



**HAL**  
open science

# Compactifications de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction

Benoît Stroh

► **To cite this version:**

Benoît Stroh. Compactifications de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2008. Français. NNT : 2008NAN10109 . tel-01748496

**HAL Id: tel-01748496**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748496>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse  
présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I  
en Mathématiques  
par  
Benoît STROH

---

**Compactifications de variétés de Siegel  
aux places de mauvaise réduction**

---

soutenue publiquement le 1er décembre 2008

Membres du Jury :

<b>M. Ching-Li Chai</b>	rapporteur absent à la soutenance
<b>M. Alain Genestier</b>	directeur de thèse
<b>M. Laurent Lafforgue</b>	
<b>M. Gérard Laumon</b>	président du jury
<b>M. Michael Rapoport</b>	rapporteur
<b>M. Jörg Wildeshaus</b>	



Benoît Stroh

---

COMPACTIFICATIONS DE  
VARIÉTÉS DE SIEGEL AUX  
PLACES DE MAUVAISE  
RÉDUCTION

---

*Benoît Stroh*

*17 novembre 2008*

**COMPACTIFICATIONS DE VARIÉTÉS DE SIEGEL  
AUX PLACES DE MAUVAISE RÉDUCTION**

**Benoît Stroh**





## Remerciements

Mes remerciements les plus chaleureux vont à mon directeur de thèse Alain Genestier, qui m'a consacré tant de temps et appris de si belles mathématiques. Je remercie également Ching-Li Chai et Michael Rapoport d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Enfin, je remercie vivement Laurent Lafforgue, Gérard Laumon, Michael Rapoport et Jörg Wildeshaus pour leur présence à la soutenance.

Gérard Laumon m'a orienté au début de mon doctorat et m'a prodigué par la suite de nombreux conseils; je lui en suis extrêmement reconnaissant. D'autres personnes m'ont énormément apporté sur le plan mathématique. Je pense tout d'abord à Luc Illusie, qui m'a accordé beaucoup d'attention et qui a eu la gentillesse de me fournir certaines de ses notes personnelles. Je pense ensuite à Vincent Pilloni, dont l'amitié mathématique m'a été précieuse; il m'a notamment suggéré l'idée du premier appendice.

Je tiens également à remercier Ahmed Abbès, Frédéric Campana, Tetsushi Ito, Fanny Kassel, Tristan Machado, Sophie Morel, Marc-Hubert Nicole, Michel Raynaud, Sandra Rozensztajn et Jacques Tilouine. Je n'oublie pas non plus Christophe Soulé, qui m'a initié à la recherche lors de mon DEA.

Enfin, cette thèse n'aurait pas vu le jour sans le soutien de ma famille, de mon amie, de mes amis.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>0. Introduction</b> .....	1
Plan détaillé de la thèse.....	5
<b>1. Variétés abéliennes à réduction semi-stable et 1-motifs</b> .....	9
1.1. Schémas semi-abéliens.....	9
1.2. Les 1-motifs.....	10
<b>1.2.3.</b> Dualité, isogénie et polarisation.....	11
<b>1.2.4.</b> Noyau d'une isogénie.....	12
<b>1.2.5.</b> Structures de niveau parahoriques sur les 1-motifs.....	12
<b>1.2.6.</b> Position relative.....	13
1.3. Construction de Mumford.....	15
<b>1.3.4.</b> Construction de Mumford généralisée.....	16
<b>1.3.5.</b> Globalisation de la forme bilinéaire symétrique.....	17
<b>1.3.6.</b> Application de Kodaira-Spencer.....	18
<b>1.3.7.</b> Structure de niveau parahorique.....	18
1.4. Espaces de modules de 1-motifs.....	19
<b>1.4.1.</b> Description symétrique d'un 1-motif.....	19
<b>1.4.2.</b> Espaces de modules.....	19
<b>1.4.5.</b> Description symétrique d'une structure de niveau.....	20
<b>1.4.6.</b> Espaces de modules avec structure de niveau parahorique.....	21
<b>1.4.7.</b> Liberté.....	23
<b>1.4.8.</b> Oubli du niveau.....	26
<b>1.4.9.</b> Variante de l'espace de modules avec structure parahorique.....	27
<b>2. Cartes locales</b> .....	29
2.1. Compactifications toroïdales partielles.....	29
<b>2.1.3.</b> Interprétation modulaire à la frontière.....	31
<b>2.1.4.</b> Cas d'une structure de niveau parahorique.....	32
<b>2.1.5.</b> Oubli du niveau.....	33
2.2. Cartes locales formelles.....	34

2.2.3.	Propriété modulaire proche de la frontière.....	36
2.2.4.	Algébricité du groupe de $p$ -torsion.....	37
2.3.	Approximation des cartes locales formelles.....	37
2.3.1.	Couples henséliens.....	38
2.3.2.	Approximation selon Popescu.....	38
2.3.3.	Approximation des cartes locales formelles sans niveau.....	40
2.3.4.	Recomplétion de l'approximation.....	41
2.4.	Cartes locales algébriques.....	42
2.4.1.	Cartes locales algébriques sans niveau.....	42
2.4.2.	Cartes locales algébriques avec niveau parahorique.....	43
<b>3.</b>	<b>Compactifications toroïdales.....</b>	<b>45</b>
3.1.	Recollement des cartes locales algébriques.....	45
3.1.5.	Description des compactifications sans niveau.....	48
3.1.6.	Cas d'une structure de niveau.....	50
3.1.7.	Normalité.....	50
3.1.8.	Relation d'équivalence avec niveau.....	51
3.2.	Compactifications améliorées.....	53
3.2.1.	Sous-espaces totalement isotropes.....	54
3.2.2.	Complexe conique.....	55
3.2.3.	Décompositions du complexe conique.....	55
3.2.4.	Plongements toroïdaux associés à $\mathfrak{S}$ .....	55
3.2.5.	Groupes d'automorphismes.....	56
3.2.6.	Cartes formelles associées à $\mathfrak{S}$ .....	56
3.2.7.	Énoncé du théorème principal.....	56
3.2.8.	Propriété modulaire à la frontière.....	58
3.3.	Structure de niveau principale en un entier auxiliaire.....	58
3.3.1.	Stratification de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$ .....	59
3.3.2.	Extension des schémas abéliens.....	61
<b>4.</b>	<b>Compactification minimale.....</b>	<b>63</b>
4.1.	Formes modulaires de Siegel.....	63
4.1.4.	Développement de Fourier-Jacobi.....	64
4.1.5.	Principe de Köcher.....	66
4.1.6.	Coefficient constant.....	68
4.2.	Compactification minimale.....	68
<b>5.</b>	<b>Prolongement du drapeau aux compactifications.....</b>	<b>75</b>
5.1.	Construction de Mumford semi-stable.....	75
5.1.1.	Schémas semi-stables marqués.....	75
5.1.2.	Faisceaux cubistes sur les 1-motifs.....	77
5.1.3.	Les doubles motifs de Mumford.....	78
5.1.4.	Modèle relativement complet.....	79
5.1.5.	Construction du quotient.....	81

5.1.6. Une équivalence de catégorie.....	84
5.2. Prolongement en niveau de Klingen.....	85
5.3. Prolongement en niveau principal.....	86
5.4. Contre-exemple dans les cas non-Klingen.....	87
<b>6. Appendice : Existence du sous-groupe canonique.....</b>	<b>89</b>
6.1. Lieu ordinaire des compactifications.....	89
6.2. Surconvergence du tube.....	90
<b>7. Appendice : Relèvement de formes modulaires de Siegel.....</b>	<b>93</b>
7.1. Énoncé du théorème.....	93
7.2. Amplitude et annulation.....	94
7.3. Démonstration du théorème.....	95
7.4. Cas du genre quatre.....	97
<b>8. Bibliographie.....</b>	<b>99</b>



# CHAPITRE 0

## INTRODUCTION

Donnons-nous un entier  $g \geq 1$  et notons  $\mathcal{A}_g$  le champ de modules des schémas abéliens principalement polarisés de genre  $g$ . Ce champ est algébrique et lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , mais pas propre. En effet, le critère valuatif de propreté n'est pas vérifié car si  $R$  est un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $K$ , il existe des variétés abéliennes principalement polarisées sur  $\text{Spec}(K)$  qui ne se prolongent pas en des schémas abéliens sur  $\text{Spec}(R)$ . Il est donc naturel de construire des compactifications de  $\mathcal{A}_g$ . Ce problème, initié par Mumford, est riche d'une longue histoire [Ray92]. Ash, Mumford, Rapoport et Tai [AMRT] d'une part, Faltings et Chai [FC90] d'autre part, ont construit des *compactifications toroïdales* de  $\mathcal{A}_g$ . Ces dernières sont des champs algébriques dépendant du choix d'un éventail  $\Sigma$ . Notons  $\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$  la compactification toroïdale associée à un tel éventail  $\Sigma$ . Sous une hypothèse de nature combinatoire sur  $\Sigma$ , le champ  $\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$  est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  et le complémentaire de  $\mathcal{A}_g$  forme un diviseur à croisements normaux. La stratification induite par ce diviseur est paramétrée par  $\Sigma$  et l'on peut associer à chaque strate un rang  $r \leq g$ . Le complété formel de la compactification le long d'une strate de rang  $r$  est isomorphe au complété formel d'un certain fibré en plongements toriques  $\overline{\mathcal{M}}^r \rightarrow \mathcal{B}^r$  le long d'une strate, où  $\mathcal{B}^r \rightarrow \mathcal{A}_{g-r}$  est un schéma abélien.

Si  $g \geq 2$ , on ne dispose malheureusement pas d'interprétation modulaire des compactifications toroïdales de  $\mathcal{A}_g$ . On peut toutefois affirmer qu'elles paramètrent "tous les schémas semi-abéliens sur les traits qui sont génériquement des schémas abéliens principalement polarisés". La propreté de ces compactifications résulte alors du critère valuatif et du théorème de réduction semi-stable pour les variétés abéliennes [SGA 7 IX th. 3.6].

Pour diverses raisons, il est également naturel d'étudier les champs de modules de variétés abéliennes principalement polarisées munies de structures de niveau. Les structures de niveau *parahoriques* ont l'avantage d'être définies sans ambiguïté sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , sans qu'il soit nécessaire d'inverser certains nombres premiers. Les espaces de modules correspondants ne sont ni propres ni lisses sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et le but de cette thèse est d'en construire des

compactifications toroïdales. La différence la plus importante par rapport au cas de  $\mathcal{A}_g$  est la présence de singularités, qui rend l'étude géométrique plus délicate.

Soient  $p$  un nombre premier,  $s \leq g$  un entier et  $\mathcal{D} = \{d_1 < d_2 < \dots < d_s\}$  un sous-ensemble ordonné non vide de  $\{1, \dots, g\}$ . Définissons le champ  $\mathcal{A}_{g,0}$  comme l'espace de modules relatif sur  $\mathcal{A}_g$  qui paramètre les drapeaux de sous-groupes finis, plats et totalement isotropes

$$H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_s$$

du groupe de  $p$ -torsion de la variété abélienne universelle, tels que  $H_i$  soit de rang  $d_i$  pour tout  $i \leq s$ . On dit que  $\mathcal{A}_{g,0}$  est le champ des schémas abéliens principalement polarisés de genre  $g$  munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . Ce champ est algébrique mais n'est pas lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ ; on dit qu'il a *mauvaise réduction* en  $p$ . Il n'est pas propre sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et nous allons le compactifier. Bien sûr, on ne peut pas obtenir de compactifications lisses; on voudrait toutefois contrôler leurs singularités. Le résultat suivant sera précisé dans le théorème **3.1.8.3**.

**Théorème A.** — *Il existe un champ algébrique canonique  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$  qui est propre sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , qui contient  $\mathcal{A}_{g,0}$  comme ouvert dense et tel qu'il existe une flèche propre*

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$$

*prolongeant le morphisme d'oubli du niveau. Le champ  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$  est muni d'une stratification paramétrée par  $\Sigma$  et l'on peut décrire son complété formel le long d'une strate par certains fibrés en plongements toriques. En particulier, ses singularités sont produits de singularités toriques et des singularités des champs  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  pour  $r \geq 0$ .*

La présence de singularités toriques est due au caractère trop restrictif du choix combinatoire  $\Sigma$ . Pour remédier à ce problème, nous remplaçons le choix de  $\Sigma$  par celui d'un éventail  $\mathfrak{S}$  recouvrant un complexe conique adéquat. Dans le théorème **3.2.7.1**, nous construisons une compactification toroïdale « améliorée » dépendant de  $\mathfrak{S}$ . Ses singularités sont celles des champs  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  pour  $r \geq 0$ . En particulier, la compactification améliorée est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  et le complémentaire de  $\mathcal{A}_{g,0}$  est un diviseur à croisements normaux.

La méthode de Faltings et Chai utilise de manière cruciale la lissité de  $\mathcal{A}_g$ , et n'est donc pas directement transposable aux cas de mauvaise réduction. Nous contourrons ce problème en reprenant la construction des compactifications de  $\mathcal{A}_g$  et en la modifiant. En particulier, notre approximation sur la variété sans niveau *préserve le sous-groupe de  $p$ -torsion*. On trouvera donc dans cette thèse la construction simultanée des compactifications de  $\mathcal{A}_g$  et de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Nous donnons une présentation différente des résultats de [FC90] en introduisant les notions de 1-motif de Mumford et de catégorie fibrée à la frontière.

La technique utilisée ici est transposable à de multiples cas P.E.L, comme celui des variétés de Hilbert-Siegel ou celui des variétés de Shimura unitaires, en utilisant les résultats de [Gör03] et de [Gör01]. Toutefois, la construction de compactifications toroïdales en



une place de mauvaise réduction qui divise le degré de la polarisation ou le discriminant de l'anneau d'endomorphismes reste un problème ouvert ; les méthodes de [FC90] ne semblent pas s'y adapter.

Les compactifications toroïdales de  $\mathcal{A}_{g,0}$  ont une géométrie assez simple, mais dépendent d'un choix combinatoire. Il est naturel de chercher une autre compactification de  $\mathcal{A}_{g,0}$  qui soit canonique, quitte à la supposer plus singulière que les compactifications toroïdales. Soit  $n \geq 3$  un entier premier à  $p$ . Il est avantageux de remplacer  $\mathcal{A}_{g,0}$  par  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ , qui est l'espace de modules relatif sur  $\mathcal{A}_{g,0}$  des structures de niveau principales en  $n$ . En effet,  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  est un schéma quasi-projectif sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$  et pas seulement un champ algébrique. Nous construisons la *compactification minimale*  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  ; c'est un schéma projectif sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$  qui est indépendant de  $\Sigma$ . En contrepartie, on ne contrôle pas ses singularités. Notons  $G_0$  le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  et  $G_i = G_0/H_i$  son quotient par le  $i$ -ème sous-groupe universel pour  $1 \leq i \leq s$ . Les formes différentielles invariantes sur  $G_i$  définissent sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  un faisceau inversible  $\omega_i$  pour  $0 \leq i \leq s$ . On précisera le résultat suivant dans le théorème 4.2.9.

**Théorème B.** — *Supposons  $g \geq 2$ . Il existe un schéma projectif  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ , qui contient  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  comme ouvert dense. Il est muni d'un faisceau ample qui étend  $\otimes_{i=0}^s \omega_i$  et l'on a*

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^* = \text{Proj} \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{H}^0 \left( \mathcal{A}_{g,n,0}, \bigotimes_{i=0}^s \omega_i^k \right) \right).$$

*En particulier, l'algèbre graduée  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{H}^0 \left( \mathcal{A}_{g,n,0}, \bigotimes_{i=0}^s \omega_i^k \right)$  est de type fini sur  $\mathbb{Z}[1/n]$ . Le schéma  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est stratifié par des variétés de Siegel de genre  $\leq g$  et de niveau parahorique variable. Toute compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  se fibre sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ , et le morphisme obtenu respecte les stratifications.*

Ce théorème pourrait également se généraliser aux variétés de Hilbert-Siegel et aux variétés de Shimura P.E.L. associées à des groupes unitaires ; on utiliserait la normalité et l'existence de compactifications toroïdales de ces variétés.

Soit  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . On montrera dans le théorème 3.1.8.3 que le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,0}$  s'étend canoniquement en un schéma semi-abélien  $G_0$  sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ . L'adhérence du drapeau universel  $H_\bullet$  dans  $G_0$  est quasi-finie et plate sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ , mais pas finie. Rappelons qu'un schéma en groupes semi-stable est un schéma en groupes lisse dont les fibres sont extension d'un groupe fini étale par un schéma semi-abélien. Il est naturel de se demander s'il existe un schéma  $\mathcal{G}$  semi-stable sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  qui étende le schéma abélien universel, et tel que l'adhérence de  $H_\bullet$  dans  $\mathcal{G}$  soit finie et plate sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ .

Nous répondons affirmativement à cette question dans le cas d'une *structure de niveau de Klengen*, où  $\mathcal{D} = \{1\}$ . Nous obtenons le résultat suivant, qui sera précisé dans le théorème **5.2.1**. Rappelons simplement que la composante neutre d'un schéma semi-stable est le schéma semi-abélien égal à l'union des composantes connexes de l'élément neutre de chaque fibre.

**Théorème C.** — *Notons  $\mathcal{A}_{g,0}$  le champ associé à  $\mathcal{D} = \{1\}$  et  $H$  le sous-groupe universel fini et plat de rang  $p$  sur  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Soit  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Notons  $G_0$  le schéma semi-abélien sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  qui étend le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Il existe un schéma en groupes semi-stable  $\mathcal{G}$  sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  dont la composante neutre est  $G_0$ , égal au schéma abélien universel au-dessus de  $\mathcal{A}_{g,0}$  et tel que l'adhérence de  $H$  dans  $\mathcal{G}$  soit finie et plate sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ .*

Nous répondons négativement à la question précédente dans le cas où  $g \geq 2$  et  $\mathcal{D} \neq \{1\}$ . En fait,  $H_\bullet$  ne s'étend jamais en un drapeau de groupes finis et plats sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ , quelle que soit la compactification toroïdale  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  de  $\mathcal{A}_{g,0}$ , et même après changement de base à  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ . La différence par rapport au cas de la structure de niveau de Klengen vient du fait que si  $\mathcal{D} \neq \{1\}$ , il existe des cartes locales formelles de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  sur lesquelles  $H_s$  est extension non triviale de son gradué étale par sa partie semi-abélienne. Ces extensions ne se prolongent pas aux compactifications.

Soient  $n \geq 3$  un entier et  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  une compactification toroïdale du schéma de modules  $\mathcal{A}_{g,n}$  des variétés abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau principale en  $n$  [FC90, th. IV.6.7]. Dans la proposition **5.3.1**, nous montrons qu'il existe un schéma en groupes semi-stable  $\mathcal{G}$  sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  qui étend le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,n}$ , et tel que le groupe de  $n$ -torsion  $\mathcal{G}[n]$  soit fini et plat sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ .

Comme application de la construction de compactifications toroïdals, nous donnons une nouvelle preuve de l'existence du sous-groupe canonique pour des familles de variétés abéliennes, due à Abbès et Mokrane [AM04] et à Andreatta et Gasbarri [AG07]. Nous utilisons une idée due à Vincent Pilloni. Supposons que  $\mathcal{D} = \{g\}$ ; on parle alors de *structure de niveau de Siegel*. Soit  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  (resp.  $\overline{\mathcal{A}}_g$ ) une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$  (resp. de  $\mathcal{A}_g$ ). Nous définissons le lieu ordinaire  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}}$  de  $\overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  et le lieu ordinaire-multiplicatif  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ . Nous montrons que la section de  $\mathcal{A}_g^{\text{ord}}$  dans  $\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  donnée par le noyau du morphisme de Frobenius s'étend en une section

$$\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant grâce à la « surconvergence du tube », démontrée dans [Be96, th. 1.3.5].

**Théorème D.** — *La section de  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  induit un isomorphisme entre des voisinages stricts des tubes de chacun de ces deux schémas dans les espaces rigides associés à  $\overline{\mathcal{A}}_g$  et à  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ .*

Ce théorème montre l'existence du sous-groupe canonique sur un voisinage strict du tube du lieu ordinaire. Notre méthode ne permet pas de préciser quantitativement ce voisinage, contrairement à [AM04] et à [AG07].

Enfin, nous montrons en appendice que pour  $g = 2$  ou  $3$ , certaines formes modulaires cuspidales de caractéristique  $p$  associées à  $\mathcal{A}_{g,n}$  se relèvent en caractéristique nulle. Dans le théorème suivant, on note  $\text{Cusp}(n, k, M)$  le groupe des formes modulaires cuspidales de niveau  $n$  premier à  $p$ , de poids  $k$  et à coefficients dans un  $\mathbb{Z}[1/n]$ -module  $M$ .

**Théorème E.** — *Soient  $g = 2$  ou  $3$  et  $k > g + 1$  deux entiers, et  $n \geq 3$  un entier non divisible par  $p$ . Si  $g = 2$ , on suppose  $p > 2$  et si  $g = 3$ , on suppose  $p > 5$ . Le morphisme de changement de base induit un isomorphisme*

$$\mathbb{F}_p \otimes \text{Cusp}(n, k, \mathbb{Z}[1/n]) \xrightarrow{\sim} \text{Cusp}(n, k, \mathbb{F}_p).$$

L'un des intérêts de cet appendice est de donner un exemple où la géométrie des compactifications dépend de manière essentielle du choix de  $\Sigma$ .

**Plan détaillé de la thèse.** — Le premier chapitre est consacré au lien entre dégénérescences semi-stables de variétés abéliennes et 1-motifs. La partie 1.1 est constituée de rappels sur les schémas semi-abéliens. La partie 1.2 traite des 1-motifs et de leurs structures de niveau parahoriques. La partie 1.3 est consacrée à la construction de Mumford. Nous y introduisons la catégorie des 1-motifs de Mumford, qui est une version plus synthétique de la catégorie  $\text{DD}_{\text{pol}}$  de Faltings et Chai. Dans la partie 1.4, nous montrons l'algébricité du champ de modules des 1-motifs munis d'une structure de niveau parahorique, et en donnons une description explicite.

Dans le second chapitre, nous construisons des cartes locales formelles des compactifications toroïdales. Dans la partie 2.1, nous compactifions partiellement et de manière torique les champs de modules de 1-motifs, en utilisant leur description comme toseurs sous des tores ; c'est là qu'intervient le choix combinatoire  $\Sigma$ . Dans la partie 2.2, nous complétons ces compactifications partielles le long de strates, pour pouvoir effectuer une construction de Mumford. On remarque que le groupe de  $p$ -torsion du quotient à la Mumford est une donnée algébrique, qui existe sur le champ de modules avant complétion ; cela s'avérera essentiel. Dans la partie 2.3, nous approximons le résultat de la construction de Mumford. C'est l'étape la plus délicate de la construction sans niveau, qui requiert la lissité des champs de modules. En effet, il faut contrôler l'approximation pour ne pas perdre d'information. L'isomorphisme de Kodaira-Spencer (prop. 2.2.1) permet ce contrôle (prop. 2.3.4.1), mais n'existe que sur des bases lisses. En vue de la compactification de  $\mathcal{A}_{g,0}$ , nous construisons

une approximation préservant le groupe de  $p$ -torsion (prop. **2.3.3.1**) ; cela a un sens puisque ce groupe est une donnée algébrique. Dans la partie 2.4, nous définissons les cartes locales algébriques. Celles relatives à  $\mathcal{A}_{g,0}$  n'auraient aucun intérêt si le groupe de  $p$ -torsion n'avait pas été préservé lors de l'approximation.

Dans le troisième chapitre, nous construisons les compactifications toroïdales. La partie 3.1 est consacrée au recollement des cartes locales algébriques, grâce à la construction de relations d'équivalence étales. Nous utilisons à nouveau la lissité dans la construction sans niveau *via* l'isomorphisme de Kodaira-Spencer (prop. **3.1.1**). Comme  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  est propre sur  $\overline{\mathcal{A}}_g$ , il suffit de vérifier la propriété de la compactification sans niveau (prop. **3.1.5.2**). Cela repose sur le contrôle de l'approximation permis par l'isomorphisme de Kodaira-Spencer. Dans la partie 3.2, nous construisons une compactification « améliorée » qui n'a pas de singularité d'origine torique. Pour cela, nous remplaçons le choix de  $\Sigma$  par celui d'une décomposition polyédrale  $\mathfrak{S}$  d'un certain complexe conique. De plus, la combinatoire de la stratification de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  se lit bien plus aisément sur  $\mathfrak{S}$  que sur  $\Sigma$ . Dans la partie 3.3, nous adaptons la construction précédente à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ .

Le quatrième chapitre est consacré à la construction de la compactification minimale de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  pour  $n \geq 3$ . Dans la partie 4.1, nous définissons les formes modulaires de Siegel associées à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ . Plusieurs différences sont à noter par rapport au cas de bonne réduction traité dans [FC90, ch. V]. La plus importante est la notion inhabituelle de *poids* d'une forme modulaire, qui est une famille  $(k_1, \dots, k_s)$  de  $s$  entiers relatifs. Nous définissons le développement de Fourier-Jacobi des formes modulaires associées à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  et démontrons une version du principe de Köcher. Dans la partie 4.2, nous construisons la compactification minimale  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ . La différence principale par rapport au cas de bonne réduction est l'emploi du faisceau  $\otimes_i \omega_i$  au lieu de  $\omega_0$  ; n'utiliser que ce dernier conduirait à une compactification dans laquelle  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  ne se plonge pas !

Dans le cinquième chapitre, nous abordons le problème de l'existence d'un prolongement fini et plat du drapeau universel aux compactifications toroïdales. La partie 5.1 traite de la construction de Mumford semi-stable. Nous y définissons la notion de schéma semi-stable marqué, puis celle de double motif de Mumford. Nous montrons comment modifier la construction de Mumford ([Mum72b] et [FC90, ch. III]) pour associer un schéma semi-stable marqué à tout double motif de Mumford. Dans la partie 5.2, nous construisons un prolongement semi-stable du schéma abélien universel dans le cas où  $\mathcal{D} = \{1\}$ . Nous montrons qu'une donnée combinatoire supplémentaire permet la construction de compactifications de ce prolongement. Nous traitons le cas de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  de manière analogue. Dans la partie 5.3, nous donnons un contre-exemple au prolongement dans le cas où  $\mathcal{D} \neq \{1\}$ .

Dans le premier appendice, nous redémontrons l'existence du sous-groupe canonique en suivant une idée de Vincent Pilloni. Nous y utilisons un théorème de « surconvergence du tube » de [Be96].

Enfin, dans le second appendice, nous montrons que certaines formes modulaires cuspidales de caractéristique  $p$  se relèvent en caractéristique 0 pour  $g = 2$  ou 3. Nous utilisons des résultats de Shepherd-Barron [SB06] ainsi que des théorèmes d'annulation de la cohomologie cohérente valables en caractéristique  $p$  ([DI87] et [EV92]).



# CHAPITRE 1

## VARIÉTÉS ABÉLIENNES À RÉDUCTION SEMI-STABLE ET 1-MOTIFS

Dans ce chapitre, nous définissons les structures de niveau parahoriques sur les 1-motifs. Nous montrons que les champs qui paramètrent ces objets sont algébriques, et les décrivons explicitement.

### 1.1. Schémas semi-abéliens

Soit  $S$  un champ algébrique. Nous rappelons la définition et les propriétés de base des schémas semi-abéliens sur  $S$ .

**Définition 1.1.1.** — Un schéma semi-abélien  $G \rightarrow S$  est un schéma en groupes lisse, séparé, à fibres géométriquement connexes, tel que pour tout  $s \in S$ , la fibre  $G_s$  soit extension d'une variété abélienne  $A_s$  par un tore  $T_s$ .

**Théorème 1.1.2** ([FC90], prop. I.2.7). — Soient  $S$  un champ algébrique noëthérien normal,  $U$  un ouvert dense de  $S$ , et  $G$  et  $G'$  deux schémas semi-abéliens sur  $S$ . Le morphisme de restriction suivant induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_S(G, G') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_U(G_U, G'_U).$$

Soient  $S$  un champ algébrique noëthérien et  $G \rightarrow S$  un schéma semi-abélien. Pour tout  $s \in S$ , le tore  $T_s$  définit un faisceau étale en  $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang fini sur  $s$  en posant

$$\underline{X}_s = \underline{\mathrm{Hom}}_s(T_s, \mathbb{G}_m).$$

Le théorème suivant montre que ces constructions se recollent.

**Théorème 1.1.3** ([FC90], th. I.2.10). — Il existe un unique faisceau étale constructible  $\underline{X}$  sur  $S$  tel que pour tout point  $s$  de  $S$ , on ait  $\underline{X} \times_S s = \underline{X}_s$ .

On dit que  $G$  est de rang torique constant si le faisceau étale  $\underline{X}$  est localement constant sur  $S$ .

**Proposition 1.1.4** ([FC90], **coro. I.2.11**). — Soient  $S$  un schéma noethérien et  $G \rightarrow S$  un schéma semi-abélien de rang torique constant. Il existe un tore  $T \rightarrow S$ , un schéma abélien  $A \rightarrow S$  et une manière d'écrire  $G$  comme extension sur  $S$

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Dans la suite de cette thèse, les schémas semi-abéliens de rang torique constant seront notés avec un *tilde*, comme par exemple  $\tilde{G}$ . Les classes d'isomorphismes d'extensions

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

sont paramétrées par  $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1(A, T)$ , qui est égal à  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(X, A^t)$  par la formule de Barsotti-Weil.

## 1.2. Les 1-motifs

On se donne un champ algébrique  $S$  et l'on note  $\mathcal{C}_S^b$  la catégorie des complexes bornés de faisceaux *fppf* en groupes abéliens sur  $S$  et  $\mathcal{D}_S^b$  la catégorie dérivée associée. On dit qu'un faisceau étale sur  $S$  est un *réseau* s'il est localement constant à valeurs dans un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini.

**Définition 1.2.1** ([Del74], **déf. 10.1.1**). — Un 1-motif  $M \rightarrow S$  est la donnée d'un schéma semi-abélien de rang torique constant  $\tilde{G} \rightarrow S$ , d'un réseau  $Y \rightarrow S$  et d'un complexe de  $\mathcal{C}_S^b$  concentré en degrés  $-1$  et  $0$

$$M = [Y \rightarrow \tilde{G}].$$

**Remarque 1.2.2**. — Comme tous les quasi-automorphismes de ce complexe sont des automorphismes ([Ray94], 10.2.14), on peut indifféremment considérer  $M$  comme un objet de  $\mathcal{C}_S^b$  ou de  $\mathcal{D}_S^b$ .

On note  $\mathrm{Mot}_S$  la catégorie des 1-motifs sur  $S$ . Le *genre* d'un 1-motif  $M$  est l'entier

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(Y) + \dim_S \tilde{G}.$$

Soit  $0 \rightarrow T \rightarrow \tilde{G} \rightarrow A \rightarrow 0$  l'extension qui définit  $\tilde{G}$  sur  $S$ . Le 1-motif  $M$  est muni d'une filtration croissante à trois crans définie par

$$W_1(M) = [0 \rightarrow T] \subset W_2(M) = [0 \rightarrow \tilde{G}] \subset W_3(M) = M.$$

Cette filtration vérifie

$$Gr_1^W(M) = [0 \rightarrow T], Gr_2^W(M) = [0 \rightarrow A] \text{ et } Gr_3^W(M) = [Y \rightarrow 0].$$

Ces gradués sont appelés respectivement *multiplicatif*, *abélien*, *étale*, et  $W_2$  est appelé la partie *semi-abélienne* de  $M$ .



**1.2.3. Dualité, isogénie et polarisation.** — Dans ce paragraphe, on définit un foncteur de dualité  $M \mapsto M^t$  qui étend le foncteur  $A \mapsto A^t = \underline{\text{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m)$  défini sur les schémas abéliens, le foncteur  $T \mapsto \underline{\text{Hom}}(T, \mathbb{G}_m)$  défini sur les tores et le foncteur  $X \mapsto \underline{\text{Hom}}(X, \mathbb{G}_m)$  défini sur les réseaux.

**Proposition 1.2.3.1** ([Del74], 10.2.11). — Soit  $M \rightarrow S$  un 1-motif. Le complexe

$$\tau_{\leq 0} \underline{\text{RHom}}_S(M, \mathbb{G}_m[1])$$

de  $\mathcal{D}_S^b$  est concentré en degrés  $-1$  et  $0$  et admet un représentant canonique dans  $\mathcal{C}_S^b$  qui est un 1-motif.

On note  $M^t$  ce 1-motif, qui dépend fonctoriellement de  $M$ . Comme les schémas abéliens d'une part et les tores et les  $\mathbb{Z}$ -modules d'autre part vérifient la propriété de bidualité, on peut voir que les 1-motifs  $M$  et  $(M^t)^t$  sont canoniquement isomorphes. On note  $A, T, \tilde{G}, Y$  les différents constituants de  $M$ , on note  $X = \underline{\text{Hom}}(T, \mathbb{G}_m)$  et l'on note  $T^t = \underline{\text{Hom}}(Y, \mathbb{G}_m)$ . On a

$$[0 \rightarrow A]^t = [0 \rightarrow A^t], \quad [0 \rightarrow T]^t = [X \rightarrow 0],$$

$$[Y \rightarrow 0]^t = [0 \rightarrow T^t] \text{ et } [0 \rightarrow \tilde{G}]^t = [X \xrightarrow{c} A^t]$$

où  $c$  est l'image de l'élément de  $\underline{\text{Ext}}^1(A, T)$  correspondant à la classe d'isomorphisme de  $\tilde{G}$  par l'isomorphisme  $\underline{\text{Ext}}^1(A, T) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(X, A^t)$ .

Soit  $\lambda : M_1 \rightarrow M_2$  un morphisme entre deux 1-motifs sur  $S$ . On pose  $\lambda_m = Gr_1^W(\lambda)$ , on pose  $\lambda_{\text{ab}} = Gr_2^W(\lambda)$  et l'on pose  $\lambda_{\text{et}} = Gr_3^W(\lambda)$ .

**Définition 1.2.3.2.** — On dit que  $\lambda$  est une isogénie si  $\lambda_m$  et  $\lambda_{\text{ab}}$  sont respectivement des isogénies de tores et de variétés abéliennes, et si  $\lambda_{\text{et}}$  est une injection à conoyau fini.

L'existence d'une isogénie entre  $M_1$  et  $M_2$  implique que ces derniers ont même rangs torique, abélien et étale. Notons que le dual d'une isogénie est une isogénie. Soit  $\lambda : M \rightarrow M^t$  une isogénie.

**Définition 1.2.3.3.** — On dit que  $\lambda$  est une polarisation si  $\lambda_{\text{ab}}$  est une polarisation du gradué abélien et si  $\lambda_m^t = \lambda_{\text{et}}$ .

Une polarisation est *principale* si c'est un isomorphisme. Par définition, le degré d'une polarisation est l'entier

$$\deg(\lambda) = \deg(\lambda_{\text{ab}}) \deg(\lambda_m)^2.$$

Si  $M$  est polarisé, son rang torique et son rang étale sont égaux.

**1.2.4. Noyau d'une isogénie.** — Soit  $f : M \longrightarrow M'$  une isogénie entre 1-motifs sur  $S$ . On voit  $f$  comme un morphisme de  $\mathcal{C}_S^b$ , et l'on note  $\text{Ker}(f)$  le  $H^{-1}$  du cône de

$$M \xrightarrow{f} M' .$$

Il est représentable par un groupe fini et plat sur  $S$  appelé *noyau* de  $f$ , et est muni d'une structure d'extension panachée dont les gradués sont

$$\begin{aligned} Gr_0^W(\text{Ker}(f)) &= \text{Ker}(f_m) , \\ Gr_1^W(\text{Ker}(f)) &= \text{Ker}(f_{\text{ab}}) , \\ Gr_2^W(\text{Ker}(f)) &= \text{Coker}(f_{\text{et}}) . \end{aligned}$$

Le dual de Cartier de  $\text{Ker}(f)$  est  $\text{Ker}(f^t)$ . Si  $f : M \rightarrow M$  est la multiplication par un entier  $n$ , on pose  $M[n] = \text{Ker}(f)$ . Si  $T$ ,  $A$  et  $Y$  sont les constituants de  $M$ , les gradués de  $M[n]$  sont  $T[n]$ ,  $A[n]$  et  $Y/nY$ . Comme  $M[n]$  et  $M^t[n]$  sont duaux de Cartier, il existe une application bilinéaire canonique  $M[n] \otimes M[n] \rightarrow \mu_n$ . Une polarisation principale de  $M$  induit un accouplement alterné non dégénéré  $M[n] \times M^t[n] \rightarrow \mu_n$ .

Soit  $M$  un 1-motif et  $n$  un entier. On obtient une correspondance bijective entre l'ensemble des isogénies  $f : M \rightarrow M'$  telles que  $\text{Ker}(f) \subset M[n]$  et l'ensemble des sous-schémas en groupes  $H \subset M[n]$  en associant à  $f$  le sous-groupe  $\text{Ker}(f)$  et à  $H$  l'isogénie naturelle de  $M$  vers le cône de  $H[0] \rightarrow M$ , qui est bien un 1-motif.

**1.2.5. Structures de niveau parahoriques sur les 1-motifs.** — Dans le reste de cette thèse, on fixe un nombre premier  $p$ , deux entiers  $s \leq g$  et un ensemble ordonné non vide

$$\mathcal{D} = \{d_1 < d_2 < \cdots < d_s\} \subset \{1, \cdots, g\} .$$

Soient  $S$  un champ algébrique et  $M$  un 1-motif principalement polarisé de genre  $g$  sur  $S$ .

**Définition 1.2.5.1.** — Une structure de niveau parahorique sur  $M$  de type  $\mathcal{D}$  en  $p$  est la donnée d'un drapeau de sous-groupes finis et plats sur  $S$

$$H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_s \subset M[p]$$

tel que  $H_i$  soit de rang  $p^{d_i}$  pour  $i \leq s$  et que  $H_s$  soit totalement isotrope pour l'accouplement symplectique sur  $M[p]$  provenant de la polarisation.

