

Le modèle gyro-water-bag appliqué à l'étude des instabilités dans les plasmas magnétisés

Rudy Klein

▶ **To cite this version:**

Rudy Klein. Le modèle gyro-water-bag appliqué à l'étude des instabilités dans les plasmas magnétisés. Autre [cond-mat.other]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2009. Français. NNT : 2009NAN10134 . tel-01748319

HAL Id: tel-01748319
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748319

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➢ Contact SCD Nancy 1 : theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

FACULTE DES SCIENCES & TECHNIQUES

UFR Sciences & Techniques STMP
École doctorale EMMA
Département de formation doctorale POEM

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré – Nancy I

en Physique des Plasmas

par **Rudy Klein**

Le modèle gyro-water-bag appliqué à l'étude des instabilités dans les plasmas magnétisés

Soutenance publique le 12 novembre 2009

Membres du jury:

Rapporteurs:

- M. Peter BEYER — Professeur des Universités - Université d'Aix-Marseille
- M. Jean-Marcel RAX — Professeur des Universités - École polytechnique

Examinateurs:

- M. Pierre BERTRAND — Professeur des Universités – Université Henri Poincaré
- M. Etienne GRAVIER — Maître de conférences – Université Henri Poincaré
- M. Yannick SARAZIN — Ingénieur de recherche – CEA Cadarache

Invité:

- M. Nicolas BESSE — Maître de conférences – Université Henri Poincaré

INSTITUT JEAN LAMOUR
FACULTE DES SCIENCES & TECHNIQUES, 54500 VANDOEUVRE-LES-NANCY

Table des matières

Table des figures v

Liste des tableaux vii

Introduction 1

1 Le modèle water-bag 7

1.1 Le modèle cinétique . . . 7

1.1.1 La description cinétique d'un plasma sans collisions . . . 7

1.1.2 La théorie gyrocinétique . . . 9

1.1.3 L'équation de dérive cinétique . . . 10

1.2 Le modèle water-bag . . . 11

1.2.1 Le simple water-bag . . . 11

1.2.2 Le multi-water-bag (MWB) . . . 13

2 Distribution des particules en fonction du moment magnétique - effets de rayon de Larmor fini 17

2.1 Équations gyrocinétiques et modélisation water-bag . . . 18

2.1.1 Les effets de rayon de Larmor fini . . . 18

2.1.1.1 L'opérateur de gyromoyenne . . . 18

2.1.1.2 La dérive de polarisation . . . 22

2.1.2 Les équations du modèle . . . 23

2.1.2.1 Le modèle gyro-water-bag . . . 25

2.2 Instabilités ITG avec effets de rayon de Larmor fini . . . 26

2.2.1 Analyse linéaire . . . 26

2.2.1.1 Choix des paramètres MWB pour une distribution donnée 27

2.2.2 Cas de l'équilibre Maxwellien 31
2.3 Équilibre non-Maxwellien et instabilité ITG 32

3 Introduction des collisions électron-neutre dans le modèle gyro-water-bag : instabilités de gradient de température ionique (ITG) et ondes de dérive collisionnelles (CDW) dans une colonne de plasma magnétisé 39
3.1 Le modèle gyro-water-bag collisionnel (CGWB) 41
3.1.1 La population électronique 41
3.1.2 La population ionique et l'équation de quasi-neutralité 43
3.1.3 Analyse linéaire 43
3.2 Comparaison avec un modèle fluide et des résultats expérimentaux . . . 45
3.2.1 Ondes de dérive collisionelles 46
3.2.2 Instabilité ITG 51
3.3 Influence de la température ionique sur les ondes de dérive 53
3.4 Transition entre les instabilités d'onde de dérive et ITG 55
3.5 Conclusion 58

4 Instabilités flûte : géométrie cartésienne et z-pinch 59
4.1 Retour sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor gravitationnelle 60
4.1.1 Description du système 60
4.1.2 Dynamique des électrons 60
4.1.2.1 Réponse adiabatique (boltzmannienne) 61
4.1.2.2 Réponse non-adiabatique 61
4.1.3 Cas fluide 63
4.1.3.1 Équation de dispersion pour une population d'électrons boltzmanniens 63
4.1.3.2 Équation de dispersion pour une population d'électrons non-boltzmanniens 64
4.1.4 Modèle gyrocinétique 65
4.2 Instabilités flûte en géométrie z-pinch 66
4.2.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor 67
4.2.2 Instabilité d'échange dans le cas d'une population d'électrons boltzmanniens 71
4.3 Équation gyrocinétique conservative et la dérive de polarisation 72

4.4 Conclusion . . . 75

5 Équations GWB et instabilités ITG en géométrie torique 77
5.1 Géométrie du système . . . 77
5.2 Dynamique des ions . . . 78
5.2.1 État d'équilibre . . . 80
5.2.2 Linéarisation . . . 81
5.2.3 Remarque . . . 83
5.3 Étude des instabilités flûte . . . 83
5.3.1 Électrons non-boltzmanniens : instabilité RT . . . 83
5.3.2 Électrons boltzmanniens : instabilité d'échange . . . 86
5.4 Étude des instabilités à propagation parallèle . . . 87
5.5 Conclusion . . . 90

Appendices 95

A Calcul de $\partial_r m_l$ 97

B Calcul des densités électronique et ioniques perturbées : fermeture isotherme et adiabatique 99
B.1 Densité électronique . . . 101
B.2 Densité ionique . . . 102

C Calcul de la relation de dispersion MWB en géométrie z-pinch 105

D Calcul de la densité ionique perturbée en géométrie torique 107

E Notations 109
E.0.1 Les constantes de la physique . . . 109
E.0.2 Les paramètres plasma . . . 110
E.0.3 Les paramètres water-bag . . . 111

F Travaux publiés 113
F.1 Publications . . . 113
F.2 Communications en conférences internationales . . . 114

Bibliographie 115

Table des figures

1 Illustration de la configuration TOKAMAK - trajectoires des particules . 2

1.1 Distribution simple water-bag 12
1.2 Illustration d'une distribution multi-water-bag pour 3 bags 13

2.1 Illustration du concept de gyromoyenne : la correction sur le champ électrique 19
2.2 Illustration du concept de gyromoyenne : la correction sur la densité . . 20
2.3 Notations utilisées pour le calcul de l'opérateur de gyromoyenne dans l'espace de Fourier 21
2.4 Illustration du concept de gyromoyenne dans l'espace de Fourier 22
2.5 Fonction multi-water-bag dans les plans $(v_\parallel, \mu_k)$ et $(0, \mu)$. 28
2.6 Coefficients correctifs induits par la gyromoyenne 33
2.7 Allure d'une fonction de distribution bi-maxwellienne. 34
2.8 Seuils d'instabilité ITG dans le plan (κ_N, κ_T) pour un équilibre bi-maxwellien. 35
2.9 Taux d'instabilité ITG en fonction de κ_T pour différents traitements des effets FLR. 37
2.10 Illustration de l'effet stabilisant des particules rapides sur l'instabilité ITG 38

3.1 Taux d'instabilité des CDW en fonction du mode orthoradial. 48
3.2 Fréquence des modes CDW $m = 2$ et $m = 1$ en fonction de la dérive axiale $v_{\parallel_o}$. 50
3.3 Taux d'instabilité des CDW en fonction du mode orthoradial. 51
3.4 Taux d'instabilité en fonction du mode orthoradial pour $M = 1$ bag et $M = 20$ bags 54

3.5 Illustration de la transition entre les instabilités CDW et ITG : taux d'instabilité en fonction du gradient de température κ_T. 56
3.6 Illustration de la transition entre les instabilités CDW et ITG : fréquence du mode le plus instable tracée en fonction du gradient de température κ_T. 57

4.1 Géométrie cartésienne du système dans le cas de l'instabilité RT gravitationnelle 61
4.2 Géométrie du système z-pinch 68
4.3 Seuil d'instabilité en géométrie z-pinch dans le cas d'une population d'électrons boltzmanniens en fonction des gradients de température et de densité. 71

5.1 Illustration de la géométrie toroïdale et définition de la base. 78
5.2 Évolution de la vitesse d'équilibre a_j en fonction de θ. 81
5.3 Fréquence et taux d'instabilité de l'instabilité RT en géométrie torique. . 85
5.4 Fréquence et taux d'instabilité de l'instabilité RT pour les géométries cartésienne, z-pinch et torique. 86
5.5 Diagramme de seuil d'un mode flûte en géométrie torique pour une population d'électrons boltzmanniens 87
5.6 Taux d'instabilité en géométrie torique pour une population d'électrons boltzmanniens en fonction de l'angle poloïdal 88
5.7 Taux d'instabilité en géométrie torique pour une population d'électrons boltzmanniens 89

Liste des tableaux

3.1 Taux d'instabilité CDW pour différents paramètres plasma. 47

4.1 Conditions d'existence de l'instabilité RT 66

Ce monde-ci, le même pour tous, que nul Dieu ni homme n'a fait, mais qui était, qui est et qui sera toujours un feu vivant, s'allumant et s'éteignant en rythme.

Héraclite

Introduction

Préambule : La fusion nucléaire et le monde moderne

L'époque Moderne, qui commence à la fin de la Révolution Française, a marqué un tournant décisif dans la relation des hommes avec la nature. Cette époque est marquée dès son début - avec la Révolution Industrielle et simultanément l'émergence de la thermodynamique - par la domestication de l'énergie et par l'acceptation de l'idée d'un progrès continu et illimité qui conduira l'humanité au bonheur et à la paix universelle. L'apogée de cette vision du monde se situe à la veille de la première guerre mondiale, puis commence son déclin progressif (il y a toujours autant de pauvres, et le progrès n'empêche pas la guerre, bien au contraire : il la rend plus monstrueuse) jusqu'à la crise pétrolière de 1970, pour finir avec la catastrophe de Tchernobyl en 1986. L'humanité prend alors conscience de deux choses : d'une part les ressources énergétiques classiques (charbon, pétrole, et uranium) ne sont pas illimitées, d'autre part, leur exploitation n'est pas sans poser de graves problèmes environnementaux (émissions de gaz à effet de serre, pollution environnementale, et catastrophes écologiques).

Des sources d'énergie alternatives sont alors recherchées : parmi elles on trouve l'énergie solaire, éolienne, géothermique, etc... Indépendamment du débat politique, une autre voie a été ouverte dans l'entre-deux guerres du coté de la physique des plasmas avec le projet de domestiquer l'énergie du Soleil : la fusion nucléaire. L'énergie étant plus facile à libérer de manière explosive que contrôlée, les premières applications furent militaires avec la bombe H américaine. L'évolution vers le projet de réalisation d'une centrale à fusion nucléaire se fit ensuite surtout en Russie où est né le concept de tokamak durant la guerre froide.

De nombreux efforts ont été faits pour domestiquer cette énergie, et beaucoup de problèmes nouveaux ont été mis en évidence. La problématique générale de la

fusion nucléaire est guidée par la nécessité de confiner un plasma d'hydrogène (ou de ses isotopes), sur des temps suffisamment longs, tout en le chauffant fortement. Une température très élevée (de l'ordre de 15 keV dans les tokamaks[1]) est nécessaire pour que les réactions de fusion (principalement des réactions de fusion Deutérium-Tritium) se produisent avec une fréquence permettant l'entretien de la réaction. Mais cela ne suffit pas : Le plasma doit être confiné sur un temps suffisamment long pour que la réaction puisse s'auto-entretenir. Une loi simple, le critère de Lawson Eq.(1), permet de déterminer quel doit être le temps de confinement τ_e en fonction des critères de densité n :

$$n\tau_e > 10^{20} s.m^{-3} \tag{1}$$

Sur la voie la plus prometteuse vers la fusion nucléaire, on trouve le concept de fusion par confinement magnétique, et son illustration la plus aboutie actuellement : le tokamak[2]. Cette configuration consiste à enfermer le plasma dans une chambre de forme torique, soumise à un champ magnétique essentiellement toroïdal de plusieurs Teslas.



Fig. 1: figure de gauche - *Vue artistique du tokamak expérimental ITER.* **figure de droite** - *Configuration d'un tokamak : les lignes de champ magnétique s'enroulent en hélice sur des surfaces magnétiques imbriquées en couches superposées (en haut). Dans une vue en coupe (en bas à droite), les trajectoires des particules, l'une piégée (en noir), l'autre passante (en rouge), dérivent hors des surfaces magnétiques (en bleu), mais restent confinées. Une vue de détail (en bas à gauche) montre la trajectoire d'une particule* [1].

[1] Par comparaison, le coeur du Soleil, bien que soumis à des pressions extrêmement plus élevées, est à $1,5$ keV. Rappelons que 1 keV correspond à une température d'environ 10 millions de degrés.

[2] Le mot "tokamak" est un acronyme traduit du russe de "chambre toroïdale avec bobines magnétiques"

La réalisation d'un tokamak présente de nombreuses difficultés. Parmi elles, citons les difficultés d'ordre technologique : créer des bobines supraconductrices permettant de produire le champ magnétique, déterminer quels sont les matériaux les plus adaptés à la construction de la chambre de confinement car la paroi sera exposée à des rayonnements intenses, mettre au point des mécanismes permettant le chauffage du plasma, inventer de nombreux diagnostics pour améliorer le contrôle de la réaction de fusion. Mais les difficultés sont également d'ordre théorique. Parmi elles, on trouve la tendance au transport de particules et d'énergie vers les parois. Ce transport peut être du type "néoclassique" (i.e. "normal"), c'est-à-dire dû aux collisions Coulombiennes entre les particules. La description du transport lié à cette diffusion est aujourd'hui bien connue. Les coefficients de transport mesurés expérimentalement sont cependant environ 100 fois plus élevés que les coefficients de transport néoclassiques théoriques. Cette différence est due à l'existence d'un autre type de transport dit "anormal". Ce transport est provoqué par les instabilités turbulentes qui se produisent dans le plasma.

Le transport anormal et la modélisation

Le transport anormal dans les plasmas magnétisés

Si le transport était seulement dû aux collisions, le critère de Lawson serait depuis longtemps satisfait dans les tokamaks, et la fusion probablement déjà au stade de l'exploitation industrielle.

L'existence du transport anormal induit une forte diminution du temps de confinement τ_e : un des défis actuel de la physique des plasmas est la modélisation et le contrôle de ce transport qui a pour origine les instabilités se développant dans le plasma. Parmi les instabilités turbulentes que l'on rencontre, on trouve entre autres des instabilités de type MHD dont les longueurs d'onde caractéristiques sont de l'ordre de la taille de la machine. Nous ne parlerons pas de ces instabilités qui sont hors du cadre de notre étude. On trouve également des instabilités dont les longueurs d'onde caractéristiques dans la direction perpendiculaire au champ magnétique sont de l'ordre du rayon de Larmor ionique - on les nomme pour cette raison des "micro-instabilités" [2] [3]. Parmi elle, on trouve les instabilités d'onde de dérive (instabilité DW pour Drift-Wave) [4] qui sont provoquées par les gradients de pression dans le plan perpendiculaire au champs magnétique. Un autre type de micro-instabilité est causé par une

dérive d'équilibre du plasma, combinée au gradient de pression. Ce sont les instabilité d'échange et de Rayleigh-Taylor (RT) [5]). On trouve également les instabilités de gradient de température ionique (instabilité ITG pour Ion Temperature Gradient) qui, comme leur nom l'indique, sont liées au gradient de température ionique [3] [6]. De nombreux autres types d'instabilités peuvent se produire (les instabilités de gradient de température électronique (ETG) [7] [8], les modes d'électrons piégés (TEM) [9] [10] [11] par exemple). Les instabilités jouant un rôle primordial dans le plasma de coeur d'un tokamak semblent être les ITG, les instabilités d'échange et les TEM [3].

Les instabilités que nous venons de citer se rencontrent dans les tokamaks, et plus généralement dans les plasmas magnétisés : notre étude n'est donc pas restreinte aux plasmas de tokamaks. Nous verrons par exemple que des applications concernant les colonnes de plasma magnétisé sont envisageables.

La modélisation

Décrire de manière précise la dynamique d'un plasma est une tâche non-triviale : de nombreuses difficultés apparaissent tout au long du chemin qui mène à la modélisation. Ces difficultés sont dues à la limitation des performances des ordinateurs utilisés pour la résolution numérique des modèles. Le modèle standard utilisé pour décrire un plasma chaud est le modèle de Vlasov-Maxwell (les populations sont décrites par l'équation de Vlasov, et le champ électromagnétique par les équations de Maxwell). Ce modèle à 6D dans l'espace des phases est malheureusement bien trop complexe pour pouvoir être traité à l'aide des ressources informatiques actuelles. C'est pourquoi des versions simplifiées de ce modèle ont été développées : les modèles fluide, le modèle MHD, qui sont maintenant bien connus, et le modèle gyrocinétique [12] [13] [14]. Le principal avantage de ce dernier sur ses deux prédécesseurs est la prise en compte des effets cinétiques liés aux interactions onde-particule.

Le modèle gyrocinétique est bien adapté à l'étude des instabilités qui nous intéressent (les instabilités de gradient de température ionique, d'onde de dérive, d'échange, et de Rayleigh-Taylor). Les équations gyrocinétiques sont habituellement résolues à l'aide de codes PIC (Particle In Cell) [15] ou semi-lagrangiens [16] [17] qui sont très gourmands en ressources informatiques : l'étude d'un modèle alternatif permettant de faire le lien entre description fluide et description (gyro)cinétique est alors intéressante

car elle permet une étude précise de la dynamique des instabilités tout en restant numériquement plus légère qu'un code purement gyrocinétique.

C'est ce type de modèle alternatif que nous utilisons dans notre travail : le modèle water-bag (WB). Lors de ses premiers développements, il a tout d'abord été montré que le modèle WB était pertinent du point de vue de la description cinétique d'une population (bonne description de l'effet Landau [18]). Il a ensuite été adapté au cas d'un plasma magnétisé (modèle Gyro-Water-Bag (GWB)) en géométrie cylindrique, combiné avec une description du plasma de type dérive cinétique [19] [20]. Les résultats de l'analyse quasi-linéaire ont permis de déterminer des coefficients de transport semi-analytiques, et ont débouché sur les premières simulations [21].

Plan et objectifs de la thèse

L'objectif de la thèse est de poursuivre, le développement du modèle GWB en l'adaptant à des problèmes nouveaux comme les ondes de dérive collisionnelles, l'étude détaillée des effets de rayon de Larmor finis (effets FLR pour Finite Larmor Radius), et le problème de la courbure des lignes de champ magnétique.

- Dans un premier chapitre, nous présentons la théorie gyrocinétique ainsi que le modèle WB.
- Dans le deuxième chapitre, nous incluons dans le modèle GWB une description précise des effets FLR et l'appliquons à l'étude linéaire des instabilités ITG en géométrie cylindrique.
- Dans le troisième chapitre, nous étudions le cas d'une population électronique non-Boltzmanienne appliqué à la description linéaire d'une colonne de plasma magnétisé. Dans cette partie nous montrerons que le modèle résultant permet une description simultanée des ITG et des ondes de dérive collisionelles (CDW pour Collisionnal Drift Wave).
- Dans le chapitre 4, nous étudions le comportement linéaire des instabilités d'échange et de Rayleigh-Taylor dans le cas de la géométrie Z-pinch. Dans cette partie nous montrerons préalablement, en raisonnant sur le cas de l'instabilité RT gravitationnelle, que la description de cette instabilité nécessite une population électronique non-adiabatique.

- Dans le chapitre 5, nous proposons un système d'équations GWB adapté à la géométrie torique. Nous présentons également une étude linéaire des instabilités d'échange, RT et ITG dans cette géométrie.

1

Le modèle water-bag

Nous cherchons à mettre en place un modèle bien adapté à la description des micro-instabilités dans les plasmas magnétisés.

Dans les tokamaks, la vitesse de phase des instabilités est en général de l'ordre de la vitesse thermique ionique : $v_\varphi \simeq v_{Ti}$. Les interactions onde-particule auront donc une influence non-négligeable sur ces instabilités et la modélisation de la population ionique à l'aide de l'équation de Vlasov est par conséquent nécessaire.

Ce chapitre se divise en deux parties : dans la première nous exposons les principes de base du modèle cinétique qui décrit la dynamique du système. Nous écrivons ensuite l'équation de dérive cinétique qui servira de base aux développements des chapitres ultérieurs. Une fois l'équation de dérive cinétique connue, il faut pouvoir la résoudre : nous introduisons pour cela une fonction de distribution water-bag, qui constitue une classe de conditions initiales particulières de la fonction de distribution, conduisant au modèle gyro-water-bag.

1.1 Le modèle cinétique

1.1.1 La description cinétique d'un plasma sans collisions

D'après le théorème de Liouville, nous savons que la fonction de distribution des systèmes physiques composés d'un grand nombre de particules est invariante le long des trajectoires de ces particules dans l'espace des phases à $6N$ dimensions (N désigne

le nombre de particules du système). Ce théorème s'écrit [22]

$$\frac{df_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, \mathbf{t})}{dt} = \partial_t f_N + \sum_{j=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \nabla_{\mathbf{r}_j} f_N + \sum_{j=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_j \cdot \nabla_{\mathbf{p}_j} f_N = 0 \tag{1.1}$$

La fonction de distribution $f_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, \mathbf{t})$, qui décrit la probabilité de trouver le système dans l'état $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N\}$ au temps t, est définie dans un espace des phases à $6N$ dimensions ce qui rend le théorème de Liouville inexploitable de manière directe puisque N est de l'ordre du nombre d'Avogadro. La hiérarchie BBGKY (Bogliubov, Born, Green, Kyrkwood et Yvon) [23] [24] [25] [26] permet de se ramener à un développement en terme de fonction de distributions à k particules, k pouvant aller de 1 à N. Seuls les premiers termes du développement vont nous intéresser, et en particulier le premier terme qui contient la fonction de distribution à une particule $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{t})$ décrivant la probabilité de trouver une particule dans l'état $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ au temps t, quel que soit l'état de toutes les autres particules. Autrement dit, on a, par définition :

$$f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{t}) = \frac{1}{h^{3N}(N-1)!} \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 ... d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N f_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, \mathbf{t}) \tag{1.2}$$

Le terme $\frac{1}{h^{3N}(N-1)!}$ est lié à l'indiscernabilité des particules et à la définition du volume élémentaire dans l'espace des phases. Dans ce terme, h est la constante de Planck. Si on intègre l'équation de Liouville Eq.(1.1) sur les variables $\{\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N\}$, et que l'on suppose que les corrélations entre particules sont négligeables (on suppose d'une part que le paramètre plasma[1] : $n\lambda_D^3 >> 1$, ce qui signifie que l'effet de corrélations entre particules peut être séparé de l'effet collectif d'interaction. D'autre part, la fréquence de collisions est supposée très petite devant la fréquence caractéristique des phénomènes collectifs), on obtient l'équation de Vlasov [27] :

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + q\Big(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\Big) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \tag{1.3}$$

dans laquelle on a noté f la fonction de distribution f_1 dans les variables $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$.

L'équation de Vlasov est adaptée à la description d'un plasma dans lequel les collisions sont négligeables : seules les interactions dues aux champs collectif autocohérent et extérieur ont une influence sur la dynamique du système. Remarquons

[1] Ce paramètre, qui fait intervenir la densité n du plasma et la longueur de Debye λ_D, indique le nombre typique de particules contenues dans une sphère dont le rayon est la longueur de Debye [5].

que l'équation de Vlasov est invariante par renversement du temps : elle permet de décrire le début de l'évolution d'un système hors équilibre avec les instabilités qui s'y développent, mais ne permet pas de décrire le processus irréversible qui ramène ce système à l'équilibre thermodynamique.

Les moyens informatiques et numériques actuellement disponibles ne permettent malheureusement pas une résolution complète de l'équation de Vlasov à 6 dimensions. Cependant, dans les plasmas magnétisés, l'anisotropie induite par le champ magnétique va permettre une réduction de la dimensionalité de l'espace des phases : c'est le point de départ de la théorie gyrocinétique.

1.1.2 La théorie gyrocinétique

Dans les plasmas fortement magnétisés que nous voulons étudier, la micro-turbulence apparaît sur des échelles temporelles grandes devant la période de giration cyclotronique ($\omega \ll \Omega_c$ où ω est la fréquence de la perturbation et Ω_c la fréquence cyclotronique) et sur des échelles spatiales petites devant les longueurs de gradients des grandeurs d'équilibre du système (i.e. la longueur de gradient de champ magnétique $B/|\nabla B|$, de densité $n/|\nabla n|$ et de température $T/|\nabla T|$). En outre, les perturbations présentent une anisotropie marquée dans la direction perpendiculaire du champ magnétique ($k_\parallel \ll k_\perp$ où $k_\parallel$ est le nombre d'onde dans la direction parallèle au champ magnétique, et $k_\perp$ le nombre d'onde dans la direction perpendiculaire qui est typiquement de l'ordre de l'inverse du rayon de Larmor ionique : $k_\perp r_{Li} \sim 1$). Les observations [28] montrent par ailleurs que les fluctuations de densité δn et de potentiel électrique $\delta\phi$ sont du même ordre de grandeur : $\delta n/n \sim q\delta\phi/k_B T \sim \epsilon_{gyro}$ où q est la charge électrique de l'espèce considérée, et ϵ_{gyro} un paramètre de petitesse caractéristique de l'ordering gyrocinétique :

$$\frac{\omega}{\Omega_c} \sim \frac{k_\parallel}{k_\perp} \sim \frac{\delta n}{n} \sim \frac{q\delta\phi}{k_B T} \sim \frac{r_{Li}}{L_\perp} \sim \epsilon_{gyro} \tag{1.4}$$

où $L_\perp$ sont les longueurs de gradients d'équilibre dans la direction perpendiculaire au champ magnétique.

L'ordering gyrocinétique permet la séparation du mouvement cyclotronique rapide de la dynamique lente dans la direction perpendiculaire au champ magnétique. Cette séparation conduit à une réduction de la dimensionalité de l'espace des phases : d'un

espace des phases 6D, on passe à un espace des phases à 5D (3D en espace et 2D en vitesse : la vitesse $v_{\|}$ et le moment magnétique μ). L'état du système est alors déterminé par une fonction de distribution $f_{GC}(\mathbf{r}, v_{\|}, \mu, t)$ qui décrit la population de particules non pas du point de vue de leur position *réelle* située en $\mathbf{R} + \mathbf{r}_L(\mu)$ - où $r_L^2(\mu) = 2\mu/q\Omega_c$ est le rayon de Larmor - , mais de la position de leurs *centres-guides* (GC pour Guiding-Center) qui sont situés en $\mathbf{R}$. La variable $v_{\|}$ représente la vitesse dans la direction parallèle aux lignes de champs magnétique, et $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ représente le moment magnétique (i.e. le premier invariant adiabatique) qui est lié à la dynamique perpendiculaire [12][13][14][29].

1.1.3 L'équation de dérive cinétique

L'équation gyrocinétique peut prendre la forme simple de l'équation de dérive cinétique (en géométrie cylindrique) lorsqu'on fait les hypothèses suivantes :

- le rayon de Larmor nul : les effets de rayon de Larmor fini sont négligés. Nous les introduisons dans le chapitre 2.
- la géométrie cylindrique avec $\mathbf{B}$ constant et homogène : les effets de courbure du champs magnétique n'apparaissent pas. Ils sont introduits à partir du chapitre 4.

L'équation de dérive cinétique s'écrit :

$$\partial_t f_{GC} + \mathbf{v_D} \cdot \nabla f_{GC} + \dot{v}_{\|} \partial_{v_{\|}} f_{GC} = 0 \tag{1.5}$$

avec

$$f_{GC} = f_{GC}(\mathbf{r}, v_{\|}, t) \tag{1.6}$$

$$\mathbf{v_D} = v_{\|}\mathbf{b} + \mathbf{v}_{E\times B} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{v}_{E\times B} = -\frac{\nabla\phi \times \mathbf{b}}{B} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}/B \tag{1.9}$$

$$\dot{v}_{\|} = -\frac{q}{m}\nabla_{\|}\phi \tag{1.10}$$

L'équation de dérive cinétique, couplée avec les équations du champ électromagnétique, nous donne l'évolution de la dynamique de la population ionique. Elle permet une

bonne description des instabilités ITG en géométrie cylindrique [16]. Nous verrons par la suite que la description d'autres types d'instabilités nécessite des raffinements. En outre, la résolution numérique n'est pas aisée.

Nous allons maintenant introduire le concept de distribution water-bag. Comme nous allons le voir, ce concept permet une bonne description des effets cinétiques tout en ayant une complexité numérique équivalente à celle d'un modèle multi-fuide.

1.2 Le modèle water-bag

L'équation de dérive cinétique est une équation de type Vlasov : une de ses propriétés est qu'elle reste invariante le long des trajectoires caractéristiques dans l'espace des phases. Le modèle water-bag tire parti de cette invariance puisqu'il permet de réduire l'équation de Vlasov en un ensemble d'équations multi-fluides dans lesquelles la vitesse parallèle aux lignes de champs magnétique n'apparaît plus comme une variable cinétique mais comme un simple label [19] [20].

Avant de décrire le modèle complet, montrons les principes de base du modèle water-bag sur un exemple simple : le simple water-bag à 1 dimension spatiale. Nous généralisons ensuite au *multi*-water-bag.

1.2.1 Le simple water-bag

L'équation de Vlasov à 1D en espace qui décrit l'évolution de la fonction de distribution $f(x, v, t)$ d'une population de particules de masse m s'écrit :

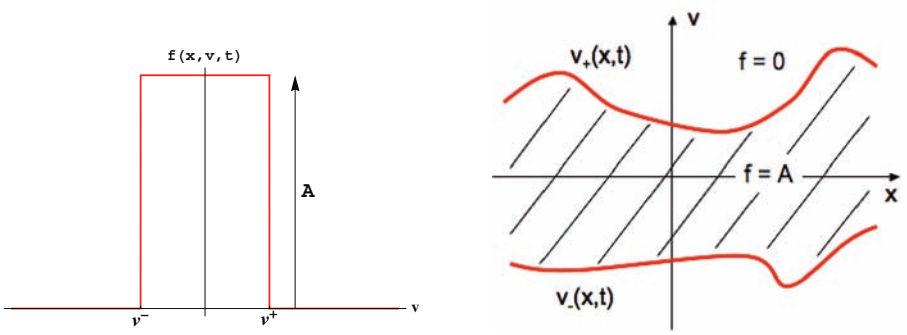
$$\partial_t f + v\partial_x f + \frac{F}{m}\partial_v f = 0 \tag{1.11}$$

où F est la force appliquée aux particules.

Considérons une fonction de distribution en marche d'escalier de la forme [18] [30] [31] [32] [33]

$$f(x, v, t) = A\Big[H\Big(v - v^-(x, t)\Big) - H\Big(v - v^+(x, t)\Big)\Big] \tag{1.12}$$

où H est la distribution échelon de Heaviside.



(a) (b)

FIG. 1.1: Fonction de distribution simple water-bag dans les plans (v, f) à gauche et dans le plan (x, v) à droite.

Cette distribution est caractérisée par sa hauteur A ainsi que par les contours $v^-(x,t)$ et $v^+(x,t)$. La propriété d'invariance de la fonction de distribution dans l'équation de Vlasov implique que la hauteur A est un invariant absolu : sa valeur ne varie pas au cours de l'évolution du système.

Si on introduit la fonction de distribution water-bag (Eq.(1.12)) dans l'équation de Vlasov (Eq.(1.11)) qu'on intègre ensuite sur l'axe des vitesses, on obtient deux équations hydrodynamiques :

$$\partial_t v^+ + v^+ \partial_x v^+ = \frac{F}{m} \tag{1.13}$$

$$\partial_t v^- + v^- \partial_x v^- = \frac{F}{m} \tag{1.14}$$

Le système est alors entièrement décrit par ces deux équations : on a réduit une équation cinétique en deux équations hydrodynamiques.

La densité en un point x s'écrit :

$$n(x,t) = \int f(x,v,t)dv = A(v^+ - v^-) \tag{1.15}$$

la vitesse moyenne :

$$u(x,t) = \frac{1}{n}\int v f(x,v,t)dv = \frac{v^+ + v^-}{2} \tag{1.16}$$

et la pression :

$$p(x,t) = \frac{1}{n}\int m(v-u)^2 f(x,v,t)dv = \frac{mn^3}{12A^2} \tag{1.17}$$

En introduisant les deux premières quantités dans Eq.(1.13), puis en les soustrayant et additionnant [18], on obtient le système :

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0 \tag{1.18}$$

$$\partial_t u + u\partial_x u = \frac{F}{m} - \frac{1}{mn}\partial_x p \tag{1.19}$$

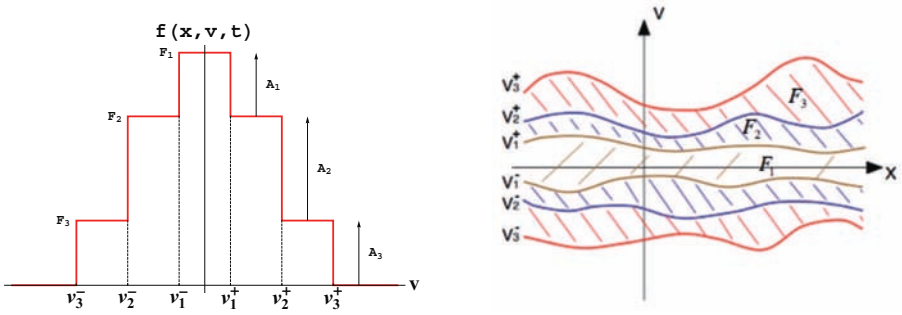
ce qui montre que le système est équivalent à un modèle fluide incompressible avec fermeture adiabatique.

1.2.2 Le multi-water-bag (MWB)

On peut généraliser le modèle précédent en introduisant une fonction de distribution multi-water-bag, comprenant plusieurs bags [18] :

$$f(x,v,t) = \sum_{j=1}^{M} A_j\Big[H\Big(v - v_j^-(x,t)\Big) - H\Big(v - v_j^+(x,t)\Big)\Big] \tag{1.20}$$

Cette fonction de distribution est une généralisation de la distribution Eq.(1.12) : on superpose M marches d'escalier de hauteur respectives A_j que l'on nomme des *Bags*, et dont les bords se situent aux vitesses $(v_j^+(x,t), v_j^-(x,t))$ (voir la figure Fig.(1.2)).



