HAL
open science

Formules de trace en niveau primaire et non annulation de valeurs centrales de fonctions L automorphes

Djamel Rouymi

To cite this version:

Djamel Rouymi. Formules de trace en niveau primaire et non annulation de valeurs centrales de fonctions L automorphes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2009. Français. NNT : 2009NAN10081 . tel-01748343

HAL Id: tel-01748343

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748343

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy 1
D. F. D. Mathématiques

THÈSE

présentée par

Djamel ROUYMI

en vue d'obtenir le diplôme

Doctorat de l'Université Henri Poincaré

Spécialité : Mathématiques

Formules de trace en niveau primaire et non annulation de valeurs centrales de fonctions L automorphes

soutenue publiquement le 04 Novembre 2009

Après avis de

Christophe DELAUNAY	MC, HDR, Université Claude Bernard
Emmanuel KOWALSKI	Professeur, ETH-Zürich

Devant le jury composé de

Cécile DARTYGE	Examinatrice	MC, HDR, Université Henri Poincaré
Christophe DELAUNAY	Rapporteur	MC, HDR, Université Claude Bernard
Étienne FOUVRY	Président	Professeur, Université Paris-Sud
Emmanuel ROYER	Co-directeur de thèse	Professeur, Université Blaise Pascal
Gérald TENENBAUM	Examinateur	Professeur, Université Henri Poincaré
Jie WU	Co-directeur de thèse	CR au CNRS, HDR, Université Henri Poincaré

Institut Élie Cartan Nancy, CNRS, INRIA
Faculté des Sciences – B.P. 239 – 54506 Vandœuvre-lès-Nancy

Table des matières

Remerciements **v**

1 Introduction **1**

1.1 Formes modulaires et fonctions L 2

1.1.1 Espaces de formes modulaires 2

1.1.2 Opérateurs de Hecke T_n et d'Atkin-Lehner W_n 3

1.1.3 Formes primitives 5

1.1.4 Fonctions L de Hecke 7

1.2 Problème de non-annulation de valeurs centrales 8

1.3 Formule de trace de Petersson et non-annulation de $L(1/2, f)$ . . 10

1.4 Formule de trace de Selberg et non-annulation de $L(1/2, f)$ 13

2 Formule de trace de Petersson et non-annulation de $L(1/2, f)$ **17**

2.1 Introduction 17

2.2 Formule de trace harmonique au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 2$ 23

2.2.1 Énoncé du résultat 23

2.2.2 Formule de trace pour $\Delta_q(m, n)$ 24

2.2.3 Une base orthogonale de $S_k(q)$ 26

2.2.4 Passage entre $\Delta_q(m,n)$ et $\Delta_q^*(m,n)$ 35

2.2.5 Fin de la preuve du Théorème 2.2 40

2.3 Lemmes auxiliaires 41

2.3.1 Fonctions $U(y)$ et $T(y)$ 41

2.3.2 Lemme intermédiaire 43

2.4 Calcul du deuxième moment 44

2.5 Calcul du troisième moment 46

2.5.1 Début de la démonstration de la Proposition 2.5 47

2.5.2 Application de la formule de trace 48

2.5.3 Évaluation du terme principal 48

2.5.4 Estimation du terme d'erreur $\mathscr{R}_3$ 52

2.5.5 Fin de la démonstration de la Proposition 2.5 53

2.6 Démonstration du Théorème 2.1 53

3 Formule de trace de Selberg et non-annulation de $L(1/2,f)$ et $L'(1/2,f)$ 55

3.1 Introduction 55

3.2 Formule de Trace de Selberg 60

3.3 Preuves des Théorème 3.3 et Corollaires 3.1-3.2 62

3.3.1 Début de la preuve du Théorème 3.3 62

3.3.2 Formule asymptotique de $s_{k,q}(m,n)$ 63

3.3.3 Fin de la preuve du Théorème 3.3 65

3.3.4 Démonstration du Corollaire 3.1 67

3.3.5 Démonstration du Corollaire 3.2 68

3.4 Lemmes intermédiaires 69

3.5 Calcul des moments naturels 1 et 2 de $L(1/2, f)$ 70

3.5.1 Évaluation du premier moment : preuve de (3.39) 71

3.5.2 Évaluation du deuxième moment : preuve de (3.40) 72

3.6 Démonstration du Théorème 3.1 77

3.7 Moments naturels 1 et 2 de $L'(1/2, f)$ 78

3.7.1 Évaluation du premier moment : preuve de (3.61) 78

3.7.2 Évaluation du deuxième moment : preuve de (3.62) 80

3.8 Démonstration du Théorème 3.2 85

A Équation fonctionnelle approchée et mollification 87

A.1 Introduction 87

A.2 Calcul de moments pondérés 88

A.2.1 Premier moment pondéré 89

A.2.2 Deuxième moment 91

A.2.3 Optimisation 93

A.3 Démonstration du Théorème A.1 98

Bibliographie 98

Remerciements

Je remercie très sincèrement :

Mon directeur de thèse Jie Wu, sans qui ce travail n'aurait pu exister. Il a accepté d'encadrer cette thèse avec un grand optimisme et j'ai pris un réel plaisir à collaborer avec lui tant pour sa gentillesse que sa patience lors de nos travaux réguliers. Que lui soit ici exprimée toute ma reconnaissance.

Le co-directeur de ma thèse, Emmanuel Royer pour sa disponibilité, pour toutes ses enrichissantes convictions qui ont eu raison de mes doutes. Pour son accueil chaleureux lors de mes passages à Clermont-Ferrand.

Étienne Fouvry d'avoir gentiment accepté de présider mon jury de thèse.

Christophe Delaunay et Emmanuel Kowalski pour avoir gentiment accepté de rapporter cette thèse. Je sais que leur temps est précieux. Un remerciement particulier à Emmanuel Kowalski pour m'avoir suggéré d'utiliser l'équation fonctionnelle approchée.

Gérald Tenenbaum pour son accueil chaleureux dans son équipe de l'institut Élie Cartan de Nancy et pour avoir participer à mon jury de thèse.

Cécile Dartyge pour sa gentillesse et pour son accueil, particulièrement aux Journées de théorie analytique des nombres, qu'elle soit ici remerciée de participer au jury de cette thèse.

Henryk Iwaniec pour ses encouragements chaleureux durant l'élaboration de ce travail.

Philippe Michel, pour avoir si patiemment guidé mes premiers pas dans la théorie des formes modulaires.

Daniel Guin, pour l'amour des mathématiques qu'il m'a insuflé. Que ce travail soit un des fruits modestes d'une brillante carrière qu'il a menée au département de Mathématiques de Montpellier.

L'ensemble de l'équipe de théorie des nombres de Nancy pour son enthousiasme. Le département de mathématiques de l'Université Montpellier 2 pour avoir mis gentiment à ma disposition ses locaux ainsi que sa bibliothèque. Les doctorants de l'Université Henri Poincaré pour leur disponibilité ainsi que pour leur dynamisme. Le "spider" séminaire des doctorants orchestré par Aurélien est une véritable réussite.

Ma famille et mes amis pour m'avoir accompagné patiemment durant l'élaboration de ce travail, je sais que ça n'a pas été de tout repos.

Paula pour avoir cru en moi, pour la douceur de son sourire.

Chapitre 1

Introduction

La théorie des fonctions L automorphes est une branche très importante en théorie des nombres, où l'analyse, l'algèbre et l'arithmétique se croisent d'une manière naturelle. Elle contient non seulement beaucoup de problèmes intéressants, mais offre aussi des outils très puissants pour résoudre beaucoup de problèmes bien connus. Un exemple typique est celui des travaux célèbres de A. Wiles concernant le grand théorème de Fermat.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de non-annulation aux valeurs centrales des fonctions L attachées aux formes primitives de poids k et de niveaux q. Un lien surprenant entre ce problème et le zéro de Landau-Siegel des fonctions L de Dirichlet a été découvert par Iwaniec & Sarnak [11]. La non-annulation aux valeurs centrales a été étudiée par plusieurs auteurs quand le niveau q est un nombre premier ou un entier sans facteur carré [6, 13, 14, 10]. Dans le but de généraliser la situation et de comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau q, nous nous proposons d'étudier le cas où q est de la forme p^ν. Une telle généralisation ne semble pas gratuite. Les deux difficultés principales rencontrées sont essentielles. Premièrement les signes ε_f de l'équation fonctionnelle (voir (1.11) ci-dessous) ne sont pas connus. Deuxièmement la formule de trace de Petersson n'est valable que pour le niveau q sans facteur carré (voir (1.19) ci-dessous). Dans cette thèse, nous proposerons trois méthodes pour surmonter ces deux difficultés. Ce qui constitue les Chapitres 2 et 3. Le premier chapitre sera

consacré à introduire les objets que nous allons travailler, à présenter l'histoire du problème en citant tous les résultats dans les littératures. Ce chapitre décrira également les méthodes utilisées et enfin résumera notre contribution.

1.1 Formes modulaires et fonctions L

Le but de ce paragraphe est de rappeler les notions et résultats importants en théorie des formes modulaires dont nous aurons besoin dans la suite. Tous les outils présentés ici peuvent être trouvés dans [1, 8, 17].

1.1.1 Espaces de formes modulaires

Dans toute la thèse, désignons par

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$$

le demi-plan complexe de Poincaré. Comme d'habitude, on note $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices d'entiers d'ordre 2×2 dont les déterminants sont égaux à 1. Évidemment il est un groupe pour la multiplication de matrices. Pour chaque entier positif $q \geqslant 1$, le sous-groupe de congruence de Hecke $\Gamma_0(q)$ est défini par

$$\Gamma_0(q) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : q \mid c \right\}. \tag{1.1}$$

Le groupe $\Gamma_0(q)$ agit sur $\mathbb{H}$ par

$$\gamma z := \frac{az+b}{cz+d}$$

pour tout élément

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q).$$

Définition 1.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $q \geqslant 1$ un entier positif. On appelle forme modulaire de poids k et de niveau q, toute fonction f holomorphe sur $\mathbb{H}$ vérifiant la relation suivante*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{1.2}$$

pour tout élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$. De plus on dit que f est parabolique si la fonction $z \mapsto (\Im m\, z)^{k/2} f(z)$ est bornée sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$.

Désignons par $S_k(q)$ l'espace des formes paraboliques de poids k et de niveau q, que l'on munit du produit scalaire de Petersson

$$\langle f, g\rangle_q := \int_F f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}, \tag{1.3}$$

où F désigne un domaine fondamental par l'action homographique de $\Gamma_0(q)$ sur $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$. On peut démontrer que $S_k(q)$ est un espace de Hilbert de dimension finie pour le produit scalaire de Petersson.

Pour tous entiers positifs q' et ℓ tels que $q' \mid q$, $q' < q$ et $\ell \mid (q/q')$ et toute forme $f \in S_k(q')$, il est facile de vérifier que la fonction $z \mapsto f(\ell z)$ est une forme parabolique de poids k et de niveau q. De telles formes s'appellent des formes anciennes de poids k et de niveau q. L'espace engendré par de telles formes est appelé l'espace des formes anciennes, noté par $S_k^\flat(q)$. Son orthogonal pour le produit scalaire de Petersson est l'espace des formes nouvelles, noté par $S_k^\natural(q)$. Ainsi nous avons la décomposition

$$S_k(q) = S_k^\flat(q) \oplus S_k^\natural(q). \tag{1.4}$$

1.1.2 Opérateurs de Hecke T_n et d'Atkin-Lehner W_n

Dans l'espace $S_k(q)$, on peut introduire l'opérateur de Hecke. Soit $n \geqslant 1$ un entier, le n-ème opérateur de Hecke $T_n : S_k(q) \to S_k(q)$ est défini par

$$T_n : f \mapsto \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ (a,q)=1}} a^k \sum_{0 \leqslant b \leqslant d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \tag{1.5}$$

Voici quelques propriétés fondamentales des opérateurs de Hecke T_n :

(i) Les opérateurs de Hecke commutent entre eux :

$$T_m T_n = T_n T_m$$

pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.

(ii) Les opérateurs de Hecke T_n vérifient la relation de Hecke :

$$T_m T_n = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,q)=1}} d^{k-1} T_{mn/d^2}$$

pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. En particulier, on a

$$T_m T_n = T_{mn} \qquad \text{si} \qquad (m,n) = 1.$$

(iii) Les T_n sont auto-adjoints :

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle$$

pour tous $f, g \in S_k(q)$ et $(n,q) = 1$.

(iv) Les sous-espaces $S_k^\flat(q)$ et $S_k^\natural(q)$ sont stables par rapport aux opérateurs T_n avec $(n,q) = 1$.

L'opérateur d'Atkin-Lehner est un autre opérateur important en théorie des formes modulaires. Soit q' un diviseur de q tel que $(q', q/q') = 1$. L'opérateur d'Atkin-Lehner $W_{q'} : S_k(q) \to S_k(q)$ est défini par

$$W_{q'} : f \mapsto \left(\frac{\sqrt{q'}}{qz + q'd} \right)^k f \left(\frac{q'az + b}{qz + q'd} \right), \tag{1.6}$$

où

$$\begin{cases} (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3, \\ d \equiv 1 \pmod{q/q'}, \\ q'^2 ad - qb = q'. \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'un tel triplet existe et la définition de $W_{q'}$ est indépendant du choix de (a,b,d).

Voici quelques propriétés fondamentales de $W_{q'}$:

(i) Les opérateurs d'Atkin-Lehner sont multiplicatifs :

$$W_{q'}W_{q''} = W_{q'q''}$$

pour tous entiers $q' \mid q$ et $q'' \mid q$ tels que $(q', q/q') = (q'', q/q'') = 1$ et $(q', q'') = 1$.

(ii) Les $W_{q'}$ sont auto-adjoints :

$$\langle W_{q'}f, g\rangle = \langle f, W_{q'}g\rangle$$

pour tous $f, g \in S_k(q)$ et tous les diviseurs q' de q tels que $(q', q/q') = 1$.

(iii) Les $W_{q'}$ sont des isométries sur $S_k(q)$ stabilisant $S_k^\natural(q)$.

1.1.3 Formes primitives

Définition 1.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $q \geqslant 1$ un entier. Les fonctions propres de tous les opérateurs de Hecke T_n dans l'espace $S_k^\natural(q)$ s'appellent formes primitives de poids k et de niveau q.*

L'ensemble de ces formes, noté par $\mathrm{H}_k^*(q)$, est une base de $S_k^\natural(q)$ et vérifie (pour q sans facteur carré)

$$|\mathrm{H}_k^*(q)| = \frac{k-1}{12}\varphi(q) + O\big((kq)^{2/3}\big),$$

où $\varphi(q)$ est la fonction d'Euler.

Toute forme primitive $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ a un développement de Fourier en ∞ :

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} \mathrm{e}^{2\pi i n z}, \tag{1.7}$$

où $\lambda_f(n)$ est le n-ème coefficient de Fourier normalisé de f. Cette fonction arithmétique a les propriétés suivantes :

(i) On a la normalisation $\lambda_f(1) = 1$.

(ii) Pour tout entier $n \geqslant 1$

$$T_n f = \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} f.$$

(iii) Pour chaque diviseur $q' \mid q$ tel que $(q', q/q') = 1$, il existe $\varepsilon_f(q') \in \{-1, 1\}$ tel que

$$W_{q'} f = \varepsilon_f(q') f.$$

De plus si q' est sans facteur carré, alors on a

$$\varepsilon_f(q') = \mu(q') \lambda_f(q') \sqrt{q'},$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius.

(iv) Pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$,

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,q)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

en particulier la fonction $n \mapsto \lambda_f(n)$ est multiplicative :

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \lambda_f(mn) \qquad \text{si} \qquad (m,n) = 1.$$

(v) Deligne (1974) : Si $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$, alors pour chaque nombre premier p, il existe deux nombres complexes $\alpha_f(p), \beta_f(p)$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha_f(p) = \beta_f(p) = 0 & \text{si } p^2 \mid q \\ \alpha_f(p) = \varepsilon_f(p) p^{-1/2}, \quad \beta_f(p) = 0 & \text{si } p \parallel q \\ |\alpha_f(p)| = \alpha_f(p)\beta_f(p) = 1 & \text{si } p \nmid q \end{cases}$$

tels que pour $\nu \geqslant 0$

$$\lambda_f(p^\nu) = \alpha_f(p)^\nu + \alpha_f(p)^{\nu-1}\beta_f(p) + \cdots + \beta_f(p)^\nu.$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$ on a $\lambda_f(n) \in \mathbb{R}$ et

$$|\lambda_f(n)| \leqslant \tau(n) \qquad \text{(l'inégalité de Deligne)},$$

où $\tau(n)$ est la fonction "nombre de diviseurs".

1.1.4 Fonctions L de Hecke

La fonction L automorphe associée à $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ est définie par

$$L(s,f) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} \qquad (\Re e\, s > 1), \tag{1.8}$$

la fonction L complète est, elle, définie par :

$$\Lambda(s,f) := \hat{q}^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(s,f), \tag{1.9}$$

où

$$\hat{q} := \sqrt{q}/(2\pi). \tag{1.10}$$

Cette fonction peut être prolongée analytiquement sur $\mathbb{C}$ et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s,f) = \varepsilon_f \Lambda(1-s,f) \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{1.11}$$

où $\varepsilon_f = 1$ ou -1.

Une forme primitive est dite paire (resp. impaire) si $\varepsilon_f = 1$ (resp. si $\varepsilon_f = -1$). On notera enfin $\mathrm{H}_k^+(q)$ (resp. $\mathrm{H}_k^-(q)$) l'espace des formes primitives paires (resp. impaires).

Dans le cas où le niveau q d'une forme f est premier, il existe une formule explicite permettant de calculer ε_f (voir [13]) :

$$\varepsilon_f = \lambda_f(q)\sqrt{q}. \tag{1.12}$$

Si cette fois q n'est plus premier la seule chose qui demeure sur le signe de l'équation fonctionnelle est $\varepsilon_f = -1$ ou 1. On verra que cela est une difficulté dans nos travaux puisque nous utiliserons q hautement composé.

En utilisant (1.11) et le principe de Lindelöf-Phragmén, on peut facilement obtenir la *borne de convexité* : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$L(\sigma + \mathrm{i}\tau, f) \ll_{r,\varepsilon} \left(k^2 q(|\tau|^2+1)\right)^{\max\{(1-\sigma)/2\,,\,0\}+\varepsilon} \qquad (\sigma \geqslant 0),$$

où la constante impliquée ne dépend que de r et ε.

1.2 Problème de non-annulation de valeurs centrales

Les valeurs spéciales de $L(s,f)$ (par exemple, valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique) contiennent des informations intéressantes. En particulier, la non-annulation de $L(s,f)$ au point $s=\frac{1}{2}$ est une des questions importantes en théorie des fonctions L automorphes et a beaucoup d'applications dans des divers problèmes. D'après le travail de J.-D. Guo [7], nous savons que

$$L(1/2,f) \geqslant 0 \tag{1.13}$$

pour tous entiers $k,q \geqslant 1$ avec k pair et $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$. Un lien surprenant avec le zéro de Landau-Siegel a été decouvert en 2000 par Iwaniec & Sarnak [11]. Leur résultat s'énonce comme suit : Si q est sans facteur carré assez grand tel que $\varphi(q) \gg q$, alors on a

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{1}{|\mathrm{H}_k^+(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\geqslant (\log q)^{-2}}} 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

De plus si l'on peut remplacer $\frac{1}{2}$ par une constante $c>\frac{1}{2}$, alors le zéro de Landau-Siegel pour les fonctions L de Dirichlet n'existe pas.

Le premier résultat sur la non-annulation de $L(1/2,f)$ a été obtenu en 1995 par Duke [6]. Celui-ci concerne les formes de niveau premier et de poids 2, il s'énonce comme suit : Si q est un nombre premier avec $q \geqslant 11$ et $q \neq 13$, alors il existe une constante absolue $C>0$ telle que

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_2^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{C}{(\log q)^2}. \tag{1.14}$$

Cette minoration est obtenue avec la formule de Petersson [6, Lemma 1, p.167] qui permet le calcul des deux premiers moments des fonctions L pondérés par les caractères de Dirichlet.

Par la suite, Kowalski & Michel [13] ont obtenu en 2000 une proportion non nulle de non-annulation, à savoir : Si q est un nombre premier assez grand, alors

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_2^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{1}{6} + o(1)\cdot \tag{1.15}$$

Ce résultat est démontré aussi à l'aide de la formule de trace de Petersson, mais ils ont introduit la technique de mollification dans le calcul des moments d'ordres 1 et 2 des fonctions L mollifiés. C'est cette technique de mollification qui permet de supprimer le facteur log dans le résultat de Duke. Dans cet article ils ont également étudié par la même technique la proportion de formes ayant un zéro d'ordre 1 au point critique et obtenu :

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_2^*(q)\\ L(1/2,f)=0, L'(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{19}{54} + o(1). \tag{1.16}$$

Dans un même temps (indépendamment), Vanderkam [24] applique la formule de trace de Selberg [21, Proposition 4] aux deux premiers moments des fonctions L pour obtenir (1.15) avec une constante moins bonne ($\frac{1}{48}$ à la place de $\frac{1}{6}$). Notons que ce résultat est obtenu également (sous une forme différente) par Kowalski, Michel & Vanderkam [14].

Enfin quand q est sans facteur carré, Iwaniec, Luo & Sarnak [10] montrent que

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_k^+(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{9}{16} + o(1)$$

pour tout entier sans facteur carré $q \geqslant 1$.

Comme nous l'avons indiqué, tous les résultats mentionnés ci-dessus (sauf [24]) ont été établis à l'aide de la formule de trace de Petersson. Posons

$$\Delta_q^*(m,n) := \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n), \tag{1.17}$$

où $\omega_q(f)$ est le poids harmonique défini par

$$\omega_q(f) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}\langle f, f\rangle_q}. \tag{1.18}$$

Le meilleur résultat actuel de la formule de trace de Petersson est dû à Iwaniec, Luo & Sarnak [10, Corollary 2.10] : Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $q \geqslant 1$ un entier *sans facteur carré* et $m, n \geqslant 1$ deux entiers tels que $(m, q) = 1$ et $(n, q^2) \mid q$. Alors

$$\Delta_q^*(m,n) = \frac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + O\left(\frac{\tau(q)^2}{k^{5/6}q}\frac{(mn)^{1/4}}{(n,q)^{1/2}}\tau_3\big((m,n)\big)\log(2mnq)\right), \tag{1.19}$$

où la constante impliquée est absolue. Ici et dans toute la suite, le symbole de Kronecker est défini par

$$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on désigne par $\tau_\ell(n)$ le nombre de solutions en entiers $n_1 \geqslant 1, \ldots, n_\ell \geqslant 1$ de l'équation $n = n_1 \cdots n_\ell$. En particulier on a $\tau(n) = \tau_2(n)$.

1.3 Formule de trace de Petersson et non-annulation de $L(1/2, f)$

L'étude des valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ (fonction L de la m-ème puissance symétrique associée à f) a reçu beaucoup d'attention (voir [3], [19] et [16]). En particulier, les résultats de Royer & Wu [19] montrent que les valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ dépendent, d'une manière surprenante, des propriétés arithmétiques du niveau. Il est naturel donc d'étudier l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation de $L(1/2, f)$ et de généraliser les résultats mentionnés ci-dessus au cas de niveau q quelconque. Dans cette thèse nous nous proposons de traiter le cas où q est de la forme $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\mathfrak{p}$ un nombre premier et ν un entier. Le choix de cette forme de niveau a deux raisons : premièrement en prenant $\nu = 1$, nous retrouvons le cas classique qui a été étudié par Duke [6], Kowalski & Michel [13] et Vanderkam [24], mentionné ci-dessus ; deuxièmement, en fixant p et faisant $\nu \to \infty$, on obtient un cas de niveau primaire (i.e. un

nombre qui a un seul diviseur premier autre que 1). Ce cas extrême arithmétiquement contraire au cas de niveau premier nous aidera à comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation.

Comme dans [13], on notera, à l'aide de (1.18), la somme harmonique :

$$\sum_{f\in\mathfrak{A}}^{\mathrm{h}} \xi_f := \sum_{f\in\mathfrak{A}} \omega_q(f)\xi_f$$

pour toute partie $\mathfrak{A} \subset S_k(q)$ et toute fonction $\xi : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$.