On démontre la proposition suivante en utilisant la correspondance entre sous-groupes et isogénies et en recopiant la preuve de l'énoncé analogue pour les schémas abéliens ([Jo93], proposition 1.7).

**Proposition 1.2.5.2.** — *Les deux catégories suivantes sont équivalentes :*

- la catégorie des 1-motifs  $M$  principalement polarisés de genre  $g$  munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ ,

– la catégorie des diagrammes commutatifs d'isogénies entre 1-motifs de genre  $g$

$$\begin{array}{ccccccc}
 M = M_0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_{s-1} & \longrightarrow & M_s \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \lambda_s \\
 M^t = M_0^t & \longleftarrow & M_1^t & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & M_{s-1}^t & \longleftarrow & M_s^t \\
 \downarrow \lambda'_0 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 M = M_0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_{s-1} & \longrightarrow & M_s
 \end{array}$$

où la ligne horizontale médiane est duale de la ligne horizontale supérieure, la ligne horizontale inférieure est égale à la ligne horizontale supérieure, la composée  $M_i \rightarrow M_i^t \rightarrow M_i$  est égale à la multiplication par  $p$  pour  $i \leq s$ , l'isogénie  $\lambda_s$  est une polarisation,  $\lambda'_0$  est l'inverse d'une polarisation principale et le degré de  $M \rightarrow M_i$  est égal à  $p^{d_i}$  pour  $i \leq s$ .

**1.2.6. Position relative.** — Soit  $H_\bullet \subset M[p]$  une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$ . Dans ce paragraphe, on lui associe un invariant discret  $w_{H_\bullet}$  paramétrant la position relative de  $H_\bullet$  et de la filtration de l'extension panachée  $M[p]$ . Soit  $V = \bigoplus_{j=1}^{2g} \mathbb{F}_p \cdot x_j$  un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension  $2g$  muni d'une base  $(x_j)$ . Considérons la matrice de taille  $2g \times 2g$  suivante donnée par blocs  $g \times g$  :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J' \\ -J' & 0 \end{pmatrix},$$

où  $J'$  est la matrice anti-diagonale dont les coefficients non nuls sont égaux à 1. On définit  $\mathrm{GSp}_{2g}$  comme le schéma en groupes sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$  dont les  $R$ -points sont

$$\mathrm{GSp}_{2g}(R) = \{(\gamma, \nu) \in \mathrm{GL}_{2g}(R) \times \mathbb{G}_m(R) \mid \gamma^t J \gamma = \nu J\}.$$

Pour tout entier  $r \leq g$ , on définit un sous-espace totalement isotrope  $W_1$  de  $V$  par la formule :

$$W_1 = \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{F}_p \cdot x_j.$$

On pose  $W_2 = W_1^\perp$ ,  $W_3 = V$  et l'on obtient un drapeau à trois crans noté  $W_\bullet$ ; on lui associe le sous-groupe parabolique  $P = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GSp}_{2g}}(W_\bullet)$  de  $\mathrm{GSp}_{2g}$ . De même, on définit un drapeau « standard » isotrope à  $s$  crans  $V_\bullet^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}}$  par :

$$V_i^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}} = \bigoplus_{j=1}^{d_i} \mathbb{F}_p \cdot x_j$$

pour  $1 \leq i \leq s$ . On lui associe le sous-groupe parabolique

$$P_{\mathcal{D}} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GSp}_{2g}}(V_\bullet^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}})$$

de  $\mathrm{GSp}_{2g}$ . On pose

$$\mathcal{W} = P(\mathbb{F}_p) \backslash \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_p) / P_{\mathcal{D}}(\mathbb{F}_p).$$

Ce double quotient paramètre les positions relatives de deux drapeaux de  $V$ . Si  $L$  et  $L_{\mathcal{D}}$  sont des sous-groupes de Levi de  $P$  et  $P_{\mathcal{D}}$ , et si  $W_{\mathrm{GSp}_{2g}}$ ,  $W_L$  et  $W_{L_{\mathcal{D}}}$  désignent les groupes de Weyl de  $\mathrm{GSp}_{2g}$ , de  $L$  et de  $L_{\mathcal{D}}$ , la décomposition de Bruhat montre que  $\mathcal{W}$  est un ensemble fini et que

$$\mathcal{W} = W_L \backslash W_{\mathrm{GSp}_{2g}} / W_{L_{\mathcal{D}}}.$$

Pour tout  $w \in \mathcal{W}$  et  $1 \leq i \leq s$ , on pose

$$\begin{aligned} m_i &= \dim_{\mathbb{F}_p} \left( (w \cdot V_i^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}}) \cap \mathrm{Gr}_1(W_{\bullet}) \right) \\ a_i &= \dim_{\mathbb{F}_p} \left( \mathrm{Im} \left( w \cdot V_i^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}} \cap W_2 \rightarrow \mathrm{Gr}_2(W_{\bullet}) \right) \right) \\ e_i &= \dim_{\mathbb{F}_p} \left( \mathrm{Im} \left( w \cdot V_i^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}} \rightarrow \mathrm{Gr}_3(W_{\bullet}) \right) \right). \end{aligned}$$

Ces nombres déterminent  $w$  de manière unique.

Soient  $S$  un champ algébrique connexe,  $M$  un 1-motif sur  $S$ , principalement polarisé, de rang torique  $r$ , de genre  $g$  et  $H_{\bullet}$  une structure parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . Nous avons vu que la structure d'extension panachée définit un drapeau sur  $M[p]$ , dont les gradués  $\mathrm{Gr}_1^W$ ,  $\mathrm{Gr}_2^W$  et  $\mathrm{Gr}_3^W$  sont respectivement appelés multiplicatif, abélien et étale. Pour tout  $1 \leq i \leq s$ , on pose

$$\begin{aligned} m_i &= \log_p \mathrm{rg} (H_i \cap \mathrm{Gr}_1^W) \\ a_i &= \log_p \mathrm{rg} (\mathrm{Im}(H_i \cap W_2(M) \rightarrow \mathrm{Gr}_2^W)) \\ e_i &= \log_p \mathrm{rg} (\mathrm{Im}(H_i \rightarrow \mathrm{Gr}_3^W)) \end{aligned}$$

On a  $m_i + a_i + e_i = d_i$  et les suites  $(m_i)_i$ ,  $(a_i)_i$  et  $(e_i)_i$  sont croissantes. On définit un drapeau isotrope à  $s$  crans  $V_{\bullet}^{H_{\bullet}}$  de  $V$  en posant

$$V_i^{H_{\bullet}} = \left( \bigoplus_{j=1}^{m_i} \mathbb{F}_p \cdot x_j \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=r+1}^{r+a_i} \mathbb{F}_p \cdot x_j \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=2g-r+1}^{2g-r+e_i} \mathbb{F}_p \cdot x_j \right)$$

pour  $1 \leq i \leq s$ . Par convention, si  $m_i = 0$  la première somme directe est nulle; il en est de même avec  $a_i$  et  $e_i$ . Il existe un élément (non unique)  $\gamma \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{F}_p)$  qui conjugue les drapeaux  $V_{\bullet}^{H_{\bullet}}$  et  $V_{\bullet}^{\mathrm{Std}_{\mathcal{D}}}$ . Son image dans  $\mathcal{W}$  est bien déterminée et on la note  $w_{H_{\bullet}}$ ; c'est l'invariant discret associé à la structure de niveau parahorique  $H_{\bullet} \subset M[p]$  de type  $\mathcal{D}$ . Inversement, si  $M \rightarrow S$  est fixé on voit aisément que pour tout  $w \in \mathcal{W}$ , il existe une structure de niveau  $H_{\bullet} \subset M[p]$  telle que  $w_{H_{\bullet}} = w$ .

### 1.3. Construction de Mumford

Dans ce paragraphe, nous définissons la notion de *1-motif de Mumford*, version plus synthétique des *données de dégénérescence* du chapitre 3 de [FC90]. On note  $\text{Ouv}$  la catégorie dont les objets sont les diagrammes  $(U \hookrightarrow S)$  où  $S$  est un schéma normal et  $U$  un sous-schéma ouvert dense, et dont les flèches sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & S' . \end{array}$$

Soit  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de  $\text{Ouv}$ .

**Définition 1.3.1.** — Un 1-motif de Mumford  $M$  sur  $(U \hookrightarrow S)$  est un triplet  $(\tilde{G}, Y, M_U)$  où

- $\tilde{G}$  est un schéma semi-abélien de rang torique constant sur  $S$ ,
- $Y$  est un réseau sur  $S$ ,
- $M_U = [Y_U \rightarrow \tilde{G}_U]$  est un 1-motif sur  $U$ , où  $Y_U$  et  $\tilde{G}_U$  désignent les restrictions de  $Y$  et de  $\tilde{G}$  à  $U$ .

**Remarque 1.3.2.** — D’après [SGA 3 x 5.16], la partie torique de  $\tilde{G}$  est isotriviale sur le schéma normal  $S$ .

On note  $\text{Mum}_{U,S}$  la catégorie des 1-motifs de Mumford. La restriction à  $U$  induit un foncteur  $\text{Mum}_{U,S} \rightarrow \text{Mot}_U$  qui est pleinement fidèle d’après le théorème 1.1.2. Soit  $\lambda : M \rightarrow M'$  un morphisme de 1-motifs de Mumford. On dit que  $\lambda$  est une *isogénie* si  $\lambda_U$  est une isogénie de 1-motifs. On définit le *dual*  $M^t$  de  $M$  comme l’unique 1-motif de Mumford qui étend le 1-motif  $(M_U)^t$ ; son existence résulte de la construction de  $M^t$ . Une *polarisation*  $\lambda : M \rightarrow M^t$  est une isogénie telle que  $\lambda_U$  soit une polarisation du 1-motif  $M_U$ . On note  $\text{Mum}_{U,S,\text{pol}}$  la catégorie des 1-motifs de Mumford polarisés sur  $(U \hookrightarrow S)$ . Les flèches de cette catégorie sont les morphismes de 1-motifs de Mumford qui respectent les polarisations; ce sont donc des isogénies.

Soit  $M$  un 1-motif de Mumford sur  $(U \hookrightarrow S)$ . Notons  $Y, T, A, \tilde{G}$  les schémas en groupes qui lui sont associés et  $X = \underline{\text{Hom}}(T, \mathbb{G}_m)$ . Notons  $\mathcal{Y}$  le plus grand sous-faisceau constructible de  $Y$  muni d’une flèche  $\mathcal{Y} \rightarrow \tilde{G}$  prolongeant  $Y_U \rightarrow \tilde{G}_U$ . Si  $\tilde{G}^t$  désigne la partie semi-abélienne de  $M^t$ , on note  $\mathcal{X} \subset X$  le plus grand sous-faisceau constructible de  $X$  muni d’une flèche  $\mathcal{X} \rightarrow \tilde{G}^t$  prolongeant  $X_U \rightarrow \tilde{G}_U^t$ . On pose  $\underline{X} = X/\mathcal{X}$  et  $\underline{Y} = Y/\mathcal{Y}$ ; ce sont deux faisceaux constructibles sur  $S$ . Notons  $\underline{\text{Div}}_S$  le faisceau des diviseurs de  $S$ . Nous construisons à présent une forme bilinéaire canonique

$$\underline{B} : \underline{Y} \otimes \underline{X} \longrightarrow \underline{\text{Div}}_S .$$

Supposons d'abord que  $S$  soit un trait de point générique  $U = \text{Spec}(K)$  et que les faisceaux  $X$  et  $Y$  soient constants. Comme  $A$  est le modèle de Néron de sa fibre générique, la valuation de  $K$  induit des isomorphismes

$$\tilde{G}(K)/\tilde{G}(R) \simeq T(K)/T(R) \simeq \text{Hom}(X, \mathbb{Z}).$$

Le plongement  $Y \hookrightarrow \tilde{G}(K)$  induit une forme bilinéaire  $Y \otimes X \rightarrow \mathbb{Z}$  qui se factorise en  $\underline{Y} \otimes \underline{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  et ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $M$ . La construction de  $\underline{B}$  dans le cas général s'en déduit par localisation le long de chaque diviseur et descente étale.

**Remarque 1.3.3.** — La forme  $\underline{B}$  prend ses valeurs dans le sous-faisceau des diviseurs de  $S$  dont le support est disjoint de  $U$ . Si  $M$  est polarisé,  $\underline{B}$  vérifie la condition de symétrie suivante vis-à-vis de la partie étale  $\phi : Y \rightarrow X$  de la polarisation : pour toutes sections locales  $y$  et  $y'$  de  $Y$ , on a

$$\underline{B}(y, \phi(y')) = \underline{B}(y', \phi(y)).$$

Si la polarisation est principale,  $\underline{B}$  induit une forme bilinéaire symétrique sur  $\underline{Y}$  lorsque l'on identifie  $X$  et  $Y$  à l'aide de  $\phi$ .

**1.3.4. Construction de Mumford généralisée.** — Dans cette partie, nous traduisons des résultats du chapitre 3 de [FC90] dans le langage des 1-motifs de Mumford. Introduisons la catégorie  $\text{OuvComp}$  dont les objets sont les diagrammes  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$ , où  $S$  est un schéma affine normal excellent, où  $S_0$  est un sous-schéma fermé défini par un idéal réduit tels que  $S$  soit  $S_0$ -complet, et où  $U$  est un sous-schéma ouvert dense de  $S$  disjoint de  $S_0$ . Les flèches de cette catégorie sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & S & \longleftarrow & S_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & S' & \longleftarrow & S'_0 \end{array}$$

Introduisons maintenant une notion de positivité sur les 1-motifs de Mumford polarisés. Soient  $M$  un 1-motif de Mumford polarisé sur  $(U \hookrightarrow S)$  et  $\phi : Y \rightarrow X$  l'injection à conoyau fini associée.

**Définition 1.3.4.1.** —  $M$  est positif relativement à  $S_0$  si pour toute section locale non nulle  $y$  de  $Y$ , le diviseur  $\underline{B}(y, \phi(y))$  est effectif et son support contient  $S_0$ .

La positivité de  $M$  implique que  $\mathcal{Y}_{S_0} = \mathcal{X}_{S_0} = 0$  et que  $M_U$  est un 1-motif cohomologiquement concentré en degré 0, *i.e.*  $H^{-1}(M_U) = 0$  et  $Y_U$  s'injecte dans  $\tilde{G}_U$ . On note

$$\text{Mum}_{U,S,S_0, pol, +}$$

la catégorie des 1-motifs de Mumford polarisés sur  $(U \hookrightarrow S)$  positifs relativement à  $S_0$ . La proposition 1.4.1.1 montrera qu'elle est équivalente à la catégorie  $DD_{pol}$  définie dans le paragraphe III.2 de [FC90]. On note  $\text{Deg}_{U,S,S_0, pol}$  la catégorie des schémas semi-abéliens

sur  $S$ , abéliens polarisés sur  $U$  et de rang torique constant sur  $S_0$ . On demande en outre que la partie torique de  $G_{S_0}$  soit isotriviale sur  $S_0$ . Les flèches sont les morphismes de schémas semi-abéliens qui respectent la polarisation ; ce sont donc des isogénies.

**Remarque 1.3.4.2.** — On ne trouve pas la condition d’isotrivialité dans [FC90, ch. II]. Comme le remarque Lan [Lan08, 3.3.3.1], elle est pourtant nécessaire pour algébriser l’extension de Raynaud de  $G$  (cf. aussi [SGA 7 IX 7.2.1] et [SGA 3 X 3.2]). De plus, cette condition permet d’éliminer l’hypothèse [FC90, II.3.a].

Le but de la construction de Mumford est d’exhiber un foncteur

$$M_{pol} : \mathbf{Mum}_{U,S,S_0,pol,+} \longrightarrow \mathbf{Deg}_{U,S,S_0,pol}$$

tel que si  $S$  est trait complet de point fermé  $S_0$  et de point générique  $U = \text{Spec}(K)$ , on ait ensemblistement

$$M_{pol}(M)(K) = H^0(M(K)).$$

Le théorème suivant est dû à Mumford, et à Faltings et Chai.

**Théorème 1.3.4.3** ([FC90], **coro. 7.2, 7.3 et 7.5**). — *Il existe un foncteur canonique explicite*

$$M_{pol} : \mathbf{Mum}_{U,S,S_0,pol,+} \longrightarrow \mathbf{Deg}_{U,S,S_0,pol}.$$

*Il réalise une équivalence de catégories. Soit  $M = (\tilde{G}, Y, M_U = [Y_U \rightarrow \tilde{G}_U])$ . Si l’on note  $G = M_{pol}(M)$  et si  $\underline{X}(G)$  désigne le faisceau constructible associé à  $G$  par le théorème 1.1.3, et  $\underline{X}$  le faisceau constructible associé à  $M$ , on dispose d’isomorphismes fonctoriels canoniques*

$$\begin{aligned} G_{S_0} &\xrightarrow{\sim} \tilde{G}_{S_0}, \\ \underline{X}(G) &\xrightarrow{\sim} \underline{X}, \\ G_U[p] &\xrightarrow{\sim} M_U[p]. \end{aligned}$$

*En particulier,  $G_U[p]$  est muni d’une structure d’extension panachée.*

**1.3.5. Globalisation de la forme bilinéaire symétrique.** — Soient  $S$  un champ algébrique normal excellent,  $U$  un ouvert dense de  $S$  et  $G$  un schéma semi-abélien sur  $S$  abélien polarisé sur  $U$ . Notons  $K_U$  le noyau de la polarisation de  $G_U$  et  $K$  son adhérence dans  $G$ . Cette adhérence est un schéma en groupes quasi-fini et plat sur  $S$ . Dans [FC90, II.2], Faltings et Chai montrent que le quotient  $G/K$  est représentable par un schéma semi-abélien noté  $G^t \rightarrow S$ . Comme  $G_U^t$  est indépendant du choix de la polarisation, le théorème 1.1.2 montre que  $G^t$  ne dépend pas du choix de la polarisation de  $G_U$ .

Si  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de la catégorie  $\mathbf{OuvComp}$ , la construction de Mumford est compatible à la dualité dans le sens où si  $M$  est objet de  $\mathbf{Mum}_{U,S,S_0,pol,+}$  tel que  $G = M_{pol}(M)$ , on a  $G^t \xrightarrow{\sim} M_{pol}(M^t)$ . Dans la proposition suivante, on se place à nouveau dans le cas où  $S$  est un champ algébrique normal excellent quelconque et  $U$  est un ouvert

de  $S$ . Cette proposition permet d'associer à  $G$  un invariant algébrique qui sera utile pour exprimer les propriétés modulaires à la frontière des compactifications.

**Proposition 1.3.5.1** ([FC90], th. III.10.1). — *Il existe une unique forme bilinéaire*

$$\underline{B}(G) : \underline{X}(G^t) \times \underline{X}(G) \longrightarrow \underline{\text{Div}}_S$$

telle qu'après tout changement de base par un anneau local intègre complet  $S' \rightarrow S$  on ait

$$\underline{B}(G) = M_{pol}(\underline{B}(M_{pol}^{-1}(G))) .$$

D'après le théorème 1.1.2, la polarisation  $G_\eta \rightarrow G_\eta^t$  s'étend en un morphisme  $G \rightarrow G^t$  qui induit une flèche  $\phi : \underline{X}(G^t) \rightarrow \underline{X}(G)$ . La forme bilinéaire  $\underline{B}$  vérifie la relation

$$\underline{B}(y, \phi(y')) = \underline{B}(y', \phi(y))$$

pour toutes sections locales  $y$  et  $y'$  de  $\underline{X}(G^t)$  et la positivité de  $M_{pol}^{-1}(G)$  implique que  $\underline{B}(y, \phi(y))$  est un diviseur effectif dont le support est le lieu de non annulation de  $y$ .

**1.3.6. Application de Kodaira-Spencer.** — Soient  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de  $\text{OuvComp}$  et  $G$  un objet de  $\text{Deg}_{U,S,S_0,pol}$ . Notons  $G^t$  le dual de  $G$  défini dans le paragraphe précédent,  $\lambda : G \rightarrow G^t$  l'extension sur  $S$  de la polarisation sur  $U$ . Notons également  $e_G : S \rightarrow G$  et  $e_{G^t} : S \rightarrow G^t$  les sections neutres,  $\Omega_G = e_G^* \Omega_{G/S}$  le faisceau des 1-formes différentielles invariantes sur  $G$ , et  $\Omega_{G^t} = e_{G^t}^* \Omega_{G^t/S}$ . On suppose que  $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  est formellement lisse et que le complémentaire  $\partial S$  de  $U$  dans  $S$  est un diviseur à croisements normaux. La proposition suivante montre l'existence d'un morphisme qui sera la clé de voûte de l'étape de recollement dans la construction des compactifications.

**Proposition 1.3.6.1** ([FC90], III.9, p. 84). — *Il existe une flèche canonique*

$$K_{M/S} : \Omega_G \otimes \Omega_{G^t} \longrightarrow \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1(\log \partial S)$$

appelée flèche de Kodaira-Spencer. Elle se factorise en

$$K_{M/S} : \text{Coker}(\Omega_{G^t} \otimes \Omega_{G^t} \longrightarrow \Omega_G \otimes \Omega_{G^t}) \longrightarrow \Omega_{S/\mathbb{Z}}^1(\log \partial S) ,$$

où la flèche  $\Omega_{G^t} \otimes \Omega_{G^t} \longrightarrow \Omega_G \otimes \Omega_{G^t}$  envoie  $x \otimes y$  sur  $\lambda^*(x) \otimes y - \lambda^*(y) \otimes x$ .

La flèche de Kodaira-Spencer est construite à l'aide des 1-motifs obtenus par le foncteur quasi-inverse à la construction de Mumford.

**1.3.7. Structure de niveau parahorique.** — Pour tout objet  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  de  $\text{OuvComp}$ , notons  $\text{Deg}_{U,S,S_0,pol,0}$  la catégorie des schémas semi-abéliens  $G$  sur  $S$  de partie torique isotriviale sur  $S_0$  dont la restriction à  $U$  est un schéma abélien polarisé muni d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . De même, notons  $\text{Mum}_{U,S,S_0,pol,+,0}$  la catégorie des 1-motifs de Mumford polarisés positifs dont le 1-motif sous-jacent sur  $U$  est muni d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . La proposition suivante découle du théorème 1.3.4.3 par fonctorialité de la construction de Mumford.



**Proposition 1.3.7.1.** — *Le foncteur  $M_{pol}$  induit une équivalence de catégories*

$$M_{pol} : \text{Mum}_{U,S,S_0,pol,+0} \longrightarrow \text{Deg}_{U,S,S_0,pol,0}.$$

Cette proposition justifie l'étude des espaces de modules de 1-motifs polarisés munis de structures de niveau parahorique.

#### 1.4. Espaces de modules de 1-motifs

Dans ce paragraphe, on montre que les champs de modules de 1-motifs principalement polarisés qui sont munis de structures de niveau parahorique sont algébriques, et on les décrit explicitement. Commençons par traiter le cas d'une structure de niveau triviale.

**1.4.1. Description symétrique d'un 1-motif.** — Pour tout schéma abélien  $A$ , on note  $\mathcal{P}_A$  le fibré de Poincaré sur  $A \times A^t$ .

**Proposition 1.4.1.1** ([Del74], prop. 10.2.14). — *La catégorie des 1-motifs est équivalente à la catégorie dont les objets sont les familles formées*

- d'un schéma abélien  $A$ ,
- de deux réseaux  $X$  et  $Y$ ,
- de deux morphismes  $c : X \rightarrow A^t$  et  $c^t : Y \rightarrow A$ ,
- d'une trivialisatation de la  $\mathbb{G}_m$ -biextension  $(c^t \times c)^* \mathcal{P}_A$  sur  $Y \times X$ .

*La catégorie des 1-motifs principalement polarisés est équivalente à la catégorie dont les objets sont les familles formées*

- d'un schéma abélien  $A$  principalement polarisé par  $\lambda_A$ ,
- d'un réseau  $X$ ,
- d'un morphisme  $c : X \rightarrow A$ ,
- d'une trivialisatation symétrique de la  $\mathbb{G}_m$ -biextension symétrique  $(c \times c)^* \mathcal{P}_A$ , où  $\mathcal{P}_A$  est vu comme une  $\mathbb{G}_m$ -biextension sur  $A \times A$  via  $\lambda_A$ .

**1.4.2. Espaces de modules.** — Soient  $r \leq g$  un entier et  $\mathbb{X}$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $r$ . On pose  $\mathbb{T} = \underline{\text{Hom}}(\mathbb{X}, \mathbb{G}_m)$ . On note  $\mathcal{A}_{g-r}$  le champ des schémas abéliens principalement polarisés de genre  $g - r$  et  $A_{g-r} \rightarrow \mathcal{A}_{g-r}$  le schéma abélien universel.

**Définition 1.4.3.** — Un 1-motif principalement polarisé rigidifié par  $\mathbb{X}$  est la donnée d'une famille  $(M, \lambda, \text{Gr}_1^W(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}, \text{Gr}_3^W(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T})$ , où  $M$  est un 1-motif,  $\lambda$  une polarisation principale de  $M$  et où la composée de  $\text{Gr}_1^W(\lambda)$  avec les isomorphismes  $\text{Gr}_1^W(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}$  et  $\text{Gr}_1^W(M^t) = \underline{\text{Hom}}(\text{Gr}_3^W(M), \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}$  est l'identité de  $\mathbb{X}$ .

Comme le groupe d'automorphismes de la partie abélienne polarisée  $\text{Gr}_2^W(M)$  est fini, le groupe d'automorphismes d'un 1-motif principalement polarisé rigidifié est également fini.

On note  $\mathcal{M}$  le champ des 1-motifs principalement polarisés de genre  $g$  qui sont rigidifiés par  $\mathbb{X}$ .

**Proposition 1.4.4.** — *Le champ  $\mathcal{M}$  est algébrique et se dévise en*

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{X}, A_{g-r}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}),$$

où  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$  est un torseur sous le tore  $E = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}^2(\mathbb{X}), \mathbb{G}_m)$ .

Nous donnerons la classe d'isomorphisme de ce torseur au cours de la démonstration.

*Démonstration.* — Il suffit de montrer la deuxième assertion. On utilise la proposition 1.4.1.1 en reprenant les mêmes notations. La flèche  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$  envoie  $M$  sur  $c : \mathbb{X} \rightarrow A_{g-r}$  et  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$  est l'espace de modules relatif des trivialisations de la biextension symétrique  $(c \times c)^* \mathcal{P}_{A_{g-r}}$ . La classe d'isomorphisme de cette biextension définit un élément de

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{B}}^1(\mathrm{Sym}^2(\mathbb{X}), \mathbb{G}_m) = \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{B}}^1(\mathbb{Z}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}^2(\mathbb{X}), \mathbb{G}_m)),$$

donc une classe d'isomorphisme de  $E$ -torseurs sur  $\mathcal{B}$ , qui est celle de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

**1.4.5. Description symétrique d'une structure de niveau.** — Donnons une variante de la proposition 1.4.1.1 pour les 1-motifs munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . Donnons-nous  $w \in \mathcal{W}$  et notons  $m_i, a_i$  et  $e_i$  les entiers qui lui sont associés pour  $1 \leq i \leq s$ .

**Proposition 1.4.5.1.** — *Le champ des 1-motifs principalement polarisés de genre  $g$ , de rang torique  $r$ , munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  et d'invariant  $w$  en  $p$  est équivalent au champ qui paramètre les familles formées d'un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_s \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_s \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & X_s & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 A_0^t & \longleftarrow & A_1^t & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & A_s^t & \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_s & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_s & 
 \end{array}$$

et de trivialisations  $\tau_i$  de la  $\mathbb{G}_m$ -biextension  $(Y_i \times X_i \rightarrow A_i \times A_i^t)^* \mathcal{P}_i$  sur  $Y_i \times X_i$  pour  $0 \leq i \leq s$  (où  $\mathcal{P}_i$  est la biextension de Poincaré sur  $A_i \times A_i^t$ ) telles que :

- la face avant et la face arrière du diagramme sont égales,
- les objets de la face supérieure sont des réseaux et les flèches de cette face sont des injections ;  $X_0 \rightarrow Y_0$  est un isomorphisme ; pour tout  $i \leq s$ , les composés  $Y_i \rightarrow X_i \rightarrow X_i$  sont égaux à la multiplication par  $p$  et les conoyaux des composés  $Y_0 \rightarrow Y_i$  et  $X_i \rightarrow X_0$  sont de cardinaux respectifs  $p^{e_i}$  et  $p^{m_i}$ ,
- les objets de la face inférieure sont des schémas abéliens de genre  $g-r$  et les flèches de cette face sont des isogénies ; le complexe  $A_0^t \leftarrow A_1^t \leftarrow \cdots \leftarrow A_s^t$  est le dual du complexe  $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_s$  ;  $A_0 \rightarrow A_0^t$  et  $A_s \rightarrow A_s^t$  sont des polarisations,  $A_0^t \rightarrow A_0$  est un isomorphisme ; pour tout  $i \leq s$ , la composée  $A_i \rightarrow A_i^t \rightarrow A_i$  est la multiplication par  $p$  et le degré de l'isogénie  $A_0 \rightarrow A_i$  est  $p^{a_i}$ .
- pour tout  $i \leq s$ , la trivialisations  $\tau_i$  induit une trivialisations symétrique de la biextension symétrique  $(Y_i \times Y_i \rightarrow Y_i \times X_i \rightarrow A_i \times A_i^t)^* \mathcal{P}_i$ ,
- les trivialisations  $\tau_i$  sont compatibles aux flèches de transitions  $Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ ,  $X_i \leftarrow X_{i+1}$  et  $A_i \rightarrow A_{i+1}$ .

**1.4.6. Espaces de modules avec structure de niveau parahorique.** — On pose  $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$  et l'on note  $\mathcal{M}_0$  le champ des 1-motifs de genre  $g$ , principalement polarisés et rigidifiés par  $\mathbb{Y}$ , et munis d'une structure parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . On va montrer que  $\mathcal{M}_0$  est algébrique et en donner une description explicite. On peut le décomposer en l'union disjointe

$$\mathcal{M}_0 = \coprod_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{M}_0^w,$$

où  $\mathcal{M}_0^w$  est le champ des 1-motifs munis d'une structure de niveau parahorique d'invariant  $w$  ; ce champ est ouvert et fermé dans  $\mathcal{M}_0$ . Il suffit de montrer que  $\mathcal{M}_0^w$  est algébrique pour tout  $w \in \mathcal{W}$  et de le décrire explicitement. On note  $\mathcal{B}_0^w$  le champ de modules des diagrammes commutatifs comme dans la proposition 1.4.5.1 qui sont munis d'un isomorphisme entre les deux diagrammes

$$Y_0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow Y_0 \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} \xrightarrow{\times p} \mathbb{X} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Y}.$$

On remarque que les degrés des flèches  $Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ ,  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  et  $A_i \rightarrow A_{i+1}$  sont déterminés par  $w$ .

**Proposition 1.4.6.1.** — *Le champ algébrique  $\mathcal{B}_0^w$  est un schéma en groupes propre sur une union disjointe de variétés de Siegel  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  dont le type parahorique dépend de  $w$ .*

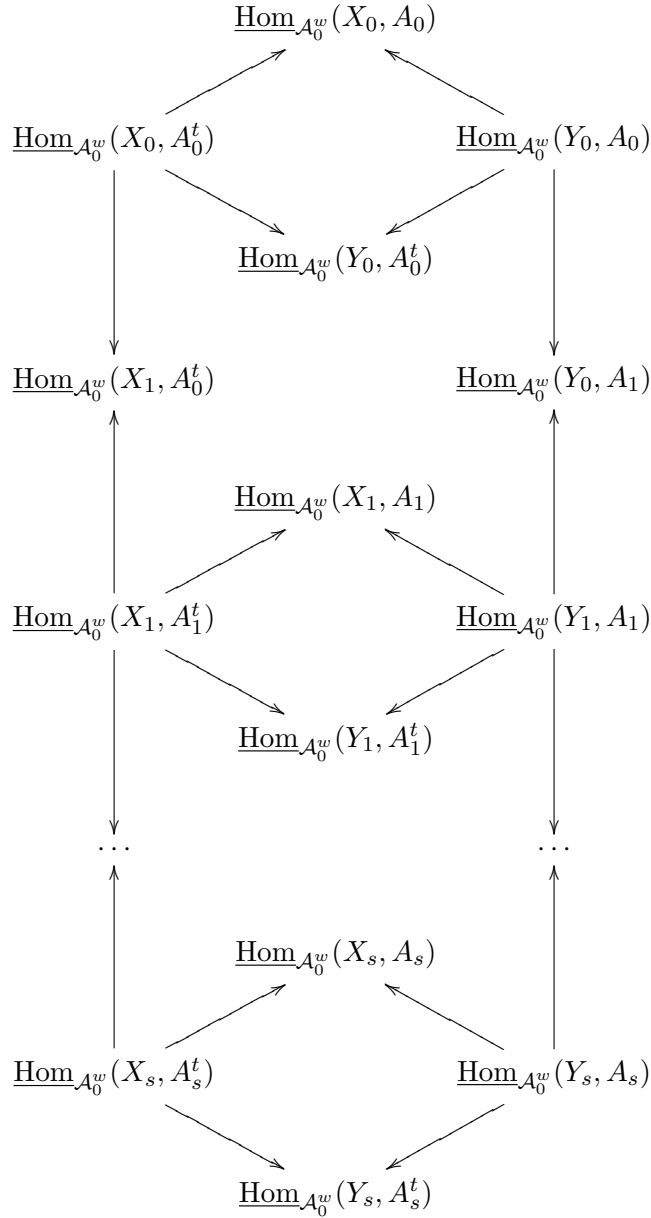
*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{A}_0^w$  le champ de modules des couples de diagrammes commutatifs ayant les mêmes propriétés que le couple formé par la face supérieure et la face inférieure

du diagramme de la proposition **1.4.5.1**. Il est algébrique et est une union disjointe de variétés de Siegel  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  de genre  $g-r$  et de type parahorique

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_g \leq g-r.$$

Le champ  $\mathcal{B}_0^w \rightarrow \mathcal{A}_0^w$  paramètre les flèches  $Y_i \rightarrow A_i$  et  $X_i \rightarrow A_i^t$  qui vérifient des conditions de commutation adéquates. Ce champ est égal à la limite projective du diagramme suivant :

(1.4.6.A)



Par conséquent, la flèche  $\mathcal{B}_0^w \rightarrow \mathcal{A}_0^w$  est représentable par un schéma en groupes propre et le champ  $\mathcal{B}_0^w$  est algébrique.  $\square$

La proposition 1.4.5.1 implique que le champ relatif  $\mathcal{M}_0^w \rightarrow \mathcal{B}_0^w$  paramètre certaines familles compatibles de trivialisations de  $\mathbb{G}_m$ -biextensions. On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 1.4.6.2.** — *La flèche  $\mathcal{M}_0^w \rightarrow \mathcal{B}_0^w$  est un torseur sous un groupe de type multiplicatif  $E_0^w$  isogène à  $E$ . En particulier, le champ  $\mathcal{M}_0^w$  est algébrique.*

L'analyse des deux dernières conditions de la proposition 1.4.5.1 montre que le groupe des caractères de  $E_0^w$  est la limite inductive du diagramme suivant :

$$(1.4.6.A) \quad \begin{array}{ccccc} X_0 \otimes X_0 & & X_1 \otimes X_1 & & X_s \otimes X_s \\ \downarrow \downarrow f & & \downarrow \downarrow f & & \downarrow \downarrow f \\ Y_0 \otimes X_0 & \longleftarrow Y_0 \otimes X_1 & \longrightarrow Y_1 \otimes X_1 & \longleftarrow \cdots & \longrightarrow Y_s \otimes X_s \\ \uparrow \uparrow f & & \uparrow \uparrow f & & \uparrow \uparrow f \\ Y_0 \otimes Y_0 & & Y_1 \otimes Y_1 & & Y_s \otimes Y_s \end{array}$$

Les flèches sont induites par celles du diagramme

$$(1.4.6.B) \quad \begin{array}{ccccccc} Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_s \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & X_s \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_s \end{array}$$

et  $\dashrightarrow$  signifie que l'on a composé la flèche correspondante avec l'isomorphisme de symétrie (« flip ») qui envoie  $a \otimes b$  sur  $b \otimes a$ .

**1.4.7. Liberté.** — Dans ce paragraphe, nous montrons que  $\mathcal{B}_0^w \rightarrow \mathcal{A}_0^w$  est un schéma abélien et que  $E_0^w$  est un tore. Ces résultats seront utilisés dans le corollaire 3.1.7.2, lui-même nécessaire pour démontrer la proposition 3.1.8.1. On se donne des symboles  $\varepsilon_k$  pour  $1 \leq k \leq r$  et l'on note  $[k, k']$  l'ensemble des entiers compris entre  $k$  et  $k'$ . Soient  $e_i, m_i$  et  $a_i$  les entiers associés à  $w \in \mathcal{W}$  pour  $0 \leq i \leq s$ . On fixe des isomorphismes  $Y_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{Z} \cdot \varepsilon_k$  et  $X_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{Z} \cdot \varepsilon_k$  pour  $0 \leq i \leq s$ , tels que

- le morphisme  $Y_0 \rightarrow Y_i$  envoie  $\varepsilon_k$  sur  $p \varepsilon_k$  si  $k \in [1, e_i]$ , et sur  $\varepsilon_k$  sinon,
- le morphisme  $X_s \rightarrow X_i$  envoie  $\varepsilon_k$  sur  $p \varepsilon_k$  si  $k \in [r - m_s + 1, r - m_i]$ , et sur  $\varepsilon_k$  sinon.