(a) (b)

Fig. 1.2: Fonction de distribution multi-water-bag (a) en fonction de v, et (b) dans le plan (x,v). Les paramètres F_j représentent la hauteur absolue de la fonction de distribution tandis que A_j représente la hauteur du bag j.

En introduisant la fonction de distribution MWB dans l'équation de Vlasov Eq.(1.11), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{M} A_j \Big\{ \Big[\partial_t v_j^+ + v_j^+ \partial_x v_j^+ - F/m\Big]\delta(v - v_j^+) - \Big[\partial_t v_j^- + v_j^- \partial_x v_j^- - F/m\Big]\delta(v - v_j^-) \Big\} = 0 \quad (1.21)$$

Cette équation doit être vérifiée pour tous les ensembles $\{A_j, v_j^+, v_j^-\}_{j=1,...,M}$ non tous nuls. On obtient par conséquent les équations dites *des contours* qui sont identiques aux trajectoires des particules situées sur les contours :

$$\partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_x v_j^\pm = \frac{F}{m} \quad (1.22)$$

pour $j = 1, ..., M$.

Remarquons que l'opérateur différentiel sur la vitesse, qui est présent dans l'équation de Vlasov, n'apparaît plus dans cette description. La vitesse n'est plus une variable cinétique mais un simple paramètre labelisé par l'indice j. Cette propriété est numériquement très intéressante puisqu'en pratique elle permet à l'opérateur différentiel $\partial/\partial_{v_\parallel}$ d'être converti en une somme discrète sur les différents bags.

Par analogie avec le cas du simple water-bag, nous pouvons définir une densité, une vitesse moyenne et une pression liées à chaque bag j :

$$n_j = A_j(v_j^+ - v_j^-) \quad (1.23)$$

$$u_j = \frac{v_j^+ + v_j^-}{2} \quad (1.24)$$

$$p_j = \frac{m n_j^3}{12 A_j^2} \quad (1.25)$$

on a alors :

$$\partial_t n_j + \partial_x (n_j u_j) = 0 \quad (1.26)$$

$$\partial_t u_j + u_j \partial_x u_j = \frac{F}{m} - \frac{1}{m n_j} \partial_x p_j \quad (1.27)$$

On voit que le système est équivalent à un ensemble de fluides qui sont couplés par le terme de force F (dans la pratique, cette force sera la force électrique calculée à

l'aide de l'équation de Poisson dans laquelle c'est la densité totale - et non la densité "par Bag" - qui intervient).

Nous voyons sur ces équations que le modèle MWB permet de faire le lien entre le modèle fluide et le modèle cinétique : en effet, nous avons vu que le cas $M = 1$ est équivalent au modèle fluide avec fermeture adiabatique. Par ailleurs, lorsque $M \to \infty$, la fonction de distribution water-bag tend vers une fonction de distribution continue, et le modèle MWB est alors équivalent au modèle cinétique.

En raison de la propriété d'invariance de la fonction de distribution le long des trajectoires caractéristiques de l'équation de Vlasov, nous savons que les A_j restent invariants. Ainsi le choix d'une distribution MWB comme fonction de distribution initiale représente une classe particulière de solutions de l'équation de Vlasov : une distribution MWB restera de la même forme tout au long de l'évolution du système. Seuls les bords des bags évoluent suivant les équations Eq.(1.22). Par conséquent, l'utilisation d'une distribution MWB ne doit pas être vue comme une approximation ou une discrétisation : l'évolution au cours du temps de la fonction de distribution MWB est *exacte*. Le problème sera alors de choisir des paramètres water-bag (les hauteurs des bags A_j et les vitesses des bords $v_j^{\pm}$) initiaux de telle sorte qu'ils modélisent de manière satisfaisante une distribution *réelle* de particules.

L'intérêt du modèle MWB est qu'en utilisant un nombre de bags restreint (typiquement de l'ordre de la dizaine [20]), l'analyse linéaire montre qu'on parvient à une bonne description des effets cinétiques. En outre, les équations MWB permettent une étude analytique plus aisée que dans le cas d'une fonction de distribution continue.

Le passage du modèle simplifié à 1D que nous venons de décrire vers le modèle de dérive-cinétique est immédiat : au niveau des paramètres MWB, les vitesses liées aux contours ne dépendent plus seulement de la variable x, mais du vecteur position $\mathbf{r}$, et concernant les équations d'évolution des contours, elles s'écrivent maintenant :

$$\partial_t v_j^{\pm} + \left(v_j^{\pm} \mathbf{b} - \frac{\nabla\phi \times \mathbf{b}}{B} \right) \cdot \nabla v_j^{\pm} = -\frac{q \nabla_{\parallel} \phi}{m} \tag{1.28}$$

Nous allons dans notre prochain chapitre mettre ensemble tous ces éléments en vue d'obtenir d'une part une équation gyrocinétique prenant en compte les effets FLR, d'autre part des paramètres MWB qui permettent la modélisation de *n'importe quelle fonction de distribution continue*, incluant la distribution de moment magnétique.

2

Distribution des particules en fonction du moment magnétique - effets de rayon de Larmor fini

Nous avons rappelé, au cours du chapitre précédent, les principes de la modélisation gyrocinétique d'une population ionique fortement magnétisée. La forme la plus simple de ce modèle qui permet une description de certaines micro-instabilités est l'équation de dérive cinétique. Combinée au modèle multi-water-bag (MWB), cette description permet l'étude des instabilités de gradient de température ionique (ITG) dans les plasmas fortement magnétisés.

Dans le présent chapitre, nous introduisons plusieurs concepts gyrocinétiques importants et les adaptons au modèle Gyro-Water-Bag (GWB). Ces concepts sont la prise en compte d'une distribution en moments magnétiques et des effets de rayon de Larmor fini (FLR pour Finite Larmor Radius effects). Comme nous allons le voir ils sont étroitement liés.

Nous allons débuter le chapitre par un rappel sur ces concepts et introduirons les équations gyrocinétiques qui les prennent en compte. Le modèle water-bag est ensuite adapté et nous écrivons les équations GWB qui en découlent.

Nous faisons ensuite une analyse linéaire des ITG dans un plasma magnétisé cylindrique en exposant tout d'abord une méthode qui permet la détermination de paramètres MWB physiquement représentatifs des fonctions de distribution que l'on cherche à modéliser. Nous vérifierons ensuite que notre implémentation apporte une

description précise des effets FLR en comparant nos résultats avec leur traitement *classique*[1], puis montrerons l'influence importante de ces effets sur les taux linéaires des instabilités.

2.1 Équations gyrocinétiques et modélisation water-bag

2.1.1 Les effets de rayon de Larmor fini

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la fonction de distribution considérée dans le modèle gyrocinétique est la fonction de distribution des centres-guides. Nous savons que dans un plasma magnétisé les particules chargées vont avoir, dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, un mouvement circulaire rapide auquel s'ajoutent des dérives lentes. Lorsqu'on remplace $\mathbf{v}_\perp$ par $\mathbf{v}_{E\times B}$ pour obtenir l'équation de dérive cinétique, on oublie de tenir compte du fait que le rayon de Larmor des particules n'est pas nul : les champs que rencontre la particule sur son orbite cyclotronique présentent des inhomogénéités qui doivent être prises en compte - ces inhomogénéités combinées au fait que le rayon de Larmor est non-nul sont responsables de ce qu'on appelle les effets FLR. Nous allons maintenant introduire les concepts de gyromoyenne et de dérive de polarisation et montrer qu'ils sont adaptés, dans le cadre de l'ordering gyrocinétique, à l'amélioration du modèle.

2.1.1.1 L'opérateur de gyromoyenne

L'équation de dérive cinétique Eq.(5.2) qui est à 4D dans l'espace des phases ne prend pas en compte les effets FLR. Notre but est ici d'introduire les effets FLR sans revenir à l'équation de Vlasov qui est une équation à 6D. Nous obtenons alors un modèle à 5D dans l'espace des phases, la cinquième dimension étant la distribution en moment magnétique (i.e. en rayon de Larmor).

La longueur d'onde des instabilités qui entrent dans le cadre de notre étude est typiquement, dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, $k_\perp r_{Li} \sim 1$ où $k_\perp$ est le nombre d'onde dans le plan perpendiculaire au champ magnétique et r_{Li} le rayon de

[1] Ce traitement "classique" consiste à supposer que la distribution en vitesse perpendiculaire est une Maxwellienne. Dans le traitement que nous proposons nous ne faisons aucune hypothèse sur la forme de cette distribution.

Larmor ionique. Cet ordering implique que lorsqu'elle effectue une giration cyclotronique, une particule ionique *voit* un potentiel électrique qui varie et qui n'est pas égal au potentiel au niveau du centre-guide. Or le potentiel ϕ qui intervient dans l'équation de dérive cinétique est évalué au niveau du centre-guide : dans ces conditions comment peut-on tenir compte de la décorrélation introduite par le mouvement cyclotronique entre le potentiel évalué au niveau du centre-guide et le potentiel effectivement vu par la particule ?

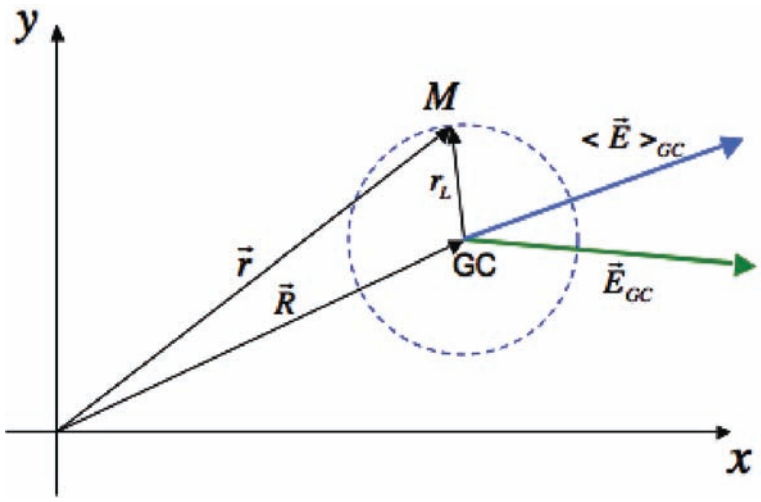


Fig. 2.1: Illustration du concept de gyromoyenne : au lieu d'utiliser le champ $\mathbf{E}_{GC}$ dans l'équation de dérive cinétique, on utilise le champ $< \mathbf{E}_{GC} > (\mathbf{R}) = \jmath_\mu \mathbf{E}_{GC}(\mathbf{R})$ qui est une moyenne du champ électrique sur la trajectoire cyclotronique.

Pour tenir compte du mouvement cyclotronique, tout en restant dans le modèle gyrocinétique (c'est-à-dire en gardant la fonction de distribution des centres-guides), on définit l'opérateur de gyromoyenne [34]

$$\jmath_\mu F(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi r_L(\mu)} \int F(\mathbf{r}) \delta(|\mathbf{R} - \mathbf{r}| - r_L(\mu)) d\mathbf{r} \tag{2.1}$$

où $F(\mathbf{r})$ est la fonction à moyenner. Notons que l'opérateur de gyromoyenne dépend du moment magnétique μ (i.e. du rayon de Larmor).

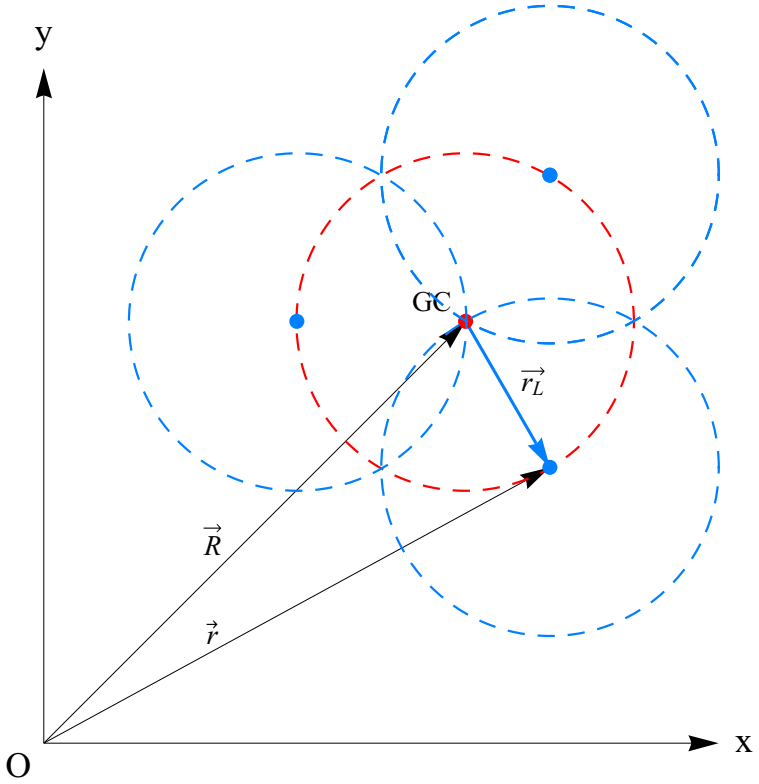


Fig. 2.2: Autre illustration du concept de gyromoyenne : dans l'équation de quasi-neutralité, la densité corrigée est la moyenne de la densité sur le cercle de rayon r_L et de centre **R**. Autrement dit on remplace n par $\mathcal{J}_\mu n(\mathbf{R})$ dans l'équation de quasi-neutralité.

Nous verrons que ce concept de gyromoyenne doit s'appliquer non-seulement au champ électrique vu par la particule dans l'équation de Vlasov gyrocinétique, mais également dans l'équation de quasi-neutralité car la densité de centre-guide en un point **R** est influencée par toutes les particules dont le centre-guide est situé sur un cercle de rayon r_L autour de ce point (voir Fig.(2.2)).

Appliquer $\mathcal{J}_\mu$ est équivalent à opérer une convolution. Par conséquent, dans l'espace de Fourier, l'opération de gyromoyenne est la multiplication par une certaine fonction qui dans ce cas est la fonction[1] de Bessel de premier type d'ordre 0. En effet,

[1]Nous notons cette fonction J_o

si on pose

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

on obtient alors

$$< \mathbf{E}_{GC} > (\mathbf{R}) = \sum_k g_k \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \tag{2.3}$$

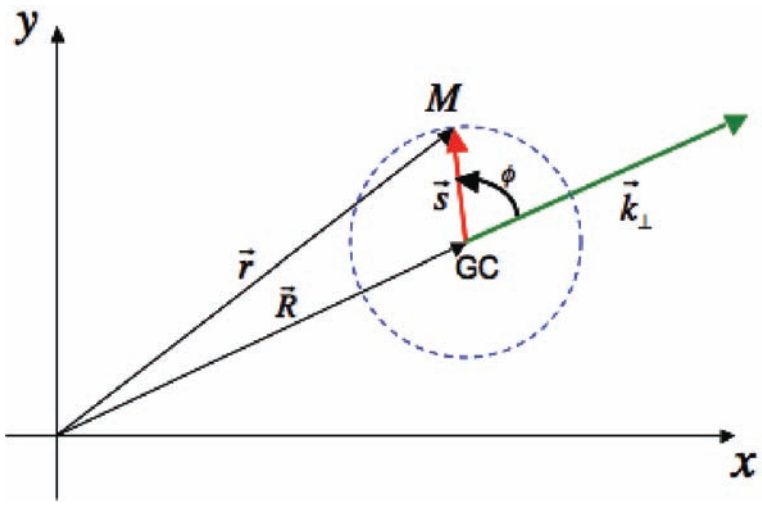
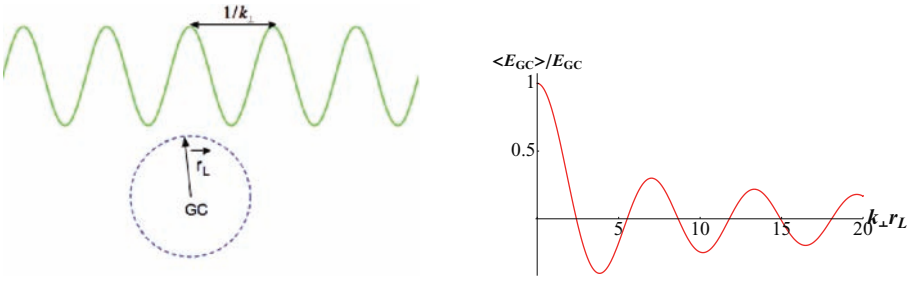


Fig. 2.3: Définition des paramètres de calcul de g_k. On a $s = r_L$.

et on a, si on pose $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$, et qu'on définit ϕ comme l'angle $(\widehat{\mathbf{k}_\perp, \mathbf{s}})$ - (voir Fig.(2.3)) :

$$g_k = \frac{1}{2\pi r_L} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik_\perp s\cos\phi} \delta(s - r_L) s ds d\phi = J_o(k_\perp r_L) \tag{2.4}$$

Sur la figure Fig.(2.4(b)), on voit clairement que lorsque le produit $k_\perp r_L$ augmente, le champ moyenné (c'est-à-dire ressenti par la particule) et le champ au niveau du centre-guide sont progressivement décorrelés. On peut comprendre ce fait en observant la figure Fig.(2.4(a)) :



(a) (b)

Fig. 2.4: (a) Illustration du concept de gyromoyenne dans l'espace de Fourier : on doit moyenner un champ oscillant (qui peut être le champ électrique ou la densité) à basse fréquence avec la longueur d'onde $k_\perp$ sur un cercle de rayon r_L. (b) On obtient alors une moyenne dépendant du produit $k_\perp r_L$.

Concernant les électrons, le produit $k_\perp r_{Le}$ - où r_{Le} est le rayon de Larmor électronique - est très petit dans les systèmes que nous étudierons. Ceci nous permettra de considérer que les électrons ne sont pas influencés par les effets FLR : en effet, l'opérateur de gyromoyenne sera alors très proche de 1 (le centre-guide et la trajectoire cyclotronique sont quasiment confondus pour les électrons). L'utilisation de la gyromoyenne est par contre entièrement justifiée pour les ions (pour lesquels on a $k_\perp r_{Li} \sim 1$) puisque dans ce cas l'opérateur de gyromoyenne apporte une correction non-négligeable au champ électrique et à la densité.

2.1.1.2 La dérive de polarisation

L'effet de gyromoyenne que nous venons d'expliciter décrit les variations *spatiales* moyennes des champs locaux ressenties par les particules sur une giration cyclotronique. Qu'en est-il des variations temporelles ? Ces variations sont décrites par une vitesse de dérive : la dérive de polarisation.

$$\mathbf{v}_{pol} \simeq \pm \frac{1}{\Omega_c B} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \tag{2.5}$$

Nous voyons que cette dérive de polarisation est d'ordre supérieur à $\mathbf{v}_{E\times B}$ (en effet, $v_{E\times B} \sim \frac{E}{B} \sim \epsilon_{gyro} v_{Ti}$, et $v_{pol} \sim \frac{\omega}{\Omega_c}\frac{E}{B} \sim \epsilon^2_{gyro} v_{Ti}$) ce qui signifie que l'équation de dérive cinétique est correcte à un certain ordre en ω/Ω_c, mais que si on veut affiner la description, on doit introduire ce nouveau concept.

Deux possibilités existent quant à l'introduction de la dérive de polarisation dans le modèle : la possibilité la plus intuitive consisterait à ajouter une dérive supplémentaire dans l'équation de Vlasov gyrocinétique en posant : $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{E\times B} + \mathbf{v}_{pol}$. Historiquement, cette solution est cependant écartée car l'introduction de ce nouveau terme rend la résolution numérique du modèle très problématique. La deuxième possibilité consiste à remarquer que la dérive de polarisation a pour effet de faire apparaître une charge supplémentaire dans l'équation de Poisson [35]. Au lieu de tenir compte de la dérive de polarisation dans l'équation de Vlasov gyrocinétique, il est alors possible de l'introduire comme une densité de polarisation de la forme :

$$n_{pol} = \nabla \cdot \left(\frac{n_o}{\Omega_c B} \nabla_\perp \phi \right) \tag{2.6}$$

Notons que la correction apportée à la densité ne sera notable que dans le cas des ions : le rayon de Larmor des électrons est trop petit par rapport à la longueur d'onde dans le plan perpendiculaire pour que l'influence de la densité de polarisation sur la population électronique soit notable.

2.1.2 Les équations du modèle

Connaissant maintenant les nouveaux concepts que nous voulons introduire, nous allons décrire le modèle gyrocinétique couplé à l'équation de Poisson.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le modèle gyrocinétique s'applique dans le cadre de *l'ordering gyrocinétique*

$$\frac{\omega}{\Omega_c} \sim \frac{k_\parallel}{k_\perp} \sim \frac{\delta n}{n} \sim \frac{q\delta\phi}{k_B T} \sim \frac{r_{Li}}{L_\perp} \sim \epsilon_{gyro} \tag{2.7}$$

Nous nous plaçons d'emblée dans cet ordering pour toute la suite, et posons en outre les hypothèses suivantes :

- géométrie cylindrique, avec un champ magnétique axial, homogène et stationnaire ($\mathbf{B} = B_o \mathbf{u}_z$) dans une base cylindrique classique ($O, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z$).
- les flux zonaux sont négligés
- l'inertie et les effets FLR sur les électrons sont négligés : leur réponse aux fluctuations basse-fréquence du potentiel électrique est adiabatique : $n_e = n_{eo} e^{e\phi/k_B T_e}$

- les longueurs de Debye électroniques et ioniques sont très petites devant la longueur d'onde des perturbations. Par conséquent le plasma vérifie l'équation de quasi-neutralité[1] : $n_e = Z_i n_i$.

Les équations gyrocinétiques non-linéaires décrivant la dynamique de la population ionique s'écrivent [12] [13] [14] [29]

$$\frac{\partial f_{GC}}{\partial t} + \mathbf{v_D} \cdot \nabla f_{GC} + \frac{dv_\parallel}{dt}\frac{\partial f_{GC}}{\partial v_\parallel} = 0 \tag{2.8}$$

avec :

$$f_{GC} = f_{GC}(v_\parallel, \mu, t) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{v_D} = v_\parallel \mathbf{u}_z - \frac{\nabla \mathcal{J}_\mu \phi \times \mathbf{u}_z}{B_o} \tag{2.10}$$

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{q_i}{m_i}\nabla \mathcal{J}_\mu \phi \cdot \mathbf{u}_z \tag{2.11}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \tag{2.12}$$

où $q_i = eZ_i$ et m_i sont la charge et la masse ioniques.

et l'équation de quasi-neutralité s'écrit

$$n_{eo} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) = Z_i \left[\int_0^\infty d\mu \mathcal{J}_\mu n_{i\mu} + \nabla_\perp \cdot \left(\frac{n_{io}}{\Omega_{ci} B_o}\nabla_\perp \phi\right)\right] \tag{2.13}$$

où

$$n_{i\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel f_{GC} \tag{2.14}$$

et $\nabla \cdot \left(\frac{n_{io}}{\Omega_{ci} B_o}\nabla_\perp \phi\right)$ est la densité de polarisation ionique [16], et n_{io} la densité ionique d'équilibre.

Nous voyons que ces équations sont différentes de l'équation de dérive cinétique Eq.(5.2) : l'opérateur $\mathcal{J}_\mu$ qui est appliqué au potentiel électrique apparaît. En outre, l'invariance adiabatique du moment magnétique va nous permettre de considérer le

[1] En effet, dans l'équation de Poisson (en supposant pour plus de simplicité que $T_i = T_e = T$ et $Z_i = 1$), on a : $\Delta\delta\phi = \frac{e}{\epsilon_o}\left(\delta n_i - \delta n_e\right) \Leftrightarrow k^2 \frac{\epsilon_o k_B T}{n_{io} e^2}\frac{e\delta\phi}{k_B T} = \frac{\delta n_i - \delta n_e}{n_{io}}$ où $\delta\phi$, δn_e, et δn_i sont des quantités perturbées, et n_{io} la densité ionique d'équilibre. Le terme $k^2 \frac{\epsilon_o k_B T}{n_{io} e^2}\frac{e\delta\phi}{k_B T}$ qui est d'ordre $\frac{\lambda_D^2}{\lambda^2}\epsilon_{gyro}$ est beaucoup plus petit que le terme $\frac{\delta n_i - \delta n_e}{n_{io}}$ qui est d'ordre ϵ_{gyro} puisque $\frac{\lambda_D}{\lambda} \sim 10^{-3}$ dans les tokamak.

plasma comme un ensemble de groupes de particules ayant un moment magnétique donné. La fonction de distribution pourra alors se mettre sous la forme

$$f_{GC}(\mathbf{r}, v_{\parallel}, \mu, t) = \sum_{k=1}^{N} f_{GC}^{\mu_k} \delta(\mu - \mu_k) \Delta\mu \tag{2.15}$$

où $\delta(\mu - \mu_k)$ est une distribution de Dirac centrée en μ_k.

Nous considérons ici un ensemble discret de moments magnétiques $\{\mu_k\}_{k=1,...,N}$ avec un ensemble de rayons de Larmor $\{r_{Lk}\}_{k=1,...,N}$ liés par la relation $\mu = q_i {r_L}^2 \Omega_{ci}/2$. La valeur de $\Delta\mu$ dépend de la densité de l'échantillonnage en μ. Une grille régulière $\mu_k = (k - 1/2)\Delta\mu$ avec $\Delta\mu = \mu_N/(N - 1/2)$ est considérée dans toute la suite.

Nous voyons que cette distribution est équivalente à une fonction de distribution continue lorsque $N \to \infty$.

L'intérêt de cette description est que les différents groupes de particules ne se mélangent pas les uns avec les autres dans la direction μ, puisque leur moment magnétique μ_k est constant : en considérant un nombre fini de moments magnétiques, on pourra économiser des ressources informatiques. En outre on pourra aller plus loin dans l'approche analytique des problèmes.

2.1.2.1 Le modèle gyro-water-bag

Comme nous venons de le voir, la modélisation gyrocinétique utilise l'invariance adiabatique du moment magnétique pour éliminer la vitesse $v_{\perp}$ (i.e. le moment magnétique μ) comme variable cinétique dans l'équation de Vlasov.

De la même manière, la concept de water-bag utilise l'invariance de Liouville pour réduire encore la dimension de l'espace des phases.

Tenant compte de l'invariance du moment magnétique, la fonction de distribution water-bag s'écrira maintenant :

$$f_{MWB}(\mathbf{r}, v_{\parallel}, \mu, t) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} A_{jk} \Big[H\Big(v_{\parallel} - v_{jk}^{-}(\mathbf{r}, t)\Big) - H\Big(v_{\parallel} - v_{jk}^{+}(\mathbf{r}, t)\Big) \Big] \delta(\mu - \mu_k) \Delta\mu \tag{2.16}$$

où $j = \{1, ..., M\}$, et $k = \{1, ..., N\}$.

Les équations gyrocinétiques Eq.(2.8) et Eq.(2.13) conduisent à l'ensemble d'équations GWB suivant[1] :

$$\frac{\partial v_{jk}^{\pm}}{\partial t} - \frac{\nabla_\perp \mathcal{J}_{\mu_k}\phi \times \mathbf{u}_z}{B_o} \cdot \nabla_\perp v_{jk}^{\pm} + v_{jk}^{\pm}\nabla_\parallel v_{jk}^{\pm} \cdot \mathbf{u}_z = -\frac{q_i \nabla_\parallel \mathcal{J}_{\mu_k}\phi}{m_i} \cdot \mathbf{u}_z \tag{2.17}$$

qui sont couplées entre elles par l'équation de quasi-neutralité

$$n_{eo} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) = Z_i\Big[\sum_{k=1}^{N} \mathcal{J}_{\mu_k} n_{ik} \Delta\mu + \nabla_\perp \cdot \Big(\frac{n_{io}}{\Omega_{ci} B_o}\nabla_\perp \phi\Big)\Big] \tag{2.18}$$

avec

$$n_{ik} = \sum_{j=1}^{M} A_{jk}\Big(v_{jk}^{+} - v_{jk}^{-}\Big) \tag{2.19}$$

Pour résumer, l'introduction des invariances de Liouville et du moment magnétique apparaissent comme une réduction *exacte* de la dimension de l'espace des phases (élimination de $v_\parallel$ et $\mathbf{v}_\perp$ comme variables cinétiques du système). Bien sûr ces vitesses que nous éliminons réapparaissent dans les différents moments magnétiques $\{\mu_k\}_{k=1,\dots,N}$ et bags $j = 1, \dots, M$, nécessitant une préparation spéciale du plasma (masses de Dirac pour μ et subdivision de Lebesgue pour $v_\parallel$).

Étant donné qu'il n'y a pas de limite inférieure pour N et M, d'un point de vue physique, un grand nombre de résultats peuvent être obtenus avec des valeurs raisonnablement petites pour N et M. L'approche water-bag permet d'apporter une approche analytique qui n'est pas limitée aux fonctions de distributions Maxwelliennes. De plus, le double échantillonnage (j,k) permet de considérer *n'importe quelle* distribution de particules fonction de $v_\parallel$ et de μ.

2.2 Instabilités ITG avec effets de rayon de Larmor fini

2.2.1 Analyse linéaire

Dans cette section, une analyse linéaire est faite sur les équations GWB qui généralise le travail effectué dans le cas de la dérive-cinétique [20]. Le but est d'étudier l'impact des effets FLR sur les instabilités ITG. Le point important est qu'aucune hypothèse n'est faite sur la distribution en moments magnétiques.

[1] Nous notons $\nabla = \nabla_\perp + \nabla_\parallel$

Nous considérons un plasma cylindrique, dont les quantités d'équilibre ne dépendent que de la variable r. Dans l'équation Eq.(2.17), qui décrit la dynamique des contours, nous utilisons maintenant le développement en modes de Fourier

- $v_{jk}^{\pm}(r,\theta,z,t) = \pm a_{jk}(r) + \delta v_{jk}^{\pm}(r)\exp^{-i(\omega t - m\theta - k_{\|}z)}$
- $\phi(r,\theta,z,t) = 0 + \delta\phi(r)\exp^{-i(\omega t - m\theta - k_{\|}z)}$

où m est le mode orthoradial, avec $k_\theta = m/r$. Dans la direction radiale, les modes de Fourier ne sont pas des modes propres du système. Par conséquent, pour pouvoir résoudre les équations GWB, nous avons besoin d'approximer les profils radiaux des perturbations. Les simulations fluides (voir par exemple [36]) montrent que ce profil peut être approché par une gaussienne de la forme $Be^{g(r)}$ avec $g(r) = -(r-r_o)^2/\Delta r^2$.

La partie radiale du potentiel électrique et de la vitesse parallèle s'écrit donc : $\delta\phi(r) = e^{g(r)}\delta\phi_o$, et $\delta v_{jk}(r) = e^{g(r)}\delta v_{jko}$.

En substituant cette expression dans Eq.(2.17) et Eq.(2.13), et utilisant l'équation de quasi-neutralité d'équilibre $n_{eo} = Z_i n_{io}$, nous obtenons les équations GWB linéarisées, ce qui conduit à la relation de dispersion du système

$$\varepsilon(\omega,k_\theta,k_{\|}) = 1 + Z_i\rho_s^2\Big[\kappa(r) + k_\theta^2\Big] - \Delta\mu\sum_{j,k}\frac{J_{ok}^2\alpha_{jk}}{\omega^2 - k_{\|}^2a_{jk}^2}\Big[Z_i\omega_{cs}^2 + \omega\omega_{jk}^*\Big] \tag{2.20}$$

avec : $\rho_s = c_s/\Omega_{ci}$, $c_s^2 = k_BT_e/m_i$, $\omega_{cs} = k_{\|}c_s$, $\alpha_{jk} = 2A_{jk}a_{jk}/n_{io}$, $\omega_{jk}^* = -k_\theta\frac{k_BT_e}{eB_o}\kappa_{jk}$, $\kappa_{jk} = \partial_r a_{jk}/a_{jk}$ et $\kappa(r) = -\Big[\partial_r^2 g + (\partial_r g)^2 + (\frac{1}{r} + \kappa_N)\partial_r g\Big]$. Nous avons défini $J_{ok} = J_o(k_\theta\sqrt{\frac{2\mu_k}{Z_ie\Omega_{ci}}})$, où J_o est la fonction de Bessel d'ordre 0 de premier type et représente l'opérateur de gyromoyenne dans l'espace des modes de Fourier.

Décrivons la méthode permettant la détermination de paramètres MWB physiquement représentatifs d'une fonction de distribution réelle [20], tenant compte maintenant d'une distribution de moments magnétiques.

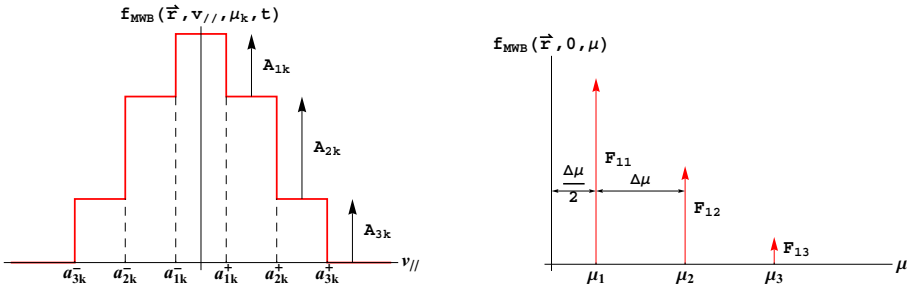
2.2.1.1 Choix des paramètres MWB pour une distribution donnée

La fonction de distribution ionique du système est choisie comme étant une fonction paire en $v_{\|}$ de la forme

$$f_{GC}(r,v_{\|},\mu) = \sum_{k=1}^{N}\frac{n_{io}}{v_{Ti}^3}P(\frac{v_{\|}}{v_{Ti}},\frac{\mu}{v_{Ti}^2})\delta(\mu-\mu_k)\Delta\mu \tag{2.21}$$

où $P(x,y)$ est une fonction normalisée de x et y, n_{io} et où $v_{Ti} = \sqrt{k_B T_i/m_i}$ sont des quantités d'équilibre, dépendantes de r. Nous voulons approcher cette fonction par la fonction de distribution MWB suivante (une grille régulière en $v_\parallel$ est choisie : $a_j = (j-1/2)\Delta a$ avec $\Delta a = a_M/(M-1/2)$)

$$f_{MWB}(r, v_\parallel, \mu) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}\Big[H(v_\parallel + a_j(r)) - H(v_\parallel - a_j(r))\Big]\delta(\mu - \mu_k)\Delta\mu \tag{2.22}$$



(a) (b)

Fig. 2.5: Fonction MWB tracée dans le plan $(v_\parallel, \mu_k)$ (a) et dans le plan $(0, \mu)$ (b) pour $M = 3$ et $N = 3$.

Définissons les moments d'une fonction de distribution quelconque

$$\mathfrak{M}_\ell(f) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel v_\parallel^\ell f(r, v_\parallel, \mu) \tag{2.23}$$

Pour la fonction de distribution continue, on a donc

$$m_\ell = \mathfrak{M}_\ell(f_{GC}) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel v_\parallel^\ell f_{GC}(r, v_\parallel, \mu) \tag{2.24}$$

et pour la fonction de distribution MWB

$$m_\ell^{MWB} = \mathfrak{M}_\ell(f_{MWB}) = \frac{\Delta\mu}{\ell+1}\sum_{j,k} 2A_{jk}a_j^{\ell+1} = \frac{n_{io}\Delta\mu}{\ell+1}\sum_{j,k}\alpha_{jk}a_j^\ell \tag{2.25}$$

En prenant la dérivée radiale de Eq.(2.24) et en utilisant Eq.(2.21), on montre que (voir le calcul détaillé en annexe A)

$$\partial_r m_\ell = \Big[\kappa_N + \frac{\ell}{2}\kappa_T\Big]m_\ell \tag{2.26}$$

où $\kappa_N = \frac{1}{n_{io}}\partial_r n_{io}$, et $\kappa_T = \frac{1}{T_i}\partial_r T_i$.

Effectuer la dérivation radiale de m_ℓ^{MWB} conduit à

$$\partial_r m_\ell^{MWB} = \Delta\mu \sum_{j,k} 2A_{jk} a_j^\ell \partial_r a_j = n_{io}\Delta\mu \sum_{j,k} \alpha_{jk}\kappa_{jk} a_j^\ell \tag{2.27}$$

où $\kappa_{jk} = \frac{1}{a_j}\partial_r a_j$ est lié aux gradients de densité et température d'équilibre, et peut être écrit comme une combinaison linéaire

$$\alpha_{jk}\kappa_{jk} = \frac{\beta_{jk}}{2}\kappa_T + \gamma_{jk}\kappa_N \tag{2.28}$$

Les coefficients inconnus α_{jk}, β_{jk}, γ_{jk} obéissent au système

$$\sum_{j,k} \alpha_{jk} a_j^\ell = \frac{(\ell+1)}{n_{io}\Delta\mu} m_\ell \tag{2.29}$$

$$\sum_{j,k} \beta_{jk} a_j^\ell = \frac{\ell}{n_{io}\Delta\mu} m_\ell \tag{2.30}$$

$$\sum_{j,k} \gamma_{jk} a_j^\ell = \frac{1}{n_{io}\Delta\mu} m_\ell \tag{2.31}$$

Un développement de Taylor de f_{GC} dans l'expression de m_ℓ permet d'écrire ces coefficients en fonction de valeurs de f_{GC}.

Si nous définissons : $F_{jk} = \frac{n_{io}}{v_{Ti}^3} P(a_j - \Delta a/2, \mu_k)$ (voir la figure), nous pouvons montrer que

$$\alpha_{jk} = \frac{2(F_{jk} - F_{j+1k})a_j}{n_{io}} \tag{2.32}$$

$$\beta_{jk} = \alpha_{jk} - \gamma_{jk} \tag{2.33}$$

$$\gamma_{jk} = \Delta a \frac{F_{jk} + F_{j+1k}}{n_{io}} \tag{2.34}$$

$$\alpha_{jk}\kappa_{jk} = \frac{\beta_{jk}}{2}\kappa_T + \gamma_{jk}\kappa_N \tag{2.35}$$

où

$$A_{jk} = F_{jk} - F_{j+1k} \tag{2.36}$$

Pour simplifier l'algèbre, il est également intéressant de considérer la forme suivante dans laquelle les dépendances en $v_{\|}$ et μ sont séparées

$$f_{GC}(r, v_{\|}, \mu) = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_{io}}{v_{Ti}^3} S(\frac{v_{\|}}{v_{Ti}}) T(\frac{\mu}{v_{Ti}^2}) \delta(\mu - \mu_k) \Delta\mu \tag{2.37}$$

ce qui permet d'obtenir une forme simplifiée de ces paramètres MWB dans lesquels les indices j et k sont séparés.

Utilisant la même méthode que précédemment, on définit

$$F_{jk} = \lambda_k \frac{n_{io}}{v_{Ti}} S(\frac{a_j - \Delta a/2}{v_{Ti}}) \tag{2.38}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{T(\mu_k / v_{Ti}^2)}{v_{Ti}^2} \tag{2.39}$$

Nous obtenons alors

$$\alpha_{jk} = \lambda_k \alpha_j \tag{2.40}$$

$$\beta_{jk} = \lambda_k \beta_j \tag{2.41}$$

$$\gamma_{jk} = \lambda_k \gamma_j \tag{2.42}$$

$$\kappa_{jk} = \kappa_j \tag{2.43}$$

où

$$\alpha_j = \frac{2(F_j - F_{j+1}) a_j}{n_{io}} = \frac{2 A_j a_j}{n_{io}} \tag{2.44}$$

$$\beta_j = \alpha_j - \gamma_j \tag{2.45}$$

$$\gamma_j = \Delta a \frac{F_j + F_{j+1}}{n_{io}} \tag{2.46}$$

$$\kappa_j = \Big(\frac{\beta_j}{2} \kappa_T + \gamma_j \kappa_N \Big) / \alpha_j \tag{2.47}$$

$$A_{jk} = \lambda_k A_j = F_{jk} - F_{j+1k} \tag{2.48}$$

Ces expressions donnent une méthode générale de détermination des paramètres MWB physiquement pertinents en fonction de la forme de la fonction de distribution continue que l'on cherche à modéliser.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode à plusieurs types de fonction de distribution. Tout d'abord une Maxwellienne pour montrer que le traitement classique de l'effet de gyromoyenne qui consiste à utiliser un rayon de Larmor moyen [34] est adapté pour ce type de fonction de distribution, puis à une distribution non-Maxwellienne afin de montrer les limites de ce traitement classique, et de mettre en lumière l'intérêt du modèle GWB.

2.2.2 Cas de l'équilibre Maxwellien

En vue de valider le traitement classique des effets de gyromoyenne, nous comparons nos résultats obtenus dans le cas d'une fonction de distribution Maxwellienne en vitesse perpendiculaire avec les résultats obtenus dans le cas du traitement classique de la distribution en vitesse perpendiculaire. Ce traitement classique consiste en l'utilisation d'un opérateur de gyromoyenne modifié en supposant que la distribution de vitesses dans le plan perpendiculaire au champ magnétique est Maxwellienne [34]

$$\mathcal{J}_o = \int J_o^2\Big(k_\theta \sqrt{\frac{2\mu(v_\perp)}{Z_i e\Omega_{ci}}}\Big) e^{-\frac{m_i {v_\perp}^2}{2k_B T_i}} v_\perp dv_\perp = e^{-k_\theta^2 r_{Li}^2} I_o(k_\theta^2 r_{Li}^2) \tag{2.49}$$

où $r_{Li} = v_{Ti}/\Omega_{ci}$ est le rayon de Larmor thermique, et I_o est la fonction de Bessel de premier type d'ordre 0 [34].

Notons que l'opérateur qui doit être moyenné n'est pas J_o mais J_o^2 car dans l'équation de dispersion, l'opérateur de gyromoyenne apparaît élevé au carré.

Lorsqu'on utilise ce traitement classique, on obtient aisément l'équation de dispersion

$$\varepsilon(\omega, k_\theta, k_\parallel) = 1 + Z_i \rho_s^2 \Big[\kappa(r) + k_\theta^2\Big] - \mathcal{J}_o \sum_j \frac{\alpha_j}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_j^2} \Big[Z_i \omega_{cs}^2 + \omega \omega_j^*\Big] \tag{2.50}$$

Dans Eq.(2.50), la distribution en moment magnétique est moyennée. Nous voulons maintenant comparer ce résultat avec le traitement complet des effets de gyromoyenne (autrement dit en considérant la forme précise de la distribution en moment magnétique plutôt qu'en la supposant Maxwellienne) obtenu en utilisant une fonction de distribution f_{GC} de la forme Eq.(2.37) où la partie en vitesse perpendiculaire est

une Maxwellienne et en l'introduisant dans le modèle GWB. Dans ce cas l'équation de dispersion s'écrit

$$\varepsilon(\omega, k_\theta, k_\parallel) = 1 + Z_i \rho_s^2 \Big[\kappa(r) + k_\theta^2\Big] - \sum_{k=1}^{N} \Delta\mu\lambda_k J_{ok}^2 \sum_{j=1}^{M} \frac{\alpha_j}{\omega^2 - k_\parallel^2 a_j^2} \Big[Z_i \omega_{cs}^2 + \omega\omega_j^*\Big] \tag{2.51}$$

avec $\omega_j^* = -k_\theta \frac{k_B T_e}{eB_o} \kappa_j$.

La seule différence entre les équations de dispersion Eq.(2.50) et Eq.(2.51) est le coefficient correctif lié à l'opérateur de gyromoyenne. Par conséquent, la comparaison entre le terme $\sum_k \Delta\mu\lambda_k J_{ok}^2$ de l'équation Eq.(2.51) avec le terme correspondant $\mathcal{I}_o$ dans l'équation Eq.(2.50) nous permet de mesurer la différence entre les deux modèles correspondants.

Sur la figure Fig.(2.6), les valeurs de ces coefficients sont tracées en fonction de $k_\theta r_{Li}$ pour différentes valeurs de N. L'accord est excellent lorsque $k_\theta r_{Li} < 1$, même pour N aussi petit que 10. En outre la précision augmente rapidement avec N. Lorsque $k_\theta r_{Li} > 1$, il est nécessaire de prendre un ensemble de moments magnétiques $\{\mu_k\}$ plus dense pour obtenir une précision comparable : la raison est que pour de grandes valeurs de k dans la somme $\sum_k \Delta\mu\lambda_k J_{ok}^2$, l'argument de J_{ok} est plus grand que 1, et est donc situé dans la région où la fonction de Bessel oscille : obtenir une meilleure précision implique donc de prendre un échantillonnage suffisamment dense pour que ces oscillations soient bien décrites.

Cette étude montre que la description usuelle des effets de gyromoyenne donne une bonne description *si* la distribution en vitesse perpendiculaire est une Maxwellienne. Nous allons maintenant montrer que ce n'est plus le cas lorsque la fonction de distribution n'est plus Maxwellienne : c'est alors que le modèle GWB montrera son intérêt puisqu'il nous permet d'étudier de manière précise n'importe quelle fonction de distribution.

2.3 Équilibre non-Maxwellien et instabilité ITG

Le point intéressant qu'il est important de souligner est que le modèle GWB permet l'étude de n'importe quelle fonction de distribution sans en augmenter la complexité numérique et analytique. En effet, nous savons que dans un plasma de fusion, la

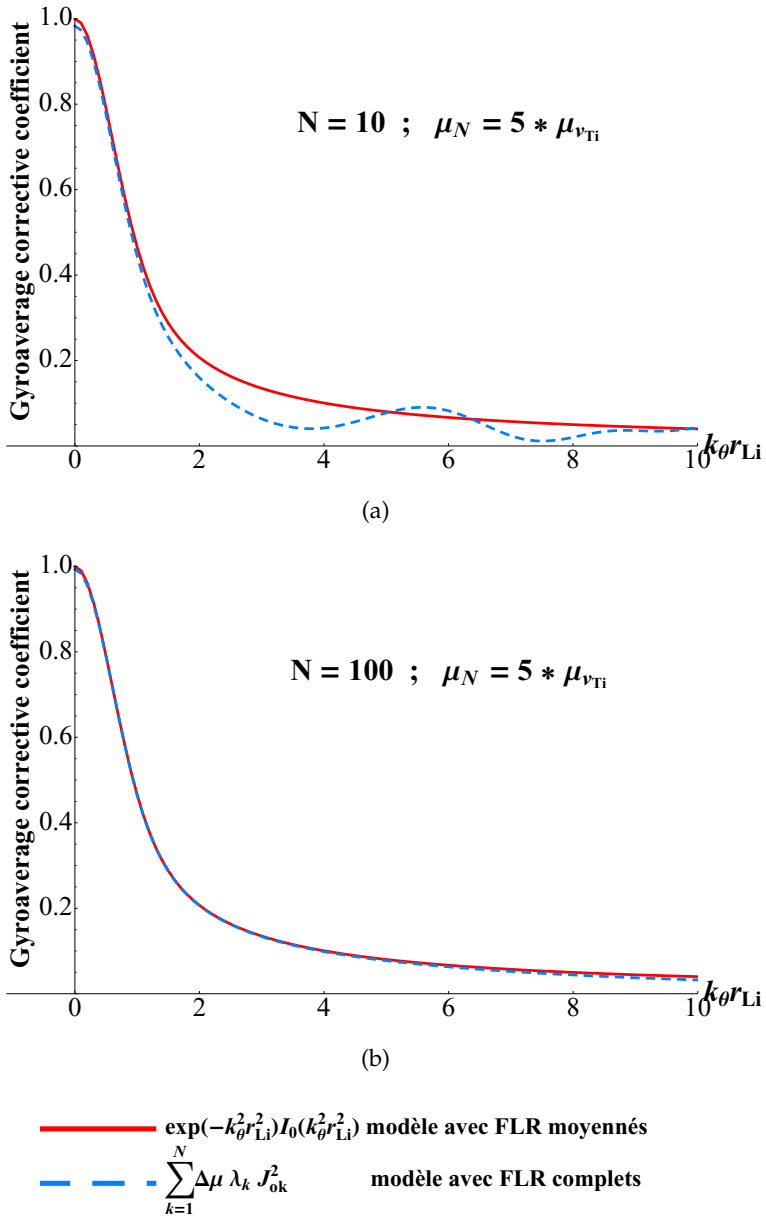


FIG. 2.6: Coefficient correctif dû à la gyromoyenne tracé en fonction de $k_\theta r_{Li}$. Le paramètre $\mu_{v_{Ti}} = m_i v_{Ti}^2 / 2B_o$ est le moment magnétique thermique.

fonction de distribution peut être très éloignée d'une Maxwellienne [37] : Le traitement classique des effets de gyromoyenne sera-t-il suffisant dans ce cas ?

Dans cette section, nous étudions le cas d'une distribution non-Maxwellienne, et montrons que la prise en compte de la forme *précise* de la distribution en moments magnétiques permet une amélioration significative comparée au traitement classique où on fait l'hypothèse que la distribution en vitesse perpendiculaire est Maxwellienne.

Comme exemple de fonction de distribution non-Maxwellienne, nous considérons une fonction de distribution bi-Maxwellienne

$$f_{GC}(r, v_{\|}, \mu) = \sum_{k=1}^{N} \Big[(1-\epsilon)M_1(r, v_{\|}, \mu) + \epsilon M_2(r, v_{\|}, \mu)\Big]\delta(\mu - \mu_k)\Delta\mu$$

où $0 \leq \epsilon \leq 1$,

$$M_1(r, v_{\|}, \mu) = \frac{n_{io}B_o}{m_i v_{T_{\perp 1}}^2 v_{T_{\|1}} \sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{\mu B_o}{k_B T_{\perp 1}}\Big] \exp\Big[-\frac{m_i v_{\|}^2}{2k_B T_{\|1}}\Big]$$

et

$$M_2(r, v_{\|}, \mu) = \frac{n_{io}B_o}{m_i v_{T_{\perp 2}}^2 v_{T_{\|2}} \sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{\mu B_o}{k_B T_{\perp 2}}\Big] \exp\Big[-\frac{m_i v_{\|}^2}{2k_B T_{\|2}}\Big]$$

La densité de centre-guide ioniques est définie par

$$n_{io} = \int f_{GC}(r, v_{\|}, \mu) dv_{\|} d\mu$$

Ce cas correspond, par exemple, à une population énergétique dans la direction parallèle au champ magnétique, immergée dans un plasma de coeur de tokamak. L'allure d'une telle distribution est représenté sur la figure Fig.(2.7)

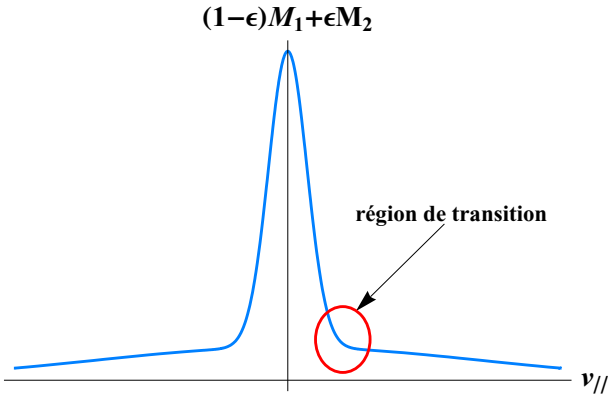


Fig. 2.7: Fonction de distribution bi-Maxwellienne. La région de transition où les particules à la température T_2 deviennent majoritaires est indiquée.

Les différentes températures étant *a priori* différentes, la fonction de distribution n'est pas séparable et nous devons utiliser Eq.(2.20) comme équation de dispersion.

Pour simplifier l'analyse, il est intéressant de considérer le cas $T_{\perp 1} = T_{\perp 2} = T_\perp$ qui permet d'utiliser la relation de dispersion Eq.(2.51).

Il a été montré dans [20] que déterminer le seuil d'instabilité dans le plan (κ_N, κ_T) est équivalent à résoudre le système

$$\varepsilon(\omega, k_\theta, k_\parallel) = 0 \tag{2.52}$$

$$\partial_\omega \varepsilon(\omega, k_\theta, k_\parallel) = 0 \tag{2.53}$$

Le seuil d'instabilité est tracé sur la figure Fig.(2.8) pour $\epsilon = 0.5$, en utilisant les paramètres physiques qui seront typiques dans un plasma du tokamak ITER : $T_e = T_{\parallel 1} = 10\ keV$, $T_{\parallel 2} = 10\ T_{\parallel 1}$, $n_{io} = 10^{20}\ m^{-3}$, $B_o = 5\ T$, $Z_i = 1$, $m_i = 3.4 \times 10^{-27}\ kg$ (plasma de Deutérium), $k_\parallel = 10^{-1}\ m^{-1}$, $k_\theta = 4 \times 10^2\ m^{-1}$, $m = 100$, $r_o = r = 2.5 \times 10^{-1}\ m$, $\Delta r = 10^{-1}\ m$.

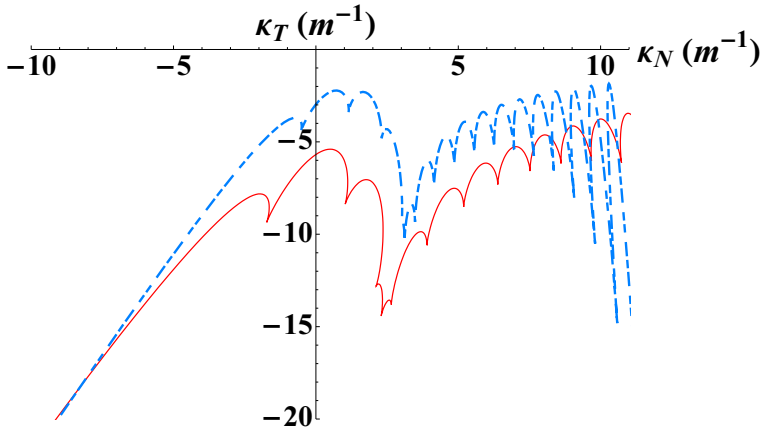


FIG. 2.8: Seuil d'instabilité tracé dans le plan (κ_N, κ_T) avec un nombre de bags $M = 25$, $a_M = 5 * v_{T_{\parallel 2}}$, un nombre de moments magnétiques $N = 150$, et $\mu_N = 25 * \mu_{v_{T_{\parallel 2}}}$. La courbe continue représente le seuil d'instabilité pour le traitement classique des effets de gyromoyenne (Eq.(2.51)) avec $T_\perp = \langle T \rangle$. La courbe pointillée représente le taux d'instabilité dans le cas du traitement complet des effets de gyromoyenne (Eq.(2.20)) en faisant l'hypothèse $T_{\perp 1} = T_{\parallel 1}$, et $T_{\perp 2} = T_{\parallel 2}$.

La courbe continue est obtenue en utilisant le traitement classique des effets de gyromoyenne : la distribution en moment magnétique est supposée Maxwellienne,

avec une température égale à la température moyenne $\langle T \rangle = (1-\epsilon)T_{\|1} + \epsilon T_{\|2}$. La courbe pointillée correspond au traitement GWB complet Eq.(2.20) avec une prise en compte de la forme précise de la distribution en moment magnétique : c'est la description la plus précise des effets FLR.

Par ailleurs, la taux d'instabilité pour la relation de dispersion avec le traitement classique (symbole "+"), et le traitement GWB complet (symbole "*") est tracé en fonction de κ_T sur la figure Fig.(2.9) pour $\kappa_N = -1\ m^{-1}$. L'impact du traitement GWB complet est ainsi mis en lumière : par exemple, pour $\kappa_T = -10\, m^{-1}$, le taux d'instabilité dans le cas de la distribution précise en moments magnétique est : $\gamma_{GWB} = 2.22 \times \gamma_{classique}$ où $\gamma_{classique}$ est le taux d'instabilité dans le cas du traitement classique. Cette augmentation du taux d'instabilité due à la prise en compte de la forme précise de la distribution en moments magnétiques est de 122%. Si l'hypothèse d'une distribution en moment magnétique Maxwellienne était pleinement satisfaite, les deux taux d'instabilité seraient identiques : dans ce cas le traitement GWB complet n'apporterait pas d'amélioration significative. Or la différence que nous observons entre les deux taux montre clairement qu'il est important de prendre en compte la forme précise de la distribution en moment magnétique.

Notons que pour le même ensemble de paramètres, mais pour $\epsilon = 0.1$, la fonction de distribution est proche d'une Maxwellienne. Dans ce cas, la différence entre le traitement classique et le traitement GWB complet est de 11% seulement. Ce résultat confirme qu'utiliser le traitement GWB complet est important uniquement lorsque la fonction de distribution est éloignée d'une Maxwellienne : lorsque la fonction de distribution est proche d'une Maxwellienne, le traitement classique est suffisant et numériquement plus intéressant.

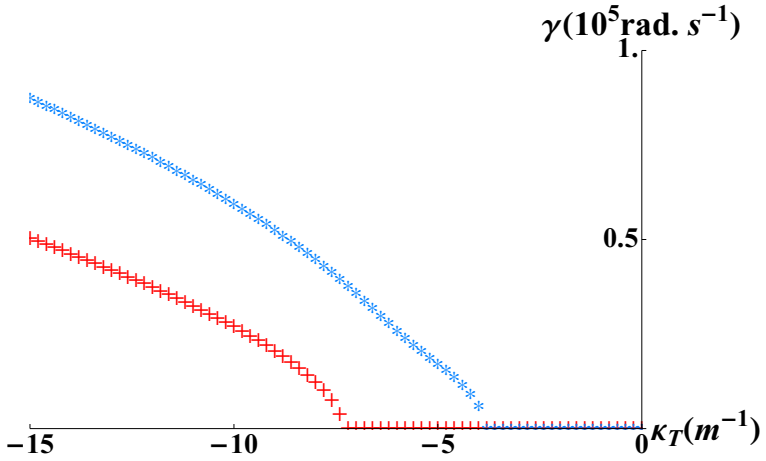
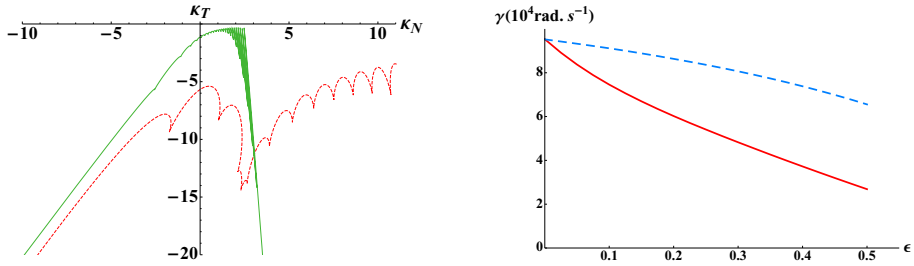


FIG. 2.9: Taux d'instabilité maximal tracé en fonction de κ_T pour $\kappa_N = -1\ m^{-1}$ et $\epsilon = 0.5$ avec $M = 25$, $a_{max} = 5 * v_{T_{\|2}}$, $N = 150$ et $\mu_N = 25 * \mu_{<v_T>}$ - où $\mu_{<v_T>}$ est le moment magnétique pour la vitesse thermique à la température $\langle T \rangle$. La courbe (+) correspond au traitement classique, et la courbe (∗) au traitement GWB complet.

Observons maintenant l'effet de l'introduction des particules rapides par rapport à la distribution d'origine. Sur la figure Fig.(2.10(a)) nous avons tracé le seuil dans le cas sans particules rapides - i.e. pour une Maxwellienne à la température T_1 (courbe pleine), et dans le cas avec particules rapides - i.e. pour une bi-Maxwellienne aux températures T_1 et T_2 et avec $\epsilon = 0.5$ (courbe pointillée). Nous voyons clairement que l'introduction des particules rapides a pour effet de décaler le seuil vers des valeurs plus élevées de κ_T : elles ont donc un effet stabilisant sur le plasma.

Sur la figure Fig.(2.10(b)), nous avons tracé le taux d'instabilité dans le cas du traitement complet des effets FLR (courbe pointillée) et dans le cas du traitement classique (courbe pleine) en fonction de ϵ avec des gradients d'équilibre tels que $\kappa_N = -1\ m^{-1}$, $\kappa_T = -10\ m^{-1}$. Nous voyons que l'introduction de particules rapides dans le plasma induit une diminution du taux d'instabilité. Nous voyons également que le traitement classique des effets FLR surestime cet effet stabilisant par rapport au traitement complet.



(a) (b)

FIG. 2.10: Avec un nombre de bags $M = 25$, $a_M = 5 * v_{T_{\|2}}$, un nombre de moments magnétiques $N = 150$, et $\mu_N = 25 * \mu_{v_{<T>}}$. **(a)** Seuil d'instabilité tracé dans le plan (κ_N, κ_T). La courbe continue représente le seuil pour une distribution Maxwellienne à la température T_1 et la courbe pointillée représente le seuil pour une distribution bi-Maxwellienne aux températures T_1 et T_2 avec $\epsilon = 0.5$. Les deux seuils sont tracés en utilisant le traitement complet des effets FLR. **(b)** Taux d'instabilité en fonction de ϵ pour une fonction de distribution bi-Maxwellienne avec $\kappa_N = -1\ m^{-1}$, $\kappa_T = -10\ m^{-1}$. La courbe pointillée correspond au traitement complet des effets FLR et la courbe pleine au traitement classique.

Dans ce chapitre, nous avons implémenté les effets FLR dans le modèle GWB : tout d'abord en introduisant la gyromoyenne et la dérive de polarisation, puis en développant une méthode de choix des paramètres MWB adaptée à n'importe quelle fonction de distribution paire. Nous avons ensuite montré que cet effort de modélisation apporte une amélioration significative par rapport au traitement classique en mettant en lumière pourquoi la forme précise de la distribution en moment magnétique doit être utilisée lorsque la fonction de distribution est éloignée d'une Maxwellienne.

Souvenons-nous que les coefficients de transport peuvent être estimés en utilisant l'approche de la longueur de mélange [3][38]. Cette approche conduit à des coefficients de transport proportionnels au taux d'instabilité maximal : prendre en compte la forme précise de la distribution en moment magnétique apparaît donc comme un pas important vers la détermination précise des coefficients de transport turbulent [39].

Dans le prochain chapitre, toujours en géométrie cylindrique, nous étudions le cas des électrons non-adiabatiques : nous montrons alors que le modèle GWB permet l'étude simultanée des ITG et des ondes de dérive. Nous comparons également le modèle GWB avec le modèle fluide.

3

Introduction des collisions électron-neutre dans le modèle gyro-water-bag : instabilités de gradient de température ionique (ITG) et ondes de dérive collisionnelles (CDW) dans une colonne de plasma magnétisé

Dans notre étude des instabilités responsables du transport anormal, nous allons montrer que la modélisation des ITG [3][6] et des ondes de dérive [40] [41] est possible dans le modèle gyro-water-bag (GWB).

Pour contribuer à une meilleure compréhension des instabilités basse-fréquence dans les plasmas magnétisés, de nombreuses analyses furent conduites dans des machines à plasma cylindrique. Citons comme exemples typiques : Mirabelle [42], Mistral [43], Kiwi [44], Vineta [45], Alexis [46] ou Columbia [47].

Les machines à plasma de petite taille peuvent, couplées aux simulations numériques, jouer un rôle important dans la compréhension des processus physiques mis en jeu dans les plasmas magnétisés. Dans cette optique, le modèle fluide a été largement

utilisé [36] [48] [49]. La résolution des équations fluides 3D est la voie la plus commode pour le calcul de la réponse d'un plasma aux champs électromagnétiques perturbés lorsqu'il n'y a pas d'interactions ondes-particules. En effet, les phénomènes observés expérimentalement peuvent être expliqués à l'aide du modèle fluide si la vitesse de phase des perturbations est très différente des vitesses thermiques ioniques et électroniques, et si les collisions permettent de justifier les relations de fermeture utilisées. Par exemple, le modèle décrit par E. Marden-Marshall et E. Ellis [36] [48] décrit comment varie la stabilité des ondes de dérive avec le mode orthoradial dans un plasma cylindrique faiblement ionisé.

Dans certaines machines ou dans les plasmas de fusion, les interactions ondes-particules peuvent cependant avoir une influence sur la dynamique du système. Pour ces types de plasmas, il est établi que le seuil d'instabilité donné par les équations fluides délimite une zone stable plus grande que le modèle cinétique [2] [50]. De plus la description fluide surestime les flux turbulents. Cette différence provient en partie des interactions résonantes - par exemple de type Landau - entre les champs électromagnétiques oscillants (les "ondes"), et les particules chargées. Ces résonances ne peuvent pas être prises en compte par les équations fluides.

Les travaux antérieurs [20] [21] de notre équipe, ainsi que les résultats du chapitre précédent [39] portent sur l'étude des ITG dans un plasma non-collisionnel. Utiliser une description GWB impose de faire l'hypothèse d'une population ionique non-collisionelle. D'un autre coté, la description des ondes de dérive collisionnelles nécessite la prise en compte des collisions électrons-neutres.

L'idée principale de ce chapitre est d'introduire des collisions électrons-neutres dans notre modèle GWB. Les ions sont toujours supposés non-collisionnels : leur description par l'équation de Vlasov et le modèle water-bag est toujours valide. Le modèle gyro-water-bag collisionel (CGWB pour Collisional-Gyro-Water-Bag) peut décrire les ITG *et* les CDW. Il peut également décrire les interactions ondes-particules. Notre but est d'étudier ces instabilités basse-fréquence dans une machine à plasma magnétisé de laboratoire en utilisant le modèle CGWB.

Nous présentons dans un premier temps le modèle CGWB. L'évolution essentielle par rapport au modèle GWB décrit dans le chapitre précédent est l'introduction des collisions électrons-neutres dans la réponse électronique. Nous développons ensuite

l'analyse linéaire de ce nouveau modèle, puis comparons les résultats théoriques obtenus avec le modèle fluide d'une part, et les résultats expérimentaux d'autre part. L'étude des effets cinétiques sur les CDW est ensuite faite, suivie de la description de la transition ITG - CDW qui survient lorsque les gradients d'équilibre varient.

3.1 Le modèle gyro-water-bag collisionnel (CGWB)

Comme précédemment, nous considérons un plasma cylindrique confiné par un champ magnétique axial $\mathbf{B} = B_o \mathbf{u}_z$. Le plasma peut être faiblement ou totalement ionisé. Nous considérons 3 espèces : le gaz neutre, une population d'électrons qui peuvent entrer en collisions et échanger de l'énergie et de l'impulsion avec le gaz neutre, et finalement la population ionique. Nous faisons l'hypothèse (justifiable *a posteriori*) que les collisions ions-neutres sont négligeables. Le couplage entre les populations ioniques et électroniques se fait par l'équation de quasi-neutralité.

3.1.1 La population électronique

Notre approche est de supposer que la vitesse de phase des instabilités est très petite devant la vitesse thermique des électrons : $v_\varphi \ll v_{Te}$. Nous supposons par conséquent que les effets cinétiques sont négligeables et que la distribution électronique est proche d'une Maxwellienne : nous pouvons donc utiliser le modèle fluide avec fermeture isotherme pour décrire cette population. Un terme de viscosité est introduit dans les équations fluides pour prendre en compte les collisions électron-neutre. Nous supposons en outre que les effets FLR sont négligeables.

Nous utilisons donc l'ensemble d'équations suivant :

- l'équation de continuité :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \tag{3.1}$$

- l'équation de conservation de l'impulsion :

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - m_e n_e \nu_{en} \mathbf{v}_e \tag{3.2}$$

où ν_{en} est la fréquence de collisions électron-neutre et $p_e = n_e k_B T_e$.

Si nous négligeons les collisions électron-neutre ainsi que l'inertie des électrons, nous obtenons une réponse adiabatique dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétique.

En effet, en faisant $m_e \to 0$, on a

$$en_e \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial n_e}{\partial z} k_B T_e \tag{3.3}$$

d'où en intégrant

$$e\phi = k_B T_e \log n_e \tag{3.4}$$

de plus, nous supposons que le champ électrique d'équilibre est nul : $\phi_o = 0$ et que la densité électronique d'équilibre s'écrit : n_{eo}.

On obtient finalement

$$n_e = n_{eo} e^{e\phi/k_B T_e} \tag{3.5}$$

Nous voulons cependant une description précise des CDW : les collisions électron-neutre doivent être considérées.

L'état d'équilibre que nous considérons est le suivant : un faisceau électronique dérive avec une vitesse $v_{\|o}$ le long des lignes de champs magnétique. Cette vitesse s'ajoute à la vitesse diamagnétique $v_{De} = -\frac{k_B T_e}{eB_o} \partial_r \ln n_{eo}$.

On montre que la réponse de la densité électronique à une perturbation de potentiel prend la forme[1] [36] [48] [49]

$$n_{e1} = n_{eo} \frac{e\phi}{k_B T_e} \left[\frac{\omega^*_{ne} + i\gamma_\|}{\omega - \omega_o + i\gamma_\|} \right] \tag{3.6}$$

avec

- $\omega^*_{ne} = k_\theta v_{De}$ la fréquence diamagnétique électronique
- $\gamma_\| = \frac{k_\|^2 k_B T_e}{m_e \nu_{en}}$
- $\omega_o = k_\| v_{\|o}$

[1] Les quantités perturbées sont supposées proportionnelles à $exp\Big[-i(\omega t - k_\theta r\theta - k_\| z)\Big]$

3.1.2 La population ionique et l'équation de quasi-neutralité

Comme dans le chapitre précédent, nous utilisons le modèle GWB pour la population ionique. En effet, la vitesse de phase des instabilités peut être proche de la vitesse thermique ionique : $v_\varphi \sim v_{Ti}$. Les interactions ondes particules peuvent alors jouer un rôle important dans la détermination des taux d'instabilité.

Rappelons l'équation gyrocinétique dans la géométrie considérée

$$\frac{\partial f_{GC}}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial f_{GC}}{\partial z} - \frac{1}{rB_o}\frac{\partial \mathcal{J}_\mu \phi}{\partial \theta}\frac{\partial f_{GC}}{\partial r} + \frac{1}{rB_o}\frac{\partial \mathcal{J}_\mu \phi}{\partial r}\frac{\partial f_{GC}}{\partial \theta} - \frac{q_i}{m_i}\frac{\partial \mathcal{J}_\mu \phi}{\partial z}\frac{\partial f_{GC}}{\partial v_\parallel} = 0 \tag{3.7}$$

et l'équation de quasi-neutralité

$$n_e = Z_i\Big[\int d\mu dv_\parallel \mathcal{J}_\mu f_{GC} + \nabla_\perp \cdot \Big(\frac{n_{io}}{\Omega_{ci}B_o}\nabla_\perp \phi\Big)\Big] \tag{3.8}$$

Nous introduisons la distribution MWB de la forme

$$f_{MWB}(\mathbf{r}, v_\parallel, \mu, t) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} A_{jk}\Big[H\Big(v_\parallel - v_{jk}^-(\mathbf{r},t)\Big) - H\Big(v_\parallel - v_{jk}^+(\mathbf{r},t)\Big)\Big]\delta(\mu - \mu_k)\Delta\mu \tag{3.9}$$

où $j = 1, ..., M$, et $k = 1, ..., N$.

Et obtenons l'équation des contours

$$\frac{\partial v_{jk}^\pm}{\partial t} - \frac{\nabla_\perp \mathcal{J}_{\mu_k}\phi \times \mathbf{u}_z}{B_o} \cdot \nabla_\perp v_{jk}^\pm + v_{jk}^\pm \frac{\partial v_{jk}^\pm}{\partial z} = -\frac{q_i}{m_i}\frac{\partial \mathcal{J}_{\mu_k}\phi}{\partial z} \tag{3.10}$$

3.1.3 Analyse linéaire

Une illustration directe de la possibilité du modèle CGWB à décrire les caractéristiques physiques des CDW et des ITG est donné par l'analyse linéaire des équations Eq.(3.6), Eq.(3.7) et Eq.(3.8). Nous séparons les quantités physiques en une partie d'équilibre et une partie oscillante :

- $v_{jk}^\pm = \pm a_{jk} + \delta v_{jk}^\pm$
- $\phi = 0 + \delta\phi$

où les a_{jk} sont déterminés à l'aide de la méthode décrite au chapitre 2. Nous supposons que la fonction de distribution est Maxwellienne - donc factorisable en une partie vitesse parallèle et une partie moment magnétique - ce qui permettra la séparation des indices j et k de la même manière que dans l'équation de dispersion Eq.(2.51).

Les perturbations sont projetées sur une base de Fourier dans les directions θ et z.

- $\delta v_{jk}^{\pm}(r,\theta,z,t) = \delta v_{jk}^{m\omega\pm}(r)\exp\Big[-i(\omega t - m\theta - k_{\|}z)\Big]$
- $\delta\phi(r,\theta,z,t) = \delta\phi^{m\omega}(r)\exp\Big[-i(\omega t - m\theta - k_{\|}z)\Big]$

où, du fait de la 2π-périodicité dans la direction orthoradiale, $m = rk_\theta$ est un entier.

Nous introduisons ces quantités dans les équations du modèle et obtenons

$$\varepsilon(\omega,k_\theta,k_{\|}) = \frac{\omega_{ne}^{*}+i\gamma_{\|}}{\omega-\omega_o+i\gamma_{\|}} + \delta - \sum_{k=1}^{N}\Delta\mu\lambda_k J_{ok}^2\sum_{j=1}^{M}\frac{\alpha_j}{\omega^2-k_{\|}^2a_j^2}\Big[Z_i\omega_{cs}^2+\omega\omega_j^{*}\Big] \tag{3.11}$$

où

$$\delta = Z_i\rho_s^2\Big[\kappa(r)+k_\theta^2\Big] \tag{3.12}$$

Comme précédemment (chapitre 2), on a : $\rho_s = c_s/\Omega_{ci}$, $c_s^2 = k_BT_e/m_i$, $\omega_{cs} = k_{\|}c_s$, $\alpha_j = \frac{2A_ja_j}{n_{io}}$, $\omega_j^{*} = -k_\theta\frac{k_BT_e}{eB_o}\kappa_j$, $J_{ok} = J_o(k_\theta\sqrt{\frac{2\mu_k}{Z_ie\Omega_{ci}}})$, et

$$\kappa(r) = -\Big[\partial_r^2 g + (\partial_r g)^2 + (\frac{1}{r}+\kappa_N)\partial_r g\Big] \tag{3.13}$$

où $g(r)$ dépend du profil radial des perturbations de potentiel

$$\delta\phi^{m\omega}(r) = \delta\phi_o^{m\omega}\exp\Big(g(r)\Big) \tag{3.14}$$

La fonction de distribution d'équilibre étant Maxwellienne, le terme $\sum_{k=1}^{N}\Delta\mu\lambda_kJ_{ok}^2$ converge[1] vers $\mathcal{I}_o = e^{-k_\theta^2r_{Li}^2}I_o(k_\theta^2r_{Li}^2)$ lorsque $N\to+\infty$, il nous est donc possible, dans ce chapitre, de mettre de côté la discrétisation en moment magnétique et d'utiliser ce terme $\mathcal{I}_o$ dans les équations de dispersion.

Dans le cas d'un seul bag (i.e. $M=1$), un modèle fluide avec fermeture adiabatique est obtenu [20]. La relation de dispersion Eq.(3.11) devient :

$$\begin{aligned} i\frac{\delta}{\gamma_{\|}}\omega^3 - \Big[1+\delta+i\frac{\omega_o\delta+\omega_{ne}^{*}(\mathcal{I}_o-1)}{\gamma_{\|}}\Big]\omega^2 \\ + \Big[\mathcal{I}_o\omega_{ne}^{*}+i\frac{\mathcal{I}_o(\omega_o\omega_{ne}^{*}-Z_i\omega_{cs}^2)-\omega_{\|}^2\delta}{\gamma_{\|}}\Big]\omega + \omega_{\|}^2(1+\delta)+\mathcal{I}_oZ_i\omega_{cs}^2 \\ + i\Big[\frac{\mathcal{I}_oZ_i\omega_{cs}^2\omega_o+(\omega_o\delta-\omega_{ne}^{*})\omega_{\|}^2}{\gamma_{\|}}\Big] = 0 = \varepsilon(\omega) \end{aligned} \tag{3.15}$$

[1] Nous montrons cette convergence dans la section 2.2.2

où $\omega_{\parallel} = \sqrt{3}k_{\parallel}v_{Ti}$.

Les termes de gyromoyenne et de dérive de polarisation (corrections dues aux effets FLR) introduits dans les équations peuvent jouer un rôle plus ou moins important dans la description des instabilités. En effet, si $k_\theta r_{Li}$ est petit devant 1, l'opérateur de gyromoyenne peut être exprimé dans l'espace de Fourier [34] :

$$\mathcal{J}_o \sim 1 - \varepsilon^2_{gyrmoy} \tag{3.16}$$

où $\varepsilon_{gyrmoy} = k_\theta r_{Li}$. Par ailleurs, le terme de polarisation est de l'ordre de ε^2_{pol} avec (en supposant que $\kappa(r)$ est du même ordre que k^2_θ) [1] :

$$\varepsilon_{pol} = \sqrt{Z_i}\rho_s k_\theta \tag{3.17}$$

Les corrections de gyromoyenne et de polarisation sont respectivement d'ordre ε^2_{gyrmoy} et ε^2_{pol}. Le rapport ($\varepsilon^2 = \varepsilon^2_{gyrmoy}/\varepsilon^2_{pol}$) est égal à[2]

$$\varepsilon^2 = \frac{\tau}{Z_i} \tag{3.18}$$

Dans les plasmas de tokamak, τ est approximativement égal à 1. Dans ce cas, les corrections de gyromoyenne et de dérive de polarisation sont du même ordre en raison de l'ordering gyrocinétique rencontré dans les tokamaks.

Dans les machines à plasma de laboratoire, le facteur τ peut, par exemple, être aussi petit que 1/50. La correction due à la dérive de polarisation est par conséquent 50 fois plus grande que celle due à la gyromoyenne.

3.2 Comparaison avec un modèle fluide et des résultats expérimentaux

Le modèle CGWB peut décrire les CDW et les ITG. Dans cette section nous validons le modèle en le comparant à un modèle fluide et des résultats expérimentaux.

[1] Cette supposition est raisonnable puisque les variations de $g(r)$ se font sur des longueurs qui sont de l'ordre du diamètre du plasma. De même, pour les modes peu élevés que nous étudions dans la suite, la longueur $1/k_\theta$ est du même ordre de grandeur.

[2] Nous notons $\tau = T_i/T_e$.

3.2.1 Ondes de dérive collisionelles

Nous regardons dans un premier temps le cas des CDW. Cette classe d'instabilités comprend des ondes qui peuvent devenir instables sous l'effet d'un gradient de densité, de collisions électron-neutre et d'une dérive axiale des électrons à l'équilibre.

Notre modèle CGWB est utilisable uniquement si les collisions ion-neutre peuvent être négligées puisqu'il requiert la conservation du volume dans l'espace des phases ($df/dt = 0$) pour les ions, comme nous l'avons vu au chapitre 1. D'un autre coté, les collisions électron-neutre sont nécessaires pour que des CDW puissent se développer. Nous devons par conséquent examiner de près le problème des collisions ion-neutre. Pour cela, nous allons étudier le taux d'instabilité linéaire γ donné dans [36] dans le cas d'un modèle fluide slab :

$$\gamma = \gamma_+ - \gamma_- \tag{3.19}$$

avec

- $\gamma_+ = \frac{b}{1+b}\left(\frac{\omega^{*2}}{\gamma_{\|}(1+b)^2} + \frac{\omega_o\omega^*_{ne}}{b\gamma_{\|}}\right)$
- $\gamma_- = \frac{b}{1+b}\nu_{in}$

où ν_{in} est la fréquence de collisions ion-neutre, et $b = k_\theta^2\rho_s^2$.

Il est clair que les collisions électron-neutre sont déstabilisantes tandis que les collisions ion-neutre sont stabilisantes. Par conséquent, négliger les collisions ion-neutre revient à négliger leur effet stabilisant.

Nous réalisons maintenant une comparaison entre les résultats du modèle CGWB et le modèle fluide non-local donné en référence [36]. Un plasma d'argon est considéré. Nous utilisons le cas 1 bag dans le modèle CGWB : l'ensemble d'équations résultant est donc équivalent au modèle fluide avec fermeture adiabatique. La fonction $g(r)$ s'écrit

$$g(r) = -\frac{(r - r_o)^2}{\Delta r^2} \tag{3.20}$$

où r_o et Δr sont choisis pour coller le mieux possible à la fonction $\delta\phi^{m\omega}$ obtenue dans [36], pour des modes orthoradiaux allant de $m = 1$ à $m = 4$. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la référence [36] : $T_e = 2\,eV$, $B = 0.2\,T$, $\nu_{en} = 2.6\times10^6\ s^{-1}$, $v_{\|_o} = 0.2\times v_{Te}$, $\lambda_z = 3\ m$. Le profil radial de densité est supposé Gaussien $n_{io} = n_{io}^{max}\exp(-r^2/r_N^2)$, avec $r_N = 1.66\ cm$. Les résultats qui suivent sont donnés pour $r = r_o$ où la perturbation

est supposée être maximale. Notons que la connaissance de r_o et Δr est nécessaire à la détermination de $\kappa(r)$ même si $g(r_o) = 0$. De plus, $\kappa_N(r = r_o) = -(2r/r_N^2)_{r=r_o}$, où $\kappa_N = \partial_r \ln n_{io}$. Les paramètres r_o, Δr et κ_N sont résumés dans le tableau 3.1.

La différence principale entre le modèle CGWB et le modèle fluide réside dans les collisions ion-neutre qui sont négligées dans le CGWB. Le champ magnétique fort nous permet cependant de négliger ces collisions ion-neutre : le rapport γ_+/γ_- est supérieur à 40 pour $m = 1$ et supérieur à 10 pour $m = 5$. Par ailleurs, $\omega/\Omega_{ci} < 0.1$, ce qui permet de justifier l'utilisation du modèle gyrocinétique pour décrire les ions.

mode m	1	2	3	4
r_o ($\times 10^{-2}$ m)	1.21	1.54	1.65	1.66
κ_N (m^{-1})	-87	-112	-120	-120
Δr ($\times 10^{-2}$ m)	0.8	0.6	0.5	0.45
γ ($\times 10^4$ s^{-1})	1.04	1.3	1.27	1.21

Tab. 3.1: Taux d'instabilité γ des CDW pour différents paramètres plasma. Le mode $m = 2$ est dominant.

Les résultats du modèle CGWB sont donnés dans le tableau 3.1, et la figure Fig.(3.1). Le taux d'instabilité linéaire est tracé en fonction du mode orthoradial m. Un taux maximal est égal à $\gamma = 1.3 \times 10^4\ s^{-1}$ pour le mode $m = 2$. Ces résultats sont obtenus à l'aide du modèle CGWB sont en complet accord avec les valeurs prédites par le modèle fluide non-local cylindrique [36].

L'étape suivante est de valider le modèle CGWB en comparant l'analyse linéaire des CDW avec les résultats expérimentaux obtenus sur la colonne à plasma magnétisé Mirabelle [42] [52] [51] [53] [54]. Les paramètres plasma utilisés sont donnés dans la référence [53].

Dans une machine cylindrique comme Mirabelle, les CDW sont déstabilisées par les collisions électron-neutre, une dérive d'équilibre des électrons le long des lignes de champs magnétique, et par le gradient de densité d'équilibre. La température ionique est estimée à $0.03\,eV$ (elle est de plus homogène : il n'y a pas de gradient de température ionique). Un ensemble de mesures nous permettent de connaître densité, température électronique, profils de potentiel et nombre d'onde parallèle.

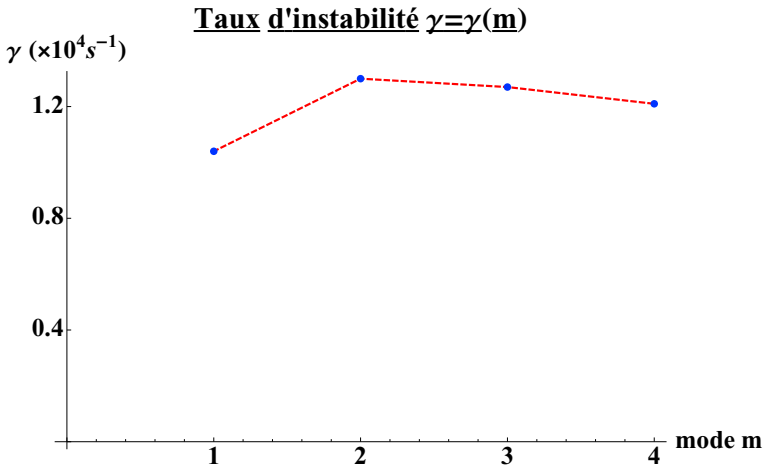


Fig. 3.1: Taux d'instabilité tracé en fonction du mode orthoradial pour les CDW avec les paramètres tirés de [36]

Le diamètre du plasma peut être réduit en introduisant un limiteur à l'entrée de la colonne. Dans ce cas, les instabilités observées sont des CDW tant que le champ magnétique est assez fort pour que la présence du limiteur ne joue pas de rôle dans le confinement du plasma. Dans ces conditions, avec un profil de potentiel plat, les instabilités observées sont identifiées comme étant des CDW [53].

Les données de Mirabelle données dans les références [53] [54] sont utilisées. Nous avons $\omega/\Omega_{ci} \sim 0.1$ pour $B_o = 0.1\ T$. La fonction $g(r)$ est la même que précédemment. Les paramètres $r_o = 4\ cm$, $r = r_o$, et $\Delta r = 2.5\ cm$ sont choisis de manière à coller au profil de perturbation radial expérimental. Les autres paramètres sont : $T_e = 2\ eV$, $\nu_{en} = 1.3 \times 10^6\ s^{-1}$ (dans Mirabelle, la pression est deux fois moindre que celle donnée dans [36], par conséquent nous admettons que la fréquence de collisions electron-neutre est deux fois moindre également), $k_\parallel = 2\ m^{-1}$, $\kappa_N = -30\ m^{-1}$, où $\kappa_N = \partial_r \ln n_{io}$. Pour un plasma d'argon, nous avons $m_i = 6.6 \times 10^{-26}\ kg$. Pour $B_o = 0.1\ T$, l'hypothèse $\gamma_+/\gamma_- \gg 1$ est satisfaite pour $m < 5$ (nous avons $\gamma_+/\gamma_- > 5$ pour $v_{\parallel o} = 0.2 \times v_{Te}$, et $\gamma_+/\gamma_- > 40$ pour $v_{\parallel o} = 2 \times v_{Te}$, avec $\nu_{in} = 0.5 \times 10^6\ s^{-1}$). Durant les expériences reportées ici, un mode cohérent $m = 2$ ou $m = 1$ est observé [53], tandis que pour des intensités du champ magnétique moindres (par exemple pour $B = 0.04\ T$), des modes plus élevés (jusqu'à $m = 7$) peuvent être obtenus [52]. Nous présentons cependant ici seulement les résultats pour un champ magnétique $B_o = 0.1\ T$ pour lequel seuls les modes peu

élevés sont présents, ceci afin d'être toujours dans les conditions dans lesquelles les hypothèses de base du modèle CGWB sont satisfaites.

Dans la machine Mirabelle, la polarisation d'un tube métallique interne isolé est un des paramètres de contrôle dynamiques de l'installation expérimentale[52]. Le mode orthoradial décroît lorsque cette polarisation augmente de même que la fréquence du mode observé. Le mode change ensuite soudainement pour un mode plus bas ayant une fréquence plus basse.

Notre objectif est de retrouver ce comportement à l'aide du modèle CGWB, sachant que l'augmentation de la polarisation conduit à une augmentation de la dérive électronique axiale ($v_{\|o}$). D'autre part, l'expérience montre que les profils d'équilibre de densité ne sont pas altérés par l'augmentation de la polarisation : nous considérons donc, dans nos simulations, uniquement une augmentation de la dérive électronique.

Si nous ne tenons pas compte des effets FLR (i.e. de la dérive de polarisation et de la gyromoyenne), le modèle CGWB prédit une augmentation du taux d'instabilité avec m, pour m allant de 1 à 5 (pour ces modes, nous constatons que l'effet stabilisant de γ_- dans [36] et la viscosité des ions peuvent être négligés : les hypothèses du modèle CGWB sur les collisions ioniques sont donc satisfaites). Ce résultat est en désaccord avec les observations expérimentales. Lorsque nous tenons compte de la gyromoyenne, le modèle CGWB prédit encore une augmentation du taux pour les modes $m = 1$ à 5. Il est nécessaire de prendre en compte la dérive de polarisation pour prédire un maximum dans le taux d'instabilité et être ainsi en bon accord avec le modèle fluide et les résultats expérimentaux. Dans une machine telle que Mirabelle, l'effet dû à la dérive de polarisation est beaucoup plus grand que l'effet de gyromoyenne. En effet, le paramètre τ est proche de 0.01, par conséquent, d'après Eq.(3.18), le terme de polarisation est approximativement de 50 à 100 fois plus élevé que le terme de gyromoyenne.

Les résultats obtenus dans le cas 1 bag avec l'équation Eq.(3.15) sont présentés sur les figures Fig.(3.2) et Fig.(3.3). Nous pouvons voir sur la figure Fig.(3.2) que la transition entre le mode $m = 2$ et $m = 1$ est bien décrite pour $v_{\|O}$ allant de $2 \times v_{Te}$ à $10 \times v_{Te}$. De plus, les fréquences dans l'intervalle $5 - 10\ kHz$ données par le modèle CGWB sont en très bon accord avec les fréquences observées dans la machine. Le taux d'instabilité linéaire est tracé sur la figure Fig.(3.3) qui montre la dépendance en m de $\gamma = Im(\omega)$ pour 2 valeurs de la dérive axiale électronique d'équilibre. Une transition

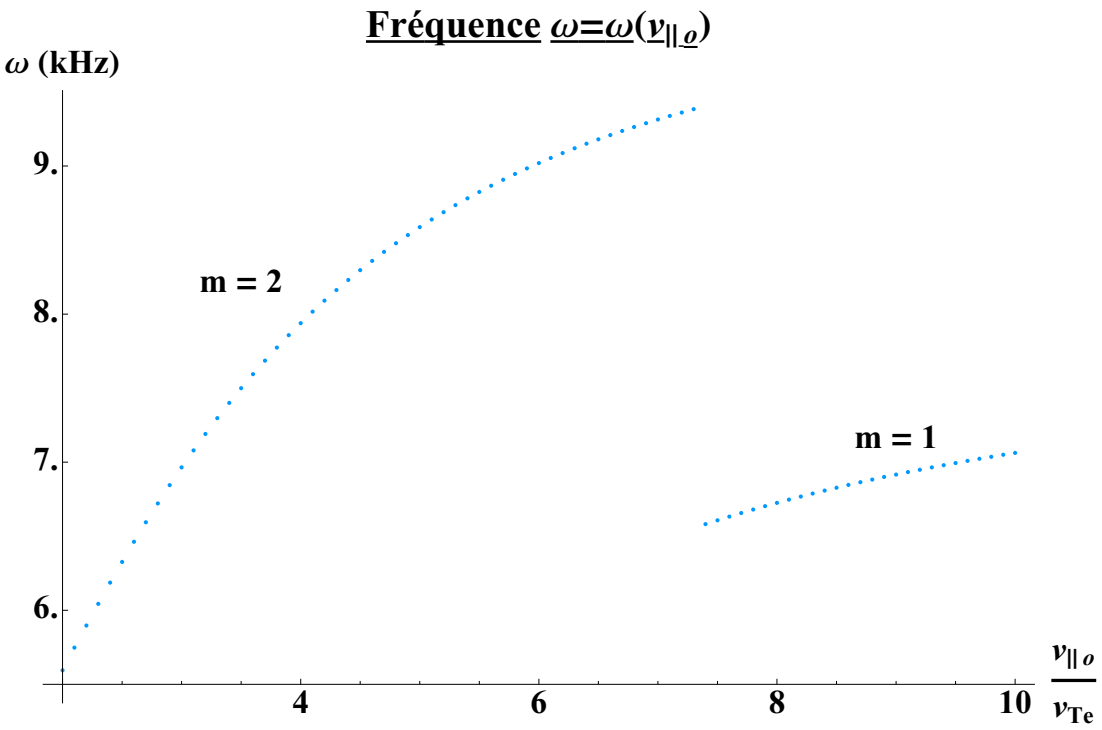


Fig. 3.2: Fréquence du mode le plus instable tracé en fonction de la vitesse de dérive axiale $v_{\|_o}$, avec effets FLR, et avec un seul bag ($M = 1$)

entre un mode $m = 2$ pour $v_{\|o} = 4 \times v_{Te}$ et un mode $m = 1$ pour $v_{\|o} = 4 \times v_{Te}$ est observée. Ce comportement est en excellent accord avec les résultats expérimentaux, i.e. le mode m diminue lorsque la dérive électronique d'équilibre augmente.

Pour de tels paramètres, il est intéressant de noter la similitude entre le cas 1 bag et le cas à plusieurs bags. En effet, la vitesse de phase est très grande devant la vitesse thermique ionique. Les interactions ondes-particules ont une très petite influence sur la dynamique des CDW dans le cas que nous venons de présenter. Notons que dans le modèle CGWB, dans le cas 1 bag, le profil de température est lié au profil de densité [20]. Ce lien n'existe plus lorsque $M > 1$. Ainsi dans le cas 1 bag, un profil de température n'existant pas dans Mirabelle est imposé par le modèle CGWB. Cependant, ce profil de température n'influence pas les résultats (i.e. il n'induit pas la présence d'un mode ITG) qui seront les mêmes avec 2 bags ou plus, pour lesquels le profil de température dans le modèle CGWB est effectivement plat.

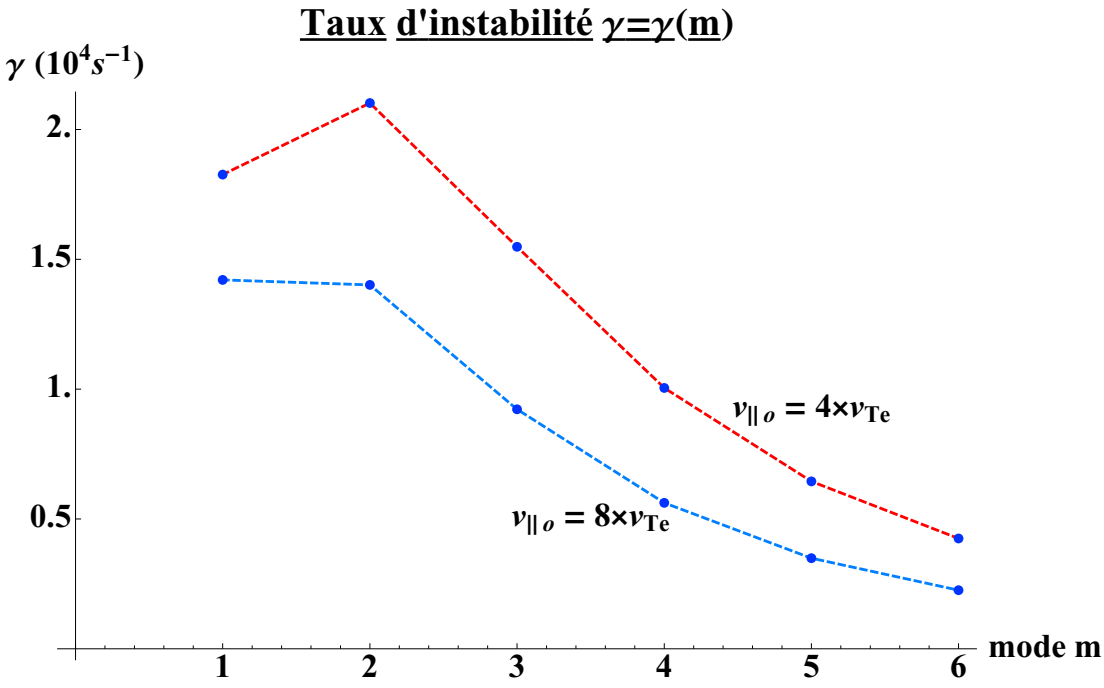


Fig. 3.3: Taux d'instabilité tracé en fonction du mode orthoradial. La courbe supérieure correspond au cas $v_{\|o} = 4 \times v_{Te}$ (un mode $m = 2$ est prédit comme étant le plus instable), et l'autre courbe correspond à $v_{\|o} = 8 \times v_{Te}$ (un mode $m = 1$ est prédit comme étant le plus instable).

3.2.2 Instabilité ITG

Cette section est consacrée à la possibilité de décrire les ITG à l'aide du modèle CGWB. Un gradient de température suffisant est nécessaire pour que ces instabilités se développent.

Le paramètre $\eta = \kappa_N/\kappa_T = \partial_r \log T_i / \partial_r \log n_{io}$ [55][56] doit être supérieur à une valeur critique pour qu'un mode ITG soit observé. Ce paramètre peut s'accroître de deux manières : en aplatissant le profil de densité ou bien en piquant le profil de température ionique.

Nous nous concentrons maintenant sur la machine Columbia (CLM pour Columbia Linear Machine) [57]. CLM est une machine linéaire dans laquelle un chauffage radio-fréquence (RF) est employé pour chauffer le coeur de la colonne de plasma et ainsi produire un profil de température piqué. De plus, la grille utilisée pour le chauffage

des ions réduit la densité dans le coeur ainsi le gradient de densité. Par conséquent ce type de chauffage permet l'obtention de valeurs élevées de η.

Notre but est de comparer les résultats expérimentaux obtenus dans la machine CLM [58] avec les résultats que nous obtenons à l'aide du modèle CGWB. Un plasma d'hydrogène est produit dans CLM. Le champ magnétique est $B_o = 0.1\ T$. Pour un tel champ magnétique, avec de l'hydrogène, l'hypothèse de non-collisionalité des ions est satisfaite et $\omega/\Omega_{ci} < 0.01$. Une dérive axiale des ions à l'équilibre existe. Cette dérive est cependant petite par rapport à la vitesse thermique [58]. Par conséquent nous pouvons utiliser une fonction de distribution water-bag symétrique en vitesse parallèle (i.e. nous admettons que la vitesse axiale d'équilibre des ions est négligeable devant la vitesse thermique ionique).

Les paramètres plasma typiques dans la région expérimentale de la machine sont [58] : $\tau = 3$, $T_i = 14\ eV$, $B = 0.1\ T$, $r = 1.75cm$ (où le gradient de température ionique est maximal). L'équation Eq.(3.11) est résolue pour $M = 20$ bags. Seuls les ions H_2^+ sont considérés donc $Z_i = 1$ et $m_i = 3.32 \times 10^{-27}\ kg$. Les paramètres r_o et Δr de la fonction $g(r)$ (Eq.(3.20)) sont choisis de manière à coller au profil expérimental d'amplitude des perturbations. Les données disponibles dans la référence [58] sont utilisées : $r = r_o$ et $0.5\ cm \leqslant \Delta r \leqslant\ 1cm$. De même : $-131\ m^{-1} \leqslant \kappa_T \leqslant -91\ m^{-1}$, $-33\ m^{-1} \leqslant \kappa_n \leqslant -3\ m^{-1}$, $2\pi/6\ m^{-1} \leqslant k_\parallel \leqslant 2\pi/3\ m^{-1}$, où $\kappa_T = \partial_r \ln T_i$ et $\kappa_N = \partial_r \ln n_{io}$.

Pour ces paramètres, les termes déstabilisants sont les gradients de température et de densité. Les taux de collisions peuvent être négligés.

Le modèle CGWB montre que le mode $m = 2$ est toujours dominant pour les paramètres que nous avons utilisés. En outre, l'instabilité prédite par le modèle CGWB se propage dans la même direction que la dérive diamagnétique ionique, avec une fréquence comprise entre 2 kHz et 11 kHz, ce qui est en accord avec les propriétés des instabilités ITG.

Le mode ITG est confirmé expérimentalement dans la machine CLM : un mode $m = 2$ est observé avec une longueur d'onde parallèle finie, et une propagation orthoradiale dans le sens de la dérive diamagnétique ionique avec une fréquence comprise entre 6 kHz et 10 kHz ce qui est en bon accord avec les prédictions du modèle CGWB.

Notons également que pour les paramètres expérimentaux de CLM, il est clair d'après Eq.(3.18) que les effets de dérive de polarisation et de gyromoyenne sont sensiblement équivalents puisque nous avons $\tau \simeq 3$.

3.3 Influence de la température ionique sur les ondes de dérive

Nous avons comparé le modèle CGWB avec des résultats expérimentaux et un modèle fluide. Notre but dans cette section est d'étudier le rôle des effets cinétiques sur les CDW.

Lorsqu'on considère plusieurs bags, le modèle a la possibilité d'explorer les aspects cinétiques des CDW.

Dans la machine Mirabelle, les ions étant froids, la vitesse thermique ionique est très petite devant la vitesse de phase des instabilités. Cela conduit à de très faibles interactions onde-particule. Par conséquent, si nous voulons que des effets cinétiques influent sur les CDW, nous devons augmenter la température ionique de manière à ce que la vitesse de phase et la vitesse thermique ionique soient du même ordre de grandeur.

Augmentons donc la température ionique (en gardant un gradient de température plat), et étudions l'influence des effets cinétiques sur les CDW.