Dans le Chapitre 2, nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Alors il existe une constante $\nu_0(k, \mathfrak{p})$ telle que pour $\nu \geqslant \nu_0(k, \mathfrak{p})$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ on a*

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1 \gg_{k,\mathfrak{p}} \frac{1}{(\log q)^3},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

Puisque la formule de trace de Petersson (1.19) n'est valable que pour le niveau q sans facteur carré, il est nécessaire de généraliser cette formule. Dans un premier temps, nous établirons donc une formule de trace sur les formes primitives de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ qui prendra la forme suivante :

Théorème 1.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 2$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \phi(\nu,\mathfrak{p})\delta_{m,n} + O\left(\dfrac{\sqrt{mn\mathfrak{p}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}\right) & \text{si } \mathfrak{p} \nmid mn, \\ 0 & \text{si } \mathfrak{p} \mid mn, \end{cases} \tag{1.20}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker et

$$\phi(\nu,\mathfrak{p}) := \begin{cases} 1-(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^{-1})^{-1} & \text{si } \nu = 2, \\ 1-\mathfrak{p}^{-1} & \text{si } \nu \geqslant 3. \end{cases} \tag{1.21}$$

La constante impliquée dans le symbole O est absolue.

Cette formule de trace sera établie de la manière suivante :

(i) Nous commençons par une formule de trace concernant

$$\Delta_q(m,n) := \sum_{f\in B_k(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n), \tag{1.22}$$

où $B_k(q)$ est une base orthogonale quelconque de $S_k(q)$. Il est à noter que cette définition est indépendante du choix de la base orthogonale puisque $\Delta_q(m,n)$ est le coefficient de Fourier d'une série de Poincaré [5, Lemma 3.3]. À l'aide d'une décomposition permettant de passer des formes paraboliques aux formes primitives de niveaux inférieurs, on peut exprimer $\Delta_q(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta^*_{q'}(m,n)$, où $q' \mid q$, tout en rendant négligeable la contribution des formes de niveau 1. Puis par inversion de Möbius on pourra exprimer $\Delta^*_q(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta_{q'}(m,n)$.

(ii) Après avoir établi une formule de trace dans $S_k(q)$ (de type [10] égalité (2.12)) provenant de l'expression de $\Delta_q(m,n)$ comme des sommes de sommes de Kloosterman, on en déduit alors une formule de trace dans $\mathrm{H}^*_k(q)$.

Dans un second temps, nous voulons calculer les premiers moments harmoniques

$$\mathcal{M}^{\mathrm{h}}_r := \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}^+_k(q)} L(1/2,f)^r \tag{1.23}$$

et démontrer notre Théorème 1.1. Quand le niveau q a un facteur carré, nous ne pouvons pas utiliser la formule explicite (1.12) pour calculer le signe de l'équation fonctionnelle. Alors que le cas contraire incitait à déterminer les moments harmoniques d'ordre 1 et 2 comme dans les travaux précédents [13, 24, 10, 14]. Pour surmonter cette difficulté, nous nous proposerons de calculer, à l'aide de la formule de trace (1.20), les moments harmoniques d'ordre 2 et 3 :

$$\mathcal{M}^{\mathrm{h}}_2 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \log q + O_{k,\mathfrak{p}}(1),$$

$$\mathcal{M}^{\mathrm{h}}_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 (\log q)^3 + O_{k,\mathfrak{p}}\big((\log q)^2\big).$$

Notre Théorème 1.1 découle de ces deux estimations, grâce à une simple application de l'inégalité de Hölder.

1.4 Formule de trace de Selberg et non-annulation de $L(1/2, f)$

Dans le Chapitre 3, nous proposerons d'étudier le problème de non-annulation de $L(1/2, f)$ à l'aide de la formule de Trace de Selberg.

Soient T_m et W_n l'opérateur de Hecke et l'opérateur d'Atkin-Lehner, définis ci-dessus. On rappelle que les valeurs propres de T_m sont les nombres $\lambda_f(m)m^{(k-1)/2}$, c'est-à-dire les coefficients de Fourier de $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ (voir [8] ou [18, Propositions 1.3.4 et 1.4.1]) et que les valeurs propres de W_n sont les nombres $\varepsilon_f(n) = \pm 1$, qui sont liés au signe ε_f de l'équation fonctionnelle (3.7) par

$$\varepsilon_f = i^k \varepsilon_f(q) \tag{1.24}$$

pour toute $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ (voir [8] ou [18, p. 27]).

Soit $q \geqslant 1$ un entier. Pour $n \geqslant 1$, on définit

$$\delta_\square^{(q)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = \square \text{ et } (n, q) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\delta_\square(n) := \delta_\square^{(1)}(n).$$

Introduisons les fonctions multiplicatives α, β et γ par

$$\alpha(p^\nu) := \begin{cases} -1 & \text{si } \nu = 1, 2, \\ 1 & \text{si } \nu = 3, \\ 0 & \text{si } \nu \geqslant 4, \end{cases}$$

et

$$\beta(n) := \sum_{d|n} \alpha(d), \qquad \gamma(n) := n \sum_{d|n} \frac{\alpha(d)}{d}.$$

Avec ces notations, la formule de trace de Selberg (voir [2, Proposition 2.8]) peut être énoncée comme la suivante : Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et m, n, q des entiers positifs tels que $(m, q) = 1$, $n \mid q$ et $(n, q/n) = 1$. Alors on a

$$\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S_k^\natural(q)\big) = \frac{k-1}{12} m^{k/2-1} \delta_\square(m) \beta(n) \gamma(q/n) + O(\mathcal{R}_1), \tag{1.25}$$

où la constante impliquée est absolue et

$$\mathcal{R}_1 := k\big(m^{k/2} + m^{(k-1)/2} q^{1/2}\big) \tau(m) \tau(q)^3 \log^2(2mq).$$

Cette formule est moins utile car le terme d'erreur est plus important. Elle ne permet pas d'obtenir les Théorèmes 1.4 et 1.5 ci-dessous. En fait une application directe de (1.25) nous permet d'obtenir seulement $(\log q)^{-6}$ à la place de $(\log q)^{-2}$ (moins bon que le Théorème 1.1). Nous adapterons au niveau $q = p^\nu$ ce qui permet d'améliorer le terme d'erreur dans la formule de trace de Selberg initiale.

Dans ce but nous démontrerons le résultat plus fin suivant :

Théorème 1.3. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et m, n, q des entiers positifs $(m, q) = 1$, $n \mid q$ et $(n, q/n) = 1$. Alors on a*

$$\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S_k^\natural(q)\big) = \frac{k-1}{12} m^{k/2-1} \delta_\square(m) \beta(n) \gamma(q/n) + O(\mathcal{R}_2), \tag{1.26}$$

où

$$\mathcal{R}_2 := k\big(m^{k/2} + m^{(k-1)/2} q^{1/2}\big)\big(\log^2(2mn) + \tau(m)\big) \tau(n) 16^{\omega(q)}, \tag{1.27}$$

avec $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n. La constante impliquée est absolue.

Il est possible de déduire du Théorème 1.3 le résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers et $q = p^\nu$. Alors on a*

$$\sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)} \lambda_f(n) = \frac{k-1}{12} \frac{\delta_\square^{(q)}(n)}{\sqrt{n}} \gamma(q) + O\Big(k\big(\sqrt{n} + \sqrt{q}\big)\big(\log^2(2n) + \tau(n)\big)\Big) \tag{1.28}$$

et

$$\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f(q)\lambda_f(n) \ll k\big(\sqrt{n}+\sqrt{q}\big)\big(\log^2(nq)+\tau(n)\big), \tag{1.29}$$

où les constantes impliquées dans O et $\ll$ sont absolues.

Dans un deuxième temps, nous appliquerons ces formules pour estimer des moments naturels de $L(1/2, f)$ et de $L'(1/2, f)$:

$$\mathcal{M}_r := \sum_{f\in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2,f)^r, \qquad \mathcal{M}'_r := \sum_{f\in \mathrm{H}_k^-(q)} L'(1/2,f)^r.$$

Un avantage de ces formules est que nous pouvons calculer le premier moment (tant pour les fonctions L que pour les fonctions L') qui lui dépend du signe de l'équation fonctionnelle, la formule de trace dans le Chapitre 2, elle, ne permet pas de traiter ce cas. Nous montrerons l'existence de nombres $t(k, q)$ tels que $k\varphi(q) \ll t(k, q) \ll k\varphi(q)$, et vérifiant :

$$\mathcal{M}_1 = t(k,q) + O_k\big(q^{4/5}\big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}'_1 = t(k,q)\log\hat{q} + O_k\left(q^{4/5}\right)$$

nous montrerons aussi les majorations du deuxième moment

$$\mathcal{M}_2 \ll_k q(\log q)^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}'_2 \ll_k q(\log q)^3.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient les résultats suivants.

Théorème 1.4. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ un entier. Pour $q = p^\nu$ assez grand, on a*

$$\frac{1}{\big|\mathrm{H}_k^+(q)\big|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \gg_k \frac{1}{(\log q)^2}.$$

La constante impliquée ne dépend que de k.

Théorème 1.5. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ un entier. Alors pour $q = p^\nu$ assez grand, on a*

$$\frac{1}{\big|\mathrm{H}_k^-(q)\big|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^-(q)\\ L'(1/2,f)\neq 0}} 1 \gg_k \frac{1}{\log q},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

Chapitre 2

Formule de trace de Petersson et non-annulation de $L(1/2, f)$

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier la non-annulation des fonctions L de formes primitives de poids k et de niveau $\mathfrak{p}^\nu$, où $\mathfrak{p}$ est un nombre premier fixé et $\nu \to \infty$.

Nous commençons par un rappel rapide de quelques notions. On appelle forme parabolique de poids $k \geqslant 2$ pair et de niveau q, toute fonction f holomorphe sur le demi plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$ telle que

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{2.1}$$

pour tout élément

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : q \mid c \right\}.$$

et que la fonction $z \mapsto (\Im m\, z)^{k/2} f(z)$ est bornée sur $\mathbb{H}$. On désigne par $S_k(q)$ l'espace des formes paraboliques de poids k et de niveau q, que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_q := \int_F f(z)\overline{g}(z) y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2},$$

où F désigne un domaine fondamental par l'action homographique de $\Gamma_0(q)$ sur $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$. Pour chaque $f \in S_k(m)$ avec $m \mid q$, $m < q$ et $l \mid (q/m)$ alors $z \mapsto f(lz)$ est une forme parabolique de $\Gamma_0(q)$. De telles formes s'appellent des formes anciennes de niveau q. L'orthogonal de l'espace engendré par ces formes est l'espace des formes nouvelles, noté par $S_k^\natural(q)$. Désignons par $\mathrm{H}_k^*(q)$ la base orthogonale de $S_k^\natural(q)$ constituée des formes primitives. Ses éléments sont des fonctions propres des opérateurs de Hecke (cf. [8, Paragraphes 2.7 et 3.3]).

Toute forme $f \in S_k(q)$ a un développement de Fourier en ∞ :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} a_f(n)\, \mathrm{e}(nz), \tag{2.2}$$

où $\mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. On pose

$$\lambda_f(n) := a_f(n) n^{-(k-1)/2}. \tag{2.3}$$

Quand $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$, on a

$$\lambda_f(1) = 1, \tag{2.4}$$

$$\lambda_f(n) \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,q)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{2.6}$$

pour tous les entiers m et $n \geqslant 1$. En particulier, on utilisera dans la suite, que si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ avec m' entier $\geqslant 2$ tel que $m' \mid q$ et si on a r et r' entiers $\geqslant 1$ tels que $r \mid q^\infty$ ou $r' \mid q^\infty$ alors :

$$\lambda_f(rr') = \lambda_f(r)\lambda_f(r') \tag{2.7}$$

de plus les travaux de Deligne montrent que si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ alors

$$\lambda_f(p)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p^2 \mid m', \\ 1/p & \text{si } p \parallel m'. \end{cases} \tag{2.8}$$

La fonction L automorphe associée à $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ est définie par

$$L(s, f) := \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{-s} \qquad (\Re e\, s > 1). \tag{2.9}$$

Définissons la fonction L complète

$$\Lambda(s,f) := \hat{q}^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(s,f), \tag{2.10}$$

où

$$\hat{q} := \sqrt{q}/(2\pi). \tag{2.11}$$

Alors cette fonction peut être prolongée analytiquement sur $\mathbb{C}$ et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s,f) = \varepsilon_f \Lambda(1-s,f) \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{2.12}$$

où $\varepsilon_f = 1$ ou -1.

Les valeurs spéciales de $L(s,f)$ (par exemple, valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique) contiennent des informations intéressantes. En particulier, la non-annulation de $L(s,f)$ au point central $s = \frac{1}{2}$ est une des questions importantes en théorie des fonctions L automorphes et a beaucoup d'applications dans divers problèmes. D'après [7], nous savons que $L(1/2,f) \geqslant 0$. Un lien surprenant avec le zéro de Landau-Siegel a été decouvert par Iwaniec & Sarnak [11]. En désignant par $\varphi(q)$ la fonction d'Euler et $\mathrm{H}_k^+(q)$ (resp. $\mathrm{H}_k^-(q)$) l'ensemble des $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ avec $\varepsilon_f = 1$ (resp. $\varepsilon_f = -1$), leur résultat s'énonce comme suit : si q est sans facteur carré assez grand tel que $\varphi(q) \gg q$ alors

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_k^+(q)|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^+(q) \\ L(1/2,f) \geqslant (\log q)^{-2}}} 1 \geqslant \frac{1}{2}$$

et si l'on peut remplacer $\frac{1}{2}$ par une constante $c > \frac{1}{2}$, alors il n'existe pas le zéro de Landau-Siegel pour les fonctions L de Dirichlet.

Le premier résultat concernant la non-annulation de $L(1/2,f)$ a été obtenu par Duke [6]. Il a démontré que si q est un nombre premier avec $q \geqslant 11$ et $q \neq 13$ alors il existe une constante absolue $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_2^*(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{C}{(\log q)^2}.$$

Cette minoration est obtenue avec la formule de Petersson [6, Lemma 1, p.167]. Par la suite, Kowalski & Michel [13] obtiennent une proportion non nulle de non-annulation, à savoir : si q est un nombre premier assez grand alors

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_2^*(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{1}{6}. \tag{2.13}$$

Ce résultat est démontré avec la formule de trace de Petersson et le calcul des moments d'ordres 1 et 2 des fonctions L mollifiés [1]. En même temps (indépendamment), Vanderkam [24] applique la formule de trace de Selberg [20, Proposition 4] aux deux premiers moments de la fonction L pour obtenir (2.13) avec une constante légèrement moins bonne $\frac{1}{48}$ à la place de $\frac{1}{6}$. Notons que ce résultat est obtenu également (sous une forme différente) par Kowalski, Michel & Vanderkam [14]. Enfin quand q est sans facteur carré, Iwaniec, Luo & Sarnak [10] montrent

$$\liminf_{q \to \infty} \frac{1}{\left|\mathrm{H}_k^+(q)\right|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^+(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{9}{16}.$$

Dans le même article, ils établissent une formule de trace spécifique au cas où q est sans facteur carré.

D'autre part, l'étude des valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ (fonction L de la m-ème puissance symétrique associée à f) a reçu beaucoup d'attention (voir [3], [19] et [16]). En particulier, les résultats de Royer & Wu [19] montrent que les valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ dépendent, d'une manière surprenante, des propriétés arithmétiques du niveau. Donc il est naturel d'étudier l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation de $L(1/2, f)$.

On notera

$$\omega_q(f) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle_q}, \tag{2.14}$$

où $\langle f, f \rangle_q$ désigne le produit scalaire de Petersson. Pour une partie $\mathfrak{A}$ de $S_k(q)$ on

[1] C'est cette technique de mollification qui permet de supprimer le facteur log dans le résultat de Duke

définit la somme harmonique :

$$\sum_{f\in\mathfrak{A}}^{\mathrm{h}} \xi_f := \sum_{f\in\mathfrak{A}} \omega_q(f)\xi_f.$$

Dans ce chapitre, nous proposons de minorer le quotient

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1$$

pour des entiers q de la forme p^ν, où p est un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ est un entier. Le choix de cette forme de niveau a deux raisons : premièrement en prenant $\nu = 1$, nous retrouvons le cas classique qui a été étudié par Duke [6], Kowalski & Michel [13] et Vanderkam [24], mentionné ci-dessus ; deuxièmement, en fixant p et faisant $\nu \to \infty$, on obtient un cas de niveau primaire (i.e. un nombre qui a un seul diviseur premier autre que 1). Ce cas extrême arithmétiquement contraire au cas de niveau premier nous aidera à comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation.

Dans ce chapitre, nous montrerons le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Alors il existe une constante $\nu_0(k,\mathfrak{p})$ telle que pour $\nu \geqslant \nu_0(k,\mathfrak{p})$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ on a*

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1 \gg \frac{1}{(\log q)^3},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

Pour ce faire, dans un premier temps, on établira une formule de trace sur les formes primitives de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ qui prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_q^*(m,n) &:= \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\\ &= \frac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + \text{terme d'erreur},\end{aligned} \tag{2.15}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker (voir le Théorème 2.2 ci-dessous). Nous démontrerons cette formule de trace en suivant la méthode d'Iwaniec, Luo & Sarnak [10] :

– Nous commençons par une formule de trace concernant

$$\Delta_q(m,n) := \sum_{f \in B_k(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n), \tag{2.16}$$

où $B_k(q)$ est une base orthogonale quelconque de $S_k(q)$. Il est à noter que cette définition est indépendante du choix de la base orthogonale puisque $\Delta_q(m,n)$ est le coefficient de Fourier d'une série de Poincaré [5, Lemma 3.3]. À l'aide d'une décomposition permettant de passer des formes paraboliques aux formes primitives de niveaux inférieurs, on peut exprimer $\Delta_q(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta^*_{m'}(m,n)$, où $m' \mid q$, tout en rendant négligeable la contribution des formes de niveau 1. Puis par inversion de Möbius on pourra exprimer $\Delta^*_q(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta_{q'}(m,n)$.

– Après avoir établi une formule de trace dans $S_k(q)$ (cf. [10, (2.12)]) provenant de l'expression de $\Delta_q(m,n)$ comme des sommes de sommes de Kloosterman, on en déduit alors une formule de trace dans $\mathrm{H}^*_k(q)$.

Dans un second temps, on calculera le deuxième et le troisième moment au point critique et ce à l'aide de la formule de trace, pour obtenir :

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \log q + O_{k,\mathfrak{p}}(1),$$
$$\mathcal{M}_3^{\mathrm{h}} = \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 (\log q)^3 + O_{k,\mathfrak{p}}\big((\log q)^2\big),$$

où

$$\mathcal{M}_r^{\mathrm{h}} := \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2, f)^r. \tag{2.17}$$

Enfin une simple application de l'inégalité de Hölder donne le Théorème 2.1.

Le quatrième moment est lui plus dur à obtenir en particulier l'évaluation de son terme général. Ce moment a été calculé (au niveau premier) entre autres avec une inégalité du grand crible [4] appliquée dans la section 3.6 de [15] ; les auteurs évaluent ainsi le « off-diagonal term ».

Concernant la non-annulation des fonctions L au point critique, il est possible de supprimer le facteur $\log^3 q$ de la proportion de non-annulation, ceci donne alors une proportion strictement positive . Les travaux seront publiés par ailleurs.

Notations. Dans ce texte, $\tau(n)$ (resp. $\omega(n)$) est le nombre des diviseurs de n (resp. le nombre de facteurs premiers distincts).

2.2 Formule de trace harmonique au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 2$

Le but de ce paragraphe est d'établir une formule de trace au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 2$. Notre résultat (le Théorème 2.2 ci-dessous) peut être considéré comme complémentaire au Corollaire 2.10 d'Iwaniec, Luo & Sarnak [10].

2.2.1 Énoncé du résultat

Théorème 2.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 2$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \phi(\nu,\mathfrak{p})\delta_{m,n} + O(\mathscr{R}) & si\ \mathfrak{p} \nmid mn\ et\ \nu \geqslant 2, \\ 0 & si\ \mathfrak{p} \mid mn\ et\ \nu \geqslant 2, \end{cases} \tag{2.18}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker,

$$\phi(\nu,\mathfrak{p}) := \begin{cases} 1 - (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^{-1})^{-1} & si\ \nu = 2 \\ 1 - \mathfrak{p}^{-1} & si\ \nu \geqslant 3 \end{cases} \tag{2.19}$$

et

$$\mathscr{R} := \frac{\sqrt{mn\mathfrak{p}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}} \tag{2.20}$$

La constante impliquée dans le symbole O est absolue.

Remarque 1. Le cas où $q = \mathfrak{p}$ a été traité dans [10] : Si $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ sont des entiers tels que $(m, \mathfrak{p}) = 1$ et $(n, \mathfrak{p}^2) \mid \mathfrak{p}$ alors Iwaniec, Luo & Sarnak ont montré dans [10] que

$$\Delta^*_{\mathfrak{p}}(m,n) = \delta_{m,n} + O\left((mn)^{1/4}(n,\mathfrak{p})^{-1/2}\frac{\tau_3\left((m,n)\right)}{\mathfrak{p}}\log(2mn\mathfrak{p})\right) \tag{2.21}$$

Le fait que nos restrictions sur m et n sont moins fortes que celles-ci est dû aux relations relations (2.7) et (2.8).

Corollaire 2.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$\Delta^*_q(m,n) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\dfrac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}}\right) & \text{si } \mathfrak{p} \nmid mn, \\ 0 & \text{si } \mathfrak{p} \mid mn, \end{cases}$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

2.2.2 Formule de trace pour $\Delta_q(m,n)$

Commençons par établir une formule de trace vraie dans tout l'espace des formes paraboliques de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$ et de poids k.

Proposition 2.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier, $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 0$. Alors*

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + O\left(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}\right), \tag{2.22}$$

où la constante impliquée est absolue.

Démonstration. Selon [5, Page 248-9], on a

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{c\equiv 0 (\bmod q)} \frac{S(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),$$

où $S(m,n;c)$ est la somme de Kloosterman définie par

$$S(m,n;c) = \sum_{dd' \equiv 1 (\mathrm{mod}\, c)} \exp\left(2\pi i \left(\frac{dm + d'n}{c}\right)\right)$$

et J_{k-1} est la fonction de Bessel de première espèce. En utilisant les majorations classiques ([8, Pages 60-1] et [5, Page 245]) :

$$|S(m,n;c)| \leqslant 2^{\omega(c)}(m,n,c)^{1/2}c^{1/2}, \qquad J_{k-1}(x) \ll k^{-4/3}x,$$

on peut déduire

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + O\left(\frac{\sqrt{mn}}{k^{4/3}q^{3/2}} \sum_{r \geqslant 1} \frac{2^{\omega(qr)}}{r^{3/2}}(m,n,qr)^{1/2}\right).$$

Puisque $\omega(qr) \leqslant \omega(r) + 1$ et $(m,n,qr) \mid (m,n,q)(m,n,r)$, il suit, en posant $d = (m,n,r)$ et $r = d\ell$, que

$$\begin{aligned}
\Delta_q(m,n) &= \delta_{m,n} + O\left(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}} \sum_{r \geqslant 1} \frac{2^{\omega(r)}(m,n,r)^{1/2}}{r^{3/2}}\right) \\
&= \delta_{m,n} + O\left(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}} \sum_{d \mid (m,n)} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \sum_{\ell \geqslant 1} \frac{2^{\omega(\ell)}}{\ell^{3/2}}\right) \\
&= \delta_{m,n} + O\left(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}} \log^2(2(m,n))\right),
\end{aligned}$$

où l'on a déjà utilisé les estimations classiques (voir (2.72) du Lemme 2.8 ci-dessous)

$$\begin{aligned}
\sum_{d \mid (m,n)} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \leqslant \sum_{d \leqslant (m,n)} \frac{\tau(d)}{d} &= \int_{1-}^{(m,n)} \frac{1}{t}\, \mathrm{d} \sum_{d \leqslant t} \tau(d) \\
&= \int_{1-}^{(m,n)} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}O(t \log t) \ll \log^2(2(m,n)).
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

2.2.3 Une base orthogonale de $S_k(q)$

Dans le but d'exprimer $\Delta_q(m,n)$ en fonction de $\Delta_q^*(m,n)$, on choisira une base orthogonal de $S_k(q)$ spécifique dans la définition (2.16). Considérons la décomposition orthogonale

$$S_k(q) = \bigoplus_{\ell m'=q} \bigoplus_{f \in \mathrm{H}_k^*(m')} S_k(\ell, f) \tag{2.23}$$

où (si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$) $S_k(\ell, f)$ est l'espace engendré par les formes :

$$f_{|d}(z) := d^{k/2} f(dz) \qquad (d \mid \ell). \tag{2.24}$$

On introduit des fonctions de la forme :

$$f_d = \sum_{c|\ell} x_d(c, f) f_{|c}$$

où $q = \ell m'$, d est un diviseur de ℓ, $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$.