**1.4.7.1. Cas de  $\mathcal{B}_0^w$ .** — Commençons par démontrer quelques lemmes préliminaires.

**Lemme 1.4.7.1.1.** — *Soient  $B$  un schéma abélien,  $H_1, H_2, H$  et  $H'$  quatre sous-groupes finis et plats de  $B$  tels que  $(H_1 + H_2) \subset (H \cap H')$ . La limite projective du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} B/H_1 & \longrightarrow & B/H' \\ \downarrow & & \uparrow \\ B/H & \longleftarrow & B/H_2 \end{array}$$

*est extension de  $(H \cap H') / (H_1 + H_2)$  par  $B / (H_1 \cap H_2)$ .*

*Démonstration.* — Cette limite projective  $P$  est égale à

$$\{(b_1, b_2) \in B \times B \mid b_1 - b_2 \in H \cap H'\} / (H_1 \times H_2).$$

La flèche qui envoie  $(b_1, b_2)$  sur  $b_1 - b_2$  définit une surjection de  $P$  sur  $(H \cap H') / (H_1 + H_2)$ , dont le noyau est

$$\{(b_1, b_2) \in B \times B \mid b_1 - b_2 \in H_1 + H_2\} / (H_1 \times H_2).$$

On conclut en remarquant que l'immersion diagonale de  $B$  dans  $B \times B$  induit un isomorphisme de  $B / (H_1 \cap H_2)$  sur ce noyau.  $\square$

**Lemme 1.4.7.1.2.** — *La limite projective  $P'_i$  du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(Y_i, A_i) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(X_i, A_i) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \underline{\mathrm{Hom}}(Y_i, A_i^t) & \longleftarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(X_i, A_i^t) \end{array}$$

*est représentable par un schéma abélien, qui est égal au quotient de  $\underline{\mathrm{Hom}}(Y_i, A_i)$  par le sous-groupe fini et plat formé des éléments  $\phi$  de  $\underline{\mathrm{Hom}}(Y_i, A_i)$  tels que  $\phi(\varepsilon_k) \in \mathrm{Ker}(A_i \rightarrow A_i^t)$  si  $k \in [e_i + 1, r - m_i]$  et  $\phi(\varepsilon_k) \in A_i[p]$  sinon.*

*Démonstration.* — On pose  $B = \underline{\mathrm{Hom}}(Y_i, A_i)$  et

$$\begin{aligned} H_1 &= \{ \phi \in B \mid \phi(pY_i) = 0 \}, \\ H_2 &= \{ \phi \in B \mid \phi(X_i) \subset \mathrm{Ker}(A_i \rightarrow A_i^t) \}, \\ H &= \{ \phi \in B \mid \phi(pY_i) \subset \mathrm{Ker}(A_i \rightarrow A_i^t) \}, \\ H' &= \{ \phi \in B \mid \phi(X_i) \subset A_i[p] \}. \end{aligned}$$

On applique le lemme 1.4.7.1.1 puis l'on observe que  $H \cap H' = H_1 + H_2$  et que  $H_1 \cap H_2$  est le schéma en groupes annoncé, qui est bien sûr fini. On voit qu'il est plat grâce à sa description explicite.  $\square$

Pour tout  $0 \leq i \leq s$ , on note  $P_i$  la limite projective du diagramme obtenu à partir de (1.4.6.A) en ne conservant que les objets dont l'indice est  $\leq i$ .

**Lemme 1.4.7.1.3.** — *Le morphisme naturel de  $\underline{\text{Hom}}(Y_i, A_0)$  dans  $P_i$  est surjectif. Son noyau est formé d'éléments  $\phi \in \underline{\text{Hom}}(Y_i, A_0)$  vérifiant  $\phi(\varepsilon_k) \in \text{Ker}(A_0 \rightarrow A_i^t)$  pour  $k \in [e_i + 1, r - m_i]$ . En particulier,  $P_i$  est un schéma abélien.*

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $i$ . Le cas  $i = 0$  résulte du lemme 1.4.7.1.2. Supposons que les assertions concernant  $P_{i-1}$  soient vérifiées et démontrons celles concernant  $P_i$ . Le groupe  $P_i$  est la limite projective de

$$\begin{array}{ccc} P_{i-1} & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(Y_{i-1}, A_i) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \underline{\text{Hom}}(X_i, A_{i-1}^t) & \longleftarrow & P'_i \end{array}$$

Il est quotient de la limite projective du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(Y_{i-1}, A_0) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(Y_{i-1}, A_i) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \underline{\text{Hom}}(X_i, A_{i-1}^t) & \longleftarrow & \underline{\text{Hom}}(Y_i, A_i) \end{array}$$

par un sous-groupe dont la projection  $Q_i$  sur  $\underline{\text{Hom}}(Y_{i-1}, A_0)$  est formée de morphismes vérifiant  $\phi(\varepsilon_k) \in \text{Ker}(A_0 \rightarrow A_{i-1}^t)$  pour  $k \in [e_{i-1} + 1, r - m_{i-1}]$ . Posons  $B = \underline{\text{Hom}}(Y_i, A_0)$  et

$$\begin{aligned} H_1 &= \{ \phi \in B \mid \phi(Y_{i-1}) = 0 \}, \\ H_2 &= \{ \phi \in B \mid \phi(Y_i) \subset \text{Ker}(A_0 \rightarrow A_i) \}, \\ H &= \{ \phi \in B \mid \phi(Y_{i-1}) \subset \text{Ker}(A_0 \rightarrow A_i) \}, \\ H' &= \{ \phi \in B \mid \phi(X_i) \subset \text{Ker}(A_0 \rightarrow A_{i-1}^t) \}. \end{aligned}$$

Si  $R_i$  désigne l'image inverse de  $Q_i$  dans  $B$ , on voit que  $H \cap H' / (H_1 + H_2 + R_i) = 0$ . Le lemme 1.4.7.1.1 montre alors la surjectivité du morphisme naturel de  $B$  vers  $P_i$ . L'assertion concernant son noyau résulte du calcul de  $H_1 \cap H_2$ , ce qui conclut la récurrence.  $\square$

**Corollaire 1.4.7.1.4.** — *Le schéma  $\mathcal{B}_0^w$  est un schéma abélien sur  $\mathcal{A}_0^w$ .*

**1.4.7.2. Cas de  $E_0^w$ .** — Notons  $S_0^w$  le groupe des caractères de  $E_0^w$ . Il est limite inductive du diagramme (1.4.6.A).

**Lemme 1.4.7.2.1.** — *La limite inductive  $S'_i$  du diagramme*

$$X_i \otimes X_i \xrightarrow{f} Y_i \otimes X_i \xleftarrow{f} Y_i \otimes Y_i$$

*est un  $\mathbb{Z}$ -module libre. Les éléments  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  et  $\varepsilon_l \otimes \varepsilon_k \in Y_i \otimes X_i$  ont même image dans  $S'_i$  pour  $(k, l) \in [e_i + 1, r - m_i]^2$ .*

*Démonstration.* — Le morphisme  $Y_i \otimes Y_i \rightarrow Y_i \otimes X_i$  obtenu par différence envoie  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  sur

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l - \varepsilon_l \otimes \varepsilon_k & \quad \text{si } (k, l) \in [e_i + 1, r - m_i]^2, \\ p \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l - \varepsilon_l \otimes \varepsilon_k & \quad \text{si } (k, l) \in ([1, e_i] \cup [r - m_i + 1, r]) \times [e_i + 1, r - m_i], \\ \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l - p \varepsilon_l \otimes \varepsilon_k & \quad \text{si } (k, l) \in [e_i + 1, r - m_i] \times ([1, e_i] \cup [r - m_i + 1, r]), \\ p \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l - p \varepsilon_l \otimes \varepsilon_k & \quad \text{si } (k, l) \in ([1, e_i] \cup [r - m_i + 1, r]) \times ([1, e_i] \cup [r - m_i + 1, r]). \end{aligned}$$

D'autre part, le morphisme  $X_i \otimes X_i \rightarrow Y_i \otimes X_i$  envoie  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  sur  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l - \varepsilon_l \otimes \varepsilon_k$  si  $k$  et  $l$  appartiennent à  $([1, e_i] \cup [r - m_i + 1, r])$ . Cela suffit pour conclure.  $\square$

Pour tout  $0 \leq i \leq s$ , on note  $S_i$  la limite inductive du diagramme obtenu à partir de (1.4.6.A) en ne conservant que les objets dont l'indice est  $\leq i$ .

**Lemme 1.4.7.2.2.** — *Le  $\mathbb{Z}$ -module  $S_i$  est libre et les éléments  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  et  $\varepsilon_l \otimes \varepsilon_k \in Y_i \otimes X_i$  ont même image dans  $S_i$  pour  $k$  et  $l$  dans  $[e_i + 1, r - m_i]$ .*

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $i$ . Le cas  $i = 0$  résulte du lemme 1.4.7.2.1. Supposons les assertions vérifiées pour  $S_{i-1}$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module  $S_i$  est la limite inductive du diagramme

$$S_{i-1} \longleftarrow Y_{i-1} \otimes X_i \longrightarrow S'_i.$$

La flèche  $Y_{i-1} \otimes X_i \rightarrow Y_{i-1} \otimes X_{i-1}$  envoie  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  sur  $p \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  si  $l \in [r - m_i + 1, r - m_{i-1}]$ , et sur  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  sinon. La flèche  $Y_{i-1} \otimes X_i \rightarrow Y_i \otimes X_i$  envoie  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  sur  $p \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  si  $k \in [e_{i-1} + 1, e_i]$ , et sur  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  sinon. On en déduit que  $S_i$  est libre, et que  $\varepsilon_k \otimes \varepsilon_l$  et  $\varepsilon_l \otimes \varepsilon_k \in Y_i \otimes X_i$  ont même image dans  $S_i$  pour  $k$  et  $l$  dans  $[e_i + 1, r - m_i]$ , ce qui achève la récurrence.  $\square$

**Corollaire 1.4.7.2.3.** — *Le  $\mathbb{Z}$ -module  $S_0^w$  est libre et le groupe  $E_0^w$  est un tore.*

**1.4.8. Oubli du niveau.** — Le morphisme d'oubli du niveau  $\mathcal{M}_0^w \rightarrow \mathcal{M}$  se factorise en un morphisme  $\mathcal{B}_0^w \rightarrow \mathcal{B}$  et en un morphisme entre toseurs qui est équivariant sous l'isogénie  $E_0^w \rightarrow E$ . Les flèches  $\mathcal{M}_0^w \rightarrow \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}$  sont propres. Soit  $M$  le 1-motif universel sur  $\mathcal{M}$ . Notons  $M[p]$  le groupe fini et plat sur  $\mathcal{M}$  associé à  $M$ . L'espace de modules relatif  $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}$  paramètre les drapeaux isotropes de  $M[p]$  qui sont de type  $\mathcal{D}$ .



**1.4.9. Variante de l'espace de modules avec structure parahorique.** — On fixe  $w \in \mathcal{W}$  et un diagramme commutatif de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$(1.4.9.A) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{Y}_0 & \longrightarrow & \mathbb{Y}_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Y}_s \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{X}_0 & \longleftarrow & \mathbb{X}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathbb{X}_s \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{Y}_0 & \longrightarrow & \mathbb{Y}_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Y}_s \end{array}$$

qui vérifie les conditions de la proposition **1.4.5.1**. On note

$$\mathcal{M}_{\mathbb{X}_\bullet, \mathbb{Y}_\bullet, 0}^w$$

le champ de modules des 1-motifs de genre  $g$ , principalement polarisés, munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  et d'invariant  $w$  en  $p$ , et munis d'un isomorphisme du diagramme **(1.4.6.B)** (obtenu grâce à la proposition **1.4.5.1**) sur le diagramme **(1.4.9.A)**. Tout isomorphisme entre les diagrammes

$$\mathbb{Y}_0 \longrightarrow \mathbb{X}_0 \longrightarrow \mathbb{Y}_0 \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} \xrightarrow{\times p} \mathbb{X} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Y} ,$$

induit une immersion ouverte et fermée

$$\mathcal{M}_{0, \mathbb{X}_\bullet, \mathbb{Y}_\bullet}^w \longrightarrow \mathcal{M}_0^w .$$

Les champs de modules avec  $\mathbb{X}_\bullet$  et  $\mathbb{Y}_\bullet$  fixés serviront lors de la description précise de la stratification des compactifications (théorème **3.2.7.1**).



# CHAPITRE 2

## CARTES LOCALES

Dans ce chapitre, nous compactifions partiellement et de manière torique les champs de modules de 1-motifs. Nous effectuons une construction de Mumford sur certaines complétions des champs obtenus, puis approximons le résultat de cette construction en préservant le sous-groupe de  $p$ -torsion. Enfin, nous définissons les cartes locales algébriques.

### 2.1. Compactifications toroïdales partielles

Dans tout le reste de cette thèse, on fixe un  $\mathbb{Z}$ -module libre  $X$  de rang  $g$  et l'on note  $B(X) = \text{Hom}(\text{Sym}^2(X), \mathbb{Z})$  le  $\mathbb{Z}$ -module des applications bilinéaires symétriques entières sur  $X$ , et  $C(X) \subset B(X) \otimes \mathbb{R}$  le cône des applications bilinéaires symétriques semi-définies positives à radical rationnel. On se donne une décomposition polyédrale  $\text{GL}(X)$ -admissible  $\Sigma$  de  $C(X)$  qui est lisse pour la structure entière  $B(X)$  (paragraphe IV.2 de [FC90]). Soit  $\langle, \rangle$  désigne l'accouplement de dualité entre  $B(X \otimes \mathbb{R})$  et  $\text{Sym}^2(X \otimes \mathbb{R})$ . On pose

$$\begin{aligned} \sigma^\vee &= \{ x \in \text{Sym}^2(X \otimes \mathbb{R}) \text{ tq } \langle \sigma, x \rangle \geq 0 \} \\ \sigma^\perp &= \{ x \in \text{Sym}^2(X \otimes \mathbb{R}) \text{ tq } \langle \sigma, x \rangle = 0 \} \end{aligned}$$

pour tout  $\sigma \in \Sigma$ . Ce sont respectivement un monoïde et un groupe pour l'addition. Pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , on désigne par  $X_\sigma$  le plus petit quotient de  $X$  tel que toutes les formes bilinéaires  $b \in \sigma$  se factorisent par  $X_\sigma \otimes X_\sigma$ , et l'on note  $r$  son rang. Par exemple si  $\sigma$  est dans l'intérieur de  $C(X)$ , on a  $X_\sigma = X$  et si  $\sigma = \{0\}$ , on a  $X_\sigma = 0$ . On pose

$$S_\sigma = \text{Sym}^2(X_\sigma) \text{ et } \bar{E}_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{Z}[S_\sigma \cap \sigma^\vee]).$$

Ce dernier schéma est un plongement torique affine, muni d'une stratification indexée par les faces de  $\sigma$  : la face  $\tau$  correspond à la strate  $E_\sigma^\tau = \text{Spec}(\mathbb{Z}[S_\sigma \cap \tau^\perp])$  qui est un tore quotient de  $E_\sigma$ . Par exemple, l'origine  $\{0\}$  correspond à l'unique strate ouverte  $E_\sigma$  et le cône  $\sigma$  à l'unique strate fermée. La paramétrisation de la stratification est décroissante,

c'est-à-dire que si  $\tau$  est une face de  $\tau'$  la strate attachée à  $\tau'$  est incluse dans l'adhérence de la strate attachée à  $\tau$ .

On définit un faisceau constructible  $\underline{X}_\sigma$  sur  $\overline{E}_\sigma$ , qui est un quotient du faisceau constant  $X_{\overline{E}_\sigma}$ , en donnant sa restriction aux strates :

$$\underline{X}_\sigma|_{E_\tau} = X_\tau .$$

La restriction de  $\underline{X}_\sigma$  à la strate ouverte est nulle et sa restriction à la strate  $E_\sigma^\tau$  est égale à  $X_\sigma$  si  $\tau$  est inclus dans l'intérieur de  $C(X_\sigma)$ . Par construction,  $\text{Sym}^2(X_\sigma)$  se plonge dans l'anneau des fonctions régulières sur  $E_\sigma$ , donc dans le corps des fractions rationnelles de  $\overline{E}_\sigma$ . En considérant le diviseur associé à une fraction rationnelle, on obtient une forme bilinéaire symétrique  $B_\sigma : X_\sigma \otimes X_\sigma \rightarrow \underline{\text{Div}}_{\overline{E}_\sigma}$  à valeurs dans le faisceau des diviseurs de  $\overline{E}_\sigma$ .

**Proposition 2.1.1.** — *La forme  $B_\sigma$  se factorise en une forme bilinéaire symétrique*

$$B_\sigma : \underline{X}_\sigma \otimes \underline{X}_\sigma \longrightarrow \underline{\text{Div}}_{\overline{E}_\sigma}$$

telle que pour toute section locale  $x$  de  $\underline{X}_\sigma$  le diviseur  $\underline{B}(x, x)$  soit effectif à support égal au lieu de non annulation de  $x$ .

*Démonstration.* — Vérifions la factorisation sur chaque strate  $E_\sigma^\tau$ , où  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . Notons  $X^\tau$  le noyau de la surjection  $X \rightarrow X_\tau$ . Il suffit de montrer que la fonction associée à tout élément  $x \otimes y \in X^\tau \otimes X_\sigma$  est sans zéro ni pôle sur  $E_\sigma^\tau$ . Par construction, on a

$$H^0(E_\sigma^\tau, \mathcal{O}_{E_\sigma^\tau}) = \mathbb{Z}[s \in X_\sigma \otimes X_\sigma \text{ tq } b(s) = 0 \ \forall b \in \tau] .$$

Or si  $b \in \tau$  on a  $b(x \otimes y) = 0$ , donc  $x \otimes y$  induit une fonction régulière sur  $E_\sigma^\tau$ . C'est également le cas de la fonction inverse qui est associée à  $x \otimes (-y)$ , d'où le résultat.

Montrons la seconde assertion. Le cône dual de  $C(X_\sigma)$  est  $C(X_\sigma^\vee)$  d'où une inclusion  $\sigma^\vee \supset C(X_\sigma^\vee)$ . Si  $x$  est une section locale de  $X_\sigma$ , on voit  $x \otimes x$  comme un élément de  $C(X_\sigma^\vee)$ . La fonction associée à  $x \otimes x$  est régulière sur  $\overline{E}_\sigma$  et d'après les principes généraux sur les variétés toriques, le lieu de ses zéros est réunion des strates associées aux faces  $\tau$  sur lesquelles  $x \otimes x$  prend des valeurs strictement positives comme forme linéaire sur  $B(X_\sigma) \otimes \mathbb{R}$ .  $\square$

On appelle  $\mathcal{M}_\sigma$  le champ de modules des 1-motifs de genre  $g$  principalement polarisés et rigidifiés par  $X_\sigma$ . Il ne dépend que de  $X_\sigma$  et pas de  $\sigma$ . On pose également  $\mathcal{B}_\sigma = \underline{\text{Hom}}(X_\sigma, \mathbb{A}_{g-r})$ , où  $r$  est le rang de  $X_\sigma$ . Dans le chapitre précédent, on a montré que  $\mathcal{M}_\sigma$  est un  $E_\sigma$ -torseur sur  $\mathcal{B}_\sigma$ . Notons  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$  le produit contracté

$$\overline{\mathcal{M}}_\sigma = \mathcal{M}_\sigma \times^{E_\sigma} \overline{E}_\sigma .$$

Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$  est affine sur  $\mathcal{B}_\sigma$  et muni d'une stratification indexée par les faces de  $\sigma$ . Notons  $Z_\sigma^\tau$  la strate associée à la face  $\tau$  et  $Z_\sigma = Z_\sigma^\sigma$  l'unique strate fermée. Le

faisceau  $\underline{X}_\sigma$  et la forme bilinéaire  $\underline{B}_\sigma$  s'étendent à  $\mathcal{M}_\sigma \times_{\mathcal{B}_\sigma} \overline{E}_\sigma$  de manière  $E_\sigma$ -invariante et se descendent à  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . On note toujours  $\underline{X}_\sigma$  le faisceau constructible et

$$\underline{B}_\sigma : \underline{X}_\sigma \otimes \underline{X}_\sigma \longrightarrow \underline{\text{Div}}_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma}$$

la forme bilinéaire obtenus sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . Le diviseur  $\underline{B}_\sigma(x \otimes x)$  est effectif de support le lieu de non annulation de  $x \in \underline{X}_\sigma$ . Si  $X_\sigma = X$  alors on a  $r = g$ , on a  $\mathcal{M}_\sigma = E_\sigma$  et l'on a  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma = \overline{E}_\sigma$ . Si  $\sigma = \{0\}$ , on a  $r = 0$  et  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma = \overline{\mathcal{M}}_\sigma = \mathcal{A}_g$ .

**Remarque 2.1.2.** — Nous ne considérerons des plongements toriques non affines que dans l'énoncé du théorème 3.1.8.3, pour obtenir une description globale du voisinage de l'infini des compactifications. Dans la construction des compactifications et plus précisément dans les propositions 3.1.2 et 3.1.8.1 nous utiliserons le fait que les cônes de  $\Sigma$  ne se recouvrent pas.

**2.1.3. Interprétation modulaire à la frontière.** — Le champ  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$  n'admet pas d'interprétation modulaire explicite. En revanche, l'immersion ouverte  $(\mathcal{M}_\sigma \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma)$  en admet une en tant que « catégorie fibrée à la frontière » dans le sens suivant. Soient  $F$  et  $G$  deux champs sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  et  $F \hookrightarrow G$  une immersion ouverte.

**Définition 2.1.3.1.** — La catégorie fibrée à la frontière  $(F \hookrightarrow G)$  est la catégorie fibrée en groupoïdes sur  $\text{Ouv}$  qui associe à tout objet  $(U \hookrightarrow S)$  la catégorie des diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & G \end{array}$$

On appelle  $(U \hookrightarrow S)$ -point à la frontière de  $(F \hookrightarrow G)$  la catégorie des diagrammes précédents; on la note  $(F \hookrightarrow G)(U \hookrightarrow S)$ .

**Remarque 2.1.3.2.** — La catégorie  $\text{Ouv}$  forme un site si on la munit de la topologie induite par la topologie *fpqc* sur  $U$  et  $S$ , et la catégorie fibrée  $(F \hookrightarrow G)$  est un champ sur ce site.

Donnons à présent une description explicite de la catégorie fibrée à la frontière

$$(\mathcal{M}_\sigma \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma).$$

Soient  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de  $\text{Ouv}$ , et  $D$  un diviseur effectif irréductible réduit de  $S$ . On note  $p_D : \underline{\text{Div}}_S \rightarrow \mathbb{Z}_D$  le morphisme qui associe à tout diviseur sa multiplicité le long de  $D$ . On rappelle que l'on a associé un faisceau constructible  $\underline{X}$  et une forme bilinéaire symétrique  $\underline{B} : \underline{X} \otimes \underline{X} \rightarrow \underline{\text{Div}}_S$  à tout 1-motif de Mumford principalement polarisé sur  $(U \hookrightarrow S)$ .

**Proposition 2.1.3.3.** —  $(\mathcal{M}_\sigma \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma)(U \hookrightarrow S)$  est le groupoïde des 1-motifs de Mumford sur  $(U \hookrightarrow S)$  de genre  $g$ , principalement polarisés, rigidifiés par  $X_\sigma$  sur  $U$ , tels que pour toute section locale  $x$  de  $\underline{X}$ , le diviseur  $\underline{B}(x, x)$  soit effectif et pour tout diviseur effectif irréductible réduit  $D$  de  $S$ , l'application bilinéaire symétrique  $p_D \circ \underline{B} : X_\sigma \otimes X_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}$  soit incluse dans l'adhérence de  $\sigma$ .

*Démonstration.* — Il est équivalent de se donner la flèche composée

$$S \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \mathcal{B}_\sigma$$

ou de se donner un schéma semi-abélien  $\tilde{G}$  de rang torique constant sur  $S$ , dont le groupe des caractères de la partie torique est  $X_\sigma$  et dont la partie abélienne est principalement polarisée de genre  $g - r$ . Il est équivalent de se donner un relèvement  $U \rightarrow \mathcal{M}_\sigma$  et un morphisme  $X_\sigma \rightarrow \tilde{G}$  sur  $U$  induisant un 1-motif de Mumford principalement polarisé sur  $(U \hookrightarrow S)$ .

Il suffit de vérifier que sous les conditions données sur  $\underline{B}$ , la flèche  $U \rightarrow \mathcal{M}_\sigma$  s'étend en une flèche  $S \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . Une éventuelle extension est unique par densité de  $U$  dans  $S$ . Par descente pour la topologie de Zariski, on peut donc supposer que  $S = \text{Spec}(R)$  est un schéma local intègre de point générique  $\text{Spec}(K)$  et que le torseur  $\mathcal{M}_\sigma \rightarrow \mathcal{B}_\sigma$  est trivial. On obtient ainsi une flèche  $U \rightarrow E_\sigma$ , que l'on veut étendre en une flèche  $S \rightarrow \overline{E}_\sigma$ . On veut montrer que la flèche  $H^0(E_\sigma, \mathcal{O}) = \mathbb{Z}[\text{Sym}^2(X_\sigma)] \rightarrow K$  envoie  $H^0(\overline{E}_\sigma, \mathcal{O})$  dans  $R$ . Par normalité de  $S$ , cela se teste en les idéaux premiers de hauteur 1. Il suffit de voir que pour tout  $x \otimes y \in H^0(\overline{E}_\sigma, \mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}[\text{Sym}^2(X_\sigma)]$  et tout diviseur  $D$  de  $S$ , on a  $p_D \circ \underline{B}(x \otimes y) \geq 0$ . C'est évident car

$$H^0(\overline{E}_\sigma, \mathcal{O}) = \mathbb{Z}[\{u \otimes v \in X_\sigma \otimes X_\sigma \text{ tq } \forall b \in \sigma, b(u, v) \geq 0\}]$$

et la forme bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}$  est incluse dans l'adhérence de  $\sigma$  par hypothèse.  $\square$

**Remarque 2.1.3.4.** — Si  $S$  est local, la flèche  $S \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma$  envoie le point fermé de  $S$  dans la strate  $Z_\sigma$  si et seulement si  $\sigma$  est minimal parmi les cônes de  $\Sigma$  dont l'adhérence contient la forme bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}$  pour tout diviseur  $D$  de  $S$ .

**2.1.4. Cas d'une structure de niveau parahorique.** — On considère encore la décomposition  $\Sigma$  du paragraphe précédent, qui est lisse pour la structure entière  $B(X)$ . Soit  $\sigma \in \Sigma$ . On note  $X_\sigma$  le quotient de  $X$  associé à  $\sigma$ , et  $r$  son rang. On note  $\mathcal{M}_{\sigma,0}$  le champ algébrique des 1-motifs de genre  $g$  qui sont principalement polarisés, rigidifiés par  $X_\sigma$ , et munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . On a vu dans le chapitre précédent que  $\mathcal{M}_{\sigma,0}$  admettait une décomposition en parties ouvertes et fermées

$$\mathcal{M}_{\sigma,0} = \coprod_{w \in \mathcal{W}_\sigma} \mathcal{M}_{\sigma,0}^w$$

indexée par le quotient de groupes de Weyl

$$\mathcal{W}_\sigma = W_L \setminus W_{\mathrm{GSp}_{2g}} / W_L^{\mathcal{D}} .$$

Pour tout  $w \in W_\sigma$ , on a décrit dans la proposition **1.4.6.2** un tore  $E_{\sigma,0}^w$  et un champ  $\mathcal{B}_{\sigma,0}^w$  tels que  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^w \rightarrow \mathcal{B}_{\sigma,0}^w$  soit un torseur sous  $E_{\sigma,0}^w$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module libre  $S_{\sigma,0}^w = \underline{\mathrm{Hom}}(E_{\sigma,0}^w, \mathbb{G}_m)$  définit un plongement torique affine  $E_{\sigma,0}^w \hookrightarrow \overline{E}_{\sigma,0}^w$ . On définit le champ algébrique

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w \rightarrow \mathcal{B}_{\sigma,0}^w$$

comme le produit contracté

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w = \mathcal{M}_{\sigma,0}^w \times^{E_{\sigma,0}^w} \overline{E}_{\sigma,0}^w$$

et le champ algébrique  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0} \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$  comme l'union disjointe

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0} = \coprod_{w \in \mathcal{W}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w .$$

Le champ  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}$  est muni d'une stratification localement fermée de strates

$$Z_{\sigma,0}^\tau = \coprod_{w \in \mathcal{W}_\sigma} Z_{\sigma,0}^{\tau,w}$$

indexées par les faces  $\tau$  de  $\sigma$ . On note  $Z_{\sigma,0} = Z_{\sigma,0}^\sigma$  l'unique strate fermée.

Dans ce paragraphe, on donne une interprétation de la catégorie fibrée à la frontière  $(\mathcal{M}_{\sigma,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0})$  analogue à celle de  $(\mathcal{M}_\sigma \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma)$ . Soit  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de  $\mathrm{Ouv}$ . Tout 1-motif de Mumford  $M$  sur  $(U \hookrightarrow S)$  muni d'une structure de niveau parahorique  $H_\bullet$  d'invariant  $w \in \mathcal{W}$  définit une famille compatible de formes bilinéaires associées aux 1-motifs de Mumford  $M/H_i$ , donc un élément  $\underline{B}(M, H_\bullet)$  de  $\mathrm{Hom}(S_{\sigma,0}^w, \underline{\mathrm{Div}}_S)$ .

**Proposition 2.1.4.1.** —  *$(\mathcal{M}_{\sigma,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0})(U \hookrightarrow S)$  est le groupoïde des 1-motifs de Mumford de genre  $g$  sur  $(U \hookrightarrow S)$  qui sont principalement polarisés, rigidifiés par  $X_\sigma$  et munis d'une structure de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ , tels que pour toute section locale  $x$  de  $X_\sigma$  le diviseur  $\underline{B}(M, H_\bullet)(x, x)$  soit effectif et pour tout diviseur effectif irréductible réduit  $D$  de  $S$ , la forme bilinéaire symétrique  $p_D \circ \underline{B}(M, H_\bullet)$  soit incluse dans l'adhérence de  $\sigma$ .*

**2.1.5. Oubli du niveau.** — L'inclusion des structures entières  $S_\sigma \hookrightarrow S_{\sigma,0}^w$  donne une flèche propre

$$\overline{E}_{\sigma,0}^w \rightarrow \overline{E}_\sigma$$

et la functorialité du produit contracté donne une flèche propre

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma$$

qui étend l'oubli du niveau  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^w \rightarrow \mathcal{M}_\sigma$ . Ces morphismes induisent un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\sigma,0} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_\sigma & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_\sigma \end{array}$$

dont les flèches verticales sont propres et dont les flèches horizontales sont des unions disjointes de plongements toroïdaux.

**Remarque 2.1.5.1.** — Comme la décomposition  $\Sigma$  est lisse pour la structure entière  $B(X)$ , le champ  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$  est lisse sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$  et  $\mathcal{M}_\sigma \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma$  est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux. Le produit fibré

$$\mathcal{M}_{\sigma,0} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$$

est lisse sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  car les champs  $\mathcal{A}_{g-r}$  sont lisses sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ . Toutefois, comme  $\Sigma$  n'est pas lisse pour les différentes structures entières  $B_{\sigma,0}^w$ , le champ  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w$  n'est pas lisse sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  et

$$\mathcal{M}_{\sigma,0}^w \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w$$

n'est pas le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux. De même, les singularités de

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^w \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$$

ne sont pas uniquement celles des  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  avec  $r \leq g$ .

## 2.2. Cartes locales formelles

On choisit une présentation étale surjective  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}_\sigma$  du champ algébrique  $\mathcal{B}_\sigma$  par un schéma affine ne dépendant que du rang de  $X_\sigma$ . On note

$$\widehat{\mathcal{M}}_\sigma = (\mathcal{U} \times_{\mathcal{B}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma)^{\mathcal{U} \times_{\mathcal{B}_\sigma} Z_\sigma}$$

le complété du schéma affine  $\mathcal{U} \times \overline{\mathcal{M}}_\sigma$  le long du sous-schéma fermé  $\mathcal{U} \times Z_\sigma$ . Ce schéma dépend du choix de  $\mathcal{U}$ , même si on omet ce dernier des notations pour simplifier. Il contient le sous-schéma ouvert

$$\widehat{\mathcal{M}}_\sigma = \mathcal{M}_\sigma \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma} \widehat{\mathcal{M}}_\sigma,$$

le sous-schéma fermé de complétion  $\mathcal{U} \times Z_\sigma$  que l'on note encore  $Z_\sigma$  et le diviseur à croisements normaux

$$\partial \widehat{\mathcal{M}}_\sigma = \widehat{\mathcal{M}}_\sigma - \widehat{\mathcal{M}}_\sigma.$$

On a une immersion fermée  $Z_\sigma \hookrightarrow \partial \widehat{\mathcal{M}}_\sigma$ . Notons  $M_\sigma$  le 1-motif principalement polarisé universel sur  $\mathcal{M}_\sigma$ . Il induit un 1-motif de Mumford encore noté  $M_\sigma$  sur

$$\left( \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \hookrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \right).$$



Le schéma  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$  est normal, affine, complet relativement à  $Z_\sigma$ , excellent, et par construction,  $M_\sigma$  est positif relativement à  $Z_\sigma$ . Les hypothèses de la construction de Mumford sont vérifiées donc il existe un schéma semi-abélien

$$G_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma$$

qui est un objet de la catégorie

$$\text{Deg}_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma, \widehat{\mathcal{M}}_\sigma, Z_\sigma, \text{pol}}.$$

On lui associe un faisceau constructible  $\underline{X}(G_\sigma)$  par le théorème **1.1.3** et une application bilinéaire

$$\underline{B}(G_\sigma) : \underline{X}(G_\sigma) \otimes \underline{X}(G_\sigma) \longrightarrow \text{Div}_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma}$$

par la proposition **1.3.5.1**. On rappelle que l'on a également construit un faisceau constructible  $\underline{X}_\sigma$  et une forme bilinéaire  $\underline{B}_\sigma$  sur  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$ . On note de la même manière les objets obtenus par image inverse sur  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$ .

On appelle  $\tilde{G}_\sigma$  le schéma semi-abélien sur  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$  qui provient du schéma semi-abélien de rang torique constant universel sur  $\mathcal{B}_\sigma$ . Il est égal à la partie semi-abélienne de  $M_\sigma$ . Rappelons le résultat suivant, dû à Faltings et Chai.

**Proposition 2.2.1** ([FC90], prop. IV.3.1). — *Il existe des isomorphismes canoniques  $\underline{X}(G_\sigma) \xrightarrow{\sim} \underline{X}_\sigma$  et  $\underline{B}(G_\sigma) \xrightarrow{\sim} \underline{B}_\sigma$ . La restriction de  $G_\sigma$  à  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$  est un schéma abélien principalement polarisé de genre  $g$ . La restriction de  $G_\sigma$  à  $Z_\sigma$  est canoniquement isomorphe à  $\tilde{G}_\sigma$ . L'application de Kodaira-Spencer réalise un isomorphisme*

$$K_{G_\sigma/\widehat{\mathcal{M}}_\sigma} : \text{Sym}^2(\Omega_{G_\sigma}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma/\mathbb{Z}}^1 \left( \log \partial \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \right).$$

Le point délicat est de montrer la bijectivité de la flèche de Kodaira-Spencer obtenue par la proposition **1.3.6.1**. Cette flèche est construit *via* le 1-motif  $M_\sigma$  et la bijectivité provient de l'universalité de  $M_\sigma$ .

**Remarque 2.2.2**. — Il est crucial d'utiliser la lissité de  $\mathcal{M}_\sigma \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  pour montrer que la flèche de Kodaira-Spencer réalise un isomorphisme. Cet isomorphisme nous sera indispensable pour contrôler le processus d'approximation.

On dispose par conséquent d'une flèche  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma \rightarrow \mathcal{A}_g$ . On dit que le diagramme

$$\left( \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longleftarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \mathcal{A}_g \right)$$

est la *carte locale formelle sans niveau* associée à  $\sigma \in \Sigma$ .

**2.2.3. Propriété modulaire proche de la frontière.** — Nous développons un formalisme analogue à celui des espaces de modules à la frontière en tenant compte de la nature complète des anneaux intervenant dans la construction de Mumford. Nous cherchons notamment à imposer des conditions relatives à un sous-champ algébrique fermé.

Pour tout schéma  $T$ , on définit la catégorie  $\text{OuvComp}_T$  comme la sous-catégorie de  $\text{OuvComp}$  dont les objets se fibrent sur  $T$ ; les flèches sont celles qui induisent l'identité sur  $T$ . On se donne un diagramme de champs sur  $T$

$$F \longrightarrow G \longleftarrow Z$$

tel que  $F \rightarrow G$  soit une immersion ouverte,  $Z \rightarrow G$  soit une immersion fermée et  $F \times_G Z$  soit vide, c'est-à-dire que  $F$  et  $Z$  soient disjoints dans  $G$ .

**Définition 2.2.3.1.** — La catégorie fibrée proche de la frontière  $(F \rightarrow G \leftarrow Z)_T$  est la catégorie fibrée en groupoïdes sur  $\text{OuvComp}_T$  qui associe à tout objet  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  la catégorie

$$(F \longrightarrow G \longleftarrow Z)_T(U \longrightarrow S \longleftarrow S_0)$$

des diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

compatibles aux projections  $G \rightarrow T$  et  $S \rightarrow T$ .

Soit  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de  $\text{OuvComp}_T$ . On appelle  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$ -point proche de la frontière de  $(F \rightarrow G \leftarrow Z)_T$  la catégorie des diagrammes précédents. On donne une description explicite de la catégorie fibrée proche de la frontière

$$(\widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longleftarrow Z_\sigma)_U.$$

On note comme précédemment  $\tilde{G}_\sigma$  le schéma semi-abélien de rang torique constant universel sur  $\mathcal{B}_\sigma$ . Il induit un schéma semi-abélien  $\tilde{G}_\sigma$  de rang torique constant sur  $S_0$  par image inverse *via*

$$S_0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{B}_\sigma.$$

Si  $G$  est un schéma semi-abélien sur  $S$ , tout isomorphisme  $G_{S_0} \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_\sigma$  sur  $S_0$  induit une surjection  $X_\sigma \rightarrow \underline{X}(G)$  de faisceaux constructibles sur  $S$ .

