



**HAL**  
open science

# Génération de résidus robustes pour une approche intégrée de diagnostic des systèmes linéaires déterministes ou stochastiques

Damien Koenig

► **To cite this version:**

Damien Koenig. Génération de résidus robustes pour une approche intégrée de diagnostic des systèmes linéaires déterministes ou stochastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1998. Français. NNT : 1998NAN10005 . tel-01748375

**HAL Id: tel-01748375**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748375>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique  
Ecole Doctorale IAE+M - DFD Automatique et Production automatisée



CNRS UPRES-A 7039

## THESE de DOCTORAT

UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1

*Spécialité : Automatique*

### GENERATION DE RESIDUS ROBUSTES POUR UNE APPROCHE INTEGREE DE DIAGNOSTIC DES SYSTEMES LINEAIRES DETERMINISTES OU STOCHASTIQUES

présentée et soutenue publiquement par :

**Damien KOENIG**

le 04 Février 1998

*devant le jury composé de :*

- Président :* **J. RAGOT** - Professeur à l'INPL, Nancy
- Rapporteurs :* **M. STAROSWIECKI** - Professeur à l'Université de Lille  
**M. VERGÉ** - Professeur à L'ENSAM de Paris
- Examineurs :* **T. CECCHIN** - Professeur à l'UHP, Nancy  
**R. NIKOUKHAH** - Directeur de Recherche à l'INRIA, Rocquencourt  
**S. NOWAKOWSKI** - Maître de Conférences à l'UHP, Nancy (HdR)  
**R.J. PATTON** - Professeur à l'Université de Hull, UK
- Invité :* **G. KRZAKALA** - Professeur à l'UHP, Nancy
- Directeur de thèse :* **S. NOWAKOWSKI**

## *AVANT - PROPOS*



Cette thèse a été préparée au Centre de Recherche en Automatique de Nancy, au sein de l'équipe Méthodes et Algorithmes pour le Traitement du Signal (C.R.A.N. - M.A.T.S. - C.N.R.S. UPRES-A 7039) dirigée par Monsieur le Professeur Thierry CECCHIN et sous la responsabilité scientifique de Monsieur Samuel Nowakowski, Maître de Conférences habilité à diriger les recherches.

Par ces quelques lignes je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné durant la préparation de cette thèse.

Je remercie vivement Thierry Cecchin, Directeur de l'équipe pour son accueil chaleureux et la sympathie qu'il me témoigne.

Que José Ragot trouve ici ma reconnaissance pour l'examen approfondi de ce travail et et ses nombreux conseils.

Je suis très touché de l'honneur que m'ont fait Monsieur Marcel Staroswiecki, Professeur à l'Université de Lille, et Monsieur Michel Vergé, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Paris, pour l'examen approfondi de ce document et pour leurs critiques extrêmement constructives.

J'adresse ma vive reconnaissance à Monsieur Ron. J. Patton, Professeur à l'Université de Hull, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail, pour la sympathie qu'il me témoigne et pour sa collaboration à la rédaction d'un article. Par ailleurs, je remercie Monsieur R. Nikoukhah, directeur de recherche à l'INRIA de Rocquencourt, pour ses critiques objectives sur ce document.

Je ne sais comment exprimer toute ma gratitude envers Samuel Nowakowski sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler.

Je tiens également à remercier Monsieur Gérard Krzakala, Directeur de l'Institut Universitaire de Nancy Brabois pour m'avoir accueilli en tant qu'enseignant.

Je ne saurais oublier l'ensemble du personnel du CRAN et plus particulièrement Abdel Bourjij, Aline Caspary, François Devillard, Stéphane Dieudonné, Jean-Marie Moureaux et Muriel Tollis pour leur soutien et leur aide durant les moments difficiles.

Mes derniers mots iront à ceux qui me sont les plus chers et auxquels je dédie ce travail, en particulier à Mélanie, pour sa compréhension et sa patience ainsi qu'à ma famille et mes amis.

## PRESENTATION DU MEMOIRE

Pour permettre une bonne lecture de ce mémoire, il nous a paru intéressant d'apporter des précisions sur quelques points importants.

Les **symboles** sont introduits au fur et à mesure de leur apparition dans le texte et leur **signification est conservée** tout au long du mémoire.

Chaque étude débute par un **résumé** qui met en évidence les principaux problèmes abordés.

Les sujets traités sont tous illustrés par des exemples numériques simples.

---



# TABLE DES MATIERES

Notations utilisées	1
<b>Introduction</b>	4
<b>PRINCIPES GENERAUX</b>	7
<b>CHAPITRE 1 COMMANDABILITÉ ET OBSERVABILITÉ</b>	13
<b>1.0 Introduction</b>	13
<b>1.1 Notions de commandabilité et d'observabilité</b>	14
1.1.1 Commandabilité	14
1.1.2 Observabilité	15
1.1.3 Propriétés liées à la commandabilité et à l'observabilité	17
<b>1.2 Notions de stabilisabilité et de détectabilité</b>	20
1.2.1 Décomposition canonique selon la commandabilité	20
1.2.2 Décomposition canonique selon l'observabilité	23
<b>1.3 Conclusion</b>	25
<b>SYSTEMES DETERMINISTES</b>	27
<b>CHAPITRE 2 OBSERVATEURS EN PRÉSENCE D'ENTRÉES INCONNUES</b>	29
<b>2.0 Introduction</b>	29
<b>2.1 Observateurs à entrées inconnues</b>	30
2.1.1 Hypothèses et position du problème	30
<b>2.2 Estimation d'état robuste : approche par normes minimales</b>	32
2.2.1A Analyse et construction d'un observateur d'ordre plein ( $E_m \neq 0$ )	32
- <i>Résolution du problème</i>	32
- <i>Algorithme de mise en oeuvre</i>	36
2.2.2B Analyse et construction d'un observateur d'ordre plein ( $E_m = 0$ )	36
- <i>Résolution du problème</i>	36
- <i>Algorithme de mise en oeuvre</i>	39
<b>2.3 Estimation d'état robuste : approche par décomposition en valeurs singulières</b>	39
2.3.1A Etude préalable	39
2.3.2A Analyse et construction d'un observateur d'ordre plein ( $E_m \neq 0$ )	41
- <i>Résolution du problème</i>	41
- <i>Algorithme de mise en oeuvre</i>	44

2.3.3A	Analyse et construction d'un observateur d'ordre minimal ( $E_m \neq 0$ )	44
	- <i>Résolution du problème</i>	44
	- <i>Algorithme de mise en oeuvre</i>	48
2.3.4B	Analyse et construction d'un observateur d'ordre réduit ( $E_m = 0$ )	48
	- <i>Résolution du problème</i>	49
	- <i>Algorithme de mise en oeuvre</i>	52
<b>2.4</b>	<b>Exemple</b>	53
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	55
CHAPITRE 3	GÉNÉRATION DE RÉSIDUS POUR LE DIAGNOSTIC ET RECONFIGURATION DE LA LOI DE COMMANDE	57
<b>3.0</b>	<b>Introduction</b>	57
<b>3.1</b>	<b>Génération de résidus en présence d'entrées inconnues (<math>E_m \neq 0</math>)</b>	58
3.1.1	Méthodes à base d'observateurs	58
3.1.2	Modélisation des défauts et des entrées inconnues	59
3.1.3	Influence des défauts sur l'erreur d'estimation d'état	60
3.1.4	Existence d'un banc d'observateurs à entrées inconnues	63
	- <i>Schéma (a)</i>	63
	- <i>Schéma (b)</i>	65
3.1.5	Exemple	67
3.1.6	Conclusion	69
<b>3.2</b>	<b>Détection et isolation de défauts : approche par normes minimales (<math>E_m = 0</math>)</b>	70
3.2.1	Influence des défauts sur l'erreur d'estimation d'état	70
3.2.2	Isolation robuste des défauts de capteurs	71
	- <i>Schéma (a)</i>	71
	- <i>Schéma (b)</i>	75
3.2.3	Isolation des défauts d'actionneurs et/ou de composants	76
	- <i>Schéma (a)</i>	77
	- <i>Schéma (b)</i>	82
	- <i>Exemple</i>	86
3.2.4	Conclusion	94
<b>3.3</b>	<b>Approche intégrée de diagnostic : par décomposition en valeurs singulières (<math>E_m = 0</math>)</b>	95
3.3.1	Formulation du problème	96
	- <i>Schéma (c)</i>	96
	- <i>Détection et isolation</i>	97
	- <i>Correction</i>	98

3.3.2	Algorithme de détection, d'isolation et de correction de défauts	99
3.3.3	Exemples	113
3.3.3.1	Défauts de composants	113
	- <i>Illustration du cas (a)</i>	114
	- <i>Illustration du cas (b)</i>	120
	- <i>Illustration du cas (c)</i>	129
3.3.3.2	Défauts d'actionneurs	136
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	142
 <b>SYSTEMES STOCHASTIQUES</b>		 144
 CHAPITRE 4 FILTRE DE KALMAN EN PRÉSENCE D'ENTRÉES INCONNUES		
		146
<b>4.0</b>	<b>Introduction</b>	146
<b>4.1</b>	<b>Filtre de Kalman robuste</b>	147
4.1.1	Notations et hypothèses de base	147
4.1.2	Analyse et construction	148
4.1.3	Implantation numérique du filtre de Kalman à entrées inconnues	155
<b>4.2</b>	<b>Résultats supplémentaires</b>	156
4.2.1	Interprétations	156
	- <i>Inverses des matrices de covariances</i>	156
	- <i>Signification physique du gain optimal <math>\mathcal{K}_k</math></i>	157
	- <i>Signification physique de la matrice <math>\Sigma_k</math></i>	157
4.2.2	Développement du filtre prédicteur à un pas, par résolution de l'équation de Riccati	158
	- <i>Equations du filtre prédicteur : bruits corrélés</i>	158
	- <i>Réalisation du filtre prédicteur : bruits corrélés</i>	159
	- <i>Réalisation du filtre prédicteur : bruits décorrelés</i>	160
4.2.3	Convergence structurelle et stabilité du filtre	160
<b>4.3</b>	<b>Exemple</b>	162
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	168
 CHAPITRE 5 DIAGNOSTIC ROBUSTE DES SYSTÈMES LINÉAIRES STOCHASTIQUES		
		170
<b>5.0</b>	<b>Introduction</b>	170
<b>5.1</b>	<b>Génération optimale de résidus en présence d'entrées inconnues et de bruits</b>	171
5.1.1	Notations et hypothèses de base	171



5.1.2	Isolation robuste des défauts d'actionneurs et/ou de composants	172
	- <i>Schéma (b)</i>	172
	- <i>Schéma (c)</i>	173
5.1.3	Algorithme de détection et d'isolation robuste des défauts	173
5.1.4	Implantation numérique du j <sup>ème</sup> filtre	183
<b>5.2</b>	<b>Exemple</b>	184
<b>5.3</b>	<b>Conclusion</b>	190
 <b>Conclusion et Perspectives</b>		192
 <b>Annexe A OUTILS MATHÉMATIQUES</b>		195
A.1	Décomposition en valeurs singulières	195
A.2	Solutions de normes minimales	199
 <b>Annexe B DÉMONSTRATIONS</b>		201
B.1	Démonstration du théorème 2.2	201
B.2	Démonstration du théorème 2.3	204
B.3	Démonstration des théorèmes 2.4 et 2.5	205
B.4	Démonstration du théorème 2.6	208
B.5	Démonstration du théorème 2.7	210
 <b>Références bibliographiques</b>		213

## NOTATIONS UTILISÉES

$(.)_{o,c}$	observable et commandable
$(.)_{o,\bar{c}}$	observable mais non commandable
$(.)_{c,\bar{o}}$	commandable mais non observable
$(.)_{\bar{c},\bar{o}}$	non commandable et non observable
$(.)_c$	commandable
$(.)_{\bar{c}}$	non commandable
$(.)_o$	observable
$(.)_{\bar{o}}$	non observable
A	matrice d'évolution
$a_{(.)}$	logique de décision
B	matrice d'application de la commande
C	matrice d'observation
$C^k$	matrice d'observation sans la k <sup>ème</sup> ligne
$c_k$	k <sup>ème</sup> ligne de la matrice d'observation
$\bar{C}$	matrice d'observation après changement de base
$\mathbf{C}$	matrice de commandabilité
$\underline{d}$	vecteur des entrées inconnues de dimension p
$\bar{\underline{d}}$	vecteur des entrées inconnues après changement de base
$\underline{\bar{d}}$	vecteur des entrées inconnues après un nouveau changement de base
$d^p$	degré de l'estimateur
dim	dimension
$E_d$ et $E_m$	matrice de distribution des entrées inconnues
$E_{(.)}^{(.)}$	matrice de distribution des entrées inconnues
$E\{.\}$	espérance mathématique
$\underline{e}$	erreur d'estimation
$\underline{f}$	vecteur des défauts de dimension f
$f_k$	k <sup>ème</sup> coordonnée du vecteur de défaut
$f$	ensemble des défauts à détecter
$\bar{f}$	ensemble des défauts à ne pas détecter
$F_d$ et $F_m$	matrice de distribution des défauts
$\mathcal{F}(s)$	fonction de transfert (domaine continu)
$\mathcal{F}(z)$	fonction de transfert (domaine discret)
H	matrice de transformation (décomposition canonique ...)
Im	Image
I	matrice identité
$I_n$	matrice identité de dimension $n \times n$
i.e.	c'est à dire (du latin id est)



$k$	temps discret
$\text{Ker}$	noyau
$K$	gain de l'observateur
$\mathcal{K}_k$	gain optimal (filtre de Kalman)
$l_r$	logique d'isolation
$O$	matrice d'observabilité
$P_{(.)}(\cdot/\cdot)$	matrice de covariance
$\underline{r}$	résidu (erreur d'observation)
$t$	temps continu
$t_0$	temps initial
$t_a$	instant d'apparition du défaut
$\underline{u}$	vecteur de commande de dimension $e$
$\underline{v}$	bruits de mesures
$\underline{w}$	bruits de dynamiques
$\underline{x}$	vecteur d'état de dimension $n$
$\underline{x}_0$	vecteur d'état initial
$\hat{\underline{x}}^{(k)}$	vecteur d'estimation d'état du $k^{\text{ème}}$ estimateur
$\underline{y}$	vecteur de sortie de dimension $m$
$\underline{y}^k$	vecteur de sortie sans la $k^{\text{ème}}$ coordonnée
$y_k$	$k^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur de sortie
$\bar{\underline{y}}$	vecteur de sortie après changement de base
$\underline{z}_{(.)}^{(.)}$	vecteur d'état de l'observateur
$(.)^T$	matrice transposée
$(.)^{-1}$	matrice inverse
$(.)^+$	matrice pseudo inverse (au sens de Moore-Penrose)
$(\dot{\cdot})$	dérivation première
$(\tilde{\cdot})$	erreur d'estimation
$(\bar{\cdot})$	changement de base
$ (.) $	déterminant de matrice
$\ (.)\ _2$	norme euclidienne
$\lambda_{(.)}$	valeur propre
$\varepsilon^{(.)}$	seuil de détection
$\delta_{kl}$	symbole de Kroknecker
$\diamond$	signifie la fin d'une définition ou d'un algorithme
$\blacksquare$	signifie la fin d'un théorème ou d'une démonstration
robuste	terme employé <b>en présence</b> d'entrées inconnues
insensible	terme employé <b>en l'absence</b> d'entrées inconnues



# INTRODUCTION

---

Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans une thématique forte du CRAN. Ils s'appuient sur une solide expérience de notre équipe, notamment grâce aux compétences acquises par ses membres, dans les domaines du diagnostic des systèmes complexes : les techniques de traitement du signal, les observateurs et la commande, les systèmes à événements discrets, ...

Le diagnostic a pour objet de détecter, de localiser, d'identifier et éventuellement de corriger les défauts internes et externes, ainsi que les modes de fonctionnement anormaux d'un système. Parmi les différents algorithmes de surveillance, nous distinguons généralement deux types d'approches selon la nature de la connaissance acquise sur le système. Les méthodes avec modèle supposent connu un système d'équations décrivant le comportement du système. Quant aux méthodes dites sans modèle, elles utilisent un niveau de connaissance minimal constitué d'un historique des mesures. La conception d'algorithmes de surveillance a fait l'objet de nombreux travaux pour chacune de ces deux approches. De nombreux problèmes restent cependant ouverts, en particulier lorsqu'il existe des entrées inconnues ou perturbations, lorsque le système est complexe ou lorsqu'il est composé de multiples modèles.

L'objectif principal de nos travaux s'inscrit donc dans ce cadre général avec pour motivation première la définition d'approches capables d'intégrer l'ensemble des tâches d'une procédure de diagnostic. De plus, ces approches ayant vocation d'être implantées sur des installations industrielles, un des objectifs consistera à les optimiser en tenant compte des contraintes liées au temps de calcul, à la complexité des systèmes et aux performances à garantir aux systèmes en présence de défauts et d'entrées inconnues.

Notre motivation pour l'étude de nouveaux algorithmes de définition d'observateurs à entrées inconnues pour le cas déterministes ou de filtres à entrées inconnues pour le cas stochastiques est de pouvoir répondre de façon simple aux problèmes posés depuis de nombreuses années, à savoir détecter et localiser des défauts sur un système quelconque sujet à des perturbations aléatoires, inconnues a priori. Nos travaux se placent en aval de ceux de FRANK et PATTON, bien connus dans ce domaine, ainsi que ceux de HOU & MÜLLER et DAROUACH, pour la définition des observateurs. Nous donnons des conditions d'existence et nous montrons les performances des algorithmes développés (Koenig et al. 1997c et 1997e).

Ces travaux sont étendus afin de mettre en oeuvre une procédure de diagnostic intégrant les étapes de détection, de localisation et de correction des défauts malgré la présence d'entrées inconnues. Ce problème est complexe, aussi pour faciliter sa mise en oeuvre, nous proposons de décomposer le système original en sous-systèmes : chacun étant sensible à un ensemble de défauts spécifié mais surtout découplé des entrées

inconnues et des autres défauts. Nous pouvons ainsi traiter les problèmes de détection et d'isolation de défauts par bancs d'estimateurs simples (i.e. sans entrées inconnues) et corriger le ou les sous-systèmes en défauts. Parmi les nombreux avantages que présentent cette approche, nous retiendrons les faits suivants : une diminution de l'ordre des estimateurs et de l'ordre des matrices à inverser, une facilité de mise en oeuvre, un gain en calcul et en coût mémoire ce qui facilite l'application aux systèmes de grandes dimensions. Enfin grâce à cette décomposition, la mise en oeuvre des approches de diagnostic ne nécessite plus que l'utilisation d'observateurs élémentaires pour le cas déterministe ou l'utilisation du filtre de Kalman conventionnel pour le cas stochastique.

---

---



## PRINCIPES GÉNÉRAUX

De nombreux dysfonctionnements peuvent altérer la sécurité, la fiabilité et la disponibilité d'un processus industriel. C'est pourquoi les systèmes de détection, de localisation et de correction de défauts jouent un rôle de plus en plus important dans la conception des systèmes automatisés, qu'ils soient unitaires (moteurs, machines industrielles, produits grand public), ou complexes (systèmes de production, de communication, centrale nucléaire, plate-forme chimique à hauts risques, etc). Par la variété des concepts et des outils qu'il utilise, le diagnostic est donc en interaction avec de nombreux domaines de l'automatique. En effet dans les développements actuels du diagnostic, il ne nous est plus possible de négliger l'apport de connaissances venant de domaines tels que la commande, l'identification... Il faut aujourd'hui être en mesure de concevoir des approches intégrées de diagnostic de défaillance, associant les phases de *détection, d'isolation, d'identification et d'accommodation* des défauts.

Reprenons ces différentes étapes afin d'en donner une définition précise :

La *détection* concerne la mise en évidence d'événements qui affectent l'évolution d'un système. De façon générale, un événement traduit un changement de situation sans préjuger du fait qu'il soit normal (dû à une action délibérée de la part d'un opérateur) ou anormal (dû à une perturbation extérieure). Détecter consiste alors à comparer le fonctionnement réel avec ce qu'il devrait être sous l'hypothèse du fonctionnement normal.

*L'isolation* circonscrit la défaillance à un sous-ensemble du système surveillé. Elle analyse les événements pour distinguer ceux qui sont anormaux et localise les défaillances de façon à pouvoir déterminer le ou les défauts d'instruments de mesures (Instrument Fault Detection IFD), le ou les défauts d'actionneurs (Actuator Fault Detection AFD), le ou les composants défectueux du système (Component Fault Detection CFD).

*L'identification* vise à fournir des informations sur les caractéristiques de la défaillance. Elle quantifie la défaillance en estimant sa durée et son amplitude.

Enfin, *l'accommodation* concerne la réactualisation de certains paramètres. Elle vise la distribution des tâches à effectuer sur les éléments encore valides et le calcul de nouvelles lois de commandes à mettre en oeuvre afin de conserver au système un niveau spécifié de performances.

Pour répondre à cette démarche de diagnostic, il existe de nombreuses approches. Nous pouvons en distinguer quatre principales :

- les méthodes traditionnelles,
- les méthodes par systèmes experts,
- les méthodes par reconnaissance de formes,
- et les méthodes analytiques, ces dernières étant la base de notre réflexion.



*Les méthodes par redondances matérielles* sont celles mises en oeuvre lorsque nous ne cherchons qu'à détecter et localiser des défauts sans chercher à avoir plus d'informations sur le type du défaut, ses conséquences et sans avoir connaissance des équations décrivant le système surveillé. Elles sont relativement simples à établir et s'appuient plus sur des aspects matériels que sur des aspects analytiques.

*Les méthodes par systèmes experts* semblent particulièrement indiquées lorsque les connaissances sur le système sont de types heuristiques. C'est à dire, lorsque les informations utilisées (qualitatives ou quantitatives) permettent l'utilisation de règles imbriquées issus de la connaissance et de l'expérience de l'expert, comme par exemple des liens de cause à effet (si le moteur ne démarre pas alors vérifier le niveau d'essence). Le principe de base d'un système expert s'articule autour de deux éléments principaux :

- une base de connaissance, composée d'une base de faits (décrivant l'état du procédé sous une représentation symbolique, exemple 'le moteur ne démarre pas' peut se traduire par  $M=0$ ) et d'une base de règles (décrivant les connaissances de l'expert et manipulant les symboles de la base de faits),
- un moteur d'inférence, chargé de déterminer les règles à exécuter.

La base de fait contient la connaissance a priori sur le système. Les observations sont des faits qui sont à leur tour inclus dans la base de faits. A partir des faits, les règles établissent de nouveaux faits qui sont à leur tour inclus dans la base de faits. Le moteur d'inférence est l'organe de résolution du problème spécifié. Cette approche s'est avérée séduisante pour le diagnostic car elle permet de manipuler un grand nombre de données non homogènes et indépendantes du contexte tout en rendant compte du raisonnement suivi. Notons cependant, qu'un système expert n'est pas un remède miracle en soit, mais plutôt un outil (Iserman 1994).

*Les méthodes par reconnaissance de formes* sont des approches intermédiaires entre les techniques fondées sur l'utilisation d'un système expert et les techniques analytiques. Elles permettent de représenter les modes de fonctionnement du système tout en permettant d'appréhender les connaissances a priori incomplètes de ces modes. L'analyse du fonctionnement du système est alors faite à l'aide d'un historique (mesures et paramètres obtenus dans le passé) ce qui constitue l'ensemble d'apprentissage. Des classes sont alors constituées correspondant à des modes de fonctionnement identifiés. Lors de la phase d'exploitation, l'application de la règle de décision issue d'un choix de méthode de discrimination consiste à reconnaître à quelle classe doit être associée une nouvelle observation.

Les méthodes analytiques font appel à une connaissance du système constituée par la formulation explicite d'un modèle de comportement (par exemple, les équations différentielles ou les fonctions de transfert). Parmi l'ensemble des équations différentielles de comportement du système, la représentation d'état est généralisée par l'ajout de nouvelles entrées que sont le vecteur de défauts ( $\underline{f}$ ) et le vecteur de perturbations ( $\underline{d}$ ). Ainsi, les méthodes de diagnostic utilisant un modèle exploitent les mesures disponibles et l'information délivrée par le modèle mathématique. Elles permettent de comparer les informations issues du système en fonctionnement avec celles calculées à partir du modèle, cette comparaison se traduit par la génération de variables appelées résidus ( $\underline{r}$ ).

Ces résidus sont générés soit :

- par les méthodes fondées sur l'estimation d'état à l'aide d'observateurs ou de filtres, (Wünnenberg 1990; Darouach et al. 1994a; Hou et Müller 1994; Chen et Patton 1996)
- par les méthodes utilisant l'estimation des paramètres, (Isermann 1984; Kitamura 1989)
- par les méthodes générant des relations de redondance analytique par projection des équations du modèle dans l'espace de parité. (Viswanadham et al 1987; Gertler et Singer 1990, Staroswiecki et al 1993)

Si le système fonctionne normalement (pas de défauts), ces résidus sont supposés nuls, indépendamment des perturbations. Dans le cas déterministe, ces résidus peuvent être directement analysés, et un test utilisant un seuil (fixe ou variable) suffit à indiquer la présence d'une défaillance. Par contre, dans le cas stochastique, un traitement préalable devra séparer l'influence des bruits de celle des défaillances (filtrage adapté, estimateur d'état stochastique). D'une manière générale ces résidus doivent être insensibles aux entrées du système :

$$\underline{r}(t) \neq 0 \text{ si et seulement si } \underline{f}(t) \neq 0$$

Après analyse des résidus, nous disposons d'un vecteur indicateur appelé *signature*, soit une image des défaillances du procédé. Cette signature expérimentale est comparée aux signatures théoriques, correspondant quant à elles à l'ensemble des défaillances que nous pouvons, a priori, répertorier et caractériser. Il existe de nombreuses techniques de détection de défaillances à partir de l'analyse des résidus, et nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages spécialisés dans ce domaine (Basseville 1988, 1997; Brunet et al 1990; Ragot et al 1990; Dubuisson 1990; Basseville et Nikiforov 1993).

En définitive, dès qu'un modèle quantitatif est disponible, il est donc possible de mettre en oeuvre une procédure de diagnostic dont le principe général est représenté par la figure suivante (Iserman 1984) :

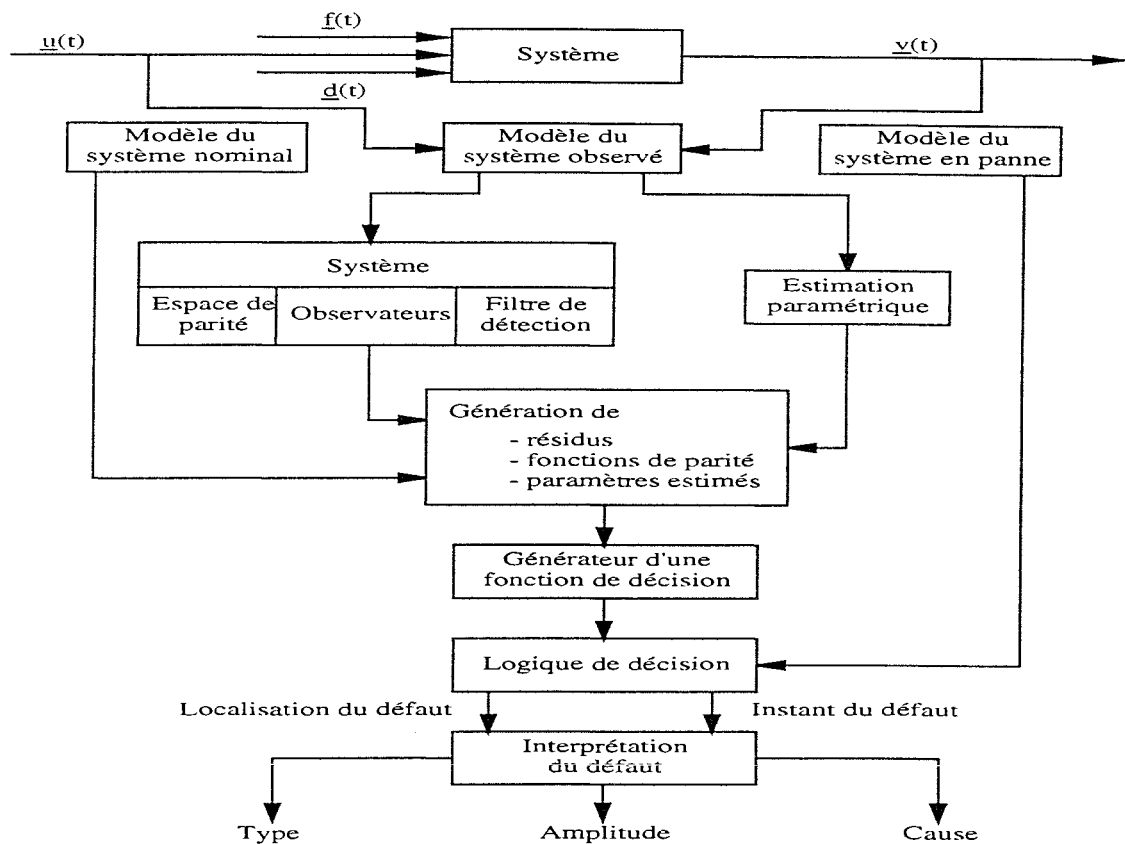


Fig 1 : Principe général d'un algorithme de détection et d'isolation de défauts

Nous remarquons que la génération de résidus joue un rôle primordial dans toute procédure de diagnostic puisque c'est elle qui conditionne la qualité de la prise de décision qui en résulte. De nombreux auteurs ont abordé cette problématique, apportant des solutions qui ont fait leurs preuves (Wünnenberg 1990; Patton et Chen 1991; Hou et Müller 1991, 1992; Patton 1994). Nous nous plaçons dans la continuité de ces travaux avec comme objectif la mise en oeuvre de techniques de génération de résidus dans le cadre d'une approche intégrant l'ensemble des étapes du diagnostic. Nous ferons appel aux méthodes d'estimation d'état à l'aide d'observateurs (Luenberger) pour le cas linéaire déterministe et de filtres (Kalman) pour le cas stochastique. Ces approches seront la base de notre réflexion.

Un observateur ou un filtre fournissent une estimation asymptotique de l'état d'un système en fonction des équations décrivant le procédé, des entrées appliquées (commandes) et des sorties (mesures). Il est donc nécessaire d'avoir un modèle quantitatif représentatif du système. Cependant ce modèle est une approximation du système réel, en effet il présente des incertitudes dues à la méconnaissance du système, aux entrées inconnues (les perturbations externes qui peuvent altérer le comportement dynamique du système) et aux dérives de certains paramètres (vieillessement, ...). La génération de résidus doit être insensible aux effets de ces différentes entrées inconnues, nous en exposant le principe général sur la figure suivante (Wünnenberg 1990) :

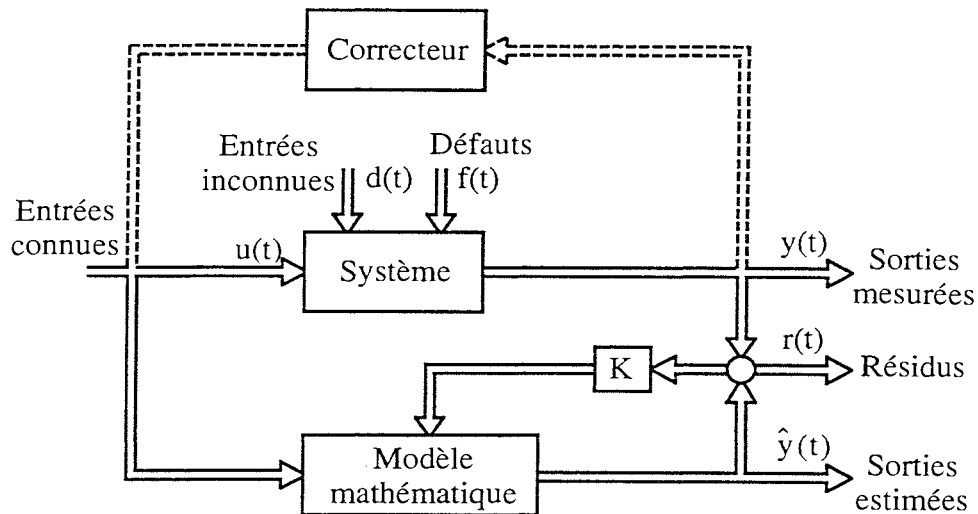


Fig ii : Principe général de la génération de résidus

Nous observons que l'erreur d'estimation de sorties (résidu  $r$ ) est la différence entre les sorties physiques du système  $y(t)$  et les sorties estimées  $\hat{y}(t)$ . Cette erreur d'estimation est réinjectée dans le modèle afin de :

- stabiliser le modèle,
- compenser les différences des conditions initiales entre système et modèle,
- supprimer les effets des entrées inconnues, tout en respectant la sensibilité aux défauts,
- isoler les défauts.

Le principal objectif est donc de maximiser la détectabilité et l'isolabilité des défauts tout en minimisant l'effet des incertitudes et des perturbations. Pour cela, nous présentons préalablement, les notions d'observabilité, de détectabilité, de commandabilité et de stabilisabilité, nécessaires à l'établissement des conditions d'existence des algorithmes développés.

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude d'une approche intégrée de détection, d'isolation et de correction de défauts dans un cadre déterministe. Elle concerne l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues et la génération de résidus, par implantation d'observateurs à entrées inconnues **d'ordre plein, réduit ou minimal**. Une extension intéressante des méthodes de générations de résidus par **bancs d'observateurs d'ordre réduit** est ensuite présentée. Elle réalise la détection, l'isolation et la correction de défauts de composants et/ou d'actionneurs, par **décomposition du système en sous-systèmes insensibles aux entrées inconnues** et à certains **défauts** spécifiés.

Dans la deuxième partie, les méthodes obtenues pour les systèmes déterministes sont étendues aux systèmes stochastiques. Nous considérons tout d'abord le problème de l'estimation de l'état en présence d'entrées inconnues et de bruits. En vue de généraliser le filtre de Kalman, nous introduisons deux **transformations régulières** du système en un **sous-système à bruits** de dynamique et de mesures **décorrélés et indépendants des entrées inconnues**. Le principal atout réside dans la facilité de mise en oeuvre. En effet, connaissant le changement de base effectué et par estimation de l'état du sous-système (indépendant des entrées inconnues) à l'aide du **filtre de Kalman conventionnel**, nous pouvons estimer l'état complet du système de départ. D'autre part, l'estimateur obtenu a une portée plus vaste que celle du filtre de Kalman, il permet par analogie avec les résultats précédents, de **détecter, localiser et identifier** la ou les défaillances du système, et ceci malgré la présence d'entrées inconnues et de bruits.

En résumé, les principales contributions des travaux effectués sont :

- robustesse des estimateurs (cas déterministe ou stochastique),
- diagnostic intégrée pour les systèmes en présence d'entrées inconnues et de bruits,
- mise à profit de la décentralisation des systèmes de grandes dimensions.

# CHAPITRE 1 COMMANDABILITÉ ET OBSERVABILITÉ

## 1.0 INTRODUCTION

Un des principes fondamentaux des méthodes de détection et de localisation des défaillances repose sur l'estimation des sorties du système et la comparaison de cette estimation à la valeur réelle des sorties. Suivant la nature du système, l'estimation peut être effectuée à l'aide d'observateurs de Luenberger (cas déterministe) ou à l'aide de filtres de Kalman (cas stochastique). Comme nous avons à observer et à agir sur le système, les notions d'observabilité et de commandabilité sont particulièrement importantes. Nous rappelons ici leurs principales propriétés.

---

## 1.1 NOTIONS DE COMMANDABILITÉ ET D'OBSERVABILITÉ

Avant d'agir sur un processus, posons nous la question de savoir si l'action envisagée sera suivie d'effet. De façon plus pratique, avant même de concevoir une stratégie de commande sophistiquée, pouvons nous prévoir si effectivement les grandeurs sur lesquelles nous souhaitons agir sont commandables ? De même les mesures effectuées sur la sortie du processus à conduire permettent-elles de déduire l'état du processus ? Cette notion est très importante car dans la pratique, nous ne pouvons observer que partiellement un procédé, c'est à partir des informations fragmentaires que nous souhaitons reconstituer l'état du procédé.

### 1.1.1 Commandabilité de l'état

Nous considérons le système multivariable discret suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \quad (1.1.a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k \quad (1.1.b)$$

où  $\underline{x} \in \mathcal{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{R}^e$  et  $y \in \mathcal{R}^m$ .

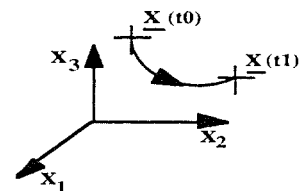
#### Définition 1.1 :

Un système est dit à état commandable si, par action sur l'entrée, nous pouvons atteindre en un temps fini n'importe quel point de l'espace d'état.

◇

Dans certains cas, seules certaines coordonnées du vecteur d'état respectent cette définition. Le système est dit alors partiellement commandable.

Autrement dit, un système d'équations d'état est commandable s'il est possible en agissant sur  $\underline{u}$  d'amener en un temps fini  $(t_1 - t_0)$  n'importe quel état  $\underline{x}(t_0)$  vers n'importe quel autre état  $\underline{x}(t_1)$



#### Explication.

Dans le cas discret, nous pouvons exprimer  $\underline{x}$  à l'instant  $k+n$  en fonction de  $\underline{x}$  à l'instant  $k$  de la manière suivante :

$$\underline{x}_{k+n} = A^n \underline{x}_k + A^{n-1} B \underline{u}_k + \dots + A B \underline{u}_{k+n-2} + B \underline{u}_{k+n-1}$$

soit de façon matricielle :

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k+n-1} \\ u_{k+n-2} \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \underline{x}_{k+n} - A^n \underline{x}_k$$

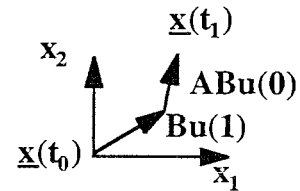
Nous constatons qu'une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir déterminer la séquence  $\{u_i\}$  de commande permettant d'amener le processus de l'état  $\underline{x}_k = \underline{x}_{t_0}$  donné, à l'état  $\underline{x}_{k+n} = \underline{x}_{t_1}$  choisi, est que la matrice de commandabilité :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ soit de rang maximum i.e. } \text{rang}(\mathbf{C}) = n.$$

(Cette condition est également valable pour des processus multivariables continus).

**Schématiquement**, si nous considérons un système d'ordre 2, mono-entrée, avec  $\underline{x}_k = \underline{x}_{t_0} = \underline{x}_0 = 0$

$$\text{alors } \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{x}_2 = \underline{x}_{t_1}.$$



Ainsi :

- si les vecteurs B et AB sont linéairement indépendants (i.e.  $\text{rang}(\mathbf{C}) = 2$ ), en agissant sur la commande u nous pouvons aller de  $\underline{x}(t_0)$  à  $\underline{x}(t_1)$  en 2 étapes,
- si les vecteurs B et AB sont colinéaires, la condition nécessaire et suffisante de commandabilité n'est pas vérifiée (i.e.  $\text{rang}(\mathbf{C}) < 2$ ), le système est seulement commandable dans le sous-espace défini par B.

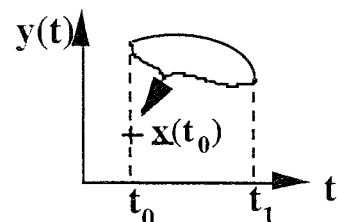
### 1.1.2 Observabilité

#### Définition 1.2 :

Un système est dit à état observable si, par observation des entrées et sorties sur un intervalle de temps fini, nous pouvons déterminer l'état initial du système.  $\diamond$

Dans certains cas, seules certaines coordonnées du vecteur d'état sont déductibles. Le système est dit partiellement observable.

Autrement dit, un système d'équations d'état est observable si, étant donné  $t_0$ , il existe  $t_1$ , tel que la connaissance de y sur  $(t_0, t_1)$  permet de déterminer de manière unique  $\underline{x}(t_0)$





Explication.

Dans le cas discret, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\underline{x}_k &= \underline{x}_k, \\ \underline{x}_{k+1} &= A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \\ \underline{x}_{k+2} &= A^2\underline{x}_k + AB\underline{u}_k + B\underline{u}_{k+1}, \\ &\vdots \\ \underline{x}_{k+n-1} &= A^{n-1}\underline{x}_k + A^{n-2}B\underline{u}_k + A^{n-3}B\underline{u}_{k+1} + \dots + B\underline{u}_{k+n-2}.\end{aligned}$$

En multipliant chaque relation par la matrice C, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\underline{y}_k &= C\underline{x}_k, \\ \underline{y}_{k+1} &= CA\underline{x}_k + CB\underline{u}_k, \\ \underline{y}_{k+2} &= CA^2\underline{x}_k + CAB\underline{u}_k + CB\underline{u}_{k+1}, \\ &\vdots \\ \underline{y}_{k+n-1} &= CA^{n-1}\underline{x}_k + CA^{n-2}B\underline{u}_k + CA^{n-3}B\underline{u}_{k+1} + \dots + CB\underline{u}_{k+n-2}.\end{aligned}$$

soit de la façon matricielle :  $Y_n = O \underline{x}_k$

avec :

$$Y_n = \begin{bmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{y}_{k+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{u}_{k+n-2} \end{bmatrix} \text{ et } O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

Nous constatons que la connaissance des n sorties successives  $\underline{y}_k, \underline{y}_{k+1}, \dots, \underline{y}_{k+n-1}$  et des n-1 entrées successives  $\underline{u}_k, \underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_{k+n-2}$ , permettent la détermination de  $\underline{x}_k = \underline{x}_{t_0}$  à condition que la matrice d'observabilité :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ soit de rang maximum.}$$

La condition :

$$\text{rang}(O) = n$$

constitue donc une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour un processus multivariable linéaire discret (cette condition est également valable pour des processus multivariables continus).

### 1.1.3 Propriétés liées à la commandabilité et à l'observabilité

#### *Invariance sous changement de base*

L'introduction des notions de commandabilité et d'observabilité montrent que le rang des matrices de commandabilité et d'observabilité doivent vérifier la dimension de l'espace d'état (i.e.  $n$ ). Les matrices de commandabilité et d'observabilité associées à la représentation (1.1) sont respectivement :

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad \text{et} \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix},$$

en posant  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$  nous pouvons déduire :

$$\bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{C} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \times \mathbf{T}$$

d'où  $\text{rang}(\bar{\mathbf{C}}) = \text{rang}(\mathbf{C})$  et  $\text{rang}(\bar{\mathbf{O}}) = \text{rang}(\mathbf{O})$ .

Ainsi, les propriétés de commandabilité et d'observabilité ne sont pas modifiées par un changement de base dans l'espace d'état.

#### *Décomposition canonique de Kalman (Kailath 1980)*

Kalman a établi à propos de la représentation (1.1) un certain nombre de théorèmes, parmi lesquels nous retiendrons le théorème suivant, car très utile dans l'étude de la sensibilité du résidu face aux défauts.

**Théorème 1.1 :** Il existe toujours une base de l'espace d'état qui permet de décomposer le vecteur d'état  $\underline{x}$  de dimension  $n$  en quatre vecteurs d'états  $\bar{\underline{x}}_{o,c}$ ,  $\bar{\underline{x}}_{o,\bar{c}}$ ,  $\bar{\underline{x}}_{\bar{o},c}$ ,  $\bar{\underline{x}}_{\bar{o},\bar{c}}$  de dimensions respectives  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  et  $n_4$ , ( $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ ), telle que les matrices  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  du système dans cette nouvelle base ont la forme :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{o,c} & \bar{\mathbf{A}}_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{o,\bar{c}} & 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{3,1} & \bar{\mathbf{A}}_{3,2} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{o},c} & \bar{\mathbf{A}}_{3,4} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{4,2} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{o},\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{o,c} \\ 0 \\ \bar{\mathbf{B}}_{\bar{o},c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_{o,c} \quad \bar{\mathbf{C}}_{o,\bar{c}} \quad 0 \quad 0]$$

Dans ces expressions, les matrices  $\bar{\mathbf{A}}_{i,j}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_{i,j}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_{i,j}$  ( $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne) sont des matrices de dimensions respectives  $(n_i \times n_j)$ ,  $(n_i \times e)$ ,  $(m \times n_i)$ . ■

Cette décomposition peut être faite de nombreuses manières mais le nombre de variables d'état de chaque vecteur  $\bar{x}_{o,c}$ ,  $\bar{x}_{o,\bar{c}}$ ,  $\bar{x}_{\bar{o},c}$ ,  $\bar{x}_{\bar{o},\bar{c}}$  est invariant. En conséquence, le système initial peut être décomposé en quatre sous systèmes :

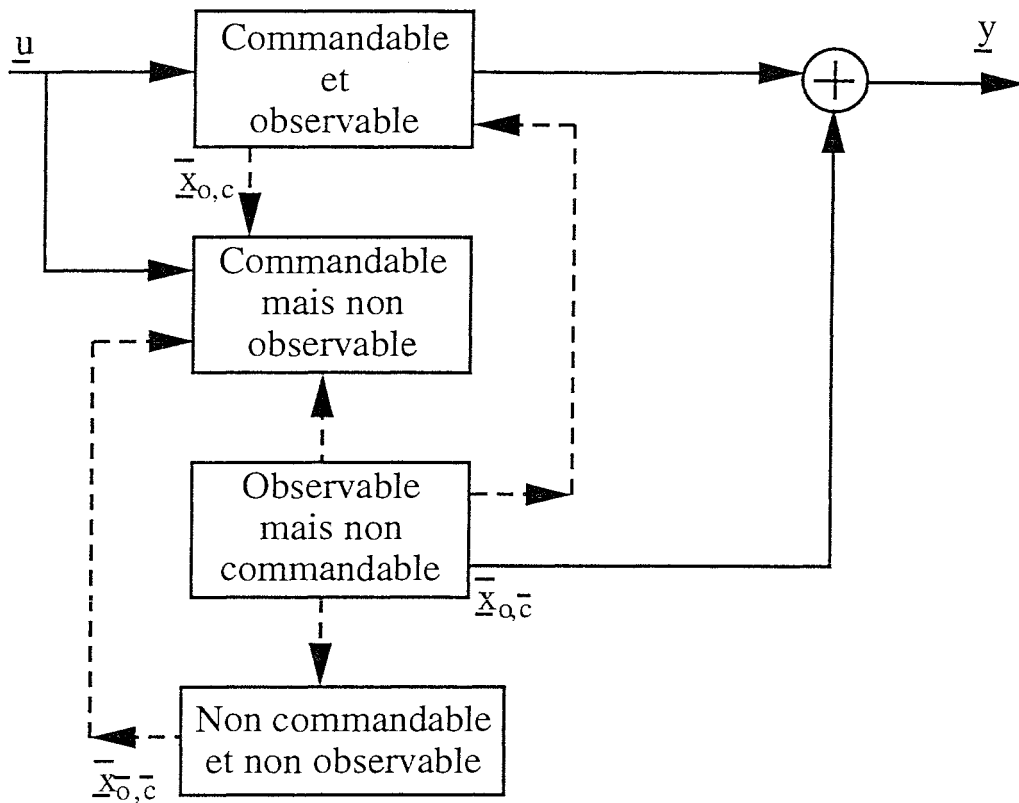


Fig 1.1 : Décomposition canonique d'un système (Kailath 1980, O'Reilly 1983, Borne et al 1993)

où : 1 Le sous système  $\{\bar{A}_{o,c}, \bar{B}_{o,c}, \bar{C}_{o,c}\}$  est commandable et observable, et

$$C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \bar{C}_{o,c}(sI - \bar{A}_{o,c})^{-1}\bar{B}_{o,c}$$

2 Le sous système  $\left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_{o,c} & 0 \\ \bar{A}_{3,1} & \bar{A}_{\bar{o},c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{B}_{o,c} \\ \bar{B}_{\bar{o},c} \end{bmatrix}, [\bar{C}_{o,c} \ 0] \right\}$  est commandable

3 Le sous système  $\left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_{o,c} & \bar{A}_{1,2} \\ 0 & \bar{A}_{o,\bar{c}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{B}_{o,c} \\ 0 \end{bmatrix}, [\bar{C}_{o,c} \ \bar{C}_{o,\bar{c}}] \right\}$  est observable

4 Le sous système  $\left\{ [\bar{A}_{\bar{o},\bar{c}}], [0], [0] \right\}$  est non observable et non commandable

**Remarques :**

— Pour un système monovariante, la propriété de non commandabilité (non observabilité) implique l'existence d'au moins un pôle et d'un zéro commun dans la fonction de transfert du système.

- Ce résultat doit évidemment pouvoir se transposer au cas multivariable, mais non sans difficultés puisque les fonctions de transfert sont remplacées par des matrices de transfert. Un système multivariable d'ordre  $n$  mis sous forme d'équation d'état est commandable et observable si et seulement si le degré de sa matrice de transfert (i.e.  $\bar{C}_{o,c}(sI - \bar{A}_{o,c})^{-1}\bar{B}_{o,c}$ ) est égal à  $n$ , la dimension de l'espace d'état.

Les variables  $y_i=C_i\bar{x}$  non commandables vérifient la propriété  $C_i(zI - A)^{-1}B = 0$  ou plus exactement :

$$\frac{Y_i(z)}{U(z)} = \frac{0}{D(z)}, D(z) \text{ étant le dénominateur de la fonction de transfert.}$$

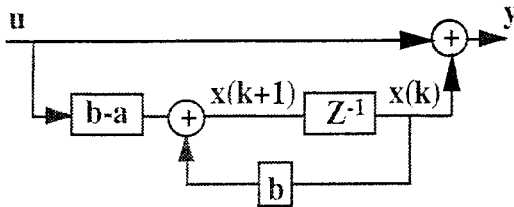
- Le système formé des matrices  $\{A, B, C\}$  est minimal si et seulement si  $\{A, B\}$  est commandable et  $\{C, A\}$  est observable. (Kailath 1980).

**Exemple 1.1 :**

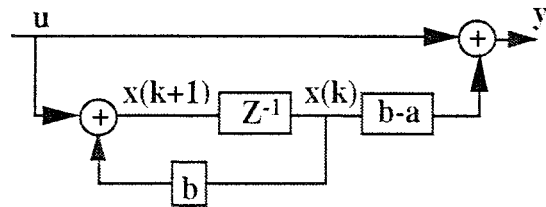
Nous considérons un système monovariante discret dont le transfert dynamique  $F(z)$  est représenté par l'expression suivante :

$$F(z) = y(z)/u(z) = (1 - az^{-1}) / (1 - bz^{-1}) = 1 + ((b - a)z^{-1}) / (1 - bz^{-1})$$

Si  $a=b$ , alors le transfert se simplifie et par conséquent le système est non observable ou non commandable. Nous pouvons représenter ce transfert dynamique  $F(z)$ , selon les deux schémas suivants :



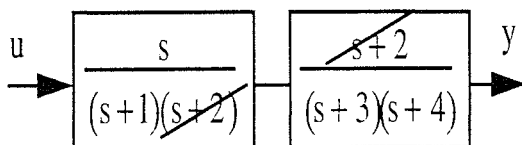
Si  $b=a$ , alors il y a perte de commandabilité;



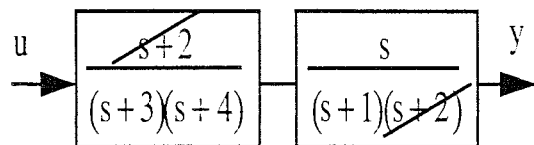
Si  $b=a$ , alors il y a perte d'observabilité

**Exemple 1.2 :**

Nous considérons un système monovariante continu, représenté par les deux schémas suivants :



Le pôle amont  $s=-2$  est caché par le zéro aval, le système est rendu non observable.



Le pôle aval est caché par le zéro amont, le système est rendu non commandable.

## 1.2 NOTIONS DE STABILISABILITÉ ET DE DÉTECTABILITÉ

Nous avons vu précédemment (fig 1.1) qu'il n'y a pas de moyen d'action sur les états non commandables et/ou non observables d'un système; dans le premier cas, par définition de la notion de commandabilité et dans le deuxième cas, par suite de l'absence d'informations permettant de décider de la commande à appliquer. Si les sous-systèmes caractérisant les états non commandables ou non observables sont stables, alors ces états tendent vers zéro chacun avec leur dynamique propre, et ne sont donc pas susceptibles de perturber le fonctionnement entrée sortie du système. Par contre, en cas d'instabilité non commandable ou non observable, il apparaît un risque de détérioration du matériel.

Un système est dit stabilisable (respectivement détectable) si ses états instables sont commandables (respectivement observables). Dans le cas général de la commande des sorties d'un processus, celui-ci doit être stabilisable et détectable, nous parlerons alors de gouvernabilité. Les notions de stabilisabilité et de détectabilité font l'objet du paragraphe suivant. Elles nécessitent au préalable un rappel sur les décompositions canoniques selon la commandabilité et l'observabilité.

### 1.2.1 Décomposition canonique selon la commandabilité

A partir du système (1.1), pour toute matrice de commandabilité de rang  $n_1 < n$ , il existe une transformation  $H$  :

$$\bar{\mathbf{x}} = H\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \text{où } \dim(\bar{\mathbf{x}}_c) = n_1 \quad (1.2)$$

telle que :

$$\bar{\mathbf{A}} = HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = HB = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = CH^{-1} = [\bar{\mathbf{C}}_c \quad \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}}] \quad (1.3)$$

où la paire  $(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c)$  est commandable.

#### Démonstration.

Par hypothèse, si nous considérons que le système (1.1) est partiellement commandable alors, par définition, la matrice de commandabilité  $\mathbf{C}$  est de rang  $n_1 < n$ . Un résultat classique de la théorie des matrices permet d'affirmer qu'il existe une transformation régulière  $H$  telle que :

$$H\mathbf{C} = \begin{bmatrix} // // // // // \\ 0 \end{bmatrix}$$

où le bloc non nul est de rang  $n_1$ .

Sachant que la matrice  $H\mathbf{C}$  peu s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} H\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} HB & HA(H^{-1}H)B & HA(H^{-1}H)A(H^{-1}H)B & \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} & \dots \end{bmatrix} \\ &= \bar{C} \end{aligned}$$

nous avons, en identifiant de proche en proche avec le bloc nul de  $H\mathbf{C}$ , le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \bar{B}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} // // \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{A}_c \bar{B}_c \\ \bar{A}_{21} \bar{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} // // \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{A}_c^2 \bar{B}_c \\ \bar{A}_{21} \bar{A}_c \bar{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} // // \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \bar{A}_c^{n_1-1} \bar{B}_c \\ \bar{A}_{21} \bar{A}_c^{n_1-2} \bar{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} // // \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, la conservation du rang  $n_1$  impose que la matrice  $\bar{C}$ , élevée à l'ordre supérieur  $n_1+1$ , conserve la même structure, ce qui permet d'écrire :

$$\bar{A}_{21} \bar{A}_c^{n_1-1} \bar{B}_c = 0$$

Nous pouvons alors établir les propriétés suivantes :

- (p<sub>1</sub>) La matrice de commandabilité  $\begin{bmatrix} \bar{B}_c & \bar{A}_c \bar{B}_c & \bar{A}_c^2 \bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n_1-1} \bar{B}_c \end{bmatrix}$  est de rang maximum. Le sous-système  $(\bar{A}_c, \bar{B}_c)$  est donc commandable.
- (p<sub>2</sub>) La matrice  $\bar{B}_{\bar{c}}$  est nulle.
- (p<sub>3</sub>) Par identification, nous avons  $\bar{A}_{21} \begin{bmatrix} \bar{B}_c & \bar{A}_c \bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n_1-2} \bar{B}_c & \bar{A}_c^{n_1-1} \bar{B}_c \end{bmatrix} = 0$  et d'après la propriété (p<sub>1</sub>), nous pouvons affirmer que  $\bar{A}_{21} = 0$ .

Il en résulte la décomposition canonique selon la commandabilité, illustrée mathématiquement par les relations (1.3) et schématiquement par la figure suivante :

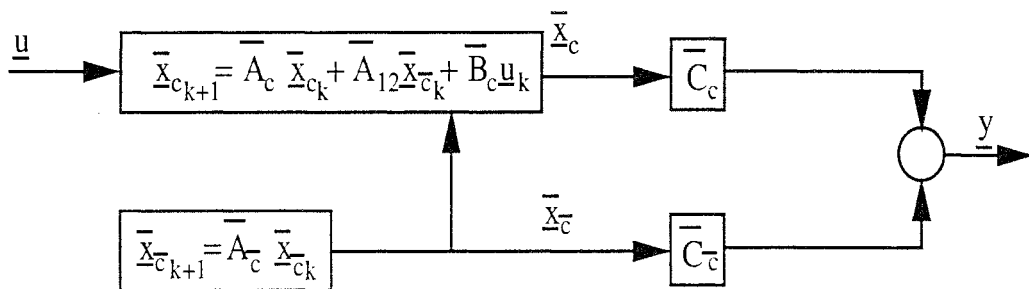


Fig 1.2 : Décomposition canonique selon la commandabilité (Kailath 1980)

Cette décomposition montre que l'entrée  $\underline{u}$  n'a aucune action sur le sous-système d'état  $\underline{x}_{\bar{c}}$ . Celui-ci porte alors le nom d'état non commandable. De plus, les valeurs propres  $(\lambda_i)$  des sous-systèmes commandables et non commandables étant invariantes par la transformation régulière  $H$ , nous pouvons parler également de modes commandables ou non commandables.

Nous en déduisons les définitions équivalentes de la stabilisabilité :

**Définition 1.3** (O'Reilly 1983) :

Pour qu'un système soit stabilisable, l'état non commandable doit être stable.  $\diamond$

**Définition 1.4** (O'Reilly 1983) :

Un système est dit stabilisable si ses modes instables sont commandables,

$$\text{rang}(B \lambda_i I_n - A) = n, \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \Re(\lambda_i) \geq 0, \text{ pour un système continu}$$

$$\text{rang}(B \lambda_i I_n - A) = n, \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, |\lambda_i| \geq 1, \text{ pour un système discret}$$

Note :  $\lambda_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  ( $i=1, \dots, n$ ) valeur propre de A.  $\diamond$

Il résulte de cette étude les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.2 :**

Les modes non-commandables sont les valeurs propres de A (i.e.  $\lambda_i$ ) qui font chuter le rang de la matrice  $(B \lambda_i I_n - A)$   $\blacksquare$

**Théorème 1.3 :**

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (1.1) soit stabilisable (respectivement commandable) est :

$$\text{rang}(B \lambda_i I_n - A) = n, \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \Re(\lambda_i) \geq 0 (\forall \lambda_i \in \mathbb{C}), \text{ pour un système continu.}$$

$$\text{rang}(B \lambda_i I_n - A) = n, \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, |\lambda_i| \geq 1 (\forall \lambda_i \in \mathbb{C}), \text{ pour un système discret.}$$

Illustrons la stabilisabilité sur un exemple.

**Exemple 1.3 :**

Nous considérons le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

$$\text{avec : } A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les pôles de ce système sont  $\lambda_1 = -2$  et  $\lambda_2 = -3$ , d'après le théorème 1.2

$$\text{pour } \lambda_1 = -2 \text{ nous avons } \text{rang}(B - 2I_2 - A) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{et pour } \lambda_2 = -3 \text{ nous avons } \text{rang}(B - 3I_2 - A) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Par conséquent, le système est non commandable mais il reste stabilisable, puisque le mode  $\lambda_2$  qui fait chuter le rang de la matrice  $(B \lambda_2 I_2 - A)$  est stable.

## 1.2.2 Décomposition canonique selon l'observabilité

Le problème de la décomposition canonique selon l'observabilité est dual de celui de la décomposition canonique selon la commandabilité.

En effet, la transposition de la matrice d'observabilité (i.e.  $O^T$ ) est identique à la matrice de commandabilité relative à un système fictif d'état  $\underline{\xi}$  et d'entrée  $\underline{v}$  :

$$\dot{\underline{\xi}} = A^T \underline{\xi} + C^T \underline{v}$$

Nous pouvons effectuer, à partir de  $O^T$  toutes les opérations relatives à la commandabilité, avec en particulier, la détermination d'une matrice H qui réalise la décomposition selon la commandabilité.

Soit H une matrice déduite de  $O^T$  considérée comme une matrice de commandabilité, appliquons à l'état réel la transformation suivante :

$$\bar{\underline{x}} = (H^{-1})^T \underline{x} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{x}}_o \\ \bar{\underline{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

Compte tenu des transpositions, il vient  $\bar{A}_{12} = 0$ ,  $\bar{C}_{\bar{o}} = 0$  dans les matrices transformées :

$$\bar{A} = (H^{-1})^T A H^T = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \bar{B} = (H^{-1})^T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{C} = C H^T = [\bar{C}_o \ 0]$$

Et il en résulte la décomposition canonique selon l'observabilité, illustrée par la figure suivante :

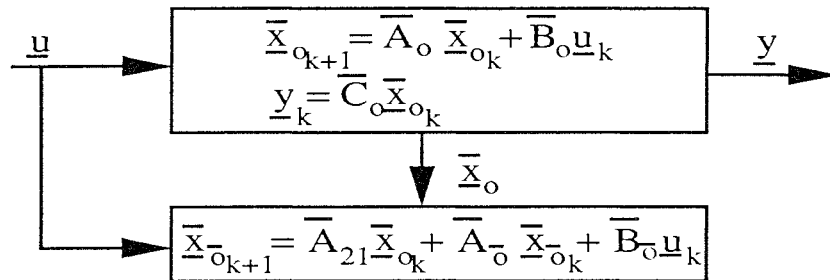


Fig 1.3 : Décomposition canonique selon l'observabilité (Kailath 1980)

Il est clair que l'observation de y ne permet pas de reconstruire l'état initial du sous-système d'état  $\bar{\underline{x}}_{\bar{o}}$ . Celui-ci porte alors le nom d'état non observable.

Comme pour la commandabilité, il faut noter que l'existence de cette décomposition ne dépend que du rang de la matrice d'observabilité.

Nous en déduisons les définitions équivalentes de déTECTABILITÉ :

**Définition 1.5** (O'Reilly 1983) :

Pour qu'un système soit détectable, il faut que l'état non observable soit stable.  $\diamond$



**Définition 1.6** (O'Reilly 1983) :

Un système est dit détectable si ses modes instables sont observables,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \Re(\lambda_i) \geq 0, \text{ pour un système continu.}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, |\lambda_i| \geq 1, \text{ pour un système discret.}$$

◇

Il résulte de cette étude les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.4 :**

Les modes non-observables sont les valeurs propres de A (i.e.  $\lambda_i$ ) qui font chuter le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A \\ C \end{pmatrix}$  ■

**Théorème 1.5 :**

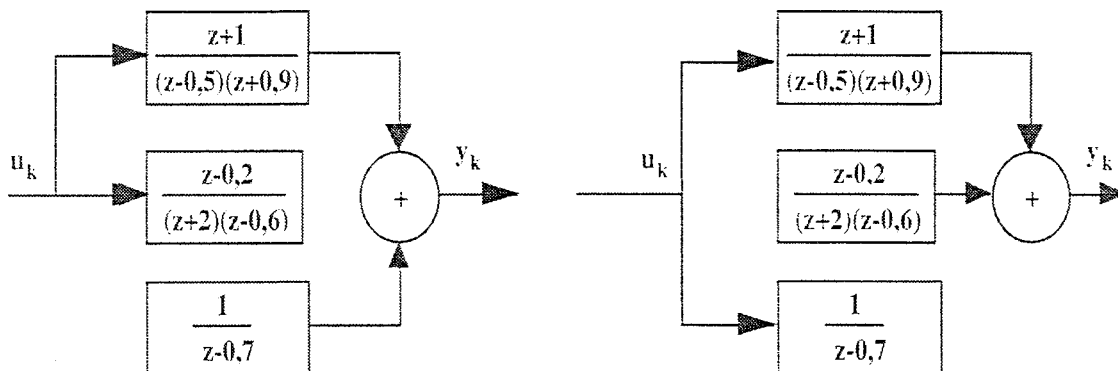
Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (1.1) soit détectable (respectivement observable) est :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \Re(\lambda_i) \geq 0 \quad (\forall \lambda_i \in \mathbb{C}), \text{ pour un système continu.}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, |\lambda_i| \geq 1 \quad (\forall \lambda_i \in \mathbb{C}), \text{ pour un système discret.}$$

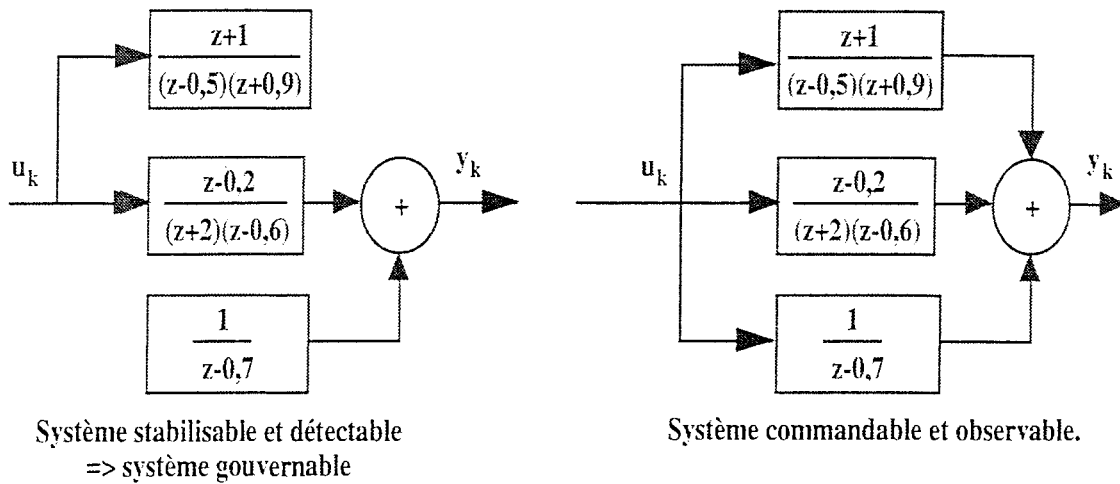
■

Ces deux décompositions (commandabilité et observabilité) montrent qu'un modèle de processus continu ou discret non commandable et non observable peut toujours se décomposer en quatre sous systèmes (fig 1.1). Suivant cette représentation, nous présentons quatre exemples caractérisant divers types de systèmes et les notions associées d'observabilité, de détectabilité, de commandabilité et de stabilisabilité.



Système stabilisable, non détectable

Système détectable, non stabilisable




---

### 1.3 CONCLUSION

Ce préambule constitue une introduction indispensable aux concepts abordés dans la suite. Nous avons volontairement traité et illustré les notions de commandabilité et d'observabilité par des exemples simples. Nous verrons par la suite que ces notions interviennent très souvent dans la détermination des conditions d'existence des observateurs classiques, des observateurs à entrées inconnues ou encore des observateurs dédiés à la détection, à l'isolation et à la correction de défauts. Elles interviennent également dans la détermination des conditions d'existence du filtre de Kalman dans le cas classique et dans celui à entrées inconnues.

---



# SYSTÈMES DÉTERMINISTES

## APPROCHE INTÉGRÉE DE DIAGNOSTIC DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Le problème auquel nous répondons dans cette partie est celui de la génération de résidus robustes permettant de détecter et d'isoler des défauts en présence d'entrées inconnues. Deux méthodes simples de synthèse d'observateurs d'ordre plein, réduit et minimal pour les systèmes linéaires en présence d'entrées inconnues sont présentées et illustrées par des algorithmes. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de ces observateurs sont données et démontrées. Nous mettons alors en oeuvre de nouveaux algorithmes de détection et d'isolation des défauts et nous proposons une procédure intégrée de diagnostic.

---



## CHAPITRE 2 OBSERVATEURS EN PRÉSENCE D'ENTRÉES INCONNUES

### 2.0 INTRODUCTION

Le problème de la synthèse d'observateurs en présence d'entrées inconnues a fait l'objet de nombreux travaux; Bhattacharyya 1978, utilisant une approche géométrique, et Hautus 1983, utilisant une approche fréquentielle, ont donné les conditions d'existence de ces observateurs. Avec une approche algébrique, Kudva et al 1980 et Hou & Müller 1992 ont présenté une synthèse d'observateurs à entrées inconnues d'ordre réduit, l'ordre plein ayant été traité par Darouach et al 1994a. D'autre part Kurek 1983, Hou & Müller 1992 ont présenté un observateur d'ordre plein utilisant les propriétés des pseudo-inverses. L'équivalence des conditions d'existence de Zasadzinski & Darouach 1994 et de Hou & Müller 1994 a été montrée par Koenig et al 1996b et étendue pour répondre au problème de la génération de résidus robustes pour le diagnostic de défauts des systèmes linéaires en présence d'entrées inconnues. L'ensemble de nos résultats s'inscrivent dans un formalisme algébrique, bien que ce formalisme s'avère parfois plus difficile en terme d'interprétation qu'un formalisme géométrique (Nikoukhah 1994), il offre l'avantage de pouvoir montrer l'équivalence de nos résultats.

Les observateurs présentent un grand intérêt pour le diagnostic des défauts affectant un système. Le principe général des méthodes de détection et de localisation des défaillances en présence d'entrées inconnues à l'aide d'observateurs ou de filtres est de reconstruire la sortie du système à partir des données accessibles du processus puis de comparer cette estimation indépendante des entrées inconnues à la valeur réelle de cette sortie. De façon très générale, il s'agit d'élaborer un ensemble d'observateurs capables de générer suffisamment de résidus pour détecter et isoler l'occurrence de chaque défaut indépendamment des perturbations. L'emploi d'observateurs à entrées inconnues répond à ces exigences, cependant leur mise en oeuvre s'avère parfois difficile.

L'idée principale consiste, à partir du modèle mathématique, à déterminer le **sous espace** (sous-modèle) **insensible** aux entrées inconnues, ainsi, **seules les informations pertinentes** du modèle sont **traitées** (Koenig 1996c). Cette idée est l'originalité des différentes approches que nous présentons dans ce mémoire. En effet, si nous savons trouver un ensemble de sous-systèmes insensibles aux entrées inconnues et à certaines pannes spécifiées, nous savons dire lequel ou lesquels des sous-systèmes sont en défaut. Et par une reconfiguration de la loi de commande, le ou les sous-systèmes en défaut sont alors corrigés, afin de garantir les performances du système.

En utilisant les propriétés des décompositions par valeurs singulières et les solutions à normes minimales, nous présentons une méthode de synthèse d'observateurs à entrées inconnues, d'ordre plein, d'ordre réduit et d'ordre minimal. Nous développons chaque observateur et donnons les conditions générales d'existence.

## 2.1 OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'étude de l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues en recherchant le sous-espace indépendant des entrées inconnues. L'utilisation de la méthode de décomposition par valeurs singulières ou par les moindres carrés ne modifie en rien les conditions nécessaires et suffisantes d'existence des observateurs à entrées inconnues qui sont celles énoncées dans la littérature (Kurek 1983, Darouach et al 1994a, Hou et Müller 1994). Toutefois, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'approche par décomposition en valeurs singulières car elle permet notamment la génération de résidus sans nécessiter l'estimation complète du vecteur d'état  $\underline{x}$ .

### 2.1.1 Hypothèses et position du problème

Le système continu considéré est supposé dynamique, linéaire et stationnaire. Classiquement, un tel système peut être représenté par le système d'équations suivant :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + E_d \underline{d} \quad (2.1.1a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + E_m \underline{d} \quad (2.1.1b)$$

où  $\underline{d} \in \mathfrak{R}^p$  est le vecteur représentant l'influence des défaillances, des perturbations et des imprécisions sur le modèle. Nous considérons dans cette première partie l'ensemble de ces fonctions comme des entrées inconnues.

Trois hypothèses sont à vérifier :

$$H_1 : m \geq p$$

Le nombre de mesures doit être supérieur ou égal au nombre d'entrées inconnues.

$$H_2 : \text{rang}(C) = m \text{ (la matrice } C \text{ doit être surjective)}$$

Toutes les mesures sont linéairement indépendantes.

$$H_3 : \text{rang} \begin{bmatrix} E_d \\ E_m \end{bmatrix} = p \text{ (la matrice } \begin{bmatrix} E_d \\ E_m \end{bmatrix} \text{ doit être injective)}$$

Toutes les perturbations sont linéairement indépendantes

Les hypothèses  $H_2$  et  $H_3$  n'engendrent pas de perte de généralité. En effet, si ces propriétés ne sont pas vérifiées, il existe une transformation régulière qui comprime les lignes (respectivement les colonnes) de la matrice  $C$  (respectivement  $\begin{bmatrix} E_d \\ E_m \end{bmatrix}$ ).

Le choix de la méthode de décomposition par valeurs singulières (Koenig et al 1996b, 1996c, 1997a) ou par moindres carrés (Koenig et al 1996b, 1997b) peut être effectué en fonction de l'influence des perturbations sur le système. En effet, selon la déficience du rang de la matrice  $E_m$  considérée, le sous-espace indépendant des entrées inconnues à rechercher change.

Deux cas :

$$\text{cas A) } \text{rang}(E_m) = r \text{ avec } \begin{cases} r < p \leq m \\ r = p < m \end{cases}$$

$$\text{cas B) } E_m = 0 \text{ avec } \begin{cases} p \leq m \text{ pour une approche par norme minimale} \\ p < m \text{ pour une approche par décomposition en valeurs singulières} \end{cases}$$

Il est toujours possible de se ramener à la forme classique de l'observateur à entrées inconnues présenté ci-dessous :

$$\dot{\underline{z}} = F\underline{z} + G\underline{y} + J\underline{u} \quad (2.1.2a)$$

$$\hat{\underline{x}} = M\underline{z} + N\underline{y} \quad (2.1.2b)$$

où  $\underline{z} \in \mathfrak{R}^{d^\circ}$ , ( $d^\circ \leq n$ ) est l'état de l'observateur et  $\hat{\underline{x}}$  l'estimation de  $\underline{x}$ .

