AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR STMIA
Ecole Doctorale IAEM - Lorraine
DFD Automatique

Rapport de thèse

Université Henri Poincaré, Nancy 1

(Spécialité Automatique)

par

Sébastien Canitrot

Étude des propriétés structurelles d'observabilité et de diagnosticabilité des systèmes bilinéaires par approche graphique

Soutenue publiquement le 10 novembre 2009

Composition du jury

Rapporteurs :

G. BORNARD	Directeur de Recherche à l'Institut National Polytechnique de Grenoble
V. COCQUEMPOT	Professeur à l'Université de Lille

Examinateurs :

M. OULADSINE	Professeur à l'Université Aix-Marseille
G. MILLERIOUX	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1
F. HAMELIN	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1
T. BOUKHOBZA	Maître de Conférences (HDR) à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
CRAN – CNRS UMR 7039

À la mémoire de mon grand-père...
À mes parents...
À Aurélie...

"Chacun a raison de son propre point de vue,
mais il n'est pas impossible que tout le monde ait tort."
Gandhi

Remerciements

En premier lieu, je remercie très vivement M. Guy Bornard, Directeur de Recherche à l'Institut National Polytechnique de Grenoble et M. Vincent Cocquempot, Professeur à l'Université de Lille qui ont accepté d'être rapporteurs de mon Doctorat. Je suis très honoré qu'ils fassent partie de ce jury.

Je voudrais également remercier les membres examinateurs de mon jury : M. Mustapha Ouladsine, Professeur à l'Université Aix-Marseille et M. Gilles Millerioux, Professeur à l'Université Henri Poincaré. Évidemment, je n'oublie pas mes deux encadrants de thèse, M. Frédéric Hamelin, Professeur à l'Université Henri Poincaré et M. Taha Boukhobza, Habilité à Diriger des Recherches à l'Université Henri Poincaré sans qui le travail présenté ici n'aurait été possible.

Je remercie tous les doctorants, ATER, post-doctorants, maîtres de conférences et professeurs du CRAN avec qui j'ai pu converser au cours de ces années. Donner une liste exhaustive serait trop long et je pense que les personnes "visées" se reconnaîtront.

Je n'en serais pas là sans le soutien de ma famille et de mes amis. Aussi, je souhaite remercier :
- mes parents pour m'avoir accompagné durant ses nombreuses années.
- ma sœur et sa petite famille pour les bons moments passés ensemble.
- le reste de ma famille pour m'avoir soutenu le jour fatidique.
- Mélina, Philippe, Julie, Sly, Julien, Stéphanie, Gérald, Stéphane pour les joyeuses soirées passées.
- mes nouveaux amis de l'ASF Rugby qui m'ont bien détendu avant la soutenance. Allez Fontenay !

Mon dernier remerciement va bien sûr à Aurélie. Je te remercie de m'avoir épaulé durant ces années difficiles pour nous mais on en ressort plus fort. Merci d'être là tout simplement.

Table des matières

Introduction générale **9**

1 Formulation des problèmes **13**

1.1 Systèmes bilinéaires 13

1.2 Observabilité des systèmes bilinéaires 15

1.2.1 Conditions d'observabilité d'un système bilinéaire 17

1.2.2 Importance et classification des capteurs 19

1.3 Détection de défauts 22

1.3.1 Condition géométrique de détection de défaut 24

1.3.2 Détection active de défauts 26

1.4 Systèmes bilinéaires structurés 27

1.4.1 Rang générique d'une matrice structurée 30

1.4.2 Propriétés génériques 31

1.5 Positionnement de nos travaux 32

2 Observabilité d'un système bilinéaire structuré **35**

2.1 Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré 36

2.1.1 Graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré 36

2.1.2 Graphe biparti associé à un système bilinéaire structuré 39

2.1.3 Notations et définitions générales 40

2.2 Conditions graphiques d'observabilité générique de l'ensemble de l'état . . . 44

2.2.1 Observabilité d'un système linéaire structuré par approche graphique 45

2.2.2 Conditions d'observabilité d'un système bilinéaire structuré par graphe orienté 46

2.2.3 Conditions d'observabilité d'un système bilinéaire structuré sur graphe biparti 51

2.3 Observabilité d'une partie de l'état d'un système bilinéaire structuré 53
2.3.1 Définitions pour l'observabilité partielle 53
2.3.2 Condition graphique d'observabilité partielle d'un système bilinéaire structuré 56
2.4 Recouvrement de l'observabilité de l'ensemble de l'état par placement de capteurs 61
2.4.1 Recouvrement de la condition de couplage complet 62
2.4.2 Recouvrement de la condition de connectivité aux sorties 69
2.4.3 Recouvrement des deux conditions d'observabilité 71
2.5 Recouvrement de l'observabilité partielle par placement de capteurs 74
2.6 Conclusions 77

3 Diagnosticabilité des systèmes bilinéaires structurés 79
3.1 Diagnosticabilité d'un système linéaire par approche graphique 81
3.2 Conditions de solubilité du BFPRG 82
3.2.1 Caractérisation de g-dim($C\mathcal{R}_H$) et g-dim($C\mathcal{R}_{H,E}$) 83
3.2.2 Cas où le système est soumis à un seul défaut 93
3.2.3 Cas où le système est soumis à plusieurs défauts simultanés 94
3.2.4 Cas où le système est soumis à plusieurs défauts non simultanés . . . 94
3.3 Problème actif de diagnostic 95
3.3.1 Composantes d'entrée constantes différentes de zéro 97
3.3.2 Annulation de composantes d'entrée 101
3.4 Conclusions 106

Conclusion 109

Glossaire 113

A Preuve du lemme 3.2 121

Introduction générale

L'automatique, partie intégrante des sciences de l'ingénieur, est une discipline dont l'un des principaux objectifs est la synthèse de schémas de commande et/ou de diagnostic appliqués à un système industriel afin de rendre son fonctionnement quasiment ou totalement autonome. En ce sens, un système automatisé se doit d'être, dans la mesure du possible, sûr, fiable et performant. Une première étape à l'obtention de tels schémas consiste à analyser le système considéré. Cette analyse permet de mieux connaître les capacités et limites du système. Elle se fonde sur l'étude de diverses propriétés incluant, pour les plus connues, la commandabilité, l'observabilité, la diagnosticabilité, la stabilité,... Des critères, basés en grande partie sur des approches algébriques ou géométriques, permettent de caractériser ces propriétés (*i.e.* la validation de ces conditions permet d'établir si le système répond aux propriétés correspondantes).

Dans ce mémoire, nous synthétisons le travail effectué durant trois ans sur les propriétés d'observabilité, et de localisation de défauts. Ces propriétés ont été étudiées sur la classe des systèmes bilinéaires structurés par approche graphique. Nos travaux ont été développés au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) sous la direction de monsieur Frédéric HAMELIN et l'encadrement de monsieur Taha BOUKHOBZA.

Le manuscrit se décompose en trois chapitres. Les divers résultats présentés sont illustrés par des exemples simples permettant aux lecteurs non familiers avec l'approche graphique de mieux comprendre les développements théoriques de notre travail.

Ainsi :

– Le premier chapitre présente tout d'abord les différents problèmes que nous nous proposons de traiter. Ils portent sur l'observabilité d'un système, l'importance des capteurs pour cette propriété et leur classification, la détection et la localisation de défauts, et la

détection active de défauts. La suite de ce chapitre est dédiée à la définition des systèmes bilinéaires structurés et des notions de propriétés et de rang génériques. Enfin, le choix d'utiliser une approche graphique est justifié par la présentation des travaux existants.

– Dans le deuxième chapitre, nous montrons comment associer des graphes orienté et biparti à un système bilinéaire structuré. Ensuite, nous explicitons les conditions génériques d'observabilité de l'ensemble, ou d'une partie de l'état. Enfin, nous menons une étude de placement de capteurs permettant de recouvrer les conditions données préalablement.

– Le troisième chapitre est consacré à la détection et à la localisation de défauts. Nous étudions les trois cas suivants : le cas où le système peut être soumis à (1) plusieurs défauts simultanés, ou (2) non simultanés, et (3) à un seul défaut. Dans un deuxième temps, nous menons une étude de diagnostic actif *i.e.* nous souhaitons trouver une commande particulière permettant de rendre soluble le problème de détection de défauts.

Enfin, un ensemble de conclusions permettent de faire la synthèse des résultats. L'identification des limites de notre travail permet de proposer des perspectives à ce dernier.

Nos travaux de thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

– [Boukhobza et al., 2008] T. Boukhobza, F. Hamelin et S. Canitrot, "A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems", International Journal of Control, pages 661-678, vol 81, n°4, 2008.

– [Canitrot et al., 2008a] S. Canitrot, T. Boukhobza et F. Hamelin, "Observability recovering by additional sensor implementation in structured bilinear systems", Institution of Engineering and Technology - Control Theory and Applications, pages 860-865, vol 2, Issue 10, 2008.

– [Canitrot et al., 2008b] S. Canitrot, T. Boukhobza et F. Hamelin, "Partial observability in structured bilinear systems using a graphical approach", Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), pages 1447-1452, Ajaccio, France, 2008.

– [Canitrot et al., 2007] S. Canitrot, T. Boukhobza, F. Hamelin et S. Martinez-Martinez, "Control/fault diagnosis interactions analysis for structured bilinear systems", IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC), Foz do Iguaçu, Brésil, 2007.

Chapitre 1

Formulation des problèmes

Les travaux présentés dans ce chapitre s'intéressent à l'étude des propriétés d'observabilité et de localisabilité de défauts pour les systèmes bilinéaires. Dans un premier temps, nous définissons la classe des systèmes bilinéaires. Dans une seconde partie, nous exposons un ensemble de résultats existant sur l'observabilité de ces systèmes, avant de discuter de l'importance des capteurs et de leur possible classification (capteurs essentiels, utiles et inutiles,). Dans la troisième partie, nous énoncons le problème de FDI (Fault Detection and Isolation), et nous l'illustrons par des résultats connus. Nous présentons ensuite le cas particulier du diagnostic actif. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, en nous appuyant sur les résultats donnés précédemment, nous justifions l'intérêt d'étudier des systèmes structurés. Ces systèmes sont tels que nous connaissons l'emplacement des paramètres dans les matrices mais pas leur valeur. Nous définissons alors ce type de système ainsi que les notions de rang générique et de propriété générique.

1.1 Systèmes bilinéaires

Un système est un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon un certain nombre de principes ou règles. Il retourne un signal de sortie ou une réponse à un signal d'entrée ou une excitation. Cette transformation se fait à travers une équation différentielle, ou un système différentiel contenant plusieurs équations. Si le système est régi par le principe de superposition, ce système est alors défini comme étant linéaire.

Il existe une classe de systèmes, appelés systèmes bilinéaires (SBL), qui est définie par des applications mathématiques linéaires et bilinéaires.

Soit E, F et G, trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, soit $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application, φ est définie comme étant bilinéaire si et seulement si elle est linéaire en chacune de ses variables, *i.e.* :

$$\begin{cases} \forall\ x, x' \in E, \forall\ y, y' \in F, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}\ : \\ \varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y) \\ \varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x, y) \end{cases} \tag{1.1}$$

L'étude de systèmes bilinéaires nécessite des connaissances sur les systèmes linéaires et peut être une première étape à celle des systèmes non linéaires plus généraux.
Ces systèmes, introduits et étudiés dans les années 1960, définissent une classe particulière de systèmes non linéaires. Elle est l'une des plus simples à étudier au regard des divers types de systèmes non linéaires et il existe de nombreux exemples physiques de systèmes qui se modélisent sous cette forme (circuits commutés, freins mécaniques, systèmes immunologiques...)[Mohler and Kolodziej, 1980, Mohler, 1991]. Notons également que la modélisation du comportement dynamique d'un système non linéaire par une approximation bilinéaire permet d'obtenir, en général, une meilleure estimation qu'une simple linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Les travaux de [Bruni et al., 1974, Mohler and Kolodziej, 1980, Mohler, 1991, Elliot, 1998] sont une bonne introduction à l'étude des systèmes bilinéaires.

Comme les propriétés étudiées sont des propriétés dites de sortie, il n'est pas intéressant d'intégrer un terme $Bu(t)$ à l'équation différentielle en $\dot{x}(t)$.

Un système bilinéaire, Σ, soumis à des perturbations et défauts additifs peut s'écrire sous la forme (en adéquation avec [Grasselli and Isidori, 1977, Hammouri et al., 2001]) :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} u_\ell(t) A_\ell x(t) + Ef(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées de commande, $f \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des défauts, $w \in \mathbb{R}^r$ le vecteur des perturbations et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des sorties (mesures issues de capteurs). Pour $\ell = 0, \ldots, m$, $A_\ell \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$E \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times r}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices à coefficients constants.
En fonction de la propriété étudiée (observabilité ou diagnosticabilité), le système sera considéré avec défauts et perturbations ou sans.

Dans la section suivante, nous présentons, de manière concise, un état de l'art concernant l'observabilité des systèmes bilinéaires. Ensuite, nous discutons de l'importance des capteurs et de leur classification.

1.2 Observabilité des systèmes bilinéaires

La première propriété, fondamentale en automatique, à laquelle nous nous intéressons dans ce travail est l'observabilité. Elle consiste à garantir que les mesures faites sur un système sont suffisamment informatives pour pouvoir en déduire toutes les variables non mesurées du système. En effet, elle joue un rôle important dans le cadre de la surveillance du processus dans le contexte :
- de la commande, si les lois de commande doivent utiliser des variables non mesurées,
- du diagnostic, pour la construction et la génération de résidus,
- de la commande tolérante aux défauts, pour laquelle l'observation des amplitudes des défauts peut être utile.

L'étude de l'observabilité d'un système est préalable à la construction d'un observateur permettant l'estimation des variables d'état du système.
Aussi, l'observabilité est l'une des premières propriétés, avec la commandabilité et la stabilité, à avoir fait l'objet de caractérisations diverses par l'utilisation de multiples outils mathématiques. En effet, les conditions d'observabilité pour les systèmes bilinéaires ont déjà été étudiées en utilisant les notions de sous-espaces vectoriels et de rang de matrices.

Dans cette section, nous considérons un système bilinéaire sans défaut ni perturbation de la forme suivante :

$$\Sigma_x : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell(t) A_\ell x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

La considération des défauts et perturbations impliquerait l'étude du problème d'observabilité à entrées inconnues. Ce problème est approché par notre étude réalisée sur la

diagnosticabilité des systèmes bilinéaires. C'est pourquoi le problème d'observabilité est traité sur un système sans défaut ni perturbation.

L'état du système bilinéaire Σ_x est observable si toute variation de l'état initial se reflète sur la sortie. En d'autres termes, l'observabilité de l'ensemble de l'état est équivalente à la possibilité d'exprimer toutes les composantes de l'état en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées. Cela n'est évidemment possible que si les mesures effectuées sur le système, symbolisées ici par les sorties $y(t)$, sont suffisamment informatives pour pouvoir refléter toute variation de l'état.
La notion d'observabilité pour les systèmes bilinéaires est liée à la notion de distinguabilité de toute paire d'états initiaux distincts par la connaissance des trajectoires de sortie et de l'entrée. Ainsi, deux états initiaux $x'(0)$ et $x''(0)$ sont dits distinguables, s'il existe une entrée $u(t)$ telle que les trajectoires correspondantes $y'(t)$ et $y''(t)$, pour $t \geq 0$ ne sont pas identiques. En utilisant cette notion de distinguabilité, nous pouvons définir la propriété d'observabilité de Σ_x.

Définition 1.1
L'état du système bilinéaire Σ_x est observable si toute paire d'états initiaux $x'(0)$ et $x''(0)$ est distinguable par l'observation des trajectoires de sortie correspondantes $y'(t)$ et $y''(t)$, pour $t \geq 0$.

Il est possible d'étudier la propriété d'observabilité, soit dans le cas particulier des systèmes bilinéaires, soit dans le cas plus général des systèmes non linéaires. Ainsi, les critères d'observabilité analytiques, géométriques [Isidori and Ruberti, 1973, Kou et al., 1973, D'Allessandro et al., 1974, Hermann and Krener, 1977, Bruni et al., 1980, Bartosiewicz, 1995] et algébriques [Brockett, 1972, Fliess, 1981, Fliess, 1982, Diop and Fliess, 1991] établis pour les systèmes non linéaires s'appliquent également aux systèmes bilinéaires. Cependant, comme ces critères ont été établis dans le cas général des systèmes non linéaires, ils ne sont pas optimisés pour l'étude des systèmes bilinéaires.
Des définitions de l'observabilité et de l'observabilité uniforme pour les systèmes bilinéaires ont été énoncées dans [Williamson, 1977]. Un système est dit uniformément observable s'il n'existe pas de commande singulière : commande pour laquelle le système n'est pas observable.
Il est également intéressant de remarquer que certains résultats peuvent être utili-

sés dans le cadre des systèmes bilinéaires, comme c'est le cas des résultats sur les systèmes linéaires variant dans le temps [D'Angelo, 1970]. Ainsi les conditions d'observabilité des systèmes bilinéaires peuvent être comparées à celles obtenues dans [Kratz and Liebscher, 1998, Deylon, 2001] par exemple.

L'étude de cette propriété a été traitée, dans le cas particulier des systèmes bilinéaires, dans de nombreux travaux dont les principaux sont présentés ci-après.

1.2.1 Conditions d'observabilité d'un système bilinéaire

Dans le cas des systèmes linéaires, la propriété d'observabilité est principalement étudiée à partir du rang de la matrice d'observabilité. Cette notion est généralisée au cas bilinéaire dans [Grasselli and Isidori, 1977] afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, basées sur ce critère de rang de matrice, comme il est présenté dans la suite.

Afin de mieux appréhender le résultat de [Grasselli and Isidori, 1977], nous rappelons brièvement le résultat connu pour les systèmes linéaires.

Pour un système linéaire Σ_L défini par :

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des sorties ; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices ; la condition d'observabilité est donnée par le théorème 1.1.

Théorème 1.1 ***Observabilité des systèmes linéaires - matrice d'observabilité***
Le système linéaire Σ_L est observable si et seulement si :

$$rang\,(\mathcal{O}(C,A)) = n \tag{1.5}$$

où

$$\mathcal{O}(C,A) = col\,(C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1})$$

représente la matrice d'observabilité de Σ_L.

Les travaux de [Grasselli and Isidori, 1977] ont permis d'exprimer la condition d'observabilité des systèmes bilinéaires à partir d'une matrice d'observabilité appropriée aux systèmes considérés. Ainsi, en définissant la matrice d'observabilité d'un système bilinéaire par $\mathcal{O}(C, A_0, \ldots, A_m) = col\,(C, CA_0, \ldots, CA_m, CA_0^2, \ldots, CA_0A_m, CA_1A_0, \ldots)$, la condition d'observabilité est donnée par le théorème 1.2.

Théorème 1.2

Observabilité des systèmes bilinéaires - [Grasselli and Isidori, 1977]

Le système bilinéaire Σ_x est observable si et seulement si :

$$rang\,(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)) = n \tag{1.6}$$

où

$$\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m) = col\,(C, CA_0, CA_1, \ldots, CA_m, CA_0^2, CA_0A_1, \ldots, CA_0A_m,\ CA_1A_0, \ldots)$$

représente la matrice d'observabilité de Σ_x.

Remarque 1.1

Dans l'expression de la matrice d'observabilité apparaît tous les termes de produits de matrices que l'on ne peut pas mettre sous la forme $CM_1M_2^nM_3$ en lien avec le théorème de Cayley-Hamilton, où les matrices M_1, M_2 et M_3 sont des produits de matrices A_i avec $i = 0, \ldots, m$.

Nous utilisons cette condition afin de prouver l'observabilité du système de l'exemple 1.1.

Exemple 1.1

Soit le système :

$$\Sigma_{1.1} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_1(t)x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

La matrice d'observabilité associée à $\Sigma_{1.1}$ *est donnée par* $\mathcal{O}(C, A_0, A_1) = \begin{pmatrix} C \\ CA_0 \\ CA_1 \\ CA_0^2 \\ CA_0A_1 \\ CA_1A_0 \\ CA_1^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ *où*

$$\mathcal{O}(C, A_0, A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Le système est observable si le rang de la matrice $\mathcal{O}(C, A_0, A_1)$ *est égal à trois : la dimension du système. Comme cette condition est respectée, le système* $\Sigma_{1.1}$ *est observable.*

Comme il a été vu dans la définition générale de l'observabilité d'un système bilinéaire, la reconstruction des variables du système n'est rendue possible que par les signaux mesurés du système. De ce fait, il est intéressant d'étudier l'influence des présents capteurs sur la condition d'observabilité du système. Pour cela, il est possible de les classer en trois catégories (essentiels, utiles, inutiles). De plus, si la propriété n'est pas satisfaite, un placement de capteurs additionnels judicieux devrait permettre son recouvrement. Ce placement de capteurs peut être contraint avec un souci d'optimisation du nombre ou du coût des capteurs.

1.2.2 Importance et classification des capteurs

Un capteur est un dispositif qui a pour fonction essentielle de transformer une grandeur physique en une autre grandeur physique utilisable, soit par l'homme soit par d'autres instruments (contrôleurs...). Il existe de nombreux types de capteurs pour la mesure de différentes grandeurs physiques : distance, temps, vitesse, température...

Les capteurs sont parfois coûteux, leur emplacement sur un système parfois très limité,

leur maintenance quelque fois difficile... Il est donc important de savoir placer de manière optimale les capteurs sur un système. Pour des raisons de fiabilité et de sûreté, il est également nécessaire de chercher à garantir le bon fonctionnement du système en cas de panne de certains capteurs.

Il est évident que la propriété d'observabilité est dépendante de l'ensemble des capteurs du système, *i.e.* du nombre et de l'emplacement des capteurs (autrement dit des variables mesurées). Il peut alors être intéressant de s'interroger sur le degré d'importance de chaque capteur de l'ensemble Y afin de satisfaire la propriété d'observabilité, notée $\mathcal{P}_{\text{obs}}$. Tous les capteurs sont-ils utiles à la satisfaction de la propriété ? Existe-t-il des capteurs dont le système ne pourrait se passer afin de satisfaire la condition d'observabilité ? En répondant à ces questions, il est possible de proposer une classification des capteurs. [Staroswiecki et al., 2004] donne une classification pour l'observabilité, celle-ci a été étendue dans [Chamseddine et al., 2007] pour la tolérance aux défauts de capteurs. La thèse [Trinh, 2008] traite de la classification des capteurs pour l'observabilité et le rejet de perturbation par retour de sortie pour les systèmes linéaires structurés. Il traite également du problème de placement de capteurs pour l'observabilité de ces mêmes systèmes. Pour un système Σ_x, et la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$, il est possible de classer les capteurs en trois catégories [Trinh, 2008] :

– les capteurs essentiels,
– les capteurs inutiles,
– les capteurs utiles.

La figure 1.1, selon [Trinh, 2008], donne une vision de la classification des capteurs.

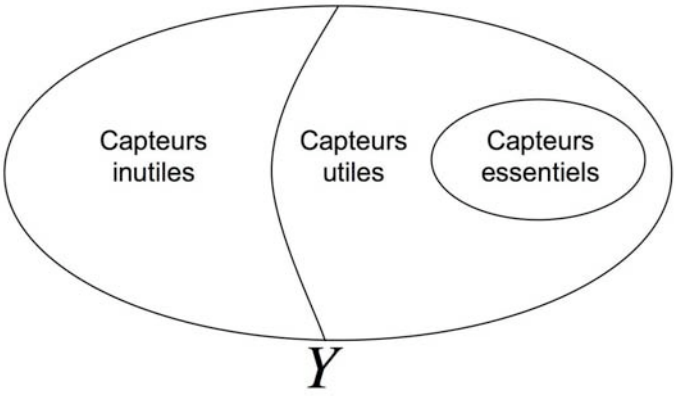


FIG. 1.1: *Classification des capteurs*

Cette classification prend en compte l'importance d'un capteur pour la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$. Le défaut d'un capteur essentiel fait perdre la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$, alors que le défaut d'un capteur inutile n'a aucun effet sur $\mathcal{P}_{\text{obs}}$.

Un capteur inutile est un capteur qui, s'il était retiré du système Σ_x, n'entraînerait pas la perte de la satisfaction de la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$, et est défini par :

Définition 1.2 ***Capteur inutile***
Soit Σ_x un système bilinéaire, Y l'ensemble de ses capteurs, et la propriété $\mathcal{P}_{obs}$ satisfaite pour l'ensemble Y.
Soit un sous ensemble de capteurs V_Y pour lequel la propriété d'observabilité est satisfaite.
Le capteur y_i est un capteur inutile si, pour tout sous-ensemble V_Y, la propriété d'observabilité est satisfaite pour le sous ensemble de capteurs $V_Y \backslash \{y_i\}$.

Un capteur essentiel est un capteur qui, s'il était retiré, entraînerait obligatoirement la perte de la satisfaction de la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$, et est défini par :

Définition 1.3 ***Capteur essentiel***
Soit Σ_x un système bilinéaire, Y l'ensemble de ses capteurs, et la propriété $\mathcal{P}_{obs}$ satisfaite pour l'ensemble Y.
Le capteur y_i est un capteur essentiel si la propriété d'observabilité n'est plus satisfaite pour le système bilinéaire Σ_x avec l'ensemble de capteurs réduit à $Y \backslash \{y_i\}$.

Enfin, un capteur utile est un capteur qui ne répond à aucune des deux définitions précédentes.

Dans le cas où la propriété d'observabilité n'est pas satisfaite pour l'ensemble de capteurs Y alors il peut être ajouté des capteurs à cet ensemble afin de recouvrer la propriété souhaitée. Nous nous intéressons à présent à ce problème.

Placement de capteurs
Pour un système bilinéaire Σ_x dont la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$ n'est pas vérifiée par l'ensemble des capteurs Y, le problème de placement de capteurs consiste à déterminer un ensemble de capteurs supplémentaires pour que $\mathcal{P}_{\text{obs}}$ soit vraie sous certaines contraintes (telles que le nombre minimal, le coût minimal...).

Pour rendre $\mathcal{P}_{\text{obs}}$ vraie, il nous faut caractériser un ensemble de capteurs supplémentaires Z qui collectent de nouvelles mesures. Sur le nouveau système composé de Σ_x et des nouvelles mesures Z, si $\mathcal{P}_{\text{obs}}$ est vérifiée, il est alors dit que le problème de placement de capteurs pour la propriété $\mathcal{P}_{\text{obs}}$ est résolu.
Après avoir présenté les résultats existant dans le domaine de l'observabilité des systèmes bilinéaires, nous nous intéressons au second problème traité dans ce manuscrit *i.e.* la détection et la localisation de défauts.

1.3 Détection de défauts

La seconde partie de notre étude porte sur la détection de défauts des systèmes bilinéaires. Suite à la progression rapide des nouvelles technologies, les systèmes industriels sont devenus de plus en plus complexes et l'opération de diagnostic est à présent indispensable pour assurer la sûreté de fonctionnement et la disponibilité, et ce afin d'éviter tout dysfonctionnement pouvant entraîner des dommages humains et matériels. Bénéficiant des outils déjà existants en automatique, la recherche dans le domaine du diagnostic a connu une évolution très importante. Elle s'est traduite par le développement de plusieurs méthodes donnant une solution aux problèmes de la détection et de la localisation de défauts [Patton et al., 1989, Gertler, 1998, Patton et al., 2000].

Ce problème, proche de celui de l'analyse de l'observabilité de l'état et de l'entrée, est bien connu dans le cadre des systèmes linéaires. Cependant les approches fréquentielles [Frank, 1996], ou celles basées sur l'espace de parité [Gertler, 1991, Patton and Chen, 1994], sont assez difficilement généralisables au cas des systèmes bilinéaires contrairement à l'approche géométrique (pour laquelle les conditions théoriques d'existence de générateurs de résidus permettant le diagnostic des défauts du système ont été étudié comme dans [Massoumnia et al., 1989]).
Le problème de génération de résidus, abordé pour les systèmes linéaires dans [Massoumnia et al., 1989, Massoumnia, 1986] entre autres, consiste à générer des signaux appelés résidus permettant de localiser chaque défaut lorsqu'il apparaît sur le système. C'est principalement le problème (ou l'une de ses variantes) que doit résoudre un schéma d'observation classique pour pouvoir détecter et localiser un défaut.

Les résultats de [Massoumnia et al., 1989] ont été étendus aux systèmes non linéaires dans

[De Persis and Isidori, 2001a, Hammouri et al., 1999]. [De Persis and Isidori, 2001b] donne des conditions géométriques nécessaires dans le cas général où le système peut être soumis à plusieurs défauts simultanés. Pour les systèmes bilinéaires, les conditions nécessaires et suffisantes à la solubilité de ce problème ont été données dans [Hammouri et al., 2001] en utilisant le concept de co-distributions d'observabilité [De Persis and Isidori, 2000]. Ces conditions sont l'un des plus importants résultats concernant le problème de détection et de localisation de défauts d'un système bilinéaire.

En adéquation avec [Hammouri et al., 2001] et comme précisé à l'équation (1.2), nous considérons des systèmes bilinéaires soumis à des perturbations et des défauts sous la forme suivante :

$$\Sigma_{\text{diag}} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell(t) A_\ell x(t) + E f(t) + H w(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{cases} \tag{1.8}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^q$, $w \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée de commande, de défaut, de perturbation et de sortie.

Le problème fondamental de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires (BFPRG : Bilinear Fundamental Problem of Residual Generation [Hammouri et al., 2001]) consiste à trouver un filtre de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \bar{A}(u) z(t) + \bar{D}(u) y(t) + \phi(g(t)) r(t) \\ \dot{g}(t) &= \psi(u(t), g(t)) \\ \delta(t) &= \bar{C} z(t) + L y(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

où les *résidus* représentés par le vecteur $\delta \in \mathbb{R}^q$ sont tels que pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$:

i. quand $f_i = 0$, δ_i est insensible à la perturbation w et à toute entrée f_j si $j \neq i$, et il doit décroître vers zéro pour toute entrée de commande u et quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$,

ii. δ_i est affecté par f_i, *i.e.* δ_i prend une valeur non nulle persistante quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$.

En supposant qu'un seul défaut puisse être présent à tout instant t (défauts non simultanés), nous recherchons un filtre de type (1.9), où le résidu $\delta \in \mathbb{R}^q$ est tel que :

- lorsqu'aucun défaut n'est présent, toutes les composantes δ_i du résidu tendent asymptotiquement vers zéro quelle que soit la perturbation $w(t)$, pour toutes les commandes $u(t)$ et quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$,
- pour le $i^{\text{ème}}$ mode de défaillance (*i.e.* $f_i(t) \neq 0$), les résidus $\delta_j(t)$ pour $j \in S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}$ sont non nuls alors que les autres résidus $\delta_j(t)$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, q\}|S_i$ tendent asymptotiquement vers zéro pour toutes les commandes $u(t)$, quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$ et quel que soit $w(t)$. Ici, la famille des S_i est choisie telle que $\forall\, i \neq j$, $S_i \neq S_j$ dans le but de localiser chaque défaut.

Dans notre étude, nous nous intéressons uniquement à la possibilité de détecter ou non les défauts et non pas à la manière de les détecter. Nous ne cherchons pas à déterminer le ou les générateurs de résidus permettant la détection de ces défauts.
La partie suivante rappelle le résultat donné par [Hammouri et al., 2001] sur la résolution du BFPRG.

1.3.1 Condition géométrique de détection de défaut

L'un des plus importants résultats concernant le problème de détection et de localisation de défauts d'un système bilinéaire est donné dans [Hammouri et al., 2001]. Utilisant une approche géométrique, les auteurs donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du BFPRG. Ces résultats sont énoncés au théorème 1.3.

Théorème 1.3
Soit Σ un système bilinéaire soumis à un unique défaut, le problème fondamental de génération de résidus est soluble si et seulement si $E \notin \bar{\mathcal{O}}_H$, où $\bar{\mathcal{O}}_H$ est le sous-espace d'inobservabilité minimal contenant Im(H).

Le sous-espace d'inobservabilité minimal contenant $\mathrm{Im}(H)$ est donné par la limite de la suite non croissante de sous-espaces vectoriels suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0 &= \mathcal{R}_H + \ker(C) \\ \mathcal{T}_{i+1} &= \mathcal{R}_H + \Big(\bigcap_{j=0}^{m} \big((A_j)^{-1} \mathcal{T}_i \big) \Big) \cap \ker(C) \end{cases} \tag{1.10}$$

où $\mathcal{R}_H$ représente le sous-espace (C, A_j)-invariant $(j = 0, \ldots, m)$ minimal contenant $\mathrm{Im}(H)$, et est donné par la suite non-décroissante de sous-espaces vectoriels suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 = \mathrm{Im}(H) \\ \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i + \sum_{j=0}^{m} A_j(\mathcal{R}_i \cap \ker(C)) \end{cases} \tag{1.11}$$

Nous utilisons le théorème 1.3 afin de vérifier la condition de détection et de localisation du défaut pour le système traité dans l'exemple 1.2.

Exemple 1.2

Soit le système $\Sigma_{1.2}$ *défini par les matrices* $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour cet exemple, il est possible de montrer que $\mathcal{R}_0 = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_H = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *et* $\mathcal{T}_0 = \bar{\mathcal{O}}_H = \mathbb{R}^4$.

