



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Estimation de l'état des systèmes non linéaires à temps discret. Application à une station d'épuration

## THESE

présentée et soutenue publiquement le 14 novembre 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Henri Poincaré – Nancy 1  
(spécialité automatique)

par

Boulaid BOULKROUNE

Ingénieur de l'université de Jijel - Algérie

### Composition du jury

*Président* : Didier MAQUIN      Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy

*Rapporteurs* : Mohammed M'SAAD      Professeur à l'ENSICAEN  
Denis DOCHAIN      Professeur à l'Université Catholique de Louvain

*Examineurs* : Serge GILLÉ      Chargé de recherche au CRP Henri Tudor, Luxembourg  
Michel ZASADZINSKI      Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy  
Mohamed DAROUACH      Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été conjointement effectués au centre de recherche en Automatique de Nancy (CRAN, UMR 7039, CNRS) au sein du thème Automatique, Commande et Observation des systèmes (ACOS) dans l'équipe située à l'IUT Henri Poincaré de Longwy dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH, et au Centre de Recherche Public Henri Tudor (CRP-HT, Luxembourg) dans l'unité Modélisation et Simulation du Laboratoire des Technologies Industrielles (LTI) de Esch/Alzette, Luxembourg, dirigée par Monsieur Serge GILLÉ.

Je tiens d'abord à exprimer toute ma gratitude envers les membres du jury pour leur disponibilité et la qualité de leurs remarques dont ils m'ont fait part : Messieurs les Professeurs Mohammed M'SAAD et Denis DOCHAIN pour le travail de rapporteurs ; leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier. Mes remerciements vont aussi à l'égard de Monsieur le Professeur Didier MAQUIN pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse, Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'université de Henri Poincaré-Nancy I, responsable du CRAN-Longwy, pour m'avoir accueilli dans son équipe lors de mon DEA et de ma thèse, m'avoir continuellement encouragé tout au long de ces années et m'avoir permis de réaliser mon travail dans les meilleurs conditions possibles : qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes grands remerciements vont également à Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'université de Henri Poincaré- Nancy I, et membre de l'équipe du CRAN-Longwy, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et pour ses conseils judicieux et nos discussions fructueuses, ainsi que pour sa disponibilité et son soutien permanent.

Je remercie tout particulièrement le Ministère de la Culture, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche du Luxembourg pour son soutien financier, Madame Josiane ENTRINGER, chargée de Mission dans ce même ministère, pour sa disponibilité et sa patience avant l'envoi de chacun de mes rapports d'activités, Monsieur Jos SCHAEFERS, responsable du Laboratoire des Technologies Industrielles de Esch/Alzette, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je ne saurais oublier Monsieur Serge GILLÉ, responsable de l'équipe Modélisation et Simulation du LTI, pour la confiance qu'il m'a toujours accordée, pour son éternelle bonne humeur, son enthousiasme, sa gentillesse, l'aide précieuse qu'il m'a apportée et tout le temps qu'il m'a accordé lors de mon travail sur les processus de traitement des eaux.

J'adresse mes vifs remerciements à tous mes amis, thésards ou non, pour leur sympathie et la bonne ambiance : Ali ZEMOUCHE, Hugues RAFARALAHY, Mohamed BOUTAYEB, Harouna SOULEY ALI, Souheil HALABI, Christophe FONTE, Latifa BOUTAT-BADDAS, Cédric DELATTRE, Benjamin GERARD, Bertrand GRANDVALLET, Yasmina BECIS-AUBRY, Didier AUBRY, Mohamed TAFRAOUTI, Adil ALIF, Mohamed ZERROUGUI, Kheir Eddine

BOUAZZA, David, Emmanuelle, Georges, Salim, Gaston.

Je tiens à remercier Marie-Pascal Saint-Michel, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN et Joëlle PINELLI l'ancienne secrétaire, pour leurs soutiens.

Je remercie également l'ensemble du personnel de l'Institut Universitaire de Technologie Henri Poincaré de Longwy.

A mes parents  
A ma famille  
A mon oncle Mohamed, A ma tante aicha  
A Khaled, Fatiha et Nawel.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Références personnelles</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1</b>	
<b>Rappels et généralités</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Rappels sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires . . . . .	8
1.2.1 Introduction aux systèmes singuliers . . . . .	8
1.2.1.1 Introduction . . . . .	8
1.2.1.2 Propriétés structurelles des systèmes singuliers . . . . .	11
1.2.1.2.1 Résolvabilité, conditionnabilité et régularité . . . . .	12
1.2.1.2.2 Equivalence entre systèmes singuliers . . . . .	13
1.2.1.2.3 Fonction de transfert et solution de l'équation d'état . . . . .	15
1.2.1.2.4 Causalité . . . . .	16



1.2.1.2.5	Observabilité . . . . .	18
1.2.2	Observabilité des systèmes non linéaires . . . . .	20
1.2.2.1	Cas des systèmes temps-continu . . . . .	20
1.2.2.2	Cas des systèmes temps-discret . . . . .	22
1.3	Estimation d'état : les différents types d'observateurs . . . . .	25
1.3.1	Filtre de Kalman Étendu (EKF) . . . . .	25
1.3.2	Filtrage optimal des systèmes singuliers temps-discret . . . . .	27
1.3.2.1	Filtrage optimal des systèmes singuliers dans la littérature . . . . .	28
1.3.2.2	Filtrage optimal des systèmes singuliers au sens des moindres carrés . . . . .	29
1.3.3	Approche d'estimation à horizon glissant . . . . .	31
1.3.4	Observateurs d'état des systèmes non linéaires : approche LMI . . . . .	36
1.4	Conclusion . . . . .	37

## Chapitre 2

### Estimation à horizon glissant pour les systèmes singuliers

2.1	Introduction . . . . .	40
2.2	Estimation à horizon glissant au sens des moindres carrés . . . . .	41
2.2.1	Formulation du problème . . . . .	41
2.2.2	Estimation à information complète . . . . .	42
2.2.3	Estimation à horizon glissant . . . . .	47
2.2.4	Exemple numérique . . . . .	51
2.3	Application aux systèmes linéaires à entrées inconnues . . . . .	53
2.3.1	Estimateurs des systèmes linéaires à entrées inconnues . . . . .	54
2.3.2	Estimateurs à entrées inconnues à horizon glissant . . . . .	55
2.3.3	Exemple numérique . . . . .	57
2.4	Estimation à horizon glissant au sens de la variance minimale . . . . .	60
2.4.1	Formulation du problème . . . . .	60
2.4.2	Filtrage optimal des systèmes singuliers . . . . .	61
2.4.3	Convergence et stabilité de l'estimateur . . . . .	66
2.4.4	Exemple numérique . . . . .	67
2.5	Conclusion . . . . .	71

---

**Chapitre 3****Estimation de l'état des systèmes non linéaires singuliers**

3.1	Introduction . . . . .	74
3.2	Observateur pour les systèmes non linéaires singuliers . . . . .	75
3.2.1	Formulation de l'observateur . . . . .	75
3.2.2	Exemple numérique . . . . .	78
3.3	Synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires singuliers à temps-discret . . . . .	84
3.3.1	Position du problème . . . . .	84
3.3.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	86
3.4	Conclusion . . . . .	88

**Chapitre 4****Application à l'observation d'une station d'épuration**

4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Épuration des eaux usées . . . . .	91
4.2.1	Définition . . . . .	91
4.2.2	Les grandes étapes du traitement . . . . .	91
4.3	Modélisation des stations d'épuration . . . . .	93
4.3.1	Modèle de référence . . . . .	94
4.3.2	Modèle réduit . . . . .	100
4.3.2.1	Simplification du modèle de référence . . . . .	101
4.3.2.2	Expression du modèle réduit . . . . .	103
4.3.3	Le simulateur . . . . .	104
4.4	Observation de l'état du modèle réduit . . . . .	105
4.4.1	Observateur de Kalman Étendu . . . . .	106
4.4.2	Approche LMI . . . . .	115
4.5	Conclusion . . . . .	125

**Conclusion générale et perspectives****127****Annexes****Annexe A****Quelques rappels mathématiques**

*Table des matières*

---

A.1	Théorie des Matrices . . . . .	130
A.1.1	Complément et lemme de Schur . . . . .	130
<b>Bibliographie</b>		<b>131</b>

---

# Table des figures

1.1	Réseau électrique. . . . .	10
1.2	Réseau électrique avec retour d'état par action dérivée. . . . .	10
2.1	L'état $x_1(k)$ (ligne continue) et son estimée MHE (ligne discontinue). . . . .	52
2.2	L'état $x_2(k)$ (ligne continue) et son estimée MHE (ligne discontinue). . . . .	52
2.3	L'état $x_1(k)$ (ligne continue) et son estimé (ligne discontinue). . . . .	58
2.4	L'état $x_2(k)$ (ligne continue) et son estimé (ligne discontinue). . . . .	58
2.5	L'état $x_3(k)$ (ligne continue) et son estimé (ligne discontinue). . . . .	59
2.6	L'entrée inconnue $d(k)$ (ligne continue) et l'entrée inconnue estimée (ligne discontinue). . . . .	59
2.7	Les entrées du système $u_k$ . . . . .	68
2.8	L'état $x_1(k)$ (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue). . . . .	69
2.9	L'état $x_2(k)$ (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue). . . . .	69
2.10	L'état $x_3(k)$ (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue). . . . .	70
2.11	L'état $x_4(k)$ (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue). . . . .	70
3.1	L'état $x_1(k)$ (—) et son estimé (—). . . . .	81
3.2	L'état $x_2(k)$ (—) et son estimé (—). . . . .	81
3.3	L'état $x_3(k)$ (—) et son estimé (—) . . . . .	82
3.4	L'état $x_4(k)$ (—) et son estimé (—) . . . . .	82
3.5	L'état $x_5(k)$ (—) et son estimé (—) . . . . .	83
3.6	L'entrée inconnue $d_k$ (—) et sa estimée (—) . . . . .	83
4.1	Procédé de traitement à boues activées en bassin unique . . . . .	92
4.2	Configuration hydrodynamique de la station urbaine de référence. . . . .	105

Table des figures

---

4.3	Résultats de l'estimation (Temps sec) : états simulés (bleu) et estimés (noir). . .	111
4.4	Résultats de l'estimation (Temps pluvieux) : états simulés (bleu) et estimés (noir).	112
4.5	Résultats de l'estimation (Temps orageux) : états simulés (bleu) et estimés (noir)	113
4.6	Comparaison entre la simulation du produit $D^{in} X_{DCO}^{in}$ (bleu), son approximation $\alpha D^{in} + \beta$ (noir) et le produit de la valeur journalière moyenne de $X_{DCO}^{in}$ et de $D^{in}$ (cercle). . . . .	114
4.7	Les résultats de l'estimation (temps sec) : états simulés (ligne continue) et estimés (ligne discontinue). . . . .	119
4.8	Estimation des entrées inconnues (temps sec) : entrées inconnues réelles (ligne continue) et estimées (ligne discontinue). . . . .	120
4.9	Les résultats de l'estimation (Temps pluvieux) : états simulés (ligne continue) et estimés (ligne discontinue). . . . .	121
4.10	Estimation des entrées inconnues (Temps pluvieux) : entrées inconnues réelles (ligne continue) et estimées (ligne discontinue). . . . .	122
4.11	Les résultats de l'estimation (Temps orageux) : états simulés (ligne continue) et estimés (ligne discontinue). . . . .	123
4.12	Estimation des entrées inconnues (Temps orageux) : entrées inconnues réelles (ligne continue) et estimées (ligne discontinue). . . . .	124

# Notations

## Notations relatives au procédé de traitement des eaux

Paramètre	Définition	Unité
$S_I$	Concentration de matière organique soluble inerte	$[mg/l^{-1}]$
$S_S$	Concentration de substrat facilement biodégradable	$[mg/l^{-1}]$
$S_O$	Concentration en oxygène	$[mg/l^{-1}]$
$S_O^{sat}$	Concentration de saturation de l'oxygène	$[mg/l^{-1}]$
$S_{NO}$	Concentration d'azote sous forme de nitrite et de nitrate	$[mg/l^{-1}]$
$S_{NH}$	Concentration d'azote sous forme d'ammoniaque	$[mg/l^{-1}]$
$S_{ND}$	Concentration d'azote organique soluble et biodégradable	$[mg/l^{-1}]$
$S_{ALK}$	Alcalinité	Unité molaire
$X_I$	Concentration de la matière organique particulaire inerte	$[mg/l^{-1}]$
$X_S$	Concentration du substrat lentement biodégradable	$[mg/l^{-1}]$
$X_{B,H}$	Concentration de la biomasse hétérotrophe active	$[mg/l^{-1}]$
$X_{B,A}$	Concentration de la biomasse autotrophe active	$[mg/l^{-1}]$
$X_{ND}$	Concentration d'azote organique particulaire biodégradable	$[mg/l^{-1}]$
$X_P$	Concentration en produit particulaire résultant du décès de la biomasse	$[mg/l^{-1}]$
$b_A$	Coefficient de mortalité des autotrophes	$[d^{-1}]$
$b_H$	Coefficient de mortalité des hétérotrophes	$[d^{-1}]$
$f_{rXI}$	Fraction de DCO inerte issue du décès de la biomasse	$[-]$
$i_{NBM}$	Masse d'azote dans la biomasse	$[g_N g_{COD}^{-1}]$
$i_{NXI}$	Masse d'azote dans la matière organique particulaire inerte	$[g_N g_{COD}^{-1}]$
$k_L$	Coefficient de transfert d'oxygène	$[d^{-1}]$

## Notations

---

$K_{(.)}$	Coefficient de demi-saturation :	
$K_{NH,A}$	de l'ammoniac pour la biomasse autotrophe	$[g_{NH}m^{-3}]$
$K_{NO}$	du nitrate pour la biomasse hétérotrophe	$[g_{NO}m^{-3}]$
$K_{O,A}$	de l'oxygène pour la biomasse autotrophe	$[g_{O_2}m^{-3}]$
$K_{O,H}$	de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe	$[g_{O_2}m^{-3}]$
$K_S$	pour les hétérotrophes	$[g_{DCO}m^{-3}]$
$K_X$	pour l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable	$[g_{DCO}g_{DCO}^{-1}]$
$Y_A$	Coefficient de rendement des autotrophes	$[-]$
$Y_H$	Coefficient de rendement des hétérotrophes	$[-]$
$\mu_A$	Taux de croissance maximal des autotrophes	$[d^{-1}]$
$\mu_H$	Taux de croissance maximal des hétérotrophes	$[d^{-1}]$
$\eta_{NO_3g}$	Facteur de correction pour $\mu_H$ sous condition anoxie	$[-]$
$\eta_{NO_3h}$	Facteur de correction pour l'hydrolyse sous condition anoxie	$[-]$
$V_O$	Volume de l'aérateur	$[m^3]$
$D^{in}$	Débit d'entrée	$[m^3d^{-1}]$

## Notations générales

### Ensembles, Sous-espaces de fonctions

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Ensemble des nombres réels (resp. complexes),
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls,
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ,
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension $n$ ,
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$ ,
$f(.) > 0$	la fonction $f(.)$ est définie positive,
$f(.) \leq 0$	la fonction $f(.)$ est définie non positive,
$f(.) < 0$	la fonction $f(.)$ est définie négative,
$f(.) \geq 0$	la fonction $f(.)$ est définie non négative,
$C^k(\mathbb{R}; \mathbb{R})$	ensemble des fonctions $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables $k$ fois,
$C^1$	classe des fonctions continûment différentiables,
$C^\infty$	classe des fonctions indéfiniment continûment différentiables ou lisses ( <i>smooth</i> ).

## Algèbre linéaire

$P > 0, P \geq 0$	matrice $P$ symétrique définie (resp. semi-définie) positive,
$P > Q, P \geq Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geq 0$ ) pour $P, Q$ symétriques $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
$\text{trace}(A)$	trace de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
$\text{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
$\text{Im}(A)$	espace image de $A : \{y \text{ tel que } y = Ax\}$ ,
$\text{Re}(A)$	partie réelle de $A$ ,
$(A)_{ik}$	$(i, k)^{\text{th}}$ élément de $A$ ,
$A^\perp$	matrice $Z$ telle que $AZ = 0$ et $[A^T \ Z]$ de rang maximal,
$\ker(A)$	noyau de $A : \{x \text{ tel que } Ax = 0\}$ ,
$\lambda(A)$	ensemble des valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
$\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$	valeur propre de module maximal (resp. minimal) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
$\sigma(A)$	ensemble des valeurs singulières de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}$ ,
$\sigma_{\max}(A), \sigma_{\min}(A)$	valeur singulière maximale (resp. minimale) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
$A^{-1}$	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(A) \neq 0$ ,
$A^T, A^{-T}$	transposée de $A$ (resp. de l'inverse de $A$ ) $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,
$A^\dagger$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifiant $AA^\dagger A = A$ ,
$I, 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée,
$I_n, 0_{n \times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$ ),
$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (\star) & A_{22} \end{pmatrix}$	matrice symétrique, le symbole $(\star)$ représente $A_{12}^T$ ,
$\ v\ $	norme euclidienne d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ ,
$\ A\ $	norme euclidienne d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## Opérateurs et notations

$\mathcal{E}\{.\}$	espérance mathématique,
$\text{cov}\{.\}$	covariance ou moment centré d'ordre 2,
$x_k(x(t))$	vecteur d'état à l'instant courant,
$u_k(u(t))$	vecteur des entrées à l'instant courant,
$y_k(y(t))$	vecteur des sorties à l'instant courant,
$\hat{x}_{k k-1}$	vecteur d'état courant prédit à un pas,
$\hat{x}_k (\hat{x}_{k k})$	vecteur d'état courant estimé (resp. filtré).



## Acronymes

- ARE Equation Algébrique de Riccati (*Algebraic Riccati Equation*),  
ARI Inégalité Algébrique de Riccati (*Algebraic Riccati Inequality*),  
ASM Modèle de boues activées (*Activated Sludge Model*),  
DAE Système d'équations algébro-différentielles (*Differential Algebraic Equations*),  
DCO Demande Chimique en Oxygène,  
EKF Filtre de Kalman étendu (*Extended Kalman Filter*),  
FI Estimation à information complète (*Full Information*),  
IAWQ Association internationale pour la qualité de l'eau (*International Association on Water Quality*),  
IWA Association internationale de l'eau (*International Water Association*),  
LMI Inégalités Matricielles Affines (*Linear Matrix Inequalities*),  
LPV Linéaire à paramètres variants (*Linear Parameter Varying*),  
LTI Linéaire Temps Invariant (*Linear Time Invariant*),  
LTV Linéaire temps variants (*Linear Time varying*),  
MHE Estimation à horizon glissant (*Moving Horizon Estimation*),  
MPC Commande prédictive (*Model-based predictive control*),  
ODE Système d'équations différentielles (*Ordinary Differential Equations*),  
OKE Observateur de Kalman étendu (*Extended Kalman Observer*).  
SISO Mono entrée Mono sortie (*Single Input Single Output*).



---

## Références personnelles

### Conférences Internationales avec comité de lecture

- **B. Boulkroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, S. Gillé "State and unknown input estimation for non linear singular systems : application to the reduced model of the activated sludge process", *The 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (Med 2008)*, Ajaccio, Corsica, France.
- **B. Boulkroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, "Optimal estimation for linear singular systems using moving horizon estimation", *IFAC World Congress (IFAC WC 2008)*, Seoul, Korea July 6-11, 2008.
- **B. Boulkroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, "Moving horizon estimation for linear singular systems", *European Control Conference 2007*, Kos, Greece 2-5 Jul 2007.
- **B. Boulkroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, "Moving horizon estimation for discrete time linear systems with unknown inputs", *European Control Conference 2007*, Kos, Greece 2-5 Jul 2007.

### Conférence Nationale avec comité de lecture

- **B. Boulkroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, "Estimation à horizon glissant pour les systèmes singuliers", *Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS (JDMACS JNMACS) 2007*, Reims, France 9-11 Jul 2007.

**Travaux en cours de soumission**

- **B. Boukroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, S. Gillé "A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process", soumis à *IEEE American Control Conference (ACC 2009)*, St. Louis, Missouri, USA.
- **B. Boukroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, S. Gillé, D. Fiorelli "A nonlinear observer design for an activated sludge wastewater treatment process", soumis à *Journal of Process Control*.
- **B. Boukroune**, M. Darouach, M. Zasadzinski, "Moving horizon state estimation for linear discrete-time singular systems. Application to state and unknown inputs estimation", soumis à *IET Control Theory & Applications*.



---

# Introduction générale

Le comportement dynamique d'un procédé peut être entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Pour la commande et la supervision d'un système dynamique, la connaissance de ces variables est capitale. Or ces variables ne sont en général pas, accessibles par des mesures. Ce problème peut être résolu, sous certaines conditions, en introduisant un observateur d'état ou un estimateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation (asymptotique ou exponentielle) du vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé). Les premiers observateurs, dédiés à l'estimation de l'état des systèmes linéaires, ont été développés par Luenberger dans un cadre déterministe et par Kalman dans un cadre stochastique. Ce dernier a eu un impact considérable dans la pratique et a été appliqué à de nombreux problèmes tels la poursuite des cibles, le contrôle de la navigation, la détection des défauts dans l'industrie nucléaire et les études démographiques, etc. Ces deux observateurs, de Luenberger et Kalman sont largement utilisés de nos jours mais, les systèmes linéaires ne couvrant qu'un faible pourcentage des procédés industriels, des solutions spécifiquement non linéaires ont rapidement été envisagées. Parmi ces solutions, citons le filtre de Kalman étendu. Cette solution s'appuie sur la technique de linéarisation de l'erreur d'observation et consiste essentiellement à imiter le filtre de Kalman pour les systèmes linéaires en linéarisant, à chaque instant, le système étudié le long des trajectoires estimées. Dans de nombreux cas pratiques, cette approche donne des résultats relativement satisfaisants. Notons que malgré des conditions peu restrictives d'applicabilité, ces approches souvent locales, souffrent cependant d'une grande sensibilité aux conditions initiales et aux erreurs de modélisation.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux problèmes d'observation d'état des modèles algébro-différentiels (systèmes singuliers). Ces modèles représentent les phénomènes physiques dont la dynamique ne peut pas être décrite par des équations différentielles ordinaires. Comme leur nom

l'indique, ces systèmes se traduisent par un ensemble d'équations différentielles, en général non ordinaires, et un ensemble de contraintes algébriques. L'estimation de l'état des systèmes singuliers est un problème partiellement résolu. Il a été traité par plusieurs auteurs. Dans le cas linéaire, le filtre de Kalman généralisé est présenté comme une solution aux problèmes d'estimation. Pour construire ce filtre, nous devons utiliser toutes les mesures disponibles. Dans la réalité, les systèmes subissent généralement des contraintes telles que : des états positifs, des entrées bornées, une partie seulement des données est disponible, *etc.* Comme le filtre de Kalman généralisé ne peut pas prendre les contraintes en compte, l'approche d'estimation à horizon glissant (MHE, Moving Horizon Estimation) sera proposée. Dans le cas non linéaire, malheureusement il existe très peu de résultats du problème d'observation des systèmes singuliers non linéaires. Nous nous intéressons à la classe des systèmes singuliers non linéaires composés d'une partie non linéaire satisfaisant la condition de Lipschitz et d'une partie linéaire à paramètres variant dans le temps. Le choix de ce genre de systèmes est motivé par une application à un modèle d'une station d'épuration à boues activées.

Pour répondre aux normes européennes de plus en plus strictes en ce qui concerne le fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées, la maîtrise des impacts sur le milieu naturel et des coûts de fonctionnement impose une amélioration du contrôle de ce genre de procédés. Le contrôle des unités de traitement, l'optimisation de leur fonctionnement et l'amélioration de leur potentiel rendement passent nécessairement par une étape de modélisation adéquate. Dans la littérature, différents types de modèles sont proposés pour la modélisation d'une station d'épuration à boues activées. Parmi les modèles proposés, on trouve un modèle complexe appelé le modèle standard ASM 1 (Activated Sludge Model N°1). Ce modèle comporte treize équations d'état non linéaires et plus de vingt paramètres. La simplification de ce modèle, appelé modèle de référence, ayant onze équations d'état avec vingt paramètres, est presque aussi complexe que le modèle standard et quasiment inutilisable pour l'estimation et la commande en ligne. Il faut donc faire appel à des modèles plus simples. Plusieurs modèles ont été proposés pour réduire la complexité du modèle ASM 1. Parmi ces modèles, nous choisissons dans ce travail le modèle réduit présenté dans la thèse de B. Chachuat [35]. Ce modèle réduit est non linéaire et contient des entrées (concentrations) non mesurées. L'objectif est de reconstruire les variables inaccessibles à la mesure à partir des données disponibles et du modèle développé.

Ce manuscrit s'organise de la façon suivante :

**Le premier chapitre** est consacré essentiellement à une présentation de quelques rappels indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous fournissons au début de ce chapitre un rappel sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires, en temps-continu et en temps-discret. Ensuite, nous nous intéressons à l'estimation de l'état et aux différents types d'observateurs. Nous allons évoquer quelques approches d'estimation de l'état telles que le Filtre de Kalman Étendu (EKF), le filtre optimal des systèmes singuliers en temps-discret, l'approche d'estimation à horizon glissant et aussi une approche d'observation pour les systèmes non linéaires basée sur les LMIs (Linear Matrix Inequalities).

Nous consacrons le **deuxième chapitre** à l'étude du problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers en utilisant l'approche d'estimation à horizon glissant (MHE). La stratégie de

---

base de la méthode MHE est de transformer le problème d'estimation en un problème à critère quadratique en utilisant une fenêtre de taille fixe glissante. Cette fenêtre est nécessaire pour limiter la taille du problème quadratique. L'utilisation de ces algorithmes dans le passé était souvent coûteuse au niveau du temps de calcul. Cet obstacle est surmonté grâce au progrès accéléré des capacités de calcul et des mémoires des ordinateurs. Pour commencer, nous traitons le problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers aux sens des moindres carrés. Une approche MHE sera présentée. Nous pouvons démontrer que la minimisation d'un critère quadratique sur un horizon glissant est équivalente au filtre de Kalman pour les systèmes singuliers sous certaines hypothèses. Ensuite, et en se basant sur notre premier résultat, l'approche de l'estimation à horizon glissant sera utilisée pour l'estimation de l'état et des entrées inconnues des systèmes linéaires. Finalement, nous nous intéressons à l'estimation à variance minimale pour les systèmes singuliers. L'analyse de la convergence de l'estimateur MHE sera abordée.

Dans le **troisième chapitre**, nous abordons le problème de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires singuliers à temps discret. Nous présentons un observateur de type Kalman étendu pour la classe des systèmes non linéaires singuliers à temps discret à mesures linéaires proposé dans [26]. Cette approche utilise la condition d'observabilité à l'infini du système étudié et traite le cas où la matrice  $E$  peut être rectangulaire. En paramétrant l'analyse de la convergence de l'observateur, grâce à la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre, des conditions de stabilité de l'erreur d'observation ont été établies. Un réglage empirique de certaines matrices de pondération a montré le rôle principal joué par ces matrices dans l'amélioration des performances de l'observateur. Une deuxième approche d'observation pour la classe des systèmes lipschitziens à temps discret sera proposée. En supposant que la partie linéaire de la classe de système choisi est variable dans le temps, le problème de l'estimation de l'état d'un système non linéaire sera réduit à un problème d'estimation de l'état d'un système partiellement LPV. La condition de stabilité de l'observateur proposé sera exprimée en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les deux observateurs qui seront validés, dans le dernier chapitre, par une application à un modèle d'une station d'épuration à boues activées.

Le **quatrième chapitre** est dédié à la modélisation des procédés de traitement à boues activées. Nous allons valider les résultats obtenus des deux estimateurs dans le troisième chapitre par une application à un modèle d'une station d'épuration à boues activées. Nous démontrons la validité et l'applicabilité des deux estimateurs. Après une brève présentation des grandes étapes du fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées, nous présentons un modèle simplifié (de référence) issu du modèle biologique du modèle ASM 1. Étant donné sa structure complexe, de nombreux modèles réduits sont proposés dans la littérature afin d'obtenir un modèle plus exploitable en situation réelle. Le modèle réduit obtenu est un modèle non linéaire présenté par [36]. Notre objectif est d'adapter ce modèle à la station d'épuration de Bleesbrück au Luxembourg, en utilisant les capteurs en ligne existant sur la station. Étant donné que la plupart des concentrations incidentes ne sont généralement pas mesurées, nous sommes contraints de les considérer comme des entrées inconnues. Pour valider nos résultats, nous disposons de plusieurs jeux de données.



---

# Rappels et généralités

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Rappels sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires</b> . . . . .	<b>8</b>
1.2.1	Introduction aux systèmes singuliers . . . . .	8
1.2.1.1	Introduction . . . . .	8
1.2.1.2	Propriétés structurelles des systèmes singuliers . . . . .	11
1.2.1.2.1	Résolvabilité, conditionnabilité et régularité . . . . .	12
1.2.1.2.2	Equivalence entre systèmes singuliers . . . . .	13
1.2.1.2.3	Fonction de transfert et solution de l'équation d'état . . . . .	15
1.2.1.2.4	Causalité . . . . .	16
1.2.1.2.5	Observabilité . . . . .	18
1.2.2	Observabilité des systèmes non linéaires . . . . .	20
1.2.2.1	Cas des systèmes temps-continu . . . . .	20
1.2.2.2	Cas des systèmes temps-discret . . . . .	22
<b>1.3</b>	<b>Estimation d'état : les différents types d'observateurs</b> . . . . .	<b>25</b>
1.3.1	Filtre de Kalman Étendu (EKF) . . . . .	25
1.3.2	Filtrage optimal des systèmes singuliers temps-discret . . . . .	27
1.3.2.1	Filtrage optimal des systèmes singuliers dans la littérature . . . . .	28
1.3.2.2	Filtrage optimal des systèmes singuliers au sens des moindres carrés . . . . .	29
1.3.3	Approche d'estimation à horizon glissant . . . . .	31
1.3.4	Observateurs d'état des systèmes non linéaires : approche LMI . . . . .	36
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>37</b>

---



## 1.1 Introduction

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous fournissons au début de ce chapitre un rappel sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Ensuite, nous présentons une introduction aux systèmes singuliers et nous nous intéressons particulièrement aux propriétés structurelles des systèmes singuliers telles que : résolubilité, conditionnabilité, régularité, équivalences entre systèmes singuliers, causalité et observabilité. Nous abordons aussi quelques définitions d'observabilité des systèmes non linéaires en temps-continu et en temps-discret. Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires est liée aux entrées et aux conditions initiales. Ensuite, nous rappelons la définition basée sur le concept de non distinguabilité des états.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à l'estimation de l'état et aux différents types d'observateurs. Nous allons évoquer quelques approches d'estimation de l'état, indispensables pour comprendre la suite de ce travail, telles que le Filtre de Kalman Étendu (EKF), le filtrage optimal des systèmes singuliers en temps-discret, l'approche d'estimation à horizon glissant et une approche d'observation pour les systèmes non linéaires basée sur les LMI (Linear Matrix Inequalities).

## 1.2 Rappels sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires

Cette section consiste en une introduction au problème d'observation de l'état des systèmes non linéaires. Nous présentons une introduction générale aux systèmes singuliers, ensuite nous rappelons quelques définitions sur la notion d'observabilité. Avant d'entamer une procédure de conception d'un observateur pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état de ce dernier peut être estimé à partir des informations sur l'entrée et la sortie. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé de façon unique à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales.

### 1.2.1 Introduction aux systèmes singuliers

#### 1.2.1.1 Introduction

La modélisation d'un processus physique complexe demande généralement le choix des variables utilisées pour sa description et le choix des grandeurs permettant d'agir sur l'évolution du système. Ces variables, appelées variables d'état et de commande, sont choisies, dans la mesure du possible, dans le but d'avoir une signification physique (position, vitesse, accélération, température, pression, *etc*). Une fois les variables choisies, les relations mathématiques les liant sont dictées par les lois de comportement du système considéré. Ces relations peuvent être de deux types : soit dynamiques (*i.e.* faisant intervenir les variations des variables au cours du

temps), soit purement statiques. On arrive naturellement à une mise en équation de la forme suivante :

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0 \quad (1.1a)$$

$$g(x(t), y(t), u(t), t) = 0 \quad (1.1b)$$

où  $f$  est une fonction vectorielle différentielle,  $g$  est une fonction vectorielle algébrique,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des entrées,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des sorties et  $t$  est la variable temps. La linéarisation de l'équation (1.1) autour d'un point de fonctionnement (par exemple par linéarisation tangente) donne l'équation suivante :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.2b)$$

où les matrices  $E$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont réelles, constantes et de dimensions compatibles avec les dimensions de  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$ . Notons que la matrice  $E$  n'a pas nécessairement une structure diagonale ( $E$  est singulière) car les dérivées de plusieurs variables d'état peuvent intervenir dans une même relation ( $\det(E) = 0$  si la matrice  $E$  est une matrice carrée). Il n'est pas restrictif de supposer nul le terme de transfert direct de la commande vers la sortie. En effet, il suffit d'augmenter le vecteur d'état, comme le montre l'équation (1.4) pour  $y$  inclure  $u(t)$  et annuler la matrice  $D$  de transfert de  $u(t)$  vers  $y(t)$  dans l'équation (1.3). En effet,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3b)$$

peut se mettre sous la forme (1.2) en écrivant

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} u \quad (1.4a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \quad (1.4b)$$

Dans le cas où la matrice  $E$  est inversible, il est possible de ramener le système (1.2) à la représentation d'état usuelle (standard). En prémultipliant l'équation d'état par  $E^{-1}$  on obtient

$$\dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \quad (1.5a)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (1.5b)$$

Nous nous intéresserons donc exclusivement au cas où  $E$  n'est pas de plein rang. On a alors

$$\text{rang}(E) = r < n. \quad (1.6)$$

Le terme algébro-différentiel est aussi employé pour qualifier ces systèmes car, lorsque la condition (1.6) est vérifiée, la relation (1.2) peut se décomposer en une équation différentielle et une équation algébrique. Dans la littérature, plusieurs appellations désignent un système singulier :

système implicite, système généralisé, algébro-différentiel, « descriptor system ». Dans de nombreux domaines, tels que les systèmes biologiques, mécaniques et électriques, les processus sont décrits par des équations algébriques (traduisant des lois de conservation de la matière et de l'énergie, des contraintes mécaniques ou des états d'équilibre) et des équations différentielles. A titre d'exemple, considérons le réseau électrique décrit par la figure suivante.

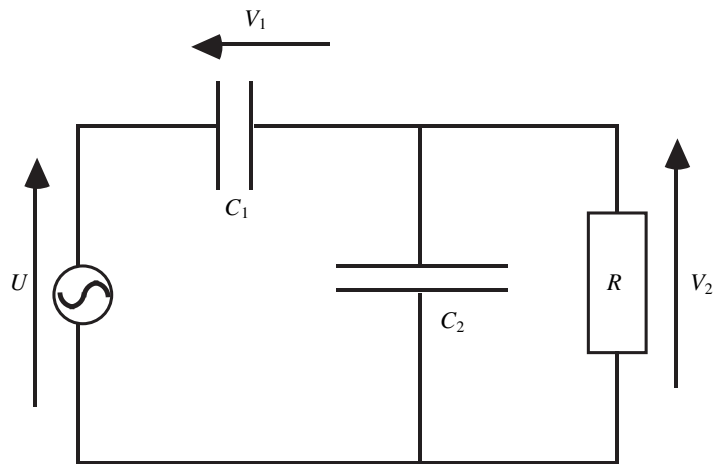


FIGURE 1.1: Réseau électrique.

La tension  $U$  étant le signal de commande et les tensions  $V_1$  et  $V_2$  les variables d'état. Ce réseau électrique obéit à l'équation algébro-différentielle suivante

$$\begin{bmatrix} RC_1 & -RC_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} U.$$

Avec un retour d'état par action dérivée donnée par  $V = U - RC_1 \dot{V}_1$ , nous obtenons un système d'état standard (figure 1.2)

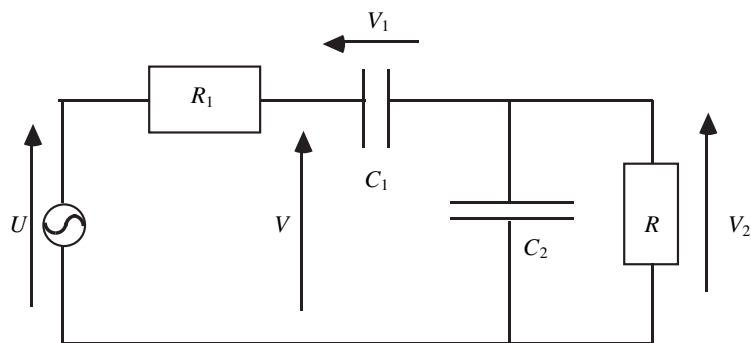


FIGURE 1.2: Réseau électrique avec retour d'état par action dérivée.

$$\begin{bmatrix} RC_1 & -RC_2 \\ -R_1C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} U.$$

Les systèmes singuliers interviennent aussi lorsqu'une description complète du système n'est pas disponible. En effet, il n'est pas toujours possible de disposer de  $n$  équations différentielles indépendantes pour un système dont le vecteur d'état  $x$  est de dimension  $n$ .

En automatique, certains problèmes, tels que les dérivateurs et la commande optimale peuvent se formuler via les systèmes singuliers. En effet, le correcteur PID

$$u = k \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) y$$

est décrit par l'équation algébro-différentielle suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & kT_i T_d & kT_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & T_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

En appelant  $\mu$  le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, le problème de commande optimale suivant

$$\begin{aligned} \min J(x, u) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \\ \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Kx \end{aligned}$$

peut se reformuler sous la forme d'un système singulier

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & -Q & 0 \\ 0 & A & B \\ B^T & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ x \\ u \end{bmatrix}.$$

Il existe dans la littérature d'autres exemples des systèmes singuliers. Le lecteur trouvera une étude exhaustive des systèmes singuliers linéaires dans [102], [150], [93], [38], [94], [89].

### 1.2.1.2 Propriétés structurelles des systèmes singuliers

Avant d'aborder la théorie d'observation des systèmes singuliers disponibles dans la littérature, nous allons proposer un rappel des propriétés structurelles de ces systèmes. Soit le système

discret invariant suivant

$$Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.7a)$$

$$y_k = Cx_k \quad (1.7b)$$

Dans ce paragraphe, nous supposons que la matrice  $E$  est carrée. En effet, la plupart des travaux étudiant ces propriétés se sont surtout intéressés à ce cas particulier.

### 1.2.1.2.1 Résolvabilité, conditionnabilité et régularité

Le système (1.7) est résolvable si, pour  $x_0$  donné, quel que soit  $u_k$ , il existe au moins une solution  $x_k$ .

L'équation (1.7a) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A & -E & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -E & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & A & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bu_0 \\ Bu_1 \\ \vdots \\ Bu_{N-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

l'équation (1.8) est équivalente à

$$\Phi X + U = 0 \quad (1.9)$$

où :

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & -E & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -E & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & A & -E \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} Bu_0 \\ Bu_1 \\ \vdots \\ Bu_{N-1} \end{bmatrix}$$

D'après l'équation (1.9), la résolvabilité et la conditionnabilité du système (1.7) peuvent être définies comme suit :

**Définition 1.1.** *le système (1.7) est résolvable si et seulement si la matrice  $\phi$  est de rang plein lignes quel que soit l'entier  $N$ .* ■

**Définition 1.2.** *Le système (1.7) est conditionnable si  $X$  est unique.* ■

Pour un système carré, il faut que la matrice  $G$  (1.10) soit de rang plein colonnes

$$G = \begin{bmatrix} -E & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ A & -E & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & A & -E \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

**Définition 1.3.** (Régularité). *Le faisceau matriciel  $(E, A)$  est régulier si et seulement si  $\det(sE - A) \neq 0$ .* ■

**Définition 1.4.** *Le système (1.7) est conditionnable si et seulement s'il existe un nombre  $s$  complexe tel que  $\det(sE - A) \neq 0$ . On dit que le système singulier a un faisceau de matrices  $(sE - A)$  régulier.* ■

Pour les systèmes invariants carrés, ces trois propriétés sont équivalentes :

$$\text{Résolvabilité} \iff \text{conditionnabilité} \iff \text{Régularité} \iff \det(sE - A) \neq 0 \quad (1.11)$$

**Remarque 1.1.** *Un système d'état standard  $E = I$  vérifie toujours ces propriétés.* ■

### 1.2.1.2 Equivalence entre systèmes singuliers

Généralement, le choix des variables utilisées pour décrire un processus n'est pas unique. Alors le modèle qui le décrit n'est pas unique. Il est donc intéressant de déterminer une relation d'équivalence entre représentations d'état modélisant un même système.

**Définition 1.5.** (représentations équivalentes). *Considérons les deux systèmes singuliers définis par*

$$Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1.12a)$$

$$y_k = Cx_k \quad (1.12b)$$

et

$$\bar{E}\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}\bar{u}_k \quad (1.13a)$$

$$\bar{y}_k = \bar{C}\bar{x}_k \quad (1.13b)$$

*Les systèmes (1.12) et (1.13) sont équivalents si et seulement si il existe deux matrices non singulières  $Q$  et  $P$  telles que :*

$$QEP = \bar{E}, \quad QAP = \bar{A}, \quad QB = \bar{B} \quad \text{et} \quad CP = \bar{C}. \quad (1.14)$$

*et le changement de variable est donnée par  $x_k = P\bar{x}_k$ .* ■

On peut vérifier aisément que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence. En prenant par exemple  $Q = P = I_n$ , la transitivité est prouvée en multipliant les matrices de passage et la symétrie est assurée par l'inversibilité des matrices de passage.

**Exemple 1.1.** [157] On considère le système singulier suivant :

$$Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1.15a)$$

$$y_k = Cx_k \quad (1.15b)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & -1 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Le système singulier

$$\bar{E}\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}\bar{u}_k \quad (1.17a)$$

$$\bar{y}_k = \bar{C}\bar{x}_k \quad (1.17b)$$

avec

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

est équivalent au système précédent. En effet, on trouve facilement les matrices  $Q$  et  $P$  vérifiant (1.14). Elles sont définies par :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Les deux représentations sont donc bien équivalentes.

Pour un système singulier (1.12), les deux formes équivalentes ont un intérêt particulier et sont souvent utilisées pour l'analyse ou le contrôle.

La première forme (définition 1.6) utilise un résultat établi dans [55], énoncé dans le lemme suivant

**Lemme 1.1.** *Pour tout faisceau matriciel  $(E, A)$  régulier, il existe deux matrices non singulières  $Q$  et  $P$  telles que*

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

où  $n_1 + n_2 = n$  et la matrice  $M$  est nilpotente. ■

**Définition 1.6.** [150] *Pour tout système (1.12), il existe deux matrices non singulières  $Q$  et  $P$ , telles que (1.12) est équivalent à*

$$x_{1,k+1} = A_1 x_{1,k} + B_1 u_k \quad (1.20a)$$

$$Mx_{2,k+1} = x_{2,k} + B_2 u_k \quad (1.20b)$$

$$y_k = C_1 x_{1,k} + C_2 x_{2,k} \quad (1.20c)$$

où  $x_{1,k} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_{2,k} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $n_1 + n_2 = n$ ,  $M$  est nilpotente et

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, CP = [C_1 \ C_2], P^{-1}x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}.$$

■

Notons que les matrices  $Q$  et  $P$  ne sont pas uniques.

**Définition 1.7.** Pour toute matrice  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  il existe deux matrices non singulières  $Q$  et  $P$  telles que  $QEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Pour tout système (1.12), il existe deux matrices non singulières  $Q, P$  telles que (1.12) est équivalent à

$$x_{1,k+1} = A_{11}x_{1,k} + A_{12}x_{2,k} + B_1u_k \quad (1.21a)$$

$$0 = A_{21}x_{1,k} + A_{22}x_{2,k} + B_2u_k \quad (1.21b)$$

$$y_k = C_1x_{1,k} + C_2x_{2,k} \quad (1.21c)$$

où

$$QEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, QAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, CP = [C_1 \ C_2] \text{ et}$$

$$P^{-1}x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} \text{ avec } x_{1,k} \in \mathbb{R}^r, x_{2,k} \in \mathbb{R}^{n-r}$$

■

### 1.2.1.2.3 Fonction de transfert et solution de l'équation d'état

La fonction de transfert associée au système singulier (1.7) est

$$F(s) = C(sE - A)^{-1}B \quad (1.22)$$

Un système singulier peut avoir des pôles finis et infinis. Dans le dernier cas, on parle de modes impulsions.

En utilisant le système équivalent du (1.7) donné par la définition 1.6, la solution de (1.22) est donnée par

$$x_k = P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \left[ A_1^k x_{1,0} + \sum_{i=0}^{k-1} A_1^{k-i-1} B_1 u_i \right] + P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left[ M^{N-k} x_{2,N} - \sum_{i=0}^{N-k-1} M^i B_2 u_{k+i} \right] \quad (1.23)$$

où les indices 0 et  $N$  représentent les instants initiaux et finaux.



#### 1.2.1.2.4 Causalité

L'équation (1.23) implique la connaissance des entrées et des états futurs pour connaître l'état à l'instant  $k$ , d'où un problème de causalité.

**Définition 1.8.** [38] *Le système linéaire singulier (1.7) est causal si la relation suivante*

$$\text{degré } |sE - A| = \text{rang } (E) \quad (1.24)$$

*est satisfaite.* ■

Dans ce cas, la matrice  $M$  est nulle dans les relations (1.20b) et (1.23). Les pôles infinis étant générés par cette matrice, le système (1.7) est causal si et seulement si il n'y a pas de pôles infinis.

Si la matrice  $E$  n'est pas carrée et de rang plein lignes, alors le système (1.7) est causal. Si la matrice  $E$  n'est pas carrée et n'est pas de rang plein lignes, alors il existe deux matrices régulières  $P$  et  $Q$  (voir définition 1.7), telles que

$$QEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad QAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Le système singulier associé à  $E$  et  $A$  est causal si et seulement si la matrice  $A_{22}$  est de rang plein lignes.

Les concepts de modes infinis (ou impulsionnels) et de causalité vont être illustrés par deux exemples numériques.