Nous noterons que l'observateur (2.1.2) est d'ordre

plein si  $d^\circ = n$  ( $M = I_n$ ),

réduit si  $d^\circ < n$ ,

minimal si  $d^\circ = n - m + \text{rang}(E_m)$ .

Position du problème :

Il s'agit de déterminer les matrices  $F$ ,  $G$ ,  $J$ ,  $M$  et  $N$  de telle sorte que l'état estimé  $\hat{\underline{x}}$  converge asymptotiquement vers l'état  $\underline{x}$  du système (2.1.1), indépendamment de la perturbation  $\underline{d}$  et de l'état initial  $\underline{x}_0$ .

L'observateur (2.1.2) appliqué au système (2.1.1), doit alors vérifier les deux conditions d'existence du théorème de référence suivant.



**Théorème 2.1** (Hautus 1983; Zasadzinski et Darouach 1994) : Il existe les matrices  $F$ ,  $G$ ,  $J$ ,  $M$  et  $N$  telles que l'observateur (2.1.2) est un observateur stable à entrées inconnues pour le système (2.1.1) si et seulement si les conditions de découplage des entrées inconnues et de détectabilité sont vérifiées, respectivement :

$$c2.1a) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} - \text{rang}[E_m] = p$$

$$c2.1b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_i I_n - A & -E_d \\ C & E_m \end{bmatrix} = n + p, \quad \begin{cases} \forall \lambda_i \in \mathbb{C} \Re(\lambda_i) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit. ■

**Remarque :** La condition c2.1b signifie que le système composé des matrices  $\{C, A, E_d, E_m\}$  est détectable (respectivement observable) s'il ne présente pas de compensation de zéro instable (ne présente pas de compensation de zéro).

---

## 2.2 Estimation d'état robuste : approche par normes minimales

**Objectif :** Déterminer le système équivalent au système (2.1.1) mais indépendant des entrées inconnues. Ainsi, à l'aide d'un observateur classique (i.e. sans entrées inconnues), nous obtenons par simple changement de variable l'observateur à entrées inconnues (2.1.2).

### 2.2.1A Analyse et construction d'un observateur d'ordre plein ( $E_m \neq 0$ )

Nous considérons le système (2.1.1) et l'observateur à entrées inconnues (2.1.2) avec  $M = I_n$ . Nous proposons de résoudre le système linéaire  $E_m \underline{d} = \underline{y} - C\underline{x}$  où  $\underline{y}$  et  $\underline{x}$  sont deux vecteurs considérés comme connus et  $\underline{d}$  le vecteur des  $p$  entrées inconnues à déterminer.

#### Résolution du problème

D'après l'annexe A (A.2.1), la solution générale du système  $E_m \underline{d} = \underline{y} - C\underline{x}$  est,

$$\underline{d} = E_m^+ (\underline{y} - C\underline{x}) + R_{E_m}^\perp \bar{\underline{d}} \quad (2.2.1)$$

$$\text{avec : } R_{E_m}^\perp = I_p - R_{E_m} \quad (2.2.2)$$

$$R_{E_m} = E_m^+ E_m \quad (2.2.3)$$

$$P_{E_m}^\perp = I_m - P_{E_m} \quad (2.2.4)$$

$$P_{E_m} = E_m E_m^+ \quad (2.2.5)$$

*Remarque:*  $(E_m)^+$  représente la pseudo-inverse de  $E_m$  au sens de Moore-Penrose. Nous préserverons ce calcul au sens de Moore-Penrose tout au long du mémoire leurs propriétés sont énoncées en annexe A.

Substituons (2.2.1) dans (2.1.1a) et prémultiplions l'équation de mesure (2.1.1b) par  $P_{E_m}^\perp$ , le système (2.1.1) se réduit alors à un système dont l'espace de sortie est indépendant des entrées inconnues :

$$\dot{\underline{x}} = \overline{A}\underline{x} + B\underline{u} + E_d E_m^+ \underline{y} + E_d R_{E_m}^\perp \overline{\underline{d}} \quad (2.2.6a)$$

$$\overline{\underline{y}} = \overline{C}\underline{x} \quad (2.2.6b)$$

$$\text{avec : } \overline{\underline{y}} = P_{E_m}^\perp \underline{y}, \overline{C} = P_{E_m}^\perp C \text{ et } \overline{A} = A - E_d E_m^+ C$$

— Si  $\text{rang}(E_m) = p < m$

Alors la matrice  $E_m$  est de rang plein colonne et  $R_{E_m}^\perp = 0$  (voir annexe A.2.3), le système (2.2.6a) se réduit au système équivalent suivant :

$$\dot{\underline{x}} = \overline{A}\underline{x} + B\underline{u} + E_d E_m^+ \underline{y} \quad (2.2.7a)$$

$$\overline{\underline{y}} = \overline{C}\underline{x} \quad (2.2.7b)$$

$$\text{avec : } \overline{\underline{y}} = P_{E_m}^\perp \underline{y}, \overline{C} = P_{E_m}^\perp C \text{ et } \overline{A} = A - E_d E_m^+ C$$

Pour ce nouveau modèle (2.2.7), la dynamique de l'état (2.2.7a) est indépendante des entrées inconnues  $\overline{\underline{d}}$ . A l'aide d'un observateur classique (i.e. sans entrées inconnues), nous pouvons proposer comme estimateur de  $\underline{x}$  et  $\underline{d}$ , respectivement le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  et le vecteur  $\hat{\underline{d}}$  définis par :

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \overline{A}\hat{\underline{x}} + E_d E_m^+ \underline{y} + B\underline{u} + K(\overline{\underline{y}} - \overline{C}\hat{\underline{x}}) \quad (2.2.8)$$

$$\hat{\underline{d}} = E_m^+ (\underline{y} - C\hat{\underline{x}}) \quad (2.2.9)$$

où  $K$  est déterminé pour que la matrice  $\overline{A} - K\overline{C}$  soit stable.

Condition d'existence : Il faut et il suffit que la paire  $(\overline{A}, \overline{C})$  ne présente pas de compensation de zéro instable.

— Si  $\text{rang}(E_m) = r < p \leq m$ .

Prémultiplions (2.2.6a) par  $\overline{C}$ ,

$$\dot{\overline{\underline{y}}} = \overline{C}\overline{A}\underline{x} + \overline{C}B\underline{u} + \overline{C}E_d E_m^+ \underline{y} + \overline{C}E_d R_{E_m}^\perp \overline{\underline{d}} \quad (2.2.10)$$

nous obtenons par minimisation du critère  $\Phi = \|\dot{\overline{\underline{y}}} - \overline{C}\overline{A}\underline{x} - \overline{C}B\underline{u} - \overline{C}E_d E_m^+ \underline{y} - \overline{C}E_d R_{E_m}^\perp \overline{\underline{d}}\|_2$

la solution  $\overline{\underline{d}}$  suivante :

$$\overline{\underline{d}} = \left[ \overline{C}E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ \left[ \dot{\overline{\underline{y}}} - \overline{C}\overline{A}\underline{x} - \overline{C}E_d E_m^+ \underline{y} - \overline{C}B\underline{u} \right] + \left[ I_p - \left( \overline{C}E_d R_{E_m}^\perp \right)^+ \left( \overline{C}E_d R_{E_m}^\perp \right) \right] \overline{\underline{d}} \quad (2.2.11)$$

Substituons (2.2.11) dans (2.2.6a), nous obtenons le système équivalent :

$$\dot{\underline{x}} = T\bar{A}\underline{x} + E_d R_{E_m}^\perp \left[ \bar{C} E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ \dot{\underline{y}} + T E_d E_m^+ \underline{y} + T B \underline{u} + \underbrace{T E_d R_{E_m}^\perp \bar{d}}_{=0} \quad (2.2.12a)$$

$$\underline{y} = \bar{C}\underline{x} \quad (2.2.12b)$$

où  $T = I_n - E_d R_{E_m}^\perp \left[ P_{E_m}^\perp C E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ P_{E_m}^\perp C$  est solution de l'équation  $T E_d R_{E_m}^\perp = 0$  si et seulement si (Kurek 1983, Hou et Müller 1994)

$$\text{rang}\left(P_{E_m}^\perp C E_d R_{E_m}^\perp\right) = \text{rang}\left(E_d R_{E_m}^\perp\right) = p - r \quad (2.2.13)$$

Ainsi, pour ce nouveau modèle (2.2.12), la dynamique de l'état (2.2.12a) est indépendante de  $\bar{d}$ . Nous avons déterminé le système indépendant des entrées inconnues. Un observateur classique associé à ce système (2.2.12) suffit pour reconstruire l'état d'origine  $\underline{x}$  du système (2.1.1), indépendamment de la perturbation  $\underline{d}$  et de l'état initial  $\underline{x}_0$ .

Nous proposons alors comme estimateur de  $\underline{x}$ , le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  suivant :

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = T\bar{A}\hat{\underline{x}} + E_d R_{E_m}^\perp \left[ \bar{C} E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ \dot{\underline{y}} + T E_d E_m^+ \underline{y} + T B \underline{u} + K(\underline{y} - \bar{C}\hat{\underline{x}}) \quad (2.2.14)$$

L'inconvénient de cette structure est qu'elle nécessite la dérivation de la sortie,  $\underline{y}$ . Afin de contourner cette difficulté, nous définissons le changement de variable suivant :

$$\underline{z} = \hat{\underline{x}} - L\underline{y} \quad (2.2.15)$$

ce qui permet d'obtenir

$$\dot{\underline{z}} = F\underline{z} + G\underline{y} + J\underline{u} \quad (2.2.16a)$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{z} + L\underline{y} \quad (2.2.16b)$$

avec

$$F = T\bar{A} - K\bar{C} \quad (2.2.17)$$

$$G = T E_d E_m^+ + (K + FL)P_{E_m}^\perp \quad (2.2.18)$$

$$J = T B \quad (2.2.19)$$

$$L = E_d R_{E_m}^\perp \left[ P_{E_m}^\perp C E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ \quad (2.2.20)$$

$$\text{et } \bar{A} = A - E_d E_m^+ C \quad (2.2.21)$$

$$T = I_n - L\bar{C} \quad (2.2.22)$$

$$\bar{C} = P_{E_m}^\perp C \quad (2.2.23)$$

$$\underline{y} = P_{E_m}^\perp \underline{y} \quad (2.2.24)$$

Soit  $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$ , l'erreur d'estimation. D'après (2.2.12) et (2.2.14), elle obéit à l'équation suivante :

$$\dot{\underline{e}} = \underline{\dot{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = (\overline{TA} - \overline{KC})\underline{e} + \overline{TE}_d \overline{R}_{E_m}^\perp \overline{\underline{d}} \quad (2.2.25)$$

où d'après (2.2.13),  $\overline{TE}_d \overline{R}_{E_m}^\perp = 0$

Dans ces conditions, si  $F$  est de Hurwitz (i.e. les valeurs propres de  $F$  sont à parties réelles négatives) l'observateur (2.2.16) est satisfaisant (asymptotiquement) indépendamment des entrées inconnues

### Conclusion

En tenant compte du changement de variable  $\hat{\underline{x}} = \underline{z} + L\underline{\bar{y}}$  et sachant que  $\underline{\bar{y}} = P_{E_m}^\perp \underline{y}$ , le système (2.2.16) se réécrit avec les mêmes relations que celles d'un observateur à entrées inconnues classique :

$$\dot{\underline{z}} = F\underline{z} + G\underline{y} + J\underline{u} \quad (2.2.26a)$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{z} + N\underline{y} \quad (2.2.26b)$$

$$\text{avec : } N = LP_{E_m}^\perp = L(I_m - E_m E_m^+) \quad (2.2.27)$$

Ainsi, sous l'hypothèse de la validation des conditions d'existence énoncées ci-dessous, il est toujours possible d'estimer l'état du système (2.1.1). Nous obtenons alors les mêmes résultats et les mêmes conditions d'existence que celles énoncées par Kurek 1983, ou encore Hou et Müller 1994.

L'équation (2.2.25) et la condition de découplage des entrées inconnues (2.2.13) permettent d'énoncer les lemmes suivants.

**Lemme 2.2** Le système (2.1.2), est un observateur d'état à entrées inconnues d'ordre plein (i.e.  $M=I_n$ ), pour le système (2.2.12) si et seulement si  $\overline{TE}_d \overline{R}_{E_m}^\perp = 0$  et les valeurs propres de la matrice  $F = \overline{TA} - \overline{KC}$  sont toutes à parties réelles strictement négatives.

**Lemme 2.3** Si la paire  $(\overline{TA}, \overline{C})$  est détectable (respectivement observable), nous pouvons par un choix judicieux du gain  $K$  de l'observateur, stabiliser la matrice  $F$  (2.2.17) par les méthodes standard de placement de pôles (tous les pôles de l'observateur peuvent être arbitrairement placés).

**Lemme 2.4** La paire  $(\overline{TA}, \overline{C})$  est détectable (respectivement observable) si et seulement si elle ne présente pas de compensation de zéro instable (ne présente pas de compensation de zéro).

Tenant compte des lemmes précédents, l'observateur (2.2.26) appliqué au système (2.2.12), doit alors vérifier les deux conditions d'existence du théorème suivant.

**Théorème 2.2 :** Par analogie avec le théorème 2.1, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur (2.2.26) sont :

$$c2.2a) \quad \text{rang}\left(P_{E_m}^\perp C E_d R_{E_m}^\perp\right) = \text{rang}\left(E_d R_{E_m}^\perp\right) = p - r$$

$$c2.2b) \quad \text{rang}\left[\begin{array}{c} \lambda_i I_n - T\bar{A} \\ \bar{C} \end{array}\right] = n, \quad \begin{cases} \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \Re(\lambda_i) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit. ■

### Algorithme de mise en oeuvre

- 1) Vérifier les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ .
- 2) Déterminer  $E_m^+$  par une décomposition en valeurs singulières (annexe A).
- 3) Calculer les matrices  $P_{E_m}$ ,  $R_{E_m}$ ,  $P_{E_m}^\perp$ ,  $R_{E_m}^\perp$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{C}$ ,  $L$ ,  $N$ , et  $T$  à partir de (2.2.5), (2.2.3), (2.2.4), (2.2.2), (2.2.21), (2.2.23), (2.2.20), (2.2.27) et (2.2.22).
- 4) Si la paire  $(T\bar{A}, \bar{C})$  est détectable, calculer  $K$  pour que la matrice  $F$  soit stable.
- 5) Dédire les matrices  $F$ ,  $G$ , et  $J$  à partir des relations (2.2.17), (2.2.18) et (2.2.19). ◇

### 2.2.2B Analyse et construction d'un observateur d'ordre plein ( $E_m = 0$ )

Nous considérons le système (2.1.1), avec  $E_m = 0$ ,  $p \leq m$ , et l'observateur à entrées inconnues (2.2.26). Nous proposons de résoudre le système linéaire  $\underline{\dot{y}} - CA\underline{x} - CB\underline{u} = CE_d \underline{d}$  où  $\underline{\dot{y}}$ ,  $\underline{x}$  et  $\underline{u}$  sont trois vecteurs connus et  $\underline{d}$  le vecteur des  $p$  entrées inconnues à déterminer.

#### Résolution du problème

D'après l'annexe A (A.2.1) et Koenig et al (1997b), le problème consiste à trouver  $\underline{d}$  afin que le critère  $\Phi = \|\underline{\dot{y}} - CA\underline{x} - CB\underline{u} - CE_d \underline{d}\|_2$  soit minimal.

La solution de ce problème est donnée par :

$$\underline{d} = (CE_d)^+ (\underline{\dot{y}} - CA\underline{x} - CB\underline{u}) + \left( I_p - (CE_d)^+ (CE_d) \right) \bar{\underline{d}} \quad (2.2.28)$$

Par substitution de (2.2.28) dans (2.1.1a), nous obtenons le système équivalent :

$$\dot{\underline{x}} = TA\underline{x} + E_d(CE_d)^+ \dot{\underline{y}} + TB\underline{u} + \underbrace{TE_d}_{=0} \underline{\bar{d}} \quad (2.2.29a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (2.2.29b)$$

$$\text{avec } T = I_n - E_d(CE_d)^+ C \quad (2.2.30)$$

Cette matrice T est solution de l'équation  $TE_d = 0$  si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p \leq m \quad (2.2.31)$$

Dans ce cas, la matrice  $CE_d$  est injective, aussi

$$(CE_d)^+ = \left( (CE_d)^T (CE_d) \right)^{-1} (CE_d)^T \quad (2.2.32)$$

$$\text{et donc, } TE_d = E_d - E_d(CE_d)^+ (CE_d) = 0.$$

Ainsi, pour le nouveau système (2.2.29), la dynamique de l'état (2.2.29a) est indépendante de  $\underline{\bar{d}}$ . Un observateur classique associé à ce système (2.2.29) suffit pour reconstruire l'état d'origine ( $\underline{x}$ ) du système (2.1.1), indépendamment de la perturbation ( $\underline{\bar{d}}$ ) et de l'état initial ( $\underline{x}_0$ ).

Nous pouvons alors proposer comme estimateur de  $\underline{x}$  le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  défini par :

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = TA\hat{\underline{x}} + E_d(CE_d)^+ \dot{\underline{y}} + TB\underline{u} + K(\underline{y} - C\hat{\underline{x}}) \quad (2.2.33)$$

A l'aide du changement de variable :

$$\underline{z} = \hat{\underline{x}} - N\underline{y} \quad (2.2.34)$$

$$\text{avec } N = E_d(CE_d)^+ \quad (2.2.35)$$

nous obtenons :

$$\dot{\underline{z}} = F\underline{z} + G\underline{y} + J\underline{u} \quad (2.2.36a)$$

$$\hat{\underline{x}} = \underline{z} + N\underline{y} \quad (2.2.36b)$$

$$\text{où : } F = TA - KC \quad (2.2.37)$$

$$G = K + FN \quad (2.2.38)$$

$$J = TB \quad (2.2.39)$$

Soit  $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$  l'erreur d'estimation, d'après (2.2.29) et (2.2.33), elle obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\underline{e}} = \underline{\dot{x}} - \underline{\dot{\hat{x}}} = (TA - KC)\underline{e} + TE_d \bar{\underline{d}} \quad (2.2.40)$$

où d'après (2.2.31),

$$TE_d = 0 \quad (2.2.41)$$

Dans ces conditions, l'observateur (2.2.36) est satisfaisant (asymptotiquement) indépendamment des entrées inconnues si et seulement si  $F$  est de Hurwitz (i.e. les valeurs propres de  $F$  sont à parties réelles négatives).

### Conclusion

En tenant compte du fait que  $\hat{\underline{x}} = \underline{z} + N\underline{y}$ , la relation (2.2.33) se réécrit sous la forme (2.2.36), avec les mêmes relations et les mêmes conditions d'existence que celles de l'observateur à entrées inconnues classique.

D'autre part, il est maintenant possible connaissant l'estimation de l'état  $\underline{x}$ , de reconstruire les entrées inconnues  $\underline{d}$ . D'après la condition (2.2.31), nous avons  $(CE_d)^+(CE_d) = I_p$  soit :

$$\hat{\underline{d}} = (CE_d)^+(\underline{\dot{y}} - CA\hat{\underline{x}} - CB\underline{u}) \quad (2.2.42)$$

Ainsi, sous l'hypothèse de la validation des conditions d'existence énoncées, il est toujours possible d'estimer l'état et les entrées inconnues du système (2.1.1). Nous obtenons alors les mêmes résultats et les mêmes conditions d'existence que celles énoncées par Chang et al 1994 pour une approche à modèle discret ou encore Hou et Müller 1992 pour une approche à modèle continu.

L'équation (2.2.40) et la condition (2.2.31) permettent d'énoncer les lemmes suivants.

**Lemme 2.5** Le système (2.2.36) est un observateur d'état à entrées inconnues d'ordre plein (i.e.  $M=I_n$ ) pour le système (2.2.29) si et seulement si  $TE_d = 0$  et les valeurs propres de la matrice  $F = TA - KC$  sont toutes à parties réelles strictement négatives.

**Lemme 2.6** Si la paire  $(TA, C)$  est détectable (respectivement observable), nous pouvons par un choix judicieux du gain  $K$  de l'observateur, stabiliser la matrice  $F$  (2.2.37) par les méthodes standard de placement de pôles (tous les pôles de l'observateur peuvent être arbitrairement placés).

Tenant compte des lemmes précédents, l'observateur (2.2.36) appliqué au système (2.2.29) doit alors vérifier les deux conditions d'existence du théorème suivant.

**Théorème 2.3 :** Par analogie avec le théorème 2.2, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur (2.2.36) sont :

$$c2.3a) \quad \text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p$$

$$c2.3b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - TA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit.



■

### Algorithme de mise en oeuvre

- 1) Vérifier les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ .
- 2) Calculer  $(CE_d)^+ = \left( (CE_d)^T (CE_d) \right)^{-1} (CE_d)^T$  en déduire d'après (2.2.30), T.
- 3) Si la paire  $(TA, C)$  est détectable, calculer K pour que la matrice F soit stable.
- 4) Déduire les matrices F, N, G et J à partir des relations (2.2.37), (2.2.35), (2.2.38) et (2.2.39).

◇

## 2.3 Estimation d'état robuste : Approche par décomposition en valeurs singulières

**Objectif :** Par une décomposition standard en valeurs singulières de la matrice  $E_m$ , nous déterminons le sous espace des sorties  $\underline{y}$  indépendantes des entrées inconnues  $\underline{d}$ . Nos travaux portent alors sur l'étude et la mise en oeuvre d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein, minimal, ou réduit, permettant de reconstruire l'état complet du système.

### 2.3.1A Etude préalable

Nous considérons le système (2.1.1) et l'observateur à entrées inconnues (2.1.2). Le système étudié présente des entrées inconnues sur l'état et la mesure. L'objectif est donc d'obtenir un système équivalent à (2.1.1) ne présentant pas d'entrées inconnues sur les mesures. Nous donnons alors les conditions d'existence de l'observateur associé à ce nouveau système.

Ce problème, est résolu par décomposition standard en valeurs singulières de la matrice  $E_m$ , suivante :

$$E_m = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} Q \quad (2.3.1)$$

où P et Q sont deux matrices régulières (annexe A).



Substituons (2.3.1) dans (2.1.1b), le système (2.1.1) est transformé en un système équivalent :

$$\dot{\underline{x}} = A_1 \underline{x} + B \underline{u} + \bar{E}_{d_1} \bar{\underline{y}}_1 + \bar{E}_{d_2} \bar{\underline{d}}_2 \quad (2.3.2a)$$

$$\bar{\underline{y}}_1 = \bar{C}_1 \underline{x} + \bar{\underline{d}}_1 \quad (2.3.2b)$$

$$\bar{\underline{y}}_2 = \bar{C}_2 \underline{x} \quad (2.3.2c)$$

Où :

$$\bar{\underline{d}} = Q \underline{d} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \underline{d} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{d}}_1 \\ \bar{\underline{d}}_2 \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\underline{d}}_1 \in \mathfrak{R}^r \\ \bar{\underline{d}}_2 \in \mathfrak{R}^{p-r} \end{array} \right) \quad (2.3.3)$$

$$\bar{\underline{y}} = P^{-1} \underline{y} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} \\ P_2^{-1} \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{y}}_1 \\ \bar{\underline{y}}_2 \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\underline{y}}_1 \in \mathfrak{R}^r \\ \bar{\underline{y}}_2 \in \mathfrak{R}^{m-r} \end{array} \right) \quad (2.3.4)$$

$$A_1 = (A - \bar{E}_{d_1} \bar{C}_1) \quad (2.3.5)$$

$$\bar{C} = P^{-1} C = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{C}_1 \in \mathfrak{R}^{r \times n} \\ \bar{C}_2 \in \mathfrak{R}^{(m-r) \times n} \end{array} \right) \quad (2.3.6)$$

$$\bar{E}_d = E_d Q^{-1} = [\bar{E}_{d_1} \quad \bar{E}_{d_2}], \quad (\bar{E}_{d_1} \in \mathfrak{R}^{n \times r} \quad \bar{E}_{d_2} \in \mathfrak{R}^{n \times (p-r)}) \quad (2.3.7)$$

D'après les hypothèses  $H_3$  et  $H_2$ , la matrice  $\bar{E}_{d_2}$  est injective (i.e.  $\text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r$ ) et la matrice  $\bar{C}_2$  est surjective (i.e.  $\text{rang}(\bar{C}_2) = m - r$ ).

D'autre part, l'hypothèse  $H_1$  (ie.,  $m \geq p > r$  ou  $m > p = r$ ) est fondamentale car elle explicite la partie des mesures non affectées par la perturbation  $\underline{d}$ , appelée  $\bar{\underline{y}}_2$ . Ainsi, seules les mesures  $\bar{\underline{y}}_2$  sont disponibles pour reconstruire le vecteur d'état  $\underline{x}$  (2.3.2a). En effet, aucune information pertinente sur  $\underline{x}$ , c'est à dire indépendante de  $\underline{d}$ , ne peut être extraite des mesures  $\bar{\underline{y}}_1$ .

Enfin grâce au changement de base (2.3.4) et à l'équation de mesure (2.3.2c), l'observateur à entrées inconnues (2.1.2) peut se réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = F \underline{z} + G P \bar{\underline{y}} + J \underline{u} \\ \hat{\underline{x}} = M \underline{z} + N P \bar{\underline{y}} \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{z}} = F \underline{z} + \bar{G}_1 \bar{\underline{y}}_1 + \bar{G}_2 \bar{\underline{y}}_2 + J \underline{u} \\ \hat{\underline{x}} = M \underline{z} + [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2] \begin{bmatrix} \bar{\underline{y}}_1 \\ \bar{\underline{y}}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$\text{avec : } \bar{G} = G P = [\bar{G}_1 \quad \bar{G}_2] \quad (2.3.10)$$

$$\bar{N} = [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2] = N P \quad (2.3.11)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{z}} = F \underline{z} + \bar{G}_1 \bar{\underline{y}}_1 + \bar{G}_2 \bar{\underline{y}}_2 + J \underline{u} \\ \hat{\underline{x}} = M \underline{z} + \bar{N}_2 \bar{\underline{y}}_2 + \bar{N}_1 (\bar{C}_1 \underline{x} + \bar{\underline{d}}_1) \end{cases} \quad (2.3.12)$$

où l'entrée inconnue  $\bar{d}_1$  ne doit pas influencer l'estimation de l'état ( $\underline{x}$ ). Nous choisissons alors  $\bar{N}_1 = 0$ , l'observateur à entrées inconnues (2.1.2) prend la forme équivalente :

$$\dot{\underline{z}} = F\underline{z} + \bar{G}_1 \bar{y}_1 + \bar{G}_2 \bar{y}_2 + J\underline{u} \quad (2.3.13a)$$

$$\hat{\underline{x}} = M\underline{z} + \bar{N}_2 \bar{y}_2 \quad (2.3.13b)$$

Sachant que seules les mesures  $\bar{y}_2$  sont disponibles pour reconstruire le vecteur d'état  $\underline{x}$ , l'ordre minimal de l'observateur à entrées inconnues (2.3.13) est  $d^\circ = n - (m - r)$ . Nous obtenons ainsi la même condition que celle énoncée dans les travaux de Hou et Müller 1994, à savoir  $d^\circ = n - m + \text{rang}(E_m)$ .

L'observateur (2.3.13), appliqué au système (2.3.2), doit alors vérifier les deux conditions d'existence du théorème suivant.

**Théorème 2.4** (Koenig et al 1996b) : Par analogie avec le théorème 2.1, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur (2.3.13) sont :

$$c2.4a) \quad \text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r$$

$$c2.4b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} = n + p - r, \quad \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit. ■

### 2.3.2A Analyse et construction d'un observateur d'ordre plein ( $E_m \neq 0$ )

Nous présentons une méthode pour synthétiser un observateur à entrées inconnues, d'ordre  $n$ , pour le système équivalent (2.3.2). Cet observateur est donné par (2.3.13) avec  $M=I_n$ , et les conditions d'existence sont données par le théorème 2.4.

#### Résolution du problème

— D'après l'annexe A, si  $\text{rang}(E_m) = p < m$  alors la matrice  $E_m$  est de rang plein colonnes, (i.e.  $r = p$ ,  $Q = I_p$ ,  $\underline{d} = \bar{d} = \bar{d}_1$ ) et donc le système (2.3.2) se réduit au sous-système équivalent suivant :

$$\dot{\underline{x}} = A_1 \underline{x} + B\underline{u} + \bar{E}_{d_1} \bar{y}_1 \quad (2.3.14a)$$

$$\bar{y}_2 = \bar{C}_2 \underline{x} \quad (2.3.14b)$$

Pour ce nouveau système (2.3.14), la dynamique de l'état (2.3.14a) est indépendante des entrées inconnues  $\bar{d}$ . Ainsi à l'aide d'un observateur classique (i.e. sans entrées

inconnues), nous pouvons proposer comme estimateurs de  $\underline{x}$  et  $\underline{d}$  respectivement le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  et le vecteur  $\hat{\underline{d}}$  définis par :

$$\hat{\underline{x}} = A_1 \hat{\underline{x}} + \bar{E}_{d_1} \bar{y}_1 + B \underline{u} + K(\bar{y}_2 - \bar{C}_2 \hat{\underline{x}}) \quad (2.3.15)$$

$$\hat{\underline{d}} = \bar{y}_1 - \bar{C}_1 \hat{\underline{x}} \quad (2.3.16)$$

où  $K$  est déterminé pour que la matrice  $(A_1 - K\bar{C}_2)$  soit stable.

Condition d'existence : il faut et il suffit que la paire  $(A_1, \bar{C}_2)$  ne présente pas de compensation de zéro instable.

— Cependant si  $\text{rang}(E_m) = r < p \leq m$  alors  $\bar{d}_2 \in \mathfrak{R}^{p-r}$  existe. La dynamique de l'erreur d'estimation d'état  $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}} = (I_n - \bar{N}_2 \bar{C}_2) \underline{x} - \underline{z}$  d'après (2.3.2), (2.3.13) est alors donnée par :

$$\dot{\underline{e}} = F \underline{e} + (-FT + TA_1 - \bar{G}_2 \bar{C}_2) \underline{x} + (TB - J) \underline{u} + (T\bar{E}_{d_1} - \bar{G}_1) \bar{y}_1 + T\bar{E}_{d_2} \bar{d}_2 \quad (2.3.17)$$

$$\text{où } T = (I_n - \bar{N}_2 \bar{C}_2) \quad (2.3.18)$$

L'équation différentielle (2.3.17) est homogène

$$\dot{\underline{e}} = F \underline{e} \quad (\text{stable}) \quad (2.3.19)$$

si les relations suivantes sont satisfaites

$$TA_1 - FT - \bar{G}_2 \bar{C}_2 = 0 \quad (2.3.20)$$

$$T\bar{E}_{d_2} = 0 \quad (2.3.21)$$

$$J = TB \quad (2.3.22)$$

$$\bar{G}_1 = T\bar{E}_{d_1} \quad (2.3.23)$$

La résolution, de l'équation de Sylvester (2.3.20) sous la contrainte (2.3.21) en assurant la stabilité de  $F$ , peut être transformée en un problème de placement de pôles de la matrice  $(TA_1)$  en posant (Darouach et al 1994a; Chen 1996) :

$$F = TA_1 - K\bar{C}_2 \quad (2.3.24)$$

$$\text{avec } \bar{G}_2 = K + F\bar{N}_2 = K(I_{m-r} - \bar{C}_2 \bar{N}_2) + TA_1 \bar{N}_2 \quad (2.3.25)$$

et d'après (2.3.18), l'équation (2.3.21) devient

$$\bar{N}_2 \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} = \bar{E}_{d_2} \quad (2.3.26)$$

La solution  $\bar{N}_2$  vérifiant l'égalité (2.3.26) existe, si et seulement si

$$\text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r \quad (2.3.27)$$

elle est donnée par :

$$\begin{aligned}\bar{N}_2 &= \bar{E}_{d_2}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ + Y \left( P_{\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}}^\perp \right) \\ &= \bar{E}_{d_2}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ + Y \left( I_{m-r} - (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \right)\end{aligned}\quad (2.3.28)$$

soit, d'après (2.3.18)

$$T = (I_n - Y \bar{C}_2) \left( I_n - \bar{E}_{d_2}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \bar{C}_2 \right) \quad (2.3.29)$$

où  $Y$  est une matrice arbitraire, de dimension appropriée que nous choisissons égale à 0 afin de ne pas rajouter inutilement des modes inobservables dans la paire  $(TA_1, \bar{C}_2)$ .

$$\text{Ainsi } \bar{N}_2 = \bar{E}_{d_2}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \quad (2.3.30)$$

$$T = \left( I_n - \bar{E}_{d_2}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \bar{C}_2 \right) \quad (2.3.31)$$

et d'après la condition (2.3.27), la contrainte (2.3.21) est vérifiée.

Le système (2.3.13) est un observateur d'état à entrées inconnues d'ordre plein (i.e.  $M=I_n$ ), pour le système équivalent (2.3.2) si et seulement si les relations (2.3.20) à (2.3.23) sont satisfaites,  $F$  ayant toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.

### Conclusion

En tenant compte de la décomposition de la matrice  $E_m$  (2.3.1) et du changement de base  $\bar{y} = P^{-1}y = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}$ , le système (2.3.13) est équivalent à l'observateur à entrées inconnues (2.1.2) avec,  $M=I_n$ .

Les équations (2.3.19), (2.3.21) et (2.3.24) permettent d'énoncer les lemmes suivants.

**Lemme 2.7** Le système (2.3.13), est un observateur d'état à entrées inconnues d'ordre  $n$  (i.e.  $M=I_n$ ), pour le système (2.1.1) si et seulement si  $T\bar{E}_{d_2} = 0$  et les valeurs propres de la matrice  $F = TA_1 - K\bar{C}_2$  sont toutes à parties réelles strictement négatives.

**Lemme 2.8** Si la paire  $(TA_1, \bar{C}_2)$  est détectable (respectivement observable), nous pouvons par un choix judicieux du gain  $K$  de l'observateur, stabiliser la matrice  $F$  (2.3.24) par les méthodes standard de placement de pôles (tous les pôles de l'observateur peuvent être arbitrairement placés).

L'observateur (2.3.13) en utilisant les lemmes précédents, doit alors vérifier les deux conditions d'existence du théorème suivant.

**Théorème 2.5** : Par analogie avec le théorème 2.1, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur d'ordre plein (2.3.13) sont :

$$c2.5a) \quad \text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r$$

$$c2.5b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - TA_1 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = n, \quad \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit. ■

### Algorithme de mise en oeuvre

- 1) Vérifier les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ .
- 2) Dédire le système (2.3.2) par la décomposition (2.3.1) de la matrice  $E_m$ .
- 3) Calculer les matrices  $\bar{N}_2$  et  $T$  en utilisant respectivement (2.3.30) et (2.3.31).
- 4) Si la paire  $(TA_1, \bar{C}_2)$  est détectable, calculer  $K$  pour que la matrice  $F$  soit stable.
- 5) Déterminer les matrices  $F$ ,  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{G}_2$  et  $J$  à partir des relations (2.3.24), (2.3.23), (2.3.25) et (2.3.22). ◇

### 2.3.3A Analyse et construction d'un observateur d'ordre minimal ( $E_m \neq 0$ )

Dans les parties précédentes, nous avons déterminé des observateurs de même dimension que l'état du système à reconstruire. Nous montrons dans ce paragraphe qu'il est possible de construire, des estimateurs d'ordre inférieur. En effet, comme  $\bar{C}_2$  est surjective (i.e.  $\text{rang}(\bar{C}_2) = m - r$ ), nous observons  $m - r$  mesures indépendantes et insensibles aux entrées inconnues, à partir de  $\bar{y}_2$ . Il suffit donc de reconstruire les  $n - (m - r)$  pseudo-observations  $\underline{z}$  manquantes.

### Résolution du problème

Cet observateur d'ordre minimal est donné par (2.3.13) et les conditions d'existence sont données par le théorème 2.4. Le problème consiste alors à trouver une matrice  $\bar{T}$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{T} \underline{x} - \underline{z}) = 0 \quad (2.3.32)$$

En d'autres termes, il s'agit de trouver  $\bar{T}$  telle que  $\begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}$  soit inversible. Nous notons  $[M \ \bar{N}_2]$  l'inverse de cette matrice.

Ainsi si nous combinons les deux relations (2.3.2c) et (2.3.32),

$$\begin{bmatrix} z \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (2.3.33)$$

nous pouvons alors reconstruire l'état complet du système (2.2.1) par la relation :

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = [M \ \bar{N}_2] \begin{bmatrix} z \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.34)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} [M \ \bar{N}_2] = \begin{bmatrix} \bar{T}M & \bar{T}\bar{N}_2 \\ \bar{C}_2M & \bar{C}_2\bar{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-(m-r)} & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} = I_n \quad (2.3.35)$$

$$[M \ \bar{N}_2] \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = M\bar{T} + \bar{N}_2\bar{C}_2 = I_n \quad (2.3.36)$$

Définissons l'erreur entre  $\bar{T}\hat{\underline{x}}$  et  $\underline{z}$  et étudions sa dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \dot{\underline{z}} - \bar{T}\dot{\hat{\underline{x}}} \\ &= F\underline{e} + (F\bar{T} + \bar{G}_2\bar{C}_2 - \bar{T}A + \bar{T}\bar{E}_{d_1}\bar{C}_1)\underline{x} + (\bar{G}_1 - \bar{T}\bar{E}_{d_1})\bar{y}_1 - \bar{T}\bar{E}_{d_2}\bar{d}_2 + (J - \bar{T}B)\underline{u} \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Si les relations suivantes sont satisfaites :

$$F\bar{T} + \bar{G}_2\bar{C}_2 - \bar{T}A_1 = 0 \quad (2.3.38)$$

$$\bar{T}\bar{E}_{d_2} = 0 \quad (2.3.39)$$

$$\bar{G}_1 = \bar{T}\bar{E}_{d_1} \quad (2.3.40)$$

$$J = \bar{T}B \quad (2.3.41)$$

$$\text{avec : } A_1 = (A - \bar{E}_{d_1}\bar{C}_1) \quad (2.3.42)$$

alors l'équation différentielle (2.3.37) est homogène :

$$\dot{\underline{e}} = F\underline{e} \quad (2.3.43)$$

et donc l'erreur d'estimation d'état  $\tilde{\underline{x}} = \hat{\underline{x}} - \underline{x}$  (2.3.44)

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{x}} &= M\underline{z} + \bar{N}_2\bar{y}_2 - \underline{x} \\ &= M\underline{e} + (M\bar{T} + \bar{N}_2\bar{C}_2 - I_n)\underline{x} \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

tend asymptotiquement vers zéro si la stabilité de F ainsi que les relations (2.3.36) et (2.3.38) à (2.3.41) sont vérifiées.

En conclusion, la synthèse d'un observateur à entrées inconnues d'ordre minimal revient à résoudre, en assurant la stabilité de  $F$ , l'équation de Sylvester (2.3.38) sous les contraintes (2.3.39), (2.3.35) et (2.3.36). Cette synthèse peut être transformée en un problème de placement de pôles.

En effet, écrivant  $\bar{T}$  comme une fonction de deux paramètres  $\beta$  et  $R$  :

$$\bar{T} = R - \beta\bar{C}_2 \quad (2.3.46)$$

où  $\beta$  est une matrice arbitraire et  $R$  une matrice telle que  $\det \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \neq 0$ . Ainsi, la matrice  $\begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}$  est inversible (Wonham 1968), conformément à (2.3.35) et (2.3.36).

Les équations (2.3.35), (2.3.39) et (2.3.46) donnent

$$\begin{aligned} \bar{T}M &= I_{n-(m-r)} \\ (R - \beta\bar{C}_2)M &= I_{n-(m-r)} \\ \text{sachant que } \bar{C}_2M &= 0 \text{ soit } \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}M = \begin{bmatrix} I_{n-(m-r)} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

Comme  $\det \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \neq 0$ , nous obtenons :

$$M = \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-(m-r)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.48)$$

De même, d'après (2.3.35) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} R - \beta\bar{C}_2 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{N}_2 - \begin{bmatrix} \beta\bar{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et sachant que :

$$\bar{C}_2 \bar{N}_2 = I_{m-r}, \text{ soit } \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{N}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ I_{m-r} \end{bmatrix} \quad (2.3.49)$$

nous obtenons :

$$\bar{N}_2 = \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta \\ I_{m-r} \end{bmatrix} \quad (2.3.50)$$

Avec ces notations, l'équation (2.3.39) devient :

$$\begin{aligned} (R - \beta\bar{C}_2)\bar{E}_{d_2} &= 0 \\ \Leftrightarrow R\bar{E}_{d_2} &= \beta\bar{C}_2\bar{E}_{d_2} \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

La solution  $\beta$  vérifiant l'égalité (2.3.51) existe indépendamment de la matrice R si et seulement si

$$\text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r \quad (2.3.52)$$

elle est donnée par :

$$\beta = R \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ + \alpha \left( I_{m-r} - (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \right) \quad (2.3.53)$$

où  $\alpha$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

Ainsi, en postmultipliant (2.3.38) par M, et en utilisant les relations (2.3.35), (2.3.46), nous obtenons :

$$F = T A_1 M = R A_1 M - \beta \bar{C}_2 A_1 M \quad (2.3.54)$$

De même, en postmultipliant (2.3.38) par  $\bar{N}_2$ , et en utilisant les relations (2.3.35), (2.3.46), nous obtenons :

$$\bar{G}_2 = \bar{T} A_1 \bar{N}_2 = R A_1 \bar{N}_2 - \beta \bar{C}_2 A_1 \bar{N}_2 \quad (2.3.55)$$

D'après (2.3.46), (2.3.40), (2.3.41), nous obtenons :

$$\bar{G}_1 = R \bar{E}_{d_1} - \beta \bar{C}_2 \bar{E}_{d_1} \quad (2.3.56)$$

$$J = R B - \beta \bar{C}_2 B \quad (2.3.57)$$

Et la substitution de (2.3.53) dans (2.3.54) donne :

$$F = \Phi - \alpha \Omega \quad (2.3.58)$$

$$\text{avec } \Phi = R A_1 M - R \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \bar{C}_2 A_1 M \quad (2.3.59)$$

$$\Omega = \left( I_{m-r} - (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \right) \bar{C}_2 A_1 M \quad (2.3.60)$$

## Conclusion

Si la paire  $(\Phi, \Omega)$  est détectable (observable), un observateur à entrées inconnues d'ordre minimal peut être synthétisé avec les méthodes standard de placement de pôles (tous les pôles de l'observateur peuvent être arbitrairement placés).

L'observateur d'ordre minimal (2.3.13) doit alors vérifier les deux conditions d'existence du théorème suivant.



**Théorème 2.6 :** Par analogie avec le théorème 2.1, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur d'ordre minimal (2.3.13) pour le système (2.3.2) sont

$$c2.6a) \quad \text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r$$

$$c2.6b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - \Phi \\ \Omega \end{bmatrix} = n - (m - r), \quad \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit.

Note : Les matrices  $\Phi$  et  $\Omega$  sont définies respectivement par (2.3.59) et (2.3.60) ■

### Algorithme de mise en oeuvre

- 1) Vérifier les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$
- 2) Dédire le système (2.3.2) par la décomposition (2.3.1) de la matrice  $E_m$ .
- 3) Choisir  $R \in \mathfrak{R}^{(n-(m-r)) \times n}$  telle que  $\det \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} \neq 0$
- 4) Calculer  $M$  d'après (2.3.48)
- 5) Si la paire  $(\Phi, \Omega)$  est détectable, calculer  $\alpha$  pour que la matrice  $F$  soit stable.
- 6) Déterminer les matrices  $\beta$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $F$ ,  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{G}_2$  et  $J$  à partir des relations (2.3.53), (2.3.50), (2.3.58) (2.3.56), (2.3.55) et (2.3.57). ◇

Comme nous l'avons vu dans l'étude précédente (2.3.1A), le système général (2.1.1) peut toujours se ramener à un sous-système dont une partie des mesures (sorties) est indépendante des entrées inconnues ( $\underline{d}$ ). Etendons alors cette solution, en recherchant pour le système (2.1.1) avec  $E_m = 0$  le sous système indépendant des entrées inconnues.

### 2.3.4B Analyse et construction d'un observateur d'ordre réduit ( $E_m = 0$ )

Par une décomposition en valeurs singulières, nous déterminons le sous-système indépendant des entrées inconnues de telle sorte que l'observateur associé à ce sous-système puisse reconstruire l'état du sous-système. Par un simple changement de base, nous retrouvons l'espace d'origine utile à la reconstruction complète de l'état ( $\underline{x}$ ) du système (2.1.1), indépendamment de la perturbation ( $\underline{d}$ ) et de l'état initial ( $\underline{x}_0$ ).

### Position et résolution du problème

Nous considérons le système (2.1.1), avec  $E_m = 0$ ,  $p < m$ , et l'observateur à entrées inconnues (2.2.26).

*Résolution du problème*

Par hypothèse  $\text{rang}(E_d) = p$ , donc d'après l'annexe A (A.1.24) et les résultats développés par (Koenig et al 1996c, 1997a), nous savons trouver une matrice régulière  $P$  telle que :

$$PE_d = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} E_d = \begin{pmatrix} 0_{(n-p) \times p} \\ I_p \end{pmatrix} \quad (2.3.61)$$

$$\text{avec } E_d^T P_1^T = 0 \Leftrightarrow P_1^T = \text{Ker}(E_d^T) \text{ et } P_1 P_1^T = I_{n-p} \quad (2.3.62)$$

$\text{Ker}(E_d^T)$  s'interprète comme le sous-espace vectoriel orthogonal aux lignes de  $E_d^T$  ou encore au sous-espace vectoriel orthogonal aux colonnes de  $E_d$ , ainsi :

$$P_1 P_1^T = I_{n-p} \text{ et } P_1 E_d = 0 \quad (2.3.63)$$

de plus, sachant que  $E_d$  est injective alors,

$$E_d^+ = (E_d^T E_d)^{-1} E_d^T \text{ et } E_d^+ E_d = I_p \quad (2.3.64)$$

Finalement  $\text{Ker}(P_1) \cap \text{Ker}(E_d^+) = 0$

$$\text{et } \text{rang} \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} = n$$

Ainsi,  $P$  est inversible, et nous notons :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^T & E_d \end{bmatrix} \quad (2.3.65)$$

son inverse.

Nous pouvons vérifier ces résultats de la façon suivante :

$$P^{-1}P = PP^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T & E_d \end{bmatrix} = I_n$$

En prémultipliant (2.1.1a) par  $P$ , nous obtenons le sous-système équivalent :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \hat{\mathbf{A}}_{11} \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} \quad (2.3.66a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \hat{\mathbf{A}}_{21} \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} + \hat{\mathbf{d}} \quad (2.3.66b)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{C}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (2.3.66c)$$

Avec :

$$\hat{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p} \quad (2.3.67)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = P\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.68)$$

$$\widehat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} P_1^T & E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.3.69)$$

$$\widehat{C} = CP^{-1} = C \begin{bmatrix} P_1^T & E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_1 & \widehat{C}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.70)$$

Nous constatons, d'après (2.3.66b) que les entrées inconnues ( $\underline{d}$ ), agissent directement sur l'état ( $\widehat{\underline{x}}_2$ ), il est donc juste de considérer ( $\widehat{\underline{x}}_2$ ) comme le nouveau vecteur des entrées inconnues, nous avons alors le sous-système :

$$\dot{\widehat{\underline{x}}}_1 = \widehat{A}_{11}\widehat{\underline{x}}_1 + \widehat{B}_1\underline{u} + \widehat{A}_{12}\widehat{\underline{x}}_2 \quad (2.3.71a)$$

$$\underline{y} = \widehat{C}_1\widehat{\underline{x}}_1 + \widehat{C}_2\widehat{\underline{x}}_2 \quad (2.3.71b)$$

dont la structure est identique au système (2.1.1), avec  $E_m = \widehat{C}_2 = CE_d$ .

Ainsi, comme le présentait l'approche précédente (i.e.  $E_m \neq 0$ ), il nous est possible de trouver le sous-système indépendant des entrées inconnues (i.e.  $\widehat{\underline{x}}_2$ ) et par conséquent de reconstruire l'état  $\widehat{\underline{x}}_1$ , ceci quelle que soit la déficience du rang de la matrice  $E_m$ . Cependant, afin de reconstruire l'état complet du vecteur d'origine ( $\underline{x}$ ), il faut vérifier la condition de découplage des entrées inconnues (i.e.  $\text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p$ ), (Chen 1996, Darouach et al 1994a, Hou et Müller 1992). Nous devons donc vérifier l'hypothèse  $\text{rang}(\widehat{C}_2) = \text{rang}(E_m) = r = p < m$ .

Par conséquent si la matrice  $\widehat{C}_2 = CE_d$  est de rang plein colonnes, nous cherchons une seconde matrice régulière  $P_2$  telle que :

$$P_2\widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ \widehat{C}_2^+ \end{bmatrix} \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (2.3.72)$$

avec :

$$P_3^T = \text{Ker}(\widehat{C}_2^T) \in \mathfrak{R}^{m \times (m-p)} \quad (2.3.73)$$

$$\widehat{C}_2^+ = (\widehat{C}_2^T \widehat{C}_2)^{-1} \widehat{C}_2^T \quad (2.3.74)$$

$$P_3 \times P_3^T = I_{m-p} \quad (2.3.75)$$

En prémultipliant l'équation de mesure (2.3.71b) par la matrice  $P_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ \widehat{C}_2^+ \end{bmatrix}$

$$\underline{\widehat{y}} = P_3 \underline{y} = P_3 \widehat{C}_1 \widehat{\underline{x}}_1 \quad (2.3.76)$$

$$\widehat{\underline{x}}_2 = \widehat{C}_2^+ (\underline{\widehat{y}} - \widehat{C}_1 \widehat{\underline{x}}_1) \quad (2.3.77)$$

nous obtenons, par substitution de (2.3.77) dans (2.3.71a), le sous-système :

$$\dot{\widehat{\underline{x}}}_1 = \widehat{A} \widehat{\underline{x}}_1 + \widehat{A}_{12} \widehat{C}_2^+ \underline{\widehat{y}} + \widehat{B}_1 \underline{u} \quad (2.3.78a)$$

$$\underline{\widehat{y}} = \widehat{C} \widehat{\underline{x}}_1 \quad (2.3.78b)$$

où :

$$\hat{\hat{A}} = (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{C}_2^+\hat{C}_1) \quad (2.3.79)$$

$$\hat{\hat{y}} = P_3 \underline{y} \quad (2.3.80)$$

$$\hat{\hat{C}} = P_3 \hat{C}_1 \quad (2.3.81)$$

Ainsi, pour ce nouveau système (2.3.78), la dynamique de l'état (2.3.78a) est indépendante des entrées inconnues. Nous pouvons alors reconstruire l'état  $\hat{\hat{x}}_1$  du système, indépendamment de la perturbation ( $\underline{d}$ ) et de l'état initial ( $\underline{x}_0$ ) :

$$\dot{\hat{\hat{x}}}_1 = \hat{\hat{A}}\hat{\hat{x}}_1 + \hat{A}_{12}\hat{C}_2^+\underline{y} + \hat{B}_1\underline{u} + K(\hat{\hat{y}} - \hat{\hat{C}}\hat{\hat{x}}_1) \quad (2.3.82)$$

où K est déterminé pour que l'erreur d'estimation  $\hat{\hat{e}}_1 = \hat{\hat{x}}_1 - \hat{\hat{x}}_1$  tende asymptotiquement vers zero. Cette erreur d'estimation, d'après (2.3.78) et (2.3.82), obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\hat{\hat{e}}}_1 = (\hat{\hat{A}} - K\hat{\hat{C}})\hat{\hat{e}}_1 \quad (2.3.83)$$

L'observateur (2.3.82) est satisfaisant asymptotiquement, indépendamment des entrées inconnues si et seulement si la matrice  $(\hat{\hat{A}} - K\hat{\hat{C}})$  est de Hurwitz (i.e. les valeurs propres de F sont à parties réelles négatives).

## Conclusion

Nous pouvons reconstruire l'état  $\hat{\hat{x}}_1$  du système (2.3.78), indépendamment de la perturbation ( $\underline{d}$ ) et de l'état initial ( $\underline{x}_0$ ). D'après (2.3.77), (2.3.66b) et en effectuant le changement de base (2.3.67), nous estimons alors  $\hat{\hat{x}}_2$ ,  $\hat{\hat{d}}$  et  $\hat{\hat{x}}$  :

$$\hat{\hat{x}}_2 = \hat{C}_2^+(\underline{y} - \hat{C}_1\hat{\hat{x}}_1) \quad (2.3.84)$$

$$\begin{aligned} \hat{\hat{d}} &= \hat{\hat{x}}_2 - \hat{A}_{21}\hat{\hat{x}}_1 - \hat{A}_{22}\hat{\hat{x}}_2 - \hat{B}_2\underline{u} \\ &= \hat{C}_2^+(\underline{y} - \hat{C}_1\hat{\hat{x}}_1) - \hat{A}_{21}\hat{\hat{x}}_1 - \hat{A}_{22}\hat{C}_2^+(\underline{y} - \hat{C}_1\hat{\hat{x}}_1) - \hat{B}_2\underline{u} \\ &= (CE_d)^+(\underline{y} - CA\hat{\hat{x}} - CB\underline{u}) \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

$$\hat{\hat{x}} = P^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.86)$$

Enfin, sachant que  $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^T & E_d \end{bmatrix}$ , la relation (2.3.82) se réécrit sous la forme (2.1.2), avec les mêmes relations et les mêmes conditions d'existence que celles d'un **observateur à entrées inconnues d'ordre réduit classique**, à savoir :

$$z = \hat{\tilde{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p} \quad (2.3.87)$$

$$F = \left( \hat{\tilde{A}} - K\hat{\tilde{C}} \right) \quad (2.3.88)$$

$$G = \left( \hat{\tilde{A}}_{12}\hat{\tilde{C}}_2^+ + KP_3 \right) \quad (2.3.89)$$

$$J = \hat{\tilde{B}}_1 = P_1 B \quad (2.3.90)$$

$$M = \left( P_1^T - E_d\hat{\tilde{C}}_2^+\hat{\tilde{C}}_1 \right) \quad (2.3.91)$$

$$N = \left( E_d\hat{\tilde{C}}_2^+ \right) \quad (2.3.92)$$

Si la paire  $\left( \hat{\tilde{A}}, \hat{\tilde{C}} \right)$  est détectable (observable), un observateur à entrées inconnues d'ordre réduit peut être synthétisé avec des méthodes classiques de placement de pôles (tous les pôles de l'observateur peuvent être arbitrairement placés).

Le théorème suivant fournit les conditions d'existence de l'observateur d'ordre réduit (2.1.2), pour le système (2.3.78).

**Théorème 2.7 :** Par analogie avec le théorème 2.1, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur d'ordre réduit (2.1.2) sont

$$c2.7a) \quad \text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p < m$$

$$c2.7b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - \hat{\tilde{A}} \\ \hat{\tilde{C}} \end{bmatrix} = n-p, \quad \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

La condition de détectabilité suffit.

Note : Les matrices  $\hat{\tilde{A}}$  et  $\hat{\tilde{C}}$  sont définies respectivement par (2.3.79) et (2.3.81). ■

### Algorithme de mise en oeuvre

- 1) Vérifier les hypothèses  $H_1$  (avec  $m > p$ ),  $H_2$  et  $H_3$ .
- 2) Calculer  $P_1^T$ ,  $E_d^+$ ,  $P_3^T$  et  $\hat{\tilde{C}}_2^+$  respectivement d'après (2.3.62), (2.3.64), (2.3.73) et (2.3.74).
- 3) Déterminer  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ \hat{\tilde{C}}_2^+ \end{bmatrix}$  et en déduire respectivement les sous-systèmes (2.3.66) et (2.3.78).

- 4) Dédurre les matrices  $\hat{\hat{A}}$  et  $\hat{\hat{C}}$  à partir des relations (2.3.79) et (2.3.81).
- 5) Si la paire  $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{C}})$  est détectable, calculer K pour que la matrice F soit stable.
- 6) Calculer les matrices F, G, J, M et N grâce aux expressions (2.3.88), (2.3.89), (2.3.90), (2.3.91) et (2.3.92).
- 7) Dédurre, l'estimation d'état et l'estimation des entrées inconnues respectivement par les relations (2.3.86) et (2.3.85).

◇

Nous présentons un exemple d'application de l'approche par norme minimale. L'ensemble des approches précédentes seront appliqués dans le chapitre 3 quand nous traiterons le problème de la génération de résidus.

## 2.4 EXEMPLE

Nous considérons le système discret, autonome, multi-sorties (m=2) décrit par le système d'équations d'état suivant (Kurek 1983) :

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{d}_k \quad (2.4.1a)$$

$$\underline{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{d}_k \quad (2.4.1b)$$

Les valeurs propres de la matrice d'évolution de ce système observable étant  $\{-1.79, 1, 2.79\}$ , nous déterminerons le gain nécessaire,  $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{bmatrix}$ , pour obtenir un observateur dont les dynamiques sont toutes fixées à zéros.

D'après la représentation du système (2.4.1), la matrice  $E_m$  est de rang plein colonnes et la dimension du vecteur  $\underline{d}$  est inférieure à celle de  $\underline{y}$ . Par conséquent le cas A avec  $r = p < m$  est vérifié. A partir des résultats obtenues en (2.2.1A), nous montrons la facilité de mise en oeuvre d'un observateur d'ordre plein.

La matrice  $E_m$  est de rang plein colonnes, par conséquent, sa pseudo-inverse  $E_m^+$  est égale à  $E_m^+ = (E_m^T E_m)^{-1} E_m^T = [1 \ 0]$  et  $R_{E_m}^\perp = 0$ . Le système (2.4.1) se réduit donc au modèle (2.4.2), dont la dynamique de l'état (2.4.2a) est indépendante des entrées inconnues :

$$\underline{x}_{k+1} = \bar{A}\underline{x}_k + B\underline{u}_k + E_d E_m^+ \underline{y}_k \quad (2.4.2a)$$

$$\bar{y}_k = \bar{C}\underline{x}_k \quad (2.4.2b)$$

$$\text{avec : } \bar{y}_k = P_{E_m}^\perp \underline{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}_k \quad (2.4.3)$$

$$\bar{C} = P_{E_m}^\perp C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

$$\bar{A} = A - E_d E_m^+ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

Suivant le principe de construction d'un observateur classique (i.e. sans entrées inconnues), nous pouvons proposer comme estimateurs de  $\underline{x}$  et  $\underline{d}$ , respectivement les vecteurs  $\hat{\underline{x}}$  et  $\hat{\underline{d}}$  définis par :

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = \bar{A}\hat{\underline{x}}_k + E_d E_m^+ \underline{y}_k + B\underline{u}_k + K(\bar{y}_k - \bar{C}\hat{\underline{x}}_k) \quad (2.4.6)$$

$$\hat{\underline{d}}_k = E_m^+ (\underline{y}_k - C\hat{\underline{x}}_k) \quad (2.4.7)$$

La paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  ne présente pas de compensation de zéro (système observable). Nous pouvons choisir un gain  $K$  tel que les pôles de l'observateur sont tous nuls :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

## Conclusion

Nous obtenons l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein, avec des résultats identiques à ceux obtenus par Kurek en 1983 :

$$\begin{aligned} \underline{z}_{k+1} &= F\underline{z}_k + G\underline{y}_k \\ \hat{\underline{x}}_k &= \underline{z}_k + N\underline{y}_k \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

avec :

$$F = \bar{A} - K\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad G = E_d E_m^+ = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } N = 0_{n \times m}$$

## CONCLUSION

Les théorèmes présentés dans ce chapitre sont la généralisation des conditions d'existence d'un estimateur robuste de l'état en présence d'entrées inconnues. Pour  $E_d = E_m = 0$  (ou  $\underline{d}=0$ ), ces conditions se résument à la simple condition de détectabilité (observabilité) de la paire  $(A, C)$ . Les approches par décomposition en valeurs singulières et par normes minimales sont également valables dans le domaine discret. Nous avons présenté les résultats de ces deux approches pour la synthèse des observateurs à entrées inconnues d'ordre plein, réduit ou minimal. Nous avons donné les conditions d'existence qui correspondent à celles généralement adoptées dans la littérature. Les méthodes de construction proposées sont considérablement simplifiées et permettent une interprétation intéressante dans le cadre du diagnostic.

Car, par la réduction du modèle en un seul sous-système indépendant des entrées inconnues, l'estimation d'état de ce sous-système permet alors de reconstruire l'état d'origine et les entrées inconnues. Les deux approches élaborées permettent ainsi de nombreuses applications simples dans le domaine du diagnostic, ceci parce qu'elles ne nécessitent plus l'emploi d'observateurs à entrées inconnues.

---





## **CHAPITRE 3 GÉNÉRATION DE RÉSIDUS POUR LE DIAGNOSTIC ET RECONFIGURATION DE LA LOI DE COMMANDE**

### **3.0 INTRODUCTION**

L'objectif est de détecter et localiser des défauts puis de recalculer la loi de commande afin de garantir au système, des performances acceptables (sécurité, ...). Nous savons qu'il est impossible ou très difficile d'effectuer cette tâche dans sa globalité. Pour contourner cette difficulté, nous décomposons le système en sous-systèmes et nous nous intéressons à leurs comportements; nous détectons et corrigeons les défauts à l'intérieur de ces sous-systèmes, moins complexes et plus faciles à manipuler.

---

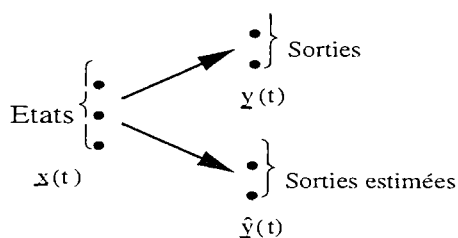
### 3.1 GÉNÉRATION DE RÉSIDUS EN PRÉSENCE D'ENTRÉES INCONNUES ( $E_m \neq 0$ )

La génération de résidus à l'aide d'observateurs à entrées inconnues est particulièrement bien adaptée au cas où l'action des défauts peut être modélisée de façon linéaire. Une panne  $f_i$  est donc représentée comme une entrée inconnue qui agit dans une direction  $(F_d, F_m)$  connue, appelée direction de panne. Dans un premier temps, nous montrons l'existence d'un banc d'observateurs capable de générer suffisamment de résidus pour détecter et isoler les défauts. Nous montrons comment le vecteur de défaut ( $\underline{f}$ ) agit sur le résidu généré, ceci à partir des deux approches traitées en première partie du chapitre 2. Nous développons une famille de nouveaux algorithmes tenant compte de la décomposition du système en plusieurs sous-systèmes insensibles aux entrées inconnues et à certaines pannes spécifiées. Ainsi, à l'aide d'un observateur classique, nous pouvons identifier le(s) sous-système(s) en défaut(s) et le(s) corriger afin de garantir les performances du système.

#### 3.1.1 Méthodes à base d'observateurs

Clark 1978, fut l'un des premiers à exploiter les observateurs pour identifier et localiser une panne, ceci à l'aide de l'erreur d'estimation pour les observateurs ou de la séquence d'innovation pour les filtres de Kalman. L'idée de base est de reconstruire les sorties du système en se référant aux différentes mesures effectuées sur le procédé. Toutes les méthodes adoptant cette stratégie nécessitent le calcul d'un gain d'estimateur calculé en fonction des performances de détection désirées (fig ii).

La principale caractéristique de ces méthodes est que les relations de redondance sont générées uniquement à partir de la combinaison des sorties du système et du modèle.



Les performances et la simplicité de mise en oeuvre de cette approche font qu'elle est toujours approfondie et développée. Parmi les principaux auteurs qui se sont intéressés au sujet, nous pouvons citer, Watanabe et Himmelblau 1982; Chow et Willsky 1984; Patton et Kangethe 1989, Wünnenberg et Frank 1987, 1988; Frank 1990; Wünnenberg 1990; Ge et Fang 1988, 1989; Patton et Chen 1991; Hou et Müller 1991; Tsui 1994. Pour générer des résidus porteurs d'informations pertinentes sur les défauts, nous exploitons les résultats sur les observateurs à entrées inconnues développés dans le chapitre 2.

### 3.1.2 Modélisation des défauts et des entrées inconnues

Nous désirons générer un vecteur résidu ( $\underline{r}$ ) sensible aux défauts et insensible aux perturbations (entrées inconnues). Le système doit prendre en compte les entrées inconnues  $\underline{d} \in \mathfrak{R}^p$  et des défauts  $\underline{f} \in \mathfrak{R}^f$ , sa forme d'état la plus générale est donnée par les relations suivantes :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d\underline{f} + E_d\underline{d} \quad (3.1.1a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + F_m\underline{f} + E_m\underline{d} \quad (3.1.1b)$$

Ainsi des pannes d'actionneurs (représentées par le vecteur inconnu  $\underline{f}_1$ ) et de capteurs (représentées par le vecteur inconnu  $\underline{f}_2$ ) seront décrites par :

$$F_d = [F_1 \ 0], \quad F_m = [0 \ F_2] \quad \text{et} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{bmatrix}$$

Pour représenter le défaut issu du  $j^{\text{ème}}$  capteur, il suffit de prendre pour la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $F_2$ , la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $I_m$ . En effet, si nous considérons que le  $j^{\text{ème}}$  capteur ne répond plus (i.e. la  $j^{\text{ème}}$  mesure est nulle) alors  $f_{2j}(t) = -c_j \underline{x}(t)$ , où  $c_j$  représente la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice de mesure  $C$  (Massoumnia 1986). Ainsi une panne du  $j^{\text{ème}}$  capteur est traitée comme une perturbation additive sur la  $j^{\text{ème}}$  mesure où seule la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée (de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $F_2$ ) vaut 1 (les autres termes sont nuls). La matrice  $F_2$  est donc égale à la matrice  $I_m$ ,  $m$  étant le nombre de mesures linéairement indépendantes.

D'autre part, pour représenter un défaut issu du  $j^{\text{ème}}$  actionneur, il suffit de prendre pour la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $F_1$ , la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de commande  $B$ . En effet, si nous considérons que le  $j^{\text{ème}}$  actionneur ne répond plus alors  $f_{1j}(t) = -u_j(t)$ , où  $u_j(t)$  est le  $j^{\text{ème}}$  élément du vecteur de commande  $\underline{u}(t)$ . Si l'actionneur  $j$  présente un biais  $b$ , alors  $f_{1j}(t) = b$ . Si l'actionneur  $j$  sature avant d'atteindre sa consigne, alors  $f_{1j}(t) = b - u_j(t)$ . La matrice  $F_1$  est donc égale à la matrice  $B$ .

Par conséquent, cette représentation peut être utilisée pour représenter les nombreux modes de pannes d'actionneurs et de capteurs mais également de composants.

Nous ne ferons dans cette partie, aucune hypothèse relative à la construction des matrices de distribution  $F_d$  et  $F_m$  considérées comme constantes et connues.

### 3.1.3 Influence des défauts sur l'erreur d'estimation d'état

Les résidus doivent permettre de détecter et de localiser des défauts. Lorsque les matrices de distribution des défauts et des entrées inconnues sont connues, ces résidus sont dits structurés. Dans ce paragraphe nous montrons l'influence du vecteur de défaut ( $\underline{f}$ ) sur le résidu structuré généré à partir du modèle mathématique (3.1.1).

#### Analyse :

Pour localiser simplement des défauts, il suffit de répondre aux deux tâches principales du module de diagnostic de l'état qui sont :

- estimer l'état  $\underline{x}$ ,
- générer des résidus pour détecter et isoler l'occurrence du défaut  $f_i$  sur l'estimation de l'état  $\underline{x}$ , indépendamment : des perturbations (inconnues) regroupées dans le vecteur  $\underline{d}$ , des entrées  $\underline{u}$  et des conditions initiales  $\underline{x}_0$  et  $\underline{z}_0$ .

La première tâche du module de diagnostic est réalisée en utilisant un observateur à entrées inconnues d'ordre plein (partie 2.2.1A ou 2.3.2A) ou d'ordre minimal (partie 2.3.3A). Comme dans le chapitre précédent, les trois hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  doivent être vérifiées ainsi que l'indépendance des défauts aux entrées inconnues, i.e.

$$H_4 : \text{rang} \begin{bmatrix} E_d & F_d \\ E_m & F_m \end{bmatrix} = p + f \quad \left( \text{injectivité de } \begin{bmatrix} E_d & F_d \\ E_m & F_m \end{bmatrix} \right)$$

Dans cette présentation, nous nous intéressons à l'approche par observateur d'ordre plein (partie 2.3.2A).

#### Génération de résidus par décomposition en valeurs singulières

Afin de mettre en avant l'influence des défauts sur le vecteur résidu à générer, il convient de remplacer le système (2.1.1) par le nouveau système (3.1.1). De même qu'au chapitre 2, la transformation de la matrice  $E_m$  (2.3.1) entraîne la transformation du système (3.1.1) sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = A_1 \underline{x} + B \underline{u} + \bar{E}_{d_1} \bar{\underline{y}}_1 + \bar{E}_{d_2} \bar{\underline{d}}_2 + (F_d - \bar{E}_{d_1} \bar{F}_{m_1}) \underline{f} \quad (3.1.2a)$$

$$\bar{\underline{y}}_1 = \bar{C}_1 \underline{x} + \bar{\underline{d}}_1 + \bar{F}_{m_1} \underline{f} \quad (3.1.2b)$$

$$\bar{\underline{y}}_2 = \bar{C}_2 \underline{x} + \bar{F}_{m_2} \underline{f} \quad (3.1.2c)$$

$$\text{où : } \bar{F}_m = P^{-1} F_m = \begin{bmatrix} \bar{F}_{m_1} \\ \bar{F}_{m_2} \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{F}_{m_1} \in \mathfrak{R}^{r \times f} \\ \bar{F}_{m_2} \in \mathfrak{R}^{(m-r) \times f} \end{array} \right) \quad (3.1.3)$$

L'objectif est alors d'estimer l'état  $\underline{x}$  et de générer un résidu  $\underline{r}$ , défini comme la différence entre la sortie réelle (3.1.2.c) et la sortie reconstruite ( $\hat{\underline{y}}_2 = \overline{C}_2 \hat{\underline{x}}$ ) issue de l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (2.3.13) avec  $M=I_n$  :

$$\underline{r} = \underline{y}_2 - \overline{C}_2 \hat{\underline{x}} = (I_{m-r} - \overline{C}_2 \overline{N}_2) \underline{y}_2 - \overline{C}_2 \underline{z} \quad (3.1.4)$$

où  $\underline{r}(t) \in \mathbb{R}^{m-r}$  est porteur uniquement des informations relatives aux défauts à détecter (i.e.  $\underline{f}$ ).

### Étude :

L'observateur (2.3.13) a pour objet de fournir un état estimé du système (3.1.1) indépendamment de toute perturbation ( $\underline{d}$ ). Pour assurer ce découplage, l'erreur d'estimation d'état  $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}} = T\underline{x} - \underline{z} - \overline{N}_2 \overline{F}_{m_2} \underline{f}$ , obéissant à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} = & F\underline{e} + (TA_1 - \overline{G}_2 \overline{C}_2 - FT)\underline{x} + (TB - J)\underline{u} + (T\overline{E}_{d_1} - \overline{G}_1)\underline{y}_1 + T\overline{E}_{d_2} \underline{d}_2 \\ & + (TF_d - T\overline{E}_{d_1} \overline{F}_{m_1} - \overline{G}_2 \overline{F}_{m_2})\underline{f} - \overline{N}_2 \overline{F}_{m_2} \dot{\underline{f}} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\text{avec, } T = (I_n - \overline{N}_2 \overline{C}_2)$$

doit satisfaire les relations (2.3.20) à (2.3.23).

Ainsi, l'erreur d'estimation ( $\underline{e}$ ) et l'erreur d'observation ( $\underline{r}$ ) sont décrites par le système d'équations suivant :

$$\dot{\underline{e}} = F\underline{e} + (TF_d - T\overline{E}_{d_1} \overline{F}_{m_1} - \overline{G}_2 \overline{F}_{m_2})\underline{f} - \overline{N}_2 \overline{F}_{m_2} \dot{\underline{f}} \quad (3.1.6.a)$$

$$\underline{r} = \overline{C}_2 \underline{e} + \overline{F}_{m_2} \underline{f} \quad (3.1.6.b)$$

Sachant que

$$\overline{G}_1 = T\overline{E}_{d_1}, [\overline{G}_1 \ \overline{G}_2] = GP \text{ et } \begin{bmatrix} \overline{F}_{m_1} \\ \overline{F}_{m_2} \end{bmatrix} = P^{-1} F_m \quad (3.1.7)$$

alors l'équation (3.1.6.a) se réduit à la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} = & F\underline{e} + \left( TF_d - [\overline{G}_1 \ \overline{G}_2] \begin{bmatrix} \overline{F}_{m_1} \\ \overline{F}_{m_2} \end{bmatrix} \right) \underline{f} - \overline{N}_2 \overline{F}_{m_2} \dot{\underline{f}} \\ = & F\underline{e} + (TF_d - GF_m)\underline{f} - \overline{N}_2 \overline{F}_{m_2} \dot{\underline{f}} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

## Conclusion

L'erreur d'estimation ( $\underline{e}$ ) et le résidu ( $\underline{r}$ ) sont décrits par le système d'équations (Chen 1996) suivant :

$$\dot{\underline{e}} = F\underline{e} + T\underline{F}_d \underline{f} - G\underline{F}_m \underline{f} - \overline{N}_2 \overline{F}_{m_2} \underline{f} \quad (3.1.9a)$$

$$\underline{r} = \overline{C}_2 \underline{e} + \overline{F}_{m_2} \underline{f} \quad (3.1.9b)$$

Si toutes les valeurs propres de  $F$  sont stables, l'erreur d'estimation  $e(t)$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts (i.e.  $\underline{f}=0$ ). L'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (2.3.13,  $M=0$ ) associé au système (3.1.1) vérifie les théorèmes 2.1, 2.2 et offre une génération de résidus robustes.

