à base de fer, la formulation incrémentale du modèle développé est implantée dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS. Pour ce faire, la routine UMAT est utilisée. Dans cette routine, en plus de l'actualisation de l'état de contraintes et des variables internes suite à un incrément de chargement thermomécanique, les opérateurs tangents cohérents avec le schéma d'intégration sont explicités.

II. Identification des paramètres

L'identification de paramètres pilotant la loi de comportement développée repose sur la réalisation d'essais thermomécaniques. Les grandeurs mesurées sont généralement la force et le déplacement qui ne sont pas directement utilisées. Il est donc nécessaire de les convertir en contraintes et déformations. L'exemple le plus simple et le plus utilisé est l'essai de traction dans lequel les états de contrainte et de déformation sont supposés homogènes. L'hypothèse d'homogénéité n'est plus valable lorsque la plasticité est locale et que le phénomène de striction se manifeste. L'hétérogénéité est recherchée puisque il est impossible d'obtenir un état de contrainte homogène pour certains matériaux hétérogènes. L'inconvénient est que l'essai est plus difficile à interpréter, puisque l'écart entre le modèle et l'expérience ne peut pas être visualisé simplement sur une courbe contrainte déformation. En revanche, les champs de déformation hétérogènes contiennent davantage d'informations que les champs homogènes, ce qui rend possible une identification plus efficace des paramètres.

Dans la partie expérimentale de ce travail, les éprouvettes ont été sollicitées en chargement thermomécanique donc nous pouvons déterminer les différents paramètres du modèle puis comparer sa prédiction avec les données expérimentales. Avant de s'attaquer au cas tridimensionnel nous avons étudié ce système d'équations dans le cas d'un chargement thermomécanique unidimensionnel.

La mise en œuvre du modèle nécessite l'identification des paramètres suivants :

- Module de Young et coefficient de Poisson (le comportement élastique est supposé isotrope linéaire) : E et ν
- Coefficient de l'énergie de transformation : C'est la constante chimique identifiée à partir de la pente de la transformation martensitique B (MPa/°C) $= b \varepsilon_{sat}^T$
- Température d'équilibre : C'est la moyenne de M_s et A_f .

$$T_0 (\text{°C}) = \frac{M_s + A_f}{2}$$

En se basant sur le diagramme de transformation, nous pouvons déterminer les températures M_s et A_f , la pente de limite de transformation en traction nommée b . Ceci nous permet de déduire les paramètres T_0 , B et F_m^f .

- La déformation de transformation maximale ε_{max}^T .

La déformation de transformation maximale de saturation ε_{max}^T est déterminée à partir d'une courbe de chargement mécanique tel que $T > A_f$

- La force critique de transformation: $F_m^f (MPa) = B(T_0 - M_s) + \sigma_0^f$
- La force critique de plasticité : $F_m^\gamma (MPa) = \sigma_0^\gamma + k\gamma^m$ avec σ_0^γ présente la contrainte initiale d'activation de la plasticité (avant l'initiation de l'écroutissage).

L'écroutissage isotrope correspond à une dilatation du domaine d'élasticité identique dans toutes les directions de l'espace des contraintes et le centre du domaine d'élasticité reste inchangé. D'une façon générale, l'écroutissage est introduit directement dans le critère de plasticité sous forme d'un ensemble de paramètres internes : Le terme $k\gamma^m$ contient les paramètres d'écroutissage isotrope de notre modèle (k et m).

Les termes qui décrivent les interactions sont :

- Entre les grains $H_g (MPa)$;
- Entre les variantes de martensite formée $H_v^T (MPa)$;
- Entre les systèmes de glissement plastique $H_s^p (MPa)$;
- Entre les variantes de martensite formée et les systèmes de glissement plastique $H_{vp} (MPa)$.

$$H_v^T (MPa) = B (M_f - M_s) \text{ [88]}$$

H_g (MPa) est déterminé à partir de la pente de la partie transformée d'une courbe expérimentale pour un chargement mécanique. Le paramètre qui décrit l'interaction entre les systèmes de glissement H_s^p (MPa) est déduit à partir de la pente de la partie plastique. Le paramètre qui décrit l'interaction entre les variantes de martensite les systèmes de glissement H_{vp} (MPa) est difficile à identifier avec les données expérimentales actuelles. Des essais spécifiques sont en cours d'élaboration. En attendant, nous supposons qu'il présente une valeur intermédiaire entre la pente de la partie transformée et la pente de la partie plastique.

Dans le cas tridimensionnel, on suppose que la loi de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations élastiques est linéaire. Lorsque de plus le solide élastique a un comportement isotrope, on obtient l'expression suivante du tenseur d'élasticité :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

A partir des essais expérimentaux, on peut identifier le module d'Young et le coefficient de Poisson et on en déduit les coefficients de Lamé λ et μ suivant les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

A partir des courbes expérimentales et des diagrammes de transformation on identifie tous les paramètres du modèle :

Tableau IV-1 : Différents paramètres utilisés pour le modèle

E (MPa)	ν	M_s (°C)	A_f (°C)	K(MPa)	ϵ_{\max}^T
175000	0,3	0	130	1000	0,048
B (MPa/°C)	H_v(MPa)	H_g(MPa)	H_{vp} (MPa)	m	H_s^p(MPa)
0,04	1,6	5000	2500	0,35	10

III. Analyse de la sensibilité aux paramètres du modèle

Pour déterminer l'influence des paramètres du modèle (M_s , A_f , K , m ...) nous allons faire varier un de ces paramètres en fixant les autres.

Influence des paramètres de transformation

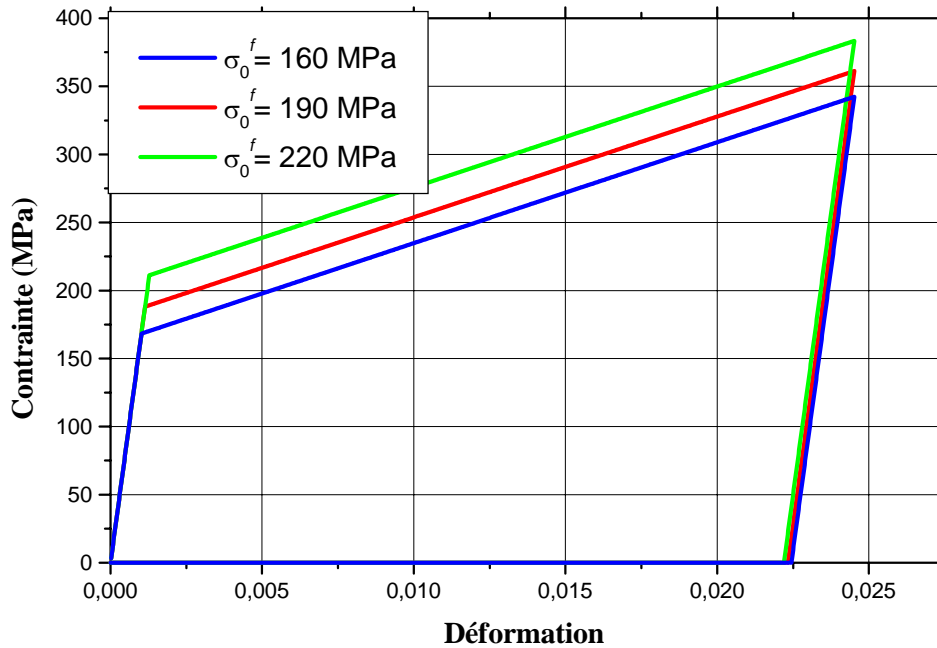


Figure IV-1 : Influence du paramètre σ_0^f

σ_0^f : C'est un paramètre déterminé à partir de la courbe expérimentale (début de la transformation). L'augmentation de ce paramètre retarde le déclenchement de la transformation (Figure IV-1)

Ms : Ce paramètre décrit le début de la transformation, il est déterminé à partir du diagramme de transformation. A partir des équations adoptées pour l'identification des paramètres on remarque que l'augmentation de Ms engendre l'augmentation de T_0 et la diminution de Hv qui est lié à l'interaction entre les variantes de martensite. La figure IV-2 montre que l'augmentation de ce paramètre augmente la pente.

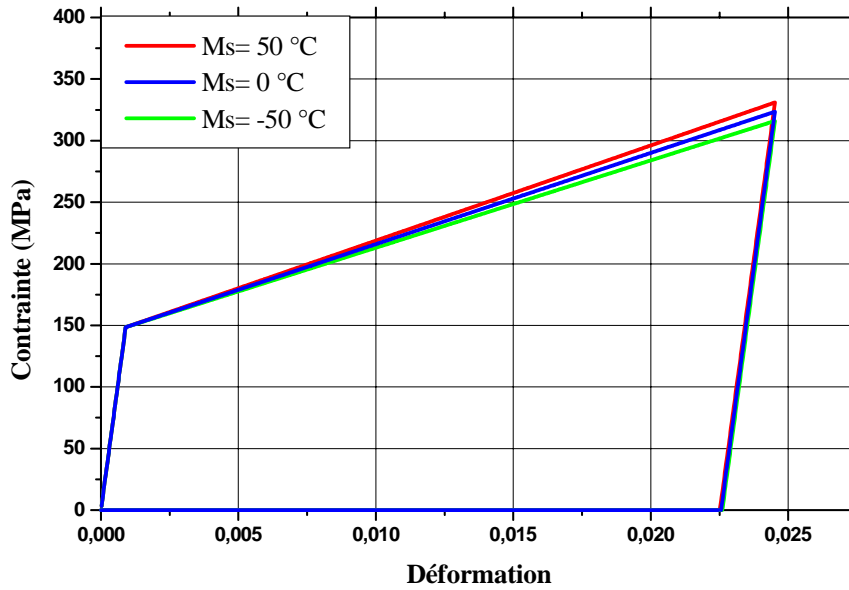


Figure IV-2 : Influence du paramètre M_s

M_f : Ce paramètre décrit la fin de la transformation, il est déterminé à partir du diagramme de transformation. Contrairement à M_s , la température M_f augmente le terme H_v . Si nous augmentons la température M_f nous diminuons la pente. (Figure IV-3)

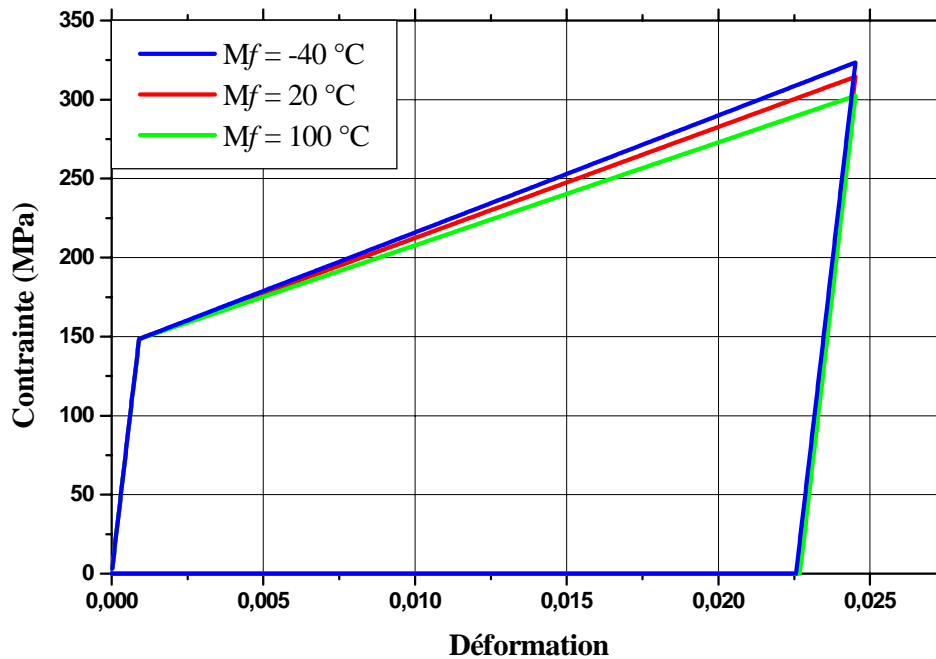


Figure IV-3 : Influence du paramètre M_f

Influence des paramètres d'écrouissage

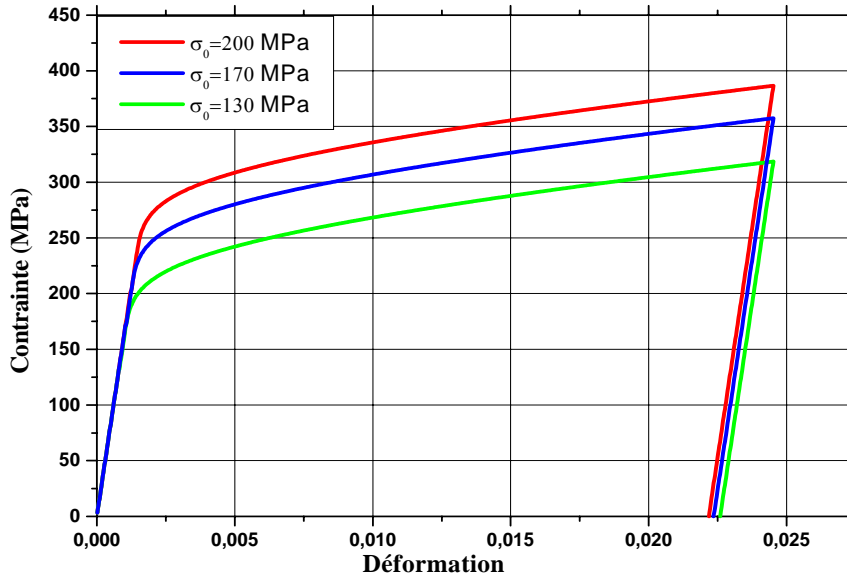


Figure IV-4: Influence du paramètre σ_0^γ

On rappelle que $F_c^\gamma = \sigma_0^\gamma + kp^m$

σ_0^γ : Ce paramètre est déterminé à partir de la courbe expérimentale (début de la plasticité).