Si $m' > 1$, notre choix est

$$x_d(c, f) := \begin{cases} \dfrac{\mu(r)\lambda_f(r)}{\sqrt{r\rho_{f,m'}(d)}} & \text{si } d = rc, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.25}$$

où

$$\rho_{f,m'}(d) := \sum_{n|d} \frac{\mu(n)\lambda_f(n)^2}{n}. \tag{2.26}$$

Si $m' = 1$, on choisit

$$f_{\mathfrak{p}^r} := \begin{cases} f & (r = 0), \\ \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_f}} \left(f_{|\mathfrak{p}} - \dfrac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|1} \right) & (r = 1), \\ \dfrac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}} \left(f_{|\mathfrak{p}^r} - \nu'(\mathfrak{p}) \dfrac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}} + \dfrac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-2}} \right) & (r \geqslant 2), \end{cases} \tag{2.27}$$

où

$$P_1(X) := \frac{X}{\nu'(\mathfrak{p})}, \qquad \sigma_f := 1 - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}, \qquad \nu'(\mathfrak{p}) := 1 + \frac{1}{\mathfrak{p}}. \tag{2.28}$$

Remarque 2. Dans le cas où $m' > 1$, en posant $d = \mathfrak{p}^\delta$, alors :

$$\rho_{f,m'}(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = 0 \text{ ou } \delta \geqslant 1 \text{ et } \mathfrak{p}^2 \mid m', \\ 1 - \mathfrak{p}^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le but de ce sous-paragraphe est de démontrer le résultat suivant, qui joue un rôle important dans la démonstration de la Proposition 2.3 ci-dessous.

Proposition 2.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$.*

(i) Soient la factorisation $q = \ell m'$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$. Alors la famille

$$E_\ell^f := \{f_d : d \mid \ell\}$$

est une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ vérifiant $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout $d \mid \ell$.

(ii) La famille

$$\bigcup_{q=\ell m'} \bigcup_{f \in \mathrm{H}_k^*(m')} \{f_d : d \mid \ell\}$$

est une base orthogonale de $S_k(q)$.

Pour cela, nous avons besoin d'établir quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 2.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soient $m' \mid q$, $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ et $r \geqslant 0$ un entier. Alors pour $\Re e\, s > 1$, on a*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} = Z_f(\mathfrak{p}^r, m', s) L(s, f \otimes f) \tag{2.29}$$

où

$$L(s, f \otimes f) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}, \tag{2.30}$$

$$Z_f(\mathfrak{p}^r, m', s) := \begin{cases} P_r(\lambda_f(\mathfrak{p}), s) & \textit{si } m' = 1, \\ \lambda_f(\mathfrak{p}^r) & \textit{si } m' > 1, \end{cases} \tag{2.31}$$

et

$$\begin{cases} P_0(X,s) := 1, \\ P_1(X,s) := X/(1+\mathfrak{p}^{-s}), \\ P_r(X,s) := XP_{r-1}(X,s) - P_{r-2}(X,s) \quad (r \geqslant 2). \end{cases} \tag{2.32}$$

Démonstration. Si $m' > 1$, on a [2], par multiplicité (2.7) des coefficients $\lambda_f(n)$:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} = \lambda_f(\mathfrak{p}^r)L(s, f\otimes f). \tag{2.33}$$

Ensuite on considère le cas où $m' = 1$. Si on écrit chaque entier $n \geqslant 1$ de façon unique $n = n^{(\mathfrak{p})}n_{\mathfrak{p}}$ avec $n_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p}^\infty$ et $(n^{(\mathfrak{p})}, \mathfrak{p}) = 1$, alors

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} = \sum_{n\mid \mathfrak{p}^\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} \sum_{(n,\mathfrak{p})=1} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}. \tag{2.34}$$

Notons R_r la première de ces deux sommes. (On n'a pas indiqué la dépendance en $f, \mathfrak{p}, s$ pour alléger la notation.) On va démontrer (2.29) par récurrence sur r.

Si $r = 0$, alors (2.29) est trivial.

Quand $r = 1$, on applique (2.6) sous la forme (avec $r = 1$)

$$\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r}) = \lambda_f(\mathfrak{p})\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-1}) - \lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-2}) \tag{2.35}$$

pour écrire

$$\begin{aligned} R^*(\mathfrak{p}, s) &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\ &= \lambda_f(\mathfrak{p}) + \sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\ &= \lambda_f(\mathfrak{p}) + \lambda_f(\mathfrak{p}) \sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)^2}{\mathfrak{p}^{ks}} - \frac{1}{\mathfrak{p}^s} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\ &= \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})}{1+\mathfrak{p}^{-s}} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)^2}{\mathfrak{p}^{ks}}. \end{aligned}$$

[2] C'est ici qu'intervient la différence entre les cas $m' = 1$ et $m' > 1$ due à la multiplicité des coefficients $\lambda_f(n)$.

Avec l'égalité (2.34), on a :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p})}{n^s} = \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})}{1+\mathfrak{p}^{-s}} L(s, f\otimes f). \tag{2.36}$$

Si $r \geqslant 2$, on utilise (2.35) pour écrire pour tout $k \geqslant 0$

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r})}{\mathfrak{p}^{ks}} = \lambda_f(\mathfrak{p}) \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-1})}{\mathfrak{p}^{ks}} - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-2})}{\mathfrak{p}^{ks}}.$$

En reportant dans (2.34) et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} L \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)}{n^s} &= \lambda_f(\mathfrak{p}) \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^{r-1})}{n^s} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^{r-2})}{n^s} \\ &= \big(\lambda_f(\mathfrak{p}) Z_f(\mathfrak{p}^{r-1}, 1, s) - Z_f(\mathfrak{p}^{r-2}, 1, s)\big) L(s, f\otimes f) \\ &= Z_f(\mathfrak{p}^r, 1, s) L(s, f\otimes f). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Cela achève la démonstration. □

Lemme 2.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soient la factorisation $q = \ell m'$, ℓ_1, ℓ_2 deux entiers tels que $\ell_1, \ell_2 \mid \ell$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$. Alors*

$$\big\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2} \big\rangle_q = \begin{cases} \dfrac{\lambda_f(\overline{\ell})}{\sqrt{\overline{\ell}}} \langle f, f\rangle_q & \text{si } m' > 1, \\ \dfrac{P_j(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\overline{\ell}}} \langle f, f\rangle_q & \text{si } m' = 1, \end{cases} \tag{2.38}$$

avec $\overline{\ell} := \ell_1\ell_2/(\ell_1, \ell_2)^2 = \mathfrak{p}^j$ et

$$P_j(X) = P_j(X, 1), \tag{2.39}$$

où les $P_j(X, s)$ sont donnés en (2.32).

Remarque 3. Les entiers j et donc $\overline{\ell}$ ne dépendent que de la différence des exposants de ℓ_1 et ℓ_2 : si $\ell_i := \mathfrak{p}^{\nu_i}$ $(i = 1, 2)$ alors $\overline{\ell} = \mathfrak{p}^{|\nu_1 - \nu_2|}$.

Démonstration du Lemme 2.2. On note

$$\Gamma_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\}$$

et on considère

$$G(s) := \big\langle E(z,s) f(\ell_1 z), f(\ell_2 z) \big\rangle_q,$$

où la série d'Eisenstein

$$E(z,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(q)} (\Im m\, \gamma z)^s. \tag{2.40}$$

est définie pour $z \in \mathbb{H}$ et se prolonge en une fonction holomorphe si $\Re e\, s > \frac{1}{2}$ sauf en un pôle simple en 1 [5, Lemma 3.7].

En utilisant la méthode classique de déroulement exposée dans [10, Pages 72-3], on obtient si $\ell' := \ell_1/(\ell_1, \ell_2)$, $\ell'' := \ell_2/(\ell_1, \ell_2)$ et $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1 \ell_2/(\ell_1, \ell_2)$:

$$G(s) = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \frac{(\ell_1 \ell_2)^{-(k-1)/2}}{[\ell_1, \ell_2]^s} R_f(\ell' \ell'', s), \tag{2.41}$$

où

$$R_f(\ell' \ell'', s) := \sum_n \frac{\lambda_f(\ell' n) \lambda_f(\ell'' n)}{n^s} = \sum_n \frac{\lambda_f(n) \lambda_f(\ell' \ell'' n)}{n^s}, \tag{2.42}$$

car de $(\ell', \ell'') = 1$ on déduit que $\ell' = 1$ ou $\ell'' = 1$.

En appliquant (2.29) du Lemme 2.1, l'égalité (2.41) devient

$$G(s) = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \frac{(\ell_1 \ell_2)^{(1-k)/2}}{[\ell_1, \ell_2]^s} Z_f(\bar{\ell}, m', s) L(s, f \otimes f).$$

Cette égalité appliquée à $\ell_1 = \ell_2 = 1$ montre que $L(s, f \otimes f)$ a un pôle simple en $s = 1$. De plus (2.31) et (2.32) montrent que $Z_f(\bar{\ell}, m', s)$ est holomorphe en $s = 1$. Donc

$$\operatorname*{Res}_{s=1} G(s) = \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k} \frac{(\ell_1 \ell_2)^{(1-k)/2}}{[\ell_1, \ell_2]} Z_f(\bar{\ell}, m', 1) \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f \otimes f).$$

D'autre part, rappelons la formule classique [5] qui concerne les séries d'Eisenstein :

$$\operatorname*{Res}_{s=1} E(z,s) = \frac{3}{\pi\nu(q)}$$

où $\nu(q) = q(1+\mathfrak{p}^{-1})$, qui montre que ce résidu est indépendant de z. On trouve donc

$$\operatorname*{Res}_{s=1} G(s) = \big\langle \operatorname*{Res}_{s=1} E(z,s) f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\big\rangle_q = \frac{3}{\pi\nu(q)}\big\langle f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\big\rangle_q.$$

En comparant les deux expressions de $\operatorname{Res}_{s=1} G(s)$, on peut déduire,

$$\big\langle f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\big\rangle_q = \frac{\pi\nu(q)}{3}\frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k}\frac{(\ell_1\ell_2)^{(1-k)/2}}{[\ell_1,\ell_2]} Z_f(\bar{\ell}, m', 1) \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f\otimes f)$$

ce qui s'écrit encore à l'aide de (2.24) :

$$\big\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\big\rangle_q = \frac{\pi\nu(q)}{3}\frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k}\frac{(\ell_1\ell_2)^{1/2}}{[\ell_1,\ell_2]} Z_f(\bar{\ell}, m', 1) \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f\otimes f). \tag{2.43}$$

Le cas $\ell_1 = \ell_2 = 1$ donne

$$\langle f, f\rangle_q = \frac{\pi\nu(q)}{3}\frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k} \operatorname*{Res}_{s=1} L(s, f\otimes f). \tag{2.44}$$

Enfin les égalités (2.43) et (2.44) donnent

$$\big\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\big\rangle_q = \frac{Z_f(\bar{\ell}, m', 1)}{\sqrt{\bar{\ell}}}\,\langle f, f\rangle_q\,. \tag{2.45}$$

Ceci implique (2.38), grâce aux relations (2.31), (2.32) et (2.39). □

Lemme 2.3. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Si $f \in \mathrm{H}_k^*(1)$, on a*

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1\rangle_q = \langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}}\rangle_q = 0 \quad (r \geqslant 1), \tag{2.46}$$

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^2}\rangle_q = 0 \qquad (r \geqslant 2), \tag{2.47}$$

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q = \langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^{j-1}}\rangle_q \qquad (3 \leqslant j \leqslant r), \tag{2.48}$$

$$\langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q = 0 \qquad (0 \leqslant j < r). \tag{2.49}$$

Démonstration. Montrons (2.46). D'après (2.27), la quantité $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1\rangle_q$ vaut à un facteur multiplicatif près :

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r+1}} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^r} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|1}\right\rangle_q$$

qui vaut avec (2.38)

$$\frac{P_{r+1}(\lambda_f(\mathfrak{p})) - \nu'(\mathfrak{p})P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))P_r(\lambda_f(\mathfrak{p})) + P_{r-1}(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}^{r+1}}}.$$

Puisque $\nu'(\mathfrak{p})P_1(\lambda_f(\mathfrak{p})) = \lambda_f(\mathfrak{p})$, la dernière relation de (2.32) et (2.39) permettent de conclure que

$$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1\rangle_q = 0.$$

Pour ce qui concerne $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}}\rangle_q$ et (2.47), les calculs sont similaires et la récurrence (2.39) permet d'établir qu'ils sont nuls.

Passons à (2.48) avec $3 \leqslant j \leqslant r$. On a

$$\begin{aligned}&\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q \\ &= \left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r+1}} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^r} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|\mathfrak{p}^j} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{j-1}} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{j-2}}\right\rangle_q.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&\langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^{j-1}}\rangle_q \\ &= \left\langle f_{|\mathfrak{p}^r} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}} + \frac{f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}}{\mathfrak{p}}, f_{|\mathfrak{p}^{j-1}} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{j-2}} + \frac{f_{|\mathfrak{p}^{j-3}}}{\mathfrak{p}}\right\rangle_q.\end{aligned}$$

Avec (2.38) on peut développer ce produit scalaire et on retrouve le même résultat qu'avec $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q$ car les indices r et j ont diminué de 1 mais leur différence elle reste la même (cf. Remarque 3).

Enfin montrons (2.49). Pour $r = 1$, (2.27) et la deuxième relation de (2.38) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\langle f_{\mathfrak{p}}, f_1\rangle_q &= \frac{1}{\sigma_f}\left(\langle f_{|\mathfrak{p}}, f_{|1}\rangle_q - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\|f_{|1}\|\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Quand $r \geqslant 2$, le résultat souhaité découle, par une simple récurrence sur r, de (2.46), (2.47) et (2.48). $\square$

Nous sommes maintenant prêts à prouver la Proposition 2.2.

Démonstration de la Proposition 2.2. Évidemment la deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première et la décomposition (2.23). Donc il suffit de démontrer l'assertion (i).

Dans un premier temps, supposons $m' > 1$ et justifions le choix fait en (2.25). Pour cela, on pose

$$\delta_f(d_1, d_2) := \frac{\langle f_{d_1}, f_{d_2} \rangle_q}{\langle f, f \rangle_q}$$

pour $d_1 \mid \ell$ et $d_2 \mid \ell$ (où on rappelle que $f_d = \sum_{c|\ell} x_d(c, f) f_{|c}$). Pour que E_ℓ^f soit une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ et $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout $d \mid \ell$, il suffit de montrer que $\delta_f(d_1, d_2)$ soit le symbole de Kronecker.

Selon (2.38) on a :

$$\delta_f(d_1, d_2) = \sum_{\ell_1, \ell_2 | \ell} x_{d_1}(\ell_1, f) x_{d_2}(\ell_2, f) \frac{\lambda_f(\overline{\ell})}{\sqrt{\overline{\ell}}}$$

avec la notation $\overline{\ell} := \ell_1 \ell_2 / (\ell_1, \ell_2)^2$. Écrivant $\ell_1 = a\ell'$ et $\ell_2 = a\ell''$ avec $a = (\ell_1, \ell_2)$, on a, à l'aide de (2.6) et (2.7) :

$$\begin{aligned}
\delta_f(d_1, d_2) &= \sum_{a|\ell} \sum_{\substack{\ell', \ell'' | (\ell/a) \\ (\ell', \ell'')=1}} x_{d_1}(a\ell', f) x_{d_2}(a\ell'', f) \frac{\lambda_f(\ell')\lambda_f(\ell'')}{\sqrt{\ell'\ell''}} \\
&= \sum_{a|\ell} \sum_{b|(\ell/a)} \mu(b) \sum_{\ell', \ell'' | (\ell/(ab))} x_{d_1}(ab\ell', f) x_{d_2}(ab\ell'', f) \frac{\lambda_f(b\ell')\lambda_f(b\ell'')}{b\sqrt{\ell'\ell''}} \\
&= \sum_{a|\ell} \sum_{b|(\ell/a)} \frac{\mu(b)\lambda_f(b)^2}{b} \sum_{\ell' | (\ell/(ab))} x_{d_1}(ab\ell', f) \frac{\lambda_f(\ell')}{\sqrt{\ell'}} \sum_{\ell'' | (\ell/(ab))} x_{d_2}(ab\ell'', f) \frac{\lambda_f(\ell'')}{\sqrt{\ell''}}.
\end{aligned}$$

En posant $c = ab$, on trouve :

$$\delta_f(d_1, d_2) = \sum_{c|\ell} \rho_{f,m'}(c) y_{d_1}(c, f) y_{d_2}(c, f), \tag{2.50}$$

où $\rho_{f,m'}(c)$ est définie en (2.26) et

$$y_d(c,f) := \sum_{r|(\ell/c)} x_d(rc,f)\frac{\lambda_f(r)}{\sqrt{r}}.$$

Avec le choix (2.25), un calcul simple montre que [3]

$$y_d(c,f) = \begin{cases} 1/\sqrt{\rho_{f,m'}(c)} & \text{si } d = c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En reportant dans (2.50), on a

$$\delta_f(d_1,d_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_1 = d_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci termine la preuve de l'orthogonalité dans le cas $m' > 1$.

Passons à la preuve de la base orthogonale de $S_k(q,f)$. On supposera désormais $m' = 1$. La famille proposée en (2.27) est bien définie puisque

$$\sigma_f \geqslant 1/9. \tag{2.51}$$

D'après (2.49) du Lemme 2.3, la famille E_q^f est une base orthogonale. Il reste à démontrer que $\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q = \|f\|_q$. Pour f_1 c'est immédiat. Pour $f_{\mathfrak{p}}$, d'après (2.27), nous avons

$$\|f_{\mathfrak{p}}\|_q^2 = \frac{1}{\sigma_f}\left(\left\|f_{|\mathfrak{p}}\right\|_q^2 + \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}\left\|f_{|1}\right\|_q^2 - 2\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}}, f_{|1}\right\rangle_q\right).$$

Mais en utilisant la deuxième relation de (2.38), on a

$$\|f_{|\mathfrak{p}^r}\|_q^2 = \|f\|_q^2$$

et

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}}, f_{|1}\right\rangle_q = \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\|f\|_q^2.$$

[3] Notons que $y_d(c,f)$ existe puisque $\rho_{f,m'}(c) = \prod_{p|c}(1-\lambda_f(p)^2/p)$ implique que $\rho_{f,m'}(c) \in]0,1]$ étant donné l'égalité (2.8).

En reportant dans la formule précédente et en utilisant (2.28), on trouve

$$\|f_{\mathfrak{p}}\|_q^2 = \|f\|_q^2.$$

Il reste à traiter le cas de $f_{\mathfrak{p}^r}$ où $r \geqslant 2$. On notera ν' au lieu de $\nu'(\mathfrak{p})$ pour alléger. D'après (2.27), on a

$$\begin{aligned}\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2 = \frac{1}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\Bigg(&\|f_{|\mathfrak{p}^r}\|_q^2 + \frac{\nu'^2 P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}\|f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}\|_q^2 + \frac{\|f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\|_q^2}{\mathfrak{p}^2}\\ &- 2\nu'\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}^r}, f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}\right\rangle_q + \frac{2}{\mathfrak{p}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}^r}, f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\right\rangle_q\\ &- 2\nu'\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}^{3/2}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\right\rangle_q\Bigg).\end{aligned}$$

En utilisant (2.38), on trouve que

$$\begin{aligned}&\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2\\ &= \frac{\|f\|_q^2}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\left(1 + \frac{\nu'(\nu'-2)P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}} + \frac{1+2P_2(\lambda_f(\mathfrak{p})) - 2\nu' P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}^2}\right).\end{aligned}$$

Utilisons la relation de récurrence (2.39) qui peut se réécrire (à l'aide de (2.28)) :

$$P_2 = \nu' P_1^2 - 1$$

pour écrire

$$\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2 = \frac{1}{\sigma_f(1-\mathfrak{p}^{-2})}\left(1 - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\right),$$

ce qui donne bien $\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q = \|f\|_q$. pour tout $r \geqslant 2$. □

2.2.4 Passage entre $\Delta_q(m,n)$ et $\Delta_q^*(m,n)$

On en vient au résultat liant $\Delta_q(m,n)$ et $\Delta_q^*(m,n)$.

Proposition 2.3. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\mathfrak{p} \nmid mn$, on a*

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \frac{1}{\ell}\left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta^*_{m'}(m,n) \\ &+ \frac{\mathfrak{p}^2 - \mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2 - 1}\frac{1}{q}\sum_{d|\mathfrak{p}^\infty} \frac{\Delta^*_1(d^2 m, n)}{d}\end{aligned} \tag{2.52}$$

et réciproquement

$$\begin{aligned}\Delta^*_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \mu(\ell)\left(\mathfrak{p} - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta_{m'}(m,n) \\ &+ \frac{\mu(q)}{q}\sum_{d|\mathfrak{p}^\infty} \frac{\Delta_1(d^2 m, n)}{d}.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Pour prouver cette proposition, on a besoin encore d'établir quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 2.4. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soient la factorisation $q = \ell m'$ et $f \in \mathrm{H}^*_k(m')$, alors*

$$\omega_q(f) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{m'}(f)}{\ell} & si\ m' > 1 \\[2ex] \dfrac{\omega_1(f)}{\nu(q)} & si\ m' = 1. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme repose sur la formule classique ([8, Page 35] et [10, Page 72])

$$\|f\|_q^2 = \frac{\nu(q)}{\nu(m')}\|f\|_{m'}^2.$$

Cela achève la démonstration. □

Lemme 2.5. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soient la factorisation $q = \ell m'$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$. Alors les coefficients $x_d(1, f)$ (pour $d \mid \ell$) définis de (2.25) à (2.28) vérifient*

$$\sum_{d|\ell} x_d(1,f)^2 = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} & si\ m' > 1, \\ \dfrac{\mathfrak{p}^2 - \mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2 - 1}\dfrac{1}{\sigma_f} & si\ m' = 1, \end{cases} \tag{2.54}$$

où σ_f est défini en (2.28).

Démonstration. Commençons par le cas $m' > 1$. D'après (2.25), (2.26), (2.8) et le fait que $\ell \mid \mathfrak{p}^\infty$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{d|\ell} x_d(1,f)^2 &= \sum_{d|\ell} \frac{\mu(d)^2 \lambda_f(d)^2}{d\rho_{f,m'}(d)} = \left(1 + \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{p}\rho_{f,m'}(\mathfrak{p})}\right)^{\omega(\ell)} \\ &= \frac{1}{\rho_{f,m'}(\mathfrak{p})^{\omega(\ell)}} = \frac{1}{\rho_{f,m'}(\ell)} \\ &= \left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Passons au cas où $m' = 1$. D'après (2.27) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{d|q} x_d(1,f)^2 &= 1 + \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}\sigma_f} + \frac{1 - \mu(q)^2}{(\mathfrak{p}^2 - 1)\sigma_f} \\ &= \frac{1}{\sigma_f} + \frac{1 - \mu(q)^2}{(\mathfrak{p}^2 - 1)\sigma_f} \\ &= \frac{1}{\sigma_f}\frac{\mathfrak{p}^2 - \mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2 - 1}. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

Concernant le cas $m' = 1$, on a le résultat suivant.