Nous nous plaçons dans le cadre d'un plasma du même type que ceux rencontrées dans Mirabelle, à cette seule différence que nous y aurions implémenté un appareil de chauffage des ions, de manière à augmenter la température ionique et diminuer κ_N. Nous supposons que $\kappa_T = 0$ ce qui nous permet d'éviter l'apparition d'un mode ITG. Nous considérons les paramètres plasmas suivants : $r_o = 4\ cm$, $r = r_o$ et $\Delta r = 2.5\ cm$, $T_e = 2\ eV$, $\nu_{en} = 1.3 \times 10^6\ s^{-1}$, $k_\parallel = 2\ m^{-1}$, $\kappa_N = -10\ m^{-1}$, $B_o = 0.1\ T$. Le plasma est constitué d'argon. Nous choisissons $T_i = 2\ eV$, et $v_{\parallel o} = v_{Te}$. Pour cet ensemble de paramètres, le mode le plus instable est un mode $m = 2$.

Rappelons nous en outre que nous avons négligé γ_- devant γ_+ pour que les hypothèses de l'équation de Vlasov soient satisfaites (pas de collisions ioniques). Or, admettant que le taux de collisions ν_{in} est proportionnel à $\sqrt{T_i}$ (puisqu'il est proportionnel à v_{Ti}), nous obtenons $\gamma_-/\gamma_+ = 0.16$ pour le mode $m = 2$. Nous faisons l'hypothèse que ce rapport est suffisamment petit pour que les collisions ion-neutre puissent être négligées. Notons que ce rapport devient plus petit lorsque l'on est dans un plasma d'hydrogène plutôt que dans un plasma d'argon, ou bien lorsque $v_{\parallel o}$ augmente.

Les résultats sont présentés sur la figure Fig.(3.4). Le taux d'instabilité est tracé en fonction du mode m pour $T_i = 2\ eV$ ce qui correspond à une vitesse thermique ionique

$v_{Ti} = 2.25 \times 10^3\ m.s^{-1}$, tandis que la vitesse de phase des CDW est $v_\varphi = 5.1 \times 10^3\ m.s^{-1}$, ce qui signifie que l'on a : $v_{Ti}/v_\varphi = 0.43$. Nous pouvons donc nous attendre à une influence notable des effets d'interaction onde-particule. Deux courbes sont présentées. La première, qui correspond au cas 1 bag, est équivalente à celle que donnerait le modèle fluide, et par conséquent, les effets cinétiques ne sont pas pris en compte dans les valeurs des taux présentés sur cette courbe. La seconde courbe correspond à un nombre de bags suffisamment élevé[1] ($M = 20$, et $a_M = 5 \times v_{Ti}$) pour que les résultats qu'elle présente soient équivalents à ceux du modèle cinétique continu.

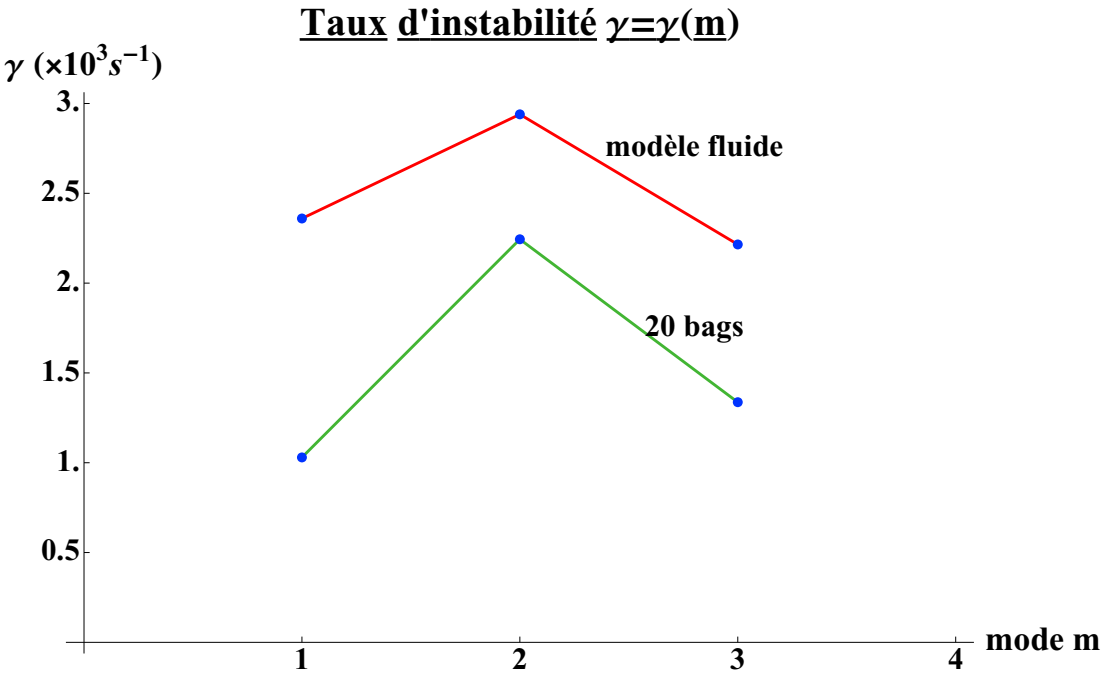


FIG. 3.4: Taux d'instabilité tracé en fonction du mode m dans le cas 1 bag (équivalent à un modèle fluide), et dans le cas 20 bags (équivalent à un modèle cinétique), avec $v_{\|o} = v_{Te}$ et $T_i = 2\ eV$.

Observons que le taux d'instabilité décroît fortement lorsque le nombre de bags augmente. Ce résultat confirme que les effets cinétiques jouent un rôle stabilisant non-négligeable lorsque la vitesse thermique et la vitesse de phase sont proches. Ces observations sont en bon accord avec le résultat suivant : le modèle fluide surestime les

[1] Ceci signifie que la convergence est suffisante : si on passe de $M = 20$ à $M = 40$ ou plus, on n'observera pas une différence notable entre les deux taux d'instabilité que nous calculerons.

coefficients de transport comparé à ceux fournis par les modèles cinétiques. En effet, l'utilisation de l'approche de la longueur de mélange (*mixing length approach*) conduit à des coefficients de transport proportionnels à γ_{max} (qui est le taux d'instabilité maximal parmi ceux que l'on obtient en résolvant l'équation de dispersion) [3][38]. Dans le cas étudié ici, le mode $m = 2$ reste le plus instable lorsque M augmente, mais la prise en compte des effets cinétiques peut conduire à l'observation d'autres modes par rapport au modèle fluide si on utilise d'autres paramètres plasma. Lorsque la vitesse thermique est proche de la vitesse de phase, un modèle cinétique apparaît clairement comme étant l'outil le mieux adapté à l'étude de ces instabilités.

3.4 Transition entre les instabilités d'onde de dérive et ITG

Notre modèle est capable de décrire simultanément les instabilités CDW et ITG. Pour ces deux types d'instabilités, les effets cinétiques doivent être pris en compte lorsque la température ionique est suffisamment élevée pour que l'on ait $v_\varphi \sim v_{Ti}$.

Dans cette partie, notre but est d'étudier la transition entre les CDW et les ITG lorsque le paramètre $\kappa_T = \frac{1}{T_i}\frac{\partial T_i}{\partial r}$ augmente. Si ce paramètre est nul, seules les CDW apparaissent. Lorsque κ_T dépasse une valeur critique, les ITG deviennent instables et on assiste donc à une transition entre le mode CDW et le mode ITG lorsque le taux d'instabilité de ce dernier devient plus grand que celui des CDW.

Des paramètres plasmas identiques à ceux utilisés dans la section précédente sont utilisés : $r_o = 4\ cm$, $r = r_o$ et $\Delta r = 2.5\ cm$, $T_e = 2\ eV$, $\nu_{en} = 1.3 \times 10^6\ s^{-1}$, $k_\parallel = 2\ m^{-1}$, $\kappa_N = -10\ m^{-1}$, $B_o = 0.1\ T$ pour un plasma d'argon. Nous choisissons $T_i = 2\ eV$ et κ_T varie dans l'intervalle $[0, 10 \times \kappa_N]$, avec $M = 20$ bags et $a_M = 5 \times v_{Ti}$. Nous supposons que $v_{\parallel o} = v_{Te}$. Pour cet ensemble de paramètres, le mode le plus instable est un mode $m = 2$.

Les résultats sont présentés sur la figure Fig.(3.5). Pour κ_T dans l'intervalle $0\ m^{-1}$ à $-42\ m^{-1}$, le taux d'instabilité linéaire est d'environ $10^3\ s^{-1}$ et correspond aux instabilités CDW. Les instabilités ITG se développent lorsque $|\kappa_T|$ excède la valeur critique $|\kappa_T|_{crit} = 42\ m^{-1}$ pour laquelle le taux d'instabilité des ITG devient plus grand que celui des CDW. Le taux d'instabilité continue ensuite de croître avec$|\kappa_T|$. Notons que le rapport $\eta = \kappa_T/\kappa_N$ est de 3.2 au niveau du seuil d'instabilité des ITG d'après le modèle GWB non-collisionnel sans dérive axiale électronique [20].

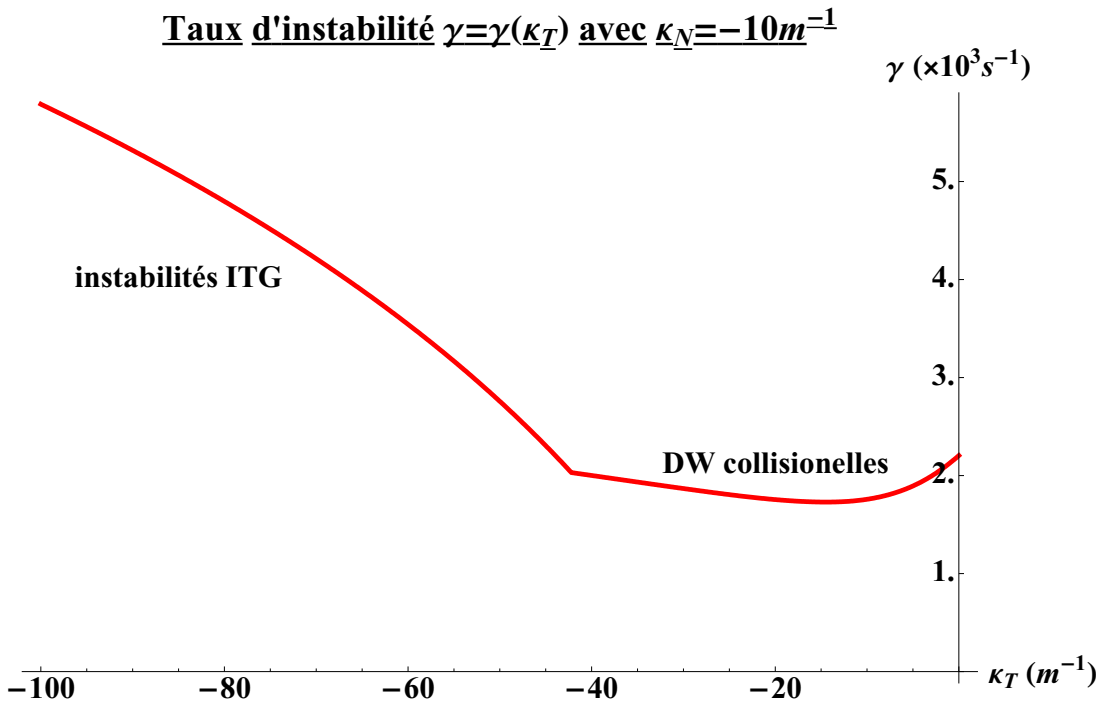


Fig. 3.5: Transition entre les instabilités CDW et ITG. Le taux d'instabilité du mode le plus instable est tracé en fonction de κ_T pour $\kappa_N = -10\ m^{-1}$. Les ondes de dérive (partie droite) peuvent être observées lorsque κ_T est inférieur à une valeur critique. Au delà de cette valeur, le taux d'instabilité des ITG devient rapidement plus grand que celui des CDW.

La pulsation correspondant au mode le plus instable est tracée en fonction du paramètre κ_T sur la figure Fig.(3.6). On remarque que pour $|\kappa_T|_{crit} < 42\ m^{-1}$, la pulsation $\omega_R = Re(\omega)$ est positive et est très proche de la fréquence diamagnétique[1] électronique ω^*_{ne}. Ce fait est en accord avec les propriétés attendues des CDW. Notons également que la fréquence des CDW varie avec κ_T puisque l'équation de dispersion Eq.(3.11) dépend de ω^*_j qui est une fonction de κ_T [20].

Pour $|\kappa_T|_{crit} > 42\ m^{-1}$, la pulsation ω_R devient négative : la perturbation se propage maintenant dans le même sens que la dérive diamagnétique ionique. Ceci est en accord avec les propriétés attendues pour les ITG. En outre il est clair que la pulsation ω_R donnée par le modèle CGWB est en excellent accord avec les prédictions théoriques

[1] on dit fréquence par abus de langage : ce paramètre est en fait une pulsation.

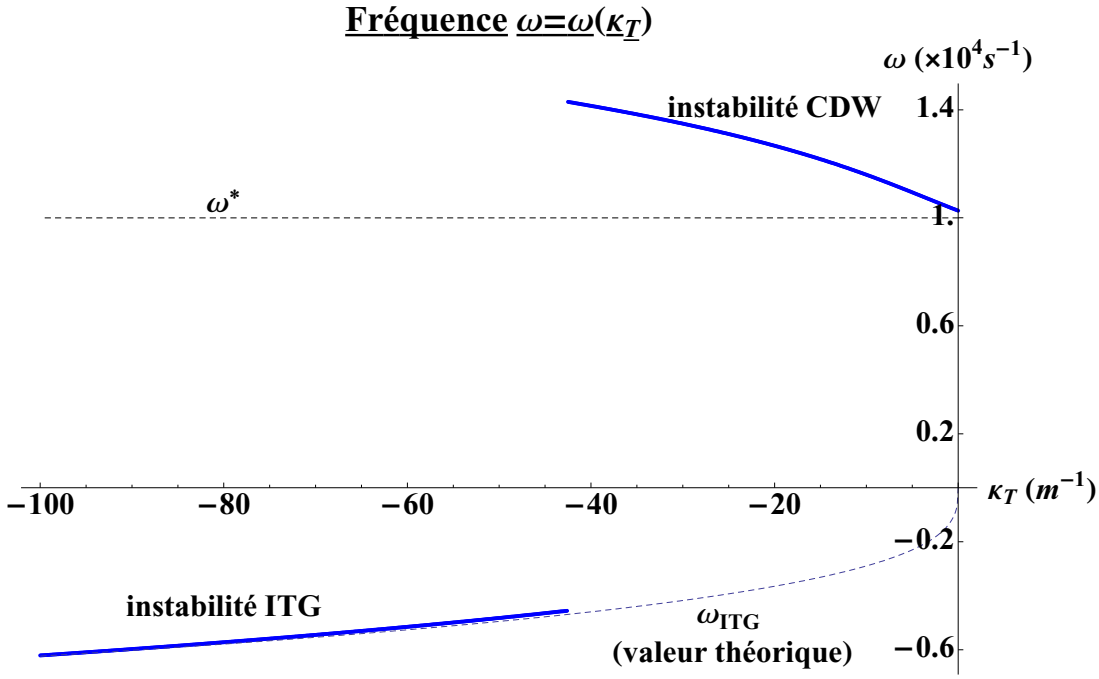


FIG. 3.6: Pulsation du mode le plus instable en fonction de κ_T, avec $\kappa_n = -10\ m^{-1}$. L'instabilité ITG apparaît lorsque κ_T dépasse une valeur seuil. Les courbes théoriques (décrivant les CDW et les ITG *seules*) sont données en comparaison.

obtenues dans le cadre de la limite fluide ($v_\varphi \gg v_{Ti}$) et avec $\kappa_N = 0$ [20] :

$$\omega_{ITG} = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_\parallel^2 v_{Ti}^2 |\Omega_T^*|}{\tau}\right)^{1/3} \tag{3.21}$$

où

$$\Omega_T^* = k_\theta \frac{k_B T_i}{q_i B_o} \kappa_T \tag{3.22}$$

L'excellent accord entre ces deux courbes nous permet de conclure que dans ce cas le mode observé est un mode ITG. Néanmoins, l'accord entre ces deux courbes est moins bon lorsque $v_{\parallel o}$ varie, même s'il reste satisfaisant.

Finalement, ces résultats montrent que pour $|\kappa_T|$ suffisamment grand, le mode ITG devient prépondérant sur le mode CDW : on assiste alors à une transition entre les deux modes.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle CGWB apparaît comme une alternative intéressante à la description fluide usuelle pour une colonne de plasma magnétisée. Des résultats intéressants sont obtenus, confirmant la possibilité pour le modèle CGWB de décrire les effets cinétiques pour les CDW et les ITG [59]. Des simulations non-linéaires peuvent être envisagées à partir du code écrit pour les ITG en géométrie cylindrique [21]. Dans ce code, la population électronique serait maintenant décrite par un modèle fluide collisionnel (les électrons ne seraient plus boltzmanniens).

4

Instabilités flûte : géométrie cartésienne et z-pinch

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les instabilités CDW et ITG en géométrie cylindrique. La géométrie des tokamaks implique la présence d'un champ magnétique inhomogène qui induit des dérives dites de "courbure" et de "gradient". Ces dérives, combinées à un gradient de pression radial, sont responsables des instabilités d'échange et de Rayleigh-Taylor (RT). Ces instabilités se développent selon des modes dits "flûte", c'est-à-dire avec une propagation purement transverse.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à ces instabilités liées à une dérive d'équilibre en les décrivant dans deux géométries différentes (tout d'abord l'instabilité RT gravitationnelle en géométrie cylindrique, puis les instabilité RT et d'échange en géométrie z-pinch). Notre but est de comprendre ces instabilités dans une géométrie simplifiée avant d'aborder la géométrie torique. Nous montrons que la description de la population électronique influe sur l'instabilité observée : instabilité d'échange dans le cas d'une population d'électrons adiabatique, et instabilité RT dans le cas d'une population d'électrons non-adiabatique. Nous terminerons le chapitre en présentant une approche basée sur l'introduction de la dérive de polarisation dans la vitesse de dérive à l'aide de l'équation gyrocinétique conservative.

4.1 Retour sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor gravitationnelle

L'instabilité RT gravitationnelle se développe lorsqu'un fluide pèse sur un fluide moins dense. La description fluide de cette instabilité est bien connue [5]. Nous allons, dans cette section, déterminer les éléments essentiels dans le modèle gyrocinétique pour la description de l'instabilité RT. Nous montrerons ainsi l'importance de la dynamique des électrons et de la dérive de polarisation.

4.1.1 Description du système

On se place en coordonnées cartésiennes (voir la figure Fig.(4.1)). Le système est un plasma totalement ionisé dans lequel il existe un gradient de densité $\nabla n_{i/eo} \propto \mathbf{e}_x$. Le champ magnétique $\mathbf{B} = B_o \mathbf{e}_z$ est homogène, stationnaire, et il existe une force de gravitation $m_{i/e}\mathbf{g} = m_{i/e} g \mathbf{e}_x$ qui induit une vitesse de dérive $\mathbf{v}_{gi/e} = v_{gi/e}\mathbf{e}_y = \mp \frac{g}{\Omega_{ci/e}} \mathbf{e}_y$ (on utilisera les indices "i" pour ion, "e" pour électrons : la vitesse de dérive v_{ge} des électrons est beaucoup plus petite que celle des ions puisque $\Omega_{ci} \ll \Omega_{ce}$).

Les quantités perturbées seront supposées proportionnelles à $e^{-i(\omega t - ky)}$, et les fréquences de l'instabilité telles que[1] : $\omega \simeq k v_{io} \ll \Omega_{ci}$ (v_{io} est la vitesse d'équilibre des ions). Il n'y a pas de champ électrique d'équilibre, et le champ électrique perturbé est dirigé suivant $\mathbf{e}_y$ (autrement dit, le potentiel électrique perturbé ne dépend que de y).

Concernant la température électronique, nous envisagerons deux cas de figure : tout d'abord le cas d'une population électronique adiabatique, puis le cas d'une population non-adiabatique que nous décrirons à l'aide du modèle fluide. En outre, nous avons à l'équilibre[2] : $\kappa_{Ne} = \kappa_{Ni} = \kappa_N$ et $\kappa_{Te} = \kappa_{Ti} = \kappa_T$

4.1.2 Dynamique des électrons

Deux approches sont possibles pour modéliser le comportement de la population électronique.

[1] On vérifiera ceci *a posteriori*.

[2] Nous supposons qu'il existe une relation de proportionnalité entre les températures : $T_{eo} = \tau T_{io}$ ou τ est un paramètre ne dépendant pas des variables d'espace. Nous avons donc $\kappa_{Te} = \frac{1}{T_{eo}} \frac{\partial T_{eo}}{\partial r} = \frac{1}{\tau T_{io}} \frac{\partial \tau T_{io}}{\partial r} = \frac{1}{T_{io}} \frac{\partial T_{io}}{\partial r} = \kappa_{Ti}$

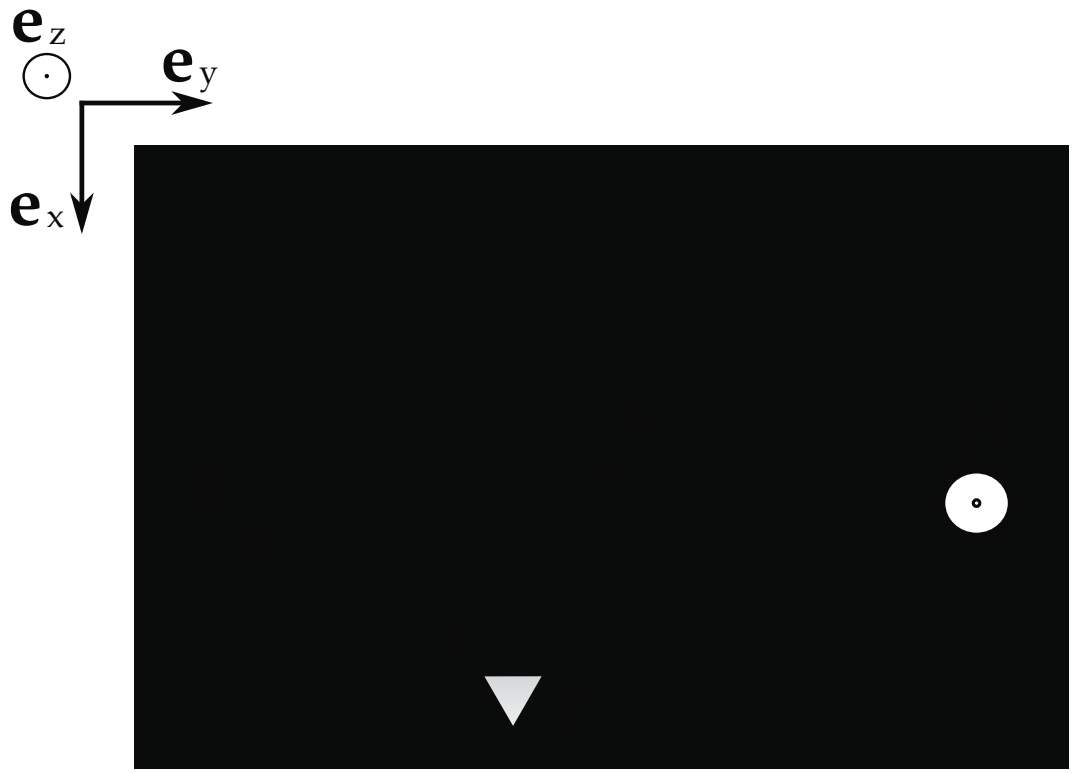


Fig. 4.1: Géométrie du système : un gradient de densité est présent dans le plasma, et le champ de gravitation induit une dérive d'équilibre des particules.

4.1.2.1 Réponse adiabatique (boltzmannienne)

Suivant l'hypothèse très souvent faite dans le cadre de l'étude des micro-instabilités de coeur dans les tokamaks, nous supposerons dans un premier temps que la population électronique répond de manière adiabatique aux perturbations de potentiel

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = \frac{e\phi_1}{k_B T_{eo}} = i\frac{eE_{1y}}{kk_B T_{eo}} \tag{4.1}$$

4.1.2.2 Réponse non-adiabatique

Dans le cas non-adiabatique, la dynamique des électrons peut être modélisée à l'aide du modèle fluide. Les quantités d'équilibre ont l'indice 0 et les quantités perturbées l'indice 1.

Les équations du modèle fluide s'écrivent :

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \tag{4.2}$$

$$m_e n_e \Big[\partial_t \mathbf{v}_e + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e\Big] = q_e n_e \Big[\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_o\Big] + m_e n_e \mathbf{g} - \nabla(n_e k_B T_e) \tag{4.3}$$

Nous posons

- $n_e = n_{eo} + \tilde{n}_{e1}$
- $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{eo} + \tilde{\mathbf{v}}_{e1}$
- $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_1$
- $T_e = T_{eo} + \tilde{T}_{e1}$

avec

- $\tilde{n}_{e1} = n_{e1} e^{-i(\omega t - ky)}$
- $\tilde{\mathbf{v}}_{e1} = \mathbf{v}_{e1} e^{-i(\omega t - ky)}$
- $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1 e^{-i(\omega t - ky)} = E_{1y} e^{-i(\omega t - ky)} \mathbf{e}_y$
- $\tilde{T}_{e1} = T_{e1} e^{-i(\omega t - ky)}$

séparant ainsi les quantités considérées en une partie d'équilibre et une partie perturbée fluctuante.

Nous injectons ces quantités perturbées dans les équations fluide[1].

Dans le cas d'une fermeture isotherme (i.e. $T_{e1} = 0$), nous obtenons

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = -i \frac{\kappa_N}{\omega + \omega^*_{ne} - \omega^*_{Te}} \frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.4}$$

avec la fréquence diamagnétique électronique $\omega^*_{ne} = -k r_{Le} v_{Te} \kappa_N$ où $v_{Te} = \sqrt{k_B T_{eo}/m_e}$ est la vitesse thermique électronique et $r_{Le} = v_{Te}/\Omega_{ce}$ le rayon de Larmor électronique, et $\omega^*_{Te} = -k r_{Le} v_{Te} \kappa_{Te}$.

On voit que cette expression permet, dans la limite $T_{eo} = 0$ de retrouver la réponse de la densité électronique dans le cadre du modèle fluide froid [5].

Si nous supposons une fermeture non plus isotherme mais adiabatique[2] de la forme

[1] Les calculs sont détaillés en annexe B.

[2] Il existe ici une ambiguïté dans la terminologie classique : une population d'électrons est dite adiabatique lorsqu'elle répond à une perturbation de potentiel selon une distribution de Boltzmann (Eq.4.1). On ne doit pas confondre ce type de population avec celui dans lequel on utilise une relation de *fermeture* adiabatique.

$p = Cn^3$, nous obtenons, par un calcul similaire

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = -\frac{i\kappa_N}{\omega}\frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.5}$$

4.1.3 Cas fluide

Nous utilisons le modèle fluide pour modéliser la population ionique :

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0 \tag{4.6}$$

$$m_i n_i \Big[\partial_t \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\mathbf{v}_i\Big] = q_i n_i \Big[\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_o\Big] + m_i n_i \mathbf{g} - \nabla(n_i k_B T_i) \tag{4.7}$$

Nous linéarisons ces équations en prenant des notations analogues à celles utilisées pour les électrons, et obtenons[1], en gardant les termes d'ordre 1 en ω/Ω_{ci}

Pour une fermeture isotherme du système nous avons

$$\frac{n_{i1}}{n_{io}} = -i\frac{\kappa_N + k\left(\frac{\omega - kv_{io}}{\Omega_{ci}}\right)}{(1 + k^2 {r_{Li}}^2)(\omega - kv_{io}) + 2\omega^*_{ni}}\frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.8}$$

Et pour une fermeture adiabatique

$$\frac{n_{i1}}{n_{io}} = -i\frac{\kappa_N + k\left(\frac{\omega - kv_{io}}{\Omega_{ci}}\right)}{(1 + 3k^2 {r_{Li}}^2)(\omega - kv_{io}) + 2\omega^*_{ni}}\frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.9}$$

Déterminons maintenant les équations de dispersion du système pour les cas des électrons adiabatiques et non-adiabatiques.

4.1.3.1 Équation de dispersion pour une population d'électrons boltzmanniens

En utilisant les équations Eq.(4.8) (dynamique des ions avec fermeture isotherme), et Eq.(4.1) (population électronique boltzmannienne) avec l'équation de quasi-neutralité, on obtient l'équation de dispersion du système

$$\left[1 + k^2\frac{r_{Le}v_{Te} + r_{Li}v_{Ti}}{\Omega_{ci}}\right]\frac{\omega}{k} - \frac{k^2 v_{io}}{\Omega_{ci}}(r_{Le}v_{Te} + r_{Li}v_{Ti}) + (r_{Le}v_{Te}\kappa_N - v_{io}) + 2\frac{\omega^*_{ni}}{k} = 0 \tag{4.10}$$

[1] Le calcul est détaillé en annexe B.

Nous voyons qu'il n'existe pas d'instabilité dans cette description puisqu'on obtient une valeur réelle pour ω. L'équation de dispersion obtenue décrit un système dans lequel il existe des gradients de densité et de température : on pourrait s'attendre à ce que l'instabilité d'échange soit décrite par cette équation. Décrire l'instabilité d'échange nécessiterait cependant l'utilisation d'une relation de fermeture différente de celle que nous utilisons ici pour la population ionique [38].

4.1.3.2 Équation de dispersion pour une population d'électrons non-boltzmanniens

On utilise les équations Eq.(4.8) (dynamique des ions avec fermeture isotherme), et Eq.(4.4) (dynamique des électrons avec fermeture isotherme), combinées à la quasi-neutralité :

$$\omega^2 + \omega(\omega^*_{ne} - \omega^*_{Te} - kv_{io} - k\kappa_N r_{Li} v_{Ti}) + k^2 r_{Li} v_{Ti} \kappa_N v_{io} + \frac{\kappa_N \Omega_{ci}}{k}(\omega^*_{ne} - \omega^*_{Te} - 2\omega^*_{ni}) - kv_{io}(\omega^*_{ne} - \omega^*_{Te}) + \kappa_N v_{io} \Omega_{ci} = 0 \quad (4.11)$$

Nous obtenons cette fois un polynôme d'ordre 2 qui pourra éventuellement présenter des solutions instables pour certains ensembles de paramètres.

Si on utilise les équations Eq.(4.9) (dynamique des ions avec fermeture adiabatique) et Eq.(4.5) (dynamique des électrons avec fermeture adiabatique) nous avons

$$\omega^2 - k\omega(v_{io} + 3\kappa_N {r_{Li}}^2 \Omega_{ci}) + (1 + 3k^2 {r_{Li}}^2)\kappa_N v_{io} \Omega_{ci} - 2\kappa_N \frac{\omega^*_{ni} \Omega_{ci}}{k} = 0 \quad (4.12)$$

Pour simplifier les expressions nous supposons que $T_i = T_e = 0$. Les deux expressions précédentes deviennent alors équivalentes et s'écrivent

$$\omega^2 - kv_{gi}\omega + \kappa_N \Omega_{ci} v_{gi} = 0 \quad (4.13)$$

dont le discriminant est

$$\Delta = k^2 v_{gi}^2 - 4\Omega_{ci} v_{gi} \kappa_N \quad (4.14)$$

où $v_{gi} = -\frac{g}{\Omega_{ci}}$

Le critère d'instabilité est : $\kappa_N v_{gi} > \frac{k^2 v_{gi}^2}{4\Omega_{ci}}$. Le terme de droite de l'inégalité est positif : par conséquent, de manière plus large, puisque $v_{gi} < 0$, il est *nécessaire* que $\kappa_N < 0$, et on a un seuil situé à $\kappa_N = \frac{k^2 v_{gi}}{4\Omega_{ci}}$ [5].

Ce dernier résultat correspond à la théorie "classique" de l'instabilité de Rayleigh-Taylor gravitationnelle [5]. Remarquons que l'hypothèse $\omega \sim k v_{gi}$ faite au début de ce chapitre est bien vérifiée.

4.1.4 Modèle gyrocinétique

Nous allons maintenant essayer de retrouver les résultats précédents à l'aide des équations cinétiques. L'instabilité de RT étant une instabilité flûte (pas de propagation dans la direction parallèle au champ magnétique), et les effets de gyromoyenne étant supposés négligeables ($\mathcal{J}_\mu \sim \mathbb{1}$), le modèle gyrocinétique se ramène à l'équation centre-guide

$$\partial_t f + \mathbf{v}_D \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f = 0 \tag{4.15}$$

Dans cette équation, nous supposons que les particules sont confondues avec leur centre-guide (i.e. $r_{Li} = 0$).

Concernant la linéarisation, nous utilisons les quantités

- $n_i = n_{io}(x) + n_{i1} e^{-i(\omega t - ky)}$
- $\mathbf{u}_i = u_{i1} e^{-i(\omega t - ky)} \mathbf{e}_z$
- $\mathbf{E} = E_{1y} e^{-i(\omega t - ky)} \mathbf{e}_y$

Les notations suivantes sont utilisées :

$$\mathbf{v}_D = v_\parallel \mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{EXB} + \mathbf{v}_{gi} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{v}_{E\times B} = \frac{E_y}{B_o} \mathbf{e}_x \tag{4.17}$$

$$\mathbf{v}_{gi} = -\frac{g}{\Omega_{ci}} \mathbf{e}_y \tag{4.18}$$

Par ailleurs, lorsque nous introduirons la polarisation dans la quasi-neutralité, il faudra utiliser l'expression (à l'ordre 1) :

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = \frac{n_{i1}}{n_{io}} - \frac{ik}{\Omega_{ci}} \frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.19}$$

	sans polarisation	avec polarisation
Electrons boltzmanniens	non	non
Electrons non-boltzmanniens	non	oui

Tab. 4.1: Existence de l'instabilité RT due à un gradient de densité dans le modèle gyrocinétique.

Cherchons maintenant à retrouver l'équation de dispersion Eq.(4.13) à l'aide de l'équation de centre-guide pour les ions. La dynamique des électrons est inchangée.

Intégrons l'équation Eq.(4.15) sur $\int dv_\parallel$:

- $\int dv_\parallel \partial_t f = \partial_t n_i$
- $\int dv_\parallel \mathbf{v}_D \cdot \nabla f = \partial_z n_i u_i + \frac{E_{1y}}{B_o}\partial_x n_i + v_{gi}\partial_y n_i + \frac{\partial_y n_i}{\Omega_{ci} B_o}\Big(\partial_t + v_{gi}\partial_y\Big)E_{1y}$

La linéarisation à l'ordre 1, donne (on vérifie facilement que l'équation est vérifiée à l'ordre 0)

$$-i\omega n_{i1} + \frac{E_{1y}}{B_o}\partial_x n_{io} + ikv_{gi}n_{i1} = 0 \tag{4.20}$$

En utilisant Eq.(4.19) pour la quasi-neutralité et Eq.(4.4) avec $T_e = 0$ pour les électrons, on obtient l'équation de dispersion du système

$$\omega^2 - kv_{gi}\omega + \kappa_N \Omega_{ci} v_{gi} = 0 \tag{4.21}$$

Cette équation est identique à Eq.(4.13) et possède donc les mêmes solutions. Nous voyons par conséquent que l'instabilité RT peut être décrite en partant de l'équation cinétique et en utilisant une description fluide non-adiabatique pour les électrons. Notons également qu'il est nécessaire d'introduire la dérive de polarisation : le système est stable si on ne la prend pas en compte. Le tableau 4.1 synthétise nos résultats en résumant l'existence de l'instabilité RT en fonction du traitement de la population électronique et de la dérive de polarisation.

4.2 Instabilités flûte en géométrie z-pinch

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de l'instabilité flûte dans le cas d'un champ magnétique courbé en géométrie z-pinch. Le champ de gravitation est négligé, et c'est le champ magnétique inhomogène qui provoque maintenant la dérive

des particules responsable de l'instabilité. On se rapproche ainsi progressivement de la géométrie torique.

Le plasma est plongé dans un champ magnétique orthoradial et dépendant de r : $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{e}_\theta$ (voir la figure Fig.(4.2)). Le rayon de courbure du champ magnétique est $\mathbf{R}_c = r\mathbf{e}_r$. Le plasma est à symétrie cylindrique à l'équilibre : $n_{io} = n_{io}(r)$, et $n_{eo}(r) = Z_i n_{io}(r)$.

Dans cette géométrie, le vecteur nabla a pour coordonnées : $\nabla = \left(\partial_r, \frac{\partial_\theta}{r}, \partial_z\right)$, et la divergence d'un vecteur a pour expression : $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta A_\theta + \partial_z A_z$.

La courbure du champ magnétique va provoquer une dérive axiale des particules. Cette dérive sera perpendiculaire au gradient de densité ce qui est une des conditions nécessaires à la présence d'une instabilité RT. On voit que le système z-pinch, du point de vue de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, est très similaire au système gravitationnel décrit dans la section précédente. Nous nous intéressons toujours au cas d'une instabilité flûte : les fluctuations se feront donc uniquement dans la direction axiale $\mathbf{e}_z$.

4.2.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Nous avons montré dans la section précédente qu'une température électronique n'est pas nécessaire à l'apparition d'une instabilité RT : nous supposerons donc ici pour simplifier que $T_e = 0$.

En utilisant les équations du modèle fluide selon la même démarche que dans la section précédente, nous obtenons, en l'adaptant à cette nouvelle géométrie

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = i\frac{\kappa_N}{\omega}\frac{E_{1z}}{B} \tag{4.22}$$

ce qui nous donne la réponse de la densité électronique à une perturbation de potentiel électrique.

Pour la modélisation des ions, on utilise l'équation de dérive cinétique

$$\partial_t f_{GC} + \mathbf{v_D} \cdot \nabla_r f_{GC} + \dot{v}_\parallel \partial_{v_\parallel} f_{GC} = 0 \tag{4.23}$$

Concernant les quantités perturbées, nous avons :

- $n = n_{io}(r) + n_{i1}e^{-i(\omega t - kz)}$
- $\mathbf{u}_i = u_{i1}e^{-i(\omega t - kz)}\mathbf{e}_\theta$
- $\mathbf{E} = E_{1z}e^{-i(\omega t - kz)}\mathbf{e}_z$

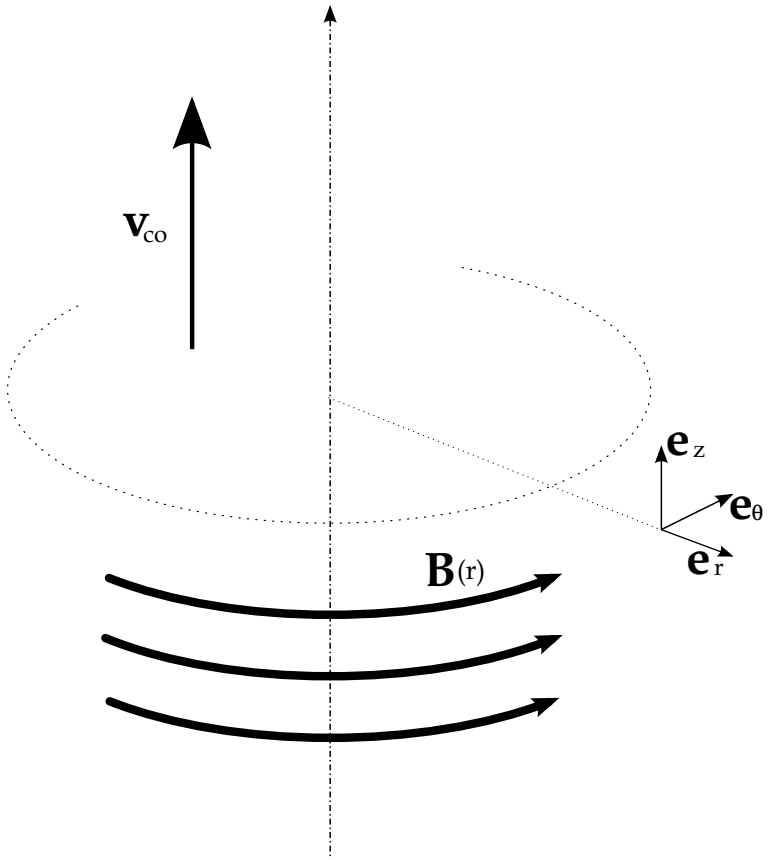


FIG. 4.2: Géométrie du système z-pinch : le plasma est à symétrie cylindrique et un champ magnétique orthoradial dépendant de r est appliqué entraînant une dérive axiale $\mathbf{v}_{co}$ des particules.

Notons qu'il n'y a pas de propagation dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétique ($k_{\|} = 0$) et que la propagation se fait dans la direction axiale ($k_{\perp} = k_z := k$)

Les notations suivantes sont utilisées :

$$\mathbf{v}_D = v_{\|}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{v}_{EXB} + \mathbf{v}_c \tag{4.24}$$

$$\dot{v}_{\|} = \Big(\frac{Z_i e}{m_i}\mathbf{E} - \frac{\mu}{m_i}\nabla B\Big)\cdot\Big(\mathbf{e}_\theta + \frac{v_{\|}}{\Omega_{ci}}\frac{\mathbf{R}_c\times\mathbf{B}}{BR_c{}^2}\Big) = \frac{v_{\|}}{r}\frac{E_z}{B} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{v}_{EXB} = -\frac{E_z}{B}\mathbf{e}_r \tag{4.26}$$

$$\mathbf{v}_c = \Big(\frac{v_{\|}{}^2}{\Omega_{ci}} + \frac{\mu}{Z_i e}\Big)\frac{\mathbf{R}_c\times\mathbf{B}}{BR_c{}^2} = \Big(\frac{v_{\|}{}^2}{\Omega_{ci}} + \frac{\mu}{Z_i e}\Big)\frac{\mathbf{e}_z}{r} \tag{4.27}$$

Nous supposons que la fonction de distribution est une distribution water-bag à 1 bag de la forme :

$$f(r,z,v_{\|},t) = A\Big\{H\Big(v_{\|} - v^-(r,z,t)\Big) - H\Big(v_{\|} - v^+(r,z,t)\Big)\Big\} \tag{4.28}$$

Rappelons que le cas 1 bag implique une fermeture adiabatique ainsi que des gradients de densité et de température liés (on a $\eta := \kappa_T/\kappa_N = 2$) [20].

Calculons les deux premiers moments de cette fonction de distribution. On a :

- $n_i = A(v^+ - v^-)$
- $u_i = (v^+ + v^-)/2$

d'où en inversant :

- $v^+ = u_i + n_i/2A$
- $v^- = u_i - n_i/2A$

L'utilisation de cette forme de fonction de distribution nous permet de calculer les intégrales suivantes en fonction de ses deux premiers moments :

- $\int f dv_{\|} = n_i$
- $\int f v_{\|} dv_{\|} = n_i u_i$
- $\int f v_{\|}{}^2 dv_{\|} = n_i u_i{}^2 + n_i{}^3/12A^2$

En outre lorsque nous introduisons la polarisation *dans* la quasi-neutralité, on doit utiliser (à l'ordre 1) :

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = \frac{n_{i1}}{n_{io}} - \frac{ik}{\Omega_{ci}}\frac{E_{1z}}{B} \tag{4.29}$$

On intègre l'équation Eq.(4.23) suivant la même méthode que pour l'instabilité gravitationnelle. Explicitons les différents termes de l'intégration :

- $\int dv_{\|}\partial_t f = \partial_t n_i$

- $\int dv_\parallel v_\parallel \mathbf{e}_\theta \cdot \nabla f = \frac{1}{r}\partial_\theta n_i u_i$
- $-\int dv_\parallel \frac{E_z}{B} \cdot \mathbf{e}_r f = -\frac{E_z}{B}\partial_r n_i$
- $\int dv_\parallel \frac{{v_\parallel}^2}{r\Omega_{ci}} \mathbf{e}_z f = \frac{\partial_z}{r\Omega_{ci}}\Big(n_i {u_i}^2 + \frac{{n_i}^3}{12A^2}\Big)$
- $\int dv_\parallel \frac{\mu}{Z_i e r} \mathbf{e}_z f = \frac{\mu}{Z_i e r}\partial_z n_i$
- $\int dv_\parallel \dot{v}_\parallel \partial_{v_\parallel} f = -\frac{n_i}{r}\frac{E_z}{B}$

A l'ordre 1 l'équation de dérive cinétique s'écrit :

$$\partial_t n_{i1} + \frac{1}{r}\partial_\theta n_{io} u_{i1} - \frac{E_{1z}}{B}\partial_r n_{io} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\mu}{Z_i e} + \frac{{n_{io}}^2}{12A^2\Omega_{ci}}\Big)\partial_z n_{i1} - \frac{n_{io}}{r}\frac{E_z}{B} = 0 \tag{4.30}$$

Donc dans l'espace de Fourier :

$$-i\omega n_{i1} - \frac{E_{1z}}{B}\partial_r n_{io} + \frac{ik}{r}\Big(\frac{\mu}{Z_i e} + \frac{{n_{io}}^2}{12A^2\Omega_{ci}}\Big) n_{i1} - \frac{n_{io}}{r}\frac{E_{1z}}{B} = 0 \tag{4.31}$$

Cette équation nous donne la relation entre le champ électrique et la densité ionique perturbée.

On détermine l'équation de dispersion en introduisant Eq.(4.31) et Eq.(4.22) dans l'équation de quasi-neutralité Eq.(4.29). On obtient

$$\omega^2 - \Big(k v_{co} + \frac{\Omega_{ci}}{kr}\Big)\omega - \kappa_N v_{co}\Omega_{ci} = 0 \tag{4.32}$$

où on a posé $v_{co} = \frac{1}{r}\Big(\frac{\mu}{Z_i e} + \frac{{n_{io}}^3}{12A^2\Omega_{ci}}\Big)$

On voit clairement le parallèle entre les équations Eq.(4.32) et Eq.(4.13). La vitesse de courbure d'équilibre joue ici le même rôle que la vitesse v_{gi} dans le cas de l'instabilité RT gravitationnelle. Le discriminant de Eq.(4.32) s'écrit

$$\Delta = \left(k v_{co} + \frac{\Omega_{ci}}{kr}\right)^2 + 4 v_{co}\kappa_N \Omega_{ci} \tag{4.33}$$

Le critère d'instabilité est $\kappa_N < -\frac{1}{v_{co}\Omega_{ci}}\Big(\frac{k v_{co}}{2} + \frac{\Omega_{ci}}{2kr}\Big)^2$ ce qui correspond comme on s'y attend à un gradient de densité de sens opposé à la force qui provoque la dérive d'équilibre.

Notons une nouvelle fois qu'il n'y a pas d'instabilité si on n'introduit pas la dérive de polarisation car l'équation de dispersion est d'ordre 1 dans ce cas. Notons en outre qu'il est nécessaire d'utiliser une description non-boltzmannienne des électrons pour décrire l'instabilité.

4.2.2 Instabilité d'échange dans le cas d'une population d'électrons boltzmanniens

Étudions maintenant le cas MWB en présence d'une population d'électrons boltzmanniens. L'utilisation d'un seul bag implique une fermeture adiabatique et $\eta = 2$: il est nécessaire d'utiliser au moins 2 bags pour relâcher ces contraintes. En utilisant l'équation de dérive cinétique, sans dérive de polarisation, et toujours dans le cas d'un mode flûte, on montre que la relation de dispersion du système s'écrit[1]

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{k_B T_{eo}}{eB} k \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \frac{\frac{1}{r} + \kappa_j}{\omega - k \frac{{a_j}^2}{r\Omega_{ci}}} \tag{4.34}$$

Sur la figure Fig.(4.3), le seuil d'instabilité est tracé pour les paramètres : $M = 50$, $a_M = 5 \times v_{Ti}$, $B = 5\ T$, $T_{io} = T_{eo} = 15\ keV$, $k = 10^3\ m^{-1}$, et $\mu = 0\ J.T^{-1}$. La forme de la courbe de seuil est proche de celle obtenue dans le cas de l'instabilité d'échange décrite dans [38].

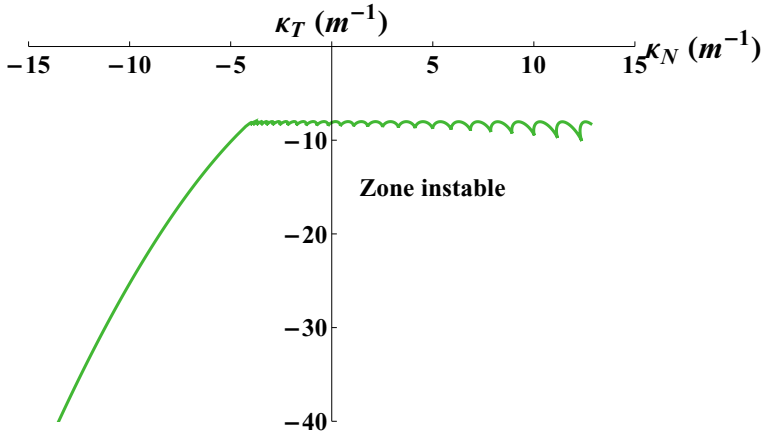


Fig. 4.3: Seuil d'instabilité en géométrie z-pinch dans le cas d'électrons boltzmanniens.

Les instabilités RT et d'échange diffèrent par le comportement de la population électronique. Le comportement ionique est cependant identique, de même que le mécanisme de l'instabilité qui est lié à la présence de forts gradients d'équilibre ainsi que d'une inhomogénéité du champ magnétique provoquant une dérive perpendicu-

[1] Le calcul est détaillé en annexe C

laire à ces gradients. Notons que la dérive de polarisation n'a pas d'impact majeur sur l'instabilité d'échange alors qu'elle en a un dans le cas de l'instabilité RT.

4.3 Équation gyrocinétique conservative et la dérive de polarisation

Nous avons montré dans la section précédente que le modèle dérive cinétique nous permet d'obtenir des résultats conformes à ceux obtenus à l'aide du modèle fluide pour décrire les modes flûte. Lorsqu'on considère une population ionique sans gradient de température, outre le fait qu'il est nécessaire d'utiliser une population d'électrons non-adiabatiques, nous avons vu que l'on doit introduire la dérive de polarisation dans le modèle pour obtenir une instabilité de type RT. Or la polarisation est introduite dans la quasi-neutralité au prix d'une approximation qui consiste à négliger le terme convectif dans la dérivée temporelle du champ électrique perpendiculaire (on écrit $\frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \sim \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}$) [61]. Afin d'obtenir des expressions simples, nous nous plaçons, dans cette section, à nouveau en géométrie cartésienne dans le cas de l'instabilité RT gravitationnelle.

Nous savons que l'équation de dérive cinétique Eq.(4.23) qui est une équation de type advective est équivalente à une équation de type conservative lorsque la divergence de la vitesse de dérive est nulle. Cette équation conservative s'écrit [12] [29]

$$\frac{\partial\left(B^* f_{GC}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v}_D B^* f_{GC}\right) + \frac{\partial\left(\dot{v}_\parallel B^* f_{GC}\right)}{\partial v_\parallel} = 0 \tag{4.35}$$

où $B^* = B + \frac{m v_\parallel}{q}\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \simeq B$.

On peut déduire l'équation de dérive cinétique Eq.(4.23) à partir de Eq.(4.35) en remarquant que $\nabla \cdot \left(\mathbf{v}_D B\right) + \frac{\partial}{\partial v_\parallel}\left(\dot{v}_\parallel B\right) = 0$. Ces deux équations sont alors équivalentes.

Dans la dérivation usuelle des équations gyrocinétiques [12], la polarisation apparaît non pas dans les vitesses de dérive, mais sous forme d'une perturbation de densité ionique dans l'équation de Poisson. On peut retrouver l'expression de cette densité à partir de l'équation du mouvement des centres-guides en utilisant l'équation de continuité dans l'approximation des grandes longueurs d'onde [61]. Il est cependant nécessaire de faire l'hypothèse

$$\frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \sim \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}$$

négligeant ainsi le terme convectif $\left(\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla\right)\mathbf{E}_\perp$. Or dans ce chapitre, nous avons montré que la fréquence de l'instabilité est de l'ordre de kv_o où v_o est la dérive d'équilibre (v_{gi} dans le cas de l'instabilité RT gravitationnelle et v_{co} dans le cas de l'instabilité RT en géométrie z-pinch). La question se pose donc de la validité de cette approximation.

Calculons la correction de polarisation à la densité ionique lorsqu'on ne néglige pas le terme convectif dans $d\mathbf{E}_\perp/dt$. La procédure usuelle consiste à utiliser une équation de continuité en ne gardant que la vitesse de polarisation [61]

$$\partial n_i + \nabla \cdot (\mathbf{v}_{pol} n_i) = 0 \tag{4.36}$$

avec $\mathbf{v}_{pol} \simeq \frac{1}{\Omega_{ci} B} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}$.

Plaçons nous dans la géométrie cartésienne que nous avons utilisée dans le cas de l'instabilité RT gravitationnelle et supposons que la densité et le champ électrique sont de la forme :

$$n_i = n_{io} + n_{pol} e^{-i(\omega - ky)}$$

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_{1y} e^{-i(\omega - ky)} \mathbf{e}_y$$

Nous obtenons alors

$$n_{pol} = -\frac{ikn_{io}}{\Omega_{ci}} \left(\frac{\omega - kv_{gi}}{\omega} \right) \frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.37}$$

Nous avons deux possibilités concernant le traitement de la dérive de polarisation : soit, suivant l'approche classique nous l'introduisons dans la quasi-neutralité sous la forme Eq.(4.37), soit, suivant l'approche alternative [62], nous introduisons la vitesse de dérive de polarisation dans l'équation gyrocinétique en posant $\mathbf{v}_D = v_\parallel \mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{E\times B} + \mathbf{v}_{pol}$.

Calculons maintenant la perturbation sur la densité ionique en intégrant l'équation gyrocinétique conservative Eq.(4.35) sur $\int dv_\parallel$ en introduisant la dérive de polarisation dans $\mathbf{v}_D = v_\parallel \mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{E\times B} + \mathbf{v}_{pol}$. Suivant la même procédure que dans les sections précédentes nous avons

- $\int dv_\parallel \partial_t \left(B_o f \right) = B_o \partial_t n_i$
- $\int dv_\parallel \nabla \cdot \left(\mathbf{v}_D B_o f \right) = \nabla \cdot \int dv_\parallel \left(\mathbf{v}_D B_o f \right) = B_o \nabla \cdot \int dv_\parallel \left(\mathbf{v}_D f \right) = B_o \nabla \cdot \mathcal{L}$

Calculons l'intégrale $\mathcal{L} = \int dv_{\parallel}\Big(\mathbf{v}_D f\Big)$

$$\mathcal{L} = n_i u_i \mathbf{e}_z + n_i \frac{E_y}{B_o}\mathbf{e}_x + n_i v_{gi}\mathbf{e}_y + \frac{n_i}{\Omega_{ci}B_o}\Big[\partial_t + v_{gi}\partial_y\Big]E_y \tag{4.38}$$

à l'ordre 1, on a

$$\mathcal{L} = n_{io} u_{i1} \mathbf{e}_z + n_{io} \frac{E_{1y}}{B_o}\mathbf{e}_x + n_{i1} v_{gi}\mathbf{e}_y + \frac{n_{io}}{\Omega_{ci}B_o}\Big[\partial_t + v_{gi}\partial_y\Big]E_{1y} \tag{4.39}$$

Calculons maintenant la divergence de $\mathcal{L}$

$$\nabla \cdot \Big(n_{io} u_{i1} \mathbf{e}_z\Big) = 0 \tag{4.40}$$

$$\nabla \cdot \Big(n_{io} \frac{E_{1y}}{B_o}\mathbf{e}_x\Big) = \frac{E_{1y}}{B_o}\partial_x n_{io} \tag{4.41}$$

$$\nabla \cdot \Big(n_{i1} v_{gi}\mathbf{e}_y\Big) = ikv_{gi}n_{i1} \tag{4.42}$$

$$\nabla \cdot \Big[\frac{n_{io}}{\Omega_{ci}B_o}\Big(\partial_t + v_{gi}\partial_y\Big)E_{1y}\Big] = \frac{kn_{io}}{\Omega_{ci}}\Big(\omega - kv_{gi}\Big)\frac{E_{1y}}{B_o} \tag{4.43}$$

L'équation conservative linéarisée est donc

$$-i\omega n_{i1} + \frac{E_{1y}}{B_o}\partial_x n_{io} + ikv_{gi}n_{i1} + \frac{kn_{io}}{\Omega_{ci}}\Big(\omega - kv_{gi}\Big)\frac{E_{1y}}{B_o} = 0 \tag{4.44}$$

En combinant avec la quasi-neutralité et avec la dynamique des électrons Eq.(4.4) dans le cas $T_e = 0$, on obtient l'équation de dispersion du système dans le cas de l'équation conservative avec polarisation dans la vitesse de dérive :

$$\omega^2 - kv_{gi}\omega + \kappa_N \Omega_{ci} v_{gi} = 0 \tag{4.45}$$

On retrouve la même équation de dispersion que pour le modèle fluide.

Si maintenant nous introduisons la polarisation dans la quasi-neutralité Eq.(4.19), l'équation conservative linéarisée devient (avec $\mathbf{v}_D = v_{\parallel}\mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{E\times B}$)

$$-i\omega n_{i1} + \frac{E_{1y}}{B_o}\partial_x n_{io} + ikv_{gi}n_{i1} = 0 \tag{4.46}$$

et donc la relation de dispersion dans le cas de l'équation conservative avec polarisation dans la quasi-neutralité est

$$\omega^2 - 2kv_{gi}\omega + \kappa_N \Omega_{ci} v_{gi} + k^2 {v_{gi}}^2 = 0 \tag{4.47}$$

dont les solutions, dans le cas $\kappa_N < 0$, sont

$$\omega = kv_{gi} \pm i\Big(\sqrt{\kappa_N \Omega_{ci} v_{gi}}\Big) \tag{4.48}$$

Certes on a toujours un critère d'instabilité *nécessaire* qui est $\kappa_N < 0$ (n'oublions pas que $v_{gi} < 0$) ce qui semble en accord avec le modèle fluide. Cependant, d'une part la fréquence de l'instabilité n'est pas la même, d'autre part le taux d'instabilité est également différent. En outre, le seuil d'instabilité est lui aussi différent (ici le seuil est $\kappa_N = 0$ alors que dans le cas fluide il est $\kappa_N = \frac{k^2 v_{gi}}{4\Omega_{ci}}$).

Nous n'obtenons pas la même équation que le modèle fluide froid. La différence est liée au terme convectif de la dérive de polarisation : lorsqu'on le néglige on obtient la même équation que Eq.(4.13) (modèle fluide froid) et Eq.(4.21) (modèle gyrocinétique avec la dérive de polarisation dans la quasi neutralité en supposant que $\omega \ll kv_{gi}$). Lorsqu'on en tient compte (ce qui semble naturel puisqu'on montre que $\omega \sim kv_{gi}$), on n'obtient plus la même équation de dispersion.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la description de l'instabilité RT (due à un gradient de densité) nécessite la prise en compte d'une population électronique non-adiabatique aussi bien dans le cas de l'instabilité RT gravitationnelle que dans le cas de la géométrie z-pinch (c'est-à-dire lorsque les lignes de champs magnétique sont courbées). Nous montrons également qu'il est possible, en supposant que les électrons sont adiabatiques, de décrire l'instabilité d'échange qui est l'instabilité habituellement étudiée dans le cadre des plasmas de coeur de tokamak.

Il faut cependant noter que lorsqu'on est en présence d'un mode flûte, justifier que la population électronique suit une distribution adiabatique devient problématique [63]. La prise en compte d'une distribution d'électrons non-adiabatique conduit alors à l'observation de l'instabilité RT. Les travaux présentés dans ce chapitre montrent que l'étude de ces deux types d'instabilité est possible à l'aide du modèle GWB.

Enfin, nous remarquons que le traitement de la dérive de polarisation dans le modèle gyrocinétique permet de trouver des résultats en accord avec le modèle fluide. Cependant, la dérive de polarisation est souvent introduite dans la quasi-neutralité en négligeant le terme convectif, suivant les longueurs d'onde mises en jeu (ici pour $kv_{gi} \ll$

ω). Si cette hypothèse est trop forte, une autre possibilité est d'inclure cette vitesse de polarisation dans l'équation cinétique qui doit alors être sous forme conservative (Eq.4.35) et non plus advective.

Toutes les grandes choses doivent d'abord porter des masques terrifiants et monstrueux, avant de s'inscrire dans le coeur des hommes.

F. Nietzsche

5

Équations GWB et instabilités ITG en géométrie torique

Les instabilités qui se développent dans les tokamaks peuvent être divisées en deux catégories : tout d'abord les instabilités (que l'on nomme "modes flûte") dont les perturbations sont constantes le long des lignes de champ magnétique, parmi lesquelles les instabilités RT et d'échange. On observe également des instabilités tridimensionnelles qui se propagent le long des lignes de champ. Parmi ces dernières, on compte les instabilités d'ondes de dérive (qui se développent plutôt dans le plasma de bord) et les ITG.

Nous allons dans ce chapitre décrire un plasma de coeur en géométrie torique à l'aide du modèle MWB. En nous basant sur des simplifications qui nous permettrons de saisir l'essence des phénomènes étudiés, nous montrerons que le modèle GWB rend possible l'étude de l'instabilité RT ainsi que des instabilités ITG et d'échange en géométrie torique. Nous passerons enfin en revue le travail qui reste à accomplir en vue d'obtenir une modélisation précise et complète, à l'aide du modèle GWB, d'un plasma magnétisé dans ce type de géométrie.

5.1 Géométrie du système

Nous nous plaçons en géométrie torique, dans le système de coordonnées décrit sur la figure Fig.(5.1). Les vecteurs s'expriment dans le repère $\left(0, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi\right)$. Le vecteur

position s'écrit : $\mathbf{OM} = (R_o \cos\theta + r)\mathbf{u}_r - R_o \sin\theta \mathbf{u}_\theta$, et l'opérateur nabla : $\nabla = \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Nous adoptons pour le champ magnétique la forme générale

$$\mathbf{B}(r,\theta) = B(r,\theta)\Big[b_\theta(r,\theta)\mathbf{u}_\theta + b_\varphi(r,\theta)\mathbf{u}_\varphi\Big] \tag{5.1}$$

où $b_\theta(r,\theta)\mathbf{u}_\theta + b_\varphi(r,\theta)\mathbf{u}_\varphi$ est un vecteur unitaire portant la direction du champ magnétique.

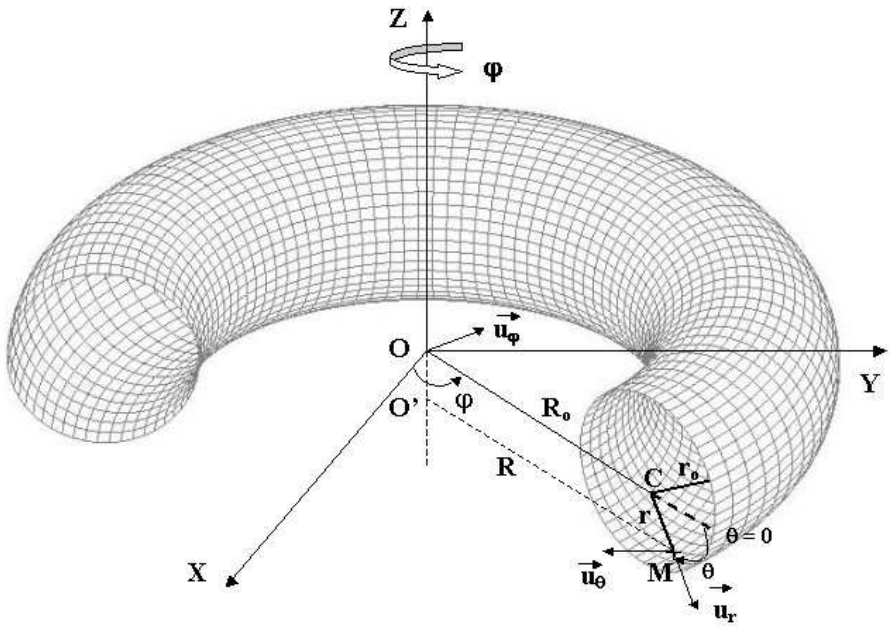


Fig. 5.1: Illustration de la géométrie tokamak et définition de la base $(0, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi)$.

Le plasma est un mélange d'électrons et de Deutérium totalement ionisé. Il existe des gradients radiaux de densité et de température à l'équilibre.

5.2 Dynamique des ions

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de dérive cinétique dans l'hypothèse $k_\perp r_{Li} \ll 1$. Lorsqu'on introduit la courbure des lignes de champ, les équations du modèle de dérive cinétique s'écrivent

$$\partial_t f_{GC} + \mathbf{v_D} \cdot \nabla f_{GC} + \dot{v}_\parallel \partial_{v_\parallel} f_{GC} = 0 \tag{5.2}$$

avec

$$\mathbf{v}_D = v_{\|}\mathbf{b} + \mathbf{v}_{E\times B} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\nabla \tag{5.3}$$

$$\mathbf{v}_{E\times B} = -\frac{\nabla\phi \times \mathbf{b}}{B} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_\nabla = \left(\frac{\mu}{q_i} + \frac{v_{\|}^2}{\Omega_{ci}}\right)\nabla \times \mathbf{b} \tag{5.5}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}/B \tag{5.6}$$

$$\dot{v}_{\|} = -\left(\frac{q_i}{m_i}\nabla\phi + \frac{\mu_i}{m_i}\nabla B\right)\cdot\left(\mathbf{b} + \frac{v_{\|}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\right) \tag{5.7}$$

$$\tag{5.8}$$

Nous étudions ce système à l'aide du modèle MWB en supposant que la fonction de distribution est de la forme

$$f_{GC}(r,\theta,\varphi,v_{\|}) = \sum_{j=1}^{M} A_j\left\{H\Big(v_{\|} - v_j^-(r,\theta,\varphi,t)\Big)\Big] - H\Big(v_{\|} - v_j^+(r,\theta,\varphi,t)\Big)\right\} \tag{5.9}$$

ce qui nous permet de réduire l'équation de dérive cinétique à un ensemble d'équations repérées par le label j

$$\frac{\partial v_j^{\pm}}{\partial t} + \mathbf{v}_D\cdot\nabla v_j^{\pm} - \dot{v}_j^{\pm} = 0 \tag{5.10}$$

Nous posons les hypothèses suivantes dans la suite de ce chapitre :

- $\mathbf{R_c} \simeq R(\cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_\theta)$ autrement dit on admet que le rayon de courbure $\mathbf{R}_c$ du champ magnétique se confond avec le vecteur $\mathbf{R}$ qui représente la distance à l'axe du tokamak (voir la figure Fig.(5.1)).
- $\nabla\times\mathbf{b} \simeq \frac{\mathbf{R_c}\times\mathbf{b}}{R_c^2} = -\frac{1}{R_c}\Big(b_\varphi\sin\theta\mathbf{u}_r + b_\varphi\cos\theta\mathbf{u}_\theta - b_\theta\cos\theta\mathbf{u}_\varphi\Big)$
- l'équilibre dépend de r et de θ. Par conséquent les vitesses d'équilibre des bords des bags sont telles que $a_j^{\pm} = a_j^{\pm}(r,\theta)$. On a donc $\nabla a_j^{\pm} = \frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta$.