**Proposition 2.2.3.2.** — *Le foncteur qui associe à  $f : S \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma$  le schéma semi-abélien  $f^*G_\sigma$  réalise une équivalence de catégories entre*

$$(\widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longleftarrow Z_\sigma)_U(U \longrightarrow S \longleftarrow S_0)$$

et la catégorie des couples  $(G, G|_{S_0} \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_\sigma)$ , où  $G$  est un objet de  $\text{Deg}_{U,S,S_0,\text{pol}}$  de dimension relative  $g$  principalement polarisé sur  $U$  tel que pour tout diviseur effectif irréductible réduit  $D$  de  $S$ , l'application bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}(G) : X_\sigma \otimes X_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}$  soit incluse dans l'adhérence de  $\sigma$ , et tel que  $\sigma$  soit minimal parmi les cônes de  $\Sigma$  vérifiant cette propriété.

*Démonstration.* — Les schémas semi-abéliens obtenus par image inverse de  $G_\sigma$  vérifient les propriétés requises. Inversement, soit  $G$  un schéma semi-abélien sur  $S$  vérifiant les hypothèses de la proposition. Le théorème **1.3.4.3** (construction de Mumford inverse) permet de lui associer un 1-motif de Mumford sur  $(U \hookrightarrow S)$  et la proposition **2.1.3.3** donne un  $(U \hookrightarrow S)$ -point de  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . L'hypothèse de minimalité de  $\sigma$  implique que cette flèche envoie  $S_0$  dans  $Z_\sigma$ . Comme le schéma affine  $S$  est complet relativement à  $S_0$ , la flèche  $S \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma$  se factorise en une flèche

$$S \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma.$$

La functorialité de la construction de Mumford montre que  $G$  est l'image inverse de  $G_\sigma$  par cette flèche.  $\square$

**2.2.4. Algébricité du groupe de  $p$ -torsion.** — Le schéma semi-abélien  $G_\sigma$  ne descend pas à  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . En revanche, le groupe des points de  $p$ -torsion  $G_\sigma[p] \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma$  descend à  $\mathcal{M}_\sigma$ . En effet, d'après le théorème **1.3.4.3**, il existe un isomorphisme canonique

$$G_\sigma[p] \xrightarrow{\sim} M_\sigma[p]$$

sur  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$ . Par construction, le 1-motif  $M_\sigma$  se descend à  $\mathcal{M}_\sigma$  et son groupe de  $p$ -torsion  $M_\sigma[p]$  également. On résume ceci en disant que  $G_\sigma$  est une donnée de nature transcendante, alors que  $G_\sigma[p]$  est algébrique. Cette remarque sera fondamentale pour construire une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ .

### 2.3. Approximation des cartes locales formelles

On vient de dire que le schéma semi-abélien

$$G_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma$$

ne descend pas à  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . En employant des techniques d'Artin, on peut cependant l'approcher par un schéma  $G_\sigma^h$  qui est semi-abélien sur un schéma étale sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$ . La nouveauté la plus significative par rapport à [FC90] est que l'on effectuera cette approximation en conservant un isomorphisme  $G_\sigma^h[p] \xrightarrow{\sim} M_\sigma[p]$ , ce qui sera indispensable pour notre construction des compactifications avec niveau.

Une différence mineure par rapport à [FC90] réside dans l'emploi de la notion de couple hensélien et du théorème de Popescu. Cela évite de localiser les cartes locales formelles en tous leurs points fermés ([FC90] après la définition IV.4.5).

**2.3.1. Couples henséliens.** — Rappelons rapidement cette notion.

**Définition 2.3.1.1** ([Gab92]). — Soit  $A$  un anneau et  $I$  un idéal. On dit que le couple  $(\text{Spec}(A), \text{Spec}(A/I))$  est hensélien si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- pour tout  $f \in A[t]$  et toute racine simple  $\bar{a}$  de  $f$  dans  $A/I$ , il existe une racine  $a \in A$  de  $f$  relevant  $\bar{a}$ ,
- pour tout diagramme commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\text{étale}} & \text{Spec}(A) \\ & \searrow p & \nearrow \\ & \text{Spec}(A/I) & \end{array}$$

le morphisme  $p$  se relève en un morphisme de  $\text{Spec}(A)$ -schémas  $\text{Spec}(A) \rightarrow S$ .

En particulier, un schéma local  $S$  de point fermé  $s$  est hensélien si et seulement si le couple  $(S, s)$  est hensélien.

**Définition 2.3.1.2.** — Soient  $A$  un anneau et  $I$  un idéal. L'hensélisé de

$$(\text{Spec}(A), \text{Spec}(A/I))$$

est le couple

$$(\text{Spec}(A^h), \text{Spec}(A^h/I^h))$$

défini par

$$\text{Spec}(A^h) = \varprojlim S \text{ et } I^h = IA^h,$$

où la limite projective est prise sur la catégorie des diagrammes commutatifs précédents. On a  $A^h/I^h \simeq A/I$ .

On peut donc définir l'hensélisé  $S^{h_{S'}}$  d'un schéma affine  $S$  le long d'un sous-schéma fermé  $S'$ .

**Remarque 2.3.1.3.** — La notion de couple strictement hensélien n'a pas de sens, ni celle d'hensélisé strict le long d'un sous-schéma fermé. On ne peut pas définir l'hensélisé d'un schéma non affine le long d'un sous-schéma fermé car les limites projectives n'existent pas toujours dans la catégorie des schémas.

**2.3.2. Approximation selon Popescu.** — Un morphisme de schémas affines  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  est dit *régulier* s'il est plat à fibres géométriques régulières. Si  $A$  est local et excellent, la flèche  $\text{Spec}(\widehat{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$  est régulière. Si  $A$  est excellent, pour tout idéal  $I$  de  $A$ , le morphisme

$$\text{Spec}(\widehat{A}^I) \longrightarrow \text{Spec}(A)$$

du spectre du complété  $I$ -adique de  $A$  dans le spectre de  $A$  est régulier par [ÉGA IV<sub>2</sub> 7.8.3]. Popescu montre le théorème fondamental suivant.

**Théorème 2.3.2.1** ([Swa98]). — Une flèche  $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$  entre schémas affines noëthériens est régulière si et seulement si elle fait de  $\mathrm{Spec}(B)$  une limite projective filtrante de schémas affines lisses sur  $\mathrm{Spec}(A)$ .

En particulier, si  $A$  est un anneau excellent et  $I$  un idéal,  $\mathrm{Spec}(\widehat{A}^I)$  est limite projective de schémas affines lisses sur  $\mathrm{Spec}(A)$ . L'intérêt du théorème de Popescu en ce qui concerne les questions d'approximation résulte du lemme suivant, dont la démonstration a été communiquée par Luc Illusie.

**Lemme 2.3.2.2.** — Soient  $(A, I)$  un couple hensélien et  $n$  un entier naturel. Notons  $S = \mathrm{Spec}(A)$  et  $S_n = \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})$ . Soient  $S'$  un schéma lisse sur  $S$  et  $t : S_n \rightarrow S'$  un morphisme de schémas sur  $S$ . Il existe une section  $s : S \rightarrow S'$  telle que les morphismes

$$S_n \longrightarrow S \xrightarrow{s} S' \quad \text{et} \quad S_n \xrightarrow{t} S'$$

coïncident.

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $S'$  par un voisinage ouvert de l'image de  $S_n$ , on peut supposer qu'il existe une factorisation de la flèche lisse  $S' \rightarrow S$  en

$$S' \xrightarrow{u} \mathbb{A}_S^r \xrightarrow{v} S,$$

où  $u$  est étale et  $v$  est la projection canonique. On veut trouver une flèche  $s : S \rightarrow S'$  qui rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{s}{\curvearrowright} & & \\ & & \text{---} & & \\ S' & \xrightarrow{u} & \mathbb{A}_S^r & \xrightarrow{v} & S \\ & \swarrow t & \uparrow & \searrow & \\ & & S_n & & \end{array}$$

Un relèvement  $s' : S \rightarrow \mathbb{A}_S^r$  de  $S_n \rightarrow \mathbb{A}_S^r$  existe toujours. Le couple  $(S, S_0)$  est hensélien donc  $s'$  se factorise par l'hensélisé de  $\mathbb{A}_S^r$  le long de l'image de

$$S_0 \hookrightarrow S' \longrightarrow \mathbb{A}_S^r.$$

Comme  $u$  est étale, cet hensélisé est isomorphe à l'hensélisé de  $S'$  le long de  $S_0$ . Cela termine la construction de  $s$ .  $\square$

Indiquons rapidement comment déduire l'existence d'approximations des résultats précédents. Soient  $A$  un anneau noëthérien excellent,  $I$  un idéal et  $n$  un entier naturel. Posons  $S = \mathrm{Spec}(A)$ ,  $\widehat{S} = \mathrm{Spec}(\widehat{A}^I)$  et  $S_n = \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})$ . Le hensélisé  $(S^h, S_0^h)$  de  $(S, S_0)$  est excellent en tant que limite projective de schémas de type fini sur  $S$ . D'après le théorème 2.3.2.1,  $\widehat{S}$  est limite projective filtrante de schémas  $S^\alpha$  lisses sur  $S^h$ . Toute donnée

de type fini sur  $\widehat{S}$  provient par image réciproque d'une donnée sur  $S^\alpha$  pour  $\alpha$  suffisamment grand. D'après le lemme **2.3.2.2**, il existe une donnée sur  $S^h$  qui a même restriction à  $S_n$  que la donnée initiale. On a donc réalisé une approximation à l'ordre  $n$ .

**2.3.3. Approximation des cartes locales formelles sans niveau.** — Nous allons approcher la carte locale formelle sans niveau associée à  $\sigma \in \Sigma$ . Définissons le schéma

$$\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h = (\mathcal{U} \times_{\mathcal{B}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma)^{h_{\mathcal{U} \times_{\mathcal{B}_\sigma} Z_\sigma}},$$

qui est l'hensélisé du schéma affine  $\mathcal{U} \times \overline{\mathcal{M}}_\sigma$  le long du sous-schéma fermé  $\mathcal{U} \times Z_\sigma$ . Il est excellent et contient le sous-schéma ouvert

$$\mathcal{M}_\sigma^h = \mathcal{M}_\sigma \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h,$$

le diviseur à croisements normaux

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h = \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h - \mathcal{M}_\sigma^h$$

et le sous-schéma fermé d'hensélisation que l'on note encore  $Z_\sigma$ .

**Proposition 2.3.3.1.** — *Il existe un schéma semi-abélien  $G_\sigma^h$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- *il est abélien principalement polarisé de genre  $g$  sur  $\mathcal{M}_\sigma^h$ ,*
- *sa restriction à  $Z_\sigma$  est canoniquement isomorphe à  $\tilde{G}_\sigma$ ,*
- *$G_\sigma^h[p]$  est canoniquement isomorphe à  $M_\sigma[p]$  sur  $\mathcal{M}_\sigma^h$ ,*
- *$\underline{X}(G_\sigma^h)$  est canoniquement isomorphe à  $\underline{X}_\sigma$ ,*
- *$\underline{B}(G_\sigma^h)$  est canoniquement isomorphe à  $\underline{B}_\sigma$ ,*
- *l'application de Kodaira-Spencer associée à  $G_\sigma^h$  induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Sym}^2(\Omega_{G_\sigma^h}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h/\mathbb{Z}}^1(\log \partial \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h).$$

*Démonstration.* — D'après le théorème **2.3.2.1**,  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$  est limite projective de schémas  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha$  lisses sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$ , où  $\alpha$  parcourt un ensemble ordonné filtrant. Le schéma semi-abélien  $G_\sigma$  provient d'un schéma semi-abélien  $G_\sigma^\alpha$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha$  pour  $\alpha$  suffisamment grand. Posons

$$\mathcal{M}_\sigma^\alpha = \overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h} \mathcal{M}_\sigma^h \quad \text{et} \quad \partial \overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha = \overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h} \partial \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$$

Comme  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  est lisse, ce sont respectivement un ouvert dense et un diviseur à croisements normaux de  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha$ . Le schéma  $G_\sigma^\alpha$  est abélien sur  $\mathcal{M}_\sigma^\alpha$  et quitte à augmenter  $\alpha$ , on peut supposer qu'il est principalement polarisé. On peut également supposer que les isomorphismes

$$G_\sigma[p] \times \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \xrightarrow{\sim} M_\sigma[p], \quad G_\sigma \times Z_\sigma \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_\sigma, \quad \underline{X}(G_\sigma) \xrightarrow{\sim} \underline{X}_\sigma \quad \text{et} \quad \underline{B}(G_\sigma) \xrightarrow{\sim} \underline{B}_\sigma$$

proviennent d'isomorphismes

$$G_\sigma^\alpha[p] \times \mathcal{M}_\sigma^\alpha \xrightarrow{\sim} M_\sigma[p], \quad G_\sigma^\alpha \times Z_\sigma \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_\sigma, \quad \underline{X}(G_\sigma^\alpha) \xrightarrow{\sim} \underline{X}_\sigma \quad \text{et} \quad \underline{B}(G_\sigma^\alpha) \xrightarrow{\sim} \underline{B}_\sigma.$$

Soit  $n$  un entier naturel. On applique le lemme **2.3.2.2** et l'on obtient une section  $s : \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha$  qui relève le morphisme composé

$$Z_{\sigma,n} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^\alpha,$$

où  $Z_{\sigma,n}$  est le sous-schéma fermé de  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  défini par la puissance  $n$ -ième de l'idéal de  $Z_\sigma$ . Il suffit alors de poser  $G_\sigma^h = s^* G_\sigma^\alpha$  et de vérifier que si  $n$  est assez grand, l'application de Kodaira-Spencer associée à  $G_\sigma^h$  réalise un isomorphisme, ce qui résulte de [FC90, III.9.4, IV.4.1 et IV.4.2].  $\square$

Le schéma  $G_\sigma^h$  n'est pas unique mais les compactifications ne dépendront pas du choix.

**2.3.4. Recomplétion de l'approximation.** — Considérons l'image inverse de  $G_\sigma^h$  par la flèche

$$\widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h.$$

On obtient un schéma semi-abélien

$$G_\sigma^h \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma.$$

D'après la proposition **2.2.3.2**, ce schéma définit une flèche

$$f : \left( \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longleftarrow Z_\sigma \right) \longrightarrow \left( \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longleftarrow Z_\sigma \right)$$

de la catégorie  $\text{OuvComp}_{\mathcal{U}}$ . L'image inverse de  $G_\sigma$  par  $f$  est isomorphe à  $G_\sigma^h$  et  $f$  est l'identité au-dessus de  $Z_\sigma$ . En fait,  $f$  est l'identité de

$$\left( \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longleftarrow Z_\sigma \right)$$

modulo une puissance arbitrairement grande de l'idéal de  $Z_\sigma$ .

**Proposition 2.3.4.1.** — *Le morphisme  $f$  est étale et est un automorphisme de  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$ .*

*Démonstration.* — Les isomorphismes de Kodaira-Spencer associés à  $G_\sigma$  et  $G_\sigma^h$  définissent un isomorphisme

$$f^* \Omega_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma/\mathbb{Z}}^1(\log \partial \widehat{\mathcal{M}}_\sigma) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma/\mathbb{Z}}^1(\log \partial \widehat{\mathcal{M}}_\sigma).$$

Comme  $f$  est l'identité sur  $Z_\sigma$ , l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme

$$f^* \Omega_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma/\mathbb{Z}}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{\widehat{\mathcal{M}}_\sigma/\mathbb{Z}}^1.$$

Puisque  $\widehat{\mathcal{M}}_\sigma \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  est formellement lisse le critère jacobien montre que  $f$  est étale. Le schéma

$$\widehat{\mathcal{M}}_\sigma$$

est hensélien relativement au fermé  $Z_\sigma$ . La restriction de  $f$  à ce fermé est un isomorphisme donc  $f$  est un automorphisme.  $\square$

Nous avons contrôlé l'approximation :  $f$  est un automorphisme, aucune information n'a été perdue et  $G_\sigma^h$  est aussi « universel » que  $G_\sigma$ . Soit  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de  $\text{OuvComp}_{\mathcal{U}}$ . La proposition suivante résulte de la proposition **2.2.3.2**.

**Proposition 2.3.4.2.** — *Le foncteur qui associe à  $f : S \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  le schéma semi-abélien  $f^*G_\sigma^h$  réalise une équivalence de catégories entre*

$$(\mathcal{M}_\sigma^h \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h \longleftarrow Z_\sigma)_{\mathcal{U}}(U \longrightarrow S \longleftarrow S_0)$$

*et la catégorie des couples  $(G, G|_{S_0} \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_\sigma)$  où  $G$  est un objet de  $\text{Deg}_{U,S,S_0,\text{pol}}$  de dimension relative  $g$  qui est principalement polarisé sur  $U$ , muni d'un isomorphisme  $G|_{S_0} \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_\sigma$  sur  $S_0$ , tel que pour tout diviseur effectif irréductible réduit  $D$  de  $S$  l'application bilinéaire  $p_D \circ \underline{B} : X_\sigma \otimes X_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}$  soit incluse dans l'adhérence de  $\sigma$ , et tel que  $\sigma$  soit minimal parmi les cônes de  $\Sigma$  vérifiant cette propriété.*

*Démonstration.* — Comme  $S$  est complet relativement à  $S_0$ , on a

$$(\widehat{\mathcal{M}}_\sigma \longrightarrow \widehat{\overline{\mathcal{M}}}_\sigma \longleftarrow Z_\sigma)_{\mathcal{U}}(U \longrightarrow S \longleftarrow S_0) = (\mathcal{M}_\sigma \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h \longleftarrow Z_\sigma)_{\mathcal{U}}(U \longrightarrow S \longleftarrow S_0).$$

Il suffit d'appliquer la proposition **2.2.3.2** et de composer la flèche  $S \rightarrow \widehat{\overline{\mathcal{M}}}_\sigma$  obtenue avec l'inverse de  $f$ .  $\square$

**Remarque 2.3.4.3.** — Le diagramme  $(\mathcal{M}_\sigma^h \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^h \longleftarrow Z_\sigma)$  ne définit pas un objet de  $\text{OuvComp}_{\mathcal{U}}$  car  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  n'est pas complet.

## 2.4. Cartes locales algébriques

**2.4.1. Cartes locales algébriques sans niveau.** — Le schéma affine  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  est limite projective de schémas étales sur  $\mathcal{U} \times_{\mathcal{B}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma$  et le schéma semi-abélien  $G_\sigma^h$  est de type fini sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$ . Il existe donc un schéma  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}}$ , un morphisme étale

$$\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}} \longrightarrow \mathcal{U} \times_{\mathcal{B}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma$$

qui est un isomorphisme sur  $Z_\sigma$ , et un schéma semi-abélien  $G_\sigma^{\text{et}}$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}}$  qui descend  $G_\sigma^h$ . On pose

$$\mathcal{M}_\sigma^{\text{et}} = \mathcal{M}_\sigma \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}} \text{ et } \partial \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}} = \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}} - \mathcal{M}_\sigma^{\text{et}}.$$

Le schéma semi-abélien  $G_\sigma^{\text{et}}$  vérifie les mêmes propriétés que celles de  $G_\sigma^h$  données dans la proposition **2.3.3.1**. Par exemple, il est abélien principalement polarisé sur  $\mathcal{M}_\sigma^{\text{et}}$  et son groupe de  $p$ -torsion est canoniquement isomorphe à

$$M_\sigma[p] \times_{\mathcal{M}_\sigma} \mathcal{M}_\sigma^{\text{et}}.$$

Si  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  est un objet de  $\text{OuvComp}_{\mathcal{U}}$ , toute flèche

$$(U \longrightarrow S \longleftarrow S_0) \longrightarrow (\mathcal{M}_\sigma^{\text{et}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{\text{et}} \longleftarrow Z_\sigma)$$



se factorise par  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^h$  car  $(S, S_0)$  est hensélien. On déduit de la proposition **2.3.4.2** une description des points proches de la frontière de

$$(\mathcal{M}_\sigma^{et} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} \longleftarrow Z_\sigma).$$

Le schéma  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et}$  n'est pas unique mais les compactifications ne dépendront pas du choix. Le schéma abélien principalement polarisé  $G_\sigma^{et} \rightarrow \mathcal{M}_\sigma^{et}$  induit une flèche  $\mathcal{M}_\sigma^{et} \rightarrow \mathcal{A}_g$ . Appelons *carte locale algébrique* associée à  $\sigma \in \Sigma$  tout diagramme

$$\left( \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} \longleftarrow \mathcal{M}_\sigma^{et} \longrightarrow \mathcal{A}_g \right)$$

obtenu par la construction précédente.

**2.4.2. Cartes locales algébriques avec niveau parahorique.** — Notons  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{et}$  le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{et} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_\sigma. \end{array}$$

Il contient comme sous-schéma ouvert  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^{et}$ , qui est défini par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\sigma,0}^{et} & \longrightarrow & \mathcal{M}_\sigma^{et} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{\sigma,0} & \longrightarrow & \mathcal{M}_\sigma. \end{array}$$

La proposition suivante résulte de l'approximation préservant le groupe de  $p$ -torsion.

**Proposition 2.4.2.1.** — *Le morphisme  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^{et} \rightarrow \mathcal{M}_\sigma^{et}$  est l'espace de modules relatif des structures de niveau parahoriques de type  $\mathcal{D}$  en  $p$  sur  $G_\sigma^{et}[p]$ .*

*Démonstration.* — Le morphisme  $\mathcal{M}_{\sigma,0} \rightarrow \mathcal{M}_\sigma$  est l'espace de modules relatif des structures de niveau parahoriques sur  $M_\sigma[p]$ , et le schéma abélien  $G_\sigma^{et} \rightarrow \mathcal{M}_\sigma^{et}$  est muni d'un isomorphisme  $G_\sigma^{et}[p] \xrightarrow{\sim} M_\sigma[p] \times_{\mathcal{M}_\sigma} \mathcal{M}_\sigma^{et}$ .  $\square$

Nous avons obtenu un diagramme à carrés cartésiens et flèches verticales propres

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{et} & \longleftarrow & \mathcal{M}_{\sigma,0}^{et} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{g,0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} & \longleftarrow & \mathcal{M}_\sigma^{et} & \longrightarrow & \mathcal{A}_g. \end{array}$$

On appelle ce diagramme *carte locale algébrique de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$*  associée à  $\sigma$ . Il correspond une unique carte locale algébrique avec niveau à toute carte locale algébrique sans niveau.

**Remarque 2.4.2.2.** — Nous n'avons pas besoin de définir des cartes locales formelles avec niveau et de les approximer. La mauvaise réduction empêcherait de toute façon le contrôle d'une éventuelle approximation.

## CHAPITRE 3

# COMPACTIFICATIONS TOROÏDALES

Dans ce chapitre, nous recollons les cartes locales algébriques grâce à une relation d'équivalence étale adéquate. Nous obtenons une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ , dont nous décrivons les premières propriétés. Nous construisons une compactification « améliorée », qui n'a pas de singularités toriques. Nous décrivons explicitement la stratification des compactifications obtenues. Enfin, nous montrons comment adapter les résultats au cas de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ .

### 3.1. Recollement des cartes locales algébriques

Pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , on choisit une carte locale algébrique  $(\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} \longleftarrow \mathcal{M}_\sigma^{et} \longrightarrow \mathcal{A}_g)$  et l'on considère le schéma

$$\overline{U} = \coprod_{\sigma \in \Sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et},$$

qui est localement de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . On pose

$$U = \coprod_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{M}_\sigma^{et} \quad , \quad Z = \coprod_{\sigma \in \Sigma} Z_\sigma \quad \text{et} \quad \partial\overline{U} = \overline{U} - U \quad ,$$

qui est un diviseur à croisements normaux de  $\overline{U}$ . On note  $\underline{X} = \coprod \underline{X}_\sigma$ , qui est un faisceau constructible sur  $U$ , et  $\underline{B} = \coprod \underline{B}_\sigma$ , qui est une forme bilinéaire sur  $\underline{X}$  à valeurs dans le faisceau  $\underline{\text{Div}}_{\overline{U}}$ .

On a construit un schéma semi-abélien  $G = \coprod G_\sigma$  sur  $\overline{U}$  qui est abélien principalement polarisé sur  $U$ . Il existe des isomorphismes  $\underline{X}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{X}$  et  $\underline{B}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{B}$ , et l'application de Kodaira-Spencer induit un isomorphisme

$$K_{G/\overline{U}} : \text{Sym}^2(\Omega_G) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\overline{U}/\mathbb{Z}}^1(\log \partial\overline{U}) \quad .$$

Le schéma abélien  $G$  sur  $U$  induit un diagramme

$$\left( \overline{U} \longleftarrow U \longrightarrow \mathcal{A}_g \right) \quad .$$

La flèche  $U \rightarrow \mathcal{A}_g$  est surjective car  $\mathcal{M}_{\{0\}} = \mathcal{A}_g$ .

**Proposition 3.1.1.** — *Le morphisme  $U \rightarrow \mathcal{A}_g$  est étale.*

*Démonstration.* — On sait que le schéma abélien universel  $A_g \rightarrow \mathcal{A}_g$  induit un isomorphisme de Kodaira-Spencer

$$K_{A_g/A_g} : \mathrm{Sym}^2(\Omega_{A_g}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{A_g/\mathbb{Z}}^1$$

et le schéma abélien  $G \rightarrow U$  un isomorphisme

$$K_{G/U} : \mathrm{Sym}^2(\Omega_G) \xrightarrow{\sim} \Omega_{U/\mathbb{Z}}^1.$$

Notons  $f : U \rightarrow \mathcal{A}_g$  le morphisme induit par  $G$ . On a  $G = f^*A_g$ , on a  $f^* \mathrm{Sym}^2(\Omega_{A_g}) \simeq \mathrm{Sym}^2(\Omega_G)$  et l'on a  $f^*K_{A_g/A_g} = K_{G/U}$  donc

$$f^* \Omega_{A_g/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{U/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}^1.$$

Comme les champs algébriques  $U$  et  $\mathcal{A}_g$  sont lisses sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ , le critère jacobien montre que  $f$  est étale.  $\square$

Considérons le schéma

$$R = U \times_{\mathcal{A}_g} U = \underline{\mathrm{Isom}}_{U \times U}(\mathrm{pr}_1^* G, \mathrm{pr}_2^* G).$$

Il est muni de deux flèches étales vers  $U$ , et le champ algébrique  $\mathcal{A}_g$  est isomorphe au champ quotient  $[U/R]$ . Notons  $\bar{R}$  le normalisé de

$$\bar{U} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \bar{U}$$

dans  $R$ . C'est un schéma muni de deux flèches  $\bar{R} \rightrightarrows \bar{U}$  prolongeant  $R \rightrightarrows U$ . Il existe un isomorphisme  $\mathrm{pr}_1^* G \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_2^* G$  au-dessus de  $R$ . D'après le théorème 1.1.2, il s'étend en un isomorphisme au-dessus de  $\bar{R}$  par normalité de ce schéma. La démonstration de la proposition suivante est tirée de [FC90] et servira de modèle à celle de la proposition 3.1.8.1.

**Proposition 3.1.2** ([FC90], IV.5.4). — *Les deux flèches  $\bar{R} \rightrightarrows \bar{U}$  sont étales.*

*Démonstration.* — Soient  $z$  un point de  $\bar{R}$  et  $x$  et  $y$  ses images dans  $\bar{U}$ . Il suffit de montrer que les complétés des localisés de  $\bar{R}$  en  $z$  et de  $\bar{U}$  en  $x$  et  $y$  sont isomorphes *via* les deux flèches. Comme les flèches  $R \rightrightarrows U$  sont étales, on peut supposer que  $x$  et  $y$  sont des éléments du bord  $\partial\bar{U}$ . Il existe des cônes  $\sigma_x, \sigma_y \in \Sigma$  tels que  $x$  soit sur la  $\sigma_x$ -strate et  $y$  sur la  $\sigma_y$ -strate. Soient  $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$  et  $\mathcal{O}_z$  les anneaux des complétés des localisés en  $x, y$  et  $z$ . Les morphismes  $\bar{R} \rightrightarrows \bar{U}$  sont dominants car les morphismes  $R \rightrightarrows U$  sont surjectifs. On dispose d'injections d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_z & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathcal{O}_x & & \mathcal{O}_y \end{array}$$

et il s'agit de montrer que ces injections sont des égalités.

On note  $G_x$  et  $G_y$  les schémas semi-abéliens sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  et  $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$  obtenus par image inverse de  $G$ . D'après la proposition **2.1.3.3**, le 1-motif de Mumford associé à  $G_x$  induit une flèche  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x}$  et celui associé à  $G_y$  une flèche  $\text{Spec}(\mathcal{O}_y) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_y}$ . Le cône  $\sigma_x$  est déterminé par  $\underline{B}(G_x)$  car c'est l'unique cône minimal parmi ceux dont l'adhérence contient les  $p_D \circ \underline{B}(G_x)$ , où  $D$  est un diviseur irréductible de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$ . Il en est de même pour  $\sigma_y$  et comme  $\underline{B}(G_x)|_{\mathcal{O}_z} \simeq \underline{B}(G_y)|_{\mathcal{O}_z}$ , les cônes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont conjugués sous l'action de  $\text{GL}(X)$  et il existe un isomorphisme  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_y}$ . On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Spec}(\mathcal{O}_x) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x} \\
 & \nearrow & & \downarrow \sim \\
 \text{Spec}(\mathcal{O}_z) & & & \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_y} \\
 & \searrow & & \downarrow \\
 & \text{Spec}(\mathcal{O}_y) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_y}
 \end{array}$$

Les anneaux  $\mathcal{O}_x$  et  $\mathcal{O}_y$  sont les complétés des localisés de  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma_y}$  en les images du point fermé de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_z)$ , donc il existe un isomorphisme

$$\phi : \text{Spec}(\mathcal{O}_x) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathcal{O}_y).$$

L'action de  $\text{GL}(X)$  induit un isomorphisme entre les 1-motifs de Mumford universels sur  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma_y}$ , et il existe un isomorphisme  $G_x \xrightarrow{\sim} \phi^* G_y$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  qui descend l'isomorphisme  $G_x \xrightarrow{\sim} G_y$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_z)$ .

Pour démontrer la proposition, on construit une rétraction de l'injection  $\mathcal{O}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_z$ . L'isomorphisme  $G_x \xrightarrow{\sim} \phi^* G_y$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 R & \longrightarrow & \overline{R} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U \times U & \longrightarrow & \overline{U} \times \overline{U} \\
 \uparrow & & \uparrow (\text{Id}, \phi) \\
 \text{Spec}(\text{Frac}(\mathcal{O}_x)) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_x)
 \end{array}$$

L'anneau  $R$  est normal et la flèche  $\text{Spec}(\text{Frac}(\mathcal{O}_x)) \rightarrow R$  s'étend en un morphisme  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x) \rightarrow \overline{R}$ . Cette flèche se factorise par le complété de  $\overline{R}$  en  $z$  et induit bien une rétraction de  $\mathcal{O}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_z$ .  $\square$

**Remarque 3.1.3.** — Nous avons utilisé pour la première fois le fait que les cônes de  $\Sigma$  ne se recouvrent pas.

**Lemme 3.1.4** ([FC90], **coro. IV.5.5**). — *La double-flèche  $\overline{R} \rightrightarrows \overline{U}$  est un groupoïde étale.*

*Démonstration.* — Il suffit de trouver une flèche  $\overline{R} \times_{\overline{U}} \overline{R} \rightarrow \overline{R}$  qui étend la flèche  $R \times_U R \rightarrow R$  et qui vérifie les axiomes d'un groupoïde. Comme le schéma  $\overline{R} \times_{\overline{U}} \overline{R}$  est étale sur  $\overline{U}$ , il est égal à la normalisation de  $\overline{R}$  dans  $R \times_U R$ . La flèche  $\overline{R} \times_{\overline{U}} \overline{R} \rightarrow \overline{R}$  provient de la propriété universelle de la normalisation et les axiomes sont vérifiés par densité de  $U$  dans  $\overline{U}$ .  $\square$

La flèche  $R \rightarrow U \times U$  est finie car  $\mathcal{A}_g$  est séparé, et le morphisme  $\overline{R} \rightarrow \overline{U} \times \overline{U}$  est également fini car  $\overline{U}$  est excellent.

**3.1.5. Description des compactifications sans niveau.** — Considérons le champ algébrique quotient

$$\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma = [\overline{U}/\overline{R}].$$

Il est séparé, lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , contient  $\mathcal{A}_g$  comme ouvert dense et

$$\partial \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma = \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma - \mathcal{A}_g$$

comme diviseur à croisements normaux. Le schéma semi-abélien  $G \rightarrow \overline{U}$  est muni d'une donnée de descente  $\text{pr}_1^* G \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* G$  sur  $\overline{R}$  donc induit un schéma semi-abélien

$$G \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$$

qui étend la variété abélienne universelle. L'application de Kodaira-Spencer induit un isomorphisme

$$\text{Sym}^2(\Omega_G) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma/\mathbb{Z}}^1(\log \partial \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma).$$

La stratification induite sur  $\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$  par les branches du diviseur à croisements normaux est paramétrée par l'ensemble fini  $\Sigma/\text{GL}(X)$ . La complétion formelle le long de la strate associée à  $\sigma \in \Sigma$  est isomorphe au quotient de la complétion formelle de  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma$  le long de  $Z_\sigma$  par le groupe fini

$$\Gamma_\sigma = \text{Stab}_{\text{GL}(X_\sigma)}(\sigma).$$

Le schéma semi-abélien  $G$  correspond par cet isomorphisme au quotient de Mumford  $G_\sigma$  du 1-motif  $M_\sigma \rightarrow \mathcal{M}_\sigma$ , quitte à composer par l'automorphisme de recomplétion de la proposition **2.3.4.1**. On renvoie le lecteur au théorème IV.5.7 de [FC90] pour plus détails. Soient  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de  $\text{Ouv}$ . L'image inverse de  $G$  définit un foncteur de  $(\mathcal{A}_g \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma)(U \hookrightarrow S)$  vers la catégorie des schémas semi-abéliens sur  $S$ .

**Proposition 3.1.5.1.** — *Ce foncteur réalise une équivalence de catégories entre*

$$\left( \mathcal{A}_g \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma \right) (U \hookrightarrow S)$$

*et la catégorie des schémas semi-abéliens  $G' \rightarrow S$  qui sont abéliens principalement polarisés de genre  $g$  sur  $U$ , et tels que localement pour la topologie étale de  $S$ , le faisceau  $\underline{X}(G')$  est*

quotient de  $X$  et il existe  $\sigma \in \Sigma$  dont l'adhérence contient la forme bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}(G')$  pour tout diviseur irréductible réduit  $D$  de  $S$ .

*Démonstration.* — Le schéma abélien  $G'$  principalement polarisé sur  $U$  induit une flèche  $U \rightarrow \mathcal{A}_g$  que l'on veut prolonger. Un éventuel prolongement est unique car  $\overline{\mathcal{A}}_g$  est séparé, et son existence se teste localement. On peut donc supposer que  $S$  est le spectre d'un anneau local complet de point fermé  $S_0$ . On choisit  $\sigma \in \Sigma$  minimal parmi les cônes dont l'adhérence contient les  $\underline{B}(G') \otimes p_D$  où  $D$  parcourt les diviseurs de  $S$ , et l'on relève la flèche  $U \rightarrow \mathcal{A}_g$  en une flèche  $U \rightarrow \mathcal{M}_\sigma^{et}$  qui s'étend en

$$S \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et}$$

grâce à la propriété modulaire proche de la frontière de  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et}$ .  $\square$

On en déduit que le champ  $\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$  ne dépend ni du choix de la présentation  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{B}_\sigma$  ni du choix des approximations  $G_\sigma^{et}$ . Il reste à montrer la proposition suivante pour vérifier que l'on a construit une compactification de  $\mathcal{A}_g$ .

**Proposition 3.1.5.2.** — *Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$  est propre sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* — La flèche est séparée de type fini et l'on peut appliquer le critère valuatif de propreté de [ÉGA II 7.3.10]. Soient  $S$  un trait de point générique  $\eta$  et  $\eta \rightarrow \mathcal{A}_g$  un morphisme. On veut le prolonger en une flèche

$$S \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$$

localement pour la topologie *fppf*. Soit  $G'$  la variété abélienne sur  $\eta$  induite par  $\eta \rightarrow \mathcal{A}_g$ . Le théorème de réduction semi-stable pour les variétés abéliennes assure l'existence d'un schéma semi-abélien  $G' \rightarrow S$  prolongeant  $G' \rightarrow \eta$ , quitte à effectuer un changement ramifié de trait. Un changement étale de trait permet de supposer que  $\underline{X}(G)$  est quotient de  $X$ . Un trait admet un unique diviseur effectif réduit irréductible, la flèche  $\underline{B}(G) : X \otimes X \rightarrow \mathbb{Z}$  est semi-définie positive à radical rationnel d'après la proposition 1.3.5.1 et  $\Sigma$  recouvre le cône des formes semi-définies positives à radical rationnel. La propriété modulaire à la frontière de

$$\left( \mathcal{A}_g \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma \right)$$

montre alors l'existence d'un prolongement.  $\square$

**Remarque 3.1.5.3.** — Le contrôle de l'approximation a été indispensable pour vérifier la propreté de  $\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$ .

**3.1.6. Cas d'une structure de niveau.** — Dans ce paragraphe, on définit la compactification avec niveau parahorique associée à  $\Sigma$ . On associe à chaque carte locale algébrique sans niveau

$$\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} \longleftarrow \mathcal{M}_\sigma^{et} \longrightarrow \mathcal{A}_g$$

la carte locale algébrique de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{et} & \longleftarrow & \mathcal{M}_{\sigma,0}^{et} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{g,0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et} & \longleftarrow & \mathcal{M}_\sigma^{et} & \longrightarrow & \mathcal{A}_g \end{array}$$

qui lui correspond. Considérons les schémas

$$\overline{U}_0 = \prod_{\sigma \in \Sigma} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{et} \quad \text{et} \quad U_0 = \prod_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{M}_{\sigma,0}^{et}.$$

Ils induisent un diagramme cartésien à flèches verticales propres

$$\begin{array}{ccccc} \overline{U}_0 & \longleftarrow & U_0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{g,0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{U} & \longleftarrow & U & \longrightarrow & \mathcal{A}_g, \end{array}$$

par construction des cartes locales algébriques avec niveau. Définissons le groupoïde

$$R_0 \rightrightarrows U_0$$

comme le produit fibré

$$R_0 = U_0 \times_{\mathcal{A}_{g,0}} U_0.$$

Les deux flèches  $R_0 \rightrightarrows U_0$  sont étales car  $U \rightarrow \mathcal{A}_g$  est étale, et le champ quotient  $[U_0/R_0]$  est bien sûr isomorphe à  $\mathcal{A}_{g,0}$ .