L'augmentation de ce paramètre retarde le déclenchement de la plasticité (Figure IV-4).

Hsp : Ce paramètre est lié à l'interaction entre les systèmes de glissement plastique.

L'augmentation de ce paramètre augmente la pente de la partie plastique de la courbe (Figure IV-5).

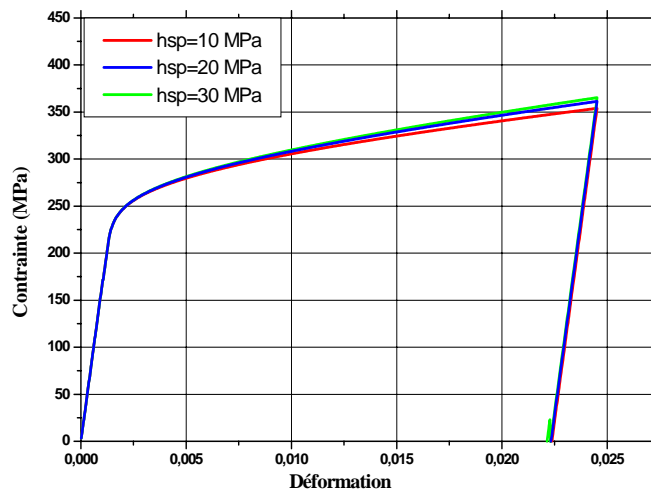


Figure IV-5: Influence du paramètre Hsp

K et m : Ces deux paramètres ont une influence sur la partie plastique. En effet ils sont liés à l'écroutissage isotrope. Nous avons fixé m et nous avons varié K (Figure IV-6). Nous remarquons que si nous augmentons le paramètre K, nous observons un écroutissage plus fort

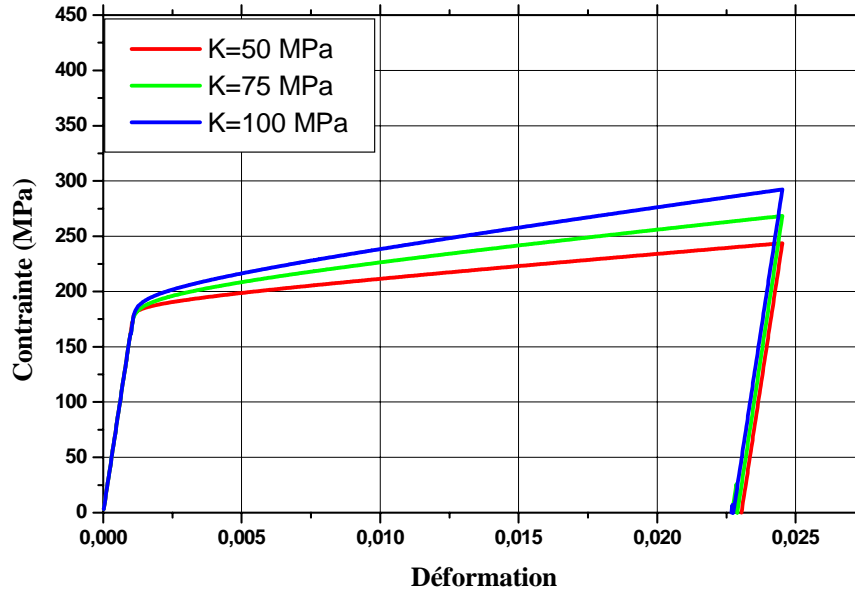


Figure IV-6: Influence du paramètre K

En outre on a fixé K et on a varié m (Figure IV-7). Le paramètre m est directement lié à l'écroutissage. L'augmentation de la valeur de m engendre une diminution de l'écroutissage. Lorsque m s'approche de la valeur 1, l'écroutissage devient remarquablement faible.

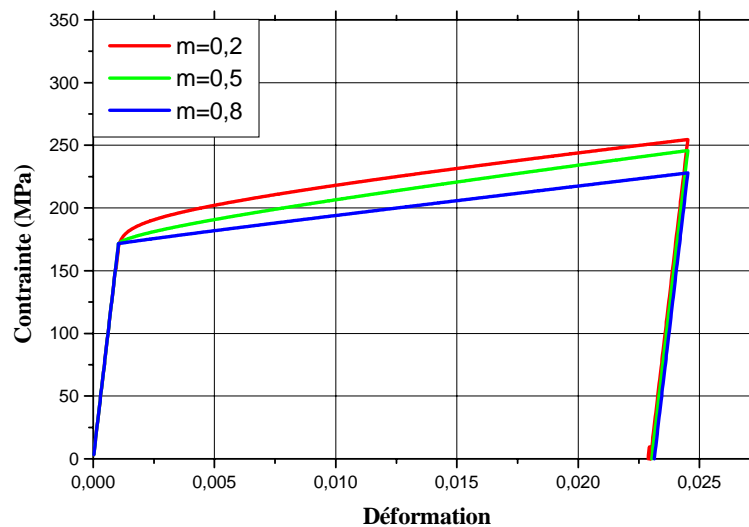


Figure IV-7: Influence du paramètre m

Hg : Ce paramètre est lié à l'interaction entre les grains. Il est déterminé à partir de la pente de la partie transformée d'une courbe expérimentale. En effet l'augmentation du paramètre Hg engendre l'augmentation de la pente (Figure IV-8).

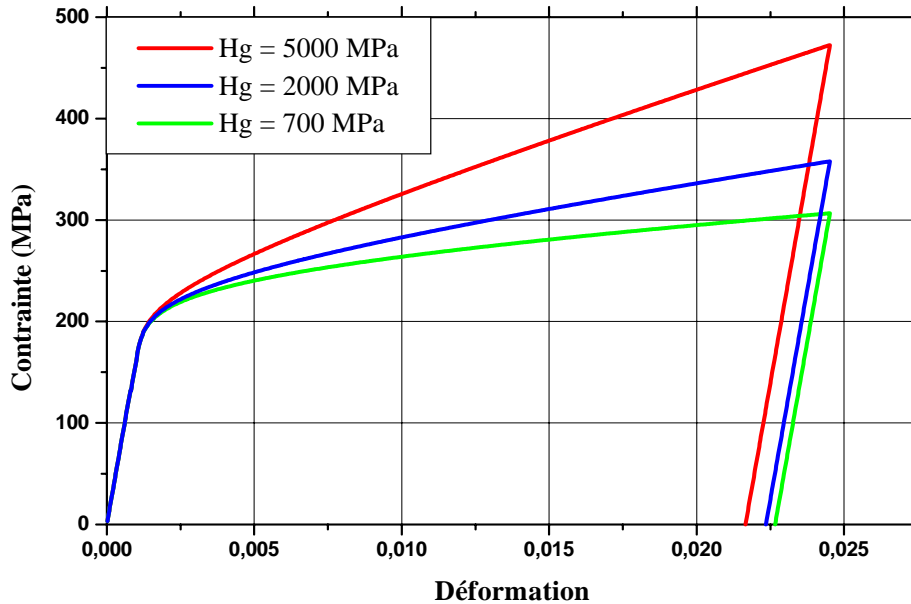


Figure IV-8 : Influence du paramètre Hg

IV. Validation du modèle

Pour la validation, de la loi de comportement de notre modèle nous avons choisi quelques courbes pour l'identification des paramètres et d'autres pour les confronter avec les courbes simulées numériquement. Nous avons choisi de présenter les températures $T=20^{\circ}\text{C}$, $T=50^{\circ}\text{C}$ et $T=130^{\circ}\text{C}$.

IV.1 Chargement unidirectionnel

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, à basse température ($T=20^{\circ}\text{C}$) nous atteindrons la transformation martensitique avant la plasticité. Lorsque nous appliquons une déformation de 2% nous n'avons que de la transformation. Ceci est bien clair dans la courbe puisque nous avons récupéré toute la déformation lors du chauffage. La courbe modélisée respecte également cette propriété et nous avons une évolution linéaire de la partie élastique et de la partie de transformation avec deux pentes différentes (Figure IV-9).

La décharge représente le retour libre de la partie élastique suivie par la décroissance de la déformation à contrainte nulle correspondant à l'effet mémoire de forme.

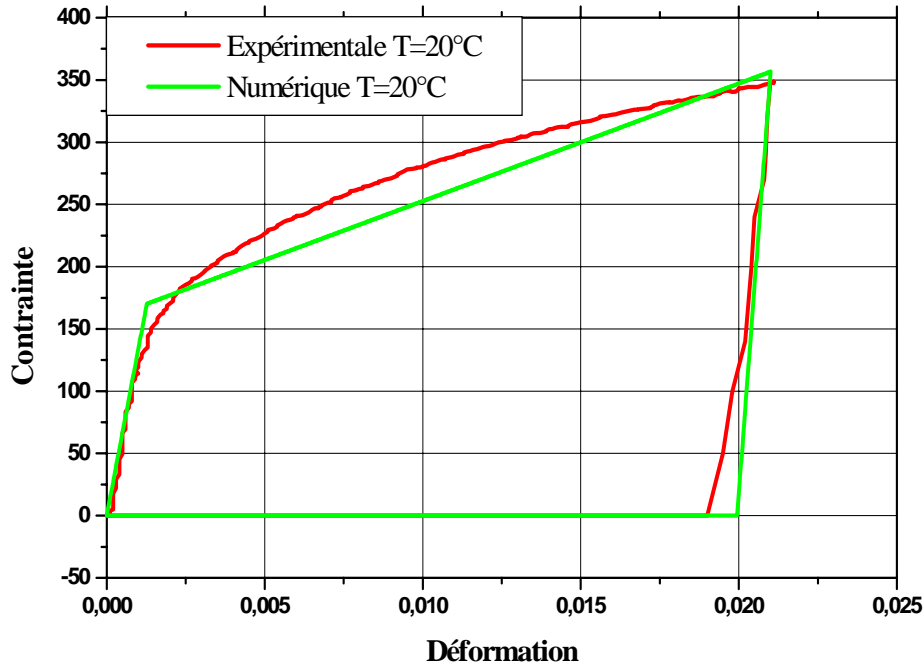


Figure IV -9 : Courbe de traction expérimentale et simulée pour $T=20^{\circ}\text{C}$

A $T= 50^{\circ}\text{C}$ et pour une décharge à 2% de déformation, seule une partie de la déformation totale a été récupérée lors du chauffage à contrainte nulle. La déformation inélastique est donc induite par transformation de phase et glissement plastique. Lors de la simulation de cet essai, on observe deux stades de comportement. Le premier est linéaire et correspond à la transformation martensitique alors que le deuxième est non linéaire et correspond à la plasticité de l'austénite.

La déformation récupérée après chauffage est induite par transformation de phase. La partie rémanente est associée au glissement plastique au niveau de l'austénite, (Figure IV-10). A haute température nous atteignons la plasticité avant la transformation donc pour une déformation de 2,1% seul le glissement plastique est actif puisque lors du chauffage la déformation demeure constante. Il n'y a donc pas de transformation (Figure IV-11). La simulation de cet essai permet d'aboutir au même résultat. Il s'agit d'une déformation inélastique induite uniquement par glissement plastique.