Comme $E \in \bar{\mathcal{O}}_H$*, le problème de génération de résidus n'a pas de solution.*

Comme pour l'observabilité, l'emplacement des capteurs du système influence la détection et la localisation des défauts. Ainsi, si le problème de génération de résidus n'a pas de solution, il est possible de mener une étude de placement de capteurs pour résoudre ce dernier. D'autre part, il existe certaines études [Niemann, 2006, Campbell and Nikoukhah, 2004] sur la détection de défauts dite active. Ce terme actif signifie que la détection de défauts se fait sous l'influence d'une commande du système et permet également de résoudre le problème de génération de résidus.

Dans notre étude, nous avons choisi de nous intéresser à ce second point. En effet, dans le cas de systèmes non linéaires, il se peut qu'un défaut soit non détectable en considérant une entrée de commande quelconque, mais que ce même défaut devienne détectable en considérant

une entrée de commande spécifique. Si nous considérons le système de l'exemple précédent, supposer que la commande est constante revient à tester les conditions sur un système linéaire et il est possible de montrer que le défaut devient alors détectable (comme il sera montré dans le troisième chapitre de ce rapport).
Dans la partie suivante, nous présentons brièvement les résultats de [Niemann, 2006, Campbell and Nikoukhah, 2004].

1.3.2 Détection active de défauts

Dans l'étude de l'interaction FDI/FTC (Fault Tolerant Control), la majorité des travaux se focalise essentiellement sur l'utilisation de l'information de détection de défaut pour reconfigurer la commande. En effet, dans la majorité des applications, le diagnostic d'un défaut n'est pas une fin en soi mais fait partie intégrante de la stratégie de commande d'un système. Une autre vision de l'interaction commande/FDI consiste à établir des lois de commande facilitant et ne dégradant pas la diagnosticabilité du système. En effet, il semble important d'exploiter les possibilités qu'offre la loi de commande à modifier le comportement du procédé de diagnostic. Pour illustration, nous pouvons citer la succession de tests effectués par un garagiste sur une voiture dans une procédure de détection et de localisation de pannes. Cela se traduirait sur un système par l'enclenchement de modes de fonctionnement spécifiques permettant de localiser un défaut et d'en parfaire le diagnostic.

Dans [Niemann, 2006], l'auteur travaille sur des défauts de variations paramétriques. Le schéma représentant le système $\Sigma_{P,\theta}$ et le bloc de détection de défauts active (AFD : Active Fault Diagnosis) est donné par la figure 1.2 en respectant les notations de l'auteur, où $\eta(t)$ est l'entrée auxiliaire et $r(t)$ est le résidu.
La méthode utilisée consiste donc à exciter l'entrée auxiliaire afin de détecter le plus rapidement possible les défauts. Une étude fréquentielle permet de caractériser l'entrée auxiliaire η permettant la détection de défauts la plus rapide. On remarque ainsi qu'il existe une entrée d'excitation en plus de l'entrée de commande. Cette dernière notée $u(t)$ peut être reconfigurée ou non par le bloc de diagnostic J_{AFD}. [Niemann, 2006] donne alors l'expression de J_{AFD} en considérant le système soit en boucle ouverte, soit en boucle fermée et est basée sur la paramétrisation YJBK (Youla - Jabr - Bongiorno - Kucera) [Kucera, 1979, Youla et al., 1976a, Youla et al., 1976b]. Une fois le module de détection de défauts défini, il faut s'intéresser à la génération de l'entrée auxiliaire $\eta(t)$ et à l'éva-

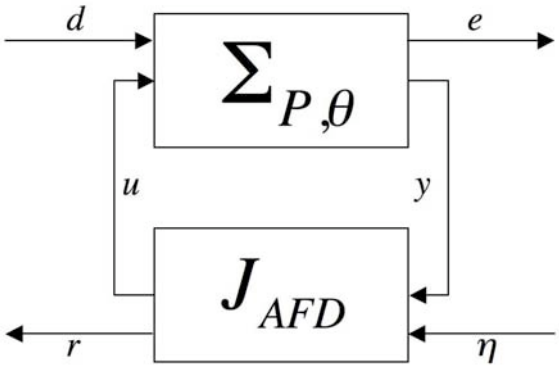


FIG. 1.2: *Détection de défauts active par entrées auxiliaires.*

luation du vecteur résidu $r(t)$ comme cela est indiqué dans [Campbell and Nikoukhah, 2004].

Signalons que cette méthode n'a pas pour but de rendre un défaut détectable alors qu'il ne l'est pas dans le cas passif de détection. En revanche, elle permet d'améliorer sa vitesse de diagnostic par l'intermédiaire de l'entrée auxiliaire $\eta(t)$ qui va exciter le système. Les systèmes considérés étant linéaires, une commande particulière peut masquer un défaut présent ; par contre, cela ne permet pas de rendre détectable un défaut qui ne l'est pas. En cela, notre étude se démarque par le fait que nous cherchons des commandes permettant de détecter des défauts indétectables avec les capteurs en place. Nous pensons que comme les capteurs, la commande joue un rôle important dans la localisation et la détection des défauts.

Les résultats que nous avons donnés précédemment pour l'observabilité et la détection de défauts s'appliquent à des systèmes dont nous connaissons les valeurs des éléments des matrices. Cependant, certaines propriétés, dont l'observabilité et la détection de défauts, dépendent plus de la structure du système que des valeurs de paramètres appartenant aux matrices. Dans la partie suivante, nous définissons les systèmes bilinéaires structurés ainsi que les notions associées de rang générique et de propriété générique.

1.4 Systèmes bilinéaires structurés

Les systèmes automatisés, en particulier les systèmes physiques, sont souvent représentés par des modèles d'état pour lesquels les paramètres des matrices associées ne sont qu'imparfaitement connus. Seule une partie de ces paramètres est connue avec exactitude, en particulier ceux valant zéro. C'est pourquoi, par la suite, les paramètres du système seront

supposés soit nuls, soit libres, et les positions des paramètres nuls et non nuls dans les matrices seront connues. Les systèmes ainsi représentés sont appelés systèmes structurés : ils sont caractérisés par les positions connues des paramètres libres. Les paramètres sont alors associés aux relations statiques et dynamiques entre les variables, ainsi les propriétés données sont dites génériques. Cette notion de généricité sera explicitée plus en détail dans la suite de cette section.

Si nous reconsidèrons la condition d'observabilité par approche algébrique, le rang de la matrice d'observabilité est à recalculer pour chaque système numériquement spécifié. Si des systèmes ont la même structure (position des éléments de matrice non nuls équivalentes) alors la valeur de ce rang n'évolue que pour un nombre restreint de cas. Illustrons cette notion au travers de l'exemple suivant.

Exemple 1.3
Soit le système :

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u_1(t)x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \tag{1.12}$$

La condition d'observabilité est liée au $rang(\mathcal{O}(C, A_1)) = rang \begin{pmatrix} C \\ CA_1 \end{pmatrix}$ *où* $\begin{pmatrix} C \\ CA_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Le système est donc observable car le rang de la matrice* $\mathcal{O}(C, A_1)$ *est égal à la dimension du système,* i.e. *égal à deux.*

Maintenant, voyons ce qu'il advient si l'on considère le système structuré associé, i.e. *en remplaçant les éléments non nuls par des paramètres libres.*

Soit le système :

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u_1(t)x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \tag{1.13}$$

La matrice d'observabilité est alors donnée par $rang(\mathcal{O}(C, A_1)) = rang \begin{pmatrix} C \\ CA_1 \end{pmatrix}$ *où* $\begin{pmatrix} C \\ CA_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_4\lambda_2 \end{pmatrix}$.

Le système est observable si le rang de la matrice $\mathcal{O}(C, A_1)$ *est égal à la dimension du système,* i.e. *égal à 2. Le déterminant de la matrice* $\mathcal{O}(C, A_1)$ *est donné par* $\lambda_3\lambda_4(\lambda_2 - \lambda_1)$. *Il peut en être déduit que le système est observable si et seulement si* $\lambda_2 \neq \lambda_1$ *(le cas de paramètres nuls* $\lambda_i = 0$ *n'est pas traité de par la définition des systèmes structurés : considérer un paramètre nul reviendrait à considérer un nouveau système avec une structure différente). Il est alors dit que le système est génériquement observable,* i.e. *il est observable pour presque toutes les valeurs de* $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$.

La notion de système structuré a été présentée par [Lin, 1974] dans ses recherches sur la commandabilité structurelle des systèmes linéaires mono-entrée. Après ces travaux, [Linnemann, 1981] a proposé une définition des systèmes linéaires structurés en termes de matrices structurées, où apparaissait la notion de paramètres soit fixés à zéro soit inconnus. Cette notion a été reprise par [Murota, 1987] en termes de paramètres soit nuls soit algébriquement indépendants. En schématisant ce concept, un système linéaire structuré est un système linéaire dont la seule information connue est l'existence, ou l'absence, de relation entre variables.

Les conditions de commandabilité structurelle, [Lin, 1974], ont été interprétées graphiquement en termes de chemins et de cycles. Dans le même temps, d'autres recherches portant sur d'autres propriétés génériques des systèmes ont également été menées. Le rang générique de la matrice de transfert d'un système structuré a été étudié dans [Ohta and Kodama, 1985, van der Woude, 1991a]. La structure à l'infini qui joue un rôle majeur pour résoudre des problèmes de commande classiques a été abordée par [Suda et al., 1989, Commault et al., 1991, van der Woude, 1991b]. Cette structure peut être obtenue grâce à l'étude de chemins entrées-sorties disjoints sur le graphe associé [Reinschke, 1988, Murota, 2000].

Un système bilinéaire structuré est ainsi défini :

Définition 1.4 ***Système bilinéaire structuré***

Soit Σ_Λ un système bilinéaire équivalent au système 1.8 mais dont les éléments des matrices sont des paramètres, Σ_Λ est décrit par la représentation d'état :

$$\Sigma_\Lambda : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0^\Lambda x(t) + \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell(t) A_\ell^\Lambda x(t) + E^\Lambda f(t) + H^\Lambda w(t) \\ y(t) &= C^\Lambda x(t) \end{cases} \tag{1.14}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées, $f \in \mathbb{R}^q$ le vecteur de défauts, $w \in \mathbb{R}^r$ le vecteur de perturbations et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des sorties. Pour $\ell = 0, \ldots, m$, $A_\ell^\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E^\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $H^\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times r}$ et $C^\Lambda \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices structurées dont les éléments sont soit fixés à zéro soit des paramètres indépendants.

Les paramètres sont rassemblés dans le vecteur $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)^T \in \mathbb{R}^h$. Ces paramètres sont dits indépendants, car ils ne sont liés *a priori* par aucune relation. Une réalisation admissible correspond à une structure numériquement spécifiée (où les paramètres λ_i sont quantifiés) et est définie par rapport à un système bilinéaire structuré par :

Définition 1.5 ***Réalisation admissible***
Soit Σ_Λ un système bilinéaire structuré défini par l'équation (1.14) et par les matrices $(A_0^\Lambda, \ldots, A_m^\Lambda, B^\Lambda, C^\Lambda, E^\Lambda, H^\Lambda)$. Un système bilinéaire $\Sigma = (A_0, \ldots, A_m, B, C, E, H)$ est une réalisation admissible de Σ_Λ si les paramètres fixés à zéro des matrices $A_0^\Lambda, \ldots, A_m^\Lambda, B^\Lambda, C^\Lambda, E^\Lambda, H^\Lambda$ correspondent à des paramètres nuls pour les matrices A, B, C, E et H.

En étudiant des systèmes structurés, les propriétés données sont dites génériques. Ainsi, et pour exemple, les rangs de matrices structurées (comme la matrice d'observabilité) deviennent des rangs génériques.

1.4.1 Rang générique d'une matrice structurée

Le rang d'une matrice numériquement définie est donnée par le nombre maximal de lignes et de colonnes linéairement indépendantes de cette même matrice. Le rang d'une matrice M est habituellement noté $\text{rang}(M)$.

Considérons maintenant une matrice structurée M^Λ dont les éléments sont soit fixés à zéro soit des paramètres supposés indépendants entre eux. Le rang générique d'une telle matrice est donné par la définition suivante.

Définition 1.6 *[Johnston et al., 1984, Reinschke, 1988, Murota, 2000]*
Le rang générique, noté g-rang, d'une matrice M^Λ dépendant de l'ensemble des paramètres Λ est défini par :

$$g\text{-}rang(M^\Lambda) = max_{\Lambda\in\mathbb{R}^h}\{rang(M^\Lambda)\} \tag{1.15}$$

Le rang générique de la matrice M^Λ est ainsi égal à une valeur maximale q pour presque toutes les valeurs de $\Lambda \in \mathbb{R}^h$, où l'expression "presque toutes" doit être comprise comme toutes les valeurs de λ_i sauf celles qui se trouvent dans une variété algébrique propre définie ci-après.

Définition 1.7 ***Variété algébrique propre***
[Wonham, 1985] définit une variété algébrique $V \subset \mathbb{R}^h$ comme l'hypersurface caractérisée par les racines communes d'un nombre fini de polynômes $p_1, p_2, \ldots, p_k$:

$$V = \{\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h) | p_i(\Lambda) = 0, i = 1, 2, \ldots, k\}$$

V est propre si $V \neq \mathbb{R}^h$ et V est non triviale si $V \neq \emptyset$. La notion de généricité peut être définie dans le contexte des systèmes structurés.

1.4.2 Propriétés génériques

L'un des avantages de l'analyse des propriétés des systèmes bilinéaires structurés réside dans la généricité des résultats obtenus. En effet, la validité des propriétés étudiées est vraie non seulement pour une combinaison donnée des paramètres du système, mais aussi pour presque toutes les valeurs qu'ils peuvent prendre. Ces propriétés, dites structurelles car liées à la structure du système, ont ainsi une validité générique par rapport aux valeurs des paramètres.
Il faut noter que l'aspect générique des propriétés structurelles par rapport aux paramètres du système n'implique en rien leur validité pour toutes les combinaisons numériques possibles des paramètres. C'est par exemple le cas pour l'observabilité du système bilinéaire structuré de l'exemple 1.4.

Exemple 1.4
Soit le système Σ_3, il a été déduit précédemment que le système était observable pour toute valeur des paramètres $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ sauf pour $\lambda_2 = \lambda_1$. Ainsi le système est observable pour

presque toutes les valeurs de Λ*. Dans le cas des systèmes bilinéaires structurés, il est dit que le système est génériquement observable.*

Dans la dernière section de ce chapitre, nous allons mettre en avant les faiblesses des différents résultats existants pour l'observabilité, la détection et la localisation des défauts pour les systèmes bilinéaires. Ensuite, nous justifierons notre choix d'utiliser une nouvelle approche graphique afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour les propriétés étudiées.

1.5 Positionnement de nos travaux

Concernant la propriété de détection de défauts, le calcul de l'espace $\bar{\mathcal{O}}_H$ devient difficile à mettre en œuvre si l'on considère des systèmes structurés et, de plus, le principal problème de cette approche [Hammouri et al., 2001] est qu'elle ne tient pas compte de l'influence que l'entrée de commande peut avoir sur le processus de détection de défauts. De plus, le calcul des sous-espaces $\mathcal{R}_H$ et $\bar{\mathcal{O}}_H$ peut s'avérer fastidieux en particulier pour les systèmes de grande dimension. Les mêmes remarques peuvent être faites en ce qui concerne les critères existant pour l'étude de la propriété d'observabilité : nombre de matrices composant la matrice d'observabilité important en fonction des dimensions des composantes d'entrée et d'état. De plus, certaines méthodes nécessitent la connaissance des paramètres du système : cela peut être problématique pour l'étude d'un système en phase de conception. Les systèmes de grande dimension sont difficilement traités par ces outils car la complexité des algorithmes à mettre en œuvre est importante.

D'un autre côté, les travaux de Lin publiés dans les années 1970 [Lin, 1974] ont permis d'introduire une nouvelle représentation des systèmes linéaires à base de graphes orientés. Les résultats énoncés, fondés sur l'existence de chemins et de cycles dans ces graphes orientés, ont montré l'intérêt que pouvait avoir une telle approche en termes de complexité algorithmique et d'interprétation des résultats. De plus, les notions utilisées sont bien connues dans la théorie des graphes et de nombreux algorithmes "peu gourmands" en terme de calcul existent. D'autres avantages à utiliser la théorie des graphes ont été démontrés dès les années 1980 avec la décomposition graphique proposée dans [Vidyasagar, 1980] qui vise à étudier la stabilité de systèmes de grande dimension.

Concernant la propriété d'observabilité, la caractérisation de conditions génériques a déjà

été traitée dans le cas des systèmes linéaires où de nombreuses études sur les systèmes structurés sont liées à une approche graphique. En ce sens, [Dion et al., 2003] regroupe l'ensemble des résultats les plus significatifs dans ce domaine. De ces travaux, il résulte que l'approche graphique fournit des solutions simples et est ainsi très bien adaptée pour analyser des systèmes de grande dimension et/ou incertains. Malheureusement, peu de travaux basés sur des méthodes graphiques traitent des systèmes non linéaires. Dans le cadre des systèmes linéaires, les travaux de Commault et Dion ont permis d'exprimer des conditions graphiques équivalentes aux conditions bien connues de rang de matrice d'observabilité et de montrer que l'approche graphique est particulièrement bien adaptée pour l'analyse des systèmes structurés.

Une autre représentation graphique des systèmes non linéaires a également été utilisée. Cette représentation par bond graphs est utilisée pour l'analyse de la diagnosticabilité et pour la synthèse de schémas de détection et de localisation de défauts, comme cela est décrit dans [Ould Bouamama et al., 2000, Samantaray et al., 2006]. Ces travaux se fondent sur les relations analytiques de redondance [Staroswiecki and Comtet-Varga, 2001]. [Bornard and Hammouri, 2002] utilise une représentation graphique afin de caractériser l'observabilité uniforme des systèmes non linéaires multi-sorties.

Concernant la propriété d'observabilité, l'une des premières études graphiques structurelles dédiées aux systèmes bilinéaires est décrite dans [Svaricek, 1993]. Dans ces travaux, l'auteur donne une interprétation graphique des éléments de la matrice d'observabilité sur un graphe pondéré en supposant l'entrée du système constante par morceaux et aboutit à des conditions suffisantes d'observabilité.

Un graphe orienté peut ainsi être associé intuitivement à un système structuré : chaque variable du système est représentée par un sommet et chaque relation non nulle entre deux variables est représentée par un arc reliant les deux sommets associés à ces deux variables. Il s'avère que le graphe est un outil très efficace pour analyser les propriétés génériques des systèmes considérés. Les caractérisations graphiques des propriétés sont aussi intéressantes du point de vue pédagogique, puisqu'elles nous permettent de visualiser clairement certaines propriétés sur des systèmes de taille raisonnable.

Dans nos travaux, nous avons donc étudié les propriétés d'observabilité et de localisabilité

de défauts appliquées aux systèmes bilinéaires structurés. À partir des nombreux résultats prometteurs de l'utilisation d'une approche graphique sur les systèmes structurés, nous avons alors cherché à donner des conditions graphiques pour les propriétés génériques souhaitées.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats concernant l'observabilité des systèmes bilinéaires structurés. En premier lieu, nous définissons les deux représentations graphiques utiles à notre étude. Dans une seconde partie, nous donnons des conditions d'observabilité de l'ensemble, ou d'une partie de l'état. Puis, nous proposons une étude de placement de capteurs qui permet de recouvrer ces conditions avec un nombre minimal de capteurs dans le cas de l'observabilité de l'ensemble de l'état.

Chapitre 2

Observabilité d'un système bilinéaire structuré

Dans ce premier chapitre de contribution, nous nous intéressons au problème d'observabilité des systèmes bilinéaires structurés par approche graphique. Les études déjà réalisées dans [Svaricek, 1993] ne permettent pas d'avoir des conditions graphiques nécessaires et suffisantes d'observabilité pour les systèmes bilinéaires. Ce type de conditions existe pour les systèmes linéaires et beaucoup de propriétés ont été étudiées par cette approche à base de graphes et ont d'autant plus justifié notre intérêt d'utiliser cette approche.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans un premier temps à l'expression de conditions graphiques nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'ensemble, ou d'une partie, de l'état d'un système bilinéaire structuré. Dans un deuxième temps, si un système ne satisfait pas à ces conditions, nous élaborons des méthodes de placement de capteurs afin de recouvrer les conditions précédemment énoncées. Ce chapitre se divise en cinq sections. La première introduit deux représentations graphiques de systèmes bilinéaires utiles à l'énonciation des résultats ainsi que les définitions et notations associées. La seconde est dédiée aux conditions d'observabilité de l'ensemble de l'état, alors que celles pour l'observabilité partielle seront données à la troisième section. La quatrième (resp. dernière) section permet de caractériser les capteurs à placer afin de recouvrer les conditions de la seconde (resp. troisième) section.

2.1 Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré

Dans notre travail, deux types de représentation sont utilisés : les graphes orientés et les graphes bipartis. La représentation par graphe orienté permet la détermination de toutes les conditions de ce manuscrit. La seconde représentation, par graphe biparti, permet de reduire la complexité de l'implémentation algorithmique pour l'expression de la condition d'observabilité de l'ensemble de l'état.

2.1.1 Graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré

Dans cette partie, la définition du graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré est donnée et illustrée par un exemple. Afin de simplifier les écritures dans la suite du manuscrit, une matrice structurée M^{Λ} sera noté simplement M (toutes les matrices étant structurées).

À un système bilinéaire structuré Σ_{Λ} tel que :

$$\Sigma_{\Lambda} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell(t) A_\ell x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

peut être associé un graphe orienté dénoté $\mathcal{G}(\Sigma_{\Lambda})$. Il est composé d'un ensemble de sommets noté $\mathbf{V}$ et d'un ensemble d'arcs $\mathcal{E}$, *i.e.* $\mathcal{G}(\Sigma_{\Lambda}) = (\mathbf{V}, \mathcal{E})$. L'ensemble des sommets $\mathbf{V}$ est associé aux composantes de l'état et aux composantes de sortie du système structuré. Plus précisément $\mathbf{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, où $\mathbf{X} = \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ est l'ensemble des sommets d'état et $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_p}\}$ est l'ensemble des sommets de sortie.

L'ensemble des arcs $\mathcal{E} = \bigcup_{\ell=0}^{m} \bar{A}_\ell$-arcs représente l'existence de relations statiques ou dynamiques entre les variables $\mathbf{V}$. Cet ensemble est défini tel que pour $\ell = 1, \ldots, m$, $\bar{A}_\ell$-arcs $= \{(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_i}) | A_\ell(i,j) \neq 0\}$ et $\bar{A}_0$-arcs $= A_0$-arcs $\cup$ C-arcs avec A_0-arcs $= \{(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_i}) | A_0(i,j) \neq 0\}$ et C-arcs $= \{(\mathbf{x_j}, \mathbf{y_i}) | C(i,j) \neq 0\}$.

Les matrices A_ℓ et C sont des matrices structurées. L'élément (i,j) d'une matrice M (où i correspond à la ligne et j à la colonne de la matrice structurée M) est représenté par $M(i,j)$.

$(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_i})$ représente un arc orienté allant du sommet $\mathbf{x_j} \in \mathbf{V}$ au sommet $\mathbf{x_i} \in \mathbf{V}$.

Notons que les entrées de commande u n'apparaissent pas en tant que sommets sur la représentation graphique. En effet, l'entrée est plus considéré comme un paramètre au même titre que les λ_i.

À chaque arc $e \in \bar{A}_\ell$-arcs est associé un indice u_ℓ et l'indication u_ℓ est annotée au-dessus de chaque arc e dans la représentation du graphe orienté. Un arc est ainsi caractérisé par ses sommets de début et de fin mais également par son indice. Un arc est alors représenté comme il est illustré à la figure 2.1. Il est à noter que l'indice u_0 n'a pas d'existence physique et n'est utile que pour différencier les ensembles $\bar{A}_\ell$-arcs d'appartenance des arcs.

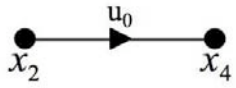


FIG. 2.1: *Représentation d'un arc* $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$*-arcs*

De cette façon, deux arcs sont distincts si au moins une de leurs trois caractéristiques est différente *i.e.* l'indice, le sommet de début ou le sommet de fin. Si un arc $e_1 \in \bar{A}_{\ell_1}$-arcs et un arc $e_2 \in \bar{A}_{\ell_2}$-arcs ont les mêmes sommets de début et de fin alors un seul arc est représenté pour ne pas alourdir le graphe mais tous les indices sont mis sur cet arc comme illustré à la figure 2.2. Ainsi, à chaque paramètre λ_i du système, on fait correspondre un arc.

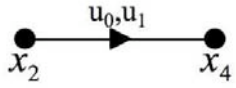


FIG. 2.2: *Représentation des arcs* $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$*-arcs et* $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_1$*-arcs*

L'exemple suivant permet d'illustrer la définition d'un graphe orienté à partir des matrices d'un système bilinéaire structuré Σ_Λ.

Exemple 2.1

Considérons le système $\Sigma_{2.1}$ *défini par le modèle d'état suivant :*

$$\Sigma_{2.1} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \\ \dot{x}_3(t) &= \lambda_1 u_2(t) x_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \big(\lambda_2 + \lambda_3 u_1(t)\big) x_1(t) + \big(\lambda_4 + \lambda_5 u_1(t)\big) x_2(t) + \big(\lambda_6 + \lambda_7 u_1(t)\big) x_3(t) \\ \dot{x}_5(t) &= \lambda_8 x_3(t) + \lambda_9 u_1(t) x_4(t) \\ y(t) &= \lambda_{10} x_5(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

Le système est alors défini par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_9 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; et$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}.$$

Le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{2.1})$ représentant ce système est donné à la figure 2.3.

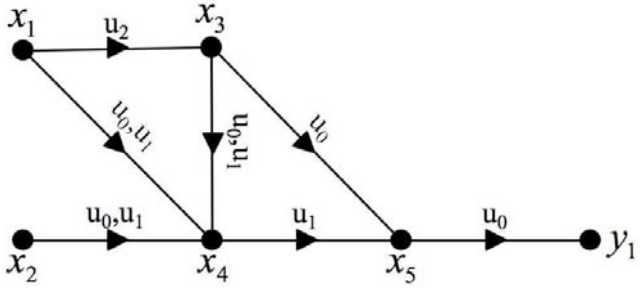


FIG. 2.3: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{2.1})$*

*Par exemple, à l'élément λ_1 présent sur les **3**^{e}ligne et **1**^{e}colonne de $A_{\mathbf{2}}$ (*i.e. $A_{\mathbf{2}}(\mathbf{3},\mathbf{1})$*) est associé un arc indicé par $u_{\mathbf{2}}$ allant de $x_{\mathbf{1}}$ à $x_{\mathbf{3}}$ (voir figure 2.3). Cette opération est réitérée pour chaque paramètre λ_i afin d'obtenir le graphe orienté associé au système. On remarque également que les deux arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs et $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_1$-arcs ne sont représentés que par un seul arc allant du sommet $\mathbf{x_1}$ au sommet $\mathbf{x_4}$ mais annoté par les indices u_0 et u_1. De même pour les deux arcs $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs et $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_1$-arcs, et les arcs $(\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs et $(\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_1$-arcs.*

Après avoir donné la définition du graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ associé à un système bilinéaire structuré, nous donnons à présent celle du graphe biparti associé à ce même système.

2.1.2 Graphe biparti associé à un système bilinéaire structuré

Le graphe biparti non orienté associé au système Σ_Λ est défini par $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda) = (\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-; \mathcal{E}')$ avec $\mathbf{V}^+$ et $\mathbf{V}^-$ deux ensembles distincts de sommets et $\mathcal{E}'$ un ensemble d'arcs. L'ensemble de sommets $\mathbf{V}^+$ représente les sommets de départ des arcs de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ et est donné par $\mathbf{X}^+ = \{\mathbf{x_1^+}, \ldots, \mathbf{x_n^+}\}$. L'ensemble de sommets $\mathbf{V}^-$ distingue les sommets de fin des arcs de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ par leurs ensembles d'appartenance ($\bar{A}_\ell$-arcs) et est donné par $\bigcup_{\ell=0}^{m} \mathbf{X}_\ell^- \cup \mathbf{Y}$, avec $\mathbf{X}_\ell^- = \{\mathbf{x}_{\ell,\mathbf{1}}^-, \ldots, \mathbf{x}_{\ell,\mathbf{n}}^-\}$ et $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_p}\}$. Avec ces notations, un arc $(\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}) \in \bar{A}_\ell$-arcs du graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ devient, dans la représentation par graphe biparti, un arc $(\mathbf{v_i^+}, \mathbf{v}_{\ell,\mathbf{j}}^-)$ si $\mathbf{v_j} \in \mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$: ensemble des sommets d'état) ou un arc $(\mathbf{v_i^+}, \mathbf{v_j})$ si $\mathbf{v_j} \in \mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y}$: ensemble des sommets de sortie). L'ensemble d'arcs $\mathcal{E}'$ est alors donné par $\bigcup_{\ell=0}^{m} \mathcal{E}_{A_\ell} \cup \mathcal{E}_C$ avec $\mathcal{E}_C = \{(\mathbf{x_j^+}, \mathbf{y_i}) | C(i,j) \neq 0\}$ et $\mathcal{E}_{A_\ell} = \{(\mathbf{x_j^+}, \mathbf{x}_{\ell,\mathbf{i}}^-) | A_\ell(i,j) \neq 0\}$. Les indices placés sur les arcs de la représentation par graphe orienté disparaissent sur le graphe biparti de par la formation des sommets $\mathbf{x}_{\ell,\mathbf{i}}$.

Exemple 2.2

Considérons le système $\Sigma_{2.1}$ défini précédemment. Le graphe biparti $\mathcal{B}(\Sigma_{2.1})$ représentant ce système est donné par la figure 2.4.

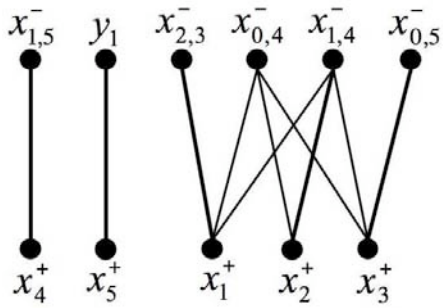


FIG. 2.4: *Graphe biparti $\mathcal{B}(\Sigma_{2.1})$*

Dans cette représentation, par graphe biparti, l'arc $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}) \in \bar{A}_2$-arcs sur le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{2.1})$ devient l'arc $(\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x}_{\mathbf{2},\mathbf{3}}^-)$ sur le graphe biparti $\mathcal{B}(\Sigma_{2.1})$. Un sommet $\mathbf{x_i}$ sur $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ peut ainsi être représenté par au plus $(m+2)$ sommets sur $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$: un sommet $\mathbf{x_i^+}$, et $(m+1)$ sommets $\mathbf{x}_{\ell,\mathbf{i}}^-$. De plus, pour les arcs à indices multiples, un arc $(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j})$ annoté des indices u_{k_ℓ} (avec $\ell = 1, \ldots, a$) devient a arcs $(\mathbf{x_i^+}, \mathbf{x}_{\ell,\mathbf{j}}^-)$. Par exemple, l'arc $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$ annoté u_0, u_1 (voir figure 2.3) devient les arcs $(\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x}_{\mathbf{0},\mathbf{4}}^-)$ et $(\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x}_{\mathbf{1},\mathbf{4}}^-)$.

À partir des deux représentations graphiques d'un système bilinéaire structuré, les notations et définitions nécessaires à l'établissement et à la discussion des résultats présentés dans ce

chapitre sont énoncées.

2.1.3 Notations et définitions générales

Nous distinguons dans cette section trois catégories de définitions : (1) les définitions générales (pour les graphes orientés (systèmes linéaires et bilinéaires) et les graphes bipartis), (2) les définitions spécifiques aux graphes orientés des systèmes bilinéaires, et (3) celles spécifiques aux graphes bipartis.

Définitions générales

• Deux arcs $e_1 = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v'_1})$ et $e_2 = (\mathbf{v_2}, \mathbf{v'_2})$ sont disjoints si leur sommet de début ainsi que leur sommet de fin sont distincts *i.e.* :

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} \neq \mathbf{v_2} \\ \quad \text{et} \\ \mathbf{v'_1} \neq \mathbf{v'_2} \end{cases} \tag{2.3}$$

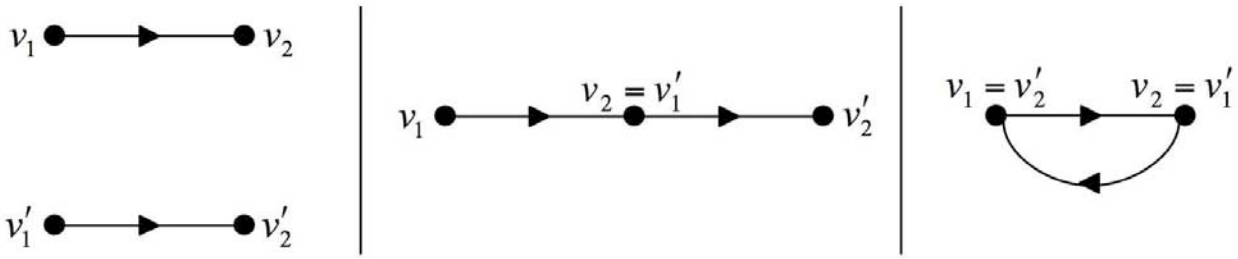


FIG. 2.5: *Possibilités d'arcs disjoints*

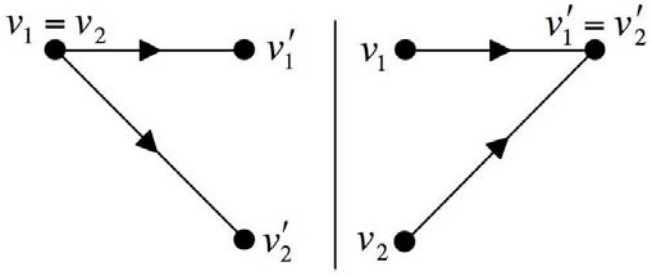


FIG. 2.6: *Possibilités d'arcs non disjoints*

Il est à noter que e_1 et e_2 peuvent être disjoints même si $\mathbf{v_2} = \mathbf{v'_1}$ et $\mathbf{v_1} = \mathbf{v'_2}$ (voir figure 2.5).