L'utilisation de normes minimales (2.2.1A) pour la génération de résidus mène aux mêmes conclusions. Par conséquent, plutôt que de présenter cette approche, nous nous intéressons au problème de la mise en oeuvre d'un banc d'observateurs capable de générer suffisamment de résidus pour détecter et isoler chaque défaut. Mais avant d'établir les procédures de détection et d'isolation de défauts, il nous paraît important de définir les mots clefs suivant "Robust Fault Detection and Isolation Observer (RFDIO)".

**Définition** (Wünnenberg 1990, Frank 1990) :

Nous considérons la décomposition du système (3.1.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d^k \underline{f}^k + E_d^k \underline{d}^k \\ \underline{y} = C\underline{x} + F_m^k \underline{f}^k + E_m^k \underline{d}^k \end{cases} \quad (S_1)$$

où le vecteur  $\underline{f}^k$  est composé des défauts appartenant à  $f$ , et  $\underline{d}^k$  des entrées inconnues  $\underline{d}$  augmenté des défauts appartenant à  $\overline{f}$ .

L'observateur  $\begin{cases} \dot{\underline{z}}^k = F\underline{z}^k + G\underline{y} + J\underline{u} \\ \underline{r}^k = \underline{L}_1 \underline{y} - \underline{L}_2 \underline{z}^k \end{cases}$  générant le résidu  $\underline{r}^k$  est appelé "RFDIO", pour le

système ( $S_1$ ) si et seulement si quels que soient  $\underline{u}$ ,  $\underline{d}$ ,  $f_i$ ,  $i$  appartenant à  $\overline{f}$  :

- pour tout  $\underline{x}_0$ ,  $\underline{z}_0$   
 $\underline{r}^k(t \rightarrow \infty) = 0$  si tous les défauts  $f_j$  sont nuls,  $j$  appartenant à  $f$ ,
- pour  $T \in \mathcal{R}^{d \times n}$ ,  $\underline{z}_0 = T\underline{x}_0$   
 $\underline{z} = T\underline{x}$  si tous les défauts  $f_j$  sont nuls,  $j$  appartenant à  $f$ ,
- pour  $\underline{z}_0 = T\underline{x}_0$   
 $\underline{r}^k \neq 0$  si un ou plusieurs défaut(s)  $f_j$  sont non nul(s),  $j$  appartenant à  $f$ .

◇

**Remarque :**

- $f$  représente l'ensemble des défauts que nous cherchons à détecter et  $\overline{f}$  l'ensemble des défauts auxquels le résidu doit être insensible, avec :

$$f \cap \overline{f} = \{0\}, \quad f \cup \overline{f} = \{1, 2, \dots, f\}.$$

### 3.1.4 Existence d'un banc d'observateurs à entrées inconnues

L'isolation de défauts consiste à localiser parmi les défauts susceptibles d'apparaître lequel (ou lesquels) est (sont) réellement présent(s). Or pour localiser simplement des défauts, il faut que chaque résidu soit sensible uniquement à certains défauts tout en restant insensible aux autres. La procédure de mise en oeuvre dépend alors du nombre de défauts à détecter et à localiser simultanément. Nous pouvons distinguer deux schémas extrêmes de mise en oeuvre (Wünnenberg 1990).

Le schéma (a) moins robuste que le schéma (b) mais plus souvent réalisable (les conditions d'existence étant moins restrictives) consiste à générer un banc d'observateurs à entrées inconnues où chaque observateur présente un résidu sensible à toutes les pannes exceptée une (i.e.  $f \in \mathfrak{R}^{f-1}$ ,  $\bar{f} \in \mathfrak{R}^1$ ). Le résidu nul désigne la panne. Cependant, nous ne pouvons détecter et localiser des défauts simultanés et il est nécessaire d'avoir recours à une procédure de vote logique.

Le schéma (b) d'une plus grande robustesse consiste à générer pour chaque observateur, un résidu sensible à une et une seule panne (i.e.  $f \in \mathfrak{R}^1$ ,  $\bar{f} \in \mathfrak{R}^{f-1}$ ). Ainsi, le résidu non nul désigne la panne. Nous pouvons alors détecter et localiser tous les défauts simultanés, ceci sans procédure de vote logique.

L'étude qui suit, a pour objet de détailler et de donner les conditions d'existence d'un générateur de résidu robuste, basé sur une décomposition selon les schémas (a) et (b) du système (3.1.1).

#### Schéma (a)

Nous voulons détecter et localiser  $f$  défauts, une première solution consiste à générer  $f$  observateurs à entrées inconnues :

$$\begin{aligned}
 r^1(t) &= q^1(t)(f_2(t), f_3(t), \dots, f_f(t)) \\
 r^2(t) &= q^2(t)(f_1(t), f_3(t), \dots, f_f(t)) \\
 &\vdots \\
 r^k(t) &= q^k(t)(f_1(t), f_2(t), \dots, f_{k-1}(t), f_{k+1}(t), \dots, f_f(t)) \\
 &\vdots \\
 r^f(t) &= q^f(t)(f_1(t), f_2(t), \dots, f_{f-1}(t))
 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

si tous les résidus sont différents de zéro, excepté  $r^1(t)$  alors  $f_1(t) \neq 0$

si tous les résidus sont différents de zéro, excepté  $r^2(t)$  alors  $f_2(t) \neq 0$

$\vdots$

si tous les résidus sont différents de zéro, excepté  $r^f(t)$  alors  $f_f(t) \neq 0$

Ainsi, un seul défaut à la fois peut être détecté et localisé.



**Étude :** (pour  $k = 1, 2, \dots, f$ )

Il s'agit de trouver un transfert dynamique  $q^k$  non nul entre le résidu  $r^k$  et les défauts  $f_j, j$  étant différent de  $k$  :

$$\underline{r}^k = \underline{\bar{y}}_2 - \underline{\bar{C}}_2 \hat{\underline{x}}^k \quad (3.1.11)$$

où  $\hat{\underline{x}}^k$  est l'estimation fournie par le  $k^{\text{ème}}$  observateur en considérant la transformation du système (3.1.1) sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d^k \underline{f}^k + E_d^k \underline{d}^k \quad (3.1.12.a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + F_m^k \underline{f}^k + E_m^k \underline{d}^k \quad (3.1.12.b)$$

Les matrices  $F_d^k \in \mathfrak{R}^{n \times (f-1)}$  et  $F_m^k \in \mathfrak{R}^{m \times (f-1)}$  sont obtenues en supprimant aux matrices  $F_d$  et  $F_m$ , la  $k^{\text{ème}}$  colonne. Les matrices  $E_d$  (respectivement  $E_m$ ) sont augmentées des matrices  $F_{dk}$  (respectivement  $F_{mk}$ ) pour former  $E_d^k = [E_d \ F_{dk}]$  (respectivement  $E_m^k = [E_m \ F_{mk}]$ ). Le vecteur  $\underline{f}^k \in \mathfrak{R}^{f-1}$  est le vecteur  $\underline{f}$  sans la  $k^{\text{ème}}$  coordonnée.

Le vecteur des nouvelles entrées inconnues  $\underline{d}^k \in \mathfrak{R}^{p+1}$  est donc composé du vecteur  $\underline{d}$  et de la  $k^{\text{ème}}$  coordonnée du vecteur  $\underline{f}$ , i.e.  $\underline{d}^k = [\underline{d}^T \ f_k]^T$ .

Ainsi, d'après la description du système (3.1.12), les  $f$  générateurs de résidus, construits sur l'estimation d'état par l'observateur à entrées inconnues (2.3.13), sont donnés par :

$$\dot{\underline{z}}^k = F^k \underline{z}^k + \underline{\bar{G}}_1^k \underline{\bar{y}}_1 + \underline{\bar{G}}_2^k \underline{\bar{y}}_2 + J^k \underline{u} \quad (3.1.13a)$$

$$\hat{\underline{x}}^k = \underline{z}^k + \underline{\bar{N}}_2^k \underline{\bar{y}}_2 \quad (3.1.13b)$$

$$\underline{r}^k = \underline{\bar{y}}_2 - \underline{\bar{C}}_2 \hat{\underline{x}}^k \quad (3.1.13c)$$

Comme dans le cas de la génération de résidus par décomposition en valeurs singulières de la matrice  $E_m^k = [E_m \ F_{mk}]$ , nous obtenons le transfert dynamique  $q^k$  non nul désiré :

$$\underline{\hat{e}}^k = F^k \underline{e}^k + T^k F_d^k \underline{f}^k - G^k F_m^k \underline{f}^k - \underline{\bar{N}}_2^k \underline{\bar{F}}_{m_2}^k \dot{\underline{f}}^k \quad (3.1.14a)$$

$$\underline{r}^k = \underline{\bar{C}}_2 \underline{e}^k + \underline{\bar{F}}_{m_2}^k \underline{f}^k \quad (3.1.14b)$$

si les relations suivantes sont satisfaites :

$$\underline{\bar{N}}_2^k = \underline{\bar{E}}_{d_2}^k \left( \underline{\bar{C}}_2 \underline{\bar{E}}_{d_2}^k \right)^+ \quad (3.1.15)$$

$$T^k = \left( I_n - \underline{\bar{E}}_{d_2}^k \left( \underline{\bar{C}}_2 \underline{\bar{E}}_{d_2}^k \right)^+ \underline{\bar{C}}_2 \right) \quad (3.1.16)$$

$$F^k = T^k A_1^k - K^k \bar{C}_2 \quad \text{stable} \quad (3.1.17)$$

$$\bar{G}_1^k = T^k \bar{E}_{d_1}^k \quad (3.1.18)$$

$$\bar{G}_2^k = K^k + F^k \bar{N}_2^k \quad (3.1.19)$$

$$J^k = T^k B \quad (3.1.20)$$

Ainsi, l'erreur d'estimation  $\underline{e}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts (i.e.  $\underline{f}^k = 0$ ). L'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (3.1.13) pour le système (3.1.12) présente alors une génération de résidus robuste si et seulement si les conditions nécessaires et suffisantes d'existence suivantes sont vérifiées :

$$\text{c.3.1.a) } \quad \text{rang} \begin{bmatrix} E_m^k & C E_d^k \\ 0 & E_m^k \end{bmatrix} - \text{rang} [E_m^k] = p + 1$$

$$\text{c.3.1.b) } \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^k \\ C & E_m^k \end{bmatrix} = n + p + 1, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0$$

### Schéma (b)

Nous voulons détecter et localiser  $f$  défauts susceptibles d'apparaître simultanément. Il faut donc  $f$  observateurs à entrées inconnues, tels que :

$$\begin{aligned} r^1(t) &= q^1(t)(f_1(t)) \\ r^2(t) &= q^2(t)(f_2(t)) \\ &\vdots \\ r^i(t) &= q^i(t)(f_i(t)) \\ &\vdots \\ r^f(t) &= q^f(t)(f_f(t)) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

chaque résidu soit sensible à une et une seule panne. Le  $i^{\text{ème}}$  résidu, noté  $r^i$ , est alors non nul uniquement si  $f_i \neq 0$ .

**Étude :** (pour  $i = 1, 2, \dots, f$ )

Il s'agit de trouver un transfert dynamique  $q^i$  ( $i = 1, \dots, f$ ) non nul entre le résidu  $r^i$  et le défaut  $f_i$ , défini par la relation suivante :

$$\underline{r}^i = \underline{\bar{y}}_2 - \bar{C}_2 \hat{\underline{x}}^i \quad (3.1.22)$$

où  $\hat{\underline{x}}^i$  est l'estimation fournie par le  $i^{\text{ème}}$  observateur en considérant la transformation du système (3.1.1) sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + F_{di} f_i + E_d^i \underline{d}^i \quad (3.1.23a)$$

$$\underline{y} = C \underline{x} + F_{mi} f_i + E_m^i \underline{d}^i \quad (3.1.23b)$$

Les matrices  $E_d$  (respectivement  $E_m$ ) sont augmentées des matrices  $F_d^i$  (respectivement  $F_m^i$ ) pour former  $E_d^i = \begin{bmatrix} E_d & F_d^i \end{bmatrix}$  (respectivement  $E_m^i = \begin{bmatrix} E_m & F_m^i \end{bmatrix}$ ). Le vecteur  $\underline{d}^i = \begin{bmatrix} \underline{d} \\ \underline{f}^i \end{bmatrix}$  est formé du vecteur  $\underline{d}$  et du vecteur  $\underline{f}$  sans la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée. Le vecteur  $\underline{d}^i \in \mathfrak{R}^{p+f-1}$  représente alors le nouveau vecteur des entrées inconnues.

Ainsi, d'après la description du système (3.1.23), les  $f$  générateurs de résidus, construits sur l'estimation d'état par l'observateur à entrées inconnues (2.3.13), sont donnés par :

$$\underline{\dot{z}}^i = F^i \underline{z}^i + \bar{G}_1^i \bar{y}_1 + \bar{G}_2^i \bar{y}_2 + J^i \underline{u} \quad (3.1.24a)$$

$$\underline{\hat{x}}^i = \underline{z}^i + \bar{N}_2^i \bar{y}_2 \quad (3.1.24b)$$

$$\underline{r}^i = \bar{y}_2 - \bar{C}_2 \underline{\hat{x}}^i \quad (3.1.24c)$$

Comme dans le cas de la génération de résidus par décomposition en valeurs singulières de la matrice  $E_m^i = \begin{bmatrix} E_m & F_m^i \end{bmatrix}$ , nous obtenons un transfert dynamique  $q^i$  non nul entre le résidu  $r^i$  et le défaut  $f_i$  :

$$\underline{e}^i = F^i \underline{e}^i + T^i F_{d_i} f_i - G^i F_{m_i} f_i - \bar{N}_2^i \bar{F}_{m_{2i}} f_i \quad (3.1.25a)$$

$$\underline{r}^i = \bar{C}_2 \underline{e}^i + \bar{F}_{m_{2i}} f_i \quad (3.1.25b)$$

si les relations suivantes sont satisfaites :

$$\bar{N}_2^i = \bar{E}_{d_2}^i \left( \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}^i \right)^+ \quad (3.1.26)$$

$$T^i = \left( I_n - \bar{E}_{d_2}^i \left( \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}^i \right)^+ \bar{C}_2 \right) \quad (3.1.27)$$

$$F^i = T^i A_1^i - K^i \bar{C}_2 \quad \text{stable} \quad (3.1.28)$$

$$\bar{G}_1^i = T^i \bar{E}_{d_1}^i \quad (3.1.29)$$

$$\bar{G}_2^i = K^i + F^i \bar{N}_2^i \quad (3.1.30)$$

$$J^i = T^i B \quad (3.1.31)$$

Ainsi, l'erreur d'estimation  $e(t)$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts (i.e.  $f_i=0$ ). L'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (3.1.24) pour le système (3.1.23) présente alors une génération de résidus robuste si et seulement si les conditions nécessaires et suffisantes d'existence suivantes sont vérifiées :

$$c.3.2.a) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} E_m^i & C E_d^i \\ 0 & E_m^i \end{bmatrix} - \text{rang} [E_m^i] = p + f - 1$$

$$c.3.2.b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^i \\ C & E_m^i \end{bmatrix} = n + p + f - 1, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0$$

## Conclusion

Les colonnes des matrices  $E_d^k = [E_d \ F_{dk}]$  et  $E_m^k = [E_m \ F_{mk}]$  du système (3.1.12), étant incluses respectivement dans les matrices  $E_d^i = [E_d \ F_d^i]$  et  $E_m^i = [E_m \ F_m^i]$  du système (3.1.23) pour  $k \neq i$ , les conditions (c.3.2.a) et (c.3.2.b) sont vérifiées pour le schéma (b) si elles le sont pour le schéma (a). La **réciprocité** est **fausse**. Mais à la différence du schéma (b), le schéma (a) ne détecte et n'isole qu'un seul défaut à la fois, et nécessite l'existence d'une procédure de vote logique pour localiser un défaut  $f_j$ .

### 3.1.5 Exemple

**Objectif :** Montrer l'existence d'un banc d'observateurs à entrées inconnues capable de générer suffisamment de résidus pour détecter et isoler l'occurrence du défaut  $f_j$  sur l'estimation de l'état  $\underline{x}$  indépendamment des perturbations (inconnues) regroupées dans le vecteur  $\underline{d}$ . Nous illustrons successivement les deux schémas (a) et (b) étudiés auparavant.

Nous considérons le système (3.1.1) composé des matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 7 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 8 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, F_d = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -2 & 11 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -7 & 0 & 7 \end{bmatrix}, F_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et des pôles :  $\{-1, 1, 1, 2, 3, 3\}$

Ce système vérifie les quatre hypothèses  $H_1$  à  $H_4$ , pour  $m=4$ ,  $p=1$  et  $f=3$ .

Avant d'engager une procédure d'isolation de défauts, nous pouvons vérifier si l'observateur à entrées inconnues (2.1.2) pour le système (3.1.1) est un observateur stable à entrées inconnues.

Vérifions les conditions d'existence du théorème 2.1 :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} - \text{rang}[E_m] = p = 1$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & E_m \end{bmatrix} = n + p = 7, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Il n'y a pas de chute de rang. La structure générale de l'observateur (2.1.2) est un observateur stable à entrées inconnues, le générateur de résidus  $\underline{r}$  est robuste aux entrées inconnues  $\underline{d}$ .

*Illustration successive des schémas (a) et (b).*

Schéma (a) : Chaque observateur (3.1.13, pour  $k=1, 2$  et  $3$ ) doit satisfaire les conditions d'existence (c.3.1.a) et (c.3.1.b).

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m^k & CE_d^k \\ 0 & E_m^k \end{bmatrix} - \text{rang} [E_m^k] = p+1 = 2$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^k \\ C & E_m^k \end{bmatrix} = n+p+1 = 8, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

avec :

$k=1$	$k=2$	$\text{et } k=3$
$E_m^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, E_d^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	$E_m^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, E_d^2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \\ 1 & -5 \\ -2 & 11 \\ 0 & -5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$	$E_m^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, E_d^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Pour le **résidu 1** (sensible aux défauts  $f_2$  et  $f_3$ , i.e.  $f = \{2, 3\}$ ,  $\bar{f} = \{1\}$ ), le **résidu 2** (sensible aux défauts  $f_1$  et  $f_3$ , i.e.  $f = \{1, 3\}$ ,  $\bar{f} = \{2\}$ ) et le **résidu 3** (sensible aux défauts  $f_1$  et  $f_2$ , i.e.  $f = \{1, 2\}$ ,  $\bar{f} = \{3\}$ ) il n'y a pas de chute de rang.

Les trois observateurs sont des observateurs stables à entrées inconnues, chaque générateur de résidus  $\underline{r}^k$  est insensible aux entrées inconnues  $\underline{d}$  et au défaut  $f_k$ . Par conséquent le schéma (a) permet d'isoler les défauts  $f_1, f_2$  et  $f_3$ .

Schéma (b) : Chaque observateur (3.1.24, pour  $i=1, 2$  et  $3$ ) doit satisfaire les conditions d'existence (c.3.2.a) et (c.3.2.b).

Or pour le **résidu 1** (sensible au défaut  $f_1$ , i.e.  $f = \{1\}$ ,  $\bar{f} = \{2, 3\}$ ), le pôle instable 2 fait chuter le rang.

En effet, la propriété de détectabilité (c.3.2.b) n'est pas vérifiée

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^i \\ C & E_m^i \end{bmatrix} = 8 < n+p+2 = 9, \text{ pour } \lambda = 2 \text{ et } i=1,$$

$$E_m^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, E_d^1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -2 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

par conséquent, le générateur de résidus  $\underline{r}^1$  est instable : pôle fixe = 2.

Par contre, pour le **résidu 2** (sensible au défaut  $f_2$ , i.e.  $f = \{2\}$ ,  $\bar{f} = \{1, 3\}$ ) et le **résidu 3** (sensible au défaut  $f_3$ , i.e.  $f = \{3\}$ ,  $\bar{f} = \{1, 2\}$ ), il n'y a pas de chute de rang,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m^i & CE_d^i \\ 0 & E_m^i \end{bmatrix} - \text{rang}[E_m^i] = p + 2 = 3$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^i \\ C & E_m^i \end{bmatrix} = n + p + 2 = 9, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

avec :  $i = 2$  et  $i = 3$ .

$$E_m^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } E_d^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_m^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad E_d^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Les observateurs 2 et 3 sont alors des observateurs stables. Les résidus  $r^2$  et  $r^3$  sont insensibles aux entrées inconnues  $\underline{d}$  et respectivement aux défauts  $f_1, f_3$  et  $f_1, f_2$ .

### 3.1.6 CONCLUSION

Le schéma (a) permet d'isoler  $f_1, f_2$  et  $f_3$  séquentiellement alors que le schéma (b) ne permet d'isoler que  $f_2$  et  $f_3$  mais simultanément. Cela rejoint, la conclusion de la partie 3.1.4 (dont la réciproque est fausse). D'autre part, les matrices  $E_d$  et  $E_m$ , étant incluses respectivement dans les matrices  $E_d^k = [E_d \ F_{dk}]$  et  $E_m^k = [E_m \ F_{mk}]$  du système (3.1.12), les conditions du théorème 2.1 sont vérifiées pour le schéma (a) si elles le sont pour l'observateur à entrées inconnues (2.1.2). De ce fait, il peut exister un générateur de résidu (3.1.4) robuste aux entrées inconnues et capable de détecter les défauts  $\underline{f}$ . Cependant il n'est pas forcément possible de générer suffisamment de résidus robustes pour isoler tous les défauts, notamment par le schéma (b), qui présente des conditions d'existence plus restrictives que le schéma (a).

### 3.2 DÉTECTION ET ISOLATION DE DÉFAUTS : APPROCHE PAR NORMES MINIMALES ( $E_m = 0$ )

L'étude précédente a montré comment les défauts ( $\underline{f}$ ) agissent sur le résidu découplé des entrées inconnues ( $\underline{d}$ ), et de quelle façon nous pouvons localiser ces défauts (schémas a ou b). D'autre part l'étude sur l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues a montré que le système général (2.1.1) peut toujours se ramener à un sous-système dont une partie des mesures (sorties) est indépendante des entrées inconnues. Par conséquent, et pour simplifier l'écriture, le modèle de défaillance auquel nous nous intéresserons, sera uniquement fonction des entrées inconnues agissant sur l'état (i.e.  $E_m = 0$ ). Parmi les défauts à détecter, nous distinguons : les défauts d'actionneurs, de composants et de capteurs. Nous présentons alors un ensemble de nouveaux algorithmes (Koenig 1996c, 1997a, 1997b) pour l'isolation de ces défauts, à partir des résultats obtenus en 2.2.2B.

#### 3.2.1 Influence des défauts sur l'erreur d'estimation d'état

Hypothèse : nous considérons le système (3.1.1), avec  $E_m = 0$  et  $p \leq m$ .

De l'annexe A et des résultats obtenus en 2.2.1B, nous savons déterminer l'espace indépendant des entrées inconnues. L'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (2.2.26), permet alors d'estimer l'état ( $\underline{x}$ ) et de générer un résidu ( $\underline{r}$ ), défini par la relation:

$$\underline{r} = \underline{y} - C\hat{\underline{x}} = (I_m - CN)\underline{y} - C\underline{z} \quad (3.2.1)$$

#### Étude :

L'observateur (2.2.26) doit découpler chaque état estimé du système (3.1.1) de toute perturbation ( $\underline{d}$ ). Pour assurer ce découplage, il est nécessaire que la dynamique de l'erreur d'estimation  $\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}} = T\underline{x} - \underline{z} - NF_m \underline{f}$ , donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\underline{e}} = F\underline{e} + (TA - GC - FT)\underline{x} + (TB - J)\underline{u} + TF_d \underline{f} - KF_m \underline{f} - NF_m \dot{\underline{f}} + TE_d \underline{d} \quad (3.2.2)$$

$$\text{avec: } T = (I_n - NC) \quad (3.2.3)$$

satisfasse les relations (2.2.35), (2.2.37), (2.2.38) et (2.2.39).

Ainsi l'erreur d'estimation ( $\underline{e}$ ) et l'erreur d'observation ( $\underline{r}$ ) sont décrites par le système d'équations (Chen 1996) suivant :

$$\dot{\underline{e}} = F\underline{e} + TF_d \underline{f} - KF_m \underline{f} - NF_m \dot{\underline{f}} \quad (3.2.4a)$$

$$\underline{r} = C\underline{e} + F_m \underline{f} \quad (3.2.4b)$$

Si toutes les valeurs propres de  $F$  sont stables, l'erreur d'estimation  $\underline{e}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts ( $\underline{f}=0$ ). En d'autres termes, si l'un des théorèmes 2.1 ou 2.3 est vérifié l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (2.2.26) pour le système (3.1.1) est un générateur de résidus robustes.

Il est par conséquent possible de détecter les défauts  $\underline{f}$ , à l'aide de l'observateur à entrées inconnues, obtenu en partie 2.2.2B. Nous nous intéressons dès lors à l'existence d'un banc d'observateurs à entrées inconnues capable de générer suffisamment de résidus pour détecter et isoler des défauts de capteurs, d'actionneurs, ou de composants.

### 3.2.2 Isolation robuste des défauts de capteurs

#### Formulation du problème

Nous considérons que seuls des défauts de capteurs sont susceptibles d'apparaître sur un système soumis à des perturbations sur l'état (entrées inconnues  $\underline{d}$ ). Le système d'équations d'état devient :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + E_d \underline{d} \quad (3.2.5a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + I_m \underline{f} \quad (3.2.5b)$$

Nous voulons détecter et localiser  $m$  défauts de capteurs à l'aide des deux schémas, (a) et (b).

#### Schéma (a)

S'il y a défaillance du  $k^{\text{ème}}$  capteur, les  $m$  résidus respectent la logique d'isolation suivante :

$$\begin{cases} I_{\underline{r}^k} = 0, \|\underline{r}^k(t)\| < \varepsilon^k \\ I_{\underline{r}^j} = 1, \|\underline{r}^j(t_a)\| \geq \varepsilon^j \text{ pour } j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m \end{cases} \quad (3.2.6)$$

où  $\varepsilon^k$  ( $k=1, \dots, m$ ) est le seuil de détection choisi pour rester insensible aux faibles variations et  $t_a$  l'instant d'apparition du défaut.

La logique de décision suivante est donc vérifiée :

$$a_k = I_{\underline{r}^1} \cap \dots \cap I_{\underline{r}^{k-1}} \cap I_{\underline{r}^{k+1}} \cap \dots \cap I_{\underline{r}^m} \quad (3.2.7)$$

La table suivante, résume les propriétés que doivent vérifier les  $m$  résidus à générer. Chaque résidu doit être insensible à un et un seul défaut (représenté par un "0"), tout en restant sensible aux  $m-1$  défauts restants (représenté par un "1").



("UIFDO : Unknown Input Fault Detection Observer, Wünnenberg 1990")

Défauts de capteurs	UIFDO <sub>1=r<sup>1</sup></sub>	UIFDO <sub>2=r<sup>2</sup></sub>	...	UIFDO <sub>k=r<sup>k</sup></sub>	...	UIFDO <sub>m=r<sup>m</sup></sub>	Logique de décisions
Défaut f <sub>1</sub>	0	1		1		1	a <sub>1</sub> = I <sub>r<sup>1</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>2</sup></sub> ∩ ... ∩ I <sub>r<sup>m</sup></sub>
Défaut f <sub>2</sub>	1	0		1		1	a <sub>2</sub> = I <sub>r<sup>1</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>3</sup></sub> ∩ ... ∩ I <sub>r<sup>m</sup></sub>
⋮	1	1		1		1	⋮
Défaut f <sub>k</sub>	1	1		0		1	a <sub>k</sub> = I <sub>r<sup>1</sup></sub> ∩ ... ∩ I <sub>r<sup>k-1</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>k+1</sup></sub> ∩ ... ∩ I <sub>r<sup>m</sup></sub>
⋮	1	1		1		1	⋮
Défaut f <sub>m</sub>	1	1		1		0	a <sub>m</sub> = I <sub>r<sup>1</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>2</sup></sub> ∩ ... ∩ I <sub>r<sup>m-1</sup></sub>

Table 3.2.1 : Isolation robuste des défauts de capteurs, schéma (a)

**Etude :** pour k=1, 2, ..., m.

Il s'agit, de trouver pour le k<sup>ème</sup> observateur à entrées inconnues, un transfert dynamique non nul entre le résidu r<sup>k</sup> et les m-1 défauts f<sub>j</sub>, j étant différent de k :

$$\underline{r}^k = \underline{y}^k - C^k \hat{\underline{x}}^k = C^k \underline{e}^k + I_{(m-1)} \underline{f}^k \quad (3.2.8)$$

où  $\underline{e}^k = \underline{x} - \hat{\underline{x}}^k$  est l'erreur d'estimation d'état et  $\hat{\underline{x}}^k$  l'estimation fournie par le k<sup>ème</sup> observateur en considérant la transformation du système (3.2.5) en la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + E_d \underline{d} \\ \underline{y}^k = C^k \underline{x} + I_{(m-1)} \underline{f}^k \end{cases} \quad (3.2.9a)$$

$$y_k = c_k \underline{x} + f_k \quad (3.2.9b)$$

$\underline{f}^k$  représente le vecteur de défaut sans la k<sup>ème</sup> coordonnée.

Nous voulons détecter les m-1 défauts représentés par le vecteur  $\underline{f}^k$ , indépendamment des entrées inconnues (i.e.  $\underline{d}$ ) et de la k<sup>ème</sup> mesure (i.e.  $y_k$ ). Par conséquent, si nous considérons uniquement le système (3.2.9a), le problème se réduit à la recherche de l'espace indépendant des entrées inconnues. Il suffit alors de trouver le vecteur  $\underline{d}$  minimisant la norme euclidienne de l'écart (partie 2.2.2B) suivant :

$$\underline{e}^k = \underline{y}^k - I_{(m-1)} \underline{f}^k - C^k A \underline{x} - C^k B \underline{u} - C^k E_d \underline{d} \quad (3.2.10)$$

La solution est donnée par :

$$\underline{d} = (C^k E_d)^+ (\underline{y}^k - I_{(m-1)} \underline{f}^k - C^k A \underline{x} - C^k B \underline{u}) + (I_p - (C^k E_d)^+ C^k E_d) \bar{\underline{d}} \quad (3.2.11)$$

Substituons (3.2.11) dans (3.2.9a), nous obtenons le système équivalent :

$$\dot{\underline{x}} = T^k A \underline{x} + T^k B \underline{u} + E_d (C^k E_d)^+ (\underline{y}^k - I_{(m-1)} \underline{f}^k) + \underbrace{T^k E_d \bar{\underline{d}}}_{=0} \quad (3.2.12a)$$

$$\underline{y}^k = C^k \underline{x} + I_{(m-1)} \underline{f}^k \quad (3.2.12b)$$

$$\text{avec } T^k = I_n - E_d (C^k E_d)^+ C^k \quad (3.2.13)$$

et  $T^k E_d = 0$  si  $\text{rang}(C^k E_d) = \text{rang}(E_d) = p$

Nous pouvons proposer comme estimateur de  $\underline{x}$  le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  défini par :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}^k = T^k A \hat{\underline{x}}^k + E_d (C^k E_d)^+ \underline{y}^k + T^k B \underline{u} + K^k (\underline{y}^k - C^k \hat{\underline{x}}^k) \quad (3.2.14)$$

qui grâce au changement de variable suivant :

$$\underline{z}^k = \hat{\underline{x}}^k - N^k \underline{y}^k \quad (3.2.15)$$

$$\text{avec } N^k = E_d (C^k E_d)^+ \quad (3.2.16)$$

peut être ramené en une forme classique où le résidu (3.2.8) et l'observateur (3.2.14) sont décrits simplement par les relations de Luenberger :

$$\dot{\underline{z}}^k = F^k \underline{z}^k + G^k \underline{y}^k + J^k \underline{u} \quad (3.2.17a)$$

$$\hat{\underline{x}}^k = \underline{z}^k + N^k \underline{y}^k \quad (3.2.18b)$$

$$\underline{r}^k = \underline{y}^k - C^k \hat{\underline{x}}^k = (I_{m-1} - C^k N^k) \underline{y}^k - C^k \underline{z}^k \quad (3.2.19c)$$

Par le même raisonnement que dans l'approche par norme minimale (partie 3.2.1 avec  $F_d=0$ ), nous obtenons un transfert dynamique nul entre le résidu  $\underline{r}^k$  et le vecteur d'entrées inconnues  $\underline{d}$ , tout en garantissant un transfert non nul avec le vecteur de défaut  $\underline{f}^k$  :

$$\dot{\underline{e}}^k = F^k \underline{e}^k - K^k F_m^k \underline{f}^k - N^k F_m^k \dot{\underline{f}}^k \quad (3.2.20)$$

$$\underline{r}^k = C^k \underline{e}^k + F_m^k \underline{f}^k \quad (3.2.21)$$

si les relations suivantes sont satisfaites :

$$T^k E_d = 0 \quad (3.2.22)$$

$$F^k = T^k A - K^k C^k \quad \text{stable} \quad (3.2.23)$$

$$G^k = K^k + F^k N^k \quad (3.2.24)$$

$$J^k = T^k B \quad (3.2.25)$$

Ainsi, l'erreur d'estimation  $\underline{e}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts (i.e.  $\underline{f}^k = 0$ ). L'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (3.2.17) pour le système (3.2.9a) est un générateur de résidus robuste si et seulement si les conditions nécessaires et suffisantes d'existence suivantes sont vérifiées :

$$\text{c.3.3.a} \quad \text{rang}[C^k E_d] = \text{rang}[E_d] = p \leq m - 1$$

$$\text{c.3.3.b} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C^k & 0 \end{bmatrix} = n + p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0$$

De cette étude, nous déduisons l'algorithme de mise en oeuvre du schéma (a).

**Algorithme de détection et d'isolation robuste des défauts de capteurs, schéma (a)**

- 1) Afin de construire le schéma (a) d'isolation de défauts de capteur, nous considérons le modèle de défaillance suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + E_d \underline{d} \\ \underline{y}^k = C^k \underline{x} + I_{(m-1)} \underline{f}^k \end{cases} \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, m$$

où,  $\underline{f}^k$  représente le vecteur de défauts sans la  $k^{\text{ème}}$  coordonnée.

- 2) Pour que le  $k^{\text{ème}}$  observateur génère un résidu, tendant asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts (i.e.  $\underline{f}^k = 0$ ), il faut vérifier les conditions d'existence suivantes :

$$\begin{cases} \text{rang}[C^k E_d] = \text{rang}[E_d] = p \leq m - 1 \\ \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C^k & 0 \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0 \end{cases} \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, m$$

- 3) Nous déduisons le  $k^{\text{ème}}$  observateur chargé de la détection des défauts  $\underline{f}^k$ ,

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}^k = F^k \underline{z}^k + G^k \underline{y}^k + J^k \underline{u} \\ \hat{\underline{x}}^k = \underline{z}^k + N^k \underline{y}^k \\ \underline{r}^k = (I_{m-1} - C^k N^k) \underline{y}^k - C^k \underline{z}^k \end{cases} \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, m$$

où les matrices  $N^k$ ,  $T^k$ ,  $K^k$ ,  $F^k$ ,  $G^k$  et  $J^k$  sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} N^k &= E_d (C^k E_d)^+ \\ T^k &= I_n - N^k C^k \\ F^k &= T^k A - K^k C^k \text{ stable} \\ G^k &= K^k + F^k N^k \\ J^k &= T^k B \end{aligned} \right\} \Rightarrow T^k E_d = 0 \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, m$$

◇

Cet algorithme peut être schématisé de la façon suivante :

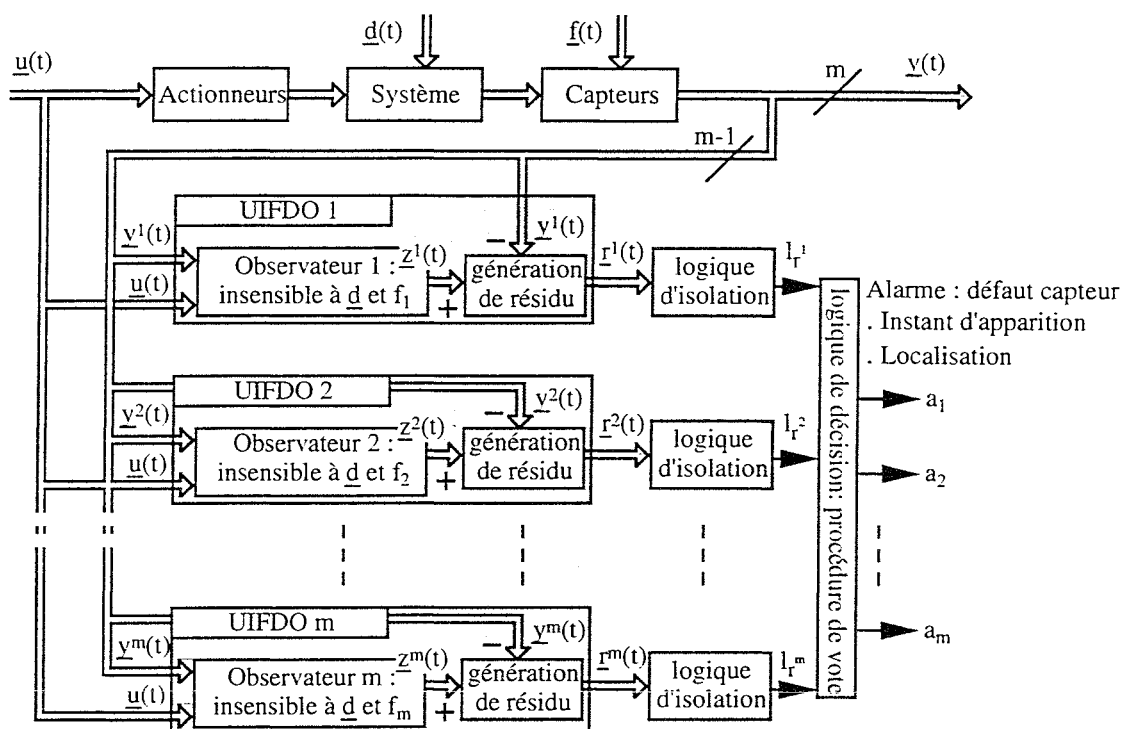


Fig 3.2.1 : Détection et isolation robuste des défauts de capteurs, schéma (a)

## Conclusion

L'observateur  $k$  étant gouverné par toutes les sorties, exceptée la  $k^{\text{ème}}$ , lorsque le  $k^{\text{ème}}$  capteur est en défaut, seul le  $k^{\text{ème}}$  résidu reste nul. Nous pouvons localiser les  $m$  défauts de capteurs ceci malgré la présence d'entrées inconnues. Cependant, un seul défaut à la fois peut être détecté et localisé.

## Schéma (b)

Le schéma (b) ne peut être appliqué dans le cadre de l'isolation de défauts de capteurs en présence d'entrées inconnues que si la condition de découplage des entrées inconnues est vérifiée. Comme chaque observateur est commandé par une seule sortie  $y_k = c_k \underline{x} + f_k$ , la condition de découplage des entrées inconnues  $\text{rang}[c_k E_d] = \text{rang}[E_d] = p$  n'est vérifiée que si  $p \leq \text{rang}(c_k)$ , (i.e.  $p < 2$ ). Par contre si le système n'est pas perturbé, nous pouvons détecter et localiser simultanément les  $m$  défauts de capteurs (Clark 1978). Il suffit de vérifier l'observabilité de chaque sortie du système puis par un banc d'observateurs, nous générons les  $m$  résidus ( $r_k = y_k - \hat{y}_k$ ) spécifiques à chaque défaut (sensibles à un seul défaut à la fois). Ainsi, le  $k^{\text{ème}}$  défaut de capteur affecte uniquement le  $k^{\text{ème}}$  résidu et nous détectons sa présence par une logique de décision.

### 3.2.3 Isolation des défauts d'actionneurs et/ou de composants

#### Formulation du problème

Si nous considérons que seuls des défauts d'actionneurs et/ou de composants sont susceptibles d'apparaître en présence de perturbations (entrées inconnues), la représentation d'état devient (Massoumnia 1986; Ge et Fang 1989) :

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) + \sum_{j=1}^f L_j f_j(t) \quad (3.2.26a)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \quad (3.2.26b)$$

où pour représenter un défaut issu du  $i^{\text{ème}}$  actionneur, il suffit que le vecteur  $L_i$  soit égal à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $B$ . De même, en présence de défauts de composants et/ou de perturbations, les vecteurs  $L_j$  restants, décrivent l'influence de ces défauts sur l'espace d'état (3.2.26a). En conclusion, cette représentation a le mérite d'intégrer les nombreux cas de défauts d'actionneurs, de composants et d'entrées inconnues (perturbations, bruits, variations de paramètres, non-linearités, etc).

Nous avons vu précédemment, que pour localiser simplement des défauts, il suffisait que chaque résidu soit sensible à certains défauts, tout en restant insensible aux autres défauts et entrées inconnues. Par conséquent, s'il existe des entrées inconnues, nous pouvons traiter ces entrées comme les défauts auxquels le système (3.2.26) devra être insensible. Dans ce cas, l'observateur est considéré comme un observateur d'isolation de défauts robuste ("UIFDO"). La méthode de génération de résidus est globalement inchangée selon que le système est à entrées inconnues ou pas.

Aussi, nous ne nous intéresserons qu'aux procédures de génération de résidus pour des systèmes sans entrées inconnues. Nous ne ferons dans cette partie, aucune hypothèse sur la construction des  $f$  vecteurs de distribution de défauts  $L_j$ , considérés comme constants et connus. Toutefois, leur construction sera détaillée lors d'exemples numériques présentés par la suite.

#### Schémas d'isolation, (Koenig et al 1997b)

La procédure de mise en oeuvre dépend du nombre de défauts à détecter et à localiser simultanément. Nous présentons un algorithme d'aide à la construction des schémas (a) et (b). Nous concluons sur les conditions d'existence d'un observateur chargé de la détection et de l'isolation de défauts (i.e. "FDI observer").

### Schéma (a)

La logique d'isolation (3.2.6), la logique de décision (3.2.7) et la table (3.2.1) présentées en partie (3.2.2) restent identiques en présence de défauts d'actionneurs (ou de composants), à la seule différence que  $m$  est remplacé par  $f$ .

**Etude :** pour  $k=1, 2, \dots, f$ .

Il s'agit, de trouver pour le  $k^{\text{ème}}$  observateur, un transfert dynamique non nul entre le résidu  $r^k$  et les  $f-1$  défauts  $f_j$  appartenant à  $f$ , tout en garantissant un transfert nul avec le défaut  $f_k$  appartenant à  $\bar{f}$  :

$$\underline{r}^k = \underline{y} - C\hat{\underline{x}}^k = C\underline{e}^k \quad (3.2.27)$$

où,  $\underline{e}^k = \underline{x} - \hat{\underline{x}}^k$  est l'erreur d'estimation d'état et  $\hat{\underline{x}}^k$  l'estimation fournie par le  $k^{\text{ème}}$  observateur en considérant la transformation du système (3.2.26) sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d^k \underline{f}^k + E_{d_k} d_k \quad (3.2.28a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.2.28b)$$

La matrice  $F_d^k = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_{k-1} \ L_{k+1} \ \dots \ L_f] \in \mathfrak{R}^{n \times (f-1)}$  représente la matrice de distribution des défauts à détecter (i.e.  $\in f$ ) et  $E_{d_k} = L_k \in \mathfrak{R}^n$  le vecteur de distribution du défaut à ne pas détecter (i.e.  $\in \bar{f}$ ), qui sera considéré comme entrée inconnue.  $\underline{f}^k = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{k-1} \ f_{k+1} \ \dots \ f_f]^T \in \mathfrak{R}^{f-1}$ , représente alors le vecteur des défauts et  $d_k = f_k \in \mathfrak{R}^1$  le vecteur des entrées inconnues.

Afin d'obtenir un résidu  $\underline{r}^k$  sensible au vecteur  $\underline{f}^k$ , indépendamment de l'entrée inconnue  $d_k$ , la première tâche consiste à rechercher l'espace indépendant des entrées inconnues. Il suffit alors de trouver le vecteur  $\underline{d}$  minimisant la norme euclidienne de l'écart suivant :

$$\underline{ec}^k = \underline{\dot{y}} - CA\underline{x} - CB\underline{u} - CF_d^k \underline{f}^k - CE_{d_k} d_k \quad (3.2.29)$$

La solution est donnée par :

$$d_k = (CE_{d_k})^+ (\underline{\dot{y}} - CA\underline{x} - CB\underline{u} - CF_d^k \underline{f}^k) + (I_p - (CE_{d_k})^+ CE_{d_k}) \bar{d}_k \quad (3.2.30)$$

Reprenons alors les résultats obtenus dans la partie 2.2.2B, en effectuant les substitutions suivantes :

$$E_d \rightarrow E_{d_k}, \ T \rightarrow T^k, \ F \rightarrow F^k, \ G \rightarrow G^k, \ J \rightarrow J^k \text{ et } N \rightarrow N^k.$$

Le générateur de résidus et l'observateur sont alors décrits par le système suivant :

$$\dot{\underline{z}}^k = F^k \underline{z}^k + G^k \underline{y} + J^k \underline{u} \quad (3.2.31a)$$

$$\hat{\underline{x}}^k = \underline{z}^k + N^k \underline{y} \quad (3.2.31b)$$

$$\underline{r}^k = \underline{y} - C \hat{\underline{x}}^k = (I_m - CN^k) \underline{y} - C \underline{z}^k \quad (3.2.31c)$$

Comme pour l'approche par normes minimales (partie 3.2.1 avec  $F_m=0$ ), nous obtenons un transfert dynamique nul entre le résidu  $\underline{r}^k$  et l'entrée inconnue  $d_k = f_k$  :

$$\dot{\underline{e}}^k = F^k \underline{e}^k + T^k F_d^k \underline{f}^k \quad (3.2.32a)$$

$$\underline{r}^k = C \underline{e}^k \quad (3.2.32b)$$

si les relations suivantes sont satisfaites :

$$T^k E_{d_k} = 0 \quad (3.2.33)$$

$$F^k = T^k A - K^k C \quad \text{stable} \quad (3.2.34)$$

$$G^k = K^k + F^k N^k \quad (3.2.35)$$

$$J^k = T^k B \quad (3.2.36)$$

Ainsi, l'erreur d'estimation  $\underline{e}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence de défauts (i.e.  $\underline{f}^k = 0$ ). L'observateur à entrées inconnues d'ordre plein (3.2.31) pour le système (3.2.28) présente alors un générateur de résidus (i.e.  $\underline{r}^k$ ) insensibles au défaut appartenant à  $\tilde{f}$  si et seulement si les conditions nécessaires et suffisantes d'existence suivantes sont vérifiées :

$$c.3.4.a) \quad \text{rang}[CE_{d_k}] = \text{rang}[E_{d_k}] = p = l \leq m$$

$$c.3.4.b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_{d_k} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \Re(\lambda) \geq 0$$

Il convient de vérifier que l'observateur vérifie les propriétés de détection, c'est à dire que tous les défauts appartenant à  $f$  présentent un transfert dynamique non nul entre le résidu  $\underline{r}^k$  et le vecteur de défaut  $\underline{f}^k$ .

Le but de l'étude suivante est de déterminer les conditions d'existence d'un observateur chargé de la détection et de l'isolation de défauts (i.e. "FDI observer").

### Analyse:

Les structures de la matrice  $(F_d^k)$  et du vecteur  $(\underline{f}^k)$  permettent l'écriture suivante :

$$\dot{\underline{e}}^k = F^k \underline{e}^k + T^k L_1 f_1 + T^k L_2 f_2 + \dots + T^k L_{k-1} f_{k-1} + T^k L_{k+1} f_{k+1} + \dots + T^k L_f f_f \quad (3.2.37a)$$

$$\underline{r}^k = C \underline{e}^k \quad (3.2.37b)$$

Remarque : s'il existe parmi les  $f-1$  défauts appartenant à  $f$ , un seul vecteur  $T^k L_j$  nul ( $j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, f$ ), l'observateur décrit par le système (3.2.31) n'existe pas et la procédure doit être interrompue. Dans le cas contraire, nous pouvons poursuivre notre étude. Il s'agit alors de vérifier si la paire  $(T^k A, C)$  est détectable, afin de pouvoir stabiliser la matrice  $F^k = T^k A - K^k C$ .

—Si la paire  $(T^k A, C)$  est observable (détectable par définition), par les résultats de Wonham 1968, l'observabilité de la paire  $(T^k A, C)$  est équivalente à l'observabilité de la paire  $(T^k A + \beta C, C)$  où  $\beta$  est une matrice arbitraire. Nous choisissons d'assigner à  $\beta$  la valeur  $\beta = -K^k$ . Par conséquent, la paire  $(F^k, C)$  est observable. Le défaut  $f_j$  sera alors détectable, à condition bien entendu que le vecteur  $T^k L_j$  soit différent de zéro.

—Si la paire  $(T^k A, C)$  est simplement détectable, par les résultats de Wonham 1968, la paire  $(F^k, C)$  est également détectable. Nous pouvons donc effectuer une décomposition canonique selon l'observabilité (Kailath 1980) du système (3.2.32).

En effet, comme la matrice d'observabilité  $(O)$  de la paire  $(F^k, C)$  est de rang  $n_1 < n$ , il existe une transformation  $(H^{-1})^T$  (voir chapitre 1) telle que :

$$\bar{\underline{e}}^k = (H^{-1})^T \underline{e}^k = \begin{bmatrix} \bar{\underline{e}}_o^k \\ \bar{\underline{e}}_d^k \end{bmatrix}$$

où :

$$\dim(\bar{\underline{e}}_o^k) = n_1,$$

$$\bar{F}^k = (H^{-1})^T F^k H^T = \begin{bmatrix} \bar{F}_o^k & 0 \\ \bar{F}_{21}^k & \bar{F}_d^k \end{bmatrix},$$

$$\bar{T}^k F_d^k = (H^{-1})^T T^k F_d^k = \begin{bmatrix} \bar{T}_o^k F_d^k \\ \bar{T}_d^k F_d^k \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \bar{C} = C H^T = [\bar{C}_o \ 0]$$

La matrice  $H$  est déduite de  $O^T$ , cette dernière étant considérée comme une matrice de commandabilité.



Dans ce cas, le système (3.2.32) devient :

$$\dot{\underline{e}}^k = \bar{F}^k \underline{e}^k + \bar{T}^k F_d^k \underline{f}^k \quad (3.2.38a)$$

$$\underline{r}^k = \bar{C} \underline{e}^k \quad (3.2.38b)$$

Sachant que le système formé des matrices  $(\bar{C}_o, \bar{F}_o^k, \bar{T}_o^k F_d^k)$  représente le sous-système observable de  $(C, F^k, T^k F_d^k)$ , alors le système (3.2.38) est réduit à :

$$\dot{\underline{e}}_o^k = \bar{F}_o^k \underline{e}_o^k + \bar{T}_o^k F_d^k \underline{f}^k \quad (3.2.39a)$$

$$\underline{r}^k = \bar{C}_o \underline{e}_o^k \quad (3.2.39b)$$

Par la même décomposition que dans (3.2.37), le système (3.2.39) devient :

$$\dot{\underline{e}}_o^k = \bar{F}_o^k \underline{e}_o^k + \bar{T}_o^k L_1 f_1 + \bar{T}_o^k L_2 f_2 + \dots + \bar{T}_o^k L_{k-1} f_{k-1} + \bar{T}_o^k L_{k+1} f_{k+1} + \dots + \bar{T}_o^k L_f f_f \quad (3.2.40a)$$

$$\underline{r}^k = \bar{C}_o \underline{e}_o^k \quad (3.2.40b)$$

S'il existe parmi les  $f-1$  défauts appartenant à  $f$ , un seul vecteur  $\bar{T}_o^k L_j$  nul ( $j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, f$ ), l'observateur décrit par le système (3.2.31) n'existe pas et la procédure est interrompue. Dans le cas contraire, le résidu est sensible aux défauts appartenant à  $f$ .

**Conclusion**, pour détecter un défaut  $f_j$ , il suffit que l'espace commandable et observable du triplet  $(C, F^k, T^k L_j)$  soit non vide. Ainsi le triplet  $(C, F^k, T^k L_j)$  peut être transformé sous la forme  $(\bar{C}, \bar{F}^k, \bar{T}^k L_j)$  où le sous système composé des matrices  $(\bar{C}_o, \bar{F}_o^k, \bar{T}_o^k L_j)$  est observable et où le vecteur  $\bar{T}_o^k L_j$  est non nul. Il existe par conséquent un transfert non nul entre le résidu et le défaut.

**Théorème 3.2.1** : Pour le système (3.2.28), il existe un observateur (3.2.31) chargé de la détection des défauts appartenant à  $f$  ("FDIO<sub>k</sub>"), indépendamment du défaut appartenant à  $\bar{f}$ , si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

c3.2.1a) : La paire  $(T^k A, C)$  est détectable et  $T^k L_{k \neq j} = 0$ , pour  $k$  appartenant à  $\bar{f}$ ,  
(cette condition est équivalente respectivement aux conditions c.3.4.b et c.3.4.a précédentes, démonstration annexe B)

c3.2.1b) L'espace commandable et observable des triplets  $(C, F^k, T^k L_j)$  est non vide pour tout  $j$  appartenant à  $f$  (les défauts  $f_j$  sont détectables) ■

**Remarque** : La condition de sensibilité du résidu (c3.2.1b) face aux défauts  $f_j$  rejoint celle énoncée par Ge et Fang 1989 ou encore Massoumnia 1986.

De cette étude, nous déduisons l'algorithme suivant de mise en oeuvre du schéma (a).

**Algorithme de détection et d'isolation des défauts d'actionneurs ou de composants, schéma (a) :**

- 1) Afin de construire le schéma (a) d'isolation de défauts d'actionneur ou de composants, nous considérons le modèle de défaillance suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d^k \underline{f}^k + E_{d_k} d_k \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, f$$

où  $F_d^k$  représente la matrice de distribution des défauts à détecter (i.e.  $\in f$ ). Elle est composée de tous les vecteurs  $L_j$ , hormis le vecteur  $L_k$ , que nous considérons comme la distribution du défaut à ne pas détecter (i.e.  $\in \bar{f}$ ). Par conséquent,  $\underline{f}^k \in \mathfrak{R}^{f-1}$  est composé de tous les défauts  $f_j$ , avec  $j \neq k$  et  $E_{d_k} d_k = L_k f_k$ .

- 2) Pour que le  $k^{\text{ème}}$  observateur génère un résidu, tendant asymptotiquement vers zéro en l'absence des  $f-1$  défauts appartenant à  $f$  (i.e.  $\underline{f}^k = 0$ ), il faut vérifier les conditions d'existence suivantes :

$$\begin{cases} \text{rang}[CE_{d_k}] = \text{rang}[E_{d_k}] = p = 1 \leq m \\ \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_{d_k} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \mathbb{C} \Re(\lambda) \geq 0 \end{cases} \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, f$$

- 3) Nous déduisons le  $k^{\text{ème}}$  observateur chargé de la détection des défauts  $\underline{f}^k$  :

$$\text{FDIO}^k \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{z}}^k = F^k \underline{z}^k + G^k \underline{y} + J^k \underline{u} \\ \hat{\underline{x}}^k = \underline{z}^k + N^k \underline{y} \\ \underline{r}^k = (I_m - CN^k) \underline{y} - C\underline{z}^k \end{cases} \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, f$$

où les matrices  $N^k$ ,  $T^k$ ,  $K^k$ ,  $F^k$ ,  $G^k$  et  $J^k$  sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} N^k &= E_{d_k} (CE_{d_k})^+ \\ T^k &= I_n - N^k C \\ F^k &= T^k A - K^k C \quad \text{stable} \\ G^k &= K^k + F^k N^k \\ J^k &= T^k B \end{aligned} \right\} \Rightarrow T^k E_{d_k} = 0 \quad \text{pour } k=1, 2, \dots, f$$

- 4) Le transfert dynamique entre le résidu  $\underline{r}^k$  et le défaut  $f_k$  appartenant à  $\bar{f}$  est nul, il reste à vérifier que ce résidu présente un transfert dynamique non nul avec les  $f-1$  défauts appartenant à  $f$ . Il faut donc vérifier la condition c3.2.1b du théorème 3.2.1.

◇

Cet algorithme peut être schématisé de la façon suivante :

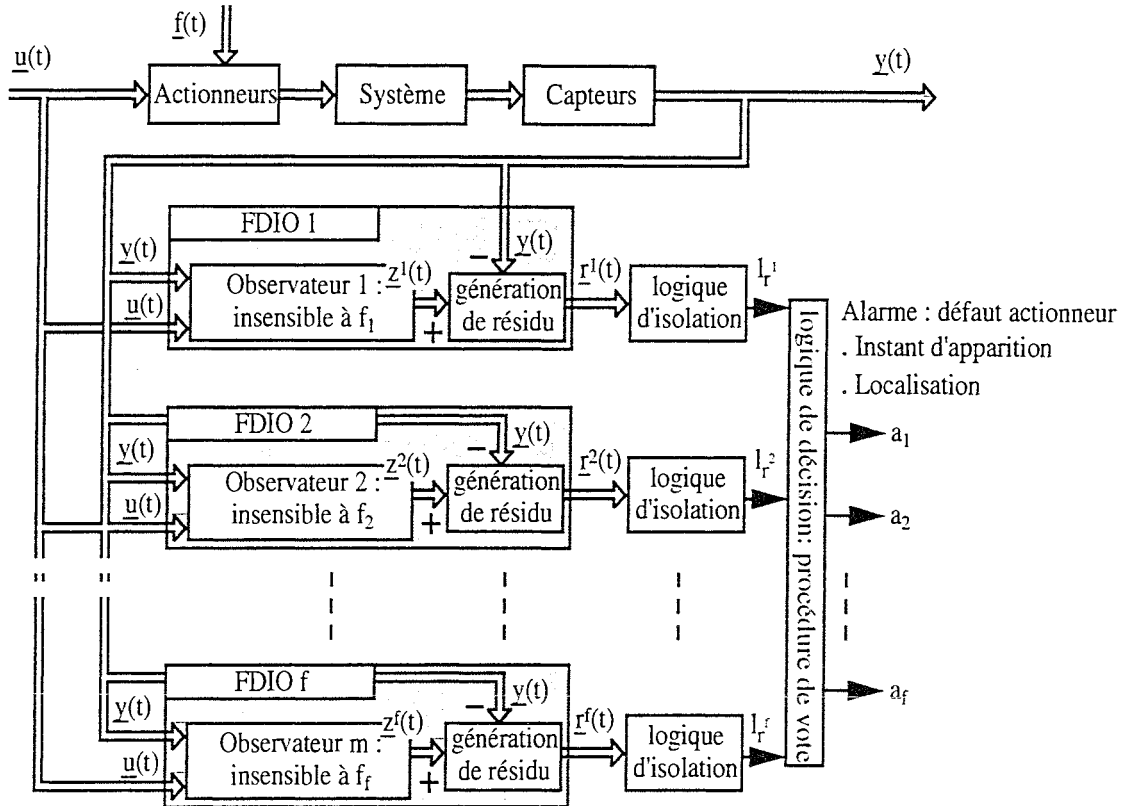


Fig 3.2.2 : Détection et isolation des défauts d'actionneurs, schéma (a)

Cette méthode permet également de détecter et localiser des défauts simultanés.

**Schéma (b)**

S'il y a défaillance du  $i^{\text{ème}}$  actionneur (ou composant), les  $f$  résidus satisfont la logique de décision suivante :

$$\begin{cases} a_j = l_{r^j} = 0, \|\underline{r}^j(t)\| < \varepsilon^j \text{ pour } j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, f \\ a_i = l_{r^i} = 1, \|\underline{r}^i(t)\| \geq \varepsilon^i \end{cases} \quad (3.2.41)$$

La table ci-dessous résume les propriétés que doivent vérifier les  $f$  résidus à générer.

Défauts d'actionneurs et/ou de composants	FDIO <sub>1=r1</sub>	FDIO <sub>2=r2</sub>	...	FDIO <sub>i=ri</sub>	...	FDIO <sub>f=rf</sub>	Logique de décisions
Défaut $f_1$	1	0		0		0	$a_1 = l_{r^1}$
Défaut $f_2$	0	1		0		0	$a_2 = l_{r^2}$
$\vdots$	0	0		0		0	$\vdots$
Défaut $f_i$	0	0		1		0	$a_i = l_{r^i}$
$\vdots$	0	0		0		0	$\vdots$
Défaut $f_f$	0	0		0		1	$a_f = l_{r^f}$

Table 3.2.2 : Isolation des défauts d'actionneurs (et/ou de composants), schéma (b)

**Étude :** pour  $i=1, 2, \dots, f$

Il s'agit, de trouver pour le  $i^{\text{ème}}$  observateur, un transfert dynamique non nul entre le résidu  $r^i$  et le défaut  $f_i$  appartenant à  $f$ , tout en garantissant un transfert nul avec les  $f-1$  défauts  $f_j$  appartenant à  $\bar{f}$  :

$$\dot{\underline{z}}^i = F^i \underline{z}^i + G^i \underline{y} + J^i \underline{u} \quad (3.2.42a)$$

$$\hat{\underline{x}}^i = \underline{z}^i + N^i \underline{y} \quad (3.2.42b)$$

$$\underline{r}^i = \underline{y} - C \hat{\underline{x}}^i = C \underline{e}^i \quad (3.2.42c)$$

où  $\underline{e}^i = \underline{x} - \hat{\underline{x}}^i$  est l'erreur d'estimation d'état et  $\hat{\underline{x}}^i$  l'estimation fournie par le  $i^{\text{ème}}$  observateur (3.2.42) en considérant la transformation du système (3.2.26) sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + F_{d_i} f_i + E_d^i \underline{d}^i \quad (3.2.43a)$$

$$\underline{y} = C \underline{x} \quad (3.2.43b)$$

avec :  $F_{d_i} = L_i \in \mathcal{R}^n$  le vecteur de distribution du défaut à détecter (i.e.  $\in f$ ) et  $E_d^i = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_{i-1} \ L_{i+1} \ \dots \ L_f] \in \mathcal{R}^{n \times (f-1)}$  la matrice de distribution des défauts à ne pas détecter (i.e.  $\in \bar{f}$ ). Alors,  $f_i \in \mathcal{R}^1$  représente le défaut et  $\underline{d}^i = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{i-1} \ f_{i+1} \ \dots \ f_f]^T \in \mathcal{R}^{f-1}$ , le vecteur des entrées inconnues.

Reprenons les résultats donnés dans la partie 2.2.2B, en effectuant les substitutions suivantes :

$$E_d \rightarrow E_d^i, T \rightarrow T^i, F \rightarrow F^i, G \rightarrow G^i, J \rightarrow J^i \text{ et } N \rightarrow N^i$$

Nous obtenons :

$$\dot{\underline{e}}^i = F^i \underline{e}^i + T^i F_{d_i} f_i \quad (3.2.44a)$$

$$\underline{r}^i = C \underline{e}^i \quad (3.2.44b)$$

si les relations suivantes sont satisfaites :

$$T^i E_d^i = 0 \quad (3.2.45)$$

$$F^i = T^i A - K^i C \quad \text{stable} \quad (3.2.46)$$

$$G^i = K^i + F^i N^i \quad (3.2.47)$$

$$J^i = T^i B \quad (3.2.48)$$

Ainsi, l'erreur d'estimation  $\underline{e}^i$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence du défaut appartenant à  $f$  (i.e.  $f_i = 0$ ). L'observateur (3.2.42) à entrées inconnues d'ordre plein pour le système (3.2.43) est un générateur de résidus insensibles aux  $f-1$  défauts appartenant à  $\bar{f}$ , si et seulement si les conditions nécessaires et suffisantes d'existence suivantes sont vérifiées :

$$c.3.5.a) \quad \text{rang}[CE_d^i] = \text{rang}[E_d^i] = p = f - 1 \leq m$$

$$c.3.5.b) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^i \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \Re(\lambda) \geq 0$$

Le vecteur  $F_{d_i} = L_i$  du système (3.2.43) étant inclus dans la matrice  $F_d^k$  du système (3.2.28) pour  $i \neq k$ , le théorème 3.2.1 peut être étendu au schéma (b), selon le théorème suivant.

**Théorème 3.2.2 :** Pour le système (3.2.43), l'observateur (3.2.42) chargé de la détection du défaut  $f_i$  appartenant à  $f$  ("FDIO<sub>i</sub>") existe indépendamment des  $f-1$  défauts appartenant à  $\bar{f}$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- c3.2.2a) La paire  $(T^i A, C)$  est détectable et  $T^i L_{j \neq i} = 0$ , pour tout  $j$  appartenant à  $\bar{f}$  (cette condition est équivalente respectivement aux conditions c.3.5.b et c.3.5.a précédentes, démonstration annexe B)
- c3.2.2b) L'espace commandable et observable du triplet  $(C, F^i, T^i L_i)$  est non vide pour  $i$  appartenant à  $f$  (le défaut  $f_i$  est détectable). ■

De cette étude, nous déduisons l'algorithme de mise en oeuvre du schéma (b).

### Algorithme de détection et d'isolation des défauts d'actionneurs et/ou de composants, schéma (b)

- 1) Afin de construire le schéma (b) d'isolation de défauts d'actionneur et/ou de composants, nous considérons le modèle de défaillance suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_{d_i} f_i + E_d^i \underline{d}^i \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \quad \text{pour } i=1,2, \dots, f$$

où  $E_d^i$  représente la matrice de distribution des entrées inconnues (i.e.  $\in \bar{f}$ ). Elle est composée de tous les vecteurs  $L_j$ , hormis le vecteur  $L_i$ , considéré comme la distribution du défaut à détecter (i.e.  $\in f$ ). Par conséquent  $\underline{d}^i \in \mathfrak{R}^{f-1}$  est composé de tous les défauts  $f_j$ , avec  $j \neq i$  et  $F_{d_i} f_i = L_i f_i$ .

- 2) Pour que le  $i^{\text{ème}}$  observateur génère un résidu, tendant asymptotiquement vers zéro en l'absence du défaut appartenant à  $f$  (i.e.  $f_i = 0$ ). Il faut vérifier les conditions d'existence suivantes :

$$\begin{cases} \text{rang}[CE_d^i] = \text{rang}[E_d^i] = p = f - 1 \leq m \\ \text{rang}\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^i \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \forall \lambda \in \mathbb{C} \Re(\lambda) \geq 0 \end{cases} \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, f$$

- 3) Nous déduisons le  $i^{\text{ème}}$  observateur, chargé de la détection du défaut  $f_i$  :

$$\text{FDIO}^i \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}^i = F^i z^i + G^i y + J^i u \\ \hat{x}^i = z^i + N^i y \\ r^i = (I_m - CN^i)y - Cz^i \end{cases} \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, f$$

où les matrices  $N^i$ ,  $T^i$ ,  $K^i$ ,  $F^i$ ,  $G^i$  et  $J^i$  sont telles que :

$$\left. \begin{aligned} N^i &= E_d^i (CE_d^i)^+ \\ T^i &= I_n - N^i C \\ F^i &= T^i A - K^i C \text{ stable} \\ G^i &= K^i + F^i N^i \\ J^i &= T^i B \end{aligned} \right\} \Rightarrow T^i E_d^i = 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, f$$

- 4) Le transfert dynamique entre le résidu  $r^i$  et les  $f-1$  défauts  $f_j$  appartenant à  $\bar{f}$  est nul, il reste à vérifier que ce résidu présente un transfert dynamique non nul avec le défaut  $f_i$  appartenant à  $\bar{f}$ . Il faut vérifier la condition c3.2.2b du théorème 3.2.2.  $\diamond$

Cet algorithme peut être schématisé de la façon suivante :

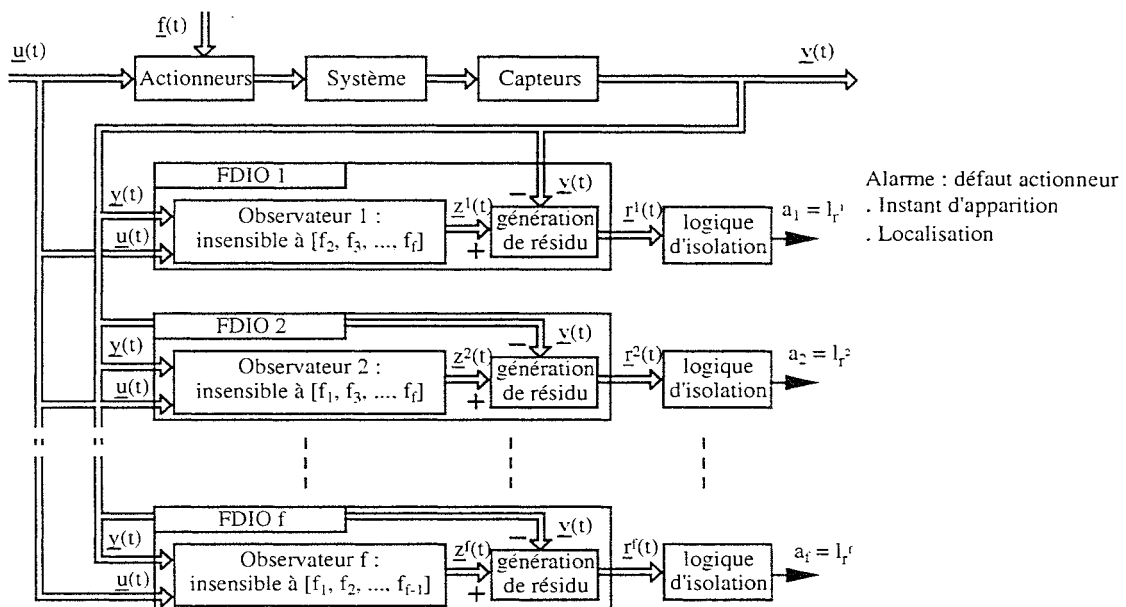


Fig 3.2.3 : Détection et isolation des défauts d'actionneurs, schéma (b)

## Exemple

**Objectif :** Evaluer les performances des deux algorithmes de génération de résidus étudiés.

Le procédé auquel nous faisons référence (fig 3.2.4) est un procédé pilote, étudié par (Wünnenberg 1990). Il est composé de trois réservoirs circulaires, de sections respectives  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ , de deux actionneurs  $u_1$  et  $u_2$  (pompes) qui agissent sur le niveau d'eau, de trois tubes de sections respectives  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  et de trois capteurs de niveau respectivement  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ .

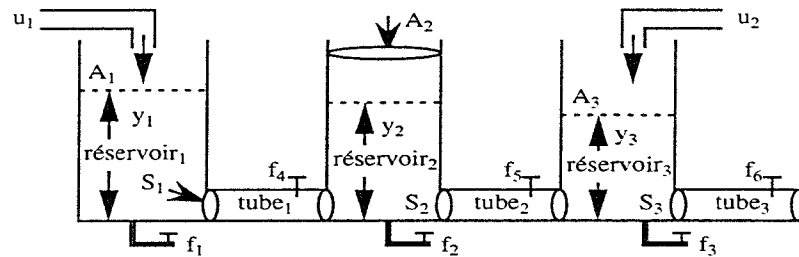


Fig 3.2.4 : Système à trois réservoirs

Pour simuler des défauts de composants, nous ajoutons des vannes  $f_1, f_2, \dots, f_6$  sur chaque réservoir et tube. Ainsi, si nous fermons de quelques tours la vanne  $f_4$ , notre procédure de diagnostic doit détecter et indiquer la présence d'un bouchon dans le tube<sub>1</sub>. Au contraire, si nous ouvrons de quelques tours la vanne  $f_1$ , le système de surveillance doit informer l'opérateur de la présence d'une fuite dans le réservoir<sub>1</sub>.

Remarque : Les bouchons peuvent représenter physiquement un encrassement, un rétrécissement ou encore un obstacle dans les tubes de liaison.

Ce système non linéaire peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement (Ge et Fang 1989) :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_6] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.2.49a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.2.49b)$$

Avec :  $\underline{x} \in \mathfrak{R}^{n=3}$ ,  $\underline{u} \in \mathfrak{R}^{e=2}$ ,  $\underline{y} \in \mathfrak{R}^{m=3}$ , et  $[L_1 \ L_2 \ \dots \ L_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Sur cet exemple précis pour ne pas surcharger les calculs, nous avons simplifié quelques paramètres des matrices A et B (Hou et Müller 1991), mais le principe de résolution du problème reste inchangé.

Le problème consiste alors à détecter et isoler l'éventuelle apparition des défauts  $f_i$ , où  $L_i f_i$  représente pour  $i=1, 2$  et  $3$  respectivement les fuites sur les réservoirs 1, 2 et 3 tandis que  $L_{i+3} f_{i+3}$  représente respectivement les bouchons dans les tubes 1, 2 et 3.

Remarque : Les vecteurs  $L_3$  et  $L_6$  sont linéairement dépendants (même distribution). Par conséquent, les défauts  $f_3$  et  $f_6$  ne peuvent être isolés. Nous ne considérons que la source  $f_3$  pour modéliser ces deux défauts. A noter, que par une étude du sens de variation des résidus, nous pouvons distinguer s'il s'agit d'une fuite dans le réservoir 3 (diminution du niveau  $y_3$ ) ou d'un bouchon dans le tube 3 (augmentation du niveau  $y_3$ ).

*Illustration successive des schémas (a) et (b).*

### Décomposition selon le schéma a, en présence de défauts de composants

Schéma (a): Cette approche nécessite  $f=5$  observateurs, où chaque résidu est sensible à tous les défauts excepté un (i.e.  $f \in \mathfrak{R}^4$ ,  $\bar{f} \in \mathfrak{R}^1$ ).