Lemme 2.6. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Si $f \in \mathrm{H}_k^*(1)$, alors le coefficient σ_f défini en (2.28) vérifie*

$$\frac{1}{\sigma_f(1+\mathfrak{p}^{-1})} = \sum_{n|\mathfrak{p}^\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n}. \tag{2.56}$$

Démonstration. Comme f est une forme primitive de niveau 1, il existe un nombre complexe $\alpha = \alpha_f(\mathfrak{p})$ vérifiant $|\alpha| = 1$ tel que

$$\lambda_f(\mathfrak{p}^j) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j} \alpha^{j-2i} \tag{2.57}$$

pour tout entier $j \geqslant 0$. Donc (2.28) et (2.57) avec $j = 1$ nous donnent

$$\begin{aligned} \sigma_f &= 1 - \frac{\mathfrak{p}^{-1}\lambda_f(\mathfrak{p})^2}{(1+\mathfrak{p}^{-1})^2} \\ &= 1 - \frac{\mathfrak{p}^{-1}(\alpha+\alpha^{-1})^2}{(1+\mathfrak{p}^{-1})^2} \\ &= \frac{(1-\alpha^2/\mathfrak{p})(1-\alpha^{-2}/\mathfrak{p})}{(1+\mathfrak{p}^{-1})^2}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 2\sum_{n|\mathfrak{p}^\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n} &= 2\sum_{j \geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^{2j})}{\mathfrak{p}^j} \\ &= \sum_{j \geqslant 0} \frac{1+(-1)^j}{\sqrt{\mathfrak{p}}^j} \sum_{0 \leqslant i \leqslant j} \alpha^{j-2i} \\ &= \sum_{i \geqslant 0} \alpha^{-2i} \left(\frac{(\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})^i}{1-\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}}} + \frac{(-\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})^i}{1+\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})(1-\alpha^{-1}/\sqrt{\mathfrak{p}})} + \frac{1}{(1+\alpha/\sqrt{\mathfrak{p}})(1+\alpha^{-1}/\sqrt{\mathfrak{p}})}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\sum_{n|\mathfrak{p}^\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n} = \frac{1+\mathfrak{p}^{-1}}{(1-\alpha^2/\mathfrak{p})(1-\alpha^{-2}/\mathfrak{p})},$$

ce qui avec (2.58) termine la preuve. □

On est maintenant prêt de prouver la Proposition 2.3.

Démonstration de la Proposition 2.3. D'après la deuxième assertion de la Proposition 2.2, la famille

$$\bigcup_{q=\ell m'} \bigcup_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \{f_d : d \mid \ell\}$$

est une base orthogonale de $S_k(q)$. D'autre part, la définition (2.16) de $\Delta_q(m,n)$ est indépendente du choix de la base orthogonale [10, Lemma 3.3]. Donc on peut choisir cette base orthogonale dans la définition de $\Delta_q(m,n)$ à écrire

$$\Delta_q(m,n) = \sum_{q=\ell m'} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \sum_{d\mid \ell} \omega_q(f_d)\lambda_{f_d}(m)\lambda_{f_d}(n).$$

On a

$$\lambda_{f_d}(j) = \sum_{\substack{c\mid \ell \\ j=rc}} c^{k/2} x_d(c,f)\lambda_f(r).$$

En particulier si $\mathfrak{p} \nmid j$ alors

$$\lambda_{f_d}(j) = x_d(1,f)\lambda_f(j). \tag{2.59}$$

Le Lemme 2.2 et (2.14) conduisent à $\omega_q(f_d) = \omega_q(f)$. En reportant ceci et (2.59) dans la formule précédente, on a

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) &= \sum_{q=\ell m'} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f) \sum_{d\mid \ell} \lambda_{f_d}(m)\lambda_{f_d}(n) \\ &= \sum_{q=\ell m'} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d\mid \ell} x_d(1,f)^2.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.5, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \left(1-\mu(m')^2\mathfrak{p}^{-2}\right)^{-\omega(\ell)} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \\ &+ \frac{\mathfrak{p}^2-\mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2-1} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)} \frac{\omega_q(f)}{\sigma_f}\lambda_f(m)\lambda_f(n).\end{aligned} \tag{2.60}$$

Afin de faire apparaitre dans (2.60) les nombres $\Delta^*_{m'}$ exprimons $\omega_q(f)$ en fonction de $\omega_{m'}(f)$, on a alors recours au Lemme 2.4 pour avoir

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \ell^{-1}(1-\mu(m')^2\mathfrak{p}^{-2})^{-\omega(\ell)}\Delta^*_{m'}(m,n) \\ &+ \frac{\mathfrak{p}^2-\mu(q)^2}{\mathfrak{p}^2-1}\frac{1}{\nu(q)}\sum_{f\in \mathrm{H}^*_k(1)}\frac{\omega_1(f)}{\sigma_f}\lambda_f(m)\lambda_f(n).\end{aligned} \tag{2.61}$$

À l'aide du Lemme 2.6, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu(q)}\sum_{f\in \mathrm{H}^*_k(1)}\frac{\omega_1(f)}{\sigma_f}\lambda_f(m)\lambda_f(n) &= \frac{1}{q}\sum_{d|\mathfrak{p}^\infty}\frac{1}{d}\sum_{f\in \mathrm{H}^*_k(1)}\omega_1(f)\lambda_f(d^2)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{d|\mathfrak{p}^\infty}\frac{\Delta^*_1(d^2m,n)}{d},\end{aligned}$$

puisque notre hypothèse $\mathfrak{p}\nmid mn$ implique que $\lambda_f(d^2)\lambda_f(m)=\lambda_f(d^2m)$. En reportant dans (2.61), on obtient bien (2.52).

Par inversion de Möbius, il est rapide de vérifier (2.53). □

Remarque 4. La Proposition 2.3 appliquée à $q=\mathfrak{p}^\nu$ donne :

$$\Delta^*_q(m,n) = \begin{cases}\Delta_q(m,n) - \dfrac{\Delta_{q/\mathfrak{p}}(m,n)}{\mathfrak{p}-\mathfrak{p}^{-1}} & \text{si } \nu=2 \\ \Delta_q(m,n) - \dfrac{\Delta_{q/\mathfrak{p}}(m,n)}{\mathfrak{p}} & \text{si } \nu\geqslant 3.\end{cases} \tag{2.62}$$

2.2.5 Fin de la preuve du Théorème 2.2

D'abord on traite le cas où $\mathfrak{p}\mid mn$ et $\nu\geqslant 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathfrak{p}\mid m$. À l'aide de (2.7) et (2.8), on voit que

$$\lambda_f(m)=\lambda_f(\mathfrak{p})\lambda_f(m/\mathfrak{p})=0.$$

Ainsi par la définition de Δ^*_q, on a $\Delta^*_q(m,n)=0$.

Ensuite nou supposons que $\mathfrak{p} \nmid mn$ et $\nu \geqslant 2$. En reportant (2.22) de la Proposition 2.1 dans (2.53) et en remarquant que

$$\sum_{\substack{\ell m'=q \\ m'>1}} \mu(\ell)\left(\mathfrak{p} - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)} = \phi(\nu, \mathfrak{p}),$$

on obtient

$$\Delta_q^*(m,n) = \phi(\mathfrak{p}, \nu)\delta_{m,n} + \mathscr{R},$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{R} &\ll \frac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}} \sum_{\substack{\ell m'=q \\ m'>1}} \frac{|\mu(\ell)|}{m'^{3/2}}\left(\mathfrak{p} - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)} \\ &\ll \frac{\sqrt{mn\mathfrak{p}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

2.3 Lemmes auxiliaires

Soient $\zeta(s)$ la fonction de Riemann et

$$\zeta^{(q)}(s) := \zeta(s)\prod_{p|q}\left(1 - p^{-s}\right). \tag{2.63}$$

2.3.1 Fonctions $U(y)$ et $T(y)$

Soit G est un polynôme pair de degré $\geqslant 2$ tel que :

$$G(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad G(-1) = G(-2) = 0. \tag{2.64}$$

Pour $y > 0$, on définit

$$T(y) := \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\frac{G(s)}{s}y^{-s}\mathrm{d}s, \tag{2.65}$$

$$U(y) := \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{(2)} \zeta^{(q)}(1+2s)\frac{\Gamma(s+k/2)^2}{\Gamma(k/2)^2}\frac{G(s)^2}{s}y^{-s}\mathrm{d}s. \tag{2.66}$$

Lemme 2.7. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{cases} T(y) = 1 + O_k(y) & si\ y \to 0, \\ T(y) \ll_{j,k} y^{-j} & si\ y \to \infty, \end{cases} \tag{2.67}$$

et

$$\begin{cases} U(y) = \dfrac{\varphi(q)}{q}\left\{ \log \dfrac{1}{y} + g_k(\mathfrak{p}) + O_k(y) \right\} & si\ y \to 0, \\ U(y) \ll_{j,k} y^{-j} & si\ y \to \infty, \end{cases} \tag{2.68}$$

pour tout j réel > 0, où

$$g_k(\mathfrak{p}) := 2\left(\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p} - 1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + \gamma \right) \tag{2.69}$$

et γ est la constante d'Euler.

Démonstration. On ne va démontrer que la formule asymptotique pour $U(y)$ quand $y \to 0$. Les autres peuvent être trouvées dans [13, Paragraphe 2.4]. On a

$$\zeta(1+s) = \frac{1}{s} + \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} \frac{(-1)^i}{i!} \gamma_i s^i + O(s^3), \tag{2.70}$$

où γ_i désignent les constantes de Stieltjes[4]. D'autre part, on peut écrire

$$1 - \mathfrak{p}^{-(1+s)} = \frac{\varphi(q)}{q}\left\{ 1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \frac{(\log \mathfrak{p})^j}{\mathfrak{p} - 1} s^j + O(s^4) \right\}. \tag{2.71}$$

Donc

$$\begin{aligned} \zeta^{(q)}(1+2s) &= \left(1 - \mathfrak{p}^{-(1+2s)}\right)\zeta(1+2s) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{1}{2s} + \frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p} - 1} + \gamma + O(s) \right). \end{aligned}$$

Ceci implique la formule annoncée. □

[4] Ces nombres sont définis par

$$\gamma_i := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(\log k)^i}{k} - \frac{(\log n)^{i+1}}{i+1} \right).$$

En particulier $\gamma_0 = \gamma$.

2.3.2 Lemme intermédiaire

Nous aurons besoin des estimations suivantes dans les calculs des moments.

Lemme 2.8. *Soient $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ et $\theta > 1$. On a*

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(n)^i (\log n)^j = C_i x (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(x(\log x)^{2^i+j-2}\big), \tag{2.72}$$

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{\sqrt{n}} = 2C_i \sqrt{x} (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(\sqrt{x}(\log x)^{2^i+j-2}\big), \tag{2.73}$$

$$\sum_{n>x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{n^\theta} \ll \frac{(\log x)^{2^i+j-1}}{x^{\theta-1}} \tag{2.74}$$

uniformément pour $x \geqslant 3$, où C_i est une constante absolue.

Démonstration. En utilisant la formule asymptotique

$$D_i(t) := \sum_{n\leqslant t} \tau(n)^i = C_i t (\log t)^{2^i-1} + O\big(t(\log t)^{2^i-2}\big),$$

une simple intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} \tau(n)^i (\log n)^j &= \int_{1-}^{x} (\log t)^j \mathrm{d}D_i(t) \\
&= (\log x)^j D_i(x) - j \int_1^x \frac{(\log t)^{j-1}}{t} D_i(t) \mathrm{d}t \\
&= C_i x (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(x(\log x)^{2^i+j-2}\big).
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{n^\eta} &= \int_{1-}^{x} \frac{1}{t^\eta} \mathrm{d}\Big(\sum_{n\leqslant t} \tau(n)^i (\log n)^j\Big) \\
&= \frac{1}{x^\eta} \sum_{n\leqslant t} \tau(n)^i (\log n)^j + \eta \int_1^x \sum_{n\leqslant t} \tau(n)^i (\log n)^j \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\eta}} \\
&= \frac{C_i}{1-\eta} x^{1-\eta} (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(\sqrt{x}(\log x)^{2^i+j-2}\big).
\end{aligned}$$

Similairement, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n>x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{n^\theta} &= \int_x^\infty \frac{(\log t)^j}{t^\theta} \mathrm{d}D_i(t) \\ &= -\frac{(\log x)^j}{x^\theta} D_i(x) + \int_x^\infty \frac{\theta(\log t)^j - j(\log t)^{j-1}}{t^{\theta+1}} D_i(t)\mathrm{d}t \\ &\ll \frac{(\log x)^{2^i+j-1}}{x^{\theta-1}}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

2.4 Calcul du deuxième moment

Le but de ce paragraphe est de calculer le deuxième moment $\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}}$, défini en (2.17). Notre résultat est un peu plus général. En posant

$$\mathcal{M}_{r,m}^{\mathrm{h}} := \sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)}^{\mathrm{h}} \lambda_f(m) L(1/2, f)^r, \tag{2.75}$$

nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Soient $0 < \eta < 1$, $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$. Pour tout $1 \leqslant m \leqslant q^\eta$ et $\mathfrak{p} \nmid m$, on a*

$$\mathcal{M}_{2,m}^{\mathrm{h}} = \frac{\tau(m)}{\sqrt{m}} \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \left\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{m}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \right\} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\sqrt{m}\frac{(\log q)^4}{\sqrt{q}}\right),$$

où $g_k(\mathfrak{p})$ est définie en (2.69). En particulier

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \left\{\log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p})\right\} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\frac{(\log q)^4}{\sqrt{q}}\right).$$

Les constantes ne dépendent que de k et $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Considérons

$$J := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \Lambda(s + 1/2, f)^2 G(s)^2 \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

où G est un polynôme de degré $\geqslant 2$ vérifiant (2.64). Par le théorème des résidus, l'équation fonctionnelle (2.12) et le fait que[5] $\varepsilon_f^2 = 1$, on a

$$2J = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\Lambda(s+1/2,f)^2\frac{G(s)^2}{s}\right) = \hat{q}\Gamma(k/2)^2 L(1/2,f)^2.$$

D'autre part, la formule (2.6) nous permet d'écrire, avec la notation (2.63),

$$\begin{aligned} L(s+\tfrac{1}{2},f)^2 &= \sum_{a,b\geqslant 1}\frac{\lambda_f(a)\lambda_f(b)}{(ab)^{s+1/2}} \\ &= \sum_{a,b\geqslant 1}\frac{1}{(ab)^{s+1/2}}\sum_{\substack{d\mid(a,b)\\(d,q)=1}}\lambda_f\left(\frac{ab}{d^2}\right) \\ &= \zeta^{(q)}(1+2s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau(n)\lambda_f(n)}{n^{s+1/2}} \qquad (\Re e\, s > \tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$2J = \hat{q}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau(n)\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{(2)}\zeta^{(q)}(1+2s)\Gamma(s+k/2)^2\frac{G(s)^2}{s}\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right)^{-s}\mathrm{d}s.$$

Les deux égalités précédentes donnent donc :

$$L(1/2,f)^2 = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right)\lambda_f(n) \tag{2.76}$$

où $U(y)$ est définie en (2.66). En reportant cette expression dans (2.75) et en utilisant le Corollaire 2.1, il suit

$$\mathcal{M}_{r,m}^{\mathrm{h}} = \frac{\varphi(q)}{q}\frac{\tau(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}(\mathscr{R}_2), \tag{2.77}$$

où

$$\mathscr{R}_2 := \sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}\left|U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right)\right|\frac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}}.$$

[5] C'est cette relation qui permet d'éviter le recours à une forme explicite de ε_f que l'on n'a pas au niveau q avec des facteurs carrés. C'est aussi pour cette raison que l'on ne peut actuellement pas avoir l'ordre exact du premier moment $\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}}$ mais au mieux une majoration.

À l'aide de (2.68), il est facile de majorer cette contribution :

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{\sqrt{m}(\log q)^3}{q^{3/2}} \sum_{n \leqslant q} \tau(n) + \sqrt{mq}(\log q)^2 \sum_{n > q} \frac{\tau(n)}{n^2} \\
&\ll \frac{\sqrt{m}(\log q)^4}{q^{1/2}}.
\end{aligned}$$

En reportant dans (2.77) et en utilisant la première relation de (2.68), on obtient le résultat souhaité. □

2.5 Calcul du troisième moment

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$. On a*

$$\mathcal{M}_3^{\mathrm{h}} = 4\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 \left\{ \frac{1}{3}(\log \hat{q})^3 + \left(2\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + 2\gamma\right)(\log \hat{q})^2 + O_{k,\mathfrak{p}}(\log q) \right\},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

Plus généralement, nous pouvons aussi, comme dans la Section 2.4, calculer le troisième moment $\mathcal{M}_{3,m}^{\mathrm{h}}$ tordu par $\lambda_f(m)$ défini en (2.75) : Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier, $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$, et m un entier tel que $m \leqslant (\log q)^A$ et $(m, q) = 1$, alors il existe des nombres h_m, k_m et l_m (dépendant de m uniquement) tels que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{3,m}^{\mathrm{h}} = 4\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 \Bigg\{ &\frac{h_m}{3}(\log \hat{q})^3 \\
&+ \left(\left(2\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + 2\gamma\right)h_m + \frac{k_m}{2} - \frac{l_m}{4}\right)(\log \hat{q})^2 + O_{k,\mathfrak{p}}(\log q) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

La constante impliquée ne dépend que de A, k et $\mathfrak{p}$.

2.5.1 Début de la démonstration de la Proposition 2.5

Lemme 2.9. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $m, n, q \geqslant 1$ des entiers positifs. Alors*

$$\mathcal{M}_3^{\mathrm{h}} = 2 \sum_{m,n \geqslant 1} \frac{\tau(m)}{\sqrt{mn}} U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \Delta_q^*(m,n). \tag{2.78}$$

Démonstration. On considère l'intégrale

$$I := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \Lambda(s+1/2, f) \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s.$$

A l'aide de l'équation fonctionnelle (2.12), le théorème des résidus nous permet d'écrire

$$(1+\varepsilon_f) I = \operatorname*{Res}_{s=0} \left(\Lambda(s+1/2, f) \frac{G(s)}{s} \right) = \hat{q}^{1/2} L(1/2, f) \Gamma(k/2).$$

Cette égalité et la série de Dirichlet (2.9) donnent alors

$$L(1/2, f) = (1+\varepsilon_f) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right). \tag{2.79}$$

Les égalités [6](2.79) et (2.76) impliquent que

$$L(1/2, f)^3 = (1+\varepsilon_f) \sum_{m \geqslant 1} \tau(m) \frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}} U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right).$$

Si $\varepsilon_f = 1$ alors

$$L(1/2, f)^3 = 2 \sum_{m \geqslant 1} \tau(m) \frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}} U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right).$$

Mais ceci reste également vrai si $\varepsilon_f = -1$: dans ce cas le membre de gauche est nul en vertu de l'équation fonctionnelle (2.12) qui impose alors $L(1/2, f) = 0$; le

[6] C'est la différence entre les égalités (2.79) et (2.76) qui empêche de déterminer l'ordre exact du premier moment des fonctions L-automorphes et qui nous conduit à étudier plutôt M_2 et M_3.

membre de droite aussi est nul, en effet, de $L(1/2, f) = 0$ on déduit $L(1/2, f)^2 = 0$ et donc

$$\sum_{m\geqslant 1} \tau(m) \frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}} U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) = 0$$

grâce à (2.76).

Finalement, on a pour toute forme primitive de niveau q :

$$L(1/2, f)^3 = 2 \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\tau(m)}{\sqrt{mn}} U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \lambda_f(m)\lambda_f(n). \tag{2.80}$$

Ce qui implique le résultat désiré. □

2.5.2 Application de la formule de trace

En appliquant la formule de trace du Corollaire 2.1 à l'égalité (2.78), on peut écrire

$$\mathcal{M}_3^{\mathrm{h}} = 2\frac{\varphi(q)}{q} \sideset{}{^*}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}(\mathscr{R}_3) \tag{2.81}$$

avec

$$\mathscr{R}_3 := \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\tau(m)\{\log 2(m,n)\}^2}{q^{3/2}} \left| T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) \right|$$

où $\sum_{n\geqslant 1}^*$ désigne la somme portant sur les entiers n tels que $(n, q) = 1$.

2.5.3 Évaluation du terme principal

Afin de calculer le premier terme de droite de (2.81), écrivons

$$\sideset{}{^*}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \left(\sideset{}{^*}\sum_{n\leqslant q} + \sideset{}{^*}\sum_{n>q} \right) \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right). \tag{2.82}$$

En faisant appel à (2.67)-(2.68) avec $j = 1$ et (2.74), on a

$$\sideset{}{^*}\sum_{n>q} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) \ll q^{3/2} \sum_{n>q} \frac{\tau(n)}{n^3} \ll q^{-1/2} \log q. \tag{2.83}$$

En utilisant la première relation de (2.68), on peut écrire

$$\sideset{}{^*}\sum_{n\leqslant q} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \mathscr{T} + O(\mathscr{R}_4), \tag{2.84}$$

où

$$\mathscr{T} := \frac{\varphi(q)}{q} \sideset{}{^*}\sum_{n\leqslant q} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \left\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{n}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_4 &:= \frac{1}{\hat{q}^2} \sideset{}{^*}\sum_{n\leqslant q} \tau(n) \left| T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \right| \\ &\ll \frac{1}{\hat{q}^2} \left(\sum_{n\leqslant \hat{q}} \tau(n) + \hat{q}^2 \sideset{}{^*}\sum_{\hat{q}<n\leqslant q} \frac{\tau(n)}{n^2} \right) \\ &\ll q^{-1/2} \log q \end{aligned} \tag{2.85}$$

grâce à (2.67) et (2.74).

Pour évaluer le terme principal $\mathscr{T}$, on écrit, à l'aide de (2.65),

$$\mathscr{T} = \frac{\varphi(q)}{q} \big(\mathscr{T}_0 - \mathscr{R}_5 \big),$$

où

$$\mathscr{T}_0 := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sideset{}{^*}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau(n)}{n^{s+1}} \left\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{n}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \right\} \hat{q}^s \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s,$$

$$\mathscr{R}_5 := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sideset{}{^*}\sum_{n> q} \frac{\tau(n)}{n^{s+1}} \left\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{n}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \right\} \hat{q}^s \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s.$$

En utilisant l'estimation (2.74) du Lemme 2.8 pour majorer la somme dans $\mathscr{R}_5$ et la formule de Stirling

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi}\, e^{-(\pi/2)|\tau|} |\tau|^{\sigma-1/2} \big\{ 1 + O_\sigma\big(|\tau|^{-1}\big) \big\} \tag{2.86}$$

valable uniformément pour $|\tau| \geqslant 1$, on peut déduire que

$$\mathscr{R}_5 \ll_k q^{-1} (\log q)^2. \tag{2.87}$$

Pour évaluer $\mathscr{T}_0$, on écrit d'abord

$$\mathscr{T}_0 = \big(\log \hat{q}^2 + g_k(\mathfrak{p})\big)\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\zeta^{(q)}(s+1)^2\hat{q}^s\frac{G(s)}{s}\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{(2)} \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\hat{q}^s\frac{G(s)}{s}\mathrm{d}s.$$

Ensuite on utilise le théorème des résidus autour du pôle $s = 0$, les intégrales résultantes en $\sigma = -\frac{1}{2}$ sont en $O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q)$ de sorte que

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_0 = \big(2\log \hat{q} + g_k(\mathfrak{p})\big)\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)^2\frac{F(s)}{s}\right)\\ +2\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\frac{F(s)}{s}\right)+O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q)\end{aligned} \tag{2.88}$$

où

$$F(s) := \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\hat{q}^s G(s).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$F^{(j)}(0) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j}\xi_{j,i}(\log \hat{q})^{j-i}, \tag{2.89}$$

où

$$\xi_{j,i} := \binom{j}{i}\sum_{\ell=0}^{i}\binom{i}{\ell}\frac{\Gamma^{(\ell)}}{\Gamma}(k/2)G^{(i-\ell)}(0).$$

En utilisant les relations (2.70) et (2.71), on trouve

$$\zeta^{(q)}(s+1)^2 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left\{\frac{a_{-2}}{s^2}+\frac{a_{-1}}{s}+a_0+O(s)\right\}, \tag{2.90}$$

$$\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left\{\frac{b_{-3}}{s^3}+\frac{b_{-2}}{s^2}+b_0+O(s)\right\}, \tag{2.91}$$

où

$$\begin{aligned} a_{-2} &:= 1, \\ a_{-1} &:= 2\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + 2\gamma_0, \\ a_0 &:= \left(\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right)^2 - \frac{(\log \mathfrak{p})^2 - 4\gamma_0 \log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \gamma_0^2 - 2\gamma_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{-3} &:= -1, \\ b_{-2} &:= -\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} - \gamma_0, \\ b_0 &:= -\frac{(\log \mathfrak{p})^3 - 2\gamma_0(\log \mathfrak{p})^2}{2(\mathfrak{p}-1)^2} + \frac{(\log \mathfrak{p})^3 - 6\gamma_0(\log \mathfrak{p})^2 + 6(\gamma_0^2 - 2\gamma_1)\log \mathfrak{p}}{6(\mathfrak{p}-1)} \\ &\quad - \gamma_0\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2}. \end{aligned}$$

Donc on a les résidus suivants :

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)^2\frac{F(s)}{s}\right) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left(\frac{a_{-2}}{2}F''(0) + a_{-1}F'(0) + a_0F(0)\right)$$

et

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\frac{F(s)}{s}\right) \\ &\quad = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left(\frac{b_{-3}}{6}F'''(0) + \frac{b_{-2}}{2}F''(0) + b_0F(0)\right). \end{aligned}$$

En reportant dans (2.88) et en utilisant (2.89), on obtient

$$\mathscr{T}_0 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 Q(\log \hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q), \tag{2.92}$$

où

$$Q(X) := A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0, \tag{2.93}$$

et les constantes $A_j = A_j(k, \mathfrak{p})$ sont données par

$A_3 := a_{-2}\xi_{2,0} + \frac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,0}$,

$A_2 := a_{-2}\xi_{2,1} + 2a_{-1}\xi_{1,0} + \frac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,0}g_k(\mathfrak{p}) + \frac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,1} + b_{-2}\xi_{2,0}$,

$A_1 := a_{-2}\xi_{2,2} + 2a_{-1}\xi_{1,1} + 2a_0\xi_{0,0} + (\frac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,1} + a_{-1}\xi_{1,0})g_k(\mathfrak{p}) + \frac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,2} + b_{-2}\xi_{2,1}$,

$A_0 := (\frac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,2} + a_{-1}\xi_{1,1} + a_0\xi_{0,0})g_k(\mathfrak{p}) + \frac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,3} + b_{-2}\xi_{2,2} + 2b_0\xi_{0,0}$.