**Remarque 3.1.6.1.** — Pour démontrer que  $U_0 \rightarrow \mathcal{A}_{g,0}$  est étale, on n'a pas procédé directement. Du fait de la mauvaise réduction, il semble difficile d'adapter la technique de [FC90], basée sur l'isomorphisme de Kodaira-Spencer.

**3.1.7. Normalité.** — Dans ce paragraphe, nous démontrons la normalité de  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}$ , qui sera utile pour la proposition 3.1.8.1. Nous utilisons les résultats de [Gör03], selon lesquels le morphisme  $\mathcal{A}_{g,0} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$  est plat et sa fibre spéciale est réduite.

**Proposition 3.1.7.1.** — *Le champ algébrique  $\mathcal{A}_{g,0}$  est normal.*

*Démonstration.* — D'après le critère de normalité de Serre, il suffit de montrer que  $\mathcal{A}_{g,0}$  est régulier en codimension 1 et que ses points de codimension  $\geq 2$  sont de profondeur  $\geq 2$ . D'après le théorème principal de [GN02], le lieu régulier de  $\mathcal{A}_{g,0}$  coïncide avec le lieu



ordinaire, et son complémentaire dans  $\mathcal{A}_{g,0}$  est de codimension  $\geq 2$ . Cela montre que  $\mathcal{A}_{g,0}$  est régulier en codimension 1.

Vérifions la deuxième condition du critère de normalité de Serre. Soient  $A$  l'anneau local de  $\mathcal{A}_{g,0}$  en un point  $x$  de profondeur  $\geq 2$  et  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal. Comme  $\mathcal{A}_{g,0} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  est lisse, on peut supposer que  $p \in \mathfrak{m}$ . L'anneau  $A$  est plat sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  donc  $p$  n'est pas diviseur de 0 dans  $A$ . Notons  $\bar{A} = A/pA$  et  $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m} \cap pA$ . D'après [Gör03],  $\bar{A}$  est réduit donc sans composante immergée. Les idéaux associés de  $\bar{A}$  sont donc minimaux. On en déduit que  $\bar{\mathfrak{m}}$  n'est pas associé. D'après la proposition 8 du paragraphe IV.1.4 de [Bou61], il existe  $x \in \bar{\mathfrak{m}}$  qui n'est pas diviseur de 0 dans  $\bar{A}$ . La suite de paramètres  $(p, x)$  est bien de longueur 2.  $\square$

Soit  $\sigma \in \Sigma$ . Le corollaire suivant résulte de la proposition 3.1.7.1, des corollaires 1.4.7.1.4 et 1.4.7.2.3, et de la normalité des plongements toriques.

**Corollaire 3.1.7.2.** — *Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}$  est normal.*

**3.1.8. Relation d'équivalence avec niveau.** — Dans ce paragraphe, on construit une relation d'équivalence étale sur  $\overline{U}_0$ . Notons  $\overline{R}_0$  le normalisé de  $\overline{U}_0 \times \overline{U}_0$  dans  $R_0$ . Il est muni de deux flèches

$$\overline{R}_0 \rightrightarrows \overline{U}_0$$

qui étendent

$$R_0 \rightrightarrows U_0.$$

La restriction du schéma semi-abélien  $G$  à  $U_0$  est abélien, muni d'un drapeau  $H_\bullet \subset G[p]$ . On dispose sur  $R_0$  d'un isomorphisme

$$\text{pr}_1^* G \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* G$$

qui envoie  $\text{pr}_1^* H_\bullet$  sur  $\text{pr}_2^* H_\bullet$ . Par normalité, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme sur  $\overline{R}_0$ .

**Proposition 3.1.8.1.** — *Les deux flèches  $\overline{R}_0 \rightrightarrows \overline{U}_0$  sont étales.*

*Démonstration.* — Soit  $z$  un point de  $\overline{R}_0$  et  $x, y$  ses deux images dans  $\overline{U}_0$ . Montrons que les complétés  $\mathcal{O}_z, \mathcal{O}_x$  et  $\mathcal{O}_y$  des localisés de  $\overline{R}_0$  en  $z$  et de  $\overline{U}_0$  en  $x$  et  $y$  sont isomorphes. On peut supposer que  $x$  et  $y$  sont des éléments du bord. Il existe des cônes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  de  $\Sigma$  tels que  $x$  appartienne à la  $\sigma_x$ -strate et  $y$  sur la  $\sigma_y$ -strate. On dispose d'injections d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_z & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathcal{O}_x & & \mathcal{O}_y \end{array}$$

et de schémas semi-abéliens  $G_x$  et  $G_y$  obtenus par image inverse de  $G$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  et  $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ . Ils sont génériquement abéliens, munis d'une structure de niveau parahorique  $H_{\bullet, x}$  et  $H_{\bullet, y}$ , et il existe sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_z)$  un isomorphisme

$$\text{pr}_1^* G_x \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* G_y$$

qui respecte les structures de niveau. Les anneaux  $\mathcal{O}_x$  et  $\mathcal{O}_y$  sont normaux d'après le corollaire **3.1.7.2**. D'après la proposition **1.3.7.1**, on obtient deux 1-motifs de Mumford avec structure de niveau associés à  $G_x$  et  $G_y$ , et la proposition **2.1.4.1** montre l'existence de flèches

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_x) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x, 0} \text{ et } \text{Spec}(\mathcal{O}_y) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma_x, 0}$$

par lesquelles descendent les deux 1-motifs avec structure de niveau. On raisonne exactement comme dans la preuve de la proposition **3.1.2** pour construire une rétraction de l'injection  $\mathcal{O}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_z$ .  $\square$

On voit comme précédemment que  $\overline{R}_0 \rightrightarrows \overline{U}_0$  est un groupoïde étale. Appelons

$$\overline{\mathcal{A}}_{g, 0}^{\Sigma} = [\overline{U}_0 / \overline{R}_0]$$

le champ algébrique quotient. Expliquons rapidement la propriété modulaire à la frontière vérifiée par

$$\left( \mathcal{A}_{g, 0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g, 0}^{\Sigma} \right).$$

Soient  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de  $\text{Ouv}$  et  $(G', H'_{\bullet})$  un objet de  $\mathcal{A}_{g, 0}(U)$ . On suppose que  $G'$  s'étend en un schéma semi-abélien sur  $S$ . Le quotient  $G'/H'_i$  est alors représentable par un schéma semi-abélien sur  $S$  pour  $0 \leq i \leq s$ . Supposons que  $\underline{X}(G')$  soit un quotient de  $X$ . D'après la proposition **1.4.6.2** et le diagramme **(1.4.6.A)**, la famille des formes bilinéaires  $\underline{B}(G'/H'_i)$  définit un morphisme  $\underline{B}(G', H'_{\bullet})$  de  $\text{Sym}^2(X \otimes \mathbb{Q})$  dans  $\underline{\text{Div}}_S \otimes \mathbb{Q}$ . La propriété modulaire à la frontière suivante se montre comme la proposition **3.1.5.1**, en utilisant la proposition **2.1.4.1**.

**Proposition 3.1.8.2.** — *Le groupoïde  $\left( \mathcal{A}_{g, 0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g, 0}^{\Sigma} \right) (U \hookrightarrow S)$  paramètre les objets  $(G', H'_{\bullet})$  de  $\mathcal{A}_{g, 0}(U)$  tels que  $G'$  s'étend en un schéma semi-abélien sur  $S$ , et tels que localement pour la topologie étale de  $S$ , le faisceau  $\underline{X}(G')$  est quotient de  $X$  et il existe  $\sigma \in \Sigma$  dont l'adhérence contient la forme bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}(G', H'_{\bullet})$  pour tout diviseur irréductible réduit  $D$  de  $S$ .*

Le théorème suivant résume les premières propriétés de notre construction.

**Théorème 3.1.8.3.** — *Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{A}}_{g, 0}^{\Sigma}$  ne dépend que de  $\Sigma$ . Il est séparé, normal et sa projection vers  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est de type fini, plate, à fibres géométriquement réduites.*

Ce champ contient  $\mathcal{A}_{g,0}$  comme ouvert dense et il existe un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{g,0} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_g & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma \end{array}$$

à flèches verticales propres. En particulier,  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$  est propre sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$  et est une compactification de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Il existe un schéma semi-abélien  $G$  et un drapeau de groupes quasi-finis plats

$$H_\bullet \subset G[p]$$

sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$  qui étendent le schéma abélien et le drapeau universel sur  $\mathcal{A}_{g,0}$ .

*Démonstration.* — Les assertions sont des conséquences immédiates de la construction. La proposition **3.1.8.2** montre que les compactifications ne dépendent que de  $\Sigma$ . La platitude et la réduction des fibres des compactifications proviennent des résultats de [Gör03]. Le drapeau s'obtient par adhérence du drapeau universel sur  $\mathcal{A}_{g,0}$  dans le groupe quasi-fini plat  $G[p]$ .  $\square$

Le champ  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$  est muni d'une stratification paramétrée par un quotient fini de  $\Sigma$  et la complétion formelle le long de la strate associée à  $\sigma \in \Sigma$  est isomorphe au quotient de la complétion formelle de  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}$  le long de  $Z_{\sigma,0}$  par un groupe fini. Le schéma semi-abélien  $G$  et le drapeau  $H_\bullet$  correspondent par cet isomorphisme au quotient de Mumford du 1-motif  $M_\sigma$  muni de sa structure de niveau canonique sur  $\mathcal{M}_{\sigma,0}$ . Dans le paragraphe suivant, on précise la combinatoire du bord de la compactification.

### 3.2. Compactifications améliorées

Deux problèmes subsistent. Le premier est de décrire précisément le bord de

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$$

et notamment les relations d'incidence entre les différentes strates. Le second est de se débarrasser des singularités toriques intervenant dans la compactification pour obtenir un champ n'ayant que les singularités des  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  pour  $r \leq g$ . Ce champ sera lisse sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  et le complémentaire de  $\mathcal{A}_g$  y sera un diviseur à croisements normaux.

Ces problèmes se résolvent simultanément en introduisant un *complexe conique*  $\mathcal{C}$  contenant  $C(X)$ . La décomposition  $\Sigma$  de  $C(X)$  induit une décomposition  $\mathfrak{S}_\Sigma$  de  $\mathcal{C}$ , ce qui conduit à une description explicite du bord de

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma.$$

On peut également remplacer le choix de  $\Sigma$  par un choix plus fin d'une décomposition  $\mathfrak{S}$  de  $\mathcal{C}$ , ce qui permet de construire des compactifications améliorées, sans singularité d'origine torique.

**3.2.1. Sous-espaces totalement isotropes.** — On introduit des notations analogues à celles du paragraphe 1.2.6. Soit  $V = \bigoplus_{j=1}^{2g} \mathbb{Z} \cdot x_j$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $2g$  muni d'une base  $(x_j)$ . On le munit de la forme alternée donnée par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J' \\ -J' & 0 \end{pmatrix},$$

où  $J'$  est la matrice anti-diagonale dont les coefficients non nuls sont égaux à 1. On rappelle que  $\mathcal{D} = \{d_1 < \dots < d_s\}$ . On définit une chaîne parahorique autoduale  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$  de  $V$  en posant, pour  $1 \leq i \leq s$ ,

$$\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^i = \bigoplus_{j=1}^{d_i} \mathbb{Z} \cdot x_j \oplus \bigoplus_{j=d_i+1}^{2g} p \mathbb{Z} \cdot x_j$$

et  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^{s+i} = \bigoplus_{j=1}^{2g-d_{s+1-i}} \mathbb{Z} \cdot x_j \oplus \bigoplus_{j=2g-d_{s+1-i}+1}^{2g} p \mathbb{Z}.$

Notons  $\Gamma_0$  le stabilisateur de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$  dans  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$  : c'est le sous-groupe de congruence parahorique associé à  $\mathcal{D}$ . Si  $V'$  est un sous-espace totalement isotrope facteur direct de  $V$ , notons  $r$  son rang et  $V'^{\perp}$  son orthogonal. L'entier  $r$  détermine l'ensemble de positions relatives  $\mathcal{W}_r$  (cf. le paragraphe 1.2.6, où cet ensemble était noté  $\mathcal{W}$ ). L'image de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$  dans  $V/V'^{\perp}$  définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Y}_0 & \longrightarrow & \mathbb{Y}_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Y}_s \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{X}_0 & \longleftarrow & \mathbb{X}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathbb{X}_s \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{Y}_0 & \longrightarrow & \mathbb{Y}_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Y}_s \end{array}$$

En particulier,  $V'$  définit un élément  $w \in \mathcal{W}_r$ . On est dans le cadre d'application de la construction du paragraphe 1.4.9, et l'on peut considérer le champ de modules

$$\mathcal{M}_{V',0} = \mathcal{M}_{\mathbb{X}_{\bullet}, \mathbb{Y}_{\bullet}, 0}^w.$$

D'après les résultats du paragraphe 1.4.6, il existe un champ algébrique  $\mathcal{B}_{V',0}$  et un tore  $E_{V',0}$  tels que  $\mathcal{M}_{V',0}$  soit un  $E_{V',0}$ -torseur sur  $\mathcal{B}_{V',0}$ . Posons  $S_{V',0} = \underline{\mathrm{Hom}}(E_{V',0}, \mathbb{G}_m)$ . C'est une structure entière sur  $\mathrm{Sym}^2(V/V'^{\perp}) \otimes \mathbb{R}$ .

**3.2.2. Complexe conique.** — Notons  $\mathfrak{C}$  l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes facteurs directs de  $V$ . Pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , notons  $C(V/V'^{\perp})$  le cône des formes bilinéaires symétriques semi-définies positives sur  $(V/V'^{\perp}) \otimes \mathbb{R}$  dont le radical est défini sur  $\mathbb{Q}$ . Pour tout  $V'' \subset V'$ , il existe une inclusion de  $C(V/V''^{\perp})$  dans  $C(V/V'^{\perp})$ . Notons  $\mathcal{C}$  le quotient de l'union disjointe

$$\coprod_{V' \in \mathfrak{C}} C(V/V'^{\perp})$$

par la relation d'équivalence engendrée par les inclusions de  $C(V/V''^{\perp})$  dans  $C(V/V'^{\perp})$  pour tous facteurs directs totalement isotropes  $V'' \subset V'$ . C'est un complexe conique qui est naturellement muni d'une action de  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ . Le sous-espace  $\oplus_{j=g+1}^{2g} \mathbb{Z} \cdot x_j$  facteur direct de  $V$  est totalement isotrope et, si l'on fixe un isomorphisme

$$X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=1}^g \mathbb{Z} \cdot x_j = V / \left( \bigoplus_{j=g+1}^{2g} \mathbb{Z} \cdot x_j \right)^{\perp},$$

on obtient une injection de  $C(X)$  dans  $\mathcal{C}$ . Cette injection est équivariante sous l'action de  $\mathrm{GL}(X)$ , vu comme un sous-groupe de  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ .

**3.2.3. Décompositions du complexe conique.** — On appelle *décomposition polyédrale rationnelle* de  $\mathcal{C}$  la donnée d'une décomposition polyédrale rationnelle de  $C(V/V'^{\perp})$  pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ ; on demande en outre que la décomposition de  $C(V/V''^{\perp})$  soit la restriction à  $C(V/V''^{\perp})$  de la décomposition de  $C(V/V'^{\perp})$  si  $V'' \subset V'$ . Soit  $\mathfrak{S}$  une décomposition polyédrale rationnelle de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 3.2.3.1.** — On dit que  $\mathfrak{S}$  est admissible relativement à  $\Gamma_0$  si elle est équivariante sous l'action de  $\Gamma_0$  et si le quotient  $\mathfrak{S}/\Gamma_0$  est fini. On dit que  $\mathfrak{S}$  est lisse si pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , la décomposition induite par  $\mathfrak{S}$  sur  $C(V/V'^{\perp})$  est lisse relativement à la structure entière duale de  $S_{V',0}$ .

À toute décomposition  $\Sigma$  de  $C(X)$  qui est  $\mathrm{GL}(X)$ -admissible on peut associer son orbite sous  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$  dans  $\mathcal{C}$ , ce qui détermine une décomposition  $\mathfrak{S}_{\Sigma}$  de  $\mathcal{C}$  qui est  $\Gamma_0$ -admissible. *A priori*,  $\mathfrak{S}_{\Sigma}$  n'est pas lisse. En revanche, il existe une décomposition  $\mathfrak{S}$  de  $\mathcal{C}$  qui raffine  $\mathfrak{S}_{\Sigma}$  et qui est lisse ([AMRT] II.5.3 ou [Pin90] 9.20).

**3.2.4. Plongements toroïdaux associés à  $\mathfrak{S}$ .** — On fixe une décomposition  $\Gamma_0$ -admissible  $\mathfrak{S}$  de  $\mathcal{C}$ . Elle pourra par exemple être égale à  $\mathfrak{S}_{\Sigma}$ , ou bien être lisse. Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}$ , il existe un unique sous-espace totalement isotrope  $V'_{\sigma}$  facteur direct de  $V$  tel que  $\sigma$  soit inclus dans l'intérieur de  $C(V/V'_{\sigma}{}^{\perp})$ . On dispose alors du champ algébrique  $\mathcal{M}_{V'_{\sigma},0}$  et du plongement toroïdal

$$\mathcal{M}_{V'_{\sigma},0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'_{\sigma},\sigma,0}$$

qui est construit à partir du cône  $\sigma \subset \text{Hom}(\text{Sym}^2(V/V'_\sigma{}^\perp), \mathbb{R})$  et de la structure entière  $S_{V'_\sigma, 0} \subset \text{Sym}^2(V/V'_\sigma{}^\perp) \otimes \mathbb{R}$ . Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{M}}_{V'_\sigma, \sigma, 0}$  est affine de type fini sur  $\mathcal{B}_{V'_\sigma, 0}$ . Il est muni d'une stratification localement fermée paramétrée par les faces de  $\sigma$ . On note  $Z_{V'_\sigma, \sigma, 0}$  l'unique strate fermée. Soit  $V'$  un sous-espace totalement isotrope facteur direct de  $V$ . Notons

$$\mathcal{M}_{V', 0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$$

le plongement toroïdal localement de type fini sur  $\mathcal{B}_{V', 0}$  associé à la restriction de  $\mathfrak{S}$  à  $C(V/V'^\perp)$ , et à la structure entière  $S_{V', 0}$ . Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$  est muni d'une stratification paramétrée par la restriction de  $\mathfrak{S}$  à  $C(V/V'^\perp)$ . Notons  $Z_{V', 0}$  l'union des strates paramétrées par des cônes inclus dans l'intérieur de  $C(V/V'^\perp)$ . Le champ  $Z_{V', 0}$  est alors un sous-champ fermé de  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$ .

**Remarque 3.2.4.1.** — Si  $\mathfrak{S}$  est lisse, les champs  $\overline{\mathcal{M}}_{V'_\sigma, \sigma, 0}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$  sont lisses sur  $\mathcal{B}_{V', 0}$ . Leurs singularités sont donc celles des champs  $\mathcal{A}_{g-r, 0}$  pour  $r \geq 0$ . En particulier, les champs  $\overline{\mathcal{M}}_{V'_\sigma, \sigma, 0}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$  sont lisses sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  et le complémentaire des strates ouvertes est un diviseur à croisements normaux.

**3.2.5. Groupes d'automorphismes.** — Soit  $V' \in \mathfrak{C}$ . Le stabilisateur de  $V'$  dans  $\Gamma_0$  agit sur  $V/V'^\perp$ . On note  $\Gamma_{V'}$  son image dans  $\text{GL}(V/V'^\perp)$ . Le groupe  $\Gamma_{V'}$  agit sur  $C(V/V'^\perp)$  en stabilisant globalement la restriction de  $\mathfrak{S}$  à  $C(V/V'^\perp)$ . Ce groupe agit donc sur  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$ . Le quotient  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}/\Gamma_{V'}$  est de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  car  $\mathfrak{S}/\Gamma_0$  est fini. Pour tout cône  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}$ , on note  $\Gamma_\sigma$  le stabilisateur de  $\sigma$  dans  $\Gamma_{V'_\sigma}$ . C'est un sous-groupe fini de  $\text{GL}(V/V'_\sigma{}^\perp)$  qui agit sur  $\overline{\mathcal{M}}_{V'_\sigma, \sigma, 0}$ .

**3.2.6. Cartes formelles associées à  $\mathfrak{S}$ .** — Pour tout cône  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}$ , notons

$$\widehat{\overline{\mathcal{M}}}_{V'_\sigma, \sigma, 0}$$

le complété formel de  $\overline{\mathcal{M}}_{V'_\sigma, \sigma, 0}$  le long de  $Z_{V'_\sigma, \sigma, 0}$ . Le groupe fini  $\Gamma_\sigma$  agit sur ce schéma formel, puisqu'il préserve la strate  $Z_{V'_\sigma, \sigma, 0}$ . Pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , notons

$$\widehat{\overline{\mathcal{M}}}_{V', 0}$$

le complété formel de  $\overline{\mathcal{M}}_{V', 0}$  le long de  $Z_{V', 0}$ . Il est muni d'une action de  $\Gamma_{V'}$  et le quotient est formellement de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ .

**3.2.7. Énoncé du théorème principal.** — Soient  $\Sigma$  une décomposition de  $C(X)$  lisse pour la structure entière  $\text{Sym}^2(X)$ , et  $\mathfrak{S}$  une décomposition de  $\mathcal{C}$  qui raffine  $\mathfrak{S}_\Sigma$ . Notons

$$\overline{\mathcal{A}}_g^\Sigma$$

la compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_g$  construite par Faltings et Chai.

**Théorème 3.2.7.1.** — *Il existe un champ algébrique*

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}}$$

*qui est propre sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ , qui contient  $\mathcal{A}_{g,0}$  comme ouvert dense, et tel que l'on ait un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{g,0} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_g & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}. \end{array}$$

*Le champ  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}}$  est muni d'une stratification localement fermée paramétrée par  $\mathfrak{S}/\Gamma_0$ . Son complété formel le long de la strate associée à tout cône  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}$  est isomorphe à*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{V'_\sigma, \sigma, 0} / \Gamma_\sigma.$$

*Pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , le complété formel de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}}$  le long de l'union des strates associées aux cônes de  $\mathfrak{S}$  qui sont inclus dans l'intérieur de  $C(V/V'^\perp)$  est isomorphe à*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{V', 0} / \Gamma_{V'}.$$

*Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}}$  est normal et sa projection sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$  est plate à fibres géométriques réduites. Si  $\mathfrak{S}$  est lisse, ses singularités sont celles des champs  $\mathcal{A}_{g-r,0}$  pour  $r \geq 0$ . En particulier, il est lisse sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$  et le complémentaire de  $\mathcal{A}_{g,0}$  est un diviseur relatif à croisements normaux.*

Dans le cas où  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\Sigma$ , on a  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma = \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}}$  et le théorème 3.2.7.1 précise la combinatoire évoquée après le théorème 3.1.8.3.

*Démonstration.* — On reprend la construction de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\Sigma$  en l'adaptant légèrement. Pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , notons  $\mathfrak{S}_\sigma$  l'ensemble des cônes de  $\mathfrak{S}$  qui appartiennent à l'orbite de  $\sigma$  sous l'action de  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ . Posons

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}_\sigma, 0} = \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_{V'_\tau, \tau, 0}.$$

Soit  $\overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et}$  une carte locale algébrique sans niveau. On pose

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}_\sigma, 0}^{et} = \overline{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}_\sigma, 0} \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_\sigma^{et},$$

On définit alors  $\overline{U}_{\mathfrak{S}, 0}$  comme l'union de tous les schémas  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}_\sigma, 0}^{et}$  pour  $\sigma \in \Sigma$ . On définit le groupoïde  $\overline{R}_{\mathfrak{S}, 0}$  comme dans le paragraphe 3.1.8 et l'on vérifie qu'il est étale. On note

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathfrak{S}} = \overline{U}_{\mathfrak{S}, 0} / \overline{R}_{\mathfrak{S}, 0}$$

le champ algébrique quotient. On voit dans les démonstrations des propositions analogues à **3.1.2** et **3.1.8.1** que le groupoïde  $\overline{R}_{\mathfrak{E},0}$  respecte la stratification et qu'il identifie des strates conjuguées sous l'action de  $\Gamma_0$ . On en déduit les assertions relatives à la stratification de la compactification. Les autres assertions résultent de [**Gör03**] et de la proposition **3.1.7.1**.  $\square$

**3.2.8. Propriété modulaire à la frontière.** — Soient  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de  $\text{Ouv}$  et  $(G', H'_\bullet)$  un objet de  $\mathcal{A}_{g,0}(U)$  tel que  $G'$  s'étend en un schéma semi-abélien sur  $S$ . Notons  $G'_i = G'/H'_i$  pour  $1 \leq i \leq s$ . Il existe une chaîne d'isogénies

$$G' = G'_0 \longrightarrow G'_1 \longrightarrow G'_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G'_s$$

entre schémas semi-abéliens sur  $S$ . Rappelons qu'on a défini le dual d'un schéma semi-abélien dans le paragraphe **1.3.5**. Il existe donc une chaîne de morphismes

$$(3.2.8.A) \quad \underline{X}(G'_0{}^t) \longrightarrow \underline{X}(G'_1{}^t) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{X}(G'_s{}^t) \longrightarrow \underline{X}(G'_s) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{X}(G'_0).$$

Supposons qu'il existe  $V' \in \mathfrak{C}$  et une surjection de  $V/V'^\perp$  dans  $\underline{X}(G')$  qui identifie l'image de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^\bullet$  et (3.2.8.A). D'après la proposition **1.4.6.2**, la famille des formes bilinéaires  $\underline{B}(G'_i)$  définit un morphisme  $\underline{B}(G', H'_\bullet)$  de  $S_{V',0}$  dans  $\text{Div}_S$ . La propriété modulaire à la frontière suivante est la traduction de la proposition **3.1.8.2** en terme de complexe conique.

**Proposition 3.2.8.1.** — *Le groupoïde  $(\mathcal{A}_{g,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^\mathfrak{S})(U \hookrightarrow S)$  paramètre les objets  $(G', H'_\bullet)$  de  $\mathcal{A}_{g,0}(U)$  tels que  $G'$  s'étend en un schéma semi-abélien sur  $S$ , et tels que localement pour la topologie étale de  $S$ , il existe  $V' \in \mathfrak{C}$ , une surjection  $V/V'^\perp \rightarrow \underline{X}(G')$  identifiant l'image de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^\bullet$  et (3.2.8.A), et  $\sigma \in \mathfrak{S}$  dont l'adhérence contient la forme bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}(G', H'_\bullet)$  pour tout diviseur irréductible réduit  $D$  de  $S$ .*

### 3.3. Structure de niveau principale en un entier auxiliaire

Soit  $n \geq 3$  un entier non divisible par  $p$ . Notons  $\mathcal{A}_{g,n} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$  l'espace de modules des schémas abéliens principalement polarisés de genre  $g$  munis d'une structure de niveau principale en  $n$ . Il paramètre donc les schémas abéliens  $A$  munis d'un isomorphisme

$$V/nV \xrightarrow{\sim} A[n]$$

qui respecte les formes symplectiques à un scalaire près. D'après [**MF94**],  $\mathcal{A}_{g,n}$  est un schéma quasi-projectif sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ . Posons également

$$\mathcal{A}_{g,n,0} = \mathcal{A}_{g,0} \times_{\mathcal{A}_g} \mathcal{A}_{g,n}.$$

On décrit à présent comment combiner la construction des compactifications de  $\mathcal{A}_{g,0}$  et de  $\mathcal{A}_{g,n}$  pour obtenir des compactifications toroïdales de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ , qui seront utiles lors de la compactification minimale de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ . Nous changeons la description des compactifications



obtenues, en vue de l'application à la compactification minimale : nous décrivons une première stratification en terme de  $\mathfrak{C}$ , puis une stratification plus fine en terme de  $\mathfrak{S}$ .

Soit  $\Sigma$  une décomposition polyédrale  $\mathrm{GL}(X)$ -admissible de  $C(X)$ . Posons  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\Sigma$ . C'est la décomposition polyédrale  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -admissible  $\mathfrak{S}$  de  $\mathcal{C}$  obtenue en prenant l'orbite de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}$  sous l'action de  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ . D'après [FC90, th. IV.5.7 et 6.7] et le théorème 3.2.7.1, il existe des compactifications

$$\mathcal{A}_g \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g, \quad \mathcal{A}_{g,n} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{g,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}$$

associées à  $\Sigma$  et à  $\mathfrak{S}$ . Posons

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} = \overline{\mathcal{A}}_{g,0} \times_{\overline{\mathcal{A}}_g} \overline{\mathcal{A}}_{g,n}.$$

C'est une compactification de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ .

**3.3.1. Stratification de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$ .** — Dans ce paragraphe, on décrit deux stratifications naturelles de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$ . Posons

$$\Gamma_n = \mathrm{Ker} \left( \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \right).$$

D'après [FC90, th. IV.5.7 et 6.7] et le théorème 3.2.7.1, les champs algébriques

$$\overline{\mathcal{A}}_g, \quad \overline{\mathcal{A}}_{g,n} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{A}}_{g,0}$$

sont munis d'une stratification paramétrée par  $\mathfrak{S}/\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ ,  $\mathfrak{S}/\Gamma_n$  et  $\mathfrak{S}/\Gamma_0$ , ainsi que d'une d'une stratification plus grossière paramétrée par  $\mathfrak{C}/\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ ,  $\mathfrak{C}/\Gamma_n$  et  $\mathfrak{C}/\Gamma_0$ . Dans le reste de ce paragraphe, on décrit plus précisément ces stratifications. Soit  $V' \in \mathfrak{C}$ . Il existe des variétés de Siegel  $\mathcal{A}_{V'}$ ,  $\mathcal{A}_{V',n}$  et  $\mathcal{A}_{V',0}$  (de type parahorique l'image de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^\bullet$  dans  $V'^\perp/V'$ ), des schémas abéliens

$$\mathcal{B}_{V'} \rightarrow \mathcal{A}_{V'}, \quad \mathcal{B}_{V',n} \rightarrow \mathcal{A}_{V',n} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{V',0} \rightarrow \mathcal{A}_{V',0},$$

des  $\mathbb{Z}$ -modules libres  $S_{V'}$ ,  $S_{V',n}$  et  $S_{V',0}$ , des toseurs

$$\mathcal{M}_{V'} \rightarrow \mathcal{B}_{V'}, \quad \mathcal{M}_{V',n} \rightarrow \mathcal{B}_{V',n} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{V',0} \rightarrow \mathcal{B}_{V',0}$$

sous les tores

$$E_{V'} = \underline{\mathrm{Hom}}(S_{V'}, \mathbb{G}_m), \quad E_{V',n} = \underline{\mathrm{Hom}}(S_{V',n}, \mathbb{G}_m) \quad \text{et} \quad E_{V',0} = \underline{\mathrm{Hom}}(S_{V',0}, \mathbb{G}_m),$$

et des fibrés en plongements toriques localement de type fini

$$\overline{\mathcal{M}}_{V'} \rightarrow \mathcal{B}_{V'}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{V',n} \rightarrow \mathcal{B}_{V',n} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}_{V',0} \rightarrow \mathcal{B}_{V',0}$$

qui sont munis d'une strate fermée canonique. Notons  $\Gamma_{V'}$ ,  $\Gamma_{V',n}$  et  $\Gamma_{V',0}$  les stabilisateurs de  $V'$  dans  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ , dans  $\Gamma_n$  et dans  $\Gamma_0$ .

Notons  $\mathfrak{S}_{V'}$  l'ensemble des  $\sigma \in \mathfrak{S}$  inclus dans l'intérieur de  $C(V/V^\perp)$ . Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$ , on dispose de fibrés en plongements toriques affines de type fini

$$\overline{\mathcal{M}}_\sigma \rightarrow \mathcal{B}_{V'}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n} \rightarrow \mathcal{B}_{V',n} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0} \rightarrow \mathcal{B}_{V',0}$$

munis d'une stratification paramétrée par les faces de  $\sigma$ . Dans tous les cas, la strate paramétrée par  $\sigma$  (la  $\sigma$ -strate) est l'unique strate fermée. Notons  $\Gamma_\sigma$  et  $\Gamma_{\sigma,0}$  les stabilisateurs de  $\sigma$  dans  $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$  et dans  $\Gamma_0$ ; ce sont des groupes finis.

**Remarque 3.3.1.1.** — Comme  $n \geq 3$ , le stabilisateur de  $\sigma$  dans  $\Gamma_n$  est trivial d'après le lemme de Serre [Ser60].

D'après les théorèmes IV.5.7 et IV.6.7 de [FC90] et le théorème 3.2.7.1, il existe des isomorphismes

$$(3.3.1.A) \quad \widehat{\mathcal{M}}_{V'} / \Gamma_{V'} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_g^{V'}, \quad \widehat{\mathcal{M}}_{V',n} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_{g,n}^{V'} / \Gamma_{V',n}, \quad \widehat{\mathcal{M}}_{V',o} / \Gamma_{V',o} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_{g,o}^{V'}$$

$$\widehat{\mathcal{M}}_\sigma / \Gamma_\sigma \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_g^\sigma, \quad \widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,n} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_{g,n}^\sigma \text{ et } \widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,o} / \Gamma_{\sigma,o} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_{g,o}^\sigma$$

entre complétés formels le long des  $V'$ -strates et des  $\sigma$ -strates. Considérons les produits fibrés

$$\mathcal{A}_{V',n,0} = \mathcal{A}_{V',0} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V',n}, \quad \mathcal{B}_{V',n,0} = \mathcal{B}_{V',0} \times_{\mathcal{B}_{V'}} \mathcal{B}_{V',n},$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{V',n,0} = \overline{\mathcal{M}}_{V',0} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{V'}} \overline{\mathcal{M}}_{V',n}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0} = \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0} \times_{\overline{\mathcal{M}}_\sigma} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n},$$

la somme amalgamée

$$S_{V',n,0} = S_{V',0} \bigoplus_{S_{V'}} S_{V',n},$$

le groupe  $\Gamma_{V',n,0} = \Gamma_{V',0} \cap \Gamma_{V',n}$  et le groupe  $\Gamma_{n,0} = \Gamma_n \cap \Gamma_0$ . Les schémas  $\overline{\mathcal{M}}_{V',n,0}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$  sont des fibrés en plongements toriques sur  $\mathcal{B}_{V',n,0}$ , équivariants sous le tore

$$E_{V',n,0} = \underline{\mathrm{Hom}}(S_{V',n,0}, \mathbb{G}_m).$$

La proposition suivante résulte immédiatement des isomorphismes (3.3.1.A).

**Proposition 3.3.1.2.** — *Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  est muni d'une stratification paramétrée par  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$ . Son complété formel le long de la  $V'$ -strate est isomorphe au quotient*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{V',n,0} / \Gamma_{V',n,0}$$

*du complété formel de  $\overline{\mathcal{M}}_{V',n,0}$  le long de la strate fermée canonique. Le champ  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  est également muni d'une stratification plus fine paramétrée par  $\mathfrak{S}/\Gamma_{n,0}$ . Son complété formel le long de la  $\sigma$ -strate est isomorphe au complété formel*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$$

*de  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$  le long de la  $\sigma$ -strate.*

Le corollaire suivant résulte du fait que  $\mathcal{A}_{g,n}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$  sont des schémas pour  $\sigma \in \mathfrak{S}$ .

**Corollaire 3.3.1.3.** — *Le champ algébrique  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  est un espace algébrique.*

**3.3.2. Extension des schémas abéliens.** — Notons  $G_0$  le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ , et  $H_\bullet$  le drapeau universel de  $G_0[p]$ . Posons  $G_i = G_0/H_i$  pour  $1 \leq i \leq s$ . Il existe une chaîne d'isogénies

$$G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_s$$

entre schémas abéliens sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ . Le théorème **3.2.7.1** et les résultats de [FC90, II.2] montrent que  $G_i$  s'étend en un schéma semi-abélien

$$G_i \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$$

pour  $0 \leq i \leq s$ , et que la chaîne d'isogénies s'étend en une chaîne de morphismes entre schémas semi-abéliens. Pour tout  $0 \leq i \leq s$ , on note  $e_i$  la section neutre de  $G_i$  et l'on pose

$$\Omega_i = e_i^* \Omega_{G_i/\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}} \quad \text{et} \quad \omega_i = \det(\Omega_i).$$

Ces derniers sont des faisceaux localement libres sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  de rang respectifs  $g$  et  $1$ . On appelle  $\omega_i$  le  $i$ -ème *fibré de Hodge*. Il existe une suite de morphismes

$$\omega_s \longrightarrow \omega_{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \omega_0$$

définis sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ , qui induisent des isomorphismes après changement de base par  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ .

Pour tous  $V' \in \mathfrak{C}$  et  $0 \leq i \leq s$ , il existe un schéma semi-abélien  $\tilde{G}_{V',i} \longrightarrow \mathcal{B}_{V',n,0}$  qui est globalement extension

$$0 \longrightarrow T_{V',i} \longrightarrow \tilde{G}_{V',i} \longrightarrow A_{V',i} \longrightarrow 0$$

d'un schéma abélien par un tore (*cf.* paragraphes 1.4.5 et 1.4.9). Le schéma abélien  $A_{V',i}$  provient d'un schéma abélien sur  $\mathcal{A}_{V',n,0}$ . Le groupe des caractères  $X_{V',i}$  du tore  $T_{V',i}$  est égal à l'image de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^{2s-i}$  dans  $V/V'^{\perp}$  (*cf.* paragraphe 3.2.1). On a par exemple  $X_{V',0} = V/V'^{\perp}$ . Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$ , on note encore  $\tilde{G}_{V',i}$  le schéma semi-abélien qui est l'image réciproque de  $\tilde{G}_{V',i}$  par le morphisme

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0} \longrightarrow \mathcal{B}_{V',n,0}.$$

D'après la remarque qui suit le théorème **3.1.8.3**, l'extension de Raynaud de

$$G_i \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$$

est  $\tilde{G}_{V',i}$ . Il existe donc sur  $\widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$  des isomorphismes

$$(3.3.2.A) \quad \begin{aligned} \omega_i &\xrightarrow{\sim} \det\left(\Omega_{\tilde{G}_{V',i}}\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \det(X_{V',i}) \otimes \omega_{A_{V',i}}. \end{aligned}$$



## CHAPITRE 4

### COMPACTIFICATION MINIMALE

Dans ce chapitre, nous définissons les formes modulaires de Siegel arithmétiques de niveau principal en un entier  $n \geq 3$  non divisible par  $p$ , et de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ . Le poids d'une telle forme est une famille  $(k_0, \dots, k_s)$  d'entiers relatifs qui code le faisceau inversible dont la forme est une section globale. Nous définissons le développement de Fourier-Jacobi d'une forme modulaire et montrons une version du principe de Köcher, valable si  $g \geq 2$ , ainsi qu'un principe de développement de Fourier-Jacobi. Pour cela, nous utilisons le caractère réduit de  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  [Gör03], la densité de son lieu ordinaire [GN02] et une description de ses composantes irréductibles [Yu04]. Enfin, nous construisons la compactification minimale de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  pour  $n \geq 3$  non divisible par  $p$ . Cette dernière est un schéma projectif associé à l'algèbre graduée des formes modulaires de poids  $(k, \dots, k)$  pour  $k \geq 0$ . Nous utilisons de manière essentielle la normalité de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  (prop. 3.1.7.1).

#### 4.1. Formes modulaires de Siegel

On fixe un entier  $n \geq 3$  non divisible par  $p$ , un élément  $\underline{k} = (k_0, \dots, k_s)$  de  $\mathbb{Z}^{s+1}$ , un  $\mathbb{Z}[1/n]$ -module  $M$  et l'on pose

$$\omega^{\underline{k}} = \bigotimes_{i=0}^s \omega_i^{\otimes k_i}$$

qui est un faisceau inversible sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$ .

**Définition 4.1.1.** — Une forme modulaire de Siegel de genre  $g$ , de poids  $\underline{k}$ , de niveau principal en  $n$ , de niveau parahorique de type  $\mathcal{D}$  en  $p$ , et à valeurs dans  $M$  est un élément du groupe

$$H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^{\underline{k}} \otimes M).$$

**Remarque 4.1.2.** — La famille  $\underline{k} = (k_0, \dots, k_s)$  induit une famille  $(\det^{k_0}, \dots, \det^{k_s})$  de caractères du groupe algébrique  $\text{GL}_g$ . On pourrait remplacer le choix de  $\underline{k}$  par celui d'une

famille de  $s + 1$  représentations algébriques de  $GL_g$ , et l'on obtiendrait des formes à valeurs vectorielles; les résultats de cette partie s'adapteraient sans peine.

Si  $M$  est un  $\mathbb{Z}[1/np]$ -module, les faisceaux  $\omega_i^{\otimes k_i} \otimes M$  sont tous isomorphes. La donnée de  $\underline{k}$  est donc équivalente à celle de  $\sum_i k_i$ .

**Proposition 4.1.3.** — *Le groupe  $H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^{\underline{k}} \otimes M)$  est indépendant du choix de la décomposition polyédrale  $\Sigma$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\Sigma'$  une autre décomposition polyédrale  $GL(X)$ -admissibles de  $C(X)$ . Notons

$$\overline{\mathcal{A}}'_{g,n,0}$$

la compactification toroïdale qui lui est associée. Deux décompositions admettent un raffinement commun; on peut donc supposer que  $\Sigma'$  raffine  $\Sigma$ . Il existe alors un morphisme

$$\phi : \overline{\mathcal{A}}'_{g,n,0} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$$

qui est propre, surjectif et birationnel. Localement pour la topologie étale,  $\phi$  s'identifie à un morphisme entre plongements toriques équivariants sous le même tore. En utilisant les résultats de [KKMSD, I.3], on voit que

$$\phi_* \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}'_{g,n,0}} = \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}}$$

et que pour tout  $j > 0$ , on a

$$R^j \phi_* \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}'_{g,n,0}} = 0.$$

Notons  $\omega'_i$  le  $i$ -ème fibré de Hodge sur  $\overline{\mathcal{A}}'_{g,n,0}$ . Comme  $\omega'_i = \phi^* \omega_i$ , la formule de projection et la suite spectrale de Leray montrent qu'on a bien

$$H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^{\underline{k}} \otimes M) = H^0(\overline{\mathcal{A}}'_{g,n,0}, \omega'^{\underline{k}} \otimes M). \quad \square$$

**4.1.4. Développement de Fourier-Jacobi.** — Le  $E_{V',n,0}$ -torseur  $\mathcal{M}_{V',n,0}$  est affine sur  $\mathcal{B}_{V',n,0}$  pour  $V' \in \mathfrak{C}$ . Il existe donc un faisceau  $\mathcal{A}$  en algèbres sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_{V',n,0}}$  tel que

$$\mathcal{M}_{V',n,0} = \underline{\text{Spec}}(\mathcal{A})$$

Le tore  $E_{V',n,0}$  agit sur  $\mathcal{A}$  et l'on peut décomposer ce faisceau en algèbres selon le groupe des caractères  $S_{V',n,0}$  de  $E_{V',n,0}$ . On obtient

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\lambda \in S_{V',n,0}} \mathcal{L}(\lambda)$$

où  $\mathcal{L}(\lambda)$  est le sous  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_{V',n,0}}$ -module de  $\mathcal{A}$  sur lequel  $E_{V',n,0}$  agit par  $\lambda$ . Comme  $\mathcal{M}_{V',n,0}$  est un  $E_{V',n,0}$ -torseur,  $\mathcal{L}(\lambda)$  est un faisceau inversible sur  $\mathcal{B}_{V',n,0}$ . Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$ , si l'on pose

$$\sigma^\vee = \{ \lambda \in \text{Sym}^2(V/V'^\perp \otimes \mathbb{R}) \mid b(\lambda) \geq 0 \ \forall b \in \sigma \},$$

on a par définition

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0} = \underline{\text{Spec}} \left( \bigoplus_{\lambda \in S_{V',n,0} \cap \sigma^\vee} \mathcal{L}(\lambda) \right).$$

Posons

$$\omega_{\text{et}}^k = \bigotimes_{i=0}^s (\det(X_{V',i}))^{k_i} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{ab}}^k = \bigotimes_{i=0}^s \omega_{A_{V',i}}^{k_i}.$$

Dans la définition suivante, on utilise la proposition **3.3.1.2** et le calcul (**3.3.2.A**) de  $\omega_i$  au voisinage d'une strate. Soit  $f \in H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M)$ .

**Définition 4.1.4.1.** — Le développement de Fourier-Jacobi de  $f$  en  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$  est la série formelle

$$\text{FJ}_\sigma(f) = \sum_{\lambda \in S_{V',n,0} \cap \sigma^\vee} a_{\lambda,\sigma}(f) \in \prod_{\lambda \in S_{V',n,0} \cap \sigma^\vee} H^0(\mathcal{B}_{V',n,0}, \mathcal{L}(\lambda) \otimes \omega_{\text{et}}^k \otimes \omega_{\text{ab}}^k \otimes M)$$

obtenue en évaluant  $f$  sur le complété formel de  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$  le long de sa  $\sigma$ -strate.

Posons  $\sigma^> = \{ \lambda \in \text{Sym}^2(V/V'^\perp \otimes \mathbb{R}) \text{ tel que } b(\lambda) > 0 \forall b \in \sigma \}$ . L'idéal de la  $\sigma$ -strate de  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}$  est engendré par les  $H^0(\mathcal{B}_{V',n,0}, \mathcal{L}(\lambda))$  où  $\lambda \in S_{V',n,0} \cap \sigma^>$ . On en déduit que presque tous les  $a_{\lambda,\sigma}(f)$  sont nuls pour  $\lambda \in \sigma^\vee - \sigma^>$ .

**Proposition 4.1.4.2.** — Le développement de Fourier-Jacobi de  $f$  en  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$  ne dépend que de  $f$  et de  $V'$ .

*Démonstration.* — Soient  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_{V'}$ . Quitte à considérer une suite de cônes reliant  $\tau$  et  $\sigma$ , on peut supposer que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . Il existe alors une immersion ouverte

$$\overline{\mathcal{M}}_{\tau,n,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0}.$$

Comme les schémas semi-abéliens  $G_{V',i}$  se correspondent *via* ce plongement, on voit que

$$\text{FJ}_\sigma(f) = \text{FJ}_\tau(f) \in H^0(\widehat{\overline{\mathcal{M}}}_{\tau,n,0}, \omega^k). \quad \square$$

On appelle *pointe* ou *cuspid* les éléments de  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$ . La proposition précédente permet de définir le développement de Fourier-Jacobi

$$\text{FJ}_{V'}(f) = \sum_{\lambda} a_{\lambda,V'}(f)$$

de  $f$  en la pointe  $V' \in \mathfrak{C}$ . Le corollaire suivant résume quelques propriétés élémentaires du développement de Fourier-Jacobi. On y utilise le fait que  $\cap_{\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}} \sigma^\vee = C(V/V'^\perp)^\vee$  et que le groupe  $\Gamma_{V',n,0}$  agit sur l'algèbre

$$\prod_{\lambda \in S_{V',n,0}} H^0(\mathcal{B}_{V',n,0}, \mathcal{L}(\lambda) \otimes \omega_{\text{et}}^k \otimes \omega_{\text{ab}}^k \otimes M).$$

**Corollaire 4.1.4.3.** — *Le développement de Fourier-Jacobi de  $f$  en  $V'$  est indépendant de  $\Sigma$ , et est invariant sous l'action de  $\Gamma_{V',n,0}$ . L'application  $\lambda \mapsto a_{\lambda,V'}(f)$  est à support dans*

$$S_{V',n,0} \cap C(V/V'^{\perp})^{\vee}.$$

On a  $F_{\gamma,V'}(f) = \gamma \cdot F_{V'}(f)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_{n,0}$ .

**Remarque 4.1.4.4.** — Si  $V' \in \mathfrak{C}$  est un sous-espace totalement isotrope maximal, le schéma  $\mathcal{B}_{V',n,0}$  est égal à  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$  et le développement de Fourier-Jacobi de  $f$  est un élément de

$$\mathbb{Z}[1/n] \left[ \left[ S_{V',n,0} \otimes \omega_{\text{ét}}^k \otimes M \right] \right],$$

qu'on appelle habituellement *q-développement* de  $f$ .

**4.1.5. Principe de Köcher.** — Dans ce paragraphe, on démontre une version du principe de Köcher en utilisant la méthode de [FC90, V.1] et la proposition suivante, qui résulte de [GN02] et de [Yu04].

**Proposition 4.1.5.1.** — *Toute composante irréductible de  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  rencontre le bord de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer l'énoncé analogue où  $\mathbb{F}_p$  est remplacé par une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . D'après le théorème principal de [GN02], le lieu ordinaire  $\mathcal{A}_{g,n,0}^{\text{ord}}$  de  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  est dense dans  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ . On en déduit que les composantes irréductibles de  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  sont les adhérences des composantes irréductibles de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^{\text{ord}}$ . D'après [Yu04, 3.2 et 3.3], les composantes irréductibles de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^{\text{ord}}$  sont ses composantes connexes. De plus, on dispose d'une description explicite de ces composantes connexes : ce sont les fibres du morphisme

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^{\text{ord}} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \times \{ (d'_1 < d'_2 < \dots < d'_s) \mid 0 \leq d'_i \leq d_i \ \forall i \leq s \}$$

qui à un objet  $(A, c : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \xrightarrow{\sim} A[n], H_{\bullet})$  de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^{\text{ord}}$  associe le facteur de similitude de  $c$  et la famille formée des rangs multiplicatifs  $d'_i$  des  $H_i$ . On déduit de la proposition 3.3.1.2 que chaque composante connexe de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^{\text{ord}}$  rencontre le bord de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  (cf. paragraphe 1.2.6).  $\square$

**Remarque 4.1.5.2.** — En fait, on a démontré que toute composante irréductible de  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  rencontre une  $V'$ -strate pour un certain  $V' \in \mathfrak{C}$  maximal.

**Corollaire 4.1.5.3.** — *Si  $F_{J_{V'}}(f) = 0$  pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , on a  $f = 0$ .*

*Démonstration.* — Sur un schéma quasi-cohérent, la formation de la cohomologie cohérente commute aux limites inductives de faisceaux. On peut donc supposer que  $M$  est de type



fini sur  $\mathbb{Z}$ , puis que  $M$  est égal à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , à  $\mathbb{Z}[1/n]$  ou à  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ , où  $l$  est un nombre premier qui ne divise pas  $np$ . En particulier,  $M$  est un anneau et l'on a

$$H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M) = H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M), \omega^k).$$

Si  $M = \mathbb{Z}[1/n]$  ou  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ , pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}$  l'image du morphisme

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\sigma,n,0} \times \text{Spec}(M) \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M)$$

donné par la proposition **3.3.1.2** a une intersection non vide avec toutes les composantes irréductibles de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M)$ . Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout schéma réduit  $X$ , pour tout ouvert dense  $U$  et pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  localement libre sur  $X$ , la restriction

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(U, \mathcal{F})$$

est injective. Si  $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , un raisonnement analogue s'applique. On utilise la proposition **4.1.5.1** et le caractère réduit de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M)$  [**Gör03**], en tenant compte des développements de Fourier-Jacobi en tous les  $V' \in \mathfrak{C}$ .  $\square$

**Remarque 4.1.5.4.** — Soit  $R$  un système de représentants des orbites de sous-espaces totalement isotropes maximaux facteurs directs de  $V$  sous l'action de  $\Gamma_{n,0}$ . D'après la remarque **4.1.5.2**, l'application  $f \mapsto \{\text{FJ}_{V'}(f)\}_{V' \in R}$  est injective. Si l'on se restreint aux formes modulaires à valeurs dans un module sans  $p$ -torsion, il résulte de la démonstration du corollaire **4.1.5.3** que  $f \mapsto \text{FJ}_{V'}(f)$  est injective pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ .

On déduit du corollaire **4.1.5.3** un principe de développement de Fourier-Jacobi.

**Corollaire 4.1.5.5.** — Soient  $M \subset M'$  deux  $\mathbb{Z}$ -modules et  $f \in H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M')$ . Si  $\text{FJ}_{V'}(f)$  est à coefficients dans  $M$  pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , on a

$$f \in H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M).$$

On dispose également d'une version du principe de Köcher.

**Proposition 4.1.5.6.** — Si  $g \geq 2$ , l'application de restriction réalise un isomorphisme

$$H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{A}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M).$$

*Démonstration.* — On se réduit comme précédemment au cas où  $M = \mathbb{Z}[1/n]$  ou  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ , et où  $l$  ne divise pas  $n$ . Le schéma  $\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M)$  est un ouvert dense de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M)$ . Le schéma  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M)$  est réduit. On en déduit que l'application de restriction est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit  $f \in H^0(\mathcal{A}_{g,n,0} \times \text{Spec}(M), \omega^k)$ . Pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$  maximal, on peut former un développement de Fourier-Jacobi  $\text{FJ}_{V'}(f)$  analogue à celui de la définition **4.1.4.1**. Notons  $\Lambda$  l'ensemble des  $\lambda \in S_{V',n,0}$  tels que  $a_{\lambda,V'}(f) \neq 0$ . Il est invariant sous  $\Gamma_{V',n,0}$  et son intersection avec  $S_{V',n,0} \setminus \sigma^\vee$  est finie pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$ . On déduit de [**FC90**, lem. V.1.3] que  $\Lambda \subset C(V/V'^\perp)^\vee$  : en effet, on remarque que

l'image de  $\Gamma_{V',n,0}$  dans  $\mathrm{GL}(V/V'^\perp)$  est d'indice fini, et qu'une puissance assez grande de l'endomorphisme  $T$  de [FC90, V.1.3] est dans cette image. La section  $f$  s'étend donc à  $\widehat{M}_{V',n,0}$ . On en déduit que  $f$  s'étend  $\widehat{M}_{V'',n,0}$  pour tout  $V'' \in \mathfrak{C}$ , puis que  $f$  s'étend à  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$ .  $\square$

**4.1.6. Coefficient constant.** — Soient une forme modulaire  $f \in H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^k \otimes M)$ , un sous-espace  $V' \in \mathfrak{C}$  et un cône  $\sigma \in \mathfrak{S}_{V'}$ . Dans cette partie, nous montrons que la restriction de  $f$  à la  $\sigma$ -strate est indépendante de  $\sigma$  et définit une forme modulaire de genre  $g - \mathrm{rang}(V')$ .

**Proposition 4.1.6.1.** — *La restriction de  $f$  à la  $\sigma$ -strate de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  ne dépend que de  $V'$  et est égale à*

$$a_{0,V'}(f) \in H^0\left(\mathcal{B}_{V',n,0}, \omega_{\mathrm{ét}}^k \otimes \omega_{\mathrm{ab}}^k \otimes M\right)$$

*Démonstration.* — L'idéal de la  $\sigma$ -strate est engendré par les  $H^0(\mathcal{B}_{V',n,0}, \mathcal{L}(\lambda))$  où  $\lambda \in S_{V',n,0} \cap \sigma^\succ$ , et le développement de Fourier-Jacobi de  $f$  est à support dans  $C(V/V'^\perp)^\vee$ . Mais  $C(V/V'^\perp)^\vee \setminus \sigma^\succ = \{0\}$  car  $\sigma$  est inclus dans l'intérieur de  $C(V/V'^\perp)$ .  $\square$

On rappelle que pour  $0 \leq i \leq s$ , le schéma abélien  $A_{V',i}$  descend à la variété de Siegel  $\mathcal{A}_{V',n,0}$  de genre  $g - \mathrm{rang}(V')$  et de type parahorique l'image de  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^\bullet$  dans  $V'^\perp/V'$ . D'après la proposition 1.4.6.1, la flèche  $\mathcal{B}_{V',n,0} \rightarrow \mathcal{A}_{V',n,0}$  admet une section canonique dont l'image s'identifie aux invariants de  $\mathcal{B}_{V',n,0}$  par  $\Gamma_{V',n,0}$ . On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 4.1.6.2.** — *La section  $a_{0,V'}(f)$  provient d'une section de  $H^0\left(\mathcal{A}_{V',n,0}, \omega_{\mathrm{ab}}^k \otimes M\right)$ .*

## 4.2. Compactification minimale

Construisons à présent la compactification minimale de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ . Dans un premier temps, on se restreint au cas où  $n > 2pg\sqrt{2p}$ . Cette hypothèse sera utilisée dans la preuve de la proposition 4.2.3.

Le théorème [MB85, IX.2.1] affirme que si  $S$  est un schéma normal excellent, si  $G \rightarrow S$  est un schéma semi-abélien et si  $\omega_{G/S}$  désigne le déterminant du faisceau des formes différentielles invariantes de  $G$ , il existe un entier positif  $m$  tel que

$$\omega_{G/S}^{\otimes m}$$

soit engendré par ses sections globales sur  $S$ . Le schéma  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  est excellent et normal d'après le théorème 3.2.7.1. Il existe donc un entier positif  $m$  tel que  $\omega_i^{\otimes m}$  soit engendré

par ses sections globales pour tout  $0 \leq i \leq s$ . Ainsi, il existe un morphisme propre

$$\varphi : \overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \longrightarrow \prod_{i=0}^s \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega_i^m)) .$$

On applique le théorème de factorisation de Stein [ÉGA III 4.3.3, 4.3.4] et l'on obtient un schéma  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  et une factorisation de  $\varphi$  en

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}_{g,n,0}^* \xrightarrow{\psi} \prod_{i=0}^s \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega_i^m)) ,$$

où  $\psi$  est un morphisme fini, où les fibres de  $\pi$  sont non vides et géométriquement connexes, et où  $\pi_* \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*}$ . Pour tout  $0 \leq i \leq s$ , il existe un faisceau inversible  $\mathcal{L}_i$  sur  $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega_i^m))$  qui est très ample et tel que  $\varphi^* \mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \omega_i^m$ . L'existence du plongement de Segre [ÉGA II 4.3] montre que  $\boxtimes_{i=0}^s \mathcal{L}_i$  est très ample sur  $\prod_{i=0}^s \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega_i^m))$ . Posons  $\mathcal{L} = \psi^* \boxtimes_{i=0}^s \mathcal{L}_i$ ; d'après [ÉGA II 4.6.3], c'est un faisceau ample sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ . Il résulte de [ÉGA II 4.6.3] que

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^* = \mathrm{Proj} \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{H}^0(\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \mathcal{L}^k) \right) .$$

Comme  $\pi^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \otimes \omega_i^m$  et  $\pi_* \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*}$ , on a  $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \mathcal{L}^k) = \mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \otimes_i \omega_i^{km})$  pour tout  $k \geq 0$ . On note  $\underline{k} = (k, \dots, k) \in \mathbb{N}^{s+1}$ . D'après [ÉGA II 2.4.7], on a

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^* = \mathrm{Proj} \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{H}^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \omega^{\underline{k}}) \right) .$$

La proposition 4.1.3 montre alors que  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est indépendant de  $\Sigma$ .

**Lemme 4.2.1.** — Soient  $g$ ,  $m$  et  $N$  trois entiers tels que  $m > 2Ng\sqrt{2N}$ , soit  $K$  un corps et soient  $G$  et  $G'$  deux schémas abéliens de genre  $g$  sur  $\mathrm{Spec}(K)$  munis de polarisations  $\lambda$  et  $\lambda'$  et de structures de niveau principales en  $m$ . Si  $\lambda$  est principale, il existe au plus une isogénie  $f : G \rightarrow G'$  compatible aux structures de niveau en  $m$  telle que  $f^t \circ \lambda' \circ f = N\lambda$ , où  $f^t$  désigne l'isogénie duale de  $f$ .

*Démonstration.* — Soient  $f$  et  $g$  deux isogénies satisfaisant les hypothèses du lemme. Comme  $\mathrm{Hom}(G, G')$  s'identifie à un réseau de  $\mathrm{End}(G) \otimes \mathbb{Q}$  inclus dans  $\mathrm{End}(G) \otimes \mathbb{Z}[1/N]$ , on peut voir  $f$  et  $g$  comme des  $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de  $G$  tels que  $Nf$  et  $Ng$  soient dans  $\mathrm{End}(G)$ . D'après [Mum70, coro. 19.3], la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\mathrm{End}(G) \otimes \mathbb{Q}$  est semi-simple de rang  $\leq 4g^2$ . Notons  $\mathrm{Tr}$  la trace réduite qui lui est associée et  $q$  la forme quadratique sur  $\mathrm{End}(G) \otimes \mathbb{Q}$  qui envoie  $u$  sur  $\mathrm{Tr}(u^t \lambda u \lambda^{-1})$ . Cette dernière est définie positive par [Mum70, th. 21.1] et prend des valeurs entières sur  $\mathrm{End}(G)$ . Par hypothèse, on a

$$q(f) = \mathrm{Tr}(p) \leq 4Ng^2 \quad , \quad q(g) \leq 4Ng^2$$

et il existe  $u \in \text{Hom}(G, G')$  tel que  $f - g = mu$ . On a donc

$$m^2q(u) = q(f - g) \leq q(f) + q(g) \leq 8Ng^2.$$

Comme  $m > 2Ng\sqrt{2N}$  par hypothèse, on en déduit que  $q(u) < 1/N^2$ . Or on a

$$Nu \in \text{End}(G)$$

et  $q$  prend des valeurs entières sur  $\text{End}(G)$ , donc  $u = 0$  et  $f = g$ .  $\square$

**Remarque 4.2.2.** — En posant  $N = 1$ ,  $G = G'$  et  $\lambda = \lambda'$  dans le lemme précédent, on montre que tout automorphisme de  $G$  préservant une polarisation principale et une structure principale de niveau  $> 2g\sqrt{2}$  est égal à l'identité. Ceci est une forme faible du lemme de Serre [Ser60].

**Proposition 4.2.3.** — *Les fibres géométriques de  $\pi$  au-dessus de l'image de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  possèdent un unique point géométrique.*

*Démonstration.* — Comme  $\varphi^*\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \omega_i^m$ , le faisceau  $\omega_i^m$  est trivialisé le long des fibres de  $\pi$  pour  $0 \leq i \leq s$ . D'après [MB85, th. X.4.5] ou [FC90, prop. V.2.2], on en déduit que pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $\pi(\mathcal{A}_{g,n,0})$  et tout  $0 \leq i \leq s$ , la fibre  $\pi^{-1}(\bar{x})$  est incluse dans  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  et la classe d'isomorphisme du schéma abélien  $G_i$  est constante sur  $\pi^{-1}(\bar{x})$ . Le faisceau des endomorphismes de  $G_i$  est constant sur  $\pi^{-1}(\bar{x})$ , à valeurs dans un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini. Cela implique que la classe d'isomorphisme du schéma abélien polarisé  $G_i$  est constante sur  $\pi^{-1}(\bar{x})$ . On rappelle qu'on suppose  $n > 2pg\sqrt{2p}$ . On applique le lemme 4.2.1 à  $G = G_0$ , à  $G' = G_i$ , à la polarisation principale  $\lambda = \lambda_0$  de  $G_0$ , à la polarisation canonique  $\lambda' = \lambda_i$  de  $G_i$ , à  $m = n$  et à  $N = p$  pour  $0 \leq i \leq s$ . On en déduit que la classe d'isomorphisme de la chaîne d'isogénies

$$G_0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_s$$

entre schémas abéliens polarisés est constante sur  $\pi^{-1}(\bar{x})$ . Cela montre que la fibre géométrique  $\pi^{-1}(\bar{x})$  possède un unique point géométrique.  $\square$

**Corollaire 4.2.4.** — *La restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  est un isomorphisme sur son image.*

*Démonstration.* — D'après la proposition 4.2.3 et le *Main Theorem* de Zariski [ÉGA III 4.4.3], la restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  est finie sur son image. La proposition 4.2.3 et le caractère réduit de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  montrent que la restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  est une application birationnelle. Comme  $\pi_*\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{A}}_{g,n,0}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*}$  et  $\bar{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  est normal, le théorème des fonctions formelles [ÉGA III 4.1.5] montre que le schéma  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est normal. Toute application finie birationnelle d'image normale est un isomorphisme. C'est donc le cas du morphisme  $\pi : \mathcal{A}_{g,n,0} \rightarrow \pi(\mathcal{A}_{g,n,0})$  obtenu par restriction.  $\square$

Étudions à présent la restriction de  $\pi$  aux autres strates de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$ . Comme  $\pi$  est donné par l'évaluation de formes modulaires de Siegel, le corollaire **4.1.6.2** implique que pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , la restriction de  $\pi$  à la  $V'$ -strate se factorise en

$$\pi_{V'} : \mathcal{A}_{V',n,0} \longrightarrow \mathcal{A}_{g,n,0}^* .$$

On montre comme précédemment que  $\pi_{V'}$  est un morphisme fini birationnel sur son image, dont les fibres géométriques possèdent un unique point géométrique. Avant de prouver la normalité de  $\pi_{V'}(\mathcal{A}_{V',n,0})$ , il nous faut établir quelques résultats préliminaires.

**Proposition 4.2.5.** — *Deux strates paramétrées par des éléments différents de  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$  ont des images disjointes par  $\pi$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ . D'après [FC90, prop. V.2.2], la restriction de  $G_i$  à  $\pi^{-1}(\bar{x})$  pour  $0 \leq i \leq s$  est un schéma semi-abélien de rang torique constant. Ainsi, les rangs multiplicatifs et abéliens (définis dans la partie **1.2.6**) de la chaîne

$$(4.2.5.A) \quad G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \cdots \rightarrow G_s$$

sont constants sur  $\pi^{-1}(\bar{x})$ . Or d'après les résultats de la partie **1.2.6**, ces rangs paramètrent exactement l'ensemble  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$ .  $\square$

Le schéma  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est donc muni d'une stratification indexée par  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$ . Notons  $Z_{V'}$  la strate de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  paramétrée par  $V' \in \mathfrak{C}$ . Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $Z_{V'}$ . Notons encore  $\bar{x}$  l'unique point géométrique de la fibre de  $\pi_{V'} : \mathcal{A}_{V',n,0} \longrightarrow \mathcal{A}_{g,n,0}^*$  en  $\bar{x}$ . Notons

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \bar{x}}$$

le complété du localisé strict  $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \bar{x}}$  de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  en  $\bar{x}$  et

$$\widehat{\mathcal{B}}_{V',n,0,\bar{x}}$$

le complété formel de  $\mathcal{B}_{V',n,0} \times \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_{V',n,0}, \bar{x}})$  le long de la fibre de  $\mathcal{B}_{V',n,0} \rightarrow \mathcal{A}_{V',n,0}$  en  $\bar{x}$ .

**Proposition 4.2.6.** — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \bar{x}} \xrightarrow{\sim} \left( \prod_{\lambda \in S_{V',n,0} \cap C(V/V'^{\perp})^{\vee}} \mathrm{H}^0 \left( \widehat{\mathcal{B}}_{V',n,0,\bar{x}}, \mathcal{L}(\lambda) \right) \right)^{\Gamma_{n,0}}$$

qui induit un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{O}}_{Z_{V'}, \bar{x}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{V',n,0}, \bar{x}}$$

*Démonstration.* — D'après [ÉGA III 4.1.5], l'anneau complet  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \bar{x}}$  est isomorphe à l'anneau des fonctions régulières sur le complété formel de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  le long de  $\pi^{-1}(\bar{x})$ . La proposition 4.2.5 montre que  $\pi^{-1}(\bar{x})$  est inclus dans la  $V'$ -strate de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \times \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_{g,n,0}^*, \bar{x}})$ . L'existence du premier isomorphisme résulte de l'isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{M}}_{V', n, 0} / \Gamma_{V', n, 0} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{A}}_{g, n, 0}^{V'}$$

et du fait que l'anneau des fonctions régulières sur  $\widehat{\mathcal{M}}_{V', n, 0}$  est

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{S}_{V', n, 0} \cap C(V/V^\perp)^\vee} H^0(\widehat{\mathcal{B}}_{V', n, 0}, \mathcal{L}(\lambda)).$$

La seconde assertion se déduit de la première et du corollaire 4.1.6.2.  $\square$

**Corollaire 4.2.7.** — *Pour tout  $V' \in \mathfrak{C}$ , la restriction de  $\pi$  à la  $V'$ -strate de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  se factorise en un isomorphisme  $\pi_{V'} : \mathcal{A}_{V', n, 0} \xrightarrow{\sim} Z_{V'}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $V' \in \mathfrak{C}$ . On a vu que la restriction de  $\pi$  à la  $V'$ -strate de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  se factorisait en un morphisme  $\pi_{V'} : \mathcal{A}_{V', n, 0} \rightarrow \mathcal{A}_{g,n,0}^*$ . Par définition, le sous-schéma  $Z_{V'}$  de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est l'image de  $\pi_{V'}$ . On a montré que le morphisme  $\pi_{V'} : \mathcal{A}_{V', n, 0} \rightarrow Z_{V'}$  est fini birationnel. D'après la proposition 3.1.7.1, le schéma  $\mathcal{A}_{V', n, 0}$  est normal. On déduit du second isomorphisme de la proposition 4.2.6 que le schéma  $Z_{V'}$  est normal. Ainsi,  $\pi_{V'}$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{A}_{V', n, 0}$  sur  $Z_{V'}$ .  $\square$

Soit  $n'$  un entier divisible par  $n$  mais non par  $p$ . Le schéma  $\mathcal{A}_{g,n',0}$  est muni d'une action du groupe  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z})$ , et le quotient par l'action du sous-groupe  $\Gamma_{n,0}/\Gamma_{n',0}$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{A}_{g,n,0}$ . Comme l'éventail  $\Sigma$  est équivariant sous l'action de  $\text{GL}(X)$ , le schéma  $\mathcal{A}_{g,n',0}^*$  est muni d'une action de  $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z})$  prolongeant celle sur  $\mathcal{A}_{g,n',0}$ . Le quotient de  $\mathcal{A}_{g,n',0}^*$  par  $\Gamma_{n,0}/\Gamma_{n',0}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ .

Si  $n \geq 3$ , il existe un entier  $n' > 2pg\sqrt{2p}$  qui est divisible par  $n$  mais non par  $p$ . En posant

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^* = \mathcal{A}_{g,n',0}^* / \Gamma_{n,0},$$

on obtient une compactification minimale de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  qui est indépendante du choix de  $n'$ .

**Remarque 4.2.8.** — De la même manière, on obtient une compactification minimale de l'espace de modules grossier associé à  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Sa description est moins élégante que celle de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  car il faut tenir compte des automorphismes du champ  $\mathcal{A}_{g,0}$ .

On note  $\mathcal{A}_{g,n}^*$  la compactification minimale de  $\mathcal{A}_{g,n}$  construite dans [FC90, V.2.5]. On rappelle que  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  désigne la compactification toroïdale associée à  $\Sigma$ . Dans le théorème suivant, nous résumons les propriétés de la construction que nous venons d'effectuer. Le cas des courbes elliptiques étant bien connu, on suppose  $g \geq 2$ .

**Théorème 4.2.9.** — Si  $n \geq 3$ , il existe un schéma canonique  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  projectif de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ . Il contient  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  comme ouvert dense, est normal et indépendant de  $\Sigma$ . Le morphisme d'oubli de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  vers  $\mathcal{A}_{g,n}$  s'étend en un morphisme de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  vers  $\mathcal{A}_{g,n}^*$ . Pour tout  $0 \leq i \leq s$ , le fibré de Hodge  $\omega_i$  sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  s'étend en un faisceau inversible sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ . Le produit tensoriel  $\otimes_{i=0}^s \omega_i$  est ample sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ , et il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^* \xrightarrow{\sim} \text{Proj} \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{H}^0 \left( \mathcal{A}_{g,n,0}, \bigotimes_{i=0}^s \omega_i^k \right) \right).$$

Le schéma  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est muni d'une stratification localement fermée paramétrée par  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$ ; la strate associée à  $V' \in \mathfrak{C}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{A}_{V',n,0}$ . Il existe un morphisme canonique

$$\pi : \overline{\mathcal{A}}_{g,n,0} \longrightarrow \mathcal{A}_{g,n,0}^*.$$

L'image inverse par  $\pi$  de la stratification de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  coïncide avec la stratification de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}$  qui est paramétrée par  $\mathfrak{C}/\Gamma_{n,0}$ .

*Démonstration.* — L'isomorphisme entre  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  et  $\text{Proj} \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{H}^0 \left( \mathcal{A}_{g,n,0}, \bigotimes_{i=0}^s \omega_i^k \right) \right)$  résulte de l'isomorphisme

$$\mathcal{A}_{g,n,0}^* \xrightarrow{\sim} \text{Proj} \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{H}^0 \left( \overline{\mathcal{A}}_{g,n,0}, \bigotimes_{i=0}^s \omega_i^k \right) \right)$$

et du principe de Köcher **4.1.5.6**, qui est valable si  $g \geq 2$ . Il reste à prouver que  $\omega_i$  s'étend en un faisceau inversible sur  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  pour  $0 \leq i \leq s$ . Soit  $j$  l'immersion de  $\mathcal{A}_{g,n,0}$  dans  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$ . Comme  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  est normal et  $\mathcal{A}_{g,n,0}^* \setminus \mathcal{A}_{g,n,0}$  est de codimension  $\geq 2$ , une éventuelle extension localement libre du faisceau  $\omega_i$  est unique, et égale à  $j_* \omega_i$ . Par descente, il suffit de montrer que  $\omega_i$  s'étend au complété du localisé strict de  $\mathcal{A}_{g,n,0}^*$  en tout point géométrique d'une  $V'$ -strate. Cela résulte de **(3.3.2.A)** et du corollaire **4.2.7**.  $\square$





## CHAPITRE 5

# PROLONGEMENT DU DRAPEAU AUX COMPACTIFICATIONS

### 5.1. Construction de Mumford semi-stable

Nous décrivons une modification de la construction de Mumford qui permet d'obtenir des schémas abéliens dégénérant en des schémas en groupes semi-stables.

**5.1.1. Schémas semi-stables marqués.** — Soit  $S$  un schéma.

*Définition 5.1.1.1.* — Un schéma en groupes  $G$  sur  $S$  est semi-stable s'il est commutatif, séparé, lisse de type fini sur  $S$ , et si ses fibres sur  $S$  sont extension de groupes finis étales par des schémas semi-abéliens.

*Exemple 5.1.1.2.* — Tout schéma semi-abélien est un schéma en groupes semi-stable. Si  $S$  est un trait de point générique  $\eta$  et  $G_\eta$  un schéma abélien sur  $\eta$  qui a réduction semi-stable sur  $S$ , le modèle de Néron de  $G_\eta$  est un schéma en groupes semi-stable sur  $S$ .

Remarquons que tout schéma en groupes semi-stable à fibres connexes sur  $S$  est semi-abélien. Soit  $G$  un schéma en groupes semi-stable sur  $S$ . D'après [ÉGA IV<sub>3</sub> 15.6.5], il existe un sous-schéma en groupes  $G^0$  ouvert dans  $G$  tel que pour tout  $s \in S$ , la composante neutre de  $G_s$  soit  $G_s^0$ . Le schéma  $G^0$  est semi-abélien sur  $S$  car ses fibres sont connexes.

*Définition 5.1.1.3.* — Un schéma semi-stable marqué sur  $S$  est la donnée d'un schéma en groupes  $G$  semi-stable sur  $S$ , d'un schéma  $H$  étale fini sur  $S$ , et d'une immersion  $H \hookrightarrow G$  telle que le quotient  $G/H$  soit semi-abélien sur  $S$ .