5.2.1 État d'équilibre

A l'ordre 0 en perturbation, l'équation de bord des bags Eq.(5.10) s'écrit

$$\underbrace{a_j^{\pm}\frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial \theta}}_{(1)} - \underbrace{\frac{b_\varphi}{b_\theta}\frac{r}{R_c}\sin\theta\frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial r}\left(\frac{\mu}{q_i}+\frac{a_j^{\pm 2}}{\Omega_{ci}}\right)}_{(2)} - \underbrace{\frac{b_\varphi}{b_\theta}\frac{r}{R_c}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial \theta}\left(\frac{\mu}{q_i}+\frac{a_j^{\pm 2}}{\Omega_{ci}}\right)}_{(3)} + \underbrace{\frac{\mu B}{m_i}\frac{r\sin\theta}{R_c}}_{(4)} = 0 \quad (5.11)$$

Le cas qui nous intéresse le plus est celui pour lequel les particules ont une vitesse parallèle *et* perpendiculaire proche de la vitesse thermique ionique. C'est en effet le cas le plus fréquent du point de vue statistique. On a alors les ordres de grandeur suivants :

- $\frac{b_\varphi}{b_\theta}\frac{r}{R_c} \simeq 1$
- $a_j^{\pm} \simeq v_{Ti}$
- $\mu \simeq q_i v_{Ti}^2/\Omega_{ci}$ et de même $r_{Li} \simeq v_{Ti}/\Omega_{ci}$
- $\frac{1}{r}\frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial \theta} \simeq \frac{v_{Ti}}{l_\theta}$ avec $l_\theta \simeq r$
- $\frac{\partial a_j^{\pm}}{\partial r} \simeq \frac{v_{Ti}}{l_T}$ avec $l_T \simeq r$

On a donc :

- $((2)+(3))/(1) \sim r_{Li}/R_c$
- $(4)/(1) \sim r/R_c$

Les termes (2) et (3) sont nettement plus petits que le terme (4) (dans un tokamak), on peut donc ne garder que les termes (1) et (4). L'équation Eq.(5.11) se réduit à :

$$a_j\frac{\partial a_j}{\partial \theta} + \frac{\mu B}{m_i}\frac{r\sin\theta}{R_c} = 0 \quad (5.12)$$

Cette relation permet de rendre compte du comportement piégé/passant des particules. La figure Fig.(5.2) montre l'évolution de la vitesse a_j en fonction de l'angle θ pour différentes valeurs de μ.

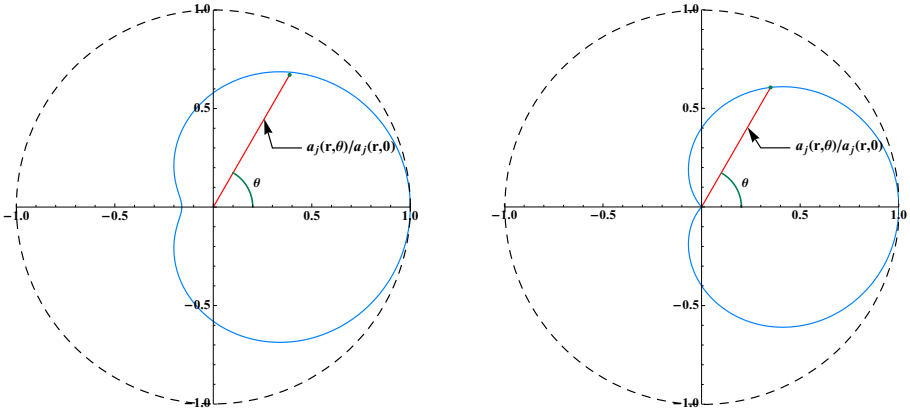


FIG. 5.2: Évolution de la vitesse d'équilibre a_j en fonction de θ. **(a)** Cas de particules passantes : a_j ne s'annule pour aucune valeur de θ. **(b)** Cas des particules piégées : il existe une valeur critique de θ pour laquelle a_j devient nul. Cette valeur correspond au point de rebroussement des particules.

Nous voulons cependant dans ce rapport rester dans un cadre simple permettant la description des instabilités ITG et RT sans tenir compte de ces effets : nous supposerons dans la suite que $\mu = 0$ et que la vitesse moyenne d'équilibre dans la direction parallèle aux lignes de champ est nulle ce qui nous permet d'écrire simplement

$$a_j^{\pm}(r,\theta) = \pm a_j(r)$$

5.2.2 Linéarisation

Les quantités fluctuantes sont supposées de la forme :

$$v_j^{\pm}(r,\theta,\varphi,t) = a_j^{\pm}(r) + \tilde{v}_j^{\pm}(r,\theta,\varphi,t) \tag{5.13}$$

$$\phi(r,\theta,\varphi,t) = \tilde{\phi}(r,\theta,\varphi,t) \tag{5.14}$$

$$n_i(r,\theta,\varphi,t) = n_{io}(r) + \tilde{n}_i(r,\theta,\varphi,t) \tag{5.15}$$

L'équation de la dynamique de bord des bags Eq.(5.10) s'écrit à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \tilde{v}_j^{\pm}}{\partial t} + \Big[a_j^{\pm}\mathbf{b} + \frac{a_j^{\pm 2}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\Big]\cdot\nabla\tilde{v}_j^{\pm} + \tilde{v}_j^{\pm}\Big[\mathbf{b} + \frac{2a_j^{\pm}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\Big]\cdot\nabla a_j^{\pm} - \nabla a_j^{\pm}\cdot\frac{\nabla\tilde{\phi}\times\mathbf{b}}{B} + \frac{q_i}{m_i}\Big[\mathbf{b} + \frac{a_j^{\pm}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\Big]\cdot\nabla\tilde{\phi} = 0 \quad (5.16)$$

Nous supposons en première approximation que les modes de Fourier sont des modes propres du système. Les quantités perturbées s'écriront donc

$$\tilde{v}_j^{\pm}(r,\theta,\varphi,t) = \delta v_j^{\pm}(r)e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)} \quad (5.17)$$

$$\tilde{\phi}(r,\theta,\varphi,t) = \delta\phi(r)e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)} \quad (5.18)$$

$$\tilde{n}_i(r,\theta,\varphi,t) = \delta n_i(r)e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)} \quad (5.19)$$

où m est le mode poloïdal et n le mode toroïdal. Les nombres d'onde sont donc tels que $k_\theta = m/r$ et $k_\varphi = n/R$. Nous supposons par ailleurs - de la même manière que dans les chapitre 2 et 3 - que $\delta\phi(r) = \delta\phi_o e^{g(r)}$ et $\delta v_j^{\pm}(r) = \delta v_{oj}^{\pm} e^{g(r)}$ avec $g(r) = -(r-r_o)^2/\Delta r^2$.

En écrivant l'équation Eq.(5.16) dans l'espace de Fourier, on peut exprimer les quantités $\delta v_j^{\pm}(r)$ et $\delta v_j^{\pm}(r)$ en fonction de l'amplitude $\delta\phi$ de perturbation du potentiel électrique. Il est alors possible d'en déduire la perturbation sur la densité ionique qui a pour expression

$$\delta n_i = \sum_{j=1}^{M} A_j\Big(\delta v_j^{+} - \delta v_j^{-}\Big) \quad (5.20)$$

On montre que la densité perturbée s'écrit[1]

$$\delta n_i = \sum_{j=1}^{M} 2A_j \frac{N_1 c_j - N_{2j}(\omega - \omega_{1j})}{(\omega-\omega_{1j})^2 - c_j^2}\delta\phi \quad (5.21)$$

avec

- $c_j = a_j(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi)$
- $\omega_{1j} = \frac{a_j^2}{R\Omega_{ci}}\Big[\cos\theta(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi) + ib_\varphi \sin\theta(g'(r) + 2\kappa_j)\Big]$

[1] Le calcul est détaillé en annexe D.

- $N_1 = \frac{q_i}{m_i}(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi)$
- $N_{2j} = \frac{a_j}{B}\Big[(k_\theta b_\varphi - k_\varphi b_\theta)\Big[\frac{\cos\theta}{R} + \kappa_j\Big] - ig'(r)\frac{b_\varphi \sin\theta}{R}\Big]$

où $\kappa_j = \frac{1}{a_j}\frac{\partial a_j}{\partial r}$ (voir la définition des paramètres MWB - chapitre 2).

5.2.3 Remarque

Si on se place dans le cas d'un champ magnétique constant, dirigé dans la direction toroïdale et que l'on fait $R_o \to +\infty$, on retrouve - en couplant la densité ionique avec une population d'électrons adiabatique - la relation de dispersion des ITG en géométrie cylindrique [20].

5.3 Étude des instabilités flûte

Nous voulons étudier l'effet de la géométrie torique sur les instabilités flûte décrites dans le chapitre 4. L'apparition de telle ou telle de ces instabilités est liée à la population électronique : nous considérons donc les deux cas précédemment étudiés d'une population adiabatique[1] ou non-adiabatique.

5.3.1 Électrons non-boltzmanniens : instabilité RT

Déterminons l'équation de dispersion du système dans le cas d'une population d'électrons décrite par[2]

$$\delta n_e = -n_{eo}\frac{\kappa_N}{\omega}\frac{k_\theta \delta\phi}{B} \tag{5.22}$$

pour $T_e = 0$ (une température électronique non-nulle complique les expressions sans modifier de manière notable les résultats). Nous obtenons cette expression en supposant que l'influence de la géométrie torique est négligeable sur la dynamique des électrons. La population ionique est décrite par Eq.(5.21) qui décrit la dynamique des ions en géométrie torique. Ces deux populations sont couplées par l'équation de

[1] Rappelons que nous employons le terme de "population adiabatique" dans le sens où cette population suit une distribution boltzmannienne de la forme : $n_e = n_{eo} exp\frac{e\phi}{k_B T_e}$

[2] Le calcul - à l'aide du modèle fluide avec fermeture isotherme - est similaire à ceux du chapitre 4. D'autre part, n'oublions pas que $\kappa_{Ne} = \kappa_{Ni} = \kappa_N$.

quasi-neutralité dans laquelle on a introduit la dérive de polarisation

$$\delta n_e = Z_i\left[\delta n_i + \nabla_\perp \cdot \Big(\frac{n_{io}}{\Omega_{ci}B}\nabla_\perp \delta\phi\Big)\right] \tag{5.23}$$

Le terme lié à la dérive de polarisation s'écrit

$$\nabla_\perp \cdot \Big(\frac{n_{io}}{\Omega_{ci}B}\nabla_\perp \delta\phi\Big) = \frac{n_{io}}{\Omega_{ci}B}\Big[\partial_r^2 g + (\partial_r g)^2 + \Big(\frac{1}{r} + \kappa_N\Big)\partial_r g - k_\theta^2\Big]\delta\phi \tag{5.24}$$

Nous avons donc l'équation de dispersion

$$\epsilon(\omega, k_\theta) = 1 - \frac{\omega}{k_\theta \kappa_N}\left[\frac{1}{\Omega_{ci}}(\kappa(r) + k_\theta^2) - B\sum_{j=1}^{M}\frac{2A_j}{n_{io}}\frac{N_1 c_j - N_{2j}(\omega - \omega_{1j})}{(\omega - \omega_{1j})^2 - c_j^2}\right] \tag{5.25}$$

où $\kappa(r) = -\Big[\partial_r^2 g + (\partial_r g)^2 + \Big(\frac{1}{r} + \kappa_N\Big)\partial_r g\Big]$

Le terme $2ia_j^2 b_\varphi \sin\theta\kappa_j$ dans ω_{1j} est un terme advectif lié à la composante radiale de la dérive de courbure d'équilibre (donc perpendiculaire à la direction de propagation) : l'instabilité RT ne nécessitant qu'une dérive d'équilibre parallèle à la direction de propagation, nous négligeons ce terme afin de n'observer que les effets liés à l'instabilité RT de courbure. Nous supposons donc que $\omega_{1j} = \frac{a_j^2\cos\theta}{R\Omega_{ci}}(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi)$.

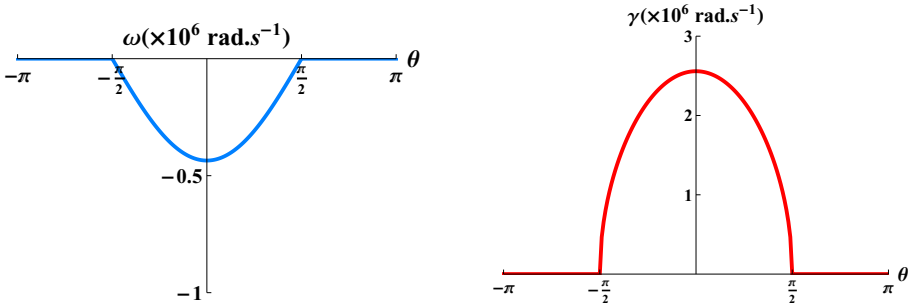
Étudions le cas $M = 1$ en faisant les hypothèses suivantes

- $k_\varphi = 0$
- $b_\theta = 0$ et $b_\varphi = 1$
- $r = r_o$ et $\frac{1}{\Delta r} \ll k_\theta$ ce qui implique $\kappa(r) \ll {k_\theta}^2$.
- $T_e = 0$

L'équation de dispersion s'écrit donc

$$\omega^2 - \omega\Big(\omega_1 - \frac{\Omega_{ci}\cos\theta}{k_\theta R}\Big) + \frac{\kappa_N\omega_1\Omega_{ci}}{k_\theta} = 0 \tag{5.26}$$

avec $\omega_1 = -\frac{k_\theta a^2\cos\theta}{R\Omega_{ci}}$ où $a = \sqrt{3}v_{Ti}$ est la vitesse du bord du bag de la fonction de distribution d'équilibre.



(a) (b)

FIG. 5.3: (a) fréquence de l'instabilité RT en fonction de θ. **(b)** taux d'instabilité en fonction de θ.

Sur la figure Fig.(5.3(b)), le taux d'instabilité est tracé en fonction de θ pour $T_i = 15\,keV, T_e = 0\,keV, k_\theta = 500\,m^{-1}, R_o = 6.2\,m, r = 2{\times}10^{-1}\,m, \kappa_N = -10\,m^{-1}, B_o = 5\,T$. Nous supposons que $\mu = 0\ J.T^{-1}$. On observe que le plasma est instable pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Ce résultat correspond à la caractéristique de l'instabilité RT qui veut qu'elle soit instable lorsque le gradient de densité et la force qui cause la dérive d'équilibre du plasma soient de sens opposé (en effet, ici le plasma est instable dans la région où la force qui induit la dérive de courbure est de sens opposé au gradient de densité ionique). La figure Fig.(5.3(a)) montre la fréquence correspondante. D'après Eq.(5.26), cette fréquence a pour expression[1]

$$\omega_r = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_\theta a^2}{\Omega_{ci}} + \frac{\Omega_{ci}}{k_\theta}\right]\frac{\cos\theta}{R}$$

On peut comparer cette fréquence à celle de l'instabilité RT en géométrie z-pinch (Eq.(4.33)). En effet, à l'équilibre, la vitesse de dérive liée à l'inhomgénéité du champ magnétique s'écrit : $v_{co} = -a^2\frac{\cos\theta}{R\Omega_{ci}}$. On retrouve donc une expression similaire pour les deux types de géométrie. Comme en géométrie cartésienne, nous avons un terme du type $k_\perp v_o$ où v_o est une vitesse de dérive d'équilibre dans la direction de propagation de l'instabilité. Le terme $-\frac{1}{2}\frac{\Omega_{ci}\cos\theta}{Rk_\theta}$ ainsi que la différence de signe entre la géométrie z-pinch et torique sont des effets géométriques. Nous voyons également que les taux d'instabilité ont la même forme pour les 3 géométries considérées. Le tableau 5.4

[1] l'indice r indique que ω_r est la partie réelle de la solution $\omega = \omega_r + i\gamma$ de l'équation de dispersion Eq.(5.26)

Géométrie	Fréquence ω_r	Taux d'instabilité γ
Cartésien	$k_\perp v_{gi}/2$	$\sqrt{{\omega_r}^2 - \Omega_{ci} v_{gi} \kappa_N}$
z-pinch	$k_\perp v_{co}/2 + \Omega_{ci}/2k_\perp r$	$\sqrt{{\omega_r}^2 - \Omega_{ci} v_{co} \kappa_N}$
Torique	$k_\perp v_{co}/2 - \Omega_{ci} \cos\theta/2k_\perp R$	$\sqrt{{\omega_r}^2 - \Omega_{ci} v_{co} \kappa_N}$

Fig. 5.4: Fréquence et taux d'instabilité de l'instabilité RT pour les géométries cartésienne, z-pinch et torique.

présente la fréquence et le taux d'instabilité pour l'instabilité RT dans les 3 géométries que nous avons étudiées.

5.3.2 Électrons boltzmanniens : instabilité d'échange

Nous considérons maintenant le cas d'une population d'électrons boltzmanniens (avec cette fois-ci $T_e \neq 0$, et toujours $k_\varphi = 0$).

L'équation de dispersion s'écrit dans ce cas

$$\epsilon(\omega, k_\theta) = 1 + \frac{k_B T_e}{e}\left[\frac{1}{B\Omega_{ci}}(\kappa(r) + k_\theta^2) - \sum_{j=1}^{M} \frac{2A_j}{n_{io}} \frac{N_1 c_j - N_{2j}(\omega - \omega_{1j})}{(\omega - \omega_{1j})^2 - c_j^2}\right] \tag{5.27}$$

Sur la figure Fig.(5.5) nous avons tracé le seuil d'instabilité dans le cas $M = 50$ avec les hypothèses

- $k_\varphi = 0$
- $b_\theta = 0$ et $b_\varphi = 1$
- $r = r_o$ et $\frac{1}{\Delta r} \ll k_\theta$ ce qui implique $\kappa(r) \ll {k_\theta}^2$.
- $\theta = 0$

L'allure de la courbe de seuil est similaire à celle que l'on observe en géométrie z-pinch [38] et en géométrie torique [37] pour l'instabilité d'échange.

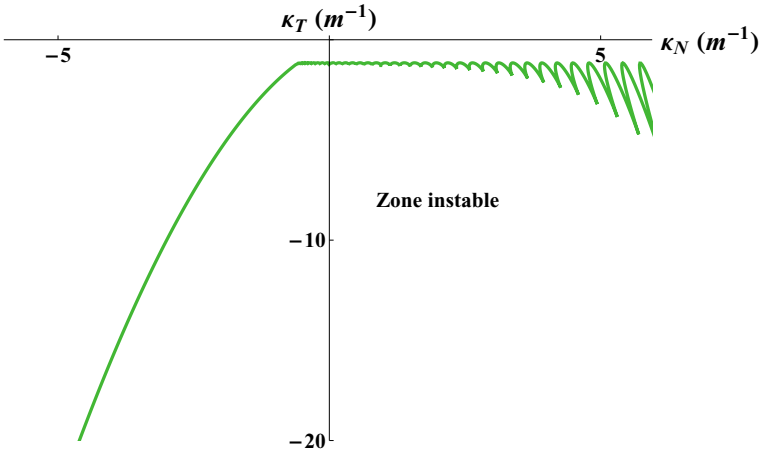


FIG. 5.5: diagramme de seuil d'un mode flûte en géométrie torique pour une population d'électrons boltzmanniens

Ce résultat met en valeur l'utilité du modèle GWB puisqu'on retrouve le comportement de l'instabilité d'échange.

5.4 Étude des instabilités à propagation parallèle

Nous étudions le cas d'une population électronique adiabatique et d'une instabilité dont la longueur d'onde parallèle aux lignes de champ magnétique est finie : nous avons donc[1] $k_\varphi \neq 0$. La relation de dispersion est alors :

$$\epsilon(\omega, k_\theta, k_\varphi) = 1 + \frac{k_B T_e}{e}\left[\frac{1}{B\Omega_{ci}}(\kappa(r) + k_\theta^2) - \sum_{j=1}^{M} \frac{2A_j}{n_{io}} \frac{N_1 c_j - N_{2j}(\omega - \omega_{1j})}{(\omega - \omega_{1j})^2 - c_j^2}\right] \tag{5.28}$$

Sur la figure Fig.(5.6), nous traçons, en fonction de θ, pour $\kappa_N = -1\ m^{-1}$, $\kappa_T = -25\ m^{-1}$, et dans le cas $M = 15$, le taux d'instabilité pour les paramètres : $T_i = 15\ keV$, $T_e = 15\ keV$, $k_\theta = 500\ m^{-1}$, $R_o = 6.2\ m$, $r = 2 \times 10^{-1}\ m$, $B_o = 5\ T$, $\mu = 0\ J.T^{-1}$, et $k_\varphi = 5 \times 10^{-1}\ m^{-1}$. Nous superposons pour comparaison le taux d'instabilité observé dans le cas des ITG en géométrie cylindrique [19].

[1] L'utilisation d'une population d'électrons adiabatiques est ici pleinement justifiée (ce qui n'est pas le cas lorsqu'on est en présence d'une instabilité flûte [63])

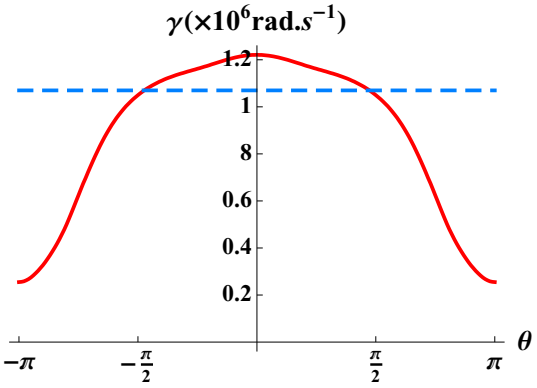


FIG. 5.6: Taux d'instabilité en géométrie torique pour une population d'électrons boltzmanniens en fonction de θ (courbe continue), nous avons superposé le taux d'instabilité observé dans le cas des ITG en géométrie cylindrique (courbe pointillée) [19].

Remarquons que, pour les mêmes paramètres, en $\theta = 0$, les taux d'instabilité des instabilités RT ($k_\varphi = 0$, électrons non-boltzmanniens) et interchange ($k_\varphi = 0$, électrons boltzmanniens) sont[1] :

- instabilité RT : $\gamma = 2.24 \times 10^6\ rad.s^{-1}$
- instabilité d'échange : $\gamma = 1.59 \times 10^6\ rad.s^{-1}$
- instabilité à propagation parallèle (courbe continue sur la figure Fig.(5.6)) : $\gamma = 1.22 \times 10^6\ rad.s^{-1}$
- instabilité ITG en géométrie cylindrique (courbe pointillée sur la figure Fig.(5.6)) : $\gamma = 1.07 \times 10^6\ rad.s^{-1}$

Nous remarquons que l'introduction d'une propagation parallèle ($k_\varphi \neq 0$) engendre une diminution du taux d'instabilité en $\theta = 0$. Ce taux est néanmoins légèrement supérieur au taux ITG en géométrie cylindrique.

Sur la figure Fig.(5.7), nous traçons, en $\theta = 0$, le taux d'instabilité dans le plan (κ_N, κ_T) pour les mêmes paramètres. Nous obtenons un graphe de densité dont l'aspect est similaire à celui obtenu dans les cas des ITG en géométrie cylindrique [19], mais avec cependant des différences dues à l'introduction de la géométrie torique dans le modèle.

[1] Nous donnons pour comparaison les taux d'instabilité en $\theta = 0$ calculés dans le cas des électrons boltzmanniens avec $k_\varphi \neq 0$ pour le cas torique et le cas cylindrique décrits sur la figure Fig.(5.6)

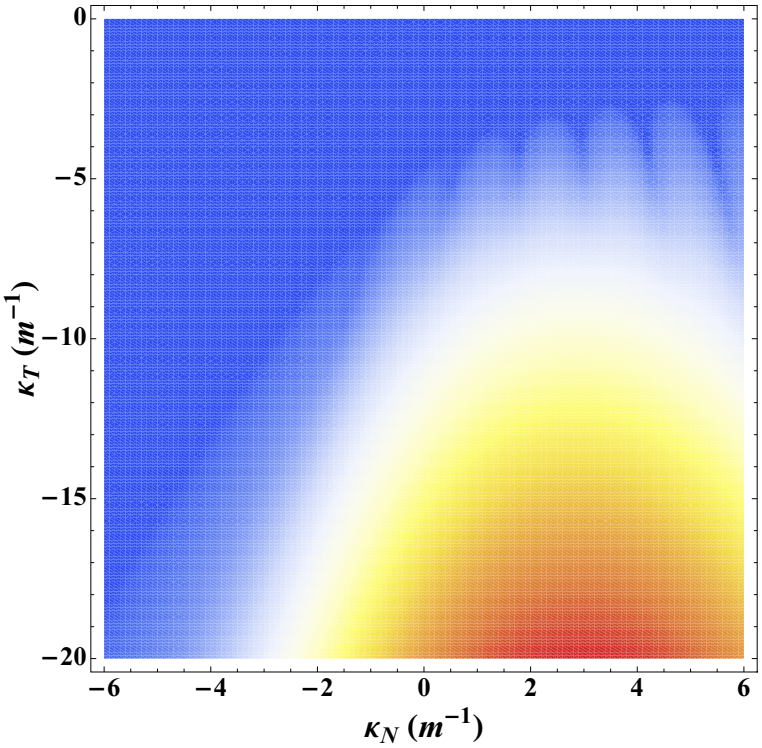


Fig. 5.7: Taux d'instabilité en géométrie torique pour une population d'électrons boltzmanniens.

5.5 Conclusion

Les différentes descriptions que nous avons proposées dans ce chapitre cherchent, comme nous l'avons dit, à saisir l'essence des phénomènes : elles sont pour cette raison épurées de tous les causes extérieures qui pourraient en gêner l'interprétation. Nous avons montré que le modèle proposé permet une description des instabilités d'échange, RT et ITG. Il doit cependant être raffiné si on veut pouvoir modéliser les instabilités de coeur de la manière la plus précise possible. Les hypothèses simplificatrices que nous avons faites sont les suivantes :

- effets de gyromoyenne négligeables
- les modes de Fourier sont supposés être des modes propres du système

Le modèle que nous avons développé tout au long de ce rapport peut aisément intégrer la suppression de la première hypothèse : la prise en compte des effets de gyromoyenne et d'une distribution en moment magnétique est décrite en détail dans le chapitre 2.

Concernant la deuxième hypothèse, nous savons que les modes de Fourier ne sont pas modes propres du système. En effet, en plus de la variation rapide des modes de Fourier, les quantités perturbées présentent une variation lente en θ. Cette variation n'est pas prise en compte dans notre description. Pour aller plus loin que la description en modes de Fourier, plusieurs approches sont possibles : une de ces approches consiste à supposer que les quantités perturbées sont proportionnelles à un mode de Fourier multiplié par une fonction $f(\theta)$ [64] supposée connue. Une autre approche consiste à utiliser la représentation dite de ballonnement [65]. Ces considérations sont cependant hors du cadre de notre étude : nous laissons ce travail à nos successeurs.

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans ce rapport montrent que le modèle GWB est bien adapté à l'étude d'un certain nombre d'instabilités qui se développent dans les plasmas magnétisés.

Après avoir posé le cadre de l'étude, nous avons, en premier lieu, développé une méthode générale de description d'une fonction de distribution à l'aide du modèle MWB. A partir de cette description, nous avons exploré quelques unes des diverses possibilités que le couplage du modèle MWB avec le modèle dérive-cinétique ou gyrocinétique apporte.

Dans le chapitre 2, nous montrons comment les effets FLR peuvent être décrits à partir de la modélisation d'une fonction de distribution quelconque (quelconque aussi bien en vitesse parallèle qu'en moment magnétique). L'exemple de l'instabilité ITG en géométrie cylindrique met en lumière l'influence notable de la forme de la distribution en moments magnétiques sur le seuil aussi bien que sur le taux d'instabilité. Ces résultats montrent l'importance d'inclure une distribution en moments magnétiques dans les modèles lorsqu'on veut déterminer une valeur précise des coefficients de transport radiaux dans les tokamaks.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude d'un système cylindrique dans lequel il existe un déphasage entre les perturbations de potentiel électrique et la réponse sur la densité électronique. Le modèle CGWB que nous obtenons permet l'étude des CDW et de ITG. Les comparaisons avec des travaux de modélisation utilisant le modèle fluide [36] [48], et avec des mesures expérimentales [58] valident notre modèle. L'intérêt de celui-ci est, outre son caractère cinétique qui autorise l'étude des interactions onde-particule, qu'il permet l'étude de deux types d'instabilités. On pourrait imaginer par exemple, dans une machine comme Mirabelle, mettre en place un dispositif expérimental permettant d'établir des gradients de température et de densité ionique d'équilibre autorisant

ainsi une étude expérimentale et théorique (à l'aide du modèle CGWB) précise des transitions de mode entre les CDW et les ITG.

L'étude menée dans le chapitre 4 a pour but de mettre en évidence les conditions nécessaires à la modélisation des instabilités RT et d'échange. Nous montrons, sur l'exemple de l'instabilité RT gravitationnelle puis sur celui de l'instabilité RT liée à la courbure du champ magnétique en géométrie z-pinch, que la prise en compte d'une population d'électrons non-adiabatique et de la dérive de polarisation sont nécessaires dans le cas d'une instabilité générée par un gradient de densité. Nous rappelons comment l'instabilité d'échange peut être décrite en considérant une population électronique adiabatique sans forcément tenir compte de la dérive de polarisation. Nous notons également que cette instabilité étant de type *flûte*, la justification de la réponse adiabatique des électrons est problématique [63]. Enfin, nous remarquons que le traitement de la dérive de polarisation dans le modèle gyrocinétique permet de trouver des résultats en accord avec le modèle fluide. Cependant, la dérive de polarisation est souvent introduite dans la quasi-neutralité en négligeant le terme convectif, suivant les longueurs d'onde mises en jeu. Si cette hypothèse est trop forte, une autre possibilité est d'inclure cette vitesse de polarisation dans l'équation cinétique qui doit alors être sous forme conservative et non plus advective. Dans ce cadre il serait intéressant de revenir sur les fondements de la théorie gyrocinétique.

Le chapitre 5 présente le modèle GWB appliqué à la géométrie torique. Nous étudions deux types d'instabilité dans cette géométrie : tout d'abord les instabilités de type flûte - pour lesquelles nous retrouvons des résultats similaires à ceux du chapitre précédent -, puis les instabilités tri-dimensionnelles. Nous terminons ce chapitre en détaillant les hypothèses simplificatrices que nous avons utilisées.

En définitive, nos résultats montrent comment une modélisation précise des instabilités de coeur et de bord de tokamak est possible. Le modèle GWB, qui est un modèle multi-fluide, est une alternative intéressante aux modèles cinétiques dans le sens où il permet une approche analytique plus aisée et qu'il rend possible l'étude des effets cinétiques au prix d'un effort numérique modéré. Certaines limitations dans la description des phénomènes non-linéaires font toutefois que ce modèle n'a pas pour vocation de remplacer les modèles cinétiques, mais plutôt d'accompagner leur développement en permettant, de manière très simple, l'étude de tel ou tel phénomène physique particulier.

Les perspectives de notre travail sont la poursuite de l'effort de modélisation des plasmas magnétisés à l'aide du modèle water-bag. Nous avons présenté ici les divers ingrédients nécessaires à une modélisation précise de ce type de plasma (effets FLR, impact des différents types de dynamique électronique, possibilité d'étude des effets cinétiques en faisant varier le nombre de bags utilisés pour la modélisation, géométries impliquant un champ magnétique inhomogène). Ces travaux nous ont montré que le modèle GWB est robuste et permet une bonne description d'un grand nombre de phénomènes physiques impliqués dans les plasmas chauds magnétisés. Les efforts restant à accomplir concernent essentiellement la décomposition en modes propres du système : en géométrie torique, les modes de Fourier, bien que nous apportant des informations sur le système, ne nous permettent pas de décrire convenablement des phénomènes tels que le piégeage des particules : pour obtenir les modes propres du système, on doit résoudre numériquement une forme différentielle sur les variables (r, θ). Le modèle MWB rend son exploitation plus aisée puisque son utilisation autorise un traitement simplifié des intégrales sur la vitesse parallèle (qui autrement nécessitent des prolongements analytiques). La prise en compte des variations lentes dans la direction perpendiculaire au champ magnétique est la prochaine étape vers une modélisation complète d'un plasma magnétisé en géométrie torique.