En combinant (2.92), (2.87), (2.84), (2.83) avec (2.82), on trouve

$$\sideset{}{^*}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^3 Q(\log \hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q). \tag{2.94}$$

2.5.4 Estimation du terme d'erreur $\mathscr{R}_3$

Écrivons

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_3 &= \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geqslant 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\(m,n)=a}} \tau(m) \left| T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geqslant 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\(m,n)=1}} \tau(am) \left| T\left(\frac{an}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{am}{\hat{q}^2}\right)\right| \\
&\ll \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geqslant 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{b\geqslant 1} |\mu(b)| \sum_{m,n\geqslant 1} \tau(abm) \left| T\left(\frac{abn}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{abm}{\hat{q}^2}\right)\right| \\
&\ll \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{d\geqslant 1} h(d)\tau(d) \sum_{n\geqslant 1} \left| T\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right)\right| \sum_{m\geqslant 1} \tau(m) \left| U\left(\frac{dm}{\hat{q}^2}\right)\right|,
\end{aligned}$$

où

$$h(d) := \sum_{ab=d} \{\log(2a)\}^2 |\mu(b)|.$$

En utilisant (2.67), on a :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left| T\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right)\right| \ll \sum_{n\leqslant \hat{q}/d} 1 + \sum_{n>\max\{\hat{q}/d,1\}} \left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)^2 \ll \frac{\hat{q}}{d}.$$

De façon similaire, les estimations (2.68) avec $j = 2$, (2.74) et (2.74) nous permettent de déduire

$$\sum_{m\geqslant 1}\tau(m)\left|U\left(\frac{dm}{\hat{q}^2}\right)\right| \ll \sum_{m\leqslant \hat{q}^2/d}\tau(m)\log\left(\frac{\hat{q}^2}{dm}\right) + \sum_{m>\max\{\hat{q}^2/d,1\}}\tau(m)\left(\frac{\hat{q}^2}{dm}\right)^2$$
$$\ll \frac{\hat{q}^2\log q}{d}.$$

En combinant ces estimations, on obtient

$$\mathscr{R}_3 \ll (\log q)\sum_{d\geqslant 1}\frac{h(d)\tau(d)}{d^2} \ll \log q. \tag{2.95}$$

2.5.5 Fin de la démonstration de la Proposition 2.5

En reportant (2.94) et (2.95) dans (2.81), on obtient

$$\mathcal{M}_3^{\mathrm{h}} = 2\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 Q(\log\hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(\log q).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$A_3 = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad A_2 = 2\left(2\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + 2\gamma\right).$$

Ceci implique le résultat annoncé.

2.6 Démonstration du Théorème 2.1

On utilise l'inégalité de Hölder, selon laquelle :

$$\Bigg(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in\mathrm{H}_k^*(q)} L(1/2,f)^2\Bigg)^3 \leqslant \Bigg(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in\mathrm{H}_k^*(q)} L(1/2,f)^3\Bigg)^2 \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in\mathrm{H}_k^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1.$$

On en déduit :

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1 \geqslant \frac{(\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}})^3}{(\mathcal{M}_3^{\mathrm{h}})^2}.$$

Utilisons les Propositions 2.4-2.5 pour obtenir avec l'inégalité précédente :

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1 \gg_{k,\mathfrak{p}} \frac{\left((\varphi(q)/q)^2 \log q + O(1)\right)^3}{(\log q)^6} \gg_{k,\mathfrak{p}} \frac{1}{(\log q)^3}$$

ce qui termine la preuve du Théorème 2.1.

Chapitre 3

Formule de trace de Selberg et non-annulation de $L(1/2, f)$ et $L'(1/2, f)$

3.1 Introduction

Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $q \geqslant 1$ un entier. Désignons par $S_k^\natural(q)$ l'espace des formes nouvelles de niveau q et de poids k et par $\mathrm{H}_k^*(q)$ l'ensemble des formes primitives de $S_k^\natural(q)$. Pour chaque $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$, son développement de Fourier en $i\infty$ s'écrit

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} \, \mathrm{e}^{2\pi i n z} \qquad (\Im m\, z > 0),$$

où $\lambda_f(n)$ s'appelle le n-ème coefficient de Fourier normalisé de f, vérifiant la relation de Hecke :

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,q)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \qquad (m, n \geqslant 1). \tag{3.1}$$

Selon Deligne, on a

$$\lambda_f(p) = \varepsilon_f(p)p^{-1/2} \qquad (p \parallel q), \tag{3.2}$$

$$\lambda_f(p) = 0 \qquad (p^2 \mid q), \tag{3.3}$$

$$|\lambda_f(n)| \leqslant \tau(n) \qquad (n \geqslant 1), \tag{3.4}$$

où $\varepsilon_f(p) = \pm 1$ et $\tau(n)$ est la fonction de diviseurs.

La fonction L associée à $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ est définie par

$$L(s, f) := \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{-s} \qquad (\Re e\, s > 1). \tag{3.5}$$

Elle est prolongeable analytiquement sur $\mathbb{C}$. Si l'on note

$$\hat{q} := q/(2\pi), \qquad \Lambda(s, f) := \hat{q}^s \Gamma(s + (k-1)/2) L(s, f), \tag{3.6}$$

alors $\Lambda(s, f)$ est une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s, f) = \varepsilon_f \Lambda(1 - s, f) \qquad (s \in \mathbb{C}), \tag{3.7}$$

où $\varepsilon_f = \pm 1$.

Les valeurs spéciales de $L(s, f)$ (par exemple, valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique) contiennent des informations intéressantes. En particulier, la non-annulation de $L(s, f)$ au point central $s = \frac{1}{2}$ est une des questions importantes en théorie des fonctions L automorphes et a beaucoup d'applications dans des divers problèmes. D'après J.-D. Guo [7], nous savons que

$$L(1/2, f) \geqslant 0.$$

Un lien surprenant avec le zéro de Siegel a été decouvert par Iwaniec & Sarnak [11]. En désignant par $\varphi(q)$ la fonction d'Euler et $\mathrm{H}_k^+(q)$ (resp. $\mathrm{H}_k^-(q)$) l'ensemble des $f \in \mathrm{H}_k^-(q)$ avec $\varepsilon_f = 1$ (resp. $\varepsilon_f = -1$), leur résultat s'énonce comme le suivant : Si q est sans facteur carré assez grand tel que $\varphi(q) \gg q$ alors

$$\frac{1}{\left|\mathrm{H}_k^+(q)\right|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^+(q) \\ L(1/2, f) \geqslant (\log q)^{-2}}} 1 \geqslant \frac{1}{2}$$

et si l'on peut remplacer $\frac{1}{2}$ par une constante $c > \frac{1}{2}$, alors il n'existe pas le zéro de Landau-Siegel pour les fonctions L de Dirichlet.

Le premier résultat concernant la non-annulation de $L(1/2, f)$ a été obtenu par Duke [6]. Il a démontré que si q est un nombre premier avec $q \geqslant 11$ et $q \neq 13$ alors il existe une constante absolue $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_2^*(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{C}{(\log q)^2}. \tag{3.8}$$

Cette minoration est obtenue avec la formule de Petersson [6, Lemma 1, p.167]. Par la suite, Kowalski & Michel [13] obtiennent une proportion positive de non-annulation, à savoir : si q est un nombre premier assez grand alors

$$\liminf_{q \to \infty} \frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_2^*(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{1}{6}. \tag{3.9}$$

Ce résultat est démontré avec la formule de trace de Petersson et le calcul des moments 1 et 2 des fonctions L mollifiés [1]. En même temps (indépendamment), Vanderkam [24] applique, lui, la formule de trace de Selberg [20, Proposition 4] aux deux premiers moments de la fonction L pour obtenir (3.9) avec une constante légèrement moins bonne $\frac{1}{48}$ à la place de $\frac{1}{6}$. Notons que ce résultat est obtenu également (sous une forme différente) par Kowalski, Michel & Vanderkam [14]. Enfin quand q est sans facteur carré, Iwaniec, Luo & Sarnak [10] montrent

$$\liminf_{q \to \infty} \frac{1}{\left|\mathrm{H}_k^+(q)\right|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^+(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{9}{16}.$$

Dans le même article ils établissent une formule de trace spécifique au cas où q est sans facteur carré. Bien que ce ne soit pas elle qui soit utilisée dans la preuve du résultat ci-dessus mais un résultat de densité.

Il semble intéressant d'étudier l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation de $L(1/2, f)$. Dans le Chapitre 2, nous avons proposé

[1] C'est cette technique de mollification qui permet de supprimer le facteur log dans le résultat de Duke

d'étudier le problème de non-annulation pour le niveau de type p^ν, où p est un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ est un entier. Nous avons obtenu

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^*(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \gg_k \frac{1}{(\log q)^3} \tag{3.10}$$

pour $q = p^\nu$ assez grand (cf. le Théorème 2.1 du Chapitre 2). Le choix de cette forme de q a deux raisons : Premièrement en prenant $\nu = 1$, nous retrouvons le cas classique qui a été étudié par Duke [6], Kowalski & Michel [13] et Vanderkam [24], mentionné ci-dessus. Deuxièmement, en fixant p et faisant $\nu \to \infty$, on obtient un cas de niveau primaire (i.e. un nombre qui a un seul diviseur premier autre que 1). Ceci est un cas extrême contraire au cas de niveau premier et nous aidera à comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non-annulation. La minoration (3.10) a été démontrée à l'aide de notre formule de trace de type Petersson avec le niveau $q = p^\nu$ (voir le Théorème 2.2 du Chapitre 2).

Le premier but de ce travail est d'établir un résultat meilleur.

Théorème 3.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ un entier. Pour $q = p^\nu$ assez grand, on a*

$$\frac{1}{\left|\mathrm{H}_k^+(q)\right|} \sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^+(q) \\ L(1/2,f) \neq 0}} 1 \gg_k \frac{1}{(\log q)^2}.$$

La constante impliquée est absolue.

En prenant $\nu = 1$ et $k = 2$ dans le Théorème 3.1, on retrouve le résultat (3.8) de Duke. Différent de Duke [6] et du Chapitre 2, nous utiliserons la formule de trace de Selberg (voir [2, Paragraphe 2] ou (3.17) ci-dessous) au lieu de celle de Petersson. La formule de trace de Selberg a un double avantage. Premièrement elle est valable pour le niveau quelconque. Deuxièmement elle nous permet d'estimer des moments naturels de $L(1/2, f)$ (resp. $L'(1/2, f)$). Pourtant une application directe de (3.17) ci-dessous nous permet d'obtenir seulement $(\log q)^{-6}$ à la place

de $(\log q)^{-2}$ (moins bon que (3.10)). Nous adapterons au niveau $q = p^\nu$ ce qui permet d'améliorer le terme d'erreur de la formule initiale. Le fait que le théorème ne présente pas une proportion positive de non-annulation a plusieurs raisons : Contrairement au cas où q est sans facteur carré, il n'existe pas actuellement d'expression du signe de l'équation fonctionnelle en fonction des coefficients $\lambda_f(n)$, cette expression permettait alors de calculer des formules de trace sur les formes paires ou de calculer des moments d'ordre impair, ceci n'est plus le cas au niveau p^ν. Sans une formule de trace adaptée au cas du niveau ayant des facteurs carrés (par exemple la formule de Petersson pour le niveau q premier et k petit ou la formule [10, Corollaire 2.10] dans le cas où q est sans facteur carré), on ne peut que majorer le second moment des fonctions L ainsi tordre ces moments par la méthode de Mollification de Kowalski, Michel & Vanderkam est impossible et c'est cette technique qui pourrait pourtant diminuer ou supprimer la puissance de $(\log q)^2$. Notons enfin que la puissance de $(\log q)^2$ (dans le théorème précédent) ne pourrait être diminuée (sans mollification) qu'à condition de modifier la formule de trace utilisée.

Le problème de non-annulation de $L'(1/2, f)$ a été étudié par Kowalski & Michel [13]. Quand q est un nombre premier assez grand, ils ont obtenu

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_2^*(q)\\ L(1/2,f)=0,\, L'(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{19}{54}. \tag{3.11}$$

Le deuxième but de ce travail est d'étudier le problème de non-annulation de $L'(1/2, f)$.

Théorème 3.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ un entier. Alors pour $q = p^\nu$ assez grand, on a*

$$\frac{1}{\left|\mathrm{H}_k^-(q)\right|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^-(q)\\ L'(1/2,f)\neq 0}} 1 \gg_k \frac{1}{\log q},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

3.2 Formule de Trace de Selberg

Soit $q \geqslant 1$ un entier. Pour $n \geqslant 1$, on définit

$$\delta_{\square}^{(q)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = \square \text{ et } (n,q) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \delta_{\square}(n) := \delta_{\square}^{(1)}(n). \tag{3.12}$$

Introduisons les fonctions multiplicatives α, β et γ par

$$\alpha(p^{\nu}) := \begin{cases} -1 & \text{si } \nu = 1, 2 \\ 1 & \text{si } \nu = 3 \\ 0 & \text{si } \nu \geqslant 4 \end{cases} \tag{3.13}$$

et

$$\beta(n) := \sum_{d|n} \alpha(d), \qquad \gamma(n) := n \sum_{d|n} \frac{\alpha(d)}{d}. \tag{3.14}$$

Évidemment pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geqslant 1$, on a

$$-1/p - 1/p^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \alpha(p^j)/p^j \leqslant -1/p,$$

d'où l'on déduit, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\varphi(n) \ll \gamma(n) = n \prod_{p^{\nu} \| n} \Big(1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \alpha(p^j)/p^j\Big) \leqslant \varphi(n). \tag{3.15}$$

De plus si n est sans facteur carré, alors $\gamma(n) = \varphi(n)$.

Désignons par T_m l'opérateur de Hecke et W_n l'opérateur de Atkin-Lehner (voir [8] ou [18, Paragraphes 1.1.2 et 1.1.4]), respectivement. On rappelle que les valeurs propres de T_m sont les nombres $\lambda_f(m)m^{(k-1)/2}$, c'est-à-dire les coefficients de Fourier de $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ (voir [8] ou [18, Propositions 1.3.4 et 1.4.1]) et que les valeurs propres de W_n sont les nombres $\varepsilon_f(n) = \pm 1$, qui sont liés au signe ε_f de l'équation fonctionnelle (3.7) par

$$\varepsilon_f = i^k \varepsilon_f(q) \tag{3.16}$$

pour toute $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ (voir [8] ou [18, p. 27]).

Avec ces notations, la formule de trace de Selberg (voir [2, Proposition 2.8]) peut être énoncée comme la suivante : Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $q \geqslant 1$, $(m,q)=1$, $n \mid q$ et $(n, q/n)=1$. Alors on a

$$\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S_k^\natural(q)\big) = \frac{k-1}{12} m^{k/2-1} \delta_\square(m) \beta(n) \gamma(q/n) + O(\mathcal{R}_1), \tag{3.17}$$

où la constante impliquée est absolue et

$$\mathcal{R}_1 := k\big(m^{k/2} + m^{(k-1)/2} q^{1/2}\big) \tau(m) \tau(q)^3 \log^2(2mq).$$

Cette formule ne permet pas d'obtenir la minoration du Théorème 1. Dans ce but on démontrera le résultat plus fin suivant :

Théorème 3.3. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $q \geqslant 1$, $(m,q)=1$, $n \mid q$ et $(n, q/n)=1$. Alors on a*

$$\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S_k^\natural(q)\big) = \frac{k-1}{12} m^{k/2-1} \delta_\square(m) \beta(n) \gamma(q/n) + O(\mathcal{R}_2), \tag{3.18}$$

où la constante impliquée est absolue et

$$\mathcal{R}_2 := k\big(m^{k/2} + m^{(k-1)/2} q^{1/2}\big) \big(\log^2(2mn) + \tau(m)\big) \tau(n) 16^{\omega(q)}. \tag{3.19}$$

Il est possible de déduire du Théorème 3.3 le résultat suivant.

Corollaire 3.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers et $q = p^\nu$. Alors on a*

$$\sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)} \lambda_f(n) = \frac{k-1}{12} \frac{\delta_\square^{(q)}(n)}{\sqrt{n}} \gamma(q) + O\Big(k\big(\sqrt{n} + \sqrt{q}\big)\big(\log^2(2n) + \tau(n)\big)\Big) \tag{3.20}$$

et

$$\sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f(q) \lambda_f(n) \ll k\big(\sqrt{n} + \sqrt{q}\big)\big(\log^2(nq) + \tau(n)\big), \tag{3.21}$$

où les constantes impliquées dans O et $\ll$ sont absolues .

Remarque 5. Notons que ce résultat permet de retrouver la Proposition 2.13 de [10] puisque si q est sans facteur carré alors $\gamma(q) = \varphi(q)$. Cependant le reste est ici plus précis en q que celui de [10] (il est cependant moins précis en n).

Il est également possible d'utiliser ces résultats pour compter le nombre de formes primitives (paires ou impaires) de niveau q et de poids k.

Corollaire 3.2. *Soient p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers et $q = p^\nu$. Alors on a*

$$|\mathrm{H}_k^*(q)| = \frac{k-1}{12}\big\{\gamma(q) + O\big(q^{1/2}\big)\big\}, \tag{3.22}$$

$$\big|\mathrm{H}_k^\pm(q)\big| = \frac{k-1}{24}\big\{\gamma(q) + O\big(q^{1/2}(\log q)^2\big)\big\}, \tag{3.23}$$

où les constantes impliquées sont absolues.

3.3 Preuves des Théorème 3.3 et Corollaires 3.1-3.2

3.3.1 Début de la preuve du Théorème 3.3

D'après [22, p 117], on a

$$\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S_{2k-2}^\natural(q)\big) = \sum_{q'|q} \alpha(q/q') s_{k,q'}\big(m, (n, q')\big). \tag{3.24}$$

La quantité $s_{k,q}(m,n)$ est définie par

$$\begin{aligned} s_{k,q}(m,n) := &-\frac{1}{2}\sum_{d|n}\sum_{\substack{t\leqslant 2(m/d)^{1/2}\\ (Q(n/d),t)=1}} p_{2k-2}\big(d^{1/2}t, m\big) H_{q/n}\big((dt)^2 - 4dm\big) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{d|m} \min(d, m/d)^{2k-3} A(d,m,n,q) + \delta_{k=2}\sigma(m)\tau(n)\delta_\square(q/n), \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\sigma(m)$ est la somme des diviseurs de m,

$$Q(\ell) := \max_{d^2|\ell} d, \qquad A(d,m,n,q) := \big(Q(n), d+m/d\big)\big(Q(q/n), d-m/d\big)$$

et

$$\delta_{k=2} := \begin{cases} 1 & \text{si } k=2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les nombres $H_{q/n}(D)$ sont définis dans [22, p. 120] et sont indépendants de k. On utilise alors les estimations [2] de [2, p. 44 et 45] pour obtenir

$$H_{q/n}(D) = \begin{cases} -q/(12n) & \text{si } D=0, \\ O\big(Q\big((D,q/n)\big)|D|^{1/2}(\log|D|)^2\big) & \text{si } D<0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Enfin si l'on désigne par ξ et $\bar{\xi}$ les deux racines de $X^2 - aX + b$ si $a^2 - 4b \neq 0$, alors

$$p_k(a,b) := \begin{cases} (\xi^{k-1} - \bar{\xi}^{k-1})/(\xi - \bar{\xi}) & \text{si } a^2-4b \neq 0, \\ (k-1)(a/2)^{k-2} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.27}$$

(définition voir [22, p. 120])

3.3.2 Formule asymptotique de $s_{k,q}(m,n)$

Afin d'utiliser (3.24) il est nécessaire de connaitre la quantité $s_{k,q}(m,n)$.

Lemme 3.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $q \geqslant 1$ un entier, $(m,q)=1$, $n \mid q$ et $(n, q/n) = 1$. Alors on a*

$$s_{k,q}(m,n) = \frac{(2k-3)\delta_\square(m)m^{k-2}q}{12n} + O(\mathcal{R}_3), \tag{3.28}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3 := k\big(m^{k-1} + m^{k-3/2}q^{1/2}\big)\tau(n)4^{\omega(q/n)}\log^2(2mn) \\ + \sigma(m)\tau(n) + \tau(m)m^{k-3/2}q^{1/2}\end{aligned}$$

et la constante impliquée est absolue.

[2] article où le chapitre 2 sur la formule de Trace de Selberg est vrai pour $k=2$.