Étant donné un schéma en groupes semi-stable  $G$  et un sous-groupe fini étale  $H$  de  $G$ , le quotient  $G/H$  est semi-abélien si et seulement si  $H_s$  rencontre chaque composante connexe de  $G_s$  pour tout  $s \in S$ . Soit  $(G, H)$  un schéma semi-stable marqué. Il existe une isogénie  $G^0 \rightarrow G/H$  entre schémas semi-abéliens. Son noyau est le groupe  $H \cap G^0$  qui est quasi-fini et plat sur  $S$ . Soit  $(G', H')$  un autre schéma semi-stable marqué sur  $S$ . Un *morphisme* entre  $(G, H)$  et  $(G', H')$  est par définition un morphisme de  $G$  dans  $G'$  qui envoie  $H$  dans  $H'$ .

Un tel morphisme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G^0 & \longrightarrow & G/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G'^0 & \longrightarrow & G'/H' \end{array}$$

de morphismes de schémas semi-abéliens sur  $S$ . Une *isogénie* entre  $(G, H)$  et  $(G', H')$  est par définition un morphisme surjectif de noyau quasi-fini et plat. Généralisons à présent le théorème **1.1.2** aux schémas semi-stables marqués.

**Proposition 5.1.1.4.** — *Soient  $S$  un schéma normal,  $U$  un ouvert dense de  $S$  et  $(G, H)$  et  $(G', H')$  deux schémas en groupes semi-stables marqués sur  $S$ . La restriction à  $U$  induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_S((G, H), (G', H')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_U((G_U, H_U), (G'_U, H'_U))$$

*Démonstration.* — L'application de restriction est injective car  $U$  est dense et  $S$  est séparé. Montrons qu'elle est surjective. Soit  $f$  un morphisme de  $(G_U, H_U)$  dans  $(G'_U, H'_U)$ . Il induit un morphisme  $a$  de  $H_U$  dans  $H'_U$ , un morphisme  $b$  de  $G_U^0$  dans  $G'^0_U$  et un morphisme  $c$  de  $(G/H)_U$  dans  $(G'/H')_U$ . Les schémas  $H$  et  $H'$  sont finis étales sur  $S$ , donc  $a$  s'étend en un morphisme de  $H$  dans  $H'$ . Les schémas  $G^0$ ,  $G'^0$ ,  $G/H$  et  $G'/H'$  sont semi-abéliens donc les morphismes  $b$  et  $c$  s'étendent sur  $S$  par le théorème **1.1.2**. Il existe par conséquent un morphisme de  $G^0 \times H$  dans  $G'^0 \times H'$  qui envoie  $H \cap G^0$  dans  $H' \cap G'^0$ . D'après [MB85, prop. IV.8.1], comme le morphisme de  $H \cap G^0$  dans  $H$  est une immersion ouverte, le quotient de  $G^0 \times H$  par le groupe quasi-fini et plat  $H \cap G^0$  est représentable et égal à  $G$ . Il en est de même pour  $G'$ . On obtient ainsi un morphisme de  $G$  dans  $G'$  qui étend  $f$ .  $\square$

Soit  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de la catégorie  $\mathrm{OuvComp}$  définie dans la partie **1.3.4**. En particulier,  $S$  est un schéma normal affine complet pour la topologie définie par l'idéal du sous-schéma fermé  $S_0$ . Notons  $\mathrm{DegSt}$  la catégorie des schémas semi-stables marqués  $(G, H)$  sur  $S$  tels que  $G_U$  soit abélien, que  $G_{S_0}$  soit globalement extension d'un schéma semi-abélien de partie torique isotriviale sur  $S_0$  par un groupe fini étale sur  $S_0$ , et que  $H \cap G^0$  soit trivial au-dessus de  $S_0$ . De même, notons  $\mathrm{DegSt}_{\mathrm{ample}}$  la catégorie dont les objets sont les familles  $(G, H, \mathcal{L})$ , où  $(G, H)$  est un objet de  $\mathrm{DegSt}$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible cubiste sur  $G$  [MB85, déf. I.2.4.5] relativement ample sur  $U$ . Les morphismes de la catégorie  $\mathrm{DegSt}_{\mathrm{ample}}$  respectent les faisceaux relativement amples sur  $U$ , donc sont des isogénies.

Soit  $(G, H)$  un objet de  $\mathrm{DegSt}$ . Le schéma  $G_U/H_U$  est abélien sur  $U$ , donc admet un faisceau ample rigidifié  $\mathcal{L}_U$  par [Ray70, VI.2.4 et XI.1.4]. Ce faisceau s'étend en un faisceau inversible rigidifié  $\mathcal{L}$  sur  $G/H$ . D'après [Bre83, prop. 2.4],  $\mathcal{L}$  est muni d'une structure cubiste canonique. Le morphisme  $f : G \rightarrow G/H$  est fini et le faisceau  $f^*\mathcal{L}$  sur  $G$  est muni de la structure cubiste obtenue par image inverse. D'après [ÉGA II 4.6.3], le faisceau  $f^*\mathcal{L}_U$

est relativement ample sur  $U$ . On en déduit que l'oubli de  $\mathcal{L}$  définit un foncteur

$$\mathrm{DegSt}_{\mathrm{ample}} \longrightarrow \mathrm{DegSt}$$

qui est essentiellement surjectif. Ce foncteur n'est pas pleinement fidèle puisque les morphismes de la catégorie  $\mathrm{DegSt}_{\mathrm{ample}}$  sont des isogénies.

**Remarque 5.1.1.5.** — Supposons que  $S$  soit un trait de point fermé  $S_0$ . Soient  $G$  un schéma semi-stable sur  $S$  qui est abélien sur  $U$  et  $\mathcal{L}_U$  un faisceau cubiste sur  $G_U$ . D'après [MB85, th. II.1.1], il existe une obstruction à étendre  $\mathcal{L}_U$  en un faisceau cubiste sur  $G$ . Cette obstruction correspond à une application quadratique sur le groupe des composantes connexes de  $G_{S_0}$ . Nous avons montré que cette application est nulle si  $G$  est muni d'un marquage par  $H$  et si  $\mathcal{L}_U$  descend à  $G_U/H_U$ .

**5.1.2. Faisceaux cubistes sur les 1-motifs.** — Soient  $S$  un schéma, et  $M = [Y \xrightarrow{i} \tilde{G}]$  et  $M' = [Y' \xrightarrow{j} \tilde{G}']$  deux 1-motifs sur  $S$ .

**Définition 5.1.2.1.** — Une  $\mathbb{G}_m$ -biextension de  $M$  et  $M'$  est une famille  $(\mathcal{E}, t, t')$ , où  $\mathcal{E}$  est une  $\mathbb{G}_m$ -biextension de  $\tilde{G}$  et  $\tilde{G}'$ , où l'isomorphisme  $t$  est une trivialisaton de la biextension  $(i \times \mathrm{Id})^* \mathcal{E}$  et où l'isomorphisme  $t'$  est une trivialisaton de  $(\mathrm{Id} \times j)^* \mathcal{E}$  tels que

$$(\mathrm{Id} \times j)^* t = (i \times \mathrm{Id})^* t'.$$

Si  $\mathrm{Biext}^1(M, M'; \mathbb{G}_m)$  désigne le groupe des classes d'isomorphisme de  $\mathbb{G}_m$ -biextensions de  $M$  et  $M'$ , on a  $\mathrm{Biext}^1(M, M'; \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Hom}(M', M^t)$  par [Ber08, 3.2.3]. Il existe donc une *biextension de Poincaré*  $\mathcal{P}_M$  de  $M$  et  $M^t$ , qui correspond à l'identité de  $M^t$ .

Notons  $m, p$  et  $q$  la multiplication et les deux projections de  $\tilde{G} \times \tilde{G}$  sur  $\tilde{G}$ . Posons  $\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}) = m^* \tilde{\mathcal{L}} \otimes p^* \tilde{\mathcal{L}}^{-1} \otimes q^* \tilde{\mathcal{L}}^{-1}$  pour tout faisceau inversible  $\tilde{\mathcal{L}}$  sur  $\tilde{G}$ . On rappelle que d'après [Bre83, prop. 2.4], la catégorie des faisceaux cubistes sur  $\tilde{G}$  est équivalente à la catégorie des faisceaux inversibles rigidifiés sur  $\tilde{G}$ .

**Définition 5.1.2.2.** — Un faisceau cubiste sur  $M$  est une famille  $(\tilde{\mathcal{L}}, s, t)$ , où  $\tilde{\mathcal{L}}$  est un faisceau cubiste sur  $\tilde{G}$ , où  $s$  est une trivialisaton du faisceau cubiste  $i^* \tilde{\mathcal{L}}$  et où  $t$  est une trivialisaton de la biextension  $(\mathrm{Id} \times i)^* \Lambda(\tilde{\mathcal{L}})$  telle que  $(i \times \mathrm{Id})^* t = \Lambda(s)$ .

En particulier, si  $\tilde{\mathcal{L}}$  est un faisceau cubiste sur  $M$ , on dispose d'une action de  $Y$  sur  $\tilde{\mathcal{L}}$  compatible à l'action de  $Y$  par translation sur  $\tilde{G}$ .

**Remarque 5.1.2.3.** — Supposons  $i : Y \rightarrow \tilde{G}$  injective. D'après le théorème de descente [Bre83, 3.10], la donnée d'un faisceau cubiste sur  $M$  équivaut à celle d'un faisceau cubiste sur le faisceau  $H^0(M)$ .

Soit  $M$  un 1-motif et  $\tilde{\mathcal{L}}$  un faisceau cubiste sur  $M$ . Le faisceau  $\Lambda(\tilde{\mathcal{L}})$  est naturellement muni d'une structure de biextension de  $M$  et  $M$ . Il existe donc un morphisme  $\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}} : M \rightarrow M^t$

tel que  $\Lambda(L) = (\text{Id} \times \lambda_{\tilde{\mathcal{L}}})^* \mathcal{P}_M$ . On dit que  $\tilde{\mathcal{L}}$  est *ample* sur  $M$  s'il est ample sur  $\tilde{G}$ . Dans ce cas, le morphisme  $\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}}$  est une polarisation de  $M$ .

**5.1.3. Les doubles motifs de Mumford.** — Commençons par définir la notion de double motif sur un schéma  $S$ . On rappelle que le noyau  $\text{Ker}(f)$  d'une isogénie  $f : M_1 \rightarrow M_2$  entre 1-motifs sur  $S$  est muni d'une filtration à trois crans. On dit que  $f$  est *étale* si  $\text{Ker}(f) = \text{Gr}_2^W(\text{Ker}(f))$ . Dans ce cas, le groupe  $\text{Ker}(f)$  est fini étale sur  $S$ . La réciproque est fautive car le groupe fini et plat  $\text{Ker}(f)$  est étale pour toute isogénie  $f$  de degré premier aux caractéristiques résiduelles des points de  $S$ .

**Définition 5.1.3.1.** — Un double motif sur  $S$  est une famille  $(M_1, M_2, f)$ , où  $M_1$  et  $M_2$  sont deux 1-motifs sur  $S$  et  $f$  une isogénie étale de  $M_1$  dans  $M_2$ .

On peut voir un double motif  $M_1 \xrightarrow{f} M_2$  comme un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \longrightarrow & \tilde{G} \\ f \downarrow & \nearrow & \\ Y_2 & & \end{array}$$

où l'on a posé  $M_1 = [Y_1 \rightarrow \tilde{G}]$  et  $M_2 = [Y_2 \rightarrow \tilde{G}]$ . On dit que  $\tilde{G}$  est la partie *semi-abélienne* de  $M_1 \rightarrow M_2$ , et que l'injection à conoyau fini de  $Y_1$  dans  $Y_2$  est sa partie *étale*. Un *morphisme* de  $(M_1 \rightarrow M_2)$  dans  $(M'_1 \rightarrow M'_2)$  est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \longrightarrow & M'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_2 & \longrightarrow & M'_2 \end{array}$$

Un double motif *ample* est la donnée d'un faisceau cubiste ample sur un double motif. Soit  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de la catégorie **Ouv** définie dans la partie 1.3. On rappelle (définition **1.3.1**) qu'un 1-motif de Mumford sur  $(U \hookrightarrow S)$  est un 1-motif sur  $U$  dont la partie étale et la partie semi-abélienne se prolongent sur  $S$ .

**Définition 5.1.3.2.** — Un double motif de Mumford sur  $(U \hookrightarrow S)$  est un triplet

$$(\tilde{G}, Y_1 \rightarrow Y_2, M_{1,U} \rightarrow M_{2,U}),$$

où  $\tilde{G}$  est un schéma semi-abélien de rang torique constant sur  $S$ , où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des réseaux sur  $S$  munis d'une injection à conoyau fini, et où  $M_{1,U} \rightarrow M_{2,U}$  est un double motif sur  $U$  de partie semi-abélienne  $\tilde{G}_U$  et de partie étale  $Y_{1,U} \rightarrow Y_{2,U}$ .

La donnée d'un double motif de Mumford est équivalente à celle d'une isogénie étale entre 1-motifs de Mumford. On appelle double motif de Mumford *ample* la donnée d'un double motif de Mumford  $M_1 \rightarrow M_2$  et d'un faisceau cubiste ample  $\tilde{\mathcal{L}}$  sur  $M_{2,U}$ . Ce faisceau

cubiste ample s'étend sur la partie semi-abélienne de  $M_1 \rightarrow M_2$  par [MB85, II.3.4.2], et définit une polarisation  $\lambda_2$  de  $M_2$ .

Soient  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de la catégorie  $\text{OuvComp}$ . Un double motif de Mumford ample  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  sur  $(U \hookrightarrow S)$  est *positif* relativement à  $S_0$  si le 1-motif de Mumford polarisé  $(M_2, \lambda_2)$  est positif au sens de la définition 1.3.4.1. Notons  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}$  la catégorie des doubles motifs de Mumford amples et positifs sur  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$ . De même, notons  $2\text{-Mum}_+$  la catégorie des doubles motifs de Mumford sur  $(U \hookrightarrow S)$  admettant un faisceau cubiste ample qui les rend positifs. Ainsi, le foncteur d'oubli

$$2\text{-Mum}_{\text{ample},+} \longrightarrow 2\text{-Mum}_+$$

est essentiellement surjectif. Il n'est pas pleinement fidèle car les morphismes de la catégorie  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}$  sont des isogénies. Dans le reste de cette partie, nous construisons deux foncteurs

$$\begin{aligned} 2\text{-Mum}_{\text{ample},+} &\longrightarrow \text{DegSt}_{\text{ample}} \\ 2\text{-Mum}_+ &\longrightarrow \text{DegSt} \end{aligned}$$

et nous montrons qu'ils réalisent des équivalences de catégories. Nous suivons de près [FC90, ch. III] et [Mum72b].

**5.1.4. Modèle relativement complet.** — On définit d'abord une application de l'ensemble des objets d'une sous-catégorie de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}$  dans l'ensemble des objets de  $\text{DegSt}$ . Soit  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  un double motif de Mumford ample et positif sur  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$ . Notons  $\tilde{G}$  sa partie semi-abélienne, qui est de rang torique constant sur  $S$ . Il est donc globalement extension

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

d'un schéma abélien  $A$  par un tore  $T$  sur  $S$ . On note  $X$  le groupe des caractères de  $T$ . On dit que  $M_1 \rightarrow M_2$  est *déployé* si  $T$  est un tore déployé sur  $S$ , si  $Y_2$  est un faisceau étale constant sur  $S$  et s'il existe un faisceau cubiste ample  $\mathcal{M}$  sur  $A$  et un isomorphisme  $\tilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \pi^* \mathcal{M}$ . Les doubles motifs de Mumford amples, positifs et déployés forment les objets d'une sous-catégorie pleine  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl}}$  de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}$ .

Supposons que  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  soit déployé. On appelle *étoile* de  $X$  tout sous-ensemble  $E \subset X$  tel que  $0 \in E$ , tel que  $-E = E$  et tel que  $E$  engendre  $X$  comme groupe abélien. Notons  $\phi : Y_2 \rightarrow X$  la partie étale de la polarisation associée à  $\tilde{\mathcal{L}}$  et  $\underline{B}_2 : Y_2 \otimes X \rightarrow \underline{\text{Div}}_S$  l'application bilinéaire associée à  $M_2$  par la proposition 1.3.5.1. On dit que  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  vérifie la condition (\*) s'il existe une étoile  $E$  de  $X$  telle que le diviseur

$$\underline{B}_2(y, \phi(y)) + \underline{B}_2(y, x)$$

soit effectif pour tout  $y \in Y_2$  et tout  $x \in E$ . On note  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl},*}$  la sous-catégorie pleine de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl}}$  formée des objets qui vérifient la condition (\*).

Supposons que  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  soit un objet de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl},*}$ . D'après [FC90, prop. III.3.3], le 1-motif de Mumford  $(M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  admet un *modèle relativement complet*, qui consiste en la donnée

- i) d'un schéma  $\pi : \tilde{P} \rightarrow A$  intègre localement de type fini qui contient  $\tilde{G}$  comme ouvert dense,
  - ii) d'un faisceau inversible  $\tilde{\mathcal{L}}$  sur  $\tilde{P}$  qui étend le faisceau cubiste  $\tilde{\mathcal{L}}$  sur  $\tilde{G}$ ,
  - iii) d'une action de  $\tilde{G}$  sur  $\tilde{P}$  qui étend l'action par translation sur  $\tilde{G}$ ,
  - iv) d'une action de  $Y_2$  sur  $\tilde{P}$  qui étend l'action sur  $U$  par translation *via*  $Y \rightarrow \tilde{G}_U$ ; l'action de  $y \in Y$  est notée  $S_y$ ,
  - v) d'une action de  $Y_2$  sur  $\tilde{\mathcal{L}}$  compatible à la précédente et qui étend l'action de  $Y$  sur  $\tilde{\mathcal{L}}_U$ ; l'action de  $y$  est notée  $\tilde{S}_y$ ,
  - vi) et d'une action de  $\tilde{G}$  sur  $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \mathcal{M}^{-1}$  compatible à son action sur  $\tilde{P}$ , qui vérifient les conditions suivantes
- 1) il existe un ouvert  $U$  de  $\tilde{P}$  de type fini sur  $S$  et invariant par  $\tilde{G}$  tel que  $\tilde{P} = \cup_{y \in Y_2} S_y(U)$ ,
  - 2)  $\tilde{\mathcal{L}}$  est ample sur  $\tilde{P}$  dans le sens où les sections de  $\tilde{\mathcal{L}}^n$  définissent une base de la topologie de Zariski de  $\tilde{P}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,
  - 3) tout  $v \in \Sigma(\tilde{G}/S)$  admet un centre sur  $\tilde{P}$  si et seulement si pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in Y_2$  tel que  $v(I_{y,x} \cdot (\mathcal{O}_x)_{c_v}) \geq 0$ .

Dans la condition 3,  $\Sigma(\tilde{G}/S)$  désigne la surface de Zariski-Riemann de  $\tilde{G}$  sur  $S$ , c'est-à-dire l'ensemble des valuations sur le corps des fractions de  $\tilde{G}$  qui sont positives sur l'anneau de  $S$ . Tout  $v \in \Sigma(\tilde{G}/S)$  admet un centre  $c_v$  sur  $A$  car  $A$  est propre sur  $S$ . Par définition,  $I_{y,x}$  est l'idéal fractionnaire du corps des fractions de  $S$  qui correspond au diviseur  $\underline{B}_2(y, x)$ , et  $\mathcal{O}_x$  est le sous-faisceau de  $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{G}}$  formé des fonctions qui se transforment par le caractère  $x$  sous l'action de  $T$ .

**Remarque 5.1.4.1.** — Comme  $Y_1$  est inclus dans  $Y_2$ , le schéma  $\tilde{P}$  est muni d'une action de  $Y_1$ . Pourtant,  $\tilde{P}$  n'est pas un modèle relativement complet du 1-motif de Mumford  $M_1$  : tous les axiomes sont vérifiés sauf la condition 3. On peut expliquer la raison d'être des doubles motifs de Mumford de la manière suivante :  $M_2$  fournit le modèle relativement complet  $\tilde{P}$  et  $M_1$  le réseau de périodes par lequel diviser  $\tilde{P}_2$ .

La proposition suivante est démontrée dans [FC90, II.4] et dans [Mum72b, 3].

**Proposition 5.1.4.2.** — *L'inclusion de  $\tilde{G}$  dans  $\tilde{P}$  est un isomorphisme sur  $U$ . Le schéma  $\tilde{P}_{S_0}$  est connexe et ses composantes irréductibles sont propres et de type fini sur  $S_0$ . Le groupe  $Y_2$  agit librement sur  $\tilde{P}_{S_0}$ .*

**Remarque 5.1.4.3.** — Soit  $e_{\tilde{G}} : S \rightarrow \tilde{G}$  la section neutre. L'hypothèse de positivité de  $M_2$  implique que le sous-schéma  $S_y \circ e_{\tilde{G}}(S_0)$  de  $\tilde{P}_{S_0}$  ne rencontre pas  $\tilde{G}_{S_0}$  pour tout élément non nul  $y$  de  $Y_2$ . On en déduit que les sous-schémas  $S_y(\tilde{G}_{S_0})$  et  $S_z(\tilde{G}_{S_0})$  sont disjoints dans  $\tilde{P}_{S_0}$  pour deux éléments distincts  $y$  et  $z$  de  $Y_2$ .

**5.1.5. Construction du quotient.** — Si  $Y_1 = Y_2$ , les résultats de ce paragraphe se trouvent déjà dans [Mum72b] et dans [FC90, ch. III]. Si  $Y_1 \neq Y_2$ , ils se démontrent exactement comme ceux de [Mum72b] ou [FC90, ch. III]; il s'agit de recopier les preuves en remplaçant  $Y$  tantôt par  $Y_1$ , tantôt par  $Y_2$ . Nous nous contenterons donc de références précises. Dans cette partie, nous donnerons un sens à l'objet intuitif

$$\left( \bigcup_{y \in Y_2} S_y(\tilde{G}) \right) / Y_1.$$

On obtiendra un schéma en groupes  $G$  semi-stable sur  $S$  et abélien sur  $U$ . Le groupe  $G$  sera marqué par le groupe constant  $H = Y_2/Y_1$ . Soient  $G_1$  et  $G_2$  les quotients à la Mumford de  $M_1$  et de  $M_2$ . On aura  $G^0 = G_1$  et  $G/H = G_2$ . En particulier,  $G$  sera isomorphe à  $G_1$  sur  $U$ . Soit  $R$  l'anneau de  $S$  et  $I$  l'idéal du sous-schéma fermé  $S_0$ . On pose  $S_n = \text{Spec}(R/I^{n+1})$  pour  $n \geq 0$ .

**Proposition 5.1.5.1** ([Mum72b] th. 3.10). — Pour tout  $n \geq 0$ , il existe un schéma  $P_n$  projectif sur  $S_n$  et un morphisme étale surjectif

$$p_n : \tilde{P} \times_S S_n \longrightarrow P_n$$

qui identifie  $P_n$  au quotient de  $\tilde{P} \times_S S_n$  par l'action de  $Y_1$ . De plus,  $P_n$  est muni d'un faisceau ample  $\mathcal{L}_n$  tel que  $p_n^* \mathcal{L}_n \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{L}}$ .

**Remarque 5.1.5.2.** — La différence par rapport à [Mum72b, th. 3.10] et à [Mum72b, prop. III.4.8] est qu'on a divisé par  $Y_1$  et non par  $Y_2$ . Cela permettra d'obtenir un schéma semi-stable au lieu d'un schéma semi-abélien.

La limite inductive des schémas  $P_n$  définit un schéma formel  $\mathcal{P}$  qui est muni d'un faisceau ample  $\mathcal{L}$ . D'après [ÉGA III 5.4.5],  $\mathcal{P}$  s'algèbrise en un schéma  $P$  projectif sur  $S$  et muni d'un faisceau ample  $\mathcal{L}$ . On pose

$$G_n = p_n \left( \bigcup_{y \in Y_2} S_y(\tilde{G}) \times_S S_n \right) \subset P_n$$

pour  $n \geq 0$ . Le schéma  $G_n$  est canoniquement isomorphe à  $Y_2/Y_1 \times (\tilde{G} \times_S S_n)$  d'après la remarque 5.1.4.3. Soit  $B_n$  le complémentaire de  $G_n$  dans  $P_n$ , muni de sa structure réduite. La limite inductive des schémas  $B_n$  définit un sous-schéma formel fermé  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}$ , qui s'algèbrise en un sous-schéma fermé  $B$  de  $P$ . On pose  $G = P - B$ ; c'est un schéma quasi-projectif sur  $S$ . L'inclusion de  $Y_2/Y_1$  dans  $G_n$  induit une inclusion du schéma constant  $Y_2/Y_1$

dans  $G$ . Par construction, le complété formel de  $G$  le long de  $S_0$  est isomorphe au produit de  $Y_2/Y_1$  et du complété formel de  $\tilde{G}$ . On prouve la proposition suivante comme [Mum72b, 4.2 et 4.3] et [FC90, prop. III.4.12].

**Proposition 5.1.5.3.** — *Le schéma  $G$  est lisse de type fini sur  $S$ , le schéma  $P$  est irréductible de type fini sur  $S$ , et l'inclusion de  $G$  dans  $P$  est un isomorphisme sur  $U$ .*

Soit  $(M'_1 \rightarrow M'_2, \tilde{\mathcal{L}}')$  un objet de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl},*}$  de partie étale  $Y'_1 \rightarrow Y'_2$  et de partie semi-abélienne  $\tilde{G}'$ . Notons  $G'$  le schéma obtenu en appliquant la construction précédente à  $(M'_1 \rightarrow M'_2, \tilde{\mathcal{L}}')$ ; il a même complété formel le long de  $S_0$  que le produit de  $Y'_2/Y'_1$  et de  $\tilde{G}'$ . Soit  $\alpha$  un morphisme de  $(M_1 \rightarrow M_2)$  dans  $(M'_1 \rightarrow M'_2)$ . Il induit un morphisme

$$\tilde{\alpha} : Y_2/Y_1 \times \tilde{G} \longrightarrow Y'_2/Y'_1 \times \tilde{G}' .$$

**Proposition 5.1.5.4** ([Mum72b] th. 4.6). — *Il existe un unique morphisme  $\beta : G \rightarrow G'$  qui a même complété formel que  $\tilde{\alpha}$  le long de  $S_0$ .*

Remarquons que l'on ne fait aucune hypothèse sur le comportement de  $\alpha$  vis-à-vis des faisceaux cubistes amples  $\tilde{\mathcal{L}}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}'$  ou des modèles relativement complets  $\tilde{P}$  et  $\tilde{P}'$ .

**Remarque 5.1.5.5.** — Il n'est pas nécessaire de montrer à nouveau la finitude locale analogue à [Mum72b, 4.4.b]. En effet, on a  $Y_1^* = Y_2^* \cap Y_1$  avec les notations de *loc. cit.*

**Corollaire 5.1.5.6.** —  *$G$  est un schéma en groupes sur  $S$  qui est indépendant du choix de  $\tilde{\mathcal{L}}$  et de  $\tilde{P}$ .*

*Démonstration.* — On démontre l'indépendance de  $G$  en  $\tilde{\mathcal{L}}$  et en  $\tilde{P}$  en appliquant la proposition 5.1.5.4 au morphisme identité. On note  $M_1 \times M_1 = [Y_1 \times Y_1 \rightarrow \tilde{G} \times \tilde{G}]$ . Il existe un morphisme de  $M_1 \times M_1$  dans  $M_1$  dont la partie semi-abélienne est la multiplication de  $\tilde{G}$ . De même, il existe un morphisme de multiplication entre  $(M_1 \times M_1 \rightarrow M_2 \times M_2)$  et  $(M_1 \rightarrow M_2)$ . On en déduit un morphisme  $m$  de  $G \times G$  dans  $G$ . Il existe également un morphisme  $i$  de  $G$  dans  $G$  obtenu à partir de la loi d'inverse de  $\tilde{G}$ . Les complétés formels de  $m$  et de  $i$  définissent la loi de groupe du complété formel de  $\tilde{G} \times Y_2/Y_1$ . Ainsi,  $m$  et  $i$  induisent une loi de groupe commutatif sur  $G$ .  $\square$

L'inclusion du schéma constant  $Y_2/Y_1$  dans  $G$  est un morphisme de groupes.

**Corollaire 5.1.5.7.** —  *$G_U$  est un schéma abélien sur  $U$  muni d'un faisceau cubiste ample  $\mathcal{L}$ .*

*Démonstration.* — On a déjà démontré que  $G_U$  est un schéma en groupes lisse sur  $U$ . Comme  $P_U = G_U$ , le schéma  $G_U$  est propre sur  $U$ . Il est irréductible car ouvert dans le schéma irréductible  $\tilde{P}$ . Le faisceau  $\mathcal{L}$  est ample sur  $G_U$ . Il est muni d'une rigidification



obtenue par quotient de celle du faisceau cubiste  $\tilde{\mathcal{L}}$  sur  $\tilde{G}$ . D'après [Mum70, th. III.10], le faisceau  $\mathcal{L}$  admet une structure cubiste canonique.  $\square$

Soient  $G_1$  et  $G_2$  les quotients à la Mumford des 1-motifs de Mumford amples  $M_1$  et  $M_2$ . Par construction,  $G_i$  est le quotient du double motif de Mumford  $M_i \rightarrow M_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$ , où le morphisme de  $M_i$  dans  $M_i$  est l'identité. Le corollaire suivant résulte de la proposition 5.1.5.4 en considérant le morphisme  $(M_1 \rightarrow M_1) \rightarrow (M_1 \rightarrow M_2)$  puis le morphisme  $(M_1 \rightarrow M_2) \rightarrow (M_2 \rightarrow M_2)$ .

**Corollaire 5.1.5.8.** — *Il existe un morphisme de groupes de  $G_1$  dans  $G$  et un morphisme de groupes de  $G$  dans  $G_2$ . Le schéma en groupes constant  $Y_2/Y_1$  est dans le noyau de  $G \rightarrow G_2$ .*

Posons  $G^* = \cup_{y \in Y_2} S_y(\tilde{G})$ , qui est inclus dans  $\tilde{P}$ . Pour tout  $y \in Y_2$ , on note  $\sigma_y : S \rightarrow \tilde{P}$  l'unique section qui vaut  $y \in \tilde{G}(U)$  sur  $U$ ; elle est égale au translaté de la section neutre de  $\tilde{G}$  par l'action de  $y$  sur  $\tilde{P}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $Z_y^{(n)}$  le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} Z_y^{(n)} & \longrightarrow & G^* \\ \downarrow & & \downarrow n \\ S & \xrightarrow{\sigma_y} & G^* \end{array}$$

L'application  $S_z$  induit un isomorphisme de  $Z_y^{(n)}$  sur  $Z_{y+nz}^{(n)}$  pour tout  $z \in Y_2$ . On en déduit que l'union disjointe

$$\coprod_{y \in Y_1/nY_1} Z_y^{(n)}$$

portant sur un système de représentants de  $Y_1/nY_1$  est munie d'une loi de groupe canonique. De plus, la classe d'isomorphisme du groupe obtenu est indépendante du choix d'un système de représentants.

**Proposition 5.1.5.9** ([Mum72b] th. 4.10). — *Le groupe  $G[n]$  des points de  $n$ -torsion de  $G$  est isomorphe à l'union disjointe  $\coprod_{y \in Y_1/nY_1} Z_y^{(n)}$ .*

Soient  $y \in Y_1$  et  $s \in S$ . On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} Z_y^{(n)} \times_S \text{Speck}(s) \neq \emptyset &\iff \exists z \in Y_2 \mid y - nz \in \tilde{G}(\mathcal{O}_{S,s}) \\ &\iff y \in Y_1 \cap \left( \tilde{G}(\mathcal{O}_{S,s}) + nY_2 \right). \end{aligned}$$

Comme  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) est le quotient associé au double motif de Mumford  $M_1 \rightarrow M_1$  (resp.  $M_2 \rightarrow M_2$ ), on obtient trois suites exactes courtes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \tilde{G}_s[n] \rightarrow G_s[n] \rightarrow \frac{(\tilde{G}(\mathcal{O}_{S,s}) + nY_2) \cap Y_1}{nY_1} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \tilde{G}_{1,s}[n] \rightarrow G_{1,s}[n] \rightarrow \frac{(\tilde{G}(\mathcal{O}_{S,s}) + nY_1) \cap Y_1}{nY_1} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \tilde{G}_{2,s}[n] \rightarrow G_{2,s}[n] \rightarrow \frac{(\tilde{G}(\mathcal{O}_{S,s}) + nY_2) \cap Y_2}{nY_2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Corollaire 5.1.5.10.** — *Le morphisme naturel de  $G$  dans  $G_2$  est surjectif; son noyau est  $Y_2/Y_1$ . En particulier,  $G$  est un schéma en groupes semi-stable sur  $S$ , marqué par  $Y_2/Y_1$ . Le morphisme naturel de  $G_1$  dans  $G$  est une immersion ouverte et s'identifie à la composante neutre  $G^0$  de  $G$ . Il réalise un isomorphisme au-dessus de  $U$ .*

Le couple  $(G, Y_2/Y_1)$  définit donc un objet de  $\text{DegSt}_{\text{ample}}$  étendant  $G_{1,U}$ .

**Remarque 5.1.5.11.** — Soit  $M_1 \rightarrow M_2$  une isogénie non nécessairement étale entre 1-motifs de Mumford positifs sur  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$ . On note  $M_i = [Y_i \rightarrow \tilde{G}_i]$ , et l'on note  $G_i$  le quotient associé à  $M_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . On peut effectuer une construction analogue et considérer  $\tilde{P}_2/Y_1$ , où  $\tilde{P}_2$  est un modèle relativement complet de  $M_2$ . On obtient un schéma  $G$  semi-stable sur  $S$  et isomorphe à  $G_1 / \text{Ker}(\tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2)$  sur  $U$ . Cette généralisation est illusoire car  $G$  est le quotient du double motif de Mumford

$$[Y_1 \rightarrow \tilde{G}_2] \longrightarrow [Y_2 \rightarrow \tilde{G}_2].$$

**5.1.6. Une équivalence de catégorie.** — Soit  $(U \rightarrow S \leftarrow S_0)$  un objet de  $\text{OuvComp}$ . Nous venons de définir un foncteur de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl},*}$  dans  $\text{DegSt}_{\text{ample}}$ . Si  $(G, H, \mathcal{L})$  est l'image de  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$ , nous avons montré que  $(G, H)$  est indépendant de  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Dans cette partie, nous voulons étendre le foncteur précédent en deux équivalences de catégories

$$\begin{aligned} \text{Mum} &: 2\text{-Mum}_+ &\longrightarrow &\text{DegSt} \\ \text{Mum}_{\text{ample}} &: 2\text{-Mum}_{\text{ample},+} &\longrightarrow &\text{DegSt}_{\text{ample}} \end{aligned}$$

Soit  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  un objet de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl}}$ . D'après [FC90, lem. III.3.2], il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}}^n \otimes [-1]^* \tilde{\mathcal{L}}^n)$  vérifie la condition (\*). On obtient donc un foncteur

$$2\text{-Mum}_{\text{ample},+}^{\text{depl}} \longrightarrow \text{DegSt}.$$

D'après [MB85, coro. I.7.2.3], tout objet de  $2\text{-Mum}_{\text{ample},+}$  se déploie après changement de base par un morphisme  $S' \rightarrow S$  étale, surjectif et fini. Comme le morphisme est fini, le schéma  $S'$  est complet relativement à l'idéal de l'image inverse de  $S_0$ . On obtient donc un foncteur

$$2\text{-Mum}_{\text{ample},+} \longrightarrow \text{DegSt}$$

par descente étale. L'image de  $(M_1 \rightarrow M_2, \tilde{\mathcal{L}})$  est indépendante de  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Par définition, tout double motif de Mumford admet un faisceau cubiste ample. Ainsi il existe un foncteur

$$\text{Mum} : 2\text{-Mum}_+ \longrightarrow \text{DegSt} .$$

On montre comme dans [FC90, III.6 p. 71] qu'il induit un foncteur

$$\text{Mum}_{\text{ample}} : 2\text{-Mum}_{\text{ample},+} \longrightarrow \text{DegSt}_{\text{ample}} .$$

**Théorème 5.1.6.1.** — *Les foncteurs Mum et Mum<sub>ample</sub> réalisent des équivalences de catégories.*

*Démonstration.* — On construit un foncteur quasi-inverse grâce à la construction de Mumford semi-abélienne inverse. En effet, à tout schéma semi-stable marqué  $(G, H)$  est associée une isogénie  $G^0 \rightarrow G/H$  entre schémas semi-abéliens. Si  $(G, H)$  est un objet de DegSt, les schémas  $G^0$  et  $G/H$  sont des objets de  $\text{Deg}_{U,S,S_0}$ . Il leur correspond deux 1-motifs de Mumford  $M_1$  et  $M_2$  d'après le théorème 1.3.4.3. L'isogénie  $\beta : G^0 \rightarrow G/H$  induit une isogénie  $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ . On sait que  $\beta$  et la partie semi-abélienne de  $\alpha$  ont même complétion formelle le long de  $S_0$ . En particulier, elles coïncident au-dessus de  $S_0$ . Par définition, la fibre de  $H \cap G^0$  sur  $S_0$  est triviale. La partie semi-abélienne de  $\alpha$  est donc un isomorphisme sur  $S_0$ . Cela montre que l'isogénie  $\alpha$  est étale et définit un double motif de Mumford  $M_1 \rightarrow M_2$  tel que  $\text{Mum}(M_1 \rightarrow M_2) = (G, H)$ . On raisonne de même pour construire un quasi-inverse de  $\text{Mum}_{\text{ample}}$ .  $\square$

## 5.2. Prolongement en niveau de Klingen

Dans cette partie, on suppose  $\mathcal{D} = \{1\}$ ; on parle de *structure de niveau de Klingen*. Ainsi, le champ  $\mathcal{A}_{g,0}$  paramètre les schémas abéliens principalement polarisés munis d'un sous-groupe de rang  $p$ . Soit  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  la compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$  associée à la décomposition  $\Sigma$  de  $C(X)$ . Notons  $G$  le schéma semi-abélien canonique sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ . Sa restriction à  $\mathcal{A}_{g,0}$  est le schéma abélien universel. Notons  $H$  le groupe de rang  $p$  universel sur  $\mathcal{A}_{g,0}$ .