**Exemple 1.2.** [157] Reprenons l'exemple 1.1. Le rang de la matrice  $E$  et le déterminant de  $sE - A$  sont donnés par

$$\text{rang } (E) = 3 \quad \text{et} \quad |sE - A| = (s - 1)^2(1 - 2s).$$

Le faisceau de matrices associé à ce système singulier est donc régulier. Ce système est causal car le degré du déterminant de  $(sE - A)$  est égal au rang de la matrice  $E$ . Il possède trois modes finis : un mode simple égal à 0.5 et une mode double égal à 1.

Le système singulier (1.19), présenté dans l'exemple 1.1, est équivalent au système précédent. Les matrices  $P$  et  $Q$  n'étant pas singulières.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Malgré les apparences, le système singulier décrit par les matrices  $\bar{E}$  et  $\bar{A}$  ne correspond pas à la forme particulière évoquée précédemment (les matrices  $P$  et  $Q$  sont régulières) dans la définition 1.6. En effet, il existe deux matrices  $P_1$  et  $Q_1$  non singulières tel que

$$E_1 = Q_1 E P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = Q_1 A P_1 = \begin{bmatrix} 0.5614 & -0.0823 & -0.0362 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.7434 & 0.9966 & 0.9386 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1164 & 0 & 0.2200 & 0.2200 \\ 0 & -1.4142 & 0 & 0 \\ -1.4094 & 0 & 0.3729 & 0.3729 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0.0582 & 0 & -0.7047 & -0.7071 \\ 0.0582 & 0 & -0.7047 & 0.7071 \\ -0.9966 & -0.7071 & -0.0823 & -0.7071 \\ 0.9966 & -0.7071 & 0.0823 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que la matrice  $M$  est nulle.

Le système étant causal, la propriété associée à la relation (1.25) est vérifié en utilisant les matrices  $E_1$ ,  $A_1$ ,  $P_1$  et  $Q_1$  : la matrice  $A_4$  de la relation (1.25) est réduite au scalaire 1. Le polynôme caractéristique ne change pas :

$$|sE - A| = |sE_1 - A_1| = (s - 1)^2(1 - 2s).$$

**Exemple 1.3.** [157] On considère le système singulier suivant

$$E x_{k+1} = A x_k, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 \\ 1 & 0 & -1.5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & -1.5 & -1.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 2 & 1.5 & -1.5 & -2.5 \\ -1 & -0.5 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice  $E$  et le déterminant de  $sE - A$  sont

$$\text{rang}(E) = 3 \quad \text{et} \quad |sE - A| = (s - 1)^2.$$

Le faisceau de matrices associé à ce système singulier est régulier. Ce système n'est pas causal car le degré du déterminant de  $|sE - A|$  est inférieur au rang de la matrice  $E$ . Il possède un mode double fini égal à 1 et un mode infini.

Le système singulier

$$E_1 x_{k+1} = A_1 x_k, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

avec

$$E_1 = Q_1 E P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = Q_1 A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est équivalent au système précédent, les matrices  $P_1$  et  $Q_1$  n'étant pas singulières

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

La matrice  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  est nilpotente.

En posant :

$$E_2 = Q_2 E P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = Q_2 A P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

le système n'étant pas causal, la propriété associée à la relation (1.25) est vérifiée : la matrice  $M$  est réduite au scalaire 0.

Le polynôme caractéristique ne change pas

$$|sE - A| = |sE_1 - A_1| = |sE_2 - A_2| = (s - 1)^2.$$

### 1.2.1.2.5 Observabilité

Dans cette section, nous allons rappeler les différents concepts intervenant dans l'analyse de l'observabilité des systèmes singuliers linéaires. La différence entre les modes impulsionnels et non impulsionnels conduit aux définitions suivantes pour l'observabilité et la détectabilité des systèmes singuliers linéaires. Nous indiquons ici que le problème de causalité est lié aux modes impulsionnels du système (1.7) car la solution  $x_k$ , donnée par (1.23), peut être causale s'il y a

des modes impulsionnels [38].

**Définition 1.9** (Observabilité des modes non impulsionnels). [38] *Les modes non impulsionnels du système linéaire singulier (1.7) sont observables si la relation suivante*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.26)$$

*est satisfaite.* ■

Pour synthétiser un observateur, l'observabilité des modes non impulsionnels n'est pas requise. Il faut que ces modes soient détectables.

**Définition 1.10** (Détectabilité des modes non impulsionnels). [38] *Les modes non impulsionnels du système linéaire singulier (1.7) sont détectables si la relation suivante*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } \text{Re}(s) \geq 0 \quad (1.27)$$

*est satisfaite.* ■

**Définition 1.11** (Observabilité à l'infini). [38] *Le système linéaire singulier (1.7) est observable à l'infini si la relation suivante*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \quad (1.28)$$

*est satisfaite.* ■

Même si les modes impulsionnels du système linéaire singulier (1.7) ne sont pas observables, il est possible de synthétiser un observateur à condition que ces modes impulsionnels soient détectables.

**Définition 1.12** (Détectabilité impulsionnelle). [38] *Les modes impulsionnels du système linéaire singulier (1.7) sont détectables si la relation suivante*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rang } E \quad (1.29)$$

*est satisfaite.* ■

## 1.2.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Ce paragraphe consiste en une introduction au problème d'observation de l'état des systèmes non linéaires. Nous présentons en particulier quelques définitions sur la notion d'observabilité. Rappelons que l'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie.

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales. Il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indiscernabilité des états, une définition très fréquente a été établie dans Herman et Krener [72]. Des résultats importants ont été établis dans Gauthier et Bornard [56] et Nijmeijer et Van der Schaft [120] pour une classe particulière de systèmes affines en la commande. Pour donner plus de détails sur les différents types de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires, nous disposons dans la littérature de quelques références, à savoir [72], [143], [120], [54] et [17].

### 1.2.2.1 Cas des systèmes temps-continu

Par la suite, une définition plus précise d'observabilité sera donnée dans le cas des systèmes à temps continu de la forme

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1.30a)$$

$$y = h(x, u) \quad (1.30b)$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

**Définition 1.13. (indiscernabilité)** Soit  $y_u^0(t)$  et  $y_u^1(t)$ , ( $t \geq 0$ ), deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée  $u(t)$ , ( $t \geq 0$ ), au système (1.30) avec les conditions initiales  $x^0$  et  $x^1$ , respectivement. On dit que  $x^0$  et  $x^1$  sont indiscernables si

$$y_u^0(t) = y_u^1(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \text{pour tout entrée } u.$$

Dans le cas contraire, on dit que  $x^0$  et  $x^1$  sont discernables. ■

**Définition 1.14. (Observabilité)** Le système (1.30) est dit observable en  $x^0$  si  $x^0$  est discernable de tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . En outre, le système (1.30) est observable si  $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^0$  est discernable. ■

Si nous supposons que  $u$  et  $y$  sont connus, les dérivées de  $u$  et  $y$  peuvent être évaluées. Dans ce cas, le concept d'observabilité peut être interprété de manière claire. Pour un système SISO « Single Input Single Output », nous définissons

$$y' = [y \quad \dot{y} \quad \ddot{y} \quad \dots \quad y^{(n-1)}]^T$$

et

$$u' = [u \quad \dot{u} \quad \ddot{u} \quad \dots \quad u^{(n-1)}]^T.$$

Chaque dérivée  $y^{(i)}$  est une fonction de  $x$  et  $u, \dot{u}, \dots, u^{(i)}$ , et donc aussi une fonction de  $x$  et  $u'$  si  $i \leq n - 1$ .

Soit  $\psi_i$  une fonction définie par

$$y^{(i)} = \psi_i(x, u').$$

La dérivée de  $y^{(i)}$  est alors donnée par

$$y^{(i+1)} = \left[ \frac{\partial \psi_i(x, u')}{\partial x} \right] f(x, u) + \left[ \frac{\partial \psi_i(x, u')}{\partial u'} \right] \frac{du'}{dt}$$

ce qui est, par définition,  $\psi_{i+1}(x, u')$  si  $i + 1 \leq n - 1$ . En définissant l'opérateur linéaire  $\mathcal{M}_f$  par :

$$(\mathcal{M}_f \psi)(x, u') = \left[ \frac{\partial \psi(x, u')}{\partial x} \right] f(x, u) + \left[ \frac{\partial \psi(x, u')}{\partial u'} \right] \frac{du'}{dt}$$

alors  $y'$  s'écrit :

$$y' = \omega(x, u'),$$

où

$$\omega(x, u') = \begin{bmatrix} h(x, u) \\ (\mathcal{M}_f h)(x, u) \\ \vdots \\ (\mathcal{M}_f^{n-1} h)(x, u) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

est la matrice d'observabilité.

Si la matrice d'observabilité (1.31) est inversible, i.e : il existe  $\omega^{-1}$  telle que

$$x = \omega^{-1}(y', u')$$

alors le système correspondant est observable. En outre, si la jacobienne de la matrice d'observabilité,

$$\Omega(x, u') = \frac{\partial \omega(x, u')}{\partial x},$$

est inversible en  $x^0$ , alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{x^0}$  de  $x^0$  sur lequel  $\omega$  est inversible. Dans ce cas, le système correspondant est localement observable, ce qui signifie que  $x^0$  est discernable de tous les points de  $\mathcal{V}_{x^0}$ .

Pour les systèmes multi-sorties, c'est-à-dire  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , la notion d'observabilité peut être investiguée d'une manière similaire.

Soit

$$N = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_p]^T$$

un vecteur d'entiers positifs, avec  $\sum_{i=1}^{i=p} n_i = n$ .

Définissons

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_p]^T,$$

et

$$h(x, u) = \begin{bmatrix} h_1(x, u) & h_2(x, u) & \dots & h_p(x, u) \end{bmatrix}^T.$$

En posant

$$\omega_j(x, u') = \begin{bmatrix} h_j(x, u) \\ (\mathcal{M}_f h_j)(x, u) \\ \vdots \\ (\mathcal{M}_f^{n_j-1} h_j)(x, u) \end{bmatrix},$$

les dérivées de  $y^j$  jusqu'à l'ordre  $n_j$  sont

$$\begin{bmatrix} y_j & \dot{y}_j & \dots & y_j^{(n_j)} \end{bmatrix}^T = \omega_j(x, u').$$

La matrice d'observabilité pour les systèmes multi-sorties est alors définie par :

$$\omega_N(x, u') = \begin{bmatrix} \omega_1(x, u') \\ \omega_2(x, u') \\ \vdots \\ \omega_q(x, u') \end{bmatrix}.$$

S'il existe  $N$  tel que  $\omega_N(x, u')$  soit inversible, alors l'état  $x$  peut être déterminé à partir de  $u'$ ,  $y$ , et les dérivées de chaque  $y_j$  jusqu'à l'ordre  $n_j$ . De ce fait, le système correspondant est observable.

### 1.2.2.2 Cas des systèmes temps-discret

Nous étendons maintenant les concepts d'observabilité cités précédemment, à la classe des systèmes non linéaires temps-discret décrits par le couple d'équations :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{1.32a}$$

$$y_k = h(x_k) \tag{1.32b}$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k = (u_{1k}, \dots, u_{mk})^T \in \mathbb{R}^m$  et  $y_k \in \mathbb{R}^p$ . Pour toute entrée  $u_k \in \mathbb{R}^m$  constante,  $f_{u_k}(x_k) = f(x_k, u_k)$  est un champ de vecteur  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  et les  $h_i, i = 1, \dots, p$  composantes de  $h$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

Désignons par  $U_{[k, k+N-1]}$  une séquence de  $N$  entrées admissibles :

$$U_{[k, k+N-1]} = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times N} \tag{1.33}$$

Soit  $\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, x_0)$  la solution à l'instant  $k \geq 0$  du système (1.32) soumis à la commande  $U_{[0, k-1]}$  et issue de la condition initiale  $x_0$  à l'instant  $k = 0$ .

**Définition 1.15.** ([119]) Deux états distincts  $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  sont dit discernables si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et toute séquence d'entrées admissibles  $U_{[0, k-1]}$ , les trajectoires  $h(\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, x_0))$  et  $\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, \bar{x}_0)$  sont différentes sur leur domaine de définition commun. Dans ce cas, on dit que  $U_{[0, k-1]}$  distingue les points  $x_0$  et  $\bar{x}_0$ . Le système non linéaire (1.32) est dit observable en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , si l'ensemble des états indiscernables de  $x_0$  ne contient que  $x_0$ . ■

Nous remarquons que la définition précédente requiert un test infini qui est irréalisable en pratique. Il semble alors intéressant d'introduire le concept suivant de  $N$ -observabilité forte.

**Définition 1.16** ( $N$ -observabilité forte). [119]

- Le système non linéaire (1.32) est dit  $N$ -fortement observable ou  $N$ -observable en temps fini en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si, pour tout  $k = 0, \dots, N$  et toute séquence d'entrées admissibles  $U_{[0, k-1]}$ ,  $h(\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, x_0)) = h(\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, \bar{x}_0))$ ,  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , implique  $x_0 = \bar{x}_0$ . Dans ce cas, on dit que  $U_{[0, k-1]}$  est une entrée universelle pour (1.32) sur  $[0, N - 1]$ .
- Le système non linéaire (1.32) est dit  $N$ -localement fortement observable en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{x_0}$  de  $x_0$  tel que pour tout  $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ , tout  $k = 0, \dots, N$  et toute séquence d'entrées admissibles  $U_{[0, k-1]}$ ,  $h(\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, x_0)) = h(\chi_{U_{[0, k-1]}}(k, 0, \bar{x}_0))$ , implique  $x_0 = \bar{x}_0$ .
- Si ces propriétés sont vraies pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , le système (1.32) est dit ( $N$ -localement)  $N$ -fortement observable. ■

Une condition d'observabilité plus forte que la  $N$ -observabilité en temps fini peut être également définie.

**Définition 1.17** (Observabilité uniforme). [119] Le système dynamique (1.32) est dit  $N$ -uniformément observable en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si, pour tout  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , tout  $k = 0, \dots, N$  et toute séquence d'entrée admissible  $U_{[0, k]}$ , il existe un entier  $N \in [n - 1, \infty)$  et une fonction  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tels que :

$$\sum_{k=0}^N \left\| h(\chi_{U_{[0, k]}}(k, 0, x_0)) - h(\chi_{U_{[0, k]}}(k, 0, \bar{x}_0)) \right\| \geq \alpha(\|x_0 - \bar{x}_0\|)$$

où la fonction  $\alpha$  est continue, croissante avec  $\alpha(0) = 0$ .

Le système (1.32) est  $N$ -uniformément observable s'il l'est pour tout  $x_k \in \mathbb{R}^n$ . ■

L'observabilité du système (1.32) peut aussi être vérifiée par une condition de rang très simple :

**Définition 1.18** (Observabilité au sens du rang). [119] Le système dynamique (1.32) est dit observable au sens du rang en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si :

$$\dim dO(h)(x_0) = n \tag{1.34}$$

où l'espace d'observation  $O(h)(x_k)$  est défini par

$$O(h)(x_k) = \text{span} \{h_i(x_k), h_i \circ f_{u_{1k}}(x_k), \dots, h_i \circ f_{u_{1k}} \circ \dots \circ f_{u_{ik}}(x_k) \mid 1 \leq i \leq p, \\ u_{1k}, \dots, u_{ik} \in \mathbb{R}^m, x_k \in \mathbb{R}^n\} \tag{1.35}$$



avec

$$dO(h)(x_0) = \{d\psi(x_0), \psi \in O(h)\}$$

Le système (1.32) est observable au sens du rang s'il l'est pour tout  $x_k \in \mathbb{R}^n$ .

Si le système (1.32) est observable au sens du rang en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , alors il est localement fortement observable en  $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$  ([142]).

Si le système (1.32) est localement fortement observable, alors la condition d'observabilité au sens du rang est vérifiée sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . ■

Dans le cas des systèmes LTV et affines en l'état, l'observabilité complète uniforme et la persistance régulière des entrées sont facilement vérifiables en utilisant la notion de grammien d'observabilité.

**Définition 1.19.** ([112]) Le système LTV,  $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$ ,  $y_k = C_k x_k$  où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$ , est dit uniformément complètement observable s'il existe un réel  $\beta > 0$  et des entiers  $N$ ,  $k_0 > 0$  tels que pour tout  $k > k_0$  :

$$\omega_{[k,k+N]}^\circ = \sum_{i=k}^{k+N} \phi_{[i,k]}^T C_i^T C_i \phi_{[i,k]} \geq \beta I_n \quad (1.36)$$

avec  $\phi_{[i,k]} = A_{i-1} A_{i-2} \dots A_k$  pour  $i > k$ , et  $\phi_{[k,k]} = I_n$ . ■

**Définition 1.20.** Considérons le système affine en l'état,  $x_{k+1} = A(u_k)x_k + B(u_k)$ ,  $y_k = C(u_k)x_k$ . La séquence d'entrées  $U_{[k,k+N]}$  est dite régulièrement persistante sur  $[k, k+N]$  s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$\sigma_{\min}(\omega_{[k,k+N]}^\circ) \geq \alpha \quad (1.37)$$

avec

$$\omega_{U_{[k,k+N]}}^\circ = \sum_{i=k}^{k+N} \phi_{U_{[i,k]}}^T C(u_i)^T C(u_i) \phi_{U_{[i,k]}} \quad (1.38)$$

et  $\phi_{U_{[i,k]}} = A(u_{i-1})A(u_{i-2}) \dots A(u_k)$  pour  $i > k$ , et  $\phi_{U_{[k,k]}} = I_n$ . ■

La classe des systèmes non linéaires à temps discret  $U$ -uniformément observables -introduite initialement par Gauthier et Kupka [57] dans le cas temps-continu - a été caractérisée par Benamor et al. dans ([14], [15]).

## 1.3 Estimation d'état : les différents types d'observateurs

Après la brève présentation des conditions d'observabilité pour les différents systèmes utilisés dans ce manuscrit, nous allons citer quelques approches d'observation de l'état évoquées dans la littérature. Nous nous intéressons particulièrement au filtre de Kalman Étendu (EKF), au filtrage optimal des systèmes singuliers temps discrets, à l'approche d'estimation à horizon glissant et aussi aux observateurs d'état des systèmes non linéaire basés sur une approche LMI.

### 1.3.1 Filtre de Kalman Étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard sur le modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires. Dans un environnement déterministe, une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu a été établie dans Boutayeb, *et al.* [25] et Boutayeb et Aubry [23] pour la classe des systèmes non linéaires à temps discret. Cependant cette convergence n'est que locale. L'analyse de la convergence de cet estimateur reste à l'heure actuelle un problème ouvert. Les nombreuses recherches qui ont été menées sur ce sujet ont donné naissance à de nombreuses publications et ouvrages [37], [63], [34], [33], [141], [31], [26], [25], [4].

Avant d'introduire le filtre de Kalman étendu, nous avons besoin d'introduire l'estimateur de Kalman standard pour les systèmes linéaires à temps variant (LTV). Nous abordons les deux cas, les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret.

#### – Cas des systèmes LTV à temps continu :

Pour le système stochastique LTV de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v_1(t) \quad (1.39a)$$

$$y = C(t)x + v_2(t) \quad (1.39b)$$

le filtre de Kalman standard est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + PC^T(t)R^{-1}(y - C(t)\hat{x}) \quad (1.40)$$

où  $P$  est la solution symétrique et définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP. \quad (1.41)$$

#### – Cas des systèmes LTV à temps-discret :

Pour le système stochastique LTV de la forme

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + v_k \quad (1.42a)$$

$$y_k = C_k x_k + w_k \quad (1.42b)$$

le filtre de Kalman standard est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}); \quad (1.43a)$$

$$P_{k+1} = (P_{k+1/k}^{-1} + C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} C_{k+1})^{-1}; \quad (1.43b)$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k; \quad (1.43c)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_k A_k^T + Q_k; \quad (1.43d)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} C_{k+1}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (1.43e)$$

où  $P_0 = \mu I_n > 0$ .  $\hat{x}_{k+1}$  et  $\hat{x}_{k+1/k}$  sont l'estimation et la prédiction de l'état  $x_{k+1}$ . Les matrices  $P_{k+1}$  et  $P_{k+1/k}$  sont les covariances des erreurs d'estimation et de prédiction.  $Q_k$  et  $R_{k+1}$  sont des matrices de pondération dépendant des variables stochastiques  $v_k$  et  $w_k$ .

Le filtre de Kalman étendu [78] est une extension directe du filtre de Kalman standard en remplaçant les matrices d'état et de sortie,  $A, C$  du système linéaire (1.39) ou (1.42) par les jacobiniennes des non-linéarités du système en question.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u) + v(t) \quad (1.44a)$$

$$y = h(x, u) + w(t) \quad (1.44b)$$

L'EKF s'exprime de la manière suivante :

$$\hat{\dot{x}} = f(\hat{x}, u) + PH(\hat{x}, u)R^{-1}(y - h(\hat{x}, u)) \quad (1.45a)$$

$$\dot{P} = F(\hat{x}, u)P + PF(\hat{x}, u)^T + Q - PH(\hat{x}, u)^T R^{-1} H(\hat{x}, u)P \quad (1.45b)$$

où

$$F(\hat{x}, u) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=\hat{x}};$$

$$H(\hat{x}, u) = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right|_{x=\hat{x}}.$$

Ce type d'estimateur a été utilisé dans [81]. La convergence a été établie en utilisant la théorie de la contraction [98], [99], [153].

Dans le cas des systèmes à temps discret de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + G_k v_k \quad (1.46a)$$

$$y_k = h(x_k, u_k) + D_k w_k \quad (1.46b)$$

l'EKF est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} e_{k+1} \quad (1.47)$$

où

$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}; \quad (1.48a)$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_k, u_k); \quad (1.48b)$$

$$P_{k+1/k} = F_k P_k F_k^T + Q_k; \quad (1.48c)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}; \quad (1.48d)$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}); \quad (1.48e)$$

$$F_k = F(\hat{x}_k, u_k) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, u_k) \right|_{x_k=\hat{x}_k}; \quad (1.48f)$$

$$H_k = H(\hat{x}_k, u_k) = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x_k, u_k) \right|_{x_k=\hat{x}_k} \quad (1.48g)$$

où  $P_0 = \mu I_n > 0$ .

Il est courant de choisir en pratique, pour l'optimalité du filtre de Kalman étendu,  $Q_k$  et  $R_{k+1}$  comme les matrices de covariance des bruits du système et des mesures, *i.e* :

$$Q_k = G_k G_k^T, \quad R_{k+1} = D_{k+1} D_{k+1}^T.$$

Ce choix est valable sous certaines conditions (rappelées dans [5]). Dans un contexte déterministe, la synthèse de  $Q_k$  et  $R_{k+1}$  joue un rôle primordial dans l'amélioration des performances du filtre de Kalman étendu. Pour plus de détails sur ce dernier point, nous invitons le lecteur à consulter [49], [48], [31], [129] et [130].

### 1.3.2 Filtrage optimal des systèmes singuliers temps-discret

Nous considérons le système singulier discret suivant :

$$E x_{k+1} = A x_k + B u_k + w_k \quad (1.49a)$$

$$y = C x_k + v_k \quad (1.49b)$$

où  $x$  est le vecteur d'état,  $u$  celui des entrées mesurées et  $y$  celui des sorties mesurées, avec  $E$  et  $A \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Les vecteurs  $w$  et  $v$  sont des processus stochastiques centrés gaussiens et blancs vérifiant

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_i \\ v_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ v_j \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} T & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{ij}, \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} T & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0 \text{ et } R > 0 \quad (1.50)$$

où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon. L'état initial  $x_0$  est indépendant des bruits  $w$  et  $v$ , et est distribué selon une loi gaussienne de moyenne  $\bar{x}_0$  et de covariance  $P_0$ .

### 1.3.2.1 Filtrage optimal des systèmes singuliers dans la littérature

Le filtrage optimal des systèmes singuliers a été introduit par Dai [38] en se restreignant aux hypothèses suivantes sur (1.49) :  $r = n$  et  $\det(sE - A) \neq 0$ . Il propose un estimateur optimal au sens des moindres carrés, le système (1.49) étant supposé causal. La régularité du faisceau de matrices  $(sE - A)$  lui permet de construire les transformations  $P$  et  $Q$  définies dans (1.19) en obtenant  $M = 0$ .

Wang and Bernhard [154] ont étendu les résultats de Dai [38] en considérant le cas où le faisceau de matrices  $(sE - A)$  n'est pas régulier, les matrices  $E$  et  $A$  pouvant être rectangulaires ( $r \neq n$ ). Sous l'hypothèse que le système (1.49) est causal et que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & T \end{bmatrix} = r \text{ et } \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n. \quad (1.51)$$

La définition 1.7 leur permet de décomposer (1.49) en un système équivalent

$$x_{1,k+1} = F_1 x_{1,k} + F_2 x_{2,k} + V_1 v_k \quad (1.52)$$

$$y_{1,k} = C_1 x_{1,k} + w_{1,k} \quad (1.53)$$

$$y_{2,k} = C_2 x_{1,k} + x_{2,k} + w_{2,k} \quad (1.54)$$

En utilisant le principe de la programmation dynamique, le filtre optimal est composé de 3 étapes. Une prédiction de  $x_{1,k+1}$  est obtenue à partir de l'estimation de  $x_{1,k}$  et de  $x_{2,k}$ . Cette prédiction et la mesure  $y_{1,k+1}$  donnent une estimation de  $x_{1,k+1}$ . Cette estimation est utilisée avec la mesure  $y_{2,k+1}$  pour avoir une estimation de  $x_{2,k+1}$ .

Dans [38] et [154], le terme de couplage  $S$  est nul et les conditions de stabilité des filtres ne sont pas données.

Des résultats plus généraux sur le filtrage optimal des systèmes singuliers, avec des conditions d'existence moins restrictives, sont proposés par Nikoukhah *et al.* [123], [122]. Une estimation optimale de  $x_{k+1}$  au sens du maximum de vraisemblance est donnée par :

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AP_k A^T + T & -S & E \\ -S^T & R & C \\ E^T & C^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} A\hat{x}_k + Bu_k \\ y_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

avec une covariance de l'erreur d'estimation  $P_{k+1}$  obéissant à la récurrence suivante :

$$P_{k+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AP_k A^T + T & -S & E \\ -S^T & R & C \\ E^T & C^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

où  $\dagger$  désigne une pseudo-inverse quelconque ( $A = AA^\dagger A$ ). Si le triplet  $(E, A, C)$  est détectable et

si le quadruplet  $(E, A, C, \begin{bmatrix} T & -S \\ -S^T & R \\ I & \end{bmatrix})$  est stabilisable, alors la séquence  $P_{k+1}$  converge vers une solution  $P$  donnée par

$$P = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} APA^T + T & -S & E \\ -S^T & R & C \\ E^T & C^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

et l'estimateur obtenu en remplaçant  $P_k$  et  $P$  dans (1.56) est stable.

Les équations (1.56) et (1.57) sont appelées respectivement équation de Riccati généralisée aux différences à 3 blocs et équations de Riccati généralisée algébrique à 3 blocs.

Il faut noter que les conditions de détectabilité et de stabilisabilité utilisées sont suffisantes mais non nécessaires pour l'existence, l'unicité et la stabilité de l'estimateur optimal (1.55). De plus, si la détectabilité du triplet  $(E, A, C)$  suffit pour assurer l'existence d'un observateur stable pour le système (1.49), elle ne garantit pas à elle seule la stabilité du filtre optimal.

### 1.3.2.2 Filtrage optimal des systèmes singuliers au sens des moindres carrés

Dans [44], [41], [159] et [42], les auteurs utilisent les hypothèses suivants :

$$S = 0 \quad \text{et} \quad Q > 0 \quad (1.58)$$

dans l'équation (1.50). Ils ont proposé un estimateur optimal au sens des moindres carrés pour le système singulier (1.49) en minimisant le critère quadratique suivant

$$J_k(\hat{x}_{i|k}) = \frac{1}{2} \|\hat{x}_{0|k} - \bar{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \|y_{k+1} - C\hat{x}_{i+1|k}\|_{R^{-1}}^2 + \|E\hat{x}_{i+1|k} - A\hat{x}_{i|k} - Bu_k\|_{Q^{-1}}^2 \quad (1.59)$$

En posant  $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k}$ , le filtre optimal est donné par [44] et [159]

$$\hat{x}_{k+1} = P_{k+1} \left( E^T (Q + AP_k A^T)^{-1} (A\hat{x}_k + Bu_k) + C^T R^{-1} y_{k+1} \right) \quad (1.60)$$

avec la covariance de l'erreur d'estimation suivante :

$$P_{k+1} = \left( E^T (Q + AP_k A^T)^{-1} E + C^T R^{-1} C \right)^{-1} \quad (1.61)$$

En définissant l'estimabilité pour le système (1.49) par la possibilité de reconstruire de manière unique l'état  $x_k$ , lorsque  $w_k \equiv 0$  et  $v_k \equiv 0$ , et en utilisant les informations contenues dans  $x_0$ , dans les mesures  $y_i$  et dans les entrées  $u_i$ , pour  $i \in [0; k]$ , [44] et [159] ont démontré que les conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de cet estimateur sont la détectabilité du triplet  $(E, A, C)$  pour des valeurs finies et la détectabilité à l'infini de la paire  $(E, C)$ . A

partir de cette démonstration, un lisseur optimal à point fixe a été proposé dans [157].

La stabilité de l'estimateur (1.60) et la convergence de la séquence (1.61) ont été étudiées dans [39], [41] et [43]. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été énoncées dans [43] en transformant le système (1.49) de la façon suivante :

Sous l'hypothèse de détectabilité à l'infini, il existe des matrices orthogonales  $U$  et  $V$  telles que

$$\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \quad (1.62)$$

où  $\Sigma > 0$  est une matrice diagonale positive. A partir de la décomposition en valeurs singulières (1.62), nous définissons les matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $G$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  and  $\bar{S}$

$$U^T \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma V^T \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \quad (1.63a)$$

$$U^T \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma V^T \bar{B} \\ G \end{bmatrix} \quad (1.63b)$$

$$U^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} \Sigma V^T \bar{Q} V \Sigma & \Sigma V^T \bar{S} \\ \bar{S}^T V \Sigma & \bar{R} \end{bmatrix} \quad (1.63c)$$

En insérant (1.62)-(1.63c) dans les équations du filtre (1.60)-(1.61), nous obtenons l'estimateur suivant

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{A}\hat{x}_k + \bar{B}u_{k+1} + K_k(\bar{y}_{k+1} - \bar{C}\hat{x}_k) \quad (1.64a)$$

$$P_{k+1} = \bar{A}P_k\bar{A}^T - (\bar{A}P_k\bar{C}^T + \bar{S})(\bar{C}P_k\bar{C}^T + \bar{R})^{-1}(\bar{A}P_k\bar{C}^T + \bar{S})^T + \bar{Q} \quad (1.64b)$$

$$K_k = (\bar{A}P_k\bar{C}^T + \bar{S})(\bar{C}P_k\bar{C}^T + \bar{R})^{-1} \quad (1.64c)$$

$$\bar{u}_{k+1} = \begin{bmatrix} u_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{y}_{k+1} = -G\bar{u}_{k+1} \quad (1.64d)$$

dont la forme est proche de celle du filtre de Kalman prédicteur, d'où l'appellation de filtre de Kalman généralisé pour (1.60)-(1.61) et d'équation de Riccati généralisée aux différences (GRDE, « Generalized Riccati Difference Equation ») pour (1.61). Définissons les matrices suivantes

$$\bar{A}^s = \bar{A} - \bar{S}\bar{R}^{-1}\bar{C} \quad \text{et} \quad \bar{Q}^s = \bar{Q} - \bar{S}\bar{R}^{-1}\bar{S}^T \quad (1.65)$$

Ainsi, la paire  $(E, C)$  étant détectable à l'infini et  $P > 0$ , les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité du filtre de Kalman généralisé pour (1.60)-(1.61) et de convergence de la solution  $P_{k+1}$  de la GRDE (1.61) vers l'unique solution  $P$  de l'équation algébrique de Riccati généralisée, appelée GARE « Generalized Algebraic Riccati Equation »,

$$P = \left( E^T (Q + APA^T)^{-1} E + C^T R^{-1} C \right)^{-1} \quad (1.66)$$

sont directement déduites des résultats présentés dans [47] pour le filtre de Kalman et l'équation de Riccati

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}^s \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} \text{ et } |s| \geq 1 \quad (1.67a)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sI - \bar{A}^s & \bar{Q}^{s^{1/2}} \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} \text{ et } |s| = 1 \quad (1.67b)$$

Lorsque  $r = n$  et  $\det(sE - A) \neq 0$ , une version fréquentielle du filtre de Kalman généralisé stationnaire (1.60) et (1.66) a été proposée dans [158] en utilisant les fonctions de transfert.

### 1.3.3 Approche d'estimation à horizon glissant

Il est bien établi que le filtre de Kalman est l'estimateur d'état optimal pour les systèmes linéaires sans contraintes avec des bruits entachant l'état et la mesure. De multiples systèmes physiques, cependant, présentent une dynamique non linéaire et ont des états qui subissent des contraintes, telles que des concentrations ou des pressions non négatives. Par conséquent, le filtre de Kalman n'est plus directement applicable. En réponse à cela, des estimateurs d'état non linéaires de différents types ont été proposés (voir Soroush [144]). Nous concentrons notre attention dans cette sous-section sur la méthode MHE (Moving Horizon Estimation).

L'idée de la méthode MHE date du début des années quatre-vingt-dix. Le principe est de minimiser un critère sur une fenêtre de temps, d'un instant antérieur jusqu'au temps courant, celle-ci étant déplacée à chaque pas d'échantillonnage. Le critère est calculé à partir des mesures et de leur simulation, les degrés de liberté de la minimisation correspondant à l'état initial de la fenêtre, au minimum. Le critère est une mesure de la différence entre les sorties simulées et les sorties réelles. En général, le critère est quadratique, et son minimum correspond aux sorties simulées les plus proches des sorties réelles. En l'absence de perturbations, son minimum est nul. Par contre, lors d'une perturbation, ce n'est pas le cas généralement. Les sorties simulées sont obtenues à partir du modèle du procédé.

On minimise donc un critère sur une fenêtre. Le degré de liberté correspond à la taille de l'espace d'état, au minimum, et chaque évaluation du critère correspond à une simulation d'un modèle sur le temps correspondant à la fenêtre. C'est pourquoi ces méthodes sont très exigeantes en coût de calcul, elles font appel à une simulation numérique, et à la minimisation d'une fonction dont chaque évaluation nécessite cette simulation.

Lorsque le modèle est linéaire stochastique, et sous couvert de bonnes hypothèses sur les bruits et de bien paramétrer les matrices de pondération, on peut démontrer que la minimisation d'un critère quadratique sur un horizon glissant est équivalente au filtre de Kalman, et donc correspond au maximum de vraisemblance pour les modèles gaussiens [78].

La méthode MHE est une stratégie pratique pour contourner les difficultés de calcul associées à l'estimation basée sur l'optimisation. Elle a été traitée par plusieurs auteurs. La première



application de la méthode MHE aux systèmes non linéaires peut être trouvée dans [77]. La stratégie utilisée par les auteurs ignore les perturbations et les contraintes, et tente d'estimer seulement l'état initial du système. La méthode à horizon glissant pour les systèmes linéaires sans contraintes a été aussi discutée dans [148] et [90]. [16] a étudié la stratégie de l'horizon glissant pour l'estimation de l'état comme extension logique de la commande prédictive. [88] et [95] l'ont étudié pour la réconciliation de données non linéaires. [18] a étudié l'aspect numérique et statistique relié à l'optimisation basée sur la réconciliation de données non linéaires. [107] et [19] ont étudié la stratégie multitâche pour la méthode MHE et l'avantage d'incorporer des contraintes dans l'estimation. [53] a étudié la stabilité de la méthode MHE linéaire sans contraintes avec filtrage et mise à jour lisse. La méthode MHE a été appliquée sur les systèmes hybrides par [13] et aussi sur les processus de polymérisation de la compagnie Exxon chemical par [134]. La méthode MHE étant formulée comme un problème d'optimisation, il est possible de manipuler explicitement les contraintes d'inégalité. [132] et [131] ont étudié l'interprétation probabiliste des contraintes dans l'estimation. [116] et [118] ont dérivé quelques conditions préliminaires de stabilité de l'estimation de l'état avec des contraintes d'inégalité. Dans [126] et [128], deux algorithmes ont été proposés pour mettre en oeuvre la méthode MHE. En plus, la stabilité et la convergence de ces algorithmes ont été établies.

Considérons le système non linéaire bruité suivant :

$$x_{k+1} = f(x_k, k) + w_k, \quad (1.68a)$$

$$y_k = g(x_k, k) + v_k, \quad (1.68b)$$

avec  $x_k \in X_k$ ,  $v_k \in V_k$ ,  $w_k \in W_k$ . Nous supposons que, pour tout  $k \geq 0$ , les fonctions  $f_k : X_k \times W_k \rightarrow X_k$  et  $g_k : X_k \rightarrow \mathbb{R}^p$  et les ensembles  $X_k \subset \mathbb{R}^p$ ,  $W_k \subset \mathbb{R}^m$  et  $V_k \subset \mathbb{R}^p$  sont fermés avec  $0 \in W_k$  et  $0 \in V_k$ .

La solution de l'équation (1.68) à l'instant  $k$ , avec l'état initial  $z$  à l'instant  $l$  et la séquence de perturbations d'entrée  $\{w_j\}_{j=l}^k$ , est donnée par  $x(k, z, l, \{w_j\})$ . Notons que  $y(k, z, l, \{w_j\}) = g_k(x(k, z, l, \{w_j\}))$  indique la sortie de l'équation différentielle (1.68) à l'instant  $k$  quand l'état initial est à l'instant  $l$  et la séquence de perturbation d'entrée est  $\{w_j\}_{j=l}^k$ .  $x(k, z, l)$  et  $y(k, z, l) = g_k(x(k, z, l))$  seront utilisées pour indiquer les réponses sans bruit. Notons que la différence entre  $y_k$  et  $y(k, z, l)$  est la suivante :  $y_k$  est le vecteur qui indique la sortie mesurée à l'instant  $k$ , tandis que  $y(k, z, l)$  indique la sortie prédite à l'instant  $k$  lorsque la condition initiale à l'instant  $l$  est  $z$  et la séquence de perturbations est  $\{w_j\}_{j=l}^k$ .

Le problème de l'estimation avec contraintes, pour tout  $T \geq 0$ , est formulé de la façon suivante :

$$P_1(T) \Phi_T^* = \min_{x_0, \{w_k\}_{k=0}^{T-1}} \{\Phi_T(x_0, \{w_k\}) : (x_0, \{w_k\}) \in \Omega_T\} \quad (1.69)$$

où la fonction objectif est définie par :

$$\Phi_T(x_0, \{w_k\}) = \sum_{k=0}^{T-1} L_k(w_k, v_k) + \Gamma(x_0), \quad (1.70)$$

avec

$$L_k(w_k, v_k) = \|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2, \quad (1.71)$$

où les matrices  $R$  et  $Q$  sont des matrices définies positives,  $\|x\|_{Q^{-1}}^2 = x^T Q^{-1} x$  et  $\|x\|_{R^{-1}}^2 = x^T R^{-1} x$ .

L'ensemble des contraintes est défini par :

$$\Omega_T = \left\{ \begin{array}{l} x(k, x_0, 0, \{w_j\}) \in X_k, \quad k = 0, \dots, T, \\ (x_0, \{w_k\}) : w_k \in W_k, \quad k = 0, \dots, (T-1), \\ v_k = y_k - y(k, x_0, 0, \{w_j\}) \in V_k, \quad k = 0, \dots, (T-1) \end{array} \right\}, \quad (1.72)$$

et  $v_k = y_k - y(k, x_0, 0, \{w_j\})$ . La pénalité initiale  $\Gamma(\cdot)$  résume l'information *a priori* à l'instant  $k = 0$  et satisfait  $\Gamma(\hat{x}_0) = 0$ , où  $\hat{x}_0 \in X_0$  est la valeur approximative *a priori* de  $x_0$ , et  $\Gamma(x) > 0$  pour  $x \neq \hat{x}_0$ . La pénalité initiale est définie par :

$$\Gamma(x) := (x - \hat{x}_0)^T \overline{\Pi}_0^{-1} (x - \hat{x}_0), \quad (1.73)$$

où  $\overline{\Pi}_0$  est une matrice définie positive. La solution du problème  $P_1$  à l'instant  $T$  est la paire :

$$(\hat{x}_{0|T-1}, \{\hat{w}_{k|T-1}\}_{k=0}^{T-1}),$$

à partir de cette paire optimale, nous pouvons calculer l'estimateur  $\{\hat{x}_{k|T-1}\}_{k=0}^T$  de la séquence  $\{x_k\}$ . N'oublions pas que la séquence  $\{\hat{x}_{k|T-1}\}_{k=0}^T$  est la solution de l'équation (1.68) avec l'estimé de l'état initial  $\hat{x}_{0|T-1}$  à l'instant  $k = 0$  et la séquence de perturbations  $\{\hat{w}_{k|T-1}\}_{k=0}^{T-1}$ . Afin de simplifier les notations, nous écrivons :  $\hat{x}_j = \hat{x}_{j|j-1}$  où  $\hat{x}_0 = \hat{x}_{0|0}$ . Considérons un instant  $T$  et supposons que les sorties  $y(t)$ ,  $t = 0, \dots, T-1$  sont disponibles. L'observateur à information complète (FI : Full Information) est défini comme un estimateur d'état obtenu par la résolution du problème  $P_1$ .

Les matrices  $Q$  et  $R$  pondèrent respectivement la déviation entre l'état mesuré et l'état prédit, la sortie mesurée et la sortie prédite. Dans un raisonnement probabiliste, les deux matrices doivent être choisies comme des matrices de covariance des bruits  $w$  et  $v$ ;  $\Gamma_0$  doit refléter la confiance faite sur le choix de l'état initial. L'observateur FI utilise toutes les données disponibles  $y(t)$ ,  $t = 0, \dots, T-1$  pour reconstruire la trajectoire de l'état. L'utilisation de toutes les informations disponibles est souhaitable pour l'estimation, mais cela représente un inconvénient du point de vue calcul. En effet si  $T$  augmente, la taille du problème d'optimisation  $P_1$  augmente aussi. Pour palier à cet inconvénient, la notion d'un horizon fixe et glissant a été introduite. C'est dans ce contexte que la stratégie d'estimation à horizon glissant s'inscrit.

Considérons un instant de temps  $T$  et  $M \in N_+$  un horizon fixe. En utilisant la programmation dynamique, on peut réécrire les équations (1.70) comme suit :

$$\Phi_T(x_0, \{w_k\}_{k=0}^{T-1}) : = \sum_{k=T-M}^{T-1} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2) + \sum_{k=0}^{T-M-1} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2) + \Gamma(\hat{x}_{0|T-1}, \{\hat{w}_{k|T-1}\}_{k=0}^{T-1}) \quad (1.74a)$$

On peut vérifier facilement que la quantité

$$\sum_{k=T-M}^{T-1} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2),$$

dépend seulement de l'état  $x_{T-M}$  et la séquence de perturbations  $\{w_k\}_{k=T-M}^{T-1}$ . En exploitant les résultats de la programmation dynamique, nous pouvons établir l'équivalence entre le problème d'estimation à information complète et le problème d'estimation à fenêtre de taille fixe. A partir du principe d'optimalité, nous remplaçons les équations (1.69) - (1.71) par l'expression quadratique équivalente suivante :

$$\Phi_T^* = \min_{x_{T-M}, \{w_k\}_{k=T-M}^{T-1}} \sum_{k=T-M}^{T-1} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2) + Z_{T-M}(x_{T-M}) \quad (1.75)$$

sous l'ensemble des contraintes (1.68) et où :

$$Z_T(p) = \min_{x_0, \{w_k\}_{k=0}^{T-1}} \{\Phi_T(x_0, \{w_k\}) : x_T = p\}.$$

La structure générale de l'estimation à horizon glissant est fournie par le programme mathématique (1.75). Dans le premier programme (1.69) nous considérons que toutes les mesures du processus sont disponibles, mais dans l'estimation à horizon glissant, nous prenons seulement en compte les  $M$  dernières mesures. Nous indiquons que la taille du problème d'optimisation (1.75) est bornée et que la pénalité  $Z_{T-M}$  est appelée coût d'arrivée. Si le système est linéaire et sans contraintes, on peut calculer ce coût d'arrivée à partir de la mise à jour récursive de la matrice de covariance du filtre de Kalman. La stratégie MHE a principalement deux degrés de liberté : la pénalité initiale et la longueur minimale de la fenêtre d'observation  $M$ . Ces deux paramètres doivent être ajustés pour garantir la convergence.