D'après l'algorithme d'aide à la détection et à l'isolation de défauts (schéma (a)), nous avons pu mettre en oeuvre l'ensemble des observateurs mentionnés dans la table 3.2.1 (en remplaçant  $m$  par 5). Nous présentons le développement du second observateur.

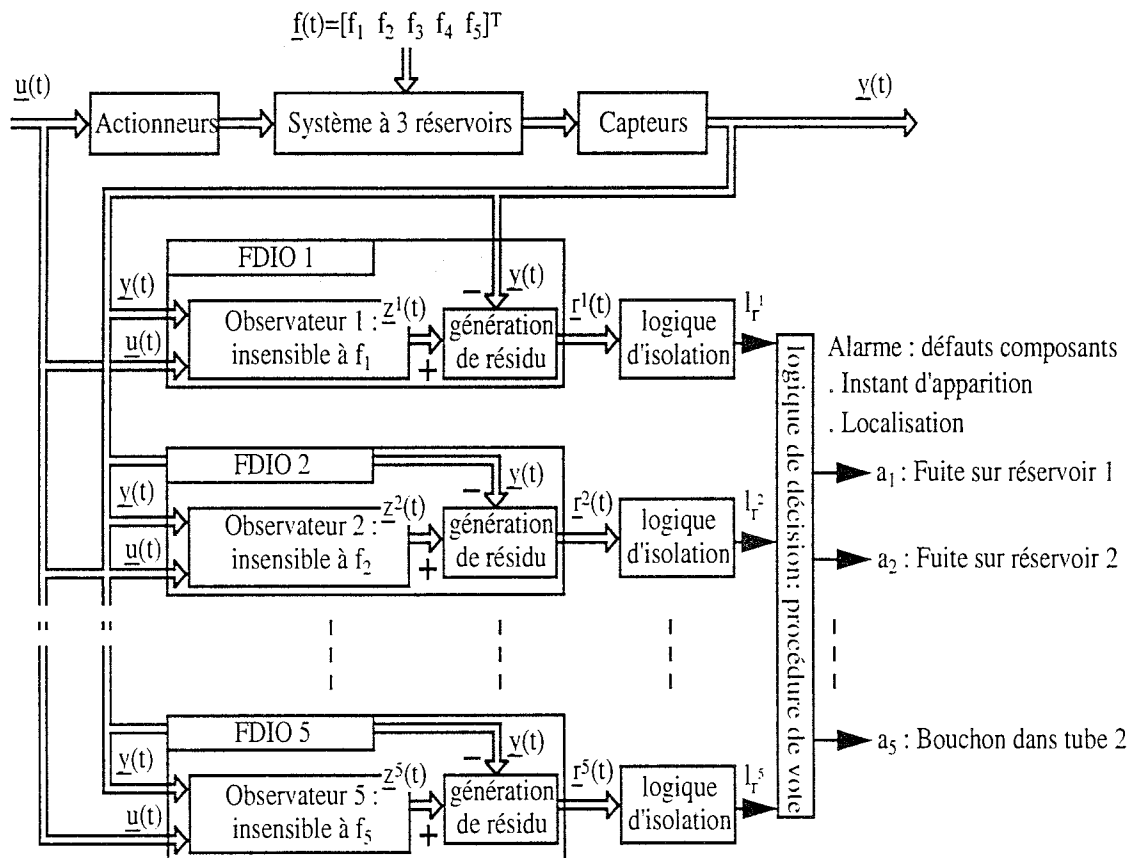


Fig 3.2.5 : Détection et isolation des défauts de composants, schéma (a)



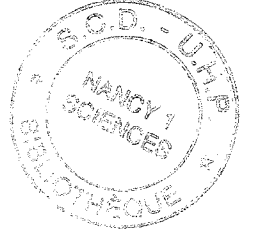
### Étude et mise en oeuvre de l'observateur 2 ("FDIO<sub>2</sub>")

Étape 1) Selon la table 3.2.1 (en remplaçant m par 5), nous considérons le modèle de défaillance suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + F_d^k \underline{f}^k + E_{d_k} d_k \\ \underline{y} = I_3 \underline{x} \end{cases} \quad \text{pour } k=2 \quad (3.2.50)$$

où  $\underline{f}^k \in \mathcal{R}^{5-1}$  est composé de tous les défauts  $f_j$ , avec  $j \neq k$ , ainsi :

$$f = \{1, 3, 4, 5\}, \bar{f} = \{2\}, F_d^k \underline{f}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \text{ et } E_{d_k} d_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} f_2$$



Étape 2) L'observateur 2 doit permettre de générer un résidu tendant asymptotiquement vers zéro en l'absence des défauts appartenant à  $f$  (i.e.  $\underline{f}^k = 0$ ). Il faut donc vérifier les conditions d'existence c.3.4.a et c.3.4.b suivantes :

$$\text{c.3.4.a} \quad \text{rang}[CE_{d_k}] = \text{rang}[E_{d_k}] = p = 1 < 3 \quad \text{OK}$$

$$\text{c.3.4.b} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_{d_k} \\ C & 0 \end{bmatrix} = m + p = 4, (\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad \text{OK}$$

Étape 3) La matrice  $CE_{d_k}$  est de rang plein colonnes. Le système ci-dessous associé au modèle de défaillance (3.2.50) est indépendant de l'entrée inconnue  $d_k$  :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = T^k A \underline{x} + T^k B \underline{u} + T^k F_d^k \underline{f}^k + E_{d_k} (CE_{d_k})^+ \dot{\underline{y}} + \overbrace{T^k E_{d_k} \bar{d}^k}^{=0} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{f}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} \\ \underline{y} = I_3 \underline{x} \end{cases} \quad (3.2.51)$$

$$\text{avec :} \quad T^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } k=2 \quad (3.2.52)$$

Nous pouvons proposer comme estimateur de  $\underline{x}$ , le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}} &= T^k A \hat{\underline{x}} + T^k B \underline{u} + E_{d_k} (CE_{d_k})^+ \dot{\underline{y}} + K^k (\underline{y} - C \hat{\underline{x}}) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} + K^k (\underline{y} - I_3 \hat{\underline{x}}) \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

où  $K^k$  est le gain de l'observateur pour  $k=2$

A l'aide du changement de variable suivant :

$$\underline{z}^k = \hat{\underline{x}}^k - N^k \underline{y} \quad \text{pour } k=2 \quad (3.2.54)$$

$$\text{avec } N^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.55)$$

nous obtenons l'expression générale d'un observateur à entrées inconnues (Darouach et al 1994) et le générateur de résidus suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}^k = F^k \underline{z}^k + G^k \underline{y} + J^k \underline{u} \\ \hat{\underline{x}}^k = \underline{z}^k + N^k \underline{y} \\ \underline{r}^k = (I_3 - CN^k) \underline{y} - C \underline{z}^k \end{cases} \quad \text{pour } k=2 \quad (3.2.56)$$

où les matrices  $K^k$ ,  $F^k$ ,  $G^k$  et  $J^k$  sont telles que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\left. \begin{array}{l} F^k = T^k A - K^k C \text{ stable} \\ G^k = K^k + F^k N^k \\ J^k = T^k B \end{array} \right\} \quad \text{pour } k=2 \quad (3.2.57)$$

La condition c.3.4.b est vérifiée, le triplet  $(C, A, E_{d_k})$  ne présente pas de compensation de zéro (système observable). Nous pouvons alors choisir un gain  $K^2$  tel que les pôles de l'observateur ("FDIO<sub>2</sub>") sont tous fixés à  $\{-4\}$ , soit

$$K^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, F^2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, G^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.58)$$

Ainsi, pour ce nouvel observateur (3.2.56), l'erreur d'estimation  $\underline{e}_2 = \underline{x} - \hat{\underline{x}}^2$  et le résidu  $\underline{r}^2$  sont décrits par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{e}}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{e}_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_3 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_4 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} f_5 \\ \underline{r}^2 = I_3 \underline{e}_2 \end{cases} \quad (3.2.59)$$

Étape 4) La condition c3.2.1b du théorème 3.2.1 est vérifiée.

Finalement, le résidu  $\underline{r}^2$  présente un transfert dynamique non nul, avec les défauts  $f_1$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  et  $f_5$ , tout en garantissant un transfert nul avec le défaut  $f_2$ . Nous respectons ainsi les propriétés de sensibilité (pour  $f_1$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  et  $f_5$ ) et d'insensibilité (pour  $f_2$ ) du générateur de résidu  $\underline{r}^2$ .

◇

La figure suivante présente l'ensemble des résultats de simulation.

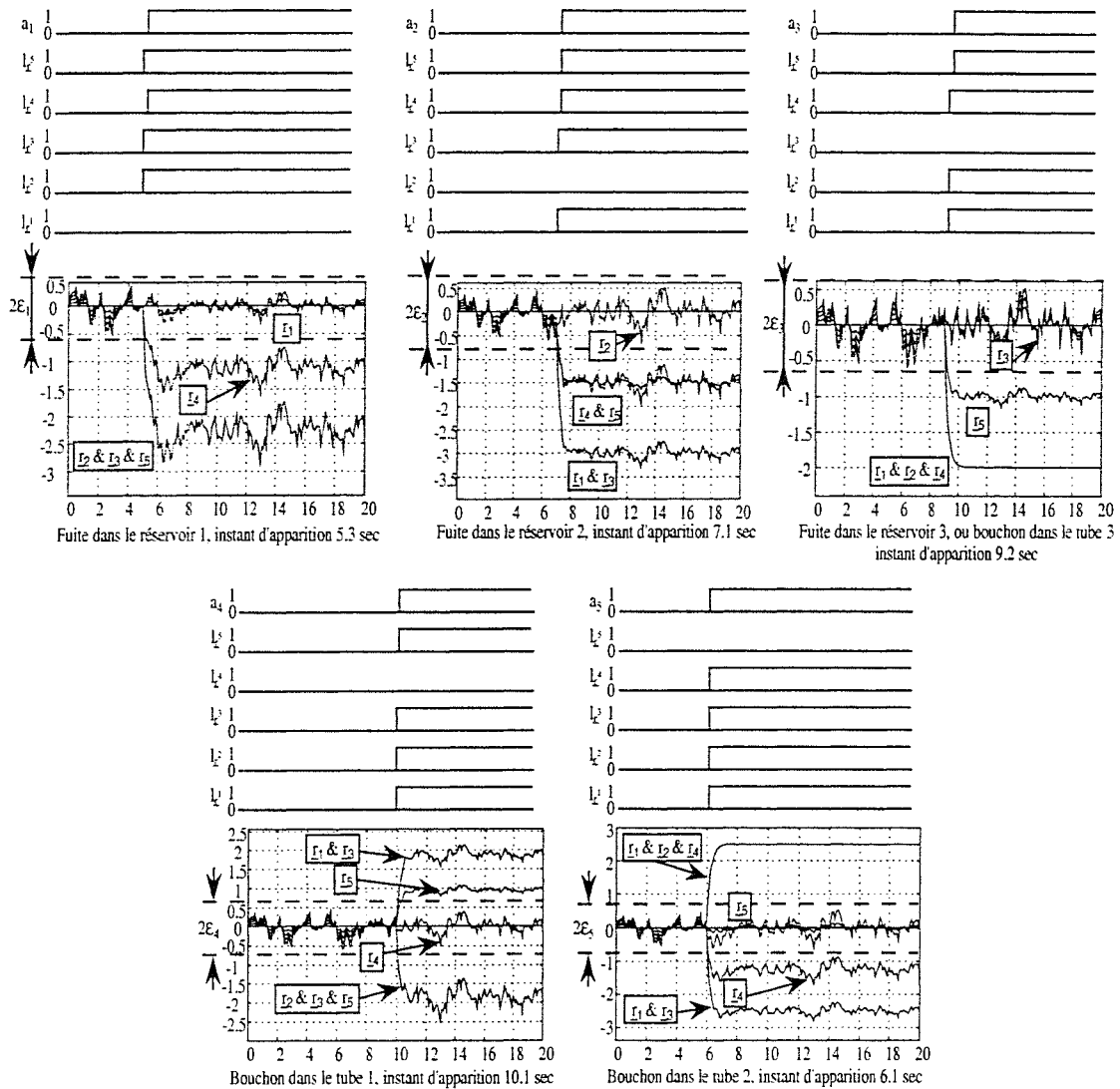


Fig 3.2.6 : Simulations de défauts de composants à des instants différents.

### Conclusion

Le comportement des différents résidus  $r^k$ , (pour  $k = 1, 2, 3, 4$  et  $5$ ), des logiques d'isolation  $l_{r^k}$  et des logiques de décision  $a^k$  correspondent aux propriétés établies dans la table 3.2.1 (en remplaçant  $m$  par  $5$ ). Nous avons associé à chaque observateur un résidu insensible à un et un seul défaut de composant, ainsi s'il y a défaut, le résidu nul désigne ce défaut. Si  $f_4 \neq 0$  (i.e. bouchon dans le tube 1) alors seul le résidu  $r_4$  est nul.

### Décomposition selon le schéma b, en présence de défauts de composants

Pour garantir l'hypothèse  $H_1$ , (ie.,  $m \geq p$ ), il convient de considérer uniquement l'hypothèse de fuites dans les réservoirs 1, 2 et 3. Le modèle de défaillances (3.2.49) est réduit à la représentation suivante :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + [L_1 \ L_2 \ L_3] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.60a)$$

$$\underline{y} = I_3 \underline{x} \quad (3.2.60b)$$

avec :  $[L_1 \ L_2 \ L_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Schéma (b): Cette approche nécessite  $f=3$  observateurs, où chaque résidu est sensible à un et un seul défaut (i.e.,  $f \in \mathfrak{R}^1, \bar{f} \in \mathfrak{R}^2$ ).

D'après l'algorithme d'aide à la détection et à l'isolation de défauts (schéma (b)), nous avons pu mettre en oeuvre l'ensemble des observateurs mentionnés dans la table 3.2.2 (en remplaçant  $f$  par 3). Nous présentons le développement du 3<sup>ème</sup> observateur.

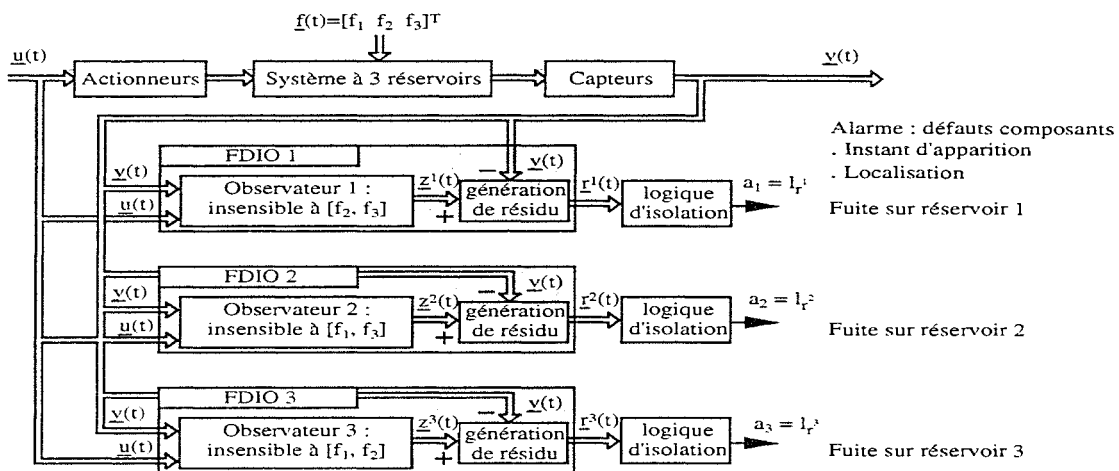


Fig 3.2.7 : Détection et isolation des défauts de composants, schéma (b)

#### Étude et mise en oeuvre de l'observateur 3 ("FDIO<sub>3</sub>")

Étape 1) Selon la table 3.2.2, nous considérons le modèle de défaillance suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + F_{d_i} f_i + E_d^i \underline{d}^i \\ \underline{y} = I_3 \underline{x} \end{cases} \quad \text{pour } i=3 \quad (3.2.61)$$

où  $\underline{d}^i \in \mathfrak{R}^{3-1}$  est composé de tous les défauts  $f_j$ , avec  $j \neq i$ , ainsi :

$$f = \{3\}, \bar{f} = \{1, 2\}, F_{d_i} f_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_3 \text{ et } E_d^i \underline{d}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Étape 2) L'observateur 3 doit générer un résidu tendant asymptotiquement vers zéro en l'absence du défaut appartenant à  $f$  (i.e.  $f_3 = 0$ ). Il faut donc vérifier les conditions d'existence c.3.5.a et c.3.5.b suivantes :

$$\text{c.3.5.a} \quad \text{rang}[CE_d^i] = \text{rang}[E_d^i] = p = 2 \leq m \quad \text{OK}$$

$$\text{c.3.5.b} \quad \text{rang}\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d^i \\ C & 0 \end{bmatrix} = m + p = 5, (\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad \text{OK}$$

Étape 3) La matrice  $CE_d^i$  est de rang plein colonnes. Le système ci-dessous associé au modèle de défaillance (3.2.61) est indépendant des entrées inconnues  $\underline{d}^i$  :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = T^i A \underline{x} + T^i B \underline{u} + T^i F_{d_i} f_i + E_d^i (CE_d^i)^+ \dot{\underline{y}} + \overbrace{T^i E_d^i \underline{d}^i}^{=0} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} \\ \underline{y} = I_3 \underline{x} \end{cases} \quad (3.2.62)$$

$$\text{avec :} \quad T^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } i=3 \quad (3.2.63)$$

Nous pouvons donc proposer comme estimateur de  $\underline{x}$ , le vecteur  $\hat{\underline{x}}$  défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{x}}} &= T^i A \hat{\underline{x}} + T^i B \underline{u} + E_d^i (CE_d^i)^+ \dot{\underline{y}} + K^i (\underline{y} - C \hat{\underline{x}}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} + K^i (\underline{y} - I_3 \hat{\underline{x}}) \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

où  $K^i$  est le gain de l'observateur pour  $i=3$

A l'aide du changement de variable suivant :

$$\underline{z}^i = \hat{\underline{x}}^i - N^i \underline{y} \quad \text{pour } i=3 \quad (3.2.65)$$

$$N^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.66)$$

nous obtenons l'expression générale d'un observateur à entrées inconnues (Darouach et al 1994) et le générateur de résidus suivants :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}^i = F^i \underline{z}^i + G^i \underline{y} + J^i \underline{u} \\ \hat{\underline{x}}^i = \underline{z}^i + N^i \underline{y} \\ \underline{r}^i = (I_3 - CN^i) \underline{y} - C \underline{z}^i \end{cases} \quad \text{pour } i=3 \quad (3.2.67)$$

où les matrices  $K^i$ ,  $F^i$ ,  $G^i$  et  $J^i$  sont telles que :

$$\left. \begin{array}{l} F^i = T^i A - K^i C \text{ stable} \\ G^i = K^i + F^i N^i \\ J^i = T^i B \end{array} \right\} \text{ pour } i=3 \quad (3.2.68)$$

La condition c.3.5.b est vérifiée, le triplet  $(C, A, E_d^i)$  ne présente pas de compensation de zéro (système observable). Nous pouvons alors choisir un gain  $K^3$  tel que les pôles de l'observateur ("FDIO<sub>3</sub>") sont tous fixés à  $\{-4\}$ , soit :

$$K^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, F^3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, G^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } J^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.69)$$

Ainsi, pour ce nouvel observateur (3.2.67), l'erreur d'estimation  $e_3 = \underline{x} - \hat{\underline{x}}^3$  et le résidu  $r^3$  sont décrits par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} e_3 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_3 \\ r_3 = I_3 e_3 \end{array} \right. \quad (3.2.70)$$

Étape 4) La condition c3.2.2b du théorème 3.2.2 est vérifiée.

Le résidu  $r^3$  présente un transfert dynamique non nul avec le défaut  $f_3$  tout en garantissant un transfert nul avec les défauts  $f_1$  et  $f_2$ . ◇

La figure suivante présente l'ensemble des résultats de simulation.

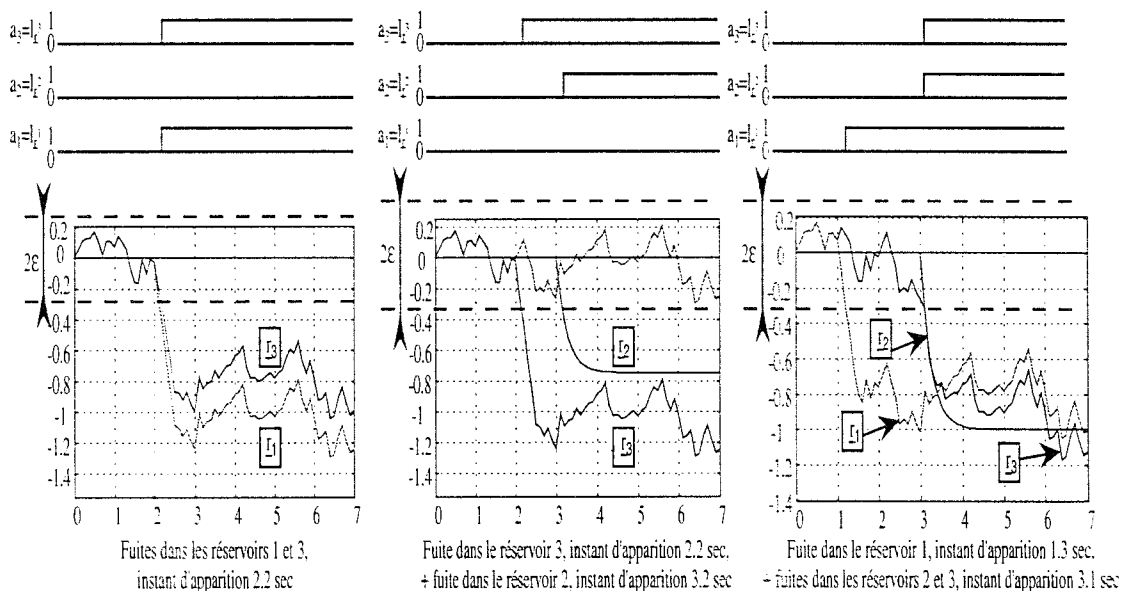


Fig 3.2.8 : Simulations de différents défauts de composants (fuites réservoirs 1, 2 et 3).

## Conclusion

Le comportement des différents résidus  $r^i$  (pour  $i = 1, 2, \text{ et } 3$ ) correspond aux propriétés établies dans la table 3.2.2. Nous avons associé à chaque observateur un résidu sensible à un et un seul défaut de composant, ainsi s'il y a défaut, le résidu non nul désigne ce défaut. De plus s'il y a occurrence des défauts  $f_1$  et  $f_3$  au même instant (i.e. fuite dans le réservoir 1 et 3) alors seules les logiques de décisions  $a_1$  et  $a_3$  prennent la valeur vraie. Nous sommes donc en mesure de détecter et d'isoler des défauts simultanés.

---

### 3.2.4 CONCLUSION

Nous avons développé des procédures de génération de résidus pour la détection et l'isolation de défauts d'actionneurs, de composants et de capteurs. L'introduction de l'approche par normes minimales a permis d'unifier les systèmes à entrées inconnues et sans entrées inconnues lors de l'étape d'estimation. En particulier, elle a permis de transformer le problème de la génération de résidus en présence d'entrées inconnues en un problème simple de génération de résidus sans entrées inconnues. L'originalité des nouveaux algorithmes présentés réside donc dans la recherche de systèmes indépendants des entrées inconnues et de certains défauts spécifiés. Nous avons étudié l'existence et la stabilité des générateurs de résidus, ces derniers nécessitent cependant l'estimation complète du vecteur d'état  $\underline{x}$ . Afin de contourner cette condition, nous présentons une approche nouvelle de génération de résidu basée sur les résultats de la partie 2.3.4B.

---

### 3.3 APPROCHE INTÉGRÉE DE DIAGNOSTIC : PAR DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES ( $E_m = 0$ )

Dans toute stratégie d'accommodation de défauts en ligne, pour atteindre des performances de commande qui soient réalistes, il est nécessaire de tenir compte simultanément des effets du correcteur et du bloc FDI. En effet, un schéma FDI conçu pour un système en boucle ouverte peut ne pas fournir les performances de détection désirées lorsque ce même système est commandé en boucle fermée. De même, si l'appareil de détection a été conçu à partir du modèle d'un système en boucle fermée, il est possible que la prise de décision en résultant ne soit pas satisfaisante en raison des limitations imposées par le correcteur (Patton 1997). Aussi, une solution raisonnable est de concevoir dans un même temps les structures du correcteur et de l'appareil de détection comme le proposent Nett et al 1988. La méthode exige la présence d'un bloc de détection et de localisation permettant d'établir un diagnostic du système et de fournir les estimations d'état nécessaires à l'estimation du ou des défauts localisés, en vue d'élaborer une commande additive capable de compenser l'effet de ce(s) défaut(s).

#### Introduction

Parmi les méthodes d'accommodation proposées dans la littérature, nous pouvons citer sans être exhaustif : lois de commandes calculées au préalable (Moerder et al 1989), commandes par linéarisation de la rétroaction (Meyer et Hunt 1984; Smith et Meyer 1987; Lane et Stengel 1988; Ochi et Kanai 1991), approches par poursuites de modèles (Morse et Ossman 1990), méthodes pseudo-inverses (Gao et Antsaklis 1991), commande adaptative (Ahmed-Zaid et al 1991), etc. Mais de toutes ces approches, la plus simple, permettant de rendre une loi de commande tolérante aux défauts, consiste à établir une table de données regroupant un ensemble de matrices de rétroactions calculées au préalable pour assurer des performances optimales en présence de certains défauts (Moerder, et al 1989). Cette méthode exige la présence d'un bloc de détection et de localisation permettant d'établir un diagnostic du système et de fournir les estimations d'état nécessaires au bon choix de la matrice de rétroaction.

Bien que cette méthode procure des résultats très satisfaisants lorsque le défaut est correctement identifié et qu'une matrice de rétroaction lui est associée dans la table des données, son principal inconvénient réside dans ses hypothèses d'utilisation trop restrictives. En effet, en présence de défauts non étudiés au préalable, il devient nécessaire de faire appel à une autre approche pour pallier le fait que la table de données ne peut contenir tous les types de défauts. L'idée consiste alors non pas à répertorier l'ensemble des défauts mais à utiliser un modèle de défaillance dont la structure ne



comporte aucune information sur les distributions des défauts et leurs types, (Ge et Fang 1988; Tsui 1994, 1996; Koenig et al 1996a) :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + I_n \underline{f} \tag{3.3.1a}$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \tag{3.3.1b}$$

où  $\underline{f} \in \mathfrak{R}^n$  représente le vecteur d'influence des défauts agissant directement sur l'état, ce dernier étant comme précédemment non complètement mesurable.

Aucune connaissance a priori sur le type des défauts (composants, actionneurs, perturbations) est nécessaire. Alors que précédemment, à chaque coordonnée du vecteur  $\underline{f}$  correspondait non seulement le type du défaut mais également sa distribution.

### 3.3.1 Formulation du problème

Il s'agit d'établir une procédure de diagnostic capable de détecter, de localiser, et d'estimer les éléments du vecteur  $\underline{f}$  non nuls, en vue d'élaborer une commande additive capable de compenser l'effet de ces défauts. Mais, avant de développer l'ensemble de la chaîne, nous présentons succinctement les deux phases principales de l'approche, que sont la détection, l'isolation et la correction.

#### - Schéma (c)

Nous désirons dans un premier temps établir une procédure de détection et d'isolation de défauts. Or, pour localiser simplement les éléments non nuls du vecteur  $\underline{f}$ , il suffit de générer suffisamment de résidus, de spécifier pour chaque résidu un ensemble d'éléments (i.e.  $\in f$ ) l'influençant et de préciser l'ensemble des éléments restant (i.e.  $\in \bar{f}$ ) ne l'influençant pas. Cependant, l'ensemble des  $p$  éléments appartenant à  $\bar{f}$  (considérés comme des entrées inconnues) ne doit pas excéder le nombre de mesures (=m). Pour détecter et localiser un maximum d'éléments non nuls, il convient alors de générer un ensemble de  $\binom{n}{m-1}$  observateurs où chaque observateur génère un résidu (de signature différente) insensible à  $p=m-1$  éléments du vecteur  $\underline{f}$ . Ainsi, nous pouvons détecter et localiser simultanément un maximum de  $p$  éléments non nuls (Ge et Fang 1988).

Exemple : Si  $n=4$ ,  $m=3$ , alors il faut générer un ensemble de  $\binom{4}{3-1} = 6$  résidus  $r^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), chacun étant insensible à 2 (=m-1) éléments du vecteur  $\underline{f}$ . La table suivante résume les propriétés que doivent vérifier ces résidus.

Si	FDIO <sub>1=r<sup>1</sup></sub>	FDIO <sub>2=r<sup>2</sup></sub>	FDIO <sub>3=r<sup>3</sup></sub>	FDIO <sub>4=r<sup>4</sup></sub>	FDIO <sub>5=r<sup>5</sup></sub>	FDIO <sub>6=r<sup>6</sup></sub>	Logique de décisions
$f_1(t) \neq 0$	0	0	0	1	1	1	$a_1 = l_{r^4} \cap l_{r^5} \cap l_{r^6}$
$f_2(t) \neq 0$	0	1	1	0	0	1	$a_2 = l_{r^2} \cap l_{r^3} \cap l_{r^6}$
$f_3(t) \neq 0$	1	0	1	0	1	0	$a_3 = l_{r^1} \cap l_{r^3} \cap l_{r^5}$
$f_4(t) \neq 0$	1	1	0	1	0	0	$a_4 = l_{r^1} \cap l_{r^2} \cap l_{r^4}$

Table 3.3.1 : Isolation de défauts pour  $n=4$ ,  $m=3$ , schéma (c)

Dans cette table, le "0" à la  $k^{\text{ème}}$  colonne et  $j^{\text{ème}}$  ligne, signifie que l'observateur  $k$  ( $\text{FDIO}_k$ ) présente un résidu insensible aux dérives éventuelles de l'élément  $f_i$ . Par conséquent, pour respecter la condition d'insensibilité, chaque colonne de la table doit présenter deux zéros.

Si  $f_2 \neq 0$  et  $f_3 \neq 0$ , seul le résidu  $r^4$  reste nul (i.e.  $l_{r^4} = 0, l_{r^1} = l_{r^2} = l_{r^3} = l_{r^5} = l_{r^6} = 1$ ) et seules les logiques de décisions  $a_2$  et  $a_3$  prennent la valeur vraie. Nous avons détecté et localisé la dérive des éléments  $f_2$  et  $f_3$ . Si nous supposons uniquement  $f_2 \neq 0$  alors seuls les résidus  $r^1, r^4$  et  $r^5$  restent nuls (i.e.  $l_{r^1} = l_{r^4} = l_{r^5} = 0, l_{r^2} = l_{r^3} = l_{r^6} = 1$ ) et seule la logique de décision  $a_2$  prend la valeur vraie. Nous avons détecté et localisé la dérive de l'élément  $f_2$ .

Finalement, s'il n'y a pas, plus de  $m$  éléments non nuls au même instant dans  $\underline{f}$ , alors le schéma (c), peut systématiquement détecter et localiser ces éléments. Il faut maintenant établir une procédure de mise en oeuvre de chacun des observateurs énoncés dans la table.

### - Détection et isolation

L'apport de nos travaux se situe dans la recherche de (sous) systèmes indépendants des entrées inconnues. Nous avons vu précédemment qu'il est toujours possible de se ramener à un **système** de degré  $n$ , sans entrées inconnues et d'estimer l'état  $\underline{x}$  de ce système, afin de générer un résidu porteur uniquement des défauts à détecter. Nous étendons ces résultats en recherchant d'après l'approche par décomposition en valeurs singulières (partie 2.3.4B), le **sous-système** de degré inférieur ou égal à  $n-p$  et indépendant aux  $m-1$  défauts appartenant à  $\underline{f}$ , ainsi **seul l'estimation d'état du sous-système suffit à générer le résidu ( $r$ )**.

L'ensemble du bloc FDI associé au système (3.3.1) pour  $n=4$  et  $m=3$  peut être schématisé de la façon suivante :

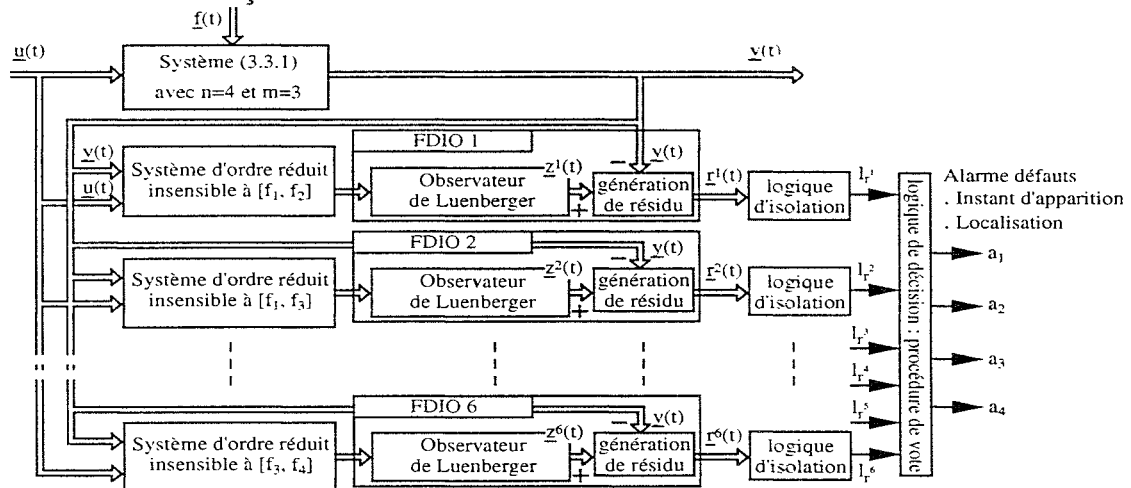


Fig 3.3.1 : Structure du bloc FDI, schéma (c)

Après avoir présenté le bloc FDI, nous nous intéressons à l'élaboration de la loi de commande permettant de corriger les défauts venant d'être détectés et localisés.

### - Correction

Si nous supposons la présence de  $q$  ( $\leq m-1$ ) éléments non nuls dans  $\underline{f}$  alors, parmi l'ensemble des  $\binom{n}{m-1}$  observateurs, il existe par définition, au-moins un observateur insensible à ces éléments (voir table d'isolation correspondante). Il s'agit, d'après la sortie de cet observateur (établie par le circuit logique), de reconstruire l'état complet du système (3.3.1) et d'estimer les éléments du vecteur  $\underline{f}$  non nul.

En définitive, selon la représentation schématique donnée par Massoumnia (1986) et nos résultats développés précédemment, le principe général de notre approche peut être résumé par la figure 3.3.2. Nous noterons cependant qu'en raison des temps de détection, du besoin de connaître  $\underline{\hat{y}}$  (ou  $\underline{y}_{k+1}$  cas discret) et des temps de calculs, qu'il est préférable que les signatures temporelles des défauts ne varient pas continuellement et brusquement. C'est sous ses hypothèses que l'ensemble de la chaîne (detection, isolation et correction) est réellement réalisable.

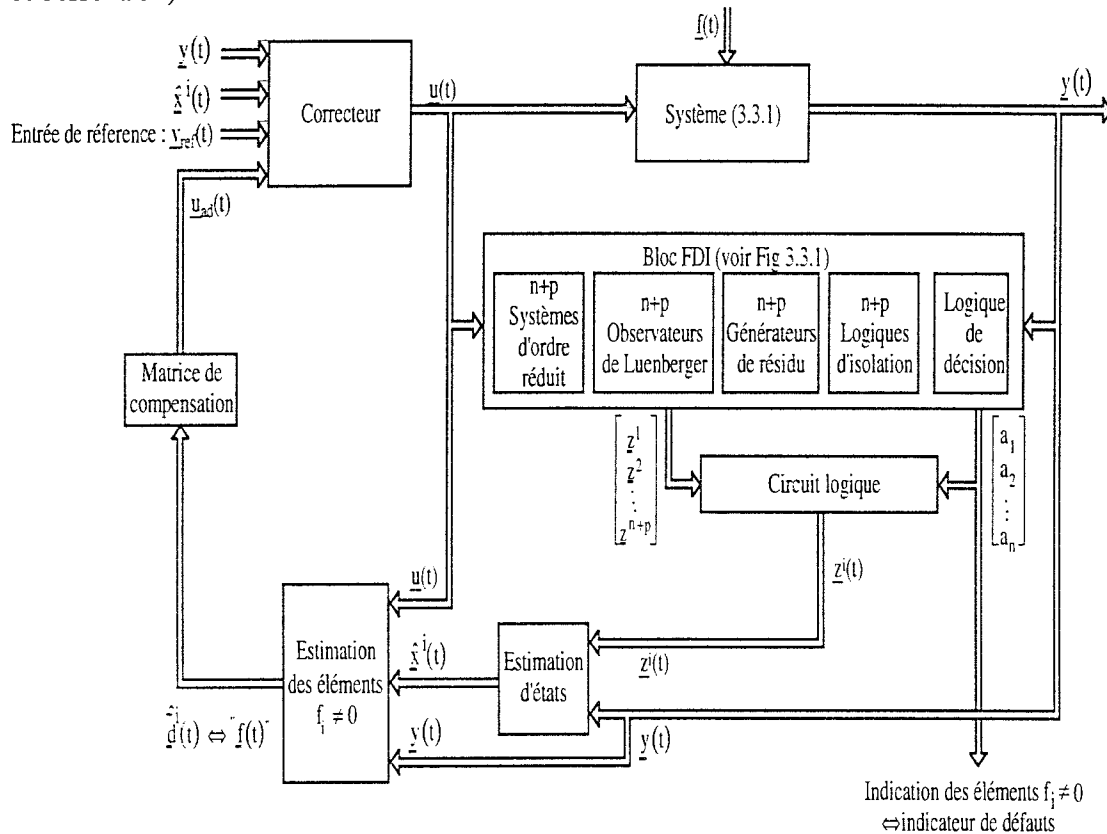


Fig 3.3.2 : Architecture générale d'une approche intégrée de diagnostic associant les phases de détection, d'isolation et de correction de défauts.

Après avoir schématisé l'ensemble de l'approche, nous présentons la procédure de détection, d'isolation et de correction (Koenig et al 1997c).

### 3.3.2 Algorithme de détection, d'isolation et de correction de défauts

L'approche par décomposition en valeurs singulières donne d'excellents résultats dans la recherche de sous-systèmes indépendants des entrées inconnues. A partir des résultats obtenus dans la partie 2.3.4B, nous pouvons désormais, développer une approche intégrée de diagnostic.

#### Début de l'algorithme.

Pour  $i=1, 2, \dots, n+p$  faire,

**Étape 1 :** Le résidu  $\underline{r}^i$  généré par l'observateur (i) doit être insensible aux  $p$  éléments  $f_{i_t}$ , ( $i_t \in \bar{f} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ ), tout en restant sensible aux  $n-p$  éléments restant  $f_{i_{k \neq t}}$ , ( $i_k \in f = \{i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_n\}$ ).

Nous spécifions alors les  $p$  ( $=m-1$ ) éléments  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}$  du vecteur des entrées inconnues  $\underline{d}$  (i.e.  $\in \bar{f}$ ) et les  $n-p$  éléments restants  $f_{i_{p+1}}, f_{i_{p+2}}, \dots, f_{i_n}$  du vecteur  $\underline{f}$  (i.e.  $\in f$ ). Le modèle de défaillance (3.3.1) devient :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d^i \underline{f}^i + E_d^i \underline{d}^i \quad (3.3.2a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.2b)$$

où  $E_d^i$  représente la matrice de distribution des entrées inconnues  $\underline{d}^i = [f_{i_1} \ f_{i_2} \ \dots \ f_{i_p}]^T \in \mathfrak{R}^p$  et  $F_d^i$  la matrice de distribution des défauts à détecter  $\underline{f}^i = [f_{i_{p+1}} \ f_{i_{p+2}} \ \dots \ f_{i_n}]^T \in \mathfrak{R}^{n-p}$ .

Les matrices  $E_d^i$  et  $F_d^i$  sont données par :

$$E_d^i = [L_{i_1} \ L_{i_2} \ \dots \ L_{i_p}] \quad (3.3.3)$$

$$F_d^i = [L_{i_{p+1}} \ L_{i_{p+2}} \ \dots \ L_{i_n}] \quad (3.3.4)$$

où les vecteurs  $L_{i_j}$ , pour  $j$  variant de 1 à  $n$ , représentent la  $(i_j)^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $I_n$ .

Ce nouveau model (3.3.2) doit vérifier les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  (partie 2.3.4B)

$H_1$  :  $m > p$  (vraie par construction)

$H_2$  :  $\text{rang}(C) = m$  (toutes les mesures sont linéairement indépendantes)

$H_3$  :  $\text{rang}\{E_d^i\} = p$  (vraie par construction)

ainsi que l'indépendance des défauts des entrées inconnues.

$H_4$  :  $\text{rang}\{E_d^i \ F_d^i\} = n$  (vraie par construction)

**Étape 2 :** Le résidu  $\underline{r}^i$  doit être insensible aux  $p$  éléments modélisés par le vecteur des entrées inconnues  $\underline{d}^i$ . Il faut alors rechercher le sous-système indépendant des entrées inconnues.

La matrice  $E_d^i$  est de rang plein colonnes, il existe donc une matrice régulière  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^i)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$PE_d^i = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^i)^+ \end{bmatrix} E_d^i = \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

avec :

$$P_1^T = \text{Ker} \left( (E_d^i)^T \right) \in \mathfrak{R}^{n \times (n-p)} \quad (3.3.6)$$

$$(E_d^i)^+ = \left( (E_d^i)^T E_d^i \right)^{-1} (E_d^i)^T \quad (3.3.7)$$

$$P_1 \times P_1^T = I_{n-p} \quad (3.3.8)$$

En prémultipliant l'équation (3.3.2a) par la matrice  $P$ , nous transformons le système (3.3.2) en la forme équivalente suivante (partie 2.3.4B) :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \hat{A}_{11} \hat{\underline{x}}_1 + \hat{A}_{12} \hat{\underline{x}}_2 + \hat{B}_1 \underline{u} + P_1 F_d^i \underline{f}^i \quad (3.3.9a)$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_2 = \hat{A}_{21} \hat{\underline{x}}_1 + \hat{A}_{22} \hat{\underline{x}}_2 + \hat{B}_2 \underline{u} + (E_d^i)^+ F_d^i \underline{f}^i + \underline{d}^i \quad (3.3.9b)$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1 \hat{\underline{x}}_1 + \hat{C}_2 \hat{\underline{x}}_2 \quad (3.3.9c)$$

avec :

$$\hat{\underline{x}} = P \underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p} \quad (3.3.10)$$

$$\hat{B} = PB = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^i)^+ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} P_1^T & E_d^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

$$\hat{C} = CP^{-1} = C \begin{bmatrix} P_1^T & E_d^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

Nous constatons, d'après (2.3.9b), que les entrées inconnues  $\underline{d}^i$  agissent directement sur l'état ( $\hat{\underline{x}}_2$ ). Nous pouvons donc considérer ( $\hat{\underline{x}}_2$ ) comme le nouveau vecteur des entrées inconnues. Nous avons alors le sous-système suivant :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \hat{A}_{11} \hat{\underline{x}}_1 + \hat{A}_{12} \hat{\underline{x}}_2 + \hat{B}_1 \underline{u} + P_1 F_d^i \underline{f}^i \quad (3.3.14a)$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1 \hat{\underline{x}}_1 + \hat{C}_2 \hat{\underline{x}}_2 \quad (3.3.14b)$$

dont la structure est identique au système (2.1.1).

**Étape 3 :** Trois cas,

$$(a) \quad \text{rang}(\widehat{C}_2) = p$$

$$(b) \quad 0 < \text{rang}(\widehat{C}_2) < p$$

$$(c) \quad \widehat{C}_2 = 0_{m \times p}$$

Comme le présentait la partie (2.3), il nous est possible quelle que soit la déficience du rang de la matrice  $E_m = \widehat{C}_2 = CE_d^i$  de trouver le sous-système indépendant des entrées inconnues.

**Étape 4 :** Génération de résidus

*cas (a) :* La matrice  $\widehat{C}_2 = CE_d^i$  est de rang plein colonnes, nous savons trouver une seconde matrice régulière  $P_2$  telle que :

$$P_2 \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ \widehat{C}_2^+ \end{bmatrix} \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (3.3.15)$$

$$\text{avec : } P_3^T = \ker(\widehat{C}_2^T) \in \mathcal{R}^{m \times (m-p)} \quad (3.3.16)$$

$$\widehat{C}_2^+ = (\widehat{C}_2^T \widehat{C}_2)^{-1} \widehat{C}_2^T \quad (3.3.17)$$

$$P_3 \times P_3^T = I_{m-p} \quad (3.3.18)$$

Prémultiplions l'équation de mesure (3.3.14b) par la matrice  $P_2$ ,

$$\widehat{y} = P_3 \underline{y} = P_3 \widehat{C}_1 \widehat{x}_1 \quad (3.3.19)$$

$$\widehat{x}_2 = \widehat{C}_2^+ (\underline{y} - \widehat{C}_1 \widehat{x}_1) \quad (3.3.20)$$

nous obtenons par substitution de (3.3.20) dans (3.3.14a), le sous-système :

$$\dot{\widehat{x}}_1 = \widehat{A} \widehat{x}_1 + \widehat{A}_{12} \widehat{C}_2^+ \underline{y} + \widehat{B}_1 \underline{u} + P_1 F_d^i \underline{f}^i \quad (3.3.21a)$$

$$\widehat{y} = \widehat{C} \widehat{x}_1 \quad (3.3.21b)$$

$$\text{avec : } \widehat{A} = (\widehat{A}_{11} - \widehat{A}_{12} \widehat{C}_2^+ \widehat{C}_1) \quad (3.3.22)$$

$$\widehat{y} = P_3 \underline{y} \quad (3.3.23)$$

$$\widehat{C} = P_3 \widehat{C}_1 \quad (3.3.24)$$

Ainsi, pour ce nouveau système (3.3.21), la dynamique de l'état (3.3.21a) est indépendante des entrées inconnues. Nous avons déterminé le sous-système indépendant des entrées inconnues  $\underline{d}^i$ .

Nous pouvons alors proposer comme estimateurs de  $\underline{\hat{x}}_1$ ,  $\underline{\hat{x}}_2$  et  $\underline{\hat{x}}$ , les vecteurs  $\underline{z}^i$ ,  $\underline{\hat{x}}_2^i$  et  $\underline{\hat{x}}^i$  définis par :

$$\begin{aligned}\underline{z}^i &= \hat{\underline{A}}\underline{z}^i + \hat{\underline{A}}_{12}\hat{\underline{C}}_2^+ \underline{y} + \hat{\underline{B}}_1 \underline{u} + \mathbf{K}(\hat{\underline{y}} - \hat{\underline{C}}\underline{z}^i) \\ &= (\hat{\underline{A}} - \mathbf{K}\hat{\underline{C}})\underline{z}^i + [\hat{\underline{A}}_{12}\hat{\underline{C}}_2^+ + \mathbf{K}\hat{\underline{P}}_3] \underline{y} + \hat{\underline{B}}_1 \underline{u}\end{aligned}\quad (3.3.25)$$

$$\underline{\hat{x}}_2^i = \hat{\underline{C}}_2^+ (\underline{y} - \hat{\underline{C}}_1 \underline{z}^i) \quad (3.3.26)$$

$$\underline{\hat{x}}^i = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{z}^i \\ \underline{\hat{x}}_2^i \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{P}}_1^T & \mathbf{E}_d^i \end{bmatrix} \quad (3.3.27)$$

où  $\mathbf{K}$  représente le gain de l'observateur (i) déterminé pour que l'erreur d'estimation  $\underline{\hat{e}}_1^i = \underline{\hat{x}}_1 - \underline{z}^i$  converge asymptotiquement vers zéro en l'absence des défauts appartenant à  $f$  (i.e.  $\underline{f}^i = 0$ ).

Analyse de convergence : Cette erreur d'estimation (d'après (3.3.21) et (3.3.25)) obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\underline{\hat{e}}}_1^i = (\hat{\underline{A}} - \mathbf{K}\hat{\underline{C}})\underline{\hat{e}}_1^i + \hat{\underline{P}}_1 \mathbf{F}_d^i \underline{f}^i \quad (3.3.28)$$

Si la paire  $(\hat{\underline{A}}, \hat{\underline{C}})$  est détectable (respectivement observable), nous pouvons par un choix judicieux du gain  $\mathbf{K}$  stabiliser la matrice  $\mathbf{F} = (\hat{\underline{A}} - \mathbf{K}\hat{\underline{C}})$  par les méthodes standard de placement de pôles (tous les pôles de l'observateur (3.3.25) peuvent être arbitrairement placés). Ainsi, l'erreur d'estimation  $\underline{\hat{e}}_1^i$  tend asymptotiquement vers zéro en l'absence des défauts appartenant à  $f$ .

**L'erreur d'observation** (résidu) tenant compte uniquement de l'écart entre la mesure  $\underline{\hat{y}} = \hat{\underline{P}}_3 \underline{y}$  et la mesure attendue  $\underline{\hat{y}} = \hat{\underline{C}}\underline{z}^i$  issue de l'estimateur (3.3.25),

$$\underline{r}^i = \underline{\hat{y}} - \hat{\underline{C}}\underline{z}^i = \hat{\underline{C}}\underline{\hat{e}}_1^i \quad (3.3.29)$$

est donc décrite simplement par le vecteur de défaut  $\underline{f}^i$ .

D'autre part, sachant que  $\underline{\hat{y}} = \hat{\underline{P}}_3 \underline{y}$ , l'observateur (3.3.25) (d'après (3.3.26) et (3.3.27)) peut se réécrire sous la forme simple de l'observateur d'ordre réduit de Luenberger, pour le système (3.3.2) :

$$\dot{\underline{z}}^i = \mathbf{F}\underline{z}^i + \mathbf{G}\underline{y} + \mathbf{J}\underline{u} \quad (3.3.30a)$$

$$\underline{\hat{x}}^i = \mathbf{M}\underline{z}^i + \mathbf{N}\underline{y} \quad (3.3.30b)$$

$$\underline{r}^i = \mathcal{L}_1 \underline{y} - \mathcal{L}_2 \underline{z}^i \quad (3.3.30c)$$

avec :

$$F = (\hat{A} - K\hat{C}) \quad (3.3.31)$$

$$G = (\hat{A}_{12}\hat{C}_2^+ + KP_3) \quad (3.3.32)$$

$$J = \hat{B}_1 = P_1B \quad (3.3.33)$$

$$M = (P_1^T - E_d^i\hat{C}_2^+\hat{C}_1) \quad (3.3.34)$$

$$N = (E_d^i\hat{C}_2^+) \quad (3.3.35)$$

$$\mathcal{L}_1 = P_3 \quad (3.3.36)$$

$$\mathcal{L}_2 = \hat{C} \quad (3.3.37)$$

**Remarque :** Notre procédure de génération de résidus ne nécessite en rien l'estimation complète du vecteur d'état  $\underline{x}$ . Nous donnons ici cette information supplémentaire car elle est utile dans le cadre de la reconfiguration (Fig 3.3.2).

#### Analyse de la convergence de l'erreur d'estimation de l'état $\underline{x}$ .

Sachant d'après (3.3.30b) et (3.3.2b) que  $\underline{e}^i = \hat{\underline{x}}^i - \underline{x} = M(\hat{\underline{e}}_1^i) + (MP_1 + NC - I_n)\underline{x}$ , nous avons  $\underline{e}^i(t) \rightarrow 0$  en l'absence de défauts appartenant à  $f$ , si et seulement si  $(MP_1 + NC - I_n) = 0$  et  $\hat{\underline{e}}_1^i(t) \rightarrow 0$ .

Or,  $\hat{\underline{e}}_1^i(t)$  tend par construction vers zéro en l'absence de défauts appartenant à  $f$  et d'après les relations (3.3.13), (3.3.34) et (3.3.35), l'égalité  $(MP_1 + NC - I_n) = 0$  est vérifiée. Pour démontrer cette dernière égalité, il suffit d'effectuer les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned} & (MP_1 + NC - I_n) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left( (P_1^T - E_d^i\hat{C}_2^+\hat{C}_1)P_1 + (E_d^i\hat{C}_2^+)C - I_n \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left( (I_n - E_d^i\hat{C}_2^+C)P_1^T P_1 + (E_d^i\hat{C}_2^+)C - I_n \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left( (I_n - E_d^i\hat{C}_2^+C) \left( I_n - E_d^i(E_d^i)^+ \right) + (E_d^i\hat{C}_2^+)C - I_n \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left( -E_d^i(E_d^i)^+ + E_d^i(CE_d^i)^+(CE_d^i)(E_d^i)^+ \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Où : } P_1^T P_1 = I_n - E_d^i(E_d^i)^+ \text{ puisque } PP^{-1} = P^{-1}P = \begin{bmatrix} P_1 & E_d^i \\ & (E_d^i)^+ \end{bmatrix} = I_n$$

Finalement, grâce au système (3.3.28), (3.3.29) et au théorème 3.2.1, l'observateur de Luenberger d'ordre réduit (3.3.30) doit simplement vérifier les conditions d'existence suivantes.



**Théorème 3.3.1 :** Pour le système (3.3.2), l'observateur (3.3.30) chargé de la détection des défauts appartenant à  $f$  ("FDIO<sub>i</sub>") existe, indépendamment des défauts appartenant à  $\bar{f}$ , si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- c3.3.1a) La paire  $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{C}})$  est détectable et  $P_1 L_{k \neq j} = 0$ , pour tout  $k$  appartenant à  $\bar{f}$ ,  
 (la condition de détectabilité de la paire  $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{C}})$  est équivalente à c.2.1.b, avec  $E_m = 0$ , démonstration annexe B, et la condition  $P_1 L_{k \neq j} = 0$  est vérifiée par construction, voir les relations (3.3.3) et (3.3.5))
- c3.3.1b) L'espace commandable et observable du triplet  $(\hat{\hat{C}}, F, P_1 L_j)$  est non vide pour tout  $j$  appartenant à  $f$  (les défauts  $f_j$  sont détectables). ■

**Remarque 3.3.1 :** En l'absence des défauts appartenant à  $f$ , l'estimation d'état  $\hat{x}^i$  peut également être déduite directement par la relation suivante (O'Reilly 1983) :

$$\hat{x}^i = \begin{bmatrix} C \\ T^i \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} y \\ z^i \end{bmatrix} \text{ si et seulement si } \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ T^i \end{bmatrix} = n \quad (3.3.38)$$

$$\text{où : } \lim_{t \rightarrow \infty} z^i(t) \rightarrow T^i \underline{x}(t), \text{ avec } T^i = P_1 \quad (3.3.39)$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} C \\ T^i \end{bmatrix}^+ = \left( \begin{bmatrix} C \\ T^i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ T^i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C \\ T^i \end{bmatrix}^T \quad (3.3.40)$$

Aller à l'étape 5.

$$\text{cas (b) : } \text{rang}(\hat{C}_2) = r$$

$0 < r < p$ , il existe une matrice orthogonale  $V$  et une matrice inversible  $Q$  telles que, (partie 2.3.2A)

$$\hat{C}_2 = V \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} Q \quad (3.3.41)$$

Substituons (3.3.41) dans (3.3.14b), le système (3.3.14) devient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{A}_{11} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}_{12_1} & \bar{\bar{A}}_{12_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_{2_1} \\ \bar{\bar{x}}_{2_2} \end{bmatrix} + \hat{B}_1 \underline{u} + P_1 F_d^i f^i \\ \begin{bmatrix} \bar{\bar{y}}_1 \\ \bar{\bar{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}_{1_1} \\ \bar{\bar{C}}_{1_2} \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_{2_1} \\ \bar{\bar{x}}_{2_2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.3.42)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \bar{\bar{A}}_1 \hat{x}_1 + \bar{\bar{A}}_{12_1} \bar{\bar{y}}_1 + \bar{\bar{A}}_{12_2} \bar{\bar{x}}_{2_2} + \hat{B}_1 \underline{u} + P_1 F_d^i f^i \\ \bar{\bar{y}}_1 = \bar{\bar{C}}_{1_1} \hat{x}_1 + \bar{\bar{x}}_{2_1} \\ \bar{\bar{y}}_2 = \bar{\bar{C}}_{1_2} \hat{x}_1 \end{cases} \quad (3.3.43)$$

Les matrices du système (3.3.43) sont données par les relations suivantes :

$$\bar{A}_{12} = \hat{A}_{12}Q^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12_1} & \bar{A}_{12_2} \end{bmatrix}, \quad \left( \bar{A}_{12_1} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times r} \quad \bar{A}_{12_2} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (p-r)} \right) \quad (3.3.44)$$

$$\bar{\underline{x}}_2 = Q\hat{\underline{x}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\underline{x}}_{2_1} \\ \bar{\underline{x}}_{2_2} \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\underline{x}}_{2_1} \in \mathfrak{R}^r \\ \bar{\underline{x}}_{2_2} \in \mathfrak{R}^{p-r} \end{array} \right) \quad (3.3.45)$$

$$\bar{\underline{y}} = V^T \underline{y} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{y}}_1 \\ \bar{\underline{y}}_2 \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\underline{y}}_1 \in \mathfrak{R}^r \\ \bar{\underline{y}}_2 \in \mathfrak{R}^{m-r} \end{array} \right) \quad (3.3.46)$$

$$\bar{C}_1 = V^T \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1_1} \\ \bar{C}_{1_2} \end{bmatrix}, \quad \left( \begin{array}{l} \bar{C}_{1_1} \in \mathfrak{R}^{r \times (n-p)} \\ \bar{C}_{1_2} \in \mathfrak{R}^{(m-r) \times (n-p)} \end{array} \right) \quad (3.3.47)$$

$$\bar{A}_1 = \left( \hat{A}_{11} - \bar{A}_{12_1} \bar{C}_{1_1} \right) \quad \left( \bar{A}_1 \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)} \right) \quad (3.3.48)$$

**En conclusion**, seules les mesures regroupées dans  $\bar{\underline{y}}_2$  sont disponibles pour reconstruire le vecteur d'état  $\hat{\underline{x}}_1$ . En effet, aucune information sur  $\hat{\underline{x}}_1$ , c'est à dire indépendante de  $\hat{\underline{x}}_2$ , ne peut être extraite des mesures regroupées dans  $\bar{\underline{y}}_1$ . Dans ces conditions, le système (3.3.43) devient :

$$\dot{\underline{x}} = \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{B}\underline{u} + \mathcal{F}_d^i \underline{f}^i + \mathcal{E}_d^i \underline{d}^i \quad (3.3.49a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.49b)$$

où :

$\mathcal{A} = \bar{A}_1$  et  $\underline{x} = \hat{\underline{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p}$  représentent respectivement la matrice d'évolution et le vecteur des variables d'état ( $\hat{\underline{x}}_1 = P_1 \underline{x}$ , linéairement dépendant de  $\underline{x}$ ).

$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12_1} & \bar{B}_1 \end{bmatrix}$  et  $\underline{u} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{y}}_1 \\ \underline{u} \end{bmatrix}$  représentent respectivement la matrice de "commande" et le nouveau vecteur des entrées connues.

$\mathcal{F}_d^i = P_1 F_d^i$  et  $\underline{f}^i$  représentent respectivement la matrice de distribution et le vecteur des défauts à détecter (i.e.  $\in f$ ).

$\mathcal{E}_d^i = \bar{A}_{12_2}$  et  $\underline{d}^i = \bar{\underline{x}}_{2_2} \in \mathfrak{R}^{p-r}$  représentent respectivement la matrice de distribution et le vecteur des entrées inconnues ( $\bar{\underline{x}}_{2_2}$  linéairement dépendant de  $\hat{\underline{x}}_2$  donc de  $\underline{d}^i$ ).

$C = \bar{C}_{1_2}$  et  $\underline{y} = \bar{\underline{y}}_2 \in \mathfrak{R}^{m-r}$  représentent respectivement la matrice de mesure et le vecteur des mesures ( $\bar{\underline{y}}_2$  linéairement dépendant de  $\underline{y}$ ).

Nous nous sommes ramenés à un sous-système fonction de l'ensemble des défauts à détecter  $\underline{f}^i$  mais présentant encore des entrées inconnues  $\underline{d}^i$ . Cependant, si nous comparons le modèle (3.3.49) au modèle de départ (3.3.2), le degré  $\underline{d}^i$  ( $= p - r$ ) est inférieur au degré  $\underline{d}^i$  ( $= p$ ) et dans l'hypothèse d'injectivité de la matrice  $\mathcal{E}_d^i$ , ce modèle (3.3.49) présente la même structure que le modèle de défaillance (3.3.2).

Par conséquent, il suffit de remplacer le système (3.3.2) par (3.3.49), de retourner à l'étape 2 et de répéter le même algorithme, jusqu'à obtenir le sous-système fonction uniquement des défauts à détecter  $\underline{f}^i$ .

**Remarque 3.3.2 :** L'hypothèse d'injectivité de la matrice  $\mathcal{E}_d^i$  n'engendre pas de perte de généralité. En effet, si cette propriété n'est pas vérifiée, il existe une transformation régulière qui comprime les colonnes de cette matrice. Pour garantir, comme avec le système (3.3.2), que la matrice ainsi obtenue est purement injective et non bijective, il faut vérifier que  $\dim \underline{x} > \dim \underline{d}^i$  (i.e.  $n > 2p - r$ ).

**Remarque 3.3.3 :** Malgré l'hypothèse  $\text{rang}(\mathcal{C}\mathcal{E}_d^i) \neq \text{rang}(\mathcal{E}_d^i)$ , nous savons pour le système (3.3.49) de degré  $d^\circ = n - p$ , trouver le sous-système indépendant des entrées inconnues, reconstruire l'état de ce sous-système et générer un résidu insensible aux défauts appartenant à  $\bar{f}$ . Cependant, l'observateur pour ce sous-système, peut être insensible à certains des défauts  $\underline{f}^i$ , car l'hypothèse  $H_4$  pour le système (3.3.49) (i.e.,  $\text{rang}[\mathcal{E}_d^i \quad \mathcal{F}_d^i] = (p - r) + (n - p) = n - r$ ) n'est pas vérifiée. En effet, comme  $r$  est strictement inférieur à  $p$  (cas b), la matrice  $[\mathcal{E}_d^i \quad \mathcal{F}_d^i] \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-r)}$  est forcément de rang inférieur à  $n - r$ . Ceci implique que certains défauts appartenant à  $f$  sont linéairement dépendants des nouvelles entrées inconnues  $\underline{d}^i$  **et/ou** que certains défauts sont linéairement dépendants entre eux. Nous illustrerons cette remarque par un exemple.

*cas (c) :*  $\hat{C}_2 = 0_{m \times p}$ ,

Le système (3.3.14) se réduit à la représentation suivante :

$$\underline{\dot{x}} = \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{B}\underline{u} + \mathcal{F}_d^i \underline{f}^i + \mathcal{E}_d^i \underline{d}^i \quad (3.3.50a)$$

$$\underline{y} = \mathcal{C}\underline{x} \quad (3.3.50b)$$

où,  $\mathcal{A} = \hat{A}_{11}$ ,  $\mathcal{B} = \hat{B}_1$ ,  $\mathcal{F}_d^i = P_1 F_d^i$ ,  $\mathcal{E}_d^i = \hat{A}_{12}$ ,  $\mathcal{C} = \hat{C}_1$ ,  $\underline{x} = \hat{\underline{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p}$  et  $\underline{d}^i = \hat{\underline{x}}_2 \in \mathfrak{R}^p$ .

Dans l'hypothèse d'injectivité de la matrice  $\mathcal{E}_d^i$ , ce modèle (3.3.50) présente la même structure que le modèle de défaillance (3.3.2). Il suffit alors de remplacer le système (3.3.2) par (3.3.50), de retourner à l'étape 2 et de répéter le même algorithme jusqu'à obtenir le sous-système fonction uniquement des défauts à détecter  $\underline{f}^i$ .

**Remarque 3.3.4 :** L'hypothèse d'injectivité de la matrice  $E_d^i$ , n'engendre pas de perte de généralité (voir remarque 3.3.2 avec  $\dim \underline{x} > \dim \underline{d}^i$  (i.e.  $n > 2p$ )).

**Remarque 3.3.5 :** Comme dans la remarque 3.3.3, l'égalité  $\text{rang}(CE_d^i) = \text{rang}(E_d^i)$ , n'est pas vérifiée pour le cas (c). Cependant, nous savons générer un résidu insensible aux défauts appartenant à  $\bar{f}$  (voir remarque 3.3.3 en remplaçant le système (3.3.49) par le système (3.3.50) et  $r$  par zéro).

### Étape 5 : Accommodation de défauts

Nous proposons à présent une stratégie de reconfiguration de la loi de commande qui s'inspire du schéma de la figure 3.3.2.

Le bloc FDI permet de détecter et isoler simultanément la présence de  $q$  ( $\leq p$ ) éléments non nuls dans  $\underline{f}$ . Par hypothèse, si nous supposons que ces défauts sont inclus dans le vecteur  $\underline{d}^i$ , nous pouvons considérer que  $\underline{f}^i$  est identiquement nul et par conséquent le système (3.3.2) devient :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + \bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i \quad (3.3.51a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.51b)$$

où  $\bar{E}_d^i \in \mathbb{R}^{n \times q}$  représente la matrice de distribution des défauts localisés par le bloc FDI et modélisés par le vecteur  $\bar{\underline{d}}^i = [f_{t_1} \ f_{t_2} \ \dots \ f_{t_q}]^T$ , avec  $t_j$  appartenant à  $\bar{f}$ .

**cas (a) :** Les  $q$  éléments non-nuls de  $\bar{\underline{d}}^i$  étant inclus dans  $\underline{d}^i$ , l'estimation d'état  $\hat{\underline{x}}^i$  par le  $i^{\text{ème}}$  observateur (voir 3.3.30) est par définition insensible à ces défauts (i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}^i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\underline{x}}^i(t) - \underline{x}(t)) = 0$ ). Nous pouvons alors (Hou et Müller 1992, Chang et al 1994) proposer comme estimateur de  $\bar{\underline{d}}^i$ , le vecteur  $\hat{\bar{\underline{d}}}^i$  suivant :

$$\hat{\bar{\underline{d}}}^i = (C\bar{E}_d^i)^+ (\underline{\dot{y}} - CA\hat{\underline{x}}^i - CB\underline{u}) \quad (3.3.52)$$

$$\text{avec : } (C\bar{E}_d^i)^+ = \left( (C\bar{E}_d^i)^T (C\bar{E}_d^i) \right)^{-1} (C\bar{E}_d^i)^T \quad (3.3.53)$$

Cette relation est toujours vraie pour le **cas (a)**. En effet, les colonnes de la matrice  $\bar{E}_d^i$  étant incluses dans  $E_d^i$ , la matrice  $(C\bar{E}_d^i)$  est de rang plein colonne, donc  $(C\bar{E}_d^i)^+ C\bar{E}_d^i = I_q$ .

Finalement, l'erreur d'estimation (i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\underline{d}}^i(t) - \hat{\bar{\underline{d}}}^i(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (C\bar{E}_d^i)^+ CA\underline{e}^i(t)$ ) tend vers zéro, nous avons estimé l'ensemble des  $q$  éléments non nuls de  $\underline{f}$ .

Il reste à **reconfigurer la loi de commande**, afin de compenser les effets des défauts, estimés précédemment. Nous suggérons de calculer une commande  $\underline{u}_{ad}$  (1) qui s'ajoutera à la commande nominale  $\underline{v}$  (2) du système. Cette commande est donnée par la relation suivante :

$$\underline{u} = \underline{v} + \underline{u}_{ad} \quad (3.3.54)$$

Le système est alors décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{v} + B\underline{u}_{ad} + \bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i \quad (3.3.55a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.55b)$$

(1) où la commande  $\underline{u}_{ad}$  est déterminée de telle sorte que le fonctionnement du système se rapproche le plus possible du système nominal :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{v} \quad (3.3.56a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.56b)$$

ce qui conduit à la relation suivante :

$$B\underline{u}_{ad} + \bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i = 0 \quad (3.3.57)$$

Nous proposons donc de résoudre le système linéaire  $\bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i = -B\underline{u}_{ad}$  où  $\hat{\underline{d}}^i (\rightarrow \bar{\underline{d}}^i)$ , représente le vecteur des défauts connu et  $\underline{u}_{ad}$  la commande additive à déterminer.

Un tel système peut avoir aucune, une ou une infinité de solutions exactes (annexe A). Si le système est incompatible, nous cherchons une solution  $\underline{u}_{ad}$  au sens des moindres carrés, c'est à dire telle que la norme euclidienne de l'écart  $\underline{ec} = \bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i + B\underline{u}_{ad}$  soit minimale.

La commande  $\underline{u}_{ad}$  minimisant le critère,

$$\Phi = \left\| \bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i + B\underline{u}_{ad} \right\|_2. \quad (3.3.58)$$

est alors donnée par la relation suivante :

$$\underline{u}_{ad} = -B^+ \bar{E}_d^i \hat{\underline{d}}^i \quad (3.3.59)$$

où,  $B^+$  représente la pseudo-inverse de la matrice  $B$  (i.e.  $BB^+B = B$ ) et  $\hat{\underline{d}}^i$  l'estimation des défauts à corriger.

Grâce aux propriétés des pseudo-inverses au sens de Moore-Penrose, nous pouvons affirmer que si

$$B = \bar{E}_d^i, \quad (\Rightarrow BB^+ \bar{E}_d^i = \bar{E}_d^i) \quad (3.3.60)$$

$$\text{ou } \text{rang}(B) = n, \quad (\Rightarrow BB^+ = I_n) \quad (3.3.61)$$

alors  $\underline{u}_{ad}$  (3.3.59) est une solution exacte du système  $\bar{E}_d^i \bar{\underline{d}}^i = -B\underline{u}_{ad}$  et par conséquent l'écart est nul donc également minimal.

(2) D'autre part, la commande  $\underline{y}$  est déterminée dans les deux cas suivants :

— Le système est stable, il suffit d'appliquer la commande de référence  $\underline{y}_{ref}$  :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{v}_{ref} + \underbrace{B\underline{u}_{ad} + \overline{E}_d^i \overline{d}^i}_{\text{minimal d'après (3.3.59)}} \quad (3.3.62a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.62b)$$

— Le système est instable, la commande  $\underline{y}$  est alors donnée par la relation suivante :

$$\underline{v} = \underline{v}_{ref} + K_x \hat{\underline{x}} \quad (3.3.63)$$

Par conséquent le système en boucle fermée est décrit par :

$$\dot{\underline{x}} = A_x \underline{x} + B\underline{v}_{ref} - BK_x \underbrace{\underline{e}^i(t)}_{=0 \text{ pour } t \rightarrow \infty} + \underbrace{B\underline{u}_{ad} + \overline{E}_d^i \overline{d}^i}_{\text{minimal d'après (3.3.59)}} \quad (3.3.64a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} \quad (3.3.64b)$$

où la matrice de gain  $K_x$  sera choisie telle que la matrice  $A_x = (A - BK_x)$  ait ses valeurs propres stables. Cependant pour résoudre ce problème, il est nécessaire que la paire  $(A, B)$  soit stabilisable.

**cas (b) ou (c) :** Malgré la possibilité de reconstruire l'état  $\hat{\underline{x}}_1$  du sous-système (3.3.14) indépendamment des entrées inconnues, nous ne pouvons reconstruire l'état complet  $\underline{x}$  et par conséquent les défauts  $\overline{d}^i$  (sauf cas particulier).

En effet, afin d'estimer l'état complet  $\underline{x}$  du système d'origine, il faut d'abord reconstruire les états  $\hat{\underline{x}}_1$  et  $\hat{\underline{x}}_2$  (voir relation 3.3.27). Or l'estimation de  $\hat{\underline{x}}_2$  n'existe pas car la relation (3.3.26) n'est pas vérifiée dans le cas (b) ou le cas (c). Pour que  $\hat{\underline{x}}_2 = \widehat{C}_2^+ (\underline{y} - \widehat{C}_1 \underline{z}^i)$  soit vérifiée, il faut que  $\widehat{C}_2 = CE_d^i$  soit de rang plein colonnes, or pour le cas (b)  $\text{rang}(\widehat{C}_2) < p$  et pour le cas (c)  $\widehat{C}_2 = 0$ .

Il convient alors de s'assurer que le circuit logique (fig 3.3.2) donne, parmi l'ensemble des observateurs insensibles aux  $q$  éléments non nuls de  $\underline{f}$ , l'observateur construit selon les hypothèses du cas (a). Par exemple, dans l'exemple présenté ( $n=4$  et  $m=3$ ), si nous considérons uniquement l'élément  $f_2(t) \neq 0$  alors, d'après la table d'isolation (3.3.1), les observateurs 1, 4 ou 5 sont susceptibles de reconstruire l'état  $\underline{x}$  indépendamment de  $f_2(t)$ . Il suffit de choisir celui dont la construction suit les hypothèses du cas (a).

Si aucun ne vérifie le cas (a), seul un retour de sortie peut être appliqué suivant la loi de commande (Tsui 1996) :

$$\underline{u} = \underline{v}_{ref} - K_y \underline{y} \quad (3.3.65)$$

Le système en boucle fermée est alors décrit par les relations suivantes :

$$\dot{\underline{x}} = A_y \underline{x} + B \underline{y}_{ref} + \bar{E}_d^i \bar{d}^i \tag{3.3.66a}$$

$$\underline{y} = C \underline{x} \tag{3.3.66b}$$

$$\text{avec } A_y = (A - BK_y C) \tag{3.3.67}$$

Comme précédemment la matrice de gain  $K_y C$  est choisie pour que la matrice  $A_y$  ait ses valeurs propres stables. Il est nécessaire que la paire  $(A, B)$  soit stabilisable.