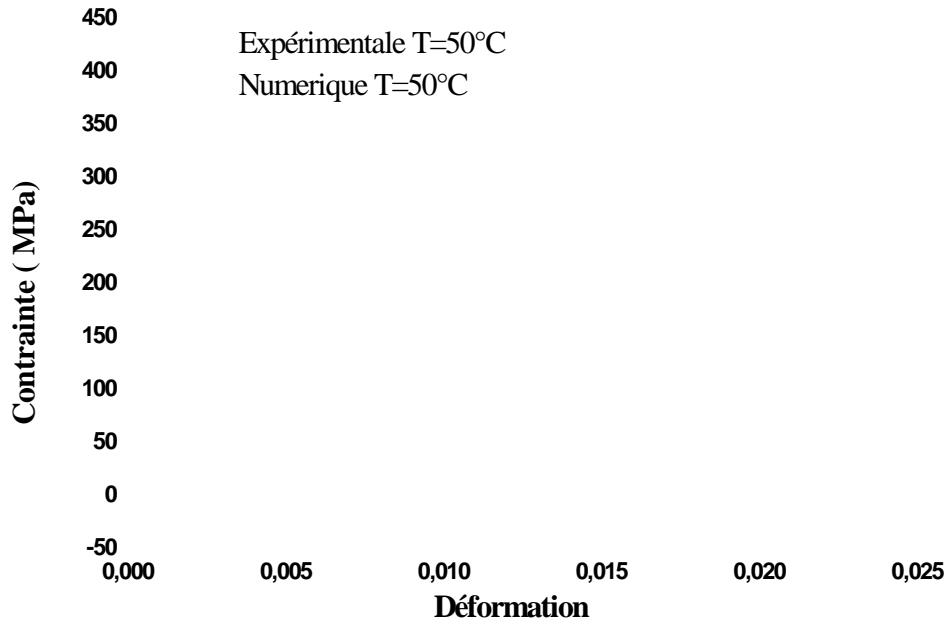


Figure IV -10 : Courbe de traction expérimentale et simulée pour $T=50^{\circ}\text{C}$

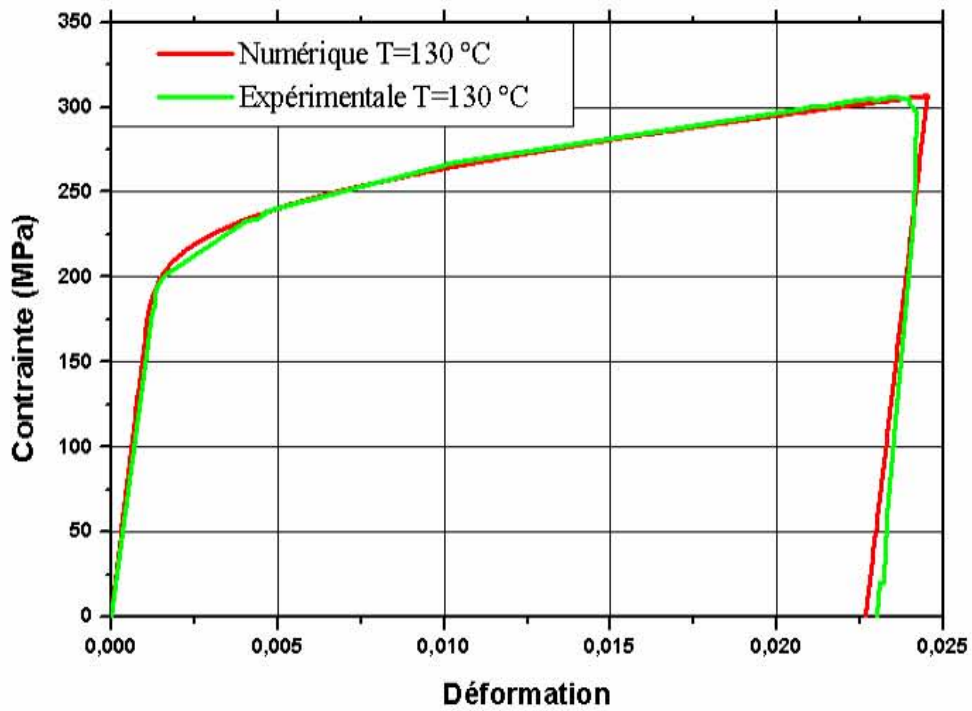


Figure IV -11 : Courbe de traction expérimentale et simulée pour $T= 130^{\circ}\text{C}$

IV.2 Chargement complexe

Pour mieux voir les réponses de notre loi pour un chargement complexe nous avons simulé un chargement à température constante $T=50^{\circ}\text{C}$, suivi d'une décharge et d'un chauffage pour récupérer la déformation de transformation. Ensuite nous avons maintenu l'incrément de la déformation nul $\Delta\varepsilon=0$ et nous avons chauffé (Figure IV-12).

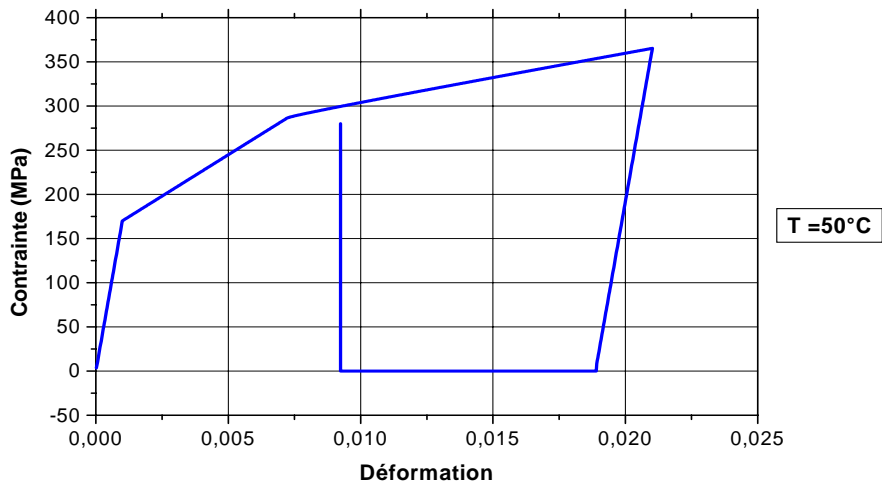


Figure IV-12 : Simulation de comportement pour chargement complexe

Nous remarquons que la contrainte augmente pour une déformation constante. Cette contrainte augmente linéairement en fonction de la température. (Figure IV-13)

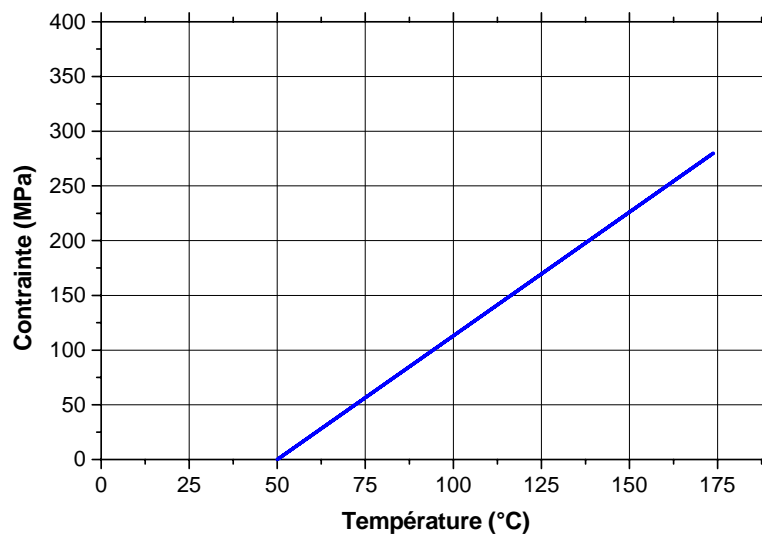


Figure IV-13 : Courbe contrainte température

En résumé on constate que le modèle reproduit bien le comportement thermomécanique des AMF à base de Fer observé expérimentalement. Il permet également de simuler l'effet d'un trajet de chargement thermomécanique complexe. Afin de le rendre exploitable pour le dimensionnement des applications en AMF à base de Fer, il est nécessaire de le coupler avec un code éléments finis. C'est l'objet du paragraphe suivant.

V. Implantation du modèle dans ABAQUS

La plupart des codes éléments finis tel que ABAQUS disposent d'une famille de lois de comportement standards. Elles couvrent un large spectre de comportement avec des mécanismes physiques tel que l'élasticité, la viscoélasticité, la plasticité, la viscoplasticité, l'endommagement, etc. Par contre cette famille n'est pas exhaustive et elle ne présente pas par exemple de lois représentatives du comportement des alliages à mémoire de forme à base de fer. Afin de compléter les lois existantes la plupart des codes proposent une routine utilisateur par le biais de laquelle il est possible d'introduire une loi de comportement spécifique. Dans le cas d'ABAQUS, il s'agit de la routine UMAT qui permet d'effectuer les opérations suivantes :

- Calcul des incréments de contrainte et des variables internes pour des incréments de déformation et de température donnés.
- Calcul des modules tangents.
- Actualisation des états de contrainte et de l'ensemble des variables internes associées à la loi de comportement utilisateur employée.

État de contrainte et matrice des modules tangents

Les états de déformation et de contrainte gérés par le logiciel ABAQUS sont stockés sous forme vectorielle. Dans le cas général tridimensionnel, les composantes de ceux-ci sont données comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix}$$

Pour que la loi de comportement puisse être utilisée par un code de calcul par élément finis utilisant un schéma d'intégration implicite, il est nécessaire de fournir les modules tangents

mécanique et thermique cohérents avec le schéma d'intégration adopté. Ils correspondent à l'influence d'une perturbation de la déformation et de la température sur le niveau de contrainte :

$$\frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta E_{kl}} \text{ et } \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta T}$$

Le calcul de ces modules tangents cohérents avec le schéma de Newton-Rapson est assez direct et ne nécessite pas de développements supplémentaires. Le module tangent cohérent est déterminé à partir d'une analyse de l'effet d'une perturbation de l'état en fin d'incrément. On impose une petite perturbation des variables de pilotage $\delta \Delta Y$ ce qui a pour effet de modifier linéairement les variables inconnues d'une valeur $\delta \Delta X$ en respectant l'équilibre de la solution :

$$\delta F = 0$$

$$J_x \delta \Delta X + J_y \delta \Delta Y = 0$$

$$\delta \Delta X = -J_x^{-1} J_y \delta \Delta Y$$

Avec les jacobiens $J_x = \frac{\partial F}{\partial \Delta X}$ et $J_y = \frac{\partial F}{\partial \Delta Y}$

Nous remarquons que le jacobien J_x est identique à celui calculé dans la boucle d'équilibre du système d'équations décrivant le modèle de comportement. Or nous avons besoin de la valeur du Jacobien à la fin de l'incrément ce qui correspond au dernier jacobien calculé dans la boucle de Newton Raphson et son inverse J_x^{-1} est déjà calculé. La matrice des modules tangents (notée DDSDDDE dans la routine *UMAT*) doit être retournée en sortie de chaque incrément. Un développement détaillé de son expression est fourni en annexe.

L'ensemble des termes conservés entre deux incréments successifs sont assimilés à des variables stockées en fin d'incrément pour être exploitées au début de l'incrément suivant (définis *STATEV* dans l'environnement *ABAQUS*). Il est à noter que les amplitudes totales doivent de même être stockées entre chaque pas de calcul afin d'actualiser l'évolution microstructurale. En résumé, l'algorithme de la loi de comportement implémentée est schématisé dans ses grandes lignes dans la Figure IV-14. Il reprend l'ensemble des données utilisées (en entrée) mais aussi demandées par le solveur du logiciel *ABAQUS* (en sortie).