Le coût d'arrivée fournit une méthode générale pour la compression des données du processus. Pour montrer comment calculer le coût d'arrivée, prenons le système linéaire suivant :

$$x_{k+1} = Ax_k + Gw_k, \quad y_k = Cx_k + v_k$$

pour lequel nous ignorons les contraintes  $X_k$ ,  $W_k$  et  $V_k$ . En utilisant la formule de mise à jour de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman,

$$\Pi_T = GQG^T + A\Pi_{T-1}A^T - A\Pi_{T-1}C^T(R + C\Pi_{T-1}C^T)^{-1}C\Pi_{T-1}A^T \quad (1.77)$$

alors nous pouvons remplacer le coût d'arrivée par :

$$Z_T(x) = (x - \hat{x}_T)^T \Pi_T^{-1} (x - \hat{x}_T) + \Phi_T^* \quad (1.78)$$

où  $\hat{x}_T$  représente l'estimateur optimal de  $x$  à l'instant  $T$  et  $\Phi_T^*$  est le coût optimal à l'instant  $T$ . D'après les arguments précédents, nous avons :

$$\begin{aligned} \min_{x_0, \{w_k\}_{k=0}^{T-1}} \Phi_T(x_0, \{w_k\}) &= \min_{x_{T-M}, \{w_k\}_{k=T-M}^{T-1}} \sum_{k=T-M}^{T-1} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2) + \\ &\|x_{T-M} - \hat{x}_{T-M}\|_{\Pi_{T-M}^{-1}}^2 + \Phi_{T-M}^*. \end{aligned}$$

Nous pouvons retrouver le filtre de Kalman en considérant l'horizon  $M = 1$ . Cependant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Phi_T(x_{T-1}, w_{T-1}) &= v_{T-1}^T R^{-1} v_{T-1} + w_{T-1}^T Q^{-1} w_{T-1} + \\ &(x_{T-1} - \hat{x}_{T-1})^T \Pi_{T-1}^{-1} (x_{T-1} - \hat{x}_{T-1}). \end{aligned}$$

Pour trouver  $\min \Phi_T$ , par rapport à  $w_{T-1}$  et  $x_{T-1}$ , nous remplaçons le résultat d'optimisation dans l'équation du modèle, après quelques calculs, nous obtenons le filtre de Kalman :

$$\hat{x}_T = A\hat{x}_{T-1} + L(y_T - CA\hat{x}_{T-1})$$

où

$$L = A\Pi_{T-1}C^T(R + C\Pi_{T-1}C^T)^{-1}.$$

Malheureusement, une expression algébrique du coût d'arrivée n'existe pas en présence de contraintes ou si le système est non linéaire. Pour faire face à ce problème, nous avons besoin de générer une expression algébrique approximative du coût d'arrivée. Dans Rao [126], le modèle est approximé par la série de Taylor du premier ordre autour de la trajectoire estimée  $\{\hat{x}_k\}_{k=0}^T$ . Cette stratégie rapproche le coût d'arrivée avec la formule de mise à jour de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman étendu. Reconsidérons le système (1.68) et prenons les approximations suivantes :

$$A_k = \left. \frac{\partial f(x_k, k)}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_T}, \quad C_k = \left. \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_T},$$

nous obtenons la matrice de covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman étendu à partir de l'équation :

$$\Pi_{T+1} = Q + A_T(\Pi_T - \Pi_T C_T^T (R + C_T \Pi_T C_T^T)^{-1} C_T \Pi_T) A_T^T. \quad (1.81)$$

L'utilisation du filtre de Kalman étendu pour approximer le coût d'arrivée a plusieurs avantages. Dans le cas où nous n'avons pas de contraintes, l'estimateur précédent est un filtre de Kalman étendu.

Nous reformulons le problème de l'estimation à horizon glissant par la fonction quadratique suivante :

$$\hat{\Phi}_T^* = \min_{z, \{w_k\}_{k=T-M}^{T-1}} \hat{\Phi}_T(z, \{w_k\}), \quad (1.82)$$

avec les contraintes

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) + w_k, \quad (1.83a)$$

$$y_k = g(x_k, k) + v_k, \quad (1.83b)$$

où  $x_k \in X_k$ ,  $v_k \in V_k$ ,  $w_k \in W_k$  et la fonction objectif définie par :

$$\hat{\Phi}_T(z, \{w_k\}) = \sum_{k=T-M}^{T-1} (\|w_k\|_{Q^{-1}}^2 + \|v_k\|_{R^{-1}}^2) + \|z - \hat{x}_{T-M}^{mh}\|_{\Gamma_{T-M}^{-1}}^2 + \hat{\Phi}_{T-M}^*. \quad (1.84)$$

avec :  $x_k := x(k - (T - M), z, \{w_j\})$  et  $v_k = y_k - y(k, z, T - M, \{w_j\})$ .

Le coût d'arrivée de la méthode MHE  $\hat{\phi}_T^*$  est une approximation du coût d'arrivée de l'information complète  $\phi_T^*$  obtenu par le remplacement du coût d'arrivée  $Z_{T-M}(z)$  par l'approximation quadratique  $\|z - \hat{x}_{T-M}^{mh}\|_{\Pi_{T-M}}^2 + \hat{\Phi}_{T-M}^*$ . La paire  $(\hat{x}_{T-M}^{mh}, \Pi_{T-M})$  récapitule l'information a priori à l'instant  $T - M$ . Le vecteur  $\hat{x}_{T-M}^{mh}$  est l'estimateur d'état à horizon glissant à l'instant  $T - M$  et la matrice  $\Pi_{T-M}$  est une solution de l'équation (1.77) avec la condition initiale  $\Pi_0$ . Pour  $T \leq M$ , le problème de l'estimation à horizon glissant est équivalent à celui de l'estimateur à information complète, alors  $\hat{\Phi}_T = \Phi_T$ . La solution de (1.84) à l'instant  $T$  est la paire unique  $(z^*, \{\hat{w}_{k|T-1}^{mh}\}_{k=T-M}^{T-1})$ , et à partir de cette paire optimale, nous calculons l'état estimé  $\{\hat{x}_{k|T-1}^{mh}\}_{k=T-M}^T$ , où

$$\hat{x}_{k|T-1}^{mh} = x(k - (T - M), z^*, \{\hat{w}_j^{mh}\}). \quad (1.85)$$

Cette formule de MHE a été proposée pour la première fois dans [116] et [133].

### 1.3.4 Observateurs d'état des systèmes non linéaires : approche LMI

Malgré l'intérêt porté, durant ces dernières décennies, au problème d'observation de l'état des systèmes non linéaires, peu d'attention a été prêtée aux systèmes à temps discret. On ne trouve dans la littérature qu'un nombre réduit de méthodes destinées à l'étude de cette classe de systèmes. L'une d'entre elles consiste en l'utilisation du filtre de Kalman étendu (EKF) [23], [130], [28]. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la classe des systèmes lipschitziens à temps discret. Notons que la plupart des approches concernant la classe des systèmes lipschitziens à temps continu ne peuvent être transposées directement au cas des systèmes à temps discret. En effet, dans la variation de la fonction de Lyapunov, il apparaît un terme additif (positif) empêchant de compléter la procédure de synthèse. Dans cette section, nous abordons le problème de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret. Cette approche utilise la condition de Lipschitz conjointement avec l'inégalité classique de Lyapunov. Nous constatons d'une part que plusieurs résultats sur l'observation d'état pour la classe des systèmes lipschitziens, dans le cas continu, ont été publiés (par exemple, [1], [130], [125], [165], [124] et [29]). D'autre part, dans le cas discret, il n'y a pas beaucoup de résultats pour cette classe de systèmes (voir [6], [160] et [74]).

Considérons l'ensemble des systèmes non linéaires suivant :

$$x(k + 1) = Ax(k) + f(x(k), u(k)) \quad (1.86a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (1.86b)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système et  $y \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie.  $A$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$  est une fonction non linéaire lipschitzienne par rapport à  $x$ , c'est-à-dire :

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad (1.87)$$

pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  et  $\gamma > 0$  indépendant de  $u$ .

L'observateur correspondant au système (1.86) est de type Luenberger et il s'écrit de la manière suivante :

$$\hat{x}(k + 1) = A\hat{x}(k) + f(\hat{x}(k), u(k)) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (1.88)$$

où  $\hat{x}(k)$  est l'état estimé de  $x(k)$ .

Le problème de la synthèse de l'observateur (1.88) revient à déterminer le gain constant  $L$ , assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le problème principal dans le cas des systèmes à temps discret est la présence d'un terme additif positif qui apparaît au niveau de la variation de la fonction de Lyapunov. Pour éviter cet obstacle, nous avons utilisé un nouvel artifice de calcul en réécrivant la propriété de Lipschitz autrement. Ceci mène au théorème suivant :

**Théorème 1.1.** ([6]) *L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine s'il existe deux matrices  $P = P^T > 0$  et  $R$  de dimensions appropriées et un scalaire positif  $\tau$  tels que la LMI suivante soit faisable :*

$$\begin{bmatrix} -P + \tau\gamma^2 I_n & A^T P - C^T R & A^T P - C^T R \\ (\star) & P - \tau I_n & 0 \\ (\star) & (\star) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.89)$$

et alors le gain  $L$  est donné par  $L = P^{-1}R^T$ . ■

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré essentiellement à quelques rappels sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires et aux différents types d'observateurs d'état cités dans la littérature. Nous avons exhibé quelques rappels, indispensables pour comprendre la suite de ce travail, sur les propriétés structurelles des systèmes singuliers. Ensuite, l'observabilité des systèmes singuliers et des systèmes non linéaires a été présentée. Avant de terminer ce chapitre, un état de l'art qui regroupe quelques méthodes de synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires et non linéaires est abordé. Nous avons évoqué brièvement : le filtre de Kalman étendu, le filtrage optimal des systèmes singuliers, l'approche MHE et la synthèse d'observateur pour la classe des systèmes Lipschitziens à temps discret.



---

# Estimation à horizon glissant pour les systèmes singuliers

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
<b>2.2</b>	<b>Estimation à horizon glissant au sens des moindres carrés</b>	<b>41</b>
2.2.1	Formulation du problème	41
2.2.2	Estimation à information complète	42
2.2.3	Estimation à horizon glissant	47
2.2.4	Exemple numérique	51
<b>2.3</b>	<b>Application aux systèmes linéaires à entrées inconnues</b>	<b>53</b>
2.3.1	Estimateurs des systèmes linéaires à entrées inconnues	54
2.3.2	Estimateurs à entrées inconnues à horizon glissant	55
2.3.3	Exemple numérique	57
<b>2.4</b>	<b>Estimation à horizon glissant au sens de la variance minimale</b>	<b>60</b>
2.4.1	Formulation du problème	60
2.4.2	Filtrage optimal des systèmes singuliers	61
2.4.3	Convergence et stabilité de l'estimateur	66
2.4.4	Exemple numérique	67
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>

---



## 2.1 Introduction

Les modèles algébro-différentiels représentent les phénomènes physiques dont la dynamique ne peut pas être décrite uniquement par des équations différentielles ordinaires. Comme leur nom l'indique, ces systèmes se traduisent par un ensemble d'équations différentielles, en général non ordinaires, et un ensemble de contraintes algébriques. L'estimation de l'état des systèmes algébro-différentiels est un problème partiellement résolu. De nombreux travaux existent dans la littérature pour résoudre le problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers ou algébro-différentiels. Pour une bonne introduction aux systèmes singuliers, le lecteur intéressé peut consulter les références cités dans les thèses de Zasadzinski [157], Bassong-Onana [10] et Marx [106].

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers en utilisant l'approche d'estimation à horizon glissant (MHE). La stratégie de base de la méthode MHE est de transformer le problème d'estimation en un problème à critère quadratique en utilisant une fenêtre de taille fixe glissante. Cette fenêtre est nécessaire pour limiter la taille du problème quadratique. Dans le cadre de la méthode MHE, seulement une quantité fixe de données de mesures est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation. En conséquence, un échantillon des anciennes données est écarté dès qu'un nouvel échantillon devient disponible. Pour les systèmes non linéaires, le problème de la synthèse d'observateurs de ce genre de systèmes a été abordé sous un angle différent en utilisant la méthode MHE par Grizzle et Moraal [64], Michalska et Mayne [108], Moraal [113], Michalska et Mayne [109], Moraal et Grizzle [114]. L'objectif de ces méthodes consiste à fournir des solutions numériques issues des algorithmes de minimisation, en transformant le problème classique d'estimation dynamique en la résolution, au sens des moindres carrés, d'un système d'équations non linéaires. L'utilisation de ces algorithmes dans le passé était souvent coûteux au niveau de temps de calcul. Cet obstacle est surmonté grâce au progrès accéléré de capacité de calcul et de mémoires des ordinateurs. L'intérêt d'une telle approche est d'offrir un compromis entre les méthodes récursives et non récursives, et de pouvoir utiliser les avantages de ces dernières, en limitant le coût de calcul.

L'estimation de l'état des systèmes singuliers est un problème partiellement résolu. Dans le cas linéaire, le filtre de Kalman généralisé est présenté comme une solution aux problèmes d'estimation. Pour construire ce filtre, nous devons utiliser toutes les mesures disponibles. Dans la réalité, les systèmes subissent généralement des contraintes telles que : des états positifs, des entrées bornées, une partie seulement des données est disponible, *etc.* Comme le filtre de Kalman généralisé ne peut pas prendre les contraintes en compte, l'approche MHE sera proposée. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas où une partie seulement des données est disponible. Nous allons proposer deux estimateurs optimaux, au sens des moindres carrés et au sens de la variance minimale. Notons que l'utilisation de l'approche MHE dans l'estimation à variance minimale pour les systèmes singuliers n'a pas été traité dans la littérature.

La section 2.2 traite le problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers aux sens des moindres carrés. Une approche MHE est présentée. Lorsque le modèle est singulier stochastique, et sous couvert de bonnes hypothèses sur les bruits, et de bien paramétrer les matrices de pondération, on peut démontrer que la minimisation d'un critère quadratique sur un horizon

glissant est équivalente au filtre de Kalman pour les systèmes singuliers, et donc correspond au maximum de vraisemblance pour les modèles gaussiens.

Dans la section 2.3, en se basant sur le résultat de la section précédente, l'approche de l'estimation à horizon glissant est appliquée cette fois pour l'estimation de l'état et des entrées inconnues des systèmes linéaires.

Enfin dans la section 2.4, nous nous intéressons à l'estimation à variance minimale. Le problème de la synthèse d'observateur des systèmes singuliers est abordé en utilisant la technique d'estimation sur une fenêtre glissante. L'analyse de convergence de l'estimateur MHE est abordée.

## 2.2 Estimation à horizon glissant au sens des moindres carrés

Les systèmes singuliers ont été introduits pour décrire la dynamique de certains systèmes linéaires pour lesquels la représentation d'état standard n'est pas applicable. L'estimation de l'état pour un système singulier a été traitée par plusieurs auteurs [38], [43], [44], [42], [122], [121], [161], [162], [75] et [76]. Dans la majorité de ces articles, la solution du problème d'estimation de l'état des systèmes singuliers est présentée sous forme du filtre de Kalman généralisé. Dans cette section, nous nous sommes intéressés à l'étude du problème de filtrage de Kalman dans un cadre déterministe qui est étudié, surtout, dans [43], [44], [75] et [76]. Nous proposons une solution, basée sur l'approche MHE, au problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers dans un cadre déterministe.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'utilisation des résultats de la commande prédictive afin d'appliquer la méthode de l'horizon glissant dans l'estimation de l'état et des paramètres des systèmes linéaires et non linéaires. Cette technique d'estimation utilise l'optimisation en ligne (temps réel) d'une façon analogue à celle de la commande prédictive (MPC) [117], [133], [97], [127], [126], [128].

### 2.2.1 Formulation du problème

Nous considérons, dans un premier temps, un système singulier linéaire et invariant décrit par les équations à temps discret suivantes :

$$Ex_{k+1} = Fx_k + w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1a)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2.1b)$$

où  $x_k \in \mathcal{X}^n$  est le vecteur d'état,  $z_k \in \mathcal{X}^m$  est le vecteur de mesures,  $w_k \in \mathcal{X}^p$  est le vecteur de bruit d'état et  $v_k \in \mathcal{X}^m$  est le vecteur de bruit d'observation.  $E \in \mathcal{X}^{p \times n}$ , dans le cas où  $p = n$  la matrice  $E$  est singulière.  $F \in \mathcal{X}^{p \times n}$  et  $H \in \mathcal{X}^{m \times n}$  sont des matrices constantes. Aucune hypothèse n'est exigée sur les bruits.

**Remarque 2.1.** Le modèle (2.1) constitue bien une représentation unifiée des systèmes dynamiques linéaires. Cependant, plusieurs cas sont à distinguer selon le rang de la matrice  $E$  :

- Si  $\text{rang}(E) = r = p = n$ , alors  $E$  est inversible et (2.1) est un système linéaire "standard" ou explicite,
- Si  $\text{rang}(E) = r = n < p$ , alors (2.1a) est décomposable en équations différentielles et en équations algébriques, et (2.1) est un système linéaire "standard" avec des contraintes algébriques linéaires,
- Si  $\text{rang}(E) = r = p < n$ , alors (2.1) est un système linéaire "standard" à dynamiques partielles.
- Si  $\text{rang}(E) = r$ , avec  $r < n$  et  $r < p$ , alors (2.1) est un système linéaire "standard" à dynamiques partielles avec des contraintes algébriques linéaires.

■

Nous rappelons ici que  $\hat{x}_{k|k}$  est l'estimation de l'état  $x_k$  basée sur les mesures  $z_i$  prises entre l'instant 0 et l'instant  $k$ .

Le but de ce travail est d'appliquer la méthode MHE aux systèmes singuliers linéaires. Nous avons indiqué, dans le premier chapitre, que dans le cas de l'estimation à information complète, l'utilisation de toutes les mesures disponibles  $z_0, z_1, \dots, z_k$  pour reconstruire la trajectoire de l'état est indispensable. L'utilisation de toutes les informations est souhaitable pour l'estimation, mais cela représente un inconvénient du point de vue des calculs. Dans la méthode MHE, l'état est estimé sur une fenêtre comprenant les  $(N+1)$  mesures les plus récentes. Celle-ci est déplacée à chaque instant (pas d'échantillonnage). L'ancienne information est incorporée en utilisant l'estimée initiale  $\bar{x}_{k-N}$  qui est calculée à partir de l'ancien état filtré et de la matrice de pondération  $P_{k-N|k-N}$ .

Avant d'aborder l'estimation à information complète pour les systèmes singuliers, nous avons besoin d'introduire les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 2.2.1.** La matrice  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est de rang plein colonnes (voir [44, 42, 122, 75]). ■

## 2.2.2 Estimation à information complète

Dans cette section, nous allons traiter le problème d'estimation à information complète dans le cas déterministe. Généralement, une approche déterministe est utilisée lorsqu'aucune information satisfaisante sur les perturbations  $v_k$  et  $w_k$  n'est pas disponible. Notons que dans le cas des systèmes linéaires standards, ce problème est déjà présenté dans le premier chapitre.

Le problème général du filtrage déterministe des systèmes singuliers est formulé de la façon suivante [3] (voir p. 135)

$$\min J_0(\{x_0\}) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{P_0}^2 + \|z_0 - Hx_0\|_{V^{-1}}^2$$

pour  $k = 0$  et

$$\min J_k(\{x_i\}_{i=0}^k) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \|Ex_{i+1} - Fx_i\|_{W^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^k \|z_j - Hx_j\|_{V^{-1}}^2 \quad (2.2)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} w_k &= Ex_{k+1} - Fx_k, \\ v_k &= z_k - Hx_k, \end{aligned}$$

pour  $k > 0$ , où  $\|z\|_A^2 = z^T A z$ .  $V$  et  $W$  sont deux matrices de pondération symétriques définies positives.  $P_0$  est une matrice de pondération, symétrique définie positive, associée à l'erreur d'estimation de l'état initial  $x_0$ .

Avant de fournir une solution au problème (2.2), introduisons le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** [92] *Considérons les matrices  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$  et  $x$  de dimensions appropriées avec  $R \geq 0$ . Le problème d'optimisation*

$$\min_X (\alpha X - \beta)^T R (\alpha X - \beta) \quad (2.3)$$

*admet une solution unique si, et seulement si, la matrice  $\alpha^T R \alpha$  est non singulière. i. e  $\hat{X} = (\alpha^T R \alpha)^{-1} \alpha^T R \beta$ . ■*

En se basant sur le lemme 2.1, on obtient le théorème suivant qui fournit la solution optimale de (2.2).

**Théorème 2.1.** (Boukroune et al. [21]) *Si l'hypothèse 2.2.1 est vérifiée, l'état estimé  $\hat{x}_{k|k}$  qui minimise le critère  $J_k$  de l'équation (2.2) et la matrice  $P_{k|k}^{-1}$ , correspondant à la pondération de l'erreur d'estimation de l'état  $x_k$ , sont donnés par*

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} I \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{k-1 fois} \end{bmatrix}^T (\Xi_k + Q_k)^{-1} g_k \mathfrak{B}_k \quad (2.4a)$$

$$P_{k|k}^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{k-1 fois} \end{bmatrix}^T (\Xi_k + Q_k)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{k-1 fois} \end{bmatrix} \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned}
 \text{pour } k > 0, \text{ avec } P_{0|0} &= (\Xi_0 + Q_0)^{-1}, \quad \mathfrak{B}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_i^T & \mathcal{Z}_{i-1}^T & \dots & \mathcal{Z}_2^T & \mathcal{Z}_1^T & \mathcal{Z}_0^T \end{bmatrix}^T, \\
 Q_i &= \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega \Sigma & 0 \\ 0 & Q_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \Xi_i = \begin{bmatrix} 0 & \Sigma^T \Omega \alpha_i \\ \alpha_i^T \Omega \Sigma & \Xi_{i-1} + \alpha_i^T \Omega \alpha_i \end{bmatrix}, \quad g_i = \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega & 0 \\ \alpha_i^T \Omega & g_{i-1} \end{bmatrix}, \\
 Q_0 &= \Sigma_0^T \Omega_0 \Sigma_0, \quad \Xi_0 = 0, \quad g_0 = \Sigma_0^T \Omega_0, \quad \Omega = \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}, \\
 \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq k, \quad \mathcal{Z}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \\
 \Omega_0 &= \begin{bmatrix} P_0^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \underbrace{0 \dots 0}_{i-1} \end{bmatrix} \text{ et } \alpha_0 = 0.
 \end{aligned}$$

■

**Démonstration 2.1.** Pour tout  $k \geq 0$ , le problème d'optimisation  $\min J_k$  peut être réécrit sous la forme suivante

$$\min_{\hat{x}_k} (\mathfrak{A}_k \hat{x}_k - \mathfrak{B}_k)^T \mathfrak{R}_k (\mathfrak{A}_k \hat{x}_k - \mathfrak{B}_k) \quad (2.5)$$

où

$$\mathfrak{A}_k = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbb{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\ddots}_{k-1} & \underbrace{\ddots}_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & \mathbb{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathfrak{R}_k = \underbrace{\text{diag}(\Omega, \dots, \Omega, \Omega_0)}_k, \quad \hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La solution de (2.5) est donnée par

$$\hat{x}_{k|k} = (\mathfrak{A}_k^T \mathfrak{R}_k \mathfrak{A}_k)^{-1} \mathfrak{A}_k^T \mathfrak{R}_k \mathfrak{B}_k. \quad (2.8)$$

Puisque  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est de rang plein colonnes, alors  $\mathfrak{R}_k$  l'est aussi. Par conséquent, comme  $\mathfrak{R}_k$  est inversible, alors  $\mathfrak{A}_k^T \mathfrak{R}_k \mathfrak{A}_k$  est également inversible. Ceci implique l'unicité de la solution (2.8).

Le problème d'optimisation (2.5) a une solution unique, si et seulement si,  $\mathfrak{A}_k^T \mathfrak{R}_k \mathfrak{A}_k$  est inversible. Cette dernière est inversible si et seulement si la matrice  $\mathfrak{A}_k$  est de rang plein colonnes en

sachant que la matrice  $\mathfrak{R}_k$  est inversible. La condition suffisante pour que  $\mathfrak{U}_k$  soit de rang plein colonnes est que la matrice  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  soit de rang plein colonnes. Cette condition est vérifiée par l'hypothèse 2.2.1.

Pour  $k = 0$ , d'après le lemme 2.1, nous avons

$$\begin{aligned}\hat{x}_{0|0} &= (\mathfrak{U}_0^T \mathfrak{R}_0 \mathfrak{U}_0)^{-1} \mathfrak{U}_0^T \mathfrak{R}_0 \mathfrak{B}_0 \\ &= (\Sigma_0^T \Omega_0 \Sigma_0)^{-1} \Sigma_0^T \Omega_0 \mathcal{Z}_0 \\ &= (\Xi_0 + Q_0)^{-1} g_0 \mathfrak{B}_0\end{aligned}$$

et

$$P_{0|0} = (\Xi_0 + Q_0)^{-1}. \quad (2.9)$$

L'étape initiale est donc vérifiée.

Pour  $k > 0$ , nous avons

$$\hat{\mathfrak{x}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{\mathfrak{x}}_{k-1|k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathfrak{B}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned}\Xi_k + Q_k &= \mathfrak{U}_k^T \mathfrak{R}_k \mathfrak{U}_k \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega \Sigma & \Sigma^T \Omega \alpha_k \\ \alpha_k^T \Omega \Sigma & \Xi_{k-1} + Q_{k-1} + \alpha_k^T \Omega \alpha_k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

où  $\Xi_k$  et  $Q_k$  sont définies dans le théorème 2.1. En posant

$$(\Xi_k + Q_k)^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11,k} & P_{12,k} \\ P_{21,k} & P_{22,k} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{\mathfrak{x}}_{k-1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11,k} & P_{12,k} \\ P_{21,k} & P_{22,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega & 0 \\ \alpha_k^T \Omega & g_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathfrak{B}_{k-1} \end{bmatrix}$$

et donc

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} P_{11,k} \Sigma^T \Omega + P_{12,k} \alpha_k^T \Omega & P_{12,k} g_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \mathfrak{B}_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Il est à noter que nous devons calculer seulement  $P_{11,k}$  et  $P_{12,k}$ . Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons

$$\begin{aligned}P_{11,k}^{-1} &= \Sigma^T (\Omega^{-1} + \alpha_k (\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1} \alpha_k^T)^{-1} \Sigma, \\ P_{12,k} &= -P_{11,k} \Sigma^T (\Omega^{-1} + \alpha_k (\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1} \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k (\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (2.12) devient :

$$\hat{x}_{k|k} = (P_{11,k}\Sigma^T\Omega + P_{12,k}\alpha_k^T\Omega)\mathcal{Z}_k + P_{12}g_{k-1}\mathfrak{B}_{k-1}$$

ou d'une manière équivalente

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= P_{11,k}\Sigma^T\left(I - \left(\Omega^{-1} + \alpha_k(\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1}\alpha_k^T\right)^{-1} \times \alpha_k(\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1}\alpha_k^T\right)\Omega\mathcal{Z}_k \\ &\quad - P_{11,k}\Sigma^T\left(\Omega^{-1} + \alpha_k(\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1}\alpha_k^T\right)^{-1} \alpha_k(\Xi_{k-1} + Q_{k-1})^{-1}g_{k-1}\mathfrak{B}_{k-1}.\end{aligned}$$

En remplaçant  $\alpha_k$ ,  $\Xi_{k-1}$ ,  $Q_{k-1}$ ,  $g_{k-1}$  et  $\mathfrak{B}_{k-1}$  par leurs valeurs, nous obtenons

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= -P_{11,k}\Sigma^T\left(\Omega^{-1} + \mathbb{A}P_{11,k-1}\mathbb{A}^T\right)^{-1} \mathbb{A}\hat{x}_{k-1|k-1} \\ &\quad + P_{11,k}\Sigma^T\left(I - \left(\Omega^{-1} + \mathbb{A}P_{11,k-1}\mathbb{A}^T\right)^{-1} \mathbb{A}P_{11,k-1}\mathbb{A}^T\right)\Omega\mathcal{Z}_k\end{aligned}$$

et donc, la formule de l'estimateur  $\hat{x}_{k|k}$  est donnée par

$$\hat{x}_{k|k} = P_{11,k}\Sigma^T\left(\Omega^{-1} + \mathbb{A}P_{11,k-1}\mathbb{A}^T\right)^{-1}(\mathcal{Z}_k - \mathbb{A}\hat{x}_{k-1|k-1}).$$

Si nous prenons  $P_{k|k} = P_{11,k}$ , nous retrouvons la solution (2.4b). □

**Remarque 2.2.** Si  $E = I$ ,  $w_k \sim \mathcal{N}(0, W)$  et  $v_k \sim \mathcal{N}(0, V)$  la solution déterministe donnée par le théorème 2.1 est équivalente au filtre de Kalman standard [3], [83]. ■

La relation entre la solution du problème déterministe donnée par le théorème 2.1 et l'expression du filtre de Kalman obtenue par le raisonnement stochastique est présentée dans [75, 76], en utilisant les hypothèses stochastiques précédentes et le lemme suivant.

**Lemme 2.2.** [122] Soit  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  une matrice non singulière et  $A \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  une matrice de rang plein colonnes. Alors, la matrice  $A^T R^{-1} A$  est inversible et les équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}(A^T R^{-1} A)^{-1} &= -\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\ (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

### 2.2.3 Estimation à horizon glissant

La méthode MHE est une stratégie pratique pour éviter les difficultés de calculs associées à l'estimation basée sur l'optimisation. Cette méthode est considérée comme le dual de la commande prédictive en prenant en compte certaines hypothèses. La méthode MHE minimise l'erreur quadratique des bruits de l'équation d'état et de mesure sous les contraintes d'égalité ou d'inégalité -sur les bruits ou sur l'état- s'il y en a.

L'estimateur à information complète présenté dans 2.2.2 utilise toutes les mesures de la sortie de l'instant 0 à l'instant  $k$  pour obtenir l'état estimé à l'instant  $k$ . Remarquons que la taille du problème augmente dans le temps. Avec le filtre de Kalman, l'état optimal estimé à l'instant  $k$  est déterminé de manière récursive à partir de l'état optimal estimé et des mesures de la sortie à l'instant  $k - 1$ . Dans la méthode d'estimation à horizon glissant, l'état optimal estimé à l'instant  $k$  est déterminé de manière récursive à partir de l'état optimal estimé à l'instant  $k - N$  et des  $N + 1$  mesures les plus récentes en utilisant la formulation des moindres carrés suivante :

$$\min J_k(\{x_i\}_{i=k-N}^k) = \|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}\|_{P_{k-N}^{-1}}^2 + \sum_{i=k-N}^{k-1} \|Ex_{i+1} - Fx_i\|_{W^{-1}}^2 + \sum_{j=k-N}^k \|z_j - Hx_j\|_{V^{-1}}^2 \quad (2.13)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} e_{k-N} &= x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}, \\ w_k &= Ex_{k+1} - Fx_k, \\ v_k &= z_k - Hx_k. \end{aligned}$$

La condition initiale  $\bar{x}_{k-N}$  est la solution optimale déterminée à partir des  $N + 1$  anciennes mesures.

$$\bar{x}_{k-N} = P_{k-N} \Sigma^T (\Omega^{-1} + \mathbb{A} P_{k-N-1} \mathbb{A}^T)^{-1} (\mathcal{Z}_{k-N} - \mathbb{A} \hat{x}_{k-N-1|k-N-1}) \quad (2.14)$$

où la matrice de pondération initiale  $P_{k-N}$  est la matrice  $P_{k-N|k-N}$  donnée par le théorème 2.1.

Dans le cas où  $k \leq N$ , l'estimateur d'état est déterminé par le théorème 2.1. Supposons que l'hypothèse 2.2.1 soit vérifiée. Alors l'unicité de la solution optimale du problème  $\min J_k$  est assurée. La solution du problème (2.13) est donnée par le théorème 2.2.

**Théorème 2.2.** (Boukroune et al. [21]) Si l'hypothèse 2.2.1 est vérifiée, l'état estimé  $\hat{x}_{k|k}$  qui minimise (2.13) est donné par

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T (\Xi_{N+1} + \tilde{Q}_{N+1}^{k-N-1})^{-1} \tilde{g}_{N+1}^{k-N-1} \tilde{\mathfrak{B}}_{N+1}^{k-N-1} \quad (2.15)$$

où

$$\tilde{\mathfrak{B}}_i^{k-N} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{k-i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_i^{k-N} = \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega \Sigma & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{i-1}^{k-N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{g}_i^{k-N} = \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega & 0 \\ \alpha_i^T \Omega & \tilde{g}_{i-1}^{k-N} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{Z}_{k-N} = \hat{x}_{k-N|k-N}, \quad \tilde{Q}_0^{k-N} = P_{k-N|k-N}^{-1}, \quad \tilde{g}_0^{k-N} = P_{k-N|k-N}^{-1} \quad \text{et} \quad \Xi_N = 0. \quad (2.17)$$





**Démonstration 2.2.** Nous reprenons l'idée de la démonstration du théorème 2.1. Pour tout  $k \geq N$ , le problème (2.13) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}_k} (\mathfrak{U}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathfrak{B}}_N^{k-N})^T \mathfrak{R}_k (\mathfrak{U}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathfrak{B}}_N^{k-N}) \quad (2.18)$$

où  $\mathfrak{U}_k$ ,  $\mathfrak{R}_k$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  sont donnés par (2.6) et (2.7) sauf que l'indice 0 des matrices initiales  $\Sigma_0$ ,  $\Omega_0$  et  $x_{0|k}$  est remplacé par  $k - N$  avec  $\Omega_{k-N} = P_{k-N|k-N}^{-1}$  et  $\Sigma_{k-N} = I$ .

En utilisant l'hypothèse 2.2.1 et le lemme 2.1, la solution du problème (2.18) est donnée par

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k|k} = (\mathfrak{U}_k^T \mathfrak{R}_k \mathfrak{U}_k)^{-1} \mathfrak{U}_k^T \mathfrak{R}_k \tilde{\mathfrak{B}}_N^{k-N}.$$

Pour  $k = k - N$ , nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k-N|k-N} &= (\mathfrak{U}_{k-N}^T \mathfrak{R}_{k-N} \mathfrak{U}_{k-N})^{-1} \mathfrak{U}_{k-N}^T \mathfrak{R}_{k-N} \tilde{\mathfrak{B}}_0^{k-N} \\ &= (\Sigma_{k-N}^T \Omega_{k-N} \Sigma_{k-N})^{-1} \Sigma_{k-N}^T \Omega_{k-N} \mathbb{Z}_{k-N} \\ &= \bar{\mathbf{x}}_{k-N}. \end{aligned}$$

Pour  $\bar{\mathbf{x}}_{k-N}$  donné par (2.14), nous pouvons réécrire  $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k-N|k-N}$  comme suit

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k-N|k-N} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega \Sigma & \Sigma^T \Omega \alpha_1 \\ \alpha_1^T \Omega \Sigma & \alpha_1^T \Omega \alpha_1 + \Xi_0 + \tilde{\mathcal{Q}}_0^{k-N-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega & 0 \\ \alpha_1^T \Omega & \tilde{\mathbf{g}}_0^{k-N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{k-N} \\ \hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k-N-1|k-N-1} \end{bmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k-N|k-N} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T (\Xi_1 + \tilde{\mathcal{Q}}_1^{k-N-1})^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_1^{k-N-1} \tilde{\mathfrak{B}}_1^{k-N-1} \quad (2.19)$$

Ceci implique que l'étape initiale est vérifiée.

Pour  $k - N > 0$ , dans l'estimation à information complète, nous avons montré que  $\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k|k}$ , donné par (2.4a), peut être écrit par un algorithme récursif pour tout  $k > 0$ . De la même façon nous déduisons que

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_{k|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T (\Xi_N + \tilde{\mathcal{Q}}_N^{k-N})^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_N^{k-N} \tilde{\mathfrak{B}}_N^{k-N}. \quad (2.20)$$

Pour obtenir (2.15), il suffit de combiner (2.19) et (2.20). □

Avant de démontrer que l'estimateur donné par l'équation (2.15) est équivalent au filtre de Kalman, nous présentons un lemme qui donne l'expression de  $P_{k|k}$ .

**Lemme 2.3.** La matrice de l'équation algébrique de Riccati,  $P_{k|k}$ , peut être calculée pour tout  $N \geq 0$  et  $k > N$  à partir de la formule suivante

$$P_{k|k}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_{N+1} \left( \Xi_N + \tilde{Q}_N^{k-N-1} \right)^{-1} \alpha_{N+1}^T \right)^{-1} \Sigma. \quad \blacksquare$$

**Démonstration 2.3.** La démonstration est obtenue par récurrence. Pour  $N = 0$ , nous avons

$$P_{k|k}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 \left( \Xi_0 + \tilde{Q}_0^{k-1} \right)^{-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \Sigma. \quad (2.21)$$

Nous remarquons que ce résultat est équivalent à l'équation algébrique de Riccati  $P_{k|k}^{-1}$ , pour tout  $k > 0$ , donnée par [44, 42, 75].

Pour  $k = j + N$ , nous remplaçons l'indice  $k$  par  $j + N$  dans l'expression du lemme 2.3 et, en utilisant les expressions de  $\alpha_{N+1}$ , de  $\Xi_N$  et de  $\tilde{Q}_N^{j-1}$  (voir théorème 2.1) et en appliquant la formule de l'inversion d'une matrice partitionnée sur  $\left( \Xi_N + \tilde{Q}_N^{j-1} \right)$ , nous obtenons

$$P_{j+N|j+N}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_{N+1} \left( \Xi_N + \tilde{Q}_N^{j-1} \right)^{-1} \alpha_{N+1}^T \right)^{-1} \Sigma \quad (2.22)$$

avec

$$\alpha_{N+1} \left( \Xi_N + \tilde{Q}_N^{j-1} \right)^{-1} \alpha_{N+1}^T = \alpha_1 \left( \Sigma^T \Omega \Sigma - \Sigma^T \Omega \alpha_N \left( \alpha_N^T \Omega \alpha_N + \Xi_{N-1} + \tilde{Q}_{N-1}^j \right)^{-1} \alpha_N^T \Omega \Sigma \right)^{-1} \alpha_1^T. \quad (2.23)$$

Prenons  $k = j + N - 1$ , nous avons

$$P_{j+N-1|j+N-1}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_N \left( \Xi_{N-1} + \tilde{Q}_{N-1}^j \right)^{-1} \alpha_N^T \right)^{-1} \Sigma. \quad (2.24)$$

En insérant (2.23) et (2.24) dans (2.22), nous obtenons

$$P_{j+N|j+N}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 P_{j+N-1|j+N-1}^{-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \Sigma.$$

On peut montrer que cette récurrence est l'équation de Riccati du filtre de Kalman en utilisant le lemme de l'inversion matricielle, ce qui prouve le lemme 2.3.  $\square$

Dans le théorème suivant, nous allons montrer l'équivalence entre le filtre de Kalman et la méthode MHE.

**Théorème 2.3.** (Boukroune et al. [21]) L'état estimé  $\hat{x}_{k|k}$  calculé dans l'équation (2.15) à partir de la solution du problème des moindres carrés (2.13) est identique à l'état estimé du filtre de Kalman à l'instant  $k$ .  $\blacksquare$

**Démonstration 2.4.** Le raisonnement se fait par récurrence. Pour  $N = 0$ , la solution du problème des moindres carrés donnée par l'équation (2.13) donne l'estimateur d'état, pour tout  $k \geq 0$ , nous avons

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left( \Xi_1 + \tilde{Q}_1^{k-1} \right)^{-1} g_1 \mathfrak{B}_1 \quad (2.25)$$

en remplaçant chaque matrice par sa valeur (voir les équations (2.15) – (2.17)), nous obtenons

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega \Sigma & \Sigma^T \Omega \alpha_1 \\ \alpha_1^T \Omega \Sigma & \alpha_1^T \Omega \alpha_1 + \Xi_0 + \tilde{Q}_0^{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega & 0 \\ \alpha_1^T \Omega & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \hat{x}_{k-1|k-1} \end{bmatrix}.$$

En utilisant la valeur de  $P_{k|k}$  du lemme 2.3 et en appliquant l'inverse des matrices partitionnées, nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} = & -P_{k|k} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 (\Xi_0 + \tilde{Q}_0^{k-1})^{-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \alpha_1 (\Xi_0 + \tilde{Q}_0^{k-1})^{-1} g_0 \hat{x}_{k-1|k-1} \\ & + P_{k|k} \Sigma^T \left( \Omega^0 + \alpha_1 (\Xi_0 + \tilde{Q}_0^{k-1})^{-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \mathcal{Z}_k, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{x}_{k|k} = P_{k|k} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 P_{k-1|k-1} \alpha_1^T \right)^{-1} (\mathcal{Z}_k - \alpha_1 \hat{x}_{k-1|k-1}).$$

Remarquons que ce résultat est équivalent à celui de [43, 75]. Notons que le filtre donné par ce résultat est équivalent au filtre de Kalman. Si nous prenons  $N = M + 1$ , la solution de l'équation (2.13) est donnée par

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left( \Xi_{M+2} + \tilde{Q}_{M+2}^{k-M-2} \right)^{-1} \tilde{g}_{M+2}^{k-M-2} \tilde{\mathfrak{B}}_{M+2}^{k-M-2}.$$

Selon le lemme 2.3, nous avons

$$P_{k|k}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_{M+2} (\Xi_{M+1} + \tilde{Q}_{M+1}^{k-M-2})^{-1} \alpha_{M+2}^T \right)^{-1} \Sigma,$$

ce qui est équivalent à

$$P_{k|k}^{-1} = \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 P_{k-1|k-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \Sigma.$$

En remplaçant chaque variable par sa valeur et en appliquant l'inverse des matrices partitionnées nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} = & -P_{k|k} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_{M+2} (\Xi_{M+1} + \tilde{Q}_{M+1}^{k-M-2})^{-1} \alpha_{M+2}^T \right)^{-1} \alpha_{M+2} (\Xi_{M+1} + \tilde{Q}_{M+1}^{k-M-2})^{-1} \\ & \times \tilde{g}_{M+1}^{k-M-2} \tilde{\mathfrak{B}}_{M+1}^{k-M-2} + P_{k|k} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_{M+2} (\Xi_{M+1} + \tilde{Q}_{M+1}^{k-M-2})^{-1} \alpha_{M+2}^T \right)^{-1} \mathcal{Z}_k. \quad (2.26) \end{aligned}$$

En utilisant le résultat du lemme 2.3 et en supposant que la solution donnée par l'équation (2.15) est vérifiée pour un horizon  $M$  et pour tout  $k \geq M$ , alors l'expression précédente peut être simplifiée comme suit

$$\hat{x}_{k|k} = -P_{k|k}^{-1} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 P_{k-1|k-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \alpha_1 \hat{x}_{k-1|k-1} + P_{k|k} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \alpha_1 P_{k-1|k-1} \alpha_1^T \right)^{-1} \mathcal{Z}_k.$$

Nous remarquons que cette solution est identique au filtre de Kalman pour les systèmes singuliers (voir [43] et [75]).  $\square$

**Remarque 2.3.** Dans le cas où  $E = I$  et  $N = 0$ , la solution donnée par l'équation (2.15) est un filtre de Kalman pour un système linéaire.  $\blacksquare$

**Remarque 2.4.** Pour  $E = I$  et  $N \neq 0$ , ce résultat est équivalent à celui de [117]. Cette solution est appelée l'estimateur à horizon glissant -sans contraintes- du système linéaire.  $\blacksquare$

### 2.2.4 Exemple numérique

Soit le système singulier linéaire décrit par la représentation d'état suivante [75]

$$\begin{aligned} E x_{k+1} &= F x_k + w_k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ z_k &= H x_k + v_k \end{aligned}$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad H = [0 \quad 2],$$

et avec les matrices de pondération données par

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad V = 0.8.$$

Nous choisissons  $N = 10$ . Puisque  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est de rang plein colonnes, l'hypothèse 2.2.1 est vérifiée. Les résultats de simulation basés sur le filtre donné par les théorèmes 2.1 et 2.2 sont présentés dans les figures 2.1 et 2.2. Dans chaque figure, nous avons présenté l'état réel  $x(t)$  et l'état estimé à partir de la méthode MHE.

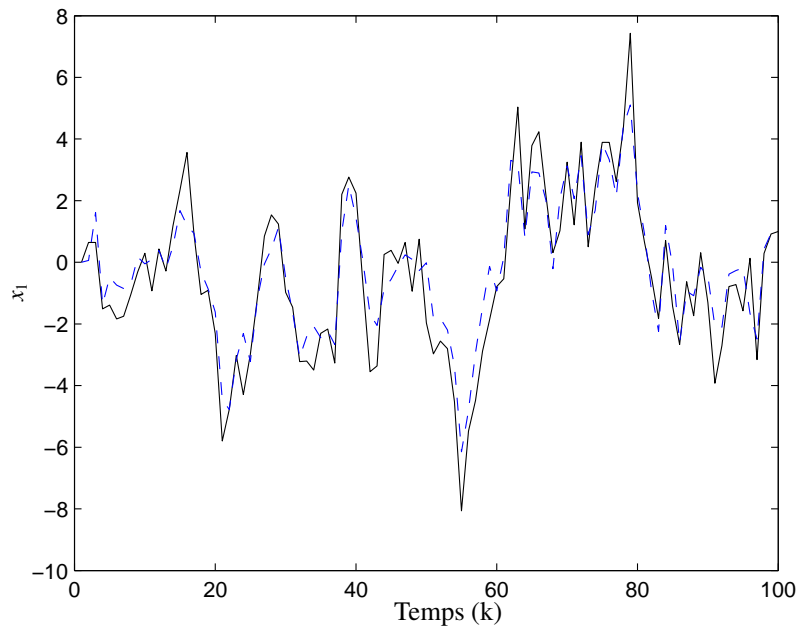


FIGURE 2.1: L'état  $x_1(k)$  (ligne continue) et son estimée MHE (ligne discontinue).

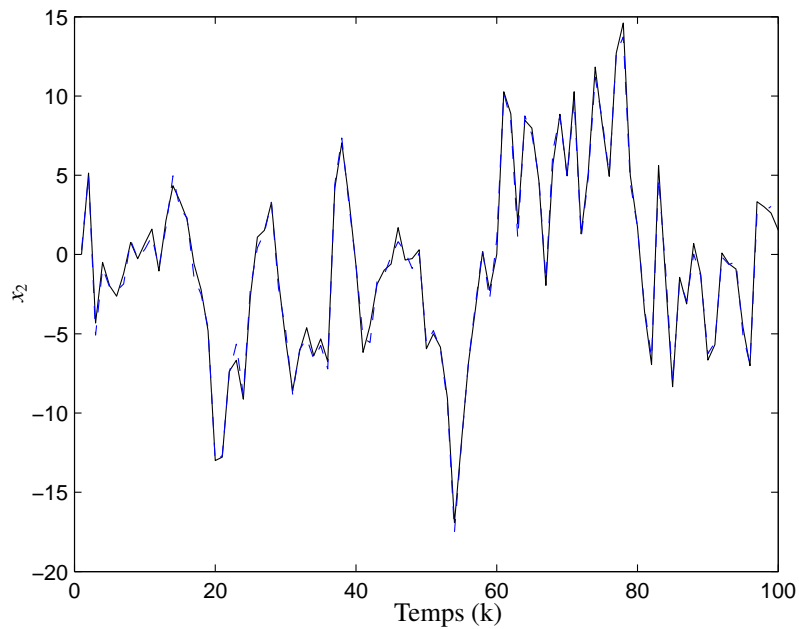


FIGURE 2.2: L'état  $x_2(k)$  (ligne continue) et son estimée MHE (ligne discontinue).