Démonstration. D'abord, on calcule la contribution des termes dans la double somme de droite de (3.25) avec

$$(dt)^2 - 4dm = 0 \tag{3.29}$$

à $s_{k,q}(m,n)$. Désignons par Ψ cette contribution, qui construira le terme principal de la formule asymptotique (3.28). Puisque $d \mid q$ et que $(m,q) = 1$, on doit avoir $(m,d) = 1$. Donc (3.29) (équivalente à $dt^2 = 4m$) ne se produit que si m est un carré. Si m est un carré, il y a deux possibilités : soit $4 \mid n$ auquel cas $d = 4$ (car dans le cas où $d = 1$ on aurait t pair et puisque $4 \mid n$ alors $2 \mid Q(n)$ ce qui contredit la condition $(Q(n/d), t) = 1$) on a alors $t = \pm m^{1/2}$. Si cette fois $4 \nmid n$ alors $d = 1$ et donc $t = \pm 2m^{1/2}$. En résumé, (3.29) a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} d = 4,\ t = \pm m^{1/2} & \text{si } 4 \mid n \text{ et } \delta_\square(m) = 1, \\ d = 1,\ t = \pm 2m^{1/2} & \text{si } 4 \nmid n \text{ et } \delta_\square(m) = 1. \end{cases}$$

Donc d'après la première relation de (3.26) et la deuxième de (3.27), on trouve

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\delta_\square(m)q}{24n}\Big(p_{2k-2}(2m^{1/2}, m) + p_{2k-2}(-2m^{1/2}, m)\Big) \\ &= \frac{(2k-3)\delta_\square(m)m^{k-2}q}{12n}. \end{aligned}$$

Par les inégalités triviales $\min(m', m/m') \leqslant m^{1/2}$ et $Q(\ell) \leqslant \ell^{1/2}$, le deuxième membre de droite de (3.25) est $\leqslant \frac{1}{2}\tau(m)m^{k-3/2}q^{1/2}$. Ainsi on peut écrire (3.25) comme

$$\begin{aligned} s_{k,q}(m,n) = \frac{(2k-3)\delta_\square(m)m^{k-2}q}{12n} - R \\ + O\big(\sigma(m)\tau(n) + \tau(m)m^{k-3/2}q^{1/2}\big), \end{aligned} \tag{3.30}$$

où

$$R := \frac{1}{2}\sum_{d \mid n} \sum_{\substack{t < 2(m/d)^{1/2} \\ (Q(n/d),t)=1}} p_{2k-2}(d^{1/2}t, m) H_{q/n}\big((dt)^2 - 4dm\big).$$

Soient ξ et $\bar{\xi}$ les deux racines de $X^2 - d^{1/2}tX + m$. Il est facile de voir que

$|\xi|^2 = |\bar{\xi}|^2 = m$. D'après la première relation de (3.27), on a

$$\big|p_{2k-2}(d^{1/2}t, m)\big| = \left|\frac{\xi^{2k-3} - \bar{\xi}^{2k-3}}{\xi - \bar{\xi}}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{2k-4} |\xi|^{2k-4} = (2k-3)m^{k-2}.$$

En remarquant que $(q/n, (dt)^2 - 4dm) = (q/n, dt^2 - 4m)$, la deuxième relation de (3.26) implique

$$\big|H_{q/n}\big((dt)^2 - 4dm\big)\big| \ll Q\big((q/n, dt^2 - 4m)\big)(dm)^{1/2}\log^2(2dm). \tag{3.31}$$

En posant $\ell = Q\big((q/n, dt^2 - 4m)\big)$, les deux estimations précédentes permettent de déduire

$$\begin{aligned} R &\ll km^{k-3/2}\log^2(2mn)\sum_{d|n}\sum_{\ell^2|(q/n)} d^{1/2}\ell \sum_{\substack{t<2(m/d)^{1/2}\\ dt^2\equiv 4m (\mathrm{mod}\, \ell^2)}} 1 \\ &\ll km^{k-3/2}\log^2(2mn)\sum_{d|n}\sum_{\ell^2|(q/n)} d^{1/2}\ell\big\{1 + (m/d)^{1/2}/\ell^2\big\}2^{\omega(\ell)} \\ &\ll km^{k-3/2}\log^2(2mn)\sum_{d|n}\sum_{\ell^2|(q/n)} \big(d^{1/2}\ell + m^{1/2}/\ell\big)2^{\omega(q/n)}. \end{aligned}$$

Enfin on applique les inégalités suivantes

$$\sum_{\ell^2|(q/n)} \ell \leqslant 2^{\omega(q/n)}\sqrt{q/n}, \qquad \sum_{\ell^2|(q/n)} \ell^{-1} \leqslant 2^{\omega(q/n)}$$

à écrire

$$R \ll k\big(m^{k-1} + m^{k-3/2}q^{1/2}\big)\tau(n)4^{\omega(q/n)}\log^2(2mn).$$

Cela achève la démonstration du Lemme 3.1. □

3.3.3 Fin de la preuve du Théorème 3.3

Nous allons démontrer le résultat souhaité à l'aide de (3.24) et du Lemme 3.1. D'abord la contribution du terme principal de (3.28) à $\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S_{2k-2}^{\natural}(q)\big)$ vaut

$$\frac{2k-3}{12}\delta_{\square}(m)m^{k-2}\sum_{q'|q}\frac{\alpha(q/q')q'}{(n, q')}.$$

Comme $n \mid q$ et $(n, q/n) = 1$, tout diviseur q' de q s'écrit de manière unique $q' = uv$ avec $u \mid n$ et $v \mid (q/n)$. Par multiplicité de α, cette contribution est

$$\begin{aligned}
&= \frac{2k-3}{12}\delta_\square(m)m^{k-2}\sum_{u|n}\sum_{v|(q/n)}\alpha(n/u)\alpha\big((q/n)/v\big)v \\
&= \frac{2k-3}{12}\delta_\square(m)m^{k-2}\sum_{d|n}\alpha(d)(q/n)\sum_{d'|(q/n)}\frac{\alpha(d')}{d'} \qquad (3.32)\\
&= \frac{2k-3}{12}\delta_\square(m)m^{k-2}\beta(n)\gamma(q/n).
\end{aligned}$$

De même la contribution du premier membre de $\mathcal{R}_3$ à $\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S^\natural_{2k-2}(q)\big)$ est

$$\begin{aligned}
&\ll k\sum_{u|n}\sum_{v|(q/n)}\Big|\alpha\Big(\frac{n}{u}\Big)\alpha\Big(\frac{q}{nv}\Big)\Big|\big\{m^{k-1}+m^{k-3/2}(uv)^{1/2}\big\}\{\log(2mu)\}^2\tau(u)4^{\omega(v)}\\
&\ll k\big\{m^{k-1}+m^{k-3/2}q^{1/2}\big\}\{\log(2mn)\}^2\tau(n)4^{\omega(q/n)}\sum_{d|n}\sum_{d'|(q/n)}|\alpha(d)\alpha(d')|\\
&\ll k\big(m^{k-1}+m^{k-3/2}q^{1/2}\big)\log^2(2mn)\tau(n)4^{\omega(q)+\omega(q/n)},
\end{aligned}$$

où l'on a déjà utilisé le fait que $(\mathbf{1} * |\alpha|)(n) \leqslant 4^{\omega(n)}$. La contribution du deuxième membre de $\mathcal{R}_3$ est

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{u|n}\sum_{v|(q/n)}\Big|\alpha\Big(\frac{n}{u}\Big)\alpha\Big(\frac{q}{nv}\Big)\Big|\big\{\sigma(m)\tau(u)+m^{k-3/2}\tau(m)(uv)^{1/2}\big\}\\
&\ll \big(m+m^{k-3/2}q^{1/2}\big)\tau(m)\tau(n)4^{\omega(q)}.
\end{aligned}$$

En combinant ces estimations, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big(T_m W_n, S^\natural_{2k-2}(q)\big) &= \frac{2k-3}{12}\delta_\square(m)m^{k-2}\beta(n)\gamma(q/n)\\
&\quad + O\Big(k\big(m^{k-1}+m^{k-3/2}q^{1/2}\big)\big(\log^2(2mn)+\tau(m)\big)\tau(n)16^{\omega(q)}\Big).
\end{aligned}$$

Ceci implique le résultat souhaité en remplaçant $2k-2$ par k. $\square$

3.3.4 Démonstration du Corollaire 3.1

Nous commençons par prouver (3.20).

(i) Cas où $(n,q)=1$.

Puisque les valeurs propres de T_n sont $\lambda_f(n)n^{(k-1)/2}$ et que W_1 est l'opérateur identité, on a

$$\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \lambda_f(n) = n^{-(k-1)/2}\mathrm{Tr}\big(T_nW_1, S_k^\natural(q)\big).$$

La formule annoncée (3.20) découle du Théorème 3.3 avec le choix de $(m,n)=(n,1)$.

(ii) Cas où $(n,q)>1$.

Si $\nu \geqslant 2$, la formule (3.20) est triviale, car $\lambda_f(n)=0$ (grâce à (3.3)) et $\delta_\square^{(q)}(n)=0$.

Supposons maintenant $\nu=1$. Désignons par $n^{(q)}$ et n_q les uniques entiers tels que

$$n = n^{(q)}n_q \quad \text{avec} \quad (n^{(q)},q)=1 \quad \text{et} \quad n_q \mid q^\infty.$$

Comme $q=p$, on a $n_q = p^{2v+\eta}$ où $v\geqslant 0$ et $\eta = 0$ ou 1. Par (3.1), on a

$$\lambda_f(n) = \lambda_f(n^{(q)})\lambda_f(p)^{2v+\eta} = \lambda_f(n^{(q)})\varepsilon_f(q)^\eta/n_q^{1/2} = \lambda_f(n/n_q)\varepsilon_f(q^\eta)/n_q^{1/2}.$$

Puisque la valeur propre de W_{q^η} est $\varepsilon_f(q^\eta)$ ($\varepsilon_f(1)=1$), on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \lambda_f(n) &= \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \lambda_f(n/n_q)\varepsilon_f(q^\eta)/n_q^{1/2}\\ &= (n/n_q)^{(1-k)/2}n_q^{-1/2}\mathrm{Tr}\big(T_{n/n_q}W_{q^\eta}, S_k^\natural(q)\big).\end{aligned}$$

La contribution du terme principal de (3.18) est

$$= \frac{k-1}{12}\frac{\delta_\square(n/n_q)}{\sqrt{n}}\beta(q^\eta)\gamma(q^{1-\eta}) \ll kq^{1/2},$$

où l'on a déjà utilisé le fait que $|\beta(q^\eta)|\leqslant 1$, $|\gamma(q^{1-\eta})|\leqslant q$ et $n\geqslant q$. En notant que $n_q\geqslant q$, la contribution du terme d'erreur de (3.18) est

$$\ll k\big(n^{1/2}/q+1\big)\big(\log^2(2n)+\tau(n)\big).$$

Ce qui termine la démonstration de (3.20).

Maintenant passons à la preuve de (3.21). Si $(n,q)=1$, on peut écrire

$$\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f(q)\lambda_f(n) = n^{-(k-1)/2}\mathrm{Tr}\big(T_n W_q, S_k^\natural(q)\big).$$

En utilisant le Théorème 3.3 sous la forme (en notant que le terme principal peut être mangé par le terme d'erreur car $|\beta(q)|\leqslant 1$)

$$\mathrm{Tr}\big(T_n W_q, S_k^\natural(q)\big) \ll k(n^{k/2}+n^{(k-1)/2}q^{1/2})\big(\log^2(2nq)+\tau(n)\big),$$

on obtient l'estimation annoncée.

Si $(n,q)>1$ et que $\nu\geqslant 2$, (3.21) est triviale car $\lambda_f(n)=0$. Quand $(n,q)>1$ et $\nu=1$, on peut écrire (en conservant les notations précédentes)

$$\begin{aligned}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f(q)\lambda_f(n) &= \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \lambda_f(n/n_q)\varepsilon_f(q^{1-\eta})/\sqrt{n_q}\\ &= (n/n_q)^{(1-k)/2} n_q^{-1/2}\mathrm{Tr}\big(T_{n/n_q}W_{q^{1-\eta}}, S_k^\natural(q)\big).\end{aligned}$$

Comme précédemment, le Théorème 3.3 implique l'estimation souhaitée.

Ceci termine la preuve du Corollaire 3.1. □

3.3.5 Démonstration du Corollaire 3.2

La formule asymptotique (3.22) peut être obtenue en prenant $n=1$ dans (3.20). En ce qui concerne (3.23), écrivons

$$\big|\mathrm{H}_k^\pm(q)\big| = \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \frac{1\pm\varepsilon_f}{2} = \frac{1}{2}\Big(|\mathrm{H}_k^*(q)| \pm i^k \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f(q)\Big)$$

grâce à la relation (3.16). Ainsi la formule asymptotique (3.23) est une conséquence de (3.22) et (3.21) avec $n=1$. □

3.4 Lemmes intermédiaires

Pour $\sigma > 1$, on définit

$$\zeta^{(q)}(s) := \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ (n,q)=1}} \frac{1}{n^s}. \tag{3.33}$$

Dans le calcul du premier moment de $L'(1/2, f)$ nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.2. *Soient $q \geqslant 1$ un entier, $\hat{q} := \sqrt{q}/(2\pi)$ et G un polynôme pair de degré $\geqslant 2$ tel que $G(0) = 1$ et $G(-1) = G(-2) = 0$. Pour $\sigma > 0$, on pose*

$$F(s) := \frac{\Gamma(s + k/2)}{\Gamma(k/2)} \hat{q}^s \zeta^{(q)}(2s + 2) \frac{G(s)}{s^2}. \tag{3.34}$$

Alors on a

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F(s) = \zeta^{(q)}(2) \log(\hat{q}) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)\zeta^{(q)}(2) + 2\zeta'^{(q)}(2).$$

De plus on a

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F(s) \ll_k \log q.$$

Démonstration. Au voisinage de $s = 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s + k/2)}{\Gamma(k/2)} &= 1 + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)s + \cdots, \\ \hat{q}^s &= 1 + (\log \hat{q})s + \cdots, \\ \zeta^{(q)}(2s + 2) &= \zeta^{(q)}(2) + 2\zeta'^{(q)}(2)s + \cdots, \\ G(s) &= 1 + O(s^2). \end{aligned}$$

Le résultat souhaité est une conséquence simple de ces formules. □

Soit G un polynôme défini dans le Lemme 3.2. Pour $y > 0$, on définit

$$T_\ell(y) := \frac{1}{(3 - \ell)\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s + k/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{G(s)}{s^\ell} y^{-s} \mathrm{d}s. \tag{3.35}$$

Lemme 3.3. *Sous les notations précédentes, on a*

$$T_1(y) \asymp_k 1 \qquad (0 < y \leqslant 1), \qquad T_1(y) \ll_{j,k} y^{-j} \quad (y \to \infty), \tag{3.36}$$

$$T_2(y) = -\log y + O_k(y) \quad (0 < y \leqslant 1), \qquad T_2(y) \ll_{j,k} y^{-j} \quad (y \to \infty), \tag{3.37}$$

pour tout j réel > 0.

Démonstration. Pour les estimations (3.36), voir [13, Paragraphe 2.4].

Pour obtenir la première relation de (3.37) il s'agit de déplacer la droite d'intégration de $\sigma = 2$ à $\sigma = -1$ à travers l'unique pôle de la fonction à intégrer : $s = 0$. On vérifiera facilement que le résidu en 0 vaut $-\log y$. Pour démontrer la seconde majoration de T_2 il suffit de déplacer la droite d'intégration à $\sigma = j$ sans rencontrer de pôle. □

3.5 Calcul des moments naturels 1 et 2 de $L(1/2, f)$

Le but de cette section est d'estimer les deux premiers moments naturels de $L(1/2, f)$, définis par

$$\mathcal{M}_j := \sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2, f)^j. \tag{3.38}$$

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ et $q = p^\nu$. Alors on a*

$$\mathcal{M}_1 = \frac{k-1}{12}\gamma(q)\big\{\zeta^{(q)}(2) + O_k\big(q^{-1/5}\big)\big\}, \tag{3.39}$$

$$\mathcal{M}_2 \ll_k q(\log q)^2, \tag{3.40}$$

où $\zeta^{(q)}(s)$ et $\gamma(q)$ sont définies en (3.33) et (3.13)-(3.14). Les constantes impliquées ne dépendent que de k.

3.5.1 Évaluation du premier moment : preuve de (3.39)

Considérons

$$I := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \Lambda(s+1/2, f) G(s) \frac{\mathrm{d}s}{s}\cdot$$

A l'aide de l'équation fonctionnelle (3.7), le théorème des résidus donne :

$$(1+\varepsilon_f) I = \operatorname*{Res}_{s=0} \left(\frac{\Lambda(s+1/2, f) G(s)}{s} \right) = \hat{q}^{1/2} L(1/2, f) \Gamma(k/2).$$

Cette égalité et la série de Dirichlet de L donnent alors

$$L(1/2, f) = (1+\varepsilon_f) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} T_1\left(\frac{n}{\hat{q}}\right), \tag{3.41}$$

où $T_1(y)$ et $\hat{q}$ sont définis en (3.35) et (3.6) respectivement.

En tenant compte de la relation (3.16) et la notation (3.6), on peut appliquer (3.20) et (3.21) pour écrire

$$\mathcal{M}_1 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} T_1\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)} \big(1 + i^k \varepsilon_f(q)\big) \lambda_f(n) = \mathcal{M}_{1,1} + O_k(\mathcal{M}_{1,2}), \tag{3.42}$$

où

$$\mathcal{M}_{1,1} := \frac{k-1}{12} \gamma(q) \sum_{n \geqslant 1} T_1\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \frac{\delta_{\square}^{(q)}(n)}{n},$$

$$\mathcal{M}_{1,2} := \sum_{n \geqslant 1} \left| T_1\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) \right| \big(1 + \sqrt{q/n}\big) \big(\log^2(2nq) + \tau(n)\big).$$

En utilisant (3.35), il suit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1,1} &= \frac{k-1}{12} \gamma(q) \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ (n,q)=1}} \frac{1}{n^2} T_1\left(\frac{n^2}{\hat{q}}\right) \\ &= \frac{k-1}{12} \gamma(q) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{G(s)}{s} \hat{q}^s \zeta^{(q)}(2s+2) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

En déplaçant la droite d'intégration de (2) à $(-1/2+\varepsilon)$, on voit facilement que

$$\mathcal{M}_{1,1} = \frac{k-1}{12}\gamma(q)\left\{\zeta^{(q)}(2) + O\left(\frac{1}{q^{1/4-\varepsilon}}\right)\right\}. \tag{3.43}$$

Il reste à estimer $\mathcal{M}_{1,2}$. En utilisant l'inégalité $\log^2(nq)+\tau(n) \ll \tau(n)\log^2(nq)$ et la formule (3.36) avec $j=1,2$, on peut déduire

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1,2} &\ll \sum_{n\leqslant\hat{q}}\sqrt{\frac{q}{n}}\tau(n)(\log nq)^2 + \sum_{\hat{q}<n\leqslant q}\sqrt{\frac{q}{n}}\frac{\tau(n)(\log n)^2}{(n/\hat{q})} + \sum_{n>q}\frac{\tau(n)(\log n)^2}{(n/\hat{q})^2}\\ &\ll q^{3/4}(\log q)^3,\end{aligned} \tag{3.44}$$

grâce aux estimations (2.73) et (2.74). Maintenant la formule souhaitée (3.39) est une conséquence immédiate de (3.42), (3.43) et (3.44), puisque

$$\gamma(q) \asymp \varphi(q) \asymp q.$$

Cela achève la démonstration de (3.39). □

3.5.2 Évaluation du deuxième moment : preuve de (3.40)

D'après (3.41) et (3.1), on a :

$$\begin{aligned}L(1/2,f)^2 &= 2(1+\varepsilon_f)\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{\sqrt{mn}}T_1\left(\frac{m}{\hat{q}}\right)T_1\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\\ &= 2(1+\varepsilon_f)\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{mn}}T_1\left(\frac{m}{\hat{q}}\right)T_1\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\sum_{\substack{d|(m,n)\\(d,q)=1}}\lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)\\ &= 2(1+\varepsilon_f)\sum_{\substack{d\geqslant 1\\(d,q)=1}}\frac{1}{d}\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(mn)}{\sqrt{mn}}T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right)T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right).\end{aligned}$$

Ce qui donne par sommation sur f le deuxième moment de $L(1/2,f)$:

$$\mathcal{M}_2 = 2\sum_{\substack{d\geqslant 1\\(d,q)=1}}\frac{1}{d}\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{mn}}T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right)T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right)\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)}\big(1+\mathrm{i}^k\varepsilon_f(q)\big)\lambda_f(mn).$$

Appliquons alors la formule de trace pour obtenir :

$$\mathcal{M}_2 = \frac{k-1}{6}\gamma(q) \sum_{\substack{d\geqslant 1\\(d,q)=1}} \frac{1}{d} \sum_{mn=\square} \frac{1}{mn} T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) + O_k(\mathscr{T}),$$

où $\mathscr{T}$ est défini comme dans le Lemme 3.5 ci-dessous. Appliquons les Lemmes 3.4 et 3.5 respectivement au terme général et au reste de (3.40) ce qui donne le résultat voulu.

Lemme 3.4. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ un entier et $q = p^\nu$. Alors on a :*

$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{1}{d} \sum_{mn=\square} \frac{1}{mn} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| \ll_k \log q,$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

Démonstration. La double somme à évaluer est égale à

$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| =: \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2 \tag{3.45}$$

où

$$\mathscr{S}_1 := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|,$$

$$\mathscr{S}_2 := \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|.$$

D'après (3.36) du Lemme 3.3 avec $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_2 &\ll \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \frac{q}{d^2 mn} \\ &\ll q \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d^3} \sum_{r\geqslant 1} \frac{\tau(r^2)}{r^4} \\ &\ll 1. \end{aligned} \tag{3.46}$$

En tenant compte de la symétrie de m et n, on peut écrire

$$\mathscr{S}_1 =: \mathscr{S}_{1,1} + 2\mathscr{S}_{1,2} + \mathscr{S}_{1,3} \tag{3.47}$$

avec

$$\mathscr{S}_{1,1} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m<\hat{q}/d,\, n<\hat{q}/d}} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|,$$

$$\mathscr{S}_{1,2} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m\geqslant\hat{q}/d,\, n<\hat{q}/d}} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|,$$

$$\mathscr{S}_{1,3} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m\geqslant\hat{q}/d,\, n\geqslant\hat{q}/d}} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|.$$

En utilisant la première formule de (3.36), on a :

$$\mathscr{S}_{1,1} \ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{\tau(r^2)}{r^2} \ll \log q. \tag{3.48}$$

De même la deuxième formule de (3.36) avec $j = 1$ nous permet de déduire

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_{1,2} &\ll \hat{q} \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d^2} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{m\geqslant\hat{q}/d \\ mn=r^2}} \frac{1}{m} \\ &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r^2\geqslant\hat{q}/d} \frac{\tau(r^2)}{r^2} \\ &\ll \log q \end{aligned} \tag{3.49}$$

et

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_{1,3} &\ll q \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m\geqslant\hat{q}/d,\, n\geqslant\hat{q}/d}} \frac{1}{d^2 mn} \\ &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{\tau(r^2)}{r^2} \\ &\ll \log q. \end{aligned} \tag{3.50}$$

En reportant (3.48), (3.49) et (3.50) dans (3.47), on obtient

$$\mathscr{S}_1 \ll \log q. \tag{3.51}$$

Maintenant l'inégalité souhaitée découle de (3.45), (3.46) et (3.51). □

Lemme 3.5. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ un entier et $q = p^\nu$. En posant*

$$\mathscr{T} := \sum_{d\geqslant 1} \frac{1}{d} \sum_{m,n\geqslant 1} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| \left(1 + \sqrt{\frac{q}{mn}}\right) \big(\log^2(2mnq) + \tau(mn)\big),$$

alors on a

$$\mathscr{T} \ll_k q(\log q)^2,$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

Démonstration. Désignons par $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ les contributions à $\mathscr{T}$ de $d < \hat{q}$ et $d \geqslant \hat{q}$, respectivement. Alors on a

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2. \tag{3.52}$$

En appliquant la deuxième formule de (3.36) avec $j = 2$, on peut déduire

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_2 &\ll q^2 \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d^5} \sum_{m,n\geqslant 1} \left(1 + \sqrt{\frac{q}{mn}}\right) \frac{\log^2(2mnq) + \tau(mn)}{(mn)^2} \\
&\ll \sum_{\ell\geqslant 1} \left(1 + \sqrt{\frac{q}{\ell}}\right) \frac{\log^2(2\ell q) + \tau(\ell)}{\ell^2} \tau(\ell) \\
&\ll \sqrt{q}(\log q)^2 \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{\tau(\ell)^2 \log^2(2\ell)}{\ell^2} \\
&\ll \sqrt{q}(\log q)^2.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Pour majorer $\mathscr{T}_1$, on écrit, en tenant compte de la symétrie de m et n,

$$\mathscr{T}_1 =: \mathscr{T}_{1,1} + 2\mathscr{T}_{1,2} + \mathscr{T}_{1,3} \tag{3.54}$$

où

$$\mathscr{T}_{1,1} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n<\hat{q}/d}} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| \left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right) \big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big),$$

$$\mathscr{T}_{1,2} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n\geqslant\hat{q}/d}} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| \left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right) \big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big),$$

$$\mathscr{T}_{1,3} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m\geqslant\hat{q}/d \\ n\geqslant\hat{q}/d}} \left| T_1\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_1\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| \left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right) \big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big).$$

En utilisant la première formule de (3.36) et l'inégalité $\tau(mn) \leqslant \tau(m)\tau(n)$, il suit

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{1,1} &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n<\hat{q}/d}} \left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right) \big((\log q)^2+\tau(m)\tau(n)\big) \\
&\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \bigg\{ \Big(\sum_{n<\hat{q}/d} \log q \Big)^2 + \Big(\sum_{n<\hat{q}/d} \tau(n) \Big)^2 \bigg\} \\
&\quad + \sqrt{q} \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \bigg\{ \Big(\sum_{n<\hat{q}/d} \frac{\log q}{\sqrt{n}} \Big)^2 + \Big(\sum_{n<\hat{q}/d} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \Big)^2 \bigg\}.
\end{aligned}$$

En utilisant les deux premières formules asymptotiques du Lemme 2.8, on peut déduire

$$\mathscr{T}_{1,1} \ll q(\log q)^2. \tag{3.55}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{1,2} &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n\geqslant\hat{q}/d}} \left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)^2 \big((\log q)^2+(\log n)^2+\tau(m)\tau(n)\big) \\
&\quad + \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n\geqslant\hat{q}/d}} \frac{\hat{q}}{dn} \sqrt{\frac{q}{mn}} \big((\log q)^2+(\log n)^2+\tau(m)\tau(n)\big) \\
&\ll q(\log q)^2
\end{aligned} \tag{3.56}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{1,3} &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d^5} \sum_{\substack{m\geqslant \hat{q}/d\\ n\geqslant \hat{q}/d}} \frac{q^2}{(mn)^2}\big((\log q)^2+(\log m)^2+(\log n)^2+\tau(m)\tau(n)\big)\\ &\quad+\sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d^3} \sum_{\substack{m\geqslant \hat{q}/d\\ n\geqslant \hat{q}/d}} \frac{q^{3/2}}{(mn)^{3/2}}\big((\log q)^2+(\log m)^2+(\log n)^2+\tau(m)\tau(n)\big)\\ &\ll q(\log q)^2.\end{aligned} \tag{3.57}$$

En reportant (3.55), (3.56) et (3.57) dans (3.54), on trouve

$$\mathscr{T}_1 \ll q(\log q)^2. \tag{3.58}$$

Maintenant la majoration annoncée découle de (3.53) et (3.58). □

3.6 Démonstration du Théorème 3.1

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$\mathcal{M}_1 = \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} L(1/2,f) \leqslant \Big(\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1\Big)^{1/2}\Big(\sum_{f\in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2,f)^2\Big)^{1/2},$$

d'où

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \mathcal{M}_1^2/\mathcal{M}_2. \tag{3.59}$$

En remarquant que (3.15) implique $\gamma(q) \asymp \varphi(q) \asymp q$, les estimations (3.59), (3.39) et (3.40) nous permettent de déduire

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \gg_k q^2/\{q(\log q)^2\} \gg_k |\mathrm{H}_k^+(q)|/(\log q)^2.$$

Cela achève la démonstration du Théorème 3.1.