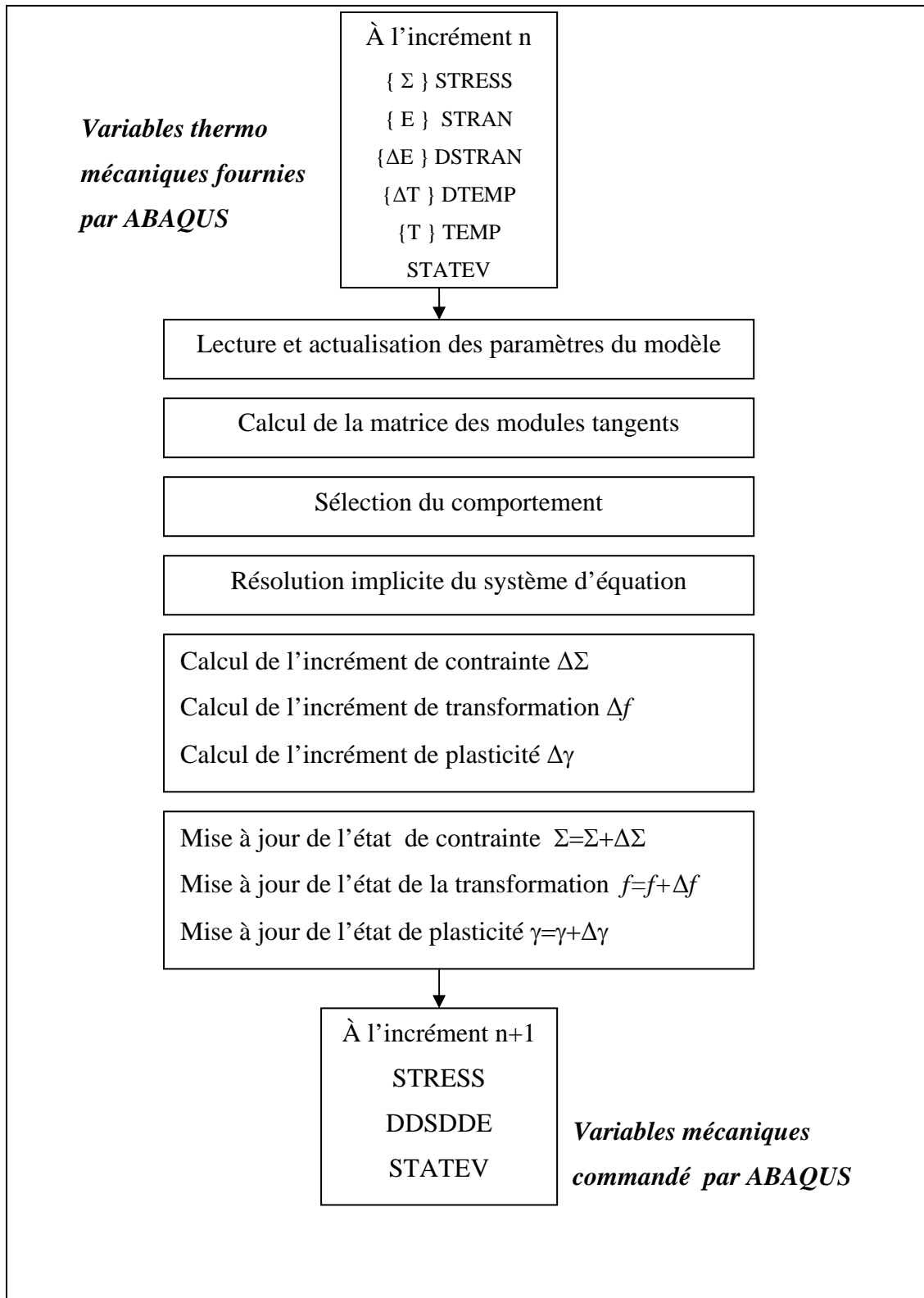


Figure IV-14 : Schématisation de la loi de comportement codée sous ABAQUS.

VI. Validation : tests préliminaires

Pour valider l'intégration de la loi de comportement, on va réaliser un test de traction standard dans ABAQUS. En effet, différentes modélisations qui n'impliquent ni la physique du problème ni la précision du calcul doivent être sans incidence sur la réponse mécanique simulée. A titre d'exemple, la finesse du maillage ne doit pas modifier la réponse d'une structure se déformant de manière homogène.

De nombreux éléments sont disponibles dans les bibliothèques des codes de calcul par éléments finis. A tout problème et ses hypothèses simplificatrices physiques associées correspondent des éléments particuliers. Au niveau calculatoire, le nombre de degrés de liberté nécessaire à la résolution varie, entraînant de fait une modification des dimensions des tenseurs utilisés. L'essai opéré pour tester la cohérence et la robustesse de la loi codée consiste à solliciter un élément 3D (C3D8) (figure IV-15). Dans un deuxième temps, nous allons comparer les courbes simulées et expérimentales contrainte/déformation selon la direction de sollicitation (figure IV-16 et figure IV-17).

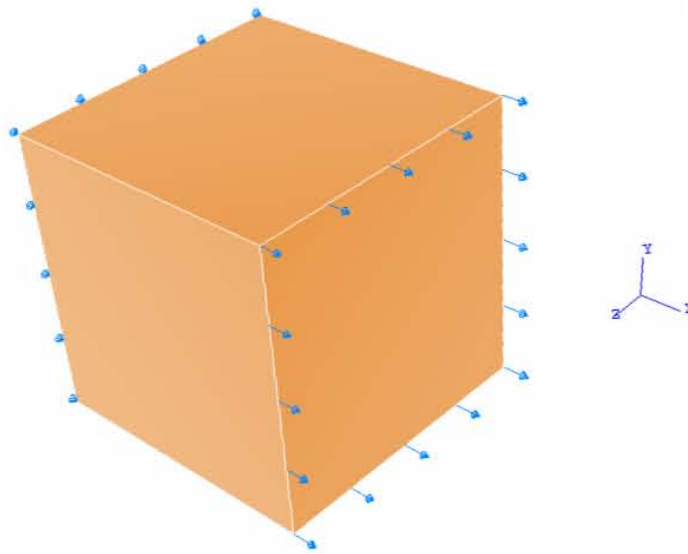


Figure IV-15 : Géométrie et conditions imposées pour simuler un essai homogène pour un élément tridimensionnel linéaire C3D8

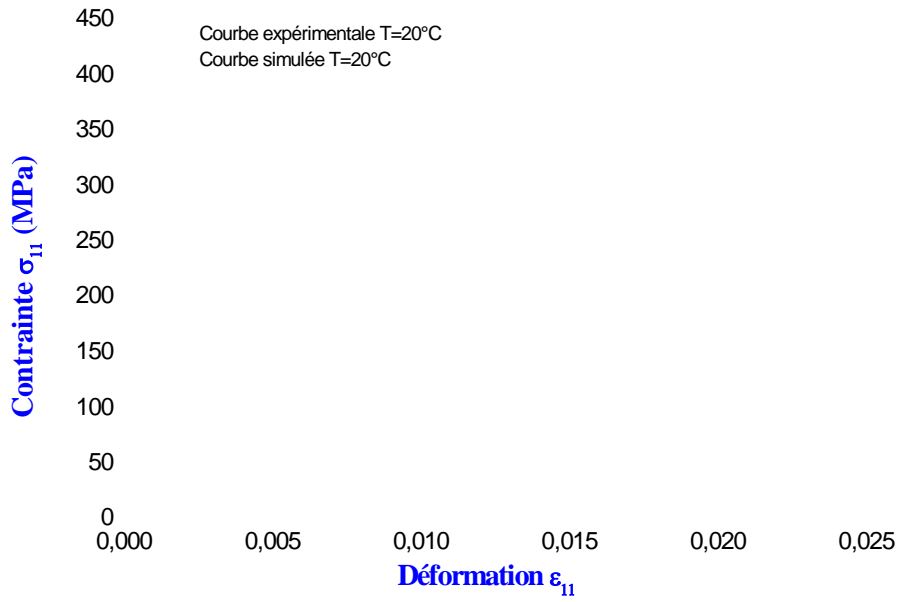


Figure IV - 16 : courbes expérimentale et simulée à $T=20^{\circ}\text{C}$
 Courbe contrainte - déformation selon l'axe de sollicitation

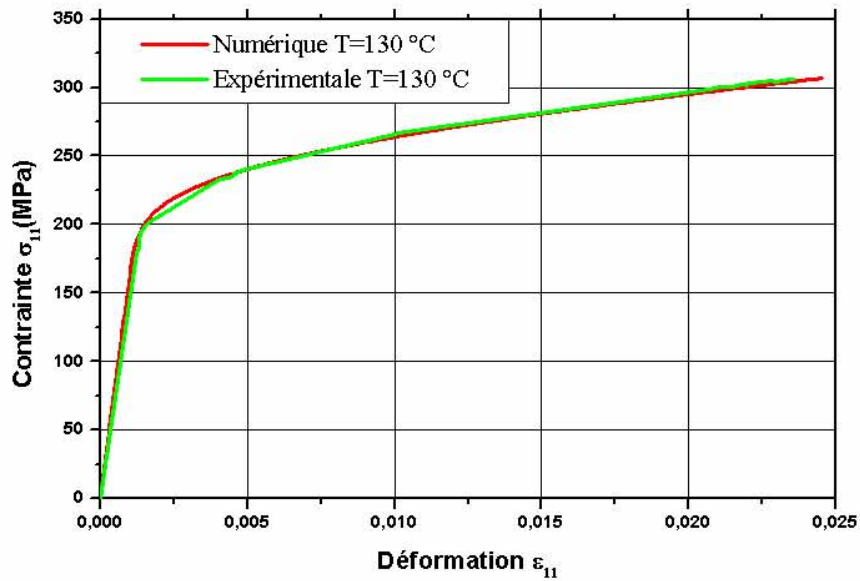


Figure IV - 17: courbes expérimentale et simulée à $T=130^{\circ}\text{C}$
 Courbe contrainte - déformation selon l'axe de sollicitation

Pour un essai de traction simple sans décharge (sans retour élastique) on remarque que la courbe expérimentale est en cohérence avec celle obtenue lors de la simulation par éléments finis.

VII. Conclusion

Le modèle du comportement développé dans le chapitre précédent a été intégré numériquement. Les équations comportementales étant initialement sous forme intégrale, et un schéma d'intégration implicite a été choisi. Les différents paramètres du modèle sont ajustés à partir du diagramme de transformation et d'une partie des résultats expérimentaux. Ensuite nous avons étudié la sensibilité de ces paramètres.

Les résultats issus de la simulation pour des essais de chargement mécanique à différentes températures sont en cohérence avec ceux obtenus expérimentalement. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux montre d'une part, que les lois utilisées décrivent fidèlement les comportements respectifs de l'AMF, et d'autre part que la modélisation reproduit correctement les effets d'interactions de structure entre les constituants. La simulation d'autres types de chargements thermomécaniques, mettant en jeu le retour contraint ou l'effet mémoire de forme de l'alliage, permettra d'élargir le champ d'applications possibles des AMF.

Afin de valider totalement notre modélisation, nous avons simulé des trajets de chargement thermomécanique complexes. Ensuite nous avons implanté la loi de comportement dans le code éléments finis ABAQUS.

Conclusion générale

Les alliages à mémoire de forme à base de fer présentent des propriétés thermomécaniques intéressantes induites par les mécanismes couplés de transformation martensitique et de glissement plastique. L'objectif était d'aider à la conception d'une application en AMF exploitant le comportement thermomécanique des aciers à mémoire de forme de la gamme Fe-Mn-Si.

Notre première priorité était de choisir des techniques et des essais expérimentaux, à fin d'obtenir, autant que possibles, une description physique du comportement. Ces résultats nous aident à comprendre les phénomènes d'interaction entre les variantes de martensites et les systèmes de glissement plastique.

Les études au sujet de la modélisation du comportement thermomécanique des AMF à base de fer, nécessaires à l'optimisation de leurs performances et au dimensionnement des applications par la méthode des éléments finis sont encore relativement peu nombreuses et se limitent généralement à des formulations unidimensionnelles.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous nous sommes intéressés, à la modélisation du comportement thermomécanique de l'alliage à mémoire de forme à base de fer type Fe-31,6% Mn-6,45% Si. Pour l'étude de cet acier, nous avons d'abord procédé à un choix d'une approche pour la modélisation du comportement thermomécanique. Pour cela nous avons analysé les modèles présents dans la littérature. Il en existe deux types : les approches phénoménologiques et les approches micromécaniques. Les premiers sont les plus adaptés aux éléments finis. Nous l'avons choisi pour la modélisation du comportement thermomécanique de notre alliage. Ensuite nous avons développé les équations constitutives qui permettent de décrire le comportement mécanique en traction de cet alliage. En fin nous avons intégré le modèle et nous l'avons implanté dans un code de calcul par éléments finis ABAQUS.

Expérimentation

Les mesures dilatométriques ont permis de mettre en évidence la formation et la disparition de la martensite ϵ au détriment de l'austénite avec précision. Les températures de transformation M_s , A_s , A_f sont alors faciles à déterminer avec une bonne précision de $\pm 5^\circ\text{C}$.