## 2.3 Application aux systèmes linéaires à entrées inconnues

Pour les observateurs des systèmes linéaires, dans tous les cas, la reconstruction de l'état se fait à partir des entrées éventuelles et des sorties du système. Ces méthodes ne peuvent pas s'appliquer lorsque la dynamique du système est soumise à l'influence d'entrées inconnues. Ces entrées inconnues proviennent, en général, des erreurs de modélisation, de défauts de capteurs et d'actionneurs, ou encore de perturbations, de bruits (sur l'état ou la sortie du système). L'absence de connaissances *a priori* sur la nature de l'entrée inconnue est supposée dans plusieurs travaux [152], [156], [65], [73], [45] et [42]. Dans le cas où le système est influencé par des entrées inconnues, des techniques ont été mises au point pour estimer soit l'état seul, soit l'état et également les entrées inconnues [42]. Les propriétés d'observabilité en utilisant un horizon glissant en présence d'entrées inconnues pour des modèles linéaires, particulièrement l'aspect géométrique, et pour des modèles non linéaires ont été présentés dans la thèse de Lucet Emmanuel [100].

Dans cette section et dans un cadre déterministe, la méthode MHE est choisi pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues des systèmes linéaires à entrées connues.

Considérons le système dynamique linéaire, invariant, avec entrées inconnues sous la forme générale suivante :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bd_k + w_k, \quad (2.27a)$$

$$z_k = Cx_k + v_k \quad (2.27b)$$

où  $x_k \in \mathfrak{X}^n$  est le vecteur d'état du système,  $z_k \in \mathfrak{X}^m$  est le vecteur de mesures du système,  $d_k \in \mathfrak{X}^p$  est le vecteur des entrées inconnues,  $w_k \in \mathfrak{X}^n$  est le vecteur de bruit d'état et  $v_k \in \mathfrak{X}^m$  est le vecteur de bruit d'observation (de mesure). Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Dans un premier temps, nous ne faisons aucune hypothèse sur les bruits  $w_k \in \mathfrak{X}^n$  et  $v_k \in \mathfrak{X}^m$ .

Le problème traité dans cette section est concentré sur l'estimation du vecteur d'état  $x_k$  et du vecteur des entrées inconnues  $d_k \in \mathfrak{X}^p$  en utilisant l'approche MHE sans avoir aucune connaissance sur le vecteur  $d_k$ . Cette approche sera étendue aux systèmes linéaires avec entrées inconnues en utilisant le résultat de l'estimation pour les systèmes singuliers présenté dans la section 2.2. Généralement, pour les estimateurs des systèmes linéaires à entrées inconnues, l'hypothèse suivante est toujours vérifiée :

**Hypothèse 2.3.1.** *Les conditions suivantes sont vérifiées :*

- i)  $\text{rang}(C) = m$
- ii)  $\text{rang}(B) = p$
- iii)  $p < m$
- iv)  $\text{rang}(CB) = \text{rang}(B) = p$ .

■

Afin d'estimer simultanément l'état et les entrées inconnues, on met le système (2.27a)–(2.27b)

sous la forme singulière suivante

$$EX_{k+1} = FX_k + w_k, \quad (2.28a)$$

$$z_k = HX_k + v_k \quad (2.28b)$$

où

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ d_k \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

et

$$E = [I \quad -B], \quad F = [A \quad 0], \quad H = [C \quad 0]. \quad (2.30)$$

D'après l'hypothèse 2.3.1, la condition sur le rang de  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est satisfaite [42]. En effet,

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right) &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & CB \end{bmatrix} \right) \\ &= n + \text{rang}(CB) \\ &= n + p. \end{aligned}$$

### 2.3.1 Estimateurs des systèmes linéaires à entrées inconnues

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à l'estimation à information complète pour les systèmes linéaires à entrées inconnues. En utilisant le théorème 2.1, on déduit directement les estimés de l'état  $\hat{x}_{k+1|k+1}$  et des entrées inconnues  $\hat{d}_{k|k+1}$  qui sont donnés respectivement par :

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}^T (\Xi_{k+1} + Q_{k+1})^{-1} g_{k+1} \mathfrak{B}_{k+1} \quad (2.31a)$$

$$\hat{d}_{k|k+1} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \\ 0 \end{bmatrix}^T (\Xi_{k+1} + Q_{k+1})^{-1} g_{k+1} \mathfrak{B}_{k+1} \quad (2.31b)$$

La matrice de pondération  $P_{k+1|k+1}$  est partitionnée comme suit

$$P_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} P_{k+1|k+1}^x & P_{k+1|k+1}^{xd} \\ P_{k+1|k+1}^{dx} & P_{k|k+1}^d \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

En utilisant (2.30) et (2.4b), nous obtenons

$$P_{k+1|k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{k|k}^{-1} + C^T V^{-1} C & -\bar{P}_{k|k}^{-1} B \\ -B^T \bar{P}_{k|k}^{-1} & B^T \bar{P}_{k|k}^{-1} B \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où

$$\bar{P}_{k|k} = W + A P_{k|k}^x A^T. \quad (2.34)$$

En inversant la matrice  $P_{k+1|k+1}^{-1}$  (2.33) et par identification avec (2.31), on obtient

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1}^x &= \left( \bar{P}_{k|k}^{-1} + C^T V^{-1} C - \bar{P}_{k|k}^{-1} B (B^T \bar{P}_{k|k}^{-1} B)^{-1} B^T \bar{P}_{k|k}^{-1} \right)^{-1} \\ P_{k+1|k+1}^d &= \left( B^T C^T (V + C \bar{P}_{k|k} C^T)^{-1} C B \right)^{-1} \\ P_{k+1|k+1}^{xd} &= P_{k+1|k+1}^x \bar{P}_{k|k}^{-1} B (B^T \bar{P}_{k|k}^{-1} B)^{-1} \\ P_{k+1|k+1}^{dx} &= P_{k+1|k+1}^d B^T \bar{P}_{k|k}^{-1} \left( \bar{P}_{k|k}^{-1} + C^T V^{-1} C \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous avons montré, dans la section 2.2.2, que l'estimateur optimal (2.4a) du système (2.28) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = P_{k+1|k+1} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \mathbb{A} P_{k|k} \mathbb{A}^T \right)^{-1} \left( Z_{k+1} - \mathbb{A} \hat{X}_{k|k} \right) \quad (2.35)$$

Finalement, après quelques calculs, nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &= \left( P_{k+1|k+1}^x - P_{k+1|k+1}^{xd} B^T \right) \left( W + A P_{k|k}^x A^T \right)^{-1} A \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1}^x C^T V^{-1} z_{k+1} \\ \hat{d}_{k+1|k+1} &= \left( P_{k+1|k+1}^{dx} - P_{k+1|k+1}^d B^T \right) \left( W + A P_{k|k}^x A^T \right)^{-1} A \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1}^{dx} C^T V^{-1} z_{k+1}. \end{aligned}$$

Cette solution est identique au filtre de Kalman pour les systèmes linéaires à entrées inconnues donnée par [44, 42].

### 2.3.2 Estimateurs à entrées inconnues à horizon glissant

Dans la suite, nous allons traiter le problème de l'estimation de l'état et des entrées inconnues en utilisant la méthode d'estimation à horizon glissant.

**Problème 2.3.1.** *Dans l'approche d'estimation à horizon glissant, l'état optimal estimé à l'instant  $k$  est déterminé de manière récursive à partir de l'état optimal estimé à l'instant  $k - N + 1$  et des  $N + 1$  mesures les plus récentes en utilisant la formule des moindres carrés suivante :*

$$\min J_{k+1} \left( \{x_i\}_{i=k-N+1}^{k+1} \right) = \| e_{k-N+1} \|_{P_{k-N+1}^{-1}}^2 + \sum_{i=k-N+1}^k \| w_i \|_{W^{-1}}^2 + \sum_{j=k-N+1}^{k+1} \| v_j \|_{V^{-1}}^2 \quad (2.36)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} e_{k-N+1} &= x_{k-N+1} - \bar{x}_{k-N+1}, \\ w_k &= x_{k+1} - A x_k - B d_k, \\ v_k &= z_k - C x_k. \end{aligned}$$

■



Nous avons indiqué dans la section 2.3 que le système (2.27a)–(2.27b) est équivalent au système (2.28a)–(2.30). Par conséquent, le problème (2.3.1) peut être transformé sous la forme suivante :

$$\min J_{k+1} \left( \{X_i\}_{i=k-N+1}^{k+1} \right) = \|e_{k-N+1}\|_{P_{k-N+1}}^2 + \sum_{i=k-N+1}^k \|w_i\|_{W^{-1}}^2 + \sum_{j=k-N+1}^{k+1} \|v_j\|_{V^{-1}}^2 \quad (2.37)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} e_{k-N+1} &= X_{k-N+1} - X_{k-N+1}, \\ w_k &= EX_{k+1} - FX_k, \\ v_k &= z_k - Hx_k. \end{aligned}$$

La condition initiale  $\bar{X}_{k-N+1}$  représente la solution optimale déterminée à partir des  $N + 1$  anciennes mesures et donnée par

$$\bar{X}_{k-N+1} = P_{k-N+1} \Sigma^T \left( \Omega^{-1} + \mathbb{A} P_{k-N} \mathbb{A}^T \right)^{-1} \left( \mathcal{Z}_{k-N+1} - \mathbb{A} \hat{X}_{k-N|k-N} \right). \quad (2.38)$$

Il est à noter que la matrice de pondération initiale  $P_{k-N+1}$  est identique à la matrice  $P_{k-N+1|k-N+1}$  donnée par (2.4b).

Nous remarquons que le problème de l'estimation de l'état et des entrées inconnues est réduit à un problème de l'estimation de l'état d'un système singulier (2.28a)–(2.30). Notons que dans le cas où  $k + 1 \leq N$ , l'état estimé et les entrées inconnues sont déterminés à partir de (2.31a)–(2.31b). Sous l'hypothèse 2.3.1, on a montré dans la section 2.2.2 l'unicité de la solution optimale de  $\min J_{k+1}$ , et par conséquent la solution du problème (2.3.1) est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.4.** (Boukroune et al. [20]) *Sous l'hypothèse 2.3.1, les estimées optimales de l'état, du vecteur des entrées inconnues et de la matrice de pondération à l'instant  $k + 1$ , lorsque la mesure est connue jusqu'à l'instant  $k + 1$ , sont respectivement données par :*

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}^T \left( \Xi_{N+1} + \bar{Q}_{N+1}^{k-N} \right)^{-1} \bar{g}_{N+1}^{k-N} \bar{\mathfrak{B}}_{N+1}^{k-N} \quad (2.39a)$$

$$\hat{d}_{k|k+1} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \\ 0 \end{bmatrix}^T \left( \Xi_{N+1} + \bar{Q}_{N+1}^{k-N} \right)^{-1} \bar{g}_{N+1}^{k-N} \bar{\mathfrak{B}}_{N+1}^{k-N} \quad (2.39b)$$

$$P_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left( \Xi_{N+1} + \bar{Q}_{N+1}^{k-N} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39c)$$

avec

$$\bar{\mathfrak{B}}_N^{k-N} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_k \\ \bar{\mathfrak{B}}_{N-1}^{k-N} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_i^{k-N} = \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega \Sigma & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{i-1}^{k-N} \end{bmatrix}, \quad \bar{g}_i^{k-N} = \begin{bmatrix} \Sigma^T \Omega & 0 \\ \alpha_i^T \Omega & \bar{g}_{i-1}^{k-N} \end{bmatrix} \quad (2.40a)$$

$$\bar{\mathfrak{B}}_0^{k-N} = \mathcal{Z}_{k-N}, \quad \mathcal{Z}_{k-N} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-N} \\ \hat{d}_{k-N-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_0^{k-N} = P_{k-N|k-N}^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{g}_0^{k-N} = P_{k-N|k-N}^{-1} \quad (2.40b)$$

■

**Démonstration 2.5.** Dans la section 2.2.3, nous avons prouvé que la solution de (2.37) s'écrit

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left( \Xi_{N+1} + \bar{Q}_{N+1}^{k-N} \right)^{-1} \bar{g}_{N+1}^{k-N} \bar{\mathfrak{B}}_{N+1}^{k-N} \quad (2.41)$$

où

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k+1} \\ \hat{d}_{k|k+1} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

En reprenant l'idée proposée dans la sous section 2.3.1, on déduit directement (2.39a)–(2.40b) et cela complète la démonstration.  $\square$

### 2.3.3 Exemple numérique

Considérons le système linéaire à entrée inconnue suivant [42] :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bd_k + w_k, \quad (2.43a)$$

$$z_k = Cx_k + v_k \quad (2.43b)$$

où les valeurs numériques des matrices sont

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.076 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.0375 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les matrices de pondération sont données par :

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad P_d = 10, \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

On prend  $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $d_0 = 0$  et  $N = 10$ .

L'hypothèse 2.3.1 est vérifiée. Les courbes suivantes montrent les résultats de l'estimation des états (2.3)–(2.5) et de l'entrée inconnue (2.6). Ces courbes montrent que l'estimateur proposé dans le théorème 2.4 arrive à reconstruire correctement les états et l'entrée inconnue du système (2.43a)–(2.43b).

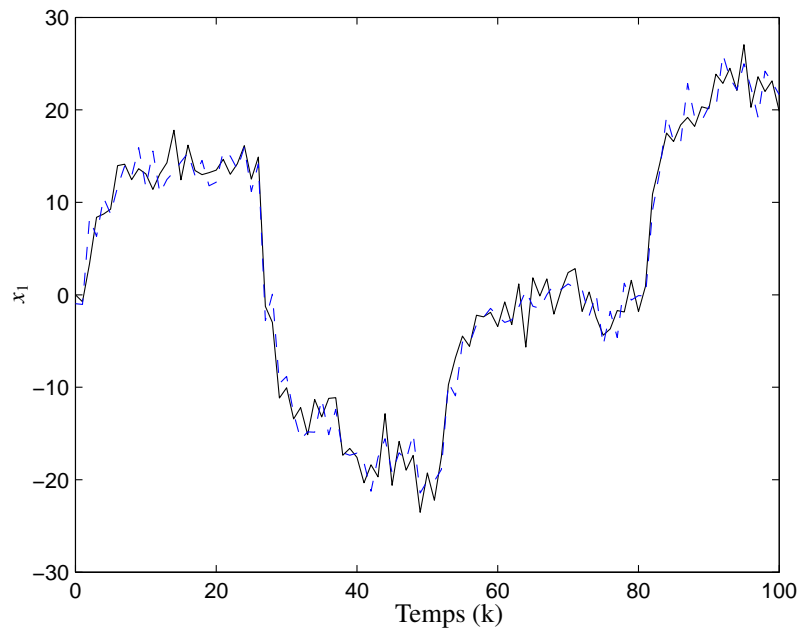


FIGURE 2.3: L'état  $x_1(k)$  (ligne continue) et son estimé (ligne discontinue).

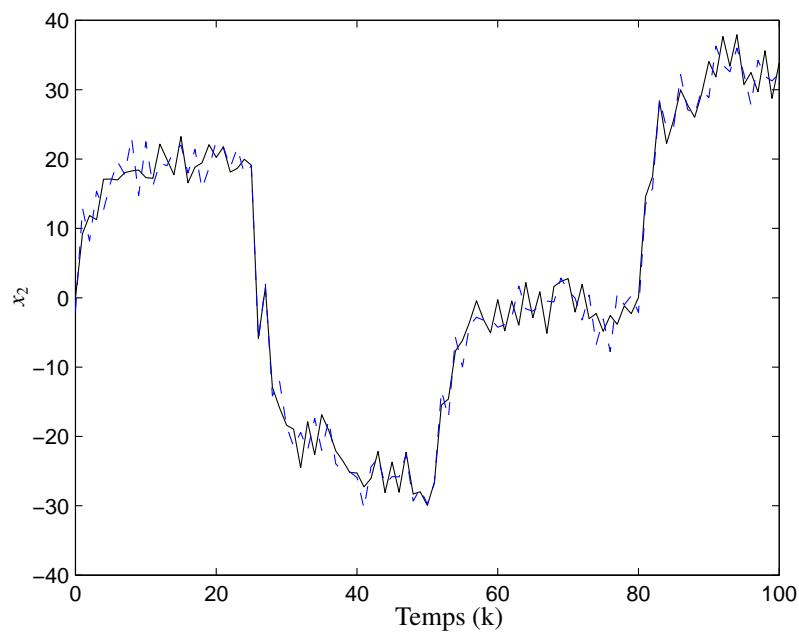


FIGURE 2.4: L'état  $x_2(k)$  (ligne continue) et son estimé (ligne discontinue).

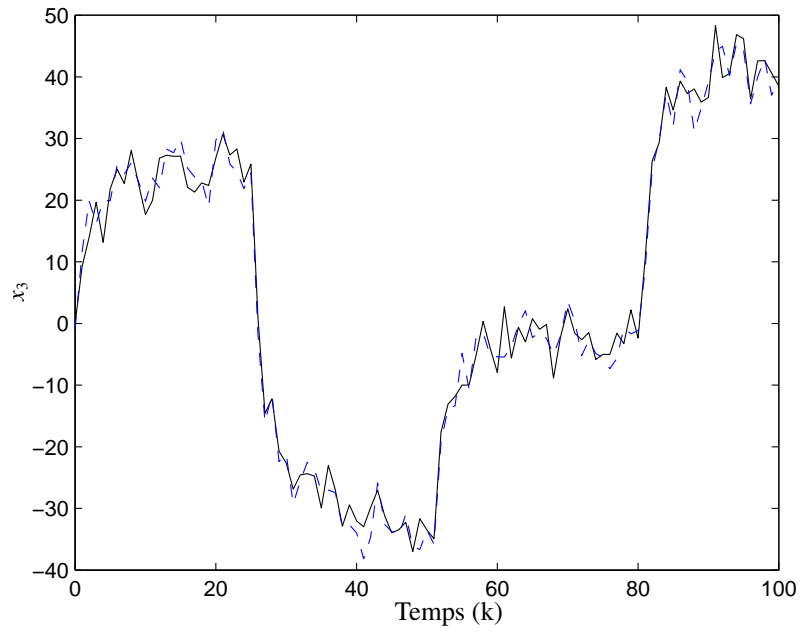


FIGURE 2.5: L'état  $x_3(k)$  (ligne continue) et son estimé (ligne discontinue).

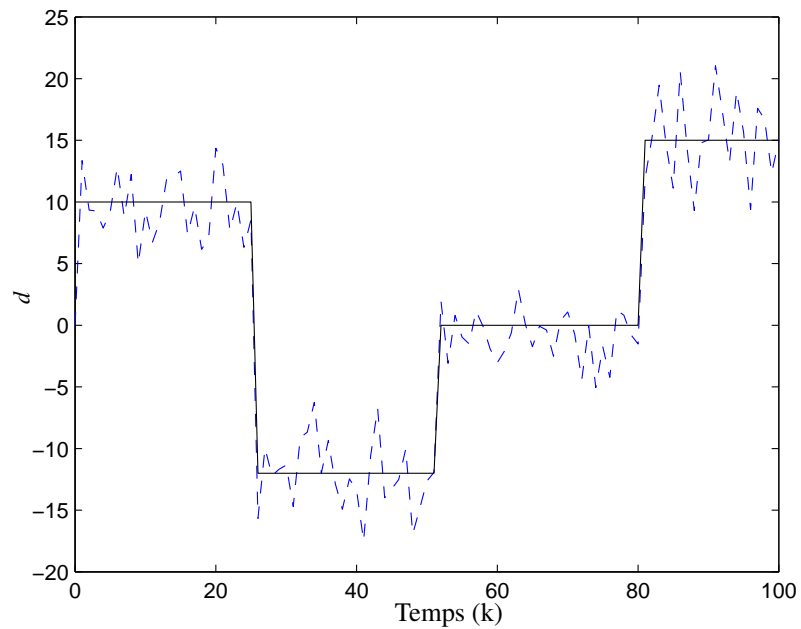


FIGURE 2.6: L'entrée inconnue  $d(k)$  (ligne continue) et l'entrée inconnue estimée (ligne discontinue).

## 2.4 Estimation à horizon glissant au sens de la variance minimale

Dans cette section, nous étudions le problème de l'estimation à variance minimale pour les systèmes singuliers. En utilisant la technique d'estimation à horizon glissant, une solution est proposée. Ensuite, nous présentons la convergence et les conditions de stabilité de cette solution.

### 2.4.1 Formulation du problème

Considérons le système singulier décrit par les équations suivantes

$$Ex_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.44a)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (2.44b)$$

où  $x_k \in \mathfrak{X}^n$  est le vecteur d'état,  $u_k \in \mathfrak{X}^l$  est l'entrée du système,  $y_k \in \mathfrak{X}^m$  est le vecteur de mesures,  $w_k \in \mathfrak{X}^n$  est le vecteur de bruit d'état et  $v_k \in \mathfrak{X}^m$  est le vecteur de bruit de mesures. La matrice  $E \in \mathfrak{X}^{p \times n}$ , avec  $p \leq n$ ; dans le cas où  $p = n$  on suppose que  $E$  est singulière.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions appropriées. Dans le cas de l'estimation de l'état des systèmes singuliers, la condition d'existence d'une solution unique au problème d'estimation

est  $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$  [44]. Cette hypothèse est fondamentale tout au long de cette section.

**Hypothèse 2.4.1.** *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

i)  $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ .

ii)  $w_j$  et  $v_j$  sont des bruits blancs gaussiens, de moyennes nulles et de matrices de covariance connues tels que :

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_i \\ v_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ v_j \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & 0 \\ 0 & V_v \end{bmatrix} \delta_{ij} > 0$$

où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon.

iii) L'état initial  $x_0 \in \mathfrak{X}^n$  est une variable aléatoire de moyenne  $\bar{x}_0$  et de matrice de covariance  $P_0$ . ■

Étant donné l'ensemble des observations  $y_1, \dots, y_k$  et l'état initial  $x_0$ , le problème de l'estimation de  $x_k$  revient à minimiser la variance de l'erreur d'estimation  $(x_k - \hat{x}_{k|k})$ . Dans ce cas, nous cherchons à trouver une solution optimale (estimateur optimal) qui minimise le critère suivant

$$J = E\{(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T\}. \quad (2.45)$$

L'objectif de cette section est d'appliquer la méthode MHE aux systèmes singuliers en minimisant la variance de l'erreur d'estimation  $(x_k - \hat{x}_{k|k})$ . Nous avons mentionné dans les sections précédentes que l'état est estimé, à partir de la méthode MHE, sur une fenêtre comprenant les  $N + 1$  mesures les plus récentes en se basant sur l'estimée initiale  $\bar{x}_{k-N}$  et la matrice de pondération  $P_{k-N|k-N}$ .

### 2.4.2 Filtrage optimal des systèmes singuliers

Par la suite, nous supposons que les conditions de l'hypothèse 2.4.1 sont vérifiées. Puisque  $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ , une matrice non singulière  $\bar{J}$  existe et vérifie l'égalité suivante

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{J}_1 & \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \end{bmatrix}}_J \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Premièrement, nous allons expliciter l'état actuel  $x_k$  dans l'horizon  $[k - N, k]$  en fonction de l'état initial  $x_{k-N}$ .

En multipliant (2.44a) par  $\bar{J}_1$ , nous obtenons

$$\bar{J}_1 E x_k = \bar{J}_1 (A x_{k-1} + B u_{k-1} + w_{k-1}) \quad (2.47)$$

En utilisant (2.47), on obtient

$$\begin{aligned} x_k &= \bar{J}_2 (y_k - v_k) + \bar{J}_1 (A x_{k-1} + B u_{k-1} + w_{k-1}) \\ &= F x_{k-1} + \bar{B} r_k + T_1 \eta_k \end{aligned} \quad (2.48)$$

où

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 B & \bar{J}_2 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & \bar{J}_2 \end{bmatrix}, F = \bar{J}_1 A \quad (2.49a)$$

$$r_k = \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix}, \quad \eta_k = \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ -v_k \end{pmatrix}. \quad (2.49b)$$

Dans l'équation (2.48), le vecteur  $r_k$  est connu, et le vecteur  $\eta_k$  a des propriétés statistiques connues.

En réitérant l'opération de l'instant  $k - 1$  jusqu'à l'instant  $k - N + 1$ , l'état  $x_k$  peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x_k &= F x_{k-1} + \bar{B} r_k + T_1 \eta_k \\ &= F^2 x_{k-2} + F \bar{B} r_{k-1} + \bar{B} r_k + F T_1 \eta_{k-1} + T_1 \eta_k \\ &= \dots \\ &= F^N x_{k-N} + \begin{bmatrix} F^{N-1} \bar{B} & F^{N-2} \bar{B} & \dots & \bar{B} \end{bmatrix} \bar{r}_k + \begin{bmatrix} F^{N-1} & F^{N-2} & \dots & I \end{bmatrix} \bar{w}_k \end{aligned} \quad (2.50)$$

avec  $\bar{w}_k = T_1 \eta_k$  et

$$\bar{r}_k = \begin{bmatrix} r_{k-N+1}^T & r_{k-N+2}^T & \dots & r_k^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.51a)$$

$$\bar{w}_k = \begin{bmatrix} \bar{w}_{k-N+1}^T & \bar{w}_{k-N+2}^T & \dots & \bar{w}_k^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.51b)$$

Maintenant, nous allons regrouper, dans un même vecteur, les équations de mesures, dans l'intervalle  $[k - N, k]$ .

A partir de l'équation (2.44b) et (2.47), nous avons

$$-\bar{J}_4 y_{k-N+1} = \bar{J}_3 A x_{k-N} + \bar{J}_3 B u_{k-N} + \bar{J}_3 w_{k-N} - \bar{J}_4 v_{k-N+1} \quad (2.52)$$

l'équation (2.52) devient

$$z_{k-N+1} = \underline{C} x_{k-N} + \bar{v}_{k-N+1} \quad (2.53)$$

où

$$z_{k-N+1} = -D r_{k-N+1}, \quad D = \begin{bmatrix} \bar{J}_3 B & \bar{J}_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \bar{J}_3 A, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_{k-N+1} = T_2 \eta_{k-N+1} \quad (2.54)$$

en utilisant (2.48), l'équation des mesures dans l'horizon  $[k - N, k]$  s'écrit

$$\begin{aligned} z_{k-N+1} &= \underline{C} x_{k-N} + \bar{v}_{k-N+1} \\ z_{k-N+2} &= \underline{C} F x_{k-N} + \underline{C} \bar{B} r_{k-N+1} + \underline{C} \bar{w}_{k-N+1} + \bar{v}_{k-N+2} \\ z_{k-N+3} &= \underline{C} F^2 x_{k-N} + \underline{C} F \bar{B} r_{k-N+1} + \underline{C} \bar{B} r_{k-N+2} + \underline{C} F \bar{w}_{k-N+1} + \underline{C} \bar{w}_{k-N+2} + \bar{v}_{k-N+3} \\ &\vdots \\ z_k &= \underline{C} F^{N-1} x_{k-N} + \underline{C} F^{N-2} \bar{B} r_{k-N+1} + \dots + \underline{C} \bar{B} r_{k-1} \\ &\quad + \underline{C} F^{N-2} \bar{w}_{k-N+1} + \dots + \underline{C} \bar{w}_{k-1} + \bar{v}_k \end{aligned}$$

En regroupant l'ensemble des équations de mesures, nous obtenons

$$Z_k = \tilde{C}_N x_{k-N} + \tilde{B}_N \bar{r}_k + \tilde{G}_N \bar{W}_k + \bar{V}_k \quad (2.55)$$

où

$$\begin{aligned} Z_k &= \begin{bmatrix} z_{k-N+1}^T & z_{k-N+2}^T & \dots & z_k^T \end{bmatrix}^T, \quad \bar{V}_k = \begin{bmatrix} \bar{v}_{k-N+1}^T & \bar{v}_{k-N+2}^T & \dots & \bar{v}_k^T \end{bmatrix}^T \\ \tilde{C}_N &= \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} F \\ \vdots \\ \underline{C} F^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{C} \bar{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{C} F \bar{B} & \underline{C} \bar{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{C} F^{N-2} \bar{B} & \underline{C} F^{N-3} \bar{B} & \dots & \underline{C} \bar{B} & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{G}_N &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{C} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{C} F & \underline{C} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{C} F^{N-2} & \underline{C} F^{N-3} & \dots & \underline{C} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les pseudo-bruits  $\widetilde{G}_N \overline{W}_k$  et  $\overline{V}_k$  sont corrélés mais restent toujours blancs. En utilisant la procédure habituelle de décorrélation des bruits, l'équation (2.53) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} z_{k-N+2} &= \underline{C}F x_{k-N} + \underline{C}\overline{B}r_{k-N+1} + \underline{C}\overline{W}_{k-N+1} + \overline{v}_{k-N+2} + \underline{C}SR^{-1}(z_{k+1} - z_{k+1}) \\ &= \underline{C}F^s x_{k-N} + \underline{C}\overline{B}^s r_{k-N+1} + \underline{C}\overline{W}_{k-N+1}^s + \overline{v}_{k-N+2}. \end{aligned}$$

De la même manière,  $x_k$  s'écrit :

$$x_k = F^{sN} x_{k-N} + L_{\overline{r},N} \overline{r}_k + L_{\overline{W},N} \overline{W}_k^s \quad (2.56)$$

avec

$$\begin{aligned} S &= T_1 \begin{bmatrix} Q_w & 0 \\ 0 & V_v \end{bmatrix} T_2^T, \quad R = T_2 \begin{bmatrix} Q_w & 0 \\ 0 & V_v \end{bmatrix} T_2^T \\ Q &= T_1 \begin{bmatrix} Q_w & 0 \\ 0 & V_v \end{bmatrix} T_1^T, \quad F_s = F - SR^{-1}\underline{C} \\ \overline{B}^s &= \overline{B} - SR^{-1}D, \quad T_1^s = T_1 - SR^{-1}T_2 \\ Q^s &= Q - SR^{-1}S^T, \quad R^s = R, \quad \overline{W}_{k+1}^s = T_1^s \eta_{k+1}, \end{aligned}$$

les matrices  $Q$  et  $R$  sont les covariances de  $\overline{w}_{k+1}$  et  $\overline{v}_{k+1}$  respectivement. On peut vérifier que les deux matrices  $Q$  et  $R$  sont définies positives.

L'équation (2.55) devient

$$Z_k = \widetilde{C}_N^s x_{k-N} + \widetilde{B}_N^s \overline{r}_k + \widetilde{G}_N^s \overline{W}_k^s + \overline{V}_k \quad (2.57)$$

où les matrices  $\widetilde{C}_N^s$ ,  $\widetilde{B}_N^s$  et  $\widetilde{G}_N^s$  sont données respectivement par :

$$\widetilde{C}_N^s = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}F^s \\ \vdots \\ \underline{C}F^{sN-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_N^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \underline{C}\overline{B}^s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \underline{C}F^s \overline{B}^s & \underline{C}\overline{B}^s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{C}F^{sN-2} \overline{B}^s & \underline{C}F^{sN-3} \overline{B}^s & \cdots & \underline{C}\overline{B}^s & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{G}_N^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \underline{C} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \underline{C}F^s & \underline{C} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{C}F^{sN-2} & \underline{C}F^{sN-3} & \cdots & \underline{C} & 0 \end{bmatrix}.$$



L'équation (2.50) peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$x_k = F^{sN} x_{k-N} + L_{\bar{r},N} \bar{r}_k + L_{\bar{w},N} \bar{w}_k^s \quad (2.58)$$

avec

$$L_{\bar{r},N} = \begin{bmatrix} F^{sN-1} \bar{B}^s & F^{sN-2} \bar{B}^s & \dots & \bar{B}^s \end{bmatrix}$$

$$L_{\bar{w},N} = \begin{bmatrix} F^{sN-1} & F^{sN-2} & \dots & I \end{bmatrix}.$$

L'estimée MHE de l'état est donnée par :

$$\hat{x}_{k|k} = M \bar{x}_{k-N} + H Z_k + L \bar{r}_k \quad (2.59)$$

avec

$$H = \begin{bmatrix} H_N & H_{N-1} & \dots & H_1 \end{bmatrix} \quad (2.60a)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_N & L_{N-1} & \dots & L_1 \end{bmatrix} \quad (2.60b)$$

$$M = M_1 M_2 \dots M_N \quad (2.60c)$$

la condition initiale  $\bar{x}_{k-N}$  est la solution optimale déterminée à partir des  $N+1$  anciennes mesures et nommée  $\hat{x}_{k-N|k-N}$ .

L'objectif principal consiste à déterminer les matrices  $M$ ,  $L$  et  $H$  qui minimisent la variance de l'erreur d'estimation

$$e_k = x_k - \hat{x}_{k|k} \quad (2.61)$$

soit minimale.

En utilisant (2.58) et (2.59), l'erreur d'estimation devient

$$e_k = F^{sN} x_{k-N} + L_{\bar{r},N} \bar{r}_k + L_{\bar{w},N} \bar{w}_k^s - M \hat{x}_{k-N|k-N} - H Z_k - L \bar{r}_k$$

en injectant l'expression de  $Z_k$  dans l'équation précédente, on obtient

$$e_k = F^{sN} x_{k-N} + L_{\bar{r},N} \bar{r}_k + L_{\bar{w},N} \bar{w}_k^s - M \hat{x}_{k-N|k-N} - L \bar{r}_k - H \left( \bar{C}_N^s x_{k-N} + \bar{B}_N^s \bar{r}_k + \bar{G}_N^s \bar{w}_k^s + \bar{V}_k \right)$$

$$= \left( F^{sN} x_{k-N} - H \bar{C}_N^s \right) x_{k-N} - M \hat{x}_{k-N|k-N} + H \bar{V}_k + \left( L_{\bar{r},N} - H \bar{B}_N^s - L \right) \bar{r}_k + \left( L_{\bar{w},N} - H \bar{G}_N^s \right) \bar{w}_k^s$$

Puisque

$$\hat{x}_{k-N|k-N} = x_{k-N} - e_{k-N} \quad (2.62)$$

alors, la relation précédente devient :

$$e_k = \left( F^{sN} - H \bar{C}_N^s \right) x_{k-N} - M \left( x_{k-N} - e_{k-N} \right) + H \bar{V}_k + \left( L_{\bar{r},N} - H \bar{B}_N^s - L \right) \bar{r}_k + \left( L_{\bar{w},N} - H \bar{G}_N^s \right) \bar{w}_k^s$$

$$= \left( F^{sN} - H \bar{C}_N^s - M \right) x_{k-N} + M e_{k-N} + H \bar{V}_k + \left( L_{\bar{r},N} - H \bar{B}_N^s - L \right) \bar{r}_k + \left( L_{\bar{w},N} - H \bar{G}_N^s \right) \bar{w}_k^s$$

## 2.4. Estimation à horizon glissant au sens de la variance minimale

On dit qu'un estimateur est non biaisé si l'erreur d'estimation est à moyenne nulle, i.e,  $E(e_k) = 0$ . Pour cela, les contraintes suivantes

$$M = F^{sN} - H\tilde{C}_N^s \quad (2.63a)$$

$$L = L_{\bar{r},N} - H\tilde{B}_N^s. \quad (2.63b)$$

doivent être satisfaites.

En substituant (2.63) dans la formule de  $e_k$ , nous obtenons

$$e_k = (F^{sN} - H\tilde{C}_N^s)e_{k-N} + (L_{\bar{w}^s,N} - H\tilde{G}_N^s)\bar{W}_k^s + H\bar{V}_k \quad (2.64)$$

Le problème est réduit à la détermination de la matrice  $H$  qui minimise la trace de la covariance  $P_{k|k} = E\{e_k e_k^T\}$ . Notons que  $P_{k|k}$  est donnée par :

$$P_{k|k} = (F^{sN} - H\tilde{C}_N^s)P_{k-N|k-N}(F^{sN} - H\tilde{C}_N^s)^T + (L_{\bar{w}^s,N} - H\tilde{G}_N^s)Q_k^s(L_{\bar{w}^s,N} - H\tilde{G}_N^s)^T + HR_k^sH^T \quad (2.65)$$

Le minimum de la trace de la matrice de covariance  $P_{k|k}$  est donné par

$$H = (F^{sN}P_{k-N|k-N}(\tilde{C}_N^s)^T + L_{\bar{w}^s,N}Q_k^s(\tilde{G}_N^s)^T)(\tilde{C}_N^sP_{k-N|k-N}(\tilde{C}_N^s)^T + \tilde{G}_N^sQ_k^s(\tilde{G}_N^s)^T + R_k^s)^{-1}, \quad (2.66)$$

la condition d'existence de  $H$  est la suivante :

$$(\tilde{C}_N^sP_{k-N|k-N}(\tilde{C}_N^s)^T + \tilde{G}_N^sQ_k^s(\tilde{G}_N^s)^T + R_k^s) > 0$$

en substituant (2.66) dans (2.65), on obtient

$$P_{k|k} = \begin{bmatrix} F^{sN} & L_{\bar{w}^s,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} \\ W_{1,2}^T & W_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (F^{sN})^T \\ L_{\bar{w}^s,N}^T \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} W_{1,1} &= (\tilde{C}_N^s)^T(R_N^s)^{-1}\tilde{C}_N^s \\ W_{1,2} &= (\tilde{C}_N^s)^T(R_N^s)^{-1}\tilde{G}_N^s \\ W_{2,2} &= (\tilde{G}_N^s)^T(R_N^s)^{-1}\tilde{G}_N^s + (Q_N^s)^{-1} \\ R_N^s &= \text{diag}(R^s, \dots, R^s) \\ Q_N^s &= \text{diag}(Q^s, \dots, Q^s). \end{aligned}$$

On peut prouver facilement que la matrice  $H$  peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$H = \begin{bmatrix} F^{sN} & L_{\bar{w}^s,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,1} + P_{k-N|k-N}^{-1} & W_{1,2} \\ W_{1,2}^T & W_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{C}_N^s)^T \\ (\tilde{G}_N^s)^T \end{bmatrix} (R_N^s)^{-1}. \quad (2.67)$$

A ce stade, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.5.** (Boukroune et al. [22]) Sous les conditions de l'hypothèse 2.4.1, l'estimée optimale MHE de  $x_k$  et sa matrice de covariance sont données par

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= F^{sN} \hat{x}_{k-N|k-N} + \begin{bmatrix} F^{sN} & L_{\bar{w}^s, N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,1} + P_{k-N|k-N}^{-1} & W_{1,2} \\ W_{1,2}^T & W_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\bar{C}_N^s)^T \\ (\bar{G}_N^s)^T \end{bmatrix} (R_N^s)^{-1} \\ &\quad \times \left( Z_k - \bar{C}_N^s \hat{x}_{k-N|k-N} - \bar{B}_N^s \bar{r}_k \right) + L_{\bar{r}, N} \bar{r}_k. \end{aligned} \quad (2.68a)$$

$$P_{k|k} = \begin{bmatrix} F^{sN} & L_{\bar{w}^s, N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,1} + P_{k-N|k-N}^{-1} & W_{1,2} \\ W_{1,2}^T & W_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F^{sN} & L_{\bar{w}^s, N} \end{bmatrix}^T \quad (2.68b)$$

■

L'estimée optimale MHE (2.68a) peut être réécrite sous la forme suivante :

**Lemme 2.4.** (Boukroune et al. [22]) L'estimée optimale MHE de  $x_k$ , donnée par le théorème 2.5, s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} F^{sN} & L_{\bar{w}^s, N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1,1} + P_{k-N|k-N}^{-1} & W_{1,2} \\ W_{1,2}^T & W_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \left( \begin{bmatrix} P_{k-N|k-N}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{k-N|k-N} + \begin{bmatrix} (\bar{C}_N^s)^T \\ (\bar{G}_N^s)^T \end{bmatrix} (R_N^s)^{-1} \left( Z_k - \bar{B}_N^s \bar{r}_k \right) \right) + L_{\bar{r}, N} \bar{r}_k. \end{aligned}$$

■

### 2.4.3 Convergence et stabilité de l'estimateur

Avant d'étudier la convergence et la stabilité du filtre présenté ci-dessus, nous allons présenter le lemme suivant :

**Lemme 2.5.** L'estimée MHE du système (2.44) donnée par le lemme (2.4) est équivalente au filtre de Kalman. [91]

■

**Démonstration 2.6.** Voir [91].

□

En utilisant le lemme 2.5, l'estimée MHE peut être représentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= (F^s - K_{k-1}^s \underline{C}) \hat{x}_{k-1|k-1} + (\bar{B}^s - K_{k-1}^s D) r_k \\ P_{k|k} &= F^s P_{k-1|k-1} F^{sT} + Q^s - K_{k-1}^s \underline{C} P_{k-1|k-1} F^{sT} \end{aligned} \quad (2.69)$$

où

$$K_{k-1}^s = F^s P_{k-1|k-1} \underline{C}^T \left( \underline{C} P_{k-1|k-1} \underline{C}^T + R^s \right)^{-1},$$

et  $P_{0|0} = P_0$ .

L'équation de Riccati algébrique (RAE) associée à l'équation de Riccati discrète (RDE) (2.69) est la suivante :

$$P = F^s P F^{sT} + Q^s - K^s \underline{C} P F^{sT} \quad (2.70)$$

avec

$$K^s = F^s P \underline{C}^T (\underline{C} P \underline{C}^T + R^s)^{-1}.$$

Le problème de la convergence et de la stabilité de l'estimateur ci-dessus peut être traité exactement comme dans le cas du filtre de Kalman, car dépendant des propriétés des équations de Riccati discrète et algébrique standards. Nous nous référons donc aux travaux de De Souza *et al.* [47] pour énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.6.** [11]

- L'équation de Riccati algébrique (2.70), associée à l'équation de Riccati discrète (2.69), admet une solution stabilisante non définie négative unique si et seulement si la paire  $(\underline{C}, F^s)$  est détectable et si la paire  $(F^s, Q^{s\frac{1}{2}})$  n'admet pas de mode non atteignable sur le cercle unité.
- Si  $P_{0|0} \geq 0$  ou  $P_{0|0} \geq P$ , alors la séquence  $\{P_{k|k}, k \geq 0\}$ , générée par l'équation de Riccati (2.69), converge asymptotiquement vers l'unique solution stabilisante de l'équation de Riccati algébrique associé, si et seulement si la paire  $(\underline{C}, F^s)$  est détectable et si la paire  $(F^s, Q^{s\frac{1}{2}})$  n'admet pas de mode non atteignable sur le cercle unité.

■

**Démonstration 2.7.** Les détails de la preuve sont donnés dans [47].

□

### 2.4.4 Exemple numérique

Considérons le système singulier suivant :

$$\begin{aligned} E x_{k+1} &= A x_k + B u_k + w_k, & k = 0, 1, 2, \dots \\ y_k &= C x_k + v_k \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.59 \\ 0 & -1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.09 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad W_w = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix},$$

$$V_v = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_0 = [3 \ 3 \ 3 \ 3]^T, \quad N = 10 \quad \text{et} \quad k = 65.$$

Les hypothèses du théorème 2.5 sont vérifiées et les matrices  $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$  et  $\bar{J}_4$  sont donc données par

$$\bar{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{J}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{J}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

La figure (2.7) montre les entrées du système  $u_k$ . Les figures (2.8)-(2.11) montrent les résultats de l'estimation de l'état  $x_k$  en se basant sur le théorème 2.5.

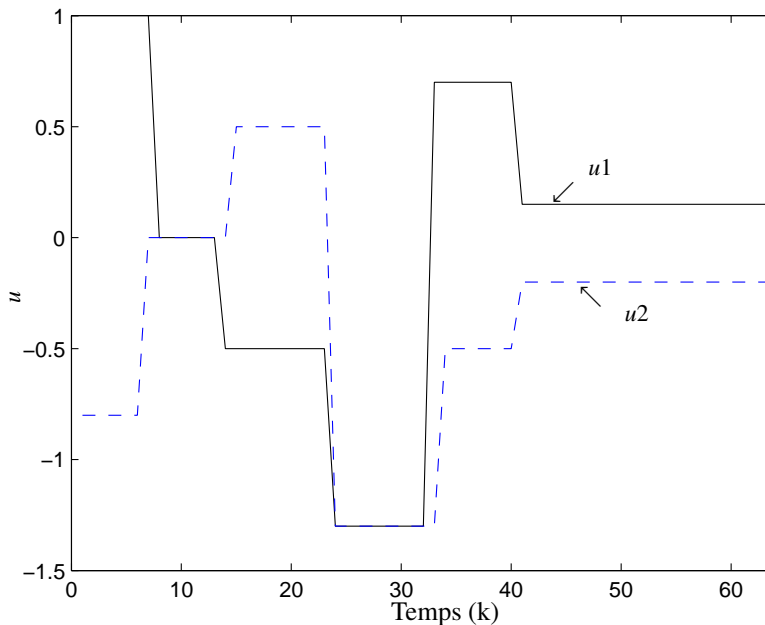


FIGURE 2.7: Les entrées du système  $u_k$ .

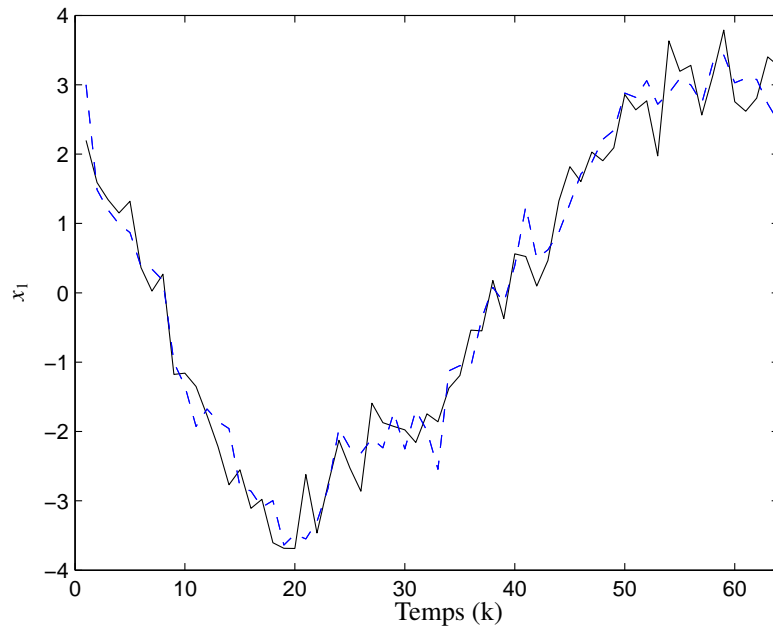


FIGURE 2.8: L'état  $x_1(k)$  (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue).