Par exemple, à la figure 2.3, les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3})$ et $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$ sont disjoints car ils n'ont pas de sommets communs alors que $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_4})$ et $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$ ne sont pas disjoints car ils ont chacun le sommet $\mathbf{x_4}$ comme sommet de fin. Les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3})$ et $(\mathbf{x_3}, \mathbf{x_5})$ sont disjoints bien qu'ils aient le sommet $\mathbf{x_3}$ en commun.

• k arcs sont disjoints s'ils sont disjoints deux à deux. Autrement dit, k arcs sont disjoints si les k sommets de début (resp. de fin) sont tous distincts.
À la figure 2.3, les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$ et $(\mathbf{x_4}, \mathbf{x_5})$ sont disjoints alors que les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$ et $(\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4})$ ne le sont pas.

• Soient $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ deux ensembles de sommets, $\theta(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est le nombre maximal d'arcs disjoints dont les sommets de début sont dans $\mathbf{V_1}$ et les sommets de fin dans $\mathbf{V_2}$. À la figure 2.3, $\theta(\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}, \{\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{y_1}\}) = 2$ car il y a au plus deux arcs disjoints : les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3})$ et $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$.
Il peut être remarqué, de par la définition des arcs disjoints, qu'un sommet de l'ensemble $\mathbf{V_1}$ (resp. $\mathbf{V_2}$) ne peut être sommet de début (resp. de fin) qu'une seule fois dans la caractérisation d'un ensemble maximal d'arcs disjoints. Ainsi la valeur de $\theta(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est au plus égale au minimum entre $\text{card}(\mathbf{V_1})$ et $\text{card}(\mathbf{V_2})$

$$\theta(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leqslant \min(\text{card}(\mathbf{V_1}), \text{card}(\mathbf{V_2})) \tag{2.4}$$

• Un chemin P est une séquence d'arcs. $P = \mathbf{v_0} \rightarrow \mathbf{v_1} \rightarrow \ldots \rightarrow \mathbf{v_s}$ représente un chemin allant du sommet $\mathbf{v_0}$ au sommet $\mathbf{v_s}$ par la séquence d'arcs $(\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}), \ldots, (\mathbf{v_{s-1}}, \mathbf{v_s})$.

• Un cycle est un chemin de la forme $\mathbf{v_0} \rightarrow \mathbf{v_1} \rightarrow \ldots \rightarrow \mathbf{v_0}$ où, pour $i \neq 0$, chaque sommet $\mathbf{v_i}$ intervient une seule fois dans le chemin *i.e.* un chemin bouclé.

• Un chemin $\mathbf{V_1}$-racine est un chemin qui a comme sommet de départ un élément de l'ensemble $\mathbf{V_1}$.

• Un chemin $\mathbf{V_2}$-cime est un chemin qui a comme sommet de fin un élément de l'ensemble $\mathbf{V_2}$.

• Un chemin, dont le sommet de départ appartient à $\mathbf{V_1}$ et le sommet de fin appartient à $\mathbf{V_2}$, est appelé chemin $\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$. De plus, s'il n'y a que le sommet de départ du chemin P

qui appartienne à $\mathbf{V_1}$ et que le sommet de fin qui appartienne à $\mathbf{V_2}$, alors le chemin P est dit chemin $\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$ direct.

• Des chemins sont disjoints s'ils n'ont aucun sommet commun.

• L'ensemble de ℓ chemins $\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$ disjoints est appelé un lien $\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$ de taille ℓ. Les liens composés d'un nombre maximal de chemins disjoints sont appelés liens $\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$ maximaux. La taille d'un tel lien est notée par $\rho(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ *i.e.* :

$$\rho(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) = \text{nombre maximal de chemins } \mathbf{V_1}\text{-}\mathbf{V_2} \text{ disjoints} \tag{2.5}$$

Comme pour la valeur de $\theta(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$, notons que

$$\rho(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leqslant \min(\text{card}(\mathbf{V_1}), \text{card}(\mathbf{V_2})) \tag{2.6}$$

À la figure 2.3, $\rho(\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}, \{\mathbf{x_3}, \mathbf{x_5}\}) = 2$ car il y a au plus deux chemins disjoints. En effet, les deux chemins $P_1 = \mathbf{x_1} \to \mathbf{x_3}$ et $P_2 = \mathbf{x_2} \to \mathbf{x_4} \to \mathbf{x_5}$ sont disjoints.

• Un sommet $\mathbf{v}$ est dit couvert par un ensemble d'arcs $\mathcal{E}_1$ s'il existe un arc e appartenant à $\mathcal{E}_1$ qui a pour sommet de début $\mathbf{v}$.
À la figure 2.3, les sommets $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_3}$ sont couverts par l'ensemble des arcs $\{(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_4}), (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}), (\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4})\}$.

Définitions spécifiques aux graphes orientés des systèmes bilinéaires

• $P = \mathbf{v_0} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1} \xrightarrow{u_{i_2}} \ldots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v_s}$ représente un chemin P qui passe par les sommets $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}$, et où $(\mathbf{v_{j-1}}, \mathbf{v_j}) \in \bar{A}_{i_j}$-arcs pour $j = 1, \ldots, s$ et $i_j \in [0, 1, \ldots, m]$. À un chemin P est associé son indice, noté $\sigma(P)$, qui donne la concaténation des commandes du chemin, ainsi $\sigma(P) = u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \ldots \cdot u_{i_s}$.

• Deux arcs $e_1 = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v'_1}) \in \bar{A}_{i_1}$-arcs et $e_2 = (\mathbf{v_2}, \mathbf{v'_2}) \in \bar{A}_{i_2}$-arcs sont A-disjoints si :

$$\begin{cases} \mathbf{v_1} \neq \mathbf{v_2} \\ \text{et} \\ \mathbf{v'_1} \neq \mathbf{v'_2} \text{ ou } i_1 \neq i_2 \end{cases} \tag{2.7}$$

Autrement dit, deux arcs sont A-disjoints s'ils ont des sommets de début distincts et si leurs sommets de fin ou leurs indices sont aussi distincts. Ainsi, deux arcs disjoints sont nécessairement A-disjoints. Remarquons que si deux arcs sont de même indice alors ils sont A-disjoints si et seulement s'ils sont disjoints.
À la figure 2.3, les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs et $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs ne sont pas A-disjoints alors que les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs et $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_1$-arcs le sont.

• Un ensemble d'arcs forme un ensemble d'arcs A-disjoints si ces derniers sont A-disjoints deux à deux.

• Soient $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ deux ensembles de sommets, $\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est le nombre maximal d'arcs A-disjoints dont les sommets de début sont dans $\mathbf{V_1}$ et les sommets de fin dans $\mathbf{V_2}$. De par la définition des arcs A-disjoints, il peut être déduit que la valeur de $\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est au plus égale à $\text{card}(\mathbf{V_1})$. En effet, les sommets de début doivent tous être distincts.

$$\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leqslant \text{card}(\mathbf{V_1}) \tag{2.8}$$

À la figure 2.3, $\theta_A(\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}, \{\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}\}) = 3$ car les trois arcs $e_1 = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}) \in \bar{A}_2$-arcs, $e_2 = (\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_1$-arcs et $e_3 = (\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}) \in \bar{A}_0$-arcs sont A-disjoints (e_1 est disjoint de e_2 et e_3, pendant que e_2 et e_3 sont A-disjoints). En revanche, $\theta_A(\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}, \{\mathbf{x_4}\}) = 2$ car il n'y a que deux possibilités d'indice (u_0 et u_1) pour le choix des arcs.

D'autre part, on peut également remarquer que la valeur de $\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ peut être supérieure à $\text{card}(\mathbf{V_2})$. En effet, à partir de la définition des arcs A-disjoints, on peut déduire que la valeur de $\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est au plus égale à $\text{card}(\mathbf{V_2}) \times (m+1)$. En effet, pour chaque sommet appartenant à l'ensemble $\mathbf{V_2}$, il est possible d'utiliser les $m+1$ indices différents pour obtenir des arcs A-disjoints.

$$\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leqslant \text{card}(\mathbf{V_2}) \times (m+1) \tag{2.9}$$

Définitions spécifiques aux graphes bipartis

• Un couplage dans un graphe biparti $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda) = (\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-; \mathcal{E}')$ est un sous-ensemble d'arcs $M \subseteq \mathcal{E}'$ tel que les arcs appartenant à M sont disjoints. Notons $\mathbf{M}^+$ (respectivement $\mathbf{M}^-$) l'ensemble des sommets de début (resp. de fin) des arcs appartenant à M. Ainsi, pour un

arc $(\mathbf{v_i^+}, \mathbf{v_j^-})$ appartenant à M, le sommet $\mathbf{v_i^+}$ appartient à $\mathbf{M}^+$, et le sommet $\mathbf{v_j^-}$ appartient à $\mathbf{M}^-$.

La cardinalité d'un couplage, *i.e.* le nombre d'arcs dont il est constitué, est également appelée sa dimension. Un couplage M est dit maximal si sa dimension est maximale. Soit $\theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-)$ le nombre maximal d'arcs v-disjoints dans $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$.

De par la transformation d'un graphe orienté en graphe biparti, il est possible d'en déduire que les arcs A-disjoints sur le graphe orienté deviennent disjoints sur le graphe biparti. Soient $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ deux ensembles de sommets du graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$, les ensembles $\mathbf{V_1^+}$ et $\mathbf{V_2^-}$ sont définis par $\mathbf{V_1^+} = \{\mathbf{x_i^+} | \mathbf{x_i} \in \mathbf{V_1}\}$, et $\mathbf{V_2^-} = \{\mathbf{x_{\ell,i}^-} | \mathbf{x_i} \in \mathbf{V_2}\}$ pour $\ell = 0, \ldots, m$. $\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est alors égale à $\theta(\mathbf{V_1^+}, \mathbf{V_2^-})$.

À la figure 2.3, $\theta_A(\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}\}, \{\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}\})$ est égal à 3, ce qui est vérifié à la figure 2.4 en observant que $\theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}\}, \{\mathbf{x_{0,3}^-}, \mathbf{x_{1,3}^-}, \mathbf{x_{2,3}^-}, \mathbf{x_{0,4}^-}, \mathbf{x_{1,4}^-}, \mathbf{x_{2,4}^-}\}) = 3$. Il peut être remarqué que les sommets $\mathbf{x_{0,3}^-}$, $\mathbf{x_{1,3}^-}$ et $\mathbf{x_{2,4}^-}$ ne sont connectés par aucun arc. C'est pourquoi dans la représentation par graphe biparti, ces sommets ne sont pas représentés. De plus, pour simplifier l'écriture, on note que $\theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}\}, \{\mathbf{x_{0,3}^-}, \mathbf{x_{1,3}^-}, \mathbf{x_{2,3}^-}, \mathbf{x_{0,4}^-}, \mathbf{x_{1,4}^-}, \mathbf{x_{2,4}^-}\}) = \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}\}, \{\mathbf{x_{2,3}^-}, \mathbf{x_{0,4}^-}, \mathbf{x_{1,4}^-}\}) = 3$.

La section suivante est dédiée à l'expression de conditions graphiques nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'ensemble de l'état du système Σ_Λ.

2.2 Conditions graphiques d'observabilité générique de l'ensemble de l'état

Comme nous l'avons souligné en introduction de ce chapitre, notre étude s'inspire des résultats fournis dans [Murota, 1987] pour les systèmes linéaires. Dans un premier temps, nous les rappelons afin d'aider à la compréhension des deux sous-parties suivantes. La première donne les conditions d'observabilité par graphe orienté alors que celles par graphe biparti sont exposées dans la seconde. L'intérêt de la première représentation est la facilité d'interprétation des conditions (particulièrement pour la condition dite de connectivité aux sorties [Boukhobza and Hamelin, 2007]). L'intérêt de la représentation par graphe biparti est la simplification algorithmique de la condition dite de couplage maximum [Boukhobza and Hamelin, 2007].

La partie suivante est donc dédiée au rappel des résultats connus pour l'observabilité des systèmes linéaires structurés par approche graphique.

2.2.1 Observabilité d'un système linéaire structuré par approche graphique

Soit un système linéaire structuré défini par :

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A_0 et C sont des matrices de dimensions appropriées en fonction des variables du système.

Un graphe orienté dénoté $\mathcal{G}(\Sigma_L)$ peut être associé au système structuré Σ_L de la même manière que pour les systèmes bilinéaires.
Plus précisément, l'ensemble de sommets est défini par $\mathbf{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, où $\mathbf{X} = \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ est l'ensemble des sommets d'état, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_p}\}$ est l'ensemble des sommets de sortie. L'ensemble d'arcs $\mathcal{E} = \bar{A}_0$-arcs $= A_0$-arcs $\cup$ C-arcs, est tel que A_0-arcs $= \{(\mathbf{x_j}, \mathbf{x_i}) | A_0(i,j) \neq 0\}$ et C-arcs $= \{(\mathbf{x_j}, \mathbf{y_i}) | C(i,j) \neq 0\}$. Il peut être remarqué qu'il n'y a pas besoin d'indices sur les arcs dans le cas des systèmes linéaires car il n'existe que l'ensemble des $\bar{A}_0$-arcs.

Le résultat obtenu par Murota [Murota, 1987] sur la propriété d'observabilité d'un système linéaire structuré est interprété par le théorème 2.1.

Théorème 2.1

Un système linéaire structuré Σ_L est observable si et seulement si :

- *tout sommet état est le début d'un chemin état-sortie,*
- *il existe un ensemble $\mathcal{E}_1$ d'arcs disjoints tel que tous les sommets état du graphe sont couverts,* i.e. $\theta(\mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = card(\mathbf{X}) = n$.

Illustrons ce théorème au travers de l'exemple 2.3.

Exemple 2.3

Soit le système linéaire Σ_{L_1} représenté par le graphe orienté donné par la figure 2.7.

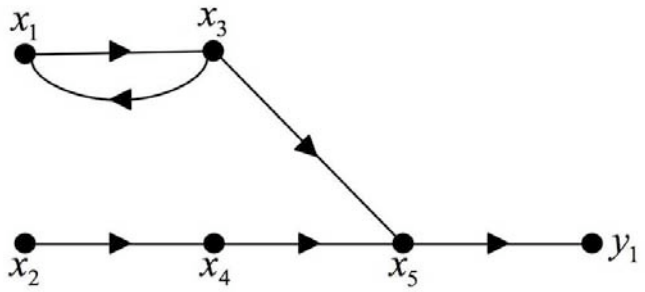


FIG. 2.7: *Graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_{L_1})$

Les arcs $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3})$, $(\mathbf{x_3}, \mathbf{x_1})$, $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$, $(\mathbf{x_4}, \mathbf{x_5})$ *et* $(\mathbf{x_5}, \mathbf{y_1})$ *sont disjoints entre eux. Comme il est possible de trouver cinq arcs disjoints,* $\theta(\mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$ *est alors égal à card*$(\mathbf{X}) = 5$*. Il existe également un chemin* $\mathbf{Y}$*-cime à partir de chaque sommet* $\mathbf{x_i}$ *pour* $i = 1, \ldots, 5$ *:*

$$\begin{cases} P_1 = \mathbf{x_1} \rightarrow \mathbf{x_3} \rightarrow \mathbf{x_5} \rightarrow \mathbf{y_1} \\ P_2 = \mathbf{x_2} \rightarrow \mathbf{x_4} \rightarrow \mathbf{x_5} \rightarrow \mathbf{y_1} \\ P_3 = \mathbf{x_3} \rightarrow \mathbf{x_5} \rightarrow \mathbf{y_1} \\ P_4 = \mathbf{x_4} \rightarrow \mathbf{x_5} \rightarrow \mathbf{y_1} \\ P_5 = \mathbf{x_5} \rightarrow \mathbf{y_1} \end{cases}$$

Nous pouvons en conclure que le système linéaire Σ_{L_1} *est observable.*

En généralisant le théorème 2.1 aux systèmes bilinéaires, la partie suivante donne les résultats concernant l'observabilité d'un système bilinéaire structuré à partir de sa représentation par graphe orienté.

2.2.2 Conditions d'observabilité d'un système bilinéaire structuré par graphe orienté

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité des systèmes bilinéaires structurés sont données par la proposition 2.1 [Boukhobza and Hamelin, 2007].

Proposition 2.1

Le système bilinéaire structuré Σ_Λ *représenté par le graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ *est génériquement observable si et seulement si :*

a. *tout sommet état est le début d'un chemin état-sortie (condition de connectivité aux sorties),*

b. $\theta_A(\mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = n$ *(condition de couplage complet).*

Preuve

Nécessité :

• *S'il existe un chemin P de x_i à y_j avec $\sigma(P) = u_{i_1}.u_{i_2}.\ldots.u_{i_k}.u_0$, cela signifie que $M(j,i) \neq 0$ avec $M = CA_{i_k}\ldots A_{i_2}A_{i_1}$. Si la condition (**a**) n'est pas satisfaite, alors il existe au moins un sommet $\mathbf{x_j}$ qui n'appartient pas à un chemin $\mathbf{Y}$-cime. Par conséquent, la $j^{ème}$ colonne de $CA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}$ est égale à zéro avec $\forall\ k \geq 0$, $\forall\ i_1, i_2, \ldots, i_k$ éléments de $\{0, 1, \ldots, m\}$,. Ainsi, la $j^{ème}$ colonne de la matrice d'observabilité est égale à zéro et la condition de rang de la proposition 2.1 précédente ne peut être satisfaite : le système n'est pas génériquement observable. La condition (**a**) est donc nécessaire.*

• *Il peut être démontré, en utilisant les résultats de [Reinschke, 1988, Murota, 1987, van der Woude, 1991a], que :*
Le nombre maximal d'arcs A-disjoints dans le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ est égal à g-rang$(col(C, A_0, A_1, \ldots, A_m))$. Ce nombre doit donc être égal à n afin d'avoir g-rang$(col(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)) = n$.
Si le système bilinéaire structuré Σ_Λ est génériquement observable, c'est à dire si g-rang$(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)) = n$ alors $Im(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)^T) = \mathbb{R}^n$.
Comme $\forall\ M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $Im(A_i^T M) \subseteq Im(A_i^T)$, il peut être déduit que $Im(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)^T) \subseteq Im(C^T, A_0^T, \ldots, A_m^T) \subseteq \mathbb{R}^n$.
*Sachant que $Im(C^T, A_0^T, A_1^T, \ldots, A_m^T) \neq \mathbb{R}^n$ est équivalent à g-rang$(col(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)) \neq n$ alors si g-rang$(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)) \neq n$ implique que $Im(C^T, A_0^T, A_1^T, \ldots, A_m^T) \neq \mathbb{R}^n$, il est conclu que la condition de rang de la proposition 2.1 précédente ne peut être satisfaite. La condition (**b**) est donc nécessaire.*

Suffisance :

*Supposons que les conditions de la proposition 2.1 soient satisfaites. D'une part, en utilisant le lemme 14.1 de [Reinschke, 1988], et comme les paramètres des matrices $A_0, \ldots, A_m$ sont supposés libres, il peut être établi que la condition (**a**) de la proposition 2.1 implique que, pour presque toutes les valeurs d'entrée $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)^T$, nous avons g-rang$\big(col(C, sI - (A_0 + \bar{u}_1 A_1 + \ldots + \bar{u}_m A_m))\big) = n$, $\forall\ s \neq 0$.*
D'autre part, si le système bilinéaire structuré Σ_Λ est génériquement non observable alors pour toutes les valeurs constantes d'entrée, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)^T$, les systèmes linéaires définis par les matrices $(C, \bar{A})$ sont également non observables, où $\bar{A} = A_0 + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i A_i$. Cela est dû au

fait que pour toute valeur constante d'entrée $\bar{u}$, $Im(\mathcal{O}(C,\bar{A})) \subseteq Im(\mathcal{O}(C,A_0,A_1,\ldots,A_m))$. *Ainsi, si le système* Σ_Λ *est non observable, alors pour chaque matrice* $\bar{A}$, *il existe un vecteur non nul* q *tel que* $\bar{A}q = 0$ *et* $Cq = 0$. *Comme ceci est vrai pour presque toutes les valeurs d'entrée* $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_m)^T$, *alors pour* $n\times(m+1)$ *valeurs d'entrée notées* $\bar{u}^j = (\bar{u}_1^j,\ldots,\bar{u}_m^j)^T$, $j = 1,\ldots,n(m+1)$, *on peut trouver des vecteurs non nuls* q_j *tels que le système suivant soit satisfait :*

$$\begin{cases} Cq_j = 0 \\ A_0 q_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i^j A_i q_j = 0 \end{cases} \quad pour\ j = 1,\ldots,n(m+1) \tag{2.11}$$

Cependant, du fait de la dimension des vecteurs q_j, *il ne peut pas exister plus de* n *vecteurs indépendants* q_j. *On note* $q_1,\ldots,q_n$ *les vecteurs tels que* $Im(q_1,q_2,\ldots,q_{n(m+1)}) \subseteq Im(q_1,q_2,\ldots,q_n)$. *Tous les vecteurs* q_j, *pour* $j = n+1,\ldots,n(m+1)$, *sont des combinaisons linéaires de* $q_1,\ldots,q_n$. *Ainsi, le système précédent contient les équations suivantes :*

$$\begin{cases} Cq_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{i,k}^j(\bar{u}) A_i q_k = 0 \end{cases} \quad pour \begin{array}{c} k = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,n(m+1) \end{array} \tag{2.12}$$

où $a_{i,k}^j(\bar{u})$ *sont des fonctions linéaires de* $\bar{u}^j$, $j = 1,\ldots,n(m+1)$.

Comme le système est satisfait pour presque toutes les valeurs d'entrée, $\bar{u}^j$ *peut être défini génériquement, pour* $j = 1,\ldots,n(m+1)$, *tel que* $det \begin{bmatrix} a_{0,1}^1(\bar{u}) & a_{0,2}^1(\bar{u}) & \ldots & a_{m,n}^1(\bar{u}) \\ a_{0,1}^2(\bar{u}) & a_{0,2}^2(\bar{u}) & \ldots & a_{m,n}^2(\bar{u}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0,1}^{n(m+1)}(\bar{u}) & a_{0,2}^{n(m+1)}(\bar{u}) & \ldots & a_{m,n}^{n(m+1)}(\bar{u}) \end{bmatrix} \neq 0.$

Dans ce cas, le système (2.12) implique

$$\begin{cases} Cq_k = 0 \\ A_0 q_k = A_1 q_k = \ldots = A_m q_k = 0 \end{cases} \quad pour\ k = 1,\ldots,n \tag{2.13}$$

Si le système Σ_Λ *est non observable et si la condition (**a**) est vérifiée, alors au moins un vecteur* q_k, *pour* $k = 1,\ldots,n$, *est non nul. En conséquence, le système bilinéaire structuré* Σ_Λ *est non observable seulement s'il existe au moins un vecteur non nul* q *tel que* $Cq = 0$ *et* $A_0 q = A_1 q = \ldots = A_m q = 0$.

*Cependant si la condition (**b**) (voir proposition 2.1) est satisfaite, alors*

g-rang$(col(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)) = n$, *et donc il n'existe pas de vecteur* $q \neq 0$ *tel que* $Cq = 0$ *et* $A_0q = A_1q = \ldots = A_mq = 0$. *Ainsi, pour presque toutes les réalisations du système bilinéaire structuré* Σ_Λ, *les conditions de la proposition 2.1 sont suffisantes pour assurer l'observabilité.* △

Illustrons la proposition 2.1 au travers de l'exemple 2.4.

Exemple 2.4

Soit le système bilinéaire structuré $\Sigma_{2.1}$ *défini à l'exemple 2.1 page 38 et représenté par la figure 2.8.*

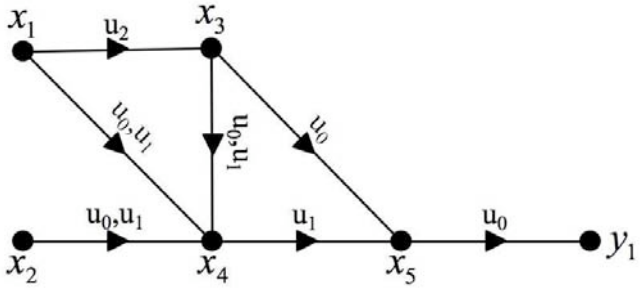


FIG. 2.8: *Graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_{2.1})$

Nous nous intéressons, dans un premier temps, à la condition de couplage complet. Le graphe donné à la figure 2.9 définit un graphe partiel formé d'arcs A-disjoints et couvrant tous les sommets état.

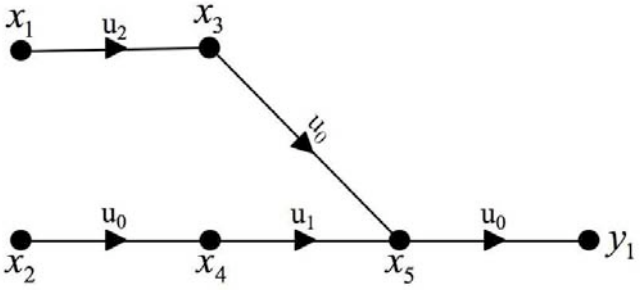


FIG. 2.9: *Graphe orienté partiel* $\mathcal{G}_p(\Sigma_{2.1})$

Comme le montre la figure 2.9, le graphe partiel comporte cinq arcs et $\theta_A(\mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = 5 =$ *card*$(\mathbf{X})$. *Cette particularité du système implique que la condition de couplage est vérifiée.*

Nous nous intéressons maintenant à la condition de connectivité aux sorties. Pour ce système, il existe un chemin $\mathbf{Y}$*-cime partant de chaque sommet état.*

$$\begin{cases} P_1 = \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_2 = \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_3 = \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_4 = \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_5 = \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \end{cases}$$

La condition de connectivité à la sortie est donc également vérifiée.

Les deux conditions de la proposition 2.1 (voir page 46) étant vérifiées, il est possible de conclure que le système $\Sigma_{2.1}$ est génériquement observable.

À partir de ce graphe, il est également aisé de retrouver les équations d'observabilité du système qui sont données par (avec α_i dépendant des paramètres λ_j du système) :

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_1(t) \\ y_1^{(3)}(t) \\ y_1^{(4)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 u_1(t) & 0 \\ \alpha_4 u_2(t) & \alpha_5 u_1(t) & 0 & \alpha_3 \dot{u}_1(t) & 0 \\ \alpha_4 \dot{u}_2(t) & (\alpha_5+\alpha_6)\dot{u}_1(t) & 0 & \alpha_3 \ddot{u}_1(t) & 0 \\ \alpha_4 \ddot{u}_2(t) & (\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7)\ddot{u}_1(t) & 0 & \alpha_3 u_1^{(3)}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix}$$

On remarque l'intervention de termes $u_1^{(i)}(t)$, ce qui ne peut être possible pour des systèmes linéaires.

Partant du constat que la proposition 2.1 étend le résultat obtenu dans le cas des systèmes linéaires à celui des systèmes bilinéaires, il est possible de faire une analogie entre les deux résultats.

La condition (**a**) est la même que le système soit linéaire ou bilinéaire. En effet, cette condition de connectivité aux sorties est nécessaire quelle que soit la nature du système considéré : linéaire ou non linéaire.

Dans le cas des systèmes bilinéaires, la condition (**b**) de couplage est testée sur des arcs A-disjoints alors que dans le cas des systèmes linéaires, cette même condition est testée sur des arcs disjoints. En effet, l'indice étant toujours u_0 dans le cas linéaire, la notion d'arcs A-disjoints devient équivalente à celle d'arcs disjoints. Il en résulte que les conditions

nécessaires et suffisantes d'observabilité d'un système linéaire sont des conditions suffisantes pour un système bilinéaire.

Comme pour les systèmes linéaires, il est possible d'exprimer les conditions (liées aux systèmes bilinéaires) en utilisant une représentation du système par graphe biparti. L'intérêt d'utiliser une telle représentation est de permettre de vérifier la condition de couplage de manière plus rapide grâce à un algorithme bien connu de la théorie des graphes (algorithme de Dulmage-Mendelsohn [Murota, 1987]).

En revanche, même si la condition de connectivité aux sorties peut également être exprimée et vérifiée sur cette seconde représentation, il n'est pas aisé de le faire. En effet, les chemins utilisés dans le graphe orienté n'existent plus sur le graphe biparti (de par la transformation d'un sommet $\mathbf{x_i}$ en plusieurs sommets $\mathbf{x}_{\ell,\mathbf{i}}$). C'est pourquoi nous utilisons le graphe biparti uniquement pour l'expression de la condition de couplage complet.

La partie suivante est dédiée à l'énoncé des conditions d'observabilité nécessaires et suffisantes d'un système bilinéaire structuré sur graphe biparti.

2.2.3 Conditions d'observabilité d'un système bilinéaire structuré sur graphe biparti

Les conditions graphiques caractérisant l'observabilité générique du système Σ_Λ à l'aide de la représentation par graphe biparti sont données par la proposition 2.2.

Proposition 2.2

Le système bilinéaire structuré Σ_Λ est génériquement observable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *tout sommet du graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à la sortie,*

2. *dans le graphe biparti associé $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$, la dimension du couplage maximal est égale à n,* i.e. $\theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-) = n$ *(condition de couplage complet).*

Preuve

Un arc $(\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}) \in \bar{A}_\ell$-arcs d'un graphe orienté devient, dans la représentation par graphe biparti, un arc $(\mathbf{v}_\mathbf{i}^+, \mathbf{v}_{\ell,\mathbf{j}}^-)$ si $\mathbf{v_j} \in \mathbf{X}$ ou un arc $(\mathbf{v}_\mathbf{i}^+, \mathbf{v_j})$ si $\mathbf{v_j} \in \mathbf{Y}$. Selon la définition des arcs A-disjoints que nous proposons, nous pouvons avancer que ces arcs A-disjoints deviennent

disjoints dans le graphe biparti. Ainsi la condition de couplage basée sur un critère d'arcs A-disjoints devient un critère d'arcs disjoints équivalent au cas des systèmes linéaires. △

Remarque 2.1 *Il est possible de remarquer que* $\theta(\mathbf{X}^+, \mathbf{Y} \cup \mathbf{X}^-) = n$ *est équivalent à* $\forall\ V \subseteq \mathbf{X}^+,\ \theta(\mathbf{V}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{X}^-) = card(\mathbf{V})$.

Illustrons la proposition 2.2 au travers de l'exemple 2.5.

Exemple 2.5

Soit le système bilinéaire structuré $\Sigma_{2.1}$ *défini page 38 associé au graphe orienté représenté à la figure 2.3 (cf page 38) et dont la représentation par graphe biparti est illustrée à la figure 2.10.*

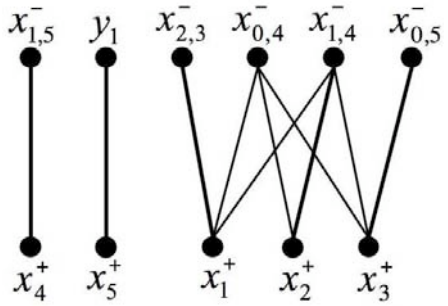


FIG. 2.10: *Graphe biparti* $\mathcal{B}(\Sigma_{2.1})$

Pour ce système, chaque sommet état est le début d'au moins un chemin état-sortie. Ainsi, la condition de connectivité à la sortie est vérifiée (cf exemple 2.4).

En déterminant le couplage de taille maximale, nous obtenons $\theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-) = 5$, *avec pour exemple de couplage maximal* $M_1 = \{(\mathbf{x_4^+}, \mathbf{x^-_{1,5}}), (\mathbf{x_5^+}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x^-_{2,3}}), (\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x^-_{1,4}}), (\mathbf{x_3^+}, \mathbf{x^-_{0,5}})\}$. *Ainsi, le couplage maximal dans le graphe biparti associé à la matrice* $col(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)$ *comporte cinq arcs.*
Comme $\theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-) = 5 = card(\mathbf{X})$, *nous pouvons en déduire que la condition de couplage est vérifiée.*
Comme la condition de connectivité aux sorties est également satisfaite, nous pouvons également en déduire que le système est génériquement observable.

Ainsi, dans cette section, les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'ensemble de l'état d'un système bilinéaire Σ_Λ ont été exprimées. Dans la section suivante, celles concernant l'observabilité d'une partie de l'état sont énoncées.

2.3 Observabilité d'une partie de l'état d'un système bilinéaire structuré

Au système défini par l'équation (2.1) (cf page 36) est associé l'ensemble X_Ω qui regroupe les composantes d'état que nous souhaitons observer. Dans la suite du mémoire, e_{V_x} représente une matrice diagonale de dimension $(n \times n)$ telle que $e_{V_x}(i,i) = 1$ si $x_i \in V_x$, sinon $e_{V_x}(i,i) = 0$ où V_x est un sous-ensemble de X. Ce qui nous permet de proposer le lemme 2.1 suivant.

Lemme 2.1

La composante d'état x_j est observable si et seulement si :

$$g\text{-}rang(\mathcal{O}.e_X) > g\text{-}rang(\mathcal{O}.e_{X\setminus\{x_j\}}) \tag{2.14}$$

Preuve *Si la $j^{ème}$ colonne de la matrice d'observabilité est linéairement indépendante de toutes les autres alors nous pouvons en déduire que la $j^{ème}$ composante x_j de X est observable. En effet, cette indépendance permet de reconstruire la composante d'état x_j à partir des mesures Y du système et de leurs dérivées.*

À partir du lemme précédent, nous en déduisons la condition d'observabilité de l'ensemble X_Ω (cf corollaire 2.1).

Corollaire 2.1

L'ensemble X_Ω est observable si et seulement si :

$$\forall\ x_i \in X_\Omega,\ g\text{-}rang(\mathcal{O}.e_X) > g\text{-}rang(\mathcal{O}.e_{X\setminus\{x_i\}}) \tag{2.15}$$

L'objectif de cette section est donc de donner la condition graphique nécessaire et suffisante d'observabilité de X_Ω équivalente au corollaire 2.1. Pour cela, il est nécessaire de donner dans un premier temps des définitions supplémentaires à celles énoncées dans les parties précédentes.

2.3.1 Définitions pour l'observabilité partielle

Pour illustrer les définitions suivantes, nous utilisons le système décrit dans l'exemple 2.1 dont le graphe orienté est donné pour rappel à la figure 2.11.

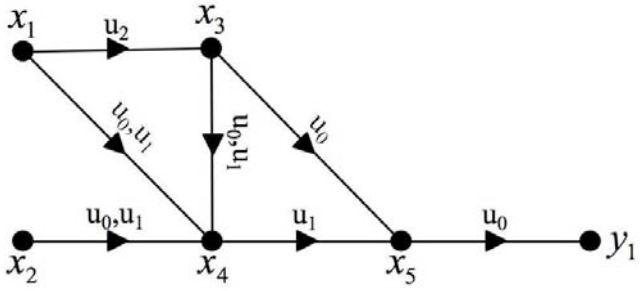


FIG. 2.11: *Graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_{2.1})$

• Deux chemins $P_1 = \mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \ldots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}$ et $P_2 = \mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v_1^2} \xrightarrow{u_{j_2}} \ldots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2}^2}$ sont v-disjoints si et seulement si :

C1 : $\mathbf{v_0^1} \neq \mathbf{v_0^2}$ et

C2 : $\forall\ \ell_1 = 1, 2, \ldots, k_1, \forall\ \ell_2 = 1, 2, \ldots, k_2$, si $\mathbf{v_{\ell_1}^1} = \mathbf{v_{\ell_2}^2}$ alors $\mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \ldots \xrightarrow{u_{i_{\ell_1}}} \mathbf{v_{\ell_1}^1}$ et $\mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \ldots \xrightarrow{u_{j_{\ell_2}}} \mathbf{v_{\ell_2}^2}$ doivent être de longueur différente ($\ell_1 \neq \ell_2$).

Ainsi, deux chemins sont v-disjoints si

– ils sont disjoints ou
– si ils ne sont pas disjoints alors tous les "sous-chemins" $\mathbf{v_0^1}$-$\mathbf{v_c}$ et $\mathbf{v_0^2}$-$\mathbf{v_c}$ (avec $\mathbf{v_c}$ un sommet commun à P_1 et P_2) sont de longueur différente.

Sur la figure 2.11, les deux chemins $P_1 = \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$ et $P_2 = \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$ ne sont pas v-disjoints contrairement aux deux chemins P_1 et $P_3 = \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$.

• k chemins sont v-disjoints s'ils sont mutuellement v-disjoints.

• $\rho_v(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ donne le nombre maximal de chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ v-disjoints. Il est possible de remarquer, de par la définition des chemins v-disjoints (sommets de début distincts), que $\rho_v(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est au plus égal au nombre de sommets de l'ensemble $\mathbf{V_1}$

$$\rho_v(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leq \text{card}(\mathbf{V_1}) \tag{2.16}$$

En revanche, il peut être supérieur à $\text{card}(\mathbf{V_2})$ (contrairement aux chemins disjoints).

À partir des définitions précédentes, il peut être démontré que le théorème 2.1 (cf page 45) est équivalent au corollaire 2.2.

Corollaire 2.2

Un système linéaire structuré Σ_L est observable si et seulement si $\rho_v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = n$.

La définition de chemins v-disjoints, pour les systèmes linéaires, signifie que la reconstruction des variables correspondant aux sommets de début est possible à partir des mesures du système. Pour les systèmes bilinéaires, il nous faut définir des chemins dits A-disjoints.

• Deux chemins $P_1 = \mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}$ et $P_2 = \mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v_1^2} \xrightarrow{u_{j_2}} \dots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2}^2}$ sont A-disjoints si et seulement si :

C1 : $\mathbf{v_0^1} \neq \mathbf{v_0^2}$ et

C2 : $\forall \quad k = 1, 2, \dots, \min(k_1, k_2)$, si $\mathbf{v_k^1} = \mathbf{v_k^2}$ alors $\mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \dots \xrightarrow{u_{i_k}} \mathbf{v_k^1}$ et $\mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \dots \xrightarrow{u_{j_k}} \mathbf{v_k^2}$ doivent avoir des indices différents (il existe au moins ℓ tel que $u_{i_\ell} \neq u_{j_\ell}$).

Il peut être remarqué que les chemins disjoints et v-disjoints sont nécessairement A-disjoints. Sur la figure 2.11, les deux chemins $P_1 = \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$ et $P_2 = \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$ ne sont pas A-disjoints contrairement aux deux chemins P_1 et $P_3 = \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$. Les chemins P_2 et P_3 sont différents car l'arc $(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4})$ appartient à l'ensemble des A_0-arcs pour P_2 et à l'ensemble des A_1-arcs pour P_3.

• k chemins sont A-disjoints s'ils sont mutuellement A-disjoints.

• Un ensemble de ℓ chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ A-disjoints est appelé un A-lien $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ de dimension ℓ. Un A-lien composé des chemins $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_\ell}$ est noté $\mathfrak{m} = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_\ell}\}$. Un A-lien $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ est maximal lorsque ℓ est maximal.

• $\rho_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ donne le nombre maximal de chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ A-disjoints. Il donne la dimension d'un A-lien $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ maximal. Il est possible de remarquer, de par la définition des chemins A-disjoints (sommets de début distincts), que $\rho_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ est au plus égal au nombre de sommets de l'ensemble $\mathbf{V_1}$.

$$\rho_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leq \text{card}(\mathbf{V_1}) \tag{2.17}$$

De plus, des chemins disjoints sont nécessairement A-disjoints. La relation suivante est alors vérifiée.

$$\rho(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leq \rho_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2}) \leq \text{card}(\mathbf{V_1}) \tag{2.18}$$

En revanche, le nombre maximal de chemins A-disjoints peut être supérieur à card($\mathbf{V_2}$) (comme les chemins v-disjoints mais contrairement aux chemins disjoints).

Sur la figure 2.11, $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{X}) = 5$. En effet, les cinq chemins suivants sont A-disjoints :

$$\begin{cases} P_1 & = & \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_2 & = & \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_3 & = & \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_4 & = & \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_5 & = & \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \end{cases}$$

2.3.2 Condition graphique d'observabilité partielle d'un système bilinéaire structuré

Le but de cette partie est de donner la condition graphique d'observabilité d'une composante d'état équivalente au lemme 2.1 (page 53). Notons tout d'abord que l'existence d'un chemin est clairement liée aux éléments de la matrice d'observabilité. En effet, s'il existe un chemin P de x_i à y_j avec $\sigma(P) = u_{i_1}.u_{i_2}.\ldots.u_{i_k}.u_0$, cela signifie que $M(j,i) \neq 0$ avec $M = CA_{i_k} \ldots A_{i_2} A_{i_1}$. La proposition 2.3 établit la relation existant entre $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et g-rang($\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_X$).

Proposition 2.3

Soit Σ_Λ le système bilinéaire structuré défini par l'équation (2.1) page 36 et $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ le graphe orienté associé, la relation suivante est vérifiée :

$$\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \textit{g-rang}(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_X) \tag{2.19}$$

Preuve

1. *Soit la matrice $\tilde{C} = col(C, CA_1, CA_2, \ldots, CA_m, CA_1^2, \ldots, CA_m^{n-1})$ qui contient toutes les "sous-matrices" de la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m)$ sauf les "sous-matrices" se terminant par un terme A_0^i. Ainsi, toute matrice de la forme $M = C \ldots A_0^i$ avec $i = 1, \ldots, n-1$ n'apparaît pas dans la matrice $\tilde{C}$.*

Il est clair que le rang de la matrice $\mathcal{O}(C, A_0, \ldots, A_m)$ est égal au rang de la matrice

$\mathcal{O}(\tilde{C}, A_0)$. *Or, calculer le rang de la matrice* $\mathcal{O}(\tilde{C}, A_0)$ *s'apparente à considérer un système linéaire dont les sorties seraient données par* $\tilde{y}(t) = \tilde{C}x(t)$ *et d'après le résultat connu pour cette classe de systèmes, on sait alors que g-rang*$(\mathcal{O}(\tilde{C}, A_0)) = \rho_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}})$. *Le nombre maximal de chemins* $\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{Y}}$ *v-disjoints nous donne le rang de la matrice d'observabilité du système* Σ_Λ. *Nous allons donc chercher à prouver que* $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \rho_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}})$.

2. *De par la définition des chemins A-disjoints, on distingue des chemins s'ils sont v-disjoints ou s'ils ont des indices distincts (chemins de même longueur et ayant un sommet commun). Intéressons nous aux chemins A-disjoints ni v-disjoints ni disjoints. Ces chemins sont A-disjoints s'il existe des sorties* $\tilde{y}_j$ *telles que les chemins formés à partir des sommets de départ jusqu'à ces sorties sont v-disjoints (ils sont même disjoints). La distinction d'indices se reflète par une connexion à des sorties* $\tilde{y}_j$ *distinctes. En considérant l'ensemble des chemins A-disjoints, il est alors possible de montrer, en utilisant l'ensemble des sorties* $\tilde{\mathbf{Y}}$, *que* $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \rho_v(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}})$. △

La valeur de $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ donne la dimension du sous espace vectoriel d'observabilité dans l'espace d'état.

Remarque 2.2

À partir de la proposition 2.3 (cf page 56), il est intéressant de remarquer que :
si $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = n$, *alors toutes les composantes d'état sont observables et donc* $\forall\ X_\Omega \subseteq X$, X_Ω *est nécessairement observable.*

Cette condition est une condition nécessaire et suffisante d'observabilité de l'ensemble de l'état d'un système bilinéaire structuré mais, d'un point de vue calculatoire, elle est plus contraignante que les conditions présentées dans la section précédente. Nous démontrons cette limitation au travers de l'exemple 2.6.

Exemple 2.6

Soit le système bilinéaire structuré représenté par le graphe orienté 2.11 (cf page 54). Il existe cinq chemins A-disjoints :

$$\begin{cases} P_1 = \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_2 = \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_3 = \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_4 = \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_5 = \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \end{cases} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} \sigma(P_1) = u_2 \cdot u_0 \cdot u_0 \\ \sigma(P_2) = u_1 \cdot u_1 \cdot u_0 \\ \sigma(P_3) = u_0 \cdot u_0 \\ \sigma(P_4) = u_1 \cdot u_0 \\ \sigma(P_5) = u_0 \end{cases}$$

Pour ce système $\rho_A(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = card(\mathbf{X}) = 5$ *et il est ainsi possible de conclure que le système est observable (cf exemple 2.4). En utilisant le résultat de la proposition 2.3 (cf page 56), il est nécessaire de trouver cinq chemins A-disjoints alors qu'en appliquant la condition de la proposition 2.2 (cf page 51), il suffit de trouver cinq arcs disjoints.*

De la proposition 2.3 (cf page 56), nous pouvons déterminer une condition graphique d'observabilité partielle. En effet, sachant que $\rho_A(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \text{g-rang}(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_{V_X})$ et $\rho_A(\mathbf{X}/\{\mathbf{x_i}\},\mathbf{Y}) = \text{g-rang}(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_{X\setminus\{x_i\}})$, la condition d'observabilité d'une composante d'état est donnée par la proposition 2.4.

Proposition 2.4

Soit Σ_Λ *le système bilinéaire structuré défini par l'équation (2.1) (cf page 36) et* $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ *le graphe orienté associé, la composante d'état* x_i *est observable si et seulement si :*

$$\rho_A(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \rho_A(\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{x_i}\},\mathbf{Y}) + 1 \tag{2.20}$$

Preuve

À partir de la proposition 2.3 (cf page 56) et sachant que $\rho_A(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = g\text{-}rang(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_X)$ *et* $\rho_A(\mathbf{X}/\{\mathbf{x_i}\},\mathbf{Y}) = g\text{-}rang(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_{X\setminus\{x_i\}})$, $\rho_A(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \rho_A(\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{x_i}\},\mathbf{Y}) + 1$ *est équivalent à* $g\text{-}rang(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_X) = g\text{-}rang(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m).e_{X\setminus\{\mathbf{x_i}\}}) + 1$ *qui est l'expression de la condition d'observabilité d'une composante* x_i *de l'état donnée par le lemme 2.1 (cf page 53).* △

Cette proposition nous donne une première méthode pour vérifier l'observabilité d'une composante x_i. Il faut, dans un premier temps, exprimer tous les A-liens $\mathbf{X}$-$\mathbf{Y}$ maximaux. Si pour tous ces A-liens, il existe un chemin x_i-racine alors x_i est observable. En effet, cette condition signifie que les A-liens $\mathbf{X}\setminus\{\mathbf{x_i}\}$-racine maximaux sont de dimension inférieure aux A-liens $\mathbf{X}$-racine maximaux.

Il est également possible d'utiliser le corollaire 2.3 afin de caractériser l'observabilité d'une composante de l'état.

Corollaire 2.3

Soient Σ_Λ *le système bilinéaire structuré défini par l'équation (2.1) (cf page 36),* $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ *le*

graphe orienté associé et un capteur virtuel $y_s = \lambda_{k_i} x_i$. La composante d'état x_i est observable si et seulement si :

$$\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_s}\}) \tag{2.21}$$

Preuve

y_s est un capteur virtuel placé en x_i. Dans cette configuration, la composante d'état x_i est observable. À partir de la proposition 2.3 (cf page 56), $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_s}\})$ signifie que g-rang$(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \ldots, A_m))$ est constant même si un capteur est placé en x_i, ce qui rend x_i nécessairement observable. △

La méthode à suivre pour vérifier l'observabilité de x_i consiste donc, pour ce corollaire, à calculer $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ puis à rajouter un capteur en x_i et à déterminer $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_s}\})$. En fonction de l'évolution de la dimension des A-liens maximaux, nous pouvons conclure sur l'observabilité ou non de x_i.

La condition d'observabilité d'une composante d'état étant donnée, il faut à présent l'exprimer pour l'ensemble des composantes X_Ω. Pour cela, soit X_{obs} l'ensemble des composantes d'état observables obtenu par $X_{\text{obs}} = \{x_i | \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \rho_A(\mathbf{X} \backslash \{\mathbf{x_i}\}, \mathbf{Y}) + 1\}$ ou par $X_{\text{obs}} = \{x_i | \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_s}\})\}$ où $\mathbf{y_s} = \mathbf{x_i}$. Le corollaire 2.4 donne la condition d'observabilité de l'ensemble X_Ω.

Corollaire 2.4

Soient Σ_Λ le système bilinéaire structuré défini par l'équation (2.1) (cf page 36) et $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ le graphe orienté associé, l'ensemble des composantes d'état X_Ω est observable si et seulement si :

$$X_\Omega \subseteq X_{obs} \tag{2.22}$$

L'exemple suivant permet d'illustrer les propositions et corollaires précédemment énoncés.

Exemple 2.7

Considérons le système $\Sigma_{2.7}$ représenté par le graphe orienté 2.12 et l'ensemble des composantes d'état à observer $X_\Omega = \{x_6, x_8, x_9\}$.

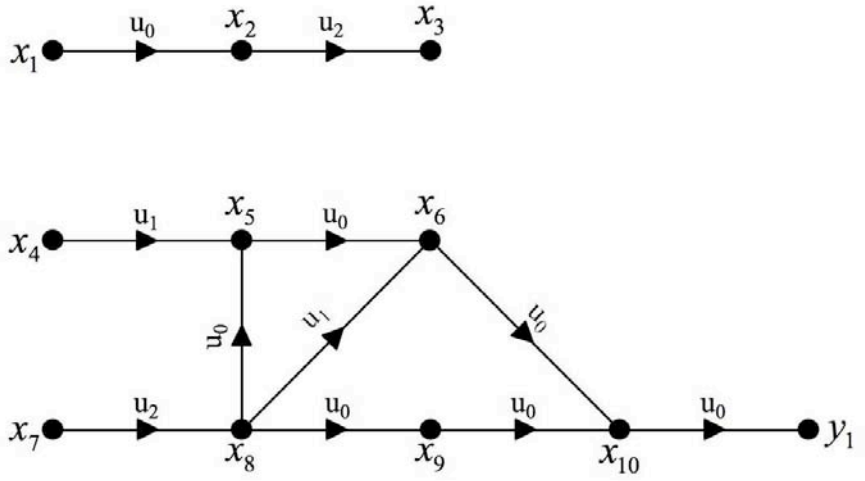


FIG. 2.12: *Graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_{2.7})$

Dans un premier temps, il faut calculer $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *et déterminer l'ensemble des A-liens* $\mathbf{X}$-$\mathbf{Y}$ *maximaux. La dimension maximale des A-liens* $\mathbf{X}$-$\mathbf{Y}$ *est* $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 6$*, et l'ensemble de ces A-liens est caractérisé par les chemins suivants.*

- $P_1 = \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_2 = \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_3 = \mathbf{x_7} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_8} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_4 = \mathbf{x_8} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_5 = \mathbf{x_7} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_8} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_6 = \mathbf{x_8} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_7 = \mathbf{x_6} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_8 = \mathbf{x_9} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$
- $P_9 = \mathbf{x_{10}} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$

Les A-liens $\mathbf{X}$-$\mathbf{Y}$ *maximaux sont donnés par :*

- $\mathfrak{m}_1 = \{P_1, P_2, P_9, P_3, P_4, P_7\}$
- $\mathfrak{m}_2 = \{P_1, P_2, P_9, P_3, P_4, P_8\}$
- $\mathfrak{m}_3 = \{P_1, P_2, P_9, P_3, P_6, P_7\}$
- $\mathfrak{m}_4 = \{P_1, P_2, P_9, P_3, P_6, P_8\}$
- $\mathfrak{m}_5 = \{P_1, P_2, P_9, P_5, P_4, P_7\}$
- $\mathfrak{m}_6 = \{P_1, P_2, P_9, P_5, P_4, P_8\}$
- $\mathfrak{m}_7 = \{P_1, P_2, P_9, P_5, P_6, P_7\}$
- $\mathfrak{m}_8 = \{P_1, P_2, P_9, P_5, P_6, P_8\}$.

À partir de la proposition 2.3 (cf page 56), nous pouvons en déduire que le rang de la matrice d'observabilité est égal à six mais cela ne signifie pas que six composantes d'état sont observables. En effet, à partir de la proposition 2.4 (cf page 58), nous pouvons conclure que les composantes d'état observables sont $X_{obs} = \{x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}\}$ *car leurs sommets associés appartiennent aux sommets de début de tous les A-liens maximaux. Il peut ainsi être remarqué que la dimension de* X_{obs} *(égale à 5) est inférieure à la dimension de la matrice d'observabilité. En effet, la dimension du sous espace vectoriel observable n'est pas équivalente au nombre de composantes d'état effectivement observable. Une combinaison linéaire de composantes d'état peut être observable sans que ces composantes le soient elles-même.*

L'ensemble X_Ω *n'est pas inclus dans l'ensemble* X_{obs} *et n'est donc pas observable. Les composantes d'état non observables de* X_Ω *sont* $\bar{X}_\Omega = X_\Omega \backslash (X_\Omega \cap X_{obs}) = \{x_1, x_3, x_6, x_9\}$.

Les conditions graphiques d'observabilité d'une partie ou de l'ensemble de l'état d'un système bilinéaire étant données, nous allons maintenant nous intéresser à la problématique du placement de capteurs. Cette étude est intéressante à mener lorsque le système étudié n'est pas observable et que nous cherchons à rajouter des capteurs afin de rendre observable ce système. Elle l'est également en phase de conception si aucun capteur n'est présent dans le système initial. En effet, il est alors intéressant de caractériser à quels emplacements doivent se trouver les capteurs afin de rendre observable le système. Dans la section 2.4, nous nous intéressons donc à la problématique du placement de capteurs afin de recouvrer la condition d'observabilité de l'ensemble de l'état, l'observabilité partielle étant traitée dans la section 2.5.

2.4 Recouvrement de l'observabilité de l'ensemble de l'état par placement de capteurs

Au système Σ_Λ est ajouté un nouveau vecteur de sortie $z \in \mathbb{R}^q$ correspondant aux mesures à caractériser afin de recouvrer les conditions d'observabilité :

$$z(t) = Hx(t), \tag{2.23}$$

où z_i est la mesure obtenue à partir du $i^{\text{ème}}$ capteur. Nous partons de l'hypothèse qu'un seul capteur z_i peut mesurer une combinaison de plusieurs variables d'état *via* la $i^{\text{ème}}$ ligne de la

matrice H.

Conformément à cette définition, un système composite Σ_Λ^c est défini tel que :

$$\Sigma_\Lambda^c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell(t) A_\ell x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Hx(t) \end{cases} \tag{2.24}$$

À ce système composite, un graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda^c)$ et un graphe biparti $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda^c)$ pourraient être associés, de la même manière que pour le système Σ_Λ. Les capteurs ajoutés seraient alors représentés par l'ensemble de sommets $\mathbf{Z}$, et l'ensemble des arcs H-arcs représenterait les liens entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z}$. La localisation des capteurs z se fait uniquement grâce à l'utilisation des graphes $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ et $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$, c'est pourquoi la représentation des graphes $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda^c)$ et $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda^c)$ n'est pas nécessaire dans la suite.

Le but est de déterminer z tel que Σ_Λ^c soit observable sous contrainte d'un nombre minimal de capteurs rajoutés. La méthode de placement de capteurs se fonde sur la proposition 2.2 (cf page 51) obtenue à l'aide du graphe biparti qui requiert un temps de calcul moindre que la proposition 2.1 (cf page 46) utilisant le graphe orienté. Dans la première partie de cette section, nous souhaitons recouvrer la condition de couplage complet alors que la condition de connectivité aux sorties est traitée dans la deuxième partie. Enfin, la dernière partie permet d'obtenir le nombre minimal global de capteurs permettant de recouvrer les deux conditions d'observabilité. Comme nous allons traiter le recouvrement des conditions séparément, nous divisons l'ensemble des capteurs $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z_1}$ et $\mathbf{Z_2}$. Le sous-ensemble $\mathbf{Z_i}$ correspond aux capteurs ajoutés à l'étape i de notre procédure de placement de capteurs.

2.4.1 Recouvrement de la condition de couplage complet

Afin de recouvrer la condition de couplage complet, il est nécessaire d'introduire la notation complémentaire suivante afin de caractériser précisément l'emplacement des nouveaux capteurs.

• Soit $\mathbf{S}^+ = \mathbf{V}^+ \backslash \mathbf{M}^+$ et $\mathbf{S}^- = \mathbf{V}^- \backslash \mathbf{M}^-$.

Rappelons que $\mathbf{M}^+$ (respectivement $\mathbf{M}^-$) représente l'ensemble des sommets appartenant à $\mathbf{V}^+$ (respectivement $\mathbf{V}^-$) couverts par les arcs du couplage M. Ainsi, $\mathbf{S}^+$ (respectivement

$\mathbf{S}^-$) contient tous les sommets appartenant à $\mathbf{V}^+$ (respectivement $\mathbf{V}^-$) qui ne sont pas couverts par l'ensemble d'arcs M.

À partir de cette définition, nous pouvons conclure que si la condition **2.** de la proposition 2.2 (cf page 51) n'est pas satisfaite, alors l'ensemble $\mathbf{S}^+$ est non vide. En effet, la non validation de la condition implique que la dimension du couplage maximal est inférieure à n. Comme l'ensemble $\mathbf{V}^+$ est de cardinal n, nous en déduisons que $\mathbf{S}^+$ est non vide. Il nous faut alors ajouter des capteurs afin de recouvrer cette condition pour le système Σ^c_Λ. Nous pouvons remarquer que placer un unique capteur (*i.e.* ajouter un unique sommet à la représentation graphique) a pour effet d'augmenter la dimension du couplage maximal d'au plus une unité. En effet, les arcs du couplage doivent être disjoints, ce qui implique des sommets de début et de fin distincts. Sachant que la dimension du couplage maximal est égale à $\theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-)$, et en se basant sur la notion d'arcs disjoints, le lemme 2.2 (cf page 63) permet de caractériser le nombre de capteurs de $\mathbf{Z_1}$ nécessaires à la vérification de la seconde condition d'observabilité (condition **2.** de la proposition 2.2, cf page 51).

Lemme 2.2
d_m capteurs doivent être placés sur le système afin de pouvoir recouvrer la seconde condition d'observabilité. d_m sera appelé la lacune de couplage complet et s'exprime de la manière suivante : $d_m = n - \theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-)$.

Une fois connu le nombre de capteurs nécessaires au recouvrement de la condition, il nous faut caractériser l'emplacement de ces capteurs. Pour cela, il est important de spécifier tous les sommets n'étant pas couverts par au moins un couplage maximal *i.e.* les sommets n'appartenant pas à tout couplage maximal. En ce sens, il faut déterminer tous les ensembles $\mathbf{S}^+$ en considérant n'importe quel couplage maximal. En effet, en fonction du couplage maximal considéré, certains sommets peuvent ou non être couverts par le couplage. Ainsi, afin d'obtenir les sommets appartenant à au moins un ensemble $\mathbf{S}^+$, nous utilisons une décomposition inspirée de celle proposée par Dulmage-Mendelsohn [Murota, 1987] (aussi appelée DM-décomposition) qui est utilisée dans le cas de graphes bipartis orientés.

La DM-décomposition permet la décomposition d'un graphe biparti orienté en sous-graphes bipartis orientés incompressibles et uniques appelés les DM-composants [Murota, 1987]. Comme nous travaillons avec des graphes bipartis non orientés, nous utiliserons une décomposition équivalente à celle de Dulmage-Mendelsohn mais adaptée aux graphes non orientés.

Pour cela, nous utilisons la notation suivante $\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathbf{w}$ pour représenter un chemin **v**-**w** dans $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$. Ce chemin est tel qu'à partir d'un sommet appartenant à l'ensemble $\mathbf{V}^-$, seul un arc appartenant au couplage maximal considéré peut être utilisé. Cela signifie que n'importe quel arc $(\mathbf{v_i^+}, \mathbf{v_j^-})$ peut être compris dans un chemin **v**-**w** alors que seuls les arcs $(\mathbf{v_j^-}, \mathbf{v_i^+})$ appartenant à M peuvent appartenir au chemin **v**-**w**. L'algorithme 2.1 exprime la décomposition que nous proposons.

Algorithme 2.1

1. *Trouver un couplage maximal* M *dans* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda) = (\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-; \mathcal{E}')$.

2. *Soit* $\mathbf{V_0} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^+ \cup \mathbf{V}^- | \mathbf{w} \rightsquigarrow \mathbf{v}$ *dans* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$ *avec* $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^+\}$. *Les ensembles* $\mathbf{V_0^+}$ *et* $\mathbf{V_0^-}$ *sont définis par* $\mathbf{V_0^+} = \{\mathbf{V}^+ \cap \mathbf{V_0}\}$ *et* $\mathbf{V_0^-} = \{\mathbf{V}^- \cap \mathbf{V_0}\}$.

3. *Soit* $\mathbf{V}_\infty = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^+ \cup \mathbf{V}^- | \mathbf{v} \rightsquigarrow \mathbf{w}$ *dans* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$ *avec* $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^-\}$. *Les ensembles* $\mathbf{V_\infty^+}$ *et* $\mathbf{V_\infty^-}$ *sont définis par* $\mathbf{V_\infty^+} = \{\mathbf{V}^+ \cap \mathbf{V}_\infty\}$ *et* $\mathbf{V_\infty^-} = \{\mathbf{V}^- \cap \mathbf{V}_\infty\}$.

Il peut être remarqué que $\mathbf{S}^+$ est nécessairement inclus dans $\mathbf{V_0^+}$ et que la décomposition caractérise tous les couplages maximaux. $\mathbf{V_0^+}$ et $\mathbf{V_0^-}$ sont déterminés en considérant un couplage maximal M mais ils sont identiques en considérant n'importe quel couplage maximal de $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$. Tous les sommets de $\mathbf{V_0^-}$ sont des sommets de fin de tout couplage maximal. Il peut aussi être montré que $\text{card}(\mathbf{V_0^+}) - \text{card}(\mathbf{V_0^-}) = d_m$.

Illustrons la décomposition au travers de l'exemple 2.8.

Exemple 2.8

Soit le système $\Sigma_{2.8}$ *représenté par le graphe biparti donné à la figure 2.13.*

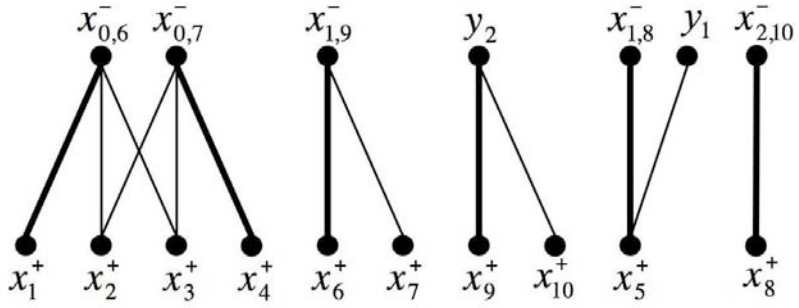


FIG. 2.13: *Graphe biparti* $\mathcal{B}(\Sigma_{2.8})$

Soit le couplage maximal suivant (en gras sur la figure)

$$\mathbf{M} = \{(\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_{0,6}^-}), (\mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_{0,7}^-}), (\mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_{1,9}^-}), (\mathbf{x_9^+}, \mathbf{y_2}), (\mathbf{x_5^+}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_8^+}, \mathbf{x_{2,10}^-})\} \tag{2.25}$$

Ainsi $\mathbf{S}^+$*, qui est le sous-ensemble de sommets de* $\mathbf{V}^+$ *non couverts par* M*, est défini par l'ensemble* $\{\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}$*. Pour chaque sommet* $\mathbf{w}$ *de* $\mathbf{S}^+$*, nous déterminons les sommets atteignables par un chemin à partir de* $\mathbf{w}$ *afin de définir l'ensemble de sommets* $\mathbf{V_0} = \mathbf{V_0^+} \cup \mathbf{V_0^-}$*. Le chemin* $P_1 = \mathbf{x_2^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,6}^-} \rightarrow \mathbf{x_1^+}$ *est un chemin* $\mathbf{w} \rightsquigarrow \mathbf{v}$ *alors que le chemin* $P_2 = \mathbf{x_2^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,6}^-} \rightarrow \mathbf{x_3^+}$ *ne l'est pas car l'arc* $(\mathbf{x_{0,6}^-}, \mathbf{x_3^+})$ *n'appartient pas au couplage* M*. Pour l'exemple considéré, nous obtenons* $\mathbf{V_0^+} = \{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}$ *et* $\mathbf{V_0^-} = \{\mathbf{x_{0,6}^-}, \mathbf{x_{0,7}^-}, \mathbf{x_{1,9}^-}, \mathbf{y_2}\}$*. Il est alors possible de vérifier que* $card(\mathbf{V_0^+}) - card(\mathbf{V_0^-}) = 8 - 4 = 4 = n - \theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^-) = 10 - 6 = 4$*.*
L'ensemble $\mathbf{V}_\infty$ *est donné par* $\mathbf{V}_\infty = \{\mathbf{x_5^+}, \mathbf{y_1}, \mathbf{x_{1,8}^-}\}$*.*
Ainsi l'ensemble $\mathbf{V_0}$ *indique où se trouvent les "lacunes" à combler pour obtenir un couplage de dimension égale à* n*. En revanche,* V_∞ *indique les "excédents"* i.e. *les capteurs non essentiels.*

Une fois le nombre de capteurs déterminé ainsi que les manques du système caractérisés (pour que celui-ci soit observable), l'utilisation de la proposition 2.5 permet de localiser les capteurs à ajouter afin que la condition de couplage complet soit vérifiée par le système Σ_Λ^c.

Proposition 2.5

Soit le système bilinéaire structuré Σ_Λ *défini par l'équation (2.1) (cf page 36) et son graphe biparti associé* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$*. Soit* $\mathbf{V_0}$ *l'ensemble des sommets caractérisant les lacunes de couplage, déterminé à partir de la décomposition 2.1 (cf page 64) de* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$*.*
Le nombre minimal de capteurs à ajouter, permettant au système Σ_Λ^c *de vérifier la condition de couplage complet, est égal à la lacune de couplage complet,* i.e. d_m*. De plus, les capteurs ajoutés doivent mesurer au moins* d_m *composantes d'état de* $\mathbf{V_0^+}$ *afin d'obtenir la condition* $\theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{V_0^-} \cup \mathbf{Z_1}) = card(\mathbf{V_0^+})$*.*

Preuve

Suffisance : Si nous rajoutons d_m *arcs entre* $\mathbf{V_0^+}$ *et les capteurs ajoutés à un couplage maximal* M *de* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$ *afin d'obtenir un couplage de dimension égale à* n*, alors le rang de* $col(A_0, \ldots, A_m, col(C, H))$ *est égal à* n*. Ainsi, le système* Σ_Λ^c *satisfait la condition de couplage complet* $\theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{V}^- \cup \mathbf{Z_1}) = n$*.*
Nécessité : Le nombre minimal de capteurs ajoutés est d_m *car chaque capteur peut augmenter la dimension du couplage maximal d'au plus une unité. Considérons une solution qui permet d'obtenir un couplage* M_c *de dimension égale à* n *dans* $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda^c)$*.Comme tous les sommets de* $\mathbf{V}^+$ *sont couverts par* M_c *alors tous les sommets de* $\mathbf{V_0^+}$ *sont couverts par* M_c*. De plus, il y*

a au moins d_m *arcs* $\mathbf{V_0^+}$-$\mathbf{Z_1}$. △

Cependant, la contrainte donnée par la proposition précédente ne permet pas de caractériser plus précisément les capteurs additionels qui permettent de recouvrer la condition de couplage complet. Dans l'optique d'affiner ce placement de capteurs, nous appelons $\mathbf{V_0}$-chemin tout chemin simple de $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$ qui couvre uniquement des sommets de $\mathbf{V_0}$. Pour chaque $\mathbf{V_0}$-chemin noté P, le sous-ensemble de sommets $\vartheta(P)$ est défini par $\vartheta(P) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V_0^+}$, tel que P couvre $\mathbf{v}\}$. Finalement, nous définissons un $\mathbf{V_0}$-chemin P comme étant maximal s'il n'existe pas de $\mathbf{V_0}$-chemin P' tel que $\vartheta(P) \subset \vartheta(P')$.

Il est alors possible d'établir que pour ajouter les sommets $\mathbf{Z_1}$ sur $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$, il est nécessaire de vérifier la relation suivante :

$$\text{Pour chaque } V_0\text{-chemin maximal } P, \theta(\vartheta(P), \mathbf{Z_1}) \neq 0. \tag{2.26}$$

En effet, considérons qu'après le placement des capteurs représentés par l'ensemble de sommets $\mathbf{Z_1}$, la contrainte (2.26) ne soit pas satisfaite. Il est alors possible de construire dans $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda^c)$ un $\mathbf{V_0}$-chemin maximal qui ne couvre aucun sommet de $\mathbf{Z_1}$ (où $\mathbf{V_0}$ est calculé à partir de la décomposition de $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$). Comme P est un $\mathbf{V_0}$-chemin maximal alors $\theta(\vartheta(P), \mathbf{V}^-) = \theta(\vartheta(P), \mathbf{V_0^-}) = \text{card}(\vartheta(P)) - 1$ dans $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$. Maintenant, si $\theta(\vartheta(P), \mathbf{Z_1}) = 0$, alors l'ensemble $\mathbf{V}^-$ devient l'ensemble $\mathbf{X}^- \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z_1}$ dans $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda^c)$ et la quantité $\theta(\vartheta(P), \mathbf{V}^-)$ reste inchangée *i.e.* $\theta(\vartheta(P), \mathbf{V}^-) = \theta(\vartheta(P), \mathbf{X}^- \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z_1}) = \theta(\vartheta(P), \mathbf{V_0^-}) = \text{card}(\vartheta(P)) - 1$. Ainsi la condition de couplage complet ne peut être satisfaite dans $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda^c)$.

De la même manière, il est possible de prouver que pour recouvrer la condition de couplage complet, il est nécessaire d'avoir la contrainte suivante :

$$\text{Pour chaque } V_0\text{-chemin maximal } P, \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\mathbf{V_0^+} \backslash \vartheta(P), \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0. \tag{2.27}$$

Si $\theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-})$ est égal à $\theta(\mathbf{V_0^+} \backslash \vartheta(P), \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-})$, cela signifie que la dimension de couplage n'évolue pas lorsque les sommets de $\vartheta(P)$ ne sont pas pris en considération. Autrement dit, les capteurs ajoutés ne permettent pas d'augmenter la dimension de couplage à partir de ces sommets : ce qui est contradictoire avec notre but d'avoir un couplage de dimension égale à n.

Il est à noter que l'objectif des conditions (2.26) et (2.27) n'est pas de remplacer la condition nécessaire et suffisante de la proposition 2.5 (cf page 65). En effet, ces conditions doivent

être vues comme des outils complémentaires qui permettent une localisation de capteurs plus précise.

Illustrons l'ensemble de ces conditions au travers de l'exemple 2.9.

Exemple 2.9

Pour illustrer la proposition précédente et les contraintes supplémentaires décrites ci-dessus, nous considérons le système $\Sigma_{2.8}$ dont le graphe biparti associé est donné à la figure 2.13 (cf page 64).

Soit le couplage maximal :

$$M = \{(\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_{0,6}^-}), (\mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_{0,7}^-}), (\mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_{1,9}^-}), (\mathbf{x_9^+}, \mathbf{y_2}), (\mathbf{x_5^+}, \mathbf{y_1}), (\mathbf{x_8^+}, \mathbf{x_{2,10}^-})\} \tag{2.28}$$

Les ensembles $\mathbf{V_0^+}$ et $\mathbf{V_0^-}$ sont définis par $\mathbf{V_0^+} = \{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}$ et $\mathbf{V_0^-} = \{\mathbf{x_{0,6}^-}, \mathbf{x_{0,7}^-}, \mathbf{x_{1,9}^-}, \mathbf{y_2}\}$. Ainsi afin de rendre le système observable, il faut placer card$(\mathbf{V_0^+})$ − card$(\mathbf{V_0^-}) = 8 - 4 = 4$ capteurs en $\mathbf{V}^+$. Nous allons à présent définir l'ensemble des $\mathbf{V_0}$-chemins maximaux. Ces chemins sont au nombre de six et sont donnés par :

$$\begin{cases} P_1 = \mathbf{x_1^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,6}^-} \rightarrow \mathbf{x_2^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,7}^-} \rightarrow \mathbf{x_3^+} \\ P_2 = \mathbf{x_1^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,6}^-} \rightarrow \mathbf{x_2^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,7}^-} \rightarrow \mathbf{x_4^+} \\ P_3 = \mathbf{x_2^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,6}^-} \rightarrow \mathbf{x_3^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,7}^-} \rightarrow \mathbf{x_4^+} \\ P_4 = \mathbf{x_1^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,6}^-} \rightarrow \mathbf{x_3^+} \rightarrow \mathbf{x_{0,7}^-} \rightarrow \mathbf{x_4^+} \\ P_5 = \mathbf{x_6^+} \rightarrow \mathbf{x_{1,9}^-} \rightarrow \mathbf{x_7^+} \\ P_6 = \mathbf{x_9^+} \rightarrow \mathbf{y_2} \rightarrow \mathbf{x_{10}^+} \end{cases}$$

La définition des ensembles $\vartheta(P_i)$ pour ces six chemins se traduit par :

$$\begin{cases} \vartheta(P_1) = \{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}\} \\ \vartheta(P_2) = \{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_4^+}\} \\ \vartheta(P_3) = \{\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}\} \\ \vartheta(P_4) = \{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}\} \\ \vartheta(P_5) = \{\mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}\} \\ \vartheta(P_6) = \{\mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\} \end{cases}$$

Il est ensuite nécessaire de définir pour chaque ensemble $\vartheta(P_i)$ la première contrainte (2.26) (cf page 66) :

$$\begin{cases} \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}\}, \mathbf{Z_1}) \neq 0 \\ \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_4^+}\}, \mathbf{Z_1}) \neq 0 \\ \theta(\{\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}\}, \mathbf{Z_1}) \neq 0 \\ \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}\}, \mathbf{Z_1}) \neq 0 \\ \theta(\{\mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}\}, \mathbf{Z_1}) \neq 0 \\ \theta(\{\mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}, \mathbf{Z_1}) \neq 0 \end{cases}$$

ce qui se traduit par le fait qu'il doit exister au moins un arc entre :

- $\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}\}$ *et* $\mathbf{Z_1}$,
- $\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_4^+}\}$ *et* $\mathbf{Z_1}$,
- $\{\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}\}$ *et* $\mathbf{Z_1}$,
- $\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}\}$ *et* $\mathbf{Z_1}$,
- $\{\mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}\}$ *et* $\mathbf{Z_1}$,
- $\{\mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}$ *et* $\mathbf{Z_1}$.

À présent, pour chaque ensemble $\vartheta(P_i)$, la deuxième contrainte (2.27) (cf page 66) s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\{\mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0 \\ \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\{\mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0 \\ \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0 \\ \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\{\mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0 \\ \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_9^+}, \mathbf{x_{10}^+}\}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0 \\ \theta(\mathbf{V_0^+}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) - \theta(\{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \mathbf{x_3^+}, \mathbf{x_4^+}, \mathbf{x_6^+}, \mathbf{x_7^+}\}, \mathbf{Z_1} \cup \mathbf{V_0^-}) > 0 \end{cases}$$

Ces contraintes nous permettent de conclure qu'il faut placer un capteur parmi x_6 et x_7, un capteur parmi x_9 et x_{10} et deux capteurs parmi x_1, x_2, x_3 et x_4. Ainsi, l'exemple des quatre capteurs suivants permet de satisfaire la condition de couplage complet :

$$\begin{cases} z_1 &= \lambda_1 x_7 \\ z_2 &= \lambda_2 x_{10} \\ z_3 &= \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2 \\ z_4 &= \lambda_5 x_3 + \lambda_6 x_4 \end{cases}$$

La validité de la condition de couplage complet étant assurée par placement de capteurs, il faut procéder de la même manière pour la condition de connectivité aux sorties. La partie

suivante est ainsi dédiée à la localisation de capteurs afin de recouvrer cette seconde condition d'observabilité.

2.4.2 Recouvrement de la condition de connectivité aux sorties

Afin de recouvrer la condition de connectivité aux sorties, il faut déterminer les sommets à mesurer afin que tous les sommets du graphe soient connectés à au moins une sortie. Les capteurs à ajouter sont caractérisés par le calcul des composantes fortement connexes de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ comme défini ci-dessous.

• Deux sommets $\mathbf{v_i}$ et $\mathbf{v_j}$ de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ sont dits fortement connectés s'il existe un chemin de $\mathbf{v_i}$ à $\mathbf{v_j}$ et un chemin de $\mathbf{v_j}$ à $\mathbf{v_i}$, *i.e.* $\rho(\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}) = \rho(\mathbf{v_j}, \mathbf{v_i}) = 1$. Signalons également qu'un sommet est fortement connecté à lui-même.

• La relation "est fortement connecté à", notée $\mathcal{R}_{SC}$, est une relation d'équivalence dont il est possible de définir des classes d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est appelée composante fortement connexe du graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$.

Par définition, un sommet de sortie n'a aucun arc sortant. Ainsi, de par la définition des sommets fortement connectés, un sommet de sortie ne peut pas être fortement connecté à un autre sommet. En ce sens, un sommet de sortie est une composante fortement connexe à lui seul.

Les composantes fortement connexes peuvent être ordonnées en utilisant une relation d'ordre partielle notée "$\prec$"et qui se définit par :
Deux composantes fortement connexes $\mathbf{C_i}$ et $\mathbf{C_j}$ sont telles que $\mathbf{C_i} \prec \mathbf{C_j}$ s'il existe au moins un arc $(\mathbf{v_j}, \mathbf{v_i})$ où $\mathbf{v_i} \in \mathbf{C_i}$ et $\mathbf{v_j} \in \mathbf{C_j}$ (en d'autres termes $\theta(\mathbf{C_j}, \mathbf{C_i}) \neq 0$ mais $\theta(\mathbf{C_i}, \mathbf{C_j}) = 0$).

Ainsi, avec ce classement, les composantes minimales $(\mathbf{I_k})$ correspondent aux composantes fortement connexes sans arc sortant, *i.e.* $\theta(\mathbf{I_k}, \mathbf{V}) = 0 \ \forall \ \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X}$ tel que $\mathbf{V} \cap \mathbf{I_k} = \emptyset$. Il est à noter que les sommets de sortie sont des composantes minimales. Les composantes minimales non observables sont définies comme les composantes minimales fortement connexes qui ne sont pas des sommets de sortie et sont au nombre de d_o.

À partir de ces définitions, la proposition 2.6 donne la localisation des capteurs $\mathbf{Z_2}$ afin de recouvrer la condition de connectivité aux sorties de la proposition 2.2 (cf page 51).

Proposition 2.6

*Soit le système bilinéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Afin de recouvrer la condition de connectivité aux sorties (condition **1.** de la proposition 2.2), les capteurs ajoutés $\mathbf{Z_2}$ doivent mesurer au moins une composante d'état de chaque composante minimale non obervable.*

Preuve

Suffisance : En premier lieu, tous les sommets d'état sont eux-même connectés par définition à au moins une composante minimale de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Par conséquent, si toutes ces composantes minimales sont connectées à une sortie, alors la condition de connectivité aux sorties est satisfaite.

Nécessité : S'il existe une composante minimale de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ qui n'a pas de sommet connecté à un capteur ajouté de l'ensemble Z_2, alors cette composante est minimale pour $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda^c)$. Dans ce cas, il n'y a pas de chemin entre les sommets de cette composante et $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z_2}$. Cela implique que la condition de connectivité aux sorties n'est pas satisfaite pour le système Σ_Λ^c, qui n'est alors pas observable. △

Notons que la proposition 2.6 permet de localiser les capteurs à ajouter, pour rendre le système étudié observable, mais n'indique pas leur nombre minimal. Il est possible qu'un seul capteur mesurant un sommet dans chaque composante non connectée minimale permette de satisfaire aux exigences de la condition de connectivité aux sorties.

Illustrons la proposition 2.6 au travers de l'exemple 2.10.

Exemple 2.10

Soit le système $\Sigma_{2.10}$ et son graphe orienté associé représenté par la figure 2.14.

Il existe quatre composantes fortement connexes $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \mathbf{C_3}, \mathbf{C_4}$ données par $\mathbf{C_1} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_6}\}$, $\mathbf{C_2} = \{\mathbf{x_7}, \mathbf{x_8}\}$, $\mathbf{C_3} = \{\mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}\}$ et $\mathbf{C_4} = \{\mathbf{x_5}\}$. L'ordre de ces composantes donne les deux relations $\mathbf{C_2} \prec \mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_4} \prec \mathbf{C_3} \prec \mathbf{C_1}$. $\mathbf{C_2}$ et $\mathbf{C_4}$ sont donc les composantes fortement connexes minimales. Afin de recouvrer la condition de connectivité aux sorties, il faut donc ajouter un capteur z tel qu'il soit connecté à au moins un élément de $\mathbf{C_2}$ et nécessairement à $\mathbf{x_5}$ (unique élément de $\mathbf{C_4}$).

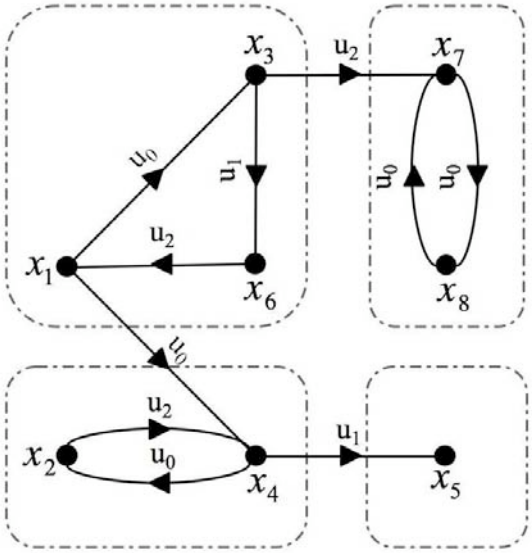


FIG. 2.14: *Graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_{2.10})$

Les ensembles de capteurs additionnels $\mathbf{Z_1}$ et $\mathbf{Z_2}$ ayant été caractérisés indépendamment, la partie suivante permet de lier les deux parties (2.4.1 et 2.4.2) afin d'obtenir un nombre minimal global de capteurs afin de recouvrer les deux conditions d'observabilité de la proposition 2.2 (cf page 51).

2.4.3 Recouvrement des deux conditions d'observabilité

Les deux parties précédentes (2.4.1 et 2.4.2) ont donc permis de recouvrer la condition de couplage complet et celle de connectivité aux sorties indépendamment l'une de l'autre. Nous allons à présent nous intéresser à recouvrer les deux conditions d'observabilité simultanément pour avoir un nombre minimal de capteurs dans sa globalité : pour cela, il est supposé que les deux conditions ne sont pas satisfaites *i.e.* $d_m \neq 0$. En effet, il est possible d'utiliser les capteurs nécessaires au recouvrement de la condition de couplage complet pour recouvrer la condition de connection aux sorties.

En plus des contraintes de la proposition 2.5 (cf page 65), nous pouvons imposer aux capteurs, représentés par le sous-ensemble de sommets $\mathbf{Z_1}$, de satisfaire la condition $\theta(\mathbf{C_i}, \mathbf{Z_1}) \neq 0$ pour chaque composante fortement connexe minimale non connectée $\mathbf{C_i}$. Cette contrainte n'a aucun effet sur le nombre minimal de capteurs requis qui reste alors égal à d_m. Ainsi, d'un point de vue théorique, il est inutile et inefficace d'ajouter plus de d_m capteurs pour satisfaire la condition de connectivité à la sortie.

Si la condition (**2.**) (couplage complet) de la proposition 2.2 est satisfaite sans ajout de capteurs alors l'étude n'est réalisée que pour le recouvrement de la condition (**1.**) (connectivité aux sorties). Dans ce cas, un seul capteur est théoriquement nécessaire et suffisant.

Finalement, il est possible de déduire que le nombre minimal de capteurs permettant de recouvrer les conditions d'observabilité est égal à $\max(1, d_m)$, et toutes les solutions de recouvrement des conditions d'observabilité sont caractérisées par :
Ajouter $\max(1, d_m)$ capteurs à d_m éléments de $\mathbf{V_0^+}$, sachant que chaque composante fortement connexe non observable doit être reliée à au moins un des $\max(1, d_m)$ capteurs ajoutés.

Illustrons la caractérisation du nombre minimal global de capteurs ainsi que leur localisation au travers de l'exemple 2.11.

Exemple 2.11

Considérons à nouveau le système présenté à l'exemple 2.10 : système pour lequel le recouvrement de la condition de connectivité aux sorties a déjà été traité. Les deux conditions d'observabilité ne sont pas satisfaites. D'après le graphe biparti donné à la figure 2.15, d_m, le nombre de capteurs permettant de recouvrer la condition de couplage complet, est donné par $card(\mathbf{V_0^+}) - card(\mathbf{V_0^-}) = 1 - 0 = 1$ avec $\mathbf{V_0^+} = \{\mathbf{x_5^+}\}$ et $\mathbf{V_0^-} = \emptyset$. Ainsi, le nombre minimal de capteurs permettant de recouvrer les deux conditions d'observabilité est égal à 1.

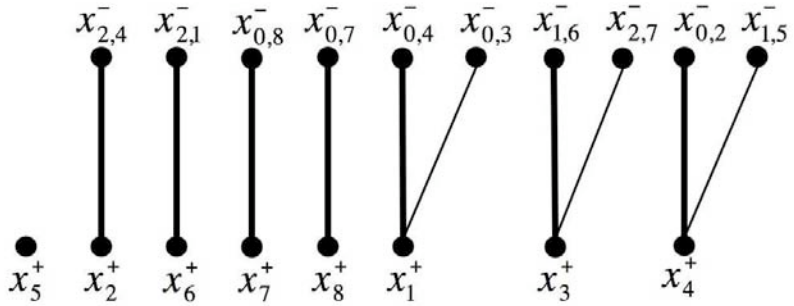


FIG. 2.15: *Graphe biparti $\mathcal{B}(\Sigma_{2.10})$*

En effet, lors de la caractérisation du capteur additionnel z_1, il est possible de le contraindre à être connecté aux composantes minimales définies à l'exemple 2.10 : $\mathbf{C_2} = \{\mathbf{x_7}, \mathbf{x_8}\}$ et $\mathbf{C_4} = \{\mathbf{x_5}\}$. Ainsi, pour le présent système, le capteur additionnel caractérisé à l'exemple 2.10 ($z_1 = \lambda_1 x_5 + \lambda_2 x_7$) permet de recouvrer les deux conditions d'observabilité.

Comme nous venons de le voir, le placement d'un nombre minimal de capteurs peut se faire globalement en considérant les deux conditions d'observabilité. En revanche, il n'est en aucun cas garanti que les capteurs déjà présents sur le système permettent d'avoir un nombre global de capteurs minimal. En effet, les capteurs existant sur le système ne sont pas remis en cause lors de l'étude de placement de capteurs. Même s'il paraît possible qu'un sous-ensemble de ces capteurs puisse être inutile, dans le sens où il ne donne pas d'informations concernant l'observabilité théorique du système, ces capteurs seraient malgré tout utiles à la synthèse de l'observateur.
En effet, un capteur qui appartient à l'ensemble V_∞ n'est pas essentiel au recouvrement de la condition de couplage complet, il se peut donc qu'il soit inutile.
De même si deux capteurs sont tels qu'ils ne sont tous deux connectés qu'à une même composante fortement connectée, il est possible de conclure qu'un seul de ces deux capteurs est utile au recouvrement de la condition de connectivité aux sorties.
En recoupant ces deux informations (capteurs inutiles au recouvrement de la condition de couplage complet et ceux inutiles au recouvrement de la condition de connectivité aux sorties), il est alors possible de savoir quels sont les capteurs utiles ou non à l'observabilité du système.

Ainsi, il est possible de considérer à nouveau le système de l'exemple précédent mais en supposant qu'il n'y a aucun capteur sur le système (phase de conception) afin d'obtenir un nombre minimal de capteurs.

Illustrons ce dernier point au travers de l'exemple 2.12.

Exemple 2.12

Considérons à présent le système utilisé dans l'exemple 2.8 (cf page 65) mais en supposant qu'aucun capteur ne soit déjà placé. Le graphe biparti de ce système est alors donné à la figure 2.16.

Dans un premier temps, nous calculons $d_m = card(\mathbf{V_0^+}) - card(\mathbf{V_0^-}) = 8-3 = 5$. *Ainsi, il en est déduit que cinq capteurs suffisent à rendre le système observable alors que dans l'étude précédente, nous avions placé quatre capteurs en plus des deux déjà présents soit six capteurs au final.*

Les cinq capteurs suivants donnent un exemple de placement permettant de recouvrer les

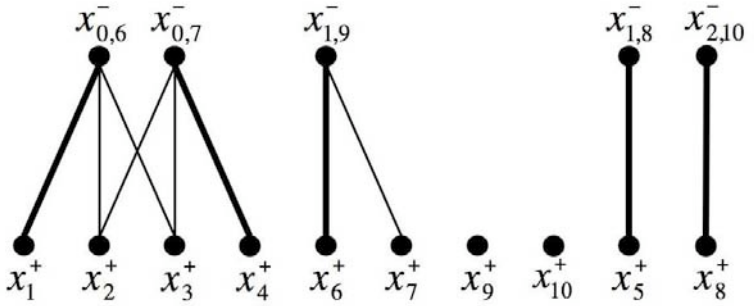


FIG. 2.16: *Graphe biparti* $\mathcal{B}(\Sigma_{2.12})$

conditions d'observabilité :

$$\begin{cases} z_1 &= \lambda_1 x_7 \\ z_2 &= \lambda_2 x_{10} \\ z_3 &= \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2 \\ z_4 &= \lambda_5 x_3 + \lambda_6 x_4 \\ z_5 &= \lambda_7 x_9 \end{cases}$$

Dans cette section, nous avons caractérisé les capteurs à ajouter afin de rendre observable un système qui ne satisfait aux conditions données. Cette étude a été menée afin de placer un nombre minimal de capteurs. Dans la section suivante, le déroulement est similaire mais porte sur la problématique de l'observabilité d'une partie des composantes de l'état.

2.5 Recouvrement de l'observabilité partielle par placement de capteurs

Dans cette partie, le but est de trouver z tel qu'un ensemble de composantes $\bar{X}_\Omega$ soit observable ($\bar{X}_\Omega$ est constitué des éléments non observables de X_Ω). Dans un premier temps, nous allons déterminer un ensemble de capteurs potentiels permettant d'assurer l'observabilité de chaque élément de $\bar{X}_\Omega$. L'ensemble de ces capteurs permettant l'observabilité de l'élément x_i est noté S_i et est défini par la proposition 2.7.

Proposition 2.7 *Pour tout* x_i *tel que* $x_i \in \bar{X}_\Omega$, *l'ensemble* S_i *est défini par* $S_i = \{x_\ell | \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_{s_1}}\}) = \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_{s_1}}, \mathbf{y_{s_2}}\})\}$ *avec* $y_{s_1} = \lambda_{k_\ell} x_\ell$ *et* $y_{s_2} = \lambda_{k_i} x_i$.

Preuve *En considérant le système avec l'ensemble de capteurs* $\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_{s_1}}, \mathbf{y_{s_2}}\}$, *la composante d'état* x_i *est observable, au moins par la mesure donnée par* y_{s_2}. *Si* $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_{s_1}}\})$ *est égal*

à $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y_{s_1}}, \mathbf{y_{s_2}}\})$*, cela signifie que la dimension de la matrice d'observabilité n'a pas évolué. Il peut alors être conclu que la composante* x_i *est observable par la mesure donnée par* y_{s_1} *: capteur ajouté en* x_ℓ*.*

Il est possible de remarquer que x_i est nécessairement inclus à l'ensemble S_i. En effet, placer un capteur en x_i rend ce dernier observable.

Remarquons également que placer un capteur sur une composante déjà observable n'a aucun impact sur la dimension du sous-espace vectoriel d'observabilité. Un tel capteur ne peut ainsi pas rendre x_i observable. Cette caractéristique peut nous permettre de réduire le temps de calcul en étudiant le cas de placement de capteurs sur des composantes appartenant uniquement à l'ensemble $\bar{X} = X \backslash X_{\text{obs}}$ au lieu de l'ensemble X.

Remarque 2.3

Si placer un capteur en x_j *permet de rendre* x_i *observable, alors les capteurs permettant de rendre* x_j *observable ont la même action sur l'observabilité de* x_i*. On sait alors que* S_j *est inclus dans* S_i*.* S_i *et* S_j *sont tels que* $S_j \subseteq S_i$*.*

Les éléments minimaux avec ce classement correspondent aux ensembles S_i permettant de rendre observables tous les éléments de X_Ω, et d_p donne le nombre de ces ensembles minimaux.

Proposition 2.8

Soit Σ^c_Λ *le système bilinéaire structuré défini par l'équation (2.24) (cf page 62) et* $\mathcal{G}(\Sigma^c_\Lambda)$ *le graphe orienté associé.* $\bar{X}_\Omega$ *est observable :*
si chaque ensemble minimal $\mathbf{S_i}$ *est connecté à seulement un capteur* $\mathbf{z_{k_i}}$ *et un sommet de* $\mathbf{X}_{obs}$ *peut être connecté à n'importe quel sommet* $\mathbf{z_{k_i}}$*.*
Autrement dit, tout capteur ajouté $\mathbf{z_{k_i}}$ *doit être connecté à un sommet de l'ensemble* $\mathbf{S_i}$ *et à n'importe quel sommet de l'ensemble* $\mathbf{X}_{obs}$*.*

Remarque 2.4

Les ensembles $\mathbf{S_i}$ *ont été déterminés en considérant qu'un capteur n'était connecté qu'à un seul élément de* $\mathbf{\bar{X}_\Omega}$*. En effet, si un capteur est connecté à plusieurs éléments de* $\mathbf{\bar{X}_\Omega}$*, la condition d'observabilité partielle peut être insatisfaite. Pour s'affranchir de ce problème, il faudrait alors tester la condition d'observabilité partielle en considérant tous les capteurs* z_i*. Il se pose alors le problème des combinaisons possibles pour chaque capteur* z_i*. Il nous semble*

plus intéressant de se limiter à notre cas de capteur mesurant une seule composante d'un ensemble S_i plutôt que de vouloir l'étendre afin d'obtenir un placement de capteurs exhaustif.

De la proposition 2.8, nous pouvons conclure que le nombre de composantes d'état mesurées par les capteurs ajoutés est au moins égal à d_p, et utiliser plus de d_p capteurs est de ce fait théoriquement inutile.

Illustrons la proposition 2.8 au travers de l'exemple 2.13.

Exemple 2.13

Considérons le système $\Sigma_{2.7}$ représenté par le graphe orienté 2.17.
Les composantes d'état devant être observables sont $X_\Omega = \{x_1, x_3, x_6, x_8, x_9\}$.

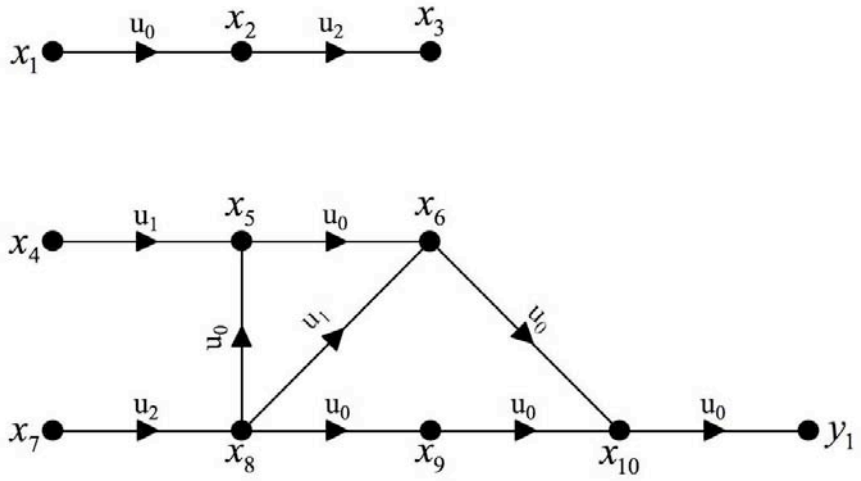


FIG. 2.17: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{2.7})$*

Comme il a été précisé dans l'exemple 2.7 (cf page 61), les composantes d'état non observables de X_Ω sont $\bar{X}_\Omega = \{x_1, x_3, x_6, x_9\}$. Il faut à présent déterminer les ensembles S_k associés à chaque élément de $\bar{X}_\Omega$. Tous les placements de capteurs possibles sont donnés par $\bar{X} = X \backslash X_{obs} = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_9\}$.

Dans un premier temps, l'ensemble $\mathbf{S_1}$ est déterminé en testant les sommets de $\bar{\mathbf{X}}$.
Comme il a été dit précédemment, $\mathbf{x_1}$ appartient nécessairement à $\mathbf{S_1}$.
Comme $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_2}\}) = \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1}\}) = 8$, $\mathbf{x_2}$ appartient à $\mathbf{S_1}$.
Comme $\rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_3}\}) = \rho_A(\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_3}, \mathbf{x_1}\}) = 9$, $\mathbf{x_3}$ appartient à $\mathbf{S_1}$.
Il serait possible de tester également les sommets $\mathbf{x_6}$ et $\mathbf{x_9}$ mais il est intéressant de remarquer que le graphe est divisé en deux sous-graphes sans connection entre eux. Dans ce cas, il est

inutile d'étudier l'influence d'un sommet d'un sous-graphe sur un autre.
Au final, les ensembles caractérisés sont $\mathbf{S_1} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$, $\mathbf{S_3} = \{\mathbf{x_3}\}$, $\mathbf{S_6} = \{\mathbf{x_6}, \mathbf{x_9}\}$ *et* $\mathbf{S_9} = \{\mathbf{x_6}, \mathbf{x_9}\}$.
Il faut à présent classer ces ensembles afin d'avoir à placer le moins de capteurs possible. Les deux relations suivantes sont alors obtenues $\mathbf{S_3} \subseteq \mathbf{S_2}$ *et* $\mathbf{S_6} = \mathbf{S_9}$.
Finalement, il est conclu que le nombre d'éléments minimaux est égal à deux. Ces éléments sont $\mathbf{S_3}$ *et* $\mathbf{S_6}$. *Par conséquent,* X_Ω *est observable si :*
$\mathbf{z_1}$ *est connecté à* $\mathbf{x_3}$ *et à n'importe quelle combinaison d'éléments de* $\mathbf{X}_{obs}$, *et* $\mathbf{z_2}$ *est connecté à* $\mathbf{x_6}$ *ou* $\mathbf{x_9}$ *et à n'importe quelle combinaison d'éléments de* $\mathbf{X}_{obs}$.

Cette partie nous a permis de caractériser les capteurs permettant de recouvrer l'observabilité d'une partie $\bar{X}_\Omega$ des composantes de l'état. Notre méthode de placement de capteurs ne permet pas d'obtenir un nombre minimal de capteurs du fait de la méthode utilisée (les capteurs potentiels sont caractérisés indépendamment). Comme il a été dit précédemment, obtenir ce nombre minimal de capteurs ne peut se faire qu'en considérant tous les capteurs en même temps ce qui entraîne une combinaison de possibilités non négligeable. En revanche, notre méthode permet de garantir que le nombre de capteurs est au plus égal à $\text{card}(\bar{X}_\Omega)$.

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps rappelé les résultats des études par approche graphique sur les systèmes linéaires structurés. À partir de ces résultats, nous avons déduit les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'ensemble de l'état d'un système bilinéaire structuré par approche graphique. Nous avons pour cela utilisé deux représentations : les graphes orientés et les graphes bipartis. La première représentation est la plus légitime pour la validation de la condition dite de "connectivité aux sorties" tandis que la seconde représentation permet un gain en temps de calcul pour la détermination de la condition dite de "couplage complet". Suite à l'étude de l'observabilité de l'ensemble de l'état, nous nous sommes intéressés à l'observabilité d'une partie des composantes d'état. Nous avons pour cela introduit la notion de chemins A-disjoints afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes.
Par la suite, nous nous sommes intéressés au problème de placement de capteurs dans le cas où un système ne répond pas aux conditions d'observabilité de l'ensemble ou d'une partie de l'état. Nous avons caractérisé un nombre minimal global de capteurs permettant de rendre un

système observable dans sa globalité. Cette étude peut également être utilisée dans une phase de conception de système (sans capteurs). La même étude a été menée pour l'observabilité d'une partie des composantes d'état. En revanche, elle ne permet pas dans ce cas de garantir un nombre minimal de capteurs et n'est pas exhaustive. Les conditions données sont en effet suffisantes mais pas nécessaires. Afin d'obtenir de telles conditions, l'étude nous paraît beaucoup plus complexe à mettre en œuvre en terme de méthode.

Chapitre 3

Diagnosticabilité des systèmes bilinéaires structurés

Le second problème abordé dans ce manuscrit est celui de la détection et la localisation de défauts pour les systèmes bilinéaires structurés. L'objectif est de savoir s'il est possible de détecter et de localiser les défauts en utilisant un observateur causal appelé générateur de résidus. Il ne s'agit pas ici de faire la synthèse de ces générateurs de résidus mais seulement de savoir si elle est possible. Le problème fondamental de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires (BFPRG) est différent de l'étude d'observateurs d'entrées inconnues et peut être vue comme une étape intermédiaire. En effet, on ne cherche pas ici à connaître la valeur des défauts mais seulement à savoir si un défaut f_i est ou non présent.

Une fois les conditions graphiques énoncées, le second objectif de ce chapitre est de s'intéresser au diagnostic dit actif. Dans ce cas, on utilise l'effet de la commande sur le système afin d'améliorer le diagnostic ou, ce qui sera notre cas, recouvrer les conditions de détection à l'aide de l'entrée $u(t)$.

Une partie de l'entrée inconnue du système bilinéaire est donc supposée révéler des défauts alors que la partie restante représente des perturbations (bruits,...). On considère ainsi le système bilinéaire structuré Σ_Λ^d tel que :

$$\Sigma_\Lambda^d : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i u_i(t) x(t) + E f(t) + H w(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

Remarque 3.1

Pour des raisons de présentation et de simplicité des notations, la matrice structurée C est supposée être de la forme $(diag(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_p})|0)$.

Le graphe orienté associé au système Σ_Λ^d est similaire au graphe $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ avec l'adjonction des deux ensembles de sommets $\mathbf{F} = \{\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_q}\}$ associé aux composantes de défaut et $\mathbf{W} = \{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_r}\}$ associé aux composantes de perturbation et des deux ensembles d'arcs E-arcs $= \{(\mathbf{f_i}, \mathbf{x_j})|E(j,i) \neq 0\}$ et H-arcs $= \{(\mathbf{w_i}, \mathbf{x_j})|H(j,i) \neq 0\}$.

Soit le système bilinéaire structuré Σ_Λ^d, on définit le problème de génération de résidus comme étant de trouver un filtre de la forme [Hammouri et al., 2001]

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}(t) & = & \bar{A}(u)z(t) + \bar{D}(u)y(t) + \phi(g(t))r(t) \\ \dot{g}(t) & = & \psi(u(t), g(t)) \\ r(t) & = & \bar{C}z(t) + Ly(t) \end{array}\right. \tag{3.2}$$

où le résidu $r \in \mathbb{R}^q$ est tel que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$

- si $f_i = 0$ alors r_i est insensible à w et à tout f_j avec $j \neq i$. Il doit tendre vers zéro quelles que soient l'entrée u et les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$.
- l'évolution de r_i est affectée par f_i *i.e.* le résidu prend une valeur non nulle à partir d'un temps t quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$.

Ce problème a été résolu en utilisant une méthode géométrique [Hammouri et al., 2001]. Dans le cas mono-défaut, il est conclu que le problème de génération de résidus a une solution si $E \notin \bar{O}_H$ où $\bar{O}_H$ est le sous-espace non observable minimal contenant ImH. Le premier objectif de ce chapitre est de trouver des conditions graphiques équivalentes à la précédente. Ces conditions se veulent plus simples à vérifier (en terme de "visibilité") et sont mieux adaptées aux systèmes de grande dimension. Le sous-espace $\bar{O}_H$ est donné par la limite de la suite non croissante suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_0 & = & \mathcal{R}_H + \ker(C) \\ \mathcal{T}_{i+1} & = & \mathcal{R}_H + \Big(\bigcap_{j=0}^{m} \big(A_j^{-1}\mathcal{T}_i\big)\Big) \cap \ker(C) \end{array}\right. \tag{3.3}$$

où $\mathcal{R}_H$ représente le sous-espace (C, A_j)-invariant $(j = 0, \ldots, m)$ minimal contenant ImH. Plus précisément, $\mathcal{R}_H$ est la limite de la suite non-décroissante suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 &= \mathrm{Im}H \\ \mathcal{R}_{i+1} &= \mathcal{R}_i + \sum_{j=0}^{m} A_j(\mathcal{R}_i \cap \ker(C)) \end{cases} \tag{3.4}$$

Dans un premier temps, nous allons rappeler les résultats connus de [Commault et al., 2002] pour les systèmes linéaires structurés. Cela va nous permettre de mieux appréhender la méthode à suivre afin de trouver les conditions graphiques équivalentes aux conditions géométriques pour les systèmes bilinéaires. De plus, les résultats de [Commault et al., 2002] nous seront également utiles lors de la partie consacrée au diagnostic actif.

3.1 Diagnosticabilité d'un système linéaire par approche graphique

Les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème fondamental de génération de résidus proposées dans [Commault et al., 2002] pour les systèmes linéaires reposent sur le calcul de taille de liens maximaux et sont données par le théorème 3.1.

Théorème 3.1

Soit le système linéaire structuré Σ_Λ^L *défini par*

$$\Sigma_\Lambda^L : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + Ef(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.5}$$

représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda^L)$*. Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour* Σ_Λ^L *si et seulement si* $\rho(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}) = card(\mathbf{F}) + \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$

Les défauts sont donc localisables si $\rho(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}) - \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \mathrm{card}(\mathbf{F})$. Cela signifie qu'il existe, pour tout $i = 1, \ldots, q$, un chemin $\{\mathbf{f_i}\}$-$\mathbf{Y}$ disjoint dans chaque lien $\mathbf{W} \cup \mathbf{F}$-$\mathbf{Y}$ maximal. Il est possible de distinguer un chemin $\{\mathbf{f_i}\}$-racine parmi tous les chemins. Le fait de pouvoir discerner un chemin à partir du sommet $\mathbf{f_i}$ signifie qu'il est possible de générer un résidu permettant de localiser le défaut f_i.

L'objectif de notre étude est d'étendre au cas bilinéaire les conditions du théorème 3.1. Il est évident que pour les systèmes bilinéaires, il n'est pas possible d'arriver à un résultat aussi simple. Comme pour l'observabilité, il faut étendre la définition des chemins disjoints. Dans

ce but, nous proposons un algorithme permettant de donner les conditions de solubilité du BFPRG pour les trois cas considérés :

– un seul défaut,
– plusieurs défauts simultanés,
– plusieurs défauts non simultanés.

3.2 Conditions de solubilité du BFPRG

Pour préciser encore un peu plus la méthode qui va être développée dans cette partie, il est important de signaler que l'on s'intéresse à la détermination de la dimension générique de $C\mathcal{R}_H$ et non à la caractérisation de $\mathcal{R}_H$ qui varie en fonction des valeurs des paramètres λ_i. Le lemme 3.1 permet de montrer l'importance de g-dim$(C\mathcal{R}_H)$. Il est donné et prouvé dans le cas mono-défaut.

Lemme 3.1
Soit le système bilinéaire structuré Σ^d_Λ, dans le cas mono-défaut ($q = 1$), le BFPRG *a génériquement une solution si et seulement si*

$$g\text{-}dim(C\mathcal{R}_{H,E}) > g\text{-}dim(C\mathcal{R}_H)$$

où $\mathcal{R}_{H,E}$ représente le sous-espace (C, A_j) invariant minimum incluant $Im(H) + Im(E)$, avec $j = 0, \ldots, m$.

Preuve
Suffisance : La condition du lemme 3.1 implique que $\mathcal{R}_{H,E} \not\subset \mathcal{R}_H$ et en particulier qu'il existe génériquement un vecteur $v \in \mathcal{R}_{H,E}$ et $v \notin \ker(C)$ tel que $v \notin \mathcal{R}_H$ et $Cv \notin C\mathcal{R}_H$. Ainsi, $v \notin \mathcal{R}_H + \ker(C)$ et comme $\bar{O}_H \subseteq \mathcal{R}_H + \ker(C)$ (voir l'équation (3.3)) alors $v \notin \bar{O}_H$. D'autre part, comme $v \in \mathcal{R}_{H,E}$, nous avons alors $v \in \bar{O}_{H,E}$ et donc on a $\bar{O}_{H,E} \not\subset \bar{O}_H$. Ce qui implique que $E \notin \bar{O}_H$: ceci étant la condition signifiant que le BFPRG *est génériquement soluble.*

Nécessité : Si le BFPRG *n'a génériquement aucune solution alors $E \in \bar{O}_H$. Cela implique que $\bar{O}_{H,E} = \bar{O}_H$ et que $C\bar{O}_{H,E} = C\bar{O}_H$. D'autre part, comme $\mathcal{R}_{H,E} \subseteq \bar{O}_{H,E} \subseteq \mathcal{R}_{H,E} + \ker(C)$, on a $C\mathcal{R}_{H,E} \subseteq C\bar{O}_{H,E} \subseteq C(\mathcal{R}_{H,E} + \ker(C))$. Ainsi, $C\bar{O}_{H,E} = C\mathcal{R}_{H,E}$ et de même $C\bar{O}_H = C\mathcal{R}_H$. Au final, on a $C\bar{O}_{H,E} = C\bar{O}_H$ qui implique que g-dim$(C\mathcal{R}_{H,E})$ = g-dim$(C\mathcal{R}_H)$.* △

Pour revenir au cas des systèmes linéaires, la propagation d'un vecteur perturbation vers les sorties peut aisément être quantifiée par $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ qui est égal à g-dim$(C\mathcal{R}_H)$. En revanche, pour un système bilinéaire, une seule composante du vecteur des perturbations peut se propager indépendamment sur plusieurs sorties simultanément et donc g-dim$(C\mathcal{R}_H)$ peut être plus grand que g-rang(H). La démarche adoptée consiste à caractériser graphiquement g-dim$(C\mathcal{R}_H)$ (resp. g-dim$(C\mathcal{R}_{H,E})$) qui représente le nombre de sorties indépendantes vers lesquelles se "propagent" les perturbations (resp. les perturbations et les défauts). Une fois ces nombres calculés, leur comparaison permet d'arriver à des conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème fondamental de génération de résidus dans les cas mono-défaut puis multi-défauts simultanés et enfin dans le cas multi-défauts non simultanés. Pour caractériser g-dim$(C\mathcal{R}_H)$ et g-dim$(C\mathcal{R}_{H,E})$, nous proposons l'algorithme donné dans la partie suivante.

3.2.1 Caractérisation de g-dim$(C\mathcal{R}_H)$ et g-dim$(C\mathcal{R}_{H,E})$

La quantification de la propagation des perturbations induit une complexité certaine (par rapport aux systèmes linéaires). En premier lieu, au vu de la définition de $\mathcal{R}_H$, pour obtenir la valeur de g-dim$(C\mathcal{R}_H)$, il ne faut plus comptabiliser les chemins **W**-**Y** disjoints mais il faut pouvoir distinguer les composantes de commande. Dans ce but, nous introduisons des chemins **W**-**Y** dits α-disjoints dont la définition est donnée dans la suite du chapitre. Cependant, en raison du terme $\mathcal{R}_i \cap \ker(C)$ dans la séquence de calcul de $\mathcal{R}_H$, certains de ces chemins **W**-**Y** ne devront pas être comptabilisés.

Afin de simplifier le graphe et avant de procéder au calcul de g-dim$(C\mathcal{R}_H)$, l'hypothèse 3.1 est faite sur le système.

Hypothèse 3.1
Tout sommet de $\mathbf{X} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$ *est le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de* $\mathbf{Y}$.

En effet, si un sommet de **F** n'est pas le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de **Y** alors le problème de génération de résidus n'est pas soluble. Cette condition peut être assimilée à la condition de connectivé aux sorties vue dans le chapitre dédiée à l'observabilité. En revanche, si un sommet de $\mathbf{X} \cup \mathbf{W}$ n'est pas le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de **Y** alors ce sommet n'a aucune influence sur la solubilité

du problème de génération de résidus et il est tout simplement effacé du graphe.

Nous allons dans un premier temps étudier le cas d'un exemple simple avant d'introduire notre algorithme et de le développer sur un second exemple.

Exemple 3.1

Considérons le système bilinéaire structuré $\Sigma_{3.1}$ défini par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système est représenté par le graphe orienté figure 3.1.

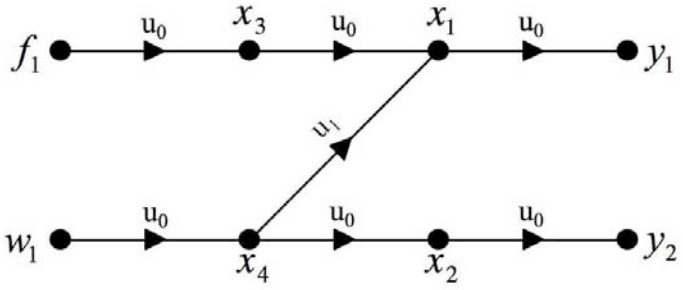


FIG. 3.1: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.1})$*

Nous allons déterminer la dimension g-dim$(C\mathcal{R}_H)$. Dans un premier temps, nous allons caractériser les sommets atteignables à partir des sommets de perturbation. Pour cela, il nous définir l'ensemble $\mathcal{C}ouplages(B)$ associé à une matrice B.

Définition 3.1

*À toute matrice $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ est associé un graphe biparti $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = (\mathbf{V}^+; \mathbf{V}^-; \mathcal{E}_{\mathcal{M}})$ où $\mathbf{V}^+ \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2^+}, \ldots, \mathbf{x}_\ell^+\}$, $\mathbf{V}^- \stackrel{def}{=} \mathbf{X}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \stackrel{def}{=} \{(\mathbf{x_i^+}, \mathbf{x_j}),\ B(j,i) \neq 0\}$. On définit un "*ensemble de couplages maximaux*"par l'ensemble $\mathcal{C}ouplages(B) = \{\gamma \subseteq \mathbf{X}, card(\gamma) = \theta(\mathbf{V}^+, \mathbf{X}) = \theta(\mathbf{V}^+, \gamma)\}$.*

Pour notre exemple, on en déduit que $\mathbf{\Omega_0} = \mathcal{C}ouplages(H_0) = \{\{\mathbf{x_4}\}\}$ car ce sommet est le seul atteignable à partir du sommet de $\mathbf{W}$. Nous allons à présent caractériser le nombre maximal de chemins $\mathbf{\Omega_0}$-$\mathbf{Y}$ disjoints ainsi que la longueur minimal d'un tel lien.

Définition 3.2

On note par $\mu_{X,Y}(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ *le nombre minimal de sommets dans* $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ *couverts par un lien* $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ *maximal.*

Pour notre exemple, nous obtenons $\rho_0 = \rho(\{\mathbf{x_4}\}, \mathbf{Y}) = 1$. *Il est maintenant possible de déterminer* $\mu_0 = \mu_{X,Y}(\{\mathbf{x_4}\}, \mathbf{Y}) = 3$ *car il n'est pas possible de trouver un chemin* $\{\mathbf{x_4}\}$-$\mathbf{Y}$ *de longueur inférieure à trois.*

Dans l'étape suivante, nous déterminons les sommets qui, s'ils étaient mesurées, ne permettent ni d'augmenter la dimension de lien maximal ni de diminuer la longueur minimale d'un de ces liens. Cela permet de caractériser les sommets n'appartenant à aucun de ces liens.
Pour l'exemple, cet ensemble noté $\mathbf{J_1}$ *est donné par* $\{\mathbf{x_3}\}$ *car en considérant les trois autres sommets, la longueur minimale de lien est diminuée.*

A contrario, nous allons caractériser les sommets qui permettent soit d'augmenter la dimension de lien maximal, soit de diminuer la longueur minimale d'un de ces liens.
Pour notre exemple-, cet ensemble noté $\mathbf{\Delta_1}$ *est donné par* $\{\mathbf{x_4}\}$ *: placer un capteur sur* x_4 *permet de diminuer la longueur minimale de lien alors que des capteurs étant déjà placés en* x_3 *et* x_4, *ces derniers ne sont pas inclus à l'ensemble* $\mathbf{\Delta_1}$.

Les sommets qui ne sont inclus ni à $\mathbf{J_0}$ *ni à* $\mathbf{\Delta_0}$ *sont regroupés dans l'ensemble* $\mathbf{\Gamma_1}$, *qui pour l'exemple est donné par* $\mathbf{X} \backslash (\{\mathbf{x_3}\} \cup \{\mathbf{x_4}\}) = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$.

Nous allons à présent utiliser la définition de chemins α*-disjoints afin de connaître la dimension de* $C\mathcal{R}_H$.

Définition 3.3

• *Deux chemins* $P_1 = \mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \cdots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}$ *et* $P_2 = \mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v_1^2} \xrightarrow{u_{j_2}} \cdots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2}^2}$ *sont* α*-disjoints si et seulement si*

Cond1- $\mathbf{v_{k_1}^1} \neq \mathbf{v_{k_2}^2}$,

Cond2- $\forall j = 1, 2, \ldots, \min(k_1, k_2)$ *tels que* $\mathbf{v_{k_1-j}^1} = \mathbf{v_{k_2-j}^2}$, *les chemins* $\mathbf{v_{k_1-j}^1} \xrightarrow{u_{i_{k_1-j+1}}} \cdots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}$ *et* $\mathbf{v_{k_2-j}^2} \xrightarrow{u_{j_{k_2-j+1}}} \cdots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2}^2}$ *ont des indices distincts.*

Deux chemins disjoints sont évidemment α*-disjoints.*
Un ensemble de chemins est dit α*-disjoint, si tous les chemins qu'il contient sont mutuelle-*

ment α-disjoints.

Définition 3.4

• *Soient $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ deux ensembles de sommets. Un ensemble de ℓ chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α-disjoints forme un lien $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α-disjoint. Les liens $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α-disjoints consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α-disjoints maximaux.*

Si l'on compare les définitions de chemins A-disjoints (observabilité) et α-disjoints (diagnosticabilité), on remarque qu'elles sont duales. En effet, si les chemins $P_1 = \mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \cdots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}$ et $P_2 = \mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v_1^2} \xrightarrow{u_{j_2}} \cdots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2}^2}$ sont α-disjoints alors les chemins $P_1' = \mathbf{v_{k_1}^1} \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1-1}^1} \xrightarrow{u_{i_{k_1-1}}} \cdots \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_0^1}$ et $P_2' = \mathbf{v_{k_2}^2} \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2-1}^2} \xrightarrow{u_{j_{k_2-1}}} \cdots \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v_0^2}$ sont A-disjoints.

Le nombre maximal de chemin $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_1}$ α-disjoints est égale à 2 et on en conclut que g-dim($C\mathcal{R}_H$) est de la même valeur. Au final, le problème de génération de résidus car la condition g-dim($C\mathcal{R}_{H,E}$) > g-dim($C\mathcal{R}_H$) ne peut pas être satisfaite du fait que le système n'a que 2 sorties.

À partir de cet exemple, il serait "tentant" de conclure sur les conditions de solubilité du BFPRG à partir de la définition des chemins α-disjoints. Or, il ne faut pas oublier la présence du terme $\mathcal{R}_i \cap \ker(C)$ dans la condition géométrique qui peut poser problème comme pour l'exemple suivant.

Exemple 3.2

Considérons le système bilinéaire structuré $\Sigma_{3.2}$ défini par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_6 \\ 0 \end{pmatrix} \; et$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système est représenté par le graphe orienté figure 3.2.

Si l'étude sur l'exemple 3.1 était menée sur celui-ci, le résultat serait identique i.e. *le* BFPRG *n'est pas soluble. Alors que la condition géométrique dit que ce problème est soluble. En effet, l'arc allant de $\mathbf{x_2}$ à $\mathbf{x_4}$ n'est pas à prendre en considération dans la détermination du nombre*

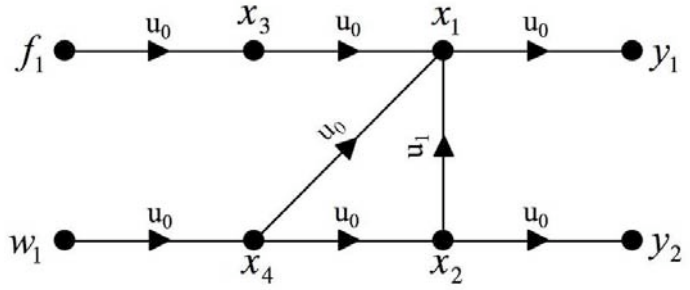


FIG. 3.2: *Graphe orienté* $\mathcal{G}(\Sigma_{3.2})$

maximal de chemins α-disjoints. Mais il ne suffit pas pour cela de le supprimer mais nous avons défini un algorithme qui permet d'obtenir la dimension de $C\mathcal{R}_H$ à partir du graphe.

Nous proposons ainsi l'algorithme 3.1 qui permet le calcul exact de g-dim($C\mathcal{R}_H$) et de g-dim($C\mathcal{R}_{H,E}$).

Algorithme 3.1

Considérons un sous ensemble $\mathbf{V_0} = \{\mathbf{w_{i_1}}, \mathbf{w_{i_2}}, \ldots, \mathbf{w_{i_k}}, \mathbf{f_{j_1}}, \mathbf{f_{j_2}}, \ldots, \mathbf{f_{j_s}}\} \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$. *À ce sous-ensemble correspond une matrice H_0 constituée des colonnes des matrices H et E* i.e. $H_0 = (H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_k}, E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_s})$, *où H_i et E_j représentent respectivement la i^ecolonne de la matrice H et la j^ecolonne de la matrice E.*

Initialisation *:*

$\hookrightarrow$ $\mathbf{\Omega_0} = \mathcal{C}ouplages(H_0)$, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{X}$, $i = 0$

Étape i *:*

$\hookrightarrow$ $\rho_i = \max\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$, $\mu_i = \min\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}, \rho(\gamma,\mathbf{Y}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y})$

$\hookrightarrow$ $\mathbf{J_{i+1}} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x_j} \in \mathbf{J_i}, \max\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \rho_i \ et \min\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \mu_i \right\}$

$\hookrightarrow$ $\mathbf{\Delta_{i+1}} \stackrel{def}{=} \mathbf{\Delta_i} \cup \left\{ \mathbf{x_j} \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{J_{i+1}}, \max\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) > \rho_i \ ou \min\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) < \mu_i \right\}$

$\hookrightarrow$ $\mathbf{\Gamma_{i+1}} \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{J_{i+1}} \cup \mathbf{\Delta_{i+1}})$

$\hookrightarrow$ $\mathbf{\Gamma_{int}} \stackrel{def}{=} \Big\{ \mathbf{x_i} \in \mathbf{\Gamma_{i+1}}$, *il existe deux chemins* $\mathbf{W} - \mathbf{\Gamma_{i+1}}$ *P et Q inclus dans* $\mathbf{\Delta_{i+1}}$ *tels que* $\beta(Q) = \mathbf{x_i}$ *et P est un multiple strict de Q*$\Big\}$, $\mathbf{\Gamma_{ext}} = \mathbf{\Gamma_{i+1}} \setminus \mathbf{\Gamma_{int}}$

$\hookrightarrow$ *Calculer* $\rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}})$

$\hookrightarrow$ *Si* $\rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}) > \rho_i$ *et* $\rho_i < p$, *alors*

$\mathbf{\Omega_{i+1}} \stackrel{def}{=} \Big\{ \gamma \subseteq \mathbf{\Gamma_i},\ card(\gamma) = \rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \gamma, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}) = \rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}) \Big\}$,

*i=i+1, puis aller à l'****Étape i***

$\hookrightarrow$ *Sinon* $\mathbf{\Gamma_*(V_0) = \Gamma_{i+1}}$, $\mathbf{\Delta_*(V_0) = \Delta_{i+1}}$, $\mathbf{\rho_*(V_0) = \rho_i}$, $\mathbf{\Omega_*(V_0) = \Omega_i}$.
Fin.

L'algorithme permet de caractériser en plusieurs étapes la propagation des perturbations vers les sorties. À chaque étape, on évalue d'abord la propagation des perturbations vers les sorties les plus proches. Ensuite, on détermine les directions de propagation de ces perturbations dans l'espace d'état. Ces directions sont différentes de celles évaluées précédemment (vers les sorties les plus proches). Lorsque ces nouvelles directions existent, on les utilise comme nouveau point de départ d'un ensemble de perturbations virtuelles caractérisé par une matrice associée aux couplages maximaux $\mathbf{\Omega_i}$. Cette matrice est l'image des directions de propagation trouvées jusque là. Tant que la propagation des perturbations virtuelles génère de nouvelles directions dans l'espace d'état, l'algorithme continue.

Pour appréhender le mieux possible ce qui est fait dans le déroulement de l'algorithme, nous allons donné les définitions et notations utiles étape par étape. Dans le même temps, nous utiliserons cet algorithme sur l'exemple simple 3.2.

Ligne 1 de l'algorithme

$\hookrightarrow$ $\mathbf{\Omega_0} = \mathcal{C}ouplages(H_0)$, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{X}$, $i = 0$

En fonction de l'initialisation de l'ensemble $\mathbf{V_0}$ et donc de H_0, le résultat de l'algorithme sera soit g-dim($C\mathcal{R}_H$) soit g-dim($C\mathcal{R}_{H,E}$). Si $\mathbf{V_0} = \mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{V_0} = \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$), la valeur de g-dim($C\mathcal{R}_H$) (resp. g-dim($C\mathcal{R}_{H,E}$)) sera donnée par l'algorithme.

Pour l'exemple 3.2, on initialise $\mathbf{V_0} = \{\mathbf{w_1}\}$, $\mathbf{J_0} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}\}$ et $i = 0$. À partir de $\mathbf{V_0}$, on obtient $H_0 = H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}$.
On en déduit que $\mathbf{\Omega_0} = \mathcal{C}ouplages(H_0) = \{\{\mathbf{x_4}\}\}$ car ce sommet est le seul atteignable à partir du sommet de $\mathbf{V_0}$.

Ligne 2 de l'algorithme

$\hookrightarrow$ $\rho_i = \max\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$, $\mu_i = \min\limits_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}, \rho(\gamma, \mathbf{Y}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y})$

ρ_i donne la dimension du plus grand lien possible formé à partir d'un ensemble appartenant à $\mathbf{\Omega_i}$. μ_i donne la longueur minimale d'un tel lien *i.e.* le nombre de sommets dont il est composé.

Pour l'exemple 3.2, nous obtenons $\rho_0 = \rho(\{\mathbf{x_4}\}, \mathbf{Y}) = 1$. Il est maintenant possible de déterminer $\mu_0 = \mu_{X,Y}(\{\mathbf{x_4}\}, \mathbf{Y}) = 3$ car il n'est pas possible de trouver un chemin $\{\mathbf{x_2}\}$-$\mathbf{Y}$ de longueur inférieure à trois.

Ligne 3 de l'algorithme

$$\leadsto \mathbf{J_{i+1}} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x_j} \in \mathbf{J_i}, \max_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \rho_i \text{ et } \min_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \mu_i \right\}$$

$\mathbf{J_{i+1}}$ permet de caractériser les sommets qui ne permettent ni d'augmenter la dimension de lien maximal ni de diminuer la longueur minimale d'un de ces liens.

Pour l'exemple 3.2, l'ensemble $\mathbf{J_1}$ est donné par $\{\mathbf{x_3}\}$ car en considérant les deux autres sommets de $\mathbf{J_0}$, la longueur minimale de lien est diminuée.

Ligne 4 de l'algorithme

$$\leadsto \mathbf{\Delta_{i+1}} \stackrel{def}{=} \mathbf{\Delta_i} \cup \left\{ \mathbf{x_j} \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{J_{i+1}}, \max_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) > \rho_i \right.$$
$$\left. \text{ou } \min_{\gamma \in \mathbf{\Omega_i}, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x_j}\}) < \mu_i \right\}$$

Cette fois, $\mathbf{\Delta_{i+1}}$ permet de caractériser les sommets qui permettent soit d'augmenter la dimension de lien maximal, soit de diminuer la longueur minimale d'un de ces liens.

Pour l'exemple 3.2, l'ensemble $\mathbf{\Delta_1}$ est donné par $\{\mathbf{x_4}\}$.

Ligne 5 de l'algorithme

$$\leadsto \mathbf{\Gamma_{i+1}} \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{J_{i+1}} \cup \mathbf{\Delta_{i+1}})$$

$\mathbf{\Gamma_{i+1}}$ regroupe les sommets qui ne sont inclus ni dans l'ensemble $\mathbf{J_{i+1}}$ ni dans $\mathbf{\Delta_{i+1}}$.

Pour l'exemple 3.2, l'ensemble $\mathbf{\Gamma_1}$ est donné par $\mathbf{X} \setminus (\{\mathbf{x_3}\} \cup \{\mathbf{x_4}\}) = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$.

Ligne 6 de l'algorithme

$$\leadsto \mathbf{\Gamma_{int}} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x_i} \in \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \text{il existe deux chemins } \mathbf{W} - \mathbf{\Gamma_{i+1}} \ P \text{ et } Q \text{ inclus dans } \mathbf{\Delta_{i+1}} \text{ tels que} \right.$$

$\beta(Q) = \mathbf{x_i}$ et P est un multiple strict de $Q\Big\}$, $\mathbf{\Gamma_{ext}} = \mathbf{\Gamma_{i+1}} \setminus \mathbf{\Gamma_{int}}$

Définition 3.5

Pour chaque chemin P, $\beta(P)$ donne le sommet de fin du chemin P.

Définition 3.6

Soit $\mathbf{V_0}$ un ensemble de sommets, un chemin $P = \mathbf{v_0} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1} \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v_s}$ est inclus dans $\mathbf{V_0}$ si $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_{s-1}}\} \subseteq \mathbf{V_0}$. De même, un ensemble de chemins est inclus dans $\mathbf{V_0}$ si tous les chemins qui le constituent sont inclus dans $\mathbf{V_0}$.

Définition 3.7

*Soient $P_1 = \mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \cdots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}$ et $P_2 = \mathbf{v_0^2} \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v_1^2} \xrightarrow{u_{j_2}} \cdots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v_{k_2}^2}$ deux chemins $\mathbf{V}$-$\mathbf{X}$. Le chemin P_1 est dit "*multiple*" de P_2 s'il existe un entier $j \leq k_1$ tel que $\mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \cdots \xrightarrow{u_{i_j}} \mathbf{v_j^1}$ et P_2 ne sont pas α-disjoints. Dans ce cas, si j_0 est le plus petit entier $j > 0$ tel que $\mathbf{v_0^1} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_1^1} \xrightarrow{u_{i_2}} \cdots \xrightarrow{u_{i_j}} \mathbf{v_j^1}$ et P_2 ne sont pas α-disjoints, alors $\sigma(P_1/P_2)$ désigne $\sigma(\mathbf{v_{j_0}^1} \xrightarrow{u_{i_{j_0+1}}} \cdots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v_{k_1}^1}) = u_{i_{j_0+1}} \cdot \ldots \cdot u_{i_{k_1}}$. La notation $P_1 \equiv P_2 \odot (u_{i_{j_0+1}} \cdot u_{i_{j_0+2}} \cdot \ldots \cdot u_{i_{k_1}})$ est aussi utilisée.*
*Si P_1 et P_2 ne sont pas α-disjoints, on écrit $\sigma(P_1/P_2) = 1$ et $P_1 \equiv P_2$. De plus, P_1 est un "*multiple strict*"de P_2 lorsque P_1 est un multiple de P_2 et que $\sigma(P_1/P_2) \neq 1$.*

Pour l'exemple 3.2, l'ensemble $\mathbf{\Gamma_{int}}$ est égale à l'ensemble $\mathbf{\Gamma_1}$ car les deux chemins formés ne sont pas α-disjoints. L'ensemble $\mathbf{\Gamma_{ext}}$ est donc un ensemble vide.

Ligne 7 de l'algorithme

$\hookrightarrow$ Calculer $\rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}})$

Définition 3.8

Soit $\aleph(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1})$ l'ensemble de tous les liens $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_1}$ α-disjoints inclus dans $\mathbf{\Delta_1}$. À chaque chemin $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_1}$ P inclus dans $\mathbf{\Delta_1}$, on associe une famille $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ complète $S(P)$ telle que :
- $S(P) = \emptyset$ lorsque P n'est pas un multiple strict d'un quelconque chemin $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ premier,
- Pour tout chemin Q_i $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ premier et $\forall\ \sigma_i \in \mathcal{M}(u)$ (ensemble de tous les monômes ordonnés en u_0, u_1, …, u_m), si $P \equiv Q_i \odot \sigma_i$ alors, soit $Q_i \odot \sigma_i \in S(P)$, soit $\exists\ Q_i' \odot \sigma_i \in S(P)$ tel que $\beta(Q_i) \neq \beta(Q_i')$ et $Q_i \equiv Q_i'$,
- $\forall\ Q_i \odot \sigma_i \in S(P)$, $longueur(Q_i) + longueur(\sigma_i) \leq card(\mathbf{\Delta_1}) + card(\mathbf{\Gamma_1})$.

• *Considérons deux ensembles de sommets* $\mathbf{V_0} \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ *et* $\mathbf{\Gamma_{int}} \subseteq \mathbf{X_C} \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_p}\}$. $\mathbf{X_C}$ *représente l'ensemble des sommets tels que* $\mathbf{x_i}$ *est relié par un arc à* $\mathbf{y_i}$ *pour* $i = 1, \ldots, p$. *Un chemin* Q_1 *est dit chemin* $\mathbf{W_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ *premier si* Q_1 *est un chemin* $\mathbf{V_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ *et s'il n'existe pas de chemins* $\mathbf{V_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ P *tel que* Q_1 *soit multiple strict de* P.

• *Pour tout ensemble* $\gamma \subseteq \mathbf{\Gamma_1}$, *on définit le nombre*

$$\rho_\alpha(\mathbf{W}, \gamma, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) \stackrel{def}{=} \max_{L_0 \in \aleph(\mathbf{W}, \gamma, \mathbf{\Delta_1})} \Big[card(L_0) \Big]$$

sous les contraintes :

Ca : $\forall P_0 \in L_0$, *si* $P_0 \equiv Q_0 \odot \sigma_0$ *alors* $Q_0 \odot \sigma_0 \notin \bigcup_{P \in L_0 \setminus \{P_0\}} S(P)$,

Cb : *aucun élément de* $S(P)$ *n'est un multiple strict d'un quelconque chemin* $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_{ext}}$

ou

si un élément de $S(P)$ *est un multiple strict d'un chemin* $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_{ext}}$ P', *alors*

$$\max_{L \in \aleph(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_{ext}} \setminus \{\beta(P')\}, \mathbf{\Delta_1})} card(L) = \max_{L' \in \aleph(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_{ext}}, \mathbf{\Delta_1})} card(L') - 1$$

où L *et* L' *contiennent seulement des chemins* $\bar{P}$ *satisfaisant* $S(\bar{P}) = \emptyset$.

Définition 3.9

• *Soient* $\mathbf{V_1}$ *et* $\mathbf{V_2}$ *deux ensembles de sommets. Un ensemble de* ℓ *chemins* $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α*-disjoints forme un lien* $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α*-disjoint. Les liens* $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α*-disjoints consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens* $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ α*-disjoints maximaux.*

Définition 3.10

S *est dite famille* $\mathbf{W_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ *complète lorsque* $\forall \ell = 1, \ldots, k$,

si $Q_\ell \odot \sigma_\ell \equiv P_1 \odot \sigma'_1 \equiv P_2 \odot \sigma'_2 \equiv \ldots \equiv P_s \odot \sigma'_s$, *avec pour tout* $i = 1, \ldots, s$, P_i *est un chemin* $\mathbf{W_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ *et* $\sigma'_i \neq 1$,

alors *il existe un sous ensemble* $S_0 = \{Q_{i_1} \odot \sigma_{k_1} \cdot \sigma'_{j_1}, Q_{i_2} \odot \sigma_{k_2} \cdot \sigma'_{j_2}, \ldots, Q_{i_t} \odot \sigma_{k_t} \cdot \sigma'_{j_t}\} \subseteq S \setminus \{Q_\ell \odot \sigma_\ell\}$ *et des chemins* $P'_1 \equiv Q_{i_1} \odot \sigma_{k_1}$, $P'_2 \equiv Q_{i_2} \odot \sigma_{k_2}$, $\ldots$, $P'_t \equiv Q_{i_t} \odot \sigma_{k_t}$, *tels que :*

Cond3. $\{P'_1, P'_2, \ldots, P'_t\}$ *constitue un lien* $\mathbf{W_0}$-$\{\beta(P_1), \ldots, \beta(P_s)\}$ α*-disjoint de taille* t,

Cond4. *la taille du lien* $\mathbf{W_0}$-$\{\beta(P_1), \ldots, \beta(P_s)\}$ α*-disjoint maximal parmi les chemins de* $\{P_1, P_2, \ldots, P_s, P'_1, P'_2, \ldots, P'_t\}$ *est égale à* t.

Par définition, $S = \emptyset$ est une famille $\mathbf{W_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ complète.

S est une famille $\mathbf{W_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ complète minimale lorsqu'aucune partie non vide de S ne

constitue une famille $\mathbf{W_0}$-$\mathbf{\Gamma_{int}}$ complète.

Pour l'exemple 3.2, il est possible de trouver deux liens, de dimension égale à un, donné par : P_1 ou P_2 avec $P_1 = \mathbf{w_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_1}$ et $P_2 = \mathbf{w_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_2}$. Au final, nous obtenons donc la valeur de $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) = 1$.

Ligne 8 de l'algorithme

↬ Si $\rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}) > \rho_i$ et $\rho_i < p$, alors

$\mathbf{\Omega_{i+1}} \overset{def}{=} \left\{\gamma \subseteq \mathbf{\Gamma_{i+1}},\ \text{card}\,(\gamma) = \rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \gamma, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}) = \rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}})\right\}$,
i=i+1, puis aller à l'***Étape i***

Si $\rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}, \mathbf{\Delta_{i+1}}, \mathbf{\Gamma_{i+1}}) > \rho_i$, cela signifie que la propagation à partir de l'ensemble $\mathbf{V_0}$ a évolué lors de l'étape i de l'algorithme. p donne la dimension des variables de sortie. Si la propagation a évolué, on passe à l'étape $i+1$ sauf si $\rho_i = p$ car cela signifie qu'elle n'évoluera plus. Avant de passer à l'étape suivante, il faut calculer le nouvel ensemble $\mathbf{\Omega_{i+1}}$.

Pour l'exemple 3.2, la valeur de $\rho_\alpha(\mathbf{V_0}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1})$ étant égale à ρ_0, nous passons à la ligne suivante de l'algorithme.

Ligne 9 de l'algorithme

↬ Sinon $\mathbf{\Gamma}_*(\mathbf{V_0}) = \mathbf{\Gamma_{i+1}}$, $\mathbf{\Delta}_*(\mathbf{V_0}) = \mathbf{\Delta_{i+1}}$, $\rho_*(\mathbf{V_0}) = \rho_\mathbf{i}$, $\mathbf{\Omega}_*(\mathbf{V_0}) = \mathbf{\Omega_i}$.

Cette dernière ligne donne les différents résultats utiles de l'algorithme en fonction du cas considéré. À présent, nous allons donc énoncer les résultats obtenus grâce à cet algorithme pour les trois cas d'étude souhaité :

– cas mono-défaut,
– cas multi-défauts simultanés,
– cas multi-défauts non simultanés.

Pour rappel, l'objectif de cet algorithme est de permettre la caractérisation de g-dim($C\mathcal{R}_H$) (et de g-dim($C\mathcal{R}_{H,E}$)). L'algorithme nous permet d'écrire le lemme 3.2 qui nous donne l'expression de g-dim($C\mathcal{R}_H$) en fonction de $\rho_*(\mathbf{W})$.

Lemme 3.2

Soit le système bilinéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$, l'égalité sui-

vante est vérifiée :

$$g\text{-}dim(C\mathcal{R}_H) = \rho_*(\mathbf{W})$$

La preuve du lemme 3.2 est donné en annexe.

Il nous est alors possible de donner les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires. Dans la section suivante, nous donnons cette condition dans le cas où le systèmes n'est soumis qu'à un seul défaut.

3.2.2 Cas où le système est soumis à un seul défaut

À partir des lemmes 3.1 et 3.2, il est alors aisé de déduire la proposition 3.1 donnant la condition de solubilité du problème de génération de résidus dans le cas d'un seul défaut.

Proposition 3.1

Soit le système bilinéaire structuré Σ^d_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma^d_\Lambda)$ et soumis à un seul défaut.

Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble si et seulement si :

$$\rho_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}\}) > \rho_*(\mathbf{W})$$

Preuve

D'après le lemme 3.2, on peut écrire que $g\text{-}dim(C\mathcal{R}_H) = \rho_*(\mathbf{W})$ et $g\text{-}dim(C\mathcal{R}_{H,E}) = \rho_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}\})$. Ainsi la condition du lemme 3.1 est équivalente à celle de la proposition 3.1. △

Remarque 3.2

Soit l_1 le nombre de liens $\mathbf{W}$-$\mathbf{Y}$ maximaux i.e. *$l_1 = card(\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}))$.*

Soit l_2 le nombre de liens $\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$ maximaux i.e. *$l_2 = card(\mathcal{L}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y}))$.*

Si $l_2 = l_1$, il est possible de conclure qu'il n'y a aucun chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$ et que le défaut f_1 ne peut être détecté.

Concernant l'exemple 3.2, comme $\rho_*(\mathbf{W})$ est égal à un, le problème de génération de résidus peut être résolu. En effet, en utilisant à nouveau l'algorithme, on peut montrer que

$\rho_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}\})$ est supérieur à $\rho_*(\mathbf{W})$.

Dans les deux parties suivantes, nous généralisons le résultat de la proposition 3.1 au cas multi-défauts simultanés dans un premier temps puis au cas multi-défauts non simultanés dans un deuxième temps.

3.2.3 Cas où le système est soumis à plusieurs défauts simultanés

Dans le cas de plusieurs défauts simultanés, on doit résoudre le problème de génération de résidus pour chaque composante de défaut f_i pour $i = 1, \ldots, q$. Ainsi, directement à partir de la proposition 3.1, on énonce le corollaire 3.1.

Corollaire 3.1

Soit le système bilinéaire structuré Σ^d_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma^d_\Lambda)$ et soumis à plusieurs défauts éventuellement simultanés.
Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ^d_Λ si et seulement si $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$

$$\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}) > \rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F} \setminus \{\mathbf{f_i}\})$$

3.2.4 Cas où le système est soumis à plusieurs défauts non simultanés

Dans le cas de plusieurs défauts non simultanés (à un instant donné seul un défaut peut survenir sur le système), le corollaire 3.2 donne la condition de solubilité du problème de génération de résidus.

Corollaire 3.2

Soit le système bilinéaire structuré Σ^d_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma^d_\Lambda)$ et soumis à plusieurs défauts ne survenant pas simultanément.
Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ^d_Λ si et seulement si $\forall\ i, j \in \{1, \ldots, q\}$, avec $i \neq j$

$$\Omega_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_i}\}) \neq \Omega_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_j}\})$$

L'ensemble $\Omega_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_i}\})$ peut être vu comme la signature associée au défaut f_i. Ainsi pour que le problème de génération de résidus soit soluble, il faut que les signatures soient toutes différentes deux à deux.

Les conditions de solubilité du problème de génération de résidus ont été données dans les cas de systèmes
– soumis à un seul défaut,
– soumis à plusieurs défauts simultanés et
– soumis à plusieurs défauts non simultanés.

Nous allons à présent chercher à étendre cette étude au cas où les conditions précédentes ne sont pas satisfaites. Contrairement à l'étude menée dans le chapitre consacrée à l'observabilité des systèmes bilinéaires, nous n'allons pas résoudre le problème de placement de capteurs afin de recouvrer les conditions d'observabilité. En effet, pour recouvrer la solubilité du BFPRG, il semble intéressant d'utiliser l'influence de la commande sur le problème de diagnostic et l'on se place alors dans un problème dit " actif " de diagnostic.

3.3 Problème actif de diagnostic

Habituellement, les problèmes de détection de défaut et de commande sont traités séparément. Il existe des études concernant les interactions entre ces deux problèmes mais elles sont principalement dédiées à l'utilisation de l'information de détection de défaut pour modifier la loi de commande (reconfiguration). En effet, dans la majorité des applications, le diagnostic n'est pas une fin en soi mais fait partie intégrante de la stratégie de commande d'un système. Comme il a été vu dans le chapitre introductif, peu de travaux sont dédiés à une deuxième vision de l'interaction commande/diagnostic qui est la détection active de défauts.

Le problème " classique" de génération de résidus consiste à trouver un filtre (3.2) tel que $r(t)$ permette la détection de $f(t)$ pour n'importe quelle entrée $u(t)$. On sait que dans le cas des systèmes bilinéaires, la détection de défauts est affectée par l'entrée de commande. En effet, une valeur spécifique de commande peut rendre possible la localisation d'un défaut qui n'est pas localisable pour toutes les valeurs de $u(t)$. D'autre part, une valeur spécifique de commande peut rendre impossible la localisation d'un défaut qui est localisable pour toutes

les autres valeurs de $u(t)$.

Considérons le système bilinéaire structuré Σ^d_Λ, on définit le problème actif de génération de résidus comme

Définition 3.11 *Problème actif de génération de résidus*
*Problème de trouver un filtre de la forme (3.2) tel qu'**il existe génériquement une entrée** $\mathbf{u(t)}$ **telle que***

- *si $f_i = 0$ alors r_i est insensible à w et à tout f_j avec $j \neq i$. Il doit tendre vers zéro quelles que soient l'entrée u et les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$.*
- *l'évolution de r_i est affectée par f_i* i.e. *le résidu prend une valeur non nulle à partir d'un temps t quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$.*

Dans un premier temps, nous allons illustrer la capacité de la commande à rendre soluble le problème de génération de résidus au travers de l'exemple 3.3.

Exemple 3.3

Soit le système $\Sigma_{3.3}$ représenté par le graphe orienté 3.3 et défini par les matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}.$$

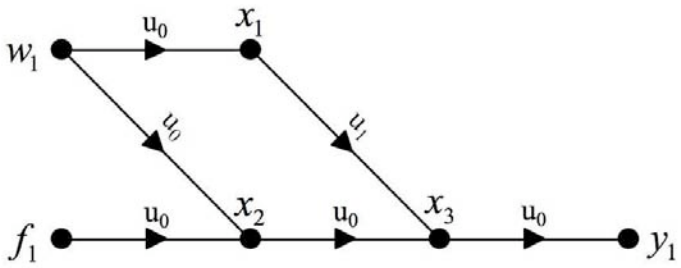


FIG. 3.3: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.3})$*

Nous pouvons écrire les dérivées successives de la sortie y_1. On obtient alors :

$y_1 = \lambda_6 x_3$

$\dot{y}_1 = \lambda_6(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1 x_1)$

$\ddot{y}_1 = \lambda_6\big(\lambda_1(\lambda_4 w_1 + \lambda_5 f_1) + \lambda_2 \dot{u}_1 x_1 + \lambda_2 u_1 \lambda_3 w_1\big) = \lambda_6\big(\lambda_1\lambda_5 f_1 + \lambda_2 \dot{u}_1 x_1 + (\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 u_1) w_1\big)$

Ainsi, si on fixe $u_1 = \frac{-\lambda_1\lambda_4}{\lambda_2\lambda_3}$ *on obtient alors* $\ddot{y}_1 = \lambda_1\lambda_5\lambda_6 f_1$ *et il devient possible de détecter le défaut* f_1 *et de le différencier de la perturbation* w_1*.*

À partir de cette exemple, il est illustré qu'il existe des valeurs particulières de l'entrée permettant la détection de défauts. Nous allons exclusivement nous intéresser au cas où les composantes d'entrée sont supposées constantes. Cette restriction peut être justifiée par le fait qu'en régime permanent, les entrées de commande peuvent être constantes, il est difficile de faire mieux et c'est le cas le plus simple et le plus réalisable. Cependant, il est possible de distinguer les trois cas distincts de composantes :

– constantes génériquement,
– nulles,
– constantes particulières.

Dans le cas de l'exemple 3.3, la solution donnée pour u_1 est une constante dite particulière car elle dépend des paramètres λ_i. Ce cas pourrait être étudié par l'intermédiaire d'un algorithme mais celui-ci serait basé, non plus sur notre approche graphique, mais sur les matrices du système. La représentation ne permet pas de pouvoir facilement caractériser les éventuelles compensations entre chemins (comme c'est le cas dans l'exemple 3.3). Cela étant d'autant plus vrai pour des composantes d'entrée non constantes, le choix de se restreindre au cas de composantes constantes (génériques ou nulles) se justifie.

Dans cette section, nous allons faire l'étude des deux cas cités précédemment. Dans un premier temps, nous considérons l'entrée de commande constante. Le système bilinéaire s'apparente alors à un système linéaire et en utilisant les résultats connus pour ce type de système, nous donnons les conditions de localisation des défauts. Dans un second temps, nous utilisons le fait qu'annuler une composante d'entrée de commande supprime des arcs de la représentation graphique. Dans ce cas, la condition de solubilité du BFPRG est énoncée.

3.3.1 Composantes d'entrée constantes différentes de zéro

Dans cette partie, on considère que chaque composante d'entrée de commande est constante générique ($u_i(t) = u_i$). Cette hypothèse peut être justifiée par le fait qu'en régime permanent, les entrées de commande peuvent être constantes. Dans ce cas, le système bilinéaire structuré Σ^d_Λ est équivalent au système linéaire structuré Σ^1_Λ (3.6) dont les paramètres dépendent des valeurs de la commande.

$$\Sigma^1_\Lambda : \begin{cases} \dot{x}(t) &= \tilde{A}_0 x(t) + Ef(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\tilde{A}_0 = A_0 + \sum_{\ell=1}^{m} u_\ell A_\ell$.

Comme il a été vu précédemment, le problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires peut être étudié en utilisant les conditions géométriques données par [Hammouri et al., 2001]. Cette approche nécessite la détermination de $\mathcal{R}_H$, le sous-espace $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-invariant minimal contenant H, et $\bar{O}_H$, le sous-espace $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-inobservable minimal contenant H. Le problème est soluble si et seulement si $E \notin \bar{O}_H$. Nous pouvons remarquer que cette étude ne tient pas compte de l'influence de l'entrée de commande sur la détection de défaut comme il est montré par l'exemple 3.4.

Exemple 3.4

Considérons le système bilinéaire structuré $\Sigma_{3.4}$ défini par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système est représenté par le graphe orienté sur la figure 3.4.

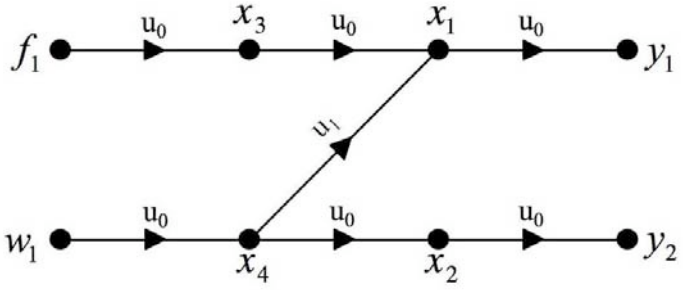


FIG. 3.4: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.4})$*

Pour cet exemple, on peut montrer que $\mathcal{R}_H = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3\lambda_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2\lambda_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *et*

$\bar{O}_H = \mathbb{R}^4$.

Alors, comme $E \in \bar{O}_H$, le problème de génération de résidus n'a pas de solution pour tout type d'entrée.

Si l'on considère maintenant que l'entrée est constante ($u_1(t) = u_1$), les matrices du système deviennent :

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_3 u_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le problème de génération de résidus est soluble en utilisant toujours les conditions géométriques de [Hammouri et al., 2001]. En effet, $\mathcal{R}_H = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3\lambda_4 u_1 \\ \lambda_2\lambda_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *et* $\bar{O}_H = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3\lambda_4 u_1 \\ \lambda_2\lambda_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Comme $E \notin \bar{O}_H$, le FPRG *est soluble.*

En conséquence, il apparaît pour cet exemple que le problème actif de génération de résidus a une solution tandis que le problème "classique" n'en a pas. La proposition 3.2 qui est basée sur les résultats de [Commault et al., 2002] donne une condition suffisante de solubilité du problème actif de génération de résidus. Cette condition est nécessaire et suffisante si l'on se restreint au cas d'entrées constantes génériques.

Proposition 3.2

Considérons le système bilinéaire structuré Σ_Λ. Le problème actif de génération de résidus est soluble si :

$$\rho(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{F}\}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) + card(\mathbf{F})$$

La preuve de cette proposition est identique à celle donnée dans [Commault et al., 2002].

Exemple 3.5

Soit le système $\Sigma_{3.4}$ représenté par la figure 3.4.

Dans un premier temps, on calcule $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ qui vaut 1 car il existe au plus un chemin $\mathbf{W}$-$\mathbf{Y}$.

Dans un second temps, on calcule $\rho(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}\}, \mathbf{Y}) = 2 = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) + card(\{\mathbf{f}\})$.

On conclut (comme à l'exemple 3.4) que le problème de génération de résidus est soluble.

Si cette condition n'est pas satisfaite, il peut être intéressant d'étudier les deux possibilités suivantes afin de détecter un défaut f_1. La première consiste à augmenter la valeur de $\rho(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y})$ (par ajout de capteurs au système) et la seconde consiste à diminuer la valeur de $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ (en utilisant l'influence de la commande). Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser à ce deuxième cas car diminuer la valeur de $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ peut se faire en considérant certaines composantes d'entrée nulles.
Les paramètres du système linéaire défini à l'équation (3.6) sont dépendants de la commande. Alors, il est possible de supprimer des éléments des matrices du système en fixant des composantés d'entrée à zéro. Cette annulation de certaines composantes d'entrée se reflète sur la représentation graphique par la suppression d'arcs. Cela peut ainsi permettre de rendre la détection de défaut possible comme il est illustré au travers de l'exemple 3.6.

Exemple 3.6

Considérons le système $\Sigma_{3.6}$ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.6})$ sur la figure 3.5.

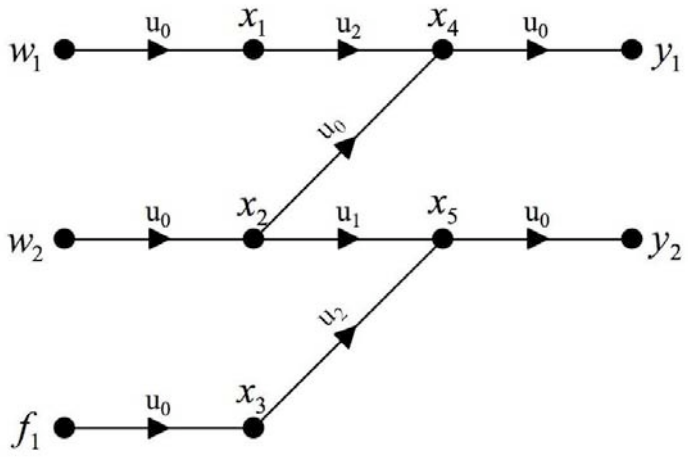


FIG. 3.5: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.6})$*

Pour cet exemple, dans le cas où les commandes sont considérées génériquement constantes, on a $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = 2$ et $\rho(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y}) = 2 \neq \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) + 1$. On conclut alors que la détection du défaut f_1 avec $u_1(t) = u_1$ (générique) est impossible. Mais, si on considère le système avec $u_1(t) = 0$, alors on obtient $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = 1$ et $\rho(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y}) = 2 = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) + 1$. La condition de la proposition 3.2 est satisfaite et il est possible de détecter le défaut f_1.

Dans la partie suivante nous allons dans un premier temps exprimer la condition de solubilité du BFPRG lorsque des composantes d'entrée de commande sont annulées. Cette condition pouvant être validée pour plusieurs ensembles de composantes à annuler, nous allons, dans

un deuxième temps, chercher à exprimer l'ensemble des solutions permettant de valider la condition énoncée.

3.3.2 Annulation de composantes d'entrée

Dans cette partie, nous allons donc considérer que l'entrée de commande est constante et que certaines de ses composantes peuvent être considérées comme nulles. Ainsi, on note $T = \{i \mid u_i \neq 0\}$ l'ensemble des entrées de commande qui sont différentes de zéro. Dans ce cas, le système bilinéaire structuré Σ^1_Λ est équivalent au système linéaire structuré $\Sigma^1_\Lambda(T)$ défini par :

$$\Sigma^1_\Lambda(T) : \begin{cases} \dot{x}(t) &= \hat{A}_0(T)x(t) + Ef(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\hat{A}_0(T) = A_0 + \sum_{i \in T} u_i A_i$.

Le graphe orienté associé à ce système $\Sigma^1_\Lambda(T)$ est défini par $\mathcal{G}(\Sigma^1_\Lambda(T)) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(T))$ avec $\mathcal{E}(T) = \bar{A}_0\text{-arcs} \bigcup_{i \in T} \bar{A}_i\text{-arcs}$.

On note $\rho_u(\mathbf{V_0}, \mathbf{V_1}, T)$ le nombre maximal de chemins $\mathbf{V_0}$-$\mathbf{V_1}$ disjoints sachant que les commandes sont génériquement constantes ou égales à zéro. Les composantes u_j avec $j \notin T$ sont telles que $u_j = 0$. À partir des résultats de [Commault et al., 2002], on déduit la proposition 3.3.

Proposition 3.3

Considérons le système bilinéaire structuré Σ_Λ. Le problème actif de génération de résidus est soluble si :

$$\exists\ T \ \textit{tel que}\ \rho_u(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}, T) = \rho_u(\mathbf{W}, \mathbf{Y}, T) + \textit{card}(\mathbf{F})$$

Comme la proposition 3.3 peut généralement être vérifiée pour plusieurs ensembles distincts T, il est intéressant d'établir une procédure afin d'obtenir tous ces ensembles T pour détecter le défaut.

Notre objectif dans la suite est de caractériser les entrées à annuler ou non afin de détecter un défaut f_1. La généralisation au cas multi-défauts non simultanés est simple en considérant

chaque défaut séparément. En revanche, la méthode semble bien plus complexe dans le cas multi-défauts simultanés, c'est pourquoi elle n'est pas traitée ici.

Si la condition de détection et localisation n'est pas vérifiée alors $\rho(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y})$ est égal à $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$. On peut en déduire que les liens appartenant à $\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ appartiennent nécessairement à $\mathcal{L}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y})$ alors $\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y})$. On peut également déduire que $l_2 \geq l_1$ avec $l_1 = \text{card}(\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}))$ et $l_2 = \text{card}(\mathcal{L}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y}))$.
Supposons que $\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{l_1}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y}) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{l_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{l_2}\}$. Les liens $\mathfrak{m}_i$ pour $i = 1, \ldots, l_1$ ne contiennent aucun chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$. De même, les liens $\mathfrak{m}_i$ pour $i = l_1 + 1, \ldots, l_2$ contiennent nécessairement un chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$.
Si $l_2 = l_1$, on peut conclure qu'il n'y a aucun chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$ et que le défaut f_1 ne peut être détecté sans l'ajout de capteur.

Considérons maintenant un lien maximal contenant un chemin à partir de $\{\mathbf{f_1}\}$, l'approche proposée consiste à comparer ce lien à tous les autres liens maximaux appartenant à $\mathcal{L}(\mathbf{W})$. Cette comparaison devant nous permettre de caractériser les solutions T de la proposition 3.3 nécessite de nouvelles définitions.

• Au chemin $P = \mathbf{v_{r_0}} \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v_{r_1}} \ldots \mathbf{v_{r_{k-1}}} \xrightarrow{u_{i_k}} \mathbf{v_{r_k}}$, on associe l'expression $\psi(P)$. Si le sommet de début $\mathbf{v_{r_0}}$ appartient à $\mathbf{W}$ alors l'expression est donnée par $\psi(P) = \mathsf{u_{i_1}}.\mathsf{u_{i_2}}.\ldots.\mathsf{u_{i_k}}$ avec $u_{i_j} \neq u_0$ pour $j = 1, \ldots, k$. Si le sommet de début $\mathbf{v_{r_0}}$ est le sommet $\{\mathbf{f_1}\}$ alors l'expression est donnée par $\psi(P) = \mathsf{u}_{\mathbf{i_1}}^{\infty}.\mathsf{u}_{\mathbf{i_2}}^{\infty}.\ldots.\mathsf{u}_{\mathbf{i_k}}^{\infty}$ avec $u_{i_j} \neq u_0$ pour $j = 1, \ldots, k$. $\psi(P)$ donne les composantes d'entrée de commande faisant partie du chemin mais elles n'apparaissent qu'une seule fois contrairement à la définition de l'indice $\sigma(P)$ d'un chemin. De plus, les termes ne sont pas nécessairement ordonnés. L'utilisation de termes à la puissance ∞ pour les chemins $\{\mathbf{f_1}\}$-racine sera justifiée par la suite.
Sur l'exemple 3.6, pour le chemin $P_1 = \mathbf{w_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1}$, l'expression $\psi(P)$ est donnée par $\psi(P_1) = \mathsf{u_1}$ alors qu'on a $\sigma(P_1) = u_0 \cdot u_1 \cdot u_0$.

• On note $P_f(\ell)$ le chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-racine appartenant à $\mathfrak{m}_\ell$. $\psi(P_f(\ell))$ permet de savoir quelles entrées apparaissent dans le chemin de $\{\mathbf{f_1}\}$ à $\mathbf{Y}$. L'intérêt réside dans le fait que l'on peut déduire les entrées ne devant pas être annulées afin de conserver le chemin $P_f(\ell)$ dans le lien $\mathfrak{m}_\ell$. On modifie donc l'expression $\psi(P_f(\ell))$ afin d'obtenir les commandes à une puissance infinie pour que celles-ci ne se simplifient pas lors de la recherche des commandes à

annuler. On sait que les commandes appartenant à $\psi(P_f(\ell))$ ne doivent pas être mises à zéro.

• À chaque lien maximal $\mathfrak{m}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{V_0}, \mathbf{V_1}) = \{P_1, \ldots, P_k\}$, on associe l'expression $\psi(\mathfrak{m}_i) = \psi(P_1) \cdot \psi(P_2) \cdot \ldots \cdot \psi(P_k)$. Cela permet de savoir quelles entrées apparaissent dans $\mathfrak{m}_i$. L'intérêt réside dans la connaissance des entrées pouvant être annulées afin de diminuer la taille de $\mathfrak{m}_i$. De plus, si une entrée u_k apparaît à la puissance l, cela signifie que supprimer la composante d'entrée u_k diminue la taille du lien $\mathfrak{m}_i$ de l.

Illustrons à présent la méthode à suivre sur l'exemple suivant.

Exemple 3.7

Considérons le système $\Sigma_{3.6}$ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.6})$ sur la figure 3.6.

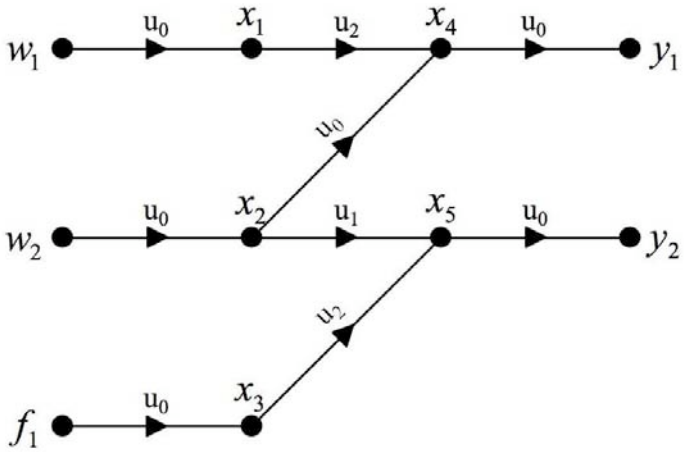


FIG. 3.6: *Graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{3.6})$*

Il existe quatre chemins $\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$. Ces chemins sont donnés par :

$$\begin{cases} P_1 = \mathbf{w_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_1} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_2 = \mathbf{w_2} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_1} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_2} \\ P_3 = \mathbf{w_2} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_2} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_4} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_1} \\ P_4 = \mathbf{f_1} \xrightarrow{u_0} \mathbf{x_3} \xrightarrow{u_2} \mathbf{x_5} \xrightarrow{u_0} \mathbf{y_2} \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour chaque chemin P_i est calculé l'expression associé $\psi(P_i)$ qui permet de caractériser les composantes d'entrée du chemin P_i. On obtient alors :

$$\begin{cases} \psi(P_1) = \boldsymbol{u_2} \\ \psi(P_2) = \boldsymbol{u_1} \\ \psi(P_3) = 1 \\ \psi(P_4) = \boldsymbol{u_2}^{\infty} \end{cases} \tag{3.9}$$

À partir des chemins P_1, P_2, P_3 et P_4, il est possible de former trois liens $\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$ maximaux et un lien $\mathbf{W}$-$\mathbf{Y}$ maximal. Nous pouvons en conclure que l_1 est égal à 1 et que l_2 est égal à 3.

Les liens $\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$ maximaux sont donnés par l'ensemble :

$$\mathcal{L}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f_1}\}, \mathbf{Y}) = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_4\}, \{P_3, P_4\}\} = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3\} \tag{3.10}$$

Le lien $\mathbf{W}$-$\mathbf{Y}$ maximal est donné par l'ensemble :

$$\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \mathfrak{m}_1 \tag{3.11}$$

Pour chaque lien maximal $\mathfrak{m}_i$ est calculé l'expression associé $\psi(\mathfrak{m}_i)$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \psi(\mathfrak{m}_1) = \psi(P_1) \cdot \psi(P_2) = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_2} \\ \psi(\mathfrak{m}_2) = \psi(P_1) \cdot \psi(P_4) = \boldsymbol{u_2}^{\infty} \\ \psi(\mathfrak{m}_3) = \psi(P_3) \cdot \psi(P_4) = \boldsymbol{u_2}^{\infty} \end{cases} \tag{3.12}$$

La méthode consiste à présent à comparer les liens $\mathfrak{m}_2$ et $\mathfrak{m}_3$ avec le lien $\mathfrak{m}_1$ par le calcul de $\mathcal{T}$. Pour cela, on introduit la définition d'une fonction dénommé cp.

Définition 3.12

La fonction $cp(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_\ell)$ permet de faire la comparaison entre les liens $\mathfrak{m}_i$ et $\mathfrak{m}_\ell$. Elle permet de déterminer les commandes à annuler afin de diminuer la taille du lien $\mathfrak{m}_i$ d'une plus grande valeur que celle du lien $\mathfrak{m}_\ell$ et est définie comme suit :
Si ψ_1/ψ_2 est l'expression de $\psi(\mathfrak{m}_i)/\psi(\mathfrak{m}_\ell)$ après toutes les simplifications alors $cp(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_\ell) = \psi_1$.

Pour cet exemple, nous avons donc $cp(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \boldsymbol{u_1}$. En utilisant cette fonction, il est ainsi possible de déterminer les différentes composantes de commande à annuler afin de recouvrer la condition de solubilité du BFPRG. *Pour cela, nous définissons l'ensemble noté $N(\ell)$.*

Définition 3.13

$N(\ell)$ indique les commandes appartenant à $\psi(\mathfrak{m}_i)$ pour $i = 1, \ldots, l_1$ et de puissance plus élevée que dans $\psi(\mathfrak{m}_\ell)$. Il donne l'information des commandes à annuler afin d'obtenir $card(\mathfrak{m}_\ell) > card(\mathfrak{m}_i)$ pour $i = 1, \ldots, l_1$.
$N(\ell) = \{cp(1,\ell), cp(2,\ell), \ldots, cp(l_1,\ell)\}$.

D'autre part, l'information donnée par $\psi(P_f(\ell))$ nous permet de définit les composantes de commande à ne pas annuler.

Définition 3.14

$D(\ell)$ qui indique les commandes à ne pas annuler afin de sauvegarder le chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$ appartenant au lien $\mathfrak{m}_\ell$ est défini par $D(\ell) = \psi(P_f(\ell))$.

Dans notre exemple, nous allons dans un premier temps faire la comparaison des liens $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ par le calcul de $N(2)$ et $D(2)$.

$$\begin{aligned} N(2) &= cp(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \boldsymbol{u_1} \\ D(2) &= \boldsymbol{u_2}^\infty \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dans un second temps, nous faisons la comparaison des liens $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_3$.

$$\begin{aligned} N(3) &= cp(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_3) = \boldsymbol{u_1} \\ D(3) &= \boldsymbol{u_2}^\infty \end{aligned} \tag{3.14}$$

Avec ces définitions, nous sommes désormais capables de caractériser les commandes devant être annulées (afin de diminuer la taille des liens $\mathbf{W}$-$\mathbf{Y}$) et celles devant être différentes de zéro (afin de préserver un chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$). Cela nous permettra d'obtenir toutes les solutions permettant de vérifier la proposition 3.3. Celles-ci sont données par l'ensemble $\mathcal{T}$ qui est obtenu de la manière suivante.

Définition 3.15

À partir de l'expression de $N(\ell)$, on peut débuter la caractérisation des solutions $\mathcal{T}$ décomposées en sous-ensembles $\mathcal{T}(\ell)$. Sachant que la forme générale de $N(\ell)$ est $\{u^1_{k_1} \cdot u^1_{k_2} \cdot \ldots \cdot u^1_{k_s}, u^2_{k_{11}} \cdot \ldots \cdot u^2_{k_t}, \ldots\}$ où $u^1_{k_1} \cdot u^1_{k_2} \cdot \ldots \cdot u^1_{k_s}$ est le résultat de $cp(1,\ell)$, l'ensemble $\mathcal{T}(\ell)$ est constitué de sous-ensembles de la forme $\{u^1_i, u^2_j, \ldots, u^{l_1}_k\}$ où, il existe au moins un élément appartenant à $cp(a,\ell)$ pour tout $a = 1, \ldots, l_1$.

On utilise alors l'expression de $D(\ell)$ pour finaliser la caractérisation de $\mathcal{T}(\ell)$. Si $D(\ell)$ est de la forme $u_{\mathbf{i_1}}^{\infty}.u_{\mathbf{i_2}}^{\infty}.\ldots.u_{\mathbf{i_k}}^{\infty}$ alors à chaque sous-ensemble appartenant à $\mathcal{T}(\ell)$ sont ajoutés les éléments $\bar{u}_{\mathbf{i_1}}, \bar{u}_{\mathbf{i_2}}, \ldots, \bar{u}_{\mathbf{i_k}}$.

Pour notre exemple, à partir de $N(2)$ et $D(2)$, l'ensemble $\mathcal{T}(2)$ est donné par $\mathcal{T}(2) = \{u_{\mathbf{1}}, \bar{u}_{\mathbf{2}}\}$. À partir de $N(3)$ et $D(3)$, l'ensemble $\mathcal{T}(3)$ est donné par $\mathcal{T}(3) = \{u_{\mathbf{1}}, \bar{u}_{\mathbf{2}}\} = \mathcal{T}(2)$.

Au final, on obtient $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(2), \mathcal{T}(3)\} = \{\{u_{\mathbf{1}}, \bar{u}_{\mathbf{2}}\}, \{u_{\mathbf{1}}, \bar{u}_{\mathbf{2}}\}\}$. On conclut que le problème actif de génération de résidus est soluble si $u_1 = 0$ et $u_2 = constante \neq 0$.

La proposition 3.4 permet de caractériser l'ensemble des solutions de la proposition 3.3.

Proposition 3.4

Considérons le SBLS Σ_Λ. *Dans le cas où toutes les entrées sont constantes, le* SBLS Σ_Λ *est équivalent au système linéaire structuré Σ_Λ^1. Le problème actif de génération de résidus est soluble si :*

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(l_1 + 1), \ldots, \mathcal{T}(l_2)\} \neq \emptyset$$

De plus, toutes les solutions sont données par l'ensemble $\mathcal{T}$. Soit $s_1 = \{\bar{u}_{\mathbf{i}}, \ldots, u_{\mathbf{j}}, \ldots\}$ un élément de $\mathcal{T}$. Si $\bar{u}_{\mathbf{i}} \in s_1$ alors u_i ne doit pas être annulée (elle permet de sauvegarder au moins un chemin $\{\mathbf{f_1}\}$-$\mathbf{Y}$). Si $u_{\mathbf{j}} \in s_1$ alors u_j doit être annulée. Si $u_{\mathbf{k}} \notin s_1$ et $\bar{u}_{\mathbf{k}} \notin s_1$ alors u_k peut être indifféremment nulle ou pas.

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps donné des conditions graphiques nécessaires et suffisantes à la solubilité du problème de génération de résidus. Ces conditions ont été exprimées dans trois cas distincts : (1) le cas mono-défaut, (2) le cas multi-défauts simultanés et (3) le cas multi-défauts non simultanés. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au problème de diagnostic actif. On utilise alors la commande dans le but de rendre un défaut détectable. Nous avons choisi de considérer la dérivée de la commande nulle (régime permanent) dans cette optique. Le problème s'est alors divisé en trois cas distincts. Le premier correspond à une entrée génériquement constante, nous avons alors utilisés les résultats connus pour les systèmes linéaires afin d'exprimer les conditions de solubilité du problème. Le second cas correspond à une partie des entrées mises à zéro : nous avons alors donné une proposition afin d'obtenir toutes les solutions permettant de résoudre ce

problème. Enfin, il a été justifié de ne pas traiter le troisième et dernier cas correspondant à des composantes d'entrée constantes particulières. La représentation graphique ne permet pas de caractériser aisément les compensations entre chemins pouvant se faire en fonction de valeurs particulières de commande. Cela est vrai pour des valeurs constantes de commande mais également pour des cas de commande de type polynômial.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont abordé deux propriétés importantes pour la classe des systèmes bilinéaires structurés. La première partie était dédié à l'étude de la propriété d'observabilité tandis que la seconde a traité le problème de détection et localisation de défauts. L'outil principal pour ces travaux est la théorie des graphes, en particulier les analyses sur les graphes orientés $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ et biparti $\mathcal{B}(\Sigma_\Lambda)$ associés au système Σ_Λ.

Les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'ensemble de l'état sont connues par d'autres approches (géométrique et algébrique) [Grasselli and Isidori, 1977] que l'approche graphique. Cependant, ces résultats sont difficilement exploitables en considérant des systèmes structurés. Nous nous sommes alors intéressés à l'approche graphique dont l'intérêt de son utilisation sur des systèmes structurés a été montré sur les systèmes linéaires [Dion et al., 2003]. Les approches graphiques [Svaricek, 1993] menées jusqu'à présent permettaient d'obtenir des conditions uniquement suffisantes à l'observabilité de systèmes bilinéaires structurés. Notre travail a permis de donner des conditions graphiques nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'ensemble ou d'une partie de l'état pour ce type de système. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, nous avons étudié un placement de capteurs permettant de recouvrer la propriété d'observabilité en utilisant les travaux de [Trinh, 2008]. Dans le cas de l'observabilité de l'ensemble de l'état, il existe deux conditions (de connexion à la sortie et de couplage maximal) à recouvrer. Le graphe orienté du système permet de caractériser les manques pour la première condition alors que la présence de contraction est caractérisée par le graphe biparti. On utilise alors une décomposition proche de celle donnée par Dulmage-Mendelsohn [Murota, 1987] afin de déterminer un nombre minimal de capteurs permettant de recouvrer la condition. Au final, les capteurs additionnels permettant au système étendu d'être observable sont en quantité minimale.

En second lieu, nos travaux ont abordé le problème de détection et localisation de défauts. Comme pour la propriété d'observabilité, les conditions existantes [Hammouri et al., 2001] pour la solubilité du problème de génération de résidus sont difficiles à mettre en œuvre pour des systèmes bilinéaires structurés. En utilisant les graphes orientés associés aux systèmes bilinéaires structurés, nous avons pu caractériser une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble. Par la suite, et comme dans la partie dédiée à l'observabilité, nous donnons une méthode permettant de recouvrer cette condition. Mais, plutôt que de passer par un placement de capteurs additionnels, nous avons utilisé le diagnostic dit actif qui consiste à utiliser la commande afin d'atteindre le but souhaité. Nous avons alors étudié les deux cas suivants : (1) l'ensemble de l'entrée est constante et (2) on considère certaines commandes nulles. Dans ces deux cas, on utilise les résultats connus pour les systèmes linéaires [Commault et al., 2002] afin de donner les conditions de solubilité du problème de FDI.

Afin de compléter nos travaux certaines perspectives peuvent être envisagées. Ces perspectives peuvent, par exemple se fonder sur les idées suivantes.

- La première idée est de prendre en compte le coût des capteurs. Certains capteurs ont en effet un coût plus élevé que d'autres en fonction de la grandeur physique à mesurer. Donc, la considération de coût de chaque capteur pour trouver une solution à coût minimal pour le problème de placement de capteurs est aussi intéressante que de trouver une solution au nombre minimal de capteurs. Il serait même plus intéressant de gérer les deux contraintes simultanément et de chercher un compromis entre les deux.
- La deuxième idée est de compléter la boîte à outils LISA créée au laboratoire. Cette boîte à outils permet de créer un graphe très simplement et de savoir en quelques clics si le système est observable ou non.
- Le placement de capteurs réalisé afin de recouvrer la condition d'observabilité d'une partie de l'état ne permet pas d'obtenir un nombre minimal de capteurs. Il serait souhaitable de rendre ce positionnement de nouvelles mesures minimale. Cependant, à l'heure actuelle, il semble difficile de caractériser un nombre minimal de capteurs et nous n'avons pas encore la clé pour retirer ce verrou.
- Dans la partie consacrée au diagnostic actif, la caractérisation de l'ensemble $\mathcal{T}$ permettant de déterminer les composantes d'entrée à annuler afin de valider la condition de détection de défauts n'est valable que pour le cas mono-défaut et le cas multi-défaut non simultanés. L'extension au cas multi-défaut simultanés reste à faire. Une piste d'étude

serait de modifier la fonction de comparaison de lien (fonction cp) afin de prendre en compte le fait que la dimension d'un lien $\mathbf{W}$-$\mathbf{Y}$ doit diminuer d'une valeur pouvant être supérieure à 1 par rapport à un lien $\mathbf{W} \cup \mathbf{F}$-$\mathbf{Y}$. Pour rappel, la condition à vérifier est $\rho_u(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}, T) = \rho_u(\mathbf{W}, \mathbf{Y}, T) + \text{card}(\mathbf{F})$.

Glossaire

$\theta(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ nombre maximal d'arcs disjoints dont les sommets de début sont dans $\mathbf{V_1}$ et les sommets de fin dans $\mathbf{V_2}$.

$\rho(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ nombre maximal de chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ disjoints.

$\theta_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ nombre maximal d'arcs A-disjoints dont les sommets de début sont dans $\mathbf{V_1}$ et les sommets de fin dans $\mathbf{V_2}$.

$\rho_v(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ nombre maximal de chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ v-disjoints.

$\rho_A(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ nombre maximal de chemins $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ A-disjoints.

$\mu_{X,Y}(\mathbf{V_1}, \mathbf{V_2})$ nombre minimal de sommets dans $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ couverts par un lien $\mathbf{V_1}$-$\mathbf{V_2}$ maximal.

$\rho_u(\mathbf{V_0}, \mathbf{V_1}, T)$ nombre maximal de chemins $\mathbf{V_0}$-$\mathbf{V_1}$ disjoints sachant que les commandes sont génériquement constantes ou égales à zéro. Les composantes u_j avec $j \notin T$ sont telles que $u_j = 0$.

Bibliographie

[Bartosiewicz, 1995] Bartosiewicz, Z. (1995). Local observability of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 25(4) :295–298.

[Bornard and Hammouri, 2002] Bornard, G. and Hammouri, H. (2002). A graph approach to uniform observability of nonlinear multi output systems. In *41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 701–706, Las Vegas, Nevada USA.

[Boukhobza and Hamelin, 2007] Boukhobza, T. and Hamelin, F. (2007). Observability analysis for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach. *Automatica*, 43(11) :1968–1974.

[Boukhobza et al., 2008] Boukhobza, T., Hamelin, F., and Canitrot, S. (2008). A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems. *International Journal of Control*, 81(4) :661–678.

[Brockett, 1972] Brockett, R. (1972). On the algebraic structure theory of bilinear systems. *Academic*, pages 153–168.

[Bruni et al., 1974] Bruni, C., Di Pillo, G., and Koch, G. (1974). Bilinear systems : an appealing class of nearly linear systems in theory and application. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19 :334–348.

[Bruni et al., 1980] Bruni, C., Gandolfi, A., and Germani, A. (1980). Observability of linear-in-the-state systems : a functionnal approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25(3) :566–567.

[Campbell and Nikoukhah, 2004] Campbell, S. and Nikoukhah, R. (2004). *Auxiliary signal design for failure detection*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[Canitrot et al., 2008a] Canitrot, S., Boukhobza, T., and Hamelin, F. (2008a). Observability recovering by additional sensor implementation in structured bilinear systems. *Institution of Engineering and Technology - Control Theory and Applications*, 2(10) :860–865.

[Canitrot et al., 2008b] Canitrot, S., Boukhobza, T., and Hamelin, F. (2008b). Partial observability in structured bilinear systems using a graphical approach. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1447–1452, Ajaccio, France.

[Canitrot et al., 2007] Canitrot, S., Boukhobza, T., Hamelin, F., and Martinez-Martinez, S. (2007). Control/fault diagnosis interactions analysis for structured bilinear systems. In *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC)*, Foz do Iguaçu.

[Chamseddine et al., 2007] Chamseddine, A., Noura, H., and Raharijaona, T. (2007). Optimal sensor network design for observability of complex systems. In *26th American Control Conference*, pages 1705–1710, New-York, USA.

[Commault et al., 1991] Commault, C., Dion, J. M., and Perez, A. (1991). Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 :884–887.

[Commault et al., 2002] Commault, C., Dion, J.-M., Sename, O., and Motyeian, R. (2002). Observer-based fault detection and isolation for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12) :2074–2079.

[D'Allessandro et al., 1974] D'Allessandro, P., Isidori, A., and Ruberti, A. (1974). Realization and structure theory of bilinear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 12 :517–535.

[D'Angelo, 1970] D'Angelo, H. (1970). *Linear time varying systems : analysis and synthesis.* Allyn and Bacon, Boston, U.S.A.

[De Persis and Isidori, 2000] De Persis, C. and Isidori, A. (2000). On the observability codistributions of a nonlinear system. *System & Control Letters*, 40(5) :297–304.

[De Persis and Isidori, 2001a] De Persis, C. and Isidori, A. (2001a). A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6) :853–865.

[De Persis and Isidori, 2001b] De Persis, C. and Isidori, A. (2001b). To design of a fault detection filter with game-theoretic-optimal sensitivity. In *IFAC Nonlinear Control Systems*, Saint-Petersburg, Russia.

[Deylon, 2001] Deylon, B. (2001). A note on uniform observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8) :1326–1327.

[Dion et al., 2003] Dion, J.-M., Commault, C., and van der Woude, J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) :1125–1144.

[Diop and Fliess, 1991] Diop, S. and Fliess, M. (1991). On nonlinear observability. In *European Control Conference*, pages 152–157, Grenoble, France.

[Elliot, 1998] Elliot, D. (1998). Bilinear systems. *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*.

[Fliess, 1981] Fliess, M. (1981). The unobservability ideal for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(2) :592–593.

[Fliess, 1982] Fliess, M. (1982). A remark on nonlinear observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-27(2) :489–490.

[Frank, 1996] Frank, P. (1996). Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results. *European Journal of Control*, 2(1) :6–28.

[Gertler, 1991] Gertler, J. (1991). Analytical redundancy methods in fault detection and isolation - survey and synthesis. In *SAFEPROCESS '91*, volume 1, pages 9–21, Baden-Baden.

[Gertler, 1998] Gertler, J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems.* Marcel Dekker, New-York, USA.

[Grasselli and Isidori, 1977] Grasselli, O. and Isidori, A. (1977). Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear processes. In *IEEE Joint Automatic Control Conference*, pages 1423–1427, San Francisco, USA.

[Hammouri et al., 2001] Hammouri, H., Kabore, P., and Kinnaert, M. (2001). A geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9) :1451–1455.

[Hammouri et al., 1999] Hammouri, H., Kinnaert, M., and El Yaagoubi, E. (1999). Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10) :1879–1884.

[Hermann and Krener, 1977] Hermann, R. and Krener, A. J. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22(5) :728–740.

[Isidori and Ruberti, 1973] Isidori, A. and Ruberti, A. (1973). Realization theory of bilinear systems. *D. Reidel*, pages 83–130.

[Johnston et al., 1984] Johnston, R., Barton, G., and Brisk, M. (1984). Determination of the generic rank of structural matrices. *International Journal of Control*, 40(2) :257–264.

[Kou et al., 1973] Kou, S., Elliot, D., and Tarn, T. (1973). Observability of nonlinear systems. *Information and Control*, 22(1) :89–99.

[Kratz and Liebscher, 1998] Kratz, W. and Liebscher, D. (1998). A local characterization of observability. *Linear Algebra and Its Applications*, 269(1) :115–137.

[Kucera, 1979] Kucera, V. (1979). *Discrete Linear Control : The Polynomial Equation Approach*. Wiley.

[Lin, 1974] Lin, C.-T. (1974). Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(3) :201–208.

[Linnemann, 1981] Linnemann, A. (1981). Decoupling of structured systems. *System & Control Letters*, 1(2) :79–86.

[Massoumnia, 1986] Massoumnia, M. A. (1986). A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31(9) :839–846.

[Massoumnia et al., 1989] Massoumnia, M.-A., Verghese, G. C., and Willsky, A. S. (1989). Failure detection and identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(3) :316–321.

[Mohler, 1991] Mohler, R. (1991). *Nonlinear systems : Volume I, Dynamics and Control, Volume II, Applications to Bilinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey.

[Mohler and Kolodziej, 1980] Mohler, R. and Kolodziej, W. (1980). An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-10 :683–688.

[Murota, 1987] Murota, K. (1987). *System Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag, New York, USA.

[Murota, 2000] Murota, K. (2000). *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, volume 20 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, Berlin.

[Niemann, 2006] Niemann, H. (2006). A setup for active fault diagnosis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9) :1572–1578.

[Ohta and Kodama, 1985] Ohta, Y. and Kodama, S. (1985). Structural invertibility of transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30 :818–819.

[Ould Bouamama et al., 2000] Ould Bouamama, B., Dauphin-Tanguy, G., Staroswiecki, M., and Amo-Bravo, D. (2000). Bond graph analysis of structural fdi properties in mechatronic systems. In *IFAC Conference on Mechatronic Sytems*, volume 3, pages 1057–1062, Darmstadt, Germany.

[Patton and Chen, 1994] Patton, R. and Chen, J. (1994). A review of parity space approaches to fault diagnosis for aerospace systems. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 17(2) :278–285.

[Patton et al., 1989] Patton, R., Frank, P., and Clark, R. (1989). *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application*. Prentice-Hall.

[Patton et al., 2000] Patton, R., Frank, P., and Clark, R. (2000). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer-Verlag.

[Reinschke, 1988] Reinschke, K. (1988). *Multivariable control. A graph theoretic approach*. Springer, New York, USA.

[Samantaray et al., 2006] Samantaray, A., Medjaher, K., Ould Bouamama, B., Staroswiecki, M., and Dauphin-Tanguy, G. (2006). Diagnostic bond graphs for online fault detection and isolation. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 14(3) :237–262.

[Staroswiecki and Comtet-Varga, 2001] Staroswiecki, M. and Comtet-Varga, G. (2001). Analytical redundancy relations for fault detection and isolation in algebraic dynamic systems. *Automatica*, 37(5) :687–699.

[Staroswiecki et al., 2004] Staroswiecki, M., Hoblos, G., and Aitouche, A. (2004). Sensor network design for fault tolerant estimation. *Internation Journal of Adaptative Control and Signal Processing*, 18 :55–72.

[Suda et al., 1989] Suda, N., Wan, B., and Ueno, I. (1989). The orders of infinite zeros of structured systems. *Transactions of the Society of Instrument Control Engineers*, 25 :346–348.

[Svaricek, 1993] Svaricek, F. (1993). A graph-theoretic approach for the investigation of the observability of bilinear systems. In *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, volume 4, pages 351–354, Sydney, Australia.

[Trinh, 2008] Trinh, D. (2008). *Analyse structurelle de la localisation et de la classification de capteurs*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Grenoble.

[van der Woude, 1991a] van der Woude, J. (1991a). A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 4(1) :33–40.

[van der Woude, 1991b] van der Woude, J. (1991b). On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and Its Applications*, 148 :145–169.

[Vidyasagar, 1980] Vidyasagar, M. (1980). On the well-posedness of large-scale interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25(3) :413–421.

[Williamson, 1977] Williamson, D. (1977). Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254.

[Wonham, 1985] Wonham, W. (1985). *Linear multivariable control : a geometric approach*, volume 10 of *Applications of mathematics*. Springer-Verlag.

[Youla et al., 1976a] Youla, D., Bongiorno, J., and Jabr, H. (1976a). Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part i : the single-input-output case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(1) :3–13.

[Youla et al., 1976b] Youla, D., Jabr, H., and Bongiorno, J. (1976b). Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part ii : the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(3) :319–338.

Annexe A

Preuve du lemme 3.2

La preuve du lemme 3.2 nécessite la définition du corollaire A.1.

Corollaire A.1

Soit le SBLS *(Σ_Λ) représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$.*

St1 *pour presque toutes les matrices structurées B telles que $\mathcal{C}ouplages(e_\Gamma B) = \mathbf{\Omega_1}$, on a g-dim$(C\mathcal{R}_H)$ = g-dim$(C\mathcal{R}_B)$, où $\mathcal{R}_B$ est le sous-espace (C, A_j) invariant minimal incluant Im(B), avec $j = 0, \ldots, m$.*

St2 *si $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ alors g-dim$(C\mathcal{R}_H) = \rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1})$.*

Preuve

St1. *On sait qu'il existe une matrice structurée B_1 telle que $\mathcal{R}_0 \subseteq U_1 + Im(B_1) \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$, où $\mathcal{R}_{B_1}$ est le sous-espace (C, A_j) invariant minimal incluant Im(B_1), avec $j = 0, \ldots, m$. Supposons à présent que $\mathcal{R}_i \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$ est vraie jusqu'à $i = i_0$. À partir de la séquence (3.4) (cf page 81), on sait que $\mathcal{R}_{i_0+1} = \mathcal{R}_{i_0} + \sum_{j=0}^{m} A_j(\mathcal{R}_{i_0} \cap \ker(C))$. Comme $U_1 \subseteq \ker(C)$ et $\sum_{j=0}^{m} A_j U_1 \subseteq U_1 + Im(B_1)$, on peut écrire que $\mathcal{R}_{i_0+1} \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1} + U_1 + Im(B_1) + \sum_{j=0}^{m} A_j(\mathcal{R}_{B_1} \cap \ker(C)) \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$.*

Ainsi, $\mathcal{R}_i \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$ est vrai pour tout entier $i \geqslant 0$ et on en déduit que $\mathcal{R}_H \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$. De plus, comme Im$(B_1) \subseteq \mathcal{R}_H$ qui implique que $\mathcal{R}_{B_1} \subseteq \mathcal{R}_H$, on an alors $\mathcal{R}_{B_1} \subseteq \mathcal{R}_H \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$. Comme $C\mathcal{R}_{B_1} \subseteq C\mathcal{R}_H \subseteq C(U_1 + \mathcal{R}_{B_1})$ et $U_1 \subseteq \ker(C)$, on obtient $C\mathcal{R}_H = C\mathcal{R}_{B_1}$. On en conclut que g-dim$(C\mathcal{R}_H)$ = g-dim$(C\mathcal{R}_{B_1})$ et comme cette égalité est vraie pour au moins une matrice structurée B_1, alors elle est également vraie pour presque toutes les matrices structurées B telles que $\mathcal{C}ouplages(e_\Gamma B) = \mathbf{\Omega_1}$.

St2. $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ *est équivalent au fait qu'il existe une matrice structurée* B_1 *telle que g-rang*(B_1) *= g-rang*$(e_\Gamma B_1) = \rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$.
En premier lieu, de par la définition de $\mathbf{\Gamma_1}$ *et* $\mathbf{\Delta_1}$, $(\mathbf{\Gamma_1} \cup \mathbf{\Delta_1}) \cap \mathbf{X_C} = \mathbf{\Gamma_1} \cap \mathbf{X_C}$. *De plus, de par la structure de la matrice* C, *on sait que* $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{X_C} \cap \mathbf{\Gamma_1})$. *En second lieu, chaque lien* $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_1} \cap \mathbf{X_C}$ *maximal peut être associé à des familles complètes telles que la contrainte* ***Ca*** *(cf page 81) soit satisfaite. Ainsi, pour chaque lien* $\mathbf{W}$-$\mathbf{\Gamma_1} \cap \mathbf{X_C}$ *maximal* $\mathcal{L}$, *il existe* $\gamma \in \mathbf{\Omega_1}$ *tel que* $\beta(\mathcal{L}) \subseteq \gamma$. *De plus,* $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \leqslant$ *g-rang*$(CB_1) = max_{\gamma \in \mathbf{\Omega_1}, \gamma \subseteq \mathbf{X_C}} card(\gamma) \leqslant max_{\gamma \in \mathbf{\Omega_1}} card(\gamma)$.
Par conséquent, on sait en général que $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \leqslant$ *g-rang*$(CB_1) \leqslant$ *g-rang*(B_1).
Ainsi, si l'égalité ***St2*** *est satisfaite* i.e. $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ *alors cela signifie que* $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) \leqslant$ *g-rang*(CB_1). *Comme par définition* $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) =$ *g-rang*(B_1), *on a alors g-rang*$(B_1) \leqslant$ *g-rang*(CB_1) *qui implique que g-rang*$(B_1) =$ *g-rang*(CB_1).
Alors, g-dim$(Im(B_1) \cap \ker(C)) = 0$ *et par conséquent* $\mathcal{R}_{B_1} = Im(B_1)$. *En utilisant la relation* ***St1*** *prouvée ci-dessus, on a alors g-dim*$(C\mathcal{R}_H) =$ *g-dim*$(C\mathcal{R}_{B_1}) =$ *g-rang*$(CB_1) =$ *g-rang*$(B_1) = \rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Delta_1}, \mathbf{\Gamma_1}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$. △

On rappelle alors le lemme 3.2 avant de donner la preuve correspondante.

Lemme 3.2

Soit le système bilinéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{g-dim}(C\mathcal{R}_H) = \rho_*(\mathbf{W})$$

Preuve *Soit* κ *le premier entier tel que* $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_{\kappa+1}}, \mathbf{\Delta_{\kappa+1}}, \mathbf{\Gamma_{\kappa+1}}) = \rho_\kappa = max_{\gamma \in \Omega_k} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$.
À partir du ***St1*** *du corollaire A.1, on peut écrire que g-dim*$(C\mathcal{R}_H) =$ *g-dim*$(C\mathcal{R}_{B_1})$ *pour presque toutes les matrices structurées* B_1 *telles que* $\mathcal{C}ouplages(B_1)$ *est égal à* $\mathbf{\Omega_1}$. *De plus, si on note* $\mathbf{W'} = \{\mathbf{w'_1}, \ldots, \mathbf{w'_{d'}}\}$, *avec* $d' = \rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_{i-1}}, \mathbf{\Delta_{i-1}}, \mathbf{\Gamma_{i-1}})$, *un sous-ensemble virtuel de sommets connectés au sous-ensemble de sommets* $\mathbf{X}$ *par les arcs virtuels notés* B_i*-arcs* $= \{(\mathbf{w'_k}, \mathbf{x_j}) | B_i(j,k) \neq 0\}$, *on sait que* $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_i}, \mathbf{\Delta_i}, \mathbf{\Gamma_i}) = \rho_\alpha(\mathbf{W'}, \mathbf{\Gamma_i}, \mathbf{\Delta_i}, \mathbf{\Gamma_i})$. *On peut alors généraliser le* ***St1*** *du corollaire A.1 et on obtient itérativement g-dim*$(C\mathcal{R}_H) =$ *g-dim*$(C\mathcal{R}_{B_1}) =$ *g-dim*$(C\mathcal{R}_{B_2}) = \ldots =$ *g-dim*$(C\mathcal{R}_{B_\kappa})$ *pour presque toutes les matrices structurées* B_i, $1 \leq i \leq \kappa + 1$, *telles que* $\mathcal{C}ouplages(e_{\Gamma_i} B_i)$ *est égal à* $\mathbf{\Omega_i}$.
De plus, comme $\rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_{\kappa+1}}, \mathbf{\Delta_{\kappa+1}}, \mathbf{\Gamma_{\kappa+1}}) = \rho_\kappa = max_{\gamma \in \Omega_\kappa}(\rho(\gamma, \mathbf{Y}))$, ***St2*** *du corollaire A.1 appliqué à* $\mathbf{\Omega_\kappa}$ *donne g-dim*$(C\mathcal{R}_{B_\kappa}) = \rho_\alpha(\mathbf{W}, \mathbf{\Gamma_{\kappa+1}}, \mathbf{\Delta_{\kappa+1}}, \mathbf{\Gamma_{\kappa+1}}) = \rho_*(\mathbf{W})$. *Ainsi, g-dim*$(C\mathcal{R}_H) = \rho_*(\mathbf{W})$. △