L'alliage Fe-31,6% Mn-6,45% Si présente une transformation martensitique $\gamma \leftrightarrow \varepsilon$ réversible.

Les essais de traction à différentes températures sont réalisés en suivant un cycle de charge décharge pour récupérer la déformation élastique. Ensuite nous réalisons un chauffage pour récupérer la déformation de transformation.

Trois comportements différents sont distingués à partir des courbes expérimentales : domaine de l'élasticité, la transformation, et le couplage plasticité et transformation.

Cette partie expérimentale est primordiale pour notre étude et elle sera utilisée pour la détermination des différents paramètres du modèle développé.

Modélisation

Nous avons développé une formulation tridimensionnelle décrivant le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme à base de fer. Cette dernière intègre l'effet des mécanismes de transformation de phase et de glissement plastique ainsi que leur interaction.

Le modèle de comportement formulé est basé sur une description micromécanique des mécanismes de transformation de phase et de glissement plastique au niveau du réseau cristallin. Une version macroscopique de la formulation est obtenue en considérant d'une manière homogène équivalente l'effet de ces deux mécanismes. L'énergie libre de Gibbs a été considérée avec ces différentes contributions (énergie potentielle, énergie élastique liée aux incompatibilités induites par la transformation de phase et le glissement plastique, et l'énergie chimique liée à la transformation de phase). L'expression de cette énergie libre est exprimée en fonction des variables de pilotage (contrainte ou déformation et température), des caractéristiques du matériau et des variables internes décrivant les deux mécanismes (fraction volumique et déformation plastique). Après différentes opérations de transition d'échelle simplifiée, une nouvelle expression de cette énergie libre est obtenue uniquement en fonction des grandeurs macroscopiques. Il s'agit de la contrainte et de la température macroscopiques (appliquées au matériau) et de nouvelles variables internes macroscopiques correspondants à la fraction volumique et l'orientation moyennes de martensite ainsi que la déformation plastique moyenne. Ces opérations de moyenne sont effectuées sur un volume élémentaire représentatif de l'alliage étudié. Les différentes énergies d'interaction (interaction inter-variantes, interaction inter-systèmes de glissement et interaction entre une variante de martensite et un système de glissement) ont été également exprimées en fonction des

variables internes macroscopiques en introduisant des paramètres caractéristiques scalaires.

Les forces motrices de transformation et de glissement plastique sont obtenues en dérivant l'expression de l'énergie libre de Gibbs par rapport à ces variables internes. La comparaison de ces forces motrices à des forces critiques d'activation des mécanismes mis en jeu nous a permis de déterminer le type de comportement induit pour un niveau de chargement donné (élasticité, transformation pure, glissement plastique pur, transformation et glissement plastique). Enfin l'expression de la loi de comportement thermomécanique est obtenue à partir de la loi de Hooke et des conditions de cohérence pour les différentes forces motrices.

L'expression de la loi de comportement obtenue se présente sous forme d'un système différentiel de premier ordre en fonction de la contrainte et sa vitesse et également de différentes variables internes et leurs vitesses. Nous avons adopté le schéma implicite d'intégration de Newton-Raphson pour la résolution de ce système. L'incrément de contrainte et de chaque variable interne sont ainsi calculés pour chaque incrément de déformation et de température de manière itérative.

Une version tridimensionnelle de ce logiciel a été développée. Elle permettra de simuler des essais tridimensionnels à température constante. La comparaison des résultats de ces simulations à ceux obtenus lors de précédentes campagnes d'essais permettra de vérifier la cohérence de notre formulation et d'apporter éventuellement les corrections nécessaires. Notre modèle est enfin implanté dans le code éléments finis ABAQUS.

Perspectives

Le dimensionnement de structure en AMF soumises à des chargements plus complexes nécessite soit une campagne expérimentale spécifique, soit l'utilisation d'outils numérique de dimensionnement intégrant le comportement des AMF généralement basé sur la méthode des éléments finis.

Le modèle de comportement développé au cours de ces travaux a été adapté à la méthode des éléments finis. Il a été validé sur les tests de comportement thermomécanique unidimensionnels. Il serait intéressant de tester les prédictions du modèle dans le cas de chargement un peu plus complexes en vue de simuler des applications de type bague de serrage sollicitée en expansion ou micro-actionneur à effet mémoire de forme.

Références bibliographiques

- [1] NORME FRANCAISE, NF A 51-080, (1991).
- [2] ROCH. I “*potentialite d’integration des alliages à mémoire de forme en film mince dans les microsystèmes*”, Thèse de l’ Université de Lille I, (2001).
- [3] CHANG L.C., READ T.A. “*Plastic deformation and diffusionless phase changes in metals – The gold-cadmium beta phase*”. *Trans AIME*, 189, 47-52, (1951)
- [4] SITTNER P., VOKOUN D., DAYANANDA G.N , STALMANS R. , “*Recovery stress generation in shape memory Ti50Ni45Cu5 thin wires*”, *Materials Science and Engineering*, vol. A286, (2000), 298-311.
- [5] KATO H., INAGAKI N., SASAKI K.“ A One-Dimensional Modelling of Constrained Shape Memory Effect”. *Acta Materiala*, Vol. 52.,(2004), 3375.
- [6] COHEN M., OLSON G.B., CLAPP P.C. “*In proceedings of the international conference on the martensitic transformation*”. On the classification of displacive phase transformation. Cambridge-Massachusetts (USA), (1979)p.1-11..
- [7] OLSON G. B., OWEN W. S., *Martensite* (ASM International, Materials Park, OH, 1992)
- [8] <http://membres.lycos.fr/planetamf.html>
- [9] MANTOVANI D., “*Shape Memory Alloys: Properties and Biomedical Applications*”, *Journal of the Minerals, Metals & Materials Society*, (2000) ,pp. 36-44.
- [10] [http:// www.awaji-m.jp/english](http://www.awaji-m.jp/english)
- [11] GUENIN G. “*Alliages à mémoire de forme* ”,Note DCR/AO - n° 12.0013.91 - Techniques de l’ingénieur, (1986).
- [12] BERRAHMOUNE M.R., “*Transformation martensitique et rupture differee dans l’acier austenitique instable 301ln*”, thèse de l’École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers (2006) Metz
- [13] WAYMAN C.M., DUERIG T.W. “*An introduction to martensite and shape memory In: Duerig TW, Melton KN, Stoeckel D, Wayman CM, editors. Engineering aspects of shape memory alloys. London: Butterworth-Heinemann Ltd*”, (1990) pp.3-20.
- [14] CHRISTIAN J.W., OLSON G.B., COHEN M. “*Classification of displacive transformation: What is a martensitic transformation?*” In proceedings of the International Conference on the Martensitic Transformation. Lausanne -Suisse, J.de physique IV, colloque C8, supplément au Journal de physique III, Vol.5, (1995), pp.3-10.

- [15] PHILIBERT J., VIGNES A., BRECHET Y, COMBRADE P., “*Métallurgie, du minerai au matériau*”, Edition Masson, ISBN 2-225-82978-0 , (1998),645-673
- [16] WAYMAN C.M., “ *Shape memory effect and related phenomena*”, Progress in Materials Science, 36, (1992), 203-224
- [17] NISHIYAMA Z, “*Martensitic transformation*”, Academic Press, London (1978), pp. 235–248
- [18] BOWLES J.S., WAYMAN C.M.,. “*The Bain strain, lattice correspondances and deformations related to martensitic transformations*”. Metall. Trans., 3, (1972),1113–1121.
- [19] KAUFMAN L., COHEN M., “ *Martensitic transformations*”. Progress in Metal Physics, vol. 7. Pergamon Press, Oxford, (1958), pp. 165–246.
- [20] MAKI,T. AND TSUZAKI,K., “*Transformation behaviour of ε -martensite in Fe-Mn-Si shape memory alloys*”, Proc. ICOMAT 92 (1992) pp.1151-1162.
- [21] BOURAOUI. T, “ *Transformation martensitique suivies par mesure de résistance électrique et de plasticité de transformation*”. Thèse de doctorant de l'université PIERRE ET MARIE CURIE, (1996)
- [22] WAYMAN C.M. “ *Phase transformations, non diffusive*”. Physical Metallurgy. North-Holland Physics Publishing, New York,(1983), pp. 1031–1075..
- [23] PATOOR E., BERVEILLER, M. “*Technologie des alliages à mémoire de forme - comportement mécanique et mis en œuvre*” Editions HERMES, (1994).
- [24] KUBIN L.P.,“*Les alliages à mémoire de forme*” , L'ordre et désordre dans les matériaux, (1984), p.186.
- [25] HORNBOGEN E., “*On the term (pseudo-elasticity)*”, Z. Metallkd, 86, 5, (1985), pp.341-344.
- [26] JANOT C., IISCHNER B., “*Matériaux émergents* ”, Presses polytechniques et universitaires romandes,ISBN 2-88074-455-5 (2001)
- [27] MAGEE C.L. “Transformation kinetics, microplasticity and ageing of martensite in Fe-31-Ni ”, Ph.D thesis Garnegie Mellon Univ (1966)
- [28] GREENWOOD G.W.,JONSON R.H., *The deformation of metals under small stresses during phase transformation*. Proceeding of the Royal Society of Sciences, vol. 283A, (1965), pp. 403-422
- [29] BOURAOUI T. , TAMARAT K. , DUBOIS B., “ *Plasticité de transformation et effet mémoire de forme de deux aciers de type Fe-Mn-Si et Fe-Mn-Cr-Ni-Si*”, la revue de métallurgie (2002), pp. 115-119

- [30] HUANG X., LEI Y., HUANG B., CHEN S., HSU T. Y., “Effect of rare-earth addition on the shape memory behavior of a FeMnSiCr alloy”, *Materials Letters*, 57, (2003), 2787.
- [31] WAN J. F., CHEN S.P., HSU T.Y., HUANG Y.N., “Modulus softening during $\varepsilon \rightarrow \gamma$ martensitic transformation in Fe-25 Mn-6 Si-5 Cr- 0.14 N alloys”, *Mater.Sci.Eng.*, A438-440, (2006) pp. 887-890
- [32] KAJIWARA S., LIU D., KIKUCHI T. AND SHINYA N., “Development of Fe-Mn-Si based shape memory with no necessity of training”, *Journal de Physique IV France* 11 ,Pr8 , (2001), 199-204
- [33] WANG S.H., WEN Y.H., ZHANG W., “Effects of electropulsing treatment on stress-induced ε martensite transformation of a pre-deformed Fe-17Mn-5Si-8Cr-5Ni-0.5NbC alloy” of *Alloys and Compounds*, 437, (2007) p. 208.
- [34] LIN H. C., LIN K.M., LIN C.S., OUYANG T.M., “The corrosion behavior of Fe-based shape memory alloys”, *Corrosion Science*, 44, (2002), pp. 2013.
- [35] CHARFI A., BOURAOUI T., FEKI M., BRADAI C., NORMAND B., “Surface treatment and corrosion behaviour of Fe-32Mn-6Si shape memory alloy” 12 (2009) pp. 270-275
- [36] VAN CAENEGEM N., DUPREZ L., VERBEKEN K., SEGERS D., HOUBAERT Y. “Stresses related to the shape memory effect in Fe–Mn–Si-based shape memory alloys” *Materials Science and Engineering*, A 481–482 (2008) pp. 183–189
- [37] KOYAMA M., SAWAGUCHI T., OGAWA K., KIKUCHI T., MURAKAMI M., “les effets du traitement thermomécanique de formation sur la déformation caractéristiques des alliages – d’Al –de silicium –de manganèse de Fe–Mn–Si–Al alloys” , *Materials Science and Engineering*, A 497, (2008), pp. 353–357
- [38] YANG C.H., LIN H.C., LIN K.M., TSAI H.K., “Effects of thermo-mechanical treatment on a Fe–30Mn–6Si shape memory alloy”, *Materials Science and Engineering*, A 497, (2008), pp.445–450
- [39] BUJOREANU L.G., DIA V., STANCIU S., SUSAN M., AND BACIU C. “Study of the tensile constrained recovery behavior of a Fe-Mn-Si shape memory alloy”, *Eur. Phys. J. Special Topics*, 158, (2008), pp.15–20
- [40] DONG Z., KLOTZ U.E., LEINENBACH C., BERGAMINI A., CZADERSKI C., AND MOTAVALLI M., “A Novel Fe-Mn-Si Shape Memory Alloy With Improved Shape Recovery Properties by VC Precipitation”, *advanced engineering materials*, 11, (2009) no. 1-2
- [41] NISHIMURA F., LIEDL U. WERNER E.A. “Simulation of martensitic transformations in TRIP-steel and Fe-based shape memory alloy”, *Computational Materials Science*, 26, (2003) pp.189–196