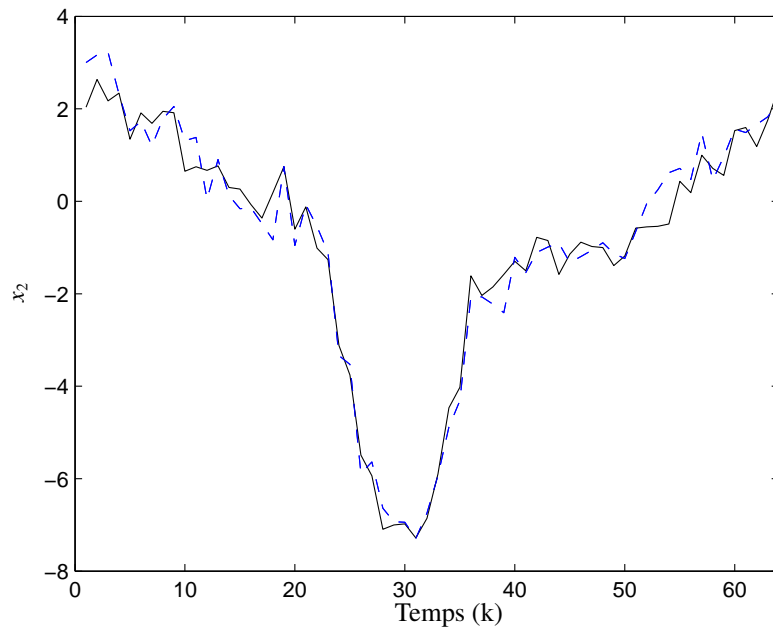


FIGURE 2.9: L'état  $x_2(k)$  (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue).

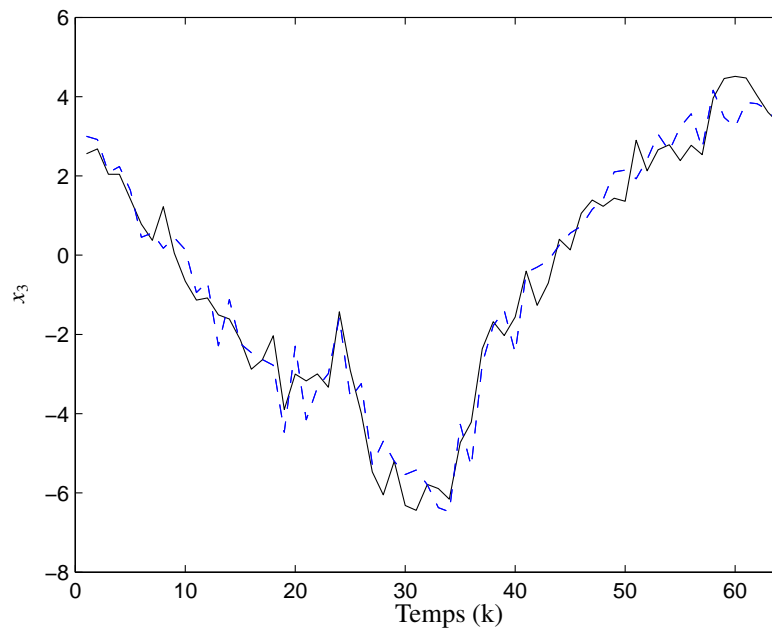


FIGURE 2.10: L'état  $x_3(k)$  (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue).

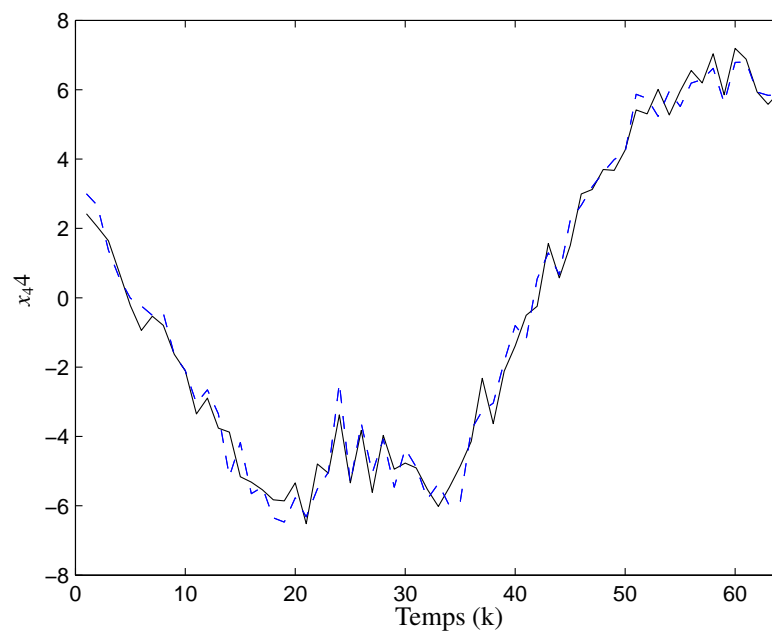


FIGURE 2.11: L'état  $x_4(k)$  (ligne continue) et l'estimée MHE (ligne discontinue).

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de l'estimation de l'état des systèmes singuliers. Ce problème est partiellement résolu et le filtre de Kalman généralisé est présenté comme une solution. Pour construire ce filtre, nous devons utiliser toutes les mesures disponibles. Dans la réalité, les systèmes subissent généralement des contraintes telles que : des états positifs, des entrées bornées, une partie seulement des données est disponible, *etc.* Comme le filtre de Kalman généralisé ne peut pas prendre les contraintes en compte, nous avons proposé l'approche MHE. Nous nous sommes intéressés au cas où une partie seulement des données est disponible. Tout d'abord, nous avons présenté un estimateur optimal, au sens des moindres carrés, qui correspond, sous certaines hypothèses, au filtre de Kalman généralisé. En se basant sur ce premier résultat, l'approche de l'estimation à horizon glissant est appliquée pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues des systèmes linéaires. Ensuite, nous avons proposé un autre estimateur optimal à variance minimale, et nous avons établi ses conditions de convergence et de stabilité.





---

# Estimation de l'état des systèmes non linéaires singuliers

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>3.2</b>	<b>Observateur pour les systèmes non linéaires singuliers</b> . . . . .	<b>75</b>
3.2.1	Formulation de l'observateur . . . . .	75
3.2.2	Exemple numérique . . . . .	78
<b>3.3</b>	<b>Synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires singuliers à temps-discret</b> . . . . .	<b>84</b>
3.3.1	Position du problème . . . . .	84
3.3.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	86
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>88</b>

---

### 3.1 Introduction

Historiquement développés en premier lieu pour l'estimation de l'état des systèmes dynamiques linéaires, les observateurs de Kalman ([84] et [85]) et de Luenberger [101] se sont rapidement révélés inadaptés pour observer l'état des systèmes non linéaires. De nombreuses méthodes ont ainsi été proposées depuis le début des années 1970 pour y remédier.

Le filtre de Kalman étendu (FKE) ou observateur de Kalman étendu (OKE) dans un contexte déterministe est une des techniques d'estimation de l'état des systèmes non linéaires les plus fréquemment utilisées. Les nombreuses recherches qui ont été menées sur ce sujet ont donné lieu à de nombreuses publications et ouvrages tels que [62], [110, 141], [136], [145, 140], [37], [63], [34], [33], [141], [31], [26], [25] et [4], . . . Cette approche est classée parmi les techniques de linéarisation au premier ordre de l'erreur d'observation et consiste essentiellement à s'inspirer du filtre de Kalman pour les systèmes LTI (Linear Time Invariant) en linéarisant, à chaque instant, le système étudié le long des trajectoires estimées. Il est cependant connu que la stabilité de cet estimateur n'est généralement pas acquise et que seuls des résultats locaux de convergence sont garantis. Comme il existe des situations où les systèmes ne sont pas réguliers (existence des contraintes algébriques ou présence d'entrées inconnues), un observateur de type de Kalman étendu pour la classe des systèmes non linéaires singuliers temps discret à mesures linéaires est proposé dans [26]. L'approche choisie utilise la condition d'observabilité à l'infini du système étudié et traite le cas où la matrice  $E$  peut être rectangulaire. Les conditions suffisantes de stabilité de l'erreur d'observation sont établies en paramétrant l'analyse de la convergence de l'observateur grâce à la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre. Le rôle principal joué par certaines matrices de pondération dans l'amélioration des performances de l'observateur est bien montré avec un réglage empirique de ces matrices. Cet observateur est présenté dans la première section.

Dans la deuxième section, nous allons présenter une approche d'observation pour la classe des systèmes lipschitziens à temps discret. Notons que la plupart des approches concernant la classe des systèmes lipschitziens à temps continu (par exemple, [1], [130], [125], [165], [124] et [29]) ne peuvent être transposées directement au cas des systèmes à temps discret. En effet, dans la variation de la fonction de Lyapunov apparaît un terme additif (positif) empêchant de compléter la procédure de synthèse (voir 1.3.4). En supposant que la partie linéaire de la classe de systèmes choisis est variable dans le temps, le problème de l'estimation de l'état d'un système non linéaire est réduit à un problème de l'estimation de l'état d'un système partiellement LPV. La condition de stabilité de l'observateur proposé est exprimée en terme d'inégalités linéaires matricielles (LMI).

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter la partie théorique des deux observateurs qui seront utilisés dans le chapitre 4 pour l'estimation de l'état du modèle réduit d'une station d'épuration à boues activées.

## 3.2 Observateur pour les systèmes non linéaires singuliers

Dans plusieurs situations, l'utilisation d'un modèle d'état régulier ne suffit pas à représenter le comportement dynamique d'un système donné. Une modélisation sous forme singulière semble alors appropriée. Dans le cas des systèmes LTI, le problème de la commande et de l'observation des systèmes singuliers, comme nous avons l'indiqué dans la section précédente, a attiré beaucoup d'attention. *A contrario*, le cas non linéaire est souvent délaissé et peu de travaux traitent le problème de la synthèse d'observateurs des systèmes singuliers. Parmi ces travaux, on peut citer [86], [30], [27], [138], [138] et [137].

Dans cette section, nous présentons un observateur pour les systèmes non linéaires singuliers temps-discret en utilisant la structure classique de l'OKE présentée dans [26] et dans la thèse d'Aubry Didier [24]. Pour montrer les performances de l'OKE, un exemple du moteur à courant continu est présenté. Cet exemple, déjà utilisé dans [26] et [24] pour le même objectif, traite le problème d'estimation de l'état et de l'entrée inconnue d'un moteur à induction à deux phases.

### 3.2.1 Formulation de l'observateur

Considérons le système non linéaire singulier temps-discret décrit par le couple d'équations :

$$Ex_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (3.1a)$$

$$y_k = Hx_k \quad (3.1b)$$

où  $E$  et  $H$  sont des matrices d'éléments réels de dimension  $q \times n$  et  $p \times n$ ,  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_k \in \mathfrak{X}^r$  est le vecteur des entrées et  $y_k \in \mathfrak{Y}^p$  est le vecteur des sorties à l'instant  $k$ . Nous supposons que la fonction non linéaire  $f$  est de classe  $C^1$ <sup>1</sup>.

**Remarque 3.1.** *Le modèle (3.1) constitue bien une représentation unifiée des systèmes non linéaires (à mesures linéaires). Cependant, plusieurs cas sont à distinguer selon le rang de la matrice  $E$  :*

- Si  $\text{rang}(E) = r = q = n$ , alors  $E$  est inversible et (3.1) est un système non linéaire "standard" ou explicite,
- Si  $\text{rang}(E) = r = n < q$ , alors (3.1a) est décomposable en équations différentielles et en équations algébriques, et (3.1) est un système non linéaire "standard" avec des contraintes algébriques non linéaires,
- Si  $\text{rang}(E) = r = q < n$ , alors (3.1) est un système non linéaire "standard" à dynamiques partielles.
- Si  $\text{rang}(E) = r$ , avec  $r < n$  et  $r < q$ , alors (3.1) est un système non linéaire "standard" à dynamiques partielles avec des contraintes algébriques non linéaires. ■

Par la suite, nous allons construire l'état de ce système à l'aide d'un observateur de type Kalman étendu sous une condition de rang classique dans l'étude des systèmes singuliers. L'observateur de type Kalman étendu du système (3.1) est donné par le théorème suivant :

1.  $C^1$  : classe des fonctions continûment différentiables

**Théorème 3.1.** [26] Si la condition suivante (observabilité à l'infini) est vérifiée :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = n \quad (3.2)$$

alors un observateur de type de Kalman étendu (OKE) pour (3.1) est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}e_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} f(x_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{k+1|k}H^T (HP_{k+1|k}H^T + R_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1|k} &= AF_kP_kF_k^T A^T + Q_k \\ P_{k+1} &= (I - K_{k+1}H)P_{k+1|k} \\ e_{k+1} &= y_{k+1} - H\hat{x}_{k+1|k} \end{aligned}$$

où

$$F_k = AF(\hat{x}_k, u_k) = A \left. \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k} \quad (3.4)$$

$$A = \left( \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} E^T \quad (3.5)$$

$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger$  représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose à gauche de  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$ ,  $P_0 = \mu I_n > 0$ ,  $Q_k$  et  $R_k$  sont des matrices de pondération définies positives dont la synthèse sera détaillée ultérieurement. ■

**Démonstration 3.1.** sous la condition d'observabilité à l'infini (3.2), du système singulier (3.1), le vecteur d'état  $x_{k+1}$  se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right) x_{k+1} \\ &= \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} (E^T E x_{k+1} + H^T H x_{k+1}) \\ &= \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E x_{k+1} \\ H x_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

En substituant (3.1a) et (3.1b) dans (3.6), nous obtenons le système dynamique régulier suivant :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} f(x_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

$$y_k = Hx_k \quad (3.7b)$$

A ce système déterministe, nous associons le système stochastique artificiel :

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} f(\xi_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} + G_k w_k \quad (3.8a)$$

$$y_k = H\xi_k + D_k v_k \quad (3.8b)$$

où  $\xi_k \in \mathfrak{R}^n$ ,  $w_k \in \mathfrak{R}^r$  et  $v_k \in \mathfrak{R}^s$  sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariance unitaire.  $G_k$  et  $D_k$  sont les matrices dépendant du temps, de dimensions respectives  $n \times r$  et  $p \times s$ .

Nous cherchons désormais à construire un filtre de type Kalman étendu pour (3.8). La dynamique de l'estimateur étudié est de la forme :

$$\hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_{k+1} - H\hat{\xi}_{k+1|k}) \quad (3.9)$$

où, en utilisant le vecteur de prédiction généralisé  $E\hat{\xi}_{k+1|k} = f(\hat{\xi}_k, u_k)$  et l'équation de sortie (3.8a), la prédiction  $\hat{\xi}_{k+1|k}$  est calculée à partir de

$$\hat{\xi}_{k+1} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} f(\hat{\xi}_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Soient  $\hat{\xi}_{k+1}$  et  $\hat{\xi}_{k+1|k}$  les vecteurs d'estimation et de prédiction tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{k+1} &= \xi_{k+1} - \hat{\xi}_{k+1} \\ &= (I_n - K_{k+1}H)\tilde{\xi}_{k+1|k} - K_{k+1}v_{k+1} + w_k \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{k+1|k} &= \xi_{k+1} - \hat{\xi}_{k+1|k} \\ &= \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} (E^T E \xi_{k+1} + H^T y_{k+1}) - \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} (E^T E \hat{\xi}_{k+1|k} + H^T y_{k+1}) \\ &= \left( \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} E^T (f(\xi_k, u_k) - f(\hat{\xi}_k, u_k)) \\ &= AE^T (f(\xi_k, u_k) - f(\hat{\xi}_k, u_k)) \\ &= A (F_k \tilde{\xi}_k + \varphi_k(\xi_k, \tilde{\xi}_k, u_k)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $A$  et  $F_k$  sont définies par (3.5) et (3.4) et  $\varphi_k$  représente les termes résiduels d'ordre supérieur ou égal à deux en  $\xi_k - \hat{\xi}_k$  issus de la linéarisation de  $f$  en  $\hat{\xi}_k$ .

En négligeant  $\varphi_k$  et en insérant (3.12) dans (3.11), le gain  $K_{k+1}$  de l'estimateur (3.9) résulte la minimisation de la matrice de covariance  $P_{k+1} = \mathcal{E}\{\tilde{\xi}_{k+1}\tilde{\xi}_{k+1}^T\}$ . Les équations obtenues sont alors celles du filtre de Kalman étendu classique muni de la "prédiction"

$$\hat{\xi}_{k+1} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} f(\hat{\xi}_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$$

et de l'équation de Riccati aux différences  $P_{k+1|k} = AF_k P_k F_k^T A^T + Q_k$ . L'utilisation de ce filtre en tant qu'observateur pour le système déterministe (3.8) donne l'algorithme (3.3)-(3.5).  $\square$

L'analyse des mécanismes de convergence de l'observateur par une approche de Lyapunov est présentée dans [26]. Pour satisfaire les conditions de stabilité et de convergence de l'OKE, les matrices de pondération  $Q_k$  et  $R_k$  sont à choisir à partir de :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_n + \epsilon I_n \quad (3.13)$$

$$R_{k+1} = \lambda H P_{k+1|k} H^T + \delta I_p \quad (3.14)$$

où  $\gamma \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$  sont des scalaires fixés par l'utilisateur et  $\epsilon > 0$  est un paramètre de synthèse suffisamment petit fixé aussi par l'utilisateur.

### 3.2.2 Exemple numérique

L'exemple numérique choisi est un moteur à induction triphasé. Afin de réduire la complexité d'une représentation triphasée, un modèle à deux phases est utilisé [105]. L'application de l'observateur OKE, présenté dans la section 3.2, sur cet exemple est déjà faite par [26] et [24]. L'objectif de ce paragraphe est de présenter les performances de l'OKE avant de l'appliquer sur le modèle de la station d'épuration. Cette étape sera présentée dans le prochain chapitre. Les mesures utilisées sont celles des courants statiques [4].

Une représentation temps-discret du modèle de moteur, dans le repère fixe  $(a, b)$ , est donnée par :

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + \tau \left( -\gamma x_{1,k} + \frac{K}{T_r} x_{3,k} + K n_p x_{5,k} x_{4,k} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sak} \right) \quad (3.15)$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + \tau \left( -\gamma x_{2,k} + \frac{K}{T_r} x_{4,k} - K n_p x_{5,k} x_{3,k} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sbk} \right) \quad (3.16)$$

$$x_{3,k+1} = x_{3,k} + \tau \left( \frac{M}{T_r} x_{1,k} - \frac{1}{T_r} x_{3,k} - n_p x_{5,k} x_{4,k} \right) \quad (3.17)$$

$$x_{4,k+1} = x_{4,k} + \tau \left( \frac{M}{T_r} x_{2,k} - \frac{1}{T_r} x_{4,k} + n_p x_{5,k} x_{3,k} \right) \quad (3.18)$$

$$x_{5,k+1} = x_{5,k} + \tau \left( \frac{n_p M}{J L_r} (x_{3,k} x_{2,k} - x_{4,k} x_{1,k}) - \frac{T_l}{J} - \frac{F_v}{J} x_{5,k} \right) \quad (3.19)$$

et

$$y_{1,k} = x_{1,k} + d_k \quad (3.20)$$

$$y_{2,k} = x_{2,k} \quad (3.21)$$

où  $x_{1,k}$  et  $x_{2,k}$  représentent les courants statoriques,  $u_{sak}$  et  $u_{sbk}$  sont les tensions statoriques,  $x_{3,k}$  et  $x_{4,k}$  représentent des flux rotoriques,  $x_{5,k}$  est la vitesse angulaire du rotor,  $d_k$  est un scalaire qui représente l'entrée inconnue,  $n_p$  est le nombre de paires de pôle du moteur,  $T_l$  est le couple de

### 3.2. Observateur pour les systèmes non linéaires singuliers

charge et  $\tau$  est la période d'échantillonnage. Les indices  $s$  et  $r$  représentent le stator et le rotor. La constante de temps  $T_r$  et les paramètres  $\sigma$ ,  $K$  et  $\gamma$  sont définis par

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}, \quad K = \frac{M}{\sigma L_s L_r} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2} \quad (3.22)$$

où  $R_s$  ( $R_r$ ) représente la résistance du stator (du rotor respectivement),  $L_s$  et  $L_r$  sont respectivement les auto-inductances statorique et rotorique,  $M$  est l'inductance mutuelle stator/rotor.

La valeur des différents paramètres est donnée par le tableau 3.1 [105].

Le nom	Terme	La valeur	unités
Résistance statorique	$R_s$	0.18	$\Omega$
Résistance rotorique	$R_r$	0.15	$\Omega$
Auto-inductance statorique	$L_s$	0.0699	$H$
Auto-inductance rotorique	$L_r$	0.0699	$H$
Inductance mutuelle stator/rotor	$M$	0.068	$H$
Moment d'inertie (charge + moteur)	$J$	0.086	$Nm.rad^{-1}.S^{-1}$
Coefficient de frottement visqueux (charge + moteur)	$F_v$	0.0029	$Nm.rad^{-1}.S^{-1}$
Couple de charge	$T_l$	70	$Nm$
Nombre de paires de pôles	$n_p$	2	—

TABLE 3.1: Paramètres moteur

Dans l'objectif d'appliquer l'OKE à l'estimation simultanée de l'état et de l'entrées inconnue de systèmes non linéaire, le modèle en temps discret du moteur peut être écrit sous la forme suivante

$$x_{k+1} = f(x_k, d_k, u_k) \quad (3.23a)$$

$$y_k = Cx_k + Nd_k \quad (3.23b)$$

où  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $d_k \in \mathfrak{R}^d$  représente le vecteur des entrées inconnues et  $u_k = \begin{bmatrix} u_{sak} \\ u_{sbk} \end{bmatrix}$  est l'entrée du système.

Pour estimer simultanément l'état et les entrées inconnues de (3.23), nous définissons le vecteur augmenté  $X_k = (x_k \ d_k)^T \in \mathfrak{R}^{n+d}$  pour retrouver la forme du système singulier (3.1), nous obtenons

$$EX_{k+1} = f(X_k, u_k) \quad (3.24a)$$

$$y_k = HX_k \quad (3.24b)$$

où  $E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times d} \end{bmatrix}$  et  $H = \begin{bmatrix} C & N \end{bmatrix}$ .



A partir du modèle de moteur à induction (3.15)-(3.21), les matrices  $C$  et  $N$  sont données par  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  respectivement. En introduisant le vecteur d'état augmenté  $X_k = (x_k \quad d_k)^T$ , il est facile de réécrire (3.15)-(3.21) sous la forme singulière (4.10) avec  $E = \begin{bmatrix} I_5 & 0_{5 \times 1} \end{bmatrix}$  et  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Les entrées appliquées sont  $u_{1,k} = 350\cos(0.15k)$  et  $u_{2,k} = 300\cos(0.2k)$ . La période d'échantillonnage est  $\tau = 0.1ms$ . Nous supposons que le capteur mesurant le courant statorique  $x_{1,k}$  devient défaillant au bout de  $75ms$ . Les conditions initiales du système, de l'observateur et le paramétrage des matrices de pondération  $Q_k$  et  $R_k$  sont :

$$x_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad d_0 = 0, \quad \hat{X}_0 = (300 \ 300 \ 5 \ 5 \ 100 \ -200)^T,$$

$$P_0 = 10^5 I_6, \quad \gamma = 10^5, \quad \lambda = 10^{-3} \quad \text{et} \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Les résultats de simulation sont reportés sur les figures 3.1-3.6. La convergence de l'algorithme est acquise au bout de  $80ms$  comme le montre la figure 3.6.

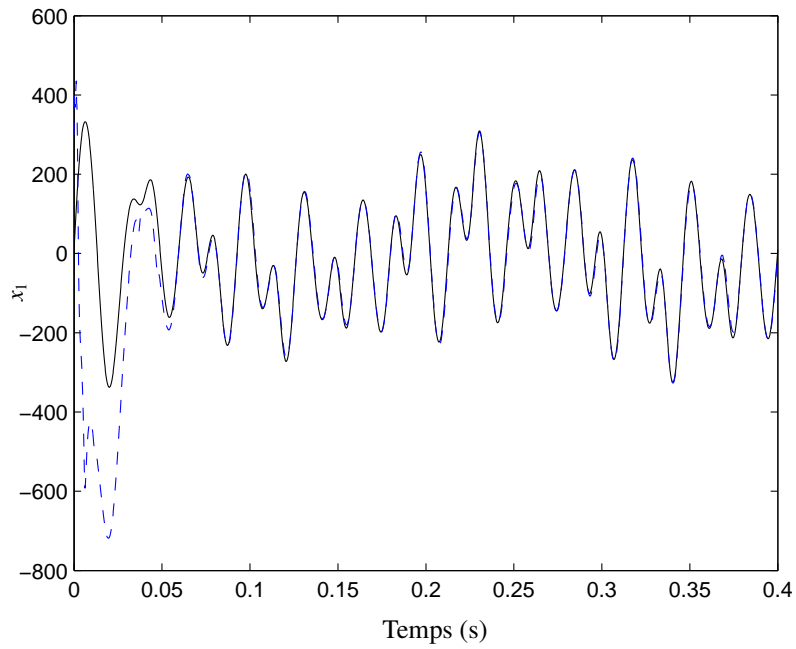


FIGURE 3.1: L'état  $x_1(k)$  (—) et son estimé (---).

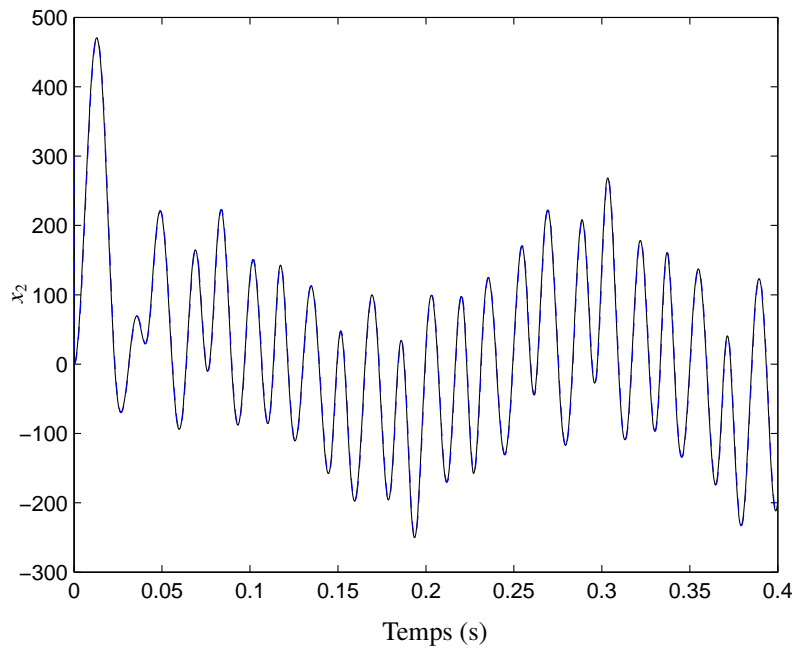


FIGURE 3.2: L'état  $x_2(k)$  (—) et son estimé (---).

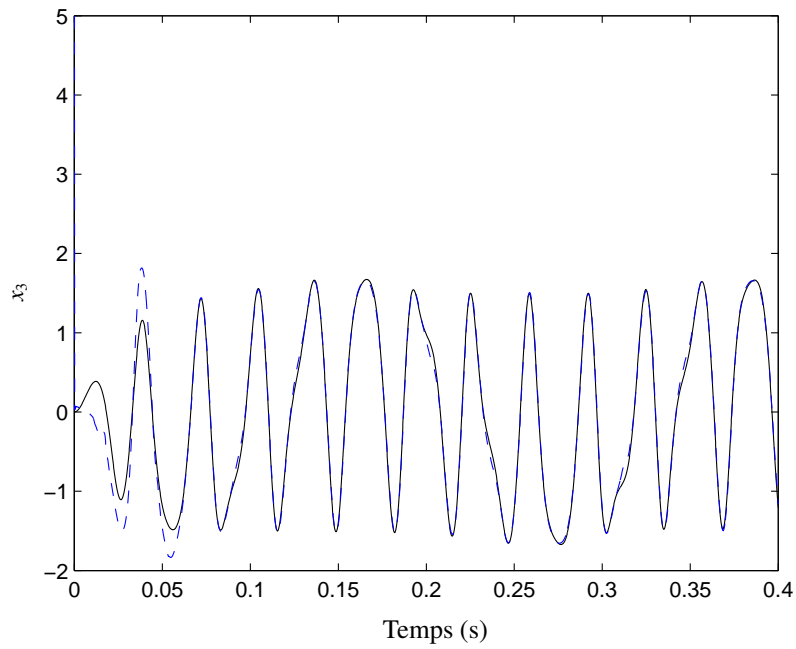


FIGURE 3.3: L'état  $x_3(k)$  (—) et son estimé (---)

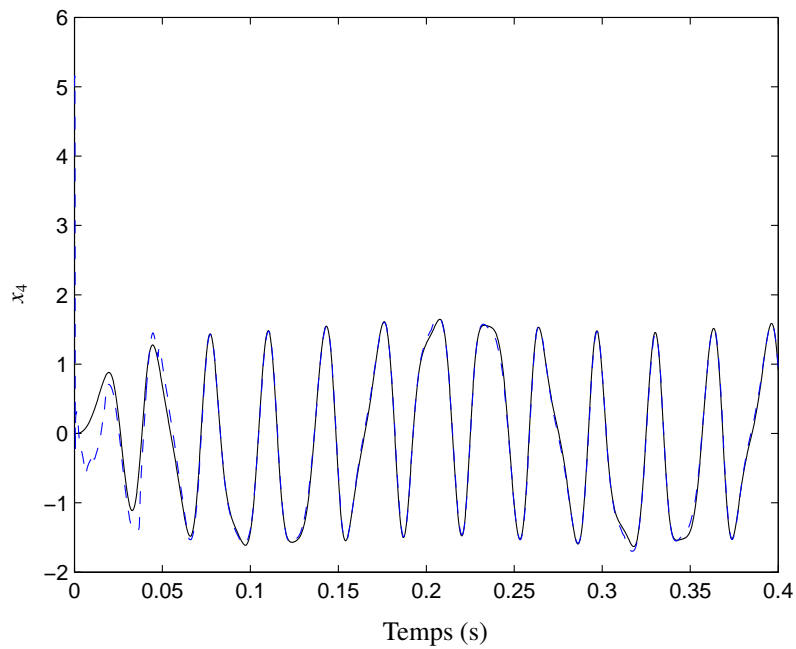


FIGURE 3.4: L'état  $x_4(k)$  (—) et son estimé (---)

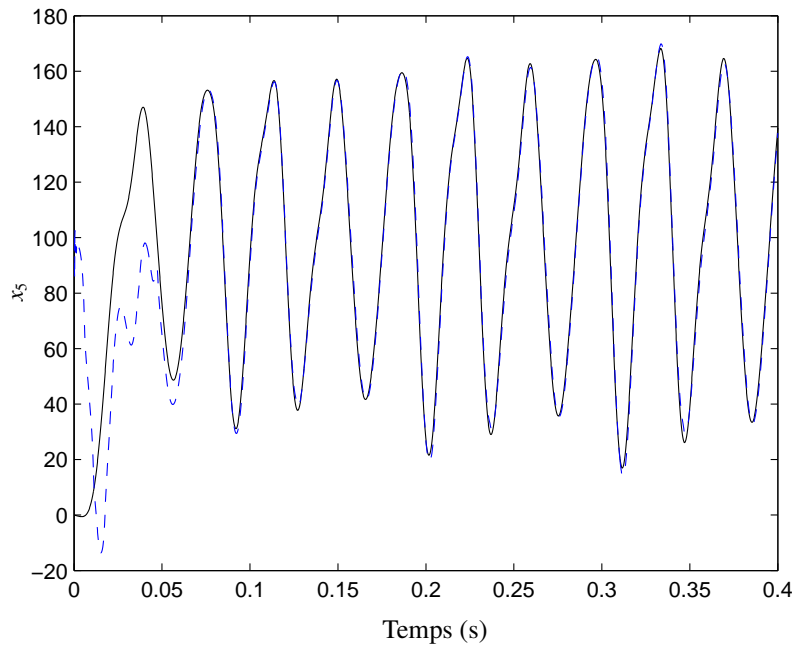


FIGURE 3.5: L'état  $x_5(k)$  (—) et son estimé (---)

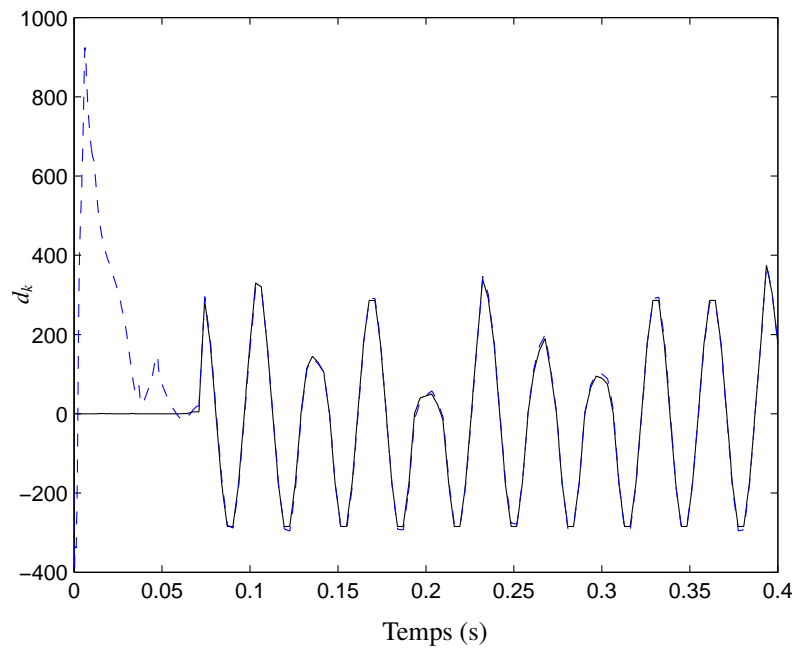


FIGURE 3.6: L'entrée inconnue  $d_k$  (—) et sa estimée (---)

### 3.3 Synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires singuliers à temps-discret : approche LMI

Cette section est dédiée à la synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires singuliers Lipschitziens temps-discret. Cette approche utilise la condition de Lipschitz conjointement avec l'inégalité classique de Lyapunov. Nous constatons que plusieurs résultats sur l'observation d'état pour la classe des systèmes lipschitziens, dans le cas continu, ont été établis (par exemple, [1], [130], [125], [165], [124] et [29]). En revanche, peu de résultats existent dans la littérature pour le cas des systèmes à temps discret. (voir [6], [160] et [74]). Nous supposons que la partie linéaire de la classe de systèmes choisis varie dans le temps. Le problème de l'estimation de l'état d'un système non linéaire est réduit à un problème d'estimation de l'état d'un système LPV. En s'inspirant des techniques [9, 7], un observateur est proposé avec des nouvelles conditions suffisantes de convergence. Ces conditions sont exprimées sous la forme de LMI.

#### 3.3.1 Position du problème

Considérons le système non linéaire singulier à temps discret décrit par les équations suivantes :

$$Ex_{k+1} = A(\varrho_k)x_k + f(x_k, u_k) \quad (3.25a)$$

$$y_k = Hx_k \quad (3.25b)$$

où  $A(\varrho_k) = A_0 + \varrho_k A_1$  et  $E$ ,  $A_0$ ,  $A_1$  et  $H$  sont des matrices réelles de dimensions  $\bar{q} \times \bar{n}$ ,  $\bar{q} \times \bar{n}$ ,  $\bar{q} \times \bar{n}$  et  $\bar{p} \times \bar{n}$  respectivement.  $\varrho_k$  est un paramètre évoluant dans un domaine borné,  $x_k \in \mathfrak{X}^{\bar{n}}$  est le vecteur d'état,  $u_k \in \mathfrak{X}^{\bar{r}}$  est le vecteur des entrées et  $y_k \in \mathfrak{X}^{\bar{p}}$  représente la sortie du système.  $f(x_k, u_k)$  est une fonction non linéaire lipschitzienne par rapport à  $x$ , c'est-à-dire :

$$\|f(x_{1,k}, u_k) - f(x_{2,k}, u_k)\| \leq \gamma \|x_{1,k} - x_{2,k}\| \quad (3.26)$$

pour tout  $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}^{\bar{n}}$  et  $\gamma > 0$  indépendant de  $u$ .

Par la suite, nous supposons que la condition suivante est vérifiée [40] :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \bar{n} \quad (3.27)$$

Par conséquent, la matrice  $\left( \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1}$  existe. Posons maintenant

$$[T \quad Q] = \left( \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

avec  $T$  et  $Q$  des matrices réelles de dimensions respectives  $\bar{n} \times \bar{q}$  et  $\bar{n} \times \bar{p}$ . Nous déduisons de (3.28) :

$$TE + QH = I_{\bar{n}}. \quad (3.29)$$

### 3.3. Synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires singuliers à temps-discret

L'observateur d'état correspondant au système (3.25), que nous proposons ici, est donné par

$$z_{k+1} = N(\varrho_k)z_k + L(\varrho_k)y_k + g(z_k, u_k) \quad (3.30a)$$

$$\hat{x}_k = z_k + Qy_k \quad (3.30b)$$

où  $\hat{x}_k$  représente l'estimée de l'état  $x_k$ . L'objectif principal est de déterminer les matrices  $N$ ,  $L$  et la fonction non linéaire  $g(z_k, u_k)$  telles que l'erreur

$$e_k = \hat{x}_k - x_k \quad (3.31)$$

converge asymptotiquement vers l'origine.

En substituant (3.30b) et (3.25b) dans (3.31), nous obtenons l'erreur suivante

$$e_k = z_k + (QH - I_{\bar{n}})x_k \quad (3.32)$$

en utilisant (3.29), l'erreur  $e_k$  devient

$$e_k = z_k - TE x_k. \quad (3.33)$$

A partir de (3.30a) et (3.25a), nous avons

$$e_{k+1} = N(\varrho_k)e_k + (N(\varrho_k) + F(\varrho_k)H - TA(\varrho_k))x_k + g(z_k, u_k) - Tf(x_k, u_k) \quad (3.34)$$

où

$$F(\varrho_k) = L(\varrho_k) - N(\varrho_k)Q \quad (3.35)$$

En posant

$$N(\varrho_k) = TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H \quad (3.36)$$

et

$$\begin{aligned} g(z_k, u_k) &= Tf(\hat{x}_k, u_k) \\ &= Tf(z_k + Qy_k, u_k) \end{aligned} \quad (3.37)$$

la dynamique de l'erreur devient

$$e_{k+1} = (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H) e_k + T\Delta f_k \quad (3.38)$$

où

$$\Delta f_k = f(\hat{x}_k, u_k) - f(x_k, u_k).$$

Le problème de la synthèse d'observateur (3.30) revient à déterminer le gain  $F(\varrho_k)$ , variant dans le temps, assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro.

### 3.3.2 Synthèse de l'observateur

D'après l'équation (3.38), une partie de la dynamique de l'erreur est linéaire en  $e_k$ , mais à temps variant car les matrices  $TA(\varrho_k)$  et  $F(\varrho_k)$  dépendent de  $\varrho_k$ . Par conséquent, (3.38) est un système partiellement LPV dont on cherche à garantir la stabilité globale en zéro. Cette garantie peut être obtenue par un choix judicieux de  $F(\varrho_k)$  essentiellement guidé par la recherche d'une fonction de Lyapunov adéquate. En s'inspirant de [8], nous pouvons choisir le gain  $F(\varrho_k)$  affine en  $\varrho_k$ . Alors, nous obtenons

$$F(\varrho_k) = F_0 + \varrho_k F_1 \quad (3.39)$$

où  $F_0, F_1$  sont des matrices constantes à déterminer telles que l'erreur  $e_k$  converge asymptotiquement vers zéro. Avant d'énoncer le théorème ci-après qui fournit les conditions suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation vers zéro, nous allons définir les paramètres suivants :

$$\underline{\varrho} = \min(\varrho_k), \quad \bar{\varrho} = \max(\varrho_k) \quad (3.40)$$

$$\underline{A} = A(\underline{\varrho}) \quad \text{et} \quad \bar{A} = A(\bar{\varrho}). \quad (3.41)$$

**Théorème 3.2.** *L'erreur d'estimation (3.31) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe un scalaire  $\tau > 0$  et des matrices  $P = P^T > 0$  et  $R$  de dimensions appropriées tels que les inégalités suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} -P + \tau\gamma^2 I_{\bar{n}} & \underline{A}^T T^T P T - H^T R_0 T - \underline{\varrho} H^T R_1 T & \underline{A}^T T^T P - H^T R_0 - \underline{\varrho} H^T R_1 \\ * & T^T P T - \tau I_{\bar{q}} & 0 \\ * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} -P + \tau\gamma^2 I_{\bar{n}} & \bar{A}^T T^T P T - H^T R_0 T - \bar{\varrho} H^T R_1 T & \bar{A}^T T^T P - H^T R_0 - \bar{\varrho} H^T R_1 \\ * & T^T P T - \tau I_{\bar{q}} & 0 \\ * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.43)$$

Quand ces inégalités admettent une solution, les matrices de gain  $F_0$  et  $F_1$  sont respectivement données par  $P^{-1}R_0^T$  et  $P^{-1}R_1^T$ . En utilisant (3.35), le gain  $L$  est calculé à partir de

$$L(\varrho_k) = L_0 + \varrho_k L_1 \quad (3.44)$$

où

$$L_0 = F_0 + (TA_0 - F_0H) Q \quad (3.45)$$

$$L_1 = F_1 + (TA_1 - F_1H) Q. \quad (3.46)$$

■

**Démonstration 3.2.** Pour démontrer ce théorème, nous introduisons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(e_k) = e_k^T P e_k \quad (3.47)$$

### 3.3. Synthèse d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires singuliers à temps-discret

où  $P = P^T$  est une matrice symétrique définie positive. La variation de la fonction de Lyapunov est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta V = & e_k^T (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T P (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H) e_k \\ & + 2e_k^T (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T PT \Delta f_k + \Delta f_k^T T^T PT \Delta f_k - e_k^T P e_k \end{aligned} \quad (3.48)$$

où

$$\Delta V = V(e_{k+1}) - V(e_k). \quad (3.49)$$

La fonction de Lyapunov proposée garantit la stabilité asymptotique de l'erreur si :

- $V(e_k) > 0$  pour tout  $e_k \neq 0$ ,
- $\Delta V < 0$  pour toutes les trajectoires possibles de (3.38).

La condition  $V(e_k) > 0$  est satisfaite car la matrice  $P$  est définie positive. Donc il reste à montrer que  $\Delta V < 0$ .

Nous avons

$$\Delta V = \zeta_k^T \begin{bmatrix} (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T P (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H) - P & (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T PT \\ * & T^T PT \end{bmatrix} \zeta_k \quad (3.50)$$

où

$$\zeta_k = [e_k^T \quad \Delta f_k^T]^T \quad (3.51)$$

D'autre part, d'après la condition de Lipschitz (3.26), nous déduisons que pour tout  $\tau > 0$

$$\Gamma = \tau\gamma^2 e_k^T e_k - \tau \Delta f_k^T \Delta f_k \geq 0 \quad (3.52)$$

par conséquent,  $\forall \tau > 0$  et pour tout  $\varrho_k \in [\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$ , nous avons

$$\Delta V \leq \Delta V + \tau\Gamma \quad (3.53)$$

$$\leq \zeta_k^T \begin{bmatrix} (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T P (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H) - P + \tau\gamma^2 I_{\bar{n}} & (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T PT \\ * & T^T PT - \tau I_{\bar{q}} \end{bmatrix} \zeta_k. \quad (3.54)$$

Pour satisfaire la condition  $\Delta V < 0$ , il suffit de vérifier que

$$\begin{bmatrix} (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T P (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H) - P + \tau\gamma^2 I_{\bar{n}} & (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T PT \\ * & T^T PT - \tau I_{\bar{q}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

pour tout  $\varrho_k \in [\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$ . En utilisant le complément de Schur, (3.55) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} -P + \tau\gamma^2 I_{\bar{n}} & (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T PT & (TA(\varrho_k) - F(\varrho_k)H)^T P \\ * & T^T PT - \tau I_{\bar{q}} & 0 \\ * & * & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (3.56)$$



Nous pouvons vérifier facilement que (3.56) est affine en  $\varrho_k$ , en utilisant le principe de convexité, l'inégalité (3.56) est vérifiée pour tout  $\varrho_k \in [\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$  si elle est vérifiée sur les sommets de  $[\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$ . En posant  $PF_0 = R_0^T$  et  $PF_1 = R_1^T$ , nous déduisons que l'inégalité (3.56) implique (3.42)-(3.43). ce qui signifie que l'erreur converge asymptotiquement vers zéro.

A partir de (3.36), la matrice  $N(\varrho_k)$  est calculée par :

$$N(\varrho_k) = \underbrace{(TA_0 - F_0H)}_{N_0} + \varrho_k \underbrace{(TA_1 - F_1H)}_{N_1}. \quad (3.57)$$

En utilisant (3.35), nous obtenons

$$L(\varrho_k) = F(\varrho_k) + N(\varrho_k)Q \quad (3.58)$$

$$= \underbrace{F_0 + N_0Q}_{L_0} + \varrho_k \underbrace{(F_1 + N_1Q)}_{L_1}. \quad (3.59)$$

ce qui complète la preuve du Théorème 3.2. □

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux observateurs pour les systèmes non linéaires singuliers temps-discret à mesures linéaires. Le premier est l'observateur de Kalman étendu. Il s'applique au cas général où  $E$  peut être rectangulaire et s'appuie sur le formalisme du filtre de Kalman étendu sous la condition d'observabilité à l'infini. Des conditions suffisantes de convergence ont été établies. Un réglage judicieux des matrices de pondération de l'observateur a été mentionné. Le deuxième observateur présenté est dédié à la classe des systèmes lipschitziens. En supposant que la partie linéaire de la dynamique du système est variant dans le temps, la dynamique de l'erreur a pris la forme d'un système partiellement LPV. En utilisant des techniques LPV, des conditions de synthèse d'observateur ont été obtenues. Ces conditions sont exprimées sous forme de LMIs non restrictives et faciles à résoudre numériquement. Dans le chapitre suivant, nous allons démontrer la validité et l'applicabilité de nos méthodes de synthèse d'observateurs. Les deux observateurs seront appliqués à un problème d'observation du modèle réduit d'une station d'épuration à boues activées.