**Théorème 5.2.1.** — *Il existe un unique schéma semi-stable  $\mathcal{G}$  sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  dont la composante neutre est  $G$ , qui coïncide avec  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}_{g,0}$ , et tel que l'adhérence de  $H$  dans  $\mathcal{G}$  soit finie et plate sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ .*

*Démonstration.* — L'unicité résulte de la normalité de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  et de la proposition 5.1.1.4. Montrons l'existence. Reprenons la construction de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  et construisons  $\mathcal{G}$  étape par étape. Reprenons les notations du chapitre 2. Pour tout  $\sigma \in \Sigma$  différent de  $\{0\}$ , l'ensemble  $\mathcal{W}_\sigma$  est constitué de deux éléments  $w_{\text{sab}}$  et  $w_{\text{et}}$ ; l'isogénie entre les 1-motifs universels est étale

sur  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^{w_{\text{et}}}$  et semi-abélienne sur  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^{w_{\text{sab}}}$ . Pour éviter toute ambiguïté entre deux sens différents du sigle « ét », on note  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}}$  la carte locale algébrique construite dans le paragraphe **2.4.2**, et  $G_{\sigma}^{\text{alg}}$  le schéma semi-abélien sur  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}}$  obtenu par approximation préservant le sous-groupe de  $p$ -torsion. On a donc

$$\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}} = \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{sab}}} \amalg \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{et}}}.$$

On pose  $\mathcal{G}_{\sigma}^{\text{alg}} = G_{\sigma}^{\text{alg}}$  sur  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{sab}}}$  ; ceci est légitime puisque l'adhérence de  $H$  dans  $G_{\sigma}^{\text{alg}}$  est finie et plate sur  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{sab}}}$ . En utilisant les notations du paragraphe **1.4.6**, on voit que l'adhérence de  $H$  dans  $G_{\sigma}^{\text{alg}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{et}}}$  est un sous-groupe ouvert de  $Y_1/Y_0$ . D'après [MB85, prop. 8.1], la somme amalgamée de  $G_{\sigma}^{\text{alg}}$  et de  $Y_1/Y_0$  au-dessus de l'adhérence de  $H$  est représentable par un schéma en groupes semi-stable que l'on note

$$\mathcal{G}_{\sigma}^{\text{alg}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{et}}}.$$

Les restrictions de  $\mathcal{G}_{\sigma}^{\text{alg}}$  et de  $G_{\sigma}^{\text{alg}}$  à  $\mathcal{M}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{et}}}$  coïncident, et la composante neutre de  $\mathcal{G}_{\sigma}^{\text{alg}}$  est  $G_{\sigma}^{\text{alg}}$ . L'adhérence de  $H$  dans  $\mathcal{G}_{\sigma}^{\text{alg}}$  est égale à  $Y_1/Y_0$ , donc finie et plate sur  $\overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}, w_{\text{et}}}$ . Comme au paragraphe **3.1.6**, on pose

$$\overline{U}_0 = \prod_{\sigma \in \Sigma} \overline{\mathcal{M}}_{\sigma,0}^{\text{alg}} \quad \text{et} \quad U_0 = \prod_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{M}_{\sigma,0}^{\text{alg}}.$$

On obtient un schéma semi-stable  $\mathcal{G}$  sur  $\overline{U}_0$ . Sa composante neutre est le schéma  $G$  défini dans la partie 3.1, les restrictions de  $\mathcal{G}$  et de  $G$  à  $U_0$  coïncident, et l'adhérence de  $H$  dans  $\mathcal{G}$  est finie et plate sur  $\overline{U}_0$ . Il existe une donnée de descente de  $\mathcal{G}$  relative au groupoïde étale  $R_0 \rightrightarrows U_0$ . Comme  $\overline{R}_0$  est obtenu par normalisation de  $\overline{U}_0 \times \overline{U}_0$  dans  $R_0$ , la proposition **5.1.1.4** fournit une donnée de descente de  $\mathcal{G}$  relative au groupoïde étale  $\overline{R}_0 \rightrightarrows \overline{U}_0$ . Ainsi,  $\mathcal{G}$  descend en un schéma semi-stable sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0} = [\overline{U}_0/\overline{R}_0]$ .  $\square$

**Remarque 5.2.2.** — Nous n'avons pas eu besoin de la construction de Mumford semi-stable. Elle servirait à construire des compactifications de  $\mathcal{G}$  à la manière de [FC90, ch. VI].

### 5.3. Prolongement en niveau principal

Soient  $n \geq 3$  un entier et  $\Sigma$  une décomposition de  $C(X)$ . Notons  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  la compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,n}$  associée à  $\Sigma$  et  $G$  le schéma semi-abélien canonique sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ . Le schéma  $G$  étend donc le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,n}$ . D'après [FC90, para. IV.6], les cartes

locales formelles de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  paramètrent les diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \tilde{G} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \frac{1}{n}Y & & \end{array}$$

ainsi que les structures de niveau principal sur  $\tilde{G}$ . En particulier, ces cartes locales formelles paramètrent des doubles motifs de Mumford. On démontre la proposition suivante de manière complètement analogue au théorème 5.2.1.

**Proposition 5.3.1.** — *Il existe un unique schéma semi-stable  $\mathcal{G}$  sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  dont la composante neutre est  $G$ , qui coïncide avec  $G$  au-dessus de  $\mathcal{A}_{g,n}$ , et tel que le groupe de  $n$ -torsion  $\mathcal{G}[n]$  soit fini et plat sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ .*

#### 5.4. Contre-exemple dans les cas non-Klingen

Supposons  $g \geq 2$ . Nous montrons que le drapeau universel  $H_\bullet$  sur  $\mathcal{A}_{g,0}$  ne s'étend jamais en un drapeau de groupes finis et plats sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  lorsque  $\mathcal{A}_{g,0}$  est une variété de Siegel de type parahorique  $\mathcal{D} \neq \{1\}$  et  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . En particulier, il n'existe pas de schéma semi-stable sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  qui étende le schéma abélien universel et dans lequel l'adhérence de  $H_\bullet$  soit finie et plate sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ . En fait, un tel prolongement n'existe pas même après changement de base à  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ .

Soient  $\ell \neq p$  un nombre premier et  $2 \leq d \leq g$  un entier. Soit  $B \in \text{Mat}_g(\mathbb{Z})$  une matrice symétrique définie positive telle que  $B \cdot \varepsilon_g$  soit congru à  $\varepsilon_1$  modulo  $p$ , où  $(\varepsilon_i)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{Z}^g$ . Soit  $b \in \text{Mat}_g(\mathbb{Q}_\ell)$  une matrice symétrique de valuation  $\ell$ -adique égale à  $B$ . La matrice  $b$  induit un 1-motif de Mumford positif principalement polarisé  $[\mathbb{Z}^g \rightarrow \mathbb{G}_m^g]$  sur l'objet

$$(\text{Spec}(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_\ell) \longleftarrow \text{Spec}(\mathbb{F}_\ell))$$

de  $\text{OuvComp}$ . Elle induit donc un schéma  $G$  semi-abélien sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_\ell)$  qui est abélien principalement polarisé sur  $\text{Spec}(\mathbb{Q}_\ell)$  et isomorphe à  $\mathbb{G}_m^g$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{F}_\ell)$ . Soit  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_\ell$ . Notons  $\Gamma$  le groupe de Galois de  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell$ . Le groupe  $G_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}[p]$  des points de  $p$ -torsion de  $G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$  est une  $\mathbb{F}_p$ -représentation symplectique de  $\Gamma$  de dimension  $2g$ . Nous présentons désormais les matrices de taille  $2g \times 2g$  par blocs de taille  $g \times g$ . Il existe une base  $(e_i)_i$  de  $G_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}[p]$  dans laquelle la matrice de la forme symplectique est

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

et dans laquelle l'action de  $\Gamma$  prend la forme

$$\begin{pmatrix} \chi \cdot \text{Id} & * \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix},$$

où  $\chi$  désigne le caractère cyclotomique *modulo*  $p$ . L'action du sous-groupe d'inertie de  $\Gamma$  est donnée par la matrice du logarithme de monodromie; d'après [FC90, prop. III.7.3], elle vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\overline{B}$  désigne la réduction de  $B$  modulo  $p$ . Le sous-espace

$$H = \left( \bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathbb{F}_p \cdot e_i \right) \oplus \mathbb{F}_p \cdot e_{2g}$$

de  $G_{\mathbb{Q}_\ell}[p]$  est totalement isotrope de dimension  $d$ . Il est stable par  $\Gamma$  mais le sous-groupe d'inertie de  $\Gamma$  n'agit pas trivialement sur  $H$ . Le groupe  $H$  fini étale sur  $\text{Spec}(\mathbb{Q}_\ell)$  ne se prolonge donc pas en un groupe fini étale sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_\ell)$ . Comme  $\ell \neq p$ , il ne se prolonge pas non plus en un groupe fini et plat sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_\ell)$ .

Posons  $\mathcal{D} = \{d\}$ , notons  $\mathcal{A}_{g,0}$  la variété de Siegel associée et  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Le schéma abélien  $G_{\mathbb{Q}_\ell}$  et le sous-groupe  $H$  induisent un morphisme de  $\text{Spec}(\mathbb{Q}_\ell)$  dans  $\mathcal{A}_{g,0}$ , qui s'étend en un morphisme de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_\ell)$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  par la proposition 3.2.8.1. On en déduit que le sous-groupe universel sur  $\mathcal{A}_{g,0}$  ne s'étend pas en un groupe fini et plat sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ . En effet, l'image inverse d'un prolongement éventuel par le morphisme  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  serait un prolongement de  $H$ .

Soit  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_s\}$  un ensemble ordonné non vide quelconque distinct de  $\{1\}$ . On a  $d_s > 1$  et le raisonnement précédent montre que le sous-groupe universel  $H_s$  ne se prolonge jamais à  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  lorsque  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  est une compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,0}$ . Il en est donc de même du drapeau  $H_\bullet$ .

## CHAPITRE 6

### APPENDICE : EXISTENCE DU SOUS-GROUPE CANONIQUE

Le champ  $\mathcal{A}_{g,0}$  associé à  $\mathcal{D} = \{g\}$  paramètre les variétés abéliennes principalement polarisées munies d'un sous-groupe lagrangien de  $p$ -torsion. Notons  $\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  le lieu ordinaire-multiplicatif de  $\mathcal{A}_{g,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ ; c'est par définition le sous-schéma ouvert de  $\mathcal{A}_{g,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  sur lequel le schéma abélien universel est ordinaire et où le sous-groupe lagrangien universel est égal au noyau du morphisme de Frobenius. Notons de même  $\mathcal{A}_g^{\text{ord}}$  le lieu ordinaire de  $\mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ . L'oubli du niveau induit un isomorphisme de  $\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  sur  $\mathcal{A}_g^{\text{ord}}$ ; l'application réciproque associe à une variété abélienne ordinaire le noyau du morphisme de Frobenius. Nous étendons ce résultat aux compactifications toroïdales, et en déduisons une nouvelle démonstration de l'existence du sous-groupe canonique pour des familles de variétés abéliennes ([AM04] et [AG07]), selon une idée de Vincent Pilloni.

#### 6.1. Lieu ordinaire des compactifications

Soit  $\Sigma$  une décomposition polyédrale admissible de  $C(X)$ . On note  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  et  $\overline{\mathcal{A}}_g$  les compactifications toroïdales de  $\mathcal{A}_{g,0}$  et  $\mathcal{A}_g$  qui lui sont associées. D'après le théorème 3.1.8.3, il existe un morphisme de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_g$  qui étend l'oubli du niveau. Soit  $S$  le spectre d'un corps de caractéristique  $p$ .

**Définition 6.1.1.** — Un schéma semi-abélien sur  $S$  est ordinaire s'il est extension d'une variété abélienne ordinaire par un tore.

Notons  $G$  le schéma semi-abélien canonique sur  $\overline{\mathcal{A}}_g$  et  $H$  le sous-groupe quasi-fini et plat canonique sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ . Notons

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$$

le sous-schéma ouvert de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  sur lequel  $G$  est ordinaire et  $H$  est égal au noyau du morphisme de Frobenius  $\text{Frob}_G$  de  $G$ . Notons de même

$$\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}}$$

le sous-schéma ouvert de  $\overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  sur lequel  $G$  est ordinaire.

**Remarque 6.1.2.** — Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_\Sigma$ . Réutilisons les notations des paragraphes 3.2 et 3.2. Notons  $f$  l'isogénie universelle entre 1-motifs universels sur  $\mathcal{M}_{V',\sigma,0}$ . Le sous-schéma

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$$

rencontre la  $\sigma$ -strate de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  si et seulement si le noyau de  $f$  est égal à partie semi-abélienne, ce qui signifie  $W_1(\text{Ker}(f)) = \text{Ker}(f)$ . On peut reformuler cette condition en disant que  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^0$  et  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^1$  ont même image dans  $V/V'_\sigma{}^\perp$ .

La catégorie fibrée à la frontière ( $\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$ ) vérifie une propriété modulaire analogue à celle de ( $\mathcal{A}_{g,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ ), donnée par la proposition 3.2.8.1. Soit  $(U \hookrightarrow S)$  un objet de Ouv tel que  $S$  soit un schéma sur  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ .

**Proposition 6.1.3.** — *Le groupoïde  $(\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}})$  ( $U \hookrightarrow S$ ) paramètre les objets  $G'$  de  $\mathcal{A}_g^{\text{ord}}(U)$  tels que  $G'$  s'étend en un schéma semi-abélien ordinaire sur  $S$ , et tels que localement pour la topologie étale de  $S$ , il existe*

- $V' \in \mathfrak{C}$  tel que  $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}^0/V'^\perp = \mathbb{V}_{\mathcal{D}}^1/V'^\perp$ ,
- une surjection  $V/V'^\perp \rightarrow \underline{X}(G')$ ,
- $\sigma \in \mathfrak{S}_\Sigma$  dont l'adhérence contient la forme bilinéaire  $p_D \circ \underline{B}(G', \text{Ker}(\text{Frob}_{G'}))$  pour tout diviseur irréductible réduit  $D$  de  $S$ .

Par conséquent, le morphisme de  $\mathcal{A}_g^{\text{ord}}$  dans  $\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  induit par le noyau du morphisme de Frobenius s'étend en un morphisme

$$\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}.$$

Par densité de  $\mathcal{A}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  et de  $\mathcal{A}_g^{\text{ord}}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}}$ , ce morphisme est l'inverse du morphisme d'oubli du niveau. Ainsi, les schémas  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\text{ord-mult}}$  et  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}}$  sont isomorphes.

## 6.2. Surconvergence du tube

Notons  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{for}}$  le complété formel de  $\overline{\mathcal{A}}_g$  le long de  $\overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ , notons  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{rig}}$  la fibre générique rigide du schéma formel  $p$ -adique  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{for}}$ , et notons  $T$  le tube de  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{ord}}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{rig}}$ . Enfin, notons  $G$  le schéma semi-abélien canonique sur  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{rig}}$ .

**Théorème 6.2.1.** — *Il existe un voisinage strict  $U$  de  $T$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\text{rig}}$  et un sous-groupe fini, plat et lagrangien  $H$  de  $G_U[p]$  tel que  $H_T$  soit le relèvement du noyau du morphisme de Frobenius.*



*Démonstration.* — Les arguments de la partie 6.1 montrent l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overline{\mathcal{A}}_{g,0} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{for}} \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow u \\
 \overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{for}}
 \end{array}$$

où  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{for}}$  désigne le complété formel de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  le long de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ . Le morphisme  $u$  est propre. D'après [Mum72a, lem. 4.18] et [Gör03], il réalise un isomorphisme sur un voisinage de  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}}$ . En particulier,  $u$  est étale sur un voisinage de  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}}$ . On note  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{rig}}$  l'espace rigide associé à  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$  et  $T_0$  le tube de  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{rig}}$ . En appliquant [Be96, th. 1.3.5], on obtient l'existence d'un voisinage strict  $U_0$  (resp.  $U$ ) de  $T_0$  (resp. de  $T$ ) dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{rig}}$  (resp.  $\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{rig}}$ ) tels que  $u$  induise un isomorphisme

$$u : U_0 \xrightarrow{\sim} U.$$

L'application réciproque définit le sous-groupe lagrangien recherché sur  $U$ .  $\square$

Ainsi, les variétés abéliennes paramétrées par  $U \cap \mathcal{A}_g^{\mathrm{rig}}$  admettent un sous-groupe canonique. On obtient un résultat moins précis que ceux de [AM04] et [AG07], car il ne donne pas de condition suffisante pour qu'une variété abélienne admette un sous-groupe canonique. Toutefois, il suffit pour la plupart des applications aux formes modulaires de Siegel  $p$ -adiques.



## CHAPITRE 7

### APPENDICE : RELÈVEMENT DE FORMES MODULAIRES DE SIEGEL

Dans cet appendice, nous montrons que certaines formes modulaires de Siegel *modulo*  $p$  pour  $\mathcal{A}_{g,n}$  admettent des relèvements en caractéristique nulle — ce problème n’a donc aucun lien avec la mauvaise réduction. Nos résultats généralisent aux cas des formes cuspidales de genre 2 et 3 le théorème [Kat73, th. 1.7.1] obtenu par Katz pour les formes de genre 1. Nous utilisons des résultats de Shepherd-Barron [SB06] et de Hulek et Sankaran [HS04], ainsi que des théorèmes d’annulation de la cohomologie cohérente dûs à [DI87] et [EV92].

#### 7.1. Énoncé du théorème

Soient  $g \geq 2$  et  $k \in \mathbb{Z}$  deux entiers,  $n \geq 3$  un entier non divisible par  $p$  et  $M$  un  $\mathbb{Z}[1/n]$ -module. D’après [FC90, th. IV.6.7], il existe une compactification toroïdale  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  de  $\mathcal{A}_{g,n}$  et un schéma semi-abélien  $G$  sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  qui étend le schéma abélien universel sur  $\mathcal{A}_{g,n}$ . Notons  $\omega$  le faisceau inversible sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  des  $g$ -formes différentielles invariantes de  $G$ . Le principe de Köcher [FC90, prop. V.1.8] affirme que la restriction de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  à  $\mathcal{A}_{g,n}$  induit un isomorphisme

$$H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n}, \omega^k \otimes M) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{A}_{g,n}, \omega^k \otimes M) .$$

En particulier, le groupe  $H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n}, \omega^k \otimes M)$  est indépendant du choix de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ ; on appelle ses éléments les formes modulaires de genre  $g$ , de niveau  $n$ , de poids  $k$  et à coefficients dans  $M$ .

Notons  $D$  le complémentaire de  $\mathcal{A}_{g,n}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  et munissons-le de sa structure schématique réduite. On dit qu’une forme modulaire est *cuspidale* si elle s’annule sur  $D$ . Notons

$$\text{Cusp}(n, k, M) = H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n}, \omega^k(-D) \otimes M)$$

le groupe des formes cuspidales. D’après [FC90, prop. V.1.9], il ne dépend pas du choix de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ . Si  $M$  est un anneau, on a

$$\text{Cusp}(n, k, M) = H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n} \times \text{Spec}(M), \omega^k(-D)) .$$

**Théorème 7.1.1.** — Supposons  $g = 2$  ou  $3$  et  $k > g + 1$ . Si  $g = 2$ , supposons que  $M$  est un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2n}]$ -module, et si  $g = 3$  supposons que  $M$  est un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{30n}]$ -module. Le morphisme naturel de changement de base induit un isomorphisme

$$M \otimes \text{Cusp}(n, k, \mathbb{Z}[1/n]) \xrightarrow{\sim} \text{Cusp}(n, k, M).$$

Le corollaire suivant montre l'existence de relèvements en caractéristique 0 de formes modulaires cuspidales de caractéristique  $p$ . Il se déduit du théorème 7.1.1 en posant  $M = \mathbb{F}_p$  pour tout nombre premier  $p$  qui ne divise pas  $n$ .

**Corollaire 7.1.2.** — Soient  $n \geq 3$ ,  $g = 2$  ou  $3$ , et  $k > g + 1$  trois entiers. Si  $g = 2$ , supposons  $p > 2$  et si  $g = 3$ , supposons  $p > 5$ . Le morphisme de changement de base induit un isomorphisme

$$\mathbb{F}_p \otimes \text{Cusp}(n, k, \mathbb{Z}[1/n]) \xrightarrow{\sim} \text{Cusp}(n, k, \mathbb{F}_p).$$

Nous montrons également qu'il n'existe pas de forme modulaire de genre 2 ou 3 et de poids strictement négatif.

## 7.2. Amplitude et annulation

Dans cette partie, nous rappelons brièvement les résultats utilisés dans la démonstration du théorème 7.1.1.

*Compactifications toroïdales.* — Notons  $B$  le  $\mathbb{Z}$ -module des formes bilinéaires symétriques entières sur  $\mathbb{Z}^g$  et  $C$  le cône de  $B \otimes \mathbb{R}$  des formes bilinéaires semi-définies positives à radical rationnel. Les compactifications toroïdales de  $\mathcal{A}_{g,n}$  sont associées à des décompositions polyédrales admissibles  $\text{GL}_g(\mathbb{Z})$ -équivariantes de  $C$  [FC90, déf. IV.2.2]. Considérons une telle décomposition  $\Sigma$  et notons  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  la compactification toroïdale qui lui est associée. L'espace algébrique  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  est propre sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ , est lisse si et seulement si  $\Sigma$  est lisse [FC90, déf. IV.2.3], et est un schéma projectif si  $\Sigma$  est polarisée [FC90, déf. 2.4 et th. V.5.8]. Notons  $D$  le complémentaire de  $\mathcal{A}_{g,n}$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ , et munissons-le de sa structure de schéma réduit. Il définit un diviseur de Cartier de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  qui est à croisements normaux si  $\Sigma$  est lisse. Notons  $\{f_i\}$  un système d'équations locales de  $D$  dans  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ . Comme les éventuelles singularités de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$  sont toriques, le faisceau

$$\Omega_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n}}^1(\log D) = \Omega_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n}}^1 \left( \frac{df_i}{f_i} \right)$$

est localement libre. D'après [FC90, th. IV.6.7], l'application de Kodaira-Spencer induit un isomorphisme

$$\text{Sym}^2(\omega) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n}}^1(\log D).$$

Notons  $\mathcal{K} = \det \left( \Omega_{\overline{\mathcal{A}}_{g,n}}^1 \right)$  le faisceau dualisant de  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ . L'isomorphisme de Kodaira-Spencer induit un isomorphisme  $\omega^{g+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}(D)$ .

*Décompositions de Voronoï.* — Voronoï a construit deux décompositions polyédrales admissibles de  $C$  [Vor08]. L'une d'entre-elles est appelée *décomposition du cône parfait* ou *première décomposition de Voronoï*, et l'autre *seconde décomposition de Voronoï*. Igusa a construit une troisième décomposition de  $C$ , dite *du cône central* [HS04]. Ces trois décompositions coïncident si  $g = 2$  ou  $3$  [HS04, p. 660]. De plus, elles sont lisses si  $g = 2$  ou  $3$  [SB06, th. 8.9.1]. Si  $g = 4$ , la seconde décomposition de Voronoï est lisse [HS04, p. 661] et raffine la décomposition du cône parfait [HS04, p. 660].

*Amplitude du fibré de Hodge.* — Notons  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}}$  la compactification toroïdale de  $\mathcal{A}_{g,n}$  associée à la décomposition du cône parfait, et notons  $D^{\text{parf}}$  son bord réduit. Le schéma

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}}$$

est lisse si  $g = 2$  ou  $3$ , et  $D^{\text{parf}}$  est un diviseur à croisements normaux. Soit  $a$  un entier relatif. D'après [SB06, th. 4.1], le faisceau  $\omega^a(-D^{\text{parf}})$  est ample sur  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}}$  si et seulement si  $a > 12/n$ . Remarquons que ce résultat d'amplitude a d'abord été établi par Hulek et Sankaran [HS04] dans les cas particuliers  $g = 2$  et  $3$  considérés dans la suite de ce texte. Cependant, contrairement à Shepherd-Barron, ils n'énoncent leur théorème que sur  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ .

*Théorème de Kodaira.* — Soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ . Donnons-nous un schéma  $X$  propre et lisse purement de dimension  $d$  sur  $\text{Spec}(k)$ , un diviseur à croisements normaux  $D$  de  $X$ , et un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$ . Notons  $W_2(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt de longueur 2 de  $k$  et supposons que  $X$ ,  $D$  et  $\mathcal{L}$  se relèvent à  $\text{Spec}(W_2(k))$ .

Supposons également qu'il existe un entier  $\nu_0$  tel que  $\mathcal{L}^\nu(-D)$  soit ample pour tout  $\nu > \nu_0$ . D'après [EV92, prop. 11.5], on a

$$(7.2.0.A) \quad H^j(X, \Omega_{X/k}^i(\log D) \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$$

pour  $i + j < \inf(d, p)$ . On déduit par dualité de Serre que si  $p \geq d$ , on a

$$(7.2.0.B) \quad H^j(X, \mathcal{K}_{X/k} \otimes \mathcal{L}) = 0$$

pour tout  $j > 0$ , où  $\mathcal{K}_{X/k} = \Omega_{X/k}^d$  désigne le faisceau dualisant de  $X$ .

**Remarque 7.2.1.** — L'assertion (7.2.0.A) est une version faible mais valable sur  $k$  du théorème de Kawamata-Viehweg pour les diviseurs nef [EV92, coro. 5.12.c], qui n'est démontré pour l'instant que sur  $\mathbb{C}$ . Le théorème de Kawamata-Viehweg sur  $k$  résulterait de l'assertion (7.2.0.A) et d'une éventuelle résolution des singularités des schémas de type fini sur  $k$ . Nous renvoyons à [EV92, rem. 11.6.b] pour plus de détails.

### 7.3. Démonstration du théorème

La formation de la cohomologie cohérente commute aux limites inductives sur un schéma quasi-cohérent. Il suffit donc de démontrer le théorème 7.1.1 pour  $M$  de type fini sur  $\mathbb{Z}[1/n]$ ,

puis pour  $M = \mathbb{F}_p$  avec  $p > 2$  si  $g = 2$  et  $p > 5$  si  $g = 3$ . Ainsi, il suffit de prouver que le morphisme de changement de base induit un isomorphisme

$$\mathbb{F}_p \otimes H^0 \left( \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}}, \omega^k(-D^{\text{parf}}) \right) \xrightarrow{\sim} H^0 \left( \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p), \omega^k(-D^{\text{parf}}) \right)$$

pour  $k > 1 + g$ . D'après [ÉGA 3 7.5.3 et 7.7], il suffit de démontrer que

$$H^1 \left( \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p), \omega^k(-D^{\text{parf}}) \right) = 0.$$

Le schéma  $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  est propre et lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$  si  $g = 2$  ou  $3$ . Il est purement de dimension  $g(g+1)/2$  et se relève à  $\text{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ . De même,  $D^{\text{parf}}$  est un diviseur à croisements normaux qui se relève à  $\text{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ . Notons  $\mathcal{L}$  le faisceau inversible  $\omega^{k-1-g}$  sur

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p),$$

qui se relève également à  $\text{Spec}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ . D'après [SB06, th. 4.1],  $\mathcal{L}^\nu(D^{\text{parf}})$  est ample sur

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}}$$

pour tout  $\nu > 12/n(k-1-g)$ . D'après (7.2.0.B), on a

$$H^1 \left( \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p), \mathcal{K} \otimes \mathcal{L} \right) = 0$$

car  $p \geq g(g+1)/2$ . On conclut la démonstration du théorème 7.1.1 en remarquant que

$$\mathcal{K} \otimes \mathcal{L} = \omega^k(-D^{\text{parf}}).$$

**Remarque 7.3.1.** — Soit  $X$  un schéma propre et lisse purement de dimension  $d$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ , soit D'après [EV92, coro. 6.4], on a

$$H^j \left( X, \omega_{X/k}^i(-D) \otimes \mathcal{L}^{-1} \right) = 0$$

pour  $i+j < d$ . On pourrait démontrer un théorème analogue pour les schémas sur  $\mathbb{F}_p$  si l'on connaissait la résolution des singularités en caractéristique  $p$ . On en déduirait le relèvement en caractéristique nulle de formes modulaires de Siegel non nécessairement cuspidales.

Montrons à présent qu'il n'existe pas de forme modulaire de Siegel de genre  $\leq 3$  et de poids  $< 0$  sur  $\mathbb{F}_p$ . En effet, il suffit de poser

$$X = \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}},$$

$i = 0, j = 0$  et  $\mathcal{L} = \omega^{-k}$  dans (7.2.0.A) pour démontrer le résultat suivant.

**Proposition 7.3.2.** — Pour tous  $2 \leq g \leq 3$  et  $k < 0$ , on a  $H^0(\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{parf}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p), \omega^k) = 0$ .

#### 7.4. Cas du genre quatre

On aimerait prouver un énoncé de changement de base analogue au théorème 7.1.1 dans le cas où  $g = 4$ . Comme la décomposition du cône parfait n'est plus lisse, on ne peut pas appliquer le théorème d'annulation de Kodaira à  $\overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{parf}}$ . En revanche, la seconde décomposition de Voronoï est lisse et raffine la décomposition du cône parfait d'après [HS04, p. 661]. Notons

$$\overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{Vor}}$$

la compactification toroïdale associée à la seconde décomposition de Voronoï. Il existe un morphisme propre et birationnel

$$\pi : \overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{Vor}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{parf}}$$

induit par les raffinements entre décompositions. Notons  $E$  le diviseur exceptionnel de  $\pi$ , qui est de support  $D^{\text{Vor}}$ . En combinant le théorème 1.8, la remarque 1.9 et le corollaire 1.11 de [HS04], on peut montrer que  $\omega^a(-bD^{\text{Vor}} - cE)$  est ample sur

$$\overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{Vor}}$$

si et seulement si  $a > \frac{12b}{n}$  et  $c > 4b > \frac{8}{9}c$ . Par exemple, si  $a > 36/n$  alors

$$\omega^a(-3D^{\text{Vor}} - 13E)$$

est ample sur  $\overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{Vor}}$ . On peut appliquer le théorème de Kodaira à la variété propre et lisse

$$\overline{\mathcal{A}}_{4,n}^{\text{Vor}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

pour relever en caractéristique nulle des formes de Siegel de genre 4, de niveau  $> 36$ , de poids  $> 5$ , à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , qui s'annulent suffisamment sur  $D^{\text{Vor}}$ . L'ordre d'annulation requis est au moins 2 et on peut le déterminer en calculant explicitement  $E$ .





## CHAPITRE 8

### BIBLIOGRAPHIE

- [AG07] F. ANDREATTA & C. GASBARRI – « The canonical subgroup for families of abelian varieties », *Compositio Mathematica* **143** (2007), n° 3, p. 566–602.
- [AM04] A. ABBÈS & A. MOKRANE – « Sous-groupes canoniques et cycles évanescents  $p$ -adiques pour les variétés abéliennes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **99** (2004), p. 117–162.
- [AMRT] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT & Y. TAI – *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, Lie Groups : History, Frontiers and Applications, vol. IV (1975), Math. Sci. Press, Brookline, MA.
- [Art69] M. ARTIN – « Algebraic approximation of structures over complete local rings », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **36** (1969), p. 23–58.
- [Be96] P. BERTHELOT – « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre », *prépublication IRMAR* (1996).
- [Ber08] C. BERTOLIN – « Multilinear morphisms between 1-motives » (2008), accepté pour publication dans *J. Reine Angew. Math.*
- [Bou61] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Fascicule XXVIII. Algèbre commutative. Chapitre 3 : Graduations, filtrations et topologies. Chapitre 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire*, Actualités Scientifiques et Industrielles **1293** (1961), Hermann, Paris.
- [Bre83] L. BREEN – *Fonctions theta et théorème du cube*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 980 (1983), Springer-Verlag, Berlin.
- [Del74] P. DELIGNE – « Théorie de Hodge. III », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **44** (1974), p. 5–77.
- [DI87] P. DELIGNE & L. ILLUSIE – « Relèvements modulo  $p^2$  et décomposition du complexe de De Rham », *Invent. Math.* **89** (1987), n° 2, p. 247–270.

- [Jo93] A. J. DE JONG – « The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with  $\Gamma_0(p)$ -level structure », *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), n° 4, p. 667–688.
- [EV92] H. ESNAULT & E. VIEHWEG – *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, vol. 20 (1992), Birkhäuser, Bâle.
- [FC90] G. FALTINGS & C.-L. CHAI – *Degeneration of abelian varieties*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 22 (1990), Springer, Berlin.!
- [Gab92] O. GABBER – «  $K$ -theory of Henselian local rings and Henselian pairs », in *Algebraic  $K$ -theory, commutative algebra, and algebraic geometry*, *Contemp. Math.*, vol. 126 (1992), Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 59–70.
- [GN02] A. GENESTIER & B. C. NGÔ – « Alcôves et  $p$ -rang des variétés abéliennes », *Ann. Inst. Fourier* **52** (2002), n° 6, p. 1665–1680.
- [Gör01] U. GÖRTZ – « On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL-type », *Math. Ann.* **321** (2001), n° 3, p. 689–727.
- [Gör03] U. GÖRTZ – « On the flatness of local models for the symplectic group », *Adv. Math.* **176** (2003), n° 1, p. 89–115.
- [HS04] K. HULEK & G. K. SANKARAN – « The nef cone of toroidal compactifications of  $\mathcal{A}_4$  », *Proc. London Math. Soc.* **88** (2004), n° 3, p. 659–704.
- [Kat73] N. M. KATZ – «  $p$ -adic properties of modular schemes and modular forms », in *Modular functions of one variable III*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 350 (1973), Springer, Berlin, p. 69–190.
- [KKMSD] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD & B. SAINT-DONAT – *Toroidal embeddings I*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 339 (1973), Springer, Berlin.
- [Lan08] K.-W. LAN – « Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties », thèse de doctorat (2008).
- [MB85] L. MORET-BAILLY – « Pinceaux de variétés abéliennes », *Astérisque* **129** (1985), Soc. Mat. Fr., Paris, p. 266.
- [MF94] D. MUMFORD & J. FOGARTY – *Geometric invariant theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, n° 34 (1994), Springer-Verlag, Berlin.
- [Mum70] D. MUMFORD – *Abelian varieties*, *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*, vol. 5 (1970), Bombay.
- [Mum72a] D. MUMFORD – « An analytic construction of degenerating curves over complete local rings », *Compositio Math* **24** (1972), n° 2, p. 129–174.

- [Mum72b] D. MUMFORD – « An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings », *Compositio Math.* **24** (1972), n° 3, p. 239–272.
- [Pin90] R. PINK – *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse de doctorat, Bonner Mathematische Schriften **209** (1990), Universität Bonn, Bonn.
- [Ray70] M. RAYNAUD – *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 119 (1970), Springer, Berlin.
- [Ray92] M. RAYNAUD – « Book review : Degeneration of abelian varieties by G. Faltings and C.L. Chai », *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), n° 1, p. 183–189.
- [Ray94] M. RAYNAUD – « 1-motifs et monodromie géométrique », in *Périodes  $p$ -adiques*, *Astérisque* **223** (1994), p. 295–319, Soc. Mat. Fr., Paris.
- [SB06] N. I. SHEPHERD-BARRON – « Perfect forms and the moduli space of abelian varieties », *Invent. Math.* **163** (2006), n° 1, p. 25–45.
- [Ser60] J. P. SERRE – « Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon 3 », appendice à l'exposé de A. Grothendieck *Techniques de construction en géométrie analytique, X. Construction de l'espace de Teichmüller*, Séminaire Henri Cartan **1961**.
- [Swa98] R. G. SWAN – « Néron-Popescu desingularization », in *Algebra and geometry*, Lect. Algebra Geom., vol. 2 (1998), Int. Press, Cambridge, MA, p. 135–192.
- [Vor08] G. VORONŌĬ – « Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques », premier mémoire : sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites *J. Reine Angew. Math* **133** (1908), p. 79–178.
- [Yu04] C.-F. YU – « Irreducibility of the Siegel moduli spaces with parahoric level structure », *Int. Math. Res. Not.* **48** (2004), p. 2593–2597.

Dans cette thèse, nous construisons des compactifications des variétés modulaires de Siegel en leurs places de mauvaise réduction de type parahorique. Nous construisons tout d'abord des compactifications toroïdales, qui sont relativement explicites et dont l'on contrôle les singularités. Ces compactifications ne sont pas canoniques, mais dépendent d'un choix combinatoire. L'étape essentielle de la construction est une approximation des variétés abéliennes de Mumford qui préserve un sous-groupe de torsion. Cette approximation nous permet de recoller les différentes cartes locales des compactifications. Nous utilisons ces résultats pour construire les compactifications minimales, qui sont canoniques, mais moins explicites et plus singulières. Nous donnons comme application une nouvelle preuve de l'existence du sous-groupe canonique pour les variétés abéliennes.

---

### **Compactifications of Siegel varieties at bad reduction places**

In this thesis, we construct compactifications of Siegel modular varieties at bad reduction places of parahoric type. We first construct the toroidal compactifications, which are quite explicit and whose singularities are controlled. These compactifications are not canonical, but depend on some combinatorial choice. The main point in our construction is an approximation of Mumford degenerating abelian varieties that preserves a torsion subgroup. This allows us to glue together the different local charts of the compactifications. We use these results to construct the minimal compactifications, which are canonical but less explicit and more singular. As an application, we give a new proof of the existence of the canonical subgroup for abelian varieties.

---

**Discipline :** Mathématiques

**Mots-clés :** variétés abéliennes, variétés modulaires de Siegel, structures de niveau parahoriques, mauvaise réduction, compactifications toroïdales, compactifications minimales, sous-groupe canonique.

---

**Subject :** Mathematics.

**Keywords :** abelian varieties, Siegel modular varieties, parahoric level structures, bad reduction, toroidal compactifications, minimal compactifications, canonical subgroup.