- [42] BERVEILLER M., CHERKAOUI M., AND PATOOR E., “*Comportement mécanique des aciers TRIP*” *Mécanique & Industries* 5, (2004), pp. 461-468
- [43] BOUQUEREL J., VERBEKEN K., DE COOMAN B.C., “*Microstructure-based model for the static mechanical behaviour of multiphase steels*” *Acta Materialia*, 54 ,(2006), pp. 1443 - 1456
- [44] LEBLOND J.B., MOTTET G., DEVAUX J.C., “*A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations - II. Study of classical plasticity for ideal-plastic phases*”. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 34, n°4, (1986), pp. 411-432
- [45] FISCHER F.D., OBERAIGNER E.R., TANAKA, K., NISHIMURA, F., “*Transformation induced plasticity revised an updated formulation.*” *Int. J. Solids Structures*, v. 35(18), (1998) pp. 2209-2227,
- [46] STRINGFELLOW R.G., PARKS D.M., OLSON G.B., “*A constitutive model for transformation plasticity accompanying strain-induced martensitic transformation in metastable austenitic steels*”, *Acta Metall. Mater.* 40 ,(1992) pp. 1703–1716.
- [47] BHATTACHARYYA A., WENG G.J., “*An energy criterion for stress-induced martensitic transformation in a ductile system*”, *J. Mech. Phys. Solids* 42 ,(1994), pp. 1699–1724
- [48] OLIVER E.C., WITHERS P.J., DAYMOND M.R., UETA, S., MORI, T., “*Neutron-diffraction study of stress-induced martensitic transformation in TRIP steel*”. *Appl. Phys. A* 74, (2002), pp. 1143–1145.
- [49] KRUIJVER S.O., ZHAO L., SIETSMA J., OFFERMAN S.E., VAN DIJK N.H., LAURIDSEN E.M., MARGULIES L., GRIGULL S., POULSEN H.F., VAN DER ZWAAG S. “*In Situ Observations on the Mechanical Stability of Austenite in TRIP-Steel*”. *Journal de Physique IV*, (2003), pp. 104-499.
- [50] CHERKAOUI M., BERVEILLER M., LEMOINE X., “*Couplings between plasticity and martensitic phase transformation: overall behavior of polycrystalline TRIP steels*”, *International Journal of Plasticity*, Volume 16, Issues 10-11, (2000), pp. 1215 – 1241
- [51] RUSINEK A., GADAJ P., KLEPACZKO J.R. ET NOWACKI W.K., “*Thermographic analysis of temperature increase during plastic deformation of sheet steel TRIP 800*”, *Mater. Tech.* 92, (2004), pp. 21-30
- [52] OLSON, G.B., COHEN, M., “*Kinetics of strain-induced martensitic nucleation*”, *Metall. Trans. A* 6 (1975), pp. 791–795.
- [53] ONYUNA M., OETTEL H., MARTIN U., WEI A., “*On the Deformation Behaviour and Martensitic Transformations of Metastable Austenitic Steels*” *Advanced Engineering Materials*, 6 (7), (2004), pp. 529 - 538

- [54] BARGUI H., SIDHOM H., TOUKI Z., “*Martensite induite : incidence sur le comportement en écrouissage et sur la limite de formage de l’acier inoxydable AISI 304*”, Matériaux & Techniques, 11-12, (2000), pp. 31–41.
- [55] DIANI J. M., PARKS D. M., “*Effects of strain state on the kinetics of strain-induced martensite in steels*”, J. Mech. Phys. Solids, 46, (1998), pp. 1613–1635.
- [56] SKOCZEN B., “*Functionally graded structural members obtained via the low temperature strain induced phase transformation*” International Journal of Solids and Structures, 44, (2007) pp. 5182–5207
- [57] GALLEE S., MANACH P. Y., PILVIN P., THUILLIER S., LOVATO G., “*Gradient de microstructure induit par l’emboutissage d’aciers inoxydables métastables*” Congrès Grandes vitesses et forts gradients, (2004), pp. 18-19
- [58] PATOOR E., EBERHARDT A., BERVEILLER M., “*Thermomechanical Behaviour of Shape Memory Alloys*”, Arch.Mech., 40, 5-6, (1988), pp. 775-794.
- [59] PATOOR E., BENSALAH M.O., EBERHARDT A., BERVEILLER M., “*Thermomechanical Behaviour determining of Shape Memory Alloys using a thermodynamical potential optimising*”, Revue de métallurgie, 90, (1993), pp. 1587-1592
- [60] MÜLLER. I., XU. H. “ *On the Pseudo-Elastic Hysteresis*”, Acta Mcta Metall.Mater., Vol.39, No.3 , (1991), pp.263-271.
- [61] SUN Q.P., HWANG K.C., “*Micromechanics Modelling for the Constitutive Behavoir of Polycrystalline Shape Memory Alloy (partI and II)*”, J.Mech. Phys. Solids, Vol. 41, No.1, (1993), pp. 1-33
- [62] LIKHATCHEV V.A., MALININ V.G., “*Structure –Analytical Theory of Strength*” (in Russian), Nauka, St-Petersburg, (1993), pp.471 -477
- [63] TANAKA K., “*A Thermomechanical Sketch o Shape memory effect: One-dimentional Tensile Behavoir*” , Res. Mech., 18, (1986), pp. 251-263.
- [64] RANIECKI, B., LEXCELLENT, C. “*R-L models of pseudoelasticity and their specification for some shape memory alloy.*” European Journal of Mechanics - A/Solids, 12(1), (1994), pp. 21-50.
- [65] BRINSON, L. C., BEKKER, A. “*Phase diagram based description of the hysteresis behavior of shape memory alloys*”. Acta Materialia, 46(10), (1998), pp. 3649–3665.
- [66] BOYD J.G., LAGOUDAS D.C., “*Thermomechanical Response of Shape Memory Composites*”, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol.5, (1994), pp.333-346.

- [67] TANAKA K., “ *Phenomenological Description on Thermomechanical Behaviour of Shape Memory Alloys*”, J. Pressure Vessel Technology, Vol.112, (1990) , pp. 158-163.
- [68] LAGOUDAS D.C., BO Z., QIDWAI MA., “*A Unified Thermodynamic Constitutive Model for SMA and Finite Element Analysis of Active Metal Matrix Composites*”, Mechanics for Composite Materials Structures, Vol.3, (1996), pp. 153-179,
- [69] BEKKER A., BRINSON L. C., “*Temperature-induced phase transformation in a shape memory alloy: Phase diagram based kinetics approach*” J. of Mech. Phys. Solids, 45 (1997) pp. 949 - 988.
- [70] LECLERCQ S., LEXCELLENT C., “*A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*”, J. Mech. Phys. Solids, 44 (6), (1996) pp. 953 - 980
- [71] TANAKA K., NISHIMURA F., HAYASHI T., TOBUSHI H., “*Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads*”, Mech. Mater 19 , (1995), pp. 281–292
- [72] AURICCHO F., TAYLOR R. L., “*Shape-memory alloys: modelling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behaviour*” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 143 (1997) pp. 175 -194
- [73] AMENGUAL A., LIKHACHEV A., CESARI E., “*An experimental study of the partial transformation cycling of shape-memory alloys*”, Scripta materialia , VOL. 34, NO10, (1996), pp. 1549-1554
- [74] ORTÍN J. “*Preisach Modeling of Hysteresis for a Pseudoelastic Cu-Zn-Al Single Crystal*”, J. Appl. Phys., 71(3) ,(1991), pp.1454-1461.
- [75] PATOOR E., EL AMRANI, M., EBERHARDT, A. AND BERVEILLER, M., “*determination of the origin for the dissymmetry observed between tensile and compression tests on shape memory alloys*”. J. Phys. IV 5, (1995), pp. 495–500..
- [76] LEXCELLENT, C. AND BOURBON, G., “*Thermodynamical model of cyclic behaviour of Ti–Ni and Cu–Zn–Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests*”. Mech. of Mat. 24, (1996), pp. 59–73.
- [77] PEULTIER B., BEN ZINEB T., PATOOR E. “*Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM*”, Mechanics of Materials, Volume 38, (2004), pp. 510 – 524.
- [78] CHEMISKY Y. “ *Modélisation du comportement macroscopique des alliages à mémoire de forme - Application aux matériaux composites*». Thèse l’Université Paul Verlaine - Metz (2009)

- [79] GOLIBORODA I., RUSINKO K., TANAKA K., “Description of an Fe-based shape memory alloy thermomechanical behavior in terms of the synthetic model” *Computational Materials Science*, 13 (4), (1999), pp. 218 - 226.
- [80] PANICO, M. ET BRINSON, L. “A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys.” *J. of Mechanics and Physics of Solids*, 55, (2007), pp. 2491–2511
- [81] Sato A., Soma K., Mori T., “Hardening due to pre-existing ε -martensite in an Fe–30Mn–1Si alloy single crystal,” *Acta Metall.*, 30, (1982), pp.1901–1907.
- [82] BOURAOUI T., JEMAL F., BEN ZINEB T. , “Tensile Properties Of A Fe–32Mn–6Si shape memory alloy”, *Strength of Materials*, Vol. 40, No. 2, (2008), pp. 203-211
- [83] MELTON, K. N., “Ni-Ti based shape memory alloys. T.W. Duerig. *Engineering aspects of shape memory alloys*”. London: Butterworth-Heinemann, (1990), ISBN 0-750-61009-3, pp. 21-35.
- [84] YANG J.H., CHEN H. & WAYMAN C.M., “Development of Fe-based shape memory alloys associated with face-centered cubic-hexagonal close-packed martensitic transformations. I: Shape memory behaviour”, *Met. trans. A*, 23A, (1992) pp. 1439 - 1444.
- [85] NISHIJIMA K., “ZERO Mass Renormalization and an Identity in Quantum Electrodynamics” *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 58, No. 4, pp. 1271-1275
- [86] DUERIG, TW , ZADNO, R, “*Engineering Aspects of Shape Memory alloys*”, Dutterworth-Heinemann Ltd, (1990) pp. 369 -93.
- [87] ELLIOTT R.J, WEDGWOOD F.A., “*Theory of the Resistance of the Rare Earth Metals*” *proc.Phys.Soc.*81, (1963) pp. 846-855
- [88] PEULTIER B., “*Alliages à mémoire de forme : modélisation et calcul de structures*”. Thèse de doctorant à l’Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers (METZ), (2005).
- [89] BOLLING G. F. & RICHMAN R. H., “*The Influence of Stress on Martensite-Start Temperatures in Fe–Ni–C .Alloys*”, *Scripta Met.*, 4, (1970) pp. 539 - 543
- [90] PELLETIER M. & CIZERON G., “*Influence d'une contrainte externe sur la transformation martensitique de alliages fer-nickel*”. *Mém. Scien. Rev. Met.*, 74, (1977)
- [91] BOLLING G. F. & RICHMAN R. H., “*The plastic deformation-transformation of paramagnetic f.c.c. Fe-Ni-C alloys*”. *Acta Met.*, 18, (1970) pp. 673 - 681.
- [92] TOKIZANE M. “*New Aspects of Martensitic Transformation*”, *Sup. To Trans. JIM*, 17, (1976) pp. 345 -350.