---

# Application à l'observation d'une station d'épuration

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>4.2</b>	<b>Épuration des eaux usées</b>	<b>91</b>
4.2.1	Définition	91
4.2.2	Les grandes étapes du traitement	91
<b>4.3</b>	<b>Modélisation des stations d'épuration</b>	<b>93</b>
4.3.1	Modèle de référence	94
4.3.2	Modèle réduit	100
4.3.2.1	Simplification du modèle de référence	101
4.3.2.2	Expression du modèle réduit	103
4.3.3	Le simulateur	104
<b>4.4</b>	<b>Observation de l'état du modèle réduit</b>	<b>105</b>
4.4.1	Observateur de Kalman Étendu	106
4.4.2	Approche LMI	115
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>125</b>

---

## 4.1 Introduction

L'utilisation de la simulation dynamique, basée sur des phénomènes physiques rigoureux, est devenue courante en Génie des Procédés. Ces modèles rigoureux permettent de mieux appréhender le comportement dynamique de nombreux systèmes, notamment dans des conditions extrêmes de fonctionnement, et sont particulièrement utiles pour la conduite des procédés. En traitement des eaux, l'adoption par l'Union Européenne de normes de rejets de plus en plus sévères vis-à-vis des rejets des stations d'épuration implique une fiabilisation et un meilleur contrôle de celles-ci. L'utilisation de modèles mathématiques prend alors tout son intérêt pour aider à l'élaboration de stratégies performantes, et éventuellement à la commande en temps réel des unités de traitement. De nombreuses études portant sur la modélisation du procédé à boues activées ont été effectuées au cours des deux dernières décennies. Elles culminent dans la publication par l'IAWQ<sup>1</sup> des modèles ASM1 (Activated Sludge Process Model No.1) [69], ASM2 [70], ASM2d [71] et ASM3 [66]. L'utilisation largement répandue de ces modèles dans de multiples domaines d'application a permis d'éprouver leurs capacités de prédiction, mais les nombreux paramètres et variables d'état qu'ils contiennent les rendent cependant inadéquats pour la commande en ligne du procédé.

Ce chapitre est dédié à la modélisation des procédés de traitement à boues activées. Notre objectif est d'appliquer le résultat du troisième chapitre sur le modèle réduit de la station d'épuration à boues activées. Nous allons démontrer la validité et l'applicabilité des deux estimateurs présentés dans le troisième chapitre. Dans ce but, nous mènerons plusieurs simulations à l'aide des données recueillies à partir d'un modèle de référence défini par le benchmark 624 ([www.ensic.inpl-nancy.fr/COSTWWTP/Benchmark](http://www.ensic.inpl-nancy.fr/COSTWWTP/Benchmark)) [2]. Le benchmark a été développé dans le cadre d'un projet européen COST Action 624 - Optimal Management of Wastewater Systems. Il est implémenté sous le logiciel SIMBA<sup>®</sup> 3.0 qui est une application de l'environnement Matlab<sup>®</sup>/Simulink.

Après une brève présentation des grandes étapes du fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées, nous présentons un modèle simplifié (de référence) issu du modèle biologique le plus couramment employé, le modèle ASM1. Étant donné sa structure complexe, de nombreux modèles réduits sont proposés dans la littérature ([36], [80], [146], [61], [139] et [115]) afin d'obtenir un modèle plus exploitable en situation réelle. Les différentes techniques de réduction de ce modèle sont donc exposées. Le modèle réduit obtenu est un modèle non linéaire présenté par [36]. Notre objectif est d'adapter ce modèle à la station d'épuration de Blesbrück au Luxembourg, en utilisant les capteurs en ligne existant sur la station. Étant donné que les concentrations incidents  $X_{DCO}^{in}$ ,  $S_{NO}^{in}$ ,  $S_{NH}^{in}$  et  $S_{ND}^{in}$ , ne sont généralement pas mesurées, nous sommes contraints de les considérer comme des entrées inconnues. Pour l'estimation des variables d'état et des entrées inconnues, nous appliquons les deux estimateurs présentés dans la section 3.2 et 3.3 du chapitre précédent. Pour valider nos résultats, nous disposons de plusieurs jeux de données. En effet, nous avons trois jeux de données issus du benchmark, mentionné ci-dessus qui représente un temps sec, un temps pluvieux et un temps orageux.

---

1. *International Association on water Quality*, aujourd'hui *International Water Association* (IWA)

Cette application résulte d'un travail de collaboration avec l'équipe «*Modélisation et simulation*» du Laboratoire des Technologies Industrielles (LTI), Centre de Recherche Henri Tudor (CRPHT), Esch sur Alzette, Luxembourg.

## 4.2 Épuration des eaux usées

### 4.2.1 Définition

- **Ammoniaque** : composé gazeux d'azote et d'hydrogène, très soluble dans l'eau.
- **Milieu anoxique** : milieu dans lequel l'oxygène n'est pas présent sous forme libre dissoute.
- **Milieu aérobique** : milieu dans lequel l'oxygène libre est présent en quantité suffisante et joue un certain rôle.
- **Biomasse hétérotrophe** : représente les organismes qui ne peuvent tirer de l'énergie, pour l'entretien de la vie, que de la décomposition des matières organiques, et qui ne peuvent utiliser les composés minéraux comme seule source d'énergie ou pour effectuer la synthèse de matières organiques.
- **Biomasse autotrophe** : représente les organismes qui peuvent utiliser le carbone minéral comme source principale de carbone et qui peuvent tirer de l'énergie pour l'entretien de la vie, de l'oxydation d'éléments minéraux (chimiotrophe) ou de l'énergie lumineuse (phototrophe).
- **Demande chimique en oxygène (D.C.O)** : quantité d'oxygène nécessaire à une dégradation purement chimique des débris et résidus contenus dans une eau polluée sans intervention de micro-organismes.
- **Hydrolyse** : fractionnement de grosses molécules en plus petites molécules.
- **Nitrification** : oxydation de l'azote ammoniacal en nitrates sous l'action de bactéries.
- **Substrat** : matière pouvant être consommée par les micro-organismes.

### 4.2.2 Les grandes étapes du traitement

Le procédé de traitement est dit « à boues activées » car l'ensemble des conditions favorables à une activité maximale des bactéries est mis en oeuvre :

- un apport en oxygène suffisant,
- un apport en nutriments si l'effluent ne contient pas tous les composés nécessaires au développement des bactéries,
- une agitation permanente afin de favoriser le contact entre bactéries et pollution,
- une concentration élevée en bactérie pour augmenter l'efficacité du traitement.

La chaîne de traitement est composée d'un bioréacteur, d'un clarificateur et d'une boucle de recyclage des boues (figure 4.1).

L'eau est le véhicule de transport et de dissémination idéale de nombreux agents polluants. Les contraintes d'assainissement, de plus en plus strictes, exigent le traitement d'un nombre plus important de polluants (matières organiques, minérales, pathogènes et toxiques). Étant donné la grande diversité de ces déchets, l'épuration d'un affluent résiduaire comporte plusieurs étapes, chacune spécifique aux caractéristiques particulières des éléments à traiter. Globalement, une

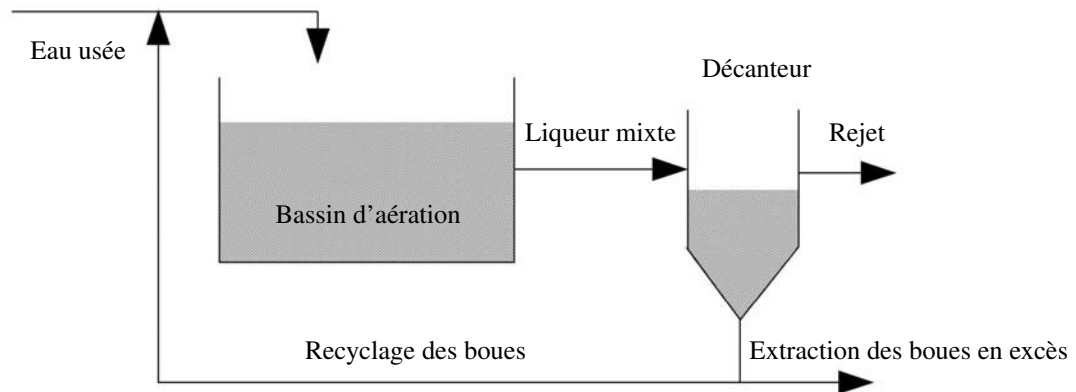


FIGURE 4.1: Procédé de traitement à boues activées en bassin unique

filère de traitement est constituée de différents modules où les eaux brutes sont soumises à une combinaison ou à une succession de différents processus de purification avant leur rejet :

**Le pré-traitement :** Le pré-traitement a pour objectif l'extraction des matières les plus grossières (brindilles, feuilles, tissus, . . .) et des éléments susceptibles de gêner les étapes ultérieures du traitement. Il comprend :

- *le dégrillage* : qui a pour fonction d'éliminer les gros déchets ;
- *le dessablage* : pour prévenir les dépôts dans les canalisations, protéger les organes mécaniques (pompes) contre l'abrasion et éviter de perturber les autres étapes de traitement. Les sables, recueillis généralement par raclage en fond de bassin, sont recyclés ;
- *le dégraissage-déshuilage* : sert à éviter l'encrassement de la station par des corps gras. Effectuée dans le même bassin que l'étape de dessablage, la récupération des graisses et huiles se fait en surface. Les composés collectés sont alors incinérés (cas du traitement d'un effluent urbain) ou recyclés pour la fabrication de savons ou détergents (cas de certains effluents industriels) en fonction de leur qualité.

**Le traitement primaire :** Le traitement s'effectue par voie physico-chimique avec pour but d'extraire le maximum de matières en suspension et de matières organiques facilement décantables. Trois voies de traitement sont possibles :

- la décantation (processus physique) : le principe de séparation solide-liquide est la pesanteur, les matières en suspension ou colloïdales tendent à se séparer du liquide par sédimentation ;
- la flottation (processus physique) : par opposition à la décantation, la flottation est un procédé de séparation solide-liquide ou liquide-liquide qui s'applique à des particules dont la masse volumique réelle ou apparente (flottation assistée) est inférieure à celle du liquide qui les contient ;
- la décantation associée à l'utilisation d'un coagulant- floculant (voie physico-chimique) : le principe est ici de favoriser l'agrégation des molécules en suspension grâce aux techniques de coagulation et de floculation de façon à augmenter la sédimentation grâce à l'obtention de floes plus gros.

**Le traitement secondaire :** Le traitement secondaire a pour objectif principal l'élimination des composés solubles d'origine organique. Parallèlement, la floculation de la biomasse permet de piéger les matières en suspension restant à l'issue du traitement primaire.

Le principe de ce traitement est de mettre en contact la matière organique contenue dans les eaux usées avec une population bactérienne. Celle-ci assimile alors la matière organique pour son propre développement. Ces dispositifs permettent d'intensifier et de localiser sur des surfaces réduites les phénomènes de transformation et de dégradation des matières organiques tels qu'ils se produisent en milieu naturel. Ils sont la reconstitution d'un écosystème simplifié et sélectionné faisant intervenir une microfaune de bactéries, de protozoaires et de métazoaires.

**Les traitements tertiaires :** La législation sur les seuils de rejet en milieu naturel se durcissant régulièrement, de nombreuses études sont menées afin de proposer des traitements tertiaires permettant d'éliminer les composés restant après le traitement secondaire. Cette étape joue un rôle d'affinage dans le but soit, d'une réutilisation des eaux épurées à des fins agricoles ou industrielles, soit d'une protection plus poussée du milieu récepteur destiné à un usage bien spécifique. Ce traitement peut être de nature :

- *biologique* pour l'élimination de l'azote (nitrification-dénitrification) et du phosphore (déphosphatation).
- *physico-chimique* pour la précipitation du phosphore (coagulation-décantation) ou l'élimination des dernières matières en suspension (filtration sur lits de sable ou charbon actif).
- *chimique* pour la désinfection et l'élimination des risques de contamination bactériologique (chlore ou ozone).

**Le traitement des boues :** Les techniques actuelles d'épuration des eaux usées domestiques ou industrielles, ainsi que les seuils de rejet de plus en plus exigeants et les quantités à traiter de plus en plus grandes, entraînent, au cours des différentes phases de traitement, une importante production de boue. Les boues contiennent en général 95% à 98 % d'eau. Les traitements imposés aux boues s'effectuent classiquement en différentes étapes : épaissement, digestion anaérobie, déshydratation, séchage et valorisation. La valorisation est soit agricole (épandage direct ou compostage), soit énergétique (incinération, digestion anaérobie).

## 4.3 Modélisation des stations d'épuration

Les nombreuses études entreprises depuis le début des années 1970 pour modéliser le procédé de traitement d'épuration à boues activées se sont soldées par l'élaboration de modèles dynamiques pertinents. En 1976, Marias et Ekama [104] ont développé un modèle pour la phase aérobie en régime permanent pour l'élimination des composants azotés et carbonés. Ce modèle exprimait déjà les taux de croissance de micro-organismes par l'équation cinétique de Monod ([111]). Des années plus tard, un modèle boues activées incorporant au processus de nitrification et dénitrification fut présenté [67]. En 1983, l'IAWQ créait un groupe de recherche international qui aboutissait au développement d'un modèle général, et qui y intégrerait des concepts tels que les processus d'oxydation du carbone, de nitrification et de dénitrification nommé ASM 1

([69]). Des nouveaux apports sont toujours proposés dans la littérature scientifique plus récente ASM2 [70], ASM2d [71] et ASM3 [66].

La complexité des modèles du procédé des boues activées et le nombre important des paramètres mis en jeu associés aux données ayant souvent des variations dynamiques insuffisantes, peut aboutir à une perte d'identifiabilité théorique et pratique. Diverses méthodes permettant de tester l'identifiabilité des modèles sous forme d'état sont présentées dans l'ouvrage édité par Walter [151]. Des études de l'identifiabilité structurelle et l'identifiabilité pratiques de quatre modèles cinétiques du procédé des boues activées sont développées par Dochain *et al.* dans respectivement [50] et [149] en considérant le taux de consommation d'oxygène dissous comme mesure disponible. Une autre étude de l'identifiabilité structurelle du modèle ASM 1 à partir des mesures d'ammoniaque, de nitrate et de d'oxygène dissout est présentée dans la thèse de Julien [82]. Dans [35], une étude de l'identifiabilité du modèle réduit est démontrée, sous des conditions d'aérobiose et d'anoxie, à partir des mesures en ligne des concentrations en oxygène dissous, ammoniaque et nitrate.

La description d'un modèle de référence d'une station d'épuration à boues activées basée sur le modèle ASM 1 et un modèle réduit présenté par [35] font l'objet de cette section.

### 4.3.1 Modèle de référence

Le modèle ASM 1 [69] est le fruit du travail d'une équipe créée par l'association IAWQ en 1983. Cette équipe est formée pour encourager le développement et pour faciliter l'application des modèles mathématiques pour la conception et la gestion des stations d'épurations. L'un des principaux objectifs de cette équipe consistait à élaborer un modèle simple et apte à reproduire de façon réaliste les processus de dégradation biologiques dans les bassins à boues activées. Après la publication du modèle ASM 1, de nombreuses applications de ce modèle ont permis d'éprouver ses capacités de prédiction dans différents conditions opératoires [79].

Le modèle ASM 1 décrit les mécanismes biologiques de dégradation des matières organiques, de nitrification et de dénitrification et il est essentiellement utilisé comme modèle de simulation. Il constitue un modèle général capable de représenter de façon précise le comportement du procédé lors du traitement d'un effluent chargé en matières azotées et carbonées. Dans cette manuscrit, deux simplifications classiques sont apportées au modèle original ([82], [79]) :

- L'alcalinité  $S_{ALK}$  est omise puisqu'elle n'intervient pas dans les dynamiques des autres variables du modèle ;
- les composés particuliers internes  $X_I$  et  $X_P$  ne sont pas distingués.

Nous allons présenter dans ce paragraphe un modèle simplifié, issu du modèle ASM 1, comprenant 11 variables d'état (Tab. 4.1). Notons que la lettre  $X$  est proposée pour les composés particuliers et la lettre  $S$  pour les composés solubles. Nous pouvons classer ces variables d'état en quatre groupes :

- *Les substrats* : le substrat rapidement biodégradable ( $S_S$ ) et le substrat lentement biodégradable  $X_S$ .

- *Les biomasses* : la biomasse hétérotrophe  $X_{B,H}$  responsable de l'oxydation des matières organiques et de la dénitrification, et la biomasse autotrophe  $X_{B,A}$ , responsable de la nitrification. La croissance des biomasses est décrite par la loi Monod.
- *Les composés azotés* : sont distingués en fonction de leurs degré d'oxydation et repartis en 3 catégories :
  - les formes organiques (solubles  $S_{ND}$  et particulières  $X_{ND}$ ),
  - les formes ammoniacales ( $S_{NH}$ )
  - les formes oxydées ( $S_{NO}$ (nitrates-nitrites)).
- *L'oxygène dissous*  $S_O$ .

Nous constatons que certaines variables d'état correspondent à des espèces chimiques existantes ( $S_{NH}$ ,  $S_{NO}$ ,  $S_O$ ), alors que d'autres sont au contraire plus conceptuelles et ne peuvent pas être directement mesurées ( $X_{B,H}$ ,  $X_{B,A}$ ).

Composé	Symbole	Unité
1. Matière organique soluble inerte	$S_I$	$[gDCO.m^{-3}]$
2. Substrat facilement biodégradable	$S_S$	$[gDCO.m^{-3}]$
3. Matière organique particulaire inerte	$X_I$	$[gDCO.m^{-3}]$
4. Substrat lentement biodégradable	$X_s$	$[gDCO.m^{-3}]$
5. biomasse active hétérotrophe	$X_{B,H}$	$[gDCO.m^{-3}]$
6. biomasse active autotrophe	$X_{B,A}$	$[gDCO.m^{-3}]$
7. Azote sous forme de nitrites et de nitrates	$S_{NO}$	$[gN.m^{-3}]$
8. Azote sous forme d'ammoniaque	$S_{NH}$	$[gN.m^{-3}]$
9. Azote organique soluble biodégradable	$S_{ND}$	$[gN.m^{-3}]$
10. Azote organique particulaire biodégradable	$X_{ND}$	$[gN.m^{-3}]$
11. Oxygène dissous	$S_O$	$[gO_2.m^{-3}]$

TABLE 4.1: Variables d'état du modèle de dégradation biologique.

Les variables d'état du modèle ASM1 sont liées par 8 processus de dégradation. Une brève description de chacun de ces processus est donnée dans les points suivants.

- *Croissance aérobie des micro-organismes hétérotrophes* : une fraction de substrat facilement biodégradable est utilisée pour la croissance de la biomasse et à l'élimination du substrat. il est ainsi naturellement limité par l'épuisement du substrat  $S_S$ , mais également par le manque d'oxygène dissous et d'ammoniaque.
- *Croissance anoxie des micro-organismes hétérotrophes* : en l'absence d'oxygène, les organismes hétérotrophes vont utiliser le nitrate comme récepteur terminal d'électrons, avec le substrat  $S_S$ , pour produire la biomasse et de l'azote gazeux (dénitrification). Un changement de l'alcalinité est associée à la réaction. L'ammoniaque sert de source d'azote pour la syn-



thèse des micro-organismes.

- *Croissance aérobie des micro-organismes autotrophes* : l'ammoniaque est oxydé en nitrate (nitrification) ce qui donne comme résultat une production de biomasse autotrophe et une augmentation de la demande d'oxygène. Il est aussi utilisé comme source d'énergie pour la synthèse. L'effet sur la quantité de biomasse produite est très faible. Par contre, l'alcalinité comme la consommation d'oxygène sont fortement affectées.
- *Mortalité des micro-organismes hétérotrophes et autotrophes* : ces processus sont modélisés selon l'hypothèse de mortalité- régénération ([51]). Les micro-organismes meurent à un taux déterminé, et cette biomasse devient une combinaison des produit particuliers et de substrat lentement biodégradable. L'azote organique associé à  $X_s$  est disponible comme azote organique particulaire. La DCO n'est pas modifiée. Les taux de mortalité sont supposés invariants en condition d'aérobie et d'anoxie.
- *Ammonification de l'azote organique soluble* : l'azote organique biodégradable est transformé en ammonium par l'action de la biomasse hétérotrophe active. L'alcalinité est aussi modifiée.
- *Hydrolyse des matières organique* : le substrat lentement biodégradable correspondant aux substances polluantes est décomposé par un mécanisme extracellulaire, en produisant du substrat facilement biodégradable utilisable par la biomasse. Ce processus a lieu en aérobie et en anoxie. Le taux d'hydrolyse en anoxie est réduit par un facteur  $\eta_h$  ( $<0$ ) par rapport aux conditions d'aérobie. Il est lié à la biomasse hétérotrophe par une fonction du premier ordre et sature quand la concentration de substrat absorbé devient grande par rapport à la biomasse.
- *Hydrolyse de l'azote organique* : l'azote organique particulaire biodégradable est décomposé en azote organique soluble à un certain taux défini par la réaction d'hydrolyse précédemment écrite.

Dans un souci de clarté et dans la mesure du possible, les mêmes notations seront utilisées pour la suite de cette section. En particulier :

- $x$  désigne l'état du système,
- $Q$  est relatif aux différents débits,
- les exposants (où indice selon le cas)  $^{in}$ ,  $^{rec}$ ,  $^{purg}$  et  $^{dec}$  sont utilisés pour désigner les grandeurs respectivement associées à l'influent, au recyclage des boues, à l'extraction et au clarificateur.

Le tableau 4.2 permet une lecture facile des cinétiques modélisées : pour chaque composant soluble ( $S$ ) ou particulaire ( $X$ ) qui apparaît dans le haut du tableau, les processus  $\rho_j$  intervenant sont signalés dans la colonne correspondante à travers les paramètres stoechiométriques. Les processus sont définis à droite du tableau, alors que les paramètres stoechiométriques sont définis dans le coin inférieur gauche. Le terme de cinétique pour chaque composant  $i$  du modèle est obtenu en additionnant les produits des coefficients stoechiométriques  $v_{i,j}$  par la cinétique du processus  $\rho_j$ . Alors, le taux de conversion  $R_j$  de chaque composé est donné par la relation

suivante :

$$R_j = \sum_{j=1}^8 v_{i,j} \rho_j, \quad i = 1 \dots 11 \quad (4.1)$$

Le modèle cinétique résultant comporte 20 paramètres cinétiques et stoechiométriques, qui sont présentés dans le tableau 4.3.1. Les valeurs par défaut définies par [69] et dans le benchmark y sont reportées et des gammes de variations sont également données pour certains paramètres. Les équations de bilan de matière s'écrivent :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{Q_{rec}}{V^r} \cdot x_i^{rec} + \frac{Q_{in}}{V^r} \cdot x_i^{in} - \frac{Q_{in} + Q_{rec}}{V^r} \cdot x_i + R_i \quad (4.2)$$

où  $V^r$  représente le volume réactionnel et  $x_i$ ,  $x_i^{rec}$  et  $x_i^{in}$ , les concentrations du composé  $i$  dans le bassin d'aération, dans le recyclage et dans l'influent respectivement, c'est-à-dire :

$$x_i = [S_I, S_S, X_I, X_S, X_{B,H}, X_{B,A}, S_{NO}, S_{NH}, S_{ND}, X_{ND}, S_O]^T$$

Le bilan relatif à la concentration en oxygène dissous compte un terme supplémentaire  $k_L a (S_O^{sat} - S_O)$  correspondant à l'apport d'air extérieur dans le bassin d'aération, c'est-à-dire au fonctionnement des aérateurs du bassin d'aération.

**Remarque 4.1.** *Les phénomènes biologiques présents au sein des phases anoxiques et aérobies sont simulés sous un modèle unique. Ceci est possible grâce à l'utilisation de fonctions de commutation :*

- les cinétiques ayant lieu uniquement en phase anoxique comporteront le terme  $\frac{K_{O,H}}{S_O + K_{O,H}}$  inhibant la réaction en phase aérobie.
- les cinétiques ayant lieu uniquement en phase aérobie comporteront le terme  $\frac{S_O}{S_O + K_{O,H}}$  ou le terme  $\frac{S_O}{S_O + K_{O,A}}$  inhibant la réaction en phase anoxique.

Concentrations j		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	Cinétique de la réaction
i	Réaction $\rho_i$	$S_I$	$S_S$	$X_I$	$X_S$	$X_{B,H}$	$X_{B,A}$	$S_{NO}$	$S_{NH}$	$S_{ND}$	$X_{ND}$	$S_O$	
1.	Croissance aérobie des hétérotrophes		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-i_{NBM}$			$-\frac{1-Y_H}{Y_H}$	$\rho_1 = \frac{S_S}{K_{S+S}} \frac{S_{NH}}{K_{NH,H}+S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,H}+S_O} X_{B,H}$
2.	Croissance anoxyie des hétérotrophes		$-\frac{1}{Y_H}$			1		$-\frac{1-Y_H}{2.86 Y_H}$	$-i_{NBM}$				$\rho_2 = \mu_H \frac{S_S}{K_{S+S}} \frac{S_{NH}}{K_{NH,H}+S_{NH}} \frac{S_{NO}}{K_{O,H}+S_O} \eta_{NO,g} X_{B,H}$
3.	Croissance aérobie des autotrophes						1	$\frac{1}{Y_A}$	$-\frac{1}{Y_A} - i_{NBM}$			$-4.57 \frac{1}{Y_A}$	$\rho_3 = \mu_A \frac{S_{NH}}{K_{NH,A}+S_{NH}} \frac{S_O}{K_{O,A}+S_O} X_{B,A}$
4.	Mortalité des hétérotrophes			$f r_{XI}$	$1 - f r_{XI}$	-1					$i_{NBM} - f r_{XI} \times i_{NXI}$		$\rho_4 = b_H X_{B,H}$
5.	Mortalité des autotrophes			$f r_{XI}$	$1 - f r_{XI}$		-1				$i_{NBM} - f r_{XI} \times i_{NXI}$		$\rho_5 = b_A X_{B,A}$
6.	Ammonification de l'azote organique soluble								1	-1			$\rho_6 = k_d S_{ND} X_{B,H}$
7.	Hydrolyse de la matière organique absorbée		1		-1								$\rho_7 = k_h \frac{X_S / X_{B,H}}{K_X + X_S / X_{B,H}} \left( \frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} + \eta_{NO,h} \frac{S_{NO}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{B,H}$
8.	Hydrolyse de l'azote organique absorbé									1	-1		$\rho_8 = k_l \frac{X_{ND} / X_{B,H}}{K_X + X_S / X_{B,H}} \left( \frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} + \eta_{NO,l} \frac{S_{NO}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{B,H}$

TABLE 4.2: Modèle ASM1 modifié (Source : [69]).

Paramètre	Symbole	Valeur du benchmark	Valeurs par défaut 20°C	Valeurs par défaut 10°C	Gamme de variation
<i>Paramètres stoechiométriques</i>					
Rendement de conversion des hétérotrophes	$Y_H$	0.67	0.67	0.67	0.38 - 0.75
Rendement de conversion des autotrophes	$Y_A$	0.24	0.24	0.24	0.07 - 0.28
Fraction de $DCO$ inerte issue du décès de la biomasse	$f_{r_{XI}}$	0.08	0.08	0.08	-
Proportion d'azote dans la biomasse	$i_{NBM}$	0.08	0.086	0.086	-
Proportion d'azote dans les produits de la biomasse	$i_{NXI}$	0.06	0.06	0.06	-
<i>Paramètres cinétiques</i>					
Taux de croissance spécifique maximal des hétérotrophes	$\mu_H$	4.0	6.0	3.0	0.60 - 13.2
Taux de mortalité des hétérotrophes	$b_H$	0.30	0.62	0.20	0.05 - 1.6
Constante d'affinité en substrat des hétérotrophes	$K_S$	10	20	20	5 - 225
Constante d'affinité en ammoniacque des hétérotrophes	$K_{NH,H}$	0.05 [82]			-
Constante d'affinité en oxygène des hétérotrophes	$K_{O,H}$	0.20	0.20	0.20	0.01 - 0.20
Constante d'affinité en nitrates des hétérotrophes dénitrifiants	$K_{NO}$	0.50	0.50	0.50	0.01 - 0.50
Taux de croissance maximal des autotrophes	$\mu_A$	0.5	0.80	0.30	0.20 - 1.0
Taux de mortalité des autotrophes	$b_A$	0.05	0.20	0.10	0.05 - 0.3
Constante d'affinité en ammoniacque des autotrophes	$K_{NH,A}$	1.0	1.0	1.0	-
Constante d'affinité en oxygène des autotrophes	$K_{O,A}$	0.40	0.40	0.40	0.40 - 2.0
Facteur de correction pour la croissance anoxie des hétérotrophes	$\eta_{NO,s}$	0.8	0.80	0.80	0.6 - 1.0
Taux d'ammonification	$\kappa_a$	0.05	0.08	0.04	-
Taux maximal spécifique d'hydrolyse	$\kappa_h$	3.0	3.0	1.0	-
Constante d'affinité en substrat particulaire pour l'hydrolyse	$K_X$	0.1	0.03	0.01	5 - 225
Facteur de correction pour l'hydrolyse en phase anoxie	$\eta_{NO,h}$	0.8	0.4	0.4	-

TABLE 4.3: Paramètres stoechiométriques et cinétiques du modèle de dégradation ([35]).

### 4.3.2 Modèle réduit

La plupart des outils mathématiques disponibles pour la conception et la résolution des problèmes d'estimation, de diagnostic et de contrôle ont besoin de modèles relativement simples des processus. Pour les procédés à boues activées, les possibilités de contrôle dans le cas pratique sont très limitées du fait de leur grande complexité. Le modèle ASM 1, proposé par l'association IAWQ, comporte treize équations d'état non linéaires et plus de vingt paramètres. La simplification de ce modèle, appelé modèle de référence présenté dans 4.3.1, ayant onze équations d'état avec vingt paramètres, est presque aussi complexe que le modèle standard et quasiment intraitable pour des fins d'estimation et de commande en ligne. Il faut donc faire appel à des modèles plus simples.

L'utilisation de modèles simplifiés de fonctionnement est fréquente en traitement des eaux par boue activée pour l'observation de l'état, l'estimation en ligne des paramètres ou encore la commande des procédés (par ex. [79], [82], [96], [146], [155], [35]). La plupart de ces travaux sont basés sur les modèles ASM 1 et ASM 2. Dans [146], un algorithme est proposé pour l'élimination des variables d'état, basé sur l'étude de leurs dynamiques dans le temps : les dynamiques n'appartenant pas à l'échelle de temps d'intérêt sont négligées. Dans cette voie, les variables moyennement rapides sont considérées comme irréductibles, les variables rapides atteignent rapidement leur régime permanent, les variables lentes évoluent d'une façon suffisamment lente pour être considérées comme constantes. Dans ce cas la concentration de l'oxygène est supposée constante ou nulle suivant la phase. Les travaux de Julien [82] sont basés sur la commande du procédé par l'ajout d'une source de carbone externe. Toutefois, il a pu être vérifié que le modèle simplifié élaboré par cet auteur n'est pas adapté au cas de la commande des séquences d'aération du réacteur. Plus récemment, [59] et [87] ont proposé d'utiliser un modèle linéaire (basé sur le modèle ASM 1) dans un schéma de commande en boucle fermée du système d'aération. Ce type de modèles, bien qu'attrayant pour sa simplicité, ne bénéficie cependant que d'un horizon de prédiction très limité, en raison notamment de la forte non linéarité du procédé.

Dans cette thèse, nous allons utiliser le modèle présenté dans [35]. Ce modèle, basé sur le modèle ASM 1, est élaboré pour le procédé à boue activée en aération séquentielle, en vue de la commande optimale du système d'aération. Les simplifications considérées sont de deux types : 1) les dynamiques lentes du système sont identifiées au moyen d'une méthode d'homotopie, puis éliminées du modèle ; 2) des simplifications plus heuristiques, consistant à prendre en compte un composé organique unique et à éliminer la concentration des composés organiques azotés, sont ensuite appliquées. Elles conduisent à un modèle simplifié de 5 variables. Il est également vérifié que le modèle proposé est observable et identifiable, sous certaines conditions, à partir des mesures en ligne des concentrations en oxygène dissous, ammoniacque et nitrate. Le modèle réduit de [35] est choisi, parmi les autres modèles réduits, car il présente toutes les propriétés requises pour une future utilisation au sein de schémas de commande en boucle fermée, en vue de la commande prédictive des stations d'épuration à boue activée.

### 4.3.2.1 Simplification du modèle de référence

Les hypothèses de simplifications utilisées sont inspirées de la thèse de Chachuat [35]. Notons que l'objectif de ce paragraphe est de rappeler les différentes étapes de simplification effectuées pour obtenir le modèle réduit.

**Simplification des dynamiques lentes** : elle se base sur la séparation des dynamiques lentes et des dynamiques rapides en utilisant la théorie des perturbations singulières. Nous pouvons vérifier facilement que les dynamiques des composés organiques inertes ( $S_I$ ) et des biomasses hétérotrophe ( $X_{BH}$ ) et autotrophe ( $X_{BA}$ ) sont nettement plus lentes que celles des autres composés du système, et ceci tout au long du cycle de fonctionnement. Étant donné que les dynamiques de ces composés ont des constantes de temps de l'ordre de plusieurs jours, il apparaît donc légitime de considérer que les concentrations  $S_I$ ,  $X_{BH}$  et  $X_{BA}$  sont constantes durant quelques heures. En les appliquant et en éliminant en plus la concentration en composés organiques solubles inertes  $S_I$  (dont la dynamique est découplée de celle des autres composés), le nombre de variables d'état est ainsi réduit de 11 à 7.

**Simplification des composés organiques** : le modèle ASM 1 établit une distinction entre les composés biodégradables solubles  $S_S$ , supposés directement assimilables par les micro-organismes, et particulaires  $X_S$ , qui doivent être préalablement hydrolysés en composés solubles pour pouvoir être assimilés. Ces composés jouent un rôle important dans le processus de dégradation de l'azote (processus de dénitrification notamment), et doivent par conséquent faire l'objet d'une attention particulière. La description de ces composés est ici simplifiée par le biais d'une variable d'état unique  $X_{DCO} = S_S + X_S$ , dont la dynamique s'écrit sous la forme :

$$\dot{X}_{DCO} = D^{in} \left( X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) - \frac{1}{Y_H} (\rho_1 + \rho_2) + \theta_2 \quad (4.3)$$

où  $D^{in} = \frac{Q_{in}}{V_0}$  et  $X_{DCO}^{in}$  désignent respectivement le taux de dilution et la concentration des composés organiques relatifs à l'influent. Les cinétiques de croissance aérobie  $\rho_1$  et anoxie  $\rho_2$  de la biomasse hétérotrophe s'écrivent alors, en fonction de variables d'états, sous la forme :

$$\rho_1 = \theta_1 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,H}}, \quad (4.4)$$

$$\rho_2 = \theta_1 \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \quad (4.5)$$

où les paramètres spécifiques  $\theta_1$  et  $K_{DCO}$  sont définis par :

$$\theta_1 = \mu_H X_{B,H},$$

$$K_{DCO} = K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} = \frac{K_S}{f_{SS}}.$$

Le paramètre  $\theta_1$  ne dépend que des variables lentes du modèles ASM 1, donc ce paramètre évolue lentement. Les variations du paramètre  $K_{DCO}$  conservent une valeur moyenne relativement stable.

La prise en compte d'un composé organique unique permet ainsi d'éliminer une variable d'état supplémentaire et présente également l'avantage d'éviter la description du mécanisme d'hydrolyse des composés particuliers en composés solubles.

**Simplification des composés azotés :** le modèle ASM 1 distingue quatre fractions azotées  $S_{NO}$ ,  $S_{NH}$ ,  $S_{ND}$  et  $X_{ND}$ . Dans la mesure où les concentrations en azote ammoniacal  $S_{NH}$  et en nitrate/nitrites  $S_{NO}$  constituent l'essentiel des rejets d'azote total et sont mesurables en ligne, il est difficilement concevable que ces composés n'apparaissent pas dans l'expression du modèle réduit. En revanche, les deux fractions d'azote organique soluble  $S_{ND}$  et particulaire  $X_{ND}$ , dont le rôle est de décrire la formation interne de  $S_{NH}$  par les processus d'hydrolyse et d'ammonification, ne constituent qu'une faible partie des rejets d'azote. La simplification consiste à découpler les dynamiques des deux composés azotés organiques, en simplifiant la description du mécanisme d'hydrolyse. En remarquant que  $i_{NBM} \ll \frac{1}{Y_A}$  et  $Y_A \ll 4.57$ , les cinétiques d'ammonification  $\rho_6$  et de nitrification  $\frac{1}{Y_A}\rho_3$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{Y_A}\rho_3 &= \theta_3 \frac{S_{NH}}{S_{NH} + K_{NH,A}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,A}} \\ \rho_6 &= \theta_4 S_{ND}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \frac{\mu_A}{Y_A} X_{B,A}, \\ \theta_4 &= \kappa_a X_{B,H}\end{aligned}$$

et les dynamiques des composés  $S_{ND}$  et  $X_{ND}$  sont découplées en simplifiant le processus  $\rho_8$  d'hydrolyse de l'azote organique particulaire :

$$\rho_8 = \theta_5 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{ND}} \left( \frac{S_O}{S_O + K_{O,H}} + \eta_{NO,h} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \right) \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{aligned}\theta_5 &= \kappa_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H} \\ K_{ND} &= K_X \frac{X_{DCO}}{X_S} X_{B,H}\end{aligned}$$

## 4.3.2.2 Expression du modèle réduit

L'application de l'ensemble des simplifications précédentes permet d'exprimer le modèle réduit sous la forme suivante :

$$\dot{X}_{DCO} = D^{in} \left( X_{DCO}^{in} - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO} \right) - \frac{1}{Y_H} (\rho_1 + \rho_2) + \theta_2 \quad (4.7a)$$

$$\dot{S}_{NO} = D^{in} (S_{NO}^{in} - S_{NO}) - \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \rho_2 + \frac{1}{Y_A} \rho_3 \quad (4.7b)$$

$$\dot{S}_{NH} = D^{in} (S_{NH}^{in} - S_{NH}) - i_{NBM} (\rho_1 + \rho_2) - \frac{1}{Y_A} \rho_3 + \rho_6 \quad (4.7c)$$

$$\dot{S}_{ND} = D^{in} (S_{ND}^{in} - S_{ND}) - \rho_6 + \rho_8 \quad (4.7d)$$

$$\dot{S}_O = D^{in} S_O - \frac{1 - Y_H}{Y_H} \rho_1 - 4.57 \frac{1}{Y_A} \rho_3 + k_L a (S_O^{sat} - S_O) \quad (4.7e)$$

où

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \theta_1 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,H}}, & \rho_2 &= \theta_1 \eta_{NO,g} \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{DCO}} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \\ \theta_2 &= (1 - fr_{XI}) (\rho_4 + \rho_5), & \frac{1}{Y_A} \rho_3 &= \theta_3 \frac{S_{NH}}{S_{NH} + K_{NH,A}} \frac{S_O}{S_O + K_{O,A}} \\ \rho_4 &= b_H X_{B,H}, & \rho_5 &= b_A X_{B,A}, & \rho_6 &= \theta_4 S_{ND} \\ \rho_8 &= \theta_5 \frac{X_{DCO}}{X_{DCO} + K_{ND}} \left( \frac{S_O}{S_O + K_{O,H}} + \eta_{NO,h} \frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \frac{S_{NO}}{S_{NO} + K_{NO}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \mu_H X_{B,H}, & \theta_3 &= \frac{\mu_A}{Y_A} X_{B,A}, & \theta_4 &= \kappa_a X_{B,H}, & \theta_5 &= \kappa_h \frac{X_{ND}}{X_S} X_{B,H} \\ K_{DCO} &= K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} = \frac{K_S}{f_{SS}}, & K_{ND} &= K_X \frac{X_{DCO}}{X_S} X_{B,H}, & D^{in} &= \frac{Q_{in}}{V_O} \end{aligned}$$

Ce modèle réduit comporte cinq variables d'état ( $X_{DCO}$ ,  $S_{NO}$ ,  $S_{NH}$ ,  $S_{ND}$  et  $S_O$ ), 16 paramètres ainsi que le débit  $Q_{in}$  et les concentrations  $X_{DCO}^{in}$ ,  $S_{NO}^{in}$ ,  $S_{NH}^{in}$  et  $S_{ND}^{in}$  incidentes. Les paramètres stoechiométriques et cinétiques sont identiques à ceux définis dans le modèle ASM 1 (Tab. 4.3.1). En revanche, les paramètres supplémentaires  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ),  $K_{DCO}$  et  $K_{ND}$  sont issus de simplifications. Les valeurs de ces paramètres spécifiques sont données dans le Tableau 4.4. On peut noter que les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  peuvent être interprétés comme les taux maximaux de dégradation des composés organiques et de l'azote ammoniacal [35]. Nous précisons que la concentration de  $S_{NO}^{in}$ , dans le modèle réduit 4.7a-4.7e, est supposée non nulle contrairement à ce qui a été proposée dans [35]. Si  $T_s$  désigne la période d'échantillonnage, une discrétisation



TABLE 4.4: Valeurs des paramètres spécifiques

Paramètre	Valeur
$\theta_1$	9956
$\theta_2$	693
$\theta_3$	283
$\theta_4$	124
$\theta_5$	480
$K_{DCO}$	220
$K_{ND}$	258
$X_{B,A}$	$136 \text{ g}_{DCO} \cdot \text{m}^{-3}$
$X_{B,H}$	$2489 \text{ g}_{DCO} \cdot \text{m}^{-3}$
$X_{ND}$	$6 \text{ g}_N \cdot \text{m}^{-3}$

du modèle (4.7a)-(4.7e) donne le système :

$$X_{DCO}(k+1) = X_{DCO}(k) + T_s D^{in} \left( X_{DCO}^{in}(k) - \frac{K_S}{K_{DCO}} X_{DCO}(k) \right) - T_s \frac{1}{Y_H} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) + T_s \theta_2 \quad (4.8a)$$

$$S_{NO}(k+1) = S_{NO}(k) + T_s D^{in} (S_{NO}^{in}(k) - S_{NO}(k)) - T_s \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \rho_2(k) + T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) \quad (4.8b)$$

$$S_{NH}(k+1) = S_{NH}(k) + T_s D^{in} (S_{NH}^{in}(k) - S_{NH}(k)) - T_s i_{NBM} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) - T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s \rho_6(k) \quad (4.8c)$$

$$S_{ND}(k+1) = S_{ND}(k) + T_s D^{in} (S_{ND}^{in}(k) - S_{ND}(k)) - T_s \rho_6(k) + T_s \rho_8(k) \quad (4.8d)$$

$$S_O(k+1) = S_O(k) - T_s D^{in} S_O(k) - T_s \frac{1 - Y_H}{Y_H} \rho_1(k) - 4.57 T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s k_L a (S_O^{sat} - S_O(k)) \quad (4.8e)$$

### 4.3.3 Le simulateur

Le groupe de travail du programme européen COST 624 a proposé un simulateur complet du traitement secondaire par boues activées d'un effluent urbain [2]. Ce simulateur a été développé dans le but de fournir un outil objectif de comparaison des différentes stratégies de commande et donc de stimuler les recherches sur l'optimisation des performances des procédés d'épuration. Ce simulateur est largement utilisé comme outil de référence.

La configuration de cette station est donnée par la figure 4.2. Elle est composée d'un réacteur et d'un clarificateur. Le réacteur étant scindé en cinq bassins : deux bassins anoxiques parfaitement agités et trois bassins aérobies également parfaitement agités. Une boucle de recirculation interne représente le retour de l'effluent du dernier compartiment aérobie vers le premier com-

partiment anoxique. Les boues à la sortie du clarificateur sont extraites et recyclées avec une boucle de recirculation externe. Par la suite, seule une partie du benchmark sera utilisée. Nous

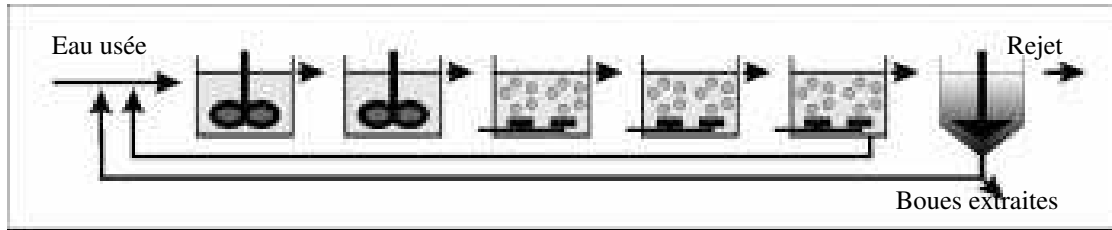


FIGURE 4.2: Configuration hydrodynamique de la station urbaine de référence.

nous intéressons au troisième bassin avec le clarificateur (Voir figure 4.2). Le volume de ce bassin est  $V_o = 1333 \text{ m}^3$ . Le coefficient  $k_L a$  relatif au transfert d'oxygène a une valeur de  $240d^{-1}$  et nous prenons  $S_o^{sat} = 10mgL^{-1}$ . L'objectif de cette étude est d'appliquer les résultats de simulation obtenus à partir du modèle de benchmark sur la station d'épuration de Blesbrück au Luxembourg, en utilisant uniquement les capteurs en ligne existant sur site réel. Nous rappelons que les concentrations mesurées en ligne sont : la concentration d'oxygène  $S_o$ , la concentration d'azote sous forme de nitrite et de nitrate  $S_{NO}$  et la concentration d'azote sous forme d'ammoniacale  $S_{NH}$ . Les concentrations incidentes  $X_{DCO}^in$ ,  $S_{NO}^in$ ,  $S_{NH}^in$  et  $S_{ND}^in$ , ne sont généralement pas mesurées en ligne. Il sera donc important de les estimer. En utilisant le logiciel SIMBA et le modèle ASM 1, les données sont générées par l'équipe de "Modélisation et Simulation" du laboratoire LTI du CRP Henri Tudor à Esch sur Alzette au Luxembourg.