Appendices

Annexe A

Calcul de $\partial_r m_l$

On doit calculer

$$\partial_r m_l = \partial_r \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel v_\parallel^l f_{GC}(r, v_\parallel, \mu) \tag{A.1}$$

avec

$$f_{GC}(r, v_\parallel, \mu) = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_{io}}{v_{Ti}^3} P(\frac{v_\parallel}{v_{Ti}}, \frac{\mu}{v_{Ti}^2}) \delta(\mu - \mu_k) \Delta\mu \coloneqq \mathcal{G}(\frac{v_\parallel}{v_{Ti}}, \frac{\mu}{v_{Ti}^2}) \tag{A.2}$$

Posons et calculons la dérive radiale de l'intégrant [1]

$$\partial_r v_\parallel^l f_{GC}(r, v_\parallel, \mu) = v_\parallel^l \left[\kappa_N - \frac{3}{2}\kappa_T - \left(\frac{\kappa_T}{2} \frac{v_\parallel}{v_{Ti}} \partial_\alpha + \kappa_T \frac{\mu}{v_{Ti}^2} \partial_\beta \right) \ln \mathcal{G}(\alpha, \beta) \right] \mathcal{G}(\frac{v_\parallel}{v_{Ti}}, \frac{\mu}{v_{Ti}^2}) \tag{A.3}$$

et effectuons l'intégration terme à terme

$$\int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \kappa_N v_\parallel^l \mathcal{G}(\frac{v_\parallel}{v_{Ti}}, \frac{\mu}{v_{Ti}^2}) = \kappa_N m_l \tag{A.4}$$

$$\int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{3}{2}\kappa_T v_\parallel^l \mathcal{G}(\frac{v_\parallel}{v_{Ti}}, \frac{\mu}{v_{Ti}^2}) = \frac{3}{2}\kappa_T m_l \tag{A.5}$$

pour le dernier terme, on doit faire le changement de variable $\alpha = \frac{v_\parallel}{v_{Ti}}$, et $\beta = \frac{\mu}{v_{Ti}^2}$, puis intégrer par parties en se souvenant que la fonction $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ est normée sur son domaine

[1] en notant que $\frac{\partial_r n_{io}}{n_{io}} = \kappa_N$ et que $\frac{\partial_r v_{Ti}}{v_{Ti}} = \frac{\partial_r T_i}{2T_i} = \frac{\kappa_T}{2}$

de définition

$$\int_0^\infty v_{Ti}^2 d\beta \int_{-\infty}^\infty v_{Ti} d\alpha v_{Ti}^l \alpha^l \left(\frac{\kappa_T}{2} \alpha \partial_\alpha + \kappa_T \beta \partial_\beta \right) \mathcal{G}(\alpha, \beta) = -\left[\frac{l}{2} + \frac{3}{2} \right] \kappa_T m_l \tag{A.6}$$

finalement on obtient

$$\partial_r m_l = \left[\kappa_N + \frac{l}{2} \kappa_T \right] m_l \tag{A.7}$$

Annexe B

Calcul des densités électronique et ioniques perturbées : fermeture isotherme et adiabatique

En nous basant sur les invariances du système, nous voyons que la vitesse d'équilibre ne dépendra que de x et qu'elle sera contenue dans le plan (xOy). En outre la vitesse d'équilibre peut être de deux origines possibles : soit elle est imposée par un flux d'équilibre, soit elle est liée à une vitesse de dérive induite par une force dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Dans le cas qui nous occupe, nous choisissons de n'imposer aucun flux d'équilibre (on a donc nécessairement $v_{oz} = 0$). Par ailleurs, les forces susceptibles d'induire une dérive d'équilibre sont dirigées suivant (Ox). Par conséquent nous aurons nécessairement $v_{ox} = 0$. La vitesse d'équilibre du système sera donc de la forme

$$\mathbf{v}_o(\mathbf{r}) = v_{oy}(x)\mathbf{u}_y$$

A l'ordre 0 les équations fluide donnent :

- L'équation de continuité : $n_o \nabla \cdot \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_o \cdot \nabla n_o = 0$
- L'équation de conservation de l'impulsion :

$$mn_o(\mathbf{v}_o \cdot \nabla)\mathbf{v}_o = qn_o\mathbf{v}_o \times \mathbf{B}_o + mn_o g\mathbf{u}_x - \nabla\Big(n_o k_B T_o\Big)$$

D'après l'équation de continuité nous obtenons

$$\partial_x v_{ox} + v_{ox}\kappa_N = 0 \tag{B.1}$$

Cette équation est donc vérifiée puisque $v_{ox} = 0$.

D'autre part, d'après l'équation de conservation de l'impulsion on a

- projeté sur (Ox) : $mn_o v_{ox}\partial_x v_{ox} = qn_o B_o v_{oy} + m_e n_o g - \nabla\Big(n_o k_B T_o\Big)$
- projeté sur (Oy) : $mn_o v_{ox}\partial_x v_{oy} = qn_o B_o v_{ox}$

L'équation projetée sur (Oy) est identiquement nulle. Concernant la projection sur (Ox), nous avons[1], après avoir divisé par mn_o,

$$0 = \Omega_c v_{oy} + g - \frac{k_B T_o}{m}(\kappa_N + \kappa_T) \tag{B.2}$$

D'où

$$\mathbf{v}_o = -\left[\frac{g}{\Omega_c} - \frac{k_B T_o}{qB_o}(\kappa_N + \kappa_T)\right]\mathbf{u}_y \tag{B.3}$$

Déterminons maintenant les équations fluides à l'ordre 1.

Pour l'équation de continuité, nous avons

$$-i(\omega - kv_{oy})\frac{n_1}{n_o} + ikv_{1y} + \kappa_N v_{1x} = 0 \tag{B.4}$$

L'équation de conservation de l'impulsion s'écrit

$$\begin{aligned} m\Big[n_o\partial_t\mathbf{v}_1 + n_o(\mathbf{v}_o\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 + n_o(\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_o + n_1(\mathbf{v}_o\cdot\nabla)\mathbf{v}_o\Big] \\ = qn_o\Big[\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_o\Big] + qn_1\mathbf{v}_o\times\mathbf{B}_o + mn_1\mathbf{g} - \nabla n_1 k_B T_o - \nabla n_o k_B T_1 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Exprimons les différents termes de cette équation :

- $mn_o\partial_t\mathbf{v}_1 = -imn_o\omega\mathbf{v}_1$
- $n_o(\mathbf{v}_o\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 = imn_o k v_{oy}\mathbf{v}_1$
- $mn_o(\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$
- $mn_1(\mathbf{v}_o\cdot\nabla)\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$
- $qn_o\Big[\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_o\Big] = qn_o B_o\Big[v_{1y}\mathbf{u}_x + \Big(\frac{E_{1y}}{B_o} - v_{1x}\Big)\mathbf{u}_y\Big]$
- $qn_1\mathbf{v}_o\times\mathbf{B}_o = qB_o n_1 v_{oy}\mathbf{u}_x = -n_1 mg\mathbf{u}_x + n_o k_B T_o(\kappa_N + \kappa_T)\frac{n_1}{n_o}\mathbf{u}_x$

[1]Nous adoptons la notation $\Omega_c = qB_o/m$. Autrement dit, dans les cas des électrons nous avons $\Omega_c \to -\Omega_{ce}$ et dans le cas des ions, $\Omega_c \to \Omega_{ci}$

- $mn_1\mathbf{g} = mn_1 g\mathbf{u}_x$
- $-\nabla n_1 k_B T_o - \nabla n_o k_B T_1 = -n_o k_B T_o\Big[\Big(\frac{n_1}{n_o}\kappa_T + \frac{T_1}{T_o}\kappa_N\Big)\mathbf{u}_x + ik\Big(\frac{n_1}{n_o} + \frac{T_1}{T_o}\Big)\mathbf{u}_y\Big]$

Nous avons donc le système

- équation de continuité :

$$-i(\omega - kv_{oy})\frac{n_1}{n_o} + ikv_{1y} + \kappa_N v_{1x} = 0$$

- équation de conservation projetée sur (Ox) :

$$-i(\omega - kv_{oy})v_{1x} = \Omega_c v_{1y} + \frac{k_B T_o}{m}\kappa_N\Big(\frac{n_1}{n_o} - \frac{T_1}{T_o}\Big)$$

- équation de conservation projetée sur (Oy) :

$$-i(\omega - kv_{oy})v_{1y} = \Omega_c\Big[\frac{E_{1y}}{B_o} - v_{1x}\Big] - ik\frac{k_B T_o}{m}\Big(\frac{n_1}{n_o} + \frac{T_1}{T_o}\Big)$$

B.1 Densité électronique

Dans le cas de la population électronique, on a[1]

$$\mathbf{v}_{eo} \simeq -\frac{k_B T_{eo}}{eB_o}(\kappa_N + \kappa_T)\mathbf{u}_y \tag{B.6}$$

Nous supposons en outre qu'en raison de leur faible inertie, les électrons réagissent de manière instantanée aux fluctuations de potentiel. Cette hypothèse revient à supposer que le terme de gauche est nul dans l'équation de conservation de l'impulsion.

Le système des équations fluides s'écrit donc :

- équation de continuité :

$$-i(\omega - kv_{eoy})\frac{n_{e1}}{n_{eo}} + ikv_{e1y} + \kappa_N v_{e1x} = 0$$

- équation de conservation projetée sur (Ox) :

$$0 = -\Omega_{ce} v_{e1y} + \frac{k_B T_{eo}}{m_e}\kappa_N\Big(\frac{n_{e1}}{n_{eo}} - \frac{T_{e1}}{T_{eo}}\Big)$$

- équation de conservation projetée sur (Oy) :

$$0 = -\Omega_{ce}\Big[\frac{E_{e1y}}{B_o} - v_{e1x}\Big] - ik\frac{k_B T_{eo}}{m_e}\Big(\frac{n_{e1}}{n_{eo}} + \frac{T_{e1}}{T_{eo}}\Big)$$

[1] En raison de la faible inertie des électrons, leur vitesse de dérive gravitationnelle sera très petite devant la vitesse de dérive diamagnétique.

En combinant ces 3 équations, et en faisant une hypothèse de fermeture, on détermine la densité électronique perturbée en fonction du champ électrique.

Dans le cas d'une fermeture isotherme (i.e. $T_{e1} = 0$)

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = -\frac{i\kappa_N}{\omega + \omega^*_{ne} - \omega^*_{Te}} \frac{E_{1y}}{B_o} \tag{B.7}$$

Si on utilise une fermeture adiabatique du type $p = Cn^3$, nous avons

$$\frac{T_{e1}}{T_{eo}} = 2\frac{n_{e1}}{n_{eo}} \tag{B.8}$$

ce qui induit

$$\omega^*_{ne} = \omega^*_{Te}$$

La densité électronique perturbée s'écrit alors

$$\frac{n_{e1}}{n_{eo}} = -\frac{i\kappa_N}{\omega} \frac{E_{1y}}{B_o} \tag{B.9}$$

B.2 Densité ionique

Dans le cas de la population ionique, on a

$$\mathbf{v}_{io} = -\left[\frac{g}{\Omega_{ci}} - \frac{k_B T_{io}}{q_i B_o}(\kappa_N + \kappa_T)\right]\mathbf{u}_y \tag{B.10}$$

et le système des équations fluides s'écrit :

- équation de continuité :

$$-i(\omega - kv_{ioy})\frac{n_{i1}}{n_{io}} + ikv_{i1y} + \kappa_N v_{i1x} = 0$$

- équation de conservation projetée sur (Ox) :

$$-i(\omega - kv_{ioy})v_{i1x} = \Omega_{ci} v_{i1y} + \frac{k_B T_{io}}{m_i}\kappa_N\left(\frac{n_{i1}}{n_{io}} - \frac{T_{i1}}{T_{io}}\right)$$

- équation de conservation projetée sur (Oy) :

$$-i(\omega - kv_{ioy})v_{i1y} = \Omega_{ci}\left[\frac{E_{1y}}{B_o} - v_{i1x}\right] - ik\frac{k_B T_{io}}{m_i}\left(\frac{n_{i1}}{n_{io}} + \frac{T_{i1}}{T_{io}}\right)$$

En combinant ces 3 équations, et en faisant une hypothèse de fermeture, on détermine la densité ionique perturbée en fonction du champ électrique.

Dans le cas d'une fermeture isotherme (i.e. $T_{i1} = 0$)

$$\frac{n_{i1}}{n_{io}} = -i\frac{\kappa_N + k\left(\frac{\omega - kv_{io}}{\Omega_{ci}}\right)}{(1 + k^2 {r_{Li}}^2)(\omega - kv_{io}) + 2\omega^*_{ni}}\frac{E_{1y}}{B_o} \tag{B.11}$$

Si on utilise une fermeture adiabatique du type $p = Cn^3$, nous avons

$$\frac{T_{i1}}{T_{io}} = 2\frac{n_{i1}}{n_{io}} \tag{B.12}$$

ce qui induit

$$\omega^*_{ni} = \omega^*_{Ti}$$

La densité ionique perturbée s'écrit alors

$$\frac{n_{i1}}{n_{io}} = -i\frac{\kappa_N + k\left(\frac{\omega - kv_{io}}{\Omega_{ci}}\right)}{(1 + 3k^2 {r_{Li}}^2)(\omega - kv_{io}) + 2\omega^*_{ni}}\frac{E_{1y}}{B_o} \tag{B.13}$$

Annexe C

Calcul de la relation de dispersion MWB en géométrie z-pinch

Nous partons de l'équation de dérive cinétique et introduisons une fonction MWB. Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation de dérive cinétique se réduit donc à un ensemble d'équations sur les bords des bags

$$\partial_t v_j^{\pm} + \mathbf{v}_D \cdot \nabla_{\mathbf{r}} v_j^{\pm} - \dot{v}_{\parallel} = 0 \tag{C.1}$$

Dans la géométrie z-pinch que nous avons choisie, nous avons

- $\mathbf{v}_D = v_j^{\pm}\mathbf{u}_\theta + \mathbf{v}_{E\times B} + \frac{v_j^{\pm}}{r\Omega_{ci}}\mathbf{u}_z$

Les perturbations sont proportionnelles à $e^{-i(\omega t - kz)}$, et les quantités perturbées s'écrivent

- $v_j^{\pm} = \pm a_j(r) + \delta v_j^{\pm} e^{-i(\omega t - kz)}$
- $\phi = \delta\phi e^{-i(\omega t - kz)}$

à l'ordre 1 on a

$$\delta v_j^{\pm} = \pm \frac{k\delta\phi}{B} a_j \frac{\kappa_j + \frac{1}{r}}{\omega - \frac{ka_j^2}{r\Omega_{ci}}} \tag{C.2}$$

la perturbation sur la densité ionique est donc

$$\delta n_i = \sum_{j=1}^{M} \frac{k\delta\phi}{B} \alpha_j \frac{\kappa_j + \frac{1}{r}}{\omega - \frac{ka_j^2}{r\Omega_{ci}}} \tag{C.3}$$

Dans le cas d'une population d'électrons Boltzmanniens, nous obtenons

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{k_B T_e}{eB} k \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \frac{\kappa_j + \frac{1}{r}}{\omega - \frac{k a_j^2}{r \Omega_{ci}}} \tag{C.4}$$

Annexe D

Calcul de la densité ionique perturbée en géométrie torique

Exprimons les termes de l'équation Eq.(5.16). Nous avons

- $\frac{\partial \tilde{v}_j^{\pm}}{\partial t} = -i\omega\delta v_j^{\pm} e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)}$
- $\left[a_j^{\pm}\mathbf{b} + \frac{a_j^{\pm 2}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\right]\cdot\nabla\tilde{v}_j^{\pm} = \left[-\frac{b_\varphi \sin\theta a_j^{\pm 2} g'(r)}{R\Omega_{ci}} + i\Big(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi\Big)a_j^{\pm} + i\Big(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi\Big)\frac{a_j^{\pm 2}\cos\theta}{R\Omega_{ci}}\right]\delta v_j^{\pm} e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)}$
- $\tilde{v}_j^{\pm}\left[\mathbf{b} + \frac{2a_j^{\pm}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\right]\cdot\nabla a_j^{\pm} = -\frac{2b_\varphi \sin\theta a_j^{\pm 2}}{R\Omega_{ci}}\kappa_j\delta v_j^{\pm} e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)}$
- $-\nabla a_j^{\pm}\cdot\frac{\nabla\tilde{\phi}\times\mathbf{b}}{B} = i\Big(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi\Big)\frac{a_j^{\pm}\kappa_j}{B}\delta\phi e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)}$
- $\frac{q_i}{m_i}\left[\mathbf{b} + \frac{a_j^{\pm}}{\Omega_{ci}}\nabla\times\mathbf{b}\right]\cdot\nabla\tilde{\phi} = \left[-\frac{q_i}{m_i}\frac{b_\varphi \sin\theta a_j^{\pm} g'(r)}{R\Omega_{ci}} + i\frac{q_i}{m_i}\Big(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi\Big) + i\frac{q_i}{m_i}\Big(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi\Big)\frac{a_j^{\pm}\cos\theta}{R\Omega_{ci}}\right]\delta\phi e^{-i(\omega t - m\theta - n\varphi)}$

On a donc :

$$\begin{aligned}\Bigg[\omega - i\frac{b_\varphi \sin\theta a_j^{\pm 2} g'(r)}{R\Omega_{ci}} - \Big(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi\Big)a_j^{\pm} \\ - \Big(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi\Big)\frac{a_j^{\pm 2}\cos\theta}{R\Omega_{ci}} - 2i\frac{b_\varphi \sin\theta a_j^{\pm 2}}{R\Omega_{ci}}\kappa_j\Bigg]\delta v_j^{\pm} \\ + \Bigg[\Big(k_\theta b_\varphi - k_\varphi b_\theta\Big)\frac{a_j^{\pm}\kappa_j}{B} - i\frac{q_i}{m_i}\frac{b_\varphi \sin\theta a_j^{\pm} g'(r)}{R\Omega_{ci}} \\ - \frac{q_i}{m_i}\Big(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi\Big) + \frac{q_i}{m_i}\Big(k_\theta b_\varphi - k_\varphi b_\theta\Big)\frac{a_j^{\pm}\cos\theta}{R\Omega_{ci}}\Bigg]\delta\phi = 0 \quad \text{(D.1)}\end{aligned}$$

Nous posons les notations

- $c_j = a_j(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi)$

- $\omega_{1j} = \frac{a_j^2}{R\Omega_{ci}}\Big[\cos\theta(k_\varphi b_\theta - k_\theta b_\varphi) + ib_\varphi \sin\theta(g'(r) + 2\kappa_j)\Big]$
- $N_1 = \frac{q_i}{m_i}(k_\theta b_\theta + k_\varphi b_\varphi)$
- $N_{2j} = \frac{a_j}{B}\Big[(k_\theta b_\varphi - k_\varphi b_\theta)\Big[\frac{\cos\theta}{R} + \kappa_j\Big] - ig'(r)\frac{b_\varphi \sin\theta}{R}\Big]$

L'équation Eq.(D.1) se réécrit alors pour δv_j^+

$$\Big(\omega - \omega_1 - c_j)\delta v_j^+ - \Big(N_1 - N_{2j}\Big)\delta\phi = 0 \tag{D.2}$$

et pour δv_j^-

$$\Big(\omega - \omega_1 + c_j)\delta v_j^- - \Big(N_1 + N_{2j}\Big)\delta\phi = 0 \tag{D.3}$$

La densité ionique perturbée s'écrit donc

$$\delta n_i = \sum_{j=1}^{M} A_j\Big(\delta v_j^+ - \delta v_j^-\Big) = \sum_{j=1}^{M} A_j\left[\frac{N_1 - N_{2j}}{\omega - \omega_1 - c_j} - \frac{N_1 + N_{2j}}{\omega - \omega_1 + c_j}\right]\delta\phi \tag{D.4}$$

c'est-à-dire

$$\delta n_i = \sum_{j=1}^{M} 2A_j\left[\frac{N_1 c_j - N_{2j}(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 - {c_j}^2}\right]\delta\phi \tag{D.5}$$

Annexe E

Notations

Nous détaillons dans cet annexe les différentes notations utilisées tout au long de ce rapport.

E.0.1 Les constantes de la physique

Notation	Définition	Description
ϵ_o	$8.85 \times 10^{-12}\ F.m^{-1}$	permittivité du vide
e	$1.60 \times 10^{-19}\ C$	charge de l'électron
k_B	$1.38 \times 10^{-23}\ J.K^{-1}$	constante de Boltzmann
h	$6.63 \times 10^{-34}\ m^2.kg.s^{-1}$	constante de Planck

E.0.2 Les paramètres plasma

Notation	Définition	Description
B	en Tesla (T)	champ magnétique
$\mathbf{b}$	sans unité	vecteur directeur du champ magnétique
$\mathbf{R}_c$	en mètres (m)	rayon de courbure du champ magnétique
ϕ	en Volt (V)	potentiel électrique
$\mathbf{E}$	en ($V.m^{-1}$)	champ électrique
n_i	en (m^{-3})	densité ionique
n_e	en (m^{-3})	densité électronique
T_i	en Kelvin (K)	température ionique
T_e	en Kelvin (K)	température électronique
τ	T_i/T_e	rapport des températures ionique et électronique
m_i	en kg	masse ionique
m_e	$9.11 \times 10^{-31}\ kg$	masse électronique
q_i	$Z_i e$ (en C)	charge ionique
Z_i	nombre entier naturel	nombre d'ionisation
v_{Ti}	$\sqrt{k_B T_i/m_i}$ (en $m.s^{-1}$)	vitesse thermique ionique
v_{Te}	$\sqrt{k_B T_e/m_e}$ (en $m.s^{-1}$)	vitesse thermique électronique
C_s	$\sqrt{k_B T_e/m_i}$ (en $m.s^{-1}$)	vitesse acoustique ionique
Ω_{ci}	$Z_i eB/m_i$ (en $rad.s^{-1}$)	fréquence cyclotron ionique
Ω_{ce}	eB/m_e (en $rad.s^{-1}$)	fréquence cyclotron électronique
r_{Li}	v_{Ti}/Ω_{ci} (en m)	rayon de Larmor ionique
r_{Le}	v_{Te}/Ω_{ce} (en m)	rayon de Larmor électronique
ρ_s	C_s/Ω_{ci} (en m)	
λ_{Di}	$\sqrt{n_i {Z_i}^2 e^2/\epsilon_o k_B T_i}$	longueur de Debye ionique
λ_{De}	$\sqrt{n_e e^2/\epsilon_o k_B T_e}$	longueur de Debye électronique
ν_{en}	en Hertz (Hz)	fréquence de collision électron-neutre
ν_{ei}	en Hertz (Hz)	fréquence de collision électron-ion
ν_{in}	en Hertz (Hz)	fréquence de collision ion-neutre
$\lambda_{\parallel}$	(en m)	longueur d'onde dans la direction parallèle au champ magnétique
$\lambda_{\perp}$	(en m)	longueur d'onde dans la direction perpendiculaire au champ magnétique
$k_{\parallel}$	$2\pi/\lambda_{\parallel}$ (en m^{-1}))	nombre d'onde dans la direction parallèle au champ magnétique
$k_{\perp}$	$2\pi/\lambda_{\perp}$ (en m^{-1}))	nombre d'onde dans la direction transverse au champ magnétique

Notation	Définition	Description
ω^*_{ne}	$-k_\perp \frac{k_B T_{eo}}{eB} \kappa_{Ne}$ (en s^{-1})	Fréquence diamagnétique électronique
ω^*_{ni}	$k_\perp \frac{k_B T_{io}}{Z_i eB} \kappa_{Ni}$ (en s^{-1})	Fréquence diamagnétique ionique
ω^*_{Te}	$-k_\perp \frac{k_B T_{eo}}{eB} \kappa_{Te}$ (en s^{-1})	
ω^*_{Ti}	$k_\perp \frac{k_B T_{io}}{Z_i eB} \kappa_{Ti}$ (en s^{-1})	
ω_{cs}	$k_\parallel C_s$ (en s^{-1})	
ω_o	$k_\parallel v_{\parallel o}$ (en s^{-1})	
$\omega_\parallel$	$\sqrt{3} k_\parallel v_{Ti}$ (en s^{-1})	
$\gamma_\parallel$	$k^2_\parallel \frac{k_B T_e}{m_e \nu_{en}}$ (en s^{-1})	

E.0.3 Les paramètres water-bag

Notation	Définition	Description
M	nombre entier naturel	nombre de bags de la distribution water-bag
N	nombre entier naturel	nombre de moments magnétiques de la distribution water-bag
A_j	en $(s.m^{-4})$	hauteur du bag j
a_j	en $(m.s^{-1})$	vitesse d'équilibre du bag j
a_M	en $(m.s^{-1})$	vitesse de coupure de la distribution water-bag
Δa	$a_M/(M-1/2)$ en $(m.s^{-1})$	pas de discrétisation des bags
μ_k	en $(J.T^{-1})$	moment magnétique du groupe de particules k
μ_N	en $(J.T^{-1})$	moment magnétique de coupure
$\Delta\mu$	$\mu_N/(N-1/2)$ en $(J.T^{-1})$	pas de discrétisation des moments magnétiques
α_j	$2a_j A_j/n_{io}$	densité du bag j
κ_j	$\frac{1}{a_j}\frac{\partial a_j}{\partial r}$	gradient logarithmique des a_j
ω^*_j	$-k_\perp \frac{k_B T_{eo}}{eB} \kappa_j$	

Annexe F

Travaux publiés

F.1 Publications

- *Gyrokinetic water-bag modeling of a plasma column : magnetic moment distribution and finite Larmor radius*
  Physics of Plasmas **16**, 082106 (2009)
  (R. Klein, E. Gravier, P. Morel, N. Besse, et P. Bertrand)
- *Gyrokinetic-water-bag modeling of low-frequency instabilities in a laboratory magnetized plasma column*
  Physics of Plasmas **15**, 122103 (2008)
  (E. Gravier, R. Klein, P. Morel, N. Besse, et P. Bertrand)
- *Gyrokinetic modeling : a multi-water-bag aproach*
  Physics of Plasmas **14**, 112109 (2007)
  (P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, A. Ghizzo, P. Bertrand, X. Garbet, P. Ghendrih, V. Grandgirard, et Y. Sarazin)
- *Self-induced transparency scenario revisited via beat-wave heatong induced by plasma layer*
  Physics of Plasmas **14**, 0622702 (2007)
  (A. Ghizzo, D. DelSarto, T. Réveillé, N. Besse, et R. Klein)

F.2 Communications en conférences internationales

35th European Physical Society International Conference on Plasma Physics
(Hersonissos - Crète, juin 2008)

- *Instabilities in toroidal geometry : a water-bag approach*, P4.038
  (R. Klein, E. Gravier, P. Morel, N. Besse, et P. Bertrand)
- *Gyrokinetic-Water-Bag modeling of low-frequency instabilities in a laboratory magnetized plasma column*, P1.041
  (R. Klein, E. Gravier, P. Morel, N. Besse, et P. Bertrand)
- *Water-bag modelling of a multi-species plasma*, P1.040
  (P. Morel, R.Klein, E. Gravier, N. Besse, et P. Bertrand)

Bibliographie

[1] L.Villard, *Pour la Science*, dossier n°**52**, "La modélisation informatique, exploration du réel" (juillet/septembre 2006).

[2] A. M. Dimits, G. Bateman, M. A. Beer, B. I. Cohen, W. Dorland, G. W. Hammett, C. Kim, J. E. Kinsey, M. Kotschenreuther, A. H. Kritz, L. L. Lao, J. Mandrekas, W. M. Nevins, S. E. Parker, A. J. Redd, D. E. Shumaker, R. Sydora, et J. Weiland, *Phys. Plasmas*, **7**, 969 (2000).

[3] X. Garbet, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **43** A251 (2001).

[4] F. F. Chen, *Phys. Fluids* **6**, 949-955 (1964).

[5] F. F. Chen, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, (2nd Ed. Plenum Press, New York & Londres, 1984).

[6] R. E. Waltz, *Phys. Fluids* **31**, 1962 (1988).

[7] F. Jenko, M. Kotschenreuther, et B. N. Rogers *Phys. Plasmas* **7**, 1904 (2000).

[8] F. Jenko et W. Dorland, *Phys. Rev. Lett.* **89** 225001 (2002).

[9] H. Nordman, J. Weiland, et A. Jarmén, *Nuclear Fusion* **30**, 983 (1990).

[10] L. Villard, S. J. Allfrey, A. Bottino, M. Brunetti, G. L. Falchetto, V. Grandgirard, R. Hatzky, J. Näuhrenberg, A. G. Peeters, O. Sauter, S. Sorge, et J. Vaclavik, *Nuclear Fusion* **44** 172 (2004).

[11] T. Dannert et F. Jenko, *Phys. Plasmas*, **12**, 072309 (2005).

[12] T. S. Hahm, *Phys. Fluids* **31**, 2670 (1988).

[13] T. S. Hahm, W. Lee, et A. Brizard, *Phys. Fluids* **31**, 1940 (1988).

[14] A. Brizard, *Phys. Fluids B* **1**, 1381 (1989).

[15] M. Dimits, T. J. Williams, J. A. Byers, et B. I. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 71 (1996).

[16] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, E. Sonnendrücker, J. Vaclavik, et L. Villard, *J. Compt. Phys.* **217**, 395 (2006).

[17] X. Garbet, Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, G. Darmet, P. Ghendrih, P. An- gelino, P. Bertrand, N. Besse, E. Gravier, P. Morel, E. SonnendrÄucker, N. Crouseilles, J. M. Dischler, G. Latu, E. Violard, M. Brunetti, S. Brunner, X. Lapillone, T. Tran, L. Villard, et M. Boulet, *Nuclear Fusion* **47**, 1206-1212 (2007).

[18] P. Bertrand, *Thèse d'Etat*, Université de Nancy, France, (1972).

[19] P. Morel, *Thèse de Doctorat*, Université Henri Poincaré, France, 2008.

[20] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, A. Ghizzo, P. Bertrand, X. Garbet, P. Ghendrih, V. Grandgirard, et Y. Sarazin, *Phys. Plasmas* **14**, 112109 (2007).

[21] N. Besse, P. Bertrand, P. Morel, et E. Gravier, *Phys. Rev. E* **77**, 056410 (2008).

[22] F. Reif *Fundamentals of statistical and thermal physics*, Ed. McGraw-Hill (1965) pp 626-628.

[23] M. Born et H. G. Green, *Proc.Roy.Soc. A* **188**,10 (1946).

[24] J. Yvon, *Act.Sci.et Ind.*, **203**, (1935).

[25] J. G. Kirkwood, *J.Chem.Phys.* **3**, 300 (1935).

[26] N. N. Bogoliubov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **16**, 691 (1946).

[27] N. Pottier, *Physique statistique hors équilibre*, Ed. EDP Sciences et CNRS (2007) pp 95-104.

[28] A. J. Brizard et T.S. Hahm, *Foundations of non-linear gyrokinetic theory*, Princeton Plasma Physics Laboratory - **4153** (2006).

[29] K. Nishikawa et M. Wakatani, *Plasma Physics*, (3ème. édition) Ed. Springer-Verlag, (2000) pp 44-47.

[30] D. C. DePackh, *J. Electron. Control* **13**, 417 (1962).

[31] F. Hohl, *Phys. Fluids* **12**, No. 1 , 230-234 (1969).

[32] M. R. Feix, F. Hohl, et L. D. Staton, *Nonlinear Effects in Plasmas*, edité par G. Kalmann et M. R. Feix (Gordon and Breach, New York, 1969), pp. 3–21.

[33] H. L. Berk et K. V. Roberts, *Methods in Computational Physics*, edité par B. Alder, S. Fernbach, et M. Rotenberg (Academic, New York, 1970), Vol. 9, p. 29.

[34] F. R. Hansen, G. Knorr, J. P. Lynov, H. L. Pecseli, et J. J. Rasmussen, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **31**, 173 (1989).

[35] P. P. Sosenko, P. Bertrand, et V. K. Decyk, *Physica Scripta* **64**, 264 (2001).

[36] R. F. Ellis et E. Marden-Marshall, *Phys. Fluids* **22**, 2137 (1979).

[37] Y. Sarazin, V. Grandgirard, E. Fleurence, X. Garbet, P. Ghendrih, P.Bertrand, et G. Depret, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **47**, 1817 (2005).

[38] Y. Sarazin, *Turbulence, transport and heating*, cours présenté dans le cadre de la formation aux sciences de la fusion - École polytechnique, p 12 (2007-2008).

[39] R. Klein, E. Gravier, P. Morel, N. Besse, et P. Bertrand, *Phys. Plasmas* **16**, 082106 (2009).

[40] P. C. Liewer, *Nucl. Fusion* **25**, 543 (1985)

[41] S. J. Zweben, J. A. Boedo, O. Grulke, C. Hidalgo, B. LaBombard, R. J. Maqueda, P. Scarin, et J. L. Terry, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **49** S1-S23 (2007)

[42] T. Pierre, G. Leclert, et F. Braun, *Rev. Sci. Instrum.* **58**, 6 (1987).

[43] M. Matsukuma, T. Pierre, A. Escarguel, D. Guyomarc'h, G. Leclert, F. Brochard, E. Gravier, et Y. Kawai, *Physics Letters A* **314**, 163-167 (2003).

[44] O. Grulke, T. Klinger, et A. Piel, *Phys. Plasmas* **6**, 788 (1999).

[45] C. Schröder, O. Grulke, T. Klinger, et V. Naulin, *Phys. Plasmas* **11**, 4249 (2004).

[46] E. Wallace, E. Thomas, A. Eadon, et J. Jackson,*Rev. Sci. Instrum.* **75**, 5160 (2004).

[47] R. G. Greaves, J. Chen, et A. K. Sen,*Plasma Physics and Controlled Fusion* **34**, 1253 (1992).

[48] E. Marden-Marshall, R. F. Ellis, et J. E. Walsh, *Plasma Phys. Cont. Fusion* **28**, 1461 (1986).

[49] V. Naulin, T. Windisch, et O. Grulke, *Phys. Plasmas* **15**, 012307 (2008).

[50] H. Sugama, T. H. Watanabe, et W. Horton, *Phys. Plasmas* **10** (3) 726 (2003).

[51] C. Schröder, T. Klinger, D. Block, A. Piel, G. Bonhomme, et V. Naulin, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5711 (2001).

[52] E. Gravier, X. Caron, G. Bonhomme, T. Pierre, et J. L. Briançcon, *European Physical Journal*, **D8**, 451 (2000).

[53] E. Gravier, F. Brochard, G. Bonhomme, T. Pierre, et J. L. Briançcon, *Phys. Plasmas* **11**, 529-537 (2004).

[54] F. Brochard, E. Gravier, et G. Bonhomme, *Phys. Plasmas* **12**, 062104 (2005).

[55] J. W. Connor, et H. R. Wilson, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **36**, 719 (1994).

[56] R. J. Goldston, et P. H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, (IOP, London, 1995), pp 468-469.

[57] R. Scarmozzino, A. K. Sen, et G. A. Navratil, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1729 (1986).

[58] R. G. Greaves, J. Chen, et A. K. Sen, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **34**, 1253 (1992).

[59] E. Gravier, R. Klein, P. Morel, N. Besse, et P. Bertrand, *Phys. Plasmas* **15**, 122103 (2008).

[60] D. H. E. Dubin, J. A. Krommes, C. Oberman, et W. W. Lee, *Phys. Fluids* **26**, 3524 (1983).

[61] W. W. Lee, et R. A. Kolesnikov, *Phys. Plasmas* **16**, 044506 (2009).

[62] G. Manfredi, M. Shoucri, R. O. Dendy, A. Ghizzo, et P. Bertrand, *Phys. Plasmas* **3**, 202 (1996).

[63] J. Weiland, *Collective modes in inhomogeneous plasma*, pp 61-63, Institute of Physics Publishing (2000).

[64] C. Bourdelle, *Analyse de stabilité de plasma de tokamak*, Thèse de Doctorat - Université de Provence - Marseille I (2000).

[65] X. Garbet, *Instabilités, turbulence et transport dans un plasma magnétisé*, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches - Université de Provence - Marseille I (2001).