- [93] OTSUKA H., YAMADA H., TANAHASHI H. AND MARUYAMA T., “*Shape memory effect in Fe–Mn–Si–Cr–Ni polycrystalline alloys* ”, Materials Science Forum, 56-58 (1990) pp. 655 - 660.
- [94] PATOOR E., EBERHARDT A., BERVEILLER M., “*Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys*”, supplement au journal de physique III, vol.6, (1996), pp. 277-292.
- [95] BLANC P., LEXCELLENT L., “*Micromechanical modelling of Cu-Al-Ni Shape memory alloys behaviour*”, Material Science and Engineering, Vol A 378,(2004), pp. 465-469.
- [96] BOYD J.G., LAGOUDAS D.C. “*Athermodunamic constitutive model for the shape memory alloys.Part I : the monolithic shape memory alloy*”, international Journal of Plasticity, Vol. 12, (1996), pp. 805-842.
- [97] NICLAEYS C. “*Comportement des monocristaux en AMF. Application au comportement des polycristaux*”,Thèse de doctorant de l'université Metz. (2002).
- [98] HILL R., “*A self consistent mechanics of composite materials*”. J. Mech. Phys. Solids 13, (1965) pp. 213–222.
- [99] JIN X. et HSU T.Y. “*Prediction of martensitic transformation start temperature Ms in Fe-Mn-Si Shape Memory Alloys*”, Materials science Forum Vols.327-328,(2000), pp.219-222
- [100] BESSON J., CAILLETAUD G, CHABAUCHE J.L. ET FOREST S.. *Mécanique non linéaires des matériaux* ”, Hermès Science, (2001)
- [101] CHABOCHE J.L.ET CAILLETAUD G.. “*Integration methods for complexes plastic constitutive equations*». Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 133, (1996), p. 125-155.
- [102] SOUZA A.C., MAMIYA E.N ET ZOUAIN N. “*Three-dimonsional model for solids undergoing stress- induced phase transformation*”. European Journal of Mechanics A/ Solids, Vol. 17, (1998), pp. 789-806.
- [103] NOUGIER J.P., “*Méthode de calcul numérique* ”, Hermès Sciences publications, Vol 1, (2001).

Annexe

L'équilibre thermodynamique de l'élément se traduit par quatre relations (chapitre III) présentant respectivement, la transformation, la plasticité et la transformation couplée avec la plasticité.

I. Cas de la transformation

$$\dot{F}_m^f = \dot{\Sigma}_{ij} \eta_{ij} \varepsilon^{\max} - \dot{\Sigma}_{ij} E_{ij}^P - H_V^T \dot{f} - H_g (\eta_{ij} \varepsilon^{\max} - E_{ij}^P)^2 \dot{f} - B\dot{T} = 0$$

$$\dot{\Sigma}_{ij} (\eta_{ij} \varepsilon^{\max} - E_{ij}^P) - H_V^T \dot{f} - H_g (\eta_{ij} \varepsilon^{\max} - E_{ij}^P)^2 \dot{f} - B\dot{T} = 0$$

On note $H_0 = (H_V^T + H_g H_{ij} H_{ij})$

et $H_{ij} = (\eta_{ij} \varepsilon^{\max} - E_{ij}^P)$

Donc $\dot{\Sigma}_{ij} H_{ij} - H_0 \dot{f} - B\dot{T} = 0$

Or $\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{E}_{kl} - \dot{f} H_{kl})$

$$C_{ijkl} (\dot{E}_{kl} - \dot{f} H_{kl}) H_{ij} - H_0 \dot{f} - B\dot{T} = 0$$

$$\dot{f} = \frac{C_{ijkl} H_{ij}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \dot{E}_{kl} - \frac{B}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \dot{T}$$

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left[I_{kluv} - \frac{H_{kl} C_{rsuv} H_{rs}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \right] \dot{E}_{uv} + \frac{BC_{ijkl} H_{kl}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \dot{T}$$

II. Cas de la plasticité

On pose $F_c^\gamma = kp^m + \sigma_0$

$$\dot{F}_c^\gamma = km\dot{p}^{m-1}$$

$$\dot{p} = |\dot{\gamma}| \quad \text{et} \quad \text{sign}(\dot{\gamma}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\gamma} \geq 0 \\ -1 & \text{si } \dot{\gamma} < 0 \end{cases}$$

$$\dot{F}_c^\gamma = \dot{F}_m^\gamma$$

$$(1-f)\eta_{ij} \dot{\Sigma}_{ij} = \left[(1-f)(H_s^P + H_g(1-f)\eta_{ij}\eta_{ij}) + \text{sign}(\dot{\gamma}) km\dot{p}^{m-1} \right] \dot{\gamma}$$

$$\dot{\gamma} = A\eta_{ij} \dot{\Sigma}_{ij} \quad \text{avec} \quad A = \frac{1-f}{(1-f)(H_s^P + H_g(1-f)\eta_{ij}\eta_{ij}) + \text{sign}(\dot{\gamma}) km\dot{p}^{m-1}}$$

Or $\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{E}_{kl} - (1-f)\eta_{kl} \dot{\gamma})$

$$\dot{\gamma} = \frac{A\eta_{ij} C_{ijkl}}{1 + (1-f)A\eta_{ij} C_{ijmn} \eta_{mn}} \dot{E}_{kl}$$

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(I_{klpq} - \frac{(1-f)\eta_{kl} A \eta_{mn} C_{mnpq}}{1 + (1-f) A \eta_{rs} C_{rsuv} \eta_{uv}} \right) \dot{E}_{pq}$$

III. Cas de la transformation et de la plasticité

$$\dot{F}_m^f = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-A^\gamma \dot{\gamma} - H_0 \dot{f} + H_{ij} \dot{\Sigma}_{ij} - B\dot{T} = 0} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^\gamma = (\Sigma_{ij} - H_g E_{ij}^{ine}) \eta_{ij} + H_g (1-f) H_{ij} \eta_{ij} - \frac{1}{2} H_{vp} - p H_s^P \\ H_{ij} = (\eta_{ij} \varepsilon^{\max} - E_{ij}^P) \\ H_0 = (H_v^T + H_g H_{ij} H_{ij}) \end{array} \right.$$

$$\dot{F}_m^\gamma = \dot{F}_C^\gamma = kmp^{m-1} \dot{\gamma}$$

$$\Rightarrow B^f \dot{f} - B^\gamma \dot{\gamma} = (1-f) \eta_{ij} \dot{\Sigma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} B^f = A^\gamma \\ B^\gamma = - \left[(1-f) H_s^P + H_g (1-f) H_{ij} \eta_{ij} + kmp^{m-1} \right] \end{array} \right.$$

$$\dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{E}_{kl} - \dot{f} H_{kl} - (1-f) \dot{\gamma} \eta_{kl} \right)$$

Le système d'équation finals est :

$$\left\{ \begin{array}{l} -A^\gamma \dot{\gamma} - H_0 \dot{f} + H_{ij} \dot{\Sigma}_{ij} - B\dot{T} = 0 \\ B^f \dot{f} - B^\gamma \dot{\gamma} + (1-f) \eta_{ij} \dot{\Sigma}_{ij} = 0 \\ \dot{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{E}_{kl} - \dot{f} H_{kl} - (1-f) \dot{\gamma} \eta_{kl} \right) \end{array} \right.$$

CAS UNIDIMENSIONNEL

$$F_m^f = \left(\begin{array}{c} -fH_V^T + \frac{1}{2}\gamma^2 H_s^P + \frac{1}{2}\gamma H_{vp} - B(T - T_0) + \\ (\sigma - H_g E^{ine})(\varepsilon^{\max} - E^P) \end{array} \right)$$

$$F_m^\gamma = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}H_{vp}f - (1-f)\gamma H_s^P \\ (\sigma - H_g E^{ine})(1-f) \end{array} \right)$$

I. Cas de la transformation

$$\Delta f = \frac{(\lambda + 2\mu)(\varepsilon^{\max} - E^P)}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0} \Delta \varepsilon - \frac{B}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0} \Delta T$$

$$\Delta \sigma = (\lambda + 2\mu) \left[1 - \frac{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0} \right] \Delta \varepsilon + \frac{2\mu B(\varepsilon^{\max} - E^P)}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0} \Delta T$$

Dans ce cas le système est totalement explicite et ne nécessite pas de résolution implicite par la méthode de Newton-Raphson.

II. Cas de la plasticité

$$\begin{cases} F\gamma = \Delta\gamma - \frac{A(\lambda + 2\mu)}{1 + 2\mu(1-f)A} \Delta\varepsilon = 0 \\ F\sigma = \Delta\sigma - (\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{2\mu(1-f)A}{1 + 2\mu(1-f)A} \right) \Delta\varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } A = \frac{1-f}{(1-f)(H_s^P + H_g(1-f)) + kmp^{m-1}}$$

$$\bullet \frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\gamma} = 1 - \frac{\partial A}{\partial \Delta\gamma} \frac{(\lambda + 2\mu) \Delta\varepsilon}{(1 + (1-f)A2\mu)^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \Delta\gamma} = -(1-f) \frac{km(m-1)p^{m-2} \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta\gamma}}{\left[(1-f)(H_s^p + H_g(1-f)) + kmp^{m-1} \right]^2}$$

avec $\frac{\partial \gamma}{\partial \Delta\gamma} = 1$

$$\bullet \frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\sigma} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\sigma} = 1$$

$$\bullet \frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\gamma} = \frac{(\lambda + 2\mu)2\mu(1-f)}{(1 + 2\mu(1-f)A)^2} \frac{\partial A}{\partial \Delta\gamma} \Delta\varepsilon$$

Par application de la méthode de newton Raphson on aura :

$$\delta\Delta\gamma = - \frac{F\gamma}{\frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\gamma}}$$

$$\delta\Delta\sigma = - \frac{F\sigma + \frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\gamma} \delta\Delta\gamma}{\frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\sigma}}$$

III. Cas de la transformation et de la plasticité

$$\begin{cases} F\gamma = -B^\gamma \Delta\gamma + A^\gamma \Delta f - (1-f)\Delta\sigma = 0 \\ Ff = -A^\gamma \Delta\gamma - H_0 \Delta f + (\varepsilon^{\max} - E^p) \Delta\sigma - B\Delta T = 0 \\ F\sigma = \Delta\sigma - (\lambda + 2\mu) \Delta\varepsilon + 2\mu(\varepsilon^{\max} - E^p) \Delta f + 2\mu(1-f)\Delta\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Delta X = \begin{cases} \Delta\gamma \\ \Delta f \\ \Delta\sigma \end{cases}$$

$$F(\Delta X) + J\delta\Delta X = 0$$

$$\delta\Delta X = J^{-1}(-F(\Delta X))$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\sigma} \\ \frac{\partial Ff}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Ff}{\partial \Delta f} & \frac{\partial Ff}{\partial \Delta\sigma} \\ \frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\sigma} \end{pmatrix}$$

- $\frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\gamma} = -B^\gamma$
- $\frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta f} = A^\gamma$
- $\frac{\partial F\gamma}{\partial \Delta\sigma} = -(1-f)$
- $\frac{\partial Ff}{\partial \Delta\gamma} = -A^\gamma$
- $\frac{\partial Ff}{\partial \Delta f} = -H_0$
- $\frac{\partial Ff}{\partial \Delta\sigma} = (\varepsilon^{\max} - E^P)$

Dans le cas unidimensionnel nous avons :

- $\frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\gamma} = 2\mu(1-f)$
- $\frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta f} = 2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)$
- $\frac{\partial F\sigma}{\partial \Delta\sigma} = 1$

CAS TRIDIMENSIONNEL

I. Cas de la transformation

$$\begin{cases} F_f = \Delta f - \frac{C_{ijkl} H_{ij} \Delta \varepsilon_{kl}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} + \frac{B}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \Delta T = 0 \\ F_{\sigma_{ij}} = \Delta \sigma_{ij} - C_{ijkl} \left[I_{kluv} \Delta \varepsilon_{uv} - \frac{H_{kl} H_{rs} C_{rsuv} \Delta \varepsilon_{uv}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \right] - \frac{BC_{ijkl} H_{kl}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} \Delta T = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations de manière implicite par la méthode Newton Raphson nécessite le calcul du Jacobien du système et son inversion.

$$\begin{aligned} \Delta X &= \begin{cases} \Delta f \\ \Delta \sigma \end{cases} \\ F(\Delta X) + J \delta \Delta X \\ \delta \Delta X &= J^{-1}(-F(\Delta X)) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F_f \\ F_{\sigma_{11}} \\ F_{\sigma_{22}} \\ F_{\sigma_{33}} \\ F_{\sigma_{12}} \\ F_{\sigma_{13}} \\ F_{\sigma_{23}} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{33} \\ \Delta \sigma_{12} \\ \Delta \sigma_{13} \\ \Delta \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{23}} \\ \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{11}}{\partial \Delta \sigma_{23}} \\ \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{22}}{\partial \Delta \sigma_{23}} \\ \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{33}}{\partial \Delta \sigma_{23}} \\ \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{12}}{\partial \Delta \sigma_{23}} \\ \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{13}}{\partial \Delta \sigma_{23}} \\ \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta \sigma_{11}} & \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta \sigma_{22}} & \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta \sigma_{33}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta \sigma_{12}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta \sigma_{13}} & 2 \frac{\partial F \sigma_{23}}{\partial \Delta \sigma_{23}} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} = 1$$

$$\bullet \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = - \frac{C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}}}{H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0} + \frac{(H_{ij} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} - B \Delta T) \left(2 C_{mnpq} H_{mn} \frac{\partial H_{pq}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} + \frac{\partial H_0}{\partial \Delta \sigma_{wx}} \right)}{[H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0]^2}$$

$$\text{Or } \frac{\partial H_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} (\varepsilon^{\max} - \Delta \gamma)$$

$$\frac{\partial E_{ij}^p}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = \Delta \gamma \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}}$$

$$\text{Avec } \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = - \frac{3}{2} \frac{\frac{\partial S_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}}}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{mn} S_{mn}}} \text{ sachant que } \boxed{S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}}$$