## 4.4 Observation de l'état du modèle réduit

L'observation de l'état des bioprocédés a été largement étudiée au cours des deux dernières décennies. En raison de leur facilité d'utilisation et de la simplicité des concepts sous-jacents qu'ils intègrent, l'observateur de Luenberger étendu et le filtre de Kalman étendu ont fréquemment été appliqués, avec succès le plus souvent, pour l'estimation des procédés de traitement des eaux à boue activée notamment ([12], [163], [79], [82] et [46]). La mise en oeuvre d'observateur non linéaires est de plus en plus fréquente pour l'estimation de l'état des bioprocédés ([58]; [52]). En raison de leur facilité d'implémentation, les observateurs ont fait l'objet de nombreuses applications en traitement des eaux à boue activée ([12], [135], [68]). L'intérêt de ce type d'observateur est de supposer les cinétiques réactionnelles non structurées.

Pour des raisons techniques ou économiques, les grandeurs susceptibles d'être mesurées *en ligne* sur les stations d'épuration des eaux usées à boues activées sont peu nombreuses. Hormis la mesure de la concentration en oxygène dissout, seules les concentrations en azote ammoniacal et en nitrate sont accessibles en ligne. Malgré l'existence des méthodes qui nous permettent de déterminer les concentrations des composés organiques biodégradables et azotés (dosage, spectrométrie, etc.), les durées nécessaires pour obtenir les résultats restent rédhibitoires, dans un contexte de commande, par rapport à la vitesse d'évolution du procédé. Nous rappelons également que les concentrations incidentes  $X_{DCO}^in$ ,  $S_{NO}^in$ ,  $S_{NH}^in$  et  $S_{ND}^in$  ne sont pas observables à partir

des mesures.

Afin d'estimer les concentrations non mesurées, il est nécessaire d'utiliser un observateur chargé de reconstruire l'état du système à partir des grandeurs mesurées en ligne. De plus, pour estimer les concentration incidentes, nous les considérons comme des entrées inconnues. Dans la littérature, nous trouvons peu de travaux qui traitent l'observation de l'état et des entrées inconnues du modèle réduit du procédé d'épuration. Parmi eux, nous citons [164], [103], [60] et [147]. Dans le suite de ce chapitre, nous allons proposer deux observateurs pour estimer les états et les concentrations incidentes du modèle réduit (4.8a)-(4.8e).

#### 4.4.1 Observateur de Kalman Étendu

Notre objectif dans cette partie, est d'appliquer l'OKE (3.3)-(3.5), synthétisé pour les systèmes non linéaires singuliers, à l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues de systèmes non linéaires sous la forme :

$$\bar{\xi}_{k+1} = \bar{f}(\bar{\xi}_k, u) + \bar{B}_k \bar{d}_k \quad (4.9a)$$

$$y_k = \bar{C} \bar{\xi}_k \quad (4.9b)$$

où  $\bar{\xi}_k \in \mathfrak{R}^{\bar{n}}$  est le vecteur d'état,  $y_k \in \mathfrak{R}^{\bar{m}}$  est le vecteur de mesure et  $\bar{d}_k \in \mathfrak{R}^{\bar{d}}$  représente le vecteur des entrées inconnues.

Pour estimer simultanément l'état et les entrées inconnues de (4.9), nous définissons le vecteur d'état augmenté  $\zeta_k = (\bar{\xi}_k \quad \bar{d}_k)^T \in \mathfrak{R}^{\bar{n}+\bar{d}}$  de façon à transformer le système régulier (4.9) en la forme singulière :

$$E \zeta_{k+1} = g(\zeta_k, u) \quad (4.10a)$$

$$y_k = H \zeta_k \quad (4.10b)$$

où  $E = [I_n \quad -\bar{B}_k]$ ,  $g(\zeta_k, u) = \bar{f}(\bar{\xi}_k, u)$  et  $H = [\bar{C} \quad 0_{\bar{m} \times \bar{d}}]$ .

Nous considérons, à présent, le modèle réduit discret (4.8a)-(4.8e), qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$\xi_{k+1} = f(\xi_k, u) + B_k d_k \quad (4.11a)$$

$$y_k = C \xi_k \quad (4.11b)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} X_{DCO} & S_{NO} & S_{NH} & S_{ND} & S_O \end{bmatrix}^T \\ u &= \begin{bmatrix} \theta_2 & k_L a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \\ B_k &= \begin{bmatrix} T_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$f(\xi_k, u) = \begin{bmatrix} (1 - T_s D^{in} \frac{K_S}{K_{DCO}}) \xi_{1,k} - T_s \frac{1}{Y_H} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) + T_s u_1 \\ (1 - T_s D^{in}) \xi_{2,k} - T_s \frac{1-Y_H}{2.86 Y_H} \rho_2(k) + T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) \\ (1 - T_s D^{in}) \xi_{3,k} - T_s i_{NBM} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) - T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s \rho_6(k) \\ (1 - T_s D^{in}) \xi_{4,k} - T_s \rho_6(k) + T_s \rho_8(k) \\ (1 - T_s D^{in}) \xi_{5,k} - T_s \frac{1-Y_H}{Y_H} \rho_1(k) - 4.57 T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s u_2 (S_O^{sat} - \xi_{5,k}) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec  $\xi_{i,k} = \xi_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Le vecteur de mesures et le vecteur des entrées inconnues sont donnés par

$$\begin{aligned} y &= [S_{NO} \quad S_{NH} \quad S_O]^T \\ d &= [D^{in} X_{DCO}^{in} \quad D^{in} S_{NO}^{in} \quad D^{in} S_{NH}^{in} \quad D^{in} S_{ND}^{in}]^T. \end{aligned}$$

Avant d'appliquer l'OKE (3.3)-(3.5), nous devons vérifier que la condition

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = n + \text{rang } B$$

est satisfaite. Cette condition est vérifiée si (voir la section 2.3, page 53)

$$\text{rang } CB = \text{rang } B \quad (4.13)$$

Nous pouvons vérifier facilement que la condition (4.13) n'est pas vérifiée. Les deux variables qui posent des problèmes sont  $D^{in} S_{ND}^{in}$  et  $D^{in} X_{DCO}^{in}$ . Afin de surmonter cet obstacle, nous proposons d'utiliser la valeur journalière moyenne de  $S_{ND}^{in}$ . Ce choix est très utilisé par les chercheurs, car cette concentration et de la même manière pour les autres concentrations incidentes, n'est généralement pas mesurée en ligne. Au lieu d'estimer directement  $D^{in} X_{DCO}^{in}$ , nous proposons de le remplacer par

$$D^{in} X_{DCO}^{in} = \alpha D^{in} + \beta \quad (4.14)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  des paramètres constants à estimer. Ce dernier choix est motivé par le résultat de l'approximation  $\alpha D^{in} + \beta$  qui donne un bon résultat par rapport à la valeur journalière moyenne de

$D^{in}X_{DCO}^{in}$ . Le choix de la valeur journalière moyenne de  $S_{ND}^{in}$  au lieu d'utiliser une approximation du genre  $\alpha_1 D^{in} + \beta_1$  revient à un problème d'observabilité constaté dans la phase de simulation.

En utilisant les propositions précédentes, le système (4.11) est réécrit comme suit

$$\bar{\xi}_{k+1} = \bar{f}(\bar{\xi}_k, u) + \bar{B}_k \bar{d}_k \quad (4.15a)$$

$$y_k = \bar{C} \bar{\xi}_k \quad (4.15b)$$

avec

$$\bar{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_s & 0 \\ 0 & T_s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}(\bar{\xi}_k, u) = \begin{bmatrix} (1 - T_s D^{in} \frac{K_s}{K_{DCO}}) \bar{\xi}_{1,k} - T_s \frac{1}{Y_H} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) + T_s u_1 + T_s D^{in} \bar{\xi}_{6,k} + T_s \bar{\xi}_{7,k} \\ (1 - T_s D^{in}) \bar{\xi}_{2,k} - T_s \frac{1-Y_H}{2.86 Y_H} \rho_2(k) + T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) \\ (1 - T_s D^{in}) \bar{\xi}_{3,k} - T_s i_{NBM} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) - T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s \rho_6(k) \\ (1 - T_s D^{in}) \bar{\xi}_{4,k} - T_s \rho_6(k) + T_s \rho_8(k) + T_s D^{in} S_{ND}^{in} \\ (1 - T_s D^{in}) \bar{\xi}_{5,k} - T_s \frac{1-Y_H}{Y_H} \rho_1(k) - 4.57 T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s u_2 + T_s u_2 (S_O^{sat} - \bar{\xi}_{5,k}) \\ \bar{\xi}_6 \\ \bar{\xi}_7 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Le vecteur d'état, le vecteur de la sortie et le vecteur des entrées inconnues sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= [X_{DCO} \quad S_{NO} \quad S_{NH} \quad S_{ND} \quad S_O \quad \alpha \quad \beta]^T \\ y &= [S_{NO} \quad S_{NH} \quad S_O]^T \\ \bar{d} &= [D^{in} S_{NO}^{in} \quad D^{in} S_{NH}^{in}]^T. \end{aligned}$$

En introduisant le vecteur d'état augmenté  $\zeta_k = [\bar{\xi}_k \quad \bar{d}_k]^T$ , il est facile de réécrire (4.15) sous la forme singulière (4.10) avec  $E = [I_7 \quad -\bar{B}_k]$ ,  $g(\zeta_k, u) = \bar{f}(\bar{\xi}_k, u)$  et  $H = [\bar{C} \quad 0_{7 \times 2}]$ .

L'OKE (3.3)-(3.5) pour le système augmenté singulier ainsi généré est :

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_{k+1} &= \hat{\zeta}_{k+1|k} + K_{k+1}e_{k+1} \\ P_{k+1} &= (I_9 - K_{k+1}H)P_{k+1|k} \\ \hat{\zeta}_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} g(\zeta_k, u) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \\ P_{k+1|k} &= AF_k P_k F_k^T A^T + Q_k\end{aligned}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H^T (H P_{k+1|k} H^T + R_{k+1})^{-1}$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} - H \hat{\zeta}_{k+1|k}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -250 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$F_k = AF(\hat{\zeta}_k, u) = A \left. \frac{\partial g(\zeta_k, u)}{\partial \zeta_k} \right|_{\zeta_k = \hat{\zeta}_k} \quad (4.18)$$

et  $P_0 = \mu I_{9,9}$ . Les matrices de pondération  $Q_k$  et  $R_k$  sont choisies à partir de (3.13)-(3.14) :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_9 + \epsilon I_9 \quad (4.19)$$

$$R_{k+1} = \lambda H P_{k+1|k} H^T + \delta I_3 \quad (4.20)$$

où  $e_k = y_k - H \hat{\zeta}_{k|k-1}$  avec  $\gamma, \lambda \geq 0$  et  $\epsilon, \delta > 0$ .

La période d'échantillonnage est  $T_s = 4ms$ . Les conditions initiales du système, de l'observateur et le paramétrage des matrices de pondération (4.19) et (4.20) sont :

$$\zeta(0) = [51 \quad 5 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 393 \quad -21005 \quad 370 \quad 549]^T$$

$$\hat{\zeta}(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 350 \quad -21050 \quad 398 \quad 660]^T$$

$$P_0 = 10^{15} I_{9,9}, \quad \gamma = 10^{15}, \quad \epsilon = 10^{-3}, \quad \lambda = 0.07, \quad \delta = 10^{-3}.$$

Nous constatons que la matrice  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est de rang plein colonne, alors la condition (3.2) est vérifiée.

Pour valider ce premier observateur proposé, l'OKE, nous disposons de plusieurs jeux de données. En effet, nous disposons de trois jeux de données issues du benchmark qui représentent *un temps sec*, *un temps pluvieux* et *un temps orageux*. Normalement chaque campagne de mesure a une durée de 14 jours, mais dans les simulations et dans le but montrer les performances de deux observateurs, proposés dans ce chapitre, nous présentons seulement les résultats sur quelques jours dans les figures suivantes.

### 1. *Temps sec*

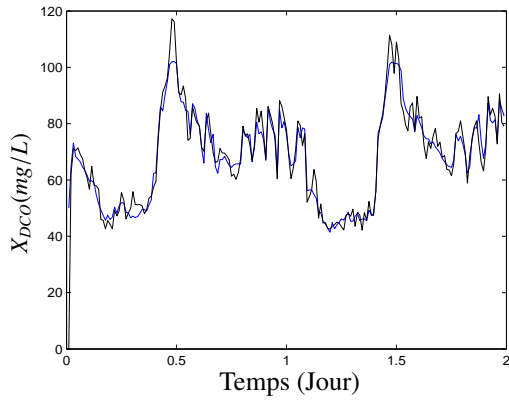
Nous commençons les simulations par le jeu de données *Temps sec*. Les résultats de ces simulations sont illustrés par les figures 4.3(a)-4.3(e). Les figures 4.3(a)-4.3(c) montrent l'évolution des concentrations estimées de  $X_{DCO}$ ,  $S_{ND}$  et  $S_O$ , alors que l'évolution des entrées inconnues  $X_{DCO}^{in}$ ,  $S_{NO}^{in}$  et  $S_{NH}^{in}$  est présentée sur les figures 4.3(d)-4.3(e). Notons que  $X_{DCO}^{in}$  est calculé à partir de l'approximation (4.2). Les performances du filtre sont certainement satisfaisantes puisque toutes les concentrations sont correctement estimées.

### 2. *temps pluvieux*

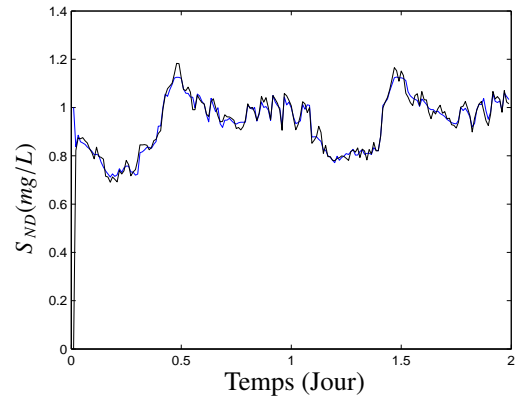
Les résultats de simulation avec le jeu de données *temps pluvieux* sont reportés sur les figures 4.4(a)-4.4(f). Les concentrations de  $X_{DCO}$ ,  $S_{NO}$  et  $S_{ND}$  sont illustrées par les figures 4.4(a)-4.4(c). Le choix de montrer le résultat d'estimation de  $S_{NO}$  est motivé par l'effet de la pluie sur le modèle, dans la période de 8.5-11 jours, où les principales variations se trouvent au niveau de la concentration de  $S_{NO}$ . L'évolution des entrées inconnues  $X_{DCO}^{in}$ ,  $S_{NO}^{in}$  et  $S_{NH}^{in}$  est présentée sur les figures 4.4(d)-4.4(f). Nous constatons que toutes les concentrations sont correctement estimées tout au long de la période de simulation malgré la présence de la pluie.

### 3. *temps orageux*

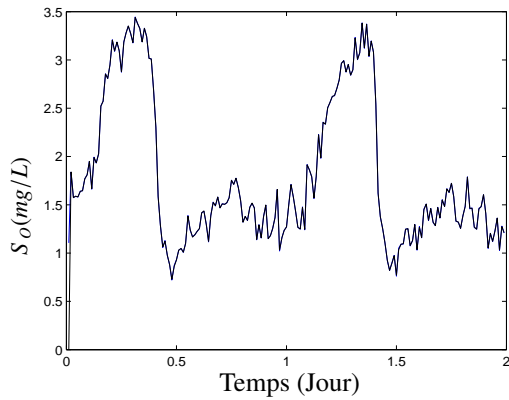
Les figures 4.5(a)-4.5(f) présentent les résultats de simulation de l'OKE avec le jeu de données *temps orageux*. Dans ce cas, les principales variations peuvent être constatées dans la concentration  $X_{DCO}$ , illustrée par la figure 4.5(a). Les figures 4.5(b)-4.5(c) montrent l'évolution des concentrations estimées  $S_{NO}$  et  $S_{ND}$ . L'estimation des entrées inconnues  $X_{DCO}^{in}$ ,  $S_{NO}^{in}$  et  $S_{NH}^{in}$  est obtenue (4.5(d)-4.5(f)). Nous constatons, dans ce cas aussi, que l'OKE a donné de bons résultats en simulation.



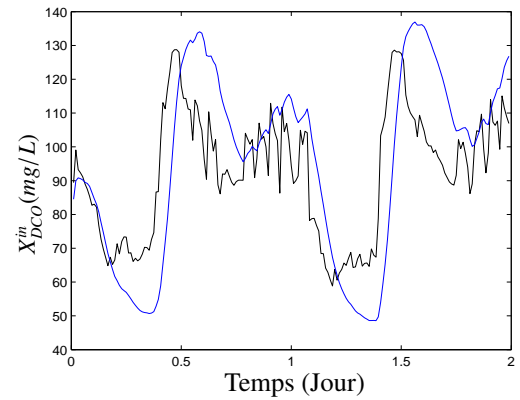
(a) La concentration  $X_{DCO}(mg/L)$



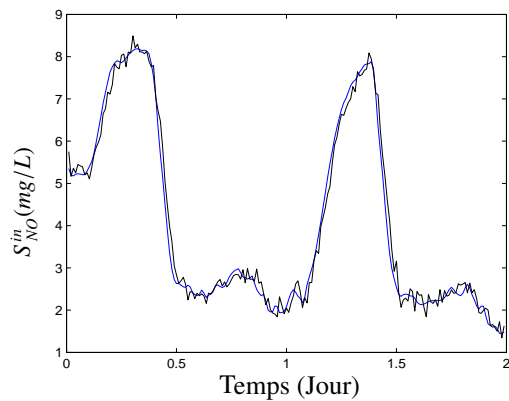
(b) La concentration  $S_{ND}(mg/L)$



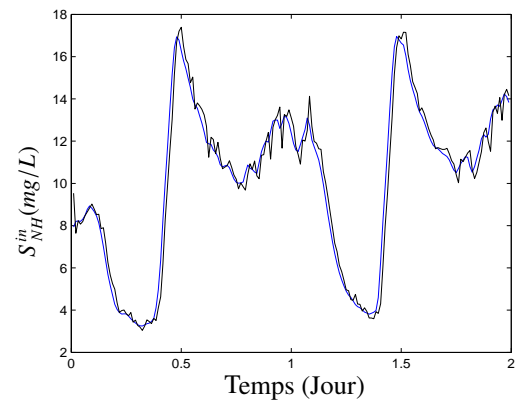
(c) La concentration  $S_O(mg/L)$



(d) La concentration  $X_{DCO}^in(mg/L)$



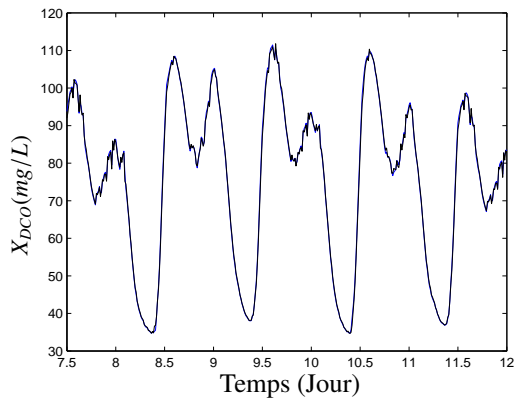
(e) La concentration de l'entrée inconnue  $S_{NO}^in(mg/L)$



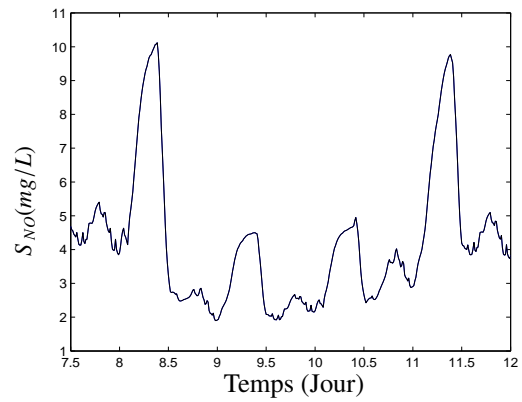
(f) La concentration de l'entrée inconnue  $S_{NH}^in(mg/L)$

FIGURE 4.3: Résultats de l'estimation (Temps sec) : états simulés (bleu) et estimés (noir).

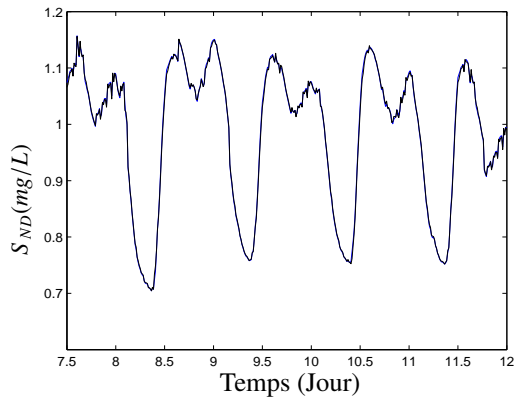




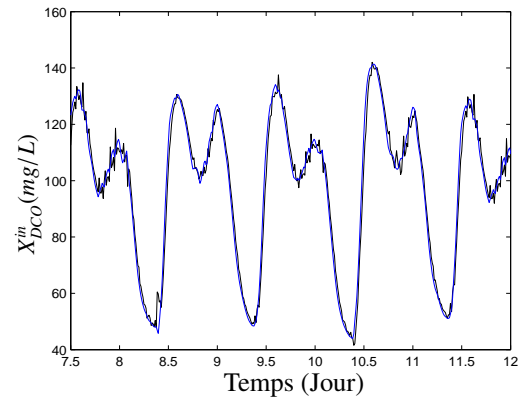
(a) La concentration  $X_{DCO}(mg/L)$



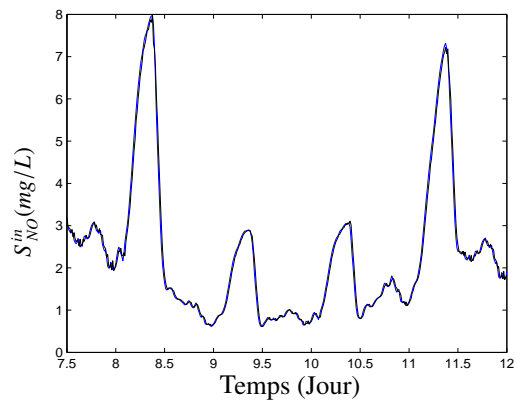
(b) La concentration  $S_{NO}(mg/L)$



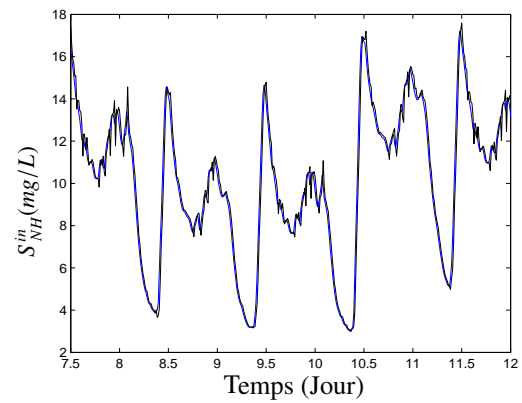
(c) La concentration  $S_{ND}(mg/L)$



(d) La concentration de l'entrée inconnue  $X_{DCO}^in(mg/L)$

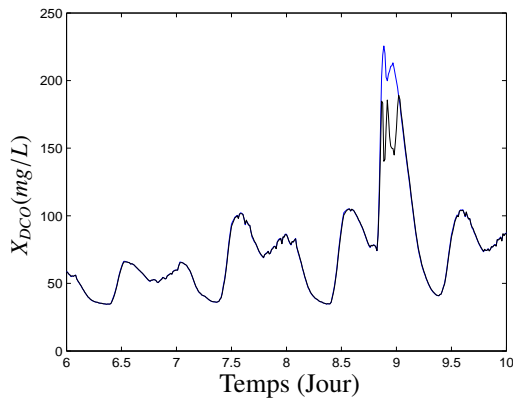


(e) La concentration de l'entrée inconnue  $S_{NO}^in(mg/L)$

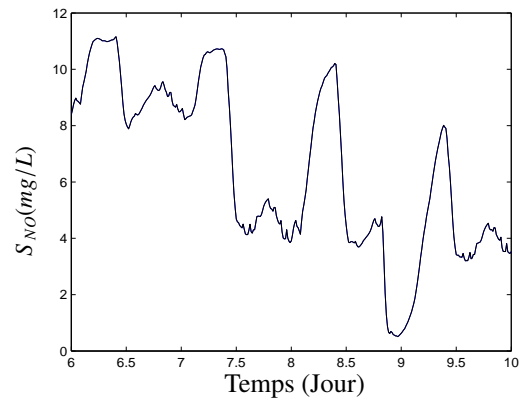


(f) La concentration de l'entrée inconnue  $S_{NH}^in(mg/L)$

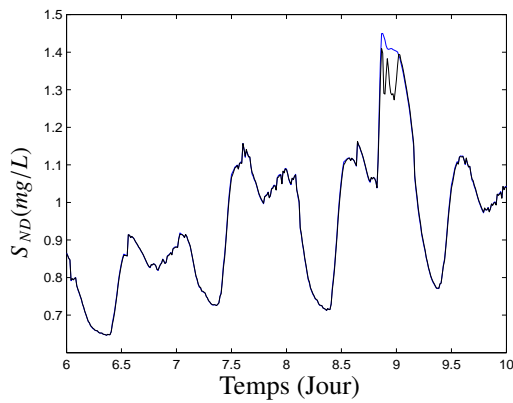
FIGURE 4.4: Résultats de l'estimation (Temps pluvieux) : états simulés (bleu) et estimés (noir).



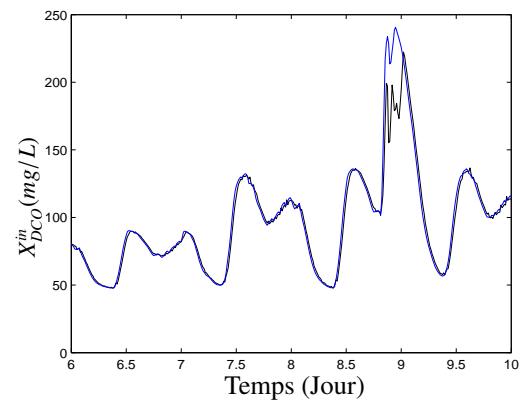
(a) La concentration  $X_{DCO}(mg/L)$



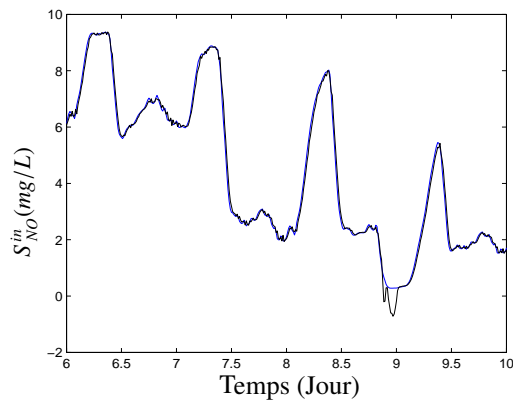
(b) La concentration  $S_{NO}(mg/L)$



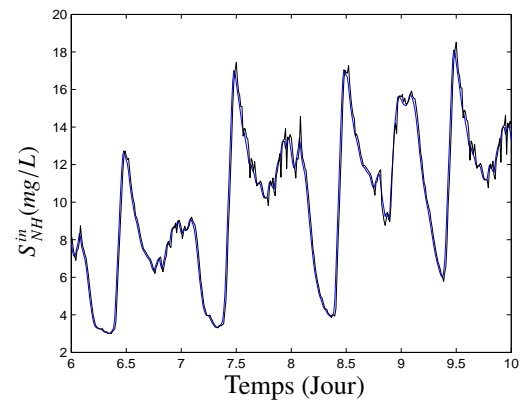
(c) La concentration  $S_{ND}(mg/L)$



(d) La concentration de l'entrée inconnue  $X_{DCO}^in(mg/L)$



(e) La concentration de l'entrée inconnue  $S_{NO}^in(mg/L)$



(f) La concentration de l'entrée inconnue  $S_{NH}^in(mg/L)$

FIGURE 4.5: Résultats de l'estimation (Temps orageux) : états simulés (bleu) et estimés (noir)

**Remarque 4.2.** Pour valider l'approximation, nous allons comparer les résultats de simulations, en utilisant les trois jeux de données, du produit  $D^{in} X_{DCO}^{in}$ , son approximation  $\alpha D^{in} + \beta$  et le produit de la valeur journalière moyenne de  $X_{DCO}^{in}$  et de  $D^{in}$ . Le résultat de comparaison est reporté par la figure 4.6. Nous constatons facilement que le meilleur résultat de cette approximation est obtenu avec le jeu de données temps sec. Mais avec la présence de pluie dans les jeux de données temps pluvieux et temps orageux, l'utilisation de la valeur journalière moyenne de  $X_{DCO}^{in}$  donne un résultat relativement meilleur par rapport à l'approximation proposée.

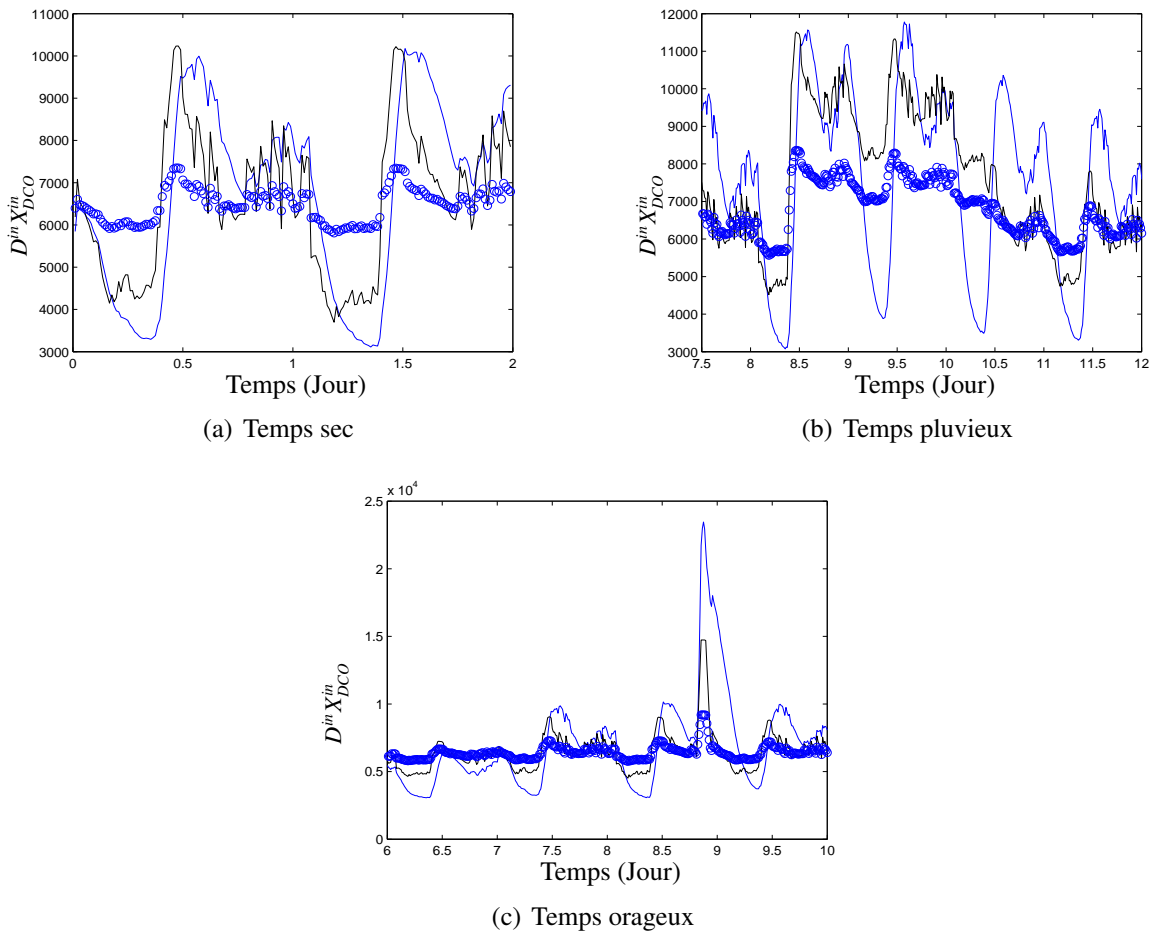


FIGURE 4.6: Comparaison entre la simulation du produit  $D^{in} X_{DCO}^{in}$  (bleu), son approximation  $\alpha D^{in} + \beta$  (noir) et le produit de la valeur journalière moyenne de  $X_{DCO}^{in}$  et de  $D^{in}$  (cercle).

### 4.4.2 Approche LMI

L'objectif de cette partie est d'appliquer le résultat présenté dans la section 3.3 au modèle réduit de la station d'épuration.

Le modèle réduit temps-discret (4.8a)-(4.8e) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\xi_{k+1} = J\xi_k + \phi(\xi_k, u_k) + Bd_k \quad (4.21a)$$

$$y_k = C\xi_k \quad (4.21b)$$

avec

$$\xi = \begin{bmatrix} X_{DCO} & S_{NO} & S_{NH} & S_{ND} & S_O \end{bmatrix}^T \quad (4.22)$$

$$u = [\theta_2; k_L a] \quad (4.23)$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 - T_s D^{in} \frac{K_S}{K_{DCO}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - T_s D^{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - T_s D^{in} & T_s \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - T_s D^{in} - T_s \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - T_s D^{in} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\phi(\xi_k, u) = \begin{bmatrix} -T_s \frac{1}{Y_H} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) + T_s u_1 + T_s D^{in} X_{DCO}^{in} \\ -T_s \frac{1-Y_H}{2.86 Y_H} \rho_2(k) + T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) \\ -T_s i_{NBM} (\rho_1(k) + \rho_2(k)) - T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) \\ T_s \rho_8(k) + T_s D^{in} S_{ND}^{in} \\ -T_s \frac{1-Y_H}{Y_H} \rho_1(k) - 4.57 T_s \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) + T_s u_2 (S_O^{sat} - \xi_{5,k}) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Le vecteur de la sortie et le vecteur des entrées inconnues sont définis par

$$y = [S_{NO} \quad S_{NH} \quad S_O]^T$$

$$d = [T_s D^{in} S_{NO}^{in} \quad T_s D^{in} S_{NH}^{in}]^T.$$

La fonction  $\phi(\xi_k, u_k)$  est non linéaire.

Revenons maintenant à la matrice  $J$ . Cette dernière évolue en fonction de  $D^{in}$  et nous pouvons l'écrire donc comme suit :

$$J = J_0 + \varrho J_1 = J(\varrho) \quad (4.27)$$

avec

$$\varrho = D^{in}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_s \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - T_s \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} -T_s \frac{K_S}{K_{DCO}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T_s \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

alors, le système (4.21) est donné par

$$\xi_{k+1} = J(\varrho)\xi_k + \phi(\xi_k, u_k) + Bd_k \quad (4.29a)$$

$$y_k = C\xi_k \quad (4.29b)$$

où les matrices  $J(\varrho)$ ,  $B$  et  $C$  sont données respectivement par (4.27) et (4.25).

**Remarque 4.3.** Les concentrations  $X_{DCO}^{in}$  et  $S_{ND}^{in}$  ne sont pas mesurées en ligne dans la station d'épuration de Blesbrück au Luxembourg. Par ailleurs, nous ne pouvons pas les estimer directement en raison d'un problème d'observabilité du système (4.21). Nous proposons d'utiliser la valeur journalière moyenne de ces deux concentrations.

**Remarque 4.4.** Pour des raisons de simplification, nous traitons seulement le cas où  $S_o > 0$ .

Pour estimer simultanément l'état et les entrées inconnues de (4.21), nous définissons le vecteur d'état augmenté  $x_k = [\xi_k, d_k]^T \in \mathfrak{X}^{n+m}$ , de façon à transformer le système régulier (4.21) sous la forme :

$$Ex_{k+1} = A(\varrho)x_k + f(x_k, u_k) \quad (4.30)$$

$$y_k = Hx_k \quad (4.31)$$

où  $E = [I_n \quad -B]$ ,  $A(\varrho) = [J(\varrho) \quad O_{n \times m}]$ ,  $H = [C \quad 0_{p \times m}]$  et  $f = \phi(\xi_k, u_k)$ .

Les conditions initiales du système et de l'observateur sont :

$$x_0 = [51 \quad 5 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 1.4814 \quad 2.1956]^T$$

$$\hat{x}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \quad 1.6421]^T.$$

La période d'échantillonnage est  $T_s = 4ms$ . La constante de Lipschitz de la fonction non linéaire  $f$  est  $\gamma = 0.186$ . Nous pouvons vérifier facilement que la condition sur le rang de la matrice

$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  est satisfaite. A partir de (3.29), les matrices  $T$  et  $Q$  sont

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les données sont entachées d'un bruit « blanc » additif de moyenne nulle et de variance 0.01. Nous obtenons, après la résolution des LMIs (3.42) et (3.43), les solutions suivantes :

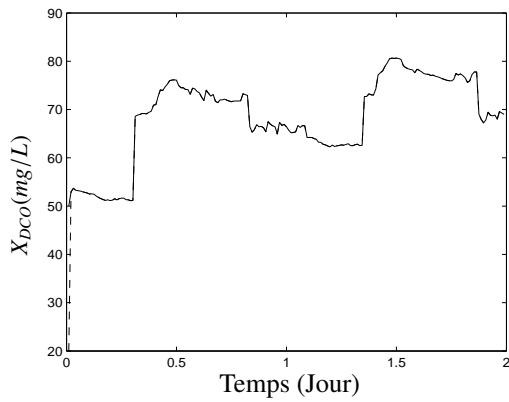
$$P = \begin{bmatrix} 1.38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.23 & 0 & 0 & 0.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.214 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.32 & 0 & 0 & 2.4 \end{bmatrix},$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.32 & 0 & 0 & -2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3 & 0 & 0 & 9.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

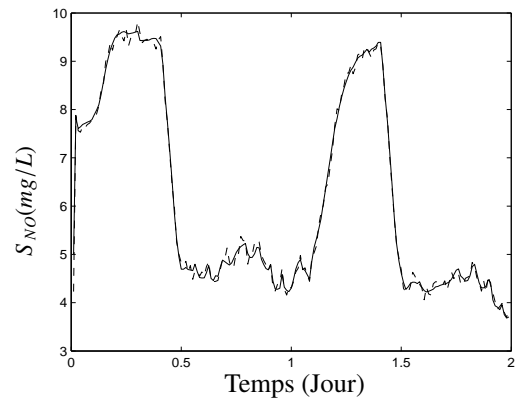
$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\tau = 5.9473$ .

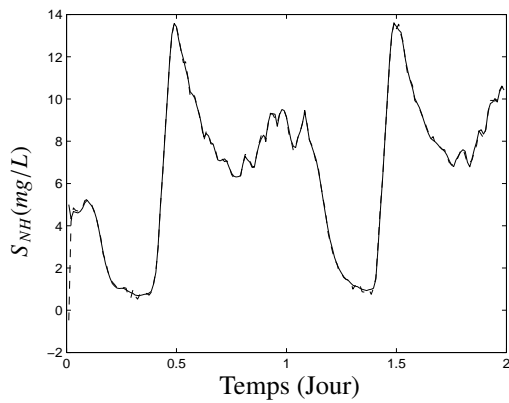
En utilisant les trois jeux de données *temps sec*, *temps pluvieux* et *temps orageux*, les résultats de simulations sont reportés par les figures 4.7(a)-4.12(b). Les concentrations de  $X_{DCO}$ ,  $S_{NO}$ ,  $S_{NH}$ ,  $S_{ND}$  et  $S_o$  sont données, pour chaque jeu de données, par les figures 4.7(a)-4.7(e), 4.9(a)-4.9(e) et 4.11(a)-4.11(e) respectivement. Les entrées inconnues ou les concentrations incidentes  $S_{NO}^{in}$  et  $S_{NH}^{in}$  sont illustrées par les figures 4.8(a)-4.8(b) (*temps sec*), 4.10(a)-4.10(b) (*temps pluvieux*) et 4.12(a)-4.12(b) (*temps orageux*). Il est clair que l'observateur proposé donne, avec trois jeux de données différents, de bons résultats.



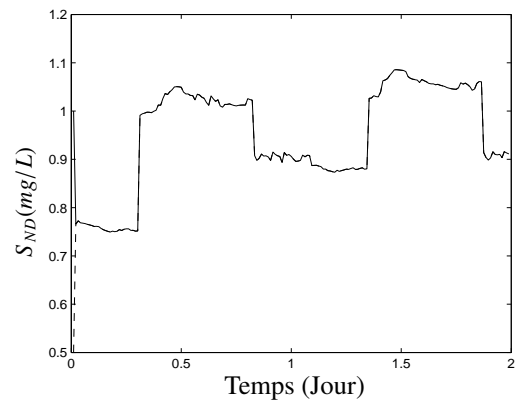
(a) La concentration de  $X_{DCO}$



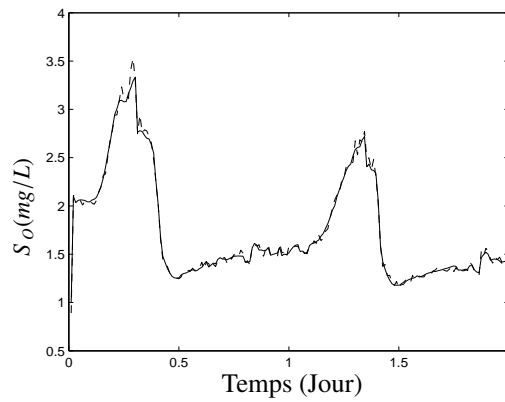
(b) La concentration de  $S_{NO}$



(c) La concentration de  $S_{NH}$



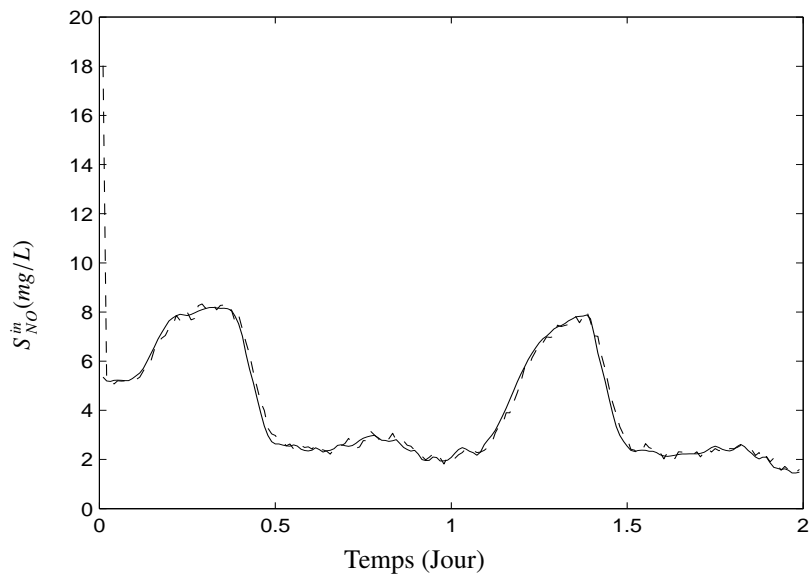
(d) La concentration de  $S_{ND}$



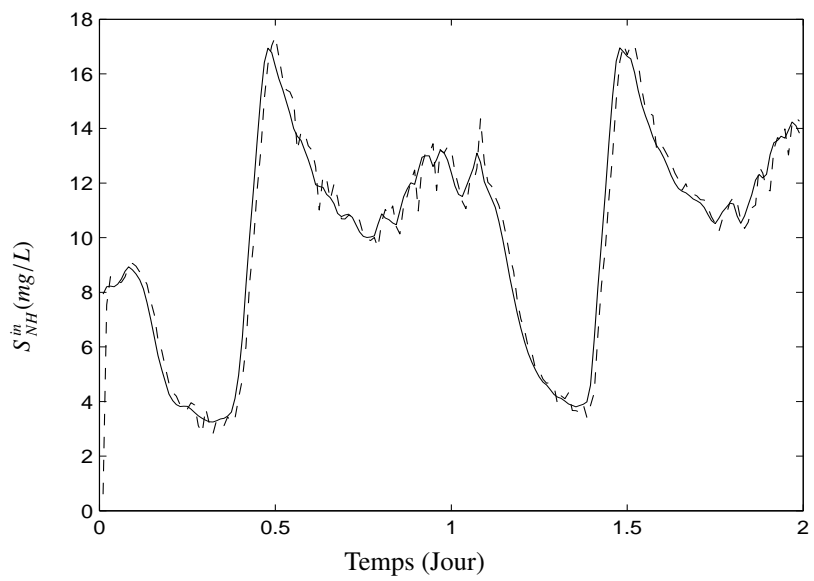
(e) La concentration de  $S_O$

FIGURE 4.7: Les résultats de l'estimation (temps sec) : états simulés (ligne continue) et estimés (ligne discontinue).



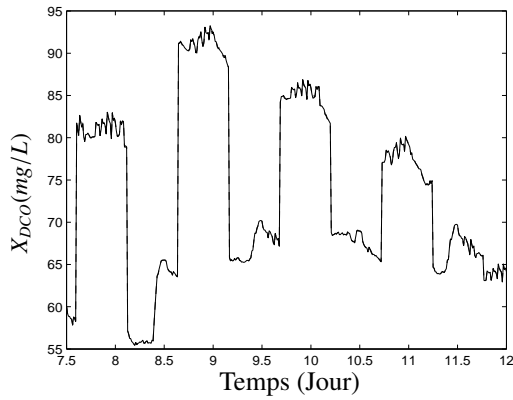


(a) La concentration de  $S_{NO}^{in}$

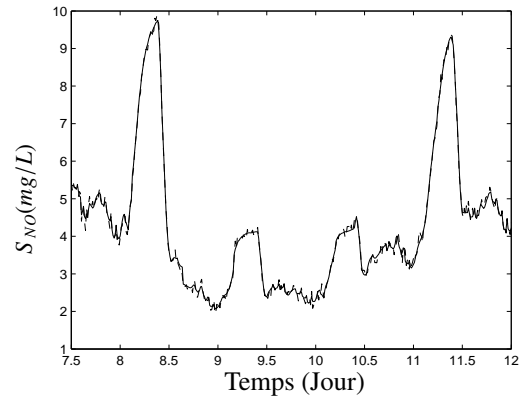


(b) La concentration de  $S_{NH}^{in}$

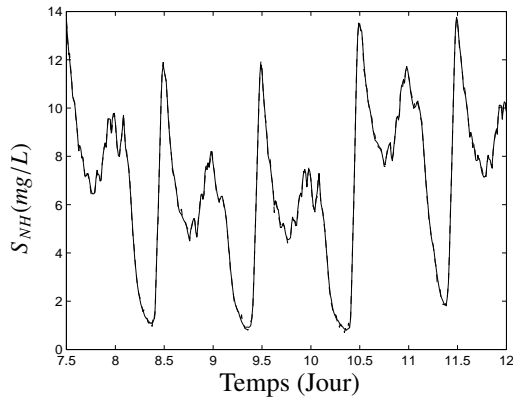
FIGURE 4.8: Estimation des entrées inconnues (temps sec) : entrées inconnues réelles (ligne continue) et estimées (ligne discontinue).