**Fin de l'algorithme** ◇

L'étude approfondie des cas (a), (b) et (c) permet de répondre de façon générale au problème de détection, d'isolation et de correction de défauts. Seul le cas (a) offre tous les avantages d'une approche intégrée efficace, cependant les conditions d'existence du cas (a) sont plus restrictives que celles du cas (b) ou du cas (c), mais néanmoins pas plus restrictives que celles de la littérature. La table suivante résume l'ensemble des résultats.

	Cas a	Cas b	Cas c
Nombres d'entrées inconnues considérées : $p = m-1$	$\text{rang}(C_2) = p$	$0 < \text{rang}(C_2) < p$	$C_2 = 0_{m \times p}$
Degré de l'observateur : $(d^o)$	$d^o = n-p$	$n-p > d^o$	
Quantification du degré de sensibilité et d'insensibilité du générateur de résidu *	insensible aux défauts $\in \bar{f}_j$ +++ sensible aux défauts $\in \underline{f}_j$ +++	insensible aux défauts $\in \bar{f}_j$ +++ sensible aux défauts $\in \underline{f}_j$ ++ voir remarque 3.3.3	insensible aux défauts $\in \bar{f}_j$ +++ sensible aux défauts $\in \underline{f}_j$ + voir remarque 3.3.5
Conditions générales	vérifier les conditions d'existence du théorème 3.3.1	vérifier que le sous-système insensible aux entrées inconnues est détectable. (le résidu associé à ce sous-système est sensible au défaut $f_j$ appartenant à $\underline{f}_j$ si l'espace commandable et observable associé est non vide)	
Estimation d'état $\underline{x}$	voir eq. (3.3.30a-b) ou eq. (3.3.38)	nous ne pouvons pas reconstruire complètement le vecteur d'état $\underline{x}$ (la relation 3.3.26 n'est pas vérifiée)	
Estimation des défauts $\bar{d}^i$	voir eq. (3.3.52)	de même nous ne pouvons pas estimer les $q$ ( $\leq p$ ) éléments non nuls de $\underline{f}$	
Loi de commandes	$\underline{u} = \underline{y}_{ref} + \underline{u}_{ad}$ si le système est stable $\underline{u} = \underline{y}_{ref} - K_{\lambda} \hat{\underline{x}} + \underline{u}_{ad}$ si le système est instable	$\underline{u} = \underline{y}_{ref}$ si le système est stable $\underline{u} = \underline{y}_{ref} - K_{\lambda} \underline{y}$ si le système est instable	
pour la commande par retour d'état ou retour de sortie, il est nécessaire que la paire $(A, B)$ soit stabilisable.			

Table 3.3.2 : Propriétés et descriptif des résultats de l'approche selon les cas a, b ou c

\* les performances sont quantifiées par :

- +++ pour très (sensible ou insensible)
- ++ pour moyennement
- + pour peu

La loi de commande  $\underline{u} = \underline{u}_{ad} + \underline{v}$ , s'intègre parfaitement bien au cadre de la reconfiguration des systèmes à la suite de défauts. En effet, outre ses propriétés de stabilité, elle permet au moyen du bloc FDI (fig 3.3.1) de corriger non pas tout le système mais uniquement le ou les sous-systèmes en défauts (qui sont les images des sous-ensembles du système en défaut). De plus les hypothèses  $H_1$ ,  $H_3$  et  $H_4$  sont par construction toujours vérifiées. L'approche intégrée établie, permet alors un développement rigoureux et systématique des phases de détection, d'isolation et de correction de défauts et ceci sans connaissance a priori des distributions de chaque défauts. Elle permet par quelques modifications de résoudre les problèmes de reconfiguration des systèmes soumis à des défauts en présence d'entrées inconnues.

### Modification de l'algorithme pour répondre au diagnostic de défauts en présence d'entrées inconnues.

Si nous connaissons la distribution de chaque défaut (i.e.  $F_d$ ) et de chaque entrée inconnue (i.e.  $E_d$ ), le modèle de défaillance 3.3.1 devient:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d \underline{f} + E_d \underline{d} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

où  $\underline{f} \in \mathfrak{R}^f$  représente les défauts à détecter et  $\underline{d} \in \mathfrak{R}^{p_1}$  les entrées inconnues.

Si les défauts et les entrées inconnues sont indépendants (i.e.  $\text{rang}[E_d F_d] = f + p_1$ ), nous pouvons résoudre le problème général de détection, d'isolation et de correction des défauts malgré la présence des entrées inconnues. Nous avons les deux cas suivants :

- cas 1 :  $f \leq m - p_1$
- cas 2 :  $f > m - p_1$

**Le cas 1** consiste à reprendre le schéma (b), (voir remarque 3.3.6), de générer pour les  $f$  observateurs un résidu (de signature différente) insensible aux  $p_2 (= f - 1)$  éléments appartenant à  $\underline{f}$  et aux  $p_1$  entrées inconnues. Ainsi le résidu non nul désigne l'élément non-nul de  $\underline{f}$ . Nous pouvons alors détecter, localiser tous les défauts simultanés et ceci sans procédure de vote.

**Le cas 2** est construit avec les mêmes hypothèses de construction que celles du schéma (c) (voir remarque 3.3.6). Il consiste à générer un ensemble de  $\binom{n}{p_2 = m - 1 - p_1}$  observateurs, chacun étant insensible à  $p_2$  éléments du vecteur  $\underline{f}$  et aux  $p_1$  entrées inconnues. Nous pouvons alors détecter et localiser simultanément un maximum de  $p_2$  défauts.

**Remarque 3.3.6 :** L'algorithme présenté précédemment reste identique en présence d'entrées inconnues, à la seule différence que  $E_d^i$ ,  $F_d^i$ ,  $\underline{d}^i$  et  $\underline{f}^i$  sont représentées par les expressions suivantes :

$$E_d^i = \begin{bmatrix} E_d & L_{i_1} & L_{i_2} & \cdots & L_{i_{p_2}} \end{bmatrix}, F_d^i = \begin{bmatrix} L_{i_{(p_2+1)}} & L_{i_{(p_2+2)}} & \cdots & L_{i_f} \end{bmatrix}$$



$$\underline{d}^i = \left[ \underline{d}^T \quad f_{i_1} \quad f_{i_2} \quad \cdots \quad f_{i_{p_2}} \right]^T \quad \text{et} \quad \underline{f}^i = \left[ f_{i_{(p_2+1)}} \quad f_{i_{(p_2+2)}} \quad \cdots \quad f_{i_f} \right]^T$$

où les vecteurs  $L_{i_j}$  représentent non plus la  $(i_j)^{\text{ème}}$  colonne de la matrice identité  $I_n$ , mais la  $(i_j)^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $F_d$  (voir les relations 3.3.3 et 3.3.4), avec  $j$  variant de 1 à  $f$  et  $\text{rang}[E_d^i \quad F_d^i] = f + p_1$ .

### Exemple :

Si  $n=5$ ,  $m=4$ ,  $f=4$  et  $p_1=1$ , il faut générer un ensemble de  $\binom{5}{2} = 7$  résidus  $\underline{r}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ), chacun étant insensible à 2 ( $= m - 1 - p_1$ ) éléments du vecteur  $\underline{f}$  et à l'entrée inconnue. La table suivante résume les propriétés vérifiées par ces 7 résidus.

Si	FDIO <sub>1=r<sup>1</sup></sub>	FDIO <sub>2=r<sup>2</sup></sub>	FDIO <sub>3=r<sup>3</sup></sub>	FDIO <sub>4=r<sup>4</sup></sub>	FDIO <sub>5=r<sup>5</sup></sub>	FDIO <sub>6=r<sup>6</sup></sub>	FDIO <sub>7=r<sup>7</sup></sub>	Logique de décisions
$f_1(t) \neq 0$	0	0	0	1	1	1	0	$a_1 = l_{r^4} \cap l_{r^5} \cap l_{r^6}$
$f_2(t) \neq 0$	0	1	1	0	0	1	0	$a_2 = l_{r^2} \cap l_{r^3} \cap l_{r^6}$
$f_3(t) \neq 0$	1	0	1	0	1	0	1	$a_3 = l_{r^1} \cap l_{r^3} \cap l_{r^5}$
$f_4(t) \neq 0$	1	1	0	1	0	0	1	$a_4 = l_{r^1} \cap l_{r^2} \cap l_{r^4}$

Table 3.3.3 : Isolation robuste de défauts pour  $n=5$ ,  $m=4$ ,  $f=4$  et  $p_1=1$

L'observateur  $i=3$  sera déterminé d'après le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} + F_d^3 \underline{f}^3 + E_d^3 \underline{d}^3 \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

avec :  $i_1 = 2$ ,  $i_2 = 3$ ,  $i_3 = 1$  et  $i_4 = 4$  soit,

$$F_d^3 = [L_2 \quad L_3] = [F_{d_2} \quad F_{d_3}], \quad E_d^3 = [E_d \quad L_1 \quad L_4] = [E_d \quad F_{d_1} \quad F_{d_4}], \quad \underline{f}^3 = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \underline{d}^3 = \begin{bmatrix} d \\ f_1 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Il suffit, maintenant d'appliquer pour ce modèle l'algorithme précédent.

### Conclusion

Connaissant les distributions de chaque défaut et de chaque entrée inconnue, la reconfiguration des systèmes soumis à des défauts en présence d'entrées inconnues structurées peut être résolue selon sensiblement les mêmes concepts de résolution que dans la reconfiguration des systèmes sans entrées inconnues. De plus, l'algorithme présenté permet de générer des résidus insensibles aux entrées inconnues et aux défauts appartenant à  $\bar{f}$ , ceci même si la condition de découplage des entrées inconnues (i.e.  $\text{rang}(CE_d^i) = \text{rang}(E_d^i) = p$ ) n'est pas vérifiée. Alors que dans la génération de résidu par observateur à entrées inconnues classique (Wünnenberg 1990, Chen 1996), cette condition est nécessaire. Bien que ce résultat soit très intéressant car moins restrictif, il convient de rappeler que les résidus construits selon le cas (b) ou le cas (c) peuvent être insensibles à certains des défauts appartenant à  $f$ .

### 3.3.3 Exemples

**Objectif :** Présenter les performances de l'approche intégrée de diagnostic. Deux exemples pratiques illustrent successivement des défauts de composants et des défauts d'actionneurs. Sur ces exemples l'ensemble de la chaîne est traitée, et les résultats pratiques du développement des cas (a), (b) et (c) illustrent la table 3.3.2.

#### 3.3.3.1 Défauts de composants

Le procédé (fig 3.3.3) est un procédé pilote étudié par (Ge et Fang 1988). Il est composé de quatre réservoirs circulaires, de sections respectives  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , d'un seul actionneur  $u_1$  (pompe) qui agit sur le niveau d'eau, de quatre tubes de sections respectives  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$  et de seulement trois capteurs de niveau, respectivement  $y_1$ ,  $y_3$  et  $y_4$ .

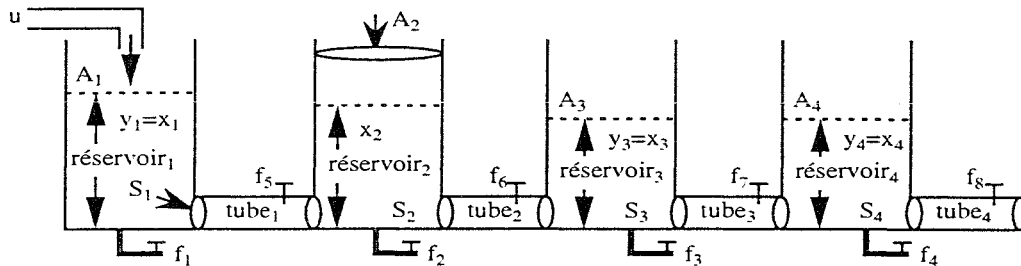


Fig 3.3.3 : Système à quatre réservoirs

Nous adoptons la même technique que précédemment pour simuler les défauts.

Ce système non linéaire peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement (Ge et Fang 1988) :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.3.68a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.68b)$$

Comme dans l'exemple des trois cuves et pour ne pas surcharger les calculs, nous avons simplifié quelques paramètres des matrices A et B (Hou et Müller 1991).

A la différence de l'exemple précédent, le modèle de défaillance (3.3.68) ne présente aucune connaissance des distributions des défauts et de leurs types. Le problème consiste alors non pas à détecter, à localiser et à corriger tous les types de défauts (fuites, bouchons ...) mais à établir une procédure de diagnostic capable de détecter, de localiser, et d'estimer les éléments non nul du vecteur  $\underline{f}$  en vue d'élaborer une commande additive qui sera capable de compenser l'ensemble des défauts.

Le système comporte 4 (=n) états et 3 (=m) mesures. Il faut alors générer  $\binom{4}{3-1} = 6$  résidus  $\underline{r}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), chacun étant insensible à 2 (=m-1) éléments du vecteur  $\underline{f}$ . La table 3.3.1 résume les propriétés vérifiées par ces résidus. Nous présentons successivement les résultats de l'algorithme pour le cas (a) et pour le cas (b).

### Illustration du cas (a)

#### Étude et mise en oeuvre de l'observateur 3 ("FDIO<sub>3</sub>")

**Étape 1 :** Selon la table 3.3.1, le résidu  $\underline{r}^3$  généré par l'observateur (3) est insensible aux éléments  $f_1$  et  $f_4$ , mais sensible aux éléments  $f_2$  et  $f_3$ . Nous considérons alors le modèle de défaillance suivant :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + F_d^3 \underline{f}^3 + E_d^3 \underline{d}^3 \quad (3.3.69a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.69b)$$

$$\text{où : } \bar{f} = \{1, 4\}, f = \{2, 3\}, F_d^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_d^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{f}^3 = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{d}^3 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  sont vérifiées.

**Étape 2 :** Le résidu  $\underline{r}^3$  doit être insensible aux entrées inconnues  $\underline{d}^3 = [f_1 \ f_4]^T$ . Nous recherchons alors le sous-système indépendant des entrées inconnues correspondant.

Par construction, la matrice  $E_d^3$  est de rang plein colonnes. il existe donc une matrice

régulière  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^3)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$PE_d^3 = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^3)^+ \end{bmatrix} E_d^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.70)$$

avec :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.71)$$

$$(E_d^3)^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.72)$$

$$P_1 \times P_1^T = I_2 \quad (3.3.73)$$

La matrice  $P$  est inversible (par construction), son inverse est donnée par  $P^{-1} = [P_1^T \ E_d^3]$  soit,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.74)$$

En prémultipliant l'équation (3.3.69a) par la matrice régulière  $P$ , et d'après le changement de variable  $\hat{\underline{x}} = P\underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}$ , nous obtenons le sous-système suivant :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{f}^3 \quad (3.3.75a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_2 \quad (3.3.75b)$$

où  $\hat{\underline{x}}_2$  représente le nouveau vecteur des entrées inconnues.

**Étape 3 :** La matrice  $\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  est de rang plein colonnes  $\Leftrightarrow$  cas (a)

**Étape 4 :** Génération du résidus

*cas (a) :* Nous savons déterminer une seconde matrice régulière  $P_2$  telle que :

$$P_2 \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ \hat{C}_2^+ \end{bmatrix} \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.76)$$

$$\text{avec : } P_3 = [0 \ -1 \ 0] \quad (3.3.77)$$

$$\hat{C}_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.78)$$

$$P_3 \times P_3^T = 1 \quad (3.3.79)$$

Prémultiplions l'équation de mesure (3.3.75b) par la matrice  $P_2$ ,

$$\hat{y} = [0 \ -1 \ 0] \underline{y} = [0 \ 1] \hat{\underline{x}}_1 \quad (3.3.80)$$

$$\hat{\underline{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \underline{y} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \right) \quad (3.3.81)$$

nous obtenons par substitution de (3.3.81) dans (3.3.75a), le sous-système indépendant des entrées inconnues  $\underline{d}^3$  :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{f}^3 \quad (3.3.82a)$$

$$\hat{y} = [0 \ 1] \hat{\underline{x}}_1 \quad (3.3.82b)$$

où les valeurs propres de la matrice  $\hat{\hat{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  sont respectivement  $(-3)$  et  $(-1)$ .

La paire  $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{C}})$  étant observable, nous pouvons arbitrairement fixer la dynamique de l'observateur. Nous proposons alors comme estimateurs de  $\hat{\hat{x}}_1$ ,  $\hat{\hat{x}}_2$  et  $\hat{\hat{x}}$ , les vecteurs respectifs  $\hat{\hat{z}}^3$ ,  $\hat{\hat{x}}_2^3$  et  $\hat{\hat{x}}^3$  définis par :

$$\hat{\hat{z}}^3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\hat{z}}^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} (\hat{\hat{y}} - [0 \ 1] \hat{\hat{z}}^3) \quad (3.3.83)$$

$$\hat{\hat{x}}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \underline{y} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\hat{z}}^3 \right) \quad (3.3.84)$$

$$\hat{\hat{x}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\hat{z}}^3 \\ \hat{\hat{x}}_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.3.85)$$

où  $K = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  représente le gain de l'observateur, tel que la dynamique de l'observateur (3.3.83) soit égale à  $-4$ .

Analyse de convergence : L'erreur d'estimation  $\hat{\hat{e}}_1^i = \hat{\hat{x}}_1 - \hat{\hat{z}}^i$  d'après (3.3.82) et (3.3.83) obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\hat{\hat{e}}}_1^3 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \hat{\hat{e}}_1^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{f}^3 \quad (3.3.86)$$

L'erreur d'observation (résidu) est donc décrite par les défauts appartenant à  $f$  :

$$\underline{r}^3 = \hat{\hat{y}} - [0 \ 1] \hat{\hat{z}}^3 = [0 \ 1] \hat{\hat{e}}_1^3 \quad (3.3.87)$$

D'autre part, sachant que  $\hat{\hat{y}} = [0 \ -1 \ 0] \underline{y}$ , l'observateur (3.3.83) (d'après (3.3.84) et (3.3.85)) peut se réécrire sous la forme simple de l'observateur d'ordre réduit de Luenberger, :

$$\dot{\hat{\hat{z}}}_1^3 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \hat{\hat{z}}_1^3 + \begin{bmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u} \quad (3.3.88a)$$

$$\hat{\hat{x}}_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\hat{z}}_1^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} \quad (3.3.88b)$$

$$\underline{r}^3 = [0 \ -1 \ 0] \underline{y} - [0 \ 1] \hat{\hat{z}}_1^3 \quad (3.3.88c)$$

Analyse.

L'erreur d'estimation  $\hat{\hat{e}}^i = \hat{\hat{x}}^i - \hat{\hat{x}} = M(\hat{\hat{e}}_1^i) + (MP_1 + NC - I_n) \hat{\hat{x}}$  tend vers zéro en l'absence des défauts appartenant à  $f$  (i.e.  $f_2 = f_3 = 0$ ) car :  $(MP_1 + NC - I_n) = 0$  et  $\hat{\hat{e}}_1^i(t) \rightarrow 0$ .

Il reste à vérifier l'influence des défauts appartenant à  $f$  sur le résidu  $r^3$ . Il suffit de vérifier la condition (c3.3.1b) du théorème 3.3.1.

Le défaut  $f_2$  appartenant à  $f$  est détectable car l'espace commandable et observable du triplet  $\left(\hat{\bar{C}}, F, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$  est non vide.

De même le défaut  $f_3$  appartenant à  $f$  est détectable car l'espace commandable et observable du triplet  $\left(\hat{\bar{C}}, F, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  est non vide.

Conclusion de la procédure de détection :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r^3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( [0 \ 1] \bar{e}_1^3(t) \right) \begin{cases} = 0 \ \forall \ f_1 \text{ et } f_4 \ (\in \bar{f}) \\ \neq 0 \ \text{si } f_2 \neq 0 \text{ et / ou } f_3 \neq 0 \ (\in f) \end{cases} \quad (3.3.89)$$

### Étape 5 : Accommodation de défauts

Nous pouvons détecter et isoler simultanément  $q$  ( $\leq 2$ ) éléments non-nuls dans  $\underline{f}$ .

*cas (a1)* : Nous supposons que seul le défaut  $f_1$  est susceptible d'apparaître.

*cas (a2)* : Nous supposons que seuls les défauts  $f_1$  et  $f_4$  sont susceptibles d'apparaître.

#### Cas a1

Nous pouvons considérer que  $\underline{f}^3$  est identiquement nul. La relation (3.3.69a) peut être mise sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \bar{E}_d^3 \bar{d}^3 \quad (3.3.90)$$

où  $\bar{E}_d^3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  représente la matrice de distribution du défaut localisé par le bloc FDI et représenté par  $\bar{d}^3 = f_1 \in \bar{f}$ .

L'élément  $f_1 \neq 0$  étant inclus dans  $\underline{d}^3$ , l'estimation d'état  $\hat{\underline{x}}^3$  est par définition insensible à ce défaut (i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}^3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\underline{x}}^3(t) - \underline{x}(t)) = 0$ ).

Nous pouvons proposer comme estimateur de  $f_1$ , l'expression suivante :

$$\hat{f}_1 = [1 \ 0 \ 0] \left( \dot{\underline{y}} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \right) \quad (3.3.91)$$

$$\text{avec : } (C\bar{E}_d^3)^+ C\bar{E}_d^3 = 1$$

Nous avons bien  $\lim_{t \rightarrow \infty} (f_1(t) - \hat{f}_1(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} [-1 \ 1 \ 0 \ 0] \underline{e}^3(t) = 0$ .

Le système étant stable et connaissant l'estimation du défaut, il reste simplement à reconfigurer la loi de commande. Nous suggérons de calculer une commande  $u_{ad}$  qui s'ajoutera à la commande de référence  $v_{ref}$  du système.

Cette commande est alors obtenue par la relation suivante :

$$u = v_{ref} + u_{ad} = v_{ref} - \hat{f}_1 \quad (3.3.92)$$

où  $u_{ad} = -B^+ \bar{E}_d^3 \hat{f}_1 = -\hat{f}_1$  est la solution exacte qui annule le défaut  $f_1$  (ie.,  $\Phi = 0$ ) car  $B = \bar{E}_d^3$ .

Par conséquent :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ref} + \underbrace{\bar{E}_d^3 (f_1 - \hat{f}_1)}_{=0 \text{ pour } t \rightarrow \infty} \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

Nous avons corrigé (éliminé) le défaut  $f_1$ . Pratiquement, l'addition de la commande  $u_{ad}$  représente l'augmentation du débit d'eau afin de compenser la fuite du réservoir 1.

### Cas a2

Nous pouvons considérer que  $\underline{f}^3$  est identiquement nul. La relation (3.3.69a) peut être mis sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \bar{E}_d^3 \bar{\underline{d}}^3 \quad (3.3.93)$$

où  $\bar{E}_d^3 = E_d^3$  représente la matrice de distribution des défauts localisés par le bloc FDI et représenté par le vecteur  $\bar{\underline{d}}^3 = [f_1 \ f_4]^T = \underline{d}^3 \in \bar{\underline{f}}$ .

Les éléments  $f_1$  et  $f_4$  étant également inclus dans  $\underline{d}^3$ , l'estimation d'état  $\hat{\underline{x}}^3$  est par définition insensible à ces défauts (i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}^3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\underline{x}}^3(t) - \underline{x}(t)) = 0$ ).

Nous pouvons proposer comme estimateur de  $f_1$  et  $f_4$  l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \dot{\underline{y}} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \right) \quad (3.3.94)$$

avec :  $(C\bar{E}_d^3)^+ C\bar{E}_d^3 = I_2$

Nous avons bien  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_4(t) \end{bmatrix} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} e^3(t) = 0$ .

Le système étant stable, et connaissant l'estimation des défauts, il reste simplement à reconfigurer la loi de commande. Nous suggérons de calculer une commande  $u_{ad}$  qui s'ajoutera à la commande de référence  $v_{ref}$  du système.

La loi de commande est alors donnée par la relation suivante :

$$u = v_{ref} + u_{ad} = v_{ref} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_4 \end{bmatrix} \quad (3.3.95)$$

où la commande additive  $u_{ad} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_4 \end{bmatrix}$  n'est pas la solution exacte du système

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{ad} \text{ mais elle minimise le critère } \Phi = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{ad} \right\|_2.$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ref} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{(f_1 - \hat{f}_1)}_{=0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_4 \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{array} \right. \quad (3.3.96)$$

Nous avons bien corrigé le défaut  $f_1$  mais les effets du défaut  $f_4$  ne peuvent être compensés. Cela s'explique par le fait qu'il faut disposer d'autant d'actionneurs que d'états pour pouvoir agir et redistribuer l'énergie sur tous les actionneurs en cas de défauts. Seuls les effets du défaut  $f_1$  peuvent être éliminés car nous disposons d'un actionneur qui agit directement et uniquement sur l'état  $x_1$ .

◇



**Illustration du cas (b)**Étude et mise en oeuvre de l'observateur 4 ("FDIO<sub>4</sub>")

**Étape 1 :** Selon la table 3.3.1, le résidu  $\underline{r}^4$  généré par l'observateur (4) est insensible aux éléments  $f_2$  et  $f_3$ , mais sensible à  $f_1$  et  $f_4$ . Nous considérons alors le modèle de défaillance suivant

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + F_d^4 \underline{f}^4 + E_d^4 \underline{d}^4 \quad (3.3.97a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.97b)$$

$$\text{où : } \bar{f} = \{2, 3\}, f = \{1, 4\}, F_d^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_d^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{f}^4 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{d}^4 = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_4$  sont vérifiées.

**Étape 2 :** Le résidu  $\underline{r}^4$  doit être insensible aux entrées inconnues  $\underline{d}^4 = [f_2 \ f_3]^T$ . Nous recherchons alors le sous-système indépendant des entrées inconnues correspondant.

La matrice  $E_d^4$  étant de rang plein colonnes, il existe une matrice

régulière  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^4)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$PE_d^4 = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^4)^+ \end{bmatrix} E_d^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.98)$$

avec :

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.99)$$

$$(E_d^4)^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.100)$$

$$P_1 \times P_1^T = I_2 \quad (3.3.101)$$

La matrice  $P$  est inversible (par construction), son inverse est donnée par

$P^{-1} = [P_1^T \ E_d^4]$  soit,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.102)$$

En prémultipliant l'équation (3.3.97a) par la matrice régulière P, et d'après le changement de variable  $\hat{\underline{x}} = P\underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}$ , nous obtenons le sous-système suivant :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}^4 \quad (3.3.103a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_2 \quad (3.3.103b)$$

où  $\hat{\underline{x}}_2$  représente le nouveau vecteur des entrées inconnues.

**Étape 3 :** La matrice  $\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  n'est pas de rang plein colonnes  $\Leftrightarrow$  cas (b)

**Étape 4 :** Génération de résidus

*cas (b) :*  $\text{rang}(\hat{C}_2) = r = 1$

Il existe une matrice orthogonale V et une matrice inversible Q telles que,

$$\hat{C}_2 = V \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.104)$$

Substituons (3.3.104) dans (3.3.103b), le système (3.3.103) devient :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{\underline{x}}_{2_1} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\underline{x}}_{2_2} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}^4 \quad (3.3.105a)$$

$$\bar{\underline{y}}_1 = \bar{\underline{x}}_{2_1} \text{ avec } \bar{\underline{y}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y} \quad (3.3.105b)$$

$$\bar{\underline{y}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \text{ avec } \bar{\underline{y}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} \quad (3.3.105c)$$

De même, substituons (3.3.105b) dans (3.3.105a), le système (3.3.105) se réduit à :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{u} + \mathcal{F}_d^4 \underline{f}^4 + \mathcal{E}_d^4 \underline{d}^4 \quad (3.3.106a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.106b)$$

où :  $\underline{x} = \hat{\underline{x}}_1$ ,  $\underline{u} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{y}}_1 \\ u \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{F}_d^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{E}_d^4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{d}^4 = \bar{\underline{x}}_{2_2}$  et  $\underline{y} = \bar{\underline{y}}_2$

Nous nous sommes ramenés à un sous-système fonction de l'ensemble des défauts à détecter  $\underline{f}^4 = [f_1 \ f_4]^T$  mais présentant encore des entrées inconnues  $\underline{d}^4$ . Cependant,

si nous comparons au modèle de départ (3.3.97), le degré  $\underline{d}^4 (=1)$  est inférieur au degré  $\underline{d}^4 (=2)$  et l'injectivité de la matrice  $\mathcal{E}_d^4$  est vérifiée. Ce modèle (3.3.106) présente alors la même structure que le modèle de défaillance (3.3.97). Il suffit de remplacer le système (3.3.97) par (3.3.106), de retourner à l'étape 2 et de répéter le même algorithme, jusqu'à obtenir le sous-système fonction uniquement des défauts à détecter  $\underline{f}^4$ .

Toutefois, comme le stipuler la remarque 3.3.3, l'hypothèse  $H_4$  pour le système (3.3.106) n'est pas vérifiée. En effet la distribution du défaut  $f_1$  est linéairement dépendante de  $\mathcal{E}_d^4$ , (i.e.  $\text{rang}[\mathcal{E}_d^4 \quad \mathcal{F}_d^4] = \text{rang}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3$ ) le défaut  $f_1$  ne peut être détecté.

**Étape 2 :** Le résidu  $\underline{r}^4$  doit être insensible à l'entrée inconnue  $\underline{d}^4 = \bar{\underline{x}}_{2_2}$ . Nous recherchons alors le sous-système indépendant de l'entrée inconnue correspondant.

La matrice  $\mathcal{E}_d^4$  étant de rang plein colonnes, il existe une matrice régulière  $P_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ (\mathcal{E}_d^4)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$P_2 \mathcal{E}_d^4 = \begin{bmatrix} P_3 \\ (\mathcal{E}_d^4)^+ \end{bmatrix} \mathcal{E}_d^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.107)$$

avec :

$$P_3 = [0 \ 1] \quad (3.3.108)$$

$$(\mathcal{E}_d^4)^+ = [-1 \ 0] \quad (3.3.109)$$

$$P_3 \times P_3^T = 1 \quad (3.3.110)$$

La matrice  $P_2$  est inversible (par construction), son inverse est donnée par  $P_2^{-1} = [P_3^T \quad \mathcal{E}_d^4]$  soit,

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.111)$$

Prémultiplions l'équation (3.3.106a) par la matrice régulière  $P_2$ , et par le changement de variable  $\underline{\hat{x}} = P_2 \underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ , nous obtenons le sous-système suivant :

$$\dot{\hat{x}}_1 = [-2] \hat{x}_1 + [1 \ 0] \underline{y} + [0 \ 1] \underline{f}^4 \quad (3.3.112a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_2 \quad (3.3.112b)$$

où  $\hat{x}_2$  représente la nouvelle entrée inconnue.

**Étape 3 :** La matrice  $\bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  est de rang plein colonnes  $\Leftrightarrow$  cas (a)

**Étape 4 :** Génération de résidus

*cas (a) :* Nous pouvons déterminer une matrice régulière  $P_4$  telle que :

$$P_4 \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} P_5 \\ \bar{C}_2^+ \end{bmatrix} \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.113)$$

$$\text{avec : } P_5 = [0 \ 1] \quad (3.3.114)$$

$$\bar{C}_2^+ = [1 \ 0] \quad (3.3.115)$$

$$P_5 \times P_5^T = 1 \quad (3.3.116)$$

Prémultiplions l'équation de mesure (3.3.112b) par la matrice  $P_4$ ,

$$\bar{y} = [0 \ 1] \underline{y} = [0 \ 0 \ 1] \underline{y} = [1] \bar{x}_1 \quad (3.3.117)$$

$$\bar{x}_2 = [1 \ 0] \left( \underline{y} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{x}_1 \right) \quad (3.3.118)$$

nous obtenons alors le sous-système indépendant des entrées inconnues  $\underline{d}^4$  :

$$\dot{\bar{x}}_1 = [-2] \bar{x}_1 + [1 \ 0] \underline{u} + [0 \ 1] \underline{f}^4 \quad (3.3.119a)$$

$$\bar{y} = [1] \bar{x}_1 \quad (3.3.119b)$$

Ce sous-système est observable. Nous pouvons arbitrairement fixer la dynamique de l'observateur. Nous proposons alors comme estimateurs de  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  et  $\underline{x}$ , les vecteurs  $z^4$ ,  $\hat{x}_2^4$  et  $\hat{\underline{x}}^4$  définis par :

$$\begin{aligned} \dot{z}^4 &= [-2] z^4 + [1 \ 0] \underline{u} + [2] (\bar{y} - [1] z^4) \\ &= [-4] z^4 + [0 \ 1 \ 2] \underline{y} \end{aligned} \quad (3.3.120)$$

$$\hat{x}_2^4 = [1 \ 0] \left( \underline{y} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z^4 \right) \quad (3.3.121)$$

$$\hat{\underline{x}}^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^4 \\ \hat{x}_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.3.122)$$

où  $K = [2]$  représente le gain de l'observateur tel que la dynamique de l'observateur (3.3.120) soit égale -4.

Analyse de la convergence : L'erreur d'estimation  $\bar{e}_1^4 = \bar{x}_1 - z^4$  d'après (3.3.119) et (3.3.120) obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\bar{e}}_1^4 = [-4] \bar{e}_1^4 + [0 \ 1] \underline{f}^4 \quad (3.3.123)$$

L'erreur d'observation (résidu) est donc décrite simplement par le défaut  $f_4$  :

$$r^4 = \bar{y} - [1] z^4 = [1] \bar{e}_1^4 \quad (3.3.124)$$

Conclusion de la procédure de détection,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r^4 = \lim_{t \rightarrow \infty} ([1]_{\hat{e}_1^4}) \begin{cases} = 0 \forall f_2 \text{ et } f_3 (\in \bar{f}) \text{ et } f_1 (\in f) \\ \neq 0 \text{ si } f_4 \neq 0 (\in f) \end{cases} \quad (3.3.125)$$

le résidu  $r^4$  est sensible seulement aux variations de  $f_4$ , nous avons donc une diminution de la sensibilité du résidu aux défauts appartenant à  $f$ . Ceci illustre la quantification du degré de sensibilité et d'insensibilité du générateur de résidu (voir table 3.3.2, cas (b)).

### Étape 5 : Accommodation des défauts

$$\text{rang}(\hat{C}_2) = \text{rang}(CE_d^4) = 1 < 2$$

**cas (b) :** Bien que nous avons la possibilité d'estimer l'état  $\underline{x} = \hat{\underline{x}}_1$  (relation 3.3.122) du sous-système (3.3.103) indépendamment des entrées inconnues, nous ne pouvons pas reconstruire l'état complet  $\underline{x}$  et par conséquent les défauts  $f_2, f_3$ .

Il faut donc s'assurer que le circuit logique (fig 3.3.2) donne parmi l'ensemble des observateurs insensibles aux  $q$  éléments non nuls de  $\underline{f}$ , l'observateur construit selon les hypothèses du cas (a).

Si nous considérons uniquement l'élément  $f_3(t) \neq 0$  alors, parmi la table d'isolation (3.3.1), les observateurs 2, 4 ou 6 sont susceptibles de reconstruire l'état  $\underline{x}$  indépendamment de  $f_3(t)$ . L'observateur 6 satisfait les hypothèses du cas (a), il est donc possible d'estimer le défaut  $f_3(t)$  à l'aide de l'estimation d'état  $\hat{\underline{x}}^6$  et donc de reconfigurer la loi de commande. ◇

D'après l'ensemble des résultats, les résidus  $r^1, r^2$  et  $r^4$  sont respectivement insensibles aux défauts  $f_3, f_2$  et  $f_1$ , par conséquent la table 3.3.1 est réduite à la table suivante :

Si	FDIO <sub>1=r<sup>1</sup></sub>	FDIO <sub>2=r<sup>2</sup></sub>	FDIO <sub>3=r<sup>3</sup></sub>	FDIO <sub>4=r<sup>4</sup></sub>	FDIO <sub>5=r<sup>5</sup></sub>	FDIO <sub>6=r<sup>6</sup></sub>	Logique de décisions
$f_1(t) \neq 0$	0	0	0	0	1	1	$a_1 = l_{r^5} \cap l_{r^6}$
$f_2(t) \neq 0$	0	0	1	0	0	1	$a_2 = l_{r^3} \cap l_{r^6}$
$f_3(t) \neq 0$	0	0	1	0	1	0	$a_3 = l_{r^3} \cap l_{r^5}$
$f_4(t) \neq 0$	1	1	0	1	0	0	$a_4 = l_{r^2}$

Table 3.3.4 : Isolation pour  $n=4$  et  $m=3$  (système à quatre réservoirs)

La table 3.3.4, a les mêmes caractéristiques que dans l'approche Ge et Fang, 1988. Nous pouvons détecter et localiser l'ensemble des défauts  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  à des instants différents, ainsi que les défauts simultanés  $f_1 \cap f_4$  ou  $f_2 \cap f_4$  ou  $f_3 \cap f_4$ . Par contre, nous ne pouvons distinguer les couples  $f_1 \cap f_2, f_1 \cap f_3, \text{ et } f_2 \cap f_3$  car ils présentent la même signature (i.e.  $l_{r^5}, l_{r^6}$  et  $l_{r^3}$  sont vraie, donc  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ). Il est toutefois possible par une analyse plus fine des résidus de distinguer quel couple est réellement en défaut.

Le bloc FDI associé au système (3.3.68), est alors décrit par la figure suivante :

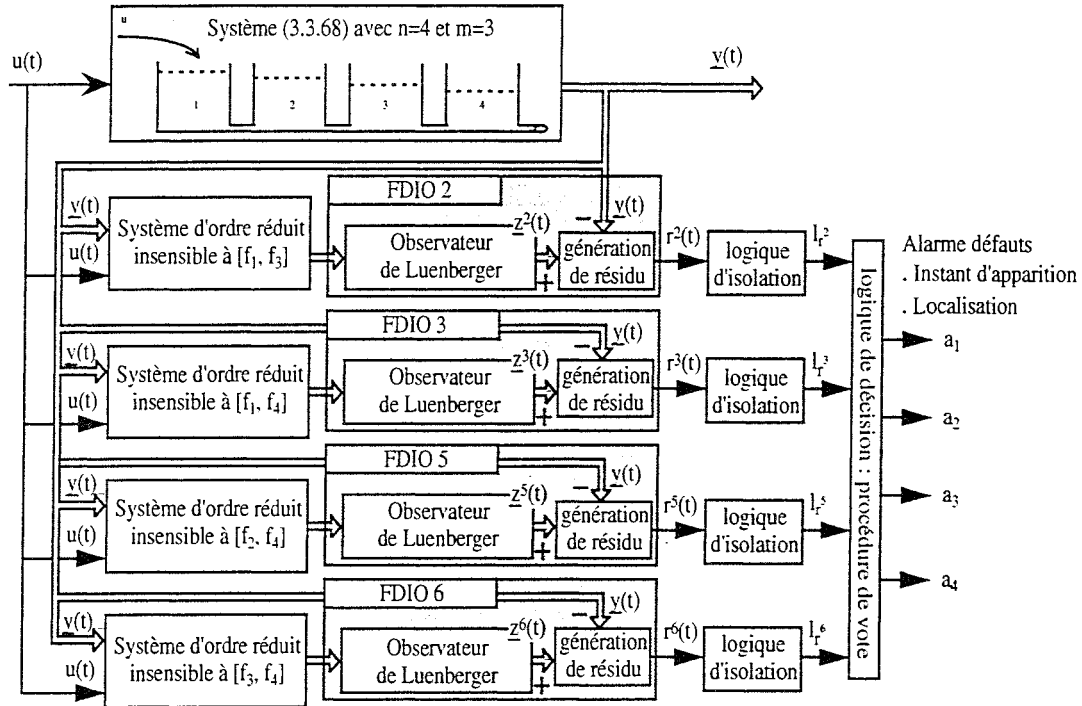


Fig 3.3.4 : Structure du bloc FDI pour n=4 et m=3 (système à 4 réservoirs)

Nous avons volontairement sélectionné l'observateur 2 et non l'observateur 1 (ou 4) car il permet d'estimer l'état  $\underline{x}$  et les défauts  $f_1, f_3$  en l'absence des défauts  $f_2$  et  $f_4$ . Nous pouvons reconstruire les couples de défauts présents dans la table ci-dessous mais également tous les défauts  $f_1, f_3$  et  $f_4$  à condition qu'ils n'apparaissent pas simultanément.

Si	$f_1 \neq 0 \cap f_4 \neq 0$	$f_3 \neq 0 \cap f_4 \neq 0$	$f_1 \neq 0 \cap f_3 \neq 0$	$f_1 \neq 0$	$f_3 \neq 0$	$f_4 \neq 0$
Alarme correspondante	$a_1$ et $a_4$	$a_3$ et $a_4$	$a_1, a_2$ et $a_3$	$a_1$	$a_3$	$a_4$
Etat $\underline{z}^i$ à utiliser	$\underline{z}^3$	$\underline{z}^6$	$\underline{z}^2$	$\underline{z}^2 \cup \underline{z}^3$	$\underline{z}^2 \cup \underline{z}^6$	$\underline{z}^3 \cup \underline{z}^6$
Estimation d'état correspondante	$\hat{\underline{x}}^3$	$\hat{\underline{x}}^6$	$\hat{\underline{x}}^2$	$\hat{\underline{x}}^3$	$\hat{\underline{x}}^6$	$\hat{\underline{x}}^6$
Estimation des défauts	$\hat{f}_1$ et $\hat{f}_4$	$\hat{f}_3$ et $\hat{f}_4$	$\hat{f}_1$ et $\hat{f}_3$	$\hat{f}_1$	$\hat{f}_3$	$\hat{f}_4$
Loi de commande	$u = v_{ref} - \hat{f}_1$	$u = v_{ref}$	$u = v_{ref} - \hat{f}_1$	$u = v_{ref}$		

Table 3.3.5 : Estimation de l'état  $\underline{x}$ , des éléments  $f_i$  et définition de la loi de commande.

Remarques :

\* Nous ne pouvons pas estimer les couples  $(f_1 \cap f_2; f_2 \cap f_3; f_2 \cap f_4)$ , car les observateurs 1, 4 et 5 respectivement insensibles à ces couples de défauts, sont construits selon les hypothèses du cas (b). Nous appliquons dans ce cas, la commande de référence  $u=v_{ref}$ .

\* Quel que soit l'observateur, l'élément  $f_2$  ne peut être estimé car le produit  $CL_2$ , avec  $L_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  est nul.

Les figures suivantes montrent l'ensemble des résultats.

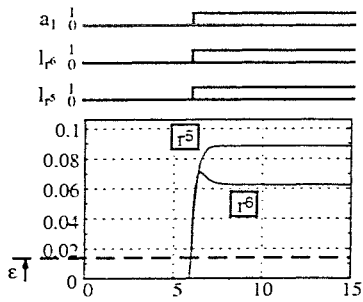


Fig 3.3.5-a : Detection et isolation d'une fuite dans le réservoir 1, détectée à  $t = t_a = 6.01$  sec (ie.,  $f_1 < 0$ )

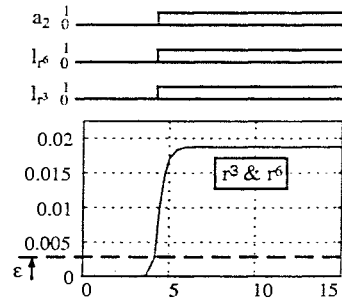


Fig 3.3.5-b : Detection et isolation d'une fuite dans le réservoir 2, détectée à  $t = t_a = 4.2$  sec (ie.,  $f_2 < 0$ )

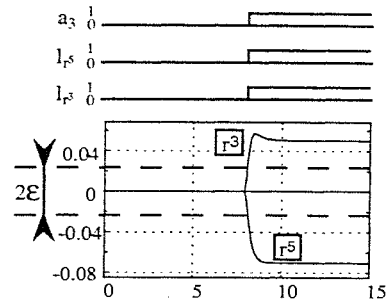


Fig 3.3.5-c : Detection et isolation d'une fuite dans le réservoir 3, détectée à  $t = t_a = 6.07$  sec (ie.,  $f_3 < 0$ )

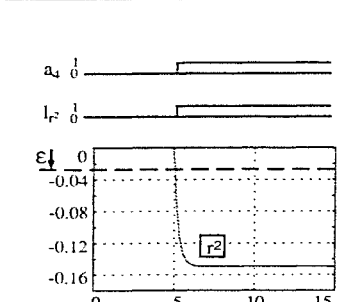


Fig 3.3.5-d : Detection et isolation d'une fuite dans le réservoir 4, détectée à  $t = t_a = 5.01$  sec (ie.,  $f_4 < 0$ )

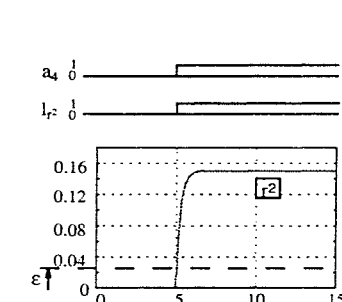


Fig 3.3.5-e : Detection et isolation d'un bouchon dans le tube 4, détecté à  $t = t_a = 5.01$  sec (ie.,  $f_4 > 0$ )

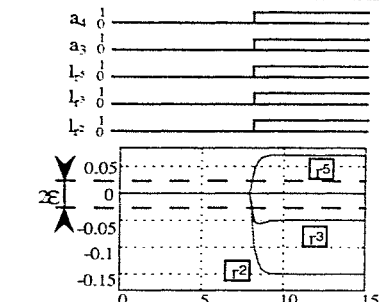


Fig 3.3.5-f : Detection et isolation d'un bouchon dans le tube 3, détecté à  $t = t_a = 8.02$  sec (ie.,  $f_3 > 0$  et  $f_4 < 0$ )

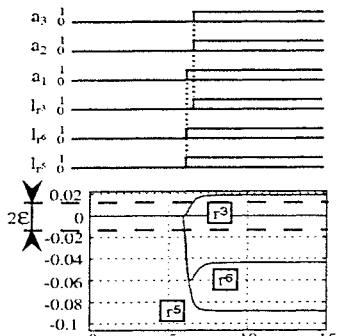


Fig 3.3.5-g : Detection et isolation d'un bouchon dans le tube 1, détecté à  $t = t_a = 6.03$  sec (ie.,  $f_1 > 0$  et  $f_2 < 0$ )

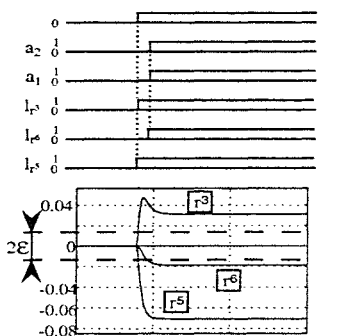


Fig 3.3.5-h : Detection et isolation d'un bouchon dans le tube 2, détecté à  $t = t_a = 4.02$  sec (ie.,  $f_2 > 0$  et  $f_3 < 0$ )

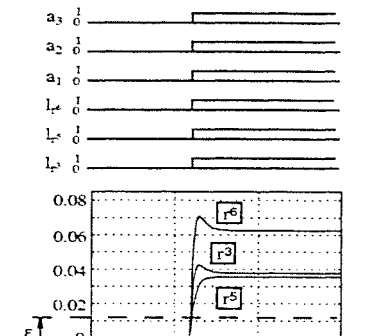


Fig 3.3.5-i : Detection et isolation simultanées des fuites dans les réservoirs 1 et 3, détectées à  $t = t_a = 6.01$  sec (ie.,  $f_1 < 0$  et  $f_3 < 0$ ;  $f_1 \neq f_3$ )

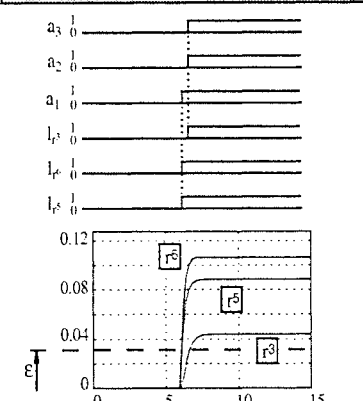


Fig 3.3.5-j : Detection et isolation simultanées des fuites dans les réservoirs 1 et 2, détectées à  $t = t_a = 6.04$  sec (ie.,  $f_1 < 0$  et  $f_2 < 0$ )

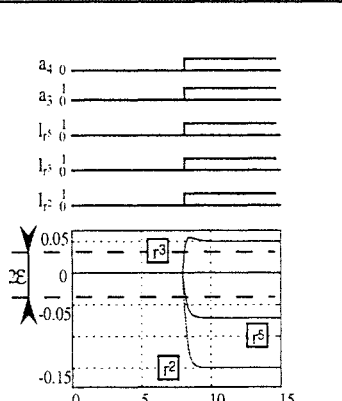


Fig 3.3.5-k : Detection et isolation simultanées des fuites dans les réservoirs 3 et 4, détectées à  $t = t_a = 8.02$  sec (ie.,  $f_3 < 0$  et  $f_4 < 0$ )

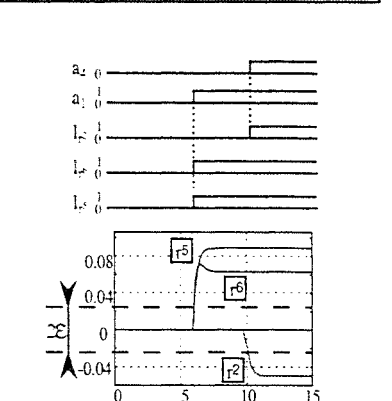


Fig 3.3.5-l : Detection et isolation d'une fuite dans le réservoir 1, détectée à  $t = t_a = 6.01$  sec et d'une fuite dans le réservoir 4, détectée à  $t = t_a = 10.04$  sec (ie.,  $f_1 < 0$  et  $f_4 < 0$ )

Fig 3.3.5 : Observations des résidus, des logiques d'isolation et des alarmes correspondant aux différents défauts de composants détectés et localisés par le bloc FDI.

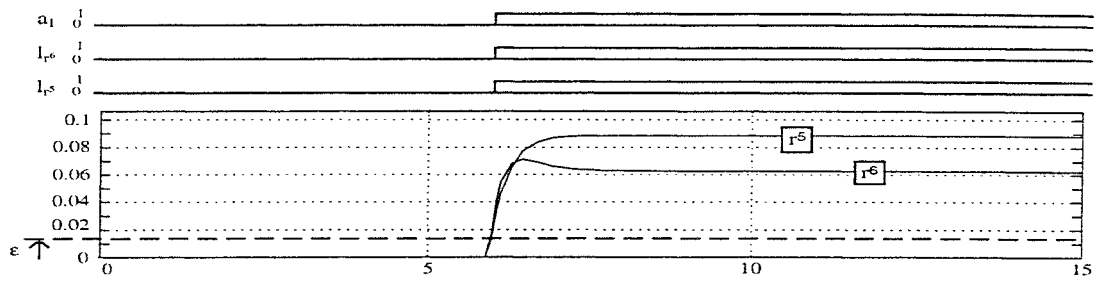


Fig 3.3.6-a : Détection et isolation d'une fuite dans le réservoir 1, détectée à  $t = t_d = 6.01$  sec

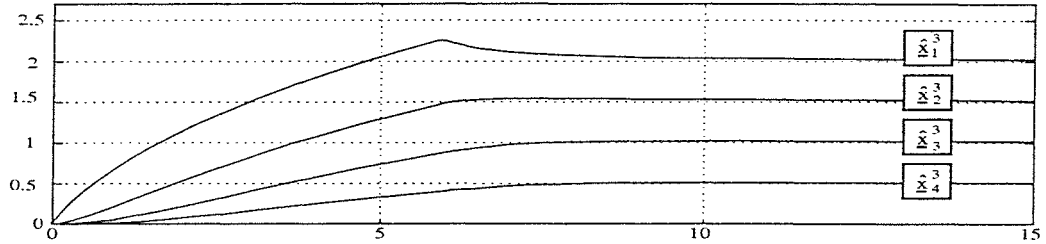


Fig 3.3.6-b : Estimation d'état, d'après l'observateur 3

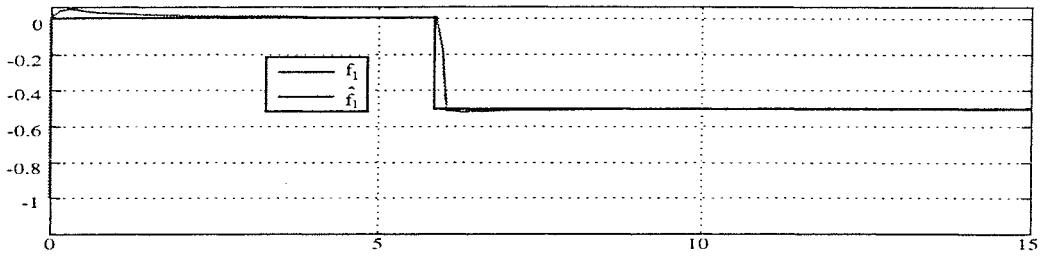


Fig 3.3.6-c : Estimation de l'élément,  $f_1$

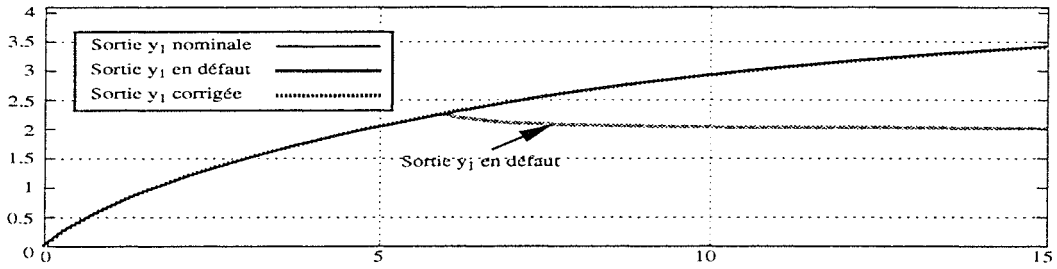


Fig 3.3.6-d : Première sortie du système

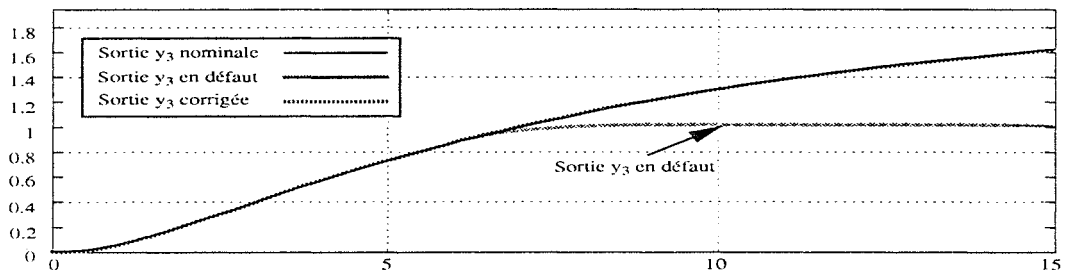


Fig 3.3.6-e : Troisième sortie du système

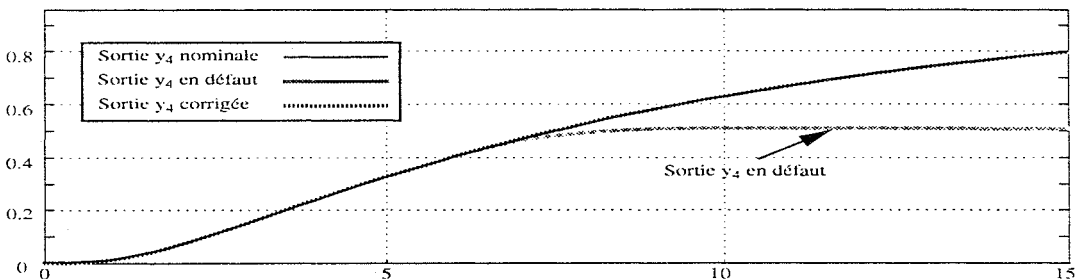


Fig 3.3.6-f : Quatrième sortie du système

Fig 3.3.6 : Détection, isolation, et correction d'une fuite dans le réservoir 1



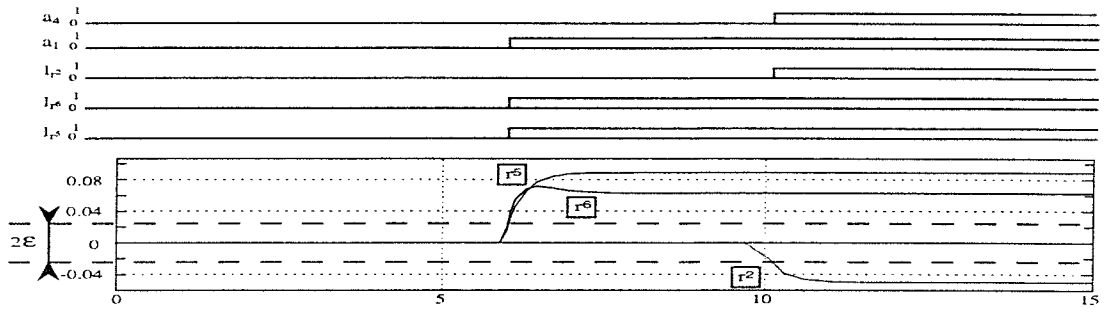


Fig 3.3.7-a : Détection et isolation d'une fuite dans le réservoir 1, détectée à  $t = t_a = 6.01$  sec et d'une fuite dans le réservoir 4, détectée à  $t = t_a = 10.04$  sec

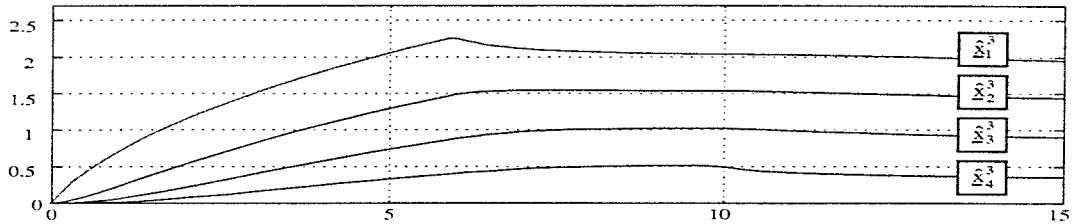


Fig 3.3.7-b : Estimation d'état, d'après l'observateur 3

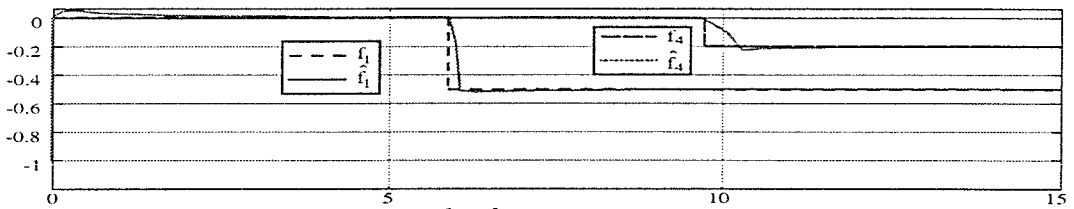


Fig 3.3.7-c : Estimation des éléments,  $f_1$  et  $f_4$

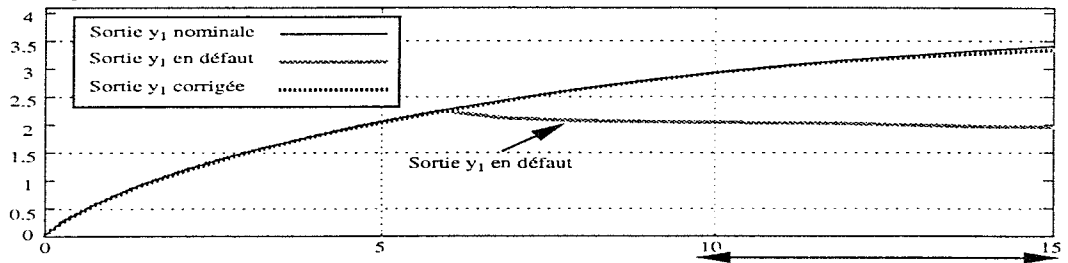


Fig 3.3.7-d : Première sortie du système

La sortie corrigée  $y_1$  est peu influencée par  $f_4$ , car  $y_1 = x_1$  et  $x_1$  est peu lié à  $f_4$ .

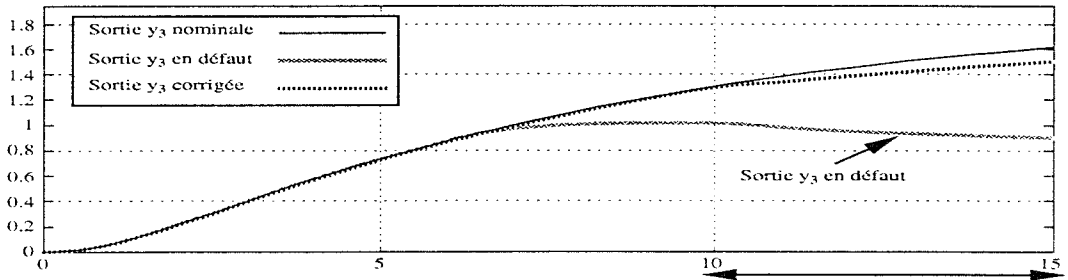


Fig 3.3.7-e : Troisième sortie du système

La sortie corrigée  $y_3$  est plus influencée par  $f_4$ , car  $y_3 = x_3$  et  $x_3$  est lié à  $x_4$  qui est lui-même directement lié à  $f_4$ .

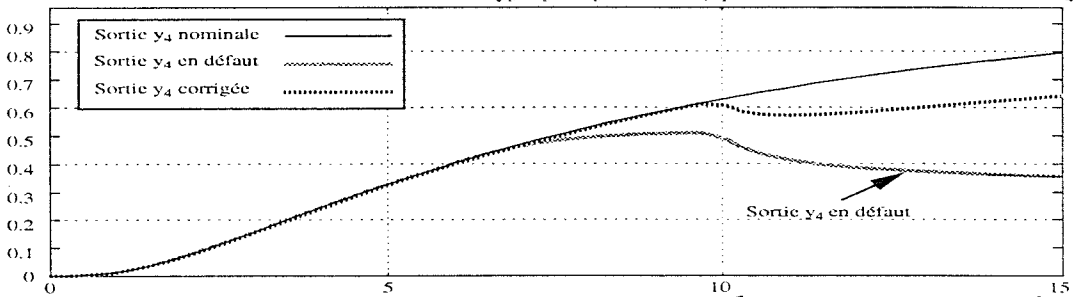


Fig 3.3.7-f : Quatrième sortie du système

La sortie corrigée  $y_4$  est d'autant plus influencée par  $f_4$ , car  $y_4 = x_4$  et  $x_4$  est directement lié à  $f_4$ .

Fig 3.3.7 : Détection, isolation, et correction des fuites dans les réservoirs 1 et 4.

**Conclusion :**

Avantages : \* Les observateurs de table 3.3.1, sont insensibles aux défauts appartenant à  $\bar{f}$ ,

- nous pouvons : - estimer les défauts  $f_1, f_3, f_4,$   
 - éliminer les effets du défaut  $f_1.$

Inconvénients : \* Les résidus  $r^1, r^2$  et  $r^4$  présentent un degré de sensibilité moindre,

- nous ne pouvons pas : - reconstruire le défaut  $f_2,$   
 - éliminer les effets des défauts  $f_2, f_3$  et  $f_4.$

Outre la possibilité de détecter et de localiser les  $q (\leq m-1)$  éléments non nuls du vecteur  $\underline{f}$  (figure 3.3.5), l'approche intégrée développée permet également de corriger (figure 3.3.6) ou du moins d'atténuer (figure 3.3.7) l'effet des défauts détectés.

**Illustration du cas (c)**

Nous ne considérons que les mesures  $y_1$  et  $y_4$ . Le modèle de défaillance (3.3.68) est alors décrit par le système d'équations d'état suivant :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.3.126a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.126b)$$

Il faut donc générer  $\binom{4}{2-1} = 5$  résidus  $r^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), chacun étant insensible à 1 ( $= m - 1$ ) élément du vecteur  $\underline{f}$ . La table ci-dessous, résume les propriétés que doivent vérifier ces résidus. Nous constatons qu'elle présente les mêmes caractéristiques qu'une table construite selon le schéma (a). Nous ne pouvons par conséquent détecter et localiser des défauts simultanés.

Si	FDIO <sub>1=r<sup>1</sup></sub>	FDIO <sub>2=r<sup>2</sup></sub>	FDIO <sub>3=r<sup>3</sup></sub>	FDIO <sub>4=r<sup>4</sup></sub>	FDIO <sub>5=r<sup>5</sup></sub>	Logique de décisions
$f_1(t) \neq 0$	0	1	1	1	0	$a_1 = l_{r^2} \cap l_{r^3} \cap l_{r^4}$
$f_2(t) \neq 0$	1	0	1	1	1	$a_2 = l_{r^1} \cap l_{r^3} \cap l_{r^4}$
$f_3(t) \neq 0$	1	1	0	1	1	$a_3 = l_{r^1} \cap l_{r^2} \cap l_{r^4}$
$f_4(t) \neq 0$	1	1	1	0	1	$a_4 = l_{r^1} \cap l_{r^2} \cap l_{r^3}$

Table 3.3.6 : Isolation robuste pour  $n=4$  et  $m=2$  (système à 4 réservoirs)

Nous nous intéressons dans cette partie uniquement au développement des résultats de l'algorithme pour le cas (c).

Étude et mise en oeuvre de l'observateur 2 ("FDIO<sub>2</sub>")

**Étape 1 :** Selon la table 3.3.6, le résidu  $\underline{r}^2$  est insensible à l'élément  $f_2$ , mais sensible à  $f_1$ ,  $f_3$  et  $f_4$ . Nous considérons alors le modèle de défaillance suivant :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + F_d^2 \underline{f}^2 + E_d^2 d^2 \quad (3.3.127a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.127b)$$

$$\text{où : } \bar{f} = \{2\}, f = \{1, 3, 4\}, F_d^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_d^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{f}^2 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \text{ et } d^2 = [f_2]$$

Les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_4$  sont vérifiées.

**Étape 2 :** Le résidu  $\underline{r}^2$  doit être insensible à l'entrée inconnue  $d^2 = [f_2]$ . Nous recherchons alors le sous-système indépendant des entrées inconnues correspondant.

La matrice  $E_d^2$  est de plein rang colonnes, il existe donc une matrice régulière

$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^2)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$PE_d^2 = \begin{bmatrix} P_1 \\ (E_d^2)^+ \end{bmatrix} E_d^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.128)$$

avec :

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.129)$$

$$(E_d^2)^+ = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (3.3.130)$$

$$P_1 \times P_1^T = I_3 \quad (3.3.131)$$

La matrice  $P$  est inversible (par construction), son inverse est donnée par

$P^{-1} = [P_1^T \ E_d^2]$  soit,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.132)$$

En prémultipliant l'équation (3.3.127a) par la matrice régulière P, et d'après le changement de variable  $\hat{\underline{x}} = P\underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}$ , nous obtenons le sous-système suivant :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}^2 \quad (3.3.133a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_2 \quad (3.3.133b)$$

Où  $\hat{\underline{x}}_2$  représente le nouveau vecteur des entrées inconnues.

**Étape 3 :** La matrice  $\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  est nulle  $\Leftrightarrow$  cas (c)

**Étape 4 :** Génération de résidu

*cas (c) :*  $\hat{C}_2 = 0_{m \times p}$

Le système (3.3.133) est équivalent à :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \mathcal{F}_d^2 \underline{f}^2 + \mathcal{E}_d^2 d^2 \quad (3.3.134a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.3.134b)$$

Où :

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}}_1, \quad \mathcal{F}_d^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_d^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } d^2 = \hat{\underline{x}}_2$$

La matrice  $\mathcal{E}_d^2$  est de plein rang colonnes. Ce système (3.3.134) présente donc la même structure que le modèle de défaillance (3.3.127). Il suffit de remplacer le système (3.3.127) par (3.3.134), de retourner à l'étape 2 et de répéter le même algorithme, jusqu'à obtenir le sous-système fonction uniquement des défauts à détecter  $\underline{f}^2$ .

Toutefois, comme le stipulait la remarque 3.3.5, l'hypothèse H<sub>4</sub> pour le système (3.3.134) n'est pas vérifiée. En effet, la matrice  $\mathcal{E}_d^2$  est égale à la somme des deux premières colonnes de la matrice  $\mathcal{F}_d^2$  ce qui donne  $\text{rang}[\mathcal{E}_d^2 \quad \mathcal{F}_d^2] = 3 < 4$ .

**Étape 2 :** Le résidu  $\underline{r}^2$  doit être insensible à l'entrée inconnue  $d^2 = \hat{\underline{x}}_2$ . Nous recherchons alors le sous-système indépendant de l'entrée inconnue correspondant.

La matrice  $\mathcal{E}_d^2$  est de plein rang colonnes, il existe donc une matrice régulière  $P_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ (\mathcal{E}_d^2)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$P_2 \mathcal{E}_d^2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ (\mathcal{E}_d^2)^+ \end{bmatrix} \mathcal{E}_d^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.135)$$

avec :

$$P_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.136)$$

$$(\mathcal{E}_d^2)^+ = [-1/2 \quad 1/2 \quad 0] \quad (3.3.137)$$

$$P_3 \times P_3^T = I_2 \quad (3.3.138)$$

La matrice  $P_2$  est inversible (par construction), son inverse est donnée par  $P_2^{-1} = \begin{bmatrix} P_3^T & \mathcal{E}_d^2 \end{bmatrix}$  soit,

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.139)$$

Prémultiplions l'équation (3.3.134a) par la matrice régulière  $P_2$ , et par le changement de variable  $\underline{\hat{x}} = P_2 \underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ , nous obtenons le sous-système suivant :

$$\dot{\underline{\hat{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -3/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -2 \end{bmatrix} \underline{\hat{x}}_1 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{x}_2 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}^2 \quad (3.3.140a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\hat{x}}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_2 \quad (3.3.140b)$$

où  $\hat{x}_2$  représente la nouvelle entrée inconnue.

**Étape 3 :** La matrice  $\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  est de plein rang colonnes  $\Leftrightarrow$  cas (a)

**Étape 4 :** Génération de résidus

*cas (a) :* Nous savons déterminer une matrice régulière  $P_4$  telle que :

$$P_4 \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} P_5 \\ \hat{C}_2^+ \end{bmatrix} \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.141)$$

$$\text{avec : } P_5 = [0 \quad 1] \quad (3.3.142)$$

$$\hat{C}_2^+ = [1 \quad 0] \quad (3.3.143)$$

$$P_5 \times P_5^T = 1 \quad (3.3.144)$$

Prémultiplions l'équation de mesure (3.3.140b) par la matrice  $P_4$ ,

$$\hat{y} = [0 \ 1] \underline{y} = [0 \ 1] \hat{\underline{x}}_1 \quad (3.3.145)$$

$$\hat{\underline{x}}_2 = [1 \ 0] \left( \underline{y} - \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \right) \quad (3.3.146)$$

nous obtenons alors le sous-système indépendant de l'entrée inconnue  $d^2$  :

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}^2 \quad (3.3.147a)$$

$$\hat{y} = [0 \ 1] \hat{\underline{x}}_1 \quad (3.3.147b)$$

Ce sous-système est observable, nous pouvons arbitrairement fixer la dynamique de l'observateur. Nous proposons alors comme estimateurs de  $\hat{\underline{x}}_1$ ,  $\hat{\underline{x}}_2$  et  $\underline{x}$ , les vecteurs  $\underline{z}^2$ ,  $\hat{\underline{x}}_2^2$  et  $\hat{\underline{x}}^2$  définis par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}^2 &= \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \underline{z}^2 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -5/\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix} (\hat{y} - [0 \ 1] \underline{z}^2) \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -6 \end{bmatrix} \underline{z}^2 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -5/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.148)$$

$$\hat{\underline{x}}_2^2 = [1 \ 0] \left( \underline{y} - \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{z}^2 \right) \quad (3.3.149)$$

$$\hat{\underline{x}}^2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}^2 \\ \hat{\underline{x}}_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.150)$$

où  $K = \begin{bmatrix} -5/\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}$  représente le gain de l'observateur tel que la dynamique de l'observateur (3.3.148) soit égale -4.

Analyse de la convergence : L'erreur d'estimation  $\hat{\underline{e}}_1^2 = \hat{\underline{x}}_1 - \underline{z}^2$  d'après (3.3.147) et (3.3.148) obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\hat{\underline{e}}}_1^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -6 \end{bmatrix} \hat{\underline{e}}_1^2 + \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}^2 \quad (3.3.151)$$

L'erreur d'observation (résidu) est donc décrite par les défauts appartenant à  $f$  :

$$\underline{r}^2 = \hat{y} - [0 \ 1] \underline{z}^2 = [0 \ 1] \hat{\underline{e}}_1^2 \quad (3.3.152)$$

Etude de la sensibilité du résidu  $\underline{r}^2$  aux défauts appartenant à  $f$  :

Par la condition c3.3.1b du théorème 3.3.1, les défauts  $f_1$ ,  $f_3$  et  $f_4$  sont détectables, car l'espace commandable et observable des triplets respectifs

$$\left( [0 \ 1], \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left( [0 \ 1], \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left( [0 \ 1], \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est non vide.}$$

Conclusion de la procédure de détection.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} ([0 \ 1] \tilde{e}_1^2(t)) \begin{cases} = 0 \ \forall \ f_2 \ (\in \bar{f}) \\ \neq 0 \ \text{si } f_1 \neq 0 \ \text{ou } f_3 \neq 0 \ \text{ou } f_4 \neq 0 \ (\in f) \end{cases} \quad (3.3.153)$$

Le résidu  $r^2$  est insensible aux variations de  $f_2$  et présente une sensibilité aux défauts  $f_1, f_3$  et  $f_4$ .

Remarque : Bien que les éléments  $f_1$  et  $f_3$  soient linéairement dépendants, (remarque 3.3.5) il n'y a pas de problème de détection et d'isolation de défauts, car par hypothèse nous avons considéré que seul un défaut à la fois pouvait apparaître, afin de respecter les conditions imposées par le schéma (a) (identique à la table 3.3.6).

**Étape 5 : Accommodation de défauts**

$$\hat{C}_2 = 0_{m \times p}$$

*cas (c) :* Malgré la possibilité d'estimer l'état  $\underline{x} = \hat{\underline{x}}_1$  du sous-système (3.3.133) indépendamment de l'entrée inconnue (relation 3.3.150), nous ne pouvons pas reconstruire l'état complet  $\underline{x}$  et par conséquent le défaut  $f_2$ . Ainsi, seule la commande de référence ou un retour de sortie peut être appliqué ( $u = v_{ref} - (L_y \underline{y})$ ). Nous avons choisi, ici d'appliquer uniquement la commande de référence, car le système est stable.  $\diamond$

D'après l'ensemble des résultats, les observateurs 1 et 4 sont construits selon les hypothèses du cas (a) et les observateurs 2 et 3 selon le cas (c). Nous pouvons alors seulement reconstruire les défauts  $f_1, f_4$ , néanmoins, nous pouvons détecter et localiser tous les défauts à condition qu'ils n'apparaissent pas simultanément.

L'ensemble de ces résultats sont synthétisés sur la figure et la table suivante.

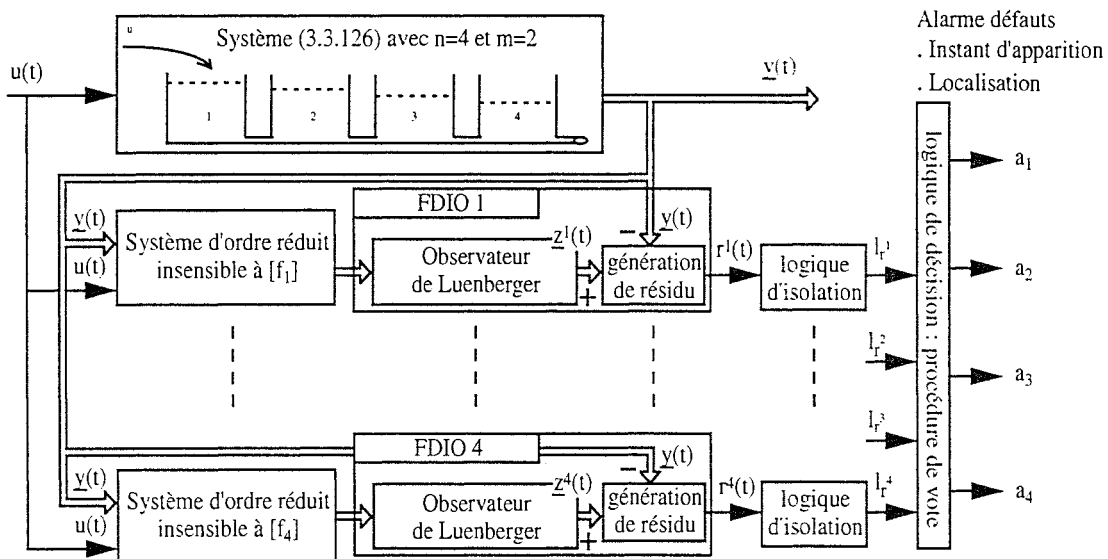


Fig 3.3.8 : Structure du bloc FDI pour n=4 et m=2 (système à 4 réservoirs)

Si	$f_1 \neq 0$	$f_2 \neq 0$	$f_3 \neq 0$	$f_4 \neq 0$
Alarme correspondante	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Etat $\underline{z}^i$ à utiliser	$\underline{z}^1$	$\underline{z}^2$	$\underline{z}^3$	$\underline{z}^4$
Estimation d'état correspondante	$\hat{\underline{x}}^1$	Nous ne pouvons pas reconstruire l'état d'origine $\underline{x}$ ainsi que les éléments $f_2$ et $f_3$		$\hat{\underline{x}}^4$
Estimation des défauts	$\hat{f}_1$			$\hat{f}_4$
Loi de commande	$u = v_{ref} - \hat{f}_1$		$u = v_{ref}$	

Table 3.3.7 : Estimation de l'état  $\underline{x}$ , des éléments  $f_i$  et définition de la loi de commande.

Nous ne présentons que les résultats du bloc FDI, sachant que l'accommodation du défaut  $f_1$  donne les mêmes résultats que dans l'exemple précédent (voir fig 3.3.6).

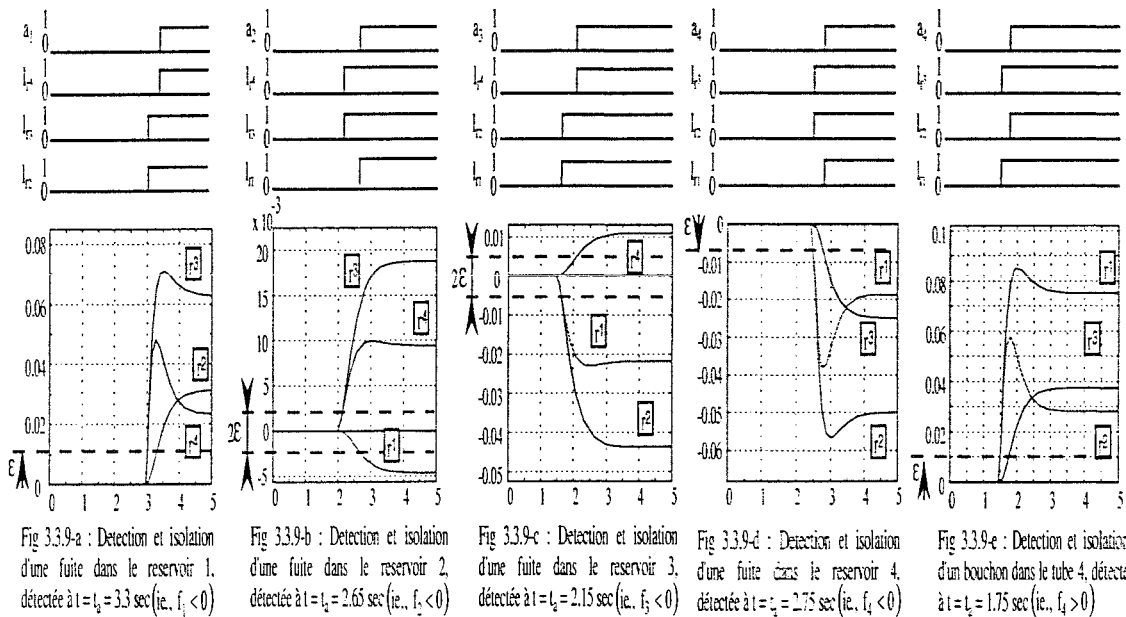


Fig 3.3.9 : Observations des résidus, des logiques d'isolation et des alarmes correspondant aux différents défauts de composants détectés et localisés par le bloc FDI.

### Conclusion

Avantages : \* Les observateurs de la table 3.3.6 vérifient les propriétés, nous pouvons :  
 - estimer les défauts  $f_1, f_4$ ,  
 - éliminer les effets du défaut  $f_1$ .

Inconvénients : \*  $m$  étant égal à 2, seul un défaut à la fois peut être détecté et localisé, nous ne pouvons pas :  
 - reconstruire les défauts  $f_2, f_3$ ,  
 - éliminer les effets des défauts  $f_2, f_3$  et  $f_4$ .

Bien que nous ne disposons que de deux mesures, l'approche permet de détecter, de localiser chaque élément non nul du vecteur  $\underline{f}$  (figure 3.3.9), sous condition qu'il apparaisse à des instants différents. Elle permet également d'éliminer les effets du défaut  $f_1$ .



### 3.3.3.2 Défauts d'actionneurs

Le procédé étudié (fig 3.3.10) est un système d'entraînement à bande développé au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, France) et consacré à la validation d'algorithmes de diagnostic (Hittinger 1997).

#### Présentation de la maquette

Le système se compose de trois entraînements. Le rouleau tracteur (moteur  $M_2$ ) qui entraîne la bande, un dérouleur (moteur  $M_1$ ) et un enrouleur (moteur  $M_3$ ).

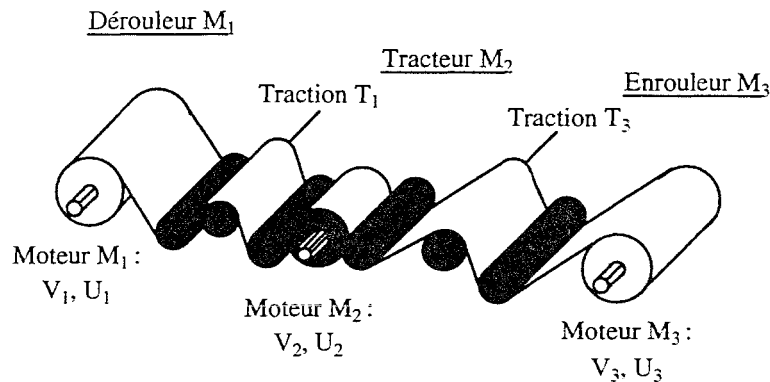


Fig 3.3.10 : Enroulement maquette

Afin d'assurer son fonctionnement, les capteurs et actionneurs suivants sont disponibles :

- mesure de vitesse du dérouleur  $M_1$  par dynamo tachymétrique ( $V_1$ ),
- référence de traction du dérouleur (réf  $T_1$ ),
- mesures de traction du dérouleur par jauges de contraintes ( $T_1$ ),
- référence de vitesse linéaire de la bande (réf  $V_2$ ),
- mesure de vitesse du rouleau tracteur  $M_2$  par dynamo tachymétrique ( $V_2$ ),
- référence de vitesse de l'enrouleur  $M_3$  par dynamo tachymétrique ( $V_3$ ),
- référence de traction de l'enrouleur (réf  $T_3$ ),
- mesures de traction de l'enrouleur par jauges de contraintes ( $T_3$ ),
- commande en tension du dérouleur  $M_1$  ( $U_1$ ),
- commande en tension du tracteur  $M_2$  ( $U_2$ ),
- commande en tension de l'enrouleur  $M_3$  ( $U_3$ ).

#### Approche diagnostic :

A partir des différents signaux mesurés pour une période d'échantillonnage de 100ms, un modèle linéaire discret du système a été établi, autour du point de fonctionnement nominal suivant :

$$\underline{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = [0.1 \quad 0.45 \quad 0.3]^T$$

Les matrices obtenues pour cette procédure d'identification sont données ci-dessous,

$$A = \begin{bmatrix} 0.9020 & 0 & -0.0905 \\ 0.0100 & 0.7891 & -0.0364 \\ -0.0299 & 0 & 0.6794 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.4504 & 0.0431 & 0.1256 \\ 0.0420 & 0.2413 & 0.0575 \\ -0.1321 & -0.0196 & 0.3758 \end{bmatrix}$$

et le modèle de défaillance correspondant, est le suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + B\underline{f}_k \quad (3.3.154a)$$

$$\underline{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_k \quad (3.3.154b)$$

où :

$$\underline{y}_k = \begin{bmatrix} T_1(k) \\ V_2(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m=2}, \underline{x}_k = \begin{bmatrix} T_1(k) \\ V_2(k) \\ T_3(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n=3}, \underline{u}_k = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{e=3} \text{ et } \underline{f}_k = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ f_3(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{e=3}$$

Les éléments  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  représentent respectivement les défauts d'actionneurs  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Afin d'évaluer les performances de l'algorithme (partie 3.3.2), nous n'avons volontairement choisi que deux mesures. Nous présentons successivement les résultats du bloc FDI et les estimations respectives de l'état, du défaut détecté (ie.,  $f_i$ ) et la reconfiguration de la loi de commande afin d'éliminer les effets du défaut détecté.

### Formulation du problème

Deux cas sont à considérer :

- cas 1 : le nombre de commandes est inférieur ou égal aux nombres de mesures, ( $e \leq m$ )
- cas 2 : le nombre de commandes est supérieur aux nombres de mesures, ( $e > m$ )

Le cas 1 consiste à reprendre le schéma (b), de générer  $e$  observateurs générant chacun un résidu sensible à un et un seul élément du vecteur  $\underline{f}$  (voir remarque 3.3.7). Nous pouvons alors détecter et localiser tous les défauts simultanés et ceci sans procédure de vote.

Le cas 2 est construit, selon le schéma (c) (voir remarque 3.3.7). Nous pouvons détecter et localiser simultanément un maximum de  $p$  actionneurs en défauts.

**Remarque 3.3.7 :** L'algorithme présenté dans la partie 3.3.2 reste identique pour des défauts d'actionneurs, à la seule différence que les vecteurs  $L_{i_j}$  présents dans les matrices  $E_d^i$  et  $F_d^i$  ne représentent non plus la  $(i_j)^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $I_n$ , mais la  $(i_j)^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de commande  $B$  (voir les relations 3.3.3 et 3.3.4), avec  $j$  variant de 1 à  $e$  et  $\text{rang}(B) = \text{rang}[E_d^i \ F_d^i] = e$ .

### Application au système de la bobineuse

Le système est composé de 3 (=n) états, de 3 (=e) actionneurs et de 2 (=m) mesures : nous sommes dans le cas 2. Il suffit, de générer un ensemble de  $\binom{3}{2-1} = 4$  résidus  $\underline{r}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ), chacun étant insensible à 1 (=m-1) élément du vecteur  $\underline{f}$ . La table ci-dessous, résume les propriétés vérifiées par ces résidus. p étant égal à 1, la table a les mêmes caractéristiques qu'une table construite selon le schéma (a). Ainsi seuls les défauts d'actionneurs non simultanés peuvent être détectés et localisés.

Si	FDIO <sub>1</sub> =r <sup>1</sup>	FDIO <sub>2</sub> =r <sup>2</sup>	FDIO <sub>3</sub> =r <sup>3</sup>	FDIO <sub>4</sub> =r <sup>4</sup>	Logique de décisions
f <sub>1</sub> (t) ≠ 0	0	1	1	0	a <sub>1</sub> = I <sub>r<sup>2</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>3</sup></sub>
f <sub>2</sub> (t) ≠ 0	1	0	1	1	a <sub>2</sub> = I <sub>r<sup>1</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>3</sup></sub>
f <sub>3</sub> (t) ≠ 0	1	1	0	1	a <sub>3</sub> = I <sub>r<sup>1</sup></sub> ∩ I <sub>r<sup>2</sup></sub>

Table 3.3.8 : Isolation pour n=3 et m=2, schéma (c)

L'ensemble des sous-systèmes étant observable, nous avons fixé la dynamique des observateurs à 0.1.

#### Cas (a) : résultats de simulation de l'observateur 1

**FDIO 1 = FDIO 4 :**

$$\underline{z}_{k+1}^1 = \begin{bmatrix} -1.7568 & 7.4461 \\ -0.4630 & 1.9568 \end{bmatrix} \underline{z}_k^1 + \begin{bmatrix} -0.8122 & -7.8334 & 0 & -0.1004 & 0.2886 \\ -0.1357 & -1.2469 & 0 & 0.2240 & 0.1686 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{u}_k \end{bmatrix}$$

**Estimation d'état :** 
$$\hat{\underline{x}}_k^1 = \begin{bmatrix} -0.0293 & 0.0881 \\ -0.3143 & 0.9448 \\ 0.9885 & 0.3288 \end{bmatrix} \underline{z}_k^1 + \begin{bmatrix} 0.9914 & -0.0924 \\ -0.0924 & 0.0086 \\ 0.2908 & -0.0271 \end{bmatrix} \underline{y}_k$$

**Résidu r<sup>1</sup> :** 
$$\underline{r}_k^1 = [-0.0928 \quad -0.995] \underline{y}_k - [0.3156 \quad -0.9488] \underline{z}_k^1 = [0.3156 \quad -0.9488] \hat{\underline{e}}_{1k}^1$$

**Erreur d'estimation :** 
$$\hat{\underline{e}}_{1k}^1 = \hat{\underline{x}}_{1k}^1 - \underline{z}_k^1 \quad \hat{\underline{e}}_{1k+1}^1 = \begin{bmatrix} -1.7568 & 7.4461 \\ -0.4630 & 1.9568 \end{bmatrix} \hat{\underline{e}}_{1k}^1 + \begin{bmatrix} -0.1004 & 0.2886 \\ 0.2240 & 0.1686 \end{bmatrix} \underline{f}_k^1 \quad \text{avec : } \underline{f}^1 = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

**Etude de la sensibilité du résidu r<sup>1</sup> aux défauts appartenant à f :**

De la condition c3.3.1b du théorème 3.3.1, les défauts f<sub>2</sub> et f<sub>3</sub> sont détectables, car l'espace commandable et observable des triplets respectifs

$$\left( [0.3156 \quad -0.9488] \cdot \begin{bmatrix} -1.7568 & 7.4461 \\ -0.4630 & 1.9568 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.1004 \\ 0.2240 \end{bmatrix} \right), \left( [0.3156 \quad -0.9488] \cdot \begin{bmatrix} -1.7568 & 7.4461 \\ -0.4630 & 1.9568 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2886 \\ 0.1686 \end{bmatrix} \right) \text{ est non vide.}$$

**L'analyse est immédiate :**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{r}_k^1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( [0.3156 \quad -0.9488] \hat{\underline{e}}_{1k}^1 \right) \begin{cases} = 0 \quad \forall f_1 \in \bar{f} \\ \neq 0 \quad \text{si } f_2 \neq 0 \text{ ou } f_3 \neq 0 \quad (\in f) \end{cases}$$

**Estimation :**

Si nous supposons que  $f_2$  et  $f_3$  sont nuls, l'estimation d'état  $\hat{x}^1$  tend vers  $\underline{x}$ . Nous pouvons estimer l'élément  $f_1$  :

$$\hat{f}_{1k} = [-2.2011 \quad 0.2052] \left( \underline{y}_{k+1} - \begin{bmatrix} 0.902 & 0 & -0.0905 \\ 0.010 & 0.7891 & -0.0364 \end{bmatrix} \hat{x}_k - \begin{bmatrix} -0.4504 & 0.0431 & 0.1256 \\ 0.0420 & 0.2413 & 0.0575 \end{bmatrix} \underline{u}_k \right)$$

**Loi de commande :**  $\underline{u}_k = \underline{v}_{refk} + \underline{u}_{adk} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.45 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \underline{u}_{adk}$

où  $\underline{u}_{adk} = -B^+ E_d^1 \hat{f}_{1k} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{f}_{1k}$ , est la solution exacte qui annule le défaut  $f_1$  (i.e.  $\Phi = 0$ )

car la matrice de commande B est inversible (i.e.  $B^+ = B^{-1}$ ).

Nous pouvons détecter, localiser et corriger le défaut  $f_1$ .

◇

D'après l'ensemble des résultats, les trois observateurs sont construits selon les hypothèses du cas (a). Ces résultats sont synthétisés sur la figure et la table suivante.

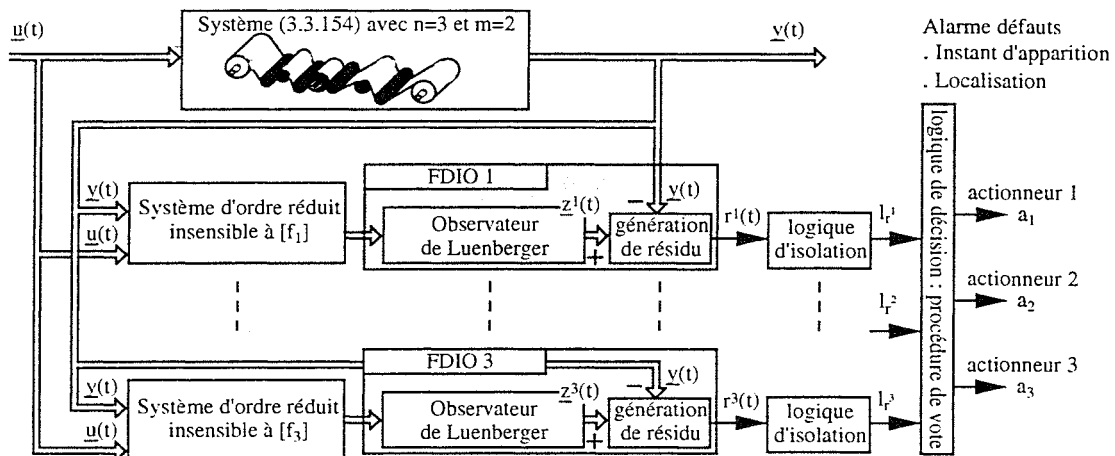


Fig 3.3.11 : Structure du bloc FDI pour n=3 et m=2 (bobineuse)

Si	$f_1 \neq 0$	$f_2 \neq 0$	$f_3 \neq 0$
Alarme correspondante	$a_1$	$a_2$	$a_3$
Etat $\underline{z}^i$ à utiliser	$\underline{z}^1$	$\underline{z}^2$	$\underline{z}^3$
Estimation d'état correspondante	$\hat{x}^1$	$\hat{x}^2$	$\hat{x}^3$
Estimation des défauts	$\hat{f}_1$	$\hat{f}_2$	$\hat{f}_3$
Loi de commande	$\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.45 \\ 0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{f}_1$	$\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.45 \\ 0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{f}_2$	$\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.45 \\ 0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{f}_3$

Table 3.3.9 : Estimation de l'état  $\underline{x}$ , des éléments  $f_i$  et définition de la loi de commande.

Nous ne présentons que les résultats du bloc FDI, ainsi que l'accommodation d'un défaut, afin de ne pas surcharger la présentation.

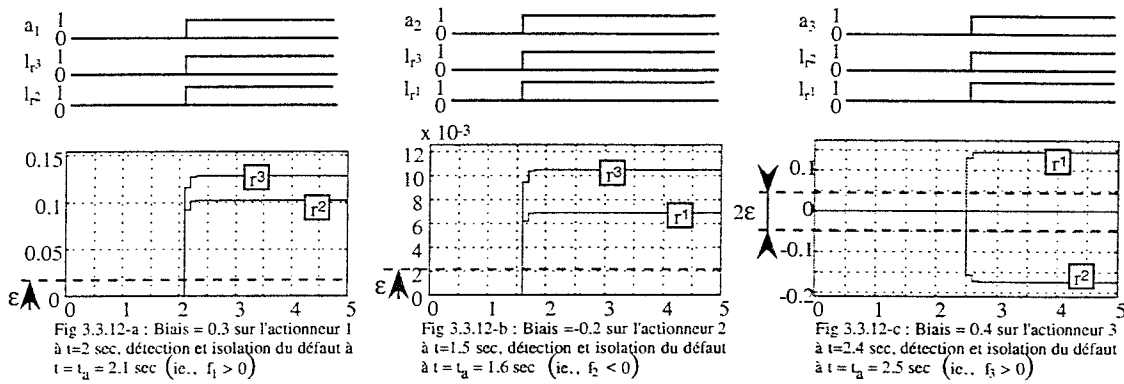


Fig 3.3.12 : Observations des résidus, des logiques d'isolation et des alarmes correspondant aux différents défauts d'actionneurs détectés et localisés par le bloc FDI.

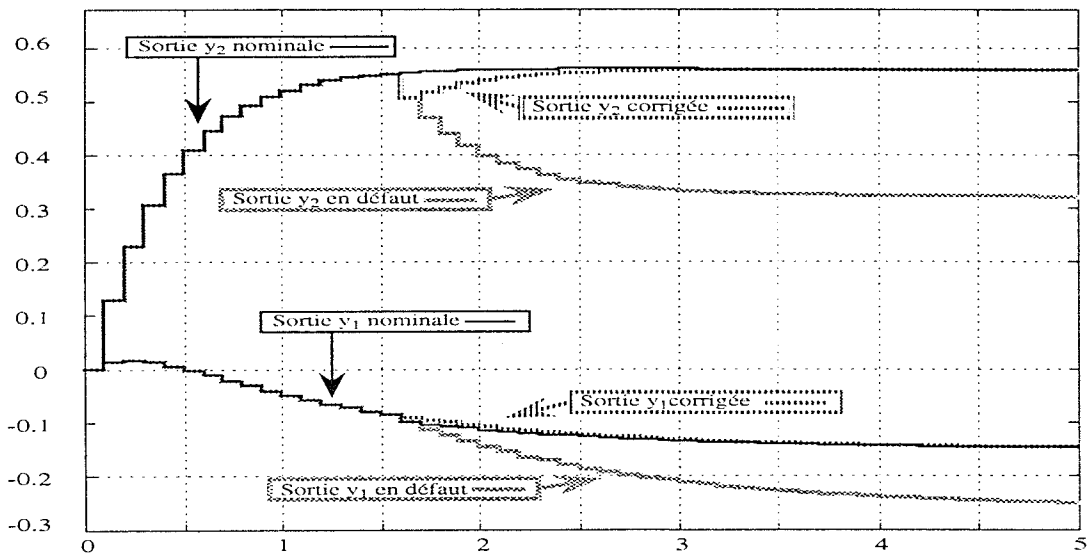
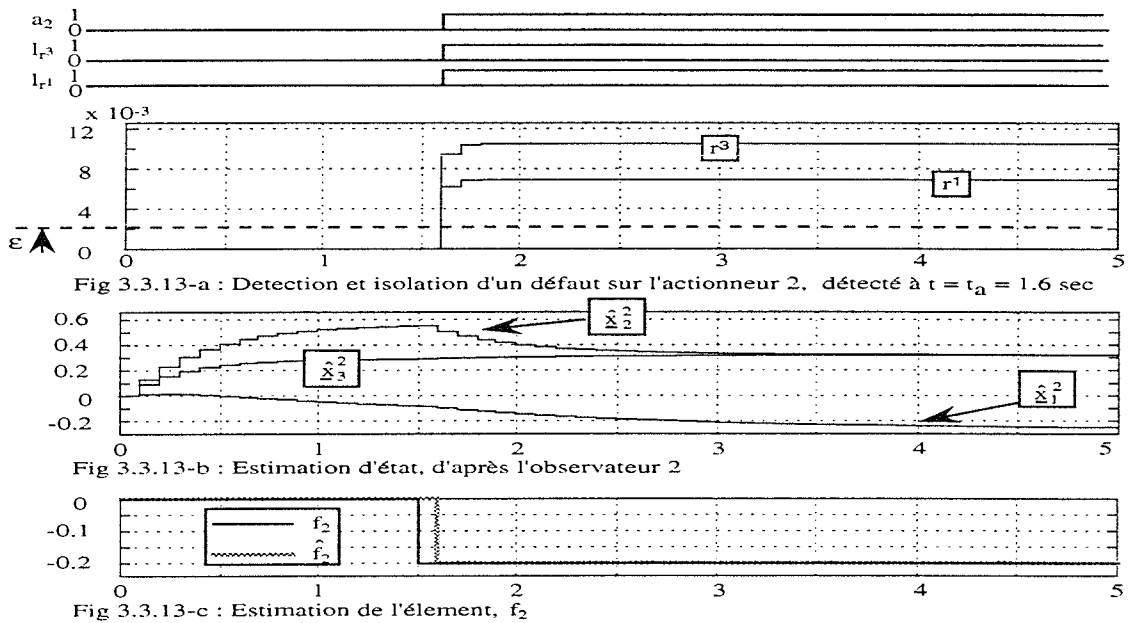


Fig 3.3.13 : Détection, isolation, et correction d'un défaut sur l'actionneur 2

## **Conclusion.**

Avantages : \* Les observateurs de table 3.3.8 vérifient les propriétés,  
nous pouvons : - estimer les défauts d'actionneurs,  
\_ éliminer les effets de chaque défauts d'actionneurs.

Inconvénients : \*  $m$  étant égale à 2, seul un défaut à la fois peut être détecté, localisé  
et corrigé.

Bien que nous ne disposons que de deux mesures, l'approche permet de détecter, de localiser chaque défaut d'actionneurs, à condition qu'il apparaisse à des instants différents (fig 3.3.12). Elle permet également d'éliminer les effets de chaque défaut (fig 3.3.13).

### 3.4 CONCLUSION

Le travail présenté dans ce chapitre s'inscrit dans le cadre du diagnostic des systèmes déterministes et de la reconfiguration des lois de commande.

Nous avons vu comment les résultats obtenus pour le diagnostic des systèmes dynamiques sans entrées inconnues peuvent être étendus aux systèmes avec entrées inconnues. L'introduction de l'approche par normes minimales ou par décomposition en valeurs singulières a permis d'unifier les systèmes avec et sans entrées inconnues, du point de vue de l'estimation. En particulier, elle a permis de transformer le problème de la génération de résidus en présence d'entrées inconnues en un problème simple de génération de résidus sans entrées inconnues.

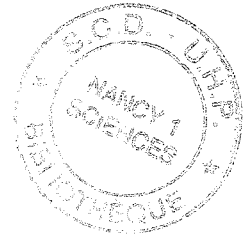
Dans une première phase, nous avons montré, sans hypothèse sur la construction des matrices de distribution des défauts, comment ces défauts agissent sur le résidu en présence d'entrées inconnues sur l'état et la sortie du système, et de quelle façon nous localisons ces défauts (schémas a ou b). Une extension simple au développement de procédures de génération de résidus, pour la détection et l'isolation de défauts de capteurs, d'actionneurs et de composants a pu être ainsi établie. Nous avons étudié l'existence et la stabilité des générateurs de résidus.

A partir de ces résultats, nous avons développé une approche systématique (schéma c) permettant non seulement de détecter, de localiser, d'estimer tous les défauts additifs sur l'entrée du système mais également de modifier la stratégie de commande du processus afin de conserver au mieux les performances du système dans son ensemble. Cette dernière phase dénommée reconfiguration ou restructuration de la loi de commande a fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre. Pour montrer les performances de cette méthode, nous avons simulé des défauts de composants sur un système à quatre réservoirs identique à celui traité par (Ge et Fang 1988), ainsi que des défauts d'actionneurs sur un processus pilote d'entraînement à bande (Hittinger 1997).

---







# **PARTIE STOCHASTIQUE**

## **FILTRAGE OPTIMAL ET DIAGNOSTIC DES SYSTEMES DYNAMIQUES LINÉAIRES DISCRETS**

Après avoir développé une approche intégrée de diagnostic, associant les phases de détection, d'isolation et de correction de défauts, pour les systèmes linéaires déterministes, nous proposons d'étendre ces résultats au cas plus général des systèmes linéaires stochastiques. Nous proposons une solution au problème du filtrage optimal, pour les systèmes d'états soumis à des entrées inconnues et à des bruits. Nous proposons un nouvel algorithme de détection et d'isolation de défauts. Cette partie constitue donc une généralisation de la partie déterministe et fait appel à plusieurs de ses résultats.

---



## CHAPITRE 4    **FILTRE DE KALMAN EN PRÉSENCE D'ENTRÉES INCONNUES** ( $E_m = 0$ )

### 4.0 INTRODUCTION

Le filtre de Kalman est le meilleur estimateur de l'état des systèmes dynamiques linéaires stochastiques à condition de connaître toutes les entrées externes du système. Lorsque les propriétés statistiques des bruits de modèle et de mesures sont connues, c'est un estimateur linéaire minimisant la variance de l'erreur d'observation. De plus, si les bruits blancs sont gaussiens, il est optimal, c'est à dire que, de tous les estimateurs (linéaires ou non), c'est celui dont la variance de l'erreur d'observation est la plus faible. Les algorithmes donnant la solution de ce problème ont été déterminés initialement par (Kalman, 1960) dans le cas discret et (Kalman et Bucy, 1961) dans le cas continu. Malheureusement, dans de nombreuses installations industrielles (centrales nucléaires, moteurs complexes ...), certaines entrées du système ne sont pas accessibles à la mesure, nous devons alors traiter le problème d'estimation par des méthodes adaptées.

Le problème de l'estimation de l'état quand certaines entrées du système sont inconnues, a fait l'objet de nombreux travaux pour les systèmes déterministes, mais dans un cadre stochastique, l'intérêt s'est surtout porté sur l'estimation des matrices de covariance des bruits de modèle et de mesures. De plus, la plupart des algorithmes qui permettent d'estimer simultanément l'état, les entrées inconnues et les matrices de covariance des bruits, sont reconnus comme sous-optimaux. Darouach et al (1992a), ont présenté une méthode optimale utilisant le filtre de Kalman généralisé au sens des moindres carrés développé par Darouach et al (1991). D'autres approches, notamment celle de Nikoukhah et al (1992) et Darouach et al (1994b, 1995) ont permis un développement plus simple, plus harmonieux des problèmes d'estimation de l'état et des entrées inconnues. Ces résultats s'appuient sur une transformation du système non-singulier soumis à des entrées inconnues en un système singulier dont le vecteur d'état est augmenté du nombre des entrées inconnues. Les conditions de convergence et de stabilité de cet estimateur sont établies à partir de l'équation de Riccati généralisée associée.

En nous appuyant sur les résultats obtenus dans la partie 2.3.4B et principalement sur nos derniers travaux (Koenig et Nowakowski 1997d), nous traitons le problème du filtrage à entrées inconnues par une approche nouvelle qui nous permet d'appliquer les résultats connus du filtre de Kalman classique (i.e. sans entrées inconnues). L'idée principale consiste, à partir du modèle stochastique à entrées inconnues du procédé, à trouver le sous-modèle robuste aux entrées inconnues dont les bruits de dynamique et de mesures sont décorrélés. Connaissant le changement de base effectué, nous savons alors reconstruire l'état et les entrées inconnues du système d'origine.

## 4.1 FILTRE DE KALMAN ROBUSTE

Nous présentons tout d'abord la réduction du modèle stochastique à entrées inconnues en un sous-modèle robuste aux entrées inconnues. Ensuite, nous proposons une solution pour ramener ce sous-modèle à bruits de dynamique et de mesures corrélés, en un sous-système équivalent mais à bruits de dynamique et de mesures décorrélés. Nous présentons alors un estimateur optimal au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation et nous donnons les conditions de convergence et de stabilité. Enfin, dans l'esprit du chapitre 2, nous donnons la forme séquentielle de cet estimateur utilisé sur un exemple (Darouach et al 1995) afin d'en montrer les performances et la facilité de mise en oeuvre.

### 4.1.1 Notations et hypothèses de base

Le système linéaire et invariant étudié correspond à un système stochastique discret à entrées inconnues décrit par les relations suivantes :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + E_d \underline{d}_k + \underline{w}_k \quad (4.1a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (4.1b)$$

Où  $\underline{w}_k$  représente les bruits de dynamique et  $\underline{v}_k$  les bruits de mesures.

Les séquences de bruits  $\{\underline{w}_k\}$  et  $\{\underline{v}_k\}$  sont supposées blanches, discrètes, gaussiennes, centrées, non corrélées et l'état initial  $\underline{x}_0$  est une variable aléatoire indépendante des séquences  $\{\underline{w}_k\}$  et  $\{\underline{v}_k\}$ . Leurs propriétés aux premier et second ordres sont :

$$E\{\underline{w}_k\} = 0, E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{x}_0\} = \bar{\underline{x}}_0, \quad (4.2)$$

$$E\left\{ \begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \\ \bar{\underline{x}}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_l^T & \underline{w}_l^T & \bar{\underline{x}}_0^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} R\delta_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & Q\delta_{kl} & 0 \\ 0 & 0 & P_0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

où  $\bar{\underline{x}}_0 = \underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0$  et  $R, Q, P_0$  sont des matrices d'autocorrélation symétriques, connues et définies positives.

Quatre hypothèses de base sont à vérifier

$H_1$  :  $m > p$  (nombre de mesures supérieur au nombre d'entrées inconnues)

$H_2$  :  $\text{rang}(C) = m$  (surjectivité de  $C$ )

Il n'y a pas de mesures redondantes pour la synthèse du filtre, toutes les mesures sont linéairement indépendantes.

$H_3$  :  $\text{rang}[E_d] = p$  (injectivité de  $[E_d]$ )

Toutes les entrées inconnues sont linéairement indépendantes.

$H_4$  :  $\text{rang}[CE_d] = p$  (injectivité de  $[CE_d]$ )

Ces hypothèses sont celles utilisées dans la théorie des observateurs à entrées inconnues.

### 4.1.2 Analyse et construction

Hormis la présence des bruits sur le système (4.1), nous sommes dans les mêmes hypothèses que précédemment (partie 2.3.4B).

**Étape 1 :** Nous recherchons dans une première phase, le sous-système robuste aux entrées inconnues.

Sachant que la matrice  $E_d$  est de rang plein colonnes, il existe une matrice régulière

$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$\mathcal{P}E_d = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} E_d = \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

avec :

$$\mathcal{P}_1^T = \text{Ker}(E_d^T) \in \mathfrak{R}^{n \times (n-p)} \quad (4.5)$$

$$E_d^+ = (E_d^T E_d)^{-1} E_d^T \quad (4.6)$$

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1^T = I_{n-p} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^T & E_d \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Si nous prémultiplions l'équation (4.1a) par la matrice  $\mathcal{P}$ , nous transformons le système (4.1) en la forme équivalente suivante :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \hat{A}_{11} \hat{\underline{x}}_{1k} + \hat{A}_{12} \hat{\underline{x}}_{2k} + \hat{B}_1 \underline{u}_k + \mathcal{P}_1 \underline{w}_k \quad (4.9a)$$

$$\hat{\underline{x}}_{2k+1} = \hat{A}_{21} \hat{\underline{x}}_{1k} + \hat{A}_{22} \hat{\underline{x}}_{2k} + \hat{B}_2 \underline{u}_k + \underline{d}_k + E_d^+ \underline{w}_k \quad (4.9b)$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1 \hat{\underline{x}}_1 + \hat{C}_2 \hat{\underline{x}}_2 + \underline{y}_k \quad (4.9c)$$

avec :

$$\hat{\underline{x}} = \mathcal{P}\underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p} \quad (4.10)$$

$$\hat{B} = \mathcal{P}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\hat{A} = \mathcal{P}A\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^T & E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\hat{C} = C\mathcal{P}^{-1} = C \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^T & E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Nous constatons, d'après (4.9b), que les entrées inconnues  $\underline{d}$  agissent directement sur l'état  $(\hat{\underline{x}}_2)$ . Nous pouvons considérer  $(\hat{\underline{x}}_2)$  comme le nouveau vecteur des entrées inconnues. Nous avons alors le sous-système :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \hat{A}_{11}\hat{\underline{x}}_{1k} + \hat{A}_{12}\hat{\underline{x}}_{2k} + \hat{B}_1\underline{u}_k + \mathcal{P}_1\underline{w}_k \quad (4.14a)$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1\hat{\underline{x}}_1 + \hat{C}_2\hat{\underline{x}}_2 + \underline{v}_k \quad (4.14b)$$

dont la structure est identique au système (2.1.1).

Afin de reconstruire l'état complet d'origine  $\left(\underline{x} = \mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}\right)$ , il faut estimer les sous-états  $\hat{\underline{x}}_1$  et  $\hat{\underline{x}}_2$ . D'après les relations (4.14b et 4.20), le sous état  $\hat{\underline{x}}_2$  ne peut être reconstruit que si l'hypothèse  $H_4$  (i.e.  $\text{rang}[CE_d] = \text{rang}[E_d] = p$ ) est vérifiée. Dans ce cas, la matrice  $\hat{C}_2 = CE_d$  est de rang plein colonnes, nous savons trouver une seconde matrice régulière  $\mathcal{P}_2$  telle que :

$$\mathcal{P}_2\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_3 \\ \hat{C}_2^+ \end{bmatrix} \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\text{avec : } \mathcal{P}_3^T = \text{Ker}(\hat{C}_2^T) \in \mathfrak{R}^{m \times (m-p)} \quad (4.16)$$

$$\hat{C}_2^+ = (\hat{C}_2^T \hat{C}_2)^{-1} \hat{C}_2^T \quad (4.17)$$

$$\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3^T = I_{m-p} \quad (4.18)$$

Après multiplication à gauche de l'équation de mesure (4.14b) par la matrice  $\mathcal{P}_2$ ,

$$\hat{\underline{y}}_k = \mathcal{P}_3\underline{y}_k = \mathcal{P}_3\hat{C}_1\hat{\underline{x}}_{1k} + \mathcal{P}_3\underline{v}_k \quad (4.19)$$

$$\hat{\underline{x}}_{2k} = \hat{C}_2^+(\hat{\underline{y}}_k - \hat{C}_1\hat{\underline{x}}_{1k} - \underline{v}_k) \quad (4.20)$$

et substitution de (4.20) dans (4.14a), nous obtenons le sous-système :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \mathcal{A}\hat{\underline{x}}_{1k} + \mathcal{B}\underline{u}_k + \mathcal{G}\underline{w}_k \quad (4.21a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \mathcal{C}\hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (4.21b)$$

$$\text{avec : } \mathcal{A} = (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{C}_2^+\hat{C}_1) \quad (4.22)$$

$$\mathcal{B} = [\hat{B}_1 \quad \hat{A}_{12}\hat{C}_2^+] \quad (4.23)$$

$$\mathcal{G} = [-\hat{A}_{12}\hat{C}_2^+ \quad \mathcal{P}_1] \quad (4.24)$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}_3\hat{C}_1 \quad (4.25)$$

$$\underline{u}_k = \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\underline{w}_k = \begin{bmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \mathcal{P}_3 \underline{y}_k \quad (4.28)$$

$$\underline{v}_k = \mathcal{P}_3 \underline{v}_k \quad (4.29)$$

Ainsi, pour ce nouveau modèle (4.21), la dynamique de l'état (4.21a) est indépendante des entrées inconnues mais les nouveaux bruits  $\underline{w}_k$  et  $\underline{v}_k$  sont corrélés.

En effet, d'après (4.3), (4.27) et (4.29), les propriétés statistiques des bruits de ce nouveau modèle (4.21) sont telles que :

$$E\{\underline{w}_k\} = 0, E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{w}_k \underline{w}_l^T\} = Q \delta_{kl}, E\{\underline{v}_k \underline{v}_l^T\} = \mathcal{R} \delta_{kl}, E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = S^T \delta_{kl}$$

$$\text{avec : } Q = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \delta_{kl}, \mathcal{R} = \mathcal{P}_3 R \mathcal{P}_3^T \text{ et } S^T = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_3 R & 0_{(m-p) \times n} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons cependant nous ramener au cas d'un modèle à bruits décorrélés par la construction d'un modèle équivalent.

**Étape 2 :** Recherche du modèle à bruits décorrélés, équivalent au système (4.21).

Sachant que  $E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = S^T \delta_{kl}$ , il suffit d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\bar{\underline{w}}_k = \underline{w}_k - S \mathcal{R}^{-1} \underline{v}_k \quad (4.30)$$

pour lequel il est facile de vérifier que  $E\{\underline{v}_k \bar{\underline{w}}_l^T\} = 0$ .

$$\left( \text{Preuve : } E\left\{ \underline{v}_k \left( \underline{w}_l - S \mathcal{R}^{-1} \underline{v}_l \right)^T \right\} = S^T - \mathcal{R} \mathcal{R}^{-1} S^T = 0 \right)$$

L'utilisation de ce bruit dans les équations du modèle (4.21) conduit directement au modèle équivalent recherché :

$$\bar{\hat{\underline{x}}}_{1k+1} = \bar{\mathcal{A}} \bar{\hat{\underline{x}}}_{1k} + \mathcal{B} \underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}} \hat{\underline{y}}_k + \mathcal{G} \bar{\underline{w}}_k \quad (4.31a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = C \bar{\hat{\underline{x}}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (4.31b)$$

$$\text{avec : } \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{G} S \mathcal{R}^{-1} C \quad (4.32)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} S \mathcal{R}^{-1} \quad (4.33)$$

**Remarque 4.1 :** Si  $R = \alpha [I_m]$ ,  $\alpha \in \mathfrak{R}^1$  alors  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$  et  $\bar{\mathcal{G}} = 0$ .

$$\left( \text{Preuve : } \mathcal{G} S = -\hat{\mathcal{A}}_{12} \hat{\mathcal{C}}_2^+ R \mathcal{P}_3^T = -\alpha \hat{\mathcal{A}}_{12} \left( \hat{\mathcal{C}}_2^T \hat{\mathcal{C}}_2 \right)^{-1} \hat{\mathcal{C}}_2^T \mathcal{P}_3^T = 0 \text{ voir (4.15)} \right)$$

Les propriétés statistiques des bruits du modèle (4.34) vérifient les propriétés statistiques désirées :

$$E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{w}_k\} = 0, E\left\{\begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T & \underline{w}_1^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \delta_{kl} \quad (4.34)$$

$$\text{où, } \bar{Q} = E\left\{\left(\underline{w}_k - S\mathcal{R}^{-1}\underline{v}_k\right)\left(\underline{w}_1^T - \underline{v}_1^T\mathcal{R}^{-1}S^T\right)\right\} = Q - S\mathcal{R}^{-1}S^T$$

Il suffit alors d'appliquer, sur le système (4.31), le filtre de Kalman discret défini dans le cas des systèmes à bruits non corrélés. Les étapes de correction et de calcul de gain sont conservées, seule est modifiée l'étape de prédiction.

### Étape 3 : Équations du filtre d'estimation de l'état $\hat{\underline{x}}_1$ suivant le modèle (4.31)

Notons  $\hat{\underline{x}}_1(k+1/j)$  l'estimation du vecteur  $\hat{\underline{x}}_{1k+1}$  à partir des informations dont nous disposons à l'instant  $j$ . La mise en oeuvre du filtre de Kalman discret se décompose en deux étapes :

— *une étape de prédiction :*

où il s'agit,

\* d'évaluer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction,

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}}P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)\bar{\mathcal{A}}^T + \mathcal{G}\bar{Q}\mathcal{G}^T \quad (4.35)$$

$$\text{donnée par } P_{\hat{\underline{x}}_1}(k+1/k) = E\left\{\left[\hat{\underline{e}}_1(k+1/k)\right]\left[\hat{\underline{e}}_1(k+1/k)\right]^T\right\}$$

$$\text{avec : } \hat{\underline{e}}_1(k+1/k) = \hat{\underline{x}}_{1k+1} - \hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}}\hat{\underline{e}}_1(k/k) + \mathcal{G}\bar{\underline{w}}_k \quad (4.36)$$

\* de prédire  $\hat{\underline{x}}_1$  à l'instant  $k+1$  compte tenu des mesures disponibles à l'instant  $k$ ,

$$\hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}}\hat{\underline{x}}_1(k/k) + \mathcal{B}\underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}}\hat{\underline{y}}_k \quad (\text{meilleure prédiction}) \quad (4.37)$$

L'état  $\hat{\underline{x}}_1(k+1/k)$  est prédit à partir de  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$  et de la partie déterministe du modèle mathématique (4.31).

— *une étape de correction :*

où il s'agit,

\* d'évaluer la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = (I - \mathcal{K}_k C)P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)\left(I - C^T\mathcal{K}_k^T\right) + \mathcal{K}_k\mathcal{R}\mathcal{K}_k^T \quad (4.38)$$

$$\text{donnée par } P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = E\left\{\left[\hat{\underline{e}}_1(k/k)\right]\left[\hat{\underline{e}}_1(k/k)\right]^T\right\}$$

$$\text{avec : } \hat{\underline{e}}_1(k/k) = \hat{\underline{x}}_{1k} - \hat{\underline{x}}_1(k/k) = (I - \mathcal{K}_k C)\hat{\underline{e}}_1(k/k-1) - \mathcal{K}_k\underline{v}_k \quad (4.39)$$



\* puis d'estimer  $\hat{\underline{x}}_1$  à l'instant  $k$  compte tenu des mesures disponibles à l'instant  $k$ ,

$$\hat{\underline{x}}_1(k/k) = \hat{\underline{x}}_1(k/k-1) + \mathcal{K}_k \left( \hat{\underline{y}}_k - C \hat{\underline{x}}_1(k/k-1) \right) \quad (4.40)$$

avec  $\mathcal{K}_k$  le gain optimal au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation (4.38), donné par :

$$\mathcal{K}_k = P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T \Sigma_k^{-1} \quad (4.41)$$

$$\Sigma_k = \mathcal{R} + C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T \quad (4.42)$$

Le calcul du gain  $\mathcal{K}_k$  est montré dans l'étape suivante, de même que l'expression du minimum de  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$ .

L'estimation courante  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$  est obtenue à partir du vecteur d'état prédit auquel s'ajoute un terme correctif qui tient compte de l'écart entre la mesure  $\hat{\underline{y}}_k$  et la mesure attendue.

### Initialisation

Pour initialiser le filtre il faut connaître :

soit :  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(0/-1)$  et  $\hat{\underline{x}}_1(0/-1)$

soit :  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(0/0)$  et  $\hat{\underline{x}}_1(0/0)$

selon que nous commençons l'intégration par l'équation d'estimation (4.40), ou par l'équation de prédiction (4.37).

Une suite possible de calculs, correspond à entrer  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(0/-1)$ ,  $\hat{\underline{x}}_1(0/-1)$  et à calculer,

$$\mathcal{K}_0 \rightarrow \hat{\underline{x}}_1(0/0) \rightarrow P_{\hat{\underline{x}}_1}(0/0) \rightarrow P_{\hat{\underline{x}}_1}(1/0) \rightarrow \hat{\underline{x}}_1(1/0) \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow \dots$$

**Remarque 4.2 :** L'espérance mathématique de l'erreur d'estimation (4.39) est par définition nulle (i.e.  $E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k)\} = [I - K_k C] \times E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k-1)\} = 0$ ) et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.38) est à trace minimale. Par conséquent, l'estimation  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$  est en valeur moyenne identique à  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$  après convergence du filtre bien entendu (voir l'étude sur la stabilité du filtre, paragraphe 4.2.3)

**Étape 4 :** Recherche du gain  $\mathcal{K}_k$  optimal au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation (4.38).

L'objectif est de déterminer le gain  $\mathcal{K}_k$  permettant de minimiser la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$ , c'est à dire tel que le critère

$$J = E\left\{ \left( \hat{\underline{e}}_1(k/k) \right)^T \hat{\underline{e}}_1(k/k) \right\} \quad (4.43)$$

soit minimal (i.e. minimiser  $J/\mathcal{K}_k$ ).

Nous avons l'égalité (Lewis 1992),

$$J = \text{tr}\left(\mathbb{E}\left\{\left(\hat{\underline{e}}_1(k/k)\right)^T \hat{\underline{e}}_1(k/k)\right\}\right) = \text{tr}\left(\mathbb{E}\left\{\hat{\underline{e}}_1(k/k)\left(\hat{\underline{e}}_1(k/k)\right)^T\right\}\right) = \text{tr}\left\{P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)\right\} \quad (4.44)$$

où,

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) - P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)C^T \mathcal{K}_k^T - \mathcal{K}_k C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) + \mathcal{K}_k \left( C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T + \mathcal{R} \right) \mathcal{K}_k^T$$

Sachant  $(d/d\mathcal{K}_k)\text{tr}(\mathcal{K}_k E \mathcal{K}_k^T) = 2E \mathcal{K}_k$ ,  $(d/d\mathcal{K}_k)\text{tr}(\mathcal{K}_k E) = E^T$  et que la trace de  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)C^T \mathcal{K}_k^T$  est égale à la trace de la matrice transposée  $\mathcal{K}_k C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)$ , alors la dérivée de  $J$  par rapport à  $\mathcal{K}_k$  est égale à l'expression suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathcal{K}_k} = 2\mathcal{K}_k \left( C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T + \mathcal{R} \right) - 2P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T \quad (4.45)$$

Il s'en suit par l'annulation de la dérivée que le gain  $\mathcal{K}_k$  optimal au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation est bien égal à

$$\mathcal{K}_k = P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T \left( C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T + \mathcal{R} \right)^{-1} \quad (4.46)$$

Suivant cette dernière expression, le minimum de  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$  vaut,

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) - P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T \left( C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T + \mathcal{R} \right)^{-1} C P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) \quad (4.47)$$

ou encore,

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = (I - \mathcal{K}_k C) P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) \quad (4.48)$$

Des trois expressions de  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$ , nous utiliserons de préférence la dernière expression en raison de sa simplicité d'écriture.

**Étape 5 :** Construction des filtres d'estimation des vecteurs respectifs  $\hat{\underline{x}}_2$ ,  $\underline{x}$  et  $\underline{d}$ .

#### *Estimation de l'état $\hat{\underline{x}}_2$*

— De l'estimation  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$  et de l'équation (4.20), nous proposons comme estimateur de  $\hat{\underline{x}}_{2k}$ , le vecteur  $\hat{\underline{x}}_2(k/k)$  défini par :

$$\hat{\underline{x}}_2(k/k) = \hat{C}_2^+ \left( \underline{y}_k - \hat{C}_1 \hat{\underline{x}}_1(k/k) \right) \quad (4.49)$$

où la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,

$$P_{\hat{\underline{x}}_2}(k/k) = \hat{C}_2^+ \left( \hat{C}_1 P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) \hat{C}_1^T + \mathcal{R} \right) \left( \hat{C}_2^+ \right)^T \quad (4.50)$$

est donnée par  $P_{\hat{\underline{x}}_2}(k/k) = \mathbb{E}\left\{ \left[ \hat{\underline{e}}_2(k/k) \right] \left[ \hat{\underline{e}}_2(k/k) \right]^T \right\}$

$$\text{avec : } \hat{\underline{e}}_2(k/k) = \hat{\underline{x}}_{2k} - \hat{\underline{x}}_2(k/k) = -\hat{C}_2^+ \left( \hat{C}_1 \hat{\underline{e}}_1(k/k) + \underline{v}_k \right) \quad (4.51)$$

**Remarque 4.3 :** Comme  $E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k)\} = [I - K_k C] \times E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k-1)\} = 0$  et que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.38) est à trace minimale, l'espérance mathématique de l'erreur d'estimation (4.51) est également nulle (i.e.  $E\{\hat{\underline{e}}_2(k/k)\} = [-\hat{C}_2^+ \hat{C}_1] \times E\{\hat{\underline{e}}_2(k/k-1)\} = 0$ ) et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.50) est à trace minimale. Par conséquent, l'estimation  $\hat{\underline{x}}_2(k/k)$  est en valeur moyenne identique à  $\bar{\underline{x}}_2(k/k)$  après convergence du filtre bien entendu.

*Estimation de l'état d'origine  $\underline{x}$*

— A partir des estimations  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$ ,  $\hat{\underline{x}}_2(k/k)$  et des relations (4.8), (4.10), nous proposons comme estimateur de  $\underline{x}_k$ , le vecteur  $\hat{\underline{x}}(k/k)$  défini par :

$$\hat{\underline{x}}(k/k) = \mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1(k/k) \\ \hat{\underline{x}}_2(k/k) \end{bmatrix} = \mathcal{P}_1^T \hat{\underline{x}}_1(k/k) + E_d \hat{\underline{x}}_2(k/k) \quad (4.52)$$

où la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,

$$P_{\underline{x}}(k/k) = \left( \mathcal{P}_1^T - E_d \hat{C}_2^+ \hat{C}_1 \right) P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) \left( \mathcal{P}_1^T - E_d \hat{C}_2^+ \hat{C}_1 \right)^T + E_d \hat{C}_2^+ R \left( E_d \hat{C}_2^+ \right)^T \quad (4.53)$$

est donnée par  $P_{\underline{x}}(k/k) = E\left\{ \left[ \underline{e}(k/k) \right] \left[ \underline{e}(k/k) \right]^T \right\}$

avec :

$$\underline{e}(k/k) = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}(k/k) = \mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\underline{e}}_1(k/k) \\ \hat{\underline{e}}_2(k/k) \end{bmatrix} = \left( \mathcal{P}_1^T - E_d \hat{C}_2^+ \hat{C}_1 \right) \hat{\underline{e}}_1(k/k) - E_d \hat{C}_2^+ \underline{v}_k \quad (4.54)$$

**Remarque 4.4 :** Comme  $E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k)\} = [I - K_k C] \times E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k-1)\} = 0$  et que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.38) est à trace minimale, l'espérance mathématique de l'erreur d'estimation (4.54) est également nulle (i.e.  $E\{\underline{e}(k/k)\} = \left[ \mathcal{P}_1^T - E_d \hat{C}_2^+ \hat{C}_1 \right] \times \{ \hat{\underline{e}}_1(k/k-1) \} = 0$ ) et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.53) est à trace minimale. Par conséquent, l'estimation  $\hat{\underline{x}}(k/k)$  est en valeur moyenne identique à  $\bar{\underline{x}}(k/k)$  après convergence du filtre bien entendu.

*Estimation des entrées inconnues  $\underline{d}$*

— Comme pour l'estimation des entrées inconnues dans le cas des systèmes déterministes (Chang et al 1994; Koenig et al 97a), nous pouvons reconstruire le vecteur  $\underline{d}$  connaissant l'estimation d'état et les mesures jusqu'à l'instant  $k+1$ .

En effet, sachant que la matrice  $CE_d$  est de rang plein colonnes, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\underline{d}_k = (CE_d)^+ \left( \underline{y}_{k+1} - CA\underline{x}_k - CB\underline{u}_k - C\underline{w}_k - \underline{v}_{k+1} \right) \quad (4.55)$$

Nous pouvons alors proposer comme estimateur optimal de  $\underline{d}$ , au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation d'état  $\hat{\underline{x}}_1$ , le vecteur  $\hat{\underline{d}}(k/k+1)$  défini par :

$$\hat{\underline{d}}(k/k+1) = (CE_d)^+ \left( \underline{y}_{k+1} - CA\hat{\underline{x}}(k/k) - CB\underline{u}_k \right) \quad (4.56)$$

où la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,

$$P_{\underline{d}}(k/k+1) = (CE_d)^+ \left( CAP_{\underline{x}}(k/k)(CA)^T + CQC^T + R \right) \left( (CE_d)^+ \right)^T \quad (4.57)$$

est donnée par  $P_{\underline{d}}(k/k+1) = E \left\{ \left[ \tilde{\underline{d}}(k/k+1) \right] \left[ \tilde{\underline{d}}(k/k+1) \right]^T \right\}$

avec :  $\tilde{\underline{d}}(k/k+1) = \underline{d}_k - \hat{\underline{d}}(k/k+1) = -(CE_d)^+ (CA\underline{e}(k/k) + C\underline{w}_k + \underline{v}_{k+1})$  (4.58)

**Remarque 4.5 :**

- L'erreur d'estimation des entrées inconnues est fonction uniquement de l'erreur d'estimation d'état et des variables aléatoires  $\underline{w}$  et  $\underline{v}$ . Or, comme  $E\{\underline{e}(k/k)\} = [\mathcal{P}_1^T - E_d \hat{C}_2^+ \hat{C}_1] \times E\{\hat{\underline{e}}_1(k/k-1)\} = 0$  et que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.53) est à trace minimale, alors l'espérance mathématique de l'erreur d'estimation (4.58) est également nulle (i.e.  $E\{\tilde{\underline{d}}(k/k+1)\} = [-(CE_d)^+ CA] \times E\{\underline{e}(k/k)\} = 0$ ), de même la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (4.57) est à trace minimale. Par conséquent, l'estimation  $\hat{\underline{d}}(k/k+1)$  est en valeur moyenne identique à  $\underline{d}_k$  après convergence du filtre.
- L'estimation des entrées inconnues nécessite de connaître les mesures à l'instant k+1. Nous pouvons contourner cette condition par une prédiction à un pas des sorties. En effet d'après l'estimation  $\hat{\underline{x}}(k/k)$  nous savons prédire l'état  $\hat{\underline{x}}(k+1/k)$  et donc  $\hat{\underline{y}}(k+1/k)$ .

Ces résultats sont résumés dans l'algorithme de mise en oeuvre du filtre suivant.

**4.1.3 Implantation numérique du filtre de Kalman à entrées inconnues**

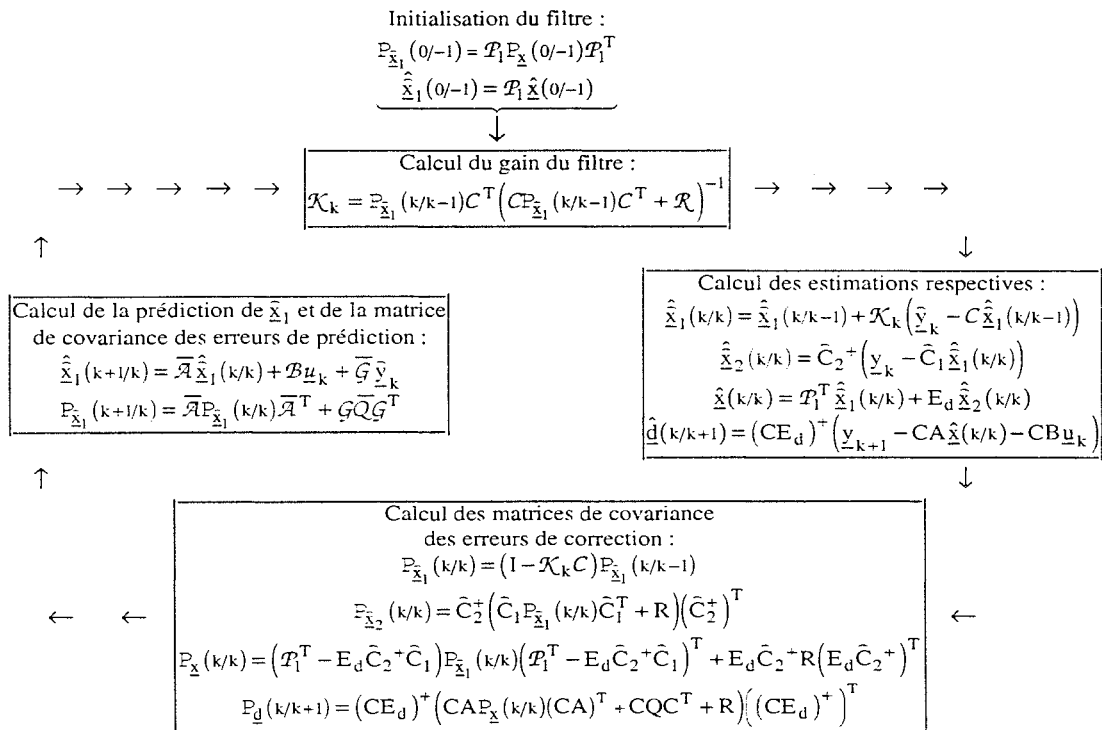


Fig 4.1 : Algorithme de calcul du filtre de Kalman à entrées inconnues

## Conclusion,

A l'aide du modèle équivalent à bruits non corrélés et indépendants des entrées inconnues, nous avons déterminé le filtre de Kalman à entrées inconnues dans le cas général. Un autre avantage de ce modèle est de permettre l'utilisation des équations du filtre de Kalman classique (i.e. sans entrées inconnues). Nous avons ainsi montré l'existence du filtre robuste aux entrées inconnues. Les relations (4.35), (4.37), (4.40), (4.46), (4.48), (4.49), (4.52) et (4.56) constituent les formules de base du filtre à entrées inconnues. Nous pouvons cependant, comme pour le filtre de Kalman conventionnel, déterminer d'autres relations, permettant un calcul hors ligne du gain du filtre et des matrices de covariance. Nous développerons quelques une de ces relations supplémentaires mieux adaptées et plus faciles à interpréter.

---

## 4.2 RÉSULTATS SUPPLÉMENTAIRES

Dans cette partie, nous nous intéressons notamment à la résolution du filtre prédictif à un pas pour les systèmes à bruits corrélés (4.21) et non corrélés (4.31). Nous présentons une solution au calcul hors ligne des matrices  $\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}(k/k-1)$  et  $\mathcal{K}_k$  par la résolution de l'équation de Riccati. Enfin, nous présentons les conditions de découplage et de stabilité du filtre à entrées inconnues.

### 4.2.1 Interprétations

#### Inverses des matrices de covariances

L'utilisation du lemme d'inversion matricielle conduit directement, à partir de (4.47), à l'expression de l'inverse de la matrice de covariance des erreurs d'estimation (appelée aussi matrice "information") :

$$\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^{-1}(k/k) = \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^{-1}(k/k-1) + \mathbf{C}^T \mathcal{R}^{-1} \mathbf{C} \quad (4.59)$$

La relation (4.59) est d'interprétation plus facile que la formule initiale (4.47). En effet, si nous comparons les deux blocs fictifs  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  aux deux matrices respectives  $\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}(k/k-1)$  et  $\mathbf{C}^T \mathcal{R}^{-1} \mathbf{C}$ , l'égalité  $\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^{-1}(k/k) = \left( \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^{-1}(k/k-1) + \mathbf{C}^T \mathcal{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} = \left( \mathbf{R}_1^{-1} + \mathbf{R}_2^{-1} \right)^{-1}$  montre que la matrice de covariance des erreurs de correction  $\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}(k/k)$  est généralement plus faible que la matrice de covariance des erreurs de prédiction  $\mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}(k/k-1)$ .

**Remarque 4.6 :** Il est possible d'obtenir un ensemble d'équations récurrentes équivalentes à (4.35), (4.37), (4.38) et (4.40) en introduisant les variables "réduites" :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{z}}(k/k-1) &= \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^{-1}(k/k-1) \hat{\underline{\mathbf{x}}}_1(k+1/k), \\ \underline{\mathbf{z}}(k/k) &= \mathbb{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^{-1}(k/k) \hat{\underline{\mathbf{x}}}_1(k/k). \end{aligned}$$

Les formes obtenues, relatives aux variables  $\underline{z}(k/k-1)$  et  $\underline{z}(k/k)$  forment alors le filtre information, ce dernier sera préféré au filtre de Kalman lorsque :

- les connaissances statistiques sur l'état initial sont mauvaises,
- la dimension du bruit de dynamique est inférieure à la dimension du bruit de mesure.

### Signification physique du gain optimal $\mathcal{K}_k$

L'utilisation du lemme d'inversion matricielle sur  $\Sigma_k$  conduit à :

$$\Sigma_k^{-1} = \mathcal{R}^{-1} - \underbrace{\mathcal{R}^{-1} C \left( P_{\hat{\underline{x}}_1}^{-1}(k/k-1) + C^T \mathcal{R}^{-1} C \right)^{-1} C^T \mathcal{R}^{-1}}_{P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)} \quad (4.60)$$

soit, d'après (4.41) :

$$\mathcal{K}_k = P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) C^T \mathcal{R}^{-1} - P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1) \left( C^T \mathcal{R}^{-1} C \right) P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) C^T \mathcal{R}^{-1} \quad (4.61)$$

$$\text{avec : } C^T \mathcal{R}^{-1} C = P_{\hat{\underline{x}}_1}^{-1}(k/k) - P_{\hat{\underline{x}}_1}^{-1}(k/k-1)$$

Nous obtenons finalement :

$$\mathcal{K}_k = P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) C^T \mathcal{R}^{-1} \quad (4.62)$$

Cette relation est d'interprétation plus facile que la formule initiale (4.41) (qui doit être envisagée lorsque  $\mathcal{R}$  est singulière). En effet, l'expression du gain  $\mathcal{K}_k$  (4.62), suit le raisonnement qualitatif suivant :

- Des estimations de bonne qualité ( $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$  faible) associées à des mesures douteuses ( $\mathcal{R}$  élevé) mènent au choix d'un gain  $\mathcal{K}_k$  faible.
- En revanche, des estimations douteuses ( $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$  élevé) associées à des mesures de bonne qualité ( $\mathcal{R}$  faible) mènent au choix d'un gain  $\mathcal{K}_k$  élevé.

Ainsi, l'expression (4.62) confirme le lien entre les résultats attendus et les résultats théoriques.

### Signification physique de la matrice $\Sigma_k$

La matrice  $\Sigma_k$  représente la matrice de covariance de l'erreur de prédiction sur la sortie.

**Démonstration :** La matrice de covariance de l'erreur de prédiction sur la sortie est donnée par l'expression suivante :

$$P_{\tilde{\underline{y}}}(k+1/k) = E \left\{ \left[ \tilde{\underline{y}}(k+1/k) \right] \left[ \tilde{\underline{y}}(k+1/k) \right]^T \right\}$$

$$\text{avec : } \tilde{\underline{y}}(k+1/k) = \hat{\underline{y}}_k - C \hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = C \hat{\underline{e}}_1(k+1/k) + \underline{v}_k$$

$$\text{Soit, } P_{\underline{y}}(k+1/k) = CP_{\underline{x}_1}(k/k-1)C^T + \mathcal{R} = \Sigma_k \quad (4.63)$$

Par le même raisonnement, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sur la sortie est alors donnée par :

$$P_{\underline{y}}(k/k) = CP_{\underline{x}_1}(k/k)C^T + \mathcal{R} \quad (4.64)$$

## 4.2.2 Développement du filtre prédicteur à un pas, par résolution de l'équation de Riccati

### Equations du filtre prédicteur : bruits corrélés

En tenant compte des expressions de  $\bar{\mathcal{A}}$  (4.32) et de  $\bar{\mathcal{G}}$  (4.33), il vient :

$$\hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = \mathcal{A}\hat{\underline{x}}_1(k/k) + \mathcal{B}\underline{u}_k + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}(\hat{\underline{y}}_k - C\hat{\underline{x}}_1(k/k)) \quad (4.65)$$

et l'utilisation de (4.40) conduit à la forme :

$$\hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = \mathcal{A}\hat{\underline{x}}_1(k/k) + \mathcal{B}\underline{u}_k + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}(I - C\mathcal{K})(\hat{\underline{y}}_k - C\hat{\underline{x}}_1(k/k-1)) \quad (4.66)$$

Or d'après (4.41), nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}(I - C\mathcal{K}) &= \mathcal{R}^{-1}(I - CP_{\underline{x}_1}(k/k-1)C^T \Sigma_k^{-1}) \\ &= \mathcal{R}^{-1}(\underbrace{\Sigma_k - CP_{\underline{x}_1}(k/k-1)C^T}_{\mathcal{R}}) \Sigma_k^{-1} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Par conséquent, l'étape de prédiction (4.37) est modifiée par l'ajout d'un terme correcteur :

$$\hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = \underbrace{\mathcal{A}\hat{\underline{x}}_1(k/k) + \mathcal{B}\underline{u}_k}_{\text{partie pour } S = 0} + \bar{\mathcal{K}}_k(\hat{\underline{y}}_k - C\hat{\underline{x}}_1(k/k-1)) \quad (4.68)$$

$$\text{où : } \bar{\mathcal{K}}_k = \mathcal{G}\Sigma_k^{-1} \quad (4.69)$$

De même, en développant la deuxième expression de (4.35), nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_{\underline{x}_1}(k+1/k) &= \mathcal{A}P_{\underline{x}_1}(k/k)\mathcal{A}^T + \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}CP_{\underline{x}_1}(k/k)C^T\mathcal{R}^{-1}S^T\mathcal{G}^T - \mathcal{G}\mathcal{R}^{-1}CP_{\underline{x}_1}(k/k)\mathcal{A}^T \\ &\quad - \mathcal{A}P_{\underline{x}_1}(k/k)C^T\mathcal{R}^{-1}S^T\mathcal{G}^T + \mathcal{G}\bar{Q}\mathcal{G}^T \end{aligned}$$

Compte tenu des relations  $\mathcal{K}_k$  (4.62),  $\bar{\mathcal{K}}_k$  (4.69) et  $\bar{Q}$ , la matrice de covariance de l'étape de prédiction peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} P_{\underline{x}_1}(k+1/k) &= \mathcal{A}P_{\underline{x}_1}(k/k)\mathcal{A}^T + \mathcal{G}\bar{Q}\mathcal{G} + \bar{\mathcal{K}}_k \Sigma_k \mathcal{R}^{-1}C\mathcal{K}_k \Sigma_k \bar{\mathcal{K}}_k^T - \bar{\mathcal{K}}_k \Sigma_k \mathcal{K}_k^T \mathcal{A}^T \\ &\quad - \mathcal{A}\mathcal{K}_k \Sigma_k \bar{\mathcal{K}}_k^T - \bar{\mathcal{K}}_k \Sigma_k \mathcal{R}^{-1} \Sigma_k \bar{\mathcal{K}}_k^T \end{aligned}$$

et sachant que  $\Sigma_k^{-1} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1}C\mathcal{K}_k$  alors,

$$P_{\hat{x}_1}(k+1/k) = \mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k/k)\mathcal{A}^T + GQG + \bar{\mathcal{K}}_k \Sigma_k \bar{\mathcal{K}}_k^T - \bar{\mathcal{K}}_k \Sigma_k \mathcal{K}_k^T \mathcal{A}^T - \mathcal{A}\mathcal{K}_k \Sigma_k \bar{\mathcal{K}}_k^T \quad (4.70)$$

La détermination de la matrice de covariance de l'étape de prédiction du filtre de Kalman à entrées inconnues pour le système à bruits corrélés (4.21) est donc déduite de celle obtenue dans le cas de bruits non corrélés (4.31) par ajout d'un terme correcteur.

Nous avons alors :

$$P_{\hat{x}_1}(k+1/k) = \underbrace{\mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k/k)\mathcal{A}^T + GQG^T}_{\text{partie pour } S=0} + \mathcal{A}\bar{\mathcal{K}}_k \Sigma_k \mathcal{K}_k^T \mathcal{A}^T - \mathcal{L}_k \Sigma_k \mathcal{L}_k^T \quad (4.71)$$

$$\text{où } \mathcal{L}_k = \mathcal{A}\mathcal{K}_k + \bar{\mathcal{K}}_k \quad (4.72)$$

Pour le système à bruits corrélés (4.21), il suffit de remplacer les expressions (4.35) et (4.37) par les relations réajustées (4.68) et (4.71) pour obtenir le filtre de Kalman à entrées inconnues correspondant.

### Réalisation du filtre prédictif : bruits corrélés

Lorsque nous nous intéressons à la réalisation du filtre prédictif à un pas pour le sous-système à bruits corrélés (4.21), l'élimination de  $P_{\hat{x}_1}(k/k)$  et  $\hat{x}_1(k/k)$  dans (4.68) et (4.71) conduit directement aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1/k) &= (\mathcal{A} - \mathcal{L}_k C) \hat{x}_1(k/k-1) + \mathcal{B}u_k + \mathcal{L}_k \hat{y}_k \\ &= \mathcal{A} \hat{x}_1(k/k-1) + \mathcal{B}u_k + \mathcal{L}_k (\hat{y}_k - C \hat{x}_1(k/k-1)) \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$P_{\hat{x}_1}(k+1/k) = \mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k/k)\mathcal{A}^T + GQG^T - \mathcal{L}_k \Sigma_k \mathcal{L}_k^T \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= (\mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k+1/k)C^T + \mathcal{G}S) \Sigma_k^{-1} \\ &= (\mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k+1/k)C^T + \mathcal{G}S) (\mathcal{R} + CP_{\hat{x}_1}(k/k-1)C^T)^{-1} \end{aligned} \quad (4.75)$$

où les matrices  $P_{\hat{x}_1}(k+1/k)$  et  $\mathcal{L}_k$  peuvent être calculées à l'avance par la résolution de l'Equation de Riccati aux Différences (ERD) suivante :

$$\begin{aligned} P_{\hat{x}_1}(k+1/k) &= \mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k+1/k)\mathcal{A}^T + GQG^T \\ &\quad - (\mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k+1/k)C^T + \mathcal{G}S) (\mathcal{R} + CP_{\hat{x}_1}(k/k-1)C^T)^{-1} (\mathcal{A}P_{\hat{x}_1}(k+1/k)C^T + \mathcal{G}S)^T \end{aligned} \quad (4.76)$$

Les relations (4.73) et (4.76) représentent le filtre de Kalman standard et l'équation de Riccati aux différences pour le sous-système (4.21) à bruits de dynamique et de mesures corrélés. L'implantation du filtre de Kalman à entrées inconnues peut donc être traitée directement par la résolution de l'équation de Riccati aux différences pour le sous-système robuste aux entrées inconnues et à bruits corrélés.



Cependant, afin que notre étude soit complète, nous présentons les concepts de réalisation du filtre de Kalman à entrées inconnues par la résolution de l'équation de Riccati aux différences pour le sous-système robuste aux entrées inconnues et à bruits décorrélés.

### Réalisation du filtre prédicteur : bruits décorrélés

Suivant les mêmes concepts de résolution que précédemment, il suffit d'éliminer  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$  et  $\hat{\underline{x}}_1(k/k)$  dans les relations (4.35) et (4.37) pour obtenir le filtre prédicteur optimal. Nous obtenons alors le système récurrent suivant :

$$\hat{\underline{x}}_1(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}}\hat{\underline{x}}_1(k/k-1) + \mathcal{B}\underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}}\underline{y}_k + \bar{\mathcal{A}}\mathcal{K}_k(\underline{y}_k - C\hat{\underline{x}}_1(k/k-1)) \quad (4.77)$$

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}(k+1/k) = \mathcal{G}\bar{\mathcal{Q}}\mathcal{G}^T + \bar{\mathcal{A}}P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)\bar{\mathcal{A}}^T - \bar{\mathcal{A}}P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)C^T(CP_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)C^T + \mathcal{R})^{-1}CP_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k-1)\bar{\mathcal{A}}^T \quad (4.78)$$

Conclusion. les relations (4.77) et (4.78) représentent le filtre de Kalman standard et l'équation de Riccati aux différences pour le sous-système (4.31) à bruits décorrélés. La résolution de l'ERD permet alors de calculer  $P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k)$  et  $\mathcal{K}_k$  par les relations respectives (4.38) et (4.41). L'implantation du filtre de Kalman à entrées inconnues peut donc être traitée, soit par la résolution de l'équation de Riccati aux différences pour le sous-système à bruits corrélés soit par la résolution de l'équation de Riccati aux différences pour le sous-système à bruits décorrélés.

### 4.2.3 Convergence structurelle et stabilité du filtre

Une fois le système (4.1) transformé en un sous-système indépendant des entrées inconnues et à bruits décorrélés, le problème de la convergence et de la stabilité du filtre d'ordre réduit (4.77) peut être traité exactement comme dans le cas du filtre de Kalman, car dépendant des propriétés des équations de Riccati discrète et algébrique standard. Les résultats énoncés dans le théorème 4.1 qui suit, relatifs au filtre de prédiction, sont aussi valables pour le filtre d'estimation car, comme nous pouvons le constater, les équations (4.38) et (4.40) contiennent les expressions (4.35) et (4.37).

L'équation récurrente de transition du filtre de prédiction ainsi que l'erreur de prédiction sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_1(k+1/k) &= \bar{\mathcal{A}}\hat{\underline{x}}_1(k/k-1) + \mathcal{B}\underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}}\underline{y}_k + \bar{\mathcal{A}}\mathcal{K}_k(\underline{y}_k - C\hat{\underline{x}}_1(k/k-1)) \\ &= \bar{\mathcal{A}}_k\hat{\underline{x}}_1(k/k-1) + \mathcal{B}\underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}}\underline{y}_k + \mathcal{K}_{pk}\underline{y}_k \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\text{et } \underline{e}_1(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}}_k\underline{e}_1(k/k-1) + \mathcal{G}\bar{\omega}_k - \mathcal{K}_{pk}\underline{z}_k \quad (4.80)$$

$$\text{avec : } \mathcal{K}_{p_k} = \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}_k \quad (4.81)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_k = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{K}_{p_k} C \quad (4.82)$$

Si le filtre converge, alors les séquences  $\{\mathcal{K}_k\}$ ,  $\{\mathcal{K}_{p_k}\}$ ,  $\{\bar{\mathcal{A}}_k\}$  et  $\{P_{\hat{x}_1}^{(k+1/k)}\}$  convergent respectivement vers les matrices  $\{\mathcal{K}^s\}$ ,  $\{\mathcal{K}_p^s\}$ ,  $\{\bar{\mathcal{A}}^s\}$  et  $\{P_{\hat{x}_1}^s\}$  telles que :

$$P_{\hat{x}_1}^s - \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^s \bar{\mathcal{A}}^T + \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^s C^T (C P_{\hat{x}_1}^s C^T + \mathcal{R})^{-1} C P_{\hat{x}_1}^s \bar{\mathcal{A}}^T - \mathcal{G} \bar{Q} \mathcal{G}^T = 0 \quad (4.83)$$

$$\mathcal{K}_p^s = \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}^s = \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^s C^T (C P_{\hat{x}_1}^s C^T + \mathcal{R})^{-1} \quad (4.84)$$

$$\bar{\mathcal{A}}^s = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{K}_p^s C \quad (4.85)$$

où l'équation (4.83) est l'équation de Riccati algébrique (ERA) associée à l'ERD (4.78).

L'étude de la convergence et de la stabilité du filtre de Kalman à entrées inconnues se ramène à la recherche des solutions particulières de l'ERA réelles, symétriques et semi-définies positives, pour lesquelles les pôles du filtre sont situés à l'intérieur ou sur le cercle unité. On appelle "solution forte" toute solution  $P_{\hat{x}_1}^s$  de l'ERA qui est réelle, symétrique et semi-définie positive pour laquelle les valeurs propres de la matrice de transition  $\bar{\mathcal{A}}^s$  du filtre invariant se trouvent à l'intérieur ou sur le cercle unité (si toutes les valeurs propres de  $\bar{\mathcal{A}}^s$  sont situées à l'intérieur du cercle unité, on dit que  $P_{\hat{x}_1}^s$  est une "solution stabilisatrice"). Le théorème suivant établit les conditions de convergence de la séquence  $\{P_{\hat{x}_1}^{(k+1/k)}\}$  vers la solution forte ou la solution stabilisatrice de l'ERA.

#### **Théorème 4.1 :**

- c4.1a) Si  $P_{\hat{x}_1}^s$  est l'unique solution forte de l'ERA, et si la condition initiale  $P_{\hat{x}_1}^{(0/-1)}$  vérifie  $P_{\hat{x}_1}^{(0/-1)} - P_{\hat{x}_1}^s \geq 0$  alors, la séquence  $\{P_{\hat{x}_1}^{(k+1/k)}\}$  générée par l'ERD (4.78) converge exponentiellement vers  $P_{\hat{x}_1}^s$  si et seulement si la paire  $(\bar{\mathcal{A}}, C)$  est détectable.
- c4.1b) Si  $P_{\hat{x}_1}^s$  est l'unique solution stabilisatrice de l'ERA et si  $P_{\hat{x}_1}^{(0/-1)} > 0$  alors, la séquence  $\{P_{\hat{x}_1}^{(k+1/k)}\}$  converge exponentiellement vers  $P_{\hat{x}_1}^s$  si et seulement si la paire  $(\bar{\mathcal{A}}, C)$  est détectable et si la paire  $(\bar{\mathcal{A}}, \mathcal{G}\sqrt{\bar{Q}})$  n'admet pas de mode non atteignable sur le cercle unité. ■

#### **Démonstration**

Voir Goodwin et Sin (1984), Chan et al (1984), De Souza et al (1986), Caines (1988) et Lewis (1992).

De même, les conditions nécessaires et suffisantes de convergence de l'ERD et de stabilité de (4.79) peuvent être données pour le modèle mathématique de base (4.1) suivant le théorème 4.2.

**Théorème 4.2 :** Si  $P_{\bar{x}_1}^s$  est l'unique solution stabilisatrice de l'ERA et si  $P_{\bar{x}_1}^s(0/-1) > 0$  alors, la séquence  $\{P_{\bar{x}_1}^s(k+1/k)\}$  converge exponentiellement vers  $P_{\bar{x}_1}^s$  si et seulement si,

$$c4.2a) \quad \text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p \text{ (condition de découplage des entrées inconnues)}$$

et

$$c4.2b) \quad \text{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda I - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix}\right) = n + p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$$

■

### Démonstration

Voir Nikoukhah et al (1992), Darouach et al (1994b) et Darouach et al (1995).

**Remarque 4.7 :** L'existence et l'unicité de la solution forte de l'ERA sont assurées par la détectabilité de la paire  $(\bar{A}, C)$ . Cette solution coïncide avec la solution stabilisatrice si la paire  $(\bar{A}, G\sqrt{Q})$  n'admet pas de mode non atteignable sur le cercle unité (si la paire  $(\bar{A}, G\sqrt{Q})$  n'admet pas de mode non atteignable à l'intérieur et sur le cercle unité alors la solution stabilisatrice est définie positive).

Par ailleurs, les résultats établis par le théorème 4.1 sont généraux et s'appliquent pour les systèmes stabilisables ou non stabilisables, dont la matrice  $\bar{A}$  est régulière ou singulière (De Souza et al., 1986). Pour les systèmes dont la matrice  $\bar{A}$  est régulière, la condition de non atteignabilité des modes de la paire  $(\bar{A}, G\sqrt{Q})$  peut se restreindre à la condition de non commandabilité de ces modes (Chan et al 1984). Si le système est asymptotiquement stable  $\lambda(\bar{A}) < 1$ , il est alors détectable et stabilisable, ce qui implique automatiquement la convergence et la stabilité du filtre.

---

## 4.3 EXEMPLE

Afin d'évaluer les performances du filtre de Kalman à entrées inconnues élaboré, nous avons étudié le système suivant (Darouach et al 1995) :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + E_d \underline{d}_k + \underline{w}_k \quad (4.86a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (4.86b)$$

où l'état  $\underline{x}_k \in \mathfrak{R}^{n=3}$ , la commande  $\underline{u}_k \in \mathfrak{R}^{e=1}$ , l'entrée inconnue  $\underline{d}_k \in \mathfrak{R}^{p=1}$  et la mesure  $\underline{y}_k \in \mathfrak{R}^{m=2}$ .

Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $E_d$  et  $C$  sont constantes et ont pour valeurs :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.075 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.0375 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les séquences des bruits  $\{\underline{y}_k\}$  et  $\{\underline{w}_k\}$  sont des bruits blancs gaussiens non corrélés, de moyennes nulles et indépendants de  $\underline{x}_0$  et  $\underline{d}_0$ . Leurs matrices de covariance sont respectivement,

$$R = 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

### Résolution du filtre de Kalman à entrées inconnues

Les hypothèses de base  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_4$  ainsi que les conditions du Théorème 4.2 sont vérifiées. Par conséquent, les conditions de découplage des entrées inconnues, les conditions de convergence et de stabilité du filtre prédicteur à variance minimale (4.77) - (4.78) sont vérifiées. Nous pouvons alors engager la procédure d'estimation de l'état  $\underline{x}$  et de l'entrée inconnue  $\underline{d}$ .

#### Étape 1 : Recherche du sous-système robuste aux entrées inconnues.

La matrice  $E_d$  est de rang plein colonnes, il existe alors une matrice régulière  $\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix}$ , telle que :

$$\mathcal{P}E_d = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix} E_d = \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

avec :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$E_d^+ = [0 \ 0.5 \ 0.5] \quad (4.89)$$

Prémultiplions l'équation (4.86a) par la matrice  $\mathcal{P}$ , nous obtenons alors le sous-système suivant :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \hat{A}_{11} \hat{\underline{x}}_{1k} + \hat{A}_{12} \hat{\underline{x}}_{2k} + \hat{B}_1 \underline{u}_k + \mathcal{P}_1 \underline{w}_k \quad (4.90a)$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1 \hat{\underline{x}}_1 + \hat{C}_2 \hat{\underline{x}}_2 + \underline{y}_k \quad (4.90b)$$

avec :

$$\hat{\underline{x}} = \mathcal{P}\underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}, \hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3712 \\ 0.5303 & -0.3563 \end{bmatrix}, \hat{A}_{12} = \begin{bmatrix} -0.675 \\ 0.5568 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.7071 \end{bmatrix}, \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0.7071 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

D'après l'étude précédente, pour le sous-système (4.90), la nouvelle entrée inconnue est représentée par la variable  $\hat{\underline{x}}_2$ . La matrice  $\hat{\underline{C}}_2 = \underline{C}\underline{E}_d$  est de rang plein colonnes. Il existe une matrice régulière  $\underline{\mathcal{P}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}_3 \\ \hat{\underline{C}}_2^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$\underline{\mathcal{P}}_2 \hat{\underline{C}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}_3 \\ \hat{\underline{C}}_2^+ \end{bmatrix} \hat{\underline{C}}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times p} \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

avec :

$$\underline{\mathcal{P}}_3 = [-0.8944 \quad 0.4472] \quad (4.92)$$

$$\hat{\underline{C}}_2^+ = [0.2 \quad 0.4] \quad (4.93)$$

qui transforme le sous-système (4.90), en un sous-système (4.94) indépendant de l'entrée inconnue  $\underline{d}$  :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \underline{\mathcal{A}} \hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{\mathcal{B}} \underline{u}_k + \underline{\mathcal{G}} \underline{w}_k \quad (4.94a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \underline{C} \hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (4.94b)$$

avec :  $\underline{u}_k = \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k \end{bmatrix}$ ,  $\underline{w}_k = \begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\underline{y}} = \underline{\mathcal{P}}_3 \underline{y}$ ,  $\underline{v}_k = \underline{\mathcal{P}}_3 \underline{v}_k$ ,  $\underline{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -0.135 & 0.2758 \\ 0.6417 & -0.2775 \end{bmatrix}$ ,  
 $\underline{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -0.135 & -0.27 \\ -0.7071 & 0.1114 & 0.2227 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0.135 & 0.27 & -1 & 0 & 0 \\ -0.1114 & -0.2227 & 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$   
 et  $\underline{C} = [0.8944 \quad 0.6325]$

Ainsi, pour ce nouveau modèle (4.94), la dynamique de l'état (4.94a) est indépendante des entrées inconnues. Cependant, les nouveaux bruits  $\underline{w}_k$  et  $\underline{v}_k$  sont corrélés, leurs propriétés statistiques aux premier et second ordres sont :

$$E\{\underline{w}_k\} = 0, E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{w}_k \underline{w}_l^T\} = \underline{Q} \delta_{kl}, E\{\underline{v}_k \underline{v}_l^T\} = \underline{\mathcal{R}} \delta_{kl}, E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = \underline{S}^T \delta_{kl}$$

$$\text{avec : } \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{R} & 0 \\ 0 & \underline{Q} \end{bmatrix} \delta_{kl}, \underline{\mathcal{R}} = 12 \text{ et } \underline{S}^T = [-10.7331 \quad 5.3666 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

**Étape 2 :** Recherche du modèle à bruits décorrélés équivalent au système (4.94).

Sachant que  $E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = \underline{S}^T \delta_{kl}$ , il suffit d'effectuer le changement de variable,

$$\overline{\underline{w}}_k = \underline{w}_k - [-0.8944 \quad 0.4472 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \underline{v}_k \quad (4.95)$$

pour lequel il est facile de vérifier que  $E\{\underline{v}_k \overline{\underline{w}}_l^T\} = 0$ .

L'utilisation de ce bruit dans les équations du modèle (4.94), conduit directement au modèle équivalent recherché :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \overline{\underline{\mathcal{A}}} \hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{\mathcal{B}} \underline{u}_k + \overline{\underline{\mathcal{G}}} \hat{\underline{y}}_k + \underline{\mathcal{G}} \overline{\underline{w}}_k \quad (4.96a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \underline{C} \hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (4.96b)$$

où  $\overline{\underline{\mathcal{A}}} = \underline{\mathcal{A}}$  et  $\overline{\underline{\mathcal{G}}} = 0$  puisque la remarque 4.1 est vérifiée, ( $\underline{R} = 12 \times [\underline{I}_2]$ ).

Les propriétés statistiques des bruits du modèle (4.96) vérifient les propriétés statistiques désirées :

$$E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{w}_k\} = 0, E\left\{\begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T & \underline{w}_1^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \delta_{kl} \quad (4.97)$$

$$\text{avec : } \bar{Q} = \begin{bmatrix} 2.4 & 4.8 & 0 & 0 & 0 \\ 4.8 & 9.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Il suffit d'appliquer, sur le système (4.96), le filtre de Kalman discret défini dans le cas de systèmes à bruits non corrélés et de terminer la procédure par l'algorithme de calcul du filtre présenté sur la figure 4.1, avec les conditions initiales suivantes :

$$\hat{\underline{x}}(0/-1) = \bar{\underline{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } P_{\hat{\underline{x}}}(0/-1) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Une approche plus rapide est de rechercher la solution stabilisatrice de l'équation de Riccati algébrique associée à (4.83) et d'en déduire par un calcul hors ligne le gain et les matrices de covariance.

En effet, comme les conditions du théorème 4.1 (ou 4.2) sont vérifiées, les séquences  $\{\mathcal{K}_k\}$ ,  $\{\mathcal{K}_{p_k}\}$ ,  $\{\bar{\mathcal{A}}_k\}$  et  $\{P_{\hat{\underline{x}}_1}(k+1/k)\}$  convergent respectivement vers les matrices  $\{\mathcal{K}^s\}$ ,  $\{\mathcal{K}_p^s\}$ ,  $\{\bar{\mathcal{A}}^s\}$  et  $\{P_{\hat{\underline{x}}_1}^s\}$  telles que :

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}^s - \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{\underline{x}}_1}^s \bar{\mathcal{A}}^T + \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{\underline{x}}_1}^s C^T (C P_{\hat{\underline{x}}_1}^s C^T + \mathcal{R})^{-1} C P_{\hat{\underline{x}}_1}^s \bar{\mathcal{A}}^T - G \bar{Q} G^T = 0 \quad (4.98)$$

$$\mathcal{K}_p^s = \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}^s = \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{\underline{x}}_1}^s C^T (C P_{\hat{\underline{x}}_1}^s C^T + \mathcal{R})^{-1} \quad (4.99)$$

$$\bar{\mathcal{A}}^s = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{K}_p^s C \quad (4.100)$$

La solution stabilisatrice de l'équation de Riccati algébrique associée à (4.98) est :

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}^s = \begin{bmatrix} 5.2951 & -2.9724 \\ -2.9724 & 12.4321 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Nous en déduisons alors aisément les valeurs statiques du gain et les matrices de covariance,

$$\mathcal{K}^s = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.29 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_p^s = \begin{bmatrix} 0.0588 \\ 0.0218 \end{bmatrix}, \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = \begin{bmatrix} 4.8379 & -3.8053 \\ -3.8053 & 10.9145 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{A}}^s = \begin{bmatrix} -0.1876 & 0.2386 \\ 0.6222 & -0.2913 \end{bmatrix}, \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\hat{\underline{x}}_2}(k/k) = [2.5965],$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\hat{\underline{x}}}(k/k) = \begin{bmatrix} 4.8379 & -3.1202 & 2.2613 \\ -3.1202 & 6.9472 & -2.8607 \\ 2.2613 & -2.8607 & 9.1604 \end{bmatrix}, \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\underline{d}}(k/k+1) = [7.1429]$$

**Remarque :** Toutes les valeurs propres de  $\tilde{\mathcal{A}}^s$  sont situées à l'intérieur du cercle unité  $\lambda(\tilde{\mathcal{A}}^s) = \begin{bmatrix} 0.1493 \\ -0.6282 \end{bmatrix}$ , le filtre prédictif d'ordre réduit (4.79) est bien asymptotiquement stable.

Afin de montrer les performances du filtre de Kalman à entrées inconnues développé, nous avons simulé sur le système à partir de la 50<sup>ème</sup> itération une entrée inconnue de type échelon. Nous avons comparé les résultats d'estimations du filtre de Kalman conventionnel (non robuste aux entrées inconnues), aux résultats d'estimations du filtre de Kalman à entrées inconnues. Les courbes suivantes montrent les résultats de l'estimation de l'état complet et de l'entrée inconnue.

Dans les figures suivantes, nous utilisons les abréviations suivantes

FKC : Filtre de Kalman Conventionnel

FKREI : Filtre de Kalman Robuste aux Entrées Inconnues

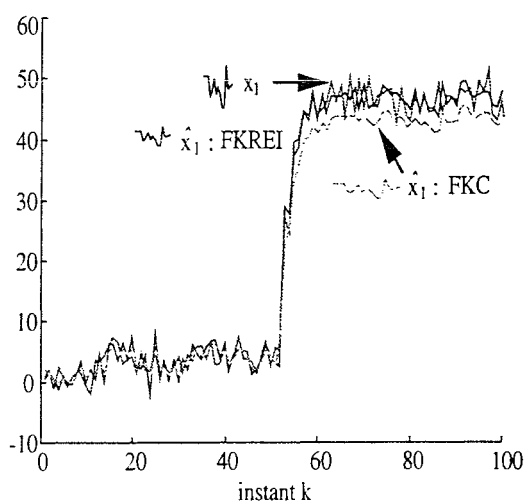


Fig 4.2.a : Filtrage de  $x_1(k)$  en présence d'une entrée inconnue

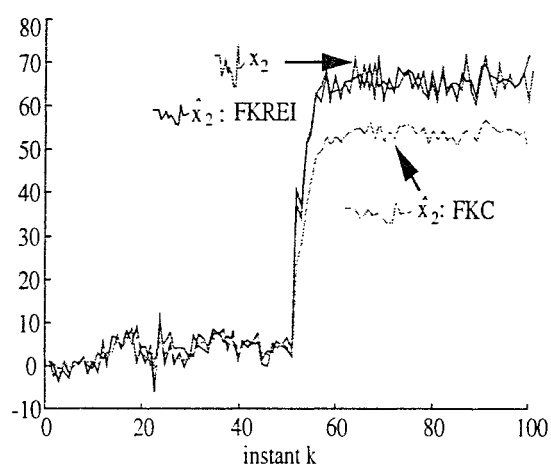


Fig 4.2.b : Filtrage de  $x_2(k)$  en présence d'une entrée inconnue

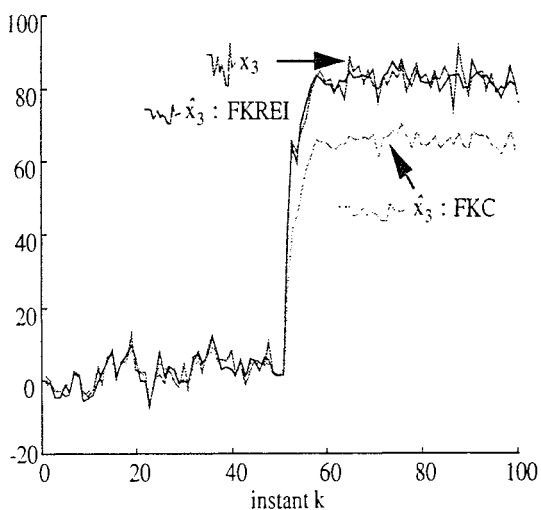


Fig 4.2.c : Filtrage de  $x_3(k)$  en présence d'une entrée inconnue

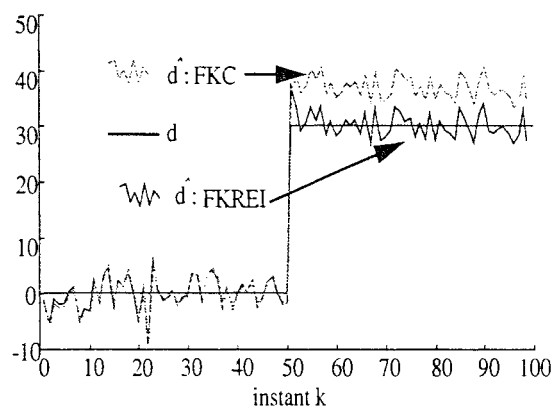


Fig 4.2.d : Estimation de l'entrée inconnue

Fig 4.2 : Estimation des composantes du vecteur d'état  $\underline{x}$  et de l'entrée inconnue  $d$

## Conclusion.

Pour ce système, toutes les conditions de convergence et de stabilité du filtre de Kalman conventionnel et du filtre de Kalman à entrées inconnues sont vérifiées. Cependant à partir de la 50<sup>ème</sup> itération, l'apparition de la perturbation entraîne une estimation erronée pour le filtre de Kalman conventionnel alors que le filtre de Kalman à entrées inconnues développé ne présente aucune erreur d'estimation. D'autre part les éléments diagonaux de la matrice de covariance des erreurs d'estimation de l'état  $P_{\underline{x}}(k/k)$  et de l'entrée inconnue  $P_{\underline{d}}(k/k+1)$  en régime permanent sont identique à ceux de Darouach et al. 1995. Mais comparativement aux travaux de Darouach, le calcul du gain ne nécessite ici que l'inversion d'une matrice d'ordre  $n-p$  et l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues est évité, d'où un gain en temps de calcul et en coût mémoire.

Il ressort de cet exemple que l'état  $\underline{x}$  peut être estimé d'une manière totalement indépendante de l'entrée inconnue  $\underline{d}$ . De plus, l'estimateur (4.56) permet de reconstruire l'entrée inconnue ceci quelle que soit sa forme (biais constant, palier, rampe ...). Cette entrée peut être utilisée dans une structure de commande afin d'en compenser les effets.



---

## 4.4 CONCLUSION

La nouvelle approche étudiée dans ce chapitre est la généralisation du filtre de Kalman conventionnel pour un système linéaire stochastique multivariable en présence d'entrées inconnues.

Le principal algorithme de la littérature élaboré par Darouach et al (1995) est basé sur une transformation du système non-singulier soumis à des entrées inconnues en un système équivalent singulier indépendant des entrées inconnues. Cet algorithme présente l'inconvénient d'augmenter le vecteur d'état de la dimension des entrées inconnues. Contrairement à cette approche l'algorithme développé précédemment apporte non seulement une formulation simple (par l'utilisation des résultats du filtre de Kalman conventionnel), mais aussi une diminution de l'ordre du filtre  $\hat{x}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p}$  et par conséquent, une réduction significative du nombre d'opérations élémentaires et une amélioration de la stabilité numérique. En effet, l'inversion des matrices  $(CP_{\hat{x}_1}(k/k-1)C^T + \mathcal{R}) \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times (m-p)}$  ou  $\mathcal{R}$  pour le calcul du gain  $\mathcal{K}_k$  (4.46)-(4.62) permet de réduire considérablement le temps de calcul et le risque d'instabilité numérique due à l'amplification du phénomène de propagation des erreurs lorsque la dimension des matrices à inverser est relativement grande ou que celles-ci sont mal conditionnées. Nous pouvons même ajouter que si la dimension du vecteur des entrées inconnues est égale à  $m-1$  (i.e.  $p=m-1$ ), l'inversion des matrices se réduit simplement à l'inversion d'un scalaire (i.e.  $m-p=1$ ).

Nous avons montré, par deux transformations régulières, donc numériquement stables, comment réduire le modèle stochastique à entrées inconnues en un sous-modèle robuste aux entrées inconnues. A partir de là, le problème du filtrage est réduit à un simple problème de filtrage de Kalman. C'est ainsi que des sujets importants tels que la convergence et la stabilité du filtre, le filtrage à racines carrées, le filtre information pour des systèmes à entrées inconnues pourront à l'avenir être traités en utilisant les résultats connus de la littérature. En outre, cette généralisation du filtre de Kalman, permet d'étendre le champ d'application de cette méthode à des systèmes pour lesquels le diagnostic par observateurs (présenté en première partie de ce mémoire) est rendu délicat en raison des bruits sur le système. Nous proposons d'étendre dans le prochain chapitre les résultats du chapitre 3 au diagnostic des systèmes linéaires stochastiques.

---



## CHAPITRE 5 DIAGNOSTIC ROBUSTE DES SYSTÈMES LINÉAIRES STOCHASTIQUES

### 5.0 INTRODUCTION

Les résultats développés dans le précédent chapitre, permettent de généraliser, de développer, d'étendre les résultats du chapitre 3. En effet, seul un ensemble de filtres de Kalman conventionnels associés aux sous-systèmes insensibles aux entrées inconnues et à certains défauts spécifiés suffit à résoudre les problèmes de génération de résidus pour le diagnostic robuste des systèmes linéaires stochastiques soumis à des entrées inconnues.

Le problème de détection, d'isolation et d'identification de défauts dans les systèmes stochastiques soumis à des entrées inconnues ne présente à ce jour que très peu de résultats. En raison certainement des difficultés à mettre en oeuvre un filtre qui soit à la fois robuste aux entrées inconnues, sensible aux défauts à détecter et dont la matrice de covariance des erreurs d'estimation soit à trace minimale (filtre optimal). Récemment quelques travaux traitent de ce sujet, nous citerons entre autre Chen et Patton (1996) dont la base des travaux repose sur les notions d'observateurs à entrées inconnues optimaux qui permettent une estimation à variance minimale de l'état indépendamment des entrées inconnues. Nous citerons également les travaux de Keller et al (1996), Keller et Darouach (1997) qui sont l'extension des travaux de Darouach et al (1995). Ces derniers résultats sont originaux et intéressants mais nécessitent des temps de calcul, des hypothèses et des conditions d'existence plus strictes que l'approche développée ci-dessous.

Nous proposons d'établir une procédure de diagnostic robuste aux entrées inconnues, capable de détecter, de localiser le(s) défaut(s) présent(s) sur le système et de fournir une estimation à variance minimale de l'état, nécessaire à l'estimation du ou des défauts(s) localisé(s), en vue d'élaborer une structure de commande LQG capable de compenser l'effet de ce(s) défaut(s). Nous n'aborderons ici que très peu l'aspect décision et nous invitons le lecteur à se référer aux travaux spécialisés dans ce domaine, à savoir Mehra et Peschon 1971; Willsky 1976; Basseville et Benveniste 1986; Basseville et al 1987; Nikiforov 1995, 1996 ou encore Basseville et Nikiforov 1997. La procédure de mise en oeuvre est basée sur le schéma (c) traité dans le chapitre 3. Il s'agit alors de décomposer le modèle mathématique fonction des défauts, des entrées inconnues et des bruits, en plusieurs sous-systèmes, chacun étant insensible aux entrées inconnues et à certains défauts spécifiés. L'estimation optimale des sorties de chaque sous-systèmes est alors générée par l'estimation à variance minimale des états du sous-système correspondant. Ainsi à partir d'un test d'hypothèse sur l'erreur d'estimation des sorties (résidus) de chaque sous-systèmes, une procédure de vote informe de la présence du ou des défaut(s) présent(s) sur le système.

---

## 5.1 GÉNÉRATION OPTIMALE DE RÉSIDUS EN PRÉSENCE D'ENTRÉES INCONNUES ET DE BRUITS

L'objectif de ce paragraphe est de mettre au point une méthode de génération de résidus à partir du filtre de Kalman robuste aux entrées inconnues élaboré dans le chapitre précédent. Nous proposons alors un filtre optimal de détection et d'isolation de défauts (d'actionneurs et/ou de composants). Nous donnons les conditions d'existence et la procédure de mise en oeuvre. Dans le même esprit qu'au chapitre 3, afin d'en présenter les performances et la facilité de mise en oeuvre, nous utilisons le système d'entraînement à bande (fig 3.3.11) comme exemple de simulation.

Nous profiterons de cette dernière étude pour effectuer les quelques modifications à apporter à l'algorithme présenté dans la partie 3.3.3, afin de répondre au problème de détection et d'isolation de défauts en présence d'entrées inconnues et de bruits.

### 5.1.1 Notations et hypothèses de base

Le modèle linéaire et invariant auquel nous nous intéressons, correspond au système stochastique discret à entrées inconnues étudié dans le chapitre précédent et généralisé par l'ajout d'une nouvelle entrée  $\underline{f}$  :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + F_d \underline{f}_k + E_d \underline{d}_k + \underline{w}_k \quad (5.1a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (5.1b)$$

où  $\underline{f}_k \in \mathfrak{R}^f$  représente les défauts influençant les dynamiques du système et  $F_d$  la matrice de distribution, considérée comme connue, constante et construite selon les défauts à détecter. Hormis la dimension du vecteur des entrées inconnues  $\underline{d}_k \in \mathfrak{R}^{p_1}$ , il n'y a aucun changement des dimensions et des propriétés statistiques énoncées pour le modèle (4.1).

#### Hypothèses

Les quatre hypothèses de bases  $H_1$  (i.e.  $m > p_1$ ),  $H_2$  (i.e.  $\text{rang}(C) = m$ ),  $H_3$  (i.e.  $\text{rang}[E_d] = p_1$ ) et  $H_4$  (i.e.  $\text{rang}[CE_d] = p_1$ ) énoncées dans le chapitre précédent doivent être vérifiées ainsi que :

$$H_5 : \text{rang}[E_d \ F_d] = p_1 + f \text{ (injectivité de } [E_d \ F_d])$$

Cette dernière hypothèse est nécessaire pour pouvoir distinguer l'influence individuelle de chaque défaut  $f_i$  ( $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $\underline{f}$ ).

### 5.1.2 Isolation robuste des défauts d'actionneurs et/ou de composants

D'après les résultats antérieurs, lorsque nous voulons détecter et localiser simultanément un maximum de défauts, indépendamment des entrées inconnues, il convient d'utiliser le schéma (b) ou (c). Cependant, la dimension du vecteur  $\underline{f}$  impose l'utilisation du :

- schéma (b) si  $f \leq m - p_1$ .
- schéma (c) si  $f > m - p_1$ .

#### Schéma (b)

Il consiste à générer un bloc de  $f$  filtres de Kalman à entrées inconnues, où chaque filtre génère un résidu (de signature différente) insensible à  $f - 1$  éléments appartenant à  $\underline{f}$  (voir table 3.2.2) et aux  $p_1$  entrées inconnues, c'est alors le résidu non nul qui désigne le défaut. Nous pouvons donc détecter et localiser tous les défauts simultanément, ceci sans procédure de vote.

D'après la table 3.2.2, l'ensemble des filtres associés au système (5.1) peut être décrit par la figure suivante :

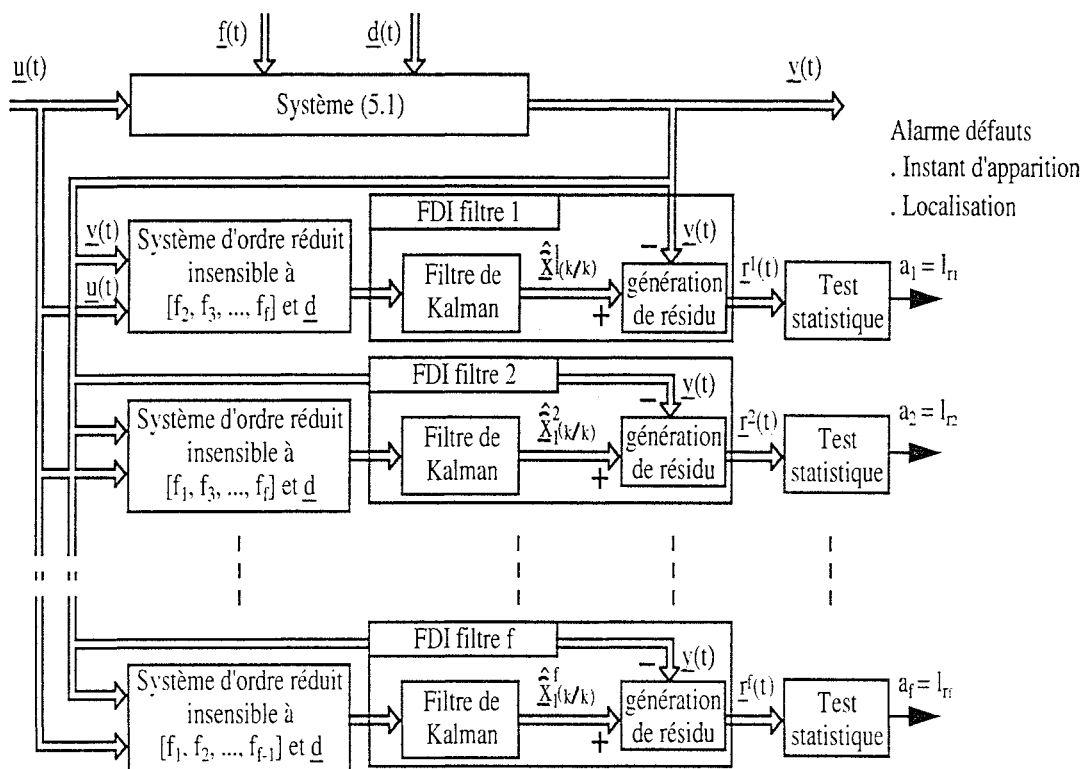


Fig 5.1 : Structure du bloc FDI, schéma (b)

**Schéma (c)**

Il consiste à générer un bloc de  $\binom{n}{p_2 = m - 1 - p_1}$  filtres de Kalman à entrées inconnues, où chaque filtre génère un résidu (de signature différente) robuste à  $p_2$  éléments du vecteur  $\underline{f}$  (voir table 3.3.3) et aux  $p_1$  entrées inconnues. Nous pouvons alors détecter et localiser simultanément un maximum de  $p_2$  défauts.

D'après la table 3.3.3, l'ensemble des filtres associé au système (5.1) pour  $n=5$ ,  $m=4$ ,  $f=4$  et  $p_1=1$ , peut être décrit par la figure suivante :

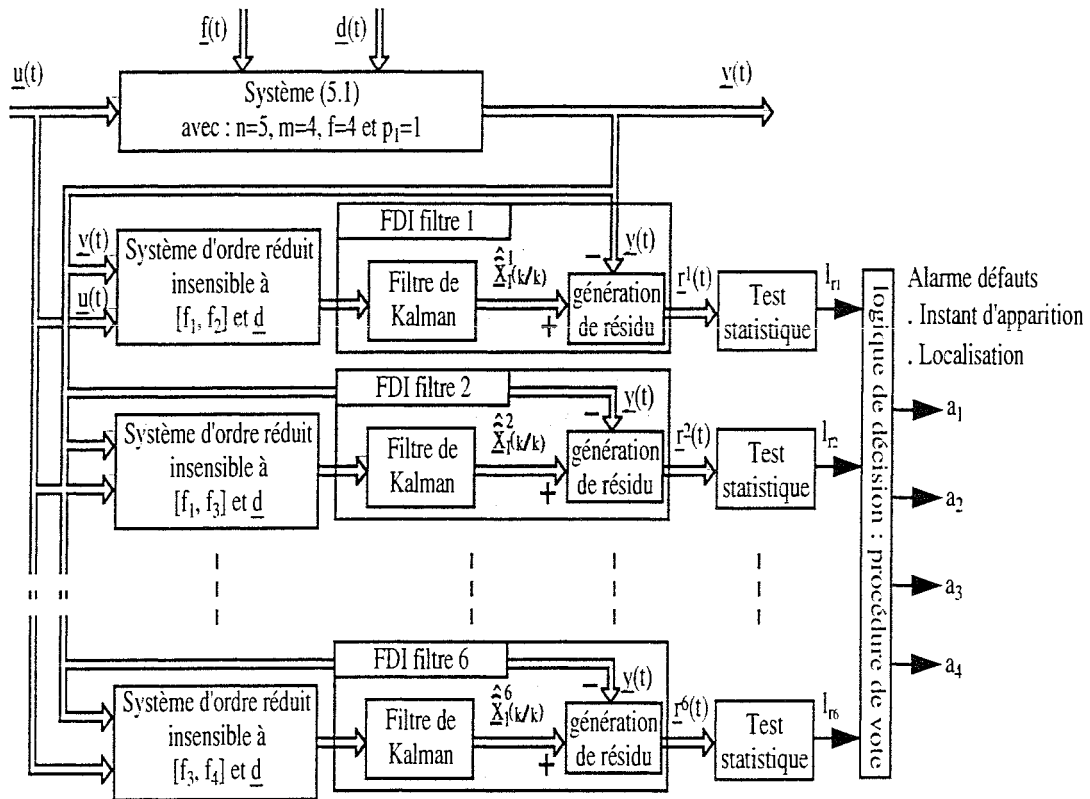


Fig 5.2 : Structure du bloc FDI, selon le schéma (c)

Nous étudierons à présent la procédure de mise oeuvre des deux phases principales que sont la détection et l'isolation des défauts, en explicitant successivement chaque module précédemment schématisé dans les 2 blocs FDI.

**5.1.3 Algorithme de détection et d'isolation robuste de défauts**

Les résultats de cette procédure font appel au filtre de Kalman à entrées inconnues développé dans le chapitre précédent, à l'algorithme de détection, d'isolation et de correction de défauts présenté dans la dernière partie du troisième chapitre et des résultats de nos derniers travaux (Koenig et Nowakowski 1997e).

**L'objectif** est de construire l'ensemble des filtres présentés dans les schémas (b) et (c), chacun vérifiant ces propres propriétés de robustesse et de sensibilité aux défauts.

**Début de l'algorithme.**

Schéma (b) : (pour  $i=1, 2, \dots, f$  faire),

Schéma (c) : (pour  $i=1, 2, \dots, n+p_2$  faire),

**Étape 1** : Construction du  $i^{\text{ème}}$  filtre.

Schéma (b) : Le résidu  $\underline{r}^i$  généré par le  $i^{\text{ème}}$  filtre doit être insensible aux  $f-1$  éléments  $f_j$ , ( $j \in \bar{f} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, f\}$ ) et aux  $p_1$  entrées inconnues, tout en restant sensible à l'élément restant  $f_{i \neq j}$ , ( $f = \{i\}$ ).

Le modèle de défaillance (5.1) est alors réécrit sous la forme équivalente suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + F_d^i \underline{f}_k^i + E_d^i \underline{d}_k^i + \underline{w}_k \quad (5.2a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (5.2b)$$

où  $E_d^i$  représente la matrice de distribution des entrées inconnues  $\underline{d}^i = [\underline{d}^T \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{i-1} \ f_{i+1} \ \dots \ f_f]^T \in \mathfrak{R}^{p=p_1+f-1}$  et  $F_d^i$  la matrice de distribution du défaut à détecter  $\underline{f}^i = [f_i]$ .

Les matrices  $E_d^i$  et  $F_d^i$  sont données par :

$$E_d^i = [E_d \ F_{d_1} \ F_{d_2} \ \dots \ F_{d_{i-1}} \ F_{d_{i+1}} \ \dots \ F_{d_f}] \quad (5.3)$$

$$F_d^i = [F_{d_i}] \quad (5.4)$$

où  $F_{d_i}$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $F_d$ .

Schéma (c) : Le résidu  $\underline{r}^i$  généré par le  $i^{\text{ème}}$  filtre doit être insensible aux  $p_2$  éléments  $f_{i_t}$ , ( $i_t \in \bar{f} = \{i_1, i_2, \dots, i_{p_2}\}$ ) et aux  $p_1$  entrées inconnues, tout en restant sensible aux éléments restants  $f_{i_k \neq t}$ , ( $i_k \in f = \{i_{p_2+1}, i_{p_2+2}, \dots, i_f\}$ ).

Le modèle de défaillance (5.1) est alors réécrit sous la forme équivalente suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + F_d^i \underline{f}_k^i + E_d^i \underline{d}_k^i + \underline{w}_k \quad (5.2c)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (5.2d)$$

où  $E_d^i$  représente la matrice de distribution des entrées inconnues  $\underline{d}^i = [\underline{d}^T \ f_{i_1} \ f_{i_2} \ \dots \ f_{i_{p_2}}]^T \in \mathfrak{R}^{p=p_1+p_2=m-1}$  et  $F_d^i$  la matrice de distribution des défauts à détecter  $\underline{f}^i = [f_{i_{p_2+1}} \ f_{i_{p_2+2}} \ \dots \ f_{i_f}]^T \in \mathfrak{R}^{f-p_2}$ .

Les matrices  $E_d^i$  et  $F_d^i$  sont données par :

$$E_d^i = \begin{bmatrix} E_d & F_{di_1} & F_{di_2} & \cdots & F_{di_{p_2}} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$F_d^i = \begin{bmatrix} F_{di_{p_2+1}} & F_{di_{p_2+2}} & \cdots & F_{di_f} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où  $F_{di_t}$  représente la  $(i_t)^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $F_d$ .

Quel que soit le schéma (b ou c), les hypothèses de bases  $H_1$  à  $H_5$  sont à vérifier pour le système (5.2),

$H_1$  :  $m > p$  (vraie par construction)

$H_2$  :  $\text{rang}(C) = m$  (toutes les mesures sont linéairement indépendantes)

$H_3$  :  $\text{rang}[E_d^i] = p$  (vraie par construction)

$H_4$  :  $\text{rang}[CE_d^i] = p$  (vraie par construction)

$H_5$  :  $\text{rang}[E_d^i \ F_d^i] = p_1 + f$  (vraie par construction)

**Étape 2** : Nous recherchons, dans une première phase, le sous-système insensible aux entrées inconnues  $\underline{d}^i$ .

La matrice  $E_d^i$  est de rang plein colonnes, il existe alors une matrice régulière

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ (E_d^i)^+ \end{bmatrix} \text{ telle que :}$$

$$\mathcal{P}E_d^i = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ (E_d^i)^+ \end{bmatrix} E_d^i = \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

avec :

$$\mathcal{P}_1^T = \text{Ker}\left((E_d^i)^T\right) \in \mathfrak{R}^{n \times (n-p)} \quad (5.8)$$

$$(E_d^i)^+ = \left((E_d^i)^T E_d^i\right)^{-1} (E_d^i)^T \quad (5.9)$$

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1^T = I_{n-p} \quad (5.10)$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^T & E_d^i \end{bmatrix} \quad (5.11)$$



En prémultipliant les équations (5.2a) et (5.2c) par la matrice  $\mathcal{P}$ , nous transformons le système (5.2) en la forme équivalente suivante :

$$\widehat{\underline{x}}_{1k+1} = \widehat{A}_{11}\widehat{\underline{x}}_{1k} + \widehat{A}_{12}\widehat{\underline{x}}_{2k} + \widehat{B}_1\underline{u}_k + \mathcal{P}_1 F_d^i f_k^i + \mathcal{P}_1 \underline{w}_k \quad (5.12a)$$

$$\widehat{\underline{x}}_{2k+1} = \widehat{A}_{21}\widehat{\underline{x}}_{1k} + \widehat{A}_{22}\widehat{\underline{x}}_{2k} + \widehat{B}_2\underline{u}_k + (E_d^i)^+ F_d^i f_k^i + \underline{d}_k^i + (E_d^i)^+ \underline{w}_k \quad (5.12b)$$

$$\underline{y}_k = \widehat{C}_1\widehat{\underline{x}}_{1k} + \widehat{C}_2\widehat{\underline{x}}_{2k} + \underline{v}_k \quad (5.12c)$$

avec :

$$\widehat{\underline{x}} = \mathcal{P}\underline{x} = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{x}}_1 \\ \widehat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\underline{x}}_1 \in \mathfrak{R}^{n-p} \quad (5.13)$$

$$\widehat{B} = \mathcal{P}B = \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\widehat{A} = \mathcal{P}A\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ (E_d^i)^+ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^T & E_d^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\widehat{C} = C\mathcal{P}^{-1} = C \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1^T & E_d^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_1 & \widehat{C}_2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Nous constatons, d'après (5.12b), que les entrées inconnues  $\underline{d}_k^i$  agissent directement sur l'état ( $\widehat{\underline{x}}_2$ ). Nous pouvons donc considérer ( $\widehat{\underline{x}}_2$ ) comme le nouveau vecteur des entrées inconnues. Nous avons alors le sous-système suivant :

$$\widehat{\underline{x}}_{1k+1} = \widehat{A}_{11}\widehat{\underline{x}}_{1k} + \widehat{A}_{12}\widehat{\underline{x}}_{2k} + \widehat{B}_1\underline{u}_k + \mathcal{P}_1 F_d^i f_k^i + \mathcal{P}_1 \underline{w}_k \quad (5.17a)$$

$$\underline{y}_k = \widehat{C}_1\widehat{\underline{x}}_{1k} + \widehat{C}_2\widehat{\underline{x}}_{2k} + \underline{v}_k \quad (5.17b)$$

dont la structure est identique aux systèmes (2.1.1) et (4.14).

Afin de reconstruire l'état complet d'origine  $\left( \underline{x} = \mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\underline{x}}_1 \\ \widehat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} \right)$ , il faut estimer les sous-états  $\widehat{\underline{x}}_1$  et  $\widehat{\underline{x}}_2$ . Or d'après les relations (5.17b et 4.20), le sous état  $\widehat{\underline{x}}_2$  ne peut être reconstruit que si l'hypothèse  $H_4$  (i.e.  $\text{rang}[CE_d^i] = \text{rang}[E_d^i] = p$ ) est vérifiée. Dans ce cas, la matrice  $\widehat{C}_2 = CE_d^i$  est de rang plein colonnes, nous savons trouver une seconde matrice régulière  $\mathcal{P}_2$  telle que :

$$\mathcal{P}_2\widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_3 \\ \widehat{C}_2^+ \end{bmatrix} \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\text{avec : } \mathcal{P}_3^\top = \text{Ker}(\widehat{\mathcal{C}}_2^\top) \in \mathfrak{R}^{m \times (m-p)} \quad (5.19)$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_2^+ = (\widehat{\mathcal{C}}_2^\top \widehat{\mathcal{C}}_2)^{-1} \widehat{\mathcal{C}}_2^\top \quad (5.20)$$

$$\mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3^\top = \mathbf{I}_{m-p} \quad (5.21)$$

Prémultiplions l'équation de mesure (5.17b) par la matrice  $\mathcal{P}_2$ ,

$$\widehat{\underline{y}}_k = \mathcal{P}_3 \underline{y}_k = \mathcal{P}_3 \widehat{\mathcal{C}}_1 \widehat{\underline{x}}_{1k} + \mathcal{P}_3 \underline{v}_k \quad (5.22)$$

$$\widehat{\underline{x}}_{2k} = \widehat{\mathcal{C}}_2^+ (\underline{y}_k - \widehat{\mathcal{C}}_1 \widehat{\underline{x}}_{1k} - \underline{v}_k) \quad (5.23)$$

nous obtenons par substitution de (5.23) dans (5.17a), le sous-système :

$$\widehat{\underline{x}}_{1k+1} = \mathcal{A} \widehat{\underline{x}}_{1k} + \mathcal{B} \underline{u}_k + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_d^i \underline{f}_k^i + \mathcal{G} \underline{w}_k \quad (5.24a)$$

$$\widehat{\underline{y}}_k = \mathcal{C} \widehat{\underline{x}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (5.24b)$$

$$\text{avec : } \mathcal{A} = (\widehat{\mathbf{A}}_{11} - \widehat{\mathbf{A}}_{12} \widehat{\mathcal{C}}_2^+ \widehat{\mathcal{C}}_1) \quad (5.25)$$

$$\mathcal{B} = [\widehat{\mathbf{B}}_1 \quad \widehat{\mathbf{A}}_{12} \widehat{\mathcal{C}}_2^+] \quad (5.26)$$

$$\mathcal{G} = [-\widehat{\mathbf{A}}_{12} \widehat{\mathcal{C}}_2^+ \quad \mathcal{P}_1] \quad (5.27)$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}_3 \widehat{\mathcal{C}}_1 \quad (5.28)$$

$$\underline{u}_k = \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\underline{w}_k = \begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\widehat{\underline{y}} = \mathcal{P}_3 \underline{y} \quad (5.31)$$

$$\underline{v}_k = \mathcal{P}_3 \underline{v}_k \quad (5.32)$$

Ainsi, pour ce nouveau modèle (5.24), la dynamique de l'état (5.24a) est indépendante des entrées inconnues, mais les nouveaux bruits  $\underline{w}_k$  et  $\underline{v}_k$  sont corrélés.

En effet, d'après (4.3), (5.30) et (5.32) les propriétés statistiques des bruits de ce nouveau modèle (5.24) sont telles que :

$$E\{\underline{w}_k\} = 0, E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{w}_k \underline{w}_l^\top\} = Q \delta_{kl}, E\{\underline{v}_k \underline{v}_l^\top\} = \mathcal{R} \delta_{kl}, E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^\top\} = S^\top \delta_{kl}$$

$$\text{avec : } Q = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \delta_{kl}, \mathcal{R} = \mathcal{P}_3 \mathbf{R} \mathcal{P}_3^\top \text{ et } S^\top = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0_{(m-p) \times n} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons cependant nous ramener au cas d'un modèle à bruits décorrélés par la construction d'un modèle équivalent.

**Étape 3 :** Recherche du modèle équivalent au système (5.24), à bruits décorrélés.

Sachant que  $E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = S^T \delta_{kl}$ , il suffit alors d'effectuer le changement de variable,

$$\underline{\bar{w}}_k = \underline{w}_k - S \mathcal{R}^{-1} \underline{v}_k \quad (5.33)$$

pour lequel il est facile de vérifier que  $E\{\underline{v}_k \underline{\bar{w}}_l^T\} = 0$ .

L'utilisation de ce bruit dans les équations du modèle (5.24) conduit directement au modèle équivalent recherché :

$$\hat{\underline{x}}_{l_{k+1}} = \bar{\mathcal{A}} \hat{\underline{x}}_{l_k} + \mathcal{B} \underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}} \hat{\underline{y}}_k + \mathcal{P}_l F_d^i f_k^i + \mathcal{G} \underline{\bar{w}}_k \quad (5.34a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = C \hat{\underline{x}}_{l_k} + \underline{v}_k \quad (5.34b)$$

$$\text{avec : } \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{G} S \mathcal{R}^{-1} C \quad (5.35)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} S \mathcal{R}^{-1} \quad (5.36)$$

Note : d'après la remarque 4.1, si  $\mathcal{R} = \alpha [I_m]$ ,  $\alpha \in \mathfrak{R}^1$  alors  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$  et  $\bar{\mathcal{G}} = 0$ .

Les propriétés statistiques des bruits du modèle (5.34) vérifient effectivement les propriétés statistique désirées :

$$E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{\bar{w}}_k\} = 0, E\left\{\begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{\bar{w}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_l^T & \underline{\bar{w}}_l^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \delta_{kl} \quad (5.37)$$

$$\text{où, } Q = E\left\{(\underline{w}_k - S \mathcal{R}^{-1} \underline{v}_k)(\underline{w}_l^T - \underline{v}_l^T \mathcal{R}^{-1} S^T)\right\} = Q - S \mathcal{R}^{-1} S^T$$

Il suffit alors d'appliquer, sur le système (5.34), le filtre de Kalman discret établi dans le cas de systèmes à bruits non corrélés et de générer le résidu  $\underline{r}^i(k/k-1)$ , défini comme la différence entre la sortie réelle (i.e.  $\hat{\underline{y}}_{k-1}$ ) et la sortie prédite du filtre (i.e.  $\hat{\underline{y}}^i(k/k-1) = C \hat{\underline{x}}_1^i(k/k-1)$ ).

#### Étape 4 : Génération robuste du $i^{\text{ème}}$ résidu $\underline{r}^i(k/k-1)$

Selon la structure du système (5.34), nous pouvons considérer les deux hypothèses distinctes suivantes :

— l'hypothèse  $H_0^i$ , tous les défauts appartenant à  $f$  sont identiquement nuls, par conséquent le vecteur  $\underline{f}_k^i = 0$ .

— l'hypothèse  $H_1^i$ , il existe au-moins un défaut non-nul appartenant à  $f$ , par conséquent le vecteur  $\underline{f}_k^i \neq 0$ .

En se plaçant dans l'hypothèse  $\mathbf{H}_0^i$ , la mise en oeuvre du filtre de Kalman discret pour le sous-système (5.34) se décompose selon les deux étapes suivantes :

— l'étape de prédiction :

où il s'agit,

\* d'évaluer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction,

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k+1/k) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k/k)\bar{\mathbf{A}}^T + \mathcal{G}\bar{\mathbf{Q}}\mathcal{G}^T \quad (5.38)$$

$$\text{donnée par } \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k+1/k) = \mathbb{E}\left\{\left[\hat{\mathbf{e}}_1^i(k+1/k)\right]\left[\hat{\mathbf{e}}_1^i(k+1/k)\right]^T\right\}$$

$$\text{avec : } \hat{\mathbf{e}}_1^i(k+1/k) = \hat{\mathbf{x}}_{1k+1} - \hat{\mathbf{x}}_1^i(k+1/k) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{e}}_1^i(k/k) + \mathcal{G}\bar{\mathbf{w}}_k \quad (5.39)$$

\* de prédire  $\hat{\mathbf{x}}_1$  à l'instant  $k+1$  compte tenu des mesures disponibles à l'instant  $k$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}_1^i(k+1/k) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k) + \mathcal{B}\underline{\mathbf{u}}_k + \bar{\mathcal{G}}\underline{\hat{\mathbf{y}}}_k \quad (\text{meilleure prédiction}) \quad (5.40)$$

— l'étape de correction :

où il s'agit,

\* d'évaluer la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k/k) = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_k^i \mathbf{C})\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k/k-1) \quad (5.41)$$

$$\text{donnée par } \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k/k) = \mathbb{E}\left\{\left[\hat{\mathbf{e}}_1^i(k/k)\right]\left[\hat{\mathbf{e}}_1^i(k/k)\right]^T\right\}$$

$$\text{avec : } \hat{\mathbf{e}}_1^i(k/k) = \hat{\mathbf{x}}_{1k} - \hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k) = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_k^i \mathbf{C})\hat{\mathbf{e}}_1^i(k/k-1) - \mathcal{K}_k^i \underline{\mathbf{v}}_k \quad (5.42)$$

\* d'estimer  $\hat{\mathbf{x}}_1$  à l'instant  $k$  compte tenu des mesures disponibles à l'instant  $k$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k) = \hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k-1) + \mathcal{K}_k^i \left( \underline{\hat{\mathbf{y}}}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k-1) \right) \quad (5.43)$$

avec  $\mathcal{K}_k^i$  le gain optimal du filtre, donnée par :

$$\mathcal{K}_k^i = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k/k-1)\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_1}^i(k/k-1)\mathbf{C}^T + \mathcal{R} \right)^{-1} \quad (5.44)$$

Nous proposons alors comme estimateurs de  $\hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $\underline{\hat{\mathbf{x}}}$  et  $\underline{\hat{\mathbf{d}}}$  au sens de la minimisation de la covariance de l'erreur d'estimation (4.38), les vecteurs respectifs  $\hat{\mathbf{x}}_2^i$ ,  $\hat{\mathbf{x}}^i$  et  $\hat{\mathbf{d}}^i$  définis par :

$$\hat{\mathbf{x}}_2^i(k/k) = \hat{\mathbf{C}}_2^+ \left( \underline{\mathbf{y}}_k - \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k) \right) \quad (5.45)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^i(k/k) = \mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k) \\ \hat{\mathbf{x}}_2^i(k/k) \end{bmatrix} = \mathcal{P}_1^T \hat{\mathbf{x}}_1^i(k/k) + \mathbf{E}_d^i \hat{\mathbf{x}}_2^i(k/k) \quad (5.46)$$

$$\hat{\mathbf{d}}^i(k/k+1) = \left( \mathbf{C}\mathbf{E}_d^i \right)^+ \left( \underline{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^i(k/k) - \mathbf{C}\mathbf{B}\underline{\mathbf{u}}_k \right) \quad (5.47)$$

où les matrices de covariance des erreurs d'estimations sont respectivement,

$$P_{\hat{x}_2}^i(k/k) = \hat{C}_2^+ \left( \hat{C}_1 P_{\hat{x}_1}^i(k/k) \hat{C}_1^T + R \right) \left( \hat{C}_2^+ \right)^T \quad (5.48)$$

$$P_{\hat{x}}^i(k/k) = \left( \mathcal{P}_1^T - E_d^i \hat{C}_2^+ \hat{C}_1 \right) P_{\hat{x}_1}^i(k/k) \left( \mathcal{P}_1^T - E_d^i \hat{C}_2^+ \hat{C}_1 \right)^T + E_d^i \hat{C}_2^+ R \left( E_d^i \hat{C}_2^+ \right)^T \quad (5.49)$$

$$P_{\underline{d}}^i(k/k+1) = \left( C E_d^i \right)^+ \left( C A P_{\hat{x}}^i(k/k) (C A)^T + C Q C^T + R \right) \left( \left( C E_d^i \right)^+ \right)^T \quad (5.50)$$

**Remarque 5.1 :** Si nous éliminons  $P_{\hat{x}_1}^i(k/k)$  et  $\hat{x}_1^i(k/k)$  dans les relations (5.38) et (5.40), nous obtenons le système récurrent suivant :

$$\hat{x}_1^i(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}} \hat{x}_1^i(k/k-1) + \mathcal{B} \underline{u}_k + \bar{\mathcal{G}} \hat{y}_k + \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}_k^i \left( \hat{y}_k - C \hat{x}_1^i(k/k-1) \right) \quad (5.51)$$

$$P_{\hat{x}_1}^i(k+1/k) = \bar{\mathcal{G}} \bar{Q} \bar{\mathcal{G}}^T + \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^i(k/k-1) \bar{\mathcal{A}}^T - \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^i(k/k-1) C^T \left( C P_{\hat{x}_1}^i(k/k-1) C^T + \mathcal{R} \right)^{-1} C P_{\hat{x}_1}^i(k/k-1) \bar{\mathcal{A}}^T \quad (5.52)$$

où la résolution de l'équation de Riccati aux différences (5.52) permet un calcul hors ligne des matrices  $P_{\hat{x}_1}^i(k+1/k)$ ,  $P_{\hat{x}_1}^i(k/k)$ ,  $\mathcal{K}_k$ ,  $P_{\hat{x}_2}^i(k/k)$ ,  $P_{\hat{x}}^i(k/k)$  et  $P_{\underline{d}}^i(k/k+1)$ .

Par conséquent, si le filtre (5.51) converge, la séquence  $\left\{ P_{\hat{x}_1}^i(k+1/k) \right\}$  converge vers la matrice  $\left\{ P_{\hat{x}_1}^{is} \right\}$  telle que :

$$P_{\hat{x}_1}^{is} - \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^{is} \bar{\mathcal{A}}^T + \bar{\mathcal{A}} P_{\hat{x}_1}^{is} C^T \left( C P_{\hat{x}_1}^{is} C^T + \mathcal{R} \right)^{-1} C P_{\hat{x}_1}^{is} \bar{\mathcal{A}}^T - \bar{\mathcal{G}} \bar{Q} \bar{\mathcal{G}}^T = 0 \quad (5.53)$$

où l'équation (5.53) est l'équation de Riccati algébrique (ERA) associée à l'ERD (5.52).

Par analogie au théorème 4.2, les conditions nécessaires et suffisantes de convergence de l'ERD et de stabilité du filtre de Kalman d'ordre réduit (5.51) sont données par le théorème suivant.

**Théorème 5.1 :** Si  $P_{\hat{x}_1}^{is}$  est l'unique solution stabilisatrice de l'ERA et si  $P_{\hat{x}_1}^i(0/-1) > 0$ , alors la séquence  $\left\{ P_{\hat{x}_1}^i(k+1/k) \right\}$  converge exponentiellement vers  $P_{\hat{x}_1}^{is}$  si et seulement si les conditions d'existence suivantes sont vérifiées :

c5.1a)  $\text{rang}(C E_d^i) = \text{rang}(E_d^i) = p$  (condition de robustesse)

et

c5.1b)  $\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A & -E_d^i \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$  (sous l'hypothèse  $H_0^i$ )

■

En se plaçant dans l'hypothèse  $\mathbf{H}_1^i$ , l'erreur de prédiction de l'état  $\underline{\hat{x}}_1$  est directement affectée par les défauts appartenant à  $f$  :

$$\underline{\hat{e}}_1^i(k+1/k) = \underline{\hat{x}}_{1k+1} - \underline{\hat{x}}_1^i(k+1/k) = \bar{\mathcal{A}} \underline{\hat{e}}_1^i(k/k) + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_d^i \underline{f}_k^i + \mathcal{G} \underline{w}_k \quad (5.54)$$

par conséquent, le résidu  $\underline{r}^i(k/k-1) = \underline{y}_{k-1} - \underline{\hat{y}}^i(k/k-1)$  est décrit par le système récurrent suivant :

$$\begin{cases} \underline{\hat{e}}_1^i(k+1/k) = (\bar{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}_k^i C) \underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1) - \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}_k^i \underline{v}_k + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_d^i \underline{f}_k^i + \mathcal{G} \underline{w}_k \\ \quad = \bar{\mathcal{A}}_k^i \underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1) - \mathcal{K}_{p_k}^i \underline{v}_k + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_d^i \underline{f}_k^i + \mathcal{G} \underline{w}_k \\ \underline{r}^i(k/k-1) = C \underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1) + \underline{v}_{k-1} \end{cases} \quad (5.55)$$

$$\text{avec : } \mathcal{K}_{p_k}^i = \bar{\mathcal{A}} \mathcal{K}_k^i \quad (5.56)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_k^i = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{K}_{p_k}^i C \quad (5.57)$$

et d'après les propriétés statistiques des bruits, l'espérance mathématique du système (5.54) donne l'expression suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k+1/k)\} = \bar{\mathcal{A}}_k^i \times \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_d^i \times \mathbb{E}\{\underline{f}_k^i\} \\ \mathbb{E}\{\underline{r}^i(k/k-1)\} = C \times \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} \end{cases} \quad (5.58)$$

Le système (5.58) est équivalent à :

Schéma (b) :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k+1/k)\} = \bar{\mathcal{A}}_k^i \times \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_{d_i} \times \mathbb{E}\{f_i(k)\} \\ \mathbb{E}\{\underline{r}^i(k/k-1)\} = C \times \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} \end{cases} \quad (5.59b)$$

Schéma (c) :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k+1/k)\} = \bar{\mathcal{A}}_k^i \times \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_{d_{i_{p_2+1}}} \times \mathbb{E}\{f_{i_{p_2+1}}(k)\} + \dots + \mathcal{P}_1 \mathbf{F}_{d_{i_f}} \times \mathbb{E}\{f_{i_f}(k)\} \\ \mathbb{E}\{\underline{r}^i(k/k-1)\} = C \times \mathbb{E}\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} \end{cases} \quad (5.59c)$$

Finalement, les systèmes (5.59b) et (5.59c), présentent les mêmes structures que dans l'approche déterministe. Par conséquent suivant le théorème 3.2.4, le filtre de Kalman d'ordre réduit (5.51) doit vérifier les conditions d'existence énoncées dans le théorème (5.1) et dans le théorème suivant.

**Théorème 5.2 :** Pour le système (5.2), le filtre de Kalman d'ordre réduit (5.51) chargé de la détection de(s) défaut(s) appartenant à  $f$  ("FDI filtre i") existe, indépendamment des défauts appartenant à  $\bar{f}$  et des entrées inconnues  $\underline{d}$ , si et seulement si les conditions du théorème 5.1 et la condition suivante de sensibilité au(x) défaut(s) appartenant à  $f$  sont vérifiées

c5.2a) L'espace commandable et observable du triplet  $(C, \bar{A}_k^i, \mathcal{P}_1 F_{d_j})$  est non vide pour (tout)  $j$  appartenant à  $f$  (le(s) défaut(s)  $f_j$  est (sont) détectable(s)). ■

### Étape 5 : Détection de(s) défaut(s) appartenant à $f$

Le résidu  $\underline{r}^i(k/k-1) \in \mathfrak{R}^{(m-p)}$  est uniquement sensible au(x) défaut(s) appartenant à  $f$ . Par conséquent, dans l'hypothèse d'absence de ces défaut(s), les propriétés statistiques au premier et second ordre du résidu sont données par :

$$H_0^i : \begin{cases} E\{\underline{r}^i(k/k-1)\} = C \times E\{\underline{\hat{e}}_1^i(k/k-1)\} = 0 \\ \text{covariance}\{\underline{r}^i(k/k-1)\} = C P_{\underline{\hat{x}}_1}^i(k/k-1) C^T + \mathcal{R} \end{cases} \quad (5.60)$$

Quand il y a occurrence d'un ou de plusieurs défauts appartenant à  $f$ , les propriétés statistiques du résidu sont différentes. Elles correspondent aux propriétés  $H_1^i$ . Le problème de détection de(s) ce(s) défaut(s) consiste alors à faire le bon choix entre les hypothèses  $H_0^i$  "pas de défaut" et  $H_1^i$  "présence de défaut".

Par hypothèse, les séquences  $\{\underline{w}_k\}$  et  $\{\underline{v}_k\}$  sont des bruits blancs gaussiens, ainsi  $\{\underline{r}^i(k/k-1)\}$  est une séquence gaussienne, nous pouvons appliquer le test du Khi-2.

En l'absence de défaut(s) appartenant à  $f$  la quantité :

$$\eta^i(k-1) = \sum_{j=k-N}^{k-1} (\underline{r}^i(k/k-1))^T (C P_{\underline{\hat{x}}_1}^i(k/k-1) C^T + \mathcal{R})^{-1} (\underline{r}^i(k/k-1)) \quad (5.61)$$

suit une loi du Khi-2 à  $N \times (m-p)$  degrés de liberté et où  $N$  représente la taille de la fenêtre d'observation.

Si un défaut apparaît, les propriétés statistiques de  $\{\underline{r}^i(k/k-1)\}$  changent et nous pouvons utiliser la règle de décision suivante :

$$\begin{cases} l_{\underline{r}^i} = 0 \text{ si } \eta^i(k-1) <_{H_0^i} \varepsilon^i \\ l_{\underline{r}^i} = 1 \text{ si } \eta^i(k-1) \geq_{H_1^i} \varepsilon^i \end{cases} \quad (5.62)$$

où le seuil  $\varepsilon$  est déterminé à l'aide d'une table de distribution de la loi du Khi-2 en fonction de la taille de la fenêtre et pour un taux de fausses alarmes donné.





## 5.2 EXEMPLE

Afin d'évaluer les performances du filtre de Kalman à entrées inconnues appliqué au diagnostic robuste de défauts des systèmes linéaires stochastiques, nous nous sommes intéressés au système de la bobineuse (fig 3.3.11). A la différence de l'exemple 3.3.3.2, le modèle de défaillance tient compte des bruits de structures et de mesures, il est donc décrit par la représentation suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + F_d \underline{f}_k + \underline{w}_k \quad (5.63a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (5.63b)$$

où l'état  $\underline{x}_k \in \mathfrak{R}^{n=3}$ , la commande  $\underline{u}_k \in \mathfrak{R}^{e=3}$ , les défauts d'actionneurs  $\underline{f}_k \in \mathfrak{R}^{f=3}$  et la mesure  $\underline{y}_k = [T_1(k) \ V_2(k) \ T_3(k)]^T \in \mathfrak{R}^{m=3}$ . Les matrices A, B et  $F_d$  sont constantes et connues (partie 3.3.3.2), et la matrice C est égale à la matrice identité.

Les séquences  $\{\underline{v}_k\}$  et  $\{\underline{w}_k\}$  sont des bruits blancs gaussiens non corrélés, de moyennes nulles et indépendants de  $\underline{x}_0$ . Leurs matrices de covariances sont respectivement,

$$R = 0.1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } Q = \begin{bmatrix} 0.1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01^2 \end{bmatrix}$$

### Application

Le système est composé de 3 (=n) états, 3 (=f) défauts, 3 (=m) mesures et aucune perturbations (i.e.  $p_1=0$ ). Nous sommes, par conséquent, dans les hypothèses du schéma (b). Il suffit donc de générer un ensemble de trois résidus  $\underline{r}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), chacun étant insensible à deux éléments du vecteur  $\underline{f}$ . La table ci-dessous, résume les propriétés que doivent vérifier ces résidus.

S <sub>i</sub>	FDI filtre <sub>1=r<sup>1</sup></sub>	FDI filtre <sub>2=r<sup>2</sup></sub>	FDI filtre <sub>3=r<sup>3</sup></sub>	Logique de décisions
$f_1(t) \neq 0$	1	0	0	$a_1 = 1_{r^1}$
$f_2(t) \neq 0$	0	1	0	$a_2 = 1_{r^2}$
$f_3(t) \neq 0$	0	0	1	$a_3 = 1_{r^3}$

Table 5.1 : Isolation pour n=3, f=3, m=3 et  $p_1=0$ . schéma (b)

**Illustration.**Construction du deuxième filtre ("FDI filtre<sub>2</sub>")

**Étape 1)** Selon la table 5.1, le résidu  $\underline{r}^2$  généré par le deuxième filtre est insensible aux éléments  $f_1$  et  $f_3$ , mais sensible à l'élément  $f_2$ . Nous considérons alors le modèle de défaillance suivant :

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + F_d^2 \underline{f}_k^2 + E_d^2 \underline{d}_k^2 + \underline{w}_k \quad (5.64a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (5.64b)$$

$$\text{où : } \bar{f} = \{1, 3\}, f = \{2\}, F_d^2 = \begin{bmatrix} 0.0431 \\ 0.2413 \\ -0.0196 \end{bmatrix}, E_d^2 = \begin{bmatrix} -0.4504 & 0.1256 \\ 0.0420 & 0.0575 \\ -0.1321 & 0.3758 \end{bmatrix}, \underline{f}_k^2 = [f_2],$$

$$\text{et } \underline{d}_k^2 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}.$$

Les hypothèses  $H_1$  à  $H_5$  sont vérifiées.