3.7 Moments naturels 1 et 2 de $L'(1/2, f)$

Dans cette section, on va estimer les deux premiers moments naturels de $L'(1/2, f)$, définis par

$$\mathcal{M}'_j := \sum_{f \in \mathrm{H}_k^-(q)} L'(1/2, f)^j. \tag{3.60}$$

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ et $q = p^\nu$. Alors on a*

$$\mathcal{M}'_1 = \frac{k-1}{12}\gamma(q)\left\{\zeta^{(q)}(2)\log\hat{q} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)\zeta^{(q)}(2) + \zeta'^{(q)}(2) + O_k\big(q^{-1/5}\big)\right\}, \tag{3.61}$$

et

$$\mathcal{M}'_2 \ll_k q(\log q)^3, \tag{3.62}$$

où $\zeta^{(q)}(s)$ est définie en (3.33) et les constantes impliquées ne dépendent que du poids k.

3.7.1 Évaluation du premier moment : preuve de (3.61)

Considérons

$$I_2 := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(2)} \Lambda(s+1/2, f)\frac{G(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s.$$

À l'aide de l'équation fonctionnelle (3.7), le théorème des résidus nous donne

$$\begin{aligned} I_2 &= \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\Lambda(s+1/2, f)\frac{G(s)}{s^2}\right) = \Lambda'(1/2, f) \\ &= \hat{q}^{1/2}\big(\Gamma(k/2)(\log\hat{q}) + \Gamma'(k/2)\big)L(1/2, f) + \hat{q}^{1/2}\Gamma(k/2)L'(1/2, f). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle (3.7), il est facile de voir que

$$\varepsilon_f = -1 \;\Rightarrow\; \Lambda(1/2, f) = 0 \;\Rightarrow\; L(1/2, f) = 0.$$

D'où

$$I_2 = \hat{q}^{1/2}\Gamma(k/2)L'(1/2, f) \qquad (\text{si } \varepsilon_f = -1).$$

D'autre part, la série de Dirichlet de L donne

$$I_2 = \hat{q}^{1/2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(2)}\Gamma(s+k/2)\frac{G(s)}{s^2}\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)^{-s}\mathrm{d}s.$$

Combinant avec la formule précédente, on obtient

$$\frac{1-\varepsilon_f}{2}L'(1/2, f) = (1-\varepsilon_f)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T_2\left(\frac{n}{\hat{q}}\right), \tag{3.63}$$

où T_2 est définie en (3.35). De (3.63) et (3.16), on déduit

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1' &= \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)}\frac{1-\varepsilon_f}{2}L'(1/2, f)\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}T_2\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)}\big(1-\mathrm{i}^k\varepsilon_f(q)\big)\lambda_f(n).\end{aligned}$$

On peut désormais utiliser la formule de trace (cf. le Corollaire 3.1) pour écrire :

$$\mathcal{M}_1' =: \frac{k-1}{12}\gamma(q)\mathcal{M}_{1,1}' + O_k(\mathcal{M}_{1,2}') \tag{3.64}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1,1}' &:= \sum_{n\geqslant 1}\frac{\delta_{\square}^{(q)}(n)}{n^2}T_2\left(\frac{n^2}{\hat{q}}\right),\\ \mathcal{M}_{1,2}' &:= \sum_{n\geqslant 1}\left|T_2\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\right|\big(1+\sqrt{q/n}\big)\big(\log^2(2nq)+\tau(n)\big).\end{aligned}$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

Similairement à (3.43), on a, grâce au Lemme 3.2,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1,1}' &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(2)}\frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\hat{q}^s\zeta^{(q)}(2s+2)\frac{G(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s\\ &= \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\hat{q}^s\zeta^{(q)}(2s+2)\frac{G(s)}{s^2}\right) + O\big(q^{-1/5}\big)\\ &= \zeta^{(q)}(2)\log(\hat{q}) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)\zeta^{(q)}(2) + \zeta'^{(q)}(2) + O\big(q^{-1/5}\big).\end{aligned} \tag{3.65}$$

Similairement à (3.44), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'_{1,2} &\ll (\log q)^2 \sum_{n\leqslant \hat{q}} \sqrt{\frac{q}{n}}\tau(n) + \sum_{\hat{q}<n\leqslant q} \sqrt{\frac{q}{n}} \frac{\tau(n)(\log n)^2}{(n/\hat{q})} + \sum_{n>q} \frac{\tau(n)(\log n)^2}{(n/\hat{q})^2} \\ &\ll q^{3/4}(\log q)^3.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Maintenant la formule souhaitée (3.61) est une conséquence immédiate de (3.64), (3.65) et (3.66), puisqu'on a vu que $\gamma(q) \asymp \varphi(q) \asymp q$,

3.7.2 Évaluation du deuxième moment : preuve de (3.62)

D'après (3.63) et (3.1), on a :

$$\begin{aligned}\frac{1-\varepsilon_f}{2} L'(1/2,f)^2 &= 2\big(1-\mathrm{i}^k\varepsilon_f(q)\big) \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(m)\lambda_f(n)}{\sqrt{mn}} T_2\Big(\frac{m}{\hat{q}}\Big) T_2\Big(\frac{n}{\hat{q}}\Big) \\ &= 2\big(1-\mathrm{i}^k\varepsilon_f(q)\big) \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{mn}} T_2\Big(\frac{m}{\hat{q}}\Big) T_2\Big(\frac{n}{\hat{q}}\Big) \sideset{}{^*}\sum_{d|(m,n)} \lambda_f\Big(\frac{mn}{d^2}\Big) \\ &= 2\big(1-\mathrm{i}^k\varepsilon_f(q)\big) \sum_{\substack{d\geqslant 1\\(d,q)=1}} \frac{1}{d} \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(mn)}{\sqrt{mn}} T_2\Big(\frac{dm}{\hat{q}}\Big) T_2\Big(\frac{dn}{\hat{q}}\Big).\end{aligned}$$

Ce qui donne par sommation sur f le deuxième moment de $L'(1/2,f)$:

$$\mathcal{M}'_2 = 2 \sum_{\substack{d\geqslant 1\\(d,q)=1}} \frac{1}{d} \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{mn}} T_2\Big(\frac{dm}{\hat{q}}\Big) T_2\Big(\frac{dn}{\hat{q}}\Big) \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \big(1-\mathrm{i}^k\varepsilon_f(q)\big)\lambda_f(mn).$$

Appliquons alors la formule de trace pour obtenir :

$$\mathcal{M}'_2 = \frac{k-1}{6}\gamma(q) \sum_{\substack{d\geqslant 1\\(d,q)=1}} \frac{1}{d} \sum_{mn=\square} \frac{1}{mn} T_2\Big(\frac{dm}{\hat{q}}\Big) T_2\Big(\frac{dn}{\hat{q}}\Big) + O_k(\mathscr{T}'),$$

où $\mathscr{T}'$ est défini comme dans le Lemme 3.7 ci-dessous. Appliquons les Lemmes 3.6 et 3.7 respectivement au terme général et au reste de (3.62) ce qui donne le résultat voulu.

Lemme 3.6. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, p un nombre premier, $\nu \geqslant 1$ et $q = p^\nu$. Alors on a :*

$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{1}{d} \sum_{mn=\square} \frac{1}{mn} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| \ll_k (\log q)^3,$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

Démonstration. La double somme à évaluer est égale à

$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right| =: \mathscr{S}_1' + \mathscr{S}_2' \tag{3.67}$$

où

$$\mathscr{S}_1' := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|,$$
$$\mathscr{S}_2' := \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|.$$

D'après (3.37) du Lemme 3.3 avec $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_2' &\ll \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{mn=r^2} \frac{q}{d^2 mn} \\ &\ll q \sum_{d\geqslant \hat{q}} \frac{1}{d^3} \sum_{r\geqslant 1} \frac{\tau(r^2)}{r^4} \\ &\ll 1. \end{aligned} \tag{3.68}$$

En tenant compte de la symétrie de m et n, on peut écrire

$$\mathscr{S}_1' =: \mathscr{S}_{1,1}' + 2\mathscr{S}_{1,2}' + \mathscr{S}_{1,3}' \tag{3.69}$$

avec

$$\mathscr{S}'_{1,1} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m<\hat{q}/d,\, n<\hat{q}/d}} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|,$$

$$\mathscr{S}'_{1,2} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m\geqslant\hat{q}/d,\, n<\hat{q}/d}} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|,$$

$$\mathscr{S}'_{1,3} := \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m\geqslant\hat{q}/d,\, n\geqslant\hat{q}/d}} \left| T_2\left(\frac{dm}{\hat{q}}\right) T_2\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right) \right|.$$

En utilisant la première formule de (3.37), on a :

$$\mathscr{S}'_{1,1} \ll (\log q)^2 \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{\tau(r^2)}{r^2} \ll (\log q)^3. \tag{3.70}$$

De même la deuxième formule de (3.37) avec $j=1$ nous permet de déduire

$$\begin{aligned} \mathscr{S}'_{1,2} &\ll \hat{q}(\log q) \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d^2} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{m\geqslant\hat{q}/d \\ mn=r^2}} \frac{1}{m} \\ &\ll (\log q) \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r^2\geqslant\hat{q}/d} \frac{\tau(r^2)}{r^2} \\ &\ll (\log q)^2 \end{aligned} \tag{3.71}$$

et

$$\begin{aligned} \mathscr{S}'_{1,3} &\ll q \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{r^2} \sum_{\substack{mn=r^2 \\ m\geqslant\hat{q}/d,\, n\geqslant\hat{q}/d}} \frac{1}{d^2 mn} \\ &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{r\geqslant 1} \frac{\tau(r^2)}{r^2} \\ &\ll \log q. \end{aligned} \tag{3.72}$$

En reportant (3.70), (3.71) et (3.72) dans (3.69), on obtient

$$\mathscr{S}'_1 \ll (\log q)^3. \tag{3.73}$$

Maintenant l'inégalité souhaitée découle de (3.67), (3.68) et (3.73). □

Lemme 3.7. *Pour tout entier $q \geqslant 1$ avec $q = p^\nu$ et p premier, on a*

$$\begin{aligned}\mathscr{T}' &:= \sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{d}\sum_{m,n\geqslant 1}\left|T_2\left(\frac{dm}{\hat q}\right)T_2\left(\frac{dn}{\hat q}\right)\right|\left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right)\big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big)\\ &\ll q(\log q)^2,\end{aligned}$$

où la constante impliquée ne dépend que de k.

Démonstration. Désignons par $\mathscr{T}_1'$ et $\mathscr{T}_2'$ les contributions à $\mathscr{T}'$ de $d < \hat q$ et $d \geqslant \hat q$, respectivement. Alors on a

$$\mathscr{T}' = \mathscr{T}_1' + \mathscr{T}_2'. \tag{3.74}$$

En appliquant la deuxième formule de (3.37) avec $j = 2$, on peut déduire

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_2' &\ll q^2\sum_{d\geqslant\hat q}\frac{1}{d^5}\sum_{m,n\geqslant 1}\left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right)\frac{\log^2(2mnq)+\tau(mn)}{(mn)^2}\\ &\ll \sum_{\ell\geqslant 1}\left(1+\sqrt{\frac{q}{\ell}}\right)\frac{\log^2(2\ell q)+\tau(\ell)}{\ell^2}\tau(\ell)\\ &\ll \sqrt{q}(\log q)^2.\end{aligned} \tag{3.75}$$

Pour majorer $\mathscr{T}_1'$, on écrit, en tenant compte de la symétrie de m et n,

$$\mathscr{T}_1' =: \mathscr{T}_{1,1}' + 2\mathscr{T}_{1,2}' + \mathscr{T}_{1,3}' \tag{3.76}$$

où

$$\mathscr{T}_{1,1}' := \sum_{d<\hat q}\frac{1}{d}\sum_{\substack{m<\hat q/d\\ n<\hat q/d}}\left|T_2\left(\frac{dm}{\hat q}\right)T_2\left(\frac{dn}{\hat q}\right)\right|\left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right)\big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big),$$

$$\mathscr{T}_{1,2}' := \sum_{d<\hat q}\frac{1}{d}\sum_{\substack{m<\hat q/d\\ n\geqslant\hat q/d}}\left|T_2\left(\frac{dm}{\hat q}\right)T_2\left(\frac{dn}{\hat q}\right)\right|\left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right)\big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big),$$

$$\mathscr{T}_{1,3}' := \sum_{d<\hat q}\frac{1}{d}\sum_{\substack{m\geqslant\hat q/d\\ n\geqslant\hat q/d}}\left|T_2\left(\frac{dm}{\hat q}\right)T_2\left(\frac{dn}{\hat q}\right)\right|\left(1+\sqrt{\frac{q}{mn}}\right)\big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big).$$

En utilisant la première formule de (3.37), il suit

$$\begin{aligned}\mathscr{T}'_{1,1} &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d\\ n<\hat{q}/d}} \log\left(\frac{\hat{q}}{dm}\right)\log\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)\big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big)\\ &\quad+\sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d\\ n<\hat{q}/d}} \log\left(\frac{\hat{q}}{dm}\right)\log\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)\sqrt{\frac{q}{mn}}\big(\log^2(2mnq)+\tau(mn)\big).\end{aligned}$$

Compte tenu de l'inégalité $\tau(mn)\leqslant\tau(m)\tau(n)$ on peut déduire que

$$\begin{aligned}&\ll (\log q)^2\sum_{d<\hat{q}}\frac{1}{d}\Big\{\sum_{n<\hat{q}/d}\log\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)\Big\}^2+\sum_{d<\hat{q}}\frac{1}{d}\Big\{\sum_{n<\hat{q}/d}\tau(n)\log\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)\Big\}^2\\ &+\sqrt{q}(\log q)^2\sum_{d<\hat{q}}\frac{1}{d}\Big\{\sum_{n<\hat{q}/d}\frac{\log(\hat{q}/dn)}{\sqrt{n}}\Big\}^2+\sqrt{q}\sum_{d<\hat{q}}\frac{1}{d}\Big\{\sum_{n<\hat{q}/d}\frac{\tau(n)\log(\hat{q}/dn)}{\sqrt{n}}\Big\}^2.\end{aligned}$$

En utilisant les deux premières formules asymptotiques du Lemme 2.8, on peut déduire

$$\begin{aligned}\sum_{n<\hat{q}/d}\log\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right) &\ll \frac{\hat{q}}{d},\\ \sum_{n<\hat{q}/d}\tau(n)\log\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right) &\ll \frac{\hat{q}}{d}\log q,\\ \sum_{n<\hat{q}/d}\frac{\log(\hat{q}/dn)}{\sqrt{n}} &\ll \left(\frac{\hat{q}}{d}\right)^{1/2},\\ \sum_{n<\hat{q}/d}\frac{\tau(n)\log(\hat{q}/dn)}{\sqrt{n}} &\ll \left(\frac{\hat{q}}{d}\right)^{1/2}\log q.\end{aligned}$$

En reportant dans l'estimation précédente, il suit

$$\begin{aligned}\mathscr{T}'_{1,1} &\ll q(\log q)^2\sum_{d<\hat{q}}\frac{1}{d^2}\\ &\ll q(\log q)^2.\end{aligned}\tag{3.77}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{T}'_{1,2} &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n\geqslant \hat{q}/d}} \log\left(\frac{\hat{q}}{dm}\right)\left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)^2 \big((\log q)^2 + (\log n)^2 + \tau(m)\tau(n)\big) \\ &\quad + \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{m<\hat{q}/d \\ n\geqslant \hat{q}/d}} \log\left(\frac{\hat{q}}{dm}\right)\frac{\hat{q}}{dn}\sqrt{\frac{q}{mn}}\big((\log q)^2 + (\log n)^2 + \tau(m)\tau(n)\big) \\ &\ll q(\log q)^2\end{aligned} \tag{3.78}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{T}'_{1,3} &\ll \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d^5} \sum_{\substack{m\geqslant \hat{q}/d \\ n\geqslant \hat{q}/d}} \frac{q^2}{(mn)^2}\big((\log q)^2 + (\log m)^2 + (\log n)^2 + \tau(m)\tau(n)\big) \\ &\quad + \sum_{d<\hat{q}} \frac{1}{d^3} \sum_{\substack{m\geqslant \hat{q}/d \\ n\geqslant \hat{q}/d}} \frac{q^{3/2}}{(mn)^{3/2}}\big((\log q)^2 + (\log m)^2 + (\log n)^2 + \tau(m)\tau(n)\big) \\ &\ll q(\log q)^2.\end{aligned} \tag{3.79}$$

En reportant (3.77), (3.78) et (3.79) dans (3.76), on trouve

$$\mathscr{T}'_1 \ll q(\log q)^2. \tag{3.80}$$

Maintenant la majoration annoncée découle de (3.80) et (3.75). □

3.8 Démonstration du Théorème 3.2

Avec les notations précédentes et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^-(q) \\ L'(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{{\mathcal{M}'_1}^2}{\mathcal{M}'_2}$$

mais d'après les Lemmes 6 et 7, on a alors pour q assez grand :

$$\sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^-(q) \\ L'(1/2,f) \neq 0}} 1 \gg_k \frac{\big(\gamma(q)\zeta^{(q)}(2)\log q\big)^2}{q(\log q)^3}$$

$$\gg_k \frac{q}{\log q}$$

puisque

$$\gamma(q) \asymp q, \qquad \zeta^{(q)}(2) \gg \prod_{p|q} \big(1 - p^{-2}\big) \gg 1.$$

Ce qui termine la preuve du Théorème 3.2.

Annexe A

Équation fonctionnelle approchée et mollification

A.1 Introduction

Le but principal de cette thèse est le calcul du troisième moment harmonique de $L(1/2, f)$ ou comment calculer ce moment sans expression exacte du signe de l'équation fonctionnelle de L, sans même avoir recours au premier moment. Ceci est possible car $L(1/2, f)$ et son carré se compensent dans le calcul de $L(1/2, f)^3$ (voir le Chapitre 2).

Pour autant, si on étudie de manière individuelle $L(1/2, f)$ et plus généralement [1] le premier moment, une expression trop « courte » (de longueur $\sqrt{q}$) de L rend l'ordre exact de ce moment inaccessible. Dans [6], Duke a utilisé une expression des valeurs des fonctions L en série rapidement convergente de manière non symétrique, ce qui permet d'obtenir l'ordre exact du premier moment de $L(1/2, f)$ au niveau premier. Ceci est généralisable pour tous les types de niveau comme le montre le Chapitre 5 de [9] et « l'équation fonctionnelle approchée » des fonctions L que présentent Iwaniec & Kowalski dans leurs ouvrage.

Dans cette annexe, nous allons employer cette technique pour contourner

[1] Le recours à une formule de trace est néanmoins indispensable

notre méconnaissance du signe de l'équation fonctionnelle pour le type de niveau avec facteur carré. En combinant avec notre formule de trace (voir le Corollaire 2.1 du Chapitre 2), nous pourrons calculer, comme dans [12] et [13], les deux premiers moments de $L(1/2, f)$ pondérés

$$\mathcal{M}_r^{\mathrm{h}} := \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)} X_f^r L(1/2, f)^r \qquad (r = 1, 2) \tag{A.1}$$

avec un « mollificateur » de la forme

$$X_f := \sum_{m \leqslant q^\Delta} \frac{x_m}{\sqrt{m}} \lambda_f(m), \tag{A.2}$$

où les paramètres x_m et Δ seront convenablement choisis. Cette méthode nous permet de supprimer le minorant $(\log q)^{-3}$ dans le Théorème 2.1 du Chapitre 2. Plus précisement nous démontrerons le résultat suivant.

Théorème A.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\nu_0 = \nu_0(k, \mathfrak{p}, \varepsilon)$ telle que pour $\nu \geqslant \nu_0$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ on a*

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f \in \mathrm{H}_k^+(q) \\ L(1/2, f) \neq 0}} 1 \geqslant \frac{\mathfrak{p} - 1}{6\mathfrak{p}} - \varepsilon.$$

Pour cela on choisira x_m de manière à maximiser le premier moment (forme linéaire en x_m) sous la contrainte du second moment qui se présente en une forme quadratique en x_m.

A.2 Calcul de moments pondérés

On fait deux hypothèses sur x_m : il existe un réel $A > 0$ tel que

$$x_m \ll (\tau(m) \log q)^A \quad (\text{pour tout } m \leqslant q^\Delta) \tag{A.3}$$

et

$$x_m = 0 \quad \text{si} \quad \mathfrak{p} \mid m, \tag{A.4}$$

où $\tau(m)$ est la fonction de diviseurs.

Dans un premier temps, nous calculerons $\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}}$ et $\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}}$ en fonction de x_m (voir les sous-paragraphes A.2.1 et A.2.2). Et puis dans le sous-paragraphe A.2.3, nous optimiserons les paramètres x_m et Δ. Ainsi nous pourrons obtenir nos évaluations finales pour $\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}}$ et $\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}}$.

Rappelons la notation (2.75) :

$$\mathcal{M}_{r,m}^{\mathrm{h}} := \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^+(q)} \lambda_f(m) L(1/2,f)^r \qquad (r=1,2). \tag{A.5}$$

A.2.1 Premier moment pondéré

Lemme A.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$. Pour tout $0 < \Delta < 1/4$, il existe une constante $c = c(\Delta) > 0$ telle que l'on ait*

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{m \leqslant q^\Delta} \frac{x_m}{m} + O(q^{-c}), \tag{A.6}$$

où la constante impliquée ne dépend que de $k, \mathfrak{p}$ et Δ.