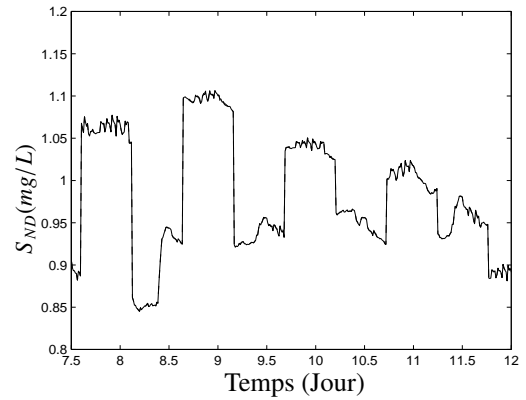
(a) La concentration de  $X_{DCO}$



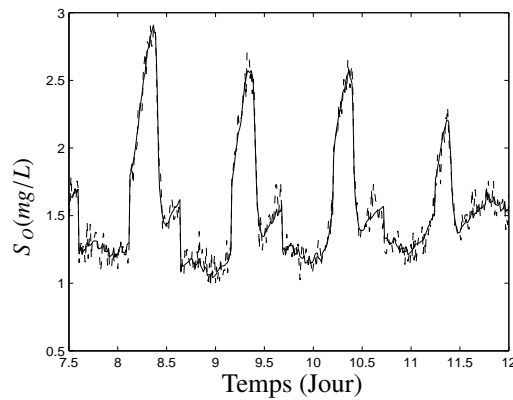
(b) La concentration de  $S_{NO}$



(c) La concentration de  $S_{NH}$

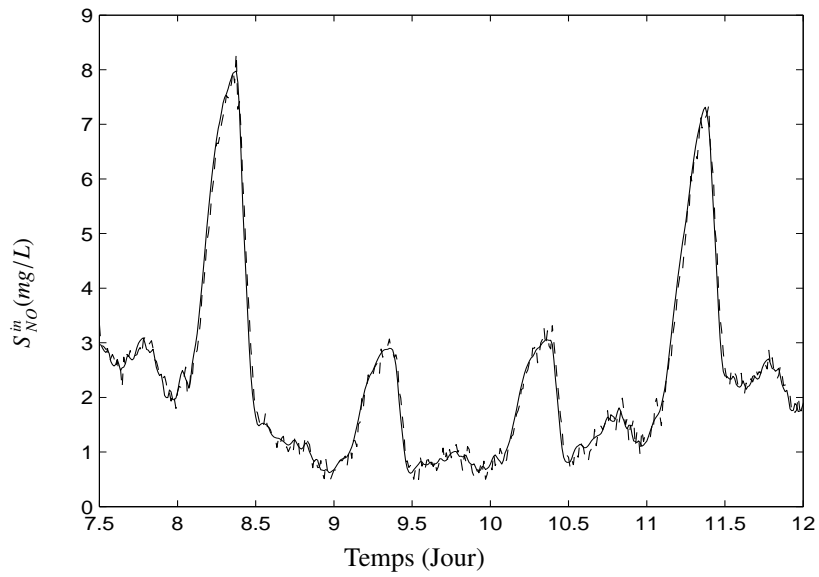


(d) La concentration de  $S_{ND}$

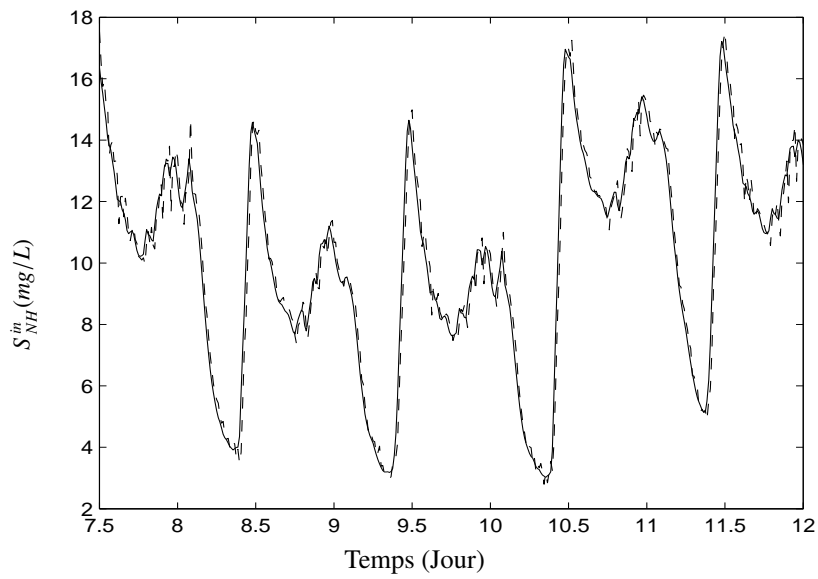


(e) La concentration de  $S_O$

FIGURE 4.9: Les résultats de l'estimation (Temps pluvieux) : états simulés (ligne continue) et estimés (ligne discontinue).

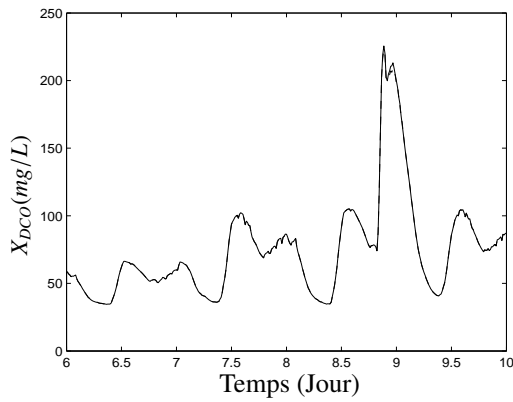


(a) La concentration de  $S_{NO}^{in}$

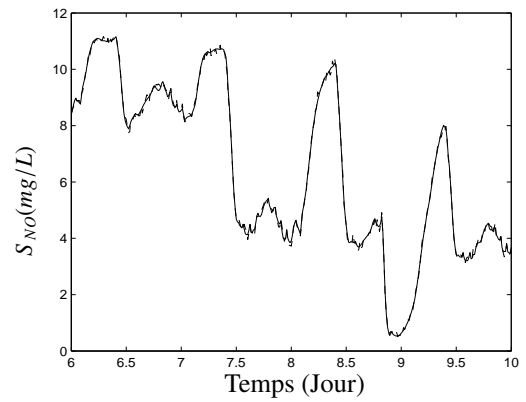


(b) La concentration de  $S_{NH}^{in}$

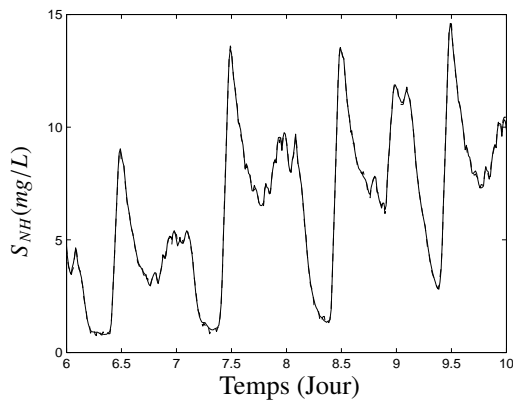
FIGURE 4.10: Estimation des entrées inconnues (Temps pluvieux) : entrées inconnues réelles (ligne continue) et estimées (ligne discontinue).



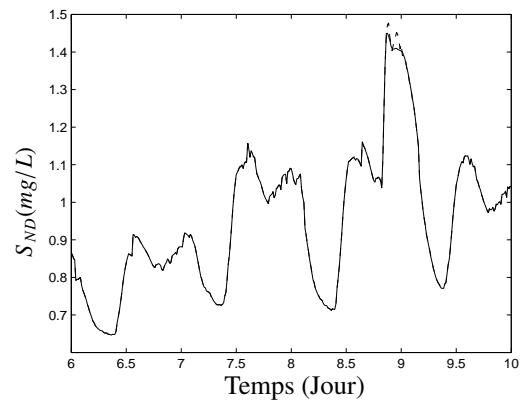
(a) La concentration de  $X_{DCO}$



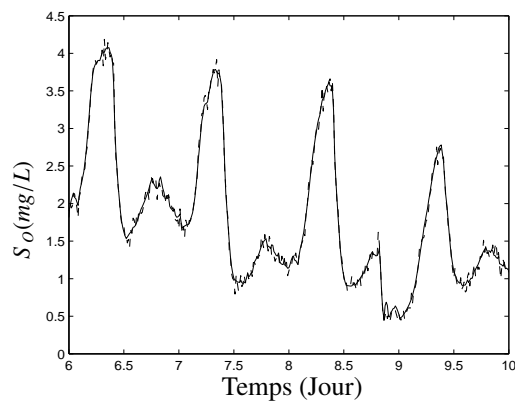
(b) La concentration de  $S_{NO}$



(c) La concentration de  $S_{NH}$

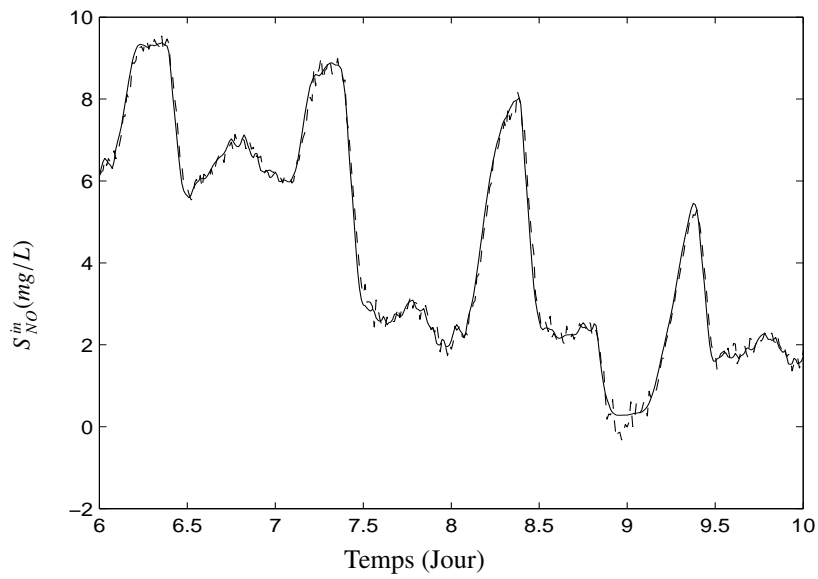


(d) La concentration de  $S_{ND}$

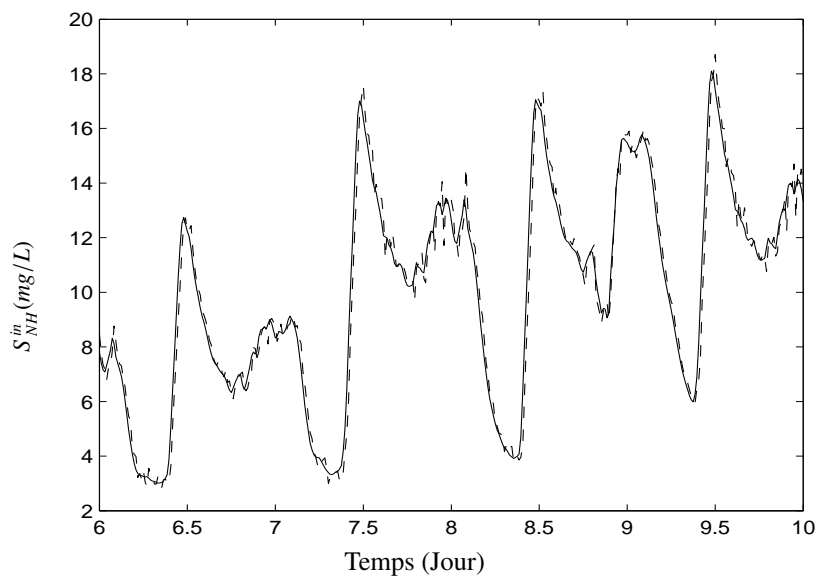


(e) La concentration de  $S_O$

FIGURE 4.11: Les résultats de l'estimation (Temps orageux) : états simulés (ligne continue) et estimés (ligne discontinue).



(a) La concentration de  $S_{NO}^{in}$



(b) La concentration de  $S_{NH}^{in}$

FIGURE 4.12: Estimation des entrées inconnues (Temps orange) : entrées inconnues réelles (ligne continue) et estimées (ligne discontinue).

## 4.5 Conclusion

L'élaboration d'un modèle de fonctionnement simplifié est nécessaire en vue de la commande des stations d'épurations à boues activées. Issu du modèle, ASM 1 de l'IAWQ, le modèle proposé intègre deux types de simplifications : i) des simplifications très rigoureuses, basées sur la théorie des perturbations singulières, afin d'éliminer les variables d'état dont les dynamiques sont lentes ; ii) des simplifications de nature plus heuristique qui permettent de réduire davantage la dimension du système. Il comporte 5 variables d'état  $X_{DCO}$ ,  $S_{NO}$ ,  $S_{NH}$ ,  $S_{ND}$  et  $S_O$ , et 4 concentrations incidentes  $X_{DCO}^{in}$ ,  $S_{NO}^{in}$ ,  $S_{NH}^{in}$  et  $S_{ND}^{in}$ .

Les concentrations incidentes ne sont généralement pas mesurées en ligne et elles sont remplacées, en général, par leurs valeurs journalières moyennes. Dans ce travail, nous avons proposé une approximation de  $D^{in}X_{DCO}^{in}$  par  $\alpha D^{in} + \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres constants à estimer, et la valeur journalière moyenne de la concentration  $S_{ND}^{in}$  pour le premier observateur. Pour la deuxième approche d'estimation proposée, nous avons utilisé la valeur moyenne journalière de ces deux concentrations. Les concentrations  $S_{NO}$  et  $S_{NH}$  sont considérés, dans les deux approches d'estimation, comme des entrées inconnues et sont estimées conjointement avec les états du modèle réduit. Les résultats de simulations des deux observateurs sont, d'une manière générale, très satisfaisants.





---

## Conclusion générale et perspectives

Durant cette thèse, nous avons proposé plusieurs méthodes de synthèse d'estimateurs d'état des systèmes singuliers qui permettent d'améliorer les résultats existant dans la littérature. Afin de situer au mieux notre contribution par rapport aux travaux existants, un rappel sur la théorie de l'observation des systèmes linéaires, singuliers et non linéaires a tout d'abord été présenté. Les contributions personnelles présentées par la suite abordent le problème de la synthèse d'estimateurs d'état des systèmes singuliers. L'application des observateurs non linéaires proposés à un modèle d'une station d'épuration à boues activées est également étudiée.

Nous avons consacré le **chapitre 1** à un rappel sur la théorie d'observation des systèmes linéaires et non linéaires. Ce chapitre s'articule autour de deux thèmes principaux. Le premier est dédié à l'observabilité des systèmes singuliers et non linéaires. Le deuxième est consacré aux différentes techniques d'estimation de l'état.

Les premières contributions de notre travail de recherche apparaissent dans le **chapitre 2** de ce mémoire. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la synthèse d'observateurs des systèmes singuliers linéaires en associant les techniques d'estimation à horizon glissant. Le premier estimateur présenté est au sens des moindres carrés. L'optimalité de cet estimateur est prouvée. En se basant sur ce premier résultat, une application aux systèmes linéaires à entrées inconnues est réalisée. Ensuite nous avons présenté un estimateur optimal au sens de la variance minimale. L'analyse de la convergence de cet estimateur est abordée.

Le **chapitre 3** a été consacré à la synthèse d'observateurs d'état des systèmes singuliers non linéaires à temps discret à mesures linéaires. En supposant que la partie linéaire de la classe de système choisi est variable dans le temps, le problème de l'estimation de l'état d'un système non linéaire se réduit à un problème de l'estimation de l'état d'un système partiellement LPV. En



se basant sur les techniques LPV présentées dans la littérature, des conditions de stabilité sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) ont été obtenues. Nous avons présenté aussi un observateur de type Kalman étendu pour une classe des systèmes singuliers non linéaires à temps discret qui existe déjà dans la littérature. L'objectif principal de ce chapitre était de présenter les deux observateurs qui seront validés dans le dernier chapitre par une application à un modèle d'une station d'épuration à boues activées.

Le **quatrième chapitre** a été dédié à la modélisation des procédés de traitement des eaux usées à boues activées. Après une brève présentation des grandes étapes du fonctionnement d'une station d'épuration à boues activées, nous avons présenté un modèle simplifié issu du modèle biologique du modèle ASM 1. Étant donné sa structure complexe, nous avons choisi un modèle réduit non linéaire présenté par [36]. Nous avons essayé d'adapter ce modèle réduit à la station d'épuration de Bleesbrück au Luxembourg, en utilisant uniquement les capteurs en ligne existant sur ce site réel. Sachant que la plupart des concentrations incidentes ne sont généralement pas mesurées, nous avons été contraints de les considérer comme des entrées inconnues. Pour valider nos résultats, nous avons utilisé plusieurs jeux de données.

Suite aux travaux exposés dans ce mémoire, les extensions et les perspectives suivantes nous semblent être des pistes de recherche à approfondir :

1. Cas des systèmes singuliers linéaires :
  - étudier la robustesse des résultats obtenus en présence de perturbations (incertitudes).
  - étendre les résultats obtenus aux techniques d'estimation à horizon glissant avec contraintes.
2. Cas des systèmes singuliers non linéaires : présenter un observateur d'état des systèmes singuliers non linéaires en utilisant l'approche MHE et étudier ses conditions de convergence et de stabilité.
3. Proposer une commande optimale du système d'aération des procédés de traitement des eaux usées en se basant sur les résultats obtenus dans cette thèse.

ANNEXE

**A**

---

## **Quelques rappels mathématiques**

## A.1 Théorie des Matrices

Cette annexe regroupe des rappels sur quelques notions mathématiques utilisées dans ce mémoire.

**Définition A.1.** Une matrice symétrique  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite :

1. définie positive  $S > 0$  ssi  $x^T S x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ .
2. semi-définie positive  $S \geq 0$  ssi  $x^T S x \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ .
3. définie négative  $S < 0$  ssi  $x^T S x < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ .
4. semi-définie négative  $S \leq 0$  ssi  $x^T S x \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ .

### A.1.1 Complément et lemme de Schur

Ici, nous présentons brièvement le complément et le lemme de Schur utilisés dans le chapitre 3.

**Définition A.2.** (Complément de Schur [32]) Pour une matrice  $A$  inversible, le complément de Schur de  $A$ , dans la matrice  $M$  donnée par :

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice  $D - CA^{-1}B$ .

**Définition A.3.** (Lemme de Schur [32]) Pour  $A = A^T$  et  $C = C^T$ ,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} > 0$$

si et seulement si

$$C - B^T A^{-1} B > 0 \text{ si } A > 0$$

ou de façon équivalente, si et seulement si

$$A - B C^{-1} B^T > 0 \text{ si } C > 0.$$



---

## Bibliographie

- [1] A. Alessandri. Design of observers for lipschitz nonlinear systems using lmi. In *NOLCOS, IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 603–608, Stuttgart, Germany, 2004.
- [2] J. Alex, J.F. Beteau, J.B. Copp, C. Hellenga, U. Jeppsson, S. Marsili-Libelli, M.N. Pons, H. Spanjers, and H. Vanhooren. Benchmark for evaluating control strategies in wastewater treatment plants. In *European Control Conference 1999 , ECC'99*, Karlsruhe, Germany, August 31- September 3 1999.
- [3] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1979.
- [4] D. Aubry, M. Boutayeb, and M. Darouach. Observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps discret. Application à une machine asynchrone. In *Colloque Inter-GDR, Thème Commande des Entraînements Electriques*, Paris, France, 1998.
- [5] D. Aubry, M. Boutayeb, and M. Darouach. On extended Kalman type observers design with application to the ball and beam system. In *5th IFAC Symposium of the 15th IMACS Nonlinear Systems- NOLCOS 2001, Saint-Petersburg, Russia*, pages 1431–1436, 2001.
- [6] G. I. Bara, A. Zemouche, and M. Boutayeb. Observer synthesis for Lipschitz discrete-

- time systems. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Japan, Kobe, May 2005.
- [7] G.I. Bara. State estimation of linear parameter-varying systems. *PhD Thesis, National Polytechnic Institute of Lorraine*, 2001.
- [8] G.I. Bara, J. Daafouz, and F. Kratz. Advanced gain scheduling techniques for the design of parameter-dependent observers. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, USA, 04 - 07 Decembre 2001.
- [9] G.I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, and J. Ragot. Parameter dependent state observer design for affine LPV systems. *Int. J. of Control*, 74(16) :1601–1611, 2001.
- [10] A. Bassong Onana. *Filtrage Optimal des Systèmes Dynamiques Linéaires Discrets : Décentralisation et Robustesse Numérique*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 1992.
- [11] A. Bassong-Onana and M. Darouach. Optimal filtering for singular systems. *Control Theory & Advanced Technology*, 8 :731–742, 1992.
- [12] S. Bastin and D. Dochain. *On-line Estimation and adaptive control of bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [13] A. Bemporad, D. Mignone, and M. Morari. Moving horizon estimation for hybrid systems and fault detection. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, pages 2471–2475, San Diego, Canada, 1999.
- [14] S. Benamor. *Observation et commande des systèmes non linéaires temps-discret*. PhD thesis, Université C. Bernard, Lyon I, 1997.
- [15] S. Benamor, H. Hammouri, and F. Couenne. A Luenberger-like observer for discrete-time nonlinear systems. In *Proc. 4th European Control Conference '97*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [16] B. W. Bequette. Nonlinear predictive control using multi-rate sampling. *Can. J. Chem. Eng.*, 69 :136–143, 1991.
- [17] O. Bernard and J. L. Gouzé. State estimation for bioprocesses. In *lecture notes : Mathematical Control Theory*, Trieste, ICTP, 2002.

- 
- [18] L. T. Biegler. Advances in nonlinear programming concepts for process control. In *IFAC Adchem : International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, Banff, Alberta, Canada*, pages 587–598, 1997.
- [19] T. Binder, L. Blank, W. Dahmen, and W. Marquardt. Towards multiscale dynamic data reconciliation. In *NATO ASI on Nonlinear Model Based Process Control, MA : Kluwer, Norwell*, 1998.
- [20] B. Boukroune, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Moving horizon estimation for discrete time linear systems with unknown inputs. In *Proc. European Contr. Conf.*, Kos, Greece July 2-5, 2007.
- [21] B. Boukroune, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Moving horizon estimation for linear singular systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Kos, Greece 2-5 July, 2007.
- [22] B. Boukroune, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Optimal estimation for linear singular systems using moving horizon estimation. Seoul, Korea JULY 6-11, 2008.
- [23] M. Boutayeb and D. Aubry. A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(8) :1550–1556, 1999.
- [24] M. Boutayeb and D. Aubry. A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(8) :1550–1556, 1999.
- [25] M. Boutayeb, D. Aubry, and M. Darouach. Robust observers design for a class of nonlinear discrete-time systems. In *Proceedings of the 4th European Control Conference , Bruxelle, Belgique*, 1997.
- [26] M. Boutayeb, D. Aubry, M. Darouach, and P.M. Frank. Observer design for non linear descriptor systems. In *Proc. 15th IMACS World Congress*, Berlin, Germany, 1997.
- [27] M. Boutayeb and M. Darouach. Observer design for non linear descriptor system. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, New Orleans, USA, 1995.
- [28] M. Boutayeb and M. Darouach. A reduced order observer for nonlinear discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 39 :141–151, 2000.
- [29] M. Boutayeb, M. Darouach, and H. Rafaralahy. Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Trans. Circ. Syst. I : Fund. Theory & Appli.*, 49 :345–349, 2002.

- [30] M. Boutayeb, M. Darouach, H. Rafaralahy, and G. Krzakala. Asymptotic observers for a class of non linear descriptor systems. In *Proc. American Control Conference*, pages 1440–1441, Baltimore, U.S.A., 1994.
- [31] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(4) :581–586, 1997.
- [32] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. In *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, USA, 1994.
- [33] E. Brookner. Tracking and Kalman filtering made easy. *John Wiley & Sons*, 1998.
- [34] R. Brown and P Hwang. Introduction to random signals and applied Kalman filtering : with Matlab exercises and solutions. *John Wiley & Sons, Third Edition*, 1997.
- [35] B. Chachuat. *Méthodologie d'optimisation dynamique et de commande optimale des petites stations d'épuration à boues activées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2001.
- [36] B. Chachuat, N. Roche, and M. A. Latifi. Reduction of the ASM 1 model for optimal control of small-size activated sludge treatment plants. *Revue des Sciences de l'Eau*, 16(1) :5–26, 2003.
- [37] G. Chen. Approximate Kalman filtering. *World Scientific series in approximations and decompositions*, 1993.
- [38] L. Dai. *Singular Control Systems*, volume 118. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [39] M. Darouach, A. Bassong Onana, and M. Zasadzinski. State estimation of stochastic singular linear systems : convergence and stability. *Int. J. Syst. Sci.*, 24 :1001–1008, 1993.
- [40] M. Darouach and M. Boutayeb. Design of observers for descriptor systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 40 :1323–1327, 1995.
- [41] M. Darouach and M. Zasadzinski. Optimal filtering for discrete-time singular stochastic systems. In *Proc. Int. IFAC Conf. on Advanced Control of Chemical Processes*, Toulouse, France, 1991.

- 
- [42] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. Bassong Onana, and S. Nowakowski. Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 26 :2015–2028, 1995.
- [43] M. Darouach, M. Zasadzinski, and J.Y. Keller. State estimation for discrete systems with unknown inputs using state estimation of singular systems. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Chicago, USA, 1992.
- [44] M. Darouach, M. Zasadzinski, and D. Mehdi. State estimation of stochastic singular linear systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 24 :345–354, 1993.
- [45] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S.J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39 :606–609, 1994.
- [46] A. J. de Assis and R. M. Filho. Soft sensors development for on-line bioreactor state estimation. *Computers and Chemical Engineering*, 24 :1099–1103, 2000.
- [47] C.E. de Souza, M.R. Gevers, and G.C. Goodwin. Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 31 :831–838, 1986.
- [48] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara. Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38(3) :482–484, 1993.
- [49] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control letters*, 18, 1992.
- [50] D. Dochain, P.A. Vanrolleghem, and M. Van Daele. Structural identifiability of biokinetic models of activated sludge respiration. *Water Research*, 29 :2571–2578, 1995.
- [51] P.L. Dold, G.A. Ekama, and G.V.R. Marais. A general model for the activated sludge process. *Progress in Water Technology*, 12 :47–77, 1980.
- [52] M. Farza, M. Hammouri, S. Othman, and K Busawon. Nonlinear observers for parameter estimation in bioprocesses. *Chem Eng*, 52(23) :4251–4267, 1997.
- [53] P. Findeisen. Moving horizon state estimation of discrete time systems. Master’s thesis, University of Wisconsin Madison, 1997.
- [54] A. Fossard and D. Normand-Cyrot. *Systèmes non linéaires. 1. Modélisation - estimation*. Série Automatique. Paris Milan, Masson, Paris, 1993.



- [55] F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea, New York, 1974.
- [56] J. P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 26(4) :922–926, 1994.
- [57] J. P. Gauthier and K. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32(4) :975–994, 1994.
- [58] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactors. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :875–880, 1992.
- [59] K.V. Gernaey, M.C.M. van Loosdrecht, M. Henze, M. Lind, and S.B. Jørgensen. Activated sludge wastewater treatment plant modelling and simulation : state of the art. *Environmental Modelling and Software*, 19 :763–783, 2004.
- [60] C. Gómez-Quintero and I. Queinnec. State and disturbance estimation for an alternating activated sludge process. In *Proc. of the 15th triennial World IFAC Congress*, Barcelone, Espagne, 21-26 juillet 2001.
- [61] C. Gómez-Quintero, I. Queinnec, and J. P. Babary. A reduced nonlinear model of an activated sludge process. In *Int. Symp. on Advanced Control on Chemical Processes*, pages 1037–1042, Pisa, Italy, 2000.
- [62] G.C. Goodwin and K.S. Sin. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [63] M. Grewal and A. Andrews. Kalman filtering : Theory and practice. *Prentice Hall*, 1993.
- [64] J. W. Grizzle and P. E. Moraal. Newton Observers and Nonlinear Discrete-time Control. In *Proc. 29th IEEE Conference on Decision Control*, pages 760–767, Honolulu, Hawaii, 1990.
- [65] Y. Guan and M. Saif. A novel approach to the design of unknown input observer. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36(5) :632–635, 1991.
- [66] Henze M. Mino T. Gujer, W. and M. C. M. Van Loosdrecht. Activated sludge model no.3. *Water Science and Technology*, 39 :183–193, 1999.
- [67] A.C. Van Haadal, G.A. Ekama, and G.V.R Marais. The activated sludge process : Part 3-single sludge denitrification. *Water Research*, 15 :1135–1152, 1981.
- [68] M.Z. Hadj-Sadok and J.L. Gouzé. Estimation of uncertain models of activated sludge processes with interval observers. *Journal of Process Control*, 11 :299–310, 2001.

- 
- [69] M. Henze, C. P. L. Grady, W. Jr., Gujer, G. V. R. Marais, and T. Matsuo. Activated sludge model no.1. In *IAWQ Scientific and Technical Report No.1*, London, UK, 1987.
- [70] M. Henze, W. Gujer, T. Mino, T. Matsuo, M. C. M. Wentzel, and G. V. R. Marais. Activated sludge model no.2. In *IAWQ Scientific and Technical Report No.3*, London, UK, 1995.
- [71] M. Henze, W. Gujer, T. Mino, T. Matsuo, M. C. Wetzel, G. V. R. Marais, and M. C. M. van Loosdrecht. Activated sludge process model no. 2d. *Water Science and Technology*, 39(1) :165–182, 1999.
- [72] R. Herman and J. Krener. Nonlinear controlability and observability. *IEEE Trans. Automatic Control*, 22(5) :728–740, 1977.
- [73] M. Hou and P.C. Müller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :871–875, 1992.
- [74] S. Ibrir. Circle criterion approach to discrete time nonlinear observer design. *Automatica*, 43 :1432–1441, 2007.
- [75] J. Y. Ishihara, J. C. T. Campos, and M. H. Terra. Optimal Recursive Estimation for Discrete-time Descriptor Systems. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, pages 189–193, Boston, U.S.A., 2004.
- [76] J. Y. Ishihara, M. H. Terra, and J. C. T. Campos. Optimal Recursive Estimation for Discrete-time Descriptor Systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 36(10) :1–22, 2005.
- [77] S. S. Jang, B. Joseph, and H. Mukai. Comparison of two approaches to on-line parameter and state estimation of nonlinear systems. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, 25 :809–814, 1986.
- [78] A. H. Jazwinski. Stochastic processes and filtering theory. *New York Academic*, 1970.
- [79] U. Jeppson. *Modelling Aspects of Wastewater Treatment Processes*. Phd thesis, Lund Institute of Technology, 1996.
- [80] U. Jeppsson and G. Olsson. Reduced order models for online parameter identification of the activated sludge process. *Water Science and Technology*, 28 :173–183, 1993.
- [81] J. Jouffroy and J.-J. E.Slotine. Methodological remarks on contraction theory. *IEEE conference on Decision and control*, pages 2537–2543, 2004.

- [82] S. Julien. *Modélisation et estimation pour le contrôle d'un procédé boues activées éliminant l'azote des eaux résiduaires urbaines*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France., 1997.
- [83] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [84] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 82 :34–45, 1960.
- [85] R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 83 :95–108, 1961.
- [86] S. Kaprielian and J. Turi. An observer for a non linear descriptor system. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2369–2374, Tucson, Arizona, 1995.
- [87] H. Kim, T.J. McAvoy, J.S. Anderson, and O.J. Hao. Control of an alternating aerobic-anoxic activated sludge system - part 2 : optimization using a linearized model. *Control Engineering Practice*, 8 :279–289, 2000.
- [88] I. Kim, M. Liebman, and T. Edgar. A sequential error-in-variables method for nonlinear dynamic systems. *Comput. Chem. Eng.*, 15(9) :663–670, 1991.
- [89] M. Kuiper. *First-Order Representation of Linear Systems*. Birkhäuser, Boston, USA, 1994.
- [90] W. H. Kwon, A. M. Bruckstein, and T. Kailath. Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method. *Int. J. of Control*, 3 :631–664, 1983.
- [91] W.H. Kwon and S. Han. *Receding Horizon Control : Model Predictive Control for State Models*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [92] C.L. Lawson and R.J. Hanson. *Solving Linear Least Squares Problems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [93] F.L. Lewis. A survey of linear singular systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 5 :3–36, 1986.
- [94] F.L. Lewis. A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems. *Automatica*, 28 :119–137, 1992.
- [95] M. Liebman, T. Edgar, and L. Lasdon. Efficient data reconciliation and estimation for dynamic processes using nonlinear programming techniques. *Comput. Chem. Eng.*, 16(10-11) :963–986, 1992.

- 
- [96] C. F. Lindberg. *Control and estimation strategies applied to the activated sludge process*. PhD thesis, Uppsala University, Uppsala, Sweden, 1997.
- [97] K. V. Ling and K. V. Lim. Receding Horizon Recursive State Estimation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44(9) :1750–1753, 1999.
- [98] J. Lohmiller and J.-J. E. Slotine. On contraction analysis for nonlinear systems. *Automatica*, 34(6) :683–696, 1998.
- [99] J. Lohmiller and J.-J. E. Slotine. Control system design for mechanical systems using contraction theory. *IEEE Trans. Aut. Control*, 45(5) :984–989, 2000.
- [100] E. Lucet. *Observation à entrées inconnues et commande associée. Application à un procédé d'extraction liquide-liquide*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble., 1998.
- [101] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transaction on Military Electronics*, 8 :74–80, 1964.
- [102] D.G. Luenberger. Time-invariant descriptor systems. *Automatica*, 14 :473–480, 1978.
- [103] L.J.S. Lukasse, Keesman K.J., and van Straten G. A recursively identified model for short term predictions of  $nh_4/no_3$  concentrations in alternating activated sludge processes. *J. Proc. Control*, 9(1) :87–100, 1999.
- [104] G.V.R Marais and G.A. Ekama. The activated sludge process : Part 1-steady state behaviour. *Water SA*, 2 :163–200, 1976.
- [105] R. Marino, S. Peresada, and P. Valigi. Adaptive Input-Output Linearizing Control of Induction Motors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2) :208–221, 1993.
- [106] B. MARX. *Contribution à la Commande et au Diagnostic des Systèmes Algébro-Différentiels Linéaires*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, France, 2003.
- [107] A. M'hamdi, A. Helbig, O. Abel, and W. Marquardt. Newton-type receding horizon control and state estimation. In *Proc. 1996 IFAC World Cong., San Francisco, CA*, pages 121–126, 1996.
- [108] H. Michalska and D. Q. Mayne. Moving horizon observers. In *Proc. 1st IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'92)*, pages 576–581, Bordeaux, France, 1992.

- [109] H. Michalska and D. Q. Mayne. Moving Horizon Observers and Observers-Based Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6) :995–1006, 1995.
- [110] E.A. Misawa and J.K. Hedrick. Nonlinear observers : a state-of-the-art survey. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 111 :344–352, 1989.
- [111] J. Monod. The growth of bacterial cultures. *Annual Review of Microbiology*, 3 :371–394, 1942.
- [112] J. B. Moore and B. D. O. Anderson. Coping with singular transition matrices in estimation and control stability theory. *International Journal of Control*, 31(3) :571–586, 1980.
- [113] P. E. Moraal. *Nonlinear Observer Design : Theory and Applications to Automotive Control*. PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1994.
- [114] T. Morozan. *Parametrized Riccati equations associated to input-output operators for time-varying stochastic differential equations with state-dependent noise*, volume 37. Preprint Series, Institute of Mathematics of the Romanian Academy, 1995.
- [115] M. Mulas, S. Tronci, and R. Baratti. Development of a 4-measurable states activated sludge process model deduced from the asm1. In *8th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, pages 213–218, Cancun, Mexico, 2007.
- [116] K. R. Muske and J. B. Rawlings. Model predictive control with linear models. *AICHE J.*, 39(2) :262–287, 1993.
- [117] K. R. Muske and J. B. Rawlings. Receding Horizon Recursive State Estimation. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, pages 900–904, San Francisco, U.S.A., 1993.
- [118] K. R. Muske and J. B. Rawlings. Nonlinear moving horizon state estimation. In *R. Berber, ed. Methods of model based Process Control, E. Applied Sciences 293*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pages 349–365, 1995.
- [119] H. Nijmeijer. Observability of autonomous discrete-time nonlinear systems : a geometric approach. *International Journal of Control*, 36 :862–874, 1982.
- [120] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [121] R. Nikoukhah, S. L. Campbell, and F. Delebecque. Kalman Filtering for General Discrete-time Linear Systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44(10) :1829–1839, 1999.

- 
- [122] R. Nikoukhah, A. S. Willsky, and B. C. Levy. Kalman Filtering and Riccati Equations for Descriptor Systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37(9) :1325–1342, 1992.
- [123] R. Nikoukhah, A.S. Willsky, and B.C. Levy. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems, 1990. Research Report 1186, INRIA, France.
- [124] P. R. Pagilla and Y. Zhu. Controller and observer design for Lipschitz nonlinear systems. In *IEEE American Control Conference ACC'04*, Boston, Massachusetts, USA, July 2004.
- [125] R. Rajamani. Observer for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 43 :397–401, 1998.
- [126] C. V. Rao. *Moving horizon strategies for the constrained monitoring and control of nonlinear discrete time systems*. PhD thesis, University of Wisconsin Madison, 2000.
- [127] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and H. L. Jay. Constrained Linear State Estimation -a Moving Horizon Approach. *Automatica*, 37 :1619–1628, 2001.
- [128] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and D. Q. Mayne. Constrained state estimation for nonlinear discrete time system : Stability and moving horizon approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2) :246–258, 2003.
- [129] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. An EKF based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica*, 34(9) :1119–1123, 1998.
- [130] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. Nonlinear state observation using  $\mathcal{H}_\infty$ -filtering Riccati design. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44 :203–208, 1999.
- [131] D. G. Robertson. *Development and Statistical Interpretation of Tools for Nonlinear Estimation*. PhD thesis, Auburn University, 1996.
- [132] D. G. Robertson and J. H. Lee. A least squares formulation for state estimation. *J. Proc. Cont.*, 5(4) :291–299, 1995.
- [133] D. G. Robertson, J. H. Lee, and J. B. Rawlings. A moving horizon based approach for least squares state estimation. *AIChE J.*, 42(8) :2209–2224, 1996.
- [134] L. P. Russo and R. E. Young. Moving horizon state estimation applied to an industrial polymerization process. In *Proceedings of 1999 American Control Conference, San Diego, California*, 1999.
- [135] V. Ryckaert. *Model based optimization and control of bioprocesses - from theory to practice*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven., 1998.

- [136] M.G. Safonov. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. MIT Press, Cambridge, USA, 1980.
- [137] D. N. Shields. Application and design of observers for singular discrete-time bilinear descriptor systems. In *Proc. 4th European Control Conference '97*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [138] D.N. Shields. Observer for discrete nonlinear descriptor systems. In *Proc. UKACC Int. Conf. Control*, Exeter, UK, 1996.
- [139] I. Y. Smets, J. V. Haegebaert, R. Carrette, and J. F. Van Impe. Linearization of the activated sludge model asm1 for fast and reliable predictions. *Water Res*, 37(8) :1831–1851, 2003.
- [140] T. L. Song and J. L. Speyer. A stochastic analysis of a modified gain Extended Kalman Filter with applications to estimation with bearings only measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(10) :940–949, 1985.
- [141] Y. Song and J. W. Grizzle. The Extended Kalman Filter as a Local Asymptotic Observer for Discrete-time Nonlinear Systems. *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, 5(1) :59–78, 1995.
- [142] E. D. Sontag. On the observability of polynomial systems : finite-time problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17 :139–151, 1979.
- [143] E. D. Sontag. A concept of local observability. *Systems and Control Letters*, 5 :41–47, 1984.
- [144] M. Soroush. Nonlinear state observer design with application to reactors. *Chem. Eng. Sci*, 52(3) :387–404, 1997.
- [145] J. L. Speyer and T. L. Spong. A comparison between pseudomeasurement and extended Kalman observer. In *Proc. 20th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 324–329, 1981.
- [146] M. A. Steffens, P. A. Lant, and R. B. Newell. A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment model. *Water Science and Technology*, 31(3) :590–606, 1997.

- 
- [147] D. Theilliol, J.C. Ponsart, J. Harmand, C. Join, and P. Gras. On-line estimation of unmeasured inputs for anaerobic wastewater treatment processes. *Control Engineering Practice*, 11 :1007–1019, 2003.
- [148] Y. A. Thomas. Linear quadratic optimal estimation and control with receding horizon. *Electron. Lett.*, 11 :19–21, 1975.
- [149] P.A. Vanrolleghem, M. Van Daele, and D. Dochain. Practical identifiability of a biokinetic model of activated sludge respiration. *Water Research*, 29 :2561–2570, 1995.
- [150] G.C. Verghese, B.C. Levy, and T. Kailath. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 26 :811–831, 1981.
- [151] E. Walter. *Identifiability of parametric models*. Pergamon Press, Inc., Elmsford, NY, USA, 1987.
- [152] S. H. Wang, E. J. Davidson, and P. Dorato. Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 20(5) :716–717, 1975.
- [153] W. Wang and J.-J.E. Slotine. On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators. *Biological Cybernetics*, 92(1), 2004.
- [154] X.M. Wang and P. Bernhard. Filtrage et lissage des systèmes implicites discrets, 1989. Research Report 1083, INRIA, France.
- [155] S. Weijers. *Modelling, identification and control of activated sludge plants for nitrogen removal*. PhD thesis, Technical University of Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands, 2000.
- [156] F. Yang and R. W. Wilde. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 33(7) :677–681, 1988.
- [157] M. Zasadzinski. *Contribution à l'Estimation de l'Etat des Systèmes Singuliers. Application à la Validation de Données des Systèmes Dynamiques Linéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 1990.
- [158] M. Zasadzinski, M. Darouach, and S. Nowakowski. A transfer function approach to the linear discrete stationary optimal filtering for singular systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Tucson, USA, 1992.
- [159] M. Zasadzinski, D. Mehdi, and M. Darouach. Recursive state estimation for singular systems. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Boston, USA, 1991.



- [160] A. Zemouche and M. Boutayeb. Observer design for lipschitz nonlinear systems. the discrete-time case. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II Analog and Digital Signal Processing*, 53(8) :777–781, 2006.
- [161] H. S. Zhang, L. Xie, and Y. C. Soh. Optimal Recursive State Estimation for Singular Stochastic Discrete-Time Systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, pages 2908–2913, Tampa, Florida, U.S.A., 1998.
- [162] H. S. Zhang, L. Xie, and Y. C. Soh. Optimal Recursive Filtering, Prediction and Smoothing for Singular Stochastic Discrete-Time Systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44(11) :2154–2158, 1999.
- [163] H. Zhao, S. H. Isaacs, H. Sjøberg, and M. Kümmel. An analysis of nitrogen removal and control strategies in an alternating activated sludge process. *Water research*, 29 :535–544, 1995.
- [164] H. Zhao and M. Kümmel. State and parameter estimation for phosphorus removal in an alternating activated sludge process. *J. Proc. Control*, 5(5) :341–351, 1995.
- [165] F. Zhu and Z. Han. A note on observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 47 :1751–1754, 2002.

## Résumé

Ce sujet de recherche revêt, d'une part, un caractère théorique puisqu'il aborde le problème d'estimation des systèmes singuliers linéaires et non linéaires à temps discret pour lesquels très peu de résultats sont disponibles et, d'autre part, un aspect pratique, car le modèle utilisé est d'une station d'épuration des eaux usées à boues activées. Dans la partie théorique, nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, à l'estimation d'état des systèmes singuliers linéaires en utilisant l'approche d'estimation à horizon glissant. Deux estimateurs optimaux, au sens des moindres carrés et au sens de la variance minimale, ont été présentés. L'analyse de la convergence et de la stabilité de ces estimateurs est traitée. Ensuite, nous avons présenté une approche pour l'observation de la classe des systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret. En supposant que la partie linéaire de cette classe de systèmes est variante dans le temps, le problème de l'estimation d'état d'un système non linéaire est transformé en un problème d'estimation d'état d'un système LPV. La condition de stabilité de l'observateur proposé est exprimée en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Enfin, dans la partie pratique, les résultats obtenus sont validés par une application à un modèle d'une station d'épuration des eaux usées à boues activées.

Mots-clés : Estimation à horizon glissant, systèmes singuliers, observateurs non linéaires, stabilité au sens de Lyapunov, systèmes à temps discret, systèmes LPV, LMI, station d'épuration des eaux usées à boues activées.

## Abstract

This subject of research holds, on the one hand, a theoretical character since it tackles the state estimation problem for linear and nonlinear singular discrete time systems for which very few results are available and, on the other hand, a practical aspect because the used model is an activated sludge process for wastewater treatment. In the theoretical part, we were interested firstly in the state estimation problem of linear singular systems using the moving horizon approach. We have presented two optimal estimators with the least squares and the minimum variance formulations. The analysis of the convergence and the stability of the estimators are derived. Then, an observers synthesis method for nonlinear Lipschitz discrete-time systems is proposed. By supposing that the linear part of this class of systems is time-varying, the state estimation problem of nonlinear system is transformed into a state estimation problem for LPV system. The stability condition of the proposed observer is derived in the form of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, in the practical part, the obtained results are validated by an application to an activated sludge process for wastewater treatment.

Keywords : moving horizon estimation, singular systems, nonlinear observers, Lyapunov stability, discrete-time systems, LPV systems, LMI, activated sludge process for wastewater treatment.