**Étape 2 :** Recherche du sous-système insensible aux entrées inconnues  $\underline{d}^2$ .

La matrice  $E_d^2$  étant de rang plein colonnes, il existe une matrice

régulière  $\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ (E_d^2)^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$\mathcal{P}E_d^2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ (E_d^2)^+ \end{bmatrix} E_d^2 = \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

avec :

$$\mathcal{P}_1 = [0.1484 \quad 0.9689 \quad -0.1978] \quad (5.66)$$

$$E_d^+ = [0 \quad 0.5 \quad 0.5] \quad (5.67)$$

En prémultipliant l'équation (5.64a) par la matrice  $\mathcal{P}$ , nous obtenons le sous-système suivant :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \hat{A}_{11}\hat{\underline{x}}_{1k} + \hat{A}_{12}\hat{\underline{x}}_{2k} + \hat{B}_1\underline{u}_k + \mathcal{P}_1 F_d^2 \underline{f}_k^2 + \mathcal{P}_1 \underline{w}_k \quad (5.68a)$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1 \hat{\underline{x}}_1 + \hat{C}_2 \hat{\underline{x}}_2 + \underline{v}_k \quad (5.68b)$$

avec :

$$\hat{\underline{x}} = \mathcal{P}\underline{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_1 \\ \hat{\underline{x}}_2 \end{bmatrix}, \hat{A}_{11} = [0.7992], \hat{A}_{12} = [-0.011 \quad -0.006].$$

$$\hat{B}_1 = [0 \quad 0.2441 \quad 0], \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.1483 \\ 0.9689 \\ -0.1978 \end{bmatrix} \text{ et } \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} -0.4504 & 0.1256 \\ 0.042 & 0.0575 \\ -0.1321 & 0.3758 \end{bmatrix}$$

Pour le sous-système (5.68), la nouvelle entrée inconnue est représentée par la variable  $\hat{\underline{x}}_2$  or la matrice  $\hat{\underline{C}}_2 = \underline{C}\underline{E}_d^2$  est de rang plein colonnes, il existe alors une matrice régulière  $\underline{\mathcal{P}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}_3 \\ \hat{\underline{C}}_2^+ \end{bmatrix}$  telle que :

$$\underline{\mathcal{P}}_2 \hat{\underline{C}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}_3 \\ \hat{\underline{C}}_2^+ \end{bmatrix} \hat{\underline{C}}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times p} \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

avec :

$$\underline{\mathcal{P}}_3 = [0.1484 \quad 0.9689 \quad -0.1978] \quad (5.70)$$

$$\hat{\underline{C}}_2^+ = \begin{bmatrix} -2.3832 & 0.5116 & 0.7182 \\ -0.7596 & 0.6900 & 2.8093 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

qui transforme le sous-système (5.68) en un sous-système (5.72) indépendant de l'entrée inconnue  $\underline{d}^2$  :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \underline{\mathcal{A}}\hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{\mathcal{B}}\underline{u}_k + \underline{\mathcal{P}}_1 \underline{F}_d^2 \underline{f}_k^2 + \underline{\mathcal{G}}\underline{w}_k \quad (5.72a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \underline{C}\hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (5.72b)$$

avec :  $\underline{u}_k = \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k \end{bmatrix}$ ,  $\underline{w}_k = \begin{bmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\underline{y}} = \underline{\mathcal{P}}_3 \underline{y}$ ,  $\underline{v}_k = \underline{\mathcal{P}}_3 \underline{v}_k$ ,  $\underline{\mathcal{A}} = [0.7992]$ ,

$$\underline{\mathcal{B}} = [0 \quad 0.2441 \quad 0 \quad 0.0309 \quad -0.0098 \quad -0.025], \quad \underline{C} = [1]$$

$$\text{et } \underline{\mathcal{G}} = [-0.0309 \quad 0.0098 \quad 0.025 \quad 0.1484 \quad 0.9689 \quad -0.1978]$$

Pour ce nouveau modèle (5.72), la dynamique de l'état (5.72a) est indépendante des entrées inconnues. Cependant, les nouveaux bruits  $\underline{w}_k$  et  $\underline{v}_k$  sont corrélés, leurs propriétés statistiques aux premier et second ordres sont :

$$E\{\underline{w}_k\} = 0, \quad E\{\underline{v}_k\} = 0, \quad E\{\underline{w}_k \underline{w}_l^T\} = \underline{Q}\delta_{kl}, \quad E\{\underline{v}_k \underline{v}_l^T\} = \underline{\mathcal{R}}\delta_{kl}, \quad E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = \underline{S}^T \delta_{kl}$$

$$\text{avec : } \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{R} & 0 \\ 0 & \underline{Q} \end{bmatrix} \delta_{kl}, \quad \underline{\mathcal{R}} = 0.01 \text{ et } \underline{S}^T = [0.0015 \quad 0.0097 \quad -0.0020 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

**Étape 3 :** Recherche du modèle équivalent au système (5.72) à bruits décorrélés.

Sachant que  $E\{\underline{v}_k \underline{w}_l^T\} = \underline{S}^T \delta_{kl}$ , il suffit d'effectuer le changement de variable,

$$\underline{\bar{w}}_k = \underline{w}_k - \underline{S}\underline{\mathcal{R}}^{-1}\underline{v}_k \quad (5.73)$$

pour lequel il est facile de vérifier que  $E\{\underline{v}_k \underline{\bar{w}}_l^T\} = 0$ .

L'utilisation de ce bruit, dans les équations du modèle (5.72), conduit directement au modèle équivalent désiré :

$$\hat{\underline{x}}_{1k+1} = \underline{\bar{\mathcal{A}}}\hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{\mathcal{B}}\underline{u}_k + \underline{\bar{\mathcal{G}}}\hat{\underline{y}}_k + \underline{\mathcal{P}}_1 \underline{F}_d^1 \underline{f}_k^1 + \underline{\mathcal{G}}\underline{\bar{w}}_k \quad (5.74a)$$

$$\hat{\underline{y}}_k = \underline{C}\hat{\underline{x}}_{1k} + \underline{v}_k \quad (5.74b)$$

où  $\underline{\bar{\mathcal{A}}} = \underline{\mathcal{A}}$  et  $\underline{\bar{\mathcal{G}}} = 0$  puisque la remarque 4.1 est vérifiée, ( $\alpha = 0.1^2$ ).

Les propriétés statistiques des bruits du modèle (5.74) vérifient effectivement les propriétés statistique désiré :

$$E\{\underline{v}_k\} = 0, E\{\underline{w}_k\} = 0, E\left\{\begin{bmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_l^T & \underline{w}_l^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & \mathcal{Q} \end{bmatrix} \delta_{kl} \quad (5.75)$$

avec :

$$\bar{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} 0.0098 & -0.0014 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0014 & 0.0006 & 0.0019 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0003 & 0.0019 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

#### Étape 4 : Génération robuste du deuxième résidu $\underline{r}^2(k/k-1)$

En se plaçant dans l'hypothèse  $\mathbf{H}_0^i$ , il suffit d'appliquer, sur le sous-système (5.74), le filtre de Kalman discret défini dans le cas de systèmes à bruits non corrélés, et de terminer la procédure par l'algorithme de calcul du filtre présenté sur la figure 5.3, avec les conditions initiales suivantes :

$$\hat{\underline{x}}(0/-1) = \bar{\underline{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } P_{\hat{\underline{x}}}(0/-1) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Ou encore, afin de gagner en temps de calcul, il suffit de rechercher la solution stabilisatrice de l'équation de Riccati algébrique associée à (5.53) et d'en déduire par un calcul hors ligne le gain et les matrices de covariance.

En effet, comme les conditions du théorème 5.1 sont vérifiées, la séquence  $\{P_{\hat{\underline{x}}_1}(k+1/k)\}$  converge vers la matrice  $\{P_{\hat{\underline{x}}_1}^s\}$  telle que :

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}^s - \bar{\mathcal{A}}P_{\hat{\underline{x}}_1}^s\bar{\mathcal{A}}^T + \bar{\mathcal{A}}P_{\hat{\underline{x}}_1}^sC^T(CP_{\hat{\underline{x}}_1}^sC^T + \mathcal{R})^{-1}CP_{\hat{\underline{x}}_1}^s\bar{\mathcal{A}}^T - \mathcal{G}\bar{\mathcal{Q}}\mathcal{G}^T = 0 \quad (5.76)$$

La solution stabilisatrice de l'équation de Riccati algébrique associée à (5.76) est :

$$P_{\hat{\underline{x}}_1}^s = [0.0133] \quad (5.77)$$

Nous en déduisons alors aisément les valeurs statiques du gain et des matrices de covariance.

$$\mathcal{K}^s = [0.5703], \mathcal{K}_p^s = [0.4558], \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\hat{\underline{x}}_1}(k/k) = [0.0057],$$

$$\bar{\mathcal{A}}^s = [0.3434], \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\hat{\underline{x}}_2}(k/k) = \begin{bmatrix} 0.0646 & 0.0418 \\ 0.0418 & 0.0895 \end{bmatrix},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\hat{\underline{x}}}(k/k) = \begin{bmatrix} 0.0099 & -0.0006 & 0.0001 \\ -0.0006 & 0.0060 & 0.0008 \\ 0.0001 & 0.0008 & 0.0098 \end{bmatrix}, \lim_{k \rightarrow \infty} P_d(k/k+1) = \begin{bmatrix} 0.1773 & 0.0957 \\ 0.0957 & 0.1477 \end{bmatrix}$$

Remarque :  $\lambda(\bar{\mathcal{A}}^s) = [0.3434]$ , le filtre prédicteur d'ordre réduit (5.51) est bien asymptotiquement stable.

En se plaçant dans l'hypothèse  $\mathbf{H}_1^i$ , l'erreur de prédiction de l'état  $\hat{\underline{x}}_1$  et le résidu  $\underline{r}^2(k/k-1) = \underline{y}_{k-1} - \hat{\underline{y}}^2(k/k-1)$  sont décrits par le système récurrent suivant :

$$\begin{cases} \hat{\underline{e}}_1^i(k+1/k) = (\bar{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{A}}\mathcal{K}_k^i C) \hat{\underline{e}}_1^i(k/k-1) - \bar{\mathcal{A}}\mathcal{K}_k^i \underline{v}_k + \mathcal{P}_1 F_d^i f_k^i + \mathcal{G}\bar{\underline{w}}_k \\ \quad = \bar{\mathcal{A}}_k^i \hat{\underline{e}}_1^i(k/k-1) - \mathcal{K}_{p_k}^i \underline{v}_k + \mathcal{P}_1 F_d^i f_k^i + \mathcal{G}\bar{\underline{w}}_k \\ \underline{r}^i(k/k-1) = C \hat{\underline{e}}_1^i(k/k-1) + \underline{v}_{k-1} \end{cases} \quad (5.78)$$

et d'après les propriétés statistiques des bruits, l'espérance mathématique du système (5.78) donne l'expression suivante :

$$\begin{cases} E\{\hat{\underline{e}}_1^i(k+1/k)\} = \bar{\mathcal{A}}_k^i \times E\{\hat{\underline{e}}_1^i(k/k-1)\} + \mathcal{P}_1 F_{d_1}^i \times E\{f_i(k)\} \\ E\{\underline{r}^i(k/k-1)\} = C \times E\{\hat{\underline{e}}_1^i(k/k-1)\} \end{cases} \quad \text{Schéma (b)} \quad (5.79)$$

Finalement, le système (5.79) présente la même structure que dans l'approche déterministe. Il reste donc à vérifier le théorème (5.2).

Pour le système (5.64), le filtre de Kalman d'ordre réduit (5.51) chargé de la détection du défaut  $f_2$  existe, indépendamment de  $\underline{d}^2$ , si et seulement si les conditions du théorème 5.1 et la condition de sensibilité du défaut appartenant à  $f$  sont vérifiées :

$$c5.1a) \quad \text{rang}(CE_d^i) = \text{rang}(E_d^i) = p = 2 \quad \text{OK}$$

$$c5.1b) \quad \text{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda I - A & -E_d^i \\ C & 0 \end{bmatrix}\right) = n + p = 5, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1 \quad \text{OK}$$

et

$$c5.2a) \quad \text{Le défaut } f_2 \text{ appartenant à } f, \text{ est détectable car l'espace commandable et observable du triplet } (C, \bar{\mathcal{A}}_k^2, \mathcal{P}_1 F_{d_2}) \text{ est non vide.} \quad \text{OK}$$

### Étape 5 : Détection du défaut $f_2$

Le résidu  $\underline{r}^2(k/k-1) \in \mathfrak{R}^{(m-p)=1}$  est scalaire, par conséquent l'inversion de la matrice  $(CP_{\hat{\underline{x}}_1}^2(k/k-1)C^T + \mathcal{R}) \in \mathfrak{R}^1$  ne nécessite que l'inversion d'un scalaire et le test statistique sur la séquence  $\underline{r}^2$  est réduit au cas monovarié.

◇

Afin de valider la méthode, nous avons simulé sur le système les défauts suivants :

$$\text{Défaut sur le premier actionneur, } f_1(k) = \begin{cases} 0; & k < 20 \text{ (sec)} \\ 2; & k \geq 20 \text{ (sec)} \\ 4; & k \geq 40 \text{ (sec)} \\ 2.5; & k \geq 70 \text{ (sec)} \end{cases}$$

Pas de défaut sur le second actionneur.

$$\text{Défaut sur le troisième actionneur, } f_3(k) = \begin{cases} 0; & k < 30 \text{ (sec)} \\ 2; & k \geq 30 \text{ (sec)} \\ 0; & k \geq 70 \text{ (sec)} \end{cases}$$

Et nous avons comparé les résultats d'estimations du filtre de Kalman conventionnel (sensible à tous les défauts), aux résultats d'estimations du filtre de Kalman à entrées inconnues développé (insensible au(x) défaut(s) appartenant à  $\bar{f}$ ). Les courbes suivantes montrent l'allure des résidus, l'estimation de l'état complet et l'estimation des défauts.

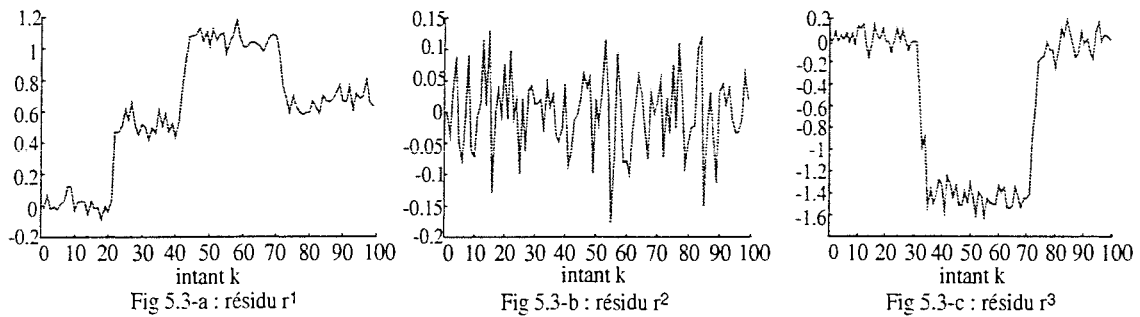


Fig 5.3 : Evolution des résidus  $r_i$  ( $i=1, 2, 3$ )

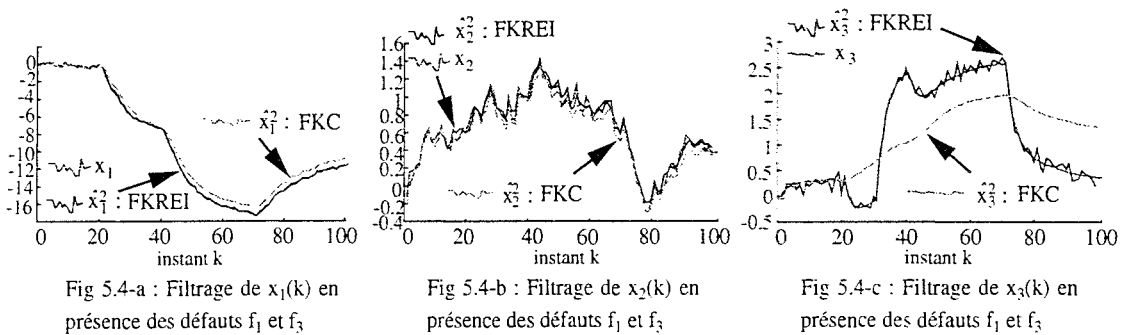


Fig 5.4 : Estimation des composantes du vecteur d'état  $\underline{x}$

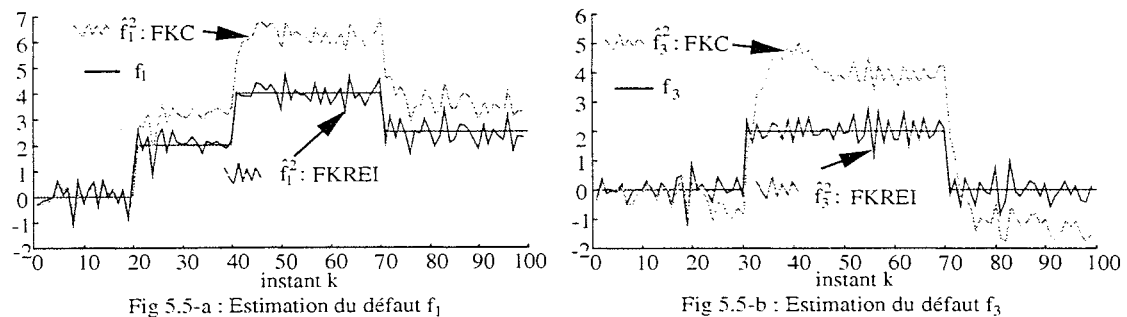


Fig 5.5 : Estimation des défauts

Remarque : Pour l'estimation d'état et des défauts, nous avons utilisé le deuxième filtre car il est insensible par construction aux défauts  $f_1$  et  $f_3$ .

### Conclusion.

L'allure des résidus correspond aux propriétés établies dans la table 5.1. En effet, à partir de la 20<sup>ème</sup> (30<sup>ème</sup>) itération, l'apparition du défaut  $f_1$  ( $f_3$ ) entraîne un biais sur le résidu  $r^1$  ( $r^3$ ). Ayant détecté et localisé les défauts, nous savons estimer l'état et les défauts présents sur le système.

---

## 5.3 CONCLUSION

Au terme de ce travail, les résultats obtenus permettent d'étendre les méthodes de diagnostic des systèmes déterministes aux systèmes stochastiques.

Nous avons montré par une décomposition du modèle en sous-modèles insensibles aux entrées inconnues et à certains défauts spécifiés, comment les résultats connus du filtre de Kalman pouvaient être utilisés pour **détecter, localiser et identifier** les défauts d'un système. Comme au chapitre précédent, pour le schéma (c), l'inversion de l'expression  $\left( CP_{\hat{\Sigma}_1}^i(k/k-1)C^T + \mathcal{R} \right)$  ne nécessite que **l'inversion d'un scalaire**, ainsi le test statistique sur la séquence  $\{r^i(k/k-1)\}$  est **réduit au cas monovariable**. Aussi, le **découplage de l'estimation de l'état et des défauts**, permet de réduire considérablement le nombre d'opérations élémentaires, comparativement à l'estimation simultanée de l'état et des défauts (Keller et al 1996, Keller et Darouach 1997). D'autre part dans ces derniers travaux, le bloc FDI nécessite la construction de filtres d'estimation de défauts dont les conditions d'existence ne sont pas vérifiées **si** le nombre de défauts est supérieur à la différence des mesures et des entrées inconnues (i.e.  $f > m - p$ ). Cette condition est restrictive, aussi notre schéma (c) de décomposition permet non seulement de contourner cette condition mais elle offre de plus l'avantage de générer des résidus basés uniquement sur l'estimation d'état des sous-systèmes, et non pas sur l'estimation complète de l'état tel que l'ont montré les travaux de Chen et Patton (1996) ou encore Keller et al (1996). En définitive, cette décomposition dans l'espace d'état et dans l'espace des observations **atténue** le phénomène de propagation des erreurs d'arrondi et **augmente** par conséquent la robustesse numérique des filtres.

---





## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux développés au sein du CRAN depuis de nombreuses années à savoir le diagnostic des systèmes complexes. Il concerne la recherche de nouveaux algorithmes intégrant l'ensemble des tâches d'une procédure de diagnostic (détection, isolation et correction des défauts) pour des systèmes linéaires déterministes ou stochastiques soumis à des perturbations inconnues a priori. Cette intégration s'avère cependant difficile à mettre en oeuvre. Nous avons proposé dans un premier temps, une **méthode de synthèse de type normes minimales**. Cette méthode présente l'avantage de n'utiliser que des estimateurs élémentaires (i.e. sans entrées inconnues). Elle permet également de fournir l'estimation de l'état, des défauts et des entrées inconnues. Cependant elle ne s'applique que lorsque la condition de découplage des entrées inconnues est vérifiée. Cette condition étant particulièrement restrictive nous avons été amenés à proposer un **nouveau schéma d'isolation de défauts** basé sur la **décomposition en valeurs singulières**, possédant les mêmes avantages que l'approche par normes minimales et ne nécessitant pas quant à la génération de résidu l'estimation complète du vecteur d'état. L'application au diagnostic d'un système à base de réservoirs ou d'une bobineuse a montré des résultats particulièrement performants. Cette approche laisse ainsi entrevoir de réelles perspectives de développement, même si elle souligne l'éternel compromis sensibilité / robustesse.

Comme nous l'avons souligné plus haut une approche intégrée de diagnostic nécessite de détecter, d'isoler mais également de corriger des défauts. Il est donc nécessaire de pouvoir modifier la loi de commande du procédé afin de garantir les performances du système. C'est dans cet objectif que nous avons proposée une **commande** reposant sur une optimisation  $H_2$  particulièrement bien adaptée au contexte de la reconfiguration. Contrairement aux approches classiques fondées sur le placement de pôles en boucle fermée du système, cette nouvelle approche permet un calcul direct de la matrice de compensation et de la loi de commande en fonction des estimations des défauts établis par le module de diagnostic décrit précédemment. Outre la possibilité **de corriger le ou les sous-systèmes en défaut** (et ce quelle que soit la nature des défaillances) cette méthode permet également de **stabiliser** le système.

L'approche intégrée (détection, isolation et correction) proposée précédemment s'applique au cas des systèmes déterministes. Nos travaux ont porté également sur la généralisation de cette approche au cas des systèmes linéaires stochastiques. Dans ce contexte nous avons proposé un nouvel algorithme de détection et d'isolation des défauts basé sur la décomposition du **système original** en plusieurs **sous-systèmes**, chacun étant fonction uniquement d'un **sous-ensemble** de défauts préalablement **spécifiés**. La

encore l'application au procédé de la bobineuse décrit précédemment a mis en évidence la simplicité de mise en oeuvre de l'algorithme. Cet exemple à montrer que le calcul du gain de chaque filtre se réduit simplement à **l'inversion** d'un **scalaire**.

Les résultats présenté dans ce mémoire pourront être étendus à la conception d'une procédure d'accommodation des défauts plus générale, tenant compte de l'interaction de la commande et du diagnostic du procédé. D'autre part l'interprétation des sous systèmes indépendants des entrées inconnues vis a vis de la démarche de projection dans l'espace de parité (formalisme géométrique et algébrique) me semblerait également la bienvenue. Il serait aussi intéressant d'adapter nos algorithmes aux systèmes linéaires à paramètres variables et aux systèmes bilinéaires ou non-linéaires. Enfin si de nombreux problèmes restent ouverts, leur formulation peut être simplifiée sur la base de nos algorithmes qui ne nécessitent plus que l'utilisation d'observateurs élémentaires ou de filtres de Kalman.



# ANNEXE A

## OUTILS MATHÉMATIQUES

Comme nous avons à décomposer le modèle mathématique fonction des entrées inconnues en un sous-modèle insensible aux entrées inconnues, nous rappelons les deux outils mathématiques de base qui nous permettent de résoudre ce problème.

L'ensemble des informations présentés dans cette annexe font appel aux résultats de Stewart 1977; Borne et Rottella 1995 et utilisent dans leurs calculs des pseudo-inverses au sens de Moore-Penrose.

### A.1 Décomposition en valeurs singulières

#### A.1.1 Hypothèse $r < p \leq m$

Pour toute matrice  $E_m \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  de rang  $r < p$ , il existe deux matrices orthogonales  $V = (V_1 \ V_2) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  et  $W = (W_1 \ W_2) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  telles que :

$$E_m = V \Sigma W^T = V_1 \Sigma_r W_1^T \in \mathfrak{R}^{m \times p} \quad (\text{a.1.1})$$

$$E_m^+ = W \Sigma^+ V^T = W_1 \Sigma_r^+ V_1^T \in \mathfrak{R}^{p \times m} \quad (\text{a.1.2})$$

avec :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times p} \quad (\text{a.1.3})$$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p \times m} \quad (\text{a.1.4})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Les  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières de  $E_m$  d'où le nom de décomposition en valeurs singulières.

Nous avons obtenu la décomposition en valeurs singulières de  $E_m$  :

$$E_m = V \Sigma W^T \text{ soit, } E_m^T = W \Sigma^T V^T$$

Nous pouvons regrouper ces relations sous la forme :

$$E_m^T E_m = W \Sigma^T V^T V \Sigma W^T = W \Sigma^T \Sigma W^T,$$

$$E_m E_m^T = V \Sigma W^T W \Sigma^T V^T = V \Sigma \Sigma^T V^T,$$

$$\text{où } \Sigma^T \Sigma = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0] \in \mathfrak{R}^{p \times p}$$

$$\text{et } \Sigma \Sigma^T = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$$

Ainsi nous venons de montrer que les valeurs singulières non nulles sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de la matrice  $E_m E_m^T$ , mais aussi celles de la matrice  $E_m^T E_m$ .

Si nous posons  $V = [v_1, \dots, v_m]$  et  $W = [w_1, \dots, w_p]$  alors les  $v_i$  et les  $w_i$ , d'après les expressions précédentes, reçoivent respectivement une interprétation en termes de vecteurs propres de  $E_m E_m^T$  et  $E_m^T E_m$ .

Nous obtenons alors les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} (\sigma_i^2 I - E_m E_m^T) v_i &= 0 \text{ et } (E_m E_m^T) v_j = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \text{ et } j = r+1, r+2, \dots, m \\ (\sigma_i^2 I - E_m^T E_m) w_i &= 0 \text{ et } (E_m^T E_m) w_j = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \text{ et } j = r+1, r+2, \dots, p \end{aligned}$$

De plus:  $E_m W = V \Sigma$   
 et  $V^T E_m = \Sigma W^T$

donc pour $i=1, 2, \dots, r$ :	pour $r+1 \leq i \leq p$ :	et pour $r+1 \leq i \leq m$
$E_m w_i = \sigma_i v_i,$	$E_m w_i = 0,$	$E_m^T v_i = 0.$
$E_m^T v_i = \sigma_i w_i,$		

dans tous les cas, nous pouvons écrire :

$$E_m w_{r+1} = 0, \dots, E_m w_p = 0,$$

et  $E_m w_1 = \sigma_1 v_1, \dots, E_m w_r = \sigma_r v_r,$

donc,

$$\text{Ker}(E_m) = \text{span}\{\underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_p\} = W_2 \quad (\text{a.1.5})$$

$$\text{Im}(E_m) = \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\} = V_1 \quad (\text{a.1.6})$$

où  $\text{Ker}(E_m)$  s'interprète comme le sous-espace vectoriel orthogonal aux lignes de  $E_m$ , et  $\text{Im}(E_m)$  le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de  $E_m$ .

Ainsi,  $\text{Ker}$ ,  $\text{Im}$  et  $\text{span}$  représentent respectivement le noyau, l'image et l'espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs.

Nous pouvons noter que l'une des conséquences immédiates de ce résultat est que pour toute matrice  $E_m \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  :

$$\dim \text{Im}(E_m) + \dim \text{Ker}(E_m) = p \quad (\text{a.1.7})$$

Quelques propriétés de  $E_m^+$

Toute matrice  $E_m^+$  vérifiant les quatre propriétés ci-dessous est une pseudo-inverse de  $E_m$  (on dit aussi inverse au sens de Moore-Penrose).

$$E_m^+ E_m E_m^+ = E_m^+ \quad (\text{a.1.8})$$

$$E_m E_m^+ E_m = E_m \quad (\text{a.1.9})$$

$$(E_m E_m^+)^T = E_m E_m^+ \quad (\text{a.1.10})$$

$$(E_m^+ E_m)^T = E_m^+ E_m \quad (\text{a.1.11})$$

## Orthogonalité et transposition

La notion d'orthogonalité est définie à partir du produit scalaire :

— deux vecteurs  $x$  et  $y$  de mêmes dimensions sont orthogonaux si :

$$x^T y = 0$$

— l'orthogonal d'un espace vectoriel  $E \subset \mathfrak{R}^n$ , est l'espace vectoriel, noté  $E^\perp$ , défini par

$$E^\perp = \{y \in \mathfrak{R}^n, \forall x \in E, x^T y = 0\}.$$

Il est évident que pour tout espace vectoriel de dimension finie, nous avons

$$E \cap E^\perp = \{0\} \text{ et } (E^\perp)^\perp = E. \quad (\text{a.1.12})$$

D'autre part pour toute matrice  $E_m$ , nous avons le résultat suivant :

$$[\text{Im}(E_m)]^\perp = \text{Ker}(E_m^T) \quad (\text{a.1.13})$$

qui établit un lien entre les notions d'orthogonalité d'espaces vectoriels et la transposition d'opérateurs.

Donc d'après les propriétés précédentes, nous avons les projections suivantes, (Kurek 1983)

$$P_{E_m} = E_m E_m^+ = V \begin{bmatrix} I_{r \times r} & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} V^T = V_1 V_1^T \text{ où } V_1 \in \mathfrak{R}^{m \times r} \quad (\text{a.1.14})$$

"Projection orthogonale sur l'espace des colonnes de  $E_m$ , que l'on note  $\mathfrak{R}(E_m)$ "

$$R_{E_m} = E_m^+ E_m = W \begin{bmatrix} I_{r \times r} & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(p-r) \times r} & 0_{(p-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} W^T = W_1 W_1^T \text{ où } W_1 \in \mathfrak{R}^{p \times r} \quad (\text{a.1.15})$$

"Projection orthogonale sur l'espace des lignes de  $E_m$ , que l'on note  $\mathfrak{R}(E_m^T)$ "

$$P_{E_m}^\perp = I_m - P_{E_m} = V \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & I_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} V^T = V_2 V_2^T \text{ où } V_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (m-r)} \quad (\text{a.1.16})$$

"projection sur  $\mathfrak{R}(E_m)^\perp$ "

$$R_{E_m}^\perp = I_p - R_{E_m} = W \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & 0_{p \times (p-r)} \\ 0_{(p-r) \times p} & I_{(p-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} W^T = W_2 W_2^T \text{ où } W_2 \in \mathfrak{R}^{p \times (p-r)} \quad (\text{a.1.17})$$

"projection sur  $\mathfrak{R}(E_m^T)^\perp$ "

Finalement, pour toute matrice  $E_m$  non inversible, il existe une infinité de matrices, appelées inverses généralisées de  $E_m$ , satisfaisant les propriétés ci-dessus.

Selon l'hypothèse  $H_1$  et l'étude précédente il existe alors une matrice orthogonale  $P=V$  (i.e.  $P^{-1} = P^T$ ) et une matrice inversible  $Q = \begin{bmatrix} \Sigma_r & W_1^T \\ & W_2^T \end{bmatrix}$  telles que :

$$E_m = PSQ = V \Sigma W^T \quad (\text{a.1.18})$$

$$\text{avec } S = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (p-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (p-r)} \end{bmatrix} \text{ "forme de Smith"} \quad (\text{a.1.19})$$

Notons que  $[Q^{-1}S^T P^{-1}]$  est une inverse généralisée de  $E_m$ .

### A.1.2 Hypothèse $r = p < m$

Pour toute matrice  $E_m \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  de rang plein colonnes (i.e  $r = p$ ), l'expression suivante est vérifiée :

$$E_m^+ = (E_m^T E_m)^{-1} E_m^T, \quad (\text{a.1.20})$$

$$\text{et nous obtenons } E_m^+ E_m = I_p \quad (\text{a.1.21})$$

$$\text{mais, } E_m E_m^+ \neq I_m.$$

D'autre part, d'après les expressions précédentes, pour  $p+1 \leq i \leq m$ , nous avons :

$$E_m^T v_i = 0 \Leftrightarrow E_m^T [v_{p+1} \ v_{p+2} \ \dots \ v_m] \quad (\text{a.1.22})$$

ou encore

$$v_i^T E_m = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_{p+1}^T \\ v_{p+2}^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} E_m = 0 \quad (\text{a.1.23})$$

Il existe par conséquent, une matrice régulière  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_m^+ \end{bmatrix}$  telle que

$$PE_m = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (\text{a.1.24})$$

avec, d'après (a.1.23),  $P_1 = \begin{bmatrix} v_{p+1}^T \\ v_{p+2}^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times m}$

Soit, d'après (a.1.22) et les propriétés du noyau

$$P_1^T = [v_{p+1} \ v_{p+2} \ \dots \ v_m] = \text{Ker}(E_m^T) \quad (\text{a.1.25})$$

$$\text{et } P_1 P_1^T = I_{m-p} \text{ par définition (chaque vecteur est de norme 1)} \quad (\text{a.1.26})$$

## Conclusion

$$E_m^+ E_m = I_p, P_1 E_m = 0 \text{ alors, } \ker E_m^+ \cap \ker P_1 = \{0\} \text{ et } \text{rang} \begin{bmatrix} P_1 \\ E_m^+ \end{bmatrix} = m$$

$$\text{soit } P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^T & E_m \end{bmatrix} \quad (\text{a.1.27})$$

$$\text{vérification : } P^{-1} P = P P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_m^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T & E_m \end{bmatrix} = I_m$$

## A.2 Solutions de normes minimales

Nous proposons de résoudre le système linéaire suivant :

$$\underline{y} - C\underline{x} = E_m \underline{d} \quad (\text{a.2.1})$$

où :  $\text{rang}(E_m) = r$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{x}$  deux vecteurs considérés comme connus, et  $\underline{d}$  le vecteur des  $p$  inconnues à déterminer.

Un tel système peut avoir aucune, une ou une infinité de solutions exactes. Dans le cas de système incompatible, nous cherchons une solution  $\underline{d}$  au sens des moindres carrés, c'est à dire qui minimise la norme euclidienne de l'écart  $\underline{éc} = \underline{y} - C\underline{x} - E_m \underline{d}$ , soit le critère  $\Phi = \|\underline{y} - C\underline{x} - E_m \underline{d}\|_2$ .

### A.2.1 Hypothèse $r < p \leq m$

Nous pouvons remarquer que si  $\underline{d}$  est une solution exacte du système compatible  $\underline{y} - C\underline{x} = E_m \underline{d}$  alors l'écart est nul donc également minimal, ainsi nous appelons solution générale de  $\underline{y} - C\underline{x} = E_m \underline{d}$  tout vecteur :

$$\begin{cases} \underline{d} = E_m^+ (\underline{y} - C\underline{x}) + R_{E_m}^\perp \bar{\underline{d}} \\ \quad = E_m^+ (\underline{y} - C\underline{x}) + (I_p - E_m^+ E_m) \bar{\underline{d}} \end{cases} \quad (\text{a.2.2})$$

où  $\bar{\underline{d}}$  est un vecteur quelconque que nous pouvons considérer comme le nouveau vecteur des entrées inconnues.

### A.2.2 Hypothèse $r = p < m$

Pour toute matrice  $E_m \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  de rang plein colonnes (i.e.  $r = p$ ) :

$$E_m^+ = (E_m^T E_m)^{-1} E_m^T \quad (\text{a.2.3})$$

nous obtenons  $E_m^+ E_m = I_p$  soit  $R_{E_m}^\perp = 0$  et la solution unique de norme minimale au sens des moindres carrés du système  $\underline{y} - C\underline{x} = E_m \underline{d}$  est :

$$\underline{d} = E_m^+ (\underline{y} - C\underline{x}) \quad (\text{a.2.4})$$





## ANNEXE B

### DÉMONSTRATIONS

Nous montrons, d'après le théorème de référence 2.1, l'ensemble des théorèmes développés dans le deuxième chapitre.

#### B.1 Démonstration du théorème 2.2

##### Démonstration de la première condition d'existence

D'après l'égalité suivante :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_m & C & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

et selon l'hypothèse  $H_3$ , nous avons

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

Ainsi, sachant que  $E_m = V\Sigma W^T$ ,  $\text{rang}[\Sigma] = r$  et que  $V$ ,  $W$  sont des matrices orthogonales (annexe A), alors d'après les propriétés sur le rang, nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & E_d W \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & E_d W \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} = r + p \\ &= \text{rang}[\Sigma] + \text{rang} \begin{bmatrix} E_d W \\ \Sigma \end{bmatrix} = r + p \end{aligned}$$

ce qui est équivalent, d'après la décomposition de  $W = (W_1 \ W_2)$  à

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} E_d W \\ \Sigma \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} E_d W_1 & E_d W_2 \\ \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = r + \text{rang}[E_d W_2] = p \\ \Leftrightarrow \text{rang}[E_d W_2] &= p - r \end{aligned}$$

D'autre part

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & V^T CE_d W \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} = r + p$$

et d'après la décomposition de  $V^T = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$  et  $W = [W_1 \ W_2]$ , nous avons

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 & V_1^T CE_d W_1 & V_1^T CE_d W_2 \\ 0 & 0 & V_2^T CE_d W_1 & V_2^T CE_d W_2 \\ 0 & 0 & \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2r + \text{rang}[V_2^T CE_d W_2] = p + r$$

soit,

$$\begin{cases} \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} - \text{rang}[E_m] = p \\ \Leftrightarrow \text{rang}(V_2^T CE_d W_2) = \text{rang}(E_d W_2) = p - r \end{cases}$$

Enfin, d'après les décompositions de  $P_{E_m}^\perp$  et  $R_{E_m}^\perp$ , respectivement (a.1.16) et (a.1.17) nous avons l'expression suivante :

$$\text{rang}(P_{E_m}^\perp CE_d R_{E_m}^\perp) = \text{rang}(E_d R_{E_m}^\perp) = p - r$$

qui est équivalente à

$$\text{rang} V \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} V^T CE_d W \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{bmatrix} \right) W^T = \text{rang} \left( E_d W \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{bmatrix} \right) W^T = p - r$$

De plus, d'après les propriétés sur le rang et en remplaçant  $V^T = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$  et  $W = [W_1 \ W_2]$  par leurs expressions, nous trouvons que :

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} V^T CE_d W \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{bmatrix} \right) = \text{rang} \left( E_d W \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{bmatrix} \right) = p - r$$

est équivalent à

$$\text{rang}(V_2^T CE_d W_2) = \text{rang}(E_d W_2) = p - r$$

### Conclusion

$$\begin{cases} \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} - \text{rang}[E_m] = p \\ \Leftrightarrow \text{rang}(V_2^T CE_d W_2) = \text{rang}(E_d W_2) = p - r \\ \Leftrightarrow \text{rang}(P_{E_m}^\perp CE_d R_{E_m}^\perp) = \text{rang}(E_d R_{E_m}^\perp) = p - r \end{cases}$$

### Démonstration de la deuxième condition d'existence

Sachant que  $E_m = V \Sigma W^T$ , que les matrices  $V$  et  $W$  sont des matrices orthogonales, alors l'égalité suivante est respectée :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d W \\ V^T C & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d W \\ V^T C & \Sigma \end{bmatrix}$$

Ainsi, définissons la matrice régulière  $W_3$

$$W_3 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -\Sigma_r^+ V_1^T C & \Sigma_r^+ & 0 \\ 0 & 0 & -I_{p-r} \end{bmatrix}$$

et d'après la structure de  $V^T = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$  et  $W = [W_1 \ W_2]$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & E_m \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d W_1 & -E_d W_2 \\ V_1^T C & \Sigma_r & 0 \\ V_2^T C & 0 & 0 \end{bmatrix} W_3 \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A + E_d E_m^+ C & -E_d W_1 \Sigma_r^{-1} & E_d W_2 \\ 0 & I_r & 0 \\ V_2^T C & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - \bar{A} & E_d W_2 \\ V_2^T C & 0 \end{bmatrix} = n + p - r \quad \begin{cases} (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable}) \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

Note :  $\lambda = \lambda_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  ( $i=1, \dots, n$ ) valeur propre de  $\bar{A}$ .

D'autre part, sachant d'après (c2.2a) que,

$$T E_d R_{E_m}^\perp = \left( I_n - E_d R_{E_m}^\perp \left[ P_{E_m}^\perp C E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ P_{E_m}^\perp C \right) E_d R_{E_m}^\perp = 0,$$

$$\left[ E_d R_{E_m}^\perp \right]^+ E_d R_{E_m}^\perp = I_{p-r},$$

$$\text{et } \text{rang}(E_d R_{E_m}^\perp) = p - r$$

alors il existe  $p-r$  vecteurs propres associés à la valeur propre une, (Borne et Rottella 1995), donc

$$\text{rang}(T) = n - \text{rang}(E_d R_{E_m}^\perp) = n - (p - r),$$

$$\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}\left(\left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+\right) = \{0\},$$

$$\text{et } \text{rang} \begin{bmatrix} T \\ \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ \end{bmatrix} = n$$

Ainsi, définissons la matrice de rang plein colonnes

$$V_3 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & W_2^T & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \lambda L V_2 \\ W_2^T \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

et la matrice de rang plein lignes

$$\begin{aligned} W_4 &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\lambda \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ + \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ \bar{A} & I_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\lambda W_2^T \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ + W_2^T \left(E_d R_{E_m}^\perp\right)^+ \bar{A} & W_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nous obtenons d'après les propriétés sur le rang, l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - \bar{A} & E_d W_2 \\ V_2^T C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} V_3 \begin{bmatrix} \lambda I_n - \bar{A} & E_d W_2 \\ V_2^T C & 0 \end{bmatrix} W_4 \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - T\bar{A} & 0 \\ 0 & W_2^T (E_d R_{E_m}^\perp)^+ (E_d R_{E_m}^\perp) \\ V_2 V_2^T C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - T\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n \quad \begin{cases} (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable}) \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

Note :  $\lambda = \lambda_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  ( $i=1, \dots, n$ ) valeur propre de  $T\bar{A}$ . ■

## B.2 Démonstration du théorème 2.3

### Démonstration de la première condition d'existence

D'après l'égalité (c2.1a) et l'hypothèse  $E_m = 0$ , nous trouvons directement la condition nécessaire et suffisante de découplage des entrées inconnues, à savoir :

$$\text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p$$

### Démonstration de la deuxième condition d'existence

D'après l'égalité (c2.1b) et l'hypothèse  $E_m = 0$ , nous avons :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad \begin{cases} (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable}) \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

Note :  $\lambda = \lambda_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  ( $i=1, \dots, n$ ) valeur propre de  $A$ .

Sachant d'après (c2.3a) que,

$$TE_d = (I_n - E_d(CE_d)^+ C)E_d = 0,$$

$$E_d^+ E_d = I_p,$$

$$\text{et } \text{rang}(E_d) = p$$

alors il existe  $p$  vecteurs propres associés à la valeur propre une (Borne et Rottella 1995), donc

$$\text{rang}(T) = n - \text{rang}(E_d) = n - p,$$

$$\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(E_d^+) = \{0\}$$

$$\text{et } \text{rang} \begin{bmatrix} T \\ E_d^+ \end{bmatrix} = n$$

Définissons la matrice de rang plein colonnes

$$V_3 = \begin{bmatrix} T & \lambda N \\ E_d^+ & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

et la matrice de rang plein lignes

$$W_4 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \lambda E_d^+ - E_d^+ A & I_p \end{bmatrix}$$

alors d'après les propriétés sur le rang, nous avons l'égalité,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} V_3 \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} W_4$$

et sachant que  $T = I_n - NC$ , nous trouvons

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - TA & 0 \\ 0 & -I_p \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - TA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

■

### B.3 Démonstration des théorèmes 2.4 et 2.5

#### Démonstration de la première condition d'existence

D'après l'égalité suivante,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_m & C & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

et selon l'hypothèse  $H_3$ , nous avons

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

Ainsi, sachant que  $E_m = PSQ$ ,  $\text{rang}(S) = r$  et que les matrices  $P, Q$  sont régulières, alors d'après les propriétés sur le rang, nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & E_d Q^{-1} \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & E_d Q^{-1} \\ 0 & S \end{bmatrix} = r + p \\ &= \text{rang}[S] + \text{rang} \begin{bmatrix} E_d Q^{-1} \\ S \end{bmatrix} = r + p \end{aligned}$$

ce qui est équivalent, d'après (2.3.7) et (a.1.19), à

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} E_d Q^{-1} \\ S \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E}_{d_1} & \bar{E}_{d_2} \\ I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = r + \text{rang}[\bar{E}_{d_2}] = p \\ \Leftrightarrow \text{rang}[\bar{E}_{d_2}] &= p - r \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & P^{-1}CE_d Q^{-1} \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

et d'après la décomposition de (a.1.19), (2.3.6) et (2.3.7), nous avons

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} I_r & 0 & \bar{C}_1 \bar{E}_{d_1} & \bar{C}_1 \bar{E}_{d_2} \\ 0 & 0 & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_1} & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2r + \text{rang}[\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}] = p + r \\ \Leftrightarrow \text{rang}[\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}] &= p - r \end{aligned}$$

### Conclusion

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} \text{rang} \begin{bmatrix} E_m & CE_d \\ 0 & E_m \end{bmatrix} - \text{rang}[E_m] = p \\ \Leftrightarrow \text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r \end{array} \right. \end{aligned}$$

### Démonstration de la deuxième condition d'existence

Sachant que  $E_m = PSQ$  et que les matrices  $P$  et  $Q$  sont régulières, alors l'égalité suivante est respectée

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & E_m \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d Q^{-1} \\ P^{-1}C & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Ainsi, définissons la matrice régulière  $Q_3$ ,

$$Q_3 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -\bar{C}_1 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & -I_{p-r} \end{bmatrix}$$

et d'après (2.3.6), (2.3.7) et (a.1.19), nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & E_m \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -\bar{E}_{d_1} & -\bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_1 & I_r & 0 \\ \bar{C}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_3 \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & -\bar{E}_{d_1} & \bar{E}_{d_2} \\ 0 & I_r & 0 \\ \bar{C}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} = n + p - r, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

D'autre part, sachant d'après (c2.5a) que,

$$T \bar{E}_{d_2} = \left( I_n - \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \bar{C}_2 \right) \bar{E}_{d_2} = 0,$$

$$\bar{E}_{d_2}^+ \bar{E}_{d_2} = I_{p-r},$$

$$\text{et } \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r$$

alors il existe (p-r) vecteurs propres associés à la valeur propre une (Borne et Rottella 1995), donc

$$\text{rang} T = n - \text{rang}[\bar{E}_{d_2}] = n - (p - r),$$

$$\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(\bar{E}_{d_2}^+) = \{0\}$$

$$\text{et } \text{rang} \begin{bmatrix} T \\ \bar{E}_{d_2}^+ \end{bmatrix} = n$$

Ainsi, définissons la matrice de rang plein colonnes

$$P_3 = \begin{bmatrix} T & \lambda \bar{N}_2 \\ \bar{E}_{d_2}^+ & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}$$

et la matrice régulière

$$Q_4 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\lambda \bar{E}_{d_2}^+ + \bar{E}_{d_2}^+ A_1 & I_{p-r} \end{bmatrix}$$

Alors d'après les propriétés sur le rang, nous avons l'égalité

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} P_3 \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} Q_4$$

et sachant que  $T = I_n - \bar{N}_2 \bar{C}_2$ , nous trouvons

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - T A_1 & 0 \\ 0 & I_{p-r} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - T A_1 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = n, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

■



## B.4 Démonstration du théorème 2.6

### Démonstration de la première condition d'existence

La matrice  $\bar{E}_{d_2}$  étant injective, la condition  $\text{rang}(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}) = \text{rang}(\bar{E}_{d_2}) = p - r$  est nécessaire et suffisante (indépendamment de la matrice surjective R) à la résolution de l'équation  $R \bar{E}_{d_2} = \beta \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2}$  et donc nécessaire et suffisante à la résolution des équations (2.3.38) et (2.3.39), indépendamment de la stabilité de F. De plus la condition (c2.6a) est équivalente à (c2.1a) (voir la démonstration du théorème 2.4) .

### Démonstration de la deuxième condition d'existence

La stabilité de F peut être obtenue grâce au gain  $\alpha$  si et seulement si la paire  $(\Phi, \Omega)$  est détectable. La condition (c2.4b) étant équivalente à (c2.1b) (voir la démonstration du théorème 2.4), il reste donc à démontrer que (c2.6b) est équivalente à (c2.4b).

Définissons les matrices bijectives (i.e. plein rang)  $P_4$  et  $Q_5$  :

$$P_4 = \begin{bmatrix} R & -\lambda R \bar{N}_2 + R A_1 \bar{N}_2 \\ \bar{C}_2 & -\lambda I_{m-r} + \bar{C}_2 A_1 \bar{N}_2 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}, \text{rang}(P_4) = m - r + \text{rang} \begin{bmatrix} R \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = (m - r) + n$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} M & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-r} \end{bmatrix}, \text{rang}(Q_5) = p - r + \text{rang}(M \ \bar{N}_2) = (p - r) + n$$

ainsi que la matrice injective (i.e. plein rang colonne)  $P_5$  :

$$P_5 = \begin{bmatrix} I_{n-(m-r)} & -R \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \\ 0 & I_{(m-r)} - \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \\ 0 & (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(P_5) = n - (m - r) + \text{rang} \begin{bmatrix} I_{(m-r)} - \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \\ (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \end{bmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{(m-r)} \\ \downarrow^{(m-r)} \\ \uparrow^{(p-r)} \end{matrix} = n$$

De ce fait, d'après la condition (c2.4b) et les matrices régulières  $P_4$  et  $Q_5$ , nous pouvons écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} &= n + p - r, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases} \\ &= \text{rang} P_4 \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} Q_5 \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda R - R A_1 - \lambda R \bar{N}_2 \bar{C}_2 + R A_1 \bar{N}_2 \bar{C}_2 & R \bar{E}_{d_2} \\ \lambda \bar{C}_2 - \bar{C}_2 A_1 - \lambda \bar{C}_2 + \bar{C}_2 A_1 \bar{N}_2 \bar{C}_2 & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \\ & \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (2.3.35) et (2.3.36), nous avons :

$$\bar{M}T = I_{n-(m-r)}, \bar{C}_2 M = 0, \bar{N}_2 \bar{C}_2 = I_n - M\bar{T}$$

soit,

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda R M \bar{T} - R A_1 M \bar{T} & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M \bar{T} & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-r} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M & 0 & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M & 0 & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \\ 0 & I_{m-r} & 0 \end{bmatrix} \\ &= m - r + \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \end{bmatrix} = n + p - m, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

Enfin, d'après P<sub>5</sub>, (2.3.59) et (2.3.60)

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \end{bmatrix} &= \text{rang} P_5 \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} I_{n-(m-r)} & -R \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \\ 0 & I_{(m-r)} - \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \\ 0 & (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M & R \bar{E}_{d_2} \\ -\bar{C}_2 A_1 M & \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - R A_1 M + R \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \bar{C}_2 A_1 M & 0 \\ -\left( I_{(m-r)} - \bar{C}_2 \bar{E}_{d_2} (\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \right) \bar{C}_2 A_1 M & 0 \\ -(\bar{C}_2 \bar{E}_{d_2})^+ \bar{C}_2 A_1 M & I_{p-r} \end{bmatrix} \\ &= p - r + \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - \Phi \\ \Omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-(m-r)} - \Phi \\ \Omega \end{bmatrix} = n - (m - r), \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

## Conclusion

Si la condition de détectabilité de la paire  $(\Phi, \Omega)$  est vérifiée alors

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & \bar{E}_{d_2} \\ \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix} = n + p - r, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

■

## B.5 Démonstration du théorème 2.7

### Démonstration de la première condition d'existence

D'après l'égalité (c2.1a) et l'hypothèse  $E_m = 0$ , nous trouvons directement la condition nécessaire et suffisante de découplage des entrées inconnues, à savoir :

$$\text{rang}(CE_d) = \text{rang}(E_d) = p$$

### Démonstration de la deuxième condition d'existence

D'après l'égalité (c2.1b) et l'hypothèse  $E_m = 0$  nous avons :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

d'autre part, d'après les propriétés sur le rang,

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_n & AE_d(CE_d)^+ \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A(I_n - E_d(CE_d)^+ C) & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sachant que  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix}$  est non singulière, alors la matrice suivante est régulière

$$V_3 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ E_d^+ & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

et nous avons l'égalité

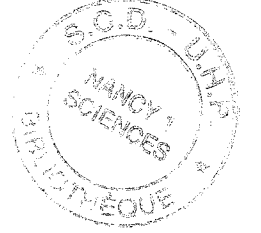
$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ E_d^+ & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A(I_n - E_d(CE_d)^+ C) & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda P_1 - P_1 A(I_n - E_d(CE_d)^+ C) & 0 \\ \lambda E_d^+ - E_d^+ A(I_n - E_d(CE_d)^+ C) & -I_p \\ C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

soit,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda P_1 - P_1 A(I_n - E_d(CE_d)^+ C) \\ C \end{bmatrix} = n, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

Sachant que les matrices  $P_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ (CE_d)^+ \end{bmatrix}$  et  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ E_d^+ \end{bmatrix}$  sont régulières, alors l'égalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} & \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda P_1 - P_1 A (I_n - E_d (CE_d)^+ C) \\ C \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & P_3 \\ 0 & (CE_d)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda P_1 - P_1 A (I_n - E_d (CE_d)^+ C) \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T & E_d \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - P_1 A (I_n - E_d (CE_d)^+ C) P_1^T & 0 \\ P_3 C P_1^T & 0 \\ (CE_d)^+ C P_1^T & I_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Enfin, d'après le changement de base P et la connaissance des matrices  $\hat{\hat{A}}$  et  $\hat{\hat{C}}$ , nous retrouvons la condition (c2.7b) du théorème 2.7,

$$\begin{aligned} & \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - P_1 A (I_n - E_d (CE_d)^+ C) P_1^T \\ P_3 C P_1^T \end{bmatrix} = n - p, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} \hat{C}_2^+ \hat{C}_1) \\ P_3 \hat{C}_1 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n-p} - \hat{\hat{A}} \\ \hat{\hat{C}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Conclusion

Si la condition de détectabilité (d'observabilité) de la paire  $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{C}})$  est vérifiée alors

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -E_d \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq 0, \text{ système détectable} \\ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ système observable}) \end{cases}$$

■

La démonstration d'équivalence montre la pertinence des résultats décrit par les observateurs d'ordre plein, réduit et minimal, que nous avons mis en oeuvre selon les deux approches (par normes minimales ou par décomposition en valeurs singulières).



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Ahmed-Zaid F, Ionnau P, Gousman K, Rooney R., 1991**  
"Accommodation of failures in F-16 aircraft using adaptative control" *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 11, pp. 73-78.
- Basseville M, Benveniste A., 1986**  
"Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems" *Springer Verlag*.
- Basseville M, Benveniste A, Moustakides G, Rougée A., 1987**  
"Detection and diagnosis of changes in the eigenstructure of nonstationary multivariable systems" *Automatica*, vol. 23, pp. 479-489.
- Basseville M., 1988**  
"Detecting changes in signals and systems - a survey" *Automatica*, vol. 24, pp. 309 – 326.
- Basseville M, Nikiforov I.V, 1993**  
"Detection of abrupt changes - Theory and applications" Series in Information and System Sciences, *Prentice-hall*.
- Basseville M., 1997**  
"Information criteria for residual generation and fault detection and isolation" *Automatica*, juin 1997.
- Basseville M, Nikiforov I.V, 1997**  
"Approches statistiques de la surveillance : détection et diagnostic" Ecole d'automatique de Grenoble, vol 1, pp 1-37.
- Bhattacharyya S.P., 1978**  
"Observer design for linear systems with unknown inputs" *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-23, pp. 483-484.
- Borne P, Dauphin-Tanguy G, Richard J.P, Rottella F, Zambettakis I., 1993**  
"Analyse et régulation des processus industriels" Tome 2 Régulation numérique, *Editions Technip*.
- Borne P, Rottella F., 1995**  
"Theorie et pratique du calcul matriciel" *Editions Technip*.
- Brunet M, Jauma D, Labarrère M, Rault A, Vergé M., 1990**  
"Detection et diagnostic de pannes" *Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, Hermès*.
- Chan S.W, Goodwin G.C, Sin K.S., 1984**  
"Convergence properties of the Riccati difference equation in optimal filtering of nonstabilisable systems" *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-29, no. 2, pp. 110-118.
- Chang S.K, You W.T, Hsu P.L., 1994**  
"General-Structured Unknown Input Observers" *Proc of American Control Conf.* Baltimore, Maryland, pp. 666 – 670.
- Caines P.E., 1988**  
"Linear stochastic systems" *John Wiley & Sons*.
- Chen J., 1996**  
"Observer-based fault detection and isolation : Robustness and Applications" *Surveillance des systèmes continus. Tome 1, Ecole d'Automatique de Grenoble, France.* pp. 1-30.

- Chen J, Patton R.J., 1996**  
 "Optimal filtering and robust fault diagnosis of stochastic systems with unknown disturbance" *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 143, no 1.
- Chen J, Patton R.J, Zhang H.Y., 1996**  
 "Design of unknown input observers and robust fault detection filters" *International Journal of Control*, vol. 63, no 1, pp. 85-105.
- Chow E. Y, Willsky A. S., 1984**  
 "Analytical redundancy and the design, of robust failure detection systems" *Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-29, no. 7, pp. 603-614.
- Clark R.N, 1978**  
 "A simplified instrument failure detection scheme," *IEEE Trans on Aerospace and Elec Sys.*, vol. AES-14, no.4, pp. 558-563.
- Darouach M, Zasadzinski M, Mehdi D., 1991**  
 "State estimation of stochastic singular linear systems" *Int Journal Systems Science.*
- Darouach M, Zasadzinski M, Bassong-Onana A., 1992**  
 "On the generalized Riccati difference equation" *31th IEEE Conf. on Decision and Control, (Proc. CDC'92)* .
- Darouach M, Zasadzinski M, Xu S.J., 1994a**  
 "Full-order observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-39, no. 3, pp. 606-609.
- Darouach M, Zasadzinski M, Bassong-Onana A., 1994b**  
 "Connection between the Three-Block Generalized Riccati equation and the Standard Riccati Equation" *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-39, no. 8, pp. 1755-1758.
- Darouach M, Zasadzinski M, Bassong-Onana A, Nowakowski S., 1995**  
 "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems" *Int. Journal Systems SCI.*, vol. 26, no. 10, pp. 2015-2028.
- De Souza C.E, Gevers M.R, Goodwin G.C., 1986**  
 "Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices" *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-31, no 9, pp. 831-838.
- Dubuisson B., 1990**  
 "Diagnostic et reconnaissance de formes" *Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, Hermès.*
- Frank P.M., 1990**  
 "Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - A survey and some new results," *Automatica*, vol. 26, pp. 459-474.
- Gao Z, Antsaklis P., 1991**  
 "Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems" *International Journal of Control*, vol. 53, pp. 717-729.
- Ge W, Fang C. Z., 1988**  
 "Detection of faulty components via robust observation" *International Journal of Control*, vol. 47, no. 2, pp. 581-599.
- Ge W, Fang C. Z., 1989**  
 "Extended robust observation approach for failure isolation" *International Journal of Control*, vol. 49, no. 5, pp. 1537-1553.

**Gertler J, Singer D., 1990**

"A new structural framework for parity equation based failure detection and isolation" *Automatica*, vol. 26, pp. 381-388.

**Goodwin G.C, Sin K.S., 1984**

"Adaptative filtering prediction and control" *Prentice Hall Information and System Sciences Series*. Thomas Kailath, Series Editor.

**Hautus M.L.J., 1983**

"Strong detectability and observers" *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50. pp. 353-369.

**Hittinger J.M., 1997**

"Identification, commande et diagnostic d'un système multivariable d'entraînement de bande" *Conservatoire National des Arts et Metiers, Mémoire C.N.A.M* au Centre de Recherche en Automatique de Nancy.

**Hou M, Müller P. C., 1991**

"Design of robust observers for fault isolation" *IFAC Symposium SAFEPROCESS'91*, pp. 295-300.

**Hou M, Müller P. C., 1992**

"Design of observers for linear systems with unknown inputs" *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-37, pp. 971-875.

**Hou M, Müller P. C., 1994**

"Disturbance Decoupled Observer Design: A Unified Viewpoint" *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-39, no. 6, pp. 1338-1341.

**Isermann R., 1984**

"Process fault diagnosis based on modelling and estimation methods - a survey" *Automatica*, vol. 20, pp. 387 - 404.

**Isermann R., 1994**

"Integration of fault detection and diagnosis methods" *IFAC Symposium SAFEPROCESS'94*, vol. 2 pp. 597-612, espoo Finland.

**Kailath T., 1980**

"Linear systems" *Prentice Hall Information and System Sciences Series*.

**Kalman R.E., 1960**

"A new approach to linear filtering and prediction problems" *J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D*, vol. 82, no. 1, pp. 35-45.

**Kalman R.E, Bucy R.S., 1961**

"New results in linear filtering and prediction theory" *J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D*, vol. 83, no. 3, pp. 95-108.

**Keller J.Y, L. Summerer, Darouach M., 1996**

"Robust Failure Detection from a Multi-Model Approach" *Symposium on Control, Optimization and Supervision* pp. 384-388, of *IEEE-SMC (Proc. CESA'96 IMACS)* Lille-France.

**Keller J.Y, Darouach M., 1997**

"Abrupt changes detection in dynamic systems with unknown inputs" pp. 461-465, vol 2/3 of *IFAC-CIS'97* Belfort-France.



**Kitamura M., 1989**

"Fault detection in nuclear reactors with the aid of parametric modelling methods"  
Chapter 9 in : Patton, Frank and Clark, Fault diagnosis in dynamic systems, *Prentice - Hall*..

**Koenig D, Nowakowski S, Cecchin T., 1996a**

"A Comparative Study of Unknown Input Observers Design Methods Applied for Fault Detection, Isolation and Correction" Symposium on Control, Optimization and Supervision pp. 665-671, of *IEEE-SMC (Proc. CESA'96 IMACS)* Lille-France.

**Koenig D, Nowakowski S, Krzakala G., 1996b**

"New Design Methods for Observers for Linear Systems with Unknown Inputs" Symposium on Modelling, Analysis and Simulation Vol2/2 pp. 1040-1045, of *IEEE-SMC (Proc. CESA'96 IMACS)* Lille-France.

**Koenig D, Nowakowski S, Bourjij A., 1996c**

"New Design of Robust Observers for Fault Detection and Isolation" 35th *IEEE Conf. on Decision and Control, (Proc. CDC96)* Kobe - Japan, pp. 1464-1467.

**Koenig D, Nowakowski S, Bourjij A., 1997a**

"Observers for linear systems with unknown inputs" pp. 615-620, of *IFAC - CIS 97* , Belfort-France.

**Koenig D, Nowakowski S, Cecchin T., 1997b**

"An original approach for actuator and component fault detection and isolation" *IFAC Symposium SAFEPROCESS'97*, pp. 95-105.

**Koenig D, Patton R. J, Nowakowski S, 1997c**

"A new general robust failure detection, isolation and accommodation system with model uncertainty" soumis à *IEEE Transactions on Automatic Control*.

**Koenig D, Nowakowski S, 1997d**

"Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of unknown inputs free reduced system" soumis à *IEEE Transactions on Automatic Control*.

**Koenig D, Nowakowski S, 1997e**

"New design of robust Kalman filters for fault detection and isolation" soumis à *IEEE Transactions on Automatic Control*.

**Kudva P, Viswanadham N, Ramakrishna A., 1980**

"Observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Transactions on Automatic Control*., vol. AC-25, pp. 113-115.

**Kurek J., 1983**

"The state reconstruction for linear systems with unknown inputs" *IEEE Transactions on Automatic Control*., vol. AC-36, pp. 511-515.

**Lane S.H, Stengel R.H., 1988**

"Flight control design using non-linear inverse dynamics" *Automatica*, vol. 24, pp. 471-483.

**Lewis, F.L., 1992**

"Applied optimal control & estimation", Digital Design & Implementation, *Prentice hall and Digital Signal Processing Series*.

**Massoumnia M.A., 1986**

"A geometric approach to failure detection and identification in linear systems," *PhD Thesis*, MIT, Cambridge, Ma., USA.

**Mehra R.K, Peschon J., 1971**

"An innovation approach to fault detection in dynamic systems" *Automatica*, vol. 7, pp. 637-640.

**Meyer G, Hunt L.R., 1984**

"Application of non-linear transformations to automatic flight control", *Automatica*, vol. 20, pp. 103-107.

**Moerder D.D, Halyo N, Broussard J.R, Caglayan A.K., 1989**

"Application of precomputed control laws in a reconfigurable aircraft flight control system" *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, vol. 12, pp. 325-333.

**Morse W.D, Ossman K.A., 1990**

"Model following reconfigurable flight control system for the AFTI/F-16" *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, vol. 13, pp. 969-976.

**Nett C.N, Jacobson C.A, Miller A.T., 1988**

"An integrated approach to controls and diagnostics : The 4-parameters controller" *American Control Conference*, pp. 824-835.

**Nikiforov I.V., 1995**

"A generalized change detection problem" *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. 41, no. 1, pp 171-187, Janvier.

**Nikiforov I.V., 1996**

"Duality of analytical redundancy and statistical approach in fault diagnosis" Proceeding of *IFAC'96 World Congress*, San Francisco, CA, USA.

**Nikoukhah R, Willsky A.S, Bernard C.L., 1992**

"Kalman Filtering and Riccati Equations for Descriptor Systems" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-37, no. 9, pp. 1325-1342.

**Nikoukhah R., 1994**

"Innovations Generation in the Presence of Unknown Inputs: Application to Robust Failure Detection" *Automatica*, vol.30, no. 12, pp. 1851-1867.

**Patton R.J, Chen J., 1991**

"Robust fault detection using eigenstructure assignment : a tutorial consideration and some new results" *Proc.-30th IEEE Conf. on Decision and Control, (Proc. CDC91)* Brighton - England, pp. 2242-2247, December.

**Patton R.J, Kangethe S. M., 1989**

"Robust fault diagnosis using eigenstructure assignment of observer" Chapter 4 in Patton, Frank, Clark : *Fault diagnosis in dynamic systems, Prentice - Hall.*

**Patton R.J., 1994**

"Robust model-based fault diagnosis : The state of the art" *IFAC Symposium SAFEPROCESS'94*, pp. 1-24.

**Patton R.J., 1997**

"Fault-Tolerant Control : the 1997 situation" *IFAC Symposium SAFEPROCESS'97*. pp. 1033-1055.

**Ochi Y, Kanai K., 1991**

"Design of restructurable flight control systems using feedback linearization" *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, vol. 14, pp. 903-911.

**O'Reilly J, 1983**

"Observers for linear systems" *Academic Press*, London.

- Ragot J, Darouach M, Maquin D, Bloch G., 1990**  
"Validation de données et diagnostic" *Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, Hermès.*
- Smith G.A, Meyer G., 1987**  
"Aircraft automatic flight control system with model inversion" *Journal of Guidance, Dynamics and Control*, vol. 10, pp. 269-275.
- Staroswiecki M, Cocquempot V, Cassar J.P., 1993**  
"A general approach for multicriteria optimization of structural residuals" *International Conference on Fault Diagnosis, Tooldiag'93, CERT*, pp. 800-807.
- Stewart G.W., 1977**  
"On the perturbation of pseudo-inverses, projections and linear least squares problems" *Siam review*, vol.19, no. 4, pp. 634-662.
- Tsui C.C., 1994**  
"A General Failure Detection, Isolation and Accommodation System with Model Uncertainty and Measurement Noise," *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-39, pp. 2318 \_ 2321.
- Tsui C.C., 1996**  
"A New Design Approach to Unknown Input Observers," *IEEE Transactions on Automatic Control.*, vol. AC-41, pp. 464-467.
- Viswanadham N, Taylor J. H, Luce E. C., 1987**  
"A frequency domain approach to failure detection and isolation with application" *Control-theory and Advanced technology*, vol. 3, pp. 45 – 72.
- Watanabe K, Himmelblau D. M., 1982**  
"Instrument fault detection in systems with uncertainties" *International Journal of Systems Science*, vol. 13 pp. 137-158.
- Willsky A.S., 1976**  
"A survey of design methods for failure detection in dynamic systems" *Automatica*, vol. 12, pp. 601-611.
- Wonham W. M., 1968**  
"On the matrix Riccati equation of stochastic control," *SIAM J Contr.*, vol. 6, no. 4, pp. 681-697.
- Wünnenberg J, Frank P.M., 1987**  
"Sensor fault detection via robust observers" in *system fault diagnostics, reliability and related Knowledge-based approaches*, Tzafestas S, Singh M, et Schmidt G., (Eds). vol. 1, pp. 147-160, *Reidel Press*.
- Wünnenberg J, Frank P.M., 1988**  
"Model based residual generation for dynamic systems with unknown inputs" *12th IMACS World Congres on Scientific Computation, Paris*, vol. 2, pp. 435-437.
- Wünnenberg J., 1990**  
"Observer-based fault detection in dynamic systems" *Ph.D. thesis*, University of Duisburg, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik.
- Zasadzinski M, Darouach M., 1994**  
"Observateurs en présence d'entrées inconnues" *Journées nationales : Sûreté. Surveillance, Supervision CNRS-GR Automatique, Paris-France*

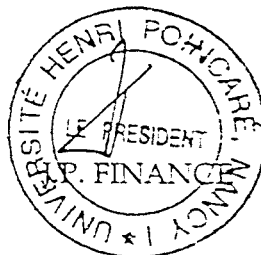
Monsieur KOENIG Damien

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY-I  
en AUTOMATIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 11 FÉV 1998 n° 6

Le Président de l'Université



## **Résumé :**

Ce travail porte sur le diagnostic des systèmes linéaires déterministes ou stochastiques et sur la reconfiguration des lois de commande.

La première partie est consacrée au diagnostic robuste des systèmes déterministes incertains. Elle concerne préalablement l'estimation d'état robuste, par implantation d'observateurs à entrées inconnues d'ordre plein, réduit ou minimal. A partir de ces résultats, deux approches sont exposées. La première présente une méthode de génération de résidus robustes fondée sur l'estimation complète de l'état du système. Cette estimation nécessite la vérification de la condition classique de découplage des entrées inconnues. Pour l'éviter, nous avons établi une seconde approche, basée quant à elle sur la génération de résidus par bancs d'observateurs d'ordre réduit. Cette approche réalise la détection, l'isolation et la correction de défauts, par décomposition du système en sous-systèmes insensibles aux entrées inconnues et à certains défauts spécifiés.

Dans la deuxième partie, les méthodes obtenues pour les systèmes déterministes sont étendues aux systèmes stochastiques. Nous considérons tout d'abord le problème de l'estimation robuste de l'état, en vue de généraliser le filtre de Kalman aux systèmes en présence de bruits et d'entrées inconnues. L'originalité de l'étude repose sur deux transformations régulières du système en un sous-système à bruits de dynamique et de mesures décorrélés et indépendants des entrées inconnues. Cette solution permet de reconstruire, à l'aide du filtre de Kalman conventionnel et des changements de bases effectués, l'état complet du système d'origine. Nous pouvons alors étendre la précédente étude au diagnostic des systèmes stochastiques incertains. Dans ce contexte nous proposons dans le dernier chapitre un nouvel algorithme de détection, d'isolation et d'estimation en ligne des défauts.

**Mots clés :** Diagnostic Robuste, Détection de défauts, Générations de Résidus, Systèmes Incertains, Estimateurs à Entrées Inconnues, Reconfiguration des lois de Commande.

## **Abstract :**

This work is about the diagnosis of deterministic or stochastic linear systems and reconfiguration of the control laws.

The first section deals with the diagnosis of uncertain deterministic systems. First it studies the design of robust state estimation by full, reduced and minimal unknown inputs observers. Using this result, two approaches are developed. The first presents a robust residual generation by a full system state estimation. This estimation requires the classical unknown input decoupled condition to be verified. To avoid this, we have developed a second approach, in which the robust residual generation uses a bank of reduced order observers. This approach carries out the detection, isolation and correction faults, by a decomposition of the original system into several sub-systems, each being sensitive to a sub-set of failures defined beforehand, while remaining insensitive to unknown inputs and other faults.

In the second section, the reached methods for the deterministic systems are extending to the stochastic systems. We consider first the problem of robust state estimation, in order to give a general approach of the Kalman filtering with uncertain stochastic systems. The particular point of this study is based on two regular transformations of the system in one sub - system without unknown inputs. This solution gives us the possibility to rebuild, via the conventional Kalman Filtering and base update, the complete state of the original system. We can then use the previous method for the diagnosis of uncertain stochastic systems. Consequently, we put forward in this last chapter a new algorithm of detection, isolation and identification failures.

**Keywords :** Robust Diagnosis, Fault Detection, Residual Generation, Uncertain Systems, Unknown Inputs estimators, Control Law Reconfiguration