Démonstration. D'après le Théorème 5.3 de [9] avec le choix de $G(u) \equiv 1$, on a

$$L(1/2,f) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}} \left\{ H\left(\frac{n}{\hat{q}X}\right) + \varepsilon_f H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right) \right\} \tag{A.7}$$

pour tout[2] $X > 0$, où

$$H(y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{y^{-s}}{s} \mathrm{d}s.$$

[2]Si l'on prend $X = 1$, on retrouve une variante de (2.85). Dans la suite, on choisira $X = q^{1-\Delta'/2}$ avec $\Delta' = \Delta + 1/4 < 1/2$. Cela signifie que l'on approche $L(1/2,f)$ par une somme plus longue. Ceci nous permet de considérer le deuxième membre de droite de (A.7) comme terme d'erreur.

En multipliant par $\lambda_f(m)$ et en sommant sur $\mathrm{H}_k^+(q)$, il suit

$$\mathcal{M}_{1,m}^{\mathrm{h}} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(H\left(\frac{n}{\hat{q}X}\right) \Delta_q^*(m,n) + H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right) \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f \lambda_f(m)\lambda_f(n) \right) \tag{A.8}$$

pour tout entier m tel que $\mathfrak{p} \nmid m$ et $m \leqslant q^{\Delta}$ et tout $X \geqslant 1$.

Par l'inégalité de Deligne et le Corollaire 2.1 du Chapitre 2, on a trivialement

$$\left| \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \varepsilon_f \lambda_f(m)\lambda_f(n) \right| \leqslant \tau(m)\tau(n) \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} 1 \ll_{k,\mathfrak{p}} \tau(m)\tau(n).$$

En reportant cette estimation dans (A.8) et en appliquant la formule de trace (voir le Corollaire 2.1 du Chapitre 2) au premier terme, on obtient

$$\mathcal{M}_{1,m}^{\mathrm{h}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} H\left(\frac{m}{\hat{q}X}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\frac{\sqrt{m}\log^2(2m)}{q^{3/2}} R_1 + \tau(m) R_2 \right), \tag{A.9}$$

où

$$R_1 := \sum_{n\geqslant 1} \left| H\left(\frac{n}{\hat{q}X}\right) \right|, \qquad R_2 := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left| H\left(\frac{nX}{\hat{q}}\right) \right|.$$

Par une simple récurrence sur $k/2$ et par la définition de $\Gamma(s)$, on voit

$$\frac{\Gamma(s+k/2)}{s\Gamma(k/2)} = \sum_{n=0}^{k/2-1} \frac{\Gamma(s+n)}{n!} = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \sum_{n=0}^{k/2-1} \frac{x^n}{n!} \, \mathrm{d}x.$$

D'où la formule d'inversion de Mellin nous donne immédiatement

$$H(y) = e^{-y} \sum_{n=0}^{k/2-1} \frac{y^n}{n!} \qquad (y > 0).$$

Celle-ci montre en particulier les estimations suivantes ($j > 0$) :

$$\begin{cases} H(y) = 1 + O(y) & \text{si } y \to 0, \\ H(y) \ll_{j,k} y^{-j} & \text{si } y \to \infty. \end{cases}$$

De ces estimations, on peut facilement déduire que

$$H\left(\frac{m}{\hat{q}X}\right) = 1 + O\left(\frac{m}{\hat{q}X}\right) \quad (m \leqslant q^{\Delta}),$$

$$R_1 \ll \sum_{n \leqslant \hat{q}X} 1 + \sum_{n \geqslant \hat{q}X} \left(\frac{n}{X\hat{q}}\right)^{-2} \ll \hat{q}X,$$

$$R_2 \ll \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{nX}{\hat{q}}\right)^{-1} \ll \frac{\hat{q}}{X} \quad (\text{si } X \geqslant \hat{q}).$$

En reportant dans (A.9) et en prenant $X = q^{1-\Delta'/2}$ avec $\Delta' := \Delta + 1/4$, on trouve

$$\mathcal{M}_{1,m}^{\mathrm{h}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} + O\left(\frac{\sqrt{m}}{q^{(3-\Delta')/2}} + \frac{\sqrt{m}\log^2(2m)}{q^{\Delta'/2}} + \frac{\tau(m)}{q^{(1-\Delta')/2}}\right).$$

Comme $0 < 2\Delta < \Delta' < 1/2$, il est facile de vérifier que les premier et dernier termes d'erreur peuvent être mangés par le deuxième. Donc on a

$$\mathcal{M}_{1,m}^{\mathrm{h}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\varphi(q)}{q} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\frac{\sqrt{m}\log^2(2m)}{q^{\Delta'/2}}\right). \tag{A.10}$$

Avec les notations (A.1) et (A.2), nous pouvons écrire

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)}^{\mathrm{h}} L(1/2, f)^j \sum_{m \leqslant q^{\Delta}} \frac{x_m}{\sqrt{m}} \lambda_f(m) = \sum_{m \leqslant q^{\Delta}} \frac{x_m}{\sqrt{m}} \mathcal{M}_{1,m}^{\mathrm{h}}.$$

En apploquant (A.10) et (A.3), il suit

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{m \leqslant q^{\Delta}} \frac{x_m}{m} + O\left(\frac{(\log q)^A}{q^{\Delta'/2}} \sum_{m \leqslant q^{\Delta}} \tau(m)^A \log^2(2m)\right).$$

Ce qui implique le résultat annoncé avec $c = (\Delta'/2 - \Delta)/2 = (1 - 4\Delta)/16$. □

A.2.2 Deuxième moment

Lemme A.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^{\nu}$ avec $\nu \geqslant 3$. Pour tout $0 < \Delta < 1/4$, il existe une constante $c = c(\Delta) > 0$ telle que*

l'on ait

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 (\Pi - 2\Pi_{0,1} - 2\Pi_{1,0}) + O(q^{-c}), \tag{A.11}$$

où

$$\Pi := \big(\log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p})\big) \sum_{n \leqslant q^\Delta} \varrho_0(n) \bigg(\sum_{m \leqslant q^\Delta/n} \frac{\tau(m)}{m} x_{mn} \bigg)^2, \tag{A.12}$$

$$\Pi_{i,j} := \sum_{n \leqslant q^\Delta} \varrho_i(n) \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta/n} \sum_{m_2 \leqslant q^\Delta/n} \frac{\tau(m_1)\tau(m_2)}{m_1 m_2} (\log m_1)^j x_{m_1 n} x_{m_2 n}, \tag{A.13}$$

avec γ la constante d'Euler, $\mu(n)$ la fonction de Möbius,

$$g_k(\mathfrak{p}) := 2\bigg(\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + \gamma\bigg), \qquad \varrho_i(n) := \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)(\log d)^i}{d}. \tag{A.14}$$

La constante impliquée ne dépend que de $k, \mathfrak{p}$ et Δ.

Démonstration. Comme précédemment, nous pouvons écrire, avec l'aide de la relation de Hecke,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} &= \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2, f)^2 \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta} \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta} \frac{x_{m_1} x_{m_1}}{\sqrt{m_1 m_2}} \lambda_f(m_1)\lambda_f(m_2) \\
&= \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f \in \mathrm{H}_k^+(q)} L(1/2, f)^2 \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta} \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta} \frac{x_{m_1} x_{m_1}}{\sqrt{m_1 m_2}} \sum_{d|(m_1,m_2)} \lambda_f\bigg(\frac{m_1 m_2}{d^2}\bigg) \\
&= \sum_{d \leqslant q^\Delta} \frac{1}{d} \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta/d} \sum_{m_2 \leqslant q^\Delta/d} \frac{x_{dm_1} x_{dm_2}}{\sqrt{m_1 m_2}} \mathcal{M}_{2,m_1 m_2}^{\mathrm{h}}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Selon la Proposition 2.4 du Chapitre 2, on a

$$\mathcal{M}_{2,m}^{\mathrm{h}} = \frac{\tau(m)}{\sqrt{m}} \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \bigg\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{m}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \bigg\} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\sqrt{m}\frac{(\log q)^4}{\sqrt{q}}\right).$$

En reportant dans (A.15), il suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \sum_{d \leqslant q^\Delta} \frac{1}{d} \sum_{m_1 \leqslant q^\Delta/d} \sum_{m_2 \leqslant q^\Delta/d} \frac{\tau(m_1 m_2)}{m_1 m_2} \times \\
\times \bigg\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{m_1 m_2}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \bigg\} x_{dm_1} x_{dm_2} + O\bigg(\frac{1}{q^c}\bigg),
\end{aligned} \tag{A.16}$$

où nous avons déjà utilisé les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{(\log q)^4}{q^{1/2}}\sum_{d\leqslant q^\Delta}\frac{1}{d}\Big(\sum_{m\leqslant q^\Delta/d}|x_{dm_1}|\Big)^2 &\ll \frac{(\log q)^{2A+4}}{q^{1/2}}\sum_{d\leqslant q^\Delta}\frac{\tau(d)^2}{d}\Big(\sum_{m\leqslant q^\Delta/d}\tau(m)\Big)^2\\ &\ll \frac{(\log q)^{2A+6}}{q^{1/2-2\Delta}}\\ &\ll \frac{1}{q^c}\end{aligned}$$

avec $c := (1/2 - 2\Delta)/2 > 0$.

Rappelons maintenant la classique relation :

$$\tau(m_1m_2) = \sum_{d|(m_1,m_2)}\mu(d)\tau(m_1/d)\tau(m_2/d).$$

Elle permet de réécrire le terme principal de (A.16) et d'obtenir :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\sum_{d\leqslant q^\Delta}\frac{1}{d}\sum_{d'\leqslant q^\Delta/d}\frac{\mu(d')}{d'^2}\sum_{m_1\leqslant q^\Delta/(dd')}\sum_{m_2\leqslant q^\Delta/(dd')}\frac{\tau(m_1)\tau(m_2)}{m_1m_2}\times\\ \times\left\{\log\left(\frac{\hat{q}^2}{d'^2m_1m_2}\right)+g_k(\mathfrak{p})\right\}x_{dd'm_1}x_{dd'm_2}+O\left(\frac{1}{q^c}\right).\end{aligned}$$

En décomposant le logarithme, avec les notations (A.12) (A.13) et (A.14) et avec le changement de variable $n = dd'$, on obtient le résultat voulu. □

A.2.3 Optimisation

Pour optimiser nos paramètres x_m et Δ, il est plus pratique d'écrire les termes principaux de $\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}}$ et $\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}}$ comme des formes linéaires et quadratiques, respectivement. Pour cela, introduisons

$$y_{n,i} := \sum_{m\leqslant q^\Delta/n}\frac{\tau(m)}{m}(\log m)^i x_{mn} \qquad (i = 0, 1). \tag{A.17}$$

On écrira plus simplement $y_{n,0} = y_n$.

À l'aide de la formule d'inversion de Möbius $\mathbf{1}*\mu(n) = \delta(n)$ pour tout[3] $n \geqslant 1$, il est facile de voir que

$$x_m = \sum_{\ell \leqslant q^\Delta/m} \frac{\mu * \mu(\ell)}{\ell} y_{\ell m}. \tag{A.18}$$

En reportant dans (A.6) du Lemme A.1 et en utilisant encore une fois $\mathbf{1} * \mu = \delta$, on peut écrire

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{n \leqslant q^\Delta} \frac{\mu(n)}{n} y_n + O(q^{-c}). \tag{A.19}$$

Concernant le deuxième moment, on a

$$\Pi = \big(\log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p})\big) \sum_{n \leqslant q^\Delta} \varrho_0(n) y_n^2, \tag{A.20}$$

et

$$\Pi_{1,0} = \sum_{n \leqslant q^\Delta} \varrho_1(n) y_n^2, \qquad \Pi_{0,1} = \sum_{n \leqslant q^\Delta} \varrho_0(n) y_n y_{n,1}. \tag{A.21}$$

Nous choisissons [4]

$$y_n = \begin{cases} n\mu(n)/\varphi(n) & \text{si } n \leqslant q^\Delta \text{ et } \mathfrak{p} \nmid n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.22}$$

En reportant dans (A.18), il est facile de voir que les x_m avec ce choix vérifient les hypothèses (A.3) et (A.4).

Maintenant nous pouvons donner nos évaluations finales pour $\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}}$ et $\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}}$.

Proposition A.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier, $q = p^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$ et $0 < \Delta < 1/4$. Avce le choix* (A.22)*, on a*

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \Delta \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \log q + O(1), \tag{A.23}$$

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}} = \left(\Delta + 2\Delta^2\right) \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^3 (\log q)^2 + O\left((\log q)(\log_2 q)^2\right), \tag{A.24}$$

où les constantes impliquées ne dépendent que de $k, \mathfrak{p}$ et Δ.

[3] Par définition, on a $\mathbf{1}(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\delta(1) = 1$, $\delta(n) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

[4] Le Lemme 35 de [12, Page 125] montre que ce choix est optimal.

Démonstration. Avec le choix (A.22), la formule (A.19) peut être écrite comme la suivante :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \frac{\varphi(q)}{q} \sideset{}{^*}\sum_{n \leqslant q^\Delta} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} + O(q^{-c}),$$

où $\sum^*$ désigne la somme sur les entiers n tels que $\mathfrak{p} \nmid n$. Maintenant la formule asymptotique (A.23) est une conséquence immédiate du Lemme A.3 ci-dessous.

En remarquant que $\varrho_0(n) = \varphi(n)/n^2$, la formule (A.20) et le Lemme A.3 ci-dessous impliquent

$$\begin{aligned} \Pi &= \big(\log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p})\big) \sideset{}{^*}\sum_{n \leqslant q^\Delta} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \\ &= \Delta \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 (\log q)^2 + O(\log q). \end{aligned} \tag{A.25}$$

Concernant cette fois $\Pi_{0,1}$, on peut écrire, d'après (A.17) et (A.18),

$$\begin{aligned} y_{n,1} &= \sum_{m \leqslant q^\Delta/n} \frac{\tau(m)\log m}{m} \sum_{\ell \leqslant q^\Delta/(mn)} \frac{\mu * \mu(\ell)}{\ell} y_{\ell m n} \\ &= \sum_{d \leqslant q^\Delta/n} \frac{y_{dn}}{d} \sum_{\ell m = d} \mu * \mu(\ell) \tau(m) \log m. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Calculons la somme intérieure. En tenant compte de notre choix (A.22), il suffit de considérer le cas où d est sans facteur carré. Soit $d = p_1 \cdots p_j$ avec $p_1 < \cdots < p_j$. Pour chaque $\sigma := \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, j\}$ ($r \geqslant 1$), on pose $d_\sigma := p_{i_1} \cdots p_{i_r}$ et $|\sigma| = r$. En remarquant que $\mu * \mu(p) = -2$ et $\tau(p) = 2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell m = d} \mu * \mu(\ell) \tau(m) \log m &= \sum_{\sigma \subset \{1,\ldots,j\}} (-2)^{j-|\sigma|} 2^{|\sigma|} \log d_\sigma \\ &= (-2)^j \sum_{\sigma \subset \{1,\ldots,j\}} (-1)^{|\sigma|} \log d_\sigma \\ &= (-2)^j \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} (-1)^i \sum_{\substack{\sigma \subset \{1,\ldots,j\} \\ |\sigma| = i}} \log d_\sigma \\ &= (-2)^j (\log d) \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} (-1)^i i \binom{j}{i}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{\ell m=d} \mu * \mu(\ell)\tau(m)\log m = \begin{cases} 2\log p_1 & \text{si } j=1, \\ 0 & \text{si } j \geqslant 2. \end{cases}$$

En reportant dans (A.26) et en utilisant (A.22), on trouve, pour tout $n \leqslant q^\Delta$ vérifiant $\mathfrak{p} \nmid n$,

$$\begin{aligned} y_{n,1} &= \sum_{\substack{p \leqslant q^\Delta/n \\ p \neq \mathfrak{p}}} \frac{2n\mu(np)\log p}{\varphi(np)} = -\frac{2n\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{\substack{p \leqslant q^\Delta/n \\ p \neq \mathfrak{p},\, p \nmid n}} \frac{\log p}{p-1} \\ &= -\frac{2n\mu(n)}{\varphi(n)} \Bigg(\sum_{p \leqslant q^\Delta/n} \frac{\log p}{p-1} - \frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} - \sum_{p \mid n} \frac{\log p}{p-1} \Bigg) \\ &= -\frac{2n\mu(n)}{\varphi(n)} \Big(\log(q^\Delta/n) + O_{\mathfrak{p},\Delta}(\log_2 q) \Big). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Pi_{0,1} = -2\frac{\varphi(q)}{q} \sideset{}{^*}\sum_{n \leqslant q^\Delta} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \log(q^\Delta/n) + O(\log q \log_2 q).$$

D'où le Lemme A.3 ci-dessous avec une sommation par partie donne enfin :

$$\Pi_{0,1} = -\Delta^2 \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 (\log q)^2 + O(\log q \log_3 q). \tag{A.27}$$

On sait que $y_n \ll \log_2 q$. D'où

$$\begin{aligned} \Pi_{1,0} &\ll (\log_2 q)^2 \sum_{n \leqslant q^\Delta} \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \frac{\log d}{d} \\ &\ll (\log_2 q)^2 \sum_{d \leqslant q^\Delta} \frac{\log d}{d^2} \sum_{n' \leqslant q^\Delta/d} \frac{1}{n'} \\ &\ll (\log q)(\log_2 q)^2. \end{aligned} \tag{A.28}$$

Finalement en reportant (A.25), (A.27) et (A.28) dans (A.11), on obtient le résultat voulu (A.24). □

La formule asymptotique suivante a été utilisée dans la démonstration de la Proposition A.1.

Lemme A.3. *Soit m un entier sans facteur carré. Alors pour tout $x \geqslant 3$, on a*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (m,n)=1}} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(m)}{m} \log x + O_m(1).$$

Démonstration. Par la formule d'inversion de Möbius, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (m,n)=1}} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} &= \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \sum_{d \mid (m,n)} \mu(d) \\ &= \sum_{d \mid m} \mu(d) \sum_{n \leqslant x/d} \frac{\mu(dn)^2}{\varphi(dn)} \\ &= \sum_{d \mid m} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \sum_{n \leqslant x/d} \frac{\mu(dn)^2}{\varphi(n)}. \end{aligned} \tag{A.29}$$

Soit $d \geqslant 1$ un entier sans facteur carré. La fonction $n \mapsto \mu(dn)^2 n/\varphi(n)$ est multiplicative. On a, pour $\Re e\, s > 1$,

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(dn)^2 n/\varphi(n)}{n^s} = \prod_{p \nmid d} \left(1 + \frac{p}{(p-1)p^s}\right) = \zeta(s) G_d(s),$$

où

$$G_d(s) := \prod_{p \mid d} \left(1 + \frac{p}{(p-1)p^s}\right)^{-1} \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s} - \frac{p}{(p-1)p^{2s}}\right).$$

Il est clair que $G_d(s)$ converge absolument pour $\Re e\, s > 1/2$ et $G_d(s) \ll_{d,\varepsilon} 1$ pour $\Re e\, s > 1/2 + \varepsilon$. Selon le Théorème II.5.3 de [23], on a

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(dn)^2 n}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(d)}{d} x + O_d\left(\frac{x}{\log x}\right) \qquad (x \geqslant 3).$$

D'où une simple intégration par parties nous donne

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(dn)^2}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(d)}{d} \log x + O_d(1) \qquad (x \geqslant 3). \tag{A.30}$$

Maintenant le résultat souhaité découle de (A.29) et (A.30). □

A.3 Démonstration du Théorème A.1

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}} = \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} X_f L(1/2,f) \leqslant \Big(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1\Big)^{1/2}\Big(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^+(q)} X_f^2 L(1/2,f)^2\Big)^{1/2}.$$

D'où la Proposition A.1 implique

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(1/2,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{\big(\mathcal{M}_1^{\mathrm{h}}\big)^2}{\mathcal{M}_2^{\mathrm{h}}} \geqslant (1-\mathfrak{p}^{-1})\frac{\Delta}{1+2\Delta} - \varepsilon$$

pour tout $\Delta < 1/4$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant \nu_0(k,\mathfrak{p},\Delta,\varepsilon)$. En prenant $\Delta = 1/4 - \varepsilon$, on a le résultat voulu.

Bibliographie

[1] A. O. L. Atkin & J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** 1970, 134–160.

[2] A. Brumer, *The rank of* $J_0(N)$, Astérisque **228** (1995), 41–68.

[3] J. Cogdell & P. Michel, *On the complex moments of symmetric power L-functions at* $s = 1$, IMRN **31** (2004), 1561–1618.

[4] W. Duke , J. Friedlander & H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II*, Invent.Math. **115**, (1994), 209-217.

[5] J.-M. Deshouillers & H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. **70** (1982/83), no. 2, 219–288.

[6] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent. Math. **119** (1995), 165–174.

[7] J.-D. Guo, *On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for* GL(2), Duke Math. J. **83** (1996), no. 1, 157–190.

[8] H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[9] H. Iwaniec & E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society. Colloquium Publication **53** (2004), 1–611.

[10] H. Iwaniec, W. Luo & P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **91** (2001), 55–131.

[11] H. Iwaniec & P. Sarnak, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros*, Israel Journal of Mathematics **120** (2000), 155–177.

[12] E. Kowalski, *The rank of the jacobian of modular curves : analytic methods*, Ph. D. Thesis, Rutgers University, May 1998, (disponible sur http ://www.math.ethz.ch).

[13] E. Kowalski & P. Michel, *A lower bound for the rank of* $J_0(q)$, Acta Arith. **94** (2000), 303–343.

[14] E. Kowalski, P. Michel & J. Vanderkam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **526** (2000), 1–34.

[15] E. Kowalski, P. Michel & J. Vanderkam, *Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications*, Invent. Math. **142(1)** (2000), 95–151.

[16] Y.-K. Lau & J. Wu, *A large sieve inequality of Elliott-Montgomery-Vaughan type and two applications*, IMRN, Vol. 2008, Number 5, Article ID rnm 162, 35 pages.

[17] T. Miyake, *Modular forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Reprint of the first 1989 English edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+335 pp.

[18] E. Royer, *Sur les fonctions L de formes modulaires*, ORSAY : 1–127, 2001.

[19] E. Royer & J. Wu, *Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique*, *Rev. Mat. Iberoamericana* **21** (2005), 263–312.

[20] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presse Universitaire de France, 1970.

[21] J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke* T_p, Journal of the American Mathematical Society **101** (1997), 75–102.

[22] N. P. Skoruppa & D Zagier, *Jacobi forms and a certain space of modular forms*, Invent. Math. **94** (1988) 113–146.

[23] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés N° 1. Société Mathématique de France, 1995. xv+457 pp.

[24] Jeffrey M. Vanderkam, *The rank of quotients of* $J_0(N)$, Duke Math. J. **97** (1999), 545–577.

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy 1
D. F. D. Mathématiques

Résumé : L'étude des propriétés analytiques des fonctions L de formes modulaires est un thème profond de la théorie des nombres. Jusqu'á présent, les propriétés ont essentiellement été établies dans le cas des formes de niveau premier ou sans facteur carré. L'objet de cette thèse est d'établir les bases de l'analyse dans le cas arithmétiquement opposé des niveaux primaires, c'est-à-dire puissances d'un nombre premier. La famille de fonctions L considérée est alors celle obtenue en faisant varier la valuation du niveau. En particulier, on établit une formule de trace qui permet de calculer le troisième moment des valeurs centrales de fonctions L de formes modulaires et d'étudier l'annulation de ces valeurs centrales.

Mots clés : Formes modulaires, Formules de trace, fonctions L automorphes

---

Abstract : The study of the analytical properties of the modular L-functions is a deep subject in number theory. Up to now, the properties have essentially been established in the case of prime or squarefree level. The aim of this thesis is to give the analytic properties in the arithmetically opposite case of prime power level. The family of L-functions under consideration is the one obtained when the valuation of the level is varying. In particular, we provide a trace formula that allows to compute the third moment of the central values of modular L-functions and to study the vanishing of these L values.

Key words : Modular forms, Formulas of trace, automorphic L-functions

Institut Élie Cartan Nancy, CNRS, INRIA
Faculté des Sciences – B.P. 239 – 54506 Vandœuvre-lès-Nancy