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j = w = x \\ \frac{2}{3} & \text{Si } (i = w) \neq (j = x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = 2Hg \frac{\partial H_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}}$$

$$\bullet \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta f} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = I_{ijwx} + C_{ijkl} C_{rsuv} H_{kl} \Delta \varepsilon_{uv} \frac{2 \frac{\partial H_{rs}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} (H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0) - H_{rs} \left(2 C_{mnpq} H_{pq} \frac{\partial H_{mn}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} + \frac{\partial H_0}{\partial \Delta \sigma_{wx}} \right)}{(H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0)^2} - BC_{ijkl} \Delta T \frac{\frac{\partial H_{kl}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} (H_{mn} C_{mnpq} H_{pq} + H_0) - 2 C_{mnpq} H_{mn} H_{kl} \frac{\partial H_{pq}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} + \frac{\partial H_0}{\partial \Delta \sigma_{wx}}}{[\bar{\varepsilon}_{mn}^{ln} C_{mnpq} \bar{\varepsilon}_{pq}^{ln} + H_0]^2}$$

II. Cas de la plasticité

$$\begin{cases} F\gamma = \Delta\gamma - \frac{A\eta_{ij}C_{ijkl}}{1+(1-f)A\eta_{ij}C_{ijkl}\eta_{kl}} \Delta\varepsilon_{kl} = 0 \\ F_{\sigma_{ij}} = \Delta\sigma_{ij} - \left(C_{ijpq} \Delta\varepsilon_{pq} - \frac{(1-f)C_{ijkl}\eta_{kl}A\eta_{mn}C_{mnpq}\Delta\varepsilon_{pq}}{1+(1-f)A\eta_{rs}C_{rsuv}\eta_{uv}} \right) = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{1-f}{(1-f)(H_s^P + H_g(1-f)) + kmp^{m-1}}$$

$$\begin{bmatrix} F\gamma \\ F\sigma_{11} \\ F\sigma_{22} \\ F\sigma_{33} \\ F\sigma_{12} \\ F\sigma_{13} \\ F\sigma_{23} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \\ \Delta\sigma_{13} \\ \Delta\sigma_{23} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\gamma} = 1 - \frac{C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \frac{\partial A}{\partial \Delta\gamma} \eta_{ij}}{(1+(1-f)A\eta_{kl}C_{ijkl}\eta_{ij})^2}$$

$$\text{avec } \frac{\partial A}{\partial \Delta\gamma} = \frac{-(1-f)km(m-1)p^{m-2}}{((1-f)(H_s^p + Hg(1-f)) + kmp^{m-1})^2}$$

$$\bullet \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = - \frac{C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \left(A \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \Delta\sigma_{wx}} - A\eta_{ij}(1-f)C_{ijkl} \frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \Delta\sigma_{wx}} A\eta_{ij} \right)}{(1+(1-f)A\eta_{kl}C_{ijkl}\eta_{ij})^2}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = - \frac{3}{2} \frac{\frac{\partial S_{ij}}{\partial \Delta\sigma_{wx}}}{\sqrt{\frac{3}{2}S_{mn}S_{mn}}}$$

$$\text{Avec } \boxed{S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}}$$

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = \begin{cases} 1 & Si \quad i = j = w = x \\ \frac{2}{3} & Si \quad (i = w) \neq (j = x) \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\partial F \sigma_{ij}}{\partial \Delta \gamma} = \frac{C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{pq} (1-f) C_{mnpq} \eta_{kl} \eta_{mn} \frac{\partial A}{\partial \Delta \gamma}}{(1+(1-f) A \eta_{rs} C_{rsuv} \eta_{uv})^2}$$

$$\bullet \frac{\partial F \sigma_{ij}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} = I_{ijwx} + (1-f) C_{ijkl} C_{mnpq} \Delta \varepsilon_{pq} A \left[\frac{\left(\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} \eta_{mn} + \frac{\partial \eta_{mn}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} \eta_{kl} \right) (1+(1-f) A \eta_{rs} C_{rsuv} \eta_{uv})}{(1+(1-f) A \eta_{rs} C_{rsuv} \eta_{uv})^2} \right. \\ \left. - \frac{\eta_{kl} \eta_{mn} (1-f) C_{rsuv} \left(\frac{\partial \eta_{uv}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} \eta_{rs} + \frac{\partial \eta_{rs}}{\partial \Delta \sigma_{wx}} \eta_{uv} \right)}{(1+(1-f) A \eta_{rs} C_{rsuv} \eta_{uv})^2} \right]$$

III. Cas de la transformation et de la plasticité

$$\begin{cases} F \gamma = -B' \Delta \gamma + A' \Delta f - (1-f) \eta_{ij} \Delta \sigma_{ij} = 0 \\ F f = -A' \Delta \gamma - H_0 \Delta f + H_{ij} \Delta \sigma_{ij} - B \Delta T = 0 \\ F \sigma_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} H_{kl} \Delta f + C_{ijkl} \eta_{kl} (1-f) \Delta \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} F \gamma \\ F f \\ F \sigma_{11} \\ F \sigma_{22} \\ F \sigma_{33} \\ F \sigma_{12} \\ F \sigma_{13} \\ F \sigma_{23} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta \gamma \\ \Delta f \\ \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{33} \\ \Delta \sigma_{12} \\ \Delta \sigma_{13} \\ \Delta \sigma_{23} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F_f}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{11}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{22}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{33}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{12}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{13}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \\ \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta f} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{11}} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{22}} & \frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{33}} & 2\frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{12}} & 2\frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{13}} & 2\frac{\partial F\sigma_{23}}{\partial \Delta\sigma_{23}} \end{bmatrix}$$

- $\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\gamma} = -B^\gamma$
- $\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta f} = A^\gamma$
- $\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = -(1-f)\eta_{ij}I_{ijwx}$
- $\frac{\partial F_f}{\partial \Delta\gamma} = A^\gamma$
- $\frac{\partial F_f}{\partial \Delta f} = -H_0$
- $\frac{\partial F_f}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = H_{ij}I_{ijwx}$
- $\frac{\partial F\sigma_{ij}}{\partial \Delta\gamma} = C_{ijkl}\eta_{kl}(1-f)$
- $\frac{\partial F\sigma_{ij}}{\partial \Delta f} = C_{ijkl}H_{kl}$
- $\frac{\partial F\sigma_{ij}}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}}{\partial \Delta\sigma_{wx}} = I_{ijwx}$

MODULE TANGENT EN UNIDIMENSIONNEL

I. Cas de la transformation

Les modules tangents mécaniques et thermiques sont :

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{(\lambda + 2\mu)(\varepsilon^{\max} - E^P)}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0}$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} = -\frac{B}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0}$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = (\lambda + 2\mu) \left[1 - \frac{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0} \right]$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} = \frac{B2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0}$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = - \left[\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \varepsilon} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} \right]$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T} = - \left[\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} \right]$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_f} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} = 1$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = - \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = - \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon}$$

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = (\lambda + 2\mu) \left[1 - \frac{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0} \right]}$$

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T} = - \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} = \frac{B2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)}{2\mu(\varepsilon^{\max} - E^P)^2 + H_0}}$$

II. Cas de la plasticité :

Les modules tangents mécaniques et thermiques sont :

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta \varepsilon} = -\frac{A(\lambda + 2\mu)}{1 + 2\mu(1-f)A}$$

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} = 0$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = -(\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{2\mu(1-f)A}{1 + 2\mu(1-f)A} \right)$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = - \left[\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta \varepsilon} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} \right]$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T} = - \left[\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} \right]$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} = 1$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = -\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon}$$

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = -(\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{2\mu(1-f)A}{1 + 2\mu(1-f)A} \right)}$$

Si on néglige la dilatation thermique

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T} = 0}$$

III. Cas de la transformation et de la plasticité

Les modules tangents mécaniques et thermiques sont :

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} = -B$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \Delta \varepsilon} = 0$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = -(\lambda + 2\mu)$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} = 0$$

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta \varepsilon} = 0$$

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = - \left[\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta \varepsilon} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta \varepsilon} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta \varepsilon} \right]$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T} = - \left[\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \Delta T} \right]$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_f} = \frac{1}{(\varepsilon^{\max} - E^p)}$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\gamma} = -\frac{1}{(1-f)}$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial F_\sigma} = 1$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = -(\lambda + 2\mu)$$

$$\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta T} = \frac{B}{(\varepsilon^{\max} - E^p)}$$

Le Jacobien J_γ est simple à déterminer :

MODULE TANGENT EN TRIDIMENSIONNEL

I. Cas de la transformation

$$J_Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} \\ \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} &= -[J_X^{-1}][J_Y] = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_f} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta E_{kl}} \\ \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} & \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta E_{kl}} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta E_{kl}} \\ \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

II. Cas de la plasticité

$$J_Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} \\ \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} &= -[J_X^{-1}][J_Y] = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_\gamma} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta E_{kl}} \\ \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} & \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta E_{kl}} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta E_{kl}} \\ \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

III. Cas de la transformation et de la plasticité

$$\begin{aligned}
 J_Y &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} \\ \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} \\ \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} &= -[J_X^{-1}][J_Y] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_f} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_\gamma} & \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} \\ \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} \\ \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta E_{kl}} & \frac{\partial F_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta E_{kl}} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta E_{kl}} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta E_{kl}} \\ \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_f} \frac{\partial F_f}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_\gamma} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \Delta T} + \frac{\partial \Delta \Sigma_{ij}}{\partial F_{\sigma_{kl}}} \frac{\partial F_{\sigma_{kl}}}{\partial \Delta T} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT THERMOMÉCANIQUE D'UN ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME À BASE DE FER TYPE Fe-Mn-Si

Résumé

Il est bien connu que les alliages à mémoire de forme (AMF) sont considérés comme une classe particulière de matériaux qui peuvent retrouver une forme préalablement définie par simple chauffage. Cette propriété remarquable, appelée effet mémoire de forme, peut être exploitée dans la conception d'applications originales afin de trouver les solutions intéressantes aux problèmes rencontrés dans divers champs industriels.

Dans notre travail, nous proposons une loi constitutive tridimensionnelle thermomécanique adaptée aux alliages à mémoire de forme à base de fer. Elle tient compte de l'effet de la transformation martensitique et des mécanismes de glissement plastique et leurs interactions. La formulation adoptée est basée sur une description micromécanique simplifiée. La comparaison entre les forces motrices et les forces critiques d'activation des mécanismes mis en jeu nous ont permis de déterminer le type de comportement induit pour un niveau de chargement donné. Nous avons adopté le schéma implicite d'intégration de Newton-Raphson pour la résolution de ce système. Les résultats obtenus pour des chargements thermomécaniques sont comparés à ceux obtenus expérimentalement.

Mots clés : Alliages à mémoire de forme ; Modélisation mathématique ; Transformation martensitique ; Plasticité ; Éléments finis, méthode des.

Abstract

It is well known that Shape Memory Alloys (SMA) are a particular class of materials that can recover a memorized shape by simple heating. This remarkable property, called the Shape Memory Effect (SME), can be exploited in the design of original applications in order to find attractive solutions to problems encountered in various industrial fields.

We propose a thermo-mechanical three-dimensional constitutive law adapted to Fe-based shape memory alloys. It takes into account the effect of the martensitic transformation and the plastic slip mechanisms and their interaction. The adopted formulation is based on a simplified micromechanical description. The macroscopic behaviour is derived by considering the equivalent homogeneous effect on a representative volume element. The Gibbs free energy expression is defined. Thermodynamic driving forces are then derived and compared to critical forces leading to the constitutive equations solved by Newton–Raphson numerical scheme. Obtained results for thermo-mechanical loadings are compared to experimental ones.

Keywords: Shape Memory Alloys, Mathematical Modelling, Martensitic Transformation, Plasticity, Finite Element Method (FEM).