



HAL
open science

Problèmes de type Linnik pour les fonctions L de formes automorphes

Yan Qu

► **To cite this version:**

Yan Qu. Problèmes de type Linnik pour les fonctions L de formes automorphes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2008. Français. NNT : 2008NAN10070 . tel-01748432

HAL Id: tel-01748432

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748432>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D.Mathématiques

THÈSE présentée par

Yan QU

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Henri Poincaré
Spécialité : Mathématiques**

Problèmes de type Linnik pour les fonctions L de formes automorphes

Soutenue publiquement le 2 Décembre 2008

Composition du jury :

Emmanuel KOWALSKI	Rapporteur	Professeur, ETH Zurich
Yuk-Kam LAU	Examineur	Assistant Professeur, Université Hong Kong
Jianya LIU	Co-directeur de Thèse	Professeur, Université Shandong
Gérald TENENBAUM	Président	Professeur, Université Henri Poincaré
Jie WU	Co-directeur de Thèse	CR au CNRS, HDR, Université Henri Poincaré

Institut Élie Cartan Nancy CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences – B. P. 239 – 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX

Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'apportent leur aide, leur soutien, et leur encouragements.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à mes deux directeurs de thèse, Jianya Liu et Jie Wu, pour leur investissement inestimable.

Je suis très reconnaissante à Professeur Gérard Tenenbaum qui a accepté de présider mon jury de thèse. Je souhaite remercier Professeur Emmanuel Kowalski qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse et de participer à ce jury, me sacrifiant ainsi un temps que je sais précieux. Je souhaite remercier également Professeur Kai-Man Tsang qui a bien voulu accepter la charge de rapporteur. Même un grand merci à Professeur Yuk-Kam Lau pour sa participation à ce jury et ses nombreuses suggestions.

Je profite de cet instant pour remercier tous mes chers collègues, tous les membres de l'équipe de théorie des nombres de Gérard Tenenbaum, toute la faculté de l'IECN, en particulier Anne de Roton qui n'a pas épargné son temps pour m'aider. Je ne peux que leur offrir ma très vive gratitude.

Je voudrais remercier aussi l'Ambassade de France en Chine pour m'offrir cette chance très importante.

Last but not least, I wish to cherish the chance to thank my two supervisors again, if only I could find words to express myself exactly. What's more, I couldn't forget the valuable memory of my staying in Nancy, I couldn't forget those smiling faces saying "bon courage" to me, I couldn't forget the warmest "gros bisou" Anne has given to me in my defense.... It is from them that I see the splendid sunlight in Nancy's cold winter time.

À mes parents.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Le problème original de Linnik	5
1.2	Un problème de type Linnik pour les formes modulaires classiques	6
1.3	Un problème de type Linnik pour les formes de Maass	8
1.4	Un problème de type Linnik pour les fonctions L automorphes . .	9
1.5	Théorème automorphe des nombres premiers et un problème de type Linnik	12
1.6	Théorème de densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes	16
2	Formes modulaires classiques et un problème de type Linnik	19
2.1	Formes modulaires classiques	19
2.2	Fonctions L automorphes classiques	22
2.3	Changements infinis de signe des coefficients de Fourier	24
2.4	Un problème de type Linnik : le premier changement de signe des coefficients de Fourier	25
2.4.1	Le problème original de Linnik	25

2.4.2	Un problème de type Linnik et un résultat classique de Siegel	26
2.4.3	Développements récents et commentaires	27
3	Un problème de type Linnik pour les formes de Maass	31
3.1	La théorie spectrale des formes de Maass	31
3.1.1	La décomposition spectrale : préliminaires	31
3.1.2	Le spectre discret	33
3.1.3	L'involution antiholomorphe	34
3.1.4	Le spectre continu	35
3.1.5	La décomposition spectrale : conclusion	36
3.2	Théorie de Hecke pour les formes de Maass	36
3.3	Fonctions L automorphes des formes de Maass	39
3.4	Les changements infinis de signe des coefficients de Fourier des formes de Maass	41
3.5	Un problème de type Linnik pour les formes de Maass	42
4	Un problème de type Linnik pour les fonctions L automorphes	47
4.1	Fonctions L automorphes : concepts et propriétés	47
4.2	Trois conjectures dans la théorie de fonctions L automorphes . . .	50
4.3	Fonctions L de Hecke comme fonctions L automorphes	52
4.4	Fonctions L de Rankin-Selberg	53
4.5	Coefficients des fonctions L et des fonctions L de Rankin-Selberg .	55
4.6	Changements de signe de $\lambda_\pi(n)$	61
4.7	Un problème de type Linnik pour les fonctions L automorphes . .	61

5	Théorème des nombres premiers pour les fonctions L automorphes	65
5.1	Théorème automorphe des nombres premiers	65
5.2	Lemmes auxiliaires	68
5.3	Une formule explicite	71
5.4	Preuve d'un résultat de type probabiliste	76
5.5	Valeur moyenne et estimations Oméga pour $\psi(x, \pi)$	79
5.6	Un problème de type Linnik pour $\{a_\pi(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^\infty$	81
6	Théorème de la densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes	83
6.1	Théorème de la densité normale de Selberg	83
6.2	Théorème de la densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes	84
6.3	Preuve du théorème	86
	Bibliographie	91
	Remerciements	97

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le problème original de Linnik

Le théorème de Dirichlet affirme qu'il y a une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique $n \equiv l \pmod{q}$ avec $(l, q) = 1$. Il est donc naturel de chercher à majorer le plus petit nombre premier dans cette progression arithmétique. On le notera $P(q, l)$. Linnik ([30], [31]) a montré qu'il existe une constante absolue $\ell > 0$, appelée constante de Linnik, telle que

$$P(q, l) \ll q^\ell.$$

Depuis lors, plusieurs auteurs ont établi des majorations de la constante de Linnik ℓ . Le meilleur résultat connu est $\ell = 5.5$, établi par Heath-Brown [9]. On remarque que ces résultats reposent, entre autres, sur des évaluations numériques concernant les régions sans zéro et sur le phénomène de Deuring-Heilbronn pour les fonctions L de Dirichlet. Sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée (GRH) pour les fonctions L de Dirichlet, les bornes ci-dessus peuvent être améliorées en

$$P(q, l) \ll \varphi^2(q)(\log q)^2. \tag{1.1}$$

On conjecture que la borne optimale est

$$P(q, l) \ll_\varepsilon q^{1+\varepsilon} \tag{1.2}$$

pour $\varepsilon > 0$ arbitraire. Cette majoration est une conséquence de GRH et d'une autre conjecture sur l'universalité de la distribution des zéros non triviaux pour les fonctions L de Dirichlet. L'exposant 1 dans (1.2) est optimal. En effet, on a la minoration triviale

$$\max_a P(q, l) \geq \{1 + o(1)\} \varphi(q) \log q. \quad (1.3)$$

Le problème de Linnik est un modèle mathématique riche qui est source de nombreux problèmes intéressants.

1.2 Un problème de type Linnik pour les formes modulaires classiques

Soit f une forme propre de Hecke normalisée qui est une forme primitive de niveau N et de poids k (un entier pair) sur $\Gamma_0(N)$. Rappelons que 'normalisée' signifie que le premier coefficient de Fourier $\lambda_f(1) = 1$, et 'primitive' signifie que N est le niveau exact de f , ce qui implique que les coefficients de Fourier sont égaux aux valeurs propres de Hecke et que les coefficients de Fourier $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ d'une telle forme f sont réels. Appliquant un théorème classique de Landau, on prouve que la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ doit avoir une infinité de changements de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) < 0$. Compte-tenu de ce résultat, il est raisonnable de poser la question suivante :

Est-il possible d'obtenir une borne sur le premier changement de signe, disons, en fonction de k et de N ?

Cette question est de nature semblable au problème de Linnik, et sera donc désignée comme un problème de type Linnik dans cette thèse. La question générale semble peu abordable.

Siegel a étudié dans [53] un cas très particulier mais l'étude du cas général n'a connu de progrès que très récemment. Dans le cas $N = 1$, les changements de signe de $\lambda_f(p)$ où p parcourt les nombres premiers ont été considérés par Ram

Murty [42]. Kohnen et Sengupta [26] ont prouvé que le premier changement de signe de $\lambda_f(n)$ se produit pour un certain entier n vérifiant

$$n \ll kN \exp \left(c \sqrt{\frac{\log N}{\log \log(3N)}} \right) (\log k)^{27}, \quad (n, N) = 1, \quad (1.4)$$

où $c > 2$ est une constante absolue et la constante implicite est absolue. Notons qu'il est normal de supposer que $(n, N) = 1$, car les valeurs propres $\lambda_f(p)$ avec $p|N$ sont explicitement connues grâce à la théorie d'Atkin-Lehner. Récemment, Iwaniec, Kohnen et Sengupta [13] ont montré qu'il existe n vérifiant

$$n \ll (k^2 N)^{29/60}, \quad (n, N) = 1, \quad (1.5)$$

tel que $\lambda_f(n) < 0$.

Ce résultat (1.5) est assez profond. Pour s'en convaincre, observons que la borne de convexité

$$L(1/2 + it, f) \ll (k^2 N)^{1/4+\varepsilon} \quad (1.6)$$

de la fonction L automorphe $L(1/2 + it, f)$ donne, au lieu de (1.5), la borne plus faible

$$n \ll (k^2 N)^{1/2+\varepsilon}, \quad (n, N) = 1. \quad (1.7)$$

La borne sous-convexe uniforme

$$L(1/2 + it, f) \ll (k^2 N)^{29/120} \quad (1.8)$$

démontrerait (1.5), mais aucun résultat de cette qualité n'est connu. La meilleure borne sous-convexe uniforme de la forme (1.8) connue est due à Michel et Venkatesh [38], qui démontrent que

$$L(1/2 + it, f) \ll (k^2 N)^{1/4-\delta}, \quad (1.9)$$

où δ est une certaine constante positive non indiquée. Iwaniec, Kohnen et Sengupta [13] parviennent à établir (1.5) sans faire appel à (1.8); au lieu de cela,

ils emploient les propriétés arithmétiques de $\lambda_f(n)$, la Conjecture de Ramanujan prouvée par Deligne, et des méthodes de crible.

On peut poser à préciser encore notre question : de quelle longueur est la suite des valeurs propres de Hecke qui gardent le même signe ? Pour mesurer la longueur des suites, définissons

$$\mathcal{N}_f^+(x) = \sum_{\substack{n \leq x, (n, N) = 1 \\ \lambda_f(n) > 0}} 1, \quad (1.10)$$

et définissons $\mathcal{N}_f^-(x)$ de même en remplaçant la condition $\lambda_f(n) > 0$ sous la sommation par $\lambda_f(n) < 0$. Kohnen, Lau et Shparlinski [25] montrent que, si f est une forme primitive, alors

$$\mathcal{N}_f^\pm(x) \gg_f \frac{x}{\log^{17} x}, \quad (1.11)$$

où la constante implicite dépend de la forme f . Récemment, Wu [55] ramène 17 dans l'exposant logarithmique à $1 - 1/\sqrt{3}$, en appliquant ses évaluations sur les sommes de puissance des valeurs propres de Hecke. Plus récemment, Lau et Wu [29] parviennent à se débarrasser complètement du facteur logarithmique dans (1.11), obtenant

$$\mathcal{N}_f^\pm(x) \gg_f x, \quad (1.12)$$

où la constante implicite dépend de la forme f . C'est évidemment le meilleur résultat possible pour l'ordre de grandeur de x .

Ces éléments seront l'objet de notre Chapitre 2.

1.3 Un problème de type Linnik pour les formes de Maass

Dans le Chapitre 3, on étudie un problème de type Linnik pour les formes de Maass. Soit f une forme propre de Maass normalisée qui est une forme primitive de niveau N sur $\Gamma_0(N)$. Ses coefficients de Fourier $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ sont réels.

Appliquant le théorème de Landau comme dans le cas holomorphe, on prouve que la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ doit avoir une infinité de changements de signe. Donc, on peut formuler un problème de type Linnik pour cette forme propre de Maass normalisée f .

Pour ce problème, on démontre le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que pour chaque forme primitive de Maass normalisée f de niveau N associée à la valeur propre $1/4 + \nu^2$ du laplacien on peut trouver un entier n satisfaisant*

$$n \ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/2-\delta}, \quad (n, N) = 1, \quad (1.13)$$

tel que $\lambda_f(n) < 0$, où la constante implicite est absolue.

La démonstration utilise, entre autres, la borne sous-convexe uniforme (1.9) de Michel et Venkatesh [38], ce qui explique que l'on ne puisse pas obtenir une valeur numérique acceptable pour δ . Cependant, la borne (1.9) seule n'est pas suffisante pour établir (1.13); quelques arguments combinatoires et analytiques sont également nécessaires pour (1.13). La méthode de Iwaniec, Kohnen, et Sengupta [13] ne fonctionne pas ici; une des raisons est que la Conjecture de Ramanujan n'est pas encore démontrée pour les formes de Maass, et donc les cribles dans [13] ne s'appliquent pas.

1.4 Un problème de type Linnik pour les fonctions L automorphes

Les problèmes de type Linnik considérés précédemment peuvent être encore généralisé aux fonctions L automorphes. Cela fait l'objet du Chapitre 4.

Soit $m \geq 1$ un entier. À chaque représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, on peut associer une fonction $L(s, \pi)$ globale, comme dans Godement et Jacquet [17], et Jacquet et Shalika [20]. Pour $\sigma = \Re s > 1$,

$L(s, \pi)$ est défini par les produits des facteurs locaux

$$L(s, \pi) = \prod_{p < \infty} L_p(s, \pi_p), \quad (1.14)$$

où

$$L_p(s, \pi_p) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_\pi(p, j)}{p^s} \right)^{-1}. \quad (1.15)$$

La fonction L complète $\Phi(s, \pi)$ est définie par

$$\Phi(s, \pi) = L_\infty(s, \pi_\infty) L(s, \pi), \quad (1.16)$$

où

$$L_\infty(s, \pi_\infty) = \prod_{j=1}^m \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_\pi(j)) \quad (1.17)$$

est le facteur local Archimédien. Ici on a posé

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad (1.18)$$

et $\{\alpha_\pi(p, j)\}_{j=1}^m$ et $\{\mu_\pi(j)\}_{j=1}^m$ sont des nombres complexes liés à π_p et à π_∞ , respectivement, selon la correspondance de Langlands. Le cas $m = 1$ est classique; pour $m \geq 2$, $\Phi(s, \pi)$ est une fonction entière et satisfait une équation fonctionnelle.

D'après Jacquet et Shalika [20], le produit eulérien pour $L(s, \pi)$ dans (1.14) converge absolument pour $\sigma > 1$. Donc, dans le demi-plan $\sigma > 1$, on peut écrire

$$L(s, \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_\pi(n)}{n^s}, \quad (1.19)$$

où

$$\lambda_\pi(n) = \prod_{p^\nu \parallel n} \left\{ \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_m = \nu} \alpha_\pi(p, 1)^{\nu_1} \dots \alpha_\pi(p, m)^{\nu_m} \right\}. \quad (1.20)$$

En particulier,

$$\lambda_\pi(1) = 1, \quad \lambda_\pi(p) = \alpha_\pi(p, 1) + \cdots + \alpha_\pi(p, m). \quad (1.21)$$

Il découle également des travaux de Shahidi ([49], [50], [51] et [52]) que la fonction L complète $\Phi(s, \pi)$ se prolonge analytiquement au plan complexe entier et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Phi(s, \pi) = \varepsilon(s, \pi) \Phi(1 - s, \tilde{\pi})$$

avec

$$\varepsilon(s, \pi) = \varepsilon_\pi N_\pi^{1/2-s},$$

où $N_\pi \geq 1$ est un entier appelé conducteur arithmétique de π , ε_π est une racine satisfaisant $|\varepsilon_\pi| = 1$, et $\tilde{\pi}$ est la représentation contragrédiente à π .

Par un argument semblable au cas des formes holomorphes ou des formes de Maass, il est possible d'établir le théorème suivant sur les changements infinis de signe.

Théorème 4.13. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ telle que $\lambda_\pi(n)$ soit réel pour tout $n \geq 1$. Alors la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ a une infinité de changements de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) < 0$.*

Iwaniec et Sarnak [15] ont défini le conducteur analytique de π . C'est une fonction donnée pour t réel par

$$Q_\pi(t) = N_\pi \prod_{j=1}^m (3 + |t + \mu_\pi(j)|), \quad (1.22)$$

qui rassemble tous les paramètres importants pour π . La quantité

$$Q_\pi = Q_\pi(0) = N_\pi \prod_{j=1}^m (3 + |\mu_\pi(j)|), \quad (1.23)$$

qui joue également un rôle important, est appelée le conducteur de π .

On peut donc formuler un problème de type Linnik pour $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$, et le premier changement de signe est mesuré par le conducteur Q_π de π . Nous obtenons à ce sujet le résultat suivant.

Théorème 4.15. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Il existe un entier n satisfaisant*

$$n \ll Q_\pi^{m/2+\varepsilon} \tag{1.24}$$

tel que $\lambda_\pi(n) \notin [0, \infty)$. La constante implicite dans (1.24) ne dépend que de m et de ε . En particulier, si $\lambda_\pi(n)$ est réel pour tout $n \geq 1$, on doit avoir $\lambda_\pi(n) < 0$ pour un certain n vérifiant (1.24) et ce résultat est vrai pour toute représentation auto-contragrédiente π .

La preuve de ce théorème est tout à fait différente de celle du Théorème 3.10. Une des principales difficultés est qu'il n'y a aucune relation de type Hecke dans ce cas général où π est une représentation irréductible unitaire parabolique, contrairement aux cas classiques des formes modulaires ou des formes de Maass (voir (2.5) et (3.11)). Ces difficultés sont surmontées grâce, entre autres, aux nouvelles propriétés analytiques de $L(s, \pi)$ démontrées par Harcos [8], à une inégalité de Brumley [1] et aux propriétés combinatoires importantes de la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ établies dans le Lemme 4.12. Clairement cette inégalité élégante est intéressante en elle-même et nous croyons qu'elle trouvera d'autres applications.

1.5 Théorème automorphe des nombres premiers et un problème de type Linnik

À chaque représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, on peut associer une fonction L globale $L(s, \pi)$ comme dans §1.4. On peut ensuite lier $L(s, \pi)$ aux nombres premiers en prenant la dérivée logarithmique dans (1.15), de sorte que pour $\sigma > 1$,

$$\frac{d}{ds} \log L(s, \pi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) a_\pi(n)}{n^s}, \tag{1.25}$$

1.5 Théorème automorphe des nombres premiers et un problème de type Linnik¹³

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt, et

$$a_\pi(p^k) = \sum_{j=1}^m \alpha_\pi(p, j)^k. \quad (1.26)$$

Le théorème des nombres premiers pour $L(s, \pi)$ s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$\psi(x, \pi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) a_\pi(n);$$

et un cas spécial affirme que, si π est une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ avec $m \geq 2$, alors

$$\psi(x, \pi) \ll \sqrt{Q_\pi} \cdot x \cdot \exp\left(-\frac{c}{2m^4} \sqrt{\log x}\right) \quad (1.27)$$

pour une certaine constante positive absolue c . Dans Iwaniec et Kowalski [14], les auteurs démontrent le Théorème 5.13, un théorème des nombres premiers pour les fonctions L générales satisfaisant les axiomes nécessaires. La majoration (1.27) en est une conséquence.

Dans ce chapitre, on étudie d'abord l'influence de GRH sur $\psi(x, \pi)$. On sait que, sous GRH, (1.27) peut être amélioré à

$$\psi(x, \pi) \ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi x), \quad (1.28)$$

où la constante implicite dépend au plus de m . On peut cependant espérer de meilleurs résultats. Dans cette optique, on établit les résultats suivants.

Théorème 5.1. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Supposons GRH pour $L(s, \pi)$. Alors on a*

$$\psi(x, \pi) \ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi \log x)$$

pour $x \geq 2$, sauf pour un ensemble E de mesure logarithmique finie, i.e. un ensemble vérifiant

$$\int_E \frac{dx}{x} < \infty.$$

La constante implicite dans le symbole \ll dépend au plus de m .

Théorème 5.2. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Supposons GRH pour $L(s, \pi)$. Alors*

$$\int_2^X |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x} \ll X \log^2 Q_{\pi}.$$

La constante implicite dans le symbole \ll dépend au plus de m .

Gallagher [6] était le premier à établir un résultat semblable au Théorème 5.1, dans le cas classique $m = 1$ pour la fonction zêta de Riemann. Il a montré que, sous l'Hypothèse de Riemann pour la fonction zêta classique,

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x^{1/2}(\log \log x)^2)$$

pour $x \geq 2$, sauf sur un ensemble de mesure logarithmique finie, et donc a amélioré la majoration du terme d'erreur classique $O(x^{1/2} \log^2 x)$ de von Koch [27]. Dans le même papier, Gallagher [6] a également fourni des preuves courtes pour la majoration conditionnelle de Cramér (voir [2] [3])

$$\int_2^X (\psi(x) - x)^2 \frac{dx}{x} \ll X.$$

Pour démontrer les résultats ci-dessus, Gallagher utilise dans [7] un lemme qui porte son nom.

Nos Théorèmes 5.1-5.2 généralisent les résultats classiques ci-dessus à $\psi(s, \pi)$ la fonction comptant les nombres premiers attachée aux représentations irréductibles unitaire parabolique π de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ avec $m \geq 2$. Nos preuves combinent l'approche de Gallagher avec des résultats récents de Liu et Ye ([32], [33]) sur la distribution des zéros des fonctions L automorphes de Rankin-Selberg.

Le Théorème 5.2 ci-dessus déclare que, sous GRH, $|\psi(x, \pi)|$ est de taille $x^{1/2} \log Q_{\pi}$ en moyenne. Ce résultat peut être mis en parallèle avec le théorème suivant, qui donne un résultat Oméga inconditionnel, i.e. $|\psi(x, \pi)|$ ne peut pas être d'ordre inférieur à $x^{1/2-\varepsilon}$.

1.5 Théorème automorphe des nombres premiers et un problème de type Linnik¹⁵

Théorème 5.3. *Soient $m \geq 2$ un entier, π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\psi(x, \pi) = \Omega(x^{1/2-\varepsilon}),$$

où la constante implicite dépend au plus de m et de ε . Plus précisément, il existe une suite croissante $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendant vers l'infini telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\psi(x_n, \pi)|}{x_n^{1/2-\varepsilon}} > 0. \quad (1.29)$$

Notons que la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ et la limite dans (1.29) peuvent dépendre de π . Ce résultat généralise celui établi pour la fonction zêta de Riemann. Il est possible d'obtenir de meilleurs résultats Oméga comme ceux du Chapitre V de Ingham [10]. On remarque que, à la différence du cas classique, dans les Théorèmes 5.1-5.3 on n'a pas le terme principal x . Cela provient du fait que $L(s, \pi)$ est une fonction entière quand $m \geq 2$, alors que $\zeta(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

En le reliant au problème de Linnik pour les fonctions L automorphes considérées dans le Chapitre 4, on considère un problème de type Linnik dans la suite $\{a_{\pi}(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$, définie comme dans (1.25) et (1.26). Ce sont les coefficients du développement en série de Dirichlet de $-\frac{L'}{L}(s, \pi)$ avec $\sigma > 1$. En conséquence du Théorème 4.15, on établit le théorème suivant.

Théorème 5.12. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Si tous les $a_{\pi}(n)\Lambda(n)$ sont réels, alors $\{a_{\pi}(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$ change de signe en un certain n satisfaisant*

$$n \ll Q_{\pi}^{m/2+\varepsilon}. \quad (1.30)$$

La constante implicite dans (1.30) ne dépend que de m et de ε . En particulier, le résultat est vrai pour toute représentation auto-contragrédiente π .

Ceci fera l'objet du Chapitre 5.

1.6 Théorème de densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes

Sous l'Hypothèse de Riemann pour la fonction zêta de Riemann, i.e. dans le cas $m = 1$, Selberg [47] a prouvé que

$$\int_1^X \{\psi(x + h(x)) - \psi(x) - h(x)\}^2 dx = o(h(X)^2 X) \quad (1.31)$$

pour toute fonction croissante $h(x) \leq x$ vérifiant

$$\frac{h(x)}{\log^2 x} \rightarrow \infty,$$

où comme d'habitude,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Dans le Chapitre 6, on prouve un analogue de ceci dans le cas de fonctions L automorphes.

Théorème 6.1. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Supposons GRH pour $L(s, \pi)$. On a*

$$\int_1^X |\psi(x + h(x), \pi) - \psi(x, \pi)|^2 dx = o(h(X)^2 X), \quad (1.32)$$

pour toute fonction croissante $h(x) \leq x$ satisfaisant

$$\frac{h(x)}{\log^2(Q_{\pi}x)} \rightarrow \infty.$$

Notre Théorème 6.1 généralise le résultat de Selberg aux cas $m \geq 2$. Il améliore aussi un résultat de l'auteur [44] établissant que (1.32) est vrai pour $h(x) \leq x$ satisfaisant

$$\frac{h(x)}{x^{\theta} \log^2(Q_{\pi}x)} \rightarrow \infty,$$

1.6 Théorème de densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes¹⁷

où θ est la borne vers GRC comme expliquée dans le Lemme 4.8. La nouvelle idée principale est une application fine de la majoration de valeur moyenne de Kowalski-Iwaniec (voir le Lemme 5.9). On a besoin également d'une formule explicite établie dans le Chapitre 5 sous une forme plus précise.

Inconditionnellement, le Théorème 6.1 est vrai pour $h(x) = x^\beta$ avec une certaine constante $0 < \beta < 1$. La valeur exacte de β dépend de deux ingrédients principaux : une majoration de la densité des zéros de $L(s, \pi)$, et une région sans zéro pour $L(s, \pi)$ de type Littlewood ou Vinogradov.

Chapitre 2

Formes modulaires classiques et un problème de type Linnik

Dans ce chapitre, on fera appel aux définitions et à quelques propriétés principales des formes modulaires classiques. Ces propriétés seront employées dans les chapitres suivants de cette thèse. Pour un exposé détaillé de ces concepts, *cf.* Iwaniec [11].

2.1 Formes modulaires classiques

Soit

$$SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \pm 1 \right\}$$

le groupe modulaire. On limite notre attention au sous-groupe de congruence de Hecke de niveau N , qui est

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : N|c \right\},$$

où N est un entier positif. Avec cette convention, $\Gamma_0(1) = SL_2(\mathbb{Z})$, et l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans le groupe modulaire est

$$\nu(N) = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Le groupe $\Gamma_0(N)$ agit sur le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z : z = x + iy, y > 0\}$$

par

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

Soit k un entier positif. L'espace des formes paraboliques de poids k et de niveau N est noté $S_k(\Gamma_0(N))$; c'est un espace de Hilbert de dimension finie pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(z) \bar{g}(z) y^k \frac{dx dy}{y^2},$$

où

$$d\mu := \frac{dx dy}{y^2}$$

est la mesure invariante sur \mathbb{H} .

Les opérateurs de Hecke $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont définis par

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} \sum_{b \pmod{d}} f\left(\frac{az + b}{d}\right). \quad (2.1)$$

Il suit que T_m et T_n permutent, et pour chaque n , T_n est encore auto-adjoint sur $S_k(\Gamma_0(N))$, i.e.

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle, \quad (n, N) = 1.$$

Soit $\mathcal{F} = \{f\}$ une base orthonormale de $S_k(\Gamma_0(N))$. On peut supposer que chaque $f \in \mathcal{F}$ est une fonction propre pour tous les opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$; i.e. il y a des nombres complexes $\lambda_f(n)$, tels que

$$T_n f = \lambda_f(n) f, \quad (n, N) = 1. \quad (2.2)$$

Les valeurs propres $\lambda_f(n)$ sont reliées aux coefficients de Fourier de $f(z)$ de sorte que le développement en série de Fourier de $f(z)$ est maintenant de la forme

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{(k-1)/2} e(nz), \quad (2.3)$$

avec

$$a_f(n) = a_f(1)\lambda_f(n), \quad (n, N) = 1. \quad (2.4)$$

Notons que si $a_f(1) = 0$, alors on a $a_f(n) = 0$ pour tout $(n, N) = 1$. Ici on a employé la notation standard

$$e(t) := e^{2\pi it} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lemme 2.1. *Soit f une fonction propre pour tous les opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$, et soit $\lambda_f(n)$ comme (2.2). Alors*

- (i) *Les valeurs propres de Hecke $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ sont réelles ;*
- (ii) *Les valeurs propres de Hecke sont multiplicatives dans le sens suivant :*

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad (n, N) = 1.$$

En particulier

$$\lambda_f(p)^2 = \lambda_f(p^2) + 1, \quad (p, N) = 1. \quad (2.5)$$

Malheureusement, on ne peut pas déduire de (2.4) que $a_f(n) \neq 0$, parce que la condition ne nous permet pas de dominer tous les coefficients dans (2.3). Cependant, pour les formes primitives, le résultat suivant est vrai.

Lemme 2.2. *Si f est une forme primitive, alors (2.2) est valable pour tout n . Le premier coefficient du développement de Fourier (2.3) ne disparaît pas, ainsi on peut normaliser f en posant $a_f(1) = 1$. Dans ce cas, $a_f(n) = \lambda_f(n)$ pour tout n , et donc le développement de Fourier de f prend la forme*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e(nz). \quad (2.6)$$

Les Lemmes 2.1 et 2.2 seront appliqués plusieurs fois ultérieurement.

2.2 Fonctions L automorphes classiques

On commence par une forme parabolique qui admet un développement de Fourier de la forme (2.3) et (2.4). Définissons, pour $\sigma > 1$,

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}. \quad (2.7)$$

La fonction L dite complète est définie par

$$\Phi(s, f) = \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s + (k-1)/2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s + (k+1)/2}{2}\right) L(s, f). \quad (2.8)$$

Cette fonction L complète satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Phi(s, f) = \varepsilon_f N^{1/2-s} \Phi(1-s, \bar{f}), \quad (2.9)$$

où ε_f est un nombre complexe de module 1. Pour une forme primitive f quelconque, on a le développement en produit eulérien suivant pour $\Phi(s, f)$.

Lemme 2.3. *Si f est une forme primitive, alors l'équation fonctionnelle prend la forme*

$$\Phi(s, f) = \varepsilon_f N^{1/2-s} \Phi(1-s, f), \quad s \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

Pour $\sigma > 1$, la fonction $L(s, f)$ admet le développement en produit eulérien

$$L(s, f) = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi_N^0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}, \quad (2.11)$$

où χ_N^0 est le caractère principal modulo N .

Par les Lemmes 2.1 et 2.2, toutes les valeurs propres $\lambda_f(n)$ d'une forme primitive f sont réelles. Cela explique pourquoi du côté droit de (2.10) on écrit $\Phi(1-s, f)$ au lieu de $\Phi(1-s, \bar{f})$. De plus, on peut factoriser le polynôme de Hecke de (2.11) en

$$1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi_N^0(p)}{p^{2s}} = \left(1 - \frac{\alpha_f(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\beta_f(p)}{p^s}\right),$$

où

$$\begin{cases} \alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p), \\ \alpha_f(p)\beta_f(p) = \chi_N^0(p). \end{cases}$$

Rappelons que la Conjecture de Ramanujan affirme que

$$|\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1, \quad (p, N) = 1, \quad (2.12)$$

ce qui a été prouvé par Deligne [5]. Pour $\sigma > 1$, la fonction L de carré symétrique est définie par

$$L(s, \text{sym}^2 f) = L(2s, \chi_N^0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s}. \quad (2.13)$$

Le produit eulérien de $L(s, \text{sym}^2 f)$ est, pour $\sigma > 1$, de la forme

$$\begin{aligned} L(s, \text{sym}^2 f) &:= \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_f(p)\alpha_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)\beta_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\beta_f(p)\beta_f(p)}{p^s}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Supposons maintenant que g est une forme primitive de niveau N' et de poids k' . La fonction L de Rankin-Selberg de f et de g est définie par

$$L(s, f \otimes g) = L(2s, \chi_N^0 \chi_{N'}^0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s}, \quad (2.15)$$

si $[N, N']$ est sans facteur carré. Pour $\sigma > 1$, le produit eulérien de $L(s, f \otimes g)$ prend la forme

$$\begin{aligned} L(s, f \otimes g) &= \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_f(p)\alpha_g(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)\beta_g(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\beta_f(p)\alpha_g(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_f(p)\beta_g(p)}{p^s}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ces propriétés seront importantes ultérieurement.

2.3 Changements infinis de signe des coefficients de Fourier

Le résultat suivant semble bien connu. On ne peut cependant pas donner de référence originelle précise. On se réfère donc en général au papier [23] pour une extension aux sous-groupes assez généraux de $SL_2(\mathbb{R})$ et une discussion de problèmes relatifs.

Proposition 2.4. (Knopp-Kohnen-Pribitkin [23]). *Soit f une forme parabolique non nulle de poids un entier pair k sur $\Gamma_0(N)$. Supposons que ses coefficients de Fourier $a_f(n)$ soient réels pour tout $n \geq 1$. Alors la suite*

$$\{a_f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

a une infinité de changements de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $a_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $a_f(n) < 0$.

On déduit des Lemmes 2.1 et 2.2 que les valeurs propres $\lambda_f(n)$ d'une forme primitive f sont réelles. On arrive donc au corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Soit f une forme propre de Hecke normalisée qui est une forme primitive de niveau N et de poids un entier pair k sur $\Gamma_0(N)$. Alors la suite*

$$\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

a une infinité de changements de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) < 0$.

On peut se demander plus précisément : de quelle longueur est la suite des valeurs propres de Hecke qui gardent le même signe. Pour mesurer la longueur des suites, définissons

$$\mathcal{N}_f^+(x) = \sum_{\substack{n \leq x, (n, N) = 1 \\ \lambda_f(n) > 0}} 1, \quad (2.17)$$

et définissons $\mathcal{N}_f^-(x)$ de même en remplaçant la condition $\lambda_f(n) > 0$ sous la sommation par $\lambda_f(n) < 0$. Kohnen, Lau, et Shparlinski [25] montrent que, si f

est une forme primitive, alors

$$\mathcal{N}_f^\pm(x) \gg_f \frac{x}{\log^{17} x}, \quad (2.18)$$

où la constante implicite dépend de la forme f . Récemment, Wu [55] ramène 17 dans l'exposant logarithmique à $1 - 1/\sqrt{3}$, cela découle d'une application simple de ses évaluations sur les sommes de puissance des valeurs propres de Hecke. Plus récemment, Lau et Wu [29] parviennent à se débarrasser complètement du facteur logarithmique dans (2.18).

Proposition 2.6. (Lau-Wu [29]). *Soit f une forme propre de Hecke normalisée qui est une forme primitive de niveau N et de poids un entier pair k sur $\Gamma_0(N)$, et soit $\mathcal{N}_f^\pm(x)$ comme défini en (2.17). Alors*

$$\mathcal{N}_f^\pm(x) \gg_f x, \quad (2.19)$$

où la constante implicite dépend de la forme f .

Évidemment, c'est le meilleur résultat possible en ce qui concerne l'ordre de grandeur de x . La preuve applique, entre autres, la méthode de nombre sans \mathcal{B} . La méthode de [29] fonctionne bien dans d'autres cas également, comme pour les formes de poids demi-entier.

2.4 Un problème de type Linnik : le premier changement de signe des coefficients de Fourier

2.4.1 Le problème original de Linnik

Étant donné le théorème de Dirichlet selon lequel il y a une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique $n \equiv l \pmod{q}$ avec $(q, l) = 1$, il est naturel de chercher une majoration de $P(q, l)$, le plus petit nombre premier dans cette progression arithmétique. Linnik [30] [31] a montré qu'il existe une constante absolue $\ell > 0$, qui porte maintenant son nom. telle que

$$P(q, l) \ll q^\ell.$$

Depuis lors, plusieurs auteurs ont établi des valeurs numériques pour la constante de Linnik ℓ . Heath-Brown [9] a obtenu $\ell = 5.5$, le meilleur résultat connu. On remarque que ces résultats reposent, entre autres, sur des évaluations numériques concernant les régions sans zéro et sur le phénomène de Deuring-Heilbronn pour les fonctions L de Dirichlet. Sous GRH pour les fonctions L de Dirichlet, les bornes ci-dessus peuvent être améliorées par

$$P(q, l) \ll \varphi^2(q)(\log q)^2. \quad (2.20)$$

La borne conjecturée est

$$P(q, l) \ll_{\varepsilon} q^{1+\varepsilon} \quad (2.21)$$

pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, et c'est une conséquence de GRH et d'une autre conjecture sur l'universalité de la distribution des zéros non triviaux pour les fonctions L de Dirichlet, comme indiqué par Liu et [34]. L'exposant 1 dans (2.21) est optimal. En effet, on a la minoration triviale suivante

$$\max_l P(q, l) \geq \{1 + o(1)\} \varphi(q) \log q. \quad (2.22)$$

Pour un aperçu des résultats sur le problème de Linnik, cf. [9].

2.4.2 Un problème de type Linnik et un résultat classique de Siegel

Suite aux résultats du paragraphe précédent, il est raisonnable de demander : *Est-il possible d'obtenir une borne sur le premier changement de signe, disons, par rapport à k et à N ?* Il semble que l'étude du cas général soit difficile. Pour un aperçu des résultats sur ce sujet, voir Kohnen [24].

Si $f \neq 0$, alors, par la formule de valence pour les formes modulaires, la somme des ordres des zéros de f sur la surface de Riemann compactifiée

$$X_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$$

2.4 Un problème de type Linnik : le premier changement de signe des coefficients de Fourier²⁷

est égale à $\frac{k}{12}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$. Donc il existe un nombre n dans l'intervalle

$$1 \leq n \leq \frac{k}{12}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$$

tel que $a_f(n) \neq 0$. Maintenant si on est optimiste, alors on peut espérer un changement de signe dans l'intervalle

$$1 \leq n \leq \frac{k}{12}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] + 1.$$

Dans un cas très particulier, c'est en effet un résultat du travail de Siegel [53]. Pour formuler ce résultat, supposons $k \geq 4$ et notons d_k la dimension de l'espace $M_k(\Gamma_0(1))$ des formes modulaires de poids k sur $\Gamma_0(1)$. Rappelons que d_k satisfait la formule

$$d_k = \begin{cases} [k/12] & k \equiv 2 \pmod{12}, \\ [k/12] + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors Siegel a montré que, pour chaque $f \in M_k(\Gamma_0(1))$, il y a des nombres rationnels explicitement calculables $\{c_n\}_{n=0}^{d_k}$ dépendant de k , tels que

$$\sum_{n=0}^{d_k} c_n a_f(n) = 0.$$

L'expression explicite de Siegel pour c_n implique que, pour $k \equiv 2 \pmod{4}$, tous les c_n sont strictement positifs. Comme une forme parabolique de poids k sur $\Gamma_0(1)$ est déterminée par ses coefficients de Fourier $\{a_f(n)\}_{n=0}^{d_k-1}$, on conclut immédiatement que, sous l'hypothèse $k \equiv 2 \pmod{4}$, il doit y avoir un changement de signe de $a_f(n)$ dans l'intervalle $1 \leq n \leq d_k$. Ainsi, en utilisant la formule ci-dessus pour d_k , on voit que dans ce cas particulier, notre optimisme se justifie.

Cependant, lorsque $k \equiv 0 \pmod{4}$ ou si $N > 1$, l'argument de Siegel ne fonctionne plus, et donc on a besoin d'autres idées.

2.4.3 Développements récents et commentaires

Dans ce paragraphe, on se concentrera sur le cas où f est une forme propre de Hecke normalisée qui est une forme primitive de niveau N . Rappelons que

'normalisation' signifie que $a_f(n) = 1$, et forme 'primitive' signifie que N est le niveau exact de f , et dans ce cas les coefficients de Fourier sont égaux aux valeurs propres de Hecke.

Dans le cas $N = 1$, les changements de signe de $\lambda_f(p)$ où p parcourt les nombres premiers ont été considérés par Ram Murty [42]. Kohnen et Sengupta [26] ont prouvé que le premier changement de signe de $\lambda_f(n)$ se produit pour un certain n avec

$$n \ll kN \exp \left(c \sqrt{\frac{\log N}{\log \log(3N)}} \right) (\log k)^{27}, \quad (n, N) = 1, \quad (2.23)$$

où $c > 2$ est une constante et la \ll -constante est absolue. Notons qu'il est naturel de supposer $(n, N) = 1$, car les valeurs propres $\lambda_f(p)$ avec $p|N$ sont explicitement connus par la théorie d'Atkin-Lehner.

Récemment, Iwaniec, Kohnen, et Sengupta [13] ont établi le résultat suivant.

Proposition 2.7. (Iwaniec-Kohnen-Sengupta [13]). *Soit f une forme propre de Hecke normalisée de poids entier k et de niveau N qui est une forme primitive. Alors il existe un certain entier n satisfaisant*

$$n \ll (k^2 N)^{29/60}, \quad (n, N) = 1, \quad (2.24)$$

tel que $\lambda_f(n) < 0$.

La borne de convexité

$$L(1/2 + it, f) \ll (k^2 N)^{1/4+\varepsilon} \quad (2.25)$$

donne, au lieu de (2.24), la borne plus faible

$$n \ll (k^2 N)^{1/2+\varepsilon}, \quad (n, N) = 1. \quad (2.26)$$

La borne sous-convexe uniforme

$$L(1/2 + it, f) \ll (k^2 N)^{29/120} \quad (2.27)$$

prouverait la Proposition 2.7, mais aucun résultat de cette qualité n'est connu. La meilleure borne sous-convexe uniforme semblable à (2.27) connue est celle de Michel et Venkatesh [38], qui énoncent que

$$L(1/2 + it, f) \ll (k^2 N)^{1/4-\delta}, \quad (2.28)$$

où δ est une certaine constante positive non indiquée. Iwaniec, Kohnen, et Sengupta [13] parviennent à établir (2.24) sans faire appel à (2.27) ; les étapes principales dans [13] sont les suivantes :

– L'identité (2.5), i.e.

$$\lambda_f(p)^2 = \lambda_f(p^2) + 1, \quad (p, N) = 1;$$

– La conjecture de Ramanujan (2.12) prouvée par Deligne, i.e.

$$|\lambda_f(p)| \leq 2, \quad (p, N) = 1;$$

– Les méthodes de crible.

Naturellement, la preuve de la Proposition 2.7 est fortement dépendante des hypothèses. En particulier, pour effectuer les cribles, on a encore besoin de l'identité $\lambda_f(p)^2 = \lambda_f(p^2) + 1$ plusieurs fois, et de $|\lambda_f(p)| \leq 2$ d'une manière plus cruciale. On n'entrera pas dans ces détails, mais nous tenons juste à préciser que cette approche ne fonctionne pas pour les formes automorphes f , pour lesquelles $\lambda_f(n)$ ne satisfait pas les deux propriétés ci-dessus.

Chapitre 3

Un problème de type Linnik pour les formes de Maass

3.1 La théorie spectrale des formes de Maass

Dans cette section, on présente la notion et les faits principaux de la théorie des formes de Maass de poids $k = 0$ dans le contexte du sous-groupe de congruence de Hecke $\Gamma_0(N)$. Philosophiquement, il n'y a aucune différence essentielle de la théorie des formes modulaires classiques, sauf l'existence d'un spectre continu dans l'espace des formes de Maass. Une bonne monographie sur cette matière est d'Iwaniec [12]. Mais on doit admettre que quelques méthodes mûres, qui sont très utiles dans le cas des formes holomorphes, ne fonctionnent pas dans la situation actuelle. Le problème de type Linnik pour les formes de Maass est un tel exemple, comme sera expliqué dans ce chapitre.

3.1.1 La décomposition spectrale : préliminaires

On dit que une fonction $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ soit automorphe par rapport à $\Gamma_0(N)$ si

$$f(\gamma z) = f(z), \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma_0(N).$$

Donc, f se trouve sur $\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}$. On dénote l'espace de telles fonctions par $\mathcal{A}(\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H})$. Notre objet est d'étendre les fonctions automorphes aux formes

automorphes sujettes à une condition appropriée de la croissance. Les résultats principaux tiennent dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) = \{f \in \mathcal{A}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) : \|f\| < \infty\}$$

par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\bar{g}(z) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Rappelons-nous que l'opérateur laplacien standard sur le plan complexe \mathbb{C} est défini par

$$\Delta^e = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

mais sur le demi-plan supérieur \mathbb{H} , on devrait utiliser l'opérateur laplacien non euclidien

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Cet opérateur laplacien non euclidien agit dans le sous-espace dense des fonctions lisses dans $\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ tel que f et Δf sont tout bornés, i.e.

$$\mathcal{D}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) = \{f \in \mathcal{A}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) : f, \Delta f \text{ lisses et bornés}\}.$$

Il est prouvé que $\mathcal{D}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ est dense dans $\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, et Δ est semi-défini positif et symétrique sur $\mathcal{D}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$. Par le théorème de Friedrich dans l'analyse fonctionnelle, Δ a une extension auto-adjointe unique dans $\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$.

Lemme 3.1. (i) *Soit $\Lambda = s(1-s)$ une valeur propre d'une forme propre $f \in \mathcal{D}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$. Alors Λ est réel et non négatif, i.e. soit $s = 1/2 + it$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit $0 < s < 1$.*

(ii) *Dans $\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, le laplacien non euclidien Δ est semi-défini positif et auto-adjoint.*

Avec l'extension auto-adjointe ci-dessus, on peut prouver que le laplacien non euclidien Δ a la décomposition spectrale

$$\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) \oplus \mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}).$$

Ici, \mathbb{C} est l'espace des fonctions constantes, $\mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ l'espace des forme paraboliques, et $\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ l'espace engendré par les séries d'Eisenstein incomplètes.

3.1.2 Le spectre discret

La structure de l'espace $\mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, i.e. l'espace des formes paraboliques, est caractérisée par le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Le laplacien automorphe Δ a un spectre ponctuel purement dans $\mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, i.e. l'espace $\mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ est engendré par les formes paraboliques. Les valeurs propres sont*

$$0 = \Lambda_0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty,$$

et même les espaces propres ont la dimension finie. Pour un quelconque système orthonormal complet des formes paraboliques $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, chaque $f \in \mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ a le développement

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle u_j(z),$$

convergeant dans la topologie norme. Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, alors la série converge absolument et uniformément sur le compacta.

Soit

$$\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^\infty$$

une base orthonormale de $\mathcal{C}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ qui sont des fonctions propres de Δ , disons

$$\Delta u_j = \Lambda_j u_j,$$

avec

$$\Lambda_j = s_j(1 - s_j) = \frac{1}{4} + \nu_j^2, \quad s_j = \frac{1}{2} + i\nu_j. \quad (3.1)$$

Ici, notons que ν_j dans (3.1) n'est pas nécessairement réel. Tout u_j a le développement de Fourier

$$u_j(z) = \sum_{n \neq 0} \rho_j(n) W_{s_j}(nz), \quad (3.2)$$

où $W_s(z)$ est la fonction de Whittaker donnée par

$$W_s(z) = 2|y|^{1/2} K_{s-1/2}(2\pi|y|) e(x),$$

et $K_s(y)$ est la fonction K -Bessel. Notons que

$$W_s(z) \sim e(z), \quad y \rightarrow \infty.$$

Les formes automorphes $u_j(z)$ s'appellent les formes paraboliques de Maass. Parfois, on écrit f pour les formes paraboliques de Maass avec la valeur propre du laplacien

$$\Lambda = s(1-s) = \frac{1}{4} + \nu_f^2,$$

et dans ce cas, le développement de Fourier de f prend la forme

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} \rho_f(n) W_s(nz). \quad (3.3)$$

Comparons ceci avec (3.2).

3.1.3 L'involution antiholomorphe

Soit $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ l'involution antiholomorphe

$$\iota(x + iy) = -x + iy.$$

Si f est une fonction propre de Δ , et

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} \rho_f(n) W_s(nz), \quad (3.4)$$

alors $f \circ \iota$ est une fonction propre avec la même valeur propre. Parce que $\iota^2 = 1$, ses valeurs propres sont ± 1 . On peut diagonaliser donc les formes paraboliques de Maass par rapport à ι . Si $f \circ \iota = f$, on appelle f pair. Dans ce cas

$$\rho_f(n) = \rho_f(-n).$$

Si $f \circ \iota = -f$, alors on appelle f impair, et même on a

$$\rho_f(n) = -\rho_f(-n).$$

3.1.4 Le spectre continu

D'autre part, dans l'espace $\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, le spectre s'avère être continu. La résolution spectrale de Δ dans $\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ provient du prolongement analytique de la série d'Eisenstein. L'eigenpacket du spectre continu se compose des séries d'Eisenstein $E_{\mathfrak{a}}(z, s)$ sur la ligne $\sigma = 1/2$ (analytiquement prolongées). Celles sont définies pour chaque cusp \mathfrak{a} par

$$E_{\mathfrak{a}}(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}} \backslash \Gamma_0(N)} (\Im \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \gamma z)^s$$

si $\sigma > 1$, et par le prolongement analytique pour tout $s \in \mathbb{C}$. Ici, $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ est le groupe stabilité de \mathfrak{a} et $\mathfrak{a} \in SL_2(\mathbb{R})$ est tel que

$$\sigma_{\mathfrak{a}} \infty = \mathfrak{a}, \quad \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma \sigma_{\mathfrak{a}} = \Gamma_{\infty}.$$

La matrice d'échelle $\sigma_{\mathfrak{a}}$ de \mathfrak{a} est seulement déterminée à une translation à droite près; cependant la série d'Eisenstein ne dépend pas du choix de $\sigma_{\mathfrak{a}}$, pas même du choix d'un cusp dans la classe équivalente. Le développement de Fourier de $E_{\mathfrak{a}}(z, s)$ est semblable à celui d'une forme parabolique; précisément,

$$E_{\mathfrak{a}}(z, s) = \varphi_{\mathfrak{a}} y^s + \varphi_{\mathfrak{a}}(s) y^{1-s} + \sum_{n \neq 0} \varphi_{\mathfrak{a}}(n, s) W_s(nz),$$

où $\varphi_{\mathfrak{a}} = 1$ si $\mathfrak{a} \sim \infty$, et $\varphi_{\mathfrak{a}} = 0$ sinon.

Lemme 3.3. *L'espace $\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ des séries d'Eisenstein incomplètes se décompose orthogonalement en sous-espaces Δ -invariant*

$$\mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) = \mathcal{R}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) \oplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}).$$

Le spectre de Δ dans $\mathcal{R}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ est discret; il contient un nombre fini de points Λ_j avec

$$\Lambda_j \in [0, 1/4).$$

Le spectre de Δ dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ est absolument continu; il couvre le segment

$$[1/4, +\infty)$$

uniformément avec multiplicité 1. Chaque $f \in \mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ a le développement

$$f(z) = \sum_j \langle f, u_j \rangle u_j(z) + \sum_a \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, E_a(\cdot, 1/2 + it) \rangle E_a(z, 1/2 + it) dt, \quad (3.5)$$

qui converge en norme. Si $f \in \mathcal{E}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$, alors la série converge simplement absolument et uniformément sur le compact.

3.1.5 La décomposition spectrale : conclusion

Combinant les Lemmes 3.2-3.3, on obtient la décomposition spectrale de l'espace entier $\mathcal{L}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, u_j \rangle u_j(z) + \sum_j \langle f, u_j \rangle u_j(z) \\ &\quad + \sum_a \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, E_a(\cdot, 1/2 + it) \rangle E_a(z, 1/2 + it) dt. \end{aligned}$$

Cette structure est l'une des bases de l'argumentation ultérieure.

3.2 Théorie de Hecke pour les formes de Maass

Pour $n \geq 1$, définissons

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{b \pmod{d}} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \quad (3.6)$$

Notons que seuls les T_n avec $(n, N) = 1$ sont intéressants. On examine d'abord l'action de T_n sur une forme parabolique de Maass u_j . Pour u_j comme dans (3.1) et (3.2), écrivons

$$u_j(z) = \sum_{m \neq 0} \rho_j(m) W_{s_j}(mz). \quad (3.7)$$

On calcule alors que

$$(T_n u_j)(z) = \sum_{m \neq 0} t_n(m) W_{s_j}(mz),$$

avec

$$t_n(m) = \sum_{d|(m,n)} \rho_j \left(\frac{mn}{d^2} \right).$$

On en déduit

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} T_{mn/d^2},$$

de sorte que, en particulier, T_m et T_n permutent. Par ailleurs, les opérateurs de Hecke permutent avec le laplacien non euclidien Δ . Pour chaque n , T_n est également auto-adjoint dans $\mathcal{L}(\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H})$, i.e.

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle, \quad (n, N) = 1.$$

Donc, dans l'espace $\mathcal{C}(\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H})$ des formes paraboliques, on peut choisir une base orthonormale $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ composée de fonctions propres simultanées pour tous les T_n , i.e.

$$T_n u_j(z) = \lambda_j(n) u_j(z), \quad j \geq 1, \quad (n, N) = 1, \quad (3.8)$$

où $\lambda_j(n)$ est la valeur propre de T_n pour $u_j(z)$. À une constante près, $\lambda_j(n)$ est le coefficient de Fourier $\rho_j(n)$. Plus précisément,

$$\lambda_j(n) \rho_j(1) = \rho_j(n), \quad \text{pour tout } (n, N) = 1, \quad j \geq 1. \quad (3.9)$$

Notons que si $\rho_j(1) = 0$, alors $\rho_j(n) = 0$ pour $(n, N) = 1$.

Lemme 3.4. Soit $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthonormale composée des fonctions propres simultanées pour tous les T_n . Fixons un j , et soit $\{\lambda_j(n)\}_{n=1}^{\infty}$ la suite des valeurs propres pour tous les T_n comme dans (3.8).

- (i) Les valeurs propres de Hecke $\{\lambda_j(n)\}_{n=1}^{\infty}$ sont réelles ;
- (ii) Les valeurs propres de Hecke sont multiplicatives dans le sens suivant :

$$\lambda_j(m) \lambda_j(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_j \left(\frac{mn}{d^2} \right), \quad (n, N) = 1,$$

et

$$\lambda_j(m)\lambda_j(p) = \lambda_j(mp), \quad p|N. \quad (3.10)$$

Il suit que

$$\lambda_j(p)^2 = \lambda_j(p^2) + 1, \quad (p, N) = 1. \quad (3.11)$$

Comme dans le cas des formes modulaires classiques, on ne peut pas déduire de (3.9) que $\rho_j(n) \neq 0$. On doit donc, pour la même raison, travailler avec les formes primitives.

Lemme 3.5. *Si u_j est une forme primitive, alors (3.8) reste valable pour tout n . De plus, le premier coefficient du développement de Fourier (3.7) ne s'annule pas, et on peut donc normaliser u_j en posant $\rho_j(1) = 1$. Dans ce cas, $\rho_j(n) = \lambda_j(n)$ pour tout n , et donc*

$$u_j(z) = \sum_{n \neq 0}^{\infty} \lambda_j(n) W_{s_j}(nz). \quad (3.12)$$

La série d'Eisenstein $E_{\infty}(z, 1/2 + it)$ est une fonction propre de tous les opérateurs de Hecke T_n , $(n, N) = 1$, avec les valeurs propres $\eta_t(n)$, i.e.

$$T_n E_{\infty}(z, 1/2 + it) = \eta_t(n) E_{\infty}(z, 1/2 + it), \quad (n, N) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

où

$$\eta_t(n) = \sum_{ad=n} \left(\frac{a}{d}\right)^{it}. \quad (3.14)$$

On rappelle que $\eta_0(n)$ se réduit à la fonction diviseur classique $\tau(n)$.

3.3 Fonctions L automorphes des formes de Maass

À une forme primitive de Maass f comme dans (3.3) avec la valeur propre du laplacien $1/4 + \nu^2$, on peut associer une fonction L automorphe

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \sigma > 1, \quad (3.15)$$

comme dans §2.2. Pour le cas des formes de Maass, la fonction L complète est définie par

$$\Phi(s, f) = \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s + \epsilon - 1/2 + \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s + \epsilon + 1/2 - \nu}{2}\right) L(s, f), \quad (3.16)$$

où ϵ est la valeur propre de ι présentée dans §3.1.3. La fonction L complète satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Phi(s, f) = \varepsilon_f N^{1/2-s} \Phi(1-s, \bar{f}),$$

où ε_f est un nombre complexe du module 1. Pour toute forme primitive f , on a le développement en produit eulérien suivant pour $\Phi(s, f)$.

Lemme 3.6. *Si f est une forme primitive, alors l'équation fonctionnelle prend la forme*

$$\Phi(s, f) = \varepsilon_f N^{1/2-s} \Phi(1-s, f), \quad (3.17)$$

et, pour $\sigma > 1$, la fonction $L(s, f)$ admet le développement en produit eulérien

$$L(s, f) = \prod_p \left(1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi_N^0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}, \quad (3.18)$$

où χ_N^0 est le caractère principal modulo N .

Par le Lemme 3.5, toutes les valeurs propres $\lambda_f(n)$ d'une forme primitive f sont réelles. Cela explique pourquoi du côté droit de (3.17) on a $\Phi(1-s, f)$ au lieu de $\Phi(1-s, \bar{f})$. On peut encore décomposer le polynôme de Hecke dans (3.18) en

$$1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi_N^0(p)}{p^{2s}} = \left(1 - \frac{\alpha_f(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\beta_f(p)}{p^s}\right),$$

où

$$\alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p), \quad \alpha_f(p)\beta_f(p) = \chi_N^0(p).$$

La Conjecture de Ramanujan Généralisée (GRC en bref) affirme dans ce cas que

$$|\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1, \quad (p, N) = 1; \quad (3.19)$$

ce problème est encore ouvert, et la meilleure approximation de cette conjecture dont on dispose est la majoration de Kim et Sarnak [22] :

$$|\alpha_f(p)| \leq p^{7/64}, \quad |\beta_f(p)| \leq p^{7/64}, \quad (p, N) = 1. \quad (3.20)$$

La fonction L de carré symétrique est définie par

$$L(s, \text{sym}^2 f) = L(2s, \chi_N^0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s}. \quad (3.21)$$

Supposons maintenant que g soit une forme primitive de Maass de niveau N' et de poids k' . La fonction de Rankin-Selberg de f et de g est définie par

$$L(s, f \otimes g) = L(2s, \chi_N^0 \chi_{N'}^0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s}, \quad (3.22)$$

si $[N, N']$ est sans facteur carré. Pour $\sigma > 1$, le produit eulérien de $L(s, f \otimes g)$ est de la forme

$$\begin{aligned} L(s, f \otimes g) &= \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_f(p)\alpha_g(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha_f(p)\beta_g(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\beta_f(p)\alpha_g(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_f(p)\beta_g(p)}{p^s}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La borne sous-convexe suivante est un résultat nouveau de Michel et Venkatesh [38].

Lemme 3.7. (Michel-Venkatesh [38]). *Soit f une forme primitive de Maass non nulle sur $\Gamma_0(N)$ associée à la valeur propre $1/4 + \nu^2$ du laplacien. Alors*

$$L(1/2 + it, f) \ll \{(1 + |t + \nu|)^2 N\}^{1/4 - \delta/2}, \quad (3.24)$$

où δ est une constante absolue positive.

Les bornes sous-convexes pour l'un quelconque des trois aspects ν, N , ou t ont été étudiées considérablement dans la littérature, mais la seule borne sous-convexe uniforme connue est de la forme (3.24), avec un $\delta > 0$ non connu. On pourra consulter Michel [37] pour un aperçu dans ce sujet, et Michel et Venkatesh [38] pour ses développements récents.

3.4 Les changements infinis de signe des coefficients de Fourier des formes de Maass

On précise à la fin de [23] que des résultats similaires sont vrais pour les formes de Maass. On a en fait le résultat général suivant.

Proposition 3.8. (Knopp-Kohnen-Pribitkin [23]). *Soit f une forme parabolique de Maass non nulle sur $\Gamma_0(N)$ de développement de Fourier (3.4). Supposons que ses coefficients de Fourier $\rho_f(n)$ soient réels pour tout $n \geq 1$. Alors la suite*

$$\{\rho_f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

a des changements infinis de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\rho_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\rho_f(n) < 0$.

Comme toutes les valeurs propres $\lambda_f(n)$ d'une forme primitive f sont réelles, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.9. *Soit f une forme propre de Maass normalisée qui est une forme primitive de niveau N sur $\Gamma_0(N)$. Alors la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a des changements infinis de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) < 0$.*

Pour les formes de Maass, on peut également poser la question plus précise : combien de $\lambda_f(n)$ consécutifs gardent le même signe ? Comme dans (2.17), on

peut encore définir

$$\mathcal{N}_f^+(x) = \sum_{\substack{n \leq x, (n, N) = 1 \\ \lambda_f(n) > 0}} 1, \quad (3.25)$$

et définir $\mathcal{N}_f^-(x)$ de même en remplaçant la condition $\lambda_f(n) > 0$ sous la sommation par $\lambda_f(n) < 0$. Il est possible d'établir des résultats similaires à ceux de Kohlen-Lau-Shparlinski [25], de Wu [55], ou même de Lau-Wu [29]. Ceci nous porterait trop loin et nous avons choisi de reporter ce travail à une date ultérieure.

3.5 Un problème de type Linnik pour les formes de Maass

Comme dans le cas des formes propres holomorphes, on peut encore formuler le problème de type Linnik pour les formes propres de Maass.

Pour f une forme propre de Maass, est-il possible d'obtenir une borne sur le premier changement de signe de $\lambda_f(n)$, disons, par rapport à N et la valeur propre du laplacien de f ?

Il semble qu'il n'y ait aucun résultat dans ce domaine. Notre résultat suivant en donne un.

Théorème 3.10. *Il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que pour chaque forme primitive de Maass normalisée f de niveau N associée à la valeur propre $1/4 + \nu^2$ du laplacien on peut trouver un entier n satisfaisant*

$$n \ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/2 - \delta}, \quad (n, N) = 1, \quad (3.26)$$

tel que $\lambda_f(n) < 0$, où la constante implicite est absolue.

On a besoin de la forme suivante de la formule de Perron, dont la preuve peut être trouvée dans les livres de base de la théorie analytique des nombres

Soit σ_a l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad (3.27)$$

où $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes, et $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ une variable complexe. La formule de Perron permet de relier la somme partielle des coefficients a_n à la fonction $F(s)$.

Lemme 3.11. (Formule de Perron). *Définissons*

$$A(x) = \max_{x/2 < n \leq 3x/2} |a_n|, \quad B(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \quad (3.28)$$

pour $\sigma > \sigma_a$. Soient ℓ un entier non négatif, $x \geq 2$, et notons $\|x\|$ la distance entre x et l'entier le plus proche. Alors, pour $b > \sigma_a$ et $T \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n \left(\log \frac{x}{n} \right)^\ell &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s^{\ell+1}} ds + O\left(\frac{x A(x) \log^{\ell+1} x}{T} \right) \\ &\quad + O\left(\frac{x^b B(b) \log^\ell x}{T} \right) \\ &\quad + O\left\{ A(x) \min\left(1, \frac{x}{T\|x\|} \right) \log^\ell x \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En particulier, pour $b > \sigma_a$,

$$\sum_{n \leq x} a_n \left(\log \frac{x}{n} \right)^\ell = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s^{\ell+1}} ds. \quad (3.30)$$

On va maintenant démontrer le Théorème 3.10.

Démonstration du Théorème 3.10. L'idée est de considérer la somme

$$S(x) := \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, N)=1}} \lambda_f(n) \log \frac{x}{n},$$

en supposant que

$$\lambda_f(n) \geq 0 \quad \text{pour } n \leq x \text{ et } (n, N) = 1. \quad (3.31)$$

Le résultat désiré découlera des majorations et minoration de $S(x)$.

Pour obtenir une borne supérieure pour $S(x)$, on applique la formule de Perron (3.30) avec $\ell = 1$ à la série de Dirichlet (3.15), ce qui donne

$$\sum_{n \leq x} \lambda_f(n) \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} L(s, f) \frac{x^s}{s^2} ds.$$

Déplaçant le contour d'intégration à la droite $\sigma = 1/2$, où on applique la majoration de Michel-Venkatesh (3.24) pour $L(s, f)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \lambda_f(n) \log \frac{x}{n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} L(s, f) \frac{x^s}{s^2} ds \\ &\ll \int_{-\infty}^{\infty} \{(1 + |t + \nu|)^2 N\}^{1/4-\delta/2} \frac{x^{1/2}}{|t|^2 + 1} dt \\ &\ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/4-\delta/2} x^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour déduire une majoration de $S(x)$ du résultat ci-dessus, on introduit la condition $(n, N) = 1$ au moyen de la formule d'inversion de Möbius, qui donne

$$S(x) = \sum_{d|N} \mu(d) \sum_{dm \leq x} \lambda_f(dm) \log \frac{x}{dm}.$$

Comme $d|N$, on peut appliquer la propriété de multiplicativité (3.10), qui donne dans la situation actuelle

$$\lambda_f(dm) = \lambda_f(d) \lambda_f(m).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{d|N} \mu(d) \lambda_f(d) \sum_{dm \leq x} \lambda_f(m) \log \frac{x}{dm} \\ &\ll \sum_{d|N} |\mu(d) \lambda_f(d)| \left| \sum_{m \leq x/d} \lambda_f(m) \log \frac{x/d}{m} \right| \\ &\ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/4-\delta} x^{1/2} \sum_{d|N} \frac{|\lambda_f(d)|}{d^{1/2}}. \end{aligned}$$

La borne de Kim-Sarnak $\lambda_f(d) \ll d^{7/64+\varepsilon}$ entraîne

$$\sum_{d|N} \frac{|\lambda_f(d)|}{d^{1/2}} \ll \tau(N) \ll N^\varepsilon;$$

ici on note que la borne triviale $\lambda_f(d) \ll d^{1/2+\varepsilon}$ est également valable. On en conclut que

$$S(x) \ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/4-\delta/2} x^{1/2}. \quad (3.32)$$

Pour obtenir une borne inférieure de $S(x)$ sous l'hypothèse (3.31), on enlève d'abord le poids $\log(x/n)$ d'une manière simple :

$$S(x) \gg \sum_{\substack{n \leq x/2 \\ (n, N)=1}} \lambda_f(n).$$

On limite maintenant la sommation à $n = pq$, où p et q sont des nombres premiers satisfaisant

$$p \leq \sqrt{x/2}, \quad q \leq \sqrt{x/2}, \quad (p, N) = 1, \quad (q, N) = 1,$$

et on emploie les formules

$$\begin{cases} \lambda_f(pq) = \lambda_f(p)\lambda_f(q) & \text{if } p \neq q, (p, N) = 1, (q, N) = 1, \\ \lambda_f(p^2) = \lambda_f(p)^2 - 1 & \text{if } p = q, (p, N) = 1. \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S(x) &\gg \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x/2} \\ (p, N)=1}} \sum_{\substack{q \leq \sqrt{x/2} \\ (q, N)=1}} \lambda_f(pq) \\ &= \left\{ \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x/2} \\ (p, N)=1}} \lambda_f(p) \right\}^2 - \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x/2} \\ (p, N)=1}} 1. \end{aligned}$$

En rappelant l'hypothèse (3.31), on a $\lambda_f(p^2) \geq 0$ pour $p \leq \sqrt{x/2}$ et $(p, N) = 1$, et donc

$$\lambda_f(p)^2 = \lambda_f(p^2) + 1 \geq 1,$$

i.e. $\lambda_f(p) \geq 1$. Il suit de ce résultat et du théorème des nombres premiers que

$$\begin{aligned} S(x) &\geq \left\{ \sum_{p \leq \sqrt{x/2}} 1 \right\}^2 - \left\{ \sum_{p \leq \sqrt{x/2}} 1 \right\} \\ &\gg \frac{x}{\log^2 x}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

En comparant (3.33) avec (3.32), on obtient

$$\frac{x}{\log^2 x} \ll S(x) \ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/4 - \delta/2} x^{1/2},$$

i.e.

$$x \ll ((3 + |\nu|)^2 N)^{1/2 - \delta + \varepsilon}.$$

C'est la preuve du théorème. □

Chapitre 4

Un problème de type Linnik pour les fonctions L automorphes

4.1 Fonctions L automorphes : concepts et propriétés

À chaque représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, on peut associer une fonction L globale $L(s, \pi)$, comme dans Godement et Jacquet [17], et Jacquet et Shalika [20]. Pour $\sigma = \Re s > 1$, $L(s, \pi)$ est défini par les produits des facteurs locaux

$$L(s, \pi) = \prod_{p < \infty} L_p(s, \pi_p), \quad (4.1)$$

où

$$L_p(s, \pi_p) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_{\pi}(p, j)}{p^s} \right)^{-1}; \quad (4.2)$$

la fonction L complète $\Phi(s, \pi)$ est définie par

$$\Phi(s, \pi) = L_{\infty}(s, \pi_{\infty})L(s, \pi), \quad (4.3)$$

où

$$L_{\infty}(s, \pi_{\infty}) = \prod_{j=1}^m \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_{\pi}(j)) \quad (4.4)$$

est le facteur local Archimédien. Ici on pose

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad (4.5)$$

et $\{\alpha_{\pi}(p, j)\}_{j=1}^m$ et $\{\mu_{\pi}(j)\}_{j=1}^m$ sont des nombres complexes liés à π_p et à π_{∞} , respectivement, selon la correspondance de Langlands. Le cas $m = 1$ est classique ; pour $m \geq 2$, $\Phi(s, \pi)$ est entière et satisfait une équation fonctionnelle.

On rappelle rapidement quelques propriétés de fonctions L automorphes $L(s, \pi)$ et $\Phi(s, \pi)$, que l'on utilisera dans nos démonstrations.

Lemme 4.1. (Jacquet-Shalika [20]). *Le produit eulérien de $L(s, \pi)$ dans (4.1) converge absolument pour $\sigma > 1$.*

Ainsi, dans le demi-plan $\sigma > 1$, on peut écrire

$$L(s, \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\pi}(n)}{n^s}, \quad (4.6)$$

où

$$\lambda_{\pi}(n) = \prod_{p^{\nu} \parallel n} \left\{ \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_m = \nu} \alpha_{\pi}(p, 1)^{\nu_1} \dots \alpha_{\pi}(p, m)^{\nu_m} \right\}. \quad (4.7)$$

En particulier,

$$\lambda_{\pi}(1) = 1, \quad \lambda_{\pi}(p) = \alpha_{\pi}(p, 1) + \dots + \alpha_{\pi}(p, m). \quad (4.8)$$

Lemme 4.2. (Shahidi [49], [50], [51], et [52]). *La fonction L complète $\Phi(s, \pi)$ admet un prolongement analytique au plan complexe entier et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\Phi(s, \pi) = \varepsilon(s, \pi) \Phi(1 - s, \tilde{\pi})$$

avec

$$\varepsilon(s, \pi) = \varepsilon_{\pi} N_{\pi}^{1/2-s},$$

où $N_{\pi} \geq 1$ est un entier appelé conducteur arithmétique de π , ε_{π} est une racine satisfaisant $|\varepsilon_{\pi}| = 1$, et $\tilde{\pi}$ est la représentation contragrédiente à π .

Si $\tilde{\pi}$ est la représentation contragrédiente à π , alors on a

$$\{\alpha_{\tilde{\pi}}(p, j)\}_{j=1}^m = \overline{\{\alpha_{\pi}(p, j)\}_{j=1}^m} \quad (4.9)$$

et

$$\{\mu_{\tilde{\pi}}(j)\}_{j=1}^m = \overline{\{\mu_{\pi}(j)\}_{j=1}^m}. \quad (4.10)$$

Il suit de ces formules et de (4.7) que

$$\lambda_{\tilde{\pi}}(n) = \overline{\lambda_{\pi}(n)}. \quad (4.11)$$

Donc, si π est auto-contragrédiente, i.e. $\pi = \tilde{\pi}$, alors d'après (4.11) on a

$$\lambda_{\pi}(n) = \overline{\lambda_{\pi}(n)}, \quad (4.12)$$

ce qui signifie que $\lambda_{\pi}(n)$ est réel.

Lemme 4.3. (Godement-Jacquet [17], et Jacquet-Shalika [20]). *La fonction $\Phi(s, \pi)$ est entière et bornée dans les bandes verticales de largeur finie.*

Lemme 4.4. (Gelbart-Shahidi [16]). *La fonction $\Phi(s, \pi)$ est d'ordre 1.*

Lemme 4.5. (Jacquet-Shalika [20], et Shahidi [49]). *Les fonctions $\Phi(s, \pi)$ et $L(s, \pi)$ ne s'annulent pas dans le demi-plan $\sigma \geq 1$.*

Iwaniec et Sarnak [15] ont défini le conducteur analytique de π . C'est une fonction définie sur \mathbb{R} donnée par

$$Q_{\pi}(t) = N_{\pi} \prod_{j=1}^m (3 + |t + \mu_{\pi}(j)|), \quad (4.13)$$

qui rassemble tous les paramètres importants de π . La quantité

$$Q_{\pi} = Q_{\pi}(0) = N_{\pi} \prod_{j=1}^m (3 + |\mu_{\pi}(j)|) \quad (4.14)$$

également importante, est appelée conducteur de π .

Le lemme suivant précise la distribution des zéros de la fonction $L(s, \pi)$.

Lemme 4.6. *Tous les zéros non triviaux de $\Phi(s, \pi)$ sont dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$. Soit $N(T, \pi)$ le nombre de zéros non triviaux dans le rectangle*

$$0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T.$$

Alors

$$N(T, \pi) \ll T \log(Q_\pi T),$$

et

$$N(T+1, \pi) - N(T, \pi) \ll \log(Q_\pi T).$$

On peut trouver une démonstration de ce résultat dans Liu et Ye [32], Lemme 4.3, ou dans Iwaniec et Kowalski [14], Théorème 5.8.

4.2 Trois conjectures dans la théorie de fonctions L automorphes

On a rappelé dans le paragraphe précédent que les zéros non triviaux de $\Phi(s, \pi)$ sont dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$, tandis que GRH pour $L(s, \pi)$ prévoit que ces zéros se trouvent en fait sur la droite $\sigma = 1/2$.

Hypothèse de Riemann Généralisée. *Les zéros de $\Phi(s, \pi)$ sont de partie réelle $1/2$.*

Les majorations de $L(s, \pi)$ sur la droite $\sigma = 1/2$ sont de grande importance. La conjecture la plus optimiste en fonction du conducteur analytique défini en (4.13) est la suivante.

Hypothèse de Lindelöf Généralisée. *La majoration*

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \pi\right) \ll Q_\pi(t)^\varepsilon$$

est vraie pour $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Le résultat suivant est inconditionnel. Sa preuve est basée sur l'existence d'une fonction L de Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \pi')$, où π' est une autre représentation irréductible unitaire parabolique. Il peut se produire que $\pi = \pi'$.

Lemme 4.7. (Harcos [8]). *Soient $\varepsilon > 0$ arbitraire, et $0 < \sigma < 1$. Alors on a la majoration*

$$L(\sigma + it, \pi) \ll_{\varepsilon} Q_{\pi}(t)^{\frac{1-\sigma}{2}+\varepsilon}. \quad (4.15)$$

En prenant $\sigma = 1/2$, le Lemme 4.7 donne

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \pi\right) \ll_{\varepsilon} Q_{\pi}(t)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

C'est ce que l'on appelle la borne sous-convexe de $L(s, \pi)$. Soulignons qu'elle est uniforme en tous les paramètres. La borne sous-convexe n'a été établie que pour certaines $L(s, \pi)$ de certains aspects et seulement pour $m = 1, 2, 3, 4, 8$; Par ailleurs, lorsque $m \geq 2$, les bornes sous-convexes existantes ne sont pas uniformes en tous les paramètres, excepté pour le résultat uniform récent de Michel et Venkatesh [38] pour GL_2 . Voir Michel [37] pour un aperçu complet de ce sujet.

Les bonnes bornes pour les paramètres locaux

$$\{\alpha_{\pi}(p, j)\}_{j=1}^m, \quad \{\mu_{\pi}(p, j)\}_{j=1}^m$$

sont fondamentales pour l'étude des fonctions L automorphes. Par la méthode de Rankin-Selberg, on montre que, pour tout p ,

$$|\alpha_{\pi}(p, j)| \leq p^{1/2}, \quad \Re \mu_{\pi}(j) \leq \frac{1}{2}; \quad (4.16)$$

Par ailleurs, en toute place ramifiée,

$$p^{-1/2} \leq |\alpha_{\pi}(p, j)| \leq p^{1/2}, \quad |\Re \mu_{\pi}(j)| \leq \frac{1}{2}. \quad (4.17)$$

Les bornes (4.16) et (4.17) sont des bornes triviales et sont donc peu utiles. GRC affirme que $1/2$ dans (4.17) peut être réduit à 0.

Conjecture de Ramanujan Généralisée. Soient $\alpha_\pi(p, j)$ et $\mu_\pi(j)$ définis comme ci-dessus,

$$\begin{cases} |\alpha_\pi(p, j)| = 1 & \text{si } \pi \text{ est non ramifié en } p, \\ |\Re\mu_\pi(j)| = 0 & \text{si } \pi \text{ est non ramifié en } \infty. \end{cases}$$

Le lemme suivant permet d'approcher GRC.

Lemme 4.8. (Luo-Rudnick-Sarnak [36]). *Il existe une constante $0 \leq \theta < 1/2$, telle que*

$$\begin{cases} |\alpha_\pi(p, j)| \leq p^\theta & \text{si } \pi \text{ est non ramifié en } p, \\ |\Re\mu_\pi(j)| \leq \theta & \text{si } \pi \text{ est non ramifié en } \infty. \end{cases}$$

De plus,

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{m^2 + 1} \tag{4.18}$$

est une valeur acceptable.

Ce θ sera employé dans les deux chapitres prochains.

4.3 Fonctions L de Hecke comme fonctions L automorphes

Précisons que les fonctions L de Hecke définies dans (2.7) et (3.15) sont des exemples spéciaux de fonctions L automorphes. Si π correspond à une forme primitive holomorphe f de poids k et de niveau N , alors le conducteur est

$$Q_\pi \asymp k^2 N.$$

Si π correspond à une forme primitive de Maass f associée à la valeur propre $1/4 + \nu^2$ du laplacien et de niveau N , alors

$$Q_\pi \asymp (3 + |\nu|)^2 N.$$

Ceci permet de reformuler le Théorème 3.10 par rapport aux conducteurs Q_π .

4.4 Fonctions L de Rankin-Selberg

Soient π et π' deux représentations irréductibles unitaires paraboliques de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et de $GL_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, respectivement. La théorie des fonctions L de type Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \pi')$ a été initiée par Rankin [45] et Selberg [48] dans le cadre des formes modulaires classiques. Pour les représentations automorphes générales, la théorie correspondante a été initiée et développée dans plusieurs articles de Jacquet, Pisteski-Shapiro, et Shalika [18] [20] [21], et achevée par les travaux de Shahidi [49] [50] [51] [52], Moeglin et Waldspurger [39], et Gelbart et Shahidi [16]. Soient π et π' comme ci-dessus. Quand $\sigma > 1$, on a

$$L(s, \pi \otimes \pi') = \prod_{p < \infty} L_p(s, \pi_p \otimes \pi'_p) \quad (4.19)$$

avec

$$L_p(s, \pi_p \otimes \pi'_p) = \prod_{j=1}^{mm'} \left(1 - \frac{\alpha_{\pi \otimes \pi'}(p, j)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Alors la fonction L de Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \pi')$ est une série de Dirichlet

$$L(s, \pi \otimes \pi') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\pi \otimes \pi'}(n)}{n^s} \quad (4.20)$$

qui est absolument convergente pour $\sigma > 1$. En la place infinie,

$$L_{\infty}(s, \pi_{\infty} \otimes \pi'_{\infty}) = \prod_{j=1}^{mm'} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \mu_{\pi \otimes \pi'}(j)).$$

Par ailleurs, en les places v où π_v est non ramifié, on a pour $L_v(s, \pi_v \otimes \pi'_v)$ l'expression explicite suivante

$$L_p(s, \pi_p \otimes \pi'_p) = \prod_{j=1}^m \prod_{j'=1}^{m'} \left(1 - \frac{\alpha_{\pi}(p, j) \alpha_{\pi'}(p, j')}{p^s} \right)^{-1} \quad (4.21)$$

en une place finie $v = p$, et en la place infinie $v = \infty$ on a

$$L_{\infty}(s, \pi_{\infty} \otimes \pi'_{\infty}) = \prod_{j=1}^m \prod_{j'=1}^{m'} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \mu_{\pi}(j) - \mu_{\pi'}(j')). \quad (4.22)$$

La fonction L complète

$$\Phi(s, \pi \otimes \pi') = L_\infty(s, \pi_\infty \otimes \pi'_\infty) L(s, \pi \otimes \pi')$$

satisfait une équation fonctionnelle, et a des propriétés semblables à celles indiquées dans les lemmes de §4.1. Par souci de simplicité, on ne détaille pas toutes ces propriétés de $L(s, \pi \otimes \pi')$, mais on précise juste quelques différences principales entre la fonction L de Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \pi')$ et la fonction L simple $L(s, \pi)$:

- $\Phi(s, \pi \otimes \pi')$ a un prolongement méromorphe à \mathbb{C} ;
- $\Phi(s, \pi \otimes \pi')$ est entière si π et π' ne sont pas équivalents à une torsion près, i.e. $\pi' \neq \tilde{\pi} \otimes |\det|^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- si $\pi' = \tilde{\pi} \otimes |\det|^{it}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, alors $L(s, \pi \otimes \pi')$ a un unique pôle, simple, en $s = 1 + it$; en particulier, la fonction $L(s, \pi \otimes \tilde{\pi})$ a un unique pôle, simple, en $s = 1$.

Pour $\sigma > 1$, $L(s, \pi \otimes \pi')$ admet un développement en produit eulérien de la forme

$$L(s, \pi \otimes \pi') = \prod_p \prod_{j=1}^m \prod_{j'=1}^{m'} \left(1 - \frac{\alpha_\pi(p, j) \alpha_{\pi'}(p, j')}{p^s} \right)^{-1}. \quad (4.23)$$

Le résultat suivant porte sur les coefficients de Dirichlet $\lambda_{\pi \otimes \tilde{\pi}}(n)$ de $L(s, \pi \otimes \tilde{\pi})$; pour une démonstration, voir le Lemme A.1 de Rudnick et Sarnak [46].

Lemme 4.9. (Rudnick-Sarnak [46]). *Soit π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Posant $\pi' = \tilde{\pi}$ dans (4.20), et pour $\sigma > 1$,*

$$L(s, \pi \otimes \tilde{\pi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\pi \otimes \tilde{\pi}}(n)}{n^s}. \quad (4.24)$$

Alors on a

$$\lambda_{\pi \otimes \tilde{\pi}}(n) \geq 0, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

D'autres relations sur les coefficients de Dirichlet des fonctions L de Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \tilde{\pi})$ seront également nécessaires. On y consacre le prochain paragraphe.

4.5 Coefficients des fonctions L et des fonctions L de Rankin-Selberg

On a besoin de quelques lemmes généraux, qui seront appliqués plus tard aux coefficients de Dirichlet de $L(s, \pi)$, ou à ceux de fonctions L de Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \tilde{\pi})$. Le premier résultat général, dû à Brumley [1], est établi par la théorie d'algèbre symétrique.

Lemme 4.10. (Brumley [1]). *Pour m nombres complexes $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$, définissons les coefficients b_n par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \prod_{j=1}^m \prod_{j'=1}^m (1 - \alpha_j \overline{\alpha_{j'}} X)^{-1}.$$

Si $\alpha_1 \cdots \alpha_m = 1$, alors on a $b_m \geq 1$. En particulier pour toute représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et tout nombre premier p tels que π_p est non ramifié, on a

$$\lambda_{\pi \otimes \tilde{\pi}}(p^m) \geq 1,$$

où $\lambda_{\pi \otimes \tilde{\pi}}(n)$ est défini par (4.24).

Le deuxième lemme général est un résultat de Lü [35]. L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance envers Lü qui lui a permis de reproduire la preuve suivante.

Lemme 4.11. (Lü [35]). *Pour m nombres complexes $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$, définissons les coefficients ℓ_n par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ell_n X^n = \prod_{j=1}^m (1 - \alpha_j X)^{-1}. \quad (4.25)$$

De plus, pour $n \geq 1$, définissons

$$a_n = \alpha_1^n + \cdots + \alpha_m^n. \quad (4.26)$$

Alors on a, pour tout $n \geq 1$,

$$n\ell_n = a_1\ell_{n-1} + a_2\ell_{n-2} + \cdots + a_{n-1}\ell_1 + a_n. \quad (4.27)$$

Démonstration. Dérivant (4.25), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n\ell_n X^{n-1} &= \sum_{i=1}^m \alpha_i (1 - \alpha_i X)^{-1} \prod_{j=1}^m (1 - \alpha_j X)^{-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i (1 - \alpha_i X)^{-1} \right) \prod_{j=1}^m (1 - \alpha_j X)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En développant $(1 - \alpha_i X)^{-1}$ et en utilisant la définition (4.26), la quantité dans les dernières parenthèses de (4.28) peut être écrite comme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i (1 - \alpha_i X)^{-1} &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\sum_{u=0}^{\infty} \alpha_i^u X^u \right) \\ &= \sum_{u=0}^{\infty} X^u \sum_{i=1}^m \alpha_i^{u+1} \\ &= \sum_{u=0}^{\infty} a_{u+1} X^u. \end{aligned}$$

D'après cela et (4.25), on voit que le côté droit de (4.28) devient

$$\begin{aligned} \left(\sum_{u=0}^{\infty} a_{u+1} X^u \right) \left(\sum_{v=0}^{\infty} \ell_v X^v \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{u+v=n \\ u \geq 0, v \geq 0}} a_{u+1} \ell_v \right) X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{u+v=n+1 \\ u \geq 1, v \geq 0}} a_u \ell_v \right) X^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{u+v=n \\ u \geq 1, v \geq 0}} a_u \ell_v \right) X^{n-1}. \end{aligned}$$

Comparant cela avec le côté gauche de (4.28), on obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$n\ell_n = \sum_{\substack{u+v=n \\ u \geq 1, v \geq 0}} a_u \ell_v,$$

qui est exactement l'affirmation (4.27) du lemme. \square

Appliquant les deux lemmes ci-dessus, on obtient la conséquence suivante, qui est très importante pour établir le Théorème 4.15, résultat principal de ce chapitre.

Lemme 4.12. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Pour tout nombre premier p tel que π_p est non ramifié, on a*

$$|\lambda_{\pi}(p^m)| + |\lambda_{\pi}(p^{m-1})| + \cdots + |\lambda_{\pi}(p)| \geq \frac{1}{m},$$

où $\lambda_{\pi}(n)$ est comme dans (4.6) et (4.7).

Démonstration. La preuve est divisée en trois étapes, pour une présentation claire. Les deux premières étapes traitent de la fonction L de Rankin-Selberg $L(s, \pi \otimes \tilde{\pi})$ et la fonction L automorphe $L(s, \pi)$, respectivement, et la troisième partie est réservée à l'argument final.

PREMIÈRE ÉTAPE. Soit $\{\alpha_{\pi}(p, j)\}_{j=1}^m$ l'ensemble des paramètres de Satake pour π_p ; on note $\alpha_{\pi}(p, j) = \alpha_j$. Alors (4.21) devient

$$\begin{aligned} L_p(s, \pi_p \otimes \tilde{\pi}_p) &= \prod_{j=1}^m \prod_{j'=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j \alpha_{j'}}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{\ell=1}^M \left(1 - \frac{\beta_{\ell}}{p^s}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

où on a écrit $M = m^2$ et

$$\{\beta_{\ell}\}_{\ell=1}^M = \{\alpha_j \overline{\alpha_{j'}}\}_{1 \leq j \leq m, 1 \leq j' \leq m}. \quad (4.30)$$

Par conséquent, (4.21) et (4.24) donnent, pour $\sigma > 1$,

$$L_p(s, \pi_p \otimes \tilde{\pi}_p) = \prod_{\ell=1}^M \left(1 - \frac{\beta_{\ell}}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\pi \otimes \tilde{\pi}}(p^n)}{p^{ns}}.$$

C'est de la forme (4.25), si on fait le changement de variables

$$p^{-s} = X, \quad \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) = \ell_n.$$

Donc, le Lemme 4.11 donne, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} n\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) &= a_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p)\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{n-1}) + a_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^2)\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{n-2}) + \dots \\ &\quad + a_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{n-1})\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p) + a_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n), \end{aligned} \quad (4.31)$$

où, à cause de (4.26), on a écrit

$$a_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) = \beta_1^n + \dots + \beta_M^n. \quad (4.32)$$

Maintenant on écrit

$$a_{\pi}(p^n) = \alpha_1^n + \dots + \alpha_m^n; \quad (4.33)$$

alors on déduit de (4.32) et de (4.30) que

$$a_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) = \sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m (\alpha_j \bar{\alpha}_{j'})^n = |a_{\pi}(p^n)|^2 \geq 0. \quad (4.34)$$

Insérant (4.34) dans (4.31), on obtient pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} n\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) &= |a_{\pi}(p)|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{n-1}) + |a_{\pi}(p^2)|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{n-2}) + \dots \\ &\quad + |a_{\pi}(p^{n-1})|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p) + |a_{\pi}(p^n)|^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

On peut en déduire, par une simple récurrence sur n , que $\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Cela fournit une autre preuve du Lemme 4.9 de Rudnick-Sarnak [46], pour les nombres premiers p tels que π_p sont non ramifiés.

DEUXIÈME ÉTAPE. Soit $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ comme avant. Alors (4.2) devient

$$L_p(s, \pi_p) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j}{p^s}\right)^{-1}.$$

Donc, (4.6) donne, pour $\sigma > 1$,

$$L_p(s, \pi_p) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_\pi(p^n)}{p^{ns}},$$

avec $\lambda_\pi(n)$ défini par (4.7). En changeant des variables

$$p^{-s} = X, \quad \lambda_\pi(p^n) = \ell_n,$$

ce qui précède est encore de la forme (4.25), et le Lemme 4.11 donne, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} n\lambda_\pi(p^n) &= a_\pi(p)\lambda_\pi(p^{n-1}) + a_\pi(p^2)\lambda_\pi(p^{n-2}) + \dots \\ &\quad + a_\pi(p^{n-1})\lambda_\pi(p) + a_\pi(p^n), \end{aligned} \tag{4.36}$$

où $a_\pi(p^n)$ est tel que dans (4.33), comme suggéré par (4.26).

TROISIÈME ÉTAPE. Prenant $n = m$ dans (4.35), on a

$$\begin{aligned} m\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^m) &= |a_\pi(p)|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{m-1}) + |a_\pi(p^2)|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^{m-2}) + \dots \\ &\quad + |a_\pi(p^{m-1})|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p) + |a_\pi(p^m)|^2. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Le lemme de Brumley (le Lemme 4.10) maintenant affirme que $\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^m) \geq 1$, et donc, le côté gauche de (4.37) est minoré par $m\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^m) \geq m$. Comme on a vu que $\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, chaque terme du côté droit de (4.37) est positif ou nul. Ces observations seront employées plus tard.

Avant d'aller plus loin, on fait une assertion :

ASSERTION C. *Il existe un entier positif j avec $1 \leq j \leq m$ tel que*

$$|a_\pi(p^j)|^2 \geq 1. \tag{4.38}$$

Montrons par l'absurde que l'assertion C est vraie. Si l'Assertion C n'est pas vraie, on doit avoir

$$|a_\pi(p^n)|^2 < 1 \tag{4.39}$$

pour tout $1 \leq n \leq m$. Il suit ainsi de (4.37) et de (4.39) avec $n = 1$ que

$$\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p) = |a_{\pi}(p)|^2 < 1. \quad (4.40)$$

On peut également appliquer (4.37) et (4.39) avec $n = 2$, et on obtient de (4.40) que

$$\begin{aligned} 2\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^2) &= |a_{\pi}(p)|^2 \lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p) + |a_{\pi}(p^2)|^2 \\ &< 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

i.e. $\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^2) < 1$. Par la récurrence sur n dans (4.35), on peut montrer que $\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^n) < 1$ pour tout $1 \leq n \leq m$. En particulier, $\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^m) < 1$. Cela contredit le lemme de Brumley (le Lemme 4.10), qui affirme que

$$\lambda_{\pi \otimes \bar{\pi}}(p^m) \geq 1$$

dans la situation actuelle. Par conséquent, l'Assertion C est prouvée.

Si n_0 est l'un des entiers dans l'Assertion C tel que (4.38) est vrai, alors, par (4.34), on a $|a_{\pi}(p^{n_0})|^2 \geq 1$, et donc,

$$|a_{\pi}(p^{n_0})| \geq 1. \quad (4.41)$$

Soit maintenant n_0 avec $1 \leq n_0 \leq m$ le plus petit entier vérifiant (4.41). Il suit que

$$|a_{\pi}(p^j)| < 1, \quad \text{pour tout } 1 \leq j < n_0.$$

Appliquant (4.36) avec $n = n_0$, on déduit que

$$\begin{aligned} n_0 |\lambda_{\pi}(p^{n_0})| &= |a_{\pi}(p) \lambda_{\pi}(p^{n_0-1}) + \cdots + a_{\pi}(p^{n_0-1}) \lambda_{\pi}(p) + a_{\pi}(p^{n_0})| \\ &> -|\lambda_{\pi}(p^{n_0-1})| - \cdots - |\lambda_{\pi}(p)| + 1. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} m\{|\lambda_{\pi}(p^m)| + \cdots + |\lambda_{\pi}(p)|\} &\geq m\{|\lambda_{\pi}(p^{n_0})| + \cdots + |\lambda_{\pi}(p)|\} \\ &\geq n_0 |\lambda_{\pi}(p^{n_0})| + \cdots + |\lambda_{\pi}(p)| \\ &> 1, \end{aligned}$$

et le lemme en découle. \square

4.6 Changements de signe de $\lambda_\pi(n)$

Suivant les arguments de Knopp, Kohnen et Pribitkin [23], on peut prouver le résultat suivant.

Théorème 4.13. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ telle que $\lambda_\pi(n)$ soit réel pour tout $n \geq 1$. Alors la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ a une infinité de changements de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) < 0$.*

Corollaire 4.14. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ qui est auto-contragrédiente. Alors $\lambda_\pi(n)$ est réel pour tout $n \geq 1$, et la suite $\{\lambda_f(n)\}_{n=1}^\infty$ a une infinité de changements de signe, i.e. il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) > 0$, et il y a une infinité de n tels que $\lambda_f(n) < 0$.*

4.7 Un problème de type Linnik pour les fonctions L automorphes

On expose maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.15. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Alors il existe un entier n satisfaisant*

$$n \ll Q_\pi^{m/2+\varepsilon} \tag{4.42}$$

tel que $\lambda_\pi(n) \notin [0, \infty)$. La constante implicite dans (4.42) ne dépend que de m et de ε . En particulier, si $\lambda_\pi(n)$ est réel pour tout $n \geq 1$, on doit avoir $\lambda_\pi(n) < 0$ pour un certain n vérifiant (4.42) et ce résultat est vrai pour toute représentation auto-contragrédiente π .

Démonstration. Comme toujours, on commence par la somme

$$S(x) := \sum_{n \leq x} \lambda_\pi(n) \left(\log \frac{x}{n} \right)^\ell,$$

en supposant que

$$\lambda_\pi(n) \geq 0, \quad \text{pour } n \leq x. \quad (4.43)$$

Ici ℓ est un entier positif qui sera choisi ultérieurement. Le résultat désiré suivra des estimations des bornes supérieures et inférieures de $S(x)$.

Pour obtenir une borne supérieure de $S(x)$, on applique la formule de Perron (3.30) à la série de Dirichlet (4.6), obtenant

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} L(s, \pi) \frac{x^s}{s^{\ell+1}} ds.$$

En déplaçant le contour à la droite $\sigma = \varepsilon$ avec ε étant une constante positive arbitrairement petite, et en appliquant la borne de convexité de Harcos (4.15) pour $L(s, \pi)$, on obtient

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} L(s, \pi) \frac{x^s}{s^{\ell+1}} ds \\ &\ll_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} Q_\pi(t)^{1/2+\varepsilon} \frac{x^\varepsilon}{(|t| + \varepsilon)^{\ell+1}} dt. \end{aligned}$$

Le conducteur analytique $Q_\pi(t)$ est borné par $|t|^m$ (par rapport au t -aspect). Donc, si on prend $\ell = m$, alors l'estimation ci-dessus devient

$$\begin{aligned} S(x) &\ll_{\ell, m, \varepsilon} Q_\pi^{1/2+\varepsilon} x^\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|t| + 1)^{m/2}}{(|t| + \varepsilon)^{\ell+1}} dt \\ &\ll_{m, \varepsilon} Q_\pi^{1/2+\varepsilon} x^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.44)$$

C'est la majoration désirée pour $S(x)$.

Pour obtenir une minoration de $S(x)$, on applique le Lemme 4.12, ce qui

donne

$$\begin{aligned}
S(x) &\geq (\log 2)^\ell \sum_{\substack{n \leq x/2 \\ (n, N_\pi) = 1}} \lambda_\pi(n) \\
&\geq (\log 2)^\ell \sum_{\substack{p \leq (x/2)^{1/m} \\ p \nmid N_\pi}} \{\lambda_\pi(p^m) + \lambda_\pi(p^{m-1}) + \cdots + \lambda_\pi(p)\} \\
&\gg_{\ell, m} \sum_{\substack{p \leq (x/2)^{1/m} \\ p \nmid N_\pi}} 1 \gg_{\ell, m} \frac{(x/2)^{1/m}}{\log(x/2)} - \log N_\pi.
\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer

$$x \geq C \log^{m+1} Q_\pi; \tag{4.45}$$

où C est une grande constante absolue. Cette condition est très faible devant le résultat du théorème. \square

Chapitre 5

Théorème des nombres premiers pour les fonctions L automorphes

5.1 Théorème automorphe des nombres premiers

À chaque représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, on peut associer une fonction L globale $L(s, \pi)$ comme dans §4.1. On peut ensuite relier $L(s, \pi)$ aux nombres premiers en prenant la dérivée logarithmique dans (4.2), de sorte que pour $\sigma > 1$,

$$\frac{d}{ds} \log L(s, \pi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) a_{\pi}(n)}{n^s}, \quad (5.1)$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt, et

$$a_{\pi}(p^k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{\pi}(p, j)^k. \quad (5.2)$$

Il est important de noter que cette définition est la même que (4.33). Le théorème des nombres premiers pour $L(s, \pi)$ concerne le comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$\psi(x, \pi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) a_{\pi}(n),$$

et un cas spécial affirme que, si π est une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ avec $m \geq 2$, alors

$$\psi(x, \pi) \ll \sqrt{Q_\pi} \cdot x \cdot \exp\left(-\frac{c}{2m^4} \sqrt{\log x}\right) \quad (5.3)$$

pour une certaine constante positive absolue c , où la constante implicite est absolue. Dans [14, le Théorème 5.13] d'Iwaniec et Kowalski, les auteurs démontrent un théorème des nombres premiers pour les fonctions L générales satisfaisant les axiomes nécessaires. La majoration (5.3) en est une conséquence.

Dans ce chapitre, on étudie d'abord l'influence de GRH sur $\psi(x, \pi)$. On sait que, sous GRH, (5.3) peut être améliorée à

$$\psi(x, \pi) \ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi x), \quad (5.4)$$

où la constante implicite dépend au plus de m . On peut cependant espérer de meilleurs résultats. Pour une preuve de (5.4), voir §5.3 par exemple. Dans cette optique, on établit les résultats suivants.

Théorème 5.1. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Supposons GRH pour $L(s, \pi)$. Alors on a*

$$\psi(x, \pi) \ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi \log x) \quad (5.5)$$

pour $x \geq 2$, sauf sur un ensemble E de mesure logarithmique finie, i.e. un ensemble vérifiant

$$\int_E \frac{dx}{x} < \infty.$$

La constante implicite dans le symbole \ll dépend au plus de m .

Le Théorème 5.1 indique que, sauf sur un ensemble de mesure logarithmique finie E , (5.4) peut être améliorée à (5.5). Les deux prochains théorèmes montrent que $\psi(x, \pi)$ se comporte comme $x^{1/2}$ d'une façon ou d'une autre.

Théorème 5.2. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Supposons GRH pour $L(s, \pi)$. Alors*

$$\int_2^X |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x} \ll X \log^2 Q_\pi.$$

La constante implicite dans le symbole \ll dépend au plus de m .

Gallagher [6] était le premier à établir un résultat semblable au Théorème 5.1, dans le cas classique $m = 1$ pour la fonction zêta de Riemann. Il a montré que, sous l'Hypothèse de Riemann pour la fonction zêta classique,

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x^{1/2}(\log \log x)^2)$$

pour $x \geq 2$, sauf sur un ensemble de mesure logarithmique finie, et a donc amélioré la majoration classique du terme d'erreur $O(x^{1/2} \log^2 x)$ de von Koch [27]. Dans le même article, Gallagher [6] a également fourni de courtes démonstrations de la majoration conditionnelle de Cramér (voir [2],[3])

$$\int_2^X (\psi(x) - x)^2 \frac{dx}{x} \ll X.$$

Pour démontrer les résultats ci-dessus, Gallagher [7] utilise un lemme (voir aussi le Lemme 5.11 ci-dessous) qui porte son nom.

Nos Théorèmes 5.1-5.2 généralisent les résultats classiques ci-dessus à $\psi(s, \pi)$ la fonction comptant les nombres premiers attachée aux représentations irréductibles unitaire parabolique π de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ avec $m \geq 2$. Nos preuves combinent l'approche de Gallagher avec des résultats récents de Liu et Ye ([32], [33]) sur la distribution des zéros des fonctions L automorphes de Rankin-Selberg.

Le Théorème 5.2 ci-dessus affirme que, sous GRH, $|\psi(x, \pi)|$ est de taille $x^{1/2} \log Q_{\pi}$ en moyenne. Ce résultat peut être mis en parallèle avec le théorème suivant, qui donne un résultat Oméga inconditionnel, i.e. $|\psi(x, \pi)|$ ne peut pas être d'ordre inférieur à $x^{1/2-\varepsilon}$.

Théorème 5.3. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\psi(x, \pi) = \Omega(x^{1/2-\varepsilon}),$$

où la constante implicite dépend au plus de m et de ε . Plus précisément, il existe une suite croissante $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendant vers l'infini telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\psi(x_n, \pi)|}{x_n^{1/2-\varepsilon}} > 0. \quad (5.6)$$

Notons que la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ et la limite dans (5.6) peuvent dépendre de π . Ce résultat généralise celui établi pour la fonction zêta de Riemann. Il est possible d'obtenir de meilleurs résultats Oméga comme ceux du Chapitre V de Ingham [10]. On remarque que, à la différence du cas classique, dans les Théorèmes 5.1-5.3 on n'a pas le terme principal x . Cela provient du fait que $L(s, \pi)$ est une fonction entière quand $m \geq 2$, alors que $\zeta(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

5.2 Lemmes auxiliaires

On a besoin de quelques lemmes auxiliaires pour établir les résultats principaux.

Lemme 5.4. *Soient $m \geq 2$ et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log L(s, \pi) &= C + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{s + \mu_{\pi}(j)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n + s + \mu_{\pi}(j)} - \frac{1}{2n} \right), \end{aligned}$$

où C est une constante dépendant de π . L'ensemble de tous les zéros triviaux de $L(s, \pi)$ est

$$\{\mu : \mu = -2n - \mu_{\pi}(j), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Démonstration. Comme $\Phi(s, \pi)$ est d'ordre 1 (le Lemme 4.4), on a (voir [4, le Chapitre 11])

$$\Phi(s, \pi) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) e^{s/\rho},$$

où A, B sont des constantes dépendant de π . P En prenant la dérivée logarith-

mique, on obtient

$$\frac{d}{ds} \log \Phi(s, \pi) = B + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right), \quad (5.7)$$

où on a posé $\log 1 = 0$. Par définition de $\Phi(s, \pi)$, on a

$$\frac{d}{ds} \log \Phi(s, \pi) = \frac{d}{ds} \log L_{\infty}(s, \pi_{\infty}) + \frac{d}{ds} \log L(s, \pi). \quad (5.8)$$

En tenant compte de la relation

$$\frac{d}{ds} \log \Gamma(s) = -\frac{1}{s} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n} \right),$$

où γ est la constante d'Euler, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log L_{\infty}(s, \pi_{\infty}) &= \sum_{j=1}^m \frac{d}{ds} \log \pi^{-(s+\mu_{\pi}(j))/2} + \sum_{j=1}^m \frac{d}{ds} \log \Gamma \left(\frac{s + \mu_{\pi}(j)}{2} \right) \\ &= -\frac{m}{2} (\log \pi + \gamma) - \sum_{j=1}^m \frac{1}{s + \mu_{\pi}(j)} \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n + s + \mu_{\pi}(j)} - \frac{1}{2n} \right). \end{aligned}$$

Insérant cette formule et (5.7) dans (5.8), on obtient le résultat souhaité. \square

Considérons les pôles de la fonction

$$L(1-s, \tilde{\pi}_{\infty}) = \pi^{-ms/2} \prod_{j=1}^m \Gamma \left(\frac{1-s + \mu_{\tilde{\pi}}(j)}{2} \right). \quad (5.9)$$

Il est facile de voir que ces pôles sont

$$\{P_{n,j} = 2n + 1 + \mu_{\tilde{\pi}}(j) : n = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Comme dans [32], désignons par $\mathbb{C}(m)$ le plan complexe privé des disques

$$|s - P_{n,j}| < \frac{1}{8m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, \dots, m).$$

Donc, pour tout $s \in \mathbb{C}(m)$, la distance entre la quantité

$$\frac{1 - s + \mu_{\bar{\pi}}(j)}{2}$$

et l'ensemble des pôles de $\Gamma(s)$ est au moins $1/(16m)$. Faisons à présent une remarque sur la structure de $\mathbb{C}(m)$. Pour $j = 1, \dots, m$, désignons par $\beta(j)$ la partie fractionnaire de $\Re \mu_{\bar{\pi}}(j)$ et posons $\beta(0) = 0$ et $\beta(m+1) = 1$. Alors tous les $\beta(j) \in [0, 1]$. Évidemment il existe $\beta(j_1)$ et $\beta(j_2)$ tels que $\beta(j_2) - \beta(j_1) \geq 1/(3m)$ et il n'y a aucun $\beta(j)$ entre $\beta(j_1)$ et $\beta(j_2)$. On en déduit que la bande

$$S_0 = \{s : \beta(j_1) + 1/(8m) \leq \Re s \leq \beta(j_2) - 1/(8m)\}$$

est contenue dans $\mathbb{C}(m)$. En conséquence, pour tous les $n = 0, 1, 2, \dots$, les bandes

$$S_n = \left\{ s : -n + \beta(j_1) + \frac{1}{8m} \leq \Re s \leq -n + \beta(j_2) - \frac{1}{8m} \right\} \quad (5.10)$$

sont des sous-ensembles de $\mathbb{C}(m)$. Dans [32, §4], Liu et Ye ont étudié la distribution des zéros de la fonction $L(s, \pi \otimes \pi')$ de Rankin-Selberg, où π et π' sont des représentations irréductibles unitaires paraboliques de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et de $GL_{m'}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, respectivement. $\mathbb{C}(m)$ est un cas particulier de $\mathbb{C}(m, m')$ dans [32, §4].

Les assertions (i) et (i) du Lemme 5.5 suivant sont le Lemme 4.3(d) et le Lemme 4.4 de [32], respectivement.

Lemme 5.5. *Soient $m \geq 2$ et π une représentation irréductibles unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors*

(i) *pour $|T| > 2$, il existe un τ avec $T \leq \tau \leq T + 1$ tel que*

$$\frac{d}{ds} \log L(\sigma \pm i\tau, \pi) \ll \log^2(Q_{\pi}|\tau|) \quad (-2 \leq \sigma \leq 2);$$

(ii) *si s est dans la bande S_n définie en (5.10) avec $n \leq -2$, alors*

$$\frac{d}{ds} \log L(s, \pi) \ll 1.$$

5.3 Une formule explicite

La formule explicite donnée dans le Théorème 5.6 ci-dessous est inconditionnelle ; on n'a besoin ni de GRH, ni de GRC.

Théorème 5.6. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors, pour $x \geq 2$ et $T \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned} \psi(x, \pi) = & - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O \left\{ \min \left(\frac{x}{T^{1/4}}, \frac{x^{1+\theta}}{T^{1/2}} \right) \log(Q_\pi x) \right\} \\ & + O(x^\theta \log x) + O \left(\frac{x \log^2(Q_\pi x)}{T^{1/2}} \right) + O \left(\frac{\log T}{x} \right), \end{aligned}$$

où θ est définie comme dans le Lemme 4.8.

On démontrera le Théorème 5.6 à la fin de ce paragraphe. Des formules explicites de différentes formes ont été établies par Moreno ([40], [41], sous GRC), et par Iwaniec et Kowalski [14, (5.53)].

En utilisant le Théorème 5.6, on pourra par ailleurs fournir une preuve du théorème des nombres premiers pour $\psi(x, \pi)$ sous GRH.

Corollaire 5.7. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Sous GRH pour $L(s, \pi)$, (5.4) est vraie.*

Démonstration. Le Théorème 5.6 avec $T = x^8$ donne

$$\psi(x, \pi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(x^\theta \log x) + O \left(\frac{\log^2(Q_\pi x)}{x} \right).$$

Par le Lemme 4.8, le terme d'erreur est acceptable. Sous GRH pour $L(s, \pi)$, on a $\rho = 1/2 + i\gamma$ dans la formule ci-dessus, et donc, par sommation par partie et par

le Lemme 4.6,

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} &\ll x^{1/2} \left(\sum_{|\gamma| \leq 1} 1 + \sum_{1 \leq |\gamma| \leq T} \frac{1}{|\gamma|} \right) \\ &\ll x^{1/2} \left\{ \log Q_\pi + \int_1^T \frac{1}{t} dN(t, \pi) \right\} \\ &\ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi T). \end{aligned}$$

Cela prouve (5.4). □

Pour démontrer le Théorème 5.6, on a besoin d'une formule de Perron de la forme suivante (cf. Liu et Ye [33]).

Lemme 5.8. (Formule de Perron). *Sous les conditions du Lemme 3.11, on a, pour $b > \sigma_a, x \geq 2, T \geq 2,$*

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\sum_{|n-x| \leq x/\sqrt{T}} |a_n| + \frac{x^b B(b)}{\sqrt{T}} \right). \quad (5.11)$$

L'atout principal du Lemme 5.8 est que la borne supérieure individuelle pour a_n n'apparaît pas dans le membre de droite de (5.11). Ceci permet de démontrer les Théorème 5.6 et 5.1-5.3 sans GRC. Une telle formule de Perron a été appliquée avec succès dans les cas classiques où a_n n'est pas majoré par 1. La formule de Perron donnée dans le Lemme 5.8 n'est cependant pas optimale, les experts connaissent un meilleur terme d'erreur (Voir, par exemple, Tenenbaum [54, le Théorème II.2.2]). On peut aussi voir Liu et Ye [33] pour quelques applications aux fonctions L automorphes.

Lemme 5.9. (Iwaniec-Kowalski [14]). *Soit π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ avec $m \geq 2.$ Alors*

$$\sum_{n \leq x} |\Lambda(n) a_\pi(n)|^2 \ll m^2 x \log^2(Q_\pi x),$$

où la constante implicite est absolue.

C'est l'estimation (5.48) de [14], prouvée au bas de la page 110 de [14].

Démonstration du Théorème 5.6. Compte de tenu de (4.6) et du Lemme 4.1, on peut appliquer le Lemme 5.8 avec $\sigma_a = 1, b = 1 + 1/\log x$, et

$$F(s) = \frac{d}{ds} \log L(s, \pi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) a_{\pi}(n)}{n^s},$$

i.e. $a_n = -\Lambda(n) a_{\pi}(n)$.

Pour estimer le premier O -terme dans (5.11), on écrit pour $0 < y \leq x$

$$\begin{aligned} \sum_{x < n \leq x+y} |\Lambda(n) a_{\pi}(n)| &\ll \left\{ \sum_{n \leq 2x} |\Lambda(n) a_{\pi}(n)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{x < n \leq x+y} 1 \right\}^{1/2} \\ &\ll \sqrt{x(y+1)} \log(Q_{\pi} x). \end{aligned}$$

D'autre part, par (5.2) et la borne vers GRC dans le Lemme 4.8, pour $n = p^k$, on a

$$|a_{\pi}(n)| = |a_{\pi}(p^k)| \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_{\pi}(p, j)|^k \leq m p^{k\theta} \leq m n^{\theta}.$$

D'où

$$\sum_{x < n \leq x+y} |\Lambda(n) a_{\pi}(n)| \ll x^{\theta} (y+1) \log x.$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\sum_{|n-x| \leq x/\sqrt{T}} |\Lambda(n) a_{\pi}(n)| \\ &\ll \min \left\{ \sqrt{x \left(\frac{x}{T^{1/2}} + 1 \right)} \log(Q_{\pi} x), x^{\theta} \left(\frac{x}{T^{1/2}} + 1 \right) \log x \right\} \\ &\ll \min \left(\frac{x}{T^{1/4}}, \frac{x^{1+\theta}}{T^{1/2}} \right) \log(Q_{\pi} x) + x^{\theta} \log x. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Dans la dernière étape, on a considéré les deux cas $T \leq x^2$ et $T > x^2$ respectivement.

L'autre O -terme de (5.11) dépend de $B(\sigma)$. Pour $\sigma > 1$, l'inégalité de Cauchy donne

$$B(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)a_{\pi}(n)|}{n^{\sigma}} \ll \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)a_{\pi}(n)|^2}{n^{\sigma}} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \right\}^{1/2}.$$

Par le Lemme 5.9,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)a_{\pi}(n)|^2}{n^{\sigma}} &= \int_1^{\infty} \frac{1}{u^{\sigma}} d \left\{ \sum_{n \leq u} |\Lambda(n)a_{\pi}(n)|^2 \right\} \\ &\ll \log^2 Q_{\pi} + \int_1^{\infty} \frac{\log^2(Q_{\pi}u)}{u^{\sigma}} du \\ &\ll \frac{\log^2 Q_{\pi}}{\sigma - 1} + \frac{1}{(\sigma - 1)^3}. \end{aligned}$$

De même mais plus facilement, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \ll \frac{1}{\sigma - 1},$$

et donc,

$$B(\sigma) \ll \frac{\log Q_{\pi}}{\sigma - 1} + \frac{1}{(\sigma - 1)^2}.$$

En conséquence, le deuxième O -terme de (5.11) est

$$\ll \frac{x(\log x)(\log Q_{\pi}x)}{\sqrt{T}}. \quad (5.13)$$

Insérant (5.13) et (5.12) dans (5.11), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n)a_{\pi}(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \pi) \right\} \frac{x^s}{s} ds \\ &+ O \left\{ \min \left(\frac{x}{T^{1/4}}, \frac{x^{1+\theta}}{T^{1/2}} \right) \log(Q_{\pi}x) \right\} \\ &+ O \left(\frac{x(\log x)(\log Q_{\pi}x)}{\sqrt{T}} \right) + O(x^{\theta} \log x). \quad (5.14) \end{aligned}$$

Ensuite, on déplace le contour d'intégration vers la gauche. Choisissons a avec $-2 < a < -1$ tel que la droite $\sigma = a$ est contenue dans la bande $S_2 \subset \mathbb{C}(m)$; c'est garanti par la structure de $\mathbb{C}(m)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $T > 0$ est un grand nombre tel que T et $-T$ peuvent être pris comme τ du Lemme 5.5(i). Maintenant on considère le contour $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ avec

$$\begin{aligned} C_1 : & \quad b \geq \sigma \geq a, \quad t = -T; \\ C_2 : & \quad \sigma = a, \quad -T \leq t \leq T; \\ C_3 : & \quad a \leq \sigma \leq b, \quad t = T. \end{aligned}$$

Par le Lemme 5.4 et le théorème des résidus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \pi) \right\} \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right) \\ &\quad - \sum_{|\nu| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq T}} \frac{x^{-\mu}}{-\mu} - \frac{L'}{L}(0, \pi). \end{aligned} \quad (5.15)$$

L'intégrale sur C_1 peut être estimée par le Lemme 5.5(i) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \pi) \right\} \frac{x^s}{s} ds &\ll \int_a^b \log^2(Q_\pi T) \frac{x^\sigma}{T} d\sigma \\ &\ll \frac{x \log^2(Q_\pi T)}{T}, \end{aligned}$$

et la même borne supérieure reste valable pour l'intégrale sur C_3 . Ensuite par le Lemme 5.5(ii), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \pi) \right\} \frac{x^s}{s} ds &\ll \int_{-T}^T \frac{x^a}{|t|+1} dt \\ &\ll x^a \log T. \end{aligned}$$

Pour estimer la contribution des zéros triviaux $\mu = \lambda + i\nu$, on applique le Lemme 4.8 qui permet d'écrire

$$\sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq T}} \frac{x^{-\mu}}{\mu} \ll x^\theta,$$

où on a employé le fait qu'il y a un nombre fini de zéros triviaux $\mu = \lambda + i\nu$ avec $a < -\lambda < b$, et $|\nu| \leq T$. Donc, (5.15) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \pi) \right\} \frac{x^s}{s} ds \\ &= - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(x^\theta) + O\left(\frac{x \log^2(Q_\pi T)}{T}\right) + \left(\frac{\log T}{x}\right). \end{aligned}$$

Le Théorème 5.6 découle alors de cela et de (5.14). \square

5.4 Preuve d'un résultat de type probabiliste

Le lemme suivant est nécessaire pour la démonstration du Théorème 5.1.

Lemme 5.10. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Sous GRH pour $L(s, \pi)$, on a*

$$\int_X^{eX} \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x^2} \ll \frac{\log^2(Q_\pi T)}{T}, \quad (5.16)$$

pour $4 \leq T \leq X^4$.

Pour prouver le Lemme 5.10, on a besoin du lemme suivant de Gallagher [7].

Lemme 5.11. (Gallagher [7]). *Soient $U > 0$ et*

$$S(u) = \sum_{\nu} c(\nu) e^{2\pi i \nu u}$$

une série absolument convergente sur $[-U, U]$, où les coefficients $c(\nu) \in \mathbb{C}$, et les fréquences de ν parcourent une suite arbitraire de nombres réels. Alors

$$\int_{-U}^U |S(u)|^2 du \ll \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{x < \nu \leq x+1/U} c(\nu) \right|^2 dx.$$

La constante implicite est absolue.

Démonstration du Lemme 5.10. Dans l'intégrale de (5.16), on fait le changement de variables $x = Xe^{2\pi u}$. Par GRH, on a $\rho = 1/2 + i\gamma$, et donc

$$\begin{aligned} \int_X^{eX} \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x^2} &= 2\pi \int_0^{1/(2\pi)} \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{X^{i\gamma}}{\rho} e^{2\pi i\gamma u} \right|^2 du \\ &\ll \int_0^1 \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{X^{i\gamma}}{\rho} e^{2\pi i\gamma u} \right|^2 du. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Par le lemme de Gallagher, la dernière intégrale peut être majorée par

$$\begin{aligned} &\ll \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\substack{T < |\gamma| \leq X^4 \\ t < \gamma \leq t+1}} \frac{X^{i\gamma}}{\rho} \right|^2 dt \\ &\ll \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{T < |\gamma| \leq X^4 \\ t < \gamma \leq t+1}} \frac{1}{|\rho|} \right\}^2 dt. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, t satisfait $T - 1 \leq t \leq X^4$ ou $-X^4 - 1 \leq t \leq -T$. En utilisant le Lemme 4.6, on déduit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{T < |\gamma| \leq X^4 \\ t < \gamma \leq t+1}} \frac{1}{|\rho|} \right\}^2 dt &\ll \int_{T-1}^{X^4+1} \left\{ \sum_{t < \gamma \leq t+1} \frac{1}{|\rho|} \right\}^2 dt \\ &\ll \int_{T-1}^{X^4+1} \frac{\log^2(Q_\pi t)}{t^2} dt \\ &\ll \frac{\log^2(Q_\pi T)}{T}. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le Théorème 5.1.

Démonstration du Théorème 5.1. Soit $2 \leq X \leq x \ll X$. En prenant $T = X^4$ dans le Théorème 5.6, on a

$$\psi(x, \pi) = - \sum_{|\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} + O(x^\theta \log x) + O\left(\frac{\log^2(Q_\pi x)}{x}\right). \quad (5.18)$$

Notons que (5.18) est vraie inconditionnellement. Sous GRH, la somme parcourt alors les zéros non triviaux $\rho = 1/2 + i\gamma$ de $L(s, \pi)$ avec $|\gamma|$ jusqu'à X^4 .

On divise la somme sur $|\gamma|$ en deux morceaux selon $|\gamma| \leq T$ ou $|\gamma| > T$, où $T \in [2, X^4]$ est un paramètre qui sera choisi ultérieurement.

D'abord, on a

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} &\ll x^{1/2} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\rho|} \\ &\ll x^{1/2} \left\{ \log Q_\pi + \int_1^T \frac{1}{t} dN(t, \pi) \right\} \\ &\ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi T). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Cette inégalité affirme que, si T n'est pas trop grand (par exemple $\log X$), la contribution de $|\gamma| \leq T$ à (5.18) est acceptable.

Cependant, on n'arrive pas à démontrer que la contribution de $T < |\gamma| \leq X^4$ à (5.18) est $\ll x^{1/2} \log(Q_\pi \log x)$ pour tous les x . On prouvera qu'elle est vraie "habituellement". À cet effet, définissons

$$E(X) = \left\{ x \in [X, eX] : \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \geq x^{1/2} \log^2(Q_\pi \log x) \right\}.$$

De cela et du Lemme 5.10, on déduit que

$$\begin{aligned} \log^4(Q_\pi \log X) \int_{E(X)} \frac{dx}{x} &\ll \int_{E(X)} \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x^2} \\ &\ll \frac{\log^2(Q_\pi T)}{T}, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{E(X)} \frac{dx}{x} \ll \frac{\log^2(Q_\pi T)}{T \log^4(Q_\pi \log X)}. \tag{5.20}$$

On pose maintenant

$$T = \log X,$$

et insère (5.19) dans (5.18). Alors de (5.20) on déduit que

$$\psi(x, \pi) \ll x^{1/2} \log^2(Q_\pi \log x)$$

appartient à l'intervalle $[X, eX]$ sauf pour un ensemble $E(X)$ de mesure logarithmique

$$\ll \frac{1}{T \log^2(Q_\pi T)} \ll \frac{1}{T \log^2 T}.$$

En choisissant $X = e^T$ avec $T = 2, 3, \dots$, la mesure logarithmique totale de l'ensemble exceptionnel E sera

$$\ll \sum_{T=2}^{\infty} \frac{1}{T \log^2 T} < \infty,$$

et le Théorème 5.1 s'en déduit. \square

5.5 Valeur moyenne et estimations Oméga pour $\psi(x, \pi)$

Dans cette section, on prouve les Théorèmes 5.2 et 5.3.

Démonstration du Théorème 5.2. Par la formule explicite (5.18), on a

$$\begin{aligned} \int_X^{eX} |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x^2} &\ll \int_X^{eX} \left| \sum_{|\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x^2} + \int_X^{eX} x^{2\theta} \log^2(Q_\pi x) \frac{dx}{x^2} \\ &\quad + \int_X^{eX} \frac{\log^2(Q_\pi x) dx}{x x^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Les deux dernières intégrales sont $\ll \log^2 Q_\pi$. Pour estimer la première intégrale du membre de droite, on applique le Lemme 5.10 avec $T = 4$, ce qui donne

$$\int_X^{eX} \left| \sum_{|\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x^2} \ll \log^2 Q_\pi + \int_X^{eX} \left| \sum_{4 < |\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x^2} \quad (5.22)$$

$$\ll \log^2 Q_\pi. \quad (5.23)$$

Donc, (5.21) devient

$$\int_X^{eX} |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x^2} \ll \log^2 Q_\pi, \quad (5.24)$$

d'où

$$\int_X^{eX} |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x} \ll X \log^2 Q_\pi.$$

Un argument de découpage classique nous permet de déduire

$$\begin{aligned} \int_2^X |\psi(x, \pi)| \frac{dx}{x} &= \int_{X/e}^X |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x} + \int_{X/e^2}^{X/e} |\psi(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x} + \dots \\ &\ll \frac{X \log^2 Q_\pi}{e} + \frac{X \log^2 Q_\pi}{e^2} + \dots \\ &\ll X \log^2 Q_\pi. \end{aligned}$$

Cela prouve le Théorème 5.2. □

Démonstration du Théorème 5.3.

Pour prouver le théorème, on suppose

$$\psi(x, \pi) \ll x^\alpha, \quad (5.25)$$

où α est une certaine constante absolue positive, et la \ll -constante dépend de m et de α au plus. On suppose par l'absurde que $\alpha < 1/2$.

Par une sommation d'Abel, on obtient, pour $\sigma > 1$,

$$-\frac{L'}{L}(s, \pi) = s \int_1^\infty \frac{\psi(x, \pi)}{x^{s+1}} dx. \quad (5.26)$$

En utilisant l'hypothèse (5.25), on a

$$\frac{\psi(x, \pi)}{x^{s+1}} \ll \frac{x^\alpha}{x^{s+1}} \ll \frac{1}{x^{\sigma+1-\alpha}}.$$

En conséquence, pour $\sigma > \alpha + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ arbitraire, l'intégrale de droite de (5.26) converge uniformément, et donc représente une fonction régulière dans le demi-plan $\sigma > \alpha$. Il suit de (5.26) que $L(s, \pi)$ ne peut pas avoir de zéro dans le demi-plan $\sigma > \alpha$. Cela mène à une contradiction si $\alpha < 1/2$. □

5.6 Un problème de type Linnik pour $\{a_\pi(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^\infty$

À chaque représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, on peut associer une fonction $L(s, \pi)$ comme dans §4.1. En prenant la dérivée logarithmique dans (4.2), on obtient (5.1) avec les coefficients de Dirichlet

$$\{a_\pi(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^\infty,$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt, et

$$a_\pi(p^k) = \sum_{j=1}^m \alpha_\pi(p, j)^k. \quad (5.27)$$

Si π est auto-contragrédiente, alors (4.9) affirme que

$$\{\alpha_\pi(p, j)\}_{j=1}^m = \{\overline{\alpha_\pi(p, j)}\}_{j=1}^m,$$

et donc, par (5.27),

$$a_\pi(p^k) = \overline{a_\pi(p^k)}. \quad (5.28)$$

Ceci signifie que $a_\pi(n)\Lambda(n)$ est réel pour tout $n \geq 1$.

Le but de cette section est d'établir le théorème suivant de type Linnik pour la suite $\{a_\pi(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^\infty$. En fait, c'est une conséquence immédiate du Théorème 4.15 et du lemme de Lü (le Lemme 4.11).

Théorème 5.12. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Si tous les $a_\pi(n)\Lambda(n)$ sont réels, alors $\{a_\pi(n)\Lambda(n)\}_{n=1}^\infty$ change de signe en un certain n satisfaisant*

$$n \ll Q_\pi^{m/2+\varepsilon}. \quad (5.29)$$

La constante implicite dans (5.29) ne dépend que de m et ε . En particulier, le résultat est vrai pour toute représentation auto-contragrédiente π .

Démonstration. Si on note α_j pour $\alpha_\pi(p, j)$, alors (5.27) prend la forme

$$a_\pi(p^k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^k. \quad (5.30)$$

L'observation principale est que (5.30) et (4.33) définissent exactement la même quantité, et le Lemme 4.11 s'applique. Ainsi, en utilisant (4.36), on a, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} k\lambda_\pi(p^k) &= a_\pi(p)\lambda_\pi(p^{k-1}) + a_\pi(p^2)\lambda_\pi(p^{k-2}) + \dots \\ &\quad + a_\pi(p^{k-1})\lambda_\pi(p) + a_\pi(p^k), \end{aligned} \tag{5.31}$$

où $\lambda_\pi(p^k)$ est comme dans (4.7). Par récurrence sur k , on montre que si $a_\pi(p^k) \geq 0$ pour tout $k \leq K$, alors $\lambda_\pi(p^k) \geq 0$ également pour tout $k \leq K$.

Maintenant on fait appel au Théorème 4.15, pour déduire qu'il existe un n avec

$$n \ll Q_\pi^{m/2+\varepsilon}$$

tel que $\lambda_\pi(n) < 0$. Par (4.7), on sait que $\lambda_\pi(n)$ est multiplicatif par rapport à n , et donc il doit avoir une puissance $p_0^{k_0}$ d'un nombre premier p_0 avec

$$p_0^{k_0} \ll Q_\pi^{m/2+\varepsilon}$$

telle que $\lambda_\pi(p_0^{k_0}) < 0$. Donc, il existe un certain $k_1 \leq k_0$ tel que $a_\pi(p_0^{k_1}) < 0$. Cela achève la démonstration. \square

Chapitre 6

Théorème de la densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes

6.1 Théorème de la densité normale de Selberg

Écrivons, comme d'habitude,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

On sait que, sous l'Hypothèse de Riemann pour la fonction zêta,

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x).$$

On peut en déduire un résultat pour les nombres premiers dans les petits intervalles $[x, x + y)$.

Selberg [47] a étudié la densité normale des nombres premiers dans les petits intervalles. Sous l'Hypothèse de Riemann pour la fonction zêta, i.e. dans le cas de $m = 1$, Selberg [47] a montré que

$$\int_1^X \{\psi(x + h(x)) - \psi(x) - h(x)\}^2 dx = o(h(X)^2 X) \quad (6.1)$$

pour toute fonction croissante $h(x) \leq x$ vérifiant

$$\frac{h(x)}{\log^2 x} \rightarrow \infty.$$

Dans ce chapitre, on démontre un analogue pour les fonctions L automorphes associées à une représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

6.2 Théorème de la densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes

À chaque représentation irréductible unitaire parabolique $\pi = \otimes \pi_p$ de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, on peut associer une fonction L globale $L(s, \pi)$ comme dans §4.1. Conservons les notations introduites dans le chapitre précédent. Le théorème des nombres premiers pour $L(s, \pi)$ concerne le comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$\psi(x, \pi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) a_{\pi}(n),$$

et un cas spécial affirme que, si π est une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ avec $m \geq 2$, alors

$$\psi(x, \pi) \ll \sqrt{Q_{\pi}} \cdot x \cdot \exp\left(-\frac{c}{2m^4} \sqrt{\log x}\right) \quad (6.2)$$

pour une certaine constante positive absolue c , où la constante implicite est absolue. Dans [14, le Théorème 5.13], Iwaniec et Kowalski ont démontré un théorème des nombres premiers pour les fonctions L générales satisfaisant les axiomes nécessaires. La majoration (6.2) en est une conséquence. Sous GRH, (6.2) peut être améliorée à

$$\psi(x, \pi) \ll x^{1/2} \log^2(Q_{\pi} x). \quad (6.3)$$

Il suit de (6.3) que, sous GRH,

$$\psi(x + h(x), \pi) - \psi(x, \pi) = o(h(x)) \quad (6.4)$$

6.2 Théorème de la densité normale de Selberg pour les fonctions L automorphes 85

pour les fonctions croissantes $h(x) \leq x$ satisfaisant

$$\frac{h(x)}{x^{1/2} \log^2(Q_\pi x)} \rightarrow \infty.$$

Comme

$$\psi(x + h(x), \pi) - \psi(x, \pi) = \sum_{x < n \leq x + h(x)} \Lambda(n) a_\pi(n),$$

l'estimation (6.4) décrit l'oscillation des coefficients $a_\pi(p)$ dans les petits intervalles $[x, x + h(x)]$.

Dans ce chapitre, on démontre le résultat suivant, qui montre que (6.4) est vraie en moyenne pour $h(x)$ beaucoup plus petit.

Théorème 6.1. *Soient $m \geq 2$ un entier et π une représentation irréductible unitaire parabolique de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Supposons GRH pour $L(s, \pi)$. On a*

$$\int_1^X |\psi(x + h(x), \pi) - \psi(x, \pi)|^2 dx = o(h(X)^2 X), \quad (6.5)$$

pour toute fonction croissante $h(x) \leq x$ satisfaisant

$$\frac{h(x)}{\log^2(Q_\pi x)} \rightarrow \infty.$$

Notre Théorème 6.1 généralise le résultat de Selberg aux cas $m \geq 2$. Il améliore aussi un résultat de l'auteur [44] selon lequel (6.5) est vrai pour $h(x) \leq x$ satisfaisant

$$\frac{h(x)}{x^\theta \log^2(Q_\pi x)} \rightarrow \infty,$$

où θ est la borne vers GRC donnée dans le Lemme 4.8. La nouvelle idée principale est une application fine de la majoration de valeur moyenne de Kowalski-Iwaniec (voir le Lemme 5.9). On a besoin également d'une formule explicite établie dans le Chapitre 5 sous une forme plus précise.

Inconditionnellement, le Théorème 6.1 est vrai pour $h(x) = x^\beta$ avec une certaine constante $0 < \beta < 1$. La valeur exacte de β dépend de deux ingrédients principaux : une majoration satisfaisant de zéro-densité pour $L(s, \pi)$, et une région sans zéro pour $L(s, \pi)$ de type Littlewood ou Vinogradov.

6.3 Preuve du théorème

On prouve le Théorème 6.1 dans cette section. Les outils principaux sont la formule explicite du Théorème 5.6 et le Lemme 5.10 qui est établi sous GRH.

Démonstration du Théorème 6.1. La preuve du Théorème 5.6 donne en fait une forme alternative de la formule explicite. Soient, comme dans la preuve du Théorème 5.6,

$$-2 < a < -1, \quad b = 1 + \frac{1}{\log x}.$$

Alors la preuve du Théorème 5.6 donne en fait

$$\begin{aligned} \psi(x, \pi) &= - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq T}} \frac{x^{-\mu}}{-\mu} + O \left\{ \sum_{|n-x| \leq x/\sqrt{T}} |\Lambda(n) a_\pi(n)| \right\} \\ &+ O \left(\frac{x \log^2(Q_\pi x)}{T^{1/2}} \right) + O \left(\frac{\log T}{x} \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

où θ est comme dans le Lemme 4.8, et μ parcourt les zéros triviaux $\mu = \lambda + i\nu$ de $L(s, \pi)$.

Soit $100 \leq X \leq x \leq eX$. On prend $T = X^4$ dans la formule explicite (6.6). Comme la longueur de l'intervalle $(x - x/X^2, x + x/X^2]$ est

$$\frac{2x}{X^2} \leq \frac{1}{10},$$

cet intervalle contient au plus un entier. Désignons par n_x cet entier (s'il existe).

Il suit que

$$\sum_{|n-x| \leq x/X^2} |\Lambda(n) a_\pi(n)| = |\Lambda(n_x) a_\pi(n_x)|,$$

et donc (6.6) devient

$$\begin{aligned} \psi(x, \pi) &= - \sum_{|\gamma| \leq X^4} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq X^4}} \frac{x^{-\mu}}{-\mu} + O\{|\Lambda(n_x)a_\pi(n_x)| + 1\} \\ &\quad + O\left(\frac{\log^2(Q_\pi x)}{x}\right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Notons que (6.7) est vrai inconditionnellement. Sous GRH, dans la première somme du membre de droite de (6.7), γ parcourt les ordonnées des zéros non triviaux $\rho = 1/2 + i\gamma$ de $L(s, \pi)$ avec $|\gamma|$ jusqu'à X^4 . Il suit que

$$\begin{aligned} &\psi(x+h, \pi) - \psi(x, \pi) \\ &= - \sum_{|\gamma| \leq X^4} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq X^4}} \frac{(x+h)^{-\mu} - x^{-\mu}}{-\mu} \\ &\quad + O\{|\Lambda(n_{x+h})a_\pi(n_{x+h})| + |\Lambda(n_x)a_\pi(n_x)| + 1\} + O\left(\frac{\log^2(Q_\pi x)}{x}\right) \\ &=: A + B + C + O\left(\frac{\log^2(Q_\pi x)}{x}\right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

disons. On initie la preuve du Théorème 6.1 en estimant la valeur moyenne de (6.8) dans $X \leq x \leq eX$, tandis que h ($\leq eX$) est la longueur de l'intervalle considéré. On s'intéresse à la taille de h .

D'abord on estime la contribution de A . Soit $4 \leq T \leq X^4$ un paramètre choisi plus tard. On divise la somme en deux morceaux selon $|\gamma| \leq T$ ou $|\gamma| > T$. On pose

$$S_1(y, \pi) = \sum_{|\gamma| \leq T} y^{i\gamma},$$

et

$$S_2(y, \pi) = \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{y^{i\gamma}}{\rho}.$$

Alors sous GRH, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ - \sum_{|\gamma| \leq T} - \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \right\} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} \\
 &= - \int_x^{x+h} S_1(y, \pi) \frac{dy}{y^{1/2}} + x^{1/2} S_2(x, \pi) - (x+h)^{1/2} S_2(x+h, \pi) \\
 &=: A_1 + A_2 + A_3,
 \end{aligned}$$

disons. Donc,

$$\int_X^{eX} |A|^2 dx \ll \int_X^{eX} |A_1|^2 dx + \int_X^{eX} |A_2|^2 dx + \int_X^{eX} |A_3|^2 dx. \quad (6.9)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suit

$$\begin{aligned}
 |A_1|^2 &\ll \int_x^{x+h} |S_1(y, \pi)|^2 \frac{dy}{y} \int_x^{x+h} 1^2 dy \\
 &= h \int_x^{x+h} |S_1(y, \pi)|^2 \frac{dy}{y}.
 \end{aligned}$$

Puisque $h \leq eX$, la contribution de $|A_1|^2$ est estimée par

$$\begin{aligned}
 \int_X^{eX} |A_1|^2 dx &\ll \int_X^{eX} h \int_x^{x+h} |S_1(y, \pi)|^2 \frac{dy}{y} dx \\
 &\ll \int_X^{2eX} h^2 |S_1(y, \pi)|^2 \frac{dy}{y} \\
 &= h^2 \int_X^{2eX} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} y^{i\gamma} \right|^2 \frac{dy}{y} \\
 &= h^2 \int_0^{\log(2e)} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} e^{i\gamma(u + \log X)} \right|^2 du,
 \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a fait le changement de variable $y = e^{u + \log X}$. Une application du lemme de Gallagher et du Lemme 4.6 à la dernière intégrale mène

maintenant à

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log(2e)} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} e^{i\gamma(u+\log X)} \right|^2 du &\ll \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ t < \gamma \leq t+1}} 1 \right|^2 dt \\
&\ll \int_0^T \left\{ \sum_{t < \gamma \leq t+1} 1 \right\}^2 dt \\
&\ll T \log^2(Q_\pi T).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\int_X^{eX} |A_1|^2 dx \ll h^2 T \log^2(Q_\pi T). \quad (6.10)$$

La contribution de $|A_2|^2$ peut être estimée par

$$\begin{aligned}
\int_X^{eX} |A_2|^2 dx &\ll X^2 \int_X^{eX} |S_2(x, \pi)|^2 \frac{dx}{x} \\
&= X^2 \int_X^{eX} \left| \sum_{T < |\gamma| \leq X^4} \frac{x^{i\gamma}}{\rho} \right|^2 \frac{dx}{x} \\
&\ll \frac{X^2 \log^2(Q_\pi T)}{T}, \quad (6.11)
\end{aligned}$$

à l'aide du Lemme 5.10 (sous GRH). De même, en prenant $x + h = y$, on a

$$\int_X^{eX} |A_3|^2 dx \ll \frac{X^2 \log^2(Q_\pi T)}{T}. \quad (6.12)$$

On déduit de (6.9) - (6.12) que

$$\int_X^{eX} |A|^2 dx \ll h^2 T \log^2(Q_\pi T) + \frac{X^2 \log^2(Q_\pi T)}{T}. \quad (6.13)$$

Pour estimer la contribution de $|B|^2$, on applique le Lemme 4.8 en écrivant

$$\begin{aligned}
 \int_X^{eX} |B|^2 dx &= \int_X^{eX} \left| \sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq X^4}} \frac{(x+h)^{-\mu} - x^{-\mu}}{-\mu} \right|^2 dx \\
 &\ll \int_X^{eX} \left\{ \sum_{\substack{a < -\lambda < b \\ |\nu| \leq X^4}} x^{-\lambda-1} h \right\}^2 dx \int_X^{eX} (x^{\theta-1} h)^2 dx \\
 &\ll X^{2\theta-1} h^2 \ll h^2.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Il reste à estimer la contribution de $|C|^2$. On a

$$\begin{aligned}
 \int_X^{eX} |C|^2 dx &= \int_X^{eX} \{ |\Lambda(n_{x+h}) a_\pi(n_{x+h})| + |\Lambda(n_x) a_\pi(n_x)| + 1 \}^2 dx \\
 &\ll \int_X^{eX} \{ |\Lambda(n_{x+h}) a_\pi(n_{x+h})|^2 + |\Lambda(n_x) a_\pi(n_x)|^2 \} dx + X \\
 &\ll \sum_{j=[X]}^{[eX]} \int_j^{j+1} \{ |\Lambda(n_{x+h}) a_\pi(n_{x+h})|^2 + |\Lambda(n_x) a_\pi(n_x)|^2 \} dx + X.
 \end{aligned}$$

Comme $h(x)$ est croissant et $h(x) \leq x$, on a trivialement, pour $j \leq x \leq j+1$, que

$$j-1 \leq n_{x+h(x)} \leq 2(j+2), \quad j-1 \leq n_x \leq j+2.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_X^{eX} |C|^2 dx &\ll \sum_{j=[X]-1}^{3[eX]} |\Lambda(j) a_\pi(j)|^2 + X \\
 &\ll X \log^2(Q_\pi X),
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

grâce au Lemme 5.9.

Enfin en combinant (6.13), (6.14), (6.15) et (6.8), on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_X^{eX} |\psi(x+h, \pi) - \psi(x, \pi)|^2 dx &\ll h^2 T \log^2(Q_\pi T) + \frac{X^2 \log^2(Q_\pi T)}{T} \\
 &\quad + X \log^2(Q_\pi X) + \frac{\log^4(Q_\pi X)}{X}.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Maintenant on choisit $T = X/h$ tel que

$$h^2 T \log^2(Q_\pi T) = \frac{X^2 \log^2(Q_\pi T)}{T}.$$

Alors le membre de droite de (6.16) devient

$$hX \log^2(Q_\pi X) + X \log^2(Q_\pi X) + \frac{\log^4(Q_\pi X)}{X},$$

qui est de l'ordre $o(h^2 X)$ quand $h \leq eX$ et

$$\frac{h}{\log^2(Q_\pi X)} \rightarrow \infty.$$

Donc pour un tel h , on a

$$\int_X^{eX} |\psi(x+h, \pi) - \psi(x, \pi)|^2 dx = o(h^2 X). \quad (6.17)$$

Plus précisément, soit $h = h(x)$ une fonction croissante satisfaisant $h(x) \leq x$ et

$$\frac{h(x)}{\log^2(Q_\pi x)} \rightarrow \infty.$$

Alors (6.17) donne

$$\begin{aligned} \int_{X/e}^X |\psi(x+h(x), \pi) - \psi(x, \pi)|^2 dx &\ll \int_{X/e}^X |\psi(x+h(X), \pi) - \psi(x, \pi)|^2 dx \\ &= o\left(h(X)^2 \frac{X}{e}\right). \end{aligned}$$

Après un découpage classique, on peut obtenir

$$\int_1^X |\psi(x+h(x), \pi) - \psi(x, \pi)|^2 x = o(h(X)^2 X).$$

Cela achève la démonstration du Théorème 6.1. □

Bibliographie

- [1] F. Brumley, Effective multiplicity one for $GL(n)$ and narrow zero-free regions for Rankin-Selberg L -functions, Amer. J. Math., **128** (2006), 1455-1474.
- [2] H. Cramér, Some theorems concerning prime numbers, Archiv Math. Astron. Fysik, **15** (1921), no.5.
- [3] H. Cramér, Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie, Math. Z., **12** (1922), 147-153.
- [4] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, Berlin 1980.
- [5] P. Deligne, La conjecture de Weil, I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **43** (1974), 273-307.
- [6] P. X. Gallagher, Some consequences of the Riemann hypothesis, Acta. Arith., **37** (1980), 339-343.
- [7] P. X. Gallagher, A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, Invent. Math., **11** (1970), 329-339.
- [8] G. Harcos, Uniform approximate functional equation for principal L -functions, Intern. Math. Research Notes, no. **18** (2002), 923-932; ibid. no. **13** (2004), 659-660.
- [9] D. R. Heath-Brown, Zero-free regions for Dirichlet L -functions, and the least prime in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc. (3), **64** (1992), 265-338.
- [10] A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers*, Cambridge University Press, 1932.

- [11] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Amer. Math. Soc., 1997.
- [12] H. Iwaniec, *Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms*, Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1995.
- [13] H. Iwaniec, W. Kohnen, and J. Sengupta, The first negative Hecke eigenvalue, Intern. J. Number Theory, **3** (2007), 355-363.
- [14] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **53**, Amer. Math. Soc., Providence, 2004.
- [15] H. Iwaniec and P. Sarnak, Perspectives in the analytic theory of L -functions, Geom. Funct. Anal. special issue (2000), 705-741.
- [16] S.S. Gelbart and F. Shahidi, Boundedness of automorphic L -functions in vertical strips, J. Amer. Math. Soc., **14** (2001), 79-107.
- [17] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Math., **260**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [18] H. Jacquet, Automorphic forms of $GL(2)$, Lect. Notes Math. **278**, Springer, 1972.
- [19] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, and J. A. Shalika, Rankin-Selberg convolutions, Amer. J. Math., **105** (1983), 367-464.
- [20] H. Jacquet and J.A. Shalika, On Euler products and the classification of automorphic representations I, Amer. J. Math., **103** (1981), 499-558.
- [21] H. Jacquet and J.A. Shalika, On Euler products and the classification of automorphic representations II, Amer. J. Math., **103** (1981), 777-815.
- [22] H. Kim and P. Sarnak, Appendix 2 : Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 175-181.
- [23] M. Knopp, W. Kohnen, and W. Pribitkin, On the signs of Fourier coefficients of cusp forms, Ramanujan J., **7** (2003), 269-277.
- [24] W. Kohnen, Sign changes of Fourier coefficients and eigenvalues of cusp forms, in : *Number Theory : Sailing on the sea of number theory, Proceedings of the 4th China-Japan Seminar*, eds. S. Kanemitsu and J. Y. Liu, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, 97-107.

- [25] W. Kohnen, Yuk-Kam Lau, and I. E. Shparlinski, On the number of sign changes of Hecke eigenvalues of newforms, *J. Austral. Math. Soc.*, to appear.
- [26] W. Kohnen and J. Sengupta, On the first sign change of Hecke eigenvalues of new forms, *Math. Z.*, **254** (2006), 173-184.
- [27] H. von Koch, Sur la distribution des nombres premiers, *Acta Math.*, **24** (1901), 159-182.
- [28] E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (Part II), *Gött. Nachr.*, (1915), 209-243.
- [29] Yuk-Kam Lau and Jie Wu, The number of Hecke eigenvalues of same signs, to appear in *Math. Z.*
- [30] Yu. V. Linnik, On the least prime in an arithmetic progression, I : the basic theorem, *Math. Sbornik (N.S.)*, **15** (1944), 139-178.
- [31] Yu. V. Linnik, On the least prime in an arithmetic progression, II : the Deuring-Heilbronn phenomenon, *Math. Sbornik (N.S.)*, **15** (1944), 347-368.
- [32] Jianya Liu and Yangbo Ye, Superpositions of distinct L -functions, *Forum Math.*, **14** (2002), 419-455.
- [33] Jianya Liu and Yangbo Ye, Perron's formula and the prime number theorem for automorphic L -functions, *Pure Appl. Math. Quart.*, **3** (2007), 481-497.
- [34] Jianya Liu and Yangbo Ye, Distribution of zeros of Dirichlet L -functions and the least prime in an arithmetic progression, *Acta Arith.*, **119** (2005), 13-38.
- [35] Guangshi Lü, Letters to Jianya Liu and Yan Qu, 2008.
- [36] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, On Selberg's eigenvalue conjecture, *Geom. Funct. Anal.*, **5** (1995), 387-401.
- [37] P. Michel, Analytic number theory and families of automorphic L -functions, in : *Automorphic Forms and Applications*, P. Sarnak and F. Shahidi eds., IAS/Park City Math. Series, vol. 12, Amer. Math. Soc. and Institute for Advanced Study, 2007, 181-295.
- [38] P. Michel and A. Venkatesh, The subconvexity problem of GL_2 , preprint.
- [39] C. Moeglin and J.-L. Waldspueger, Le spectre résiduel de $GL(n)$, *Ann. Sic. Ecole Norm. Sup. (4)*, **22** (1989), 605-674.

- [40] C. J. Moreno, Explicit formulas in the theory of automorphic forms, Lecture Notes Math. vol. **626**, Springer, Berlin, 1977, 73-216.
- [41] C. J. Moreno, Analytic proof of the strong multiplicity one theorem, Amer. J. Math., **107** (1985), 163-206.
- [42] Ram Murty, Oscillations of Fourier coefficients of modular forms, Math. Ann., **262** (1983), 431-446.
- [43] Yan Qu, The prime number theorem for automorphic L-functions for GL_m , J. Number Theory, **122** (2007), 84-99.
- [44] Yan Qu, Selberg's normal density theorem for automorphic L-functions for GL_m , Acta Math. Sin. (English Series), **23** (2007), 1903-1908.
- [45] R. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, I, II, and III, Proc. Phil. Soc. **35** (1939), 351-356; **35** (1939), 357-372; **36** (1940), 150-151.
- [46] Z. Rudnick and P. Sarnak, Zeros of principal L -functions and random matrix theory, Duke Math. J., **81** (1996), 269-322.
- [47] A. Selberg, On the normal density of primes in short intervals and the difference between consecutive primes, Archiv f. Math. og Naturvid. B, **47**, No. 6(1943), 87-105.
- [48] A. Selberg, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. Symp. Pure Math., Vol. VIII, 1-15; Amer. Math. Soc., 1965.
- [49] F. Shahidi, On certain L -functions, Amer. J. Math., **103** (1981), 297-355.
- [50] F. Shahidi, Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $GL(n)$, Amer. J. Math., **106** (1984), 67-111.
- [51] F. Shahidi, Local coefficients as Artin factors for real groups, Duke Math. J., **52** (1985), 973-1007.
- [52] F. Shahidi, A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; Complementary series for p -adic groups, Ann. Math., **132** (1990), 273-330.
- [53] C. L. Siegel, Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl. II, **2** (1969), 87-102.
- [54] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge University Press, 1995.

- [55] Jie Wu, Power sums of Hecke eigenvalues and applications, to appear.



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D.Mathématiques

Cette thèse est consacrée à l'étude de la répartition des coefficients de fonctions L automorphes de $GL(m)$ avec $m \geq 2$. D'une part, nous avons traité le premier changement de signes de ces coefficients, i.e. des problèmes de type Linnik, et obtenu des majorations du type polynômial. D'autre part, nous avons étudié les sommes longues et courtes des coefficients de fonctions L de $GL(m)$ sur les nombres premiers pour tester leur décompensation, respectivement.

In the thesis we have studied the distribution of the coefficients of automorphic L-functions for $GL(m)$ with $m \geq 2$. On the one hand, we have treated the first sign change of these coefficients, i.e. the Linnik-type problems, and obtained the polynomial-type estimates. On the other hand, we studied the long and short summations of coefficients of L-functions for $GL(m)$ on the prime numbers to test their decompensation, respectively.

Mots-clefs : fonctions L, Hypothèse de Riemann, formes automorphes.

Institut Élie Cartan Nancy CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences – B. P. 